



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

ANÁLISIS SOBRE LA IDENTIFICABILIDAD DE LA FRICCIÓN EN UN DUCTO CON RAMALES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ERIK CABRERA FERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL:
DRA. MA. CRISTINA VERDE RODARTE, INSTITUTO DE INGENIERÍA UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., [ABRIL](#) 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA LUIS A.
Secretario: DRA. TORRES ORTIZ FLOR LIZETH
1er Vocal: DRA. VERDE RODARTE MARÍA CRISTINA
2do Vocal: M.I. CARRERA MÉNDEZ ROLANDO
3er Vocal: DR. CARMONA PAREDES RAFAEL BERNARDO

Tesis realizada en las instalaciones del Instituto de Ingeniería, Ciudad
Universitaria, Ciudad de México.

TUTOR PRINCIPAL:

NOMBRE

Dra. Ma. Cristina Verde Rodarte

FIRMA

*Dedicado a mi familia,
novia y amigos*

Agradecimientos

Este trabajo no se hubiera llevado a cabo sin el constante apoyo de la Dra. Ma. Cristina Verde Rodarte, a quien agradezco las experiencias y conocimientos compartidos, su tiempo, su paciencia y exigencia a lo largo del posgrado, y su motivación en el desarrollo de este trabajo.

A mis sinodales y al equipo de trabajo de la Dra. Verde por el interés prestado y por sus preciados comentarios que favorecieron este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de posgrado.

Al programa de apoyo a proyectos de investigación e innovación tecnológica (PAPIIT). Investigación realizada gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IT100716 UNAM.

Al proyecto 280170 conv 2016-3, Fondo Sectorial CONACyT-Secretaría de Energía-Hidrocarburos.

Al Instituto de Ingeniería por permitirme hacer uso de sus instalaciones.

A la máxima casa de estudios, mi universidad, la UNAM, por haberme concedido la oportunidad de cumplir una meta más en mi vida al estudiar un posgrado.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia, novia y amigos por el apoyo, el amor, la comprensión, el cariño y los consejos otorgados a lo largo de mi vida estudiantil.

Índice general

Índice de figuras	IV
Índice de tablas	VI
Simbología	VII
1. Introducción	1
1.1. Problemática y motivación	2
1.2. Objetivo	3
1.3. Estado del arte	4
1.4. Contribución	5
1.5. Descripción de capítulos	6
2. Modelos del fluido	7
2.1. Modelo de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)	7
2.2. Modelo de tiempo continuo (MTC)	8
2.2.1. Resultados en simulación	10
2.3. Modelo de espacio y tiempo discretos (METD)	15
2.3.1. Resultados en simulación	20
2.4. Conclusión del capítulo	24
3. Identificación de la fricción	25
3.1. Métodos de identificación	26
3.2. Modelo paramétrico	28
3.2.1. Modelo con estado medido (x^k y Q_{Ramal}^k)	29
3.2.2. Modelo con mediciones de flujo (x_Q^k y Q_{Ramal}^k medibles)	29
3.3. Algoritmo de identificación	34
3.4. Resultados en simulación	36
3.4.1. Simulaciones con modelo MTC	40
3.4.2. Simulaciones con modelo METD	44
3.4.3. Resumen de resultados	48
4. Conclusiones	50
Referencias	52

Índice de figuras

1.1.	Tubería con un ramal	2
1.2.	Diagrama de Moody: representación gráfica en escala doblemente logarítmica del factor de fricción en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa de una tubería	2
1.3.	Comportamiento de los parámetros asociados a la fricción estimados en presencia de una fuga. En la parte superior se muestra el resultado considerando variables medibles (presiones y flujos conocidos en las secciones del ducto). En la parte inferior se muestra el resultado considerando solo mediciones en los extremos de la tubería y la estimación de las demás variables, el resultado no es congruente (Cayetano, 2016)	3
2.1.	Modelo MTC con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4 , presiones H_2 , H_3 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} constantes	11
2.2.	Modelo MTC con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_1 , H_2 , Q_2 , H_3 , Q_3 , H_4 y Q_4	12
2.3.	Modelo MTC con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4 , presiones H_2 , H_3 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} variables	13
2.4.	Modelo MTC con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_1 , H_2 , Q_2 , H_3 , Q_3 , H_4 y Q_4	14
2.5.	Discretización espacial del ducto. Para cada nodo se presenta sólo una variable, ya sea de presión o flujo, y en los extremos se cuenta con presiones y flujos de entrada y salida	15
2.6.	Modelo METD con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_0 , Q_2 y Q_4 , presiones H_2 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} constantes	20
2.7.	Modelo METD con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_0 , Q_2 , Q_4 , H_2 y H_4	21
2.8.	Modelo METD con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_0 , Q_2 y Q_4 , presiones H_2 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} variables	22

2.9. Modelo METD con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_0 , Q_2 , Q_4 , H_2 y H_4	23
3.1. Fricciones calculadas con la fórmula expuesta en (2.8) y datos del modelo MTC	37
3.2. Fricciones calculadas con la fórmula expuesta en (2.8) y datos del modelo METD	38
3.3. Flujos y presiones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y estado medido	40
3.4. Fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y estado medido	41
3.5. Errores en fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y estado medido	41
3.6. Flujos y presiones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas	42
3.7. Fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas	43
3.8. Errores en fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas	43
3.9. Flujos y presiones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y estado medido	44
3.10. Fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y estado medido	45
3.11. Errores en fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y estado medido	45
3.12. Flujos y presiones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas	46
3.13. Fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas	47
3.14. Errores en fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas	47

Índice de tablas

2.1. Parámetros considerados en las simulaciones del modelo MTC	10
3.1. Descripción de los métodos de identificación más destacados	27
3.2. Parámetros considerados para el algoritmo de identificación	36
3.3. Resumen de resultados obtenidos en simulación con el algoritmo de identificación de Mínimos Cuadrados Recursivo con factor de olvido de 0.7	49

Simbología

A_a	—	Área de la sección transversal del ducto
a_u	—	Velocidad de onda real
b_b	—	Velocidad de la onda de presión
C_N	—	Número de Courant
D_a	—	Diámetro del ducto
d	—	Índice de longitud discreta
f	—	Coefficiente de fricción del ducto
g	—	Constante de aceleración gravitacional
H	—	Carga de presión
k	—	Índice de tiempo discreto
L	—	Longitud del ducto [m]
l	—	Número de ramales distribuidos equidistantemente
N	—	Número de secciones par en los que se divide la tubería
n	—	Número de secciones en las que se divide el ducto
Q	—	Flujo volumétrico
Q^a	—	Flujo volumétrico antes del ramal
Q^b	—	Flujo volumétrico después del ramal

Q_f	—	Flujo volumétrico de la toma lateral
Re	—	Número de Reynolds
T_m	—	Tiempo de muestreo en la simulación
t	—	Variable temporal
t_i	—	Tiempo en el que ocurre el ramal
V_d	—	Viscosidad cinemática
z	—	Variable espacial
z_f	—	Posición del punto del ramal
β	—	Ángulo de inclinación de la sección del ducto
Δt	—	Intervalo de tiempo
Δz	—	Intervalo de longitud
ε_0	—	Rugosidad del ducto
λ	—	Factor de olvido
λ_f	—	Coefficiente de orificio del ramal
μ	—	Parámetro asociado al coeficiente de fricción del ducto

Capítulo 1

Introducción

El uso de tuberías como medio de transporte de fluidos es de gran importancia para muchos países. México no es la excepción y de acuerdo con PEMEX (2018) existen más de 17,000 km de ductos para transportar productos derivados del petróleo. La confiabilidad y seguridad de las redes de distribución de fluidos es un problema importante y de gran preocupación en el ámbito global. Eventos externos, variaciones climatológicas, corrosión, envejecimiento, etcétera, ocurren y pueden provocar daños en los ductos (Verde *et al.*, 2013). Es por ello que las fallas en estos sistemas deben ser identificadas a la brevedad.

En general, el objetivo de un sistema automático de supervisión de redes de distribución consiste en detectar tan rápido como sea posible la localización exacta y la magnitud de las fugas u obstrucciones con un mínimo de instrumentación y costo (Carrera y Verde, 2001). Los algoritmos de detección y aislamiento de fallas (FDI, por sus siglas en inglés) pueden llevarse a cabo usando información analítica sobre el proceso, es decir, basados en modelos matemáticos del sistema. Debido a la importancia de estos modelos, es primordial que los parámetros del modelo del sistema se conozcan para una correcta detección como han reportado Siebert (1977) y Torres *et al.* (2014). Aunque podrían consultarse las hojas de datos o manuales para determinar el valor de los parámetros, en la mayoría de los casos resulta insuficiente debido a que los parámetros se ven afectados por factores desconocidos en la complejidad de los procesos, como por ejemplo el deterioro por envejecimiento de los componentes, entre otros. De esta manera, los métodos de identificación de parámetros en tiempo real resultan ser una herramienta de gran ayuda para conocer los parámetros, aunque previo a la elección del método es necesario determinar el tipo de modelo a emplear para aplicar las técnicas de identificación correspondientes y de esta forma estimarlos.

Uno de los parámetros importantes a identificar es la fricción dentro de la tubería. Ésta es una función del flujo volumétrico por lo que con la existencia de un flujo en un ramal de derivación o de una descarga el flujo en el ducto se comporta de forma diferente aguas arriba y aguas abajo. De esta manera, cuando el flujo en la tubería localizado aguas abajo disminuye, la fricción correspondiente se incrementa.

1.1. Problemática y motivación

Como ya se ha comentado, el conocimiento de los parámetros físicos asociados a las tuberías de transporte de fluidos es de vital importancia para la detección y localización de fugas en ductos. La fricción en una tubería con ramales es un parámetro físico que presenta un comportamiento de especial interés, ya que es una función del flujo volumétrico y se comporta de manera diferente aguas arriba y aguas abajo del ramal como consecuencia del flujo de salida. Tomando en cuenta la Figura 1.1, cuando el flujo aguas abajo disminuye (Línea 3) la fricción en la tubería aguas abajo (Línea 3) se incrementa. Este comportamiento provoca que el diagrama de Moody, el cual se muestra en la Figura 1.2, sea insuficiente para la determinación de la fricción en un ducto, ya que además de que el fluido dentro de la tubería no se encuentra en un régimen completamente turbulento (lado derecho de la Figura 1.2), con la presencia de ramales cambia el flujo volumétrico en las Líneas 1 y 3 de la Figura 1.1 debido al flujo de salida (Línea 2), y como consecuencia se tiene una variación en el número de Reynolds y con ello en la fricción.

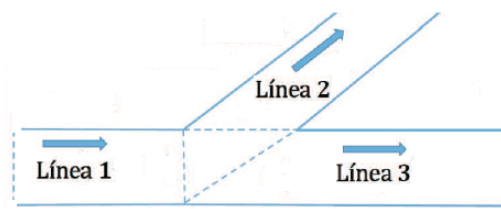


Figura 1.1: Tubería con un ramal

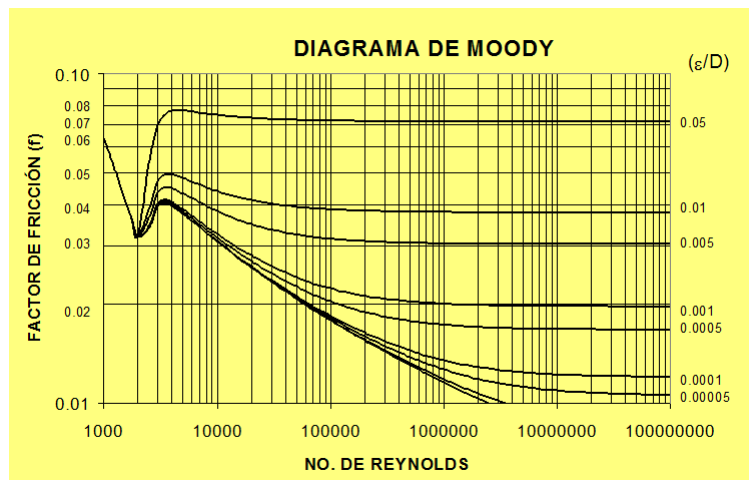


Figura 1.2: Diagrama de Moody: representación gráfica en escala doblemente logarítmica del factor de fricción en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa de una tubería

Por otra parte, Cayetano (2016) ha mostrado resultados sobre la identificación de parámetros de fricción en ductos con ramales. Cuando se consideran variables medibles (presiones y flujos conocidos en las distintas secciones del ducto) se obtiene que el parámetro

de fricción no es constante a lo largo de la tubería en condiciones de fuga, como se muestra en la parte superior de la Figura 1.3. Sin embargo, al considerar solo mediciones en los extremos y realizar la estimación de las demás variables, los resultados no son congruentes como se muestra en la parte inferior de la Figura 1.3. Este último aspecto es la pieza clave para el desarrollo de este trabajo, en donde los resultados anteriores se toman como punto de partida para analizar modelos analíticos del comportamiento dinámico del fluido dentro de la tubería que permitan la identificabilidad de la fricción en tuberías con ramales.

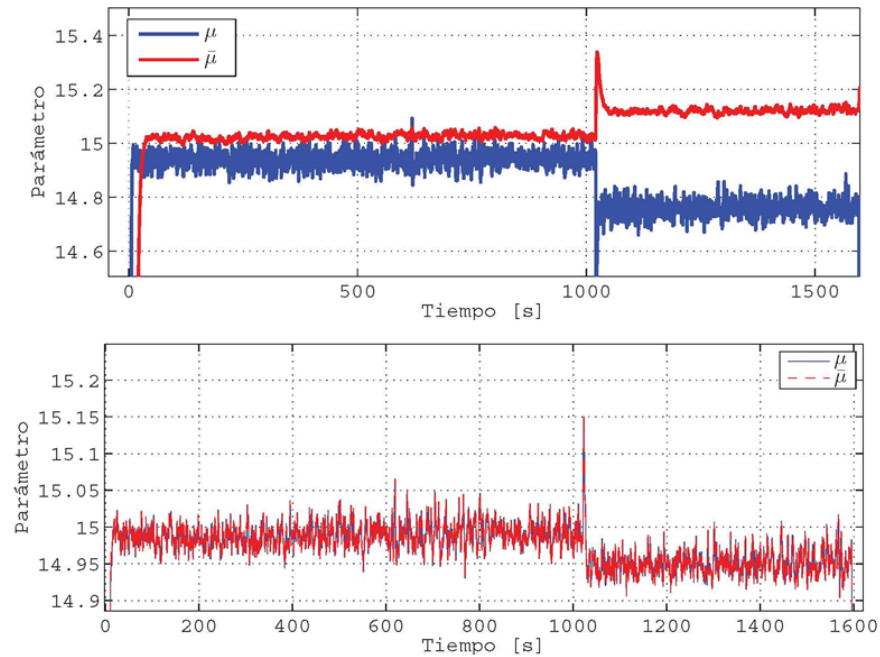


Figura 1.3: Comportamiento de los parámetros asociados a la fricción estimados en presencia de una fuga. En la parte superior se muestra el resultado considerando variables medibles (presiones y flujos conocidos en las secciones del ducto). En la parte inferior se muestra el resultado considerando solo mediciones en los extremos de la tubería y la estimación de las demás variables, el resultado no es congruente (Cayetano, 2016)

1.2. Objetivo

Como se mencionó anteriormente, la estimación de la fricción en los ductos es una tarea importante debido a que los algoritmos de localización de fugas se encuentran basados en la descripción matemática del sistema que depende de diversos parámetros, entre ellos la fricción. Además, se busca que estos parámetros sean válidos cuando se presenta un ramal. Es por ello que el objetivo de este trabajo consiste en estudiar diferentes modelos para determinar el más adecuado para la identificación en línea de la fricción en tuberías con ramales. Para ello se muestran las ventajas y desventajas de los modelos así como los resultados alcanzados con cada uno de ellos. En particular se seleccionan dos modelos para la identificabilidad de la fricción. El primero de ellos es el Modelo de Tiempo Continuo (MTC) y el

segundo es el Modelo de Espacio y Tiempo Discretos (METD). Un objetivo adicional del trabajo es estudiar la influencia del factor de olvido en el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo para la estimación de la fricción.

1.3. Estado del arte

El problema de la identificación de la fricción en una tubería se ha convertido en objeto de análisis en los últimos años. En este documento se analizan tres temas. El primero está relacionado con los modelos que describen el comportamiento dinámico del fluido en una tubería, el cual es la pieza clave para la identificación de la fricción. El segundo hace referencia a la fricción y a los diferentes métodos para determinarla. El último enfoque contempla a los métodos de identificación más utilizados, los cuales pueden emplearse en modelos paramétricos y no paramétricos y que su correcta elección dependerá en gran medida del modelo y de la aplicación.

Modelos del fluido

Las descripciones matemáticas que representan el comportamiento dinámico de un fluido dentro de una tubería han sido presentadas en diversos trabajos. En Wylie (1978), Isermann y Billmann (1987) y Chaudhry (2014) se muestran modelos hidráulicos que describen el comportamiento dinámico de un proceso de flujo en tuberías de transmisión representados por un par de ecuaciones diferenciales parciales basados en las leyes de conservación de masa y momento, considerando que el flujo volumétrico y la presión del flujo transitorio en conductos cerrados son funciones del tiempo y espacio. Estos modelos de control y monitoreo y son expresados en tiempo continuo. Sin embargo, dado que se pretende la operación práctica de un algoritmo basado en modelos, se requiere una representación discreta para su implementación numérica. En este sentido existen una diversidad de aproximaciones para obtener modelos en espacio y/o tiempo discretos tales como las diferencias finitas de adelanto, atraso o centradas y el método de las características, entre otras (Skiba, 2005).

Fricción

La estimación del coeficiente de fricción en ductos ha sido ampliamente investigada. En el campo de la ingeniería hidráulica se han propuesto diferentes modelos. Por ejemplo, el coeficiente de fricción de D'Arcy-Weissbach permite calcular la pérdida de carga en un ducto debido a la fricción; su cálculo como función del número de Reynolds y la rugosidad dependen del régimen del flujo.

