

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Espacios-tiempos como Variedades Estadísticas

por

Diego Domínguez Rivas

Director de Tesis

Dr. César Simón López Monsalvo

Tesis para obtener el título de Físico

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Abril 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

I, Datos del Alumno:

- Domínguez Rivas Diego
- 53552368
- Universidad Nacional Autónoma de México
- Facultad de Ciencias
- Física
- 310023209

II, Datos del Tutor:

Dr. César Simón López Monsalvo

III, Datos del Sinodal 1:

Dr. Hernando Quevedo Cubillos

IV, Datos del Sinodal 2:

Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar

V, Datos del Sinodal 3:

Dr. Alessandro Bravetti

VI, Datos del Sinodal 4:

Dr. Francisco Nettel Rueda

IV, Datos del Trabajo Escrito:

- Espaciotiempos Como Variedades Estadísticas
- 69 p
- 2018

... In this world of a million religions everyone prays the same way...

The Kinslayer, Nightwish

Agradecimientos

Empezaré por agradecer a mis padres: Aurora y Mario, por todo su apoyo y cariño a lo largo de todos estos años. Ellos son mi soporte principal para esforzarme cada día. Igualmente, considero un honor mencionar a mi hermano Iván quien ha estado conmigo incondicionalmente y en todo momento. Él me escuchó cuando necesitaba aclarar mis ideas o simplemente necesitaba platicar sobre algún concepto que no comprendía. Inclusive, se tomó el tiempo de leer esta tesis y me obsequió consejos en cuanto a redacción y ortografía de la misma, te agradezco todo el apoyo. No obstante, cualquier error de esta índole es completamente mío.

También, me gustaría agradecer a mi tutor, César, quien con su infinita paciencia y su gran conocimiento en física y matemáticas me ha guiado de una forma única a lo largo de mi formación como físico. Además, agradezco de antemano a los sinodales: Hernando Quevedo, Juan Carlos Hidalgo, Alessandro Bravetti y Francisco Nettel; cuyas recomendaciones, correcciones y aportes serán de suma importancia. De igual modo, quisiera mencionar a la persona que sigue formando parte de mi formación matemática, Rocío Vite, cuyas clases y consejos han formado raíces sólidas para seguir aprendiendo.

Finalmente, pero no menos importante, me gustaría agradecer a mis amigos a quienes mencionaré en orden cronológico: Uriel (Hongo), Scarlet, Tonatiuh, Javier (Yépez), Alinne, Jorge (Torrado), Diego, Marcos, Carolina (Lilo), Pablo, Karen, Monse (Dory), Miguel, Jaime, Edit, Adán (Chino) y Jesús (Baby Face). Quienes me han conocido en las buenas, en las malas y sediento. Gracias por su amor, comprensión y ternura.

Diego Domínguez Rivas
2018

Diego ☺

Índice

Hoja de Datos del Jurado	I
Agradecimientos	III
Índice	IV
1. Introducción	1
2. Relatividad General	4
2.1. Variedades Riemannianas	4
2.2. Mapeos	12
2.2.1. Ejemplo: El plano de Lobachevsky	13
2.3. Ecuaciones de Campo	14
2.4. Soluciones Máximamente Simétricas	16
3. Termodinámica Geométrica	19
3.1. Variedades de Contacto	19
3.2. Subvariedades de Legendre	20
4. Variedades Estadísticas	24
4.1. Geometría de Contacto a partir de la física estadística	25
4.2. Variedades Estadísticas	31
4.3. Gas Ideal Clásico a Modo de Ejemplo	35
5. Espaciotiempos Como Variedades Estadísticas	37
5.1. Potenciales para AdS	37
5.2. Anti de Sitter en coordenadas conformes	38

5.3. AdS y la Familia de Distribuciones Normales	40
5.3.1. AdS Euclídeo	41
5.3.2. El Espaciotiempo AdS	42
5.4. Distribución Normal Correlacionada	45
5.5. Geodésicas en Anti de Sitter	46
6. Conclusiones	49
A. Mecánica Hamiltoniana	51
A.1. Variedades Simpléticas	51
A.2. Vectores Hamiltonianos	52
A.3. Flujos de fase Hamiltonianos	52
A.4. Álgebras de Lie	53
A.5. Resultados en las coordenadas de Darboux	56
A.6. Subvariedades Lagrangianas	60
A.7. Péndulo simple a modo de ejemplo	61
B. Vectores Hamiltonianos en la estructura de contacto	64

1

Introducción

intro

¿ Es la gravitación un fenómeno emergente? Esta pregunta tiene un sentido especialmente ambiguo. En esta tesis, nos ocuparemos de dar un contexto específico a esta pregunta. En particular, nos referiremos a la gravitación y no a su dinámica, es decir, no consideraremos el origen de las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo, hace poco mas de veinte años Ted Jacobson [10] propuso una conexión entre la termodinámica y la Relatividad General reescribiendo a las ecuaciones de Einstein en la forma de la primera ley de la termodinámica. Esto nos da indicios de que quizás la gravedad y la termodinámica tienen más en común de lo que se podría pensar. Además, la gravedad y la termodinámica son teorías universales, es decir, afectan a todo lo que se encuentra en el universo de la misma forma y no se puede hacer nada para evitarlo (ver [13]).

Si nos tomamos en serio la idea de que la gravedad es una teoría termodinámica y no simplemente una reformulación, entonces, se puede pensar en la gravedad como una teoría emergente y *no* fundamental. Emergente en el siguiente sentido: así como en el siglo XIX Clausius y Carnot formularon las leyes de la termodinámica sin tener conocimiento alguno de las propiedades microscópicas de los sistemas que ellos estaban describiendo. Aún con estos impedimentos, encontraron relaciones entre las variables macroscópicas sin importar las variables microscópicas, y fue hasta los trabajos de Boltzmann y Gibbs que se encontró la conexión entre las variables microscópicas y las variables macroscópicas usando la mecánica estadística en sistemas microscópicos que cumplen con tener un número muy grande de grados de libertad (el límite termodinámico). En este sentido, las propiedades como entropía, calor o temperatura emergen como resultado de tomar el límite termodinámico. Es claro que en este sentido, si una teoría B emerge de una teoría A; entonces, A (y ciertas suposiciones adicionales) implica B pero B no implica A. Con

esto en mente, podemos decir que hasta el momento tenemos a la gravitación como una teoría macroscópica de la cual no sabemos nada de la teoría microscópica, aunque hay ciertos intentos por describir la microfísica de la gravedad usando teoría de cuerdas.

Para poder entender a la gravedad como un fenómeno emergente se necesitan resolver dos problemas fundamentales. Como primer problema es explicar exactamente cómo emerge la interacción gravitacional y como segundo problema tenemos que volver emergente al espaciotiempo mismo. El primer problema ya tiene al menos una propuesta bastante prometedora. Eric Verlinde propone ver a la interacción gravitacional como una fuerza entrópica, utilizando una entropía que es proporcional al volumen, lo que quiere decir que al disminuir esta nueva entropía disminuye el volumen, generando así una fuerza que contrae la materia.

En este trabajo nos dedicaremos a encontrar alguna respuesta para el problema sobre la emergencia del espaciotiempo. Para dar una respuesta clara, debemos encontrar una forma en la que emerge el espaciotiempo de alguna teoría microscópica y así poder interpretar los conceptos de espaciotiempo sin necesidad de usar algún objeto espacial o temporal. Así pues, primero definiremos exactamente lo que entendemos por espaciotiempo. Después, se dará una pequeña introducción a la termodinámica Hamiltoniana para conocer el tipo de estructura geométrica que nos ayudará para conectar la física estadística con la emergencia del espaciotiempo.

En este sentido, se supondrá desde un principio que se conoce una teoría microscópica fundamental a la interacción gravitacional de la cual podemos obtener promedios de ciertas observables. Además, se supondrá que dicha teoría microscópica obedece la física estadística de Boltzmann-Gibbs. Con esto en mente, se obtendrá el espacio fase Termodinámico y se definirán las subvariedades de equilibrio conocidas también como subvariedades de Legendre. Es aquí cuando hacemos uso de Teoría de la Información y vemos que (al menos para distribuciones de probabilidad tipo exponencial) las variedades de equilibrio coinciden con lo que se conoce como variedades estadísticas, las cuales son variedades diferenciables cuyos puntos representan una distribución de probabilidad y cuentan con una estructura métrica bien definida conocida como la métrica de información de Fisher.

Finalmente, surge la pregunta que llevó a la realización del presente trabajo: ¿Es el espaciotiempo una variedad estadística?. Pregunta a la cual se responderá de forma clara y automática cuando se obtenga la emergencia del espaciotiempo AdS en una de estas subvariedades de equilibrio a partir de un paquete de ondas Gaussiano, inspirado en una distribución Normal del cual emerge AdS eulídeo. Dando así, una interpretación directa del espacio como promedios del momento de cierta teoría microscópica y al tiempo como

la varianza del paquete de ondas Gaussiano.

Otra propiedad importante encontrada en este trabajo fue la relación entre el tiempo comóvil de AdS y la entropía del paquete de ondas. Además, de este trabajo se puede decir que se encontró emergente al espaciotiempo AdS , el cual es máximálmente simétrico. Surgiendo la duda de como encontrar espaciotiempos tipo agujeros negros.

Se podría pensar después de un breve análisis que si ponemos algún tipo de correlación entre las variables aleatorias, quizás obtendríamos algún espaciotiempo tipo agujero negro. Sin embargo, después de hacer un caso más general usando correlaciones, se puede decir que de las distribuciones normales no se pueden obtener este tipo de espaciotiempos. No obstante, el resultado que se obtuvo, es el de una familia de variedades diferenciales cuyos escalares de Ricci, Kretschmann y el cuadrado del escalar de Weyl son todos constantes. Resultado que podría ser de gran interés en el área de la geometría diferencial.

2

Relatividad General

En este capítulo se comenzará hablando sobre el formalismo matemático de la relatividad general y se darán los postulados que forman la base de la teoría. Es importante señalar que a lo largo de este capítulo se fijará la notación que se usará en el resto del presente trabajo. Principalmente, se seguirá la notación de [11] y [7]. Finalmente, una vez definido formalmente un espaciotiempo, se podrán presentar las soluciones analíticas más simples a las ecuaciones de campo en el vacío.

2.1. Variedades Riemannianas

Para poder hablar de variedades Riemannianas o pseudo-Riemannianas, es importante el concepto de variedades diferenciables en general. Entonces comencemos definiendo este tipo de espacio matemático en general.

Definición 2.1.1 *M es una Variedad Diferenciable de dimensión m si es un espacio topológico con las siguientes características:*

- *M es Hausdorff.*
- *M está provisto de una familia de pares $\{(U_i, \phi_i)\}$ tal que cada U_i es un elemento de la topología de M (es un conjunto abierto) y cumple con que $\cup_i U_i = M$. Mientras que cada ϕ_i es un homeomorfismo que va de $U_i \rightarrow U'_i$ con $U'_i \subset \mathbb{R}^m$ y abierto con la topología usual de \mathbb{R}^m .*
- *Para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ el mapeo $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ que mapea $\phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ es infinitamente diferenciable.*

A cada par $\{(U_i, \phi_i)\}$ se le conoce como carta coordenada, mientras que a la familia completa se le da el nombre de Atlas. A las funciones coordenadas ϕ_i se les suele representar por N funciones $(x^1(p), \dots, x^N(p))$ y se les conoce como coordenadas.

Hasta este momento solo hemos requerido la continuidad de las funciones coordenadas, entonces es momento de definir la diferenciabilidad en este tipo de espacios.

Definición 2.1.2 *Diremos que una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, con M una variedad diferenciable de dimensión n , es diferenciable si la composición $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.*

También se puede definir la diferenciabilidad entre mapeos de una variedad a otra. En este caso, debemos de tener en cuenta las cartas coordenadas para ambas variedades.

Definición 2.1.3 *Diremos que un mapeo $F : M \rightarrow N$, con M y N variedades diferenciables¹ de dimensión m y n respectivamente, es diferenciable si la composición $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Con ψ función coordenada en N y ϕ función coordenada en M .*

En el caso particular cuando $M = N$, diremos que una función F está en $C^\infty(M)$ si $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ está en $C^\infty(M)$.

Ha llegado el momento de definir vectores tangentes y 1-formas. Para esto vamos a usar los mapeos diferenciables de M en M .

Definición 2.1.4 *Un vector tangente X_p a M en el punto p es un funcional lineal que va del espacio de las funciones $C^\infty(M)$ a \mathbb{R} y que satisface la regla de Leibniz. Es decir, si $f, g \in C^\infty(M)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces*

- $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$
- $X_p(fg) = X_p(f)g + fX_p(g)$

Se puede demostrar que los únicos operadores que cumplen con la definición anterior son las derivadas parciales (o combinaciones lineales de estas).

Para los vectores tangentes en p , podemos definir la suma entre vectores y la multiplicación por escalares. Resultando que los vectores tangentes forman un espacio vectorial conocido como el espacio tangente a M en p o T_pM . Al conjunto de todos los espacios tangentes en M , es decir, $\cup_{p \in M} T_pM$ se le conoce como haz tangente y se denota TM . A un elemento en TM se le conoce como campo vectorial.

¹Nótese que se incluye el caso particular cuando $M = N$

Si usamos la representación coordenada de cualquier función en general y desarrollamos para un vector tangente cualquiera, podemos obtener la representación coordenada de un vector tangente, la cual es: ²

$$X_p(f) = X_p(f \circ \phi^{-1}) = X_p(f(x^i)) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \quad (2.1) \quad \text{eq.repvec}$$

con $X^i \in \mathbb{R}$.

Dicho de otra manera, el representante en el espacio tangente en ciertas coordenadas $\{x^i\}$, es $X_p = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, donde X^i son escalares y se puede demostrar que $\frac{\partial}{\partial x^i}$ son independientes y hay exactamente m , para una variedad M de dimensión m .

Otro tipo de objeto importante en este contexto es conocido como vector cotangente. Este objeto vive en el espacio dual al espacio vectorial $T_p M$ que se denota como $T_p^* M$.

Definición 2.1.5 Diremos que $w_p \in T_p^* M$ es un covector, 1-forma diferencial o vector covariante si dado que se tiene, $w_p \in T_p^* M$ y $X_p \in T_p M$, entonces se cumple que:

$$w_p(X_p) = \lambda = i_{X_p} w_p \quad (2.2)$$

para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$. Donde la última igualdad solo es notación.

Además, como $T_p^{**} M = T_p M$

$$X_p(w_p) = w_p(X_p) = i_{X_p} w_p \quad (2.3)$$

Análogamente a los vectores, el espacio cotangente tiene su propio haz cotangente y se denota como $T^* M$. A un elemento de $T^* M$ se le conoce como 1-forma diferencial o campo vectorial cotangente.

Si se tienen coordenadas particulares, se puede construir la base dual usando la base de vectores de la ecuación ((2.1)) ^{eq.repvec} pidiendo que:

$$\theta^i(e_j) = \delta_j^i \quad (2.4)$$

donde e_j es un elemento de la base de vectores en coordenadas $\{x^j\}$, δ_j^i es la delta de Kronecker y θ^i es la base dual que estamos definiendo.

En la base coordenada más común, la base de vectores se ve $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ y la base de covectores $\{dx^i\}$.

Ha llegado el momento de hablar de tensores en general. Los tensores de rango (l, k) , son objetos multilineales (lineales en cada entrada), que mapean l objetos en $T_p^* M$ y k

²Donde estamos utilizando la convención de suma de Einstein.

objetos en $T_p M$ a los números reales. Como es de esperarse, este tipo de objetos se puede formar a partir de los objetos más simples (vectores y covectores) usando el producto tensorial \otimes , el cual se puede definir entre tensores de rango arbitrario.

Definición 2.1.6 Si T_1 es un tensor de rango (l, k) y T_2 es un tensor de rango (q, r) , el producto tensorial entre T_1 y T_2 , que es un tensor de rango $(l+q, k+r)$, se define como $T_1 \otimes T_2(w^1, \dots, w^{l+q}, X_1, \dots, X_{k+r}) = T_1(w^1, \dots, w^l, X_1, \dots, X_k)T_2(w^{l+1}, \dots, w^{l+q}, X_{k+1}, \dots, X_{k+r})$

Por lo tanto, usando tensores de rango $(1, 0)$ (vectores) y tipo $(0, 1)$ (1-formas) se puede formar cualquier tensor de rango (l, k) . En particular, usando las bases en $T_p M$ y $T_p^* M$, se puede formar una base general para cualquier tensor de rango (l, k) .

Un tipo muy especial de tensores tipo $(0, p)$, son aquellos que son totalmente antisimétricos y son conocidos como formas diferenciales. Hasta el momento ya hemos definido las 1-formas diferenciales, que son trivialmente antisimétricas. Como ya se dijo antes, un tensor de cualquier rango puede ser formado por tensores de tipo $(1, 0)$ y tipo $(0, 1)$ usando el producto tensorial. Análogamente, al ser las formas diferenciales tensores de tipo $(0, p)$. Podemos formarlas a partir de 1-formas, pero al ser totalmente antisimétricas definiremos un producto tensorial totalmente antisimétrico el cual es conocido como producto exterior o producto cuña.

Definición 2.1.7 *Producto Exterior \wedge .* Se define el producto exterior entre p 1-formas de la siguiente forma. Si $w^1, \dots, w^p \in T^* M$ y cada 1-forma se ve en coordenadas locales como $w^i = w^i_{a_i} dx^{a_i}$. Entonces

$$w^1 \wedge w^2 \wedge \dots \wedge w^p = w^1_{a_1} w^2_{a_2} \dots w^p_{a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} = w^1_{a_1} w^2_{a_2} \dots w^p_{a_p} \frac{1}{p!} \epsilon^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_p} dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_p}$$

donde $\epsilon^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_p}$ es el símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita.