En lo que corresponde a las ecuaciones de fricción cuasi estáticas, la fórmula experimental de la ecuación propuesta por Swamee-Jain (Swamee (1993) y Swamee y Swamee (2007)), la cual es función del diámetro, la rugosidad, el flujo a través del ducto, el número de Reynolds y otros parámetros físicos, ha sido empleada en el trabajo de Navarro *et al.* (2011), pero no se han encontrado condiciones que permitan ver los efectos de dicho coeficiente

cuando se tienen tomas laterales. Además presentan el inconveniente de que el parámetro de rugosidad es complicado de estimar y cambia con el envejecimiento del ducto. También la fórmula experimental de la ecuación de Churchill (1977) calcula el factor de fricción para todos los regímenes de flujo de fluidos. Esta fórmula implica la ecuación de Hagen-Poiseuille para calcular la fricción en regímenes laminares y aproximaciones explícitas de la ecuación de Colebrook en flujos turbulentos. Ambas fórmulas dependen del número de Reynolds, que a su vez depende del flujo volumétrico y de otros parámetros físicos que cambian en función de la temperatura del fluido y en el tiempo, por ejemplo la rugosidad y la viscosidad (Jiménez *et al.*, 2017). En Isermann y Billmann (1987) y Kowalczuk y Gunawickrama (2004) se propone hacer una identificación en línea con mínimos cuadrados. En otros trabajos se han aplicado diferentes ecuaciones estáticas como la reportada en Carrera y Verde (2001), en donde se estima el coeficiente de fricción empleando mediciones de presión y flujo en los extremos del ducto y asumiendo el factor constante. Recientemente, Cayetano (2016) ha presentado la identificación de parámetros de fricción en ductos con ramales laterales y muestra resultados en donde la fricción se comporta de manera diferente aguas arriba y aguas abajo del ramal como consecuencia del flujo de salida cuando se tienen todas las variables medibles (presiones y flujos conocidos en las secciones del ducto): cuando el flujo aguas abajo disminuye provoca que la fricción aguas abajo se incremente y viceversa. Sin embargo, al considerar solo mediciones en los extremos y realizar la estimación de las demás variables, los resultados no son congruentes. Éste último aspecto es el punto de partida para el desarrollo de este trabajo, ya que se pretende identificar la fricción cuasi estacionaria.

Por otra parte, en Bergant *et al.* (2010) se analizan dos modelos de fricción no estacionaria, el modelo de Zielke y el de Brunone, en los cuales la fricción es representada como la suma de un término cuasi-estacionario f_q y un término no estacionario f_u . En Dulhoste *et al.* (2011) se evalúan diferentes modelos de fricción para tuberías, entre los cuales resalta un modelo no estacionario que involucra variaciones del flujo en espacio y tiempo.

Métodos de identificación

Existen diversos métodos de identificación que pueden aplicarse a modelos paramétricos y no paramétricos. En el libro de Isermann y Münchhof (2011) se presentan los métodos de la determinación de valores característicos, ajuste del modelo, estimación de parámetros, optimización iterativa, basados en el subespacio, redes neuronales y Filtro de Kalman. Estos métodos son aplicables sólo a modelos paramétricos. En cambio, para modelos no paramétricos se tienen las mediciones de respuesta de frecuencia, el análisis de Fourier y el análisis de correlación. La elección del método de identificación depende, en gran medida, del campo de aplicación.

1.4. Contribución

En este documento se propone un modelo discretizado en espacio y tiempo del fluido, nombrado Modelo de Espacio y Tiempo Discretos (METD), en el cual existen tomas laterales

o ramales. Se ha incluido un ramal a la ecuación de estado del modelo original presentado en Kowalczyk y Tatara (2017) y se han realizado las simulaciones correspondientes con el modelo. Cabe señalar que el modelado del ramal y su incorporación en la ecuación es una de las aportaciones en este trabajo. Dicho ramal puede colocarse solamente en los nodos asociados a la presión.

Por otra parte, para la identificación de la fricción se ha empleado el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con factor de olvido. Es importante destacar el uso de este factor ya que ha permitido acelerar la convergencia en los parámetros cuando el algoritmo lleva un tiempo considerable funcionando. Lo anterior debido a que se pondera mayormente a los datos más recientes.

Finalmente, para la estimación de las presiones intermedias en el ducto se proponen dos metodologías. La primera de ellas consiste en expresar el vector de presiones en función de variables medibles y fricciones a estimar. Posteriormente se sustituye el vector de presiones calculadas en el modelo en forma de regresor requerido para la identificación paramétrica y se determina la fricción a partir del método de identificación. La segunda metodología consiste en aprovechar las características del modelo METD con ramal para calcular el vector de estados a partir del conocimiento de las presiones intermedias en los dos primeros instantes de tiempo. Los flujos se consideran variables conocidas para todo tiempo de muestreo. Ambas metodologías se presentan como aportación para estimar las presiones intermedias en la tubería.

1.5. Descripción de capítulos

El contenido de este documento se encuentra distribuido en cuatro capítulos, en donde en el primero de ellos se desarrolla la introducción.

En el Capítulo 2 se describen los modelos aproximados del fluido. Se toma como punto de partida el modelo dinámico de un fluido en un ducto sin ramales descrito por ecuaciones diferenciales parciales para realizar un análisis comparativo entre dos modelos discretizados que describen analíticamente al fluido a través de un ducto con ramales. Estos modelos son nombrados Modelo de Tiempo Continuo (MTC) y Modelo de Espacio y Tiempo Discretos (METD), respectivamente, y se presentan los resultados obtenidos para ambos modelos.

En el Capítulo 3 se abordan algunos métodos de identificación para modelos paramétricos y no paramétricos, presentando la identificación de la fricción por medio de la estimación de los parámetros con base en el modelo paramétrico del ducto. Además, se describe el algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido para la identificación paramétrica haciendo énfasis en dicho factor de olvido para ponderar las muestras más recientes. Esto permite detectar un posible cambio de parámetros. Al final del capítulo se analizan los resultados obtenidos en simulación con los dos modelos.

En el Capítulo 4 se presentan las conclusiones de los resultados obtenidos, destacando la contribución del modelado del ramal agregado a la ecuación de estado del comportamiento dinámico del fluido en el modelo METD.

Capítulo 2

Modelos del fluido

En este capítulo se aborda el estudio de los modelos analíticos del comportamiento del fluido para analizar el problema de la identificabilidad de la fricción en el ducto. Se pretende la operación práctica de un algoritmo basado en modelos de tal forma que es necesaria una representación discreta para la implementación numérica. El punto de partida de los modelos de dimensión finita a considerar son el par de ecuaciones diferenciales parciales que modelan el comportamiento del fluido en un ducto sin ramales mediante variables de tiempo y espacio continuas (Chaudhry, 2014). El primer modelo consiste en un modelo continuo en el que únicamente se discretiza la variable espacial, nombrado modelo de tiempo continuo (MTC), el cual es ampliamente utilizado para localizar fugas en un ducto con ramales (Verde *et al.*, 2013). El segundo modelo es presentado en Kowalczyk y Tatara (2017) en donde las variables de tiempo y espacio son discretizadas, nombrado modelo de espacio y tiempo discretos (METD), el cual presenta propiedades estructurales interesantes y cuya contribución en este trabajo va enfocada al uso de dicho modelo para la identificabilidad de la fricción en un ducto con ramales, ya que en la referencia mostrada solo se presenta para el caso de un ducto sin ramales. Ambos modelos MTC y METD son explicados a lo largo del documento.

En la parte final del Capítulo se presentan los resultados obtenidos en simulación y se realiza una comparación mostrando las ventajas y desventajas entre ambos modelos MTC y METD.

2.1. Modelo de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Considérese un ducto con un perfil topográfico variable en donde la densidad del fluido, la velocidad de la onda de presión y el área de la sección transversal del tubo son constantes, el flujo es turbulento y los cambios convectivos en la velocidad del mismo son despreciables (la velocidad del flujo es muy pequeña comparada con la velocidad de la onda de presión). El comportamiento dinámico del fluido en el interior de un ducto sin ramales se puede describir como un par de ecuaciones diferenciales parciales obtenidas a partir de las leyes de conservación de momento y continuidad (Chaudhry, 2014)

$$\frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + gA_a \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} + \mu Q(z, t)|Q(z, t)| + gA_a \sin \beta = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial H(z, t)}{\partial t} + \frac{b_b^2}{gA_a} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

en donde $Q(z, t)$ es el flujo volumétrico en $[m^3/s]$, $H(z, t)$ es la carga de presión en $[mca]$, z es la variable espacial en $[m]$, t es la variable temporal en $[s]$, A_a es el área de la sección transversal del ducto en $[m^2]$, g es la constante de aceleración gravitacional en $[m/s^2]$, b_b es la velocidad de la onda de presión en $[m/s]$, β es el ángulo de inclinación en $[^\circ]$ y $\mu = f/(2D_a A_a)$ en $[1/m^3]$ depende de la fricción del ducto f y del diámetro D_a en $[m]$.

Ya que se considera el comportamiento dinámico del fluido dentro de un ducto sin ramales, las condiciones de frontera están determinadas por las mediciones de presión H_{IN} y H_{OUT} y flujo volumétrico Q_{IN} y Q_{OUT} en los extremos del mismo.

Al considerar un ducto con perfil topográfico horizontal ($\beta = 0^\circ$) en el par de ecuaciones (2.1) y (2.2) y reordenando los términos en las mismas, éstas se transforman en

$$\frac{A_a g}{b_b^2} \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(z, t)}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{A_a} \frac{\partial Q(z, t)}{\partial t} + g \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} + \frac{\mu}{A_a} Q(z, t)|Q(z, t)| = 0, \quad (2.4)$$

donde el término $\frac{\mu}{A_a} Q(z, t)|Q(z, t)|$ de la ecuación (2.4) caracteriza la pérdida de carga.

2.2. Modelo de tiempo continuo (MTC)

Considérese el siguiente modelo no lineal presentado en Verde *et al.* (2013) discretizado espacialmente para cuatro secciones ($n = 4$), asociado a un modelo de siete estados, y un ramal colocado a tres cuartas partes de la tubería (en el punto de presión H_4)

$$\dot{x} = Ax + Bu - \Pi nl(x) - nl_f(a_2, x, \lambda_f), \quad (2.5)$$

y

$$y = Cx. \quad (2.6)$$

cuyos vectores de estados y de entradas son

$$x = \begin{bmatrix} Q_1 \\ H_2 \\ Q_2 \\ H_3 \\ Q_3 \\ H_4 \\ Q_4 \end{bmatrix}, \quad y \quad u = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{IN} \\ H_{OUT} \end{bmatrix},$$

las matrices obtenidas son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix},$$

con

$$a_1 = \frac{A_{ag}}{\Delta z}, \quad a_2 = \frac{b_b^2}{\Delta z A_{ag}}, \quad \text{y} \quad \Delta z = \frac{L}{n},$$

y los términos no lineales asociados son

$$\begin{aligned} \Pi nl(x) &= [\mu_1 Q_1 |Q_1|, 0, \mu_1 Q_2 |Q_2|, 0, \mu_1 Q_3 |Q_3|, 0, \mu_2 Q_4 |Q_4|]^T, \\ nl_f(a_2, x, \lambda_f) &= a_2 [0, 0, 0, 0, 0, \lambda_f \sqrt{H_4}, 0]^T. \end{aligned}$$

Para la realización del modelo en simulación usando el bloque de *State Space* de Simulink de Matlab®[®], se propone llevar el sistema (2.5) a la representación aumentada mostrada en Kowalczyk y Tatara (2013)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{aum} &= A_{aum} \tilde{x}_{aum} + B_{aum} \tilde{u}_{aum}, \\ y &= C_{aum} \tilde{x}_{aum} + D_{aum} \tilde{u}_{aum}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Estableciendo vectores de estados y de entradas aumentados

$$\tilde{x}_{aum} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ H_2 \\ Q_2 \\ H_3 \\ Q_3 \\ H_4 \\ Q_4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_{aum} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_5 \\ \mu_1 Q_1 |Q_1| \\ \mu_1 Q_2 |Q_2| \\ \mu_1 Q_3 |Q_3| \\ \mu_2 Q_4 |Q_4| \\ \lambda_f \sqrt{H_4} \end{bmatrix},$$

entonces se puede llevar a cabo la implementación en Simulink mediante el bloque *State Space*, tomando en cuenta que los términos asociados a la parte no lineal $\Pi nl(x)$ y $nl_f(a_2, x, \lambda_f)$ se contemplan como nuevas entradas para el sistema en simulación, considerando todo el estado medible. De esta forma las matrices resultan

$$A_{aum} = A, \quad B_{aum} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{aum} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D_{aum} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que el modelo requiere del conocimiento de las fricciones en cada sección, el cálculo de las mismas se realiza por medio de la siguiente función no lineal (Swamee, 1993), la cual depende de parámetros de la tubería como el diámetro D_a y la rugosidad del material ε_0 , del gasto Q , del número de Reynolds Re a una cierta velocidad del flujo y de la viscosidad cinemática V_d que depende de la temperatura:

$$f = \left[\left(\frac{64}{Re} \right) + 9.5 \left[\ln \left(\frac{\varepsilon_0}{3.7D_a} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) - \left(\frac{2500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \right]^{0.125}, \quad (2.8)$$

con

$$Re = \frac{QD_a}{A_a V_d}, \quad (2.9)$$

2.2.1. Resultados en simulación

En las Figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 se muestran los resultados del modelo MTC implementado en Simulink para un ducto discretizado espacialmente en cuatro secciones y un ramal colocado en el punto de presión H_4 . Los parámetros utilizados en las simulaciones se detallan en la tabla 2.1.

Parámetro	Valor	Unidades
Δt	5e-04	s
D_a	0.1016	m
L	169.43	m
A_a	0.0081	m^2
g	9.81	m/s^2
Δz	42.3575	m
b_b	1330	m/s
λ_f	0.003	1
V_d	1.830e-06	m^2/s
ε_0	1.083e-03	m

Tabla 2.1: Parámetros considerados en las simulaciones del modelo MTC

A continuación, las Figuras 2.1, 2.2 ilustran el comportamiento de los estados del sistema cuando se abre la válvula a los 30 s y se cierra a los 80 s , bajo presiones de entrada y salida

constantes. Los flujos de entrada y salida sin la presencia del ramal son de alrededor de $0.01596 \text{ [m}^3/\text{s]}$ y las presiones en los puntos H_2 , H_3 y H_4 son de 12.75 [mca] , 9.5 [mca] y 6.25 [mca] , respectivamente. Al abrir la válvula se provoca un flujo en el ramal de $0.006389 \text{ [m}^3/\text{s]}$ (equivalente al 40 % del flujo nominal) provocando flujos de entrada y salida de $0.01732 \text{ [m}^3/\text{s]}$ y $0.01093 \text{ [m}^3/\text{s]}$, respectivamente, con presiones H_2 , H_3 y H_4 de 12.18 [mca] , 8.357 [mca] y 4.535 [mca] , respectivamente. Con base en el modelo MTC, el comportamiento de los estados es el esperado.

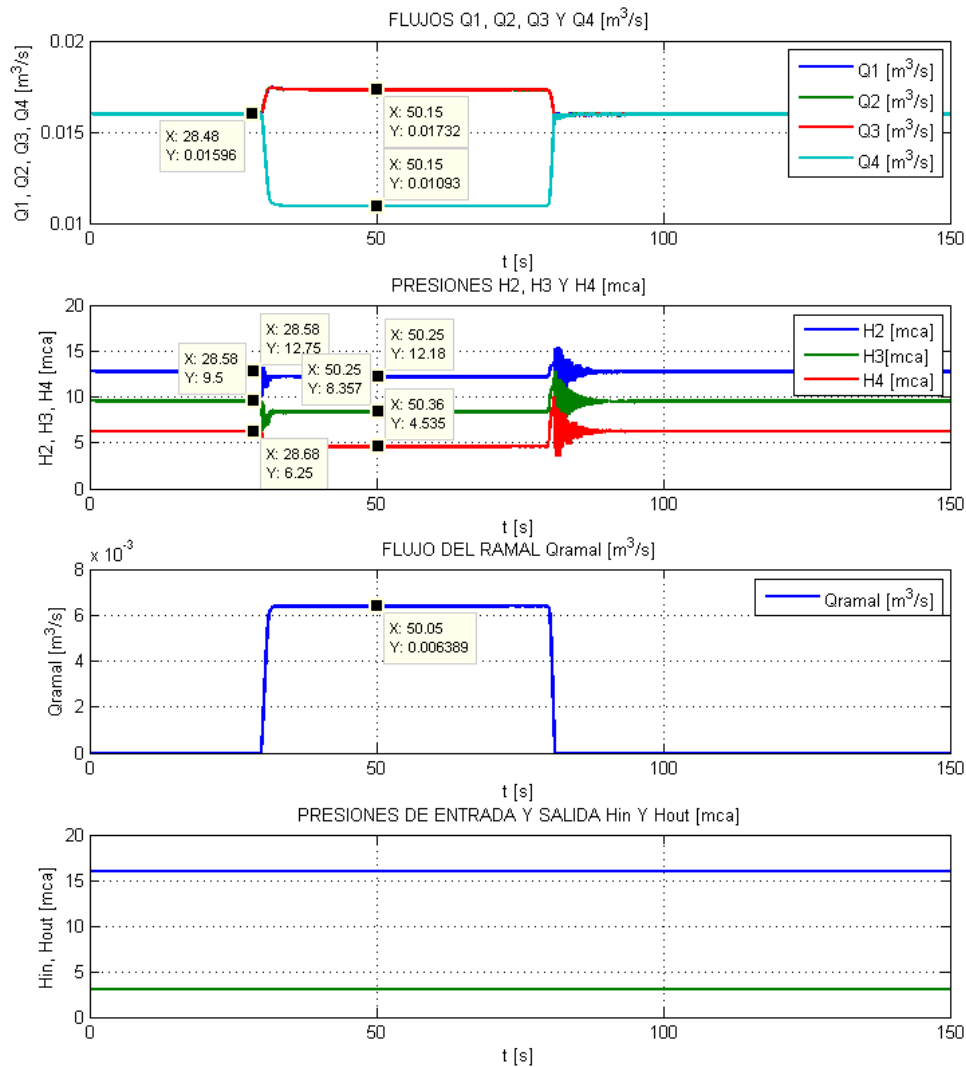


Figura 2.1: Modelo MTC con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4 , presiones H_2 , H_3 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} constantes