Donde el producto entre una p -forma y una k -forma se vuelve inmediato debido a que estas, a su vez, son productos exteriores de p y k 1-formas. Además, cada espacio donde viven las p -formas es un espacio vectorial y se denota como Ω^p . A la unión de todos estos espacios vectoriales se conoce como el álgebra exterior o el álgebra de Grassman y se denota por Ω . Existe una forma de pasar de una p -forma a una $p+1$ -forma. El mapeo que realiza esto es conocido como la derivada exterior y se define de la siguiente forma.

La derivada exterior es un operador que cumple las siguientes propiedades para $u, v \in \Omega$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- d es lineal $d(\lambda u + v) = \lambda du + dv$

- $d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$, donde p es el grado de u .
- $d^2 = 0$
- f es una 0-forma por lo tanto df es la diferencial de f ordinaria.
- La operación de d es local. Es decir si $u = v$ en algún abierto U de la variedad M , entonces $du = dv$ y no importa el comportamiento de u fuera de U .

Se puede demostrar que el único operador que cumple estas propiedades está definido como sigue.

Definición 2.1.8 *Derivada Exterior d .* Se define la derivada exterior de una p -forma de la siguiente manera. Sea $w \in \Omega_p$ una p -forma diferencial, cuya expresión en componentes se ve de la forma $w = w_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$.

$$dw = \frac{\partial w_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

En seguida, se definirá otro tipo de estructura en la variedad M , las conexiones. De acuerdo a lo que se ha visto hasta ahora, podemos derivar funciones en distintas direcciones, es decir, la aplicación de un vector a una función resulta en la derivada de la función en la dirección del vector. Sin embargo, si queremos derivar un tensor de rango (l, k) a lo largo de una dirección particular, se necesita de una estructura adicional, la conexión afín.

Definición 2.1.9 (Conexión afín) Sea M una variedad diferenciable. Una conexión afín ∇ sobre M es un mapeo $\nabla : TM \times TM \rightarrow TM$ que cumple lo siguiente:

- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X$
- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
- $\nabla_X fY = X(f)Y + f \nabla_X Y$

donde $X, Y, Z \in T_p M$ y $f \in C^\infty(M)$

Si tomamos una carta coordenada (U, ϕ) con coordenadas $x^i = \phi$. Entonces, dados dos campos vectoriales de la base coordenada, existen ciertas funciones Γ_{jk}^i conocidos como los coeficientes de la conexión, tales que

$$\nabla_i e_j = \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (2.5)$$

Por lo que para dos campos vectoriales arbitrarios X y Y , tenemos que:

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i e_i} (Y^j e_j) = X^i \nabla_{e_i} (Y^j e_j) = X^i e_i(Y^j) e_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k = X^i \left(e_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) e_k \quad (2.6)$$

Hasta este momento ∇_X tiene el sentido de derivada. Además, a esta derivada se le conoce como derivada covariante. Sin embargo, falta definirla para funciones y para tensores en general. Por lo tanto, definimos lo siguiente en el caso de funciones.

Definición 2.1.10 $\nabla_X f := X(f)$

Requerimos, además, que se cumpla la regla de Leibnitz para tensores en general, es decir:

$$\nabla_X (T_1 \otimes T_2) = \nabla_X T_1 \otimes T_2 + T_2 \otimes \nabla_X T_2$$

Para esto vamos a definir la derivada covariante para 1-formas y, una vez hecho esto, junto con la regla de Leibnitz, la generalización es inmediata.

Notemos primero que, si $Y \in TM$ y $w \in T^*M$, entonces $i_Y w \in C^\infty(M)$. Por tanto, $X(i_Y w) = \nabla_X i_Y w = i_{\nabla_X Y} w + i_Y \nabla_X w$. De donde despejando, obtenemos:

$$i_Y \nabla_X w = X(i_Y w) - i_{\nabla_X Y} w \quad (2.7)$$

ecuación que en coordenadas se ve de la forma

$$Y^i (\nabla_X w)_i = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^k w_k) - X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) w_k$$

De donde, obtenemos finalmente

$$\nabla_X w = X^i \left(e_i(w_j) - \Gamma_{ij}^k w_k \right) \theta^j \quad (2.8)$$

Ahora podemos introducir dos tensores muy importantes en el contexto de la geometría diferencial, el primero es el tensor de torsión y el segundo el de curvatura.

Definición 2.1.11 (Torsión) *Sea M una variedad diferenciable equipada con una conexión afín ∇ ; $X, Y \in TM$. La torsión de M se define como*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (2.9)$$

donde $[X, Y]$ es el conmutador de X con Y y se define con ayuda de una función f , es decir $[X, Y]f := X(Y(f)) - Y(X(f))$.

En coordenadas, el tensor de torsión se puede ver como

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i \quad (2.10)$$

Notemos que si el tensor de torsión es cero, entonces para la conexión afín definida por los distintos Γ_{jk}^i es simétrica en los índices inferiores.

Definición 2.1.12 (Curvatura) *Sea M una variedad diferenciable equipada con una conexión afín ∇ ; $X, Y, Z \in TM$. La curvatura de M se define como*

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.11)$$

Nótese que el tensor de curvatura puede ser definido para cualquier conexión sin importar si es métrica o no. Sin embargo, en este trabajo nos importará solo la conexión métrica.

En coordenadas podemos ver al tensor de Riemann expresado de la forma

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{cn}^a \Gamma_{bd}^n - \Gamma_{dn}^a \Gamma_{bc}^n \quad (2.12)$$

Esta primera sección se titula variedades Riemannianas y con toda la estructura definida anteriormente se puede definir formalmente a una variedad Riemanniana. Solo falta conocer a un tensor de rango $(0, 2)$ muy particular.

def.metriem

Definición 2.1.13 (Métrica Riemanniana) *Campo tensorial métrico. Diremos que g es una métrica Riemanniana si es un tensor de rango $(0, 2)$ y cumple lo siguiente:*

- $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in TM$.
- $g(X, X) \geq 0$ y se cumple la igualdad solo si $X = 0$

def.metpseu

Definición 2.1.14 (Métrica pseudo-Riemanniana) *Campo tensorial métrico. Diremos que g es una métrica pseudo-Riemanniana si es un tensor de rango $(0, 2)$ y cumple lo siguiente:*

- $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in TM$.
- $\exists X \in TM$ tales que $X \neq 0$ y $g(X, X) = 0$

Además, se tiene que cumplir que la métrica es no degenerada³.

A lo largo de este trabajo se usará el tipo de métrica pseudo-Riemanniana, la cual nos permite separar a cada vector en T_pM en 3 diferentes clases:

- $X \in T_pM$ tales que $g(X, X) > 0$, vectores tipo espacio.
- $X \in T_pM$ tales que $g(X, X) = 0$, vectores nulos.
- $X \in T_pM$ tales que $g(X, X) < 0$, vectores tipo tiempo.

La métrica definida en (2.1.13) o (2.1.14), a su vez, define un isomorfismo entre TM y T^*M . Ya que para cualquier campo vectorial en TM , $g(X) \in T^*M$. En coordenadas locales, las componentes de la métrica $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ se ven como una matriz simétrica cuyos valores propios son distintos de cero. Por esta razón, esta matriz es invertible y, por ende, definimos la métrica inversa como un tensor $(2, 0)$ cuyas componentes son exactamente esta matriz inversa. Así pues, podemos decir que para toda $w \in T^*M$, $g^{-1}(w) \in TM$. En componentes, a esto se le conoce como subir y bajar índices y se ve de la forma: $w_i = g_{ij}X^j$ y $X^i = (g^{-1})^{ij}w_j$.

Lo que conduce a definir una variedad (pseudo-)Riemanniana

Definición 2.1.15 (Variedad Riemanniana (resp. pseudo-riemanniana))) Diremos que el par (M, g) es una variedad Riemanniana (resp. pseudo-Riemanniana) Si M es una variedad diferenciable y g es un tensor métrico definido como en 2.1.13 (resp. 2.1.14).

Con lo anterior, se puede demostrar el siguiente teorema

Teorema 2.1.1 (Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana) En una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) , existe una única conexión simétrica libre de torsión compatible con el tensor métrico, ie. $\nabla_X g = 0 \forall X \in T_pM$. A esta conexión se le llama conexión de Levi-Civita.

Del teorema anterior se obtiene que los coeficientes de la conexión afín compatible con la métrica tienen la forma

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}). \quad (2.13)$$

En este caso llamamos a los Γ_{jk}^i símbolos de Christoffel.

³Se definirá a la métrica como no degenerada si, dada una base, los eigenvalores de la métrica son todos distintos de cero. Esto se debe cumplir para todas las cartas dado un atlas de la variedad

Una vez definida la conexión métrica, podemos definir al tensor de curvatura o tensor de Riemman, $R : TM \times TM \times TM \rightarrow TM$ para una conexión métrica.

De esta manera podemos definir al tensor de Ricci y al escalar de Ricci de una forma muy sencilla.

Definición 2.1.16 (Tensor de Ricci) *Definimos al tensor de Ricci como la traza del tensor de curvatura $R_{ab} = R_{anb}^n$*

Definición 2.1.17 (Escalar de curvatura) *Definimos al escalar de curvatura de Ricci como: $R = g^{ab}R_{ab} = R_a^a$*

En el contexto de la Geometría Diferencial, se ha dado una definición de lo que se conoce como una variedad de Einstein.

def.EinMan

Definición 2.1.18 (Variedad de Einstein) *Diremos que (M, g) , es una variedad de Einstein. Si M es una variedad diferenciable, g es un tensor métrico y se cumple que*

$$R_{ab} = \lambda g_{ab}. \quad (2.14)$$

Aquí λ es una constante.

En el contexto de la Relatividad General de Einstein, esta definición se corresponde a una métrica en el vacío y con un escalar de Ricci particular, el cual quedará bien definido mas adelante, cuando obtengamos las ecuaciones de campo.

2.2. Mapeos

En esta sección, hablaremos un poco de las isometrías y de los mapeos conformes, para esto primero se necesitan presentar a los mapeos inducidos, es decir, los mapeos conocidos como pushforward y pullback. Los cuales se utilizarán a lo largo del presente trabajo.

Definición 2.2.1 (Pushforward) *Un mapeo $f : M \rightarrow N$ induce naturalmente un mapeo f_* llamado pushforward, el cual se define de la siguiente manera con $f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$, para una función cualquiera $g \in C^\infty(N)$ y $X \in T_pM$*

$$f_*X(g) = X(g \circ f)$$

Definición 2.2.2 (Pullback) *Un mapeo $f : M \rightarrow N$ induce naturalmente un mapeo f^* llamado pullback, el cual se define de la siguiente manera con $f^* : T_{f(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$, para un vector tangente cualquiera X en T_pM y $w \in T_{f(p)}^*N$:*

$$f^*w = w(f_*X) = i_{f_*X}w$$

Nótese que en coordenadas locales, el pushforward y el pullback se ven de la siguiente manera, respectivamente si $Y = f_*X$ y $v = f^*w$, con x^a coordenadas en M y y^a coordenadas en N .

$$Y^a = X^b \frac{\partial y^a}{\partial x^b} \quad (2.15) \quad \text{eq.pf}$$

$$v_a = w_b \frac{\partial y^b}{\partial x^a} \quad (2.16)$$

Con estos mapeos definidos, ya podemos definir lo que será un mapeo conforme y una isometría. Entonces

Definición 2.2.3 (Transformación Conforme) *Sea (M, g) una variedad (pseudo-)Riemanniana, un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es llamada una transformación conforme si preserva la métrica hasta un factor de escala.*

$$f^*g_{f(p)} = e^{2\alpha}g_p$$

con $\alpha \in C^\infty(M)$.

def.iso

Definición 2.2.4 (Isometría) *Sea (M, g) una variedad (pseudo-)Riemanniana, un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es llamado una isometría si preserva la métrica.*

$$f^*g_{f(p)} = g_p$$

Antes de continuar con la siguiente sección, vamos a dar un ejemplo de una isometría, el cual es tomado de [1].

2.2.1. Ejemplo: El plano de Lobachevsky

Consideremos el grupo 2-dimensional de las transformaciones afines, $x \rightarrow a+bx$, de la recta real. Consideremos al par (a, b) como un elemento del grupo, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$. Además, definamos la operación en el grupo como la composición de transformaciones afines. Es decir,

$$(a_2, b_2) \circ (a_1, b_1) = (a_2 + a_1 b_2, b_1 b_2). \quad (2.17)$$

Se desea obtener una métrica invariante (isometría) izquierda en G . Para esto, tenemos que especificar una forma cuadrática, la métrica, en el espacio tangente de G en la identidad, que en este caso es el elemento $(0, 1)$. Fijando la métrica en la identidad como $g_{(0,1)} = da \otimes da + db \otimes db$.

Proposición 2.2.1 *La métrica invariante izquierda a G es:*

$$g_{(a,b)} = \frac{da \otimes da + db \otimes db}{b^2}$$

Demostración: De acuerdo con la ecuación (2.15) y la definición de isometría 2.2.4, tenemos que checar el jacobiano del difeomorfismo (izquierdo) definido por la operación en el grupo. Es decir $(x, y) \rightarrow (a + bx, by)$, de donde se obtiene la matriz $J = bI_2$, donde I_2 es la identidad en 2 dimensiones. El determinante de J es b^2 . De ahí, que al tomar el pullback de $g_{(a,b)}$ a la identidad se obtiene $g_{(0,1)}$. Lo que prueba que es una isometría. ■

La métrica de la proposición (2.2.1) será de gran utilidad cuando se definan las variedades estadísticas. Pero, hasta este momento, dicha métrica define la geometría Riemanniana de las transformaciones afines de la recta real.

2.3. Ecuaciones de Campo

Se comenzará esta sección definiendo formalmente lo que es un espacio-tiempo y el objetivo final será obtener las ecuaciones de campo de la Relatividad General de Einstein. Sin embargo, estas ecuaciones son un postulado de la teoría. El contenido de esta sección se tomará en gran parte de [8]. Por lo tanto comenzamos definiendo un espaciotiempo

def.ST

Definición 2.3.1 (Espacio-tiempo) *Un espaciotiempo consiste de una variedad diferenciable cuatro-dimensional y conexa M , equipada con un tensor métrico g y dotada de una conexión afín. El par (M, g) es una variedad pseudo-Riemanniana y ∇ es la conexión de Levi-Civita de g .*

De la definición anterior, el espaciotiempo es único salvo isometrías de la métrica. Entonces, cuando hablamos de un espaciotiempo, nos estamos refiriendo a una clase completa de espaciotiempos, cuyo representante es (M, g) .

Como siguiente paso se darán los postulados de la Relatividad General, los cuales son:

- 1 Causalidad Local: Las ecuaciones de campo para la materia deberán ser tales que si hay un abierto convexo $U \in M$ con $p, q \in M$, entonces una señal se puede mandar entre p y q si y solo si existe una curva, tipo tiempo o nula, que una a p con q dentro de U y cuyo vector tangente punto a punto sea distinto de cero.
- 2 Conservación local de energía y momento: Las ecuaciones de campo para la materia son tales que existe un tensor simétrico T de rango $(2, 0)$, conocido como el *tensor de energía-momento*, que depende de los campos de materia, de sus derivadas covariantes y de la métrica. Además el tensor T tiene las siguientes propiedades:
 - T es cero en un abierto U si y solo si todos los campos de materia son cero en U .
 - T cumple con la ecuación $\nabla_b T^{ab} = 0$
- 3 Ecuaciones de campo: Las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.18) \quad \text{eq. EFE}$$

se cumplen en todo el espaciotiempo (M, g) . Aquí $T_{ab} = g_{ac}g_{bd}T^{cd}$ y Λ es conocida como la constante cosmológica.

Los postulados 1 y 2 son consistentes con resultados experimentales, particularmente en el caso de la relatividad especial, teoría que también contiene estos dos postulados. Por otro lado, el tercer postulado tiene una mayor flexibilidad de ser modificado y aún así ser consistente con resultados observacionales. Sin embargo, esta propuesta es la más simple desde una perspectiva matemática.

Alternativamente al tercer postulado, en lugar de escribir directamente las ecuaciones de campo, podríamos haber iniciado con un principio variacional con el cual se obtienen las ecuaciones de Einstein.

Para esto, necesitamos la acción a la cual se le aplicará el principio variacional. Dicha acción se conoce como la acción de Einstein-Hilbert y es de la forma

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}d^4x, \quad (2.19)$$

donde $\Omega \subset M$ es una región del espacio tiempo.

Considerando variaciones de esta acción con respecto a la métrica y manteniendo la frontera de Ω fija se tiene que

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} \left(-R^{ab} + \frac{1}{2}Rg^{ab} - \Lambda g^{ab} \right) \delta g_{ab} \sqrt{-g}d^4x = 0. \quad (2.20)$$

para cualquier region $\Omega \subset M$. Lo cual nos arroja las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica en el vacío. Es decir,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \quad (2.21) \quad \text{eq. EFEvac}$$

Si queremos obtener las ecuaciones de Einstein en general. Debemos acoplar con la materia al campo gravitacional. Esto se puede hacer de la siguiente forma

$$\delta S_{EC} = \delta(S_{EH} + S_M) = 0 \quad (2.22)$$

donde

$$S_M = \int_{\Omega} \mathbf{L}(\phi) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.23)$$

Haciendo la variación adecuadamente, se recuperan las ecuaciones de Einstein en general

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (2.24)$$

Un espacio tiempo se considera físicamente viable si adicionalmente el tensor de curvatura de Ricci satisface ciertas condiciones. En este trabajo consideraremos únicamente el caso del vacío, por lo que no nos ocuparemos de la física del contenido de materia.

2.4. Soluciones Máximamente Simétricas

En esta sección se tratarán las soluciones a la ecuación (2.21). Existen 3 tipos de soluciones en este caso dependiendo de la constante Λ . Si es menor a cero (Anti de Sitter), mayor a cero (de Sitter) o cero (Minkowski) surgen 3 tipos de espaciotiempos diferentes.

Si contraemos los índices de la ecuación (2.21) con la métrica inversa, obtendremos:

$$g^{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}g_{ab} + \Lambda g^{ab}g_{ab} = R - 2R + 4\Lambda = 4\Lambda - R = 0 \quad (2.25)$$

y se obtiene una relación entre el escalar de Ricci y la constante cosmológica, es decir,

$$R = 4\Lambda. \quad (2.26)$$

En particular, si $\Lambda = 0$, que es el caso de Minkowski, obtenemos que $R = 0$ y dando como resultado la reducción de las ecuaciones de campo a $R_{ab} = 0$. En caso contrario,

$\Lambda \neq 0$, sustituyendo nuevamente en [\(2.21\)](#) ^{eq.EFEvac} se obtiene

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab}, \quad (2.27)$$

que es precisamente la definición de una variedad de Einstein (c.f. [2.1.18](#)) ^{def.EinMan}.

Una solución inmediata al caso $\Lambda = 0$ es proponer una métrica constante, la cual resultaría en un tensor de Riemann nulo que a su vez resultaría en un tensor de Ricci nulo. Obteniéndose así, una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con $\Lambda = 0$. Dicha solución puede tomar la forma más simple en coordenadas cartesianas $\{t, x, y, z\}$

$$\eta = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz. \quad (2.28)$$

eq.Mink

En el caso de $\Lambda \neq 0$, se puede demostrar que las métricas resultantes se ven de la forma, para $\Lambda > 0$

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{t^2} (-dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) \quad (2.29)$$

en coordenadas conformes

Mientras que para $\Lambda < 0$

$$g_{\text{AdS}} = \frac{l^2}{t^2} (dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz) \quad (2.30)$$

y son conocidos como de Sitter y Anti de Sitter, respectivamente. Ambos espaciotiempos están en coordenadas estáticas, donde $\Lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{2l^2}$ representa el radio de cada espaciotiempo.

Hasta este momento, no se ha mencionado por qué son soluciones máximamente simétricas. Para poder hablar de simetrías, es necesario hablar de vectores de Killing.

Definición 2.4.1 *Diremos que $X \in TM$ es un vector de Killing si satisface la ecuación de Killing*

$$(\nabla_a X)_b + (\nabla_b X)_a = 0$$

En este caso, la métrica que define al espacio tiempo tiene una simetría en la dirección del vector X , si X cumple la ecuación de Killing esto se debe a que los flujos⁴ generados por vectores de Killing forman isometrías de la métrica. En un espaciotiempo de n dimensiones puede haber más de n vectores de Killing linealmente independientes, pero no más de $\frac{n(n+1)}{2}$.

⁴Ver apéndice A para la definición de flujo.

En las ecuaciones de Einstein (^{eq. EFEvac}(2.21)), la incógnita es la métrica del espaciotiempo la cual, al ser simétrica, tiene 10 (para $n = 4$) ecuaciones lineales, inhomogéneas e independientes. Por lo tanto, 10 simetrías es el número máximo de vectores de Killing, si fuesen más vectores de Killing el sistema quedaría con más constricciones de las que se requieren.

Como un ejemplo muy sencillo, para la métrica de Minkowski (^{eq. Mink}(2.28)). Intuitivamente, sabemos que las simetrías son: 4 traslaciones, 3 rotaciones espaciales y 3 boosts.

Se proponen los vectores siguientes:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.31)$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.32)$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.33)$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.34)$$

$$X_5 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.35)$$

$$X_6 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.36)$$

$$X_7 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.37)$$

$$X_8 = t \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.38)$$

$$X_9 = t \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.39)$$

$$X_{10} = t \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.40)$$

Se puede demostrar que los diez vectores anteriores cumplen la ecuación de Killing para la métrica (2.22). Resultando así, en 10 vectores de Killing asociados a 10 simetrías del espaciotiempo. Para el caso de de Sitter y Anti de Sitter es análogo. Solo que en coordenadas estáticas resulta ser más laborioso. Sin embargo, se corresponden a las mismas simetrías.

3

Termodinámica Geométrica

A partir de esta sección y las siguientes, se hablará de termodinámica en el contexto de la geometría de contacto. En este sentido, definiremos los espacios y mapeos que se usarán a lo largo del presente trabajo, tal como se ven en [5]. Además, se dará una interpretación física sobre estos objetos abstractos.

El tratamiento de la termodinámica en este capítulo es completamente análogo al caso de Mecánica Clásica en el contexto de variedades simplécticas (Mecánica Hamiltoniana). Por esta razón, sería de gran ayuda tener los conceptos frescos en el caso de la Mecánica Hamiltoniana. De cualquier manera, el lector puede consultar el apéndice A, donde se aborda brevemente a la mecánica Hamiltoniana.

Comenzaremos con un acercamiento a la geometría de contacto, desde una perspectiva termodinámica haciendo énfasis en los objetos más importantes de la estructura que tiene la variedad de contacto (de dimensión impar) donde trabajaremos. Después, en el siguiente capítulo, se verá de forma detallada cómo los objetos anteriores se obtienen a partir de bases puramente estadísticas, y se hará conexión directa con la primera ley de la termodinámica.

3.1. Variedades de contacto

Sea τ una variedad diferenciable $(2n+1)$ dimensional equipada con una estructura de contacto, lo cual quiere decir que existe $D \subset T\tau$, con D una distribución maximalmente no integrable de hiperplanos de co-dimensión uno (ver figura 3.1 y 3.2). Esto, localmente, quiere decir que existe η , una uno-forma diferencial tal que $D = \ker(\eta)$ (hiperplanos de co-dimensión uno) y $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ (condición de máxima no integrabilidad). Por el

teorema de Darboux¹, siempre es posible encontrar coordenadas locales $\{w, p_a, q^a\}$ con $a = 1 \dots n$, en las cuales η se puede escribir como

$$\eta = dw + p_a dq^a, \quad (3.1) \quad \text{eq.contactform}$$

donde hemos usado la notación de suma implícita en el índice a .

Asociado a η siempre está definido el campo vectorial de Reeb ξ de la siguiente manera:

$$i_\xi \eta = 1 \quad (3.2) \quad \text{eq.Reeb}$$

$$i_\xi d\eta = 0 \quad (3.3) \quad \text{eq.Reeb2}$$

esto implica que $T\tau = L_\xi + D$, donde L_ξ se denomina como el subespacio 'vertical' y D el subespacio 'horizontal'. Sumado a los objetos anteriores, existe un campo tensorial ϕ tal que $L_\xi = \ker(\phi)$ y $D = \text{Im}(\phi)$.

Definición 3.1.1 *Estructura de casi contacto (estructura de casi para-contacto)*

Si ϕ , además, satisface que $\phi^2 = -1 + \eta \otimes \xi$ ($\phi^2 = 1 - \eta \otimes \xi$), entonces a la triada (τ, η, ϕ) se le llamará estructura de casi contacto (casi para-contacto).

3.2. Subvariedades de Legendre

Las subvariedades maximalmente integrales $\varepsilon \subset \tau$ son aquellas variedades de máxima dimensión que pueden estar inmersas dentro del EFT y cuyo haz tangente está completamente contenido en la distribución D . A estas sub-variedades se les conoce como sub-variedades de Legendre.

Para dar una forma local de construir estas subvariedades, consideremos lo siguiente. Sea $I \cup J$ una unión ajena del conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$ y consideremos una función de n variables $f(p_i, q^j)$, con $i \in I$ y $j \in J$. Las $n + 1$ ecuaciones

$$q^i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (3.4)$$

$$p_j = -\frac{\partial f}{\partial q^j} \quad (3.5) \quad \text{eq.varint}$$

¹Se puede demostrar análogamente al caso de geometría simpléctica la existencia de estas coordenadas. Nótese que en este caso se trabaja principalmente con una 1-forma mientras que en el caso simpléctico se trabajó con la 2-forma simpléctica.

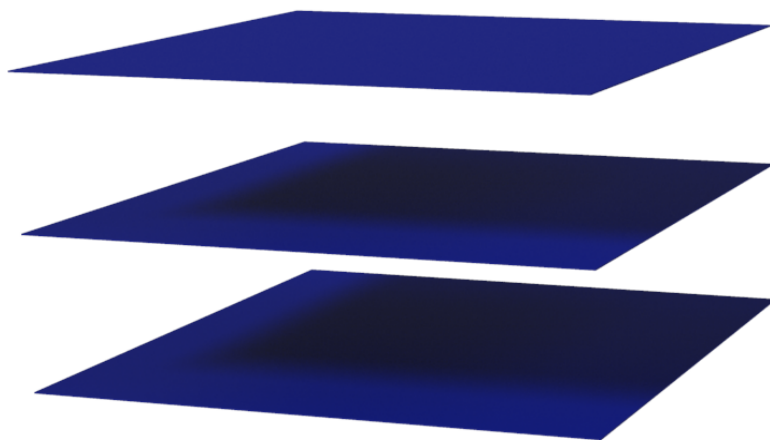


Figura 3.1: Cuando una distribución D es maximalmente integrable; entonces, existe una foliación de la variedad τ y se puede ver de esta forma, y en cada subvariedad están contenidas todas las direcciones de D .

maxint

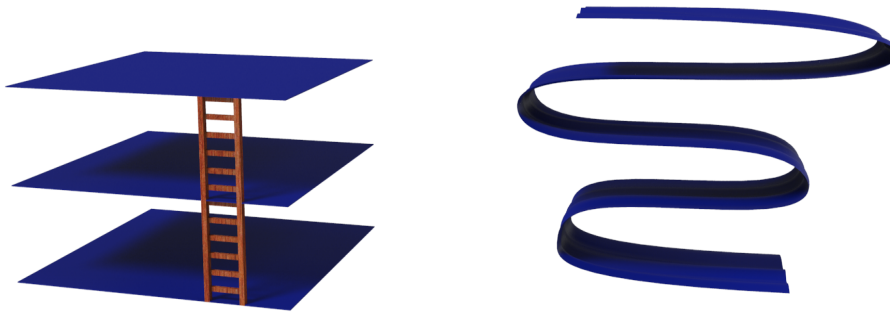


Figura 3.2: Cuando una distribución D es maximalmente no integrable quiere decir que: dados dos puntos distintos en τ siempre hay al menos una curva (que usa únicamente direcciones horizontales) que une los puntos, en el lado izquierdo se representa como una escalera uniendo a nuestros planos. La figura del lado derecho es otro ejemplo. En pocas palabras, no existe una foliación para τ .

maxpoint

$$w = f - p_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = f - p_i q^i \quad (3.6)$$

eq.potencial

definen una subvariedad de Legendre ε y viceversa, cualquier subvariedad de Legendre esta definida localmente por estas ecuaciones por al menos alguna de las 2^n posibles elecciones de la partición del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Como interpretación termodinámica ε representa las variedades de los estados de equilibrio termodinámico. Incluso, f debería ser interpretada como la relación fundamental del sistema termodinámico. Entonces, formalmente, se podrían definir 2^n ensamblajes diferentes. Para ser claros, únicamente permitiremos que f dependa de las variables intensivas q^a y no de las extensivas p_a ni del potencial w . De hecho, el potencial queda completamente definido por la ecuación ((3.6)) en ε . Por lo tanto una sub-variedad de Legendre es definida por un encaje $\psi : \varepsilon \rightarrow \tau$ de la siguiente manera:

$$q^a \rightarrow [w(q^a), p_b(q^a), q^a] \quad (3.7)$$

y la condición de isotropía

$$\psi^* \eta = \left[\frac{\partial w(q^b)}{\partial q^a} + p_a \right] dq^a = 0. \quad (3.8)$$

Esta última condición es equivalente a pedir que se cumpla la primera ley de la termodinámica en ε , es decir,

$$dw(q^b) = -p_a dq^a \quad (3.9)$$

Es por esto que, a η se le conoce como la 1-forma de Gibbs en ε . w se interpreta como el potencial termodinámico y la definición de las p_a en la ecuación ((3.5)) como las ecuaciones de estado.

4

Variedades Estadísticas

Varest

En esta sección se definirá lo que es una variedad estadística, haciendo uso de la geometría de contacto y las subvariedades de Legendre vistas en el capítulo anterior. Para esto, vamos a necesitar equipar a nuestro EFT con una métrica cuyo pullback inducido en alguna subvariedad de Legendre coincidirá con la definición de métrica de Fisher-Rao [2]. Además, vamos a conocer que significado tiene esta métrica en el contexto de la termodinámica.

En el capítulo anterior se mencionó un campo tensorial ϕ (definición (3.1.1)), el cual será importante para la construcción de la métrica libre de coordenadas. En general ϕ no es único. Sin embargo, si equipamos a τ con alguna métrica, entonces existe una forma preferencial de escoger ϕ de forma tal que se cumpla lo siguiente,

Definición 4.0.1 *Estructura métrica compatible de casi contacto (casi para-contacto). Si existe una métrica que cumpla que, para todo $X, Y \in T\tau$*

$$G(\phi X, \phi Y) = \pm[G(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)], \quad (4.1)$$

entonces G es una métrica compatible con la estructura de casi contacto (signo $+$) o de casi para-contacto (signo $-$)

Es importante mencionar que una de las razones más importantes de introducir una métrica en este espacio es que queremos hacer los subespacios vertical y horizontal ortogonales. Una segunda razón importante se discutirá una vez definida una variedad estadística.

Aunado a lo anterior, si se satisface que

$$d\eta(X, Y) = G(\phi X, Y), \quad (4.2)$$

entonces se dice que G es una métrica asociada a la estructura de casi contacto (para-contacto) y que $(\tau, \eta, \xi, \phi, G)$ es una variedad métrica de contacto (para-contacto).

4.1. Geometría de Contacto a partir de la física estadística

Ahora, vamos a considerar un sistema físico cuyos estados macroscópicos están caracterizados por un conjunto de n observables. Supongamos que dichas observables ya han sido medidas y son identificadas por los siguientes valores medios de las variables aleatorias $\{F_a\}$.¹

$$p_a = \langle F_a \rangle = \frac{\int_{\Gamma} F_a \rho d\Gamma}{\int_{\Gamma} \rho d\Gamma} \quad (4.3) \quad \text{eq.promedios}$$

donde Γ es el espacio muestra dotado con una medida ρ . En el caso de un sistema termodinámico, Γ representa el espacio fase de la mecánica estadística y ρ su distribución de probabilidad tal que

$$\text{vol}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \rho d\Gamma \quad (4.4) \quad \text{eq.vol}$$

En principio, no hay ninguna condición, a parte de las ecuaciones ((4.3)), la cual nos diga que ρ está definida unívocamente. En esas mismas ecuaciones está contenida la única información disponible del sistema microscópico. Por lo tanto, para obtener una ρ única y bien definida se utilizará el principio de máxima entropía. Entonces, definamos la entropía microscópica como

$$s(\rho) = -\ln \rho. \quad (4.5)$$

Tomando el valor medio de la entropía microscópica, i.e., la entropía macroscópica, resulta que

$$S = \langle s(\rho) \rangle = -\frac{\int_{\Gamma} \rho \ln(\rho) d\Gamma}{\int_{\Gamma} \rho d\Gamma}. \quad (4.6)$$

Vamos a formular el principio de máxima entropía por medio de un principio variacional de la funcional

¹Esta sección está apoyada principalmente en [4].

$$L = - \int_{\Gamma} \rho \ln(\rho) d\Gamma - w' \left(\int_{\Gamma} \rho d\Gamma - 1 \right) - q^a \left(\int_{\Gamma} F_a \rho d\Gamma - p_a \right) \quad (4.7)$$

donde $w = w' + 1$ y q^a son los multiplicadores de Lagrange (4.4), con $vol(\Gamma) = 1$, y ((4.3)), respectivamente.

Haciendo la variación siguiente:

$$\frac{\delta L}{\delta \rho} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \rho} = \int_{\Gamma} (-\ln(\rho) - 1 - w' - q^a F_a) d\Gamma = 0.$$

Como esto es válido siempre al integrar sobre nuestro espacio muestra Γ , se obtiene

$$-\ln(\rho) - 1 - w' - q^a F_a = -\ln(\rho) - w - q^a F_a = 0$$

de donde se obtiene directamente la función de distribución de Gibbs, dada por

$$\rho_0 = e^{-w - q^a F_a} \quad (4.9)$$

eq.distribucionGi

En seguida, se realizará una conexión con la sección de variedades de contacto. Para esto, vamos a calcular el cambio en la entropía por medio de una expansión en momentos de la entropía microscópica variando los parámetros de los reservorios y el de normalización. Consideremos a ρ como función de las $n+1$ coordenadas $\lambda_i = w, q^1, \dots, q^n$ en una variedad que llamaremos de control. Por lo tanto, tomando la diferencial de la entropía microscópica

$$ds = - \frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda_i} d\lambda_i. \quad (4.10)$$

Tomando el primer momento de la diferencial de la entropía y haciendo explícitamente los cálculos se obtiene:

$$\langle ds \rangle = - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda_i} d\lambda_i \rho d\Gamma \right) = - \left\langle \frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda_i} \right\rangle d\lambda_i = dw + p_a dq^a = \eta. \quad (4.11)$$

Que es la 1-forma diferencial del EFT que se menciona en la estructura de contacto. Siempre que además, consideremos a las p_a como otras n coordenadas independientes en una nueva variedad $(2n + 1)$ dimensional.