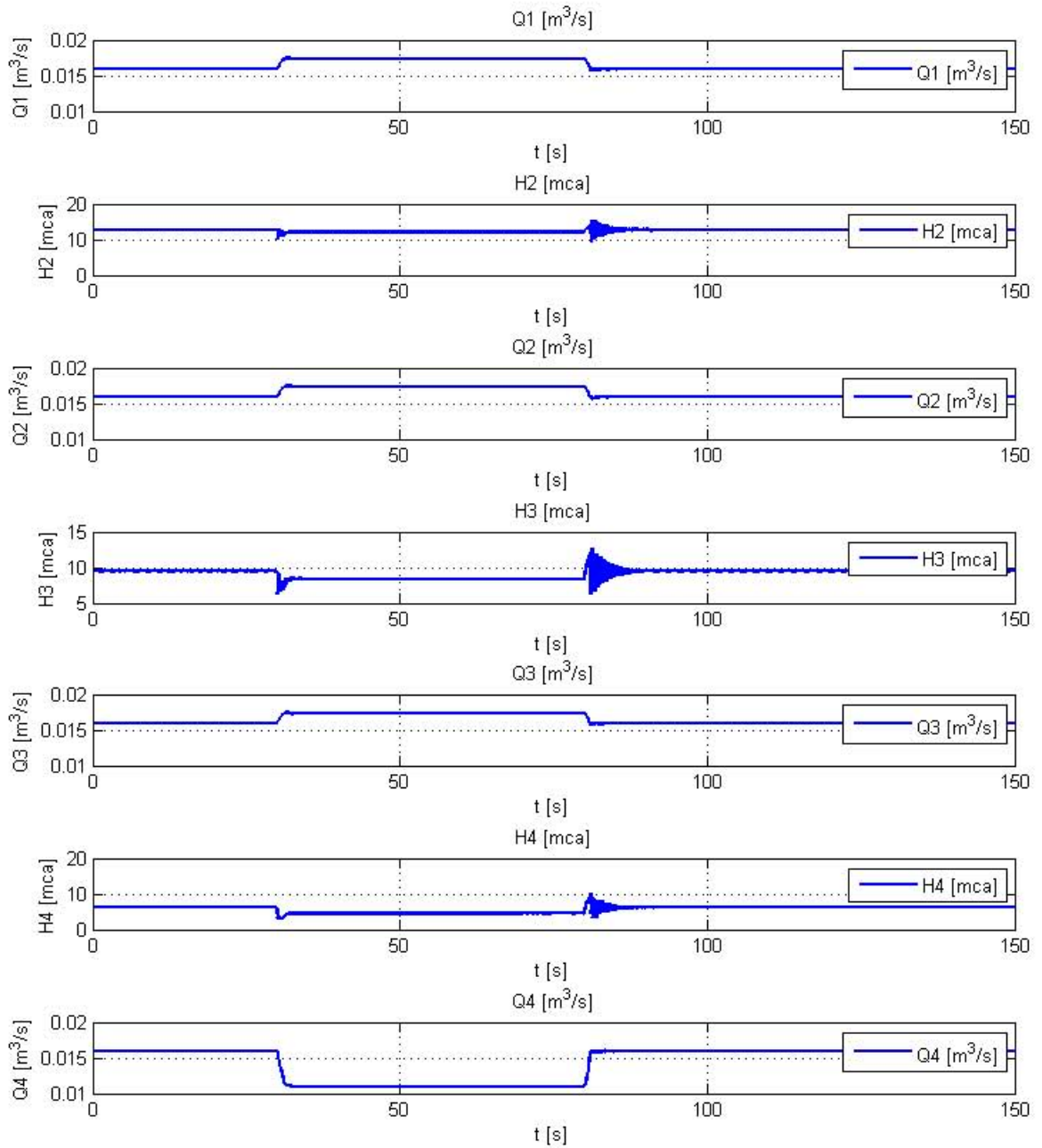


Figura 2.2: Modelo MTC con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_1 , H_2 , Q_2 , H_3 , Q_3 , H_4 y Q_4

De manera análoga, las Figuras 2.3 y 2.4 presentan el comportamiento de los estados del sistema cuando se tienen las mismas condiciones para el ramal pero con presiones de entrada y salida variables. Como puede observarse en dichas figuras, los estados presentan el comportamiento esperado al ingresar presiones de entrada y salida variables.

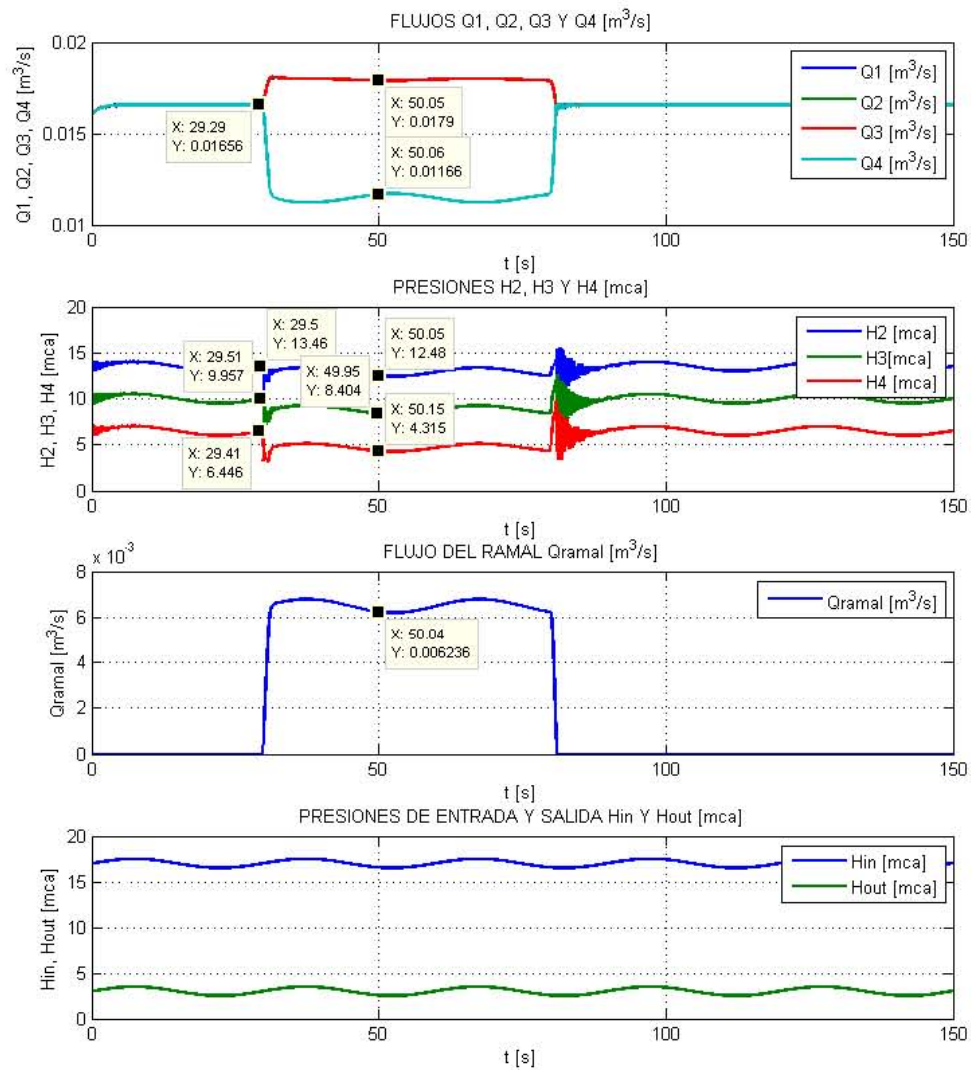


Figura 2.3: Modelo MTC con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_1 , Q_2 , Q_3 y Q_4 , presiones H_2 , H_3 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} variables

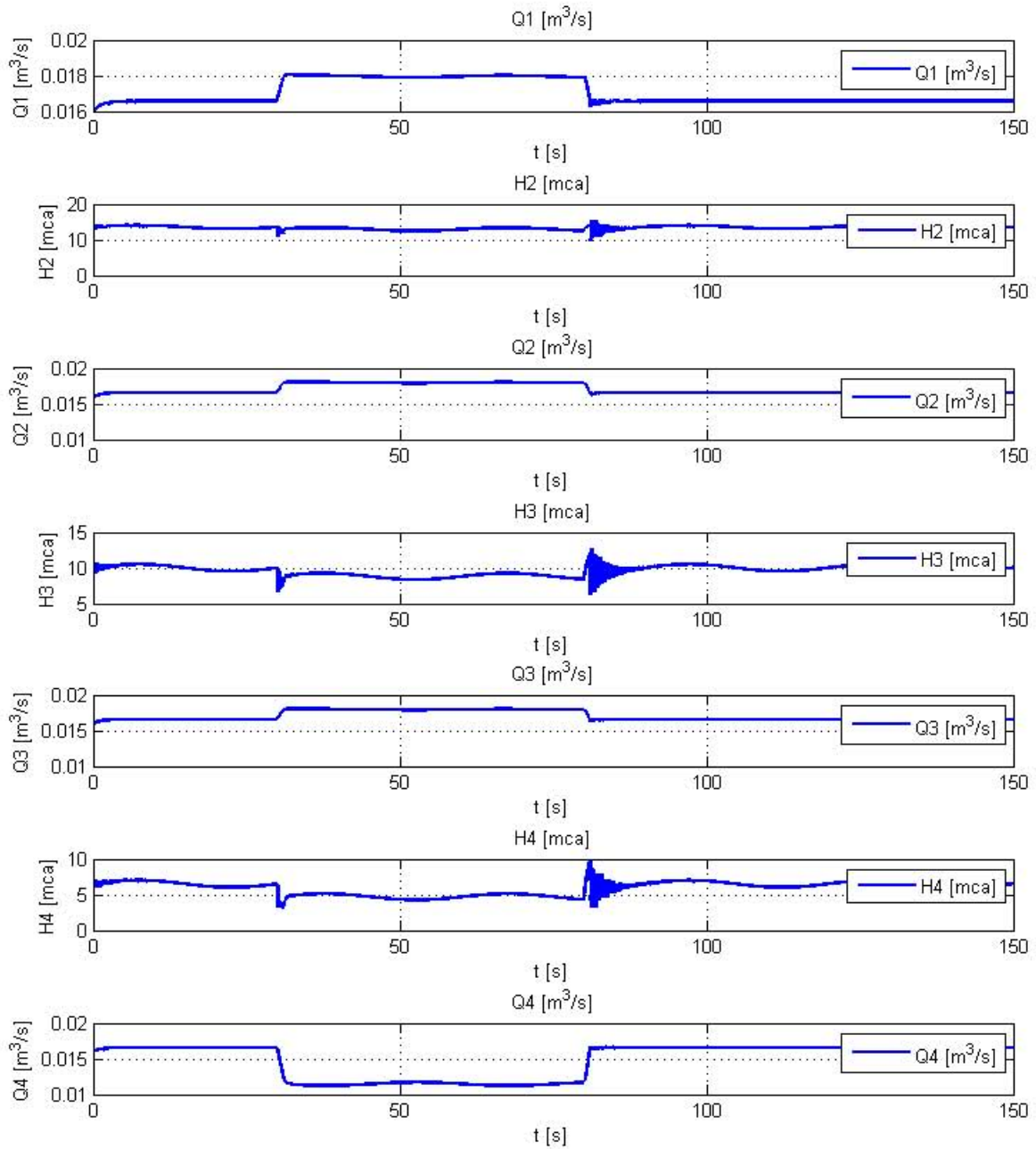


Figura 2.4: Modelo MTC con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_1 , H_2 , Q_2 , H_3 , Q_3 , H_4 y Q_4

2.3. Modelo de espacio y tiempo discretos (METD)

Considérese la descripción matemática del fluido expresada en las ecuaciones (2.3) y (2.4). Se desea generar un modelo discretizado en tiempo y en espacio que permita describir el comportamiento del fluido dentro de la tubería con ramales. La idea de la discretización espacial del ducto consiste en dividir la tubería en N segmentos de igual tamaño con longitud Δz , en donde el proceso de flujo es caracterizado a partir de la presión H al final de cada segmento impar y el flujo volumétrico Q al final de cada segmento par. Dicha discretización es ilustrada en la figura 2.5, en donde N es un número par y representa el número de secciones en las que se divide el ducto y las condiciones de frontera son las mediciones de presión y flujo en los extremos de la tubería ($d = 0$ y $d = N$) dadas por

$$\begin{aligned} H_0^k &= H_{IN}, & H_N^k &= H_{OUT}, \\ Q_0^k &= Q_{IN}, & Q_N^k &= Q_{OUT}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

El modelo METD se obtiene al aplicar esquemas de diferencias finitas centradas tanto para el tiempo como para el espacio (Kowalczuk y Tatara, 2017)

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{3x_d^k - 4x_d^{k-1} + x_d^{k-2}}{2\Delta t}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{x_{d+1}^k - x_{d-1}^k + x_{d+1}^{k-1} - x_{d-1}^{k-1}}{4\Delta z}, \quad (2.12)$$

donde k es un índice de tiempo discreto, Δt denota un intervalo de tiempo ($t = k\Delta t$), d es un índice de longitud discreta y Δz denota un intervalo de longitud ($z = d\Delta z$).

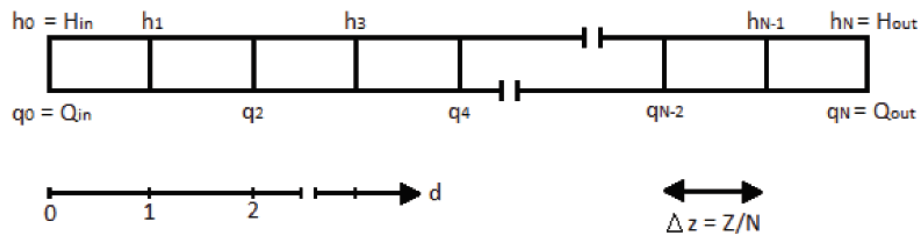


Figura 2.5: Discretización espacial del ducto. Para cada nodo se presenta sólo una variable, ya sea de presión o flujo, y en los extremos se cuenta con presiones y flujos de entrada y salida

Aplicando el esquema de diferencias finitas (2.11) y (2.12) a las ecuaciones (2.3) y (2.4)

se tiene el siguiente par de ecuaciones en diferencias no lineales

$$\begin{aligned} \frac{A_a g}{b_b^2} \frac{3H_d^k - 4H_d^{k-1} + H_d^{k-2}}{2\Delta t} + \frac{Q_{d+1}^k - Q_{d-1}^k + Q_{d+1}^{k-1} - Q_{d-1}^{k-1}}{4\Delta z} &= 0, \\ \frac{1}{A_a} \frac{3Q_d^k - 4Q_d^{k-1} + Q_d^{k-2}}{2\Delta t} + g \frac{H_{d+1}^k - H_{d-1}^k + H_{d+1}^{k-1} - H_{d-1}^{k-1}}{4\Delta z} + \frac{f}{2D_a A_a^2} Q_d^{k-1} |Q_d^{k-1}| &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nótese que para los extremos del ducto ($d = 0$ y $d = N$) la diferencia finita centrada espacial requiere valores fuera de la tubería, por lo que se emplea una diferencia finita hacia adelante y hacia atrás, respectivamente, para cada extremo.

Al organizar los términos de tal manera que del lado izquierdo queden aquéllos que dependen únicamente del instante actual (k) y del lado derecho los que dependen de instantes pasados ($k - 1$ y $k - 2$), resulta

$$\begin{aligned} \left(\frac{3 - A_a}{2b_b^2 \Delta t} \right) g(H_d^k) - \left(\frac{1}{4\Delta z} \right) (Q_{d-1}^k - Q_{d+1}^k) &= \left(\frac{3A_a}{2b_b^2 \Delta t} \right) \left(\frac{1}{3} \right) g(4H_d^{k-1} - H_d^{k-2}) + \\ &+ \left(\frac{1}{4\Delta z} \right) (Q_{d-1}^{k-1} - Q_{d+1}^{k-1}), \\ \left(\frac{1}{4\Delta z} \right) g(H_{d+1}^k - H_{d-1}^k) + \left(\frac{3}{2A_a \Delta t} \right) Q_d^k &= \left(\frac{1}{4\Delta z} \right) g(H_{d-1}^{k-1} - H_{d+1}^{k-1}) + \\ &+ \left[\left(\frac{3}{2A_a \Delta t} \right) \left(\frac{1}{3} \right) (4) - \frac{f}{2D_a A_a^2} |Q_d^{k-1}| \right] Q_d^{k-1} + \\ &- \left(\frac{3}{2A_a \Delta t} \right) \left(\frac{1}{3} \right) Q_d^{k-2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Al redefinir las constantes

$$a = \frac{3A_a}{2b_b^2 \Delta t}, \quad b = \frac{1}{4\Delta z}, \quad c = \frac{3}{2A_a \Delta t},$$

$$F_d^{k-1} = -\frac{f^{k-1}}{2D_a A_a^2} |Q_d^{k-1}| = -\frac{\mu^{k-1}}{A_a} |Q_d^{k-1}|, \quad \text{y} \quad \mu^{k-1} = \frac{f^{k-1}}{2D_a A_a},$$

el modelo discreto obtenido es

$$ag(H_d^k) - b(Q_{d-1}^k - Q_{d+1}^k) = \left(\frac{ag}{3} \right) (4H_d^{k-1} - H_d^{k-2}) + b(Q_{d-1}^{k-1} - Q_{d+1}^{k-1}), \quad (2.15)$$

$$bg(H_{d+1}^k - H_{d-1}^k) + cQ_d^k = bg(H_{d-1}^{k-1} - H_{d+1}^{k-1}) + \left(\frac{4c}{3} + F_d^{k-1} \right) Q_d^{k-1} - \frac{c}{3} Q_d^{k-2}. \quad (2.16)$$

Como se muestra en Kowalczuk y Tatara (2017), el par de ecuaciones (2.15) y (2.16) puede escribirse como un modelo en representación de estados no lineal general de la forma

$$\Lambda x^k = \Gamma(x_Q^{k-1}, f^{k-1})x^{k-1} + \Omega x^{k-2} + \Delta u^k + \Upsilon u^{k-1}, \quad (2.17)$$

donde para cuatro tramos se tiene

$$x^k = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_2 \\ Q_4 \\ H_1 \\ H_3 \end{bmatrix}^k \quad \text{y} \quad u^k = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_5 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} H_{IN} \\ H_{OUT} \end{bmatrix}^k,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 2bg & 0 \\ 0 & c & 0 & -bg & bg \\ 0 & 0 & c & 0 & -2bg \\ -b & b & 0 & ag & 0 \\ 0 & -b & b & 0 & ag \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}ag & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}ag \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(x_Q^{k-1}, f^{k-1}) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}c + F_0^{k-1} & 0 & 0 & -2bg & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}c + F_2^{k-1} & 0 & bg & -bg \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c + F_4^{k-1} & 0 & 2bg \\ b & -b & 0 & \frac{4}{3}ag & 0 \\ 0 & b & -b & 0 & \frac{4}{3}ag \end{bmatrix}, \quad \text{y}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2bg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2bg \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Upsilon. \quad (2.18)$$

Cabe destacar que el modelo mostrado en (2.17) describe el comportamiento dinámico del fluido en el interior de un de ducto sin ramales.