Retomando el contexto de la variedad de control, tomemos el segundo momento de la diferencial de la entropía

$$\langle (ds)^2 \rangle = \langle ds \otimes ds \rangle = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda_j} \right) d\lambda_i \otimes d\lambda_j = \left\langle \frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \lambda_j} \right\rangle d\lambda_i \otimes d\lambda_j \quad (4.12)$$

Para poder calcular explícitamente el segundo momento notemos que derivando eq. promedios ((4.3)) con respecto de q^b se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_a}{\partial q^b} &= \frac{\partial}{\partial q^b} \left[\frac{\int_{\Gamma} F_a \rho d\Gamma}{\int_{\Gamma} \rho d\Gamma} \right] \\ &= \left[\int_{\Gamma} \rho d\Gamma \right]^{-2} \left[\int_{\Gamma} F_a \frac{\partial \rho}{\partial q^b} d\Gamma \int_{\Gamma} \rho d\Gamma - \int_{\Gamma} F_a \rho d\Gamma \int_{\Gamma} \frac{\partial \rho}{\partial q^b} d\Gamma \right] \\ &= - \left[\int_{\Gamma} \rho d\Gamma \right]^2 \left[\int_{\Gamma} F_a F_b \rho d\Gamma \int_{\Gamma} \rho d\Gamma - \int_{\Gamma} F_a \rho d\Gamma \int_{\Gamma} F_b \rho d\Gamma \right] \\ &= - \langle F_a F_b - p_a p_b \rangle \\ &= - \langle (F_a - p_a)(F_b - p_b) \rangle. \end{aligned} \quad (4.13) \quad \text{eq. sm1}$$

Por otro lado, se tiene que por definición de variancia

$$\begin{aligned} \text{Var}(ds) &= \langle [ds - \langle ds \rangle]^2 \rangle = \langle [ds - \langle ds \rangle] \otimes [ds - \langle ds \rangle] \rangle \\ &= \langle [dw + F_a dq^a - dw - p_a dq^a]^2 \rangle \\ &= \langle [F_a dq^a - p_a dq^a]^2 \rangle \\ &= \langle p_a p_b dq^a \otimes dq^b - p_a F_b dq^a \otimes dq^b - p_b F_a dq^a \otimes dq^b + F_a F_b dq^a \otimes dq^b \rangle \\ &= \langle p_a p_b dq^a \otimes dq^b \rangle - \langle p_a F_b dq^a \otimes dq^b \rangle - \langle p_b F_a dq^a \otimes dq^b \rangle + \langle F_a F_b dq^a \otimes dq^b \rangle \\ &= \langle F_a F_b dq^a \otimes dq^b \rangle - \langle p_a p_b dq^a \otimes dq^b \rangle \\ &= \langle F_a F_b dq^a \otimes dq^b - p_a p_b dq^a \otimes dq^b \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle F_a F_b dq^a \otimes dq^b - p_a p_b dq^a \otimes dq^b \rangle + \frac{1}{2} \langle F_b F_a dq^b \otimes dq^a - p_b p_a dq^b \otimes dq^a \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (F_a - p_a)(F_b - p_b) \rangle dq^a \otimes dq^b + \frac{1}{2} \langle (F_a - p_a)(F_b - p_b) \rangle dq^b \otimes dq^a. \end{aligned} \quad (4.14) \quad \text{eq. sm2}$$

Ahora, recordando como transforman las componentes de las 1-formas bajo difeomorfismos $dp_a = \frac{\partial p_a}{\partial q^b} dq^b$, y juntando eq. sm1 ((4.13)) y eq. sm2 ((4.14)) obtenemos finalmente

$$dp_a = - \langle (F_a - p_a)(F_b - p_b) \rangle dq^b \quad (4.15) \quad \text{eq. sm3}$$

Finalmente, recordemos la siguiente equivalencia de la varianza.

$$\text{Var}(ds) = \langle (ds)^2 \rangle - \langle ds \rangle^2 \quad (4.16)$$

despejando el segundo momento de ds y sustituyendo con la ecuación ((4.14)) y ((4.15))

$$\langle (ds)^2 \rangle = \text{Var}(ds) + \langle ds \rangle^2 = -\frac{1}{2} dp_a \otimes dq^a - \frac{1}{2} dq_b \otimes dp^b + (dw + p_a dq^a)^2 \quad (4.17) \quad \text{eq.sm}$$

La ecuación ((4.17)) puede promoverse a una métrica en la variedad de contacto, debido a que es simétrica y no degenerada. Explícitamente se puede escribir como:

$$G = -\frac{1}{2}(dp_a \otimes dq^a + dq^a \otimes dp_a) + \eta \otimes \eta. \quad (4.18) \quad \text{eq.metricG}$$

Si consideramos a las p_a como variables independientes y las tomamos como otras n coordenadas en una variedad $(2n + 1)$ dimensional, entonces podremos hacer coincidir esta métrica con la que se vio previamente en (4.1) y (4.2). Para este fin, calculemos explícitamente $d\eta = dp_a \wedge dq^a$ y agreguemos la definición del campo tensorial

$$\phi\xi = 0, \quad \phi P_a = P_a, \quad \phi Q^a = -Q^a, \quad (4.19)$$

donde ξ esta definido mediante las ecuaciones del vector de Reeb del capítulo anterior. Mientras que los demás vectores se definen como $\{\xi, P_a, Q^a\} = \{\frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial p_a}, p_a \frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial q^a}\}$.

Haciendo lo anterior, podemos definir la métrica en el EFT como

$$G = \eta \otimes \eta - d\eta \circ (\phi \otimes 1) \quad (4.20) \quad \text{eq.metricG2}$$

La ecuación ((4.18)) es equivalente a la ((4.20)), pero en ((4.20)) hemos definido la métrica sin uso de coordenadas, incluso se definió y usó la estructura de casi para-contacto con métrica asociada para la variedad $(2n + 1)$ dimensional.

Finalmente, recordando las subvariedades de Legendre, veamos la forma de la métrica inducida en ε .

$$g = \psi^* G = \frac{\partial^2 w}{\partial q^a \partial q^b} dq^a \otimes dq^b, \quad (4.21) \quad \text{eq.submetric}$$

notese que esta métrica depende explícitamente de la elección del encaje ψ .

Para finalizar, hagamos lo siguiente. Pensemos en una variedad n -dimensional, donde cada punto de ella parametrize cualquier distribución de probabilidad de n parámetros.

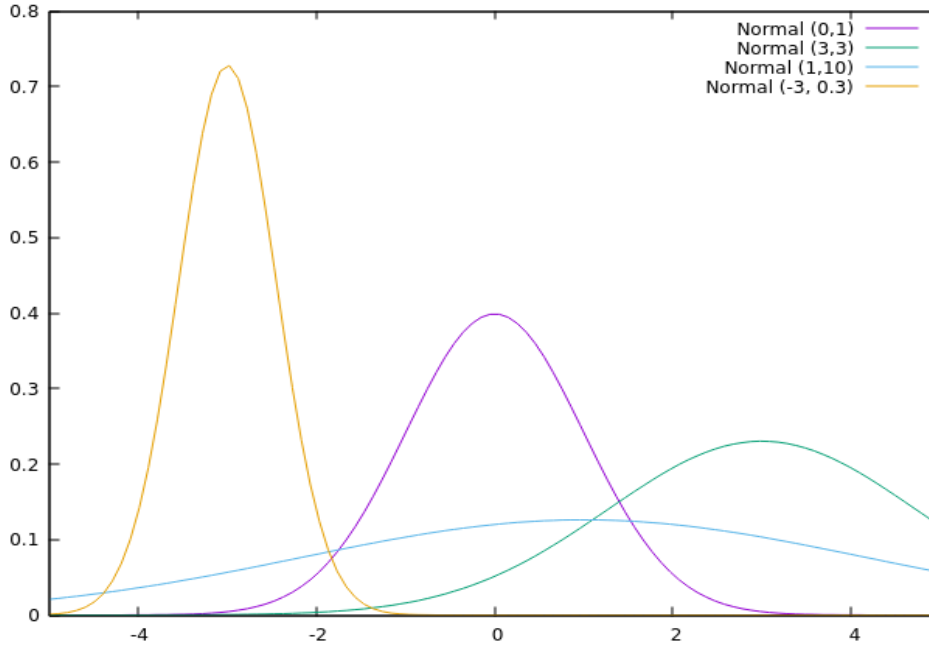


Figura 4.1: Distintas distribuciones normales, en el plano $(x, \mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$

ND

Entonces cada punto de esta variedad representa una distribución de probabilidad. Cuando se obtuvo la densidad de probabilidad a partir del principio de máxima entropía, lo que hicimos fue reducir el espacio de las distribuciones a las que tienen la particularidad de pertenecer a la familia exponencial. Se procederá a realizar un ejemplo a modo ilustrativo. Para comenzar, tenemos que concentrarnos en una subvariedad de equilibrio como se definió en la ecuación (3.18). Ahora, pensemos únicamente en parametrizar a la distribución de probabilidad normal de parámetros (μ, σ^2) . Usando nuestra notación como en la ecuación (4.9) identifiquemos los términos uno a uno.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right) = \exp(-w - q^a F_a) \quad (4.22)$$

Entonces, identificamos claramente que, $F_a = (x, x^2)$, $q^a = (-\frac{\mu}{\sigma^2}, \frac{1}{2\sigma^2})$ y por último $w(q^a) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) = \frac{(q^1)^2}{4q^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{q^2}\right)$

A las coordenadas q^a se les conoce como coordenadas naturales en el contexto de geometría de la información .

En la figura 4.1 vemos varios casos particulares de la distribución normal.

En la figura 4.2 se muestra, en coordenadas locales, como se vería la variedad pa-

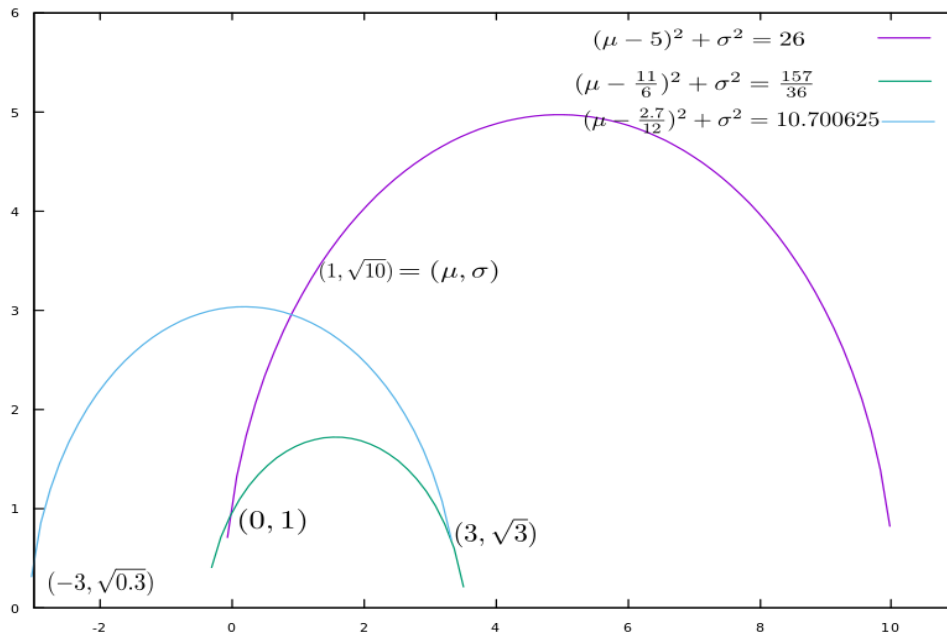


Figura 4.2: Plano (μ, σ) , donde se aprecian tres diferentes geodésicas, uniendo las distribuciones de la figura (4.1). Otras geodésicas pueden ser líneas verticales. En este espacio cada punto representa una distribución normal.

ND2

rametrizada con (μ, σ) , en coordenadas naturales es análogo. Con esto en mente, nos interesaría una forma de calcular que tanto se parecen unas distribuciones a otras o en el contexto de geometría de la información que tan lejos se encuentran unas distribuciones de otras. Motivando de esta manera la necesidad de una métrica en el espacio de equilibrio. Entonces, se usará la métrica de la ecuación ((4.21)), de donde tenemos que en coordenadas naturales

$$[g]_{q^1, q^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2q^2} & -\frac{q^1}{2(q^2)^2} \\ -\frac{q^1}{2(q^2)^2} & \frac{(q^1)^2}{2(q^2)^3} \end{pmatrix} \quad (4.23) \quad \text{eq.normalmatrix}$$

Esta métrica ya es conocida en la literatura² como la métrica de información Fisher y dicha coincidencia, nos motiva a la siguiente definición.

4.2. Variedades Estadísticas

Definición 4.2.1 Variedades Estadísticas. Diremos que ϵ , una variedad n -dimensional, es una variedad estadística si cada punto en ella representa una distribución de probabilidad parametrizada por n parámetros (q^a) , definida en cierto espacio muestra Γ , y está dotada con una métrica de la forma ((4.21))

En este contexto, ahora podemos decir que la variedad generada por las distribuciones Gaussianas es una variedad estadística. Ahora, analicemos la geometría que se obtiene con la métrica g resultante en ((4.23)).

Para esto, será conveniente cambiar de coordenadas naturales a coordenadas (μ, σ) . Entonces, tomando el pullback de la métrica bajo la transformación correspondiente obtenemos

$$[g]_{\mu, \sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix} = g_{ab}. \quad (4.24) \quad \text{eq.lobmatrix}$$

Al estar en dos dimensiones, encontrar la métrica inversa se vuelve una tarea inmediata

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Primero calculemos los símbolos de Christoffel asociados a esta métrica en coordenadas (μ, σ) . Tenemos que en general:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ai} (g_{bi,c} + g_{ci,b} - g_{bc,i}) \quad (4.26)$$

²Ver por ejemplo [2]

Ahora, calculando explícitamente el índice superior y conciendo que se tiene una métrica diagonal tenemos que:

$$\Gamma_{bc}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu} (g_{\mu\mu,\sigma}[\delta_b^{\mu}\delta_c^{\sigma} + \delta_c^{\mu}\delta_b^{\sigma}]) = -\frac{1}{\sigma}[\delta_b^{\mu}\delta_c^{\sigma} + \delta_c^{\mu}\delta_b^{\sigma}] \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{bc}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma} \left(g_{\sigma\sigma,\sigma}[\delta_b^{\sigma}\delta_c^{\sigma} - \frac{1}{2}\delta_c^{\mu}\delta_b^{\mu}] \right) = -\frac{1}{\sigma}[\delta_b^{\sigma}\delta_c^{\sigma} - \frac{1}{2}\delta_c^{\mu}\delta_b^{\mu}] \quad (4.28)$$

Por lo tanto, los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\sigma\mu}^{\mu} = \Gamma_{\sigma\sigma}^{\sigma} = -\frac{1}{2}\Gamma_{\mu\mu}^{\sigma} = -\frac{1}{\sigma} \quad (4.29)$$

Al estar en dos dimensiones, y por la simetrías del tensor de Riemann, la única componente que debemos calcular es $R_{\mu\sigma\mu\sigma}$.

En general tenemos que el tensor de Riemann en términos de los símbolos de Christoffel es

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{ic}^a\Gamma_{bd}^i - \Gamma_{id}^a\Gamma_{bc}^i \quad (4.30)$$

Por lo que se tiene que calcular

$$R_{\mu\sigma\mu\sigma} = g_{\mu\alpha}R_{\sigma\mu\sigma}^{\alpha} = g_{\mu\alpha} (\Gamma_{\sigma\sigma,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\sigma\mu,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{i\mu}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\sigma}^i - \Gamma_{i\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\mu}^i) = -\frac{1}{\sigma^4}, \quad (4.31)$$

de donde obtenemos que

$$R_{\mu\sigma\mu\sigma} = -R_{\sigma\mu\mu\sigma} = R_{\sigma\mu\sigma\mu} = -R_{\mu\sigma\sigma\mu} = -\frac{1}{\sigma^4} \quad (4.32)$$

Ahora podemos calcular el tensor de Ricci, el cual se define como $R_{ab} = R_{bad}^a = g^{ac}R_{abcd}$, por lo cual

$$R_{ab} = g^{\mu\mu}R_{\mu a \mu b} + g^{\sigma\sigma}R_{\sigma a \sigma b} = -\frac{1}{\sigma^2} \left(\delta_a^{\sigma}\delta_b^{\sigma} + \frac{1}{2}\delta_a^{\mu}\delta_b^{\mu} \right). \quad (4.33)$$

Finalmente, podemos calcular el escalar de curvatura, el cual se define como $R = R_a^a$

$$R = g^{ab}R_{ab} = g^{\mu\mu}R_{\mu\mu} + g^{\sigma\sigma}R_{\sigma\sigma} = -1 \quad (4.34)$$

Entonces, la variedad estadística 2-dimensional que parametriza a la distribución normal unidimensional tiene curvatura constante y negativa, bastante parecido a la geometría de anti de Sitter. Con todo lo anterior, convendría estudiar las geodésicas en

este espacio. Así que, la ecuación geodésica en general tiene la forma:

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0 \quad (4.35)$$

de donde obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\ddot{\mu} - \frac{2}{\sigma} \dot{\mu} \dot{\sigma} = 0 \quad (4.36) \quad \text{eq.dif0.1}$$

y

$$\ddot{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} \dot{\mu}^2 - \frac{1}{\sigma} \dot{\sigma}^2 = 0 \quad (4.37) \quad \text{eq.dif0.2}$$

Recordemos que, σ solo está definido en los números reales positivos, con esto podemos manipular las ecuaciones de la siguiente forma dividiendo por σ

$$0 = \frac{\ddot{\mu}\sigma - \dot{\mu}\dot{\sigma}}{\sigma^2} - \frac{\dot{\mu}\dot{\sigma}}{\sigma^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mu}}{\sigma} \right) - \frac{\dot{\mu}\dot{\sigma}}{\sigma^2} \quad (4.38) \quad \text{eq.dif1}$$

y

$$0 = \frac{\ddot{\sigma}\sigma + \dot{\sigma}\dot{\sigma}}{\sigma^2} - \frac{\dot{\mu}\dot{\mu}}{2\sigma^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{\dot{\mu}\dot{\mu}}{2\sigma^2} \quad (4.39) \quad \text{eq.dif2}$$

Ahora, tomemos la ecuación ((4.38)) y multipliquemos por $\frac{\dot{\mu}}{2\sigma}$, mientras que a la ecuación ((4.39)) la multiplicaremos por $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$, sumemos las ecuaciones, y finalmente multipliquemos por cuatro, resultando

$$2\frac{\dot{\mu}}{\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mu}}{\sigma} \right) + 4\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\dot{\mu}}{\sigma} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right)^2 \right) = 0. \quad (4.40) \quad \text{eq.sumadif}$$

Por lo que la primer integral resulta inmediata, quedando la siguiente ecuación.

$$\left(\frac{\dot{\mu}}{\sigma} \right)^2 + 2 \left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right)^2 = C_1 \quad (4.41)$$

Donde $C_1 \geq 0$ es una constante de integración. Ahora si multiplicamos ((4.36)) por $\frac{1}{\sigma}$, vemos que es equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mu}}{\sigma^2} \right) = 0 \quad (4.42) \quad \text{eq.apoyo}$$

por lo que se tiene

$$\frac{\dot{\mu}}{\sigma} = C_2 \sigma \quad (4.43)$$

y, sustituyendo en ((4.40)), obtenemos finalmente que³

$$\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right)^2 + C_2^2 \sigma^2 = C_1^2 \quad (4.44) \quad \text{eq.difsigma}$$

En este momento hay que analizar dos casos: cuando $C_2 = 0$ y cuando no es cero. En el primer caso, resulta que las soluciones a las geodésicas son líneas rectas verticales ($\mu = cte, \sigma(t) = ke^{C_1 t}$).

En el segundo caso, cuando $C_2 \neq 0$, tomemos como ansatz $\sigma(t) = \frac{C_1}{C_2} \sin(s(t))$, sustituyendo en ((4.44)) obtenemos la condición para $s(t)$, es decir,

$$\dot{s} = C_1 \sin(s(t)). \quad (4.45)$$

En este caso, como $\dot{s}(t)$ es necesariamente distinta de cero, entonces $s(t)$ es monótona creciente o monótona decreciente. En la ecuación anterior se supuso que es monótona creciente.

Finalmente sustituyendo los resultados anteriores en ((4.42)) con las constantes reescaladas, obtenemos que

$$\dot{\mu} = C_1 \sigma(t) \sin(s(t)). \quad (4.46)$$

Para integrar a μ , hagamos simplemente lo siguiente

$$\mu(t) = \int d\mu = \int \frac{d\mu}{ds} ds = \int \dot{\mu} \frac{dt}{ds} ds = \int \sigma(t) ds = \frac{C_1}{C_2} \int \sin(s) ds = -\frac{C_1}{C_2} \cos(s(t)) + C_3 \quad (4.47)$$

Por lo tanto tenemos que, las geodésicas cuando $C_2 \neq 0$ son:

$$\sigma(t) = \frac{C_1}{C_2} \sin(s(t)) \quad (4.48)$$

$$\mu(t) = -\frac{C_1}{C_2} \cos(s(t)) + C_3 \quad (4.49)$$

Claramente, las geodésicas forman semi-circunferencias de radio $\frac{C_1}{C_2}$ y centradas en $(C_3, 0)$ (ver figura (4.2)).

Esta geometría que resulta de las distribuciones normales y la métrica de Fisher, resulta ser un caso muy peculiar conocido como el plano de Lobachevsky de transformaciones afines (ver ejemplo en el capítulo de Relatividad General), donde la métrica

³Donde las constantes han sido reescaladas por un factor de $\sqrt{2}$

que se obtiene es del tipo $((4.24))^{4}$ ^{eq. lobmatrix} y resulta ser una métrica invariante ante el grupo dos dimensional de transformaciones afines en el grupo de transformaciones afines.

Además, esto resulta ser consistente, ya que si tenemos una variable aleatoria X que se distribuye $N(\mu, \sigma)$, entonces si hacemos la transformación afín $Y = a + bX$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces Y se distribuye $N(a + b\mu, b^2\sigma)$. Bajo una transformación afín, una variable aleatoria X que se distribuye normal, se sigue distribuyendo normal pero con diferentes parámetros. Esta propiedad que cumplen las variables aleatorias que se distribuyen normal se sigue cumpliendo en un vector aleatorio n -dimensional. Es decir, si el vector aleatorio X se distribuye $N(\mu, \Sigma)$, con $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ matriz de covarianza, entonces $Y = a + BXB^t$ se distribuye $N(a + B\mu, B\Sigma B^t)$. Esta propiedad de las variables aleatorias Gaussianas puede ser motivación suficiente para obtener AdS en n dimensiones.

4.3. Gas Ideal Clásico a Modo de Ejemplo

Para un sistema clásico, se tiene que la función de distribución se ve de la forma (ver por ejemplo [9]):

$$\frac{\rho}{Z} = \frac{1}{h^3} e^{-\beta H} \quad (4.50)$$

donde Z es la función de partición, o visto de otro modo, es la constante que tiene el objetivo de cumplir la propiedad de la ecuación $((4.4))$ ^{eq. vol} con $vol(\Gamma) = 1$; además, Γ al ser el espacio fase microscópico, en este caso particular, se corresponde con (x, y, x, p_x, p_y, p_z) . H es el Hamiltoniano del sistema clásico, $\beta = \frac{1}{kT}$, con k la constante de Boltzmann. Finalmente h es la constante de Planck.⁵ Consideraremos que este gas ideal está en un volumen fijo V y en un reservorio de temperatura T .

El Hamiltoniano para un gas ideal monoatómico Clásico de N partículas se considera simplemente como $H_{gi} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} p_i^2$, con $p_i^2 = p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2$ de donde al sustituir en la ecuación 2.38 podemos obtener el valor de Z integrando en el espacio fase.

$$z = \frac{1}{N!h^{3N}} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i) d^3 x_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H_{gi}} d^3 p_i = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{1}{2m} p_i^2} d^3 p_i = \frac{V^N}{N!h^{3N}} (2\pi mkT)^{\frac{3N}{2}}$$

donde $f(x_i)$, es una distribución de probabilidad uniforme en el volumen (V) definido por el gas ideal.

⁴Salvo un difeomorfismo $\mu \rightarrow \sqrt{2}\mu$

⁵Para aclarar el por qué aparece algo cuántico (h) en nuestro tratamiento clásico del gas ideal revisar [6].

Por lo tanto, tenemos que la función de probabilidad del gas ideal en nuestro contexto es (usando la aproximación de Stirling para el logaritmo natural de un factorial):

$$\rho_{gi} = \exp \left(-\beta \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N p_i^2 + N \log \left(\frac{h^3 N}{V} \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 1 \right) \quad (4.51)$$

De la ecuación anterior podemos identificar directamente un multiplicador de Lagrange, $q = \beta$, y el potencial $w = \frac{h^3}{V} \log \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{-\frac{3}{2}}$. En este caso el potencial w resulta ser uno de los potenciales de Massieu. Entonces nuestro potencial, formalmente depende de β , es decir, $w = w(\beta)$ para un volumen fijo V a un número de partículas constantes N .

En este caso muy particular, el espacio fase τ del gas ideal está compuesto de las coordenadas $(w, q, p) = (w, \beta, u)$. Mientras que el espacio de equilibrio es de una sola dimensión de coordenada $\beta > 0$, que es la mitad de la recta real sin el cero.

5

Espaciotiempos Como Variedades Estadísticas

Emergent

En este capítulo se usará la definición de variedad estadística que se dio en el capítulo anterior y, en el caso particular de la familia de distribuciones Normales, se seguirán manipulando sus coordenadas para obtener Anti de Sitter euclídeo. Además, se verá la forma de obtener AdS como un espaciotiempo tal y como se definió en el capítulo 1. Finalmente, se interpretará el pullback de la función de densidad como una función de onda.

5.1. Potenciales para AdS_n

En esta sección comenzaremos por explorar la forma explícita de un potencial w tal que la métrica inducida en el espacio de equilibrio se corresponda con las soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica negativa. Es decir, se obtendrán funciones tal que su matriz Hessiana se corresponda a la métrica de Anti de Sitter n-dimensional.

De la ecuación ((4.21)), que es la métrica en el espacio de equilibrio, se le impondrán las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa. Es conocido en la literatura (por ejemplo [14]) que los únicos potenciales que cumplen con que su Hessiano es una métrica que es solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica distinta de cero son de la forma:

$$w(q^a) = -\frac{l^2}{4} \log \left(-q^1 + \sum_{i=2}^n f_i(q^i) \right), \quad (5.1) \quad \text{eq.potgen}$$

donde las f_i son funciones arbitrarias de las coordenadas q^i , l es una constante de integración relacionada con el radio de Anti de Sitter y se tiene la única restricción de que

la métrica es no degenerada.

5.2. Anti de Sitter en coordenadas conformes

En esta sección se hará el caso particular del espaciotiempo de Anti de Sitter en 4 dimensiones.

La métrica de Anti de Sitter en coordenadas estáticas, ver por ejemplo [12], es de la forma

$$g_{\text{AdS}} = - \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt \otimes dt + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi), \quad (5.2) \quad \text{eq.ads}$$

donde l es el radio de AdS .

Tomemos en particular, solo por simplicidad, funciones cuadráticas en el potencial eq.potgen ((5.1)), quedando de la forma

$$w(q^a) = -\frac{l^2}{4} \log(-q^1 + \sum_{i=2}^4 (q^i)^2) \quad (5.3) \quad \text{eq.potcuad}$$

Por tanto tendremos una métrica de la forma

$$\begin{aligned} g_0 = & \frac{1}{2} dq^1 \otimes dq^1 - 2q^2 dq^1 \otimes dq^2 - 2q^3 dq^1 \otimes dq^3 - 2q^4 dq^1 \otimes dq^4 + \quad (5.4) \quad \text{eq.adspc} \\ & ((q^2)^2 - (q^3)^2 - (q^4)^2 + q^1) dq^2 \otimes dq^2 + 4q^2 q^3 dq^2 \otimes dq^3 + 4q^2 q^4 dq^2 \otimes dq^4 + \\ & ((q^3)^2 - (q^2)^2 - (q^4)^2 + q^1) dq^3 \otimes dq^3 + 4q^3 q^4 dq^3 \otimes dq^4 + \\ & ((q^4)^2 - (q^3)^2 - (q^2)^2 + q^1) dq^4 \otimes dq^4, \end{aligned}$$

donde falta multiplicar por un factor global $\frac{l^2}{2(q^1 + \sum_{i=2}^4 (q^i)^2)^2}$.

Con un cálculo análogo al de la métrica de las Gaussianas en la sección anterior se puede ver que en este caso el escalar de curvatura de esta métrica es $R = -\frac{12}{l^2}$. Además, el tensor de Weyl de esta métrica resulta ser nulo. Por tanto, esto motiva a obtener Anti de Sitter en coordenadas conocidas.

El siguiente objetivo es que la métrica eq.adspc ((5.4)) se vea como la eq.ads ((5.2)) en otras coordenadas. Entonces, planteamos el siguiente difeomorfismo:

$$q^1 = \frac{(2r^2 - l^2)e^{\frac{2ti}{l}}}{2(r^2 - l^2)} \quad (5.5)$$

$$q^2 = \frac{r \cos(\theta)e^{\frac{ti}{l}}}{\sqrt{r^2 - l^2}} \quad (5.6)$$

$$q^3 = \frac{r \sin(\theta) \sin(\phi)e^{\frac{ti}{l}}}{\sqrt{r^2 - l^2}} \quad (5.7)$$

$$q^4 = -\frac{r \sin(\theta) \cos(\phi)e^{\frac{ti}{l}}}{\sqrt{r^2 - l^2}} \quad (5.8)$$

Si tomamos el pullback de la métrica ((5.4)) con el difeomorfismo anterior, obtendremos la métrica deseada. Nótese que en el difeomorfismo aparece una cantidad imaginaria, esto es para poder obtener la signatura correcta en la métrica.

Una vez que tenemos la métrica en coordenadas estáticas, se hará una última transformación para obtener Anti de Sitter en coordenadas conformes, es decir,

$$t = l \arctan \left(\frac{-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 + l^2}{2lt} \right) \quad (5.9)$$

$$r = \sqrt{\frac{l^2 x^2 + l^2 y^2 + \frac{1}{4}(t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + l^2)^2}{z^2}} \quad (5.10)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{2l\sqrt{x^2 + y^2}}{t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + l^2} \right) \quad (5.11)$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \quad (5.12)$$

Si tomamos el pullback de la métrica ((5.4)) con el difeomorfismo anterior, obtendremos

$$g_0 = \frac{l^2}{z^2} (-dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz). \quad (5.13)$$

eq.adsconformeg

Esta última forma de la métrica de Anti de Sitter en coordenadas conformes resulta ser muy familiar a la obtenida en el caso de una distribución normal en 2 dimensiones. Lo anterior, motiva la búsqueda de Anti de Sitter en alguna clase de distribuciones Gaussianas multivariantes. Una vez obtenido esto, podríamos dar alguna interpretación estadística de las coordenadas de Anti de Sitter.

5.3. AdS y la Familia de Distribuciones Normales

Retomando el ejemplo de la distribución normal que se vio en el capítulo anterior y teniendo en mente que existe un potencial w cuyo Hessiano resulta en la métrica de AdS_n . Sería interesante comprobar si la familia de distribuciones normales admite dicha métrica.

La extensión más simple a n dimensiones de la métrica vista en la ecuación (4.24) ^{eq.lobmatrix}, es pensar en una distribución normal multivariada con distintas medias, la misma varianza para todas las variables aleatorias y ninguna correlación entre estas. Es decir, tomaremos $n - 1$ variables aleatorias incorrelacionadas o independientes que se distribuyen de forma normal¹, es decir

$$\rho = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \mu_i)^2\right) \quad (5.14)$$

Al expandir la ecuación anterior, podemos encontrar los n multiplicadores de Lagrange, y el potencial w que depende de los mismos. Resulta ser que

$$q^1 = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (5.15)$$

$$q^{j+1} = -\frac{\mu_j}{\sigma^2} \quad j \in \{1, \dots, n-1\} \quad (5.16)$$

$$w(q^a) = \sum_{i=2}^n \frac{(q^i)^2}{4q^1} + \frac{n-1}{2} \log\left(\frac{\pi}{q^1}\right) \quad (5.17)$$

Usando la ecuación (4.21) ^{eq.submetric} para obtener la métrica, se puede verificar que en el caso particular de $n = 4$ se obtiene:

$$g_N = \left(\frac{(q^2)^2 + (q^3)^2 + (q^4)^2}{2(q^1)^3} + \frac{3}{2(q^1)^2} \right) dq^1 \otimes dq^1 - \frac{q^2}{(q^1)^2} dq^1 \otimes^s dq^2 - \frac{q^3}{(q^1)^2} dq^1 \otimes^s dq^3 \\ - \frac{q^4}{(q^1)^2} dq^1 \otimes^s dq^4 + \frac{1}{2q^1} dq^2 \otimes dq^2 + \frac{1}{2q^1} dq^3 \otimes dq^3 + \frac{1}{2q^1} dq^4 \otimes dq^4 \quad (5.18)$$

Haciendo un pequeño análisis con esta nueva métrica, se puede calcular que el escalar de Ricci es igual a -2 y el tensor de Weyl es nulo. Además, se obtiene que esta métrica

¹En este caso particular de distribuciones normales multivariantes, la no correlación implica independencia entre las variables aleatorias pero no es así en general.

es solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica $\Lambda = -2$, corroborando que se obtuvo AdS_4 euclídeo, con un radio $l = \sqrt{6}$.

Como siguiente paso, se llevará la métrica anterior a coordenadas $(\sigma, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ con ayuda del difeomorfismo definido en ((5.15)). Tomando el pullback se obtiene

$$g_N = \frac{6}{\sigma^2} d\sigma \otimes d\sigma + \frac{1}{\sigma^2} (d\mu_1 \otimes d\mu_1 + d\mu_2 \otimes d\mu_2 + d\mu_3 \otimes d\mu_3) \quad (5.19) \quad \text{eq.adse1}$$

En estas coordenadas es más fácil notar el parecido a la métrica de AdS_4 en coordenadas conformes. Sin embargo, hasta este momento se ha obtenido la métrica con una signatura euclídea. A pesar de esto, vale la pena seguir estudiando este caso por separado ya que se obtiene de forma directa a partir de la familia de distribuciones Normales.