Ahora bien, si se considera un ramal en el ducto éste debe colocarse en un nodo donde se describe la presión. Utilizando la ecuación (2.15) para discretizar en aquel punto en donde se coloca el ramal y contemplando la ecuación de continuidad se tiene

$$ag(H_d^k) - b(Q_{d-1}^k - (Q_{d+1}^k + Q_{Ramal}^k)) = \left(\frac{ag}{3}\right) (4H_d^{k-1} - H_d^{k-2}) + b(Q_{d-1}^{k-1} - (Q_{d+1}^{k-1} + Q_{Ramal}^{k-1})), \quad (2.19)$$

en donde Q_{Ramal}^k y Q_{Ramal}^{k-1} representan el flujo volumétrico que sale por el ramal en los instantes k y $k-1$ respectivamente. Organizando términos en la ecuación (2.19), se tiene

$$ag(H_d^k) - b(Q_{d-1}^k - Q_{d+1}^k) = \left(\frac{ag}{3}\right) (4H_d^{k-1} - H_d^{k-2}) + b(Q_{d-1}^{k-1} - Q_{d+1}^{k-1}) - b(Q_{Ramal}^k + Q_{Ramal}^{k-1}). \quad (2.20)$$

Al comparar (2.20) y (2.15) se puede observar que el ramal adiciona un término en la ecuación, por lo que de manera análoga (2.20) y (2.16) se pueden llevar a una forma en representación de estados no lineal contemplando un vector Ψ que contenga los términos correspondientes a los ramales. Por tanto, el modelo matricial obtenido que considera ramales es el siguiente

$$\Lambda x^k = \Gamma(x_Q^{k-1}, f^{k-1})x^{k-1} + \Omega x^{k-2} + \Delta u^k + \Upsilon u^{k-1} - \Psi, \quad (2.21)$$

donde $\Psi \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times 1}$ es un vector columna de dimensión $(N+1) \times 1$ asociado al ramal colocado en uno de los nodos donde se describe la presión, con todos los elementos cero excepto en el nodo de presión en donde se coloca el ramal y cuyo valor está determinado por $b(Q_{Ramal}^k + Q_{Ramal}^{k-1})$. De esta manera, considerando $N = 4$ tramos en el modelo mostrado en (2.21) y un ramal a tres cuartas partes del ducto (en el punto de presión H_3), se tiene

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b(Q_{Ramal}^k + Q_{Ramal}^{k-1}) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Considerando el modelo METD obtenido, se realiza la implementación en simulación mediante el mismo entorno de programación.

Modelo aumentado

De manera análoga al caso del modelo MTC, para implementar dicho modelo con cuatro secciones mediante el bloque *Discrete State-Space* de Simulink de Matlab®), se redefine el término $\Gamma(x_Q^{k-1}, f^{k-1})x^{k-1}$ de (2.21) para descomponerlo en la suma de la parte lineal y no lineal

$$\Gamma(x_Q^{k-1}, f^{k-1})x^{k-1} = \Gamma_0 x^{k-1} + F(x_Q^{k-1}, f^{k-1})x_Q^{k-1}, \quad (2.23)$$

con

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}c & 0 & 0 & -2bg & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}c & 0 & bg & -bg \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c & 0 & 2bg \\ b & -b & 0 & \frac{4}{3}ag & 0 \\ 0 & b & -b & 0 & \frac{4}{3}ag \end{bmatrix}, \quad F(x_Q^{k-1}, f^{k-1}) = \begin{bmatrix} F_0^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & F_2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & F_4^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x^{k-1} = \begin{bmatrix} Q_0^{k-1} \\ Q_2^{k-1} \\ Q_4^{k-1} \\ H_1^{k-1} \\ H_3^{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x_Q^{k-1} = \begin{bmatrix} Q_0^{k-1} \\ Q_2^{k-1} \\ Q_4^{k-1} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Entonces el modelo (2.21) puede ser llevado a la siguiente representación aumentada mostrada en Kowalczyk y Tataru (2017)

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{aum}^k &= A_{aum}\tilde{x}_{aum}^{k-1} + B_{aum}\tilde{u}_{aum}^{k-1}, \\ y^{k-1} &= C_{aum}\tilde{x}_{aum}^{k-1} + D_{aum}\tilde{u}_{aum}^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde el vector de estados aumentado y el vector de entradas aumentado son

$$\tilde{x}_{aum}^{k-1} = \begin{bmatrix} Q_0^{k-1} \\ Q_2^{k-1} \\ Q_4^{k-1} \\ H_1^{k-1} \\ H_3^{k-1} \\ Q_0^{k-2} \\ Q_2^{k-2} \\ Q_4^{k-2} \\ H_1^{k-2} \\ H_3^{k-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_Q^{k-1} \\ x_H^{k-1} \\ x_Q^{k-2} \\ x_H^{k-2} \end{bmatrix}_{10 \times 1}, \quad \tilde{u}_{aum}^{k-1} = \begin{bmatrix} H_{IN}^k \\ H_{OUT}^k \\ H_{IN}^{k-1} \\ H_{OUT}^{k-1} \\ F_0^{k-1}Q_0^{k-1} \\ F_2^{k-1}Q_2^{k-1} \\ F_4^{k-1}Q_4^{k-1} \\ b(Q_{Ramal}^k + Q_{Ramal}^{k-1}) \end{bmatrix}_{8 \times 1},$$

$$\text{con } F_{Dd}^{k-1} = -\frac{f}{2D_a A_a^2} |Q_{Dd}^{k-1}| = -\frac{\mu^{k-1}}{A_a} |Q_{Dd}^{k-1}|.$$

Las matrices correspondientes resultan

$$\begin{aligned} A_{aum} &= \begin{bmatrix} (\Lambda^{-1}\Gamma_0)_{5 \times 5} & (\Lambda^{-1}\Omega)_{5 \times 5} \\ I_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \end{bmatrix}_{10 \times 10}, \\ B_{aum} &= \begin{bmatrix} (\Lambda^{-1}\Upsilon)_{5 \times 2} & (\Lambda^{-1}\Delta)_{5 \times 2} & G_{5 \times 3} & -(\Lambda^{-1}F)_{5 \times 1} \\ 0_{5 \times 2} & 0_{5 \times 2} & 0_{5 \times 3} & 0_{5 \times 1} \end{bmatrix}_{10 \times 8}, \\ C_{aum} &= [I_{10 \times 10}] \quad \text{y} \quad D_{aum} = [0_{10 \times 8}]. \end{aligned}$$

con

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{i11} & \Lambda_{i12} & \Lambda_{i13} & \Lambda_{i14} & \Lambda_{i15} \\ \Lambda_{i21} & \Lambda_{i22} & \Lambda_{i23} & \Lambda_{i24} & \Lambda_{i25} \\ \Lambda_{i31} & \Lambda_{i32} & \Lambda_{i33} & \Lambda_{i34} & \Lambda_{i35} \\ \Lambda_{i41} & \Lambda_{i42} & \Lambda_{i43} & \Lambda_{i44} & \Lambda_{i45} \\ \Lambda_{i51} & \Lambda_{i52} & \Lambda_{i53} & \Lambda_{i54} & \Lambda_{i55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}, \quad G = \begin{bmatrix} \Lambda_{i11} & \Lambda_{i12} & \Lambda_{i13} \\ \Lambda_{i21} & \Lambda_{i22} & \Lambda_{i23} \\ \Lambda_{i31} & \Lambda_{i32} & \Lambda_{i33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 3} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que el modelo requiere del conocimiento de las fricciones en cada sección, de forma análoga al modelo MTC, el cálculo de las mismas se realiza por medio de la la función no lineal mostrada en la ecuación (2.8).

2.3.1. Resultados en simulación

Con base en lo anterior y a partir de la implementación en Simulink, en las Figuras 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9 se presentan los resultados obtenidos con el modelo METD para una tubería discretizada espacialmente en cuatro secciones y un ramal colocado en el nodo de presión H_3 . Los parámetros utilizados en las simulaciones son los mismos que los mostrados en la tabla 2.1.

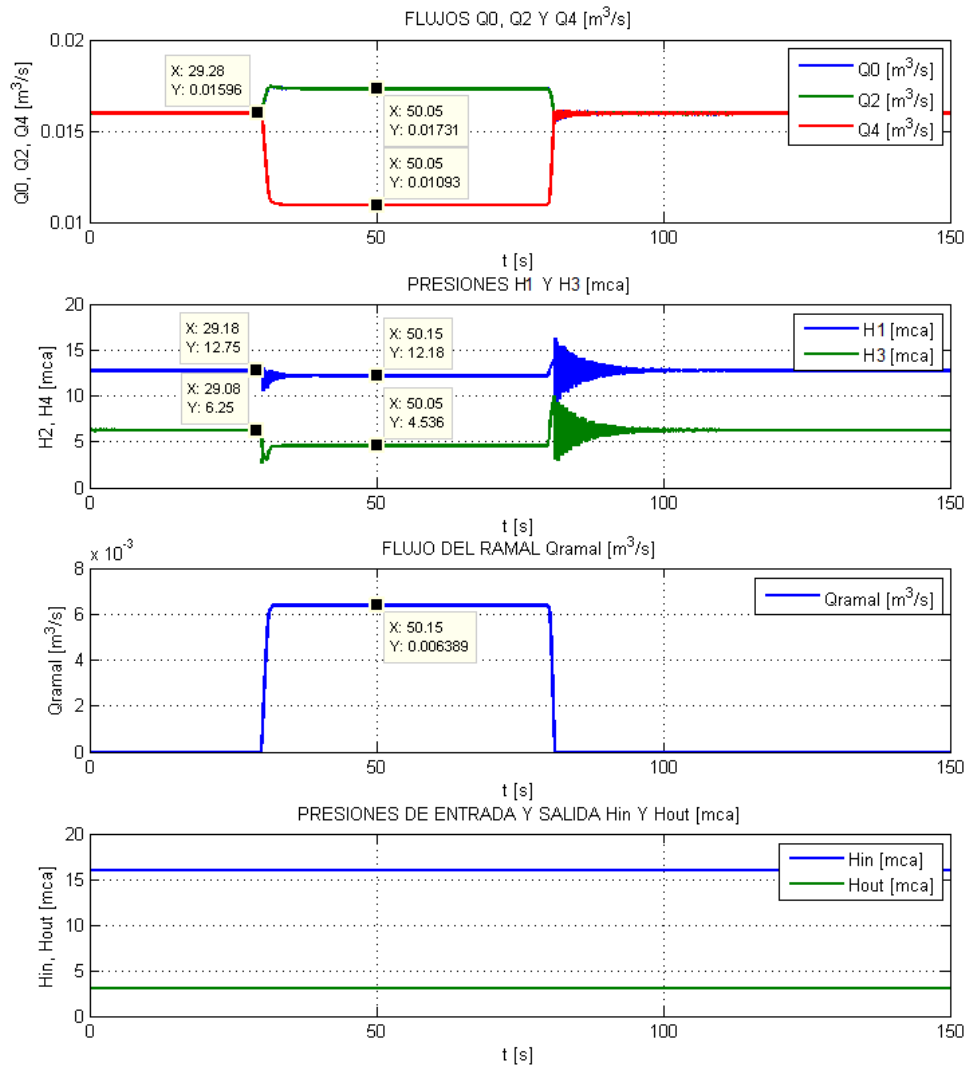


Figura 2.6: Modelo METD con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_0 , Q_2 y Q_4 , presiones H_2 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} constantes

Análogamente al modelo MTC, las Figuras 2.6, 2.7 muestran el comportamiento de los estados del sistema cuando se abre y se cierra la válvula a los 30 s y 80 s respectivamente, con una excitación constante en las presiones de entrada y salida. Los flujos de entrada y salida sin la presencia del ramal son de alrededor de $0.01596 \text{ [m}^3/\text{s]}$ y las presiones en los puntos H_1 y H_3 son de 12.75 [mca] y 6.25 [mca] , respectivamente. Al abrir la válvula se provoca un flujo en el ramal de $0.006389 \text{ [m}^3/\text{s]}$ (que de igual manera es equivalente al 40 % del flujo nominal) provocando flujos de entrada y salida de $0.01731 \text{ [m}^3/\text{s]}$ y $0.01093 \text{ [m}^3/\text{s]}$, respectivamente, con presiones H_1 y H_3 de 12.18 [mca] , 8.357 [mca] y 4.536 [mca] , respectivamente. Con base en el modelo METD, el comportamiento de los estados es el esperado y muy parecido al obtenido con el modelo MTC.

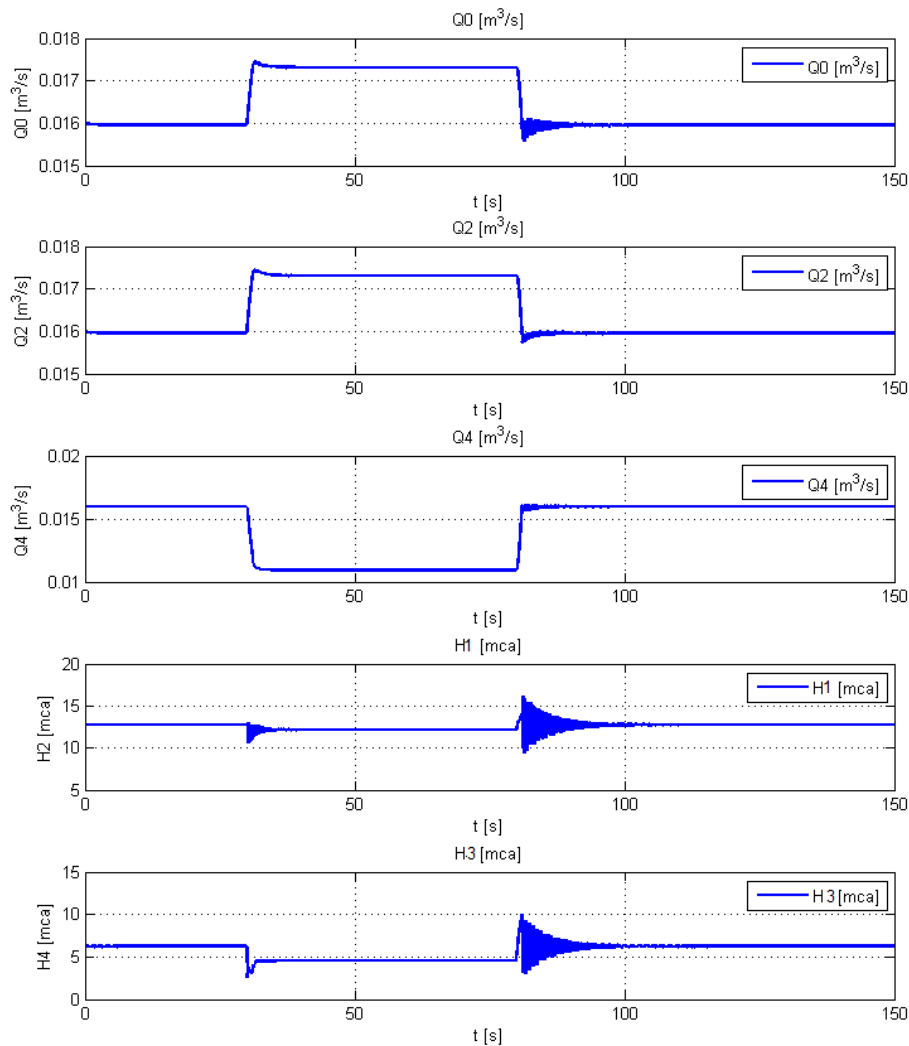


Figura 2.7: Modelo METD con entradas constantes y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_0 , Q_2 , Q_4 , H_2 y H_4

De manera similar, las figuras 2.8 y 2.9 ilustran el comportamiento de los estados del sistema cuando se tienen las mismas condiciones mencionadas para el ramal pero con presiones de entrada y salida variables. Como puede notarse en dichas figuras, los estados presentan el comportamiento esperado con presiones de entrada y salida variables, cuyos valores coinciden con el modelo MTC.