5.3.1. AdS Euclídeo

El siguiente paso será conseguir un factor conforme uniforme. Para esto, simplemente haremos una transformación de coordenadas bastante simple, tomaremos $(\mu_i \rightarrow \sqrt{6}\mu_i = l\mu_i)$, donde l es el radio de AdS_4 como ya se mencionó antes. Aplicando este difeomorfismo a la métrica ((5.19)) obtenemos

$$g_N = \frac{6}{\sigma^2} (d\sigma \otimes d\sigma + d\mu_1 \otimes d\mu_1 + d\mu_2 \otimes d\mu_2 + d\mu_3 \otimes d\mu_3) \quad (5.20) \quad \text{eq.adseconforme}$$

Cabe mencionar que este difeomorfismo no afecta la normalización de la distribución normal.

Estas nuevas coordenadas hacen lucir a la métrica casi igual a AdS_4 en coordenadas conformes. No obstante, en ((5.13)) el factor conforme se corresponde a una coordenada espacial, mientras que en ((5.20)) el factor conforme es la varianza. Esto parece corresponderse directamente, ya que en el último caso, la varianza es una coordenada especial y nos gustaría tratarla como la coordenada temporal de nuestra variedad. Por lo tanto, tomaremos una última transformación de coordenadas. Tomando como referencia a [3] en la sección de tiempo conforme, identificamos el término $a^2(\sigma) = \frac{6}{\sigma^2} = \frac{l}{\sigma^2}$. Donde, se tiene directamente que el difeomorfismo necesario para ver la métrica en coordenadas de tipo FRW es

$$t = - \int^{\sigma} a(\sigma') d\sigma' = l(-\ln(\sigma) + k)$$

$$x = \mu_1$$

$$y = \mu_2$$

$$z = \mu_3$$

donde k es una constante de integración. Si escogemos, en particular, $k = -\frac{1}{2} \ln(\pi e)$ y tomamos el pullback de la transformación anterior, obtenemos

$$g_N dt \otimes dt + 6\pi e^{\frac{\sqrt{6}t}{3}-1} (dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) \tag{5.21}$$

Análogamente, este cambio de coordenadas no afecta la normalización de la distribución normal. Pero, calculando directamente la entropía de la distribución Normal se obtiene que

$$S_{dN} = \frac{l}{2} t \tag{5.22}$$

Resultado bastante interesante que nos gustaría obtener en el espaciotiempo AdS . Para finalizar, hay que recalcar que este mismo resultado se puede obtener para cualquier dimensión n , usando $n - 1$ variables aleatorias y el radio de AdS euclídeo será $l^2 = 2(n - 1)$.

5.3.2. El Espaciotiempo AdS

Ahora si, vamos a obtener al espaciotiempo AdS_4 tal y como se definió en el capítulo 1.

Primero, notemos que, tomando la métrica desde Eq. adseconforme ((5.20)), haciendo otro cambio de coordenadas, $\mu_i \rightarrow i\mu_i$, obtenemos la signatura deseada para definir a un espaciotiempo. La métrica queda de la forma

$$g_{\phi N} = \frac{6}{\sigma^2} (d\sigma \otimes d\sigma - d\mu_1 \otimes d\mu_1 - d\mu_2 \otimes d\mu_2 - d\mu_3 \otimes d\mu_3). \tag{5.23}$$

Antes de continuar analizando las consecuencias de complexificar a las medias μ_i , hagamos la conexión entre esta sección y la sección de AdS en coordenadas conformes.

La conexión directa entre estas últimas coordenadas y el potencial w que se mostró en general en la sección anterior se puede realizar haciendo lo siguiente, usando la letra q^i para el potencial de las distribuciones normales, ec. Eq. difms ((5.15)), y las letras y^i para el

potencial en general, ec. [\(5.1\)](#).

$$q^i = y^i \quad \forall i \in \{1, 3, \dots, n\} \quad (5.24)$$

$$q^2 = \sqrt{-l^2 y^1 \ln \left(\frac{\pi(-y^1 + \sum_{i=2}^n f_i(y^i))}{y^1} \right) - \sum_{i=3}^n (y^i)^2} \quad (5.25)$$

donde $l^2 = 2(n-1)$, quedando la conexión en general entre ambos potenciales y, de esta forma, uniendo la sección anterior con esta nueva como un caso particular.

Retomando las consecuencias de la complejificación de las medias μ_i . Es necesario ver el pullback de la distribución normal que se tenía, el cual ahora es de carácter imaginario. Sin embargo, resulta ser una función compleja cuya integral de la norma al cuadrado en todo el espacio muestra es convergente. Por ende, podemos interpretarla como una función de onda. De hecho, después de normalizarla, la función de onda queda de la forma

$$\psi_{0p} = \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{4}} \sigma^{\frac{n-1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (x_i^2 - il\mu_i x_i) \right) \quad (5.26)$$

Se cambiará la notación de las variables aleatorias x_i por p_i y dicho cambio se justificará más adelante. Por lo tanto, la función de onda se ve

$$\psi_{0p} = \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{4}} \sigma^{\frac{n-1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (p_i^2 - il\mu_i p_i) \right) \quad (5.27) \quad \text{eq. onda0p}$$

que es un paquete de ondas Normal centrado en el origen y de varianza $\sigma' = \frac{\sigma^2}{2}$. Sin olvidar que el radio de AdS_4 es $l = \sqrt{6}$ y que estamos en $n = 4$.

Vale la pena recalcar que la función de onda [\(5.27\)](#) está centrada en cero. Esto parece estar en contra de la intuición que nos diría que el paquete de ondas Normal debería también estar centrado en cada media, tal y como sucedía en el caso euclídeo. Esta fue la razón por la que las variables aleatorias se cambiaron de nombre. Vamos a suponer que dicha función de onda está en la representación de momentos y vamos a llevarla a la representación del espacio de configuración mediante una transformada de Fourier, la cual resulta ser

$$\psi_{0x} = \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{4}} \sigma^{\frac{n-1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^3 (\sigma^2 x_i - l\mu_i)^2 \right) \quad (5.28) \quad \text{eq. onda0x}$$

Ahora podemos interpretar a las coordenadas espaciales como los valores medios de la función de onda en el espacio de configuración y a la varianza como un tiempo conforme.

Entonces, nos gustaría poner a la métrica ((5.23)) en coordenadas tipo FRW donde podamos apreciar la coordenada temporal y las espaciales directamente. De acuerdo a [3], identificamos el término $a^2(\sigma) = \frac{6}{\sigma^2}$. Donde, se tiene directamente que el difeomorfismo necesario es

$$t = - \int^{\sigma} a(\sigma') d\sigma' = \sqrt{6} (-\ln(\sigma) + k) \quad (5.29)$$

$$x = \mu_1 \quad (5.30)$$

$$y = \mu_2 \quad (5.31)$$

$$z = \mu_3 \quad (5.32)$$

donde k es una constante de integración. Si escogemos, en particular, $k = -\frac{1}{2} \ln(\pi e)$ y tomamos el pullback de la transformación anterior, obtenemos

$$g_{\phi N} = dt \otimes dt - l^2 \pi e^{\frac{t}{3}-1} (dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) \quad (5.33)$$

eq.adscomovil

En este momento, podemos interpretar a cada media como una coordenada espacial y a la varianza como un tiempo comovil. En particular, de la forma de la métrica en ((5.23)), ((5.33)) y usando (5.28)), cuando el tiempo avanza la varianza se hace exponencialmente más pequeña. Es decir, estadísticamente hablando, conforme el tiempo avanza la posición espacial (los valores de las medias) es más precisa.

Siguiendo con la ecuación (5.28), tenemos que $t = l(-\ln(\sigma) - \frac{1}{2} \ln(\pi e))$ y si calculamos la entropía de la densidad de probabilidad que se obtiene a partir del cuadrado de la función de onda ((5.28)) resulta ser

$$S_{\psi} = \frac{l}{2} t \quad (5.34)$$

donde claramente la entropía de esta nueva densidad de probabilidad es el tiempo de AdS_4 en coordenadas comóviles.

Por tanto, de esta familia de distribuciones Normales de 3 variables aleatorias independientes con la misma varianza emerge AdS_4 euclídeo. Y de los paquetes de ondas Gaussianos emerge exactamente AdS_4 , donde sigma es un tiempo conforme y el tiempo comovil es la entropía del cuadrado de la función de onda. Análogamente, se pueden construir AdS_n usando $n - 1$ variables aleatorias con las mismas condiciones de inde-

pendencia y varianza, llevando a resultados similares.

5.4. Distribución Normal Correlacionada

Para finalizar el análisis de las distribuciones normales, vamos a obtener el potencial para un caso más general usando tres variables aleatorias, una varianza y una misma correlación para todas las variables aleatorias, es decir, para una matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & \alpha\sigma^2 \\ \alpha\sigma^2 & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 \\ \alpha\sigma^2 & \alpha\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

eq.variancematriz

donde Σ es una matriz positiva definida y α es el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias.

La densidad de probabilidad se define como

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right) \quad (5.36)$$

eq.densidadnormal

Si expandimos la ecuación anterior obtendremos los 5 multiplicadores de Lagrange y el potencial w , que se ven de la siguiente forma

$$q^1 = -\frac{\alpha + 1}{2\sigma^2(2\alpha^2 - \alpha - 1)} \quad (5.37)$$

$$q^2 = \frac{\mu_1\alpha - \mu_2\alpha - \mu_3\alpha + \mu_1}{\sigma^2(2\alpha^2 - \alpha - 1)} \quad (5.38)$$

$$q^3 = \frac{\mu_2\alpha - \mu_1\alpha - \mu_3\alpha + \mu_2}{\sigma^2(2\alpha^2 - \alpha - 1)} \quad (5.39)$$

$$q^4 = \frac{\mu_3\alpha - \mu_1\alpha - \mu_2\alpha + \mu_3}{\sigma^2(2\alpha^2 - \alpha - 1)} \quad (5.40)$$

$$q^5 = \frac{\alpha}{\sigma^2(2\alpha^2 - \alpha - 1)} \quad (5.41)$$

$$w = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\pi^3}{(q^1 + q^5)(2q^1 - q^5)^2} \right) \quad (5.42)$$

$$+ \frac{q^5((q^2)^2 - 2q^2(q^3 + q^4) + (q^3 - q^4)^2) + 2q^1((q^2)^2 + (q^3)^2 + (q^4)^2)}{8(q^1)^2 + 4q^1q^5 - 4(q^5)^2}$$

Tomando el Hessiano de la función $w(q^a)$ se obtiene una métrica bien definida que tiene particularmente una expresión poco entendible en estas coordenadas. Sin embargo, si calculamos algunos escalares, resulta ser que el escalar de Ricci tiene el valor de

$-\frac{5}{2}$, el escalar de Kretschmann tiene el valor de $\frac{4}{3}$ y el escalar de Weyl al cuadrado tiene el valor de $\frac{9}{8}$. En conclusión, en este caso más general en tres variables aleatorias que se distribuyen conjuntamente de forma normal se obtuvo una clase de variedad diferenciable muy particular. Aquella clase cuyos escalares mencionados anteriormente son todos constantes.

Tomando el pullback de la métrica Hessiana de la función (5.41) con el difeomorfismo definido por las ecuaciones (5.36-5.40) en las coordenadas $(\alpha, \sigma, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, obtenemos una métrica mucho más compacta, la cual es

$$g_{N\Sigma} = h(\alpha)^2(3(2\alpha^2 + 1)\sigma^4)d\alpha \otimes d\alpha + 6h(\alpha)\alpha\sigma d\alpha \overset{s}{\otimes} d\sigma + \frac{6}{\sigma^2}d\sigma \otimes d\sigma - \quad (5.43)$$

$$h(\alpha)(\alpha + 1)d\mu_1 \otimes d\mu_1 + h(\alpha)\alpha d\mu_1 \overset{s}{\otimes} d\mu_2 + h(\alpha)\alpha d\mu_1 \overset{s}{\otimes} d\mu_3 -$$

$$h(\alpha)(\alpha + 1)d\mu_2 \otimes d\mu_2 + h(\alpha)\alpha d\mu_2 \overset{s}{\otimes} d\mu_3 - h(\alpha)(\alpha + 1)d\mu_3 \otimes d\mu_3$$

donde $h(\alpha, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2(2\alpha^2 - \alpha - 1)}$.

Finalmente, si pensamos en α como un parámetro que nos determina el nivel de correlación entre las variables aleatorias y no como una coordenada. Es decir, hacemos $\alpha = \alpha_0$ con $-1 < \alpha_0 < 1$. Entonces, tomando el pullback de la métrica obtenemos

$$g_{N\alpha_0} = \frac{6}{\sigma^2}d\sigma \otimes d\sigma - \quad (5.44)$$

$$h(\alpha_0)(\alpha_0 + 1)d\mu_1 \otimes d\mu_1 + h(\alpha_0)\alpha_0 d\mu_1 \overset{s}{\otimes} d\mu_2 + h(\alpha_0)\alpha_0 d\mu_1 \overset{s}{\otimes} d\mu_3 -$$

$$h(\alpha_0)(\alpha_0 + 1)d\mu_2 \otimes d\mu_2 + h(\alpha_0)\alpha_0 d\mu_2 \overset{s}{\otimes} d\mu_3 - h(\alpha_0)(\alpha_0 + 1)d\mu_3 \otimes d\mu_3$$

donde $h(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2(2\alpha_0^2 - \alpha_0 - 1)}$.

Además, si calculamos el escalar de Ricci, el escalar de Kretschmann y el cuadrado del escalar de Weyl obtendremos los mismos resultados que para AdS_4 en el caso anterior.

Podemos decir que de la familia de distribuciones Gaussianas, solo se pueden obtener espaciotiempos maximalmente simétricos. En particular, si queremos obtener agujeros negros es necesario cambiar la distribución de probabilidad.

5.5. Geodésicas en Anti de Sitter

Como un ejercicio equivalente al del capítulo anterior, primero se obtendrán los símbolos de Christoffel de la métrica $(\overset{leg_ads}{(5.2)})$ que son distintos de cero, los cuales resultan ser

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad (5.45)$$

$$\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = -\Gamma_{rr}^r = \frac{r}{l^2 + r^2} \quad (5.46)$$

$$\Gamma_{tt}^r = -\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{r(l^2 + r^2)}{l^4} \quad (5.47)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot(\theta) \quad (5.48)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \quad (5.49)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2(\theta)(l^2 + r^2)}{l^4} \quad (5.50)$$

Ahora, usando la ecuación geodésica definida en (4.35), obtenemos

$$\ddot{t} + \frac{2r\dot{r}\dot{t}}{l^2 + r^2} = 0 \quad (5.51)$$

$$\ddot{r} + \frac{\dot{t}^2 r(l^2 + r^2)}{l^4} - \frac{r\dot{r}^2}{l^2 + r^2} - \frac{\dot{\theta}^2 r(l^2 + r^2)}{l^2} - \frac{\dot{\phi}^2 r \sin^2(\theta)(l^2 + r^2)}{l^2} = 0 \quad (5.52)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (5.53)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} + 2 \cot(\theta) \dot{\phi}\dot{\theta} = 0 \quad (5.54)$$

Gracias a la simetría esférica podemos restringirnos, sin pérdida de generalidad, al plano ecuatorial definido por $\theta = \frac{\pi}{2}$. De donde nuestro sistema de ecuaciones se transforma al siguiente

$$\ddot{t} + \frac{2r\dot{r}\dot{t}}{l^2 + r^2} = 0 \quad (5.55)$$

$$\ddot{r} + \frac{\dot{t}^2 r(l^2 + r^2)}{l^4} - \frac{r\dot{r}^2}{l^2 + r^2} - \frac{\dot{\phi}^2 r(l^2 + r^2)}{l^2} = 0 \quad (5.56)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} = 0. \quad (5.57)$$

La ecuación (5.54) es fácilmente integrable si notamos lo siguiente

$$\ddot{t} + \frac{2r\dot{r}\dot{t}}{l^2 + r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{t}(l^2 + r^2)}{l^2 + r^2} \right) = 0$$

por lo que se tiene directamente que

$$\dot{t} = \frac{E}{l^2 + r^2}. \quad (5.58)$$

Análogamente con la ecuación (5.56) (cambiando $l^2 + r^2 \rightarrow r^2$), obtenemos que

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} \quad (5.59)$$

donde E y L son constantes de integración. Además queremos que la geodésica sea de una partícula masiva, es decir, que sea una geodésica tipo tiempo, por ende, requerimos que se cumpla

$$g(X, X) = -1 \quad (5.60)$$

Con las condiciones que se han puesto hasta este momento y usando las ecuaciones que hemos podido integrar, esta última condición implica lo siguiente

$$\dot{r}^2 = \frac{E^2}{l^4} - \frac{l^2 + r^2}{l^2}. \quad (5.61)$$

Finalmente, si nos restringimos al movimiento radial, es decir, $\phi = cte$ o también $L = 0$ y, usando (5.50) y (5.57) en la ecuación (5.55), obtenemos finalmente

$$\ddot{r} + \frac{r}{l^2} = 0 \quad (5.62)$$

cuya solución más general es

$$r = A \sin\left(\frac{\tau}{l}\right) + B \cos\left(\frac{\tau}{l}\right) \quad (5.63)$$

6

Conclusiones

con

A lo largo del presente trabajo se definió el concepto de variedad Estadística como aquella variedad diferenciable cuyos puntos representan una distribución de probabilidad y que cuenta con una estructura métrica conocida como la métrica de información de Fisher. Uno de los principales objetivos del trabajo fue responder a la pregunta ¿Es el espaciotiempo una variedad estadística? y la respuesta es claramente no, ya que cada uno de los puntos en la variedad diferenciable del espaciotiempo no representa una distribución de probabilidad. En este caso, representan una función de onda y por esta razón no cumple con la definición de variedad estadística. Además, el espaciotiempo (AdS) se puede ver como una variedad diferenciable cuyos puntos representan un paquete de ondas Gaussiano. En este sentido, podemos conjeturar que en general cualquier espaciotiempo será una variedad diferenciable cuyos puntos representan una función de onda.