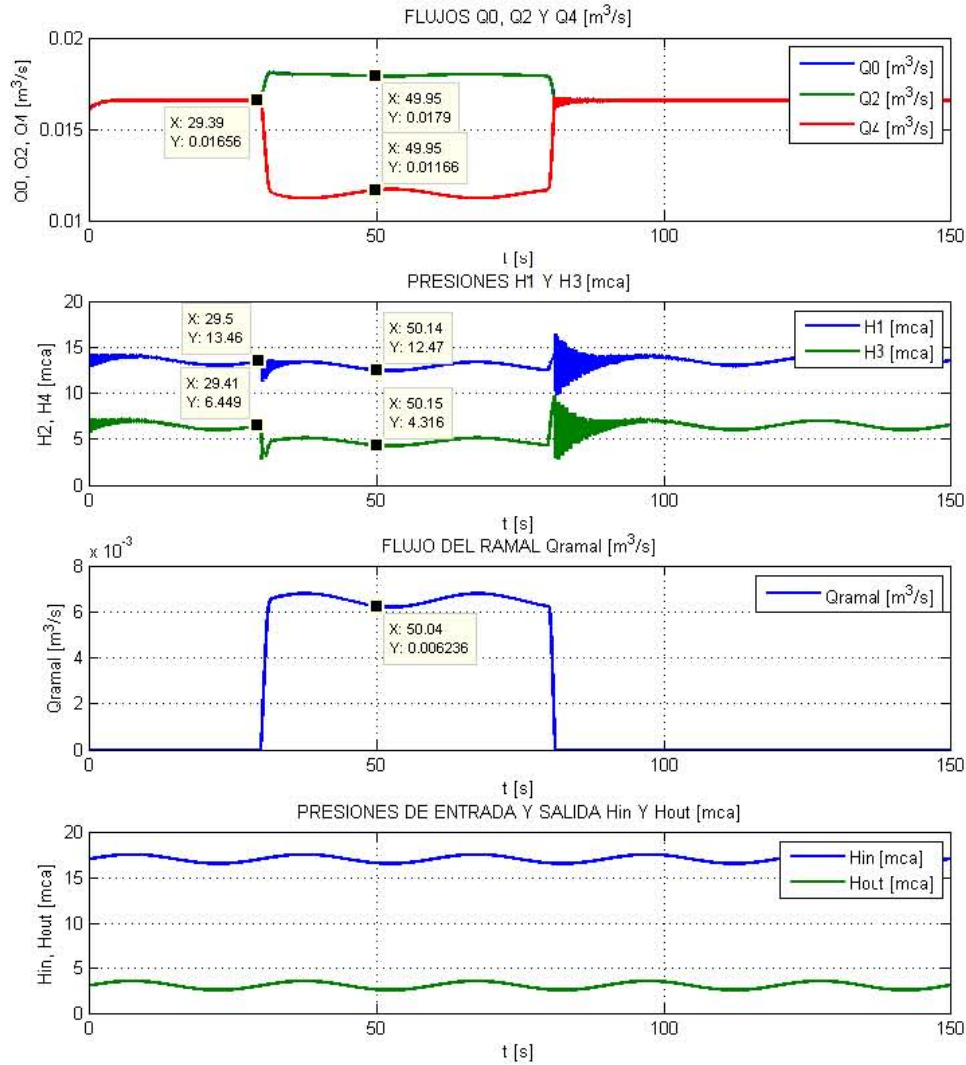


Figura 2.8: Modelo METD con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Flujos Q_0 , Q_2 y Q_4 , presiones H_2 y H_4 , flujo en el ramal Q_{Ramal} y presiones de entrada H_{IN} y salida H_{OUT} variables

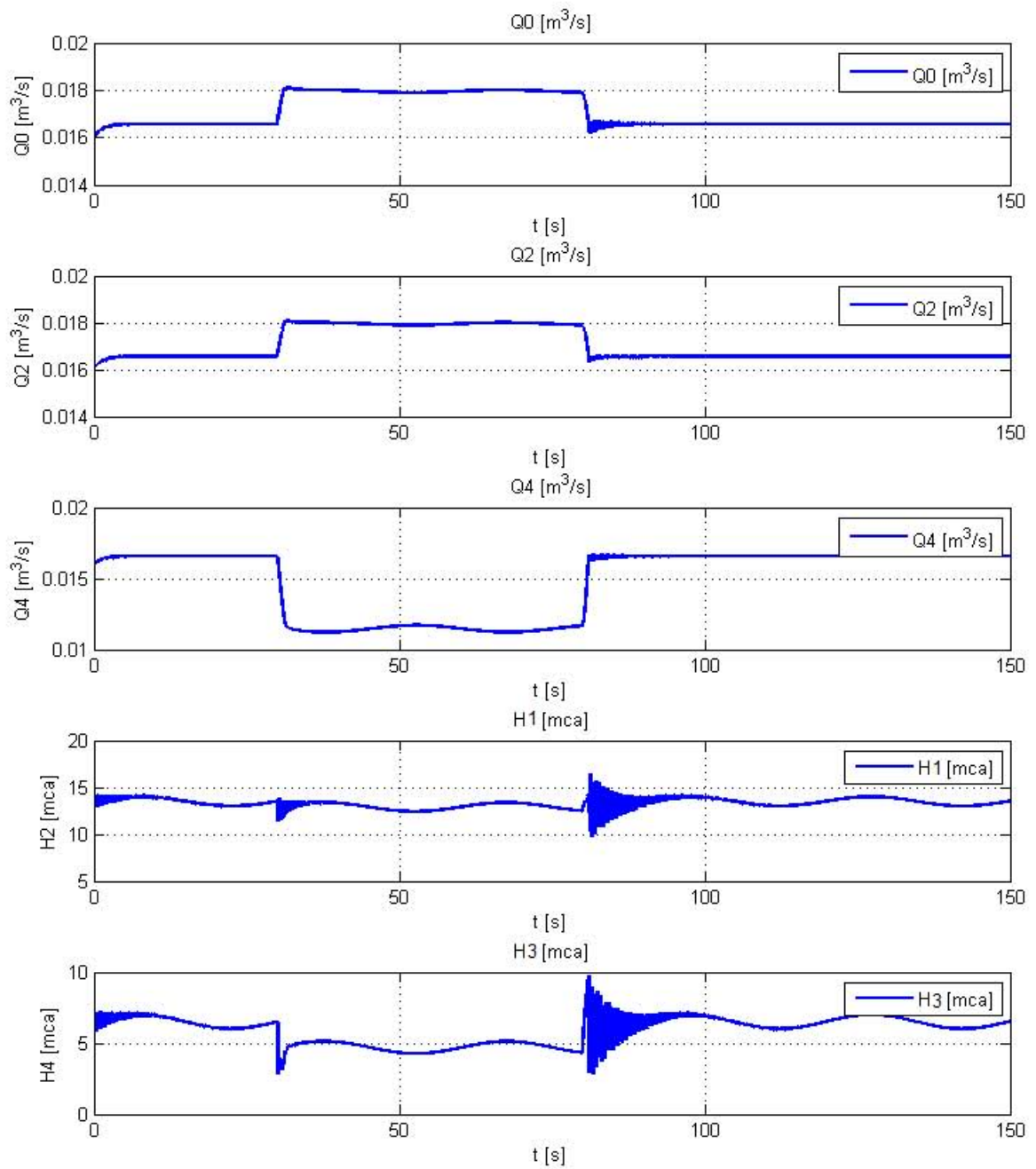


Figura 2.9: Modelo METD con entradas variables y la apertura y cierre de una válvula a los 30 s y 80 s respectivamente. Estados Q_0 , Q_2 , Q_4 , H_2 y H_4

2.4. Conclusión del capítulo

Si bien, tanto el modelo MTC (2.5) como el modelo METD (2.21) permiten representar el comportamiento dinámico del fluido dentro de la tubería, de tal forma que ambos modelos pueden generar los datos requeridos para el proceso de identificación de la fricción.

Por otra parte, es importante mencionar que para el modelo METD se ha incluido un ramal a la ecuación de estado del modelo original presentado en Kowalczyk y Tatara (2017). Sin embargo éste sólo debe colocarse en cualquiera de aquellos nodos en donde se describe la presión. Aunque en este documento únicamente se presentan resultados considerando una discretización espacial de la tubería de cuatro secciones, conforme el número de tramos en los que se divide el ducto aumenta mejora la descripción del modelo sobre el comportamiento del proceso y por tanto el ramal podría colocarse casi en cualquier punto debido a la cercanía entre los puntos donde se modela la presión con Δz muy pequeño.

Finalmente, el valor del intervalo de tiempo Δt máximo que pueden tener los modelos para presentar convergencia numérica es menor para el modelo METD que para el modelo MTC, de acuerdo con la forma implementada. Por ejemplo, para el caso del modelo METD el $\Delta t = 0.0005$ es el valor más grande que Δt puede tomar para que la implementación del modelo presente convergencia numérica, a diferencia del modelo MTC cuyo valor es de $\Delta t = 0.5$. Lo anterior se debe a la condición de Courant, la cual es una condición necesaria para la convergencia al solucionar ecuaciones diferenciales parciales numéricamente. El número de Courant, C_N , se define como la relación de la velocidad de onda real, a_u , y la velocidad de onda numérica, $\Delta z/\Delta t$, es decir, $C_N = \frac{a_u}{\Delta z/\Delta t} = \frac{a_u \Delta t}{\Delta z}$. Por lo tanto, para que el esquema numérico sea estable, el intervalo de tiempo computacional Δt y el intervalo de longitud Δz deben seleccionarse de modo que $C_N \leq 1$, de otra manera se producen errores en la simulación (Chaudhry, 2014).

Capítulo 3

Identificación de la fricción

La identificación se entiende como la determinación experimental del comportamiento temporal de un proceso o sistema. Al utilizar señales medidas se determina el comportamiento temporal dentro de una clase de modelos matemáticos. El error (desviación respectiva) entre el proceso o sistema real y su modelo matemático debe ser lo más pequeño posible (Zadeh (1996), Eykhoff (1974)).

De acuerdo con Isermann y Münchhof (2011), los modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico de los procesos se pueden expresar como funciones relacionadas con la entrada y la salida o como funciones relacionadas con estados internos. Además, pueden configurarse como modelos analíticos en forma de ecuaciones matemáticas o como tablas o curvas características. En el primer caso, los parámetros del modelo se incluyen explícitamente en la ecuación, en el otro caso, no es así. Dado que los parámetros del sistema juegan un papel dominante en la identificación, los modelos matemáticos pueden clasificarse por el tipo de modelo como modelos paramétricos o no paramétricos. Los primeros son modelos con estructura y número finito de parámetros, mientras que los segundos no presentan una estructura específica y tienen una infinita cantidad de parámetros.

Por otra parte, si se emplea una computadora para la identificación, entonces se puede diferenciar entre dos tipos de acoplamiento entre el proceso y la computadora: *offline* (acoplamiento indirecto) y *online* (acoplamiento directo). Para la identificación *offline* o fuera de línea los datos medidos se almacenan primero y luego se transfieren a la computadora utilizada para la evaluación de los mismos y se procesan allí. Sin embargo, la identificación *online* o en línea se realiza de forma paralela al experimento, es decir, la computadora está acoplada con el proceso y los datos se operan a medida que están disponibles.

La identificación mediante computadoras también permite discernir de acuerdo con el tipo de algoritmo empleado, ya sea un algoritmo basado en procesamiento por lotes o basado en un procesamiento en tiempo real. En el caso del procesamiento por lotes, las mediciones almacenadas anteriormente se procesarán de una sola vez, lo que es típico en aplicaciones fuera de línea. Si los datos se procesan inmediatamente después de que estén disponibles, entonces se trata de un procesamiento en tiempo real. Otra característica es el procesamiento de los datos, en donde se puede discernir entre procesamiento no recursivo y recursivo.

Los métodos no recursivos determinan el modelo a partir de las mediciones almacenadas previamente y, por lo tanto, son un método de elección solo para el procesamiento fuera de línea. Por el contrario, el método recursivo actualiza el modelo a medida que cada medición esté disponible. Por lo tanto, la nueva medición siempre se usa para mejorar el modelo derivado en la iteración anterior, por lo que las mediciones antiguas no necesitan ser almacenadas. Este es el enfoque típico para el procesamiento en tiempo real y se denomina *identificación en tiempo real* (Isermann y Münchhof, 2011). Dado que no solo los parámetros, sino también una medida de su precisión (por ejemplo, la varianza) se pueden calcular en línea, también se puede pensar en ejecutar la medición hasta que se haya logrado una cierta precisión de las estimaciones de los parámetros (Åström y Eykhoff, 1971).

Dependiendo del tipo de modelo que se haya elegido para representar el comportamiento dinámico del proceso, pueden aplicarse una diversidad de técnicas de identificación de parámetros. En este capítulo se aborda el problema de la identificación de la fricción f de un ducto con un ramal, empleando el algoritmo de identificación por medio de mínimos cuadrados con factor de olvido. Se muestran los resultados alcanzados para el caso de estudio con los datos obtenidos vía los modelos continuo (MTC) y discreto (METD).

3.1. Métodos de identificación

En la tabla 3.1 se muestra una descripción general de los métodos de identificación más destacados de acuerdo con Isermann y Münchhof (2011).

La elección del método de identificación depende, en gran medida, de su aplicación. Las características de cada uno de los métodos dan pauta a su correcta elección para la estimación de parámetros. Sin embargo, como se puede observar en la tabla 3.1, los métodos que muestran un mejor desempeño en lo que corresponde al procesamiento en tiempo real son: análisis de Fourier, análisis de correlación y estimación de parámetros. El método de análisis de Fourier es aplicado a modelos no paramétricos y requiere muestrear y almacenar los datos antes de ejecutar el método, lo que puede ocasionar gran demanda computacional. Por otra parte, el análisis de correlación se lleva a cabo en el dominio del tiempo; es aplicado a modelos no paramétricos y presenta la ventaja de correlacionar la señal de prueba con la señal de salida perturbada del sistema, aunque el cálculo de dichas correlaciones llega a ser laborioso. Por último, los métodos de estimación de parámetros son aplicados a modelos paramétricos y presentan la ventaja de ser ejecutados recursivamente, característica que los hace idóneos para su ejecución en tiempo real.

El método de mínimos cuadrados supone que todos los parámetros deben ser almacenados primero y después se procesan en una sola ocasión (procesamiento por lotes), lo cual significa que las estimaciones de los parámetros solo están disponibles después del final de la medición. El método no recursivo de mínimos cuadrados es muy utilizado para la identificación fuera de línea.

Por el contrario, si el proceso se identifica en línea y en tiempo real, entonces las nuevas estimaciones de los parámetros deben estar disponibles durante la medición, por ejemplo,

Tabla 3.1: Descripción de los métodos de identificación más destacados

Método	Entrada	Modelo	Salida	Proceso Lineal	Proceso No Lineal	Relación señal-ruido permisible	Procesamiento Online	Procesamiento Offline	Procesamiento por lotes	Procesamiento en tiempo real	Sistemas variantes en el tiempo	Sistemas MIMO	Fidelidad del modelo resultante	Área de aplicación
Determinación de Valores Característicos		Paramétrico		✓	✗	Debe ser muy grande	✗	✓	✓	✗	✗	✗	Promedio	*Ajuste del controlador
Análisis de Fourier		No Paramétrico		✓	✗	Debe ser grande	✓	✓	✓	✓	✗	✓	Promedio	*Validación de modelos derivados teóricamente
Mediciones de respuesta en frecuencia		No Paramétrico		✓		Promedio	✗	✓	✓	✗	✗	✓	Muy bueno	*Validación de modelos derivados teóricamente *Diseño de controladores (lineales) clásicos
Análisis de correlación		No Paramétrico		✓	✗	Puede ser pequeño	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Bueno	*Determinación de las relaciones de la señal *Determinación de retrasos de tiempo
Ajuste del modelo		Paramétrico		✓	✓	Debe ser grande	✓	✓	✗	✓	✓	✗	Promedio	*Parametrización del modelo
Estimación de parámetros		Paramétrico		✓	✓	Puede ser pequeño	✓	✓	✓	✓	✓	✓	Bueno	*Diseño de controladores adaptables *Controladores adaptables *Detección de fallas
Optimización iterativa		Paramétrico		✗	✓	Puede ser pequeño	✗	✓	✓	✗	✗	✓	Malo a muy bueno	*Diseño de controladores no lineales *Detección de fallas *Parametrización de modelos
Filtro extendido de Kalman		Paramétrico		✓	✓	Promedio	✓	✓	✓	(✓)	✓	✓	Promedio	*Estimación combinada de estados y parámetros (por ejemplo, no medir cantidades intermedias) *Estimación de estados de sistemas no lineales
Métodos basados en el subespacio		Paramétrico		✓	✗	Puede ser pequeño	✗	✓	✓	✗	✗	✓	Bueno	*Usado para análisis modal
Redes neuronales		Paramétrico		✓	✓	Puede ser pequeño	✗	✓	✓	✗	✗	✓	Promedio	*Diseño de controladores no lineales *Detección de fallas *Modelado con poco o ningún conocimiento sobre la física del proceso

✓ = Aplicable, (✓) = Posible, pero no muy adecuado, ✗ = No aplicable

después de cada paso de muestra. Si se aplica el método no recursivo de mínimos cuadrados en este trabajo, se aumentaría la cantidad de datos con una fila después de cada paso de muestra y se procesarían todos los datos disponibles (incluso a partir de los pasos de muestra anteriores). Tal enfoque requeriría una gran cantidad de cálculos y, por lo tanto, es inapropiado (Isermann y Münchhof, 2011).

Los métodos recursivos reducen el esfuerzo computacional y proporcionan una actualización de las estimaciones de los parámetros después de cada paso de muestra, permitiendo que las mediciones previas no tengan que ser almacenadas. El método de Mínimos Cuadrados Recursivo también fue descrito por Gauss (Genin, 1968). Las primeras aplicaciones de esta técnica a los sistemas dinámicos han sido presentadas por Lee (1964) y Albert y Sittler (1965).

Por lo anterior, se pretende emplear el método de estimación paramétrica basado en el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo (RLS) con factor de olvido para estimar en tiempo real los parámetros de fricción. Esta variante del algoritmo de Mínimos Cuadrados está sujeta a las mismas restricciones que su homólogo iterativo (conocimiento a priori de la estructura de la ecuación de estado del modelo, y de su retardo, etc), solo que permite realizar la identificación *online*. El factor de olvido permite ponderar más a las muestras más recientes, permitiendo así detectar un posible cambio de parámetros cuando el algoritmo lleva un tiempo considerable funcionando.

A continuación se presenta el modelo paramétrico de la tubería basado en principios físicos del proceso que, posteriormente, es utilizado para la determinación de la fricción en el duct

3.2. Modelo paramétrico

En el presente trabajo se ha seleccionado el modelo de espacio y tiempo discretos (METD) para la identificación de la fricción dado que en el caso de la implementación física en una tubería real se obtendrían muestras de las variables físicas medidas por medio de un sistema de adquisición de datos. Por tanto, se requiere una representación discreta del sistema.