En el caso de AdS_n se obtuvieron paquetes de onda Gaussianos. Los cuales, después de tratar de interpretar a las medias como las coordenadas espaciales de AdS nos dimos cuenta de que la función de onda obtenida directamente se encuentra en el espacio de momentos. Obteniéndose así una interpretación para las variables aleatorias del paquete de ondas. Asimismo, haciendo una transformada de Fourier, se pudo pasar al espacio de configuración en donde se pudo interpretar a los promedios de estas nuevas variables aleatorias como las coordenadas de AdS y a la varianza como un tiempo conforme. En este sentido, decimos que AdS emerge. Es importante notar que en este trabajo la estructura de variedad diferenciable se consigue vía geometría de la información y se están reinterpretando sus coordenadas como espaciotiempo ya que cumple con la definición de este tipo de estructura.

Siguiendo con el caso de AdS , se vio que la entropía de la amplitud de probabilidad que se obtiene del cuadrado de la función de onda en el espacio de configuración es un medio del radio de AdS veces el tiempo comóvil. Además, es muy conocido en teoría de la información que la entropía de la distribución normal es una cota superior para la entropía de todas las distribuciones de probabilidad definidas en los mismos soportes y cuya varianza este definida como $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Es decir, $S(\rho) \leq S(\rho_N)$. De este hecho surge la idea de que espaciotiempos maximalmente simétricos vienen de funciones de onda (amplitudes de probabilidad) cuya entropía es máxima. Por esta razón, no se pudo obtener un agujero negro usando una distribución de máxima entropía. Se tiene pensado que una densidad de probabilidad que no es máximamente entrópica resultará en otro tipo de espaciotiempo que no es maximalmente simétrico, en particular este sería el camino para buscar un agujero negro. Así pues, quedan muchas opciones por seguir explorando.

Finalmente, hay que notar que si cambiamos la definición de nuestro multiplicador de Lagrange w en la ecuación (4.7) poniendo $+w (\int_{\Gamma} \rho d\Gamma - 1)$ y al mismo tiempo ponemos un signo negativo global a $w(q^a)$ en (5.17). Entonces, no cambiará ninguna propiedad ni de la normalización de la distribución Gaussiana, ni de la construcción de la variedad de contacto donde está encajada la variedad estadística. Haciendo esto, lo que se obtendrá será dS_n euclídeo y con los cambios de coordenadas adecuadas se puede construir el espaciotiempo dS_n , todo completamente análogo al caso que se trabajó explícitamente con AdS , cumpliendo exactamente las mismas propiedades.

A

Mecánica Hamiltoniana

geomsimplectica

La mecánica Hamiltoniana es una formulación matemática de la mecánica clásica en donde las cantidades conservadas tienen un papel fundamental en la solución al problema planteado. En este capítulo, se revisará la geometría que hay detrás de la mecánica Hamiltoniana, en este sentido, se darán los principales resultados de la geometría simpléctica. Para esto, se comenzará definiendo detalladamente los mapeos necesarios para dar estructura simpléctica a nuestra variedad diferenciable.

A.1. Variedades Simplécticas

A partir de esta sección se abordará únicamente la mecánica Hamiltoniana, y se finalizará con un ejemplo usando el péndulo simple como sistema a describir.

Sea una variedad diferenciable, M , $2n$ -dimensional.

Definición A.1.1 *Definimos una estructura simpléctica en M si existe una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada definida para todo punto en M . Esto es, existe $w^{(2)}$ en M tal que $dw^{(2)} = 0$ y para todo $X \neq 0$ en T_pM existe Y en T_pM tal que $w^{(2)}(X, Y) \neq 0$. Al par $(M, w^{(2)})$ se le conoce como variedad simpléctica.*

Es importante notar, que el espacio fase de cualquier sistema mecánico tiene estructura simpléctica, ya que, cualquier variedad diferenciable de dimensión n , su haz cotangente estará dotado de estructura simpléctica de la siguiente forma. Dadas las coordenadas generalizadas del problema en cuestión q^i , se puede construir la variedad de configuración cuya dimensión (n) está asociada a los grados de libertad del problema. Dado un punto p en la variedad n -dimensional, tomemos la base de 1-formas $p_i \in T_p^*V$. Entonces, se puede demostrar que el haz cotangente $2n$ -dimensional (coordenadas (p_i, q^i)) tiene estructura

simpléctica, con $w^{(2)} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$, conocido como el teorema de Darboux.

A.2. Vectores Hamiltonianos

De la misma forma en que una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable establece un isomorfismo entre vectores y 1-formas, la estructura simpléctica hace un trabajo parecido, gracias a que $w^{(2)}$ es no degenerada.

Definición A.2.1 Para cada vector $X \in T_p M$ en una variedad simpléctica $(M, w^{(2)})$, asociamos la 1-forma $w_X \in T_p^* M$ como $w_X(Y) = w^{(2)}(Y, X)$, para todo vector $Y \in T_p M$.

La definición anterior induce un isomorfismo $I : T_p^* M \rightarrow T_p M$.

Ahora, tomemos una función $H \in C^\infty(M)$. Entonces dH es una 1-forma en M y definimos el vector Hamiltoniano como IdH y a H se le denominará función Hamiltoniana.

A.3. Flujos de fase Hamiltonianos

Dada una función Hamiltoniana H con su respectivo vector Hamiltoniano asociado, vamos a definir el flujo de fase como un mapeo $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, que puede ser visto como un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en M para una $t \in \mathbb{R}$ fija. Dado $p \in M$

Definición A.3.1

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma(t, p) = IdH_p \quad (\text{A.1})$$

El mapeo $\sigma(t, p)$ es llamado el flujo de fase Hamiltoniano (ffH) de función Hamiltoniana H .

Para ver un poco más a detalle el ffH de alguna función H , veamos en general la forma de encontrarlo. Dada alguna función H en una variedad simpléctica $(M, w^{(2)})$, sabemos que el vector $IdH \in TM$ puede escribirse en alguna base de la forma $IdH_p = X^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ para una carta coordenada alrededor de un punto $p \in M$, con $X^a \in C^\infty(M)$. Usando la definición anterior, vemos que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d}{dt} \sigma^a(t, x_0^a) = X^a \quad (\text{A.2})$$

con las condiciones iniciales

$$\sigma^a(0, x_0^a) = x_0^a \quad (\text{A.3})$$

Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, el flujo existe y es único al menos localmente.

El ffH, visto como grupo uniparamétrico dada $t \in \mathbb{R}$, $\sigma_t : M \rightarrow M$ cumple con las siguientes propiedades.

- σ_0 es el mapeo identidad.
- $\sigma_{-t} = \sigma_t^{-1}$.
- $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}$

Se puede mostrar que el ffH preserva la estructura simpléctica de la variedad, es decir

$$\sigma_t^* w^{(2)} = w^{(2)}. \quad (\text{A.4})$$

A.4. Álgebras de Lie

El objetivo de esta sección será caracterizar un álgebra de Lie en una variedad simpléctica $(M, w^{(2)})$, además de llegar a caracterizar el conocido paréntesis de Poisson que es tan elemental en la mecánica Hamiltoniana.

Definición A.4.1 *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial L tal que, cuenta con un producto antisimétrico $[-, -] : L \times L \rightarrow L$ y este cumple con la identidad de Jacobi, $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.*

Una vez definida un álgebra de Lie, comencemos con un análisis de la estructura que podemos explotar de una variedad simpléctica.

Notemos que, dado un campo vectorial X en M podemos asociar (punto a punto):

- El flujo $\sigma_t : M \rightarrow M$ definido en (A.2) y (A.3).
- El operador diferencial para cualquier función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, que cumple $L_X f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\sigma_t(p)) = X(f)$, donde (σ_t) , es el flujo asociado al vector X .
- El operador diferencial para un vector $Y \in T_p M$ conocido como el paréntesis de Lie o derivada de Lie. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$, que solo tiene sentido al ser aplicado a una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Con $[X, Y]f = (L_X L_Y - L_Y L_X)f$

Lema A.4.1 *El paréntesis de Lie cumple la identidad de Jacobi*

Dem. Sean $X, Y, Z \in TM$. Ahora, tomemos $[X, [Y, Z]]f$ con f alguna función en M y calculemos explícitamente.

$[X, [Y, Z]]f = X[Y, Z]f - [Y, Z]X(f) = X(Y(Z(f))) - X(Z(Y(f))) - Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f)))$. Haciendo esto para las otras dos combinaciones, tenemos que

$$[Y, [Z, X]]f = Y(Z(X(f))) - Y(X(Z(f))) - Z(X(Y(f))) + X(Z(Y(f)))$$

$$[Z, [X, Y]]f = Z(X(Y(f))) - Z(Y(X(f))) - X(Y(Z(f))) + Y(X(Z(f)))$$

Sumando los tres términos, tenemos que $([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]])f = 0$. Como f es arbitraria. Entonces, se cumple que

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Por otro lado, regresemos con las funciones Hamiltonianas definidas anteriormente, y definamos la siguiente estructura.

Definición A.4.2 *El paréntesis de Poisson (F, H) Es la derivada de la función F a lo largo del flujo σ_t^H , es decir, dado un punto $p \in M$*

$$(F, H)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\sigma_t^H(p)) \quad (\text{A.5})$$

notese que en la definición anterior se añadió en la notación de flujo la función asociada. Además, el resultado del paréntesis de Poisson es otra función.

Proposición A.4.1 *Las siguientes definiciones son equivalentes:*

- 1 $(F, H)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\sigma_t^H(p)) = L_{IdH}F(p)$
- 2 $(F, H)_p = dF(IdH)$
- 3 $(F, H)_p = w^{(2)}(IdH, IdF)$

Con la última equivalencia es claro ver que $(F, H) = -(H, F)$ y que el paréntesis de Poisson es bilineal en el campo de los números reales.

Dem. Veamos que la primer definición es equivalente a la segunda. Por definición (F, H) Es la derivada de F a lo largo del vector Hamiltoniano producido por el flujo σ_t^H , el cual debido al isomorfismo de la variedad simpléctica, se puede escribir como el vector IdH y por definición de como actúa una forma diferenciable en un vector, tenemos que $(F, H) = dF(IdH)$ que es la derivada de F a lo largo del vector IdH .

Por otro lado, por definición del isomorfismo entre formas y vectores en una variedad simpléctica $dF(X) = w^{(2)}(X, IdF)$ por tanto $(F, H) = dF(IdH) = w^{(2)}(IdH, IdF)$.

Lo cual prueba la consistencia y equivalencia de las 3 proposiciones anteriores.

Es claro ver que H es una primera integral del fFH de la función H , ya que la derivada de H en la dirección de algún vector $X \in TM$ es igual a $dH(X)$. Queremos derivar en la dirección del vector Hamiltoniano, es decir en la dirección del vector IdH . Por tanto, $dH(IdH) = w^{(2)}(IdH, IdH) = 0$. Adicionalmente se puede demostrar que si $(F, H) = 0$ entonces F es también una primer integral del fFH de H .

Por tanto es equivalente decir que dado $(F, H) = 0$, F es una primer integral del FFH de la función H o que H es una primer integral del fFH de la función F .

Proposición A.4.2 *El paréntesis de Poisson cumple la regla de Leibniz*

Dem. Por la propiedad antisimétrica, basta demostrarlo en la primer entrada. Entonces, sean F, G y H funciones en M

$$(FG, H) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} FG(\sigma_t^H(p)) = \left[\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\sigma_t^H(p)) \right] G(\sigma_t^H(p)) + F(\sigma_t^H(p)) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} G(\sigma_t^H(p)).$$

Nótese que, usando la definición dos o tres del paréntesis de Poisson, la regla de Leibniz se sigue directamente del uso de formas diferenciales y vectores.

Antes de continuar con las propiedades del paréntesis de Poisson, veremos uno de los teoremas más importantes para el desarrollo de este trabajo.

Teorema A.4.1 Teorema de Darboux. *Sea $w^{(2)}$ una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada en una vecindad de un punto $p \in M$. Entonces, existe alguna vecindad del punto p en la cual se puede escoger el espacio coordenado $\mathbb{R}^2 = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ tal que la 2-forma diferencial se pueda escribir de la forma estándar, es decir, $w^{(2)} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.*

El teorema de Darboux ¹ nos permite extender a toda variedad simpléctica cualquier aseveración de carácter local e invariante ante transformaciones canónicas que pueda ser probada en el espacio coordenado \mathbb{R}^{2n} . En este sentido, bastará trabajar en las coordenadas de Darboux para probar propiedades en general de objetos invariantes ante transformaciones canónicas.

¹Para una demostración del teorema, ver [15]

A.5. Resultados en las coordenadas de Darboux

En coordenadas de Darboux, $\{p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n\}$, podemos escribir la 2-forma simpléctica como $w^{(2)} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$. Además, tenemos la base de vectores y 1-formas, $\{\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n}, \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n}\}$ y $\{dp_1, \dots, dp_n, dq^1, \dots, dq^n\}$, y finalmente la 1-forma canónica $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq^i$, con $w^{(2)} = d\lambda$. Con estas definiciones en mente veremos la forma explícita del paréntesis de Poisson y algunas de sus propiedades.

Primero vamos a ver la definición explícita del isomorfismo entre formas y vectores, para la construcción de vectores Hamiltonianos dada una función hamiltoniana.

Se definió la 1-forma asociada a un vector en particular de la siguiente forma.

$$w_X = -i_X w^{(2)} \quad (\text{A.6})$$

que vista en coordenadas de darboux se ve de la siguiente manera

$$\sum_{i=1}^n [w_{p_i} dp_i + w_{q_i} dq^i] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n dp_i \wedge dq^j (-, [X_{p_j} \frac{\partial}{\partial p_j} + X_{q_j} \frac{\partial}{\partial q^j}]) \quad (\text{A.7})$$

Usando la expresión antisimétrica del producto exterior en términos del producto tensorial,

$$\sum_{i=1}^n [w_{p_i} dp_i + w_{q_i} dq^i] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [dp_i \otimes dq^j - dq^j \otimes dp_i] (-, [X_{p_j} \frac{\partial}{\partial p_j} + X_{q_j} \frac{\partial}{\partial q^j}]) \quad (\text{A.8})$$

Resulta que las componentes de nuestra 1-forma deseada son

$$(w_{p_i}, w_{q_i}) = (X_{q_i}, -X_{p_i}). \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, escribiendo todo en componentes, podemos ver el isomorfismo como una matriz de $2n \times 2n$ que es de la forma.

$$I = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Cabe señalar que la inversa de I es $-I$ ya que $I^2 = -1_{2n}$. Y podemos notar que se tienen los isomorfismos de la siguiente manera,

²Sea w una p-forma y X un campo vectorial, entonces definimos la contracción de w con X en la primer entrada de w como $w(X, \cdot, \dots, \cdot) = i_X w$

$$(w_{pi}, w_{qi}) = -I(X_{pi}, X_{qi}) \quad (\text{A.11})$$

y

$$(X_{pi}, X_{qi}) = I(w_{pi}, w_{qi}) = (-w_{qi}, w_{pi}). \quad (\text{A.12})$$

Con el isomorfismo escrito explícitamente, ya podemos ver como se ve un vector Hamiltoniano en coordenadas de Darboux. Consideremos una función H , entonces

$$IdH = I \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \right] \quad (\text{A.13})$$

que en componentes se ve de la forma

$$(H_{pi}, H_{qi}) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \quad (\text{A.14})$$

De la ecuación anterior podemos notar explícitamente que si tomamos una curva integral del vector Hamiltoniano con parámetro t (tiempo), entonces obtenemos, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ y $\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ que son las ecuaciones de Hamilton para la mecánica clásica.

Con el isomorfismo, se puede ver a la 2-forma simpléctica como un producto antisimétrico entre vectores de la siguiente forma.

$$w^{(2)}(X, Y) = -IY(X) = \sum_{i=1}^n [Y_{qi}X_{pi} - Y_{pi}X_{qi}] \quad (\text{A.15})$$

En seguida, veremos la escritura en coordenadas de Darboux del paréntesis de Poisson.

Usando la definición del paréntesis de Poisson en la proposición A.4.1 en la equivalencia 3, vemos que dadas dos funciones F y H el paréntesis de Poisson se define como $(F, H) = w^{(2)}(IdH, IdF)$ y usando explícitamente la 2-forma simpléctica como en la ecuación (A.15) y los resultados de las ecuaciones (A.13) y (A.14), en componentes esto se ve de la forma

$$(F, H) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] \quad (\text{A.16})$$

Una vez que tenemos el paréntesis de Poisson en coordenadas de Darboux es fácil demostrar el siguiente teorema.

Proposición A.5.1 *El paréntesis de Poisson satisface la identidad de Jacobi, i.e. Da-*

das tres funciones F, G y H , tenemos que $(F, (G, H)) + (G, (H, F)) + (H, (F, G)) = 0$

Corolario A.5.1 *La función resultante de la aplicación del paréntesis de Poisson a dos primeras integrales F_1, F_2 del flujo Hamiltoniano con función Hamiltoniana H es también una primer integral.*

Dem. Usando la identidad de Jacobi tenemos que

$$(F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) + (H, (F_1, F_2)) = 0$$

de donde se obtiene

$$((F_1, F_2), H) = (F_1, (F_2, H)) + (F_2, (H, F_1)) = 0$$

por ser primeras integrales, lo cual demuestra lo que se requería.

Este resultado es de suma importancia, ya que dadas dos primeras integrales podemos obtener una tercera de forma automática. Aunque, no necesariamente será independiente de las otras dos y puede ser el caso que la función resultante sea la función cero. Sin embargo, en el caso de las componentes del momento angular, este corolario nos dice que si dos componentes del momento angular se conservan la tercera también lo hará.

Corolario A.5.2 *Sean IdF e IdG dos vectores Hamiltonianos de función Hamiltoniana F y G respectivamente. Consideremos el vector $[IdF, IdG]$. Entonces este vector resultante es Hamiltoniano de función Hamiltoniana $(F, G) = A$.*

Dem. Consideremos la identidad de Jacobi de la siguiente forma dada K una función diferenciable cualquiera

$$(K, A) = ((K, F), G) - ((K, G), F)$$

ahora, usando el operador diferencial asociado al vector Hamiltoniano respectivamente con la primer equivalencia en la definición del paréntesis de Poisson, tenemos

$$L_A K = [L_G L_F - L_F L_G] K$$

como es válido para cualquier función K , tenemos que A tiene asociado un vector Hamiltoniano dado por la ecuación anterior.

Con los resultados anteriores podemos notar que los vectores Hamiltonianos en una variedad simpléctica forman una subálgebra de Lie de todos los vectores en la variedad. Además, las primeras integrales del flujo de fase hamiltoniano forman una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de todas las funciones. Finalmente, el kernel del mapeo que manda funciones Hamiltonianas del álgebra de Lie en vectores Hamiltonianos del álgebra de Lie consiste en las funciones localmente constantes.

Como se dijo al principio de este capítulo, las cantidades conservadas juegan un papel fundamental en la mecánica Hamiltoniana. Para esto veamos que en el párrafo anterior dimos una generalización del teorema de Noether³. Notemos que, como se dijo antes, dado un flujo de fase Hamiltoniano IdH con función Hamiltoniana H , si conocemos algún otro flujo IdF que conmuta con IdH ($[IdF, IdH]$) entonces es posible construir una primer integral ya que, $(F, H) = cte$.

Un detalle importante del paréntesis de Poisson es que, dada una función F y un Hamiltoniano H , la derivada total temporal de F es la siguiente

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} \right] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] = (F, H) \quad (\text{A.17})$$

de ahí que se puede ver al paréntesis de Poisson como una derivada total de la función F , dado un Hamiltoniano H . Formalmente hablando el tiempo tendría que ser el parámetro con el cual está definida la curva integral del vector Hamiltoniano de función H y la derivada total temporal de F no es más que la derivada de Lie de F a lo largo del vector Hamiltoniano, es decir

$$\mathcal{L}_{X_H} F = X_H(F) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right] = (F, H)$$

Siguiendo en coordenadas de Darboux podemos definir la llamada 1-forma canónica en el espacio fase de la siguiente manera.

Definición A.5.1 (*1-Forma canónica*) Dada una variedad simpléctica en una carta coordenada en coordenadas de Darboux, se define la 1-forma canónica como

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \quad (\text{A.18})$$

³El teorema de Noether dice lo siguiente: Dada una variedad diferenciable de configuración y su lagrangiano L con $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$. Si el sistema (M, L) acepta algún grupo uniparamétrico $h^s : M \rightarrow M$ y $s \in \mathbb{R}$, i.e. $L(h_* v) = L(v)$ para todo $v \in TM$ entonces L tiene una primer integral definida como:

$$I(q, \dot{q}) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s(q)}{ds} \right|_{s=0}.$$

En este sentido, podemos definir la 2-forma simpléctica como la derivada exterior de la 1-forma canónica, es decir, $w^{(2)} = d \sum_{i=1}^n p_i dq^i = \sum_{i=1}^n dp_i dq^i$.

Para finalizar los resultados en las coordenadas de Darboux, se hablará de la base simpléctica de vectores. Así como en una variedad con estructura euclídeana se puede encontrar una base ortonormal mediante el teorema de Gram-Schmidt, para una variedad simpléctica se puede demostrar algo parecido conocido como la base simpléctica de vectores.

Usando la ecuación (2.16) podemos ver que definimos un producto entre vectores totalmente antisimétrico con ayuda de la estructura simpléctica de la variedad, en este sentido, la base simpléctica de vectores la definimos como aquella que cumple lo siguiente

$$w^{(2)}(e_{pi}, e_{qj}) = \delta_{ij} \quad (\text{A.19})$$

$$w^{(2)}(e_{pi}, e_{pj}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$w^{(2)}(e_{qi}, e_{qj}) = 0 \quad (\text{A.21})$$

Es evidente que en coordenadas de Darboux, usando la base coordinada de vectores, se cumplen las tres ecuaciones anteriores. Se puede mostrar que una transformación es canónica si y solo si manda la base simpléctica en una nueva base simpléctica.

A.6. Subvariedades Lagrangianas

Cuando describimos un sistema físico, lo más conveniente es escoger como coordenadas aquellas conocidas como coordenadas generalizadas, en otras palabras, es tomar el máximo número de coordenadas necesarias para describir el problema tomando en cuenta las constricciones. Por ejemplo en el tratamiento de un péndulo simple ingenuamente podemos usar las coordenadas (x, y) en un plano para describir el movimiento. Sin embargo, podemos notar que la distancia de la cuerda es fija, lo que nos constriñe el movimiento del péndulo a una circunferencia, siendo únicamente necesaria la coordenada angular en coordenadas polares siendo r constante e igual a la distancia de la cuerda. Estas coordenadas generalizadas nos definen lo que conocemos como la variedad de configuración de un sistema físico cuya dimensionalidad se conoce como los grados de libertad del sistema. En esta variedad es donde se tomará el haz cotangente para definir el espacio fase del sistema.

Sin tomar en cuenta el espacio fase del sistema y quedándonos únicamente con la

variedad de configuración podemos trabajar a nivel de las ecuaciones de Euler-Lagrange para solucionar el problema en cuestión. La variedad de configuración tiene dimensionalidad n y el espacio fase (haz cotangente) es de dimensionalidad $2n$, esta variedad de configuración es un primer ejemplo de una subvariedad Lagrangiana del espacio fase. Por otro lado, las subvariedades Lagrangianas tienen una definición más general:

Definición A.6.1 (Subvariedades Lagrangianas) *Sea una pareja simpléctica $(M, w^{(2)})$ con la dimensionalidad de M igual a $2n$. Si X es una subvariedad de M con un encaje $f : X \rightarrow M$ tal que $f^*w^{(2)} = 0$ entonces diremos que X es una subvariedad isotrópica de M . Si adicionalmente la dimensión de X es n , entonces diremos que X es una subvariedad Lagrangiana de M .*

Notemos que una subvariedad Lagrangiana es maximalmente isotrópica.

Como ejemplo, veamos que cualquier fibra del haz Cotangente de la variedad de configuración X es una subvariedad Lagrangiana. Al ser cada fibra del haz cotangente el espacio cotangente a un punto q en X , tenemos que T_q^*X es de dimensionalidad n . Por otro lado, usando las coordenadas de Darboux en el espacio fase tenemos que si f es el encaje de X en M (T_q^* en T^*) entonces

$$f^*w^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq^k \left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) = 0. \quad (\text{A.22})$$

Otro ejemplo, es precisamente el espacio de configuración. Para esto veamos que el haz tangente visto como haz fibrado vectorial, su sección cero es difeomórfico al espacio de configuración. En este sentido, bastaría ver que la sección cero es una subvariedad Lagrangiana. Entonces, notemos que la sección cero se define como $X_0 := \{(p_i, q^i) \in T_{q^i}^* | p_i = 0\}$ donde se sigue que $f^*w^{(2)} = d\alpha|_{X_0} = d\sum_{i=1}^n p_i dq^i|_{p_j=0} = 0$. Por tanto, la sección cero es una subvariedad Lagrangiana y al ser difeomórfica al espacio de configuración se sigue que el espacio de configuración es una subvariedad Lagrangiana.

A.7. Péndulo simple a modo de ejemplo

En esta sección, usaremos toda la geometría descrita en este capítulo para abordar el problema del péndulo simple. Se comenzará dando el Hamiltoniano del sistema. Claramente, se considerará un péndulo simple ideal, es decir, será compuesto por una cuerda de masa despreciable que no genera fricción.

El Hamiltoniano del sistema con una masa puntual m y longitud de cuerda l es

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos(\theta).$$

En este caso, las coordenadas de Darboux se tomarán como $p = \dot{\theta}ml^2$ y como θ . Lo que nos conduce a la expresión para la 2-forma simpléctica

$$w = dp \wedge d\theta.$$

Además, $dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial \theta} d\theta = \frac{p}{ml^2} dp + mgl \sin(\theta) d\theta$, de donde obtenemos las ecuaciones de Hamilton para el sistema

$$\dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}$$

$$\dot{p} = -mgl \sin(\theta).$$

H es un invariante de integración, pero H es exactamente igual a la energía total del sistema, por lo que la energía del sistema se conserva.

Es sencillo ver que la variedad de configuración del péndulo simple es S^1 , mientras que la variedad simpléctica o haz cotangente es el haz fibrado trivial $S^1 \times \mathbb{R}$, que es exactamente un cilindro. Por lo tanto, una trayectoria en particular del péndulo simple está sujeta a vivir en el cilindro. En la figura 2.1 se ve una solución a las ecuaciones de Hamilton cuando $(m = 1kg, l = 1m, g = -10 \frac{m}{s^2})$.



Figura A.1: Trayectoria del péndulo simple vista en la variedad Simpléctica.

Cyl

B

Vectores Hamiltonianos en la estructura de contacto

En esta sección vamos a definir un vector Hamiltoniano dada una función Hamiltoniana $H : \tau \rightarrow \mathbb{R}$. Para esto, será necesario usar la estructura de contacto de la variedad diferenciable y se usará la identidad de Cartan, que se puede ver de la forma:

$$\mathcal{L}_X w = i_X dw + di_X w \quad (\text{B.1})$$

donde $\mathcal{L}_X w$ es la derivada de Lie de w a lo largo del vector X , e $i_X w$ es la operación contracción definida anteriormente.

Ahora, usando la estructura de contacto de nuestra variedad diferenciable τ y una función H .

Definición B.0.1 *El vector Hamiltoniano X_H de función Hamiltoniana H es aquel tal que*

$$\mathcal{L}_{X_H} \eta = \xi(H) \eta \quad (\text{B.2})$$

con la relación

$$H = \eta(X_H) \quad (\text{B.3})$$

que en las coordenadas de Darboux podemos calcular explícitamente, suponiendo sin pérdida de generalidad que el vector Hamiltoniano se ve de la forma

$$X_H = f_w \frac{\partial}{\partial w} + f_a \frac{\partial}{\partial p_a} + g^a \frac{\partial}{\partial q^a}$$

con f_w , f_a y g^a funciones arbitrarias.

Por un lado, la primer condición nos dice que (usando la identidad de Cartan):

$$\mathcal{L}_{X_H}\eta = i_{X_H}d\eta + di_{X_H}\eta = \frac{\partial H}{\partial w}dw + \left(\frac{\partial H}{\partial p_a} - g^a\right)dp_a + \left(f_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\right)dq^a = \frac{\partial H}{\partial w}(dw + p_a dq^a) \quad (\text{B.4})$$

de donde concluimos que

$$g^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}.$$

$$f_a = p_a \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial H}{\partial q^a}$$

y usando la segunda condición, obtenemos:

$$f_w = H - p_a g^a = H - p_a \frac{\partial H}{\partial p_a}$$

Por lo tanto el vector Hamiltoniano queda definido de la siguiente forma:

$$X_H = \left(H - p_a \frac{\partial H}{\partial p_a}\right) \frac{\partial}{\partial w} + \left(p_a \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial H}{\partial q^a}\right) \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{\partial H}{\partial p_a} \frac{\partial}{\partial q^a}. \quad (\text{B.5}) \quad \text{eq. vectorH}$$

Además, usando la identidad de Cartan,

$$i_{X_H}d\eta = \xi(H)\eta - dH. \quad (\text{B.6}) \quad \text{eq. contactiso}$$

La ecuación anterior ya nos proporciona una forma muy similar de definición de vectores Hamiltonianos comparado con el caso simpléctico. Sin embargo, como se puede ver en esta misma ecuación del lado izquierdo es que la 2-forma evaluada en el vector Hamiltoniano no necesariamente es una diferencial exacta, en contraste con el caso simpléctico donde sí lo es¹. En este caso, se le conoce a H como un Hamiltoniano de contacto.

Los vectores Hamiltonianos forman el álgebra de Lie de los contactomorfismos² que son transformaciones análogas a los symplectomorfismos o mejor conocidas como transformaciones canónicas. En caso de que se cumpla que $\xi(H) = 0$ (en este caso se dice que H es una función básica); entonces, se reduce a la subálgebra de contactomorfismos estrictos³.

¹ Checar definición de vector Hamiltoniano para el caso simpléctico en el apéndice A

² Para más información ver [5].

³ Un contactomorfismo es un difeomorfismo F el cual preserva la distribución D y es posible escribirlo de la forma $F^*\eta = \Omega\eta$. En particular, un contactomorfismo estricto se reduce a $\Omega = 1$. Infinitesimalmente se puede ver que $\mathcal{L}_{X_F}\eta = \lambda\eta$ donde λ es una función distinta de cero. Cuando resulta que λ es cero, con $e^\lambda = \Omega$, se reduce nuevamente al caso estricto.

Nuevamente, en analogía al caso simpléctico hay un isomorfismo entre el álgebra de Lie de vectores Hamiltonianos y el álgebra de Lie de las funciones. Dicho isomorfismo queda completamente definido en la ecuación ((B.6)), solo faltaría conocer la estructura del paréntesis de Jacobi⁴ para funciones, que se define de la siguiente manera, sean X, Y dos vectores Hamiltonianos de funciones Hamiltonianas H y G respectivamente. Entonces,

$$(H, G) = (\eta(X), \eta(Y)) = \eta([X, Y]), \quad (\text{B.7})$$

eq. Jacobibracket

donde $[X, Y]$ es el paréntesis de Lie para vectores usual, definido en el capítulo anterior.

Nótese que estas definiciones dependen de η completamente. Además, si tomamos $F = 1$ el vector Hamiltoniano definido para esta función muy particular es el vector de Reeb, ξ , definido desde el principio como parte fundamental de la estructura de contacto de la variedad. Aunado a esto, el paréntesis de Jacobi no satisface la regla de Leibniz en general y $(H, 1) = 0$ se cumple únicamente cuando $[X_H, \xi] = 0$. Recordando el paréntesis de Poisson en coordenadas de Darboux en el caso simpléctico, podemos pensarlo como una operación derivada total, lo cual nos diría que en la estructura de contacto las constantes no tienen derivada igual a cero. Por otro lado, si nos restringimos a las funciones básicas, entonces se cumple la regla de Leibniz.

Podemos escribir la acción del vector Hamiltoniano X_H sobre cualquier función f en términos del paréntesis de Jacobi de la siguiente forma:

$$X_H(f) = \xi(H)f + (H, f). \quad (\text{B.8})$$

Con ayuda de la ecuación anterior y en analogía al caso simpléctico, diremos que una función f es una primer integral de la estructura de contacto Hamiltoniana con función Hamiltoniana H si f es constante a lo largo del flujo de X_H , en otras palabras, si se cumple que $X_H(f) = \xi(H)f + (H, f) = 0$. Nótese que en este caso no basta que el paréntesis de Jacobi sea igual a cero. De aquí se deduce que, en general, el Hamiltoniano H no siempre será una primer integral de su propio flujo, a menos que sea una función básica.

De acuerdo con la ecuación ((B.5)), obtenemos las siguientes ecuaciones para la curva integral del vector Hamiltoniano:

⁴Análogo al paréntesis de Poisson.

$$\frac{dw}{dt} = H - p_a \frac{\partial H}{\partial p_a} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{dp_a}{dt} = p_a \frac{\partial H}{\partial w} - \frac{\partial H}{\partial q^a} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{dq^a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a} \quad (\text{B.11})$$

donde las últimas dos ecuaciones son exactamente las ecuaciones de la mecánica Hamiltoniana cuando H es una función básica.

Bibliografía

- [1] V.I. Arnold and B.A. Khesin. *Topological Methods in Hydrodynamics*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1999.
- [2] Khadiga A Arwini and Christopher TJ Dodson. Information geometry. *Springer*, 2008.
- [3] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1984.
- [4] A. Bravetti and C.S. Lopez-Monsalvo. Para-sasakian geometry in thermodynamic fluctuation theory. *JHEP*, 1305:010, 2015. ARXIV 1408.5443.
- [5] A. Bravetti, C.S. Lopez-Monsalvo, and F. Nettel. Contact symmetries and hamiltonian thermodynamics. *Annals of Physics*, (361):377–400, 2015. ARXIV 1307.1153.
- [6] H.B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley, 1985.
- [7] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds, and Physics*. Number pt. 1 in Analysis, Manifolds, and Physics. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [8] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [9] Terrell L Hill. *Statistical mechanics: principles and selected applications*. Courier Corporation, 2013.
- [10] Ted Jacobson. Thermodynamics of spacetime: The einstein equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1260–1263, Aug 1995.
- [11] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate student series in physics. Taylor & Francis, 2003.

- [12] M. Natsuume. *AdS/CFT Duality User Guide*. Lecture Notes in Physics. Springer Japan, 2015.
- [13] H. Reichenbach. *The Philosophy of Space and Time*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.
- [14] H. Shima. *The Geometry of Hessian Structures*. World Scientific, 2007.
- [15] K. Vogtmann, A. Weinstein, and V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997.