De acuerdo con Lennart (1999), el modelo del sistema de la ecuación (2.21) se debe llevar a la forma

$$h(k) = \eta(k) + \phi(k-1)\theta(k-1), \quad (3.1)$$

en donde $h(k)$ es el vector de observaciones que depende tanto de valores actuales como de valores pasados, $\phi(k)$ es la matriz de regresión formada por variables internas del sistema, $\eta(k)$ es un vector conocido y $\theta(k-1)$ es el vector de parámetros desconocidos que puede determinarse a partir de alguna técnica de identificación. Este tipo de modelo en el área de control adaptable es conocido como modelo paramétrico estático (MPS) lineal que puede representar sistemas estáticos, dinámicos, lineales o no lineales. Sin embargo, cabe resaltar que el vector de parámetros θ debe presentarse de forma lineal en (3.1).

3.2.1. Modelo con estado medido (x^k y Q_{Ramal}^k)

Considerando el modelo METD con cuatro secciones y flujo del ramal Q_{Ramal}^k y vector de estados x^k medibles, al sustituir la ecuación (2.23) en (2.21) se tiene

$$\Lambda x^k = \Gamma_0 x^{k-1} + F(x_Q^{k-1}, f^{k-1}) x_Q^{k-1} + \Omega x^{k-2} + \Delta u^k + \Upsilon u^{k-1} - \Psi. \quad (3.2)$$

Premultiplicando (3.2) por Λ^{-1} se obtiene

$$x^k = \Lambda^{-1} \Gamma_0 x^{k-1} + \Lambda^{-1} F(x_Q^{k-1}, f^{k-1}) x_Q^{k-1} + \Lambda^{-1} \Omega x^{k-2} + \Lambda^{-1} \Delta u^k + \Lambda^{-1} \Upsilon u^{k-1} - \Lambda^{-1} \Psi. \quad (3.3)$$

Por lo tanto, (3.3) puede llevarse a la forma (3.1) en donde $f^k = \theta(k)$ y

$$\begin{aligned} h(k) &= x^k, \\ \eta(k) &= \Lambda^{-1} \Gamma_0 x^{k-1} + \Lambda^{-1} \Omega x^{k-2} + \Lambda^{-1} \Delta u^k + \Lambda^{-1} \Upsilon u^{k-1} - \Lambda^{-1} \Psi, \\ \phi(k-1)\theta(k-1) &= \Lambda^{-1} F(x_Q^{k-1}, f^{k-1}) x_Q^{k-1}, \\ \phi(k-1) &= -\frac{1}{2D_a A_a^2} \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} |x_1| x_1 & 0 & 0 \\ 0 & |x_2| x_2 & 0 \\ 0 & 0 & |x_3| x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k-1}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

con

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}c & 0 & 0 & -2bg & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}c & 0 & bg & -bg \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}c & 0 & 2bg \\ b & -b & 0 & \frac{4}{3}ag & 0 \\ 0 & b & -b & 0 & \frac{4}{3}ag \end{bmatrix},$$

De esta manera, con (3.4) se puede determinar el vector de parámetros θ mediante alguna técnica de identificación al considerarse flujos y presiones medibles en cualquier instante de tiempo. Sin embargo, en la práctica solamente se tiene acceso a la medición de los flujos y las presiones en los extremos del ducto, por lo que se pretende hacer la identificación de la fricción cuando los valores de presión intermedios no son medibles. Dicho modelo es descrito a continuación.

3.2.2. Modelo con mediciones de flujo (x_Q^k y Q_{Ramal}^k medibles)

Previamente se ha llevado el modelo del fluido a un modelo paramétrico el cual se puede usar para la identificación de la fricción basándose en el conocimiento de los flujos y las presiones. Sin embargo, dado que no todo el estado es medible en un caso real, es necesario estimar los valores de presión del vector x_H^k y para ello se emplean dos metodologías las cuales son explicadas a continuación.

Metodología I

Esta metodología consiste en expresar las presiones en términos de valores pasados de los gastos medibles. Esta manipulación es equivalente a un observador de orden reducido de las presiones a partir de flujos. Es decir, se propone expresar el vector de presiones x_H^k en función de variables medibles y fricciones a estimar. Posteriormente se sustituye el vector de presiones calculadas en las equivalencias presentadas en (3.4) y se determina el vector θ a partir de darle la forma de regresor a la ecuación resultante.

Considérese el modelo en representación matricial (2.21) y que x_Q^k y $u_3^k = Q_{Ramal}^k$ son medibles. A partir de lo anterior se pretende determinar si el sistema es observable. Redefiniendo las matrices de la ecuación (2.21) se puede escribir

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_Q^k \\ x_H^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(\theta) & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_Q^{k-1} \\ x_H^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_Q^{k-2} \\ x_H^{k-2} \end{bmatrix} + E(u^k, u^{k-1}, u_3^k, u_3^{k-1}). \quad (3.5)$$

donde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma(x_Q^{k-1}, \theta^{k-1}) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(\theta) & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 \\ 0 & \Omega_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$E(u^k, u^{k-1}, u_3^k, u_3^{k-1}) = \Delta u^k + \Upsilon u^{k-1} - \Psi. \quad (3.7)$$

El modelo mostrado en la ecuación matricial (3.5) puede llevarse a la forma convencional de espacio de estados por medio de un sistema aumentado que depende únicamente del valor en el instante actual y del valor en el instante pasado. El sistema expresado en forma aumentada es

$$\Lambda_a(\theta)x_a^k = \Gamma_a x_a^{k-1} + E_a(u^k, u^{k-1}, u_3^k, u_3^{k-1}), \quad (3.8)$$

con un vector de estados aumentado

$$x_a^{k-1} = \begin{bmatrix} x_Q^{k-1} \\ x_Q^{k-2} \\ x_H^{k-1} \\ x_H^{k-2} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Las matrices de la ecuación (3.8) están determinadas por

$$\Lambda_a(\theta) = \left[\begin{array}{cc|cc} \Lambda_{11} & -\Gamma_{11}(\theta) & \Lambda_{12} & -\Gamma_{12} \\ 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2}+1)} & I_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2})} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2})} \\ \hline \Lambda_{21} & -\Gamma_{21} & \Lambda_{22} & -\Gamma_{22} \\ 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2})} & I_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2})} \end{array} \right], \quad (3.10)$$

$$\Gamma_a = \left[\begin{array}{cc|cc} 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2}+1)} & \Omega_{11} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2})} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2})} \\ I_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2})} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times (\frac{N}{2})} \\ \hline 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2})} & \Omega_{22} \\ 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2}+1)} & 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2}+1)} & I_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2})} & 0_{(\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2})} \end{array} \right], \quad (3.11)$$

$$E_a(u^k, u^{k-1}, u_3^k, u_3^{k-1}) = \Delta_a u^k + \Upsilon_a u^{k-1} - \Psi_a, \quad (3.12)$$

con

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} 2bg & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & -2bg \\ \hline 0_{(\frac{N}{2}+1) \times 1} & 0_{(\frac{N}{2}+1) \times 1} \\ 0_{N \times 1} & 0_{N \times 1} \end{bmatrix} = \Upsilon_a \quad \text{y} \quad (3.13)$$

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} 0_{(N+2) \times 1} \\ 0 \\ \vdots \\ b(u_3^k + u_3^{k-1}) \end{bmatrix}.$$

Premultiplicando la ecuación (3.8) por $\Lambda_a^{-1}(\theta)$ y considerando el vector de salida se obtiene

$$\begin{aligned} x_a^k &= \Lambda_a^{-1}(\theta) \Gamma_a x_a^{k-1} + \Lambda_a^{-1}(\theta) E_a(u^k, u^{k-1}, u_3^k, u_3^{k-1}), \\ y_a^{k-1} &= C_a x_a^{k-1}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$\Lambda_a^{-1}(\theta) E_a(u^k, u^{k-1}, u_3^k, u_3^{k-1}) = \Lambda_a^{-1}(\theta) (\Delta_a u^k + \Upsilon_a u^{k-1} - \Psi_a) = \begin{bmatrix} E_{a1}(u^k, u^{k-1}) \\ E_{a2}(u_3^k, u_3^{k-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$C_a = \left[\begin{array}{cc|cc} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} \end{array} \right]. \quad (3.16)$$

Por lo tanto, con el sistema en la forma (3.14) se construye la matriz de observabilidad

$$O = \begin{bmatrix} C_a \\ C_a(\Lambda_a^{-1} \Gamma_a) \\ C_a(\Lambda_a^{-1} \Gamma_a)^2 \\ \vdots \\ C_a(\Lambda_a^{-1} \Gamma_a)^9 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

por lo que el par $(C_a, \Lambda_a^{-1} \Gamma_a)$ es observable si la matriz (3.17) tiene rango completo por columna y se debe verificar.

Ya que lo que se busca es estimar los valores de las presiones por medio de variables conocidas, se propone una representación de la ecuación de salida con base en la matriz de observabilidad. Sin embargo, el tamaño de la matriz (3.17) es 36×10 , por lo que únicamente se requieren los renglones linealmente independientes de dicha matriz. De esta manera se

construye la matriz de observabilidad reducida

$$O_{red} = \begin{bmatrix} C_a \\ C_a(\Lambda_a^{-1}\Gamma_a)_{LI \text{ rows}} \\ C_a(\Lambda_a^{-1}\Gamma_a)^2_{LI \text{ rows}} \\ \vdots \\ C_a(\Lambda_a^{-1}\Gamma_a)^9_{LI \text{ rows}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 4} \\ \hline (A_{21})_{4 \times 6} & (A_{22})_{4 \times 4} \end{array} \right], \quad (3.18)$$

en donde el subíndice *LI rows* indica que ese término está formado únicamente por los renglones linealmente independientes de la matriz (3.17).

Así, de la matriz de observabilidad reducida (3.18), se pueden expresar las salidas como

$$\begin{bmatrix} \frac{y_a^{k-1}}{(y_a^k)_{LI \text{ rows}}} \\ (y_a^{k+1})_{LI \text{ rows}} \\ \vdots \\ (y_a^{k+8})_{LI \text{ rows}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{6 \times 6} & 0_{6 \times 4} \\ \hline (A_{21})_{4 \times 6} & (A_{22})_{4 \times 4} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_Q^{k-1} \\ x_Q^{k-2} \\ \frac{x_H^{k-1}}{x_H^{k-2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{a1}(u^k, u^{k-1}) \\ E_{a2}(u_3^k, u_3^{k-1}) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Como ya se ha mencionado, los términos x_Q^{k-1} y x_Q^{k-2} se consideran medibles, entonces $E_{a1}(u^k, u^{k-1})$ y $E_{a2}(u_3^k, u_3^{k-1})$ dependen de términos conocidos (puesto que u_3^k y u_3^{k-1} son medibles), y los términos $y_a^{k-1}, y_a^k, y_a^{k+1}, \dots, y_a^{k+8}$ son las salidas medibles en los distintos instantes de tiempo. Por lo anterior, únicamente se requieren estimar x_H^{k-1} y x_H^{k-2} y para ello sólo se considera la parte inferior de la ecuación (3.19) resultando

$$\begin{bmatrix} \frac{y_a^{k-1}}{(y_a^k)_{LI \text{ rows}}} \\ (y_a^{k+1})_{LI \text{ rows}} \\ \vdots \\ (y_a^{k+8})_{LI \text{ rows}} \end{bmatrix} = [(A_{21})_{4 \times 6}] \begin{bmatrix} x_Q^{k-1} \\ x_Q^{k-2} \end{bmatrix} + [(A_{22})_{4 \times 4}] \begin{bmatrix} x_H^{k-1} \\ x_H^{k-2} \end{bmatrix} + [E_{a2}(u_3^k, u_3^{k-1})]. \quad (3.20)$$

Al despejar x_H^{k-1} y x_H^{k-2} se obtienen

$$\begin{bmatrix} x_H^{k-1} \\ x_H^{k-2} \end{bmatrix} = A_{22}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{y_a^{k-1}}{(y_a^k)_{LI \text{ rows}}} \\ (y_a^{k+1})_{LI \text{ rows}} \\ \vdots \\ (y_a^{k+2N})_{LI \text{ rows}} \end{bmatrix} - A_{21} \begin{bmatrix} x_Q^{k-1} \\ x_Q^{k-2} \end{bmatrix} - [E_{a2}(u_3^k, u_3^{k-1})] \right). \quad (3.21)$$

Cabe señalar que las matrices A_{21} y A_{22} dependen de las fricciones f_0, f_2, \dots, f_N , de potencias de las mismas y/o de combinaciones de productos entre ellas. Por tanto, deben conocerse los términos de fricción para poder obtener los valores de presión correspondientes. Sin embargo, la ecuación (3.21) determina los conjuntos de presiones x_H^{k-1} y x_H^{k-2} que deben

ser sustituidos en el vector de estados x^{k-1} y x^{k-2} de las equivalencias mostradas en (??). El modelo resultante debe ser llevado a la forma del modelo paramétrico presentado en (3.1) y de esta manera se logra identificar el vector θ .

Es importante destacar que el cálculo de la matriz inversa de A_{22} en la ecuación (3.21) es complicada cuando el número de tramos N es grande, ya que se incrementan los términos de fricción y las combinaciones no lineales en las mismas. Además, al realizar la sustitución de las presiones calculadas por medio de (3.21) en el modelo (??), se complica en gran medida llevar el modelo resultante a la forma de regresor mostrada en (3.1), puesto que en el nuevo modelo aparecen términos que depende de las ófricciones y de combinaciones de productos entre ellas. Por lo anterior, no se consideró adecuado obtener los estimados de las presiones por este método.

Metodología II

Esta metodología consiste en aprovechar las características del modelo presentado en (3.2) para calcular el vector $x_H^k = [H_1^k, H_3^k, \dots, H_{N-1}^k]^T$ a partir del conocimiento de las presiones (x_H^{k-1} y x_H^{k-2}) en los dos primeros instantes de tiempo. El flujo del ramal Q_{Ramal} y el vector de flujos x_Q se consideran variables medibles, por lo que únicamente se requieren x_H^{k-1} y x_H^{k-2} para los demás instantes de tiempo.

De acuerdo con el modelo obtenido en la ecuación (3.2), la matriz $F(x_Q^{k-1}, f^{k-1})$ contiene los términos de fricción que son multiplicados únicamente por el vector x_Q^{k-1} . Esta característica es la razón principal por la cual se propone calcular x_H^k por medio del modelo, puesto que no se requieren los valores de fricción en el cálculo de las presiones.

Considérese el modelo descrito por (3.2) para cuatro secciones ($N = 4$)

$$\Lambda x^k = \Gamma_0 x^{k-1} + F(x_Q^{k-1}, \theta^{k-1}) x_Q^{k-1} + \Omega x^{k-2} + \Delta u^k + \Upsilon u^{k-1} - \Psi. \quad (3.22)$$

Considerando $x_Q^k = [x_1^k, x_2^k, x_3^k]^T = [Q_0^k, Q_2^k, Q_4^k]^T$ y $x_H^k = [x_4^k, x_5^k]^T = [H_1^k, H_3^k]^T$ y separando los dos últimos renglones de la ecuación matricial (3.22), correspondiente al vector de presiones x_H^k , se obtienen

$$\begin{aligned} -bQ_0^k + bQ_2^k + agH_1^k &= bQ_0^{k-1} - bQ_2^{k-1} + \frac{4}{3}agH_1^{k-1} - \frac{1}{3}agH_1^{k-2}, \\ -bQ_2^k + bQ_4^k + agH_3^k &= bQ_2^{k-1} - bQ_4^{k-1} + \frac{4}{3}agH_3^{k-1} - \frac{1}{3}agH_3^{k-2} - b(Q_{Ramal}^k + Q_{Ramal}^{k-1}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

en donde se aprecia que las ecuaciones no dependen de las fricciones. Al despejar H_1^k y H_3^k de (3.23) se pueden calcular los valores de las presiones en el instante k , puesto que todos los flujos se consideran variables medibles y se parte del supuesto de que se conocen las presiones

en los dos primeros instantes de tiempo:

$$\begin{aligned} H_1^k &= \frac{b}{ag}Q_0^k - \frac{b}{ag}Q_2^k + \frac{b}{ag}Q_0^{k-1} - \frac{b}{ag}Q_2^{k-1} + \frac{4}{3}H_1^{k-1} - \frac{1}{3}H_1^{k-2}, \\ H_3^k &= \frac{b}{ag}Q_2^k - \frac{b}{ag}Q_4^k + \frac{b}{ag}Q_2^{k-1} - \frac{b}{ag}Q_4^{k-1} + \frac{4}{3}H_3^{k-1} - \frac{1}{3}H_3^{k-2} - \frac{b}{ag}(Q_{Ramal}^k + Q_{Ramal}^{k-1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

De esta forma, para calcular los valores siguientes de las presiones se realiza un corrimiento el cual consiste en sustituir los valores de las presiones H_1^k , H_3^k , H_1^{k-1} y H_3^{k-1} en los valores anteriores H_1^{k-1} , H_3^{k-1} , H_1^{k-2} y H_3^{k-2} , respectivamente, y la acción se repite sucesivamente. De manera recursiva se construyen todos los valores de las presiones y, a su vez, el vector de estados x^k para cualquier instante de tiempo. Así, con las equivalencias mostradas en (3.4) se puede determinar el vector θ haciendo uso de alguna técnica de identificación. El algoritmo empleado para la identificación paramétrica es descrito a continuación.

3.3. Algoritmo de identificación

Con base en el modelo paramétrico de la tubería basado en el comportamiento dinámico del fluido, se emplea el método de estimación de parámetros haciendo uso del algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo con factor de olvido para la determinación de la fricción.

De acuerdo con Isermann y Münchhof (2011), el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo se puede resumir matemáticamente en las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} P(k+1) &= [I - \gamma(k)\psi_{RLS}^T(k+1)]P(k), \\ \gamma(k) &= P(k+1)\psi_{RLS}(k+1) = P(k)\psi_{RLS}(k+1)\Omega_{RLS}(k+1), \\ e(k+1) &= \left(y(k+1) - \psi_{RLS}^T(k+1)\hat{\theta}(k)\right), \\ \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + \gamma(k) \left(y(k+1) - \psi_{RLS}^T(k+1)\hat{\theta}(k)\right), \end{aligned}$$

con

$$\Omega_{RLS}(k+1) = \left[I - (I + \psi_{RLS}^T(k+1)P(k)\psi_{RLS}(k+1))^{-1} \psi_{RLS}^T(k+1)P(k)\psi_{RLS}(k+1) \right], \quad (3.25)$$

donde

- $\theta(k) \in \mathfrak{R}^{(\frac{N}{2}+1) \times 1}$ denota el vector de parámetros estimados en el instante k
- $\gamma(k) \in \mathfrak{R}^{(\frac{N}{2}+1) \times (N+1)}$ es una matriz de ganancias
- $y(k+1) \in \mathfrak{R}^{(N+1) \times 1}$ es la nueva medición
- $P(k+1)\psi_{RLS}(k+1) \in \mathfrak{R}^{(\frac{N}{2}+1) \times (N+1)}$ es la matriz de corrección
- $\psi_{RLS} \in \mathfrak{R}^{(\frac{N}{2}+1) \times (N+1)}$ es la matriz de regresión en ese instante

- $e(k+1) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$ es el error de estimación

De esta manera, con base en las expresiones mostradas en 3.25, los pasos a seguir para la utilización de este algoritmo se describen a continuación:

1. Definir los valores iniciales del vector θ y de la matriz P
2. Tomar medidas de las señales de entrada y salida
3. Formar la matriz de regresión de regresión ψ_{RLS}
4. Calcular la matriz de ganancias γ
5. Calcular el error de predicción e
6. Calcular los parámetros estimados
7. Calcular la matriz P para el instante siguiente
8. Volver al punto 2 en el siguiente muestreo

Cabe señalar que se requiere *a priori* dar un valor inicial de la matriz P y el vector de parámetros estimados.

La desventaja que presenta este algoritmo es el apagado del mismo, es decir, la incapacidad para detectar cambios en parámetros a lo largo del tiempo debido a que la traza de la matriz P se hace muy pequeña. Lo anterior puede solucionarse empleando el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo con Factor de Olvido. Este algoritmo introduce un factor de olvido λ de tal manera que se pondera mayormente a las muestras más recientes, permitiendo de esta forma detectar un posible cambio de parámetros cuando el algoritmo lleva un tiempo considerable funcionando y la traza de la matriz P es muy pequeña.

Matemáticamente, dicho algoritmo puede expresarse de la siguiente manera (Isermann y Münchhof, 2011)

$$\begin{aligned}
 P_\lambda(k+1) &= [I - \gamma_\lambda(k)\psi_{\lambda RLS}^T(k+1)] P_\lambda(k) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \\
 \gamma_\lambda(k) &= \lambda P_\lambda(k+1)\psi_{\lambda RLS}(k+1) = P_\lambda(k)\psi_{\lambda RLS}(k+1)\Omega_{\lambda RLS}(k+1), \\
 e(k+1) &= \left(y(k+1) - \psi_{\lambda RLS}^T(k+1)\hat{\theta}(k) \right), \\
 \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + \gamma_\lambda(k) \left(y(k+1) - \psi_{\lambda RLS}^T(k+1)\hat{\theta}(k) \right), \\
 &\text{con} \\
 \Omega_{\lambda RLS}(k+1) &= \left[I - (\lambda I + \psi_{\lambda RLS}^T(k+1)P_\lambda(k)\psi_{\lambda RLS}(k+1))^{-1} \psi_{\lambda RLS}^T(k+1)P_\lambda(k)\psi_{\lambda RLS}(k+1) \right].
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dependiendo del valor de λ , $0 < \lambda < 1$, se obtienen comportamientos diferentes, por ejemplo:

- Con un λ pequeño se descartan datos pasados demasiado rápido y los elementos de las matrices P y γ se hacen grandes, lo cual permite detectar posibles cambios en los

parámetros. Es decir, un λ menor *recuerda* menos por lo que se adapta rápidamente pero es más sensible al ruido.

- Con un λ grande (cercano a la unidad) se presentan problemas cuando se pretende detectar cambios en los parámetros. Un λ próximo a 1 *recuerda* muchas medidas por lo que es más insensible al ruido, pero se adapta más lentamente.

Por lo general es común elegir un valor de λ entre 0.9 y 0.98. Sin embargo, la elección de dicho valor depende en gran medida de los valores asociados a los parámetros del sistema.

3.4. Resultados en simulación

Para validar el algoritmo de identificación se realizan pruebas con datos simulados obtenidos a partir de los modelos MTC y METD, considerando los mismos parámetros de la tabla 2.1. En la tabla 3.2 se exponen los parámetros empleados para el algoritmo de identificación presentado en (3.26).

Parámetro	Valor
Factor de olvido λ	0.7
Matriz inicial $P(0)$	8e08 I
Vector inicial $\theta(0)$	$[0.39 \ 0.39 \ 0.39]^T$
λ_{3g} para un Q_{Ramal} grande	0.003
λ_{3p} para un Q_{Ramal} pequeño	0.0003

Tabla 3.2: Parámetros considerados para el algoritmo de identificación

En las Figuras 3.1 y 3.2 se presentan tres imágenes de las fricciones calculadas con la fórmula mostrada en (2.8) y los datos de los modelos MTC y METD, respectivamente, ante la presencia de un ramal pequeño con excitaciones constantes, un ramal grande con excitaciones constantes y un ramal grande con excitaciones senoidales que sirven como patrón para validar los identificadores. Al comparar ambas figuras se concluye que las dos presentan un valor de fricción nominal (sin ramal) de 0.03948 y al colocar un ramal con un flujo pequeño y presiones constantes las fricciones son de 0.03947 y 0.03951 aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. Ahora bien, cuando se tiene un flujo grande en el ramal y presiones constantes, se presentan valores de fricción de 0.03943 y 0.03978 aguas arriba y aguas abajo, conservando un valor de fricción nominal de 0.03948,

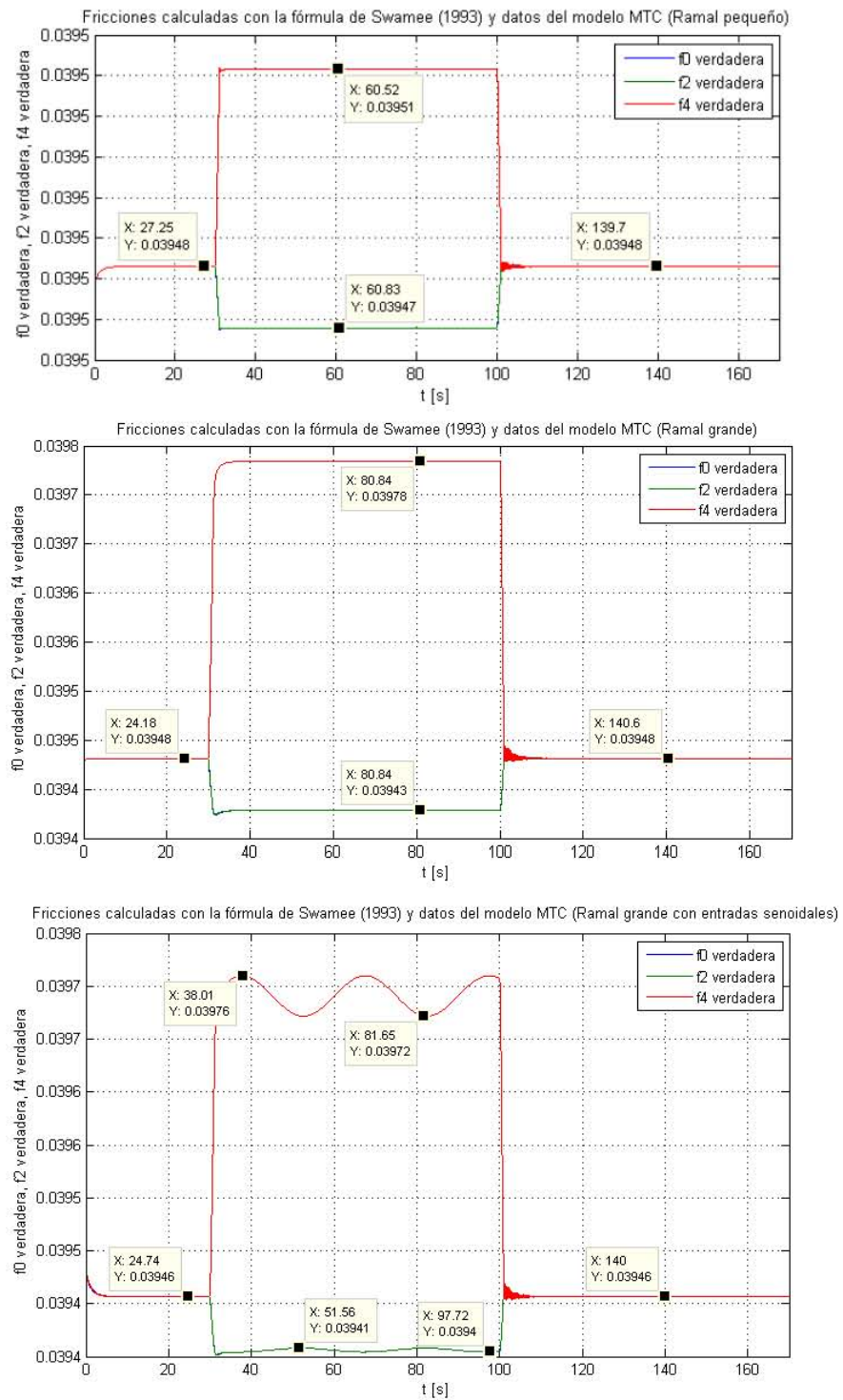


Figura 3.1: Fricciones calculadas con la fórmula expuesta en (2.8) y datos del modelo MTC

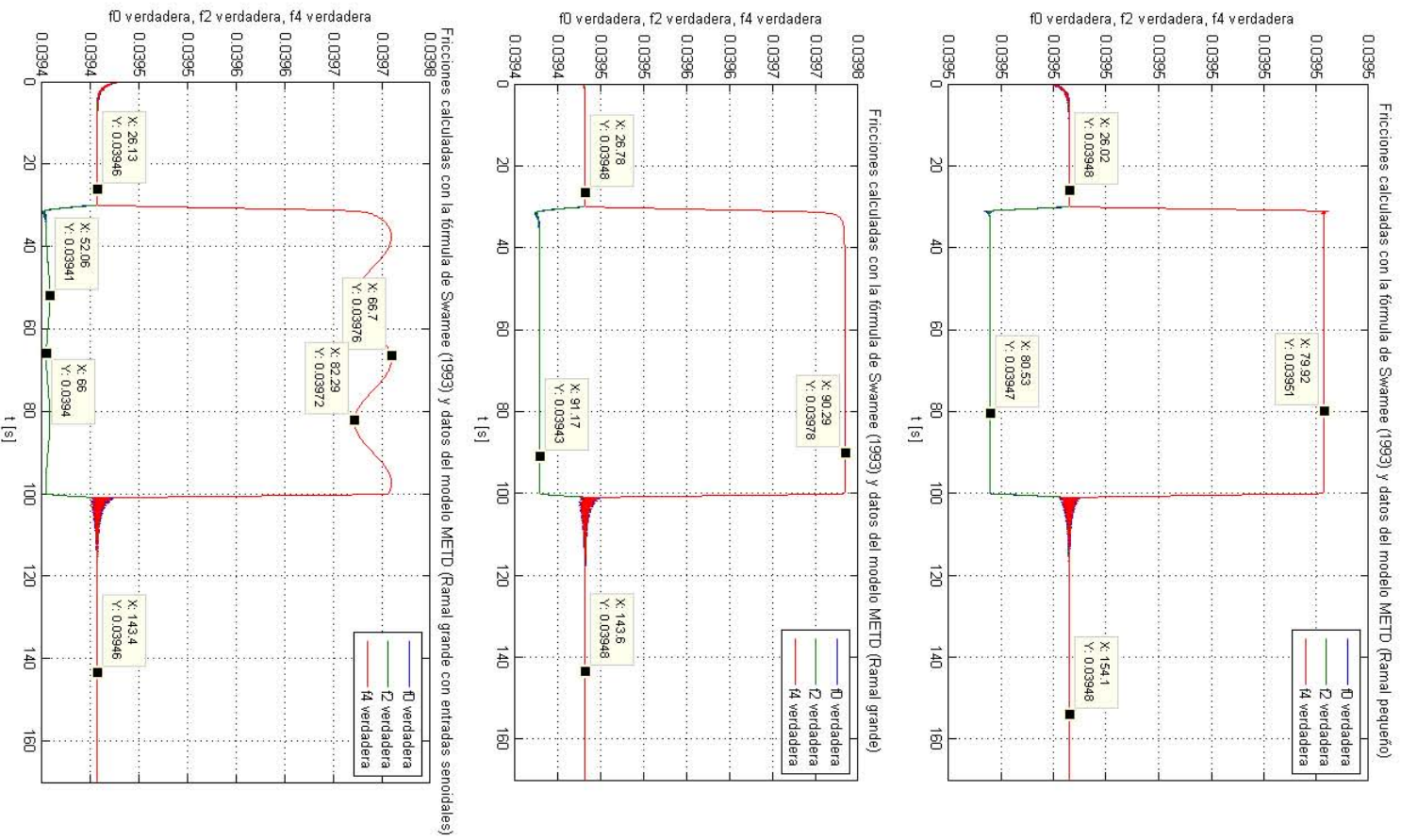


Figura 3.2: Fricciones calculadas con la fórmula expuesta en (2.8) y datos del modelo METD

En las siguientes Figuras se muestran los resultados obtenidos con el algoritmo de identificación de Mínimos Cuadrados Recursivo con factor de olvido considerando datos simulados por medio de los modelos MTC y METD (asumiendo las fricciones mostradas en 3.1 y 3.2 respectivamente).

En las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5 se ilustra el comportamiento de los flujos y presiones de entrada y salida, las fricciones y los errores porcentuales en éstas considerando el modelo MTC con estado medido. Se puede observar un flujo nominal de alrededor de $0.01596 [m^3/s]$ y con la aparición de un flujo grande en el ramal (equivalente al 40 % del flujo nominal), los flujos aguas arriba y aguas abajo cambian a $0.01732 [m^3/s]$ y $0.01093 [m^3/s]$, respectivamente. El valor de fricción nominal es de 0.03948. Con la presencia del ramal, las fricciones son 0.03943 y 0.03978 aguas arriba y aguas abajo, respectivamente, y los errores porcentuales en éstas son de alrededor de cero para todos los casos (del orden de 10^{-12} %).

Por otra parte, en las Figuras 3.6, 3.7 y 3.8 se presentan los resultados obtenidos considerando los datos del modelo MTC y las presiones H_1 y H_3 estimadas. Tanto los flujos como las fricciones nominal, aguas arriba y aguas abajo son los mismos que en el caso con estado medido, y los errores porcentuales en las fricciones también son muy cercanos a cero (del orden de 10^{-11} %).

Ahora bien, en las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11 se muestra el comportamiento de los flujos y presiones de entrada y salida, las fricciones y los errores porcentuales en éstas considerando el modelo METD con estado medido. Se logra notar que con la aparición de un flujo pequeño en el ramal (equivalente al 5 % del flujo nominal), los flujos aguas arriba y aguas abajo cambian a $0.01614 [m^3/s]$ y $0.0154 [m^3/s]$, respectivamente. El valor de fricción nominal es de 0.03948 al igual que con el modelo MTC. Sin embargo, con la aparición del ramal las fricciones cambian a 0.03936 y 0.03976, y los errores porcentuales en éstas son de 0.2949 % y 0.6471 % aguas arriba y aguas abajo, respectivamente.

Finalmente, en las Figuras 3.12, 3.13 y 3.14 se presentan los resultados obtenidos considerando los datos del modelo METD y las presiones H_1 y H_3 estimadas. Los flujos nominal, aguas arriba y aguas abajo son los mismos que en el caso con estado medido, pero las fricciones son distintas. Éstas presentan valores de 0.03948 para el caso nominal y con la presencia de un flujo pequeño en el ramal los valores cambian a 0.03831 y 0.04206 aguas arriba y aguas abajo, respectivamente. Los errores porcentuales en las fricciones son grandes, cerca de 3 % para el caso de aguas arriba y 6.5 % para el caso de aguas abajo.

3.4.1. Simulaciones con modelo MTC

Simulaciones considerando estado medido y un flujo grande en el ramal ($\lambda_f = 0.003$) y factor de olvido $\lambda = 0.7$

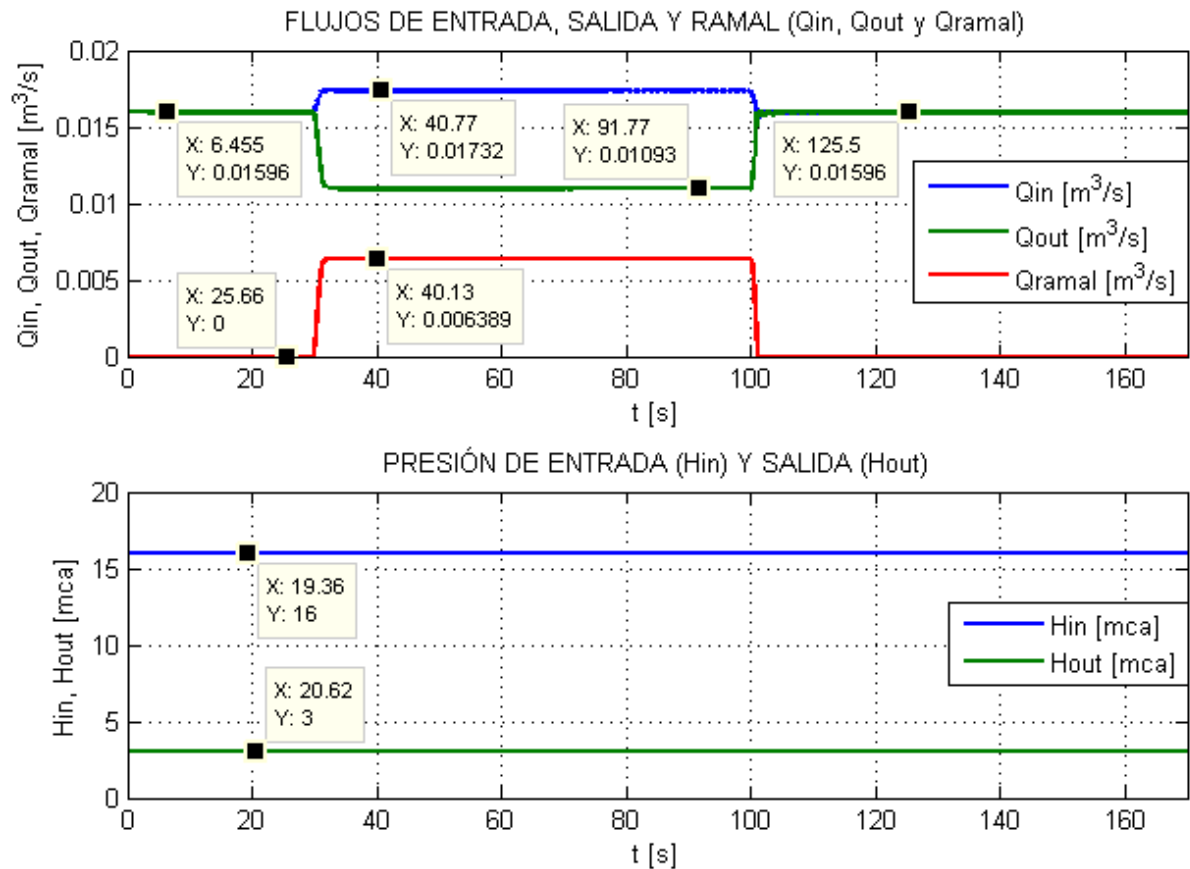


Figura 3.3: Flujos y presiones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y estado medido

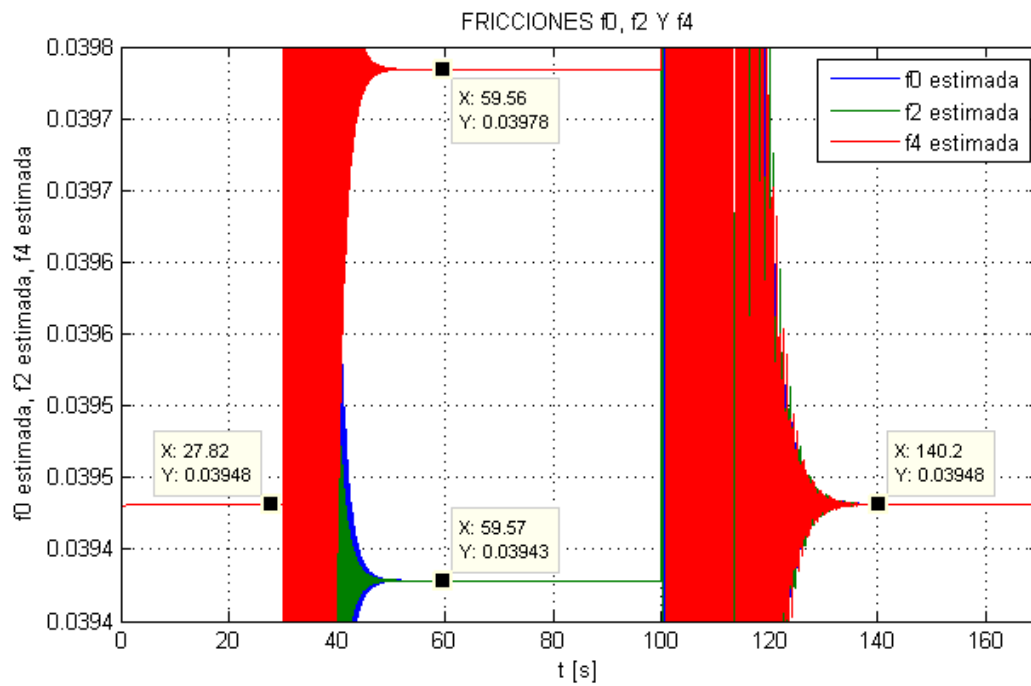


Figura 3.4: Fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y estado medido

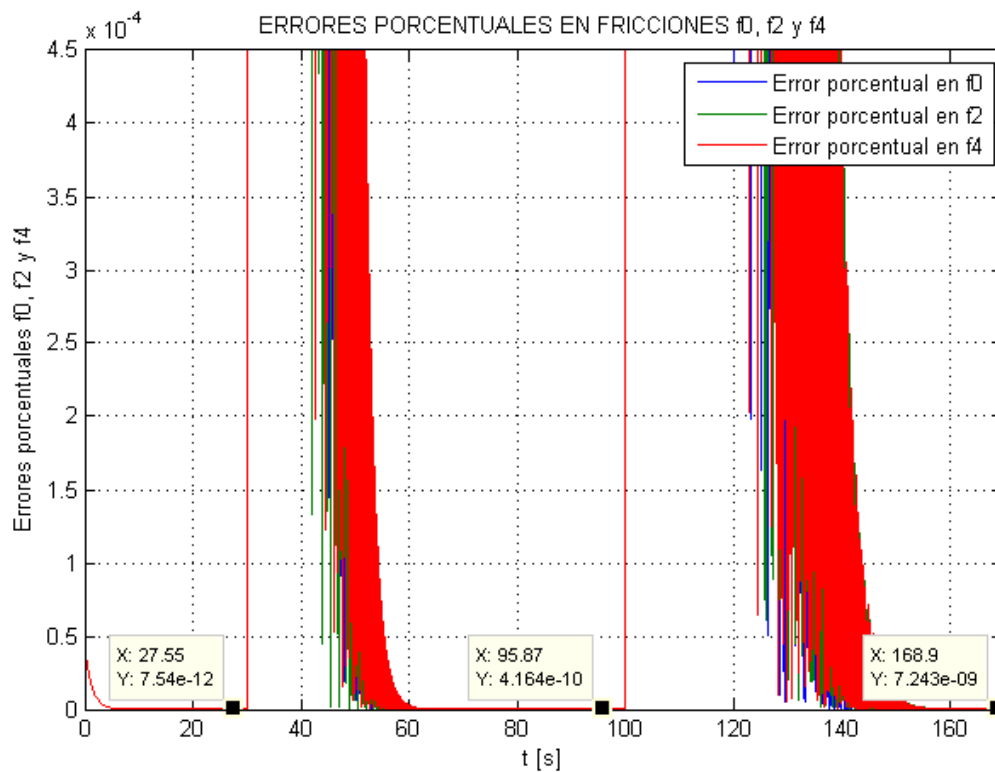


Figura 3.5: Errores en fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y estado medido

Simulaciones considerando sólo mediciones de flujo y un flujo grande en el ramal ($\lambda_f = 0.003$) y factor de olvido $\lambda = 0.7$

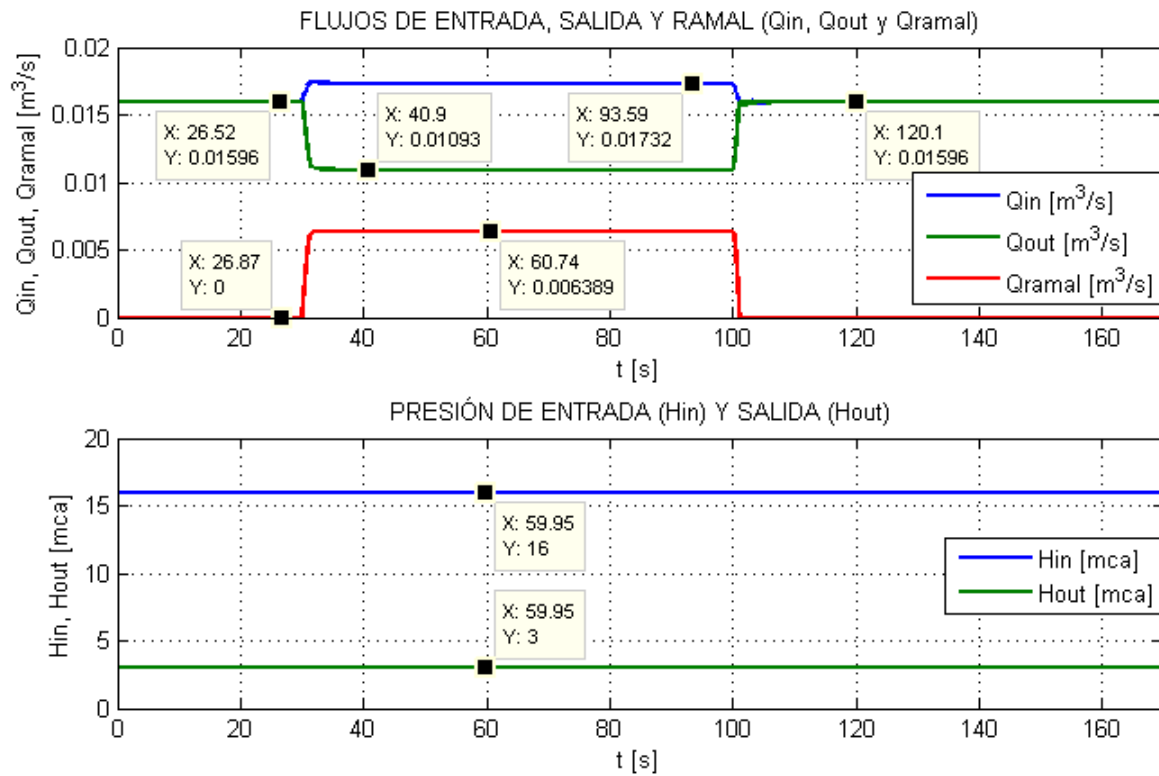


Figura 3.6: Flujos y presiones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas

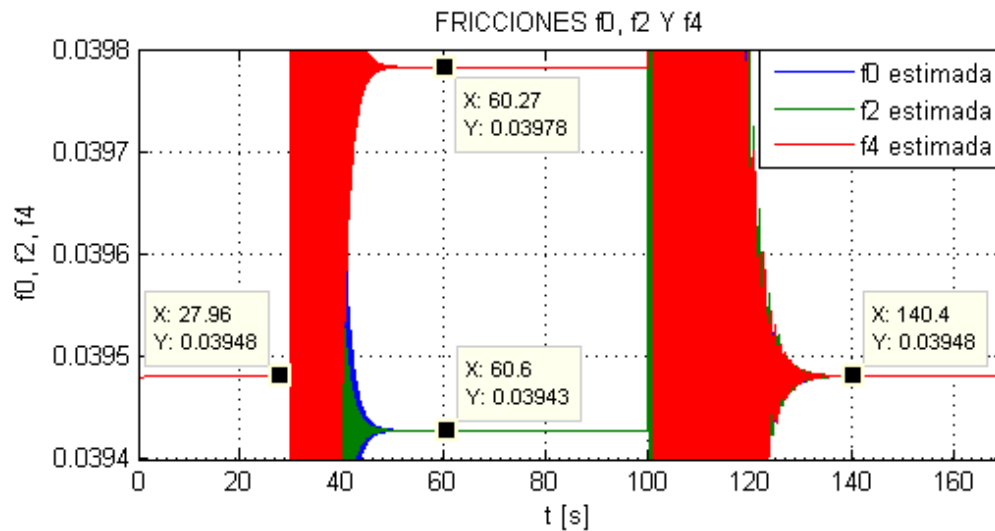


Figura 3.7: Fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas

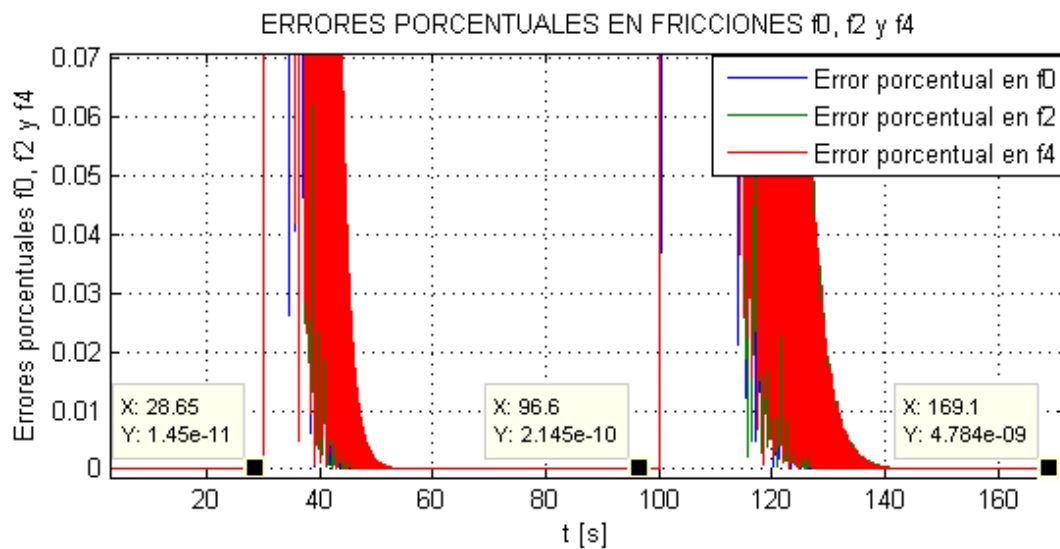


Figura 3.8: Errores en fricciones considerando el modelo MTC, flujo grande en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas

3.4.2. Simulaciones con modelo METD

Simulaciones considerando estado medido y un flujo pequeño en el ramal ($\lambda_f = 0.0003$) y factor de olvido $\lambda = 0.7$

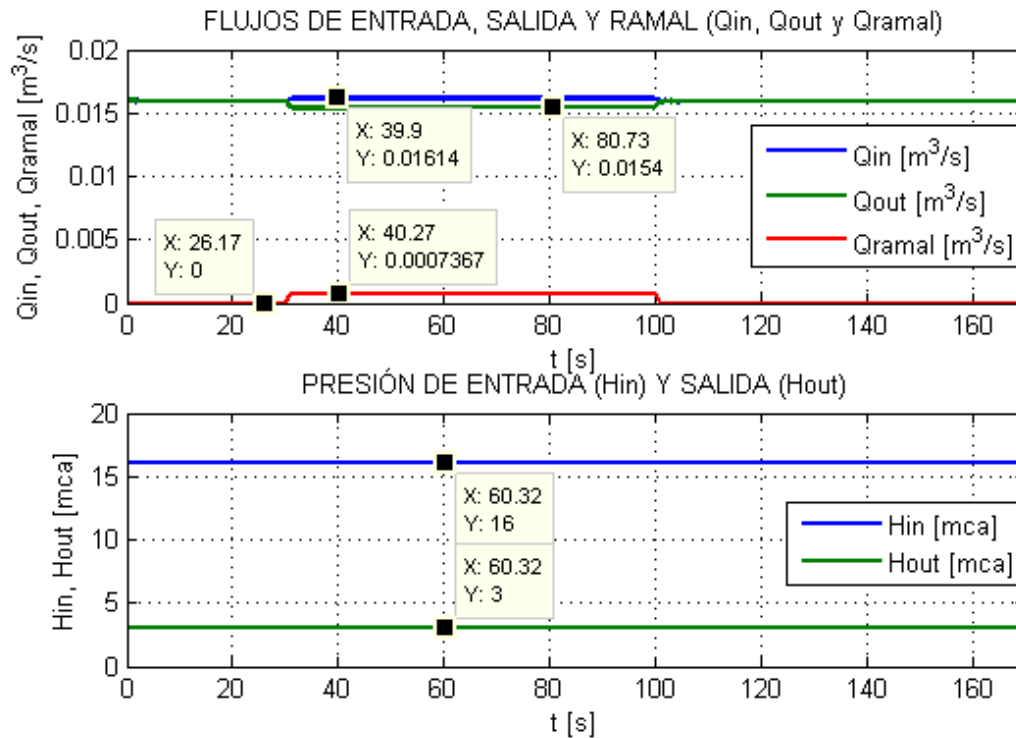


Figura 3.9: Flujos y presiones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y estado medido

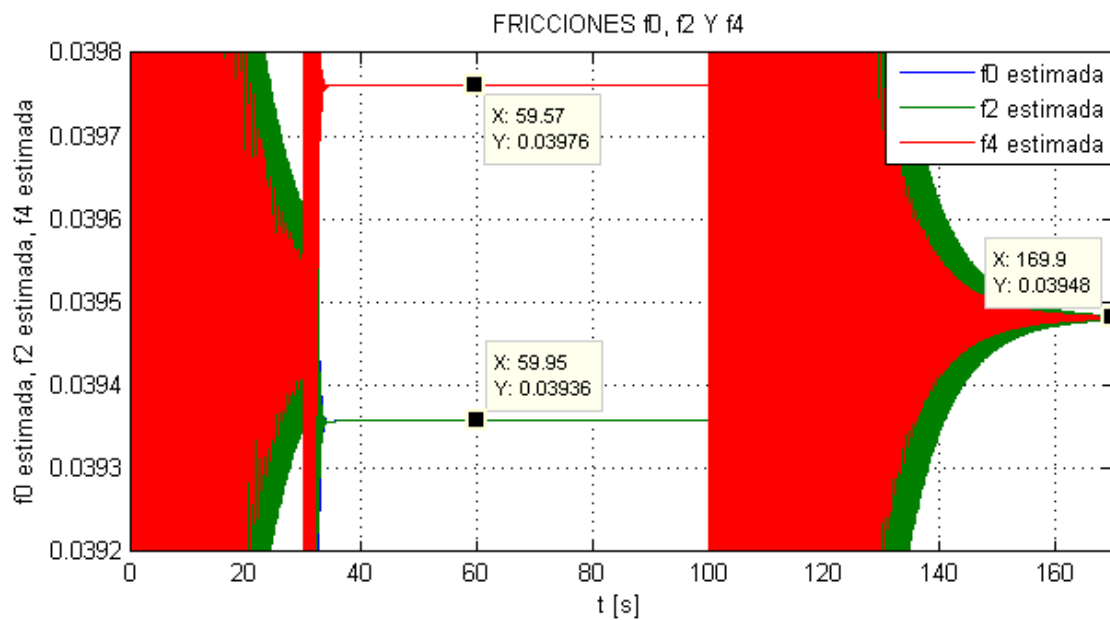


Figura 3.10: Fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y estado medido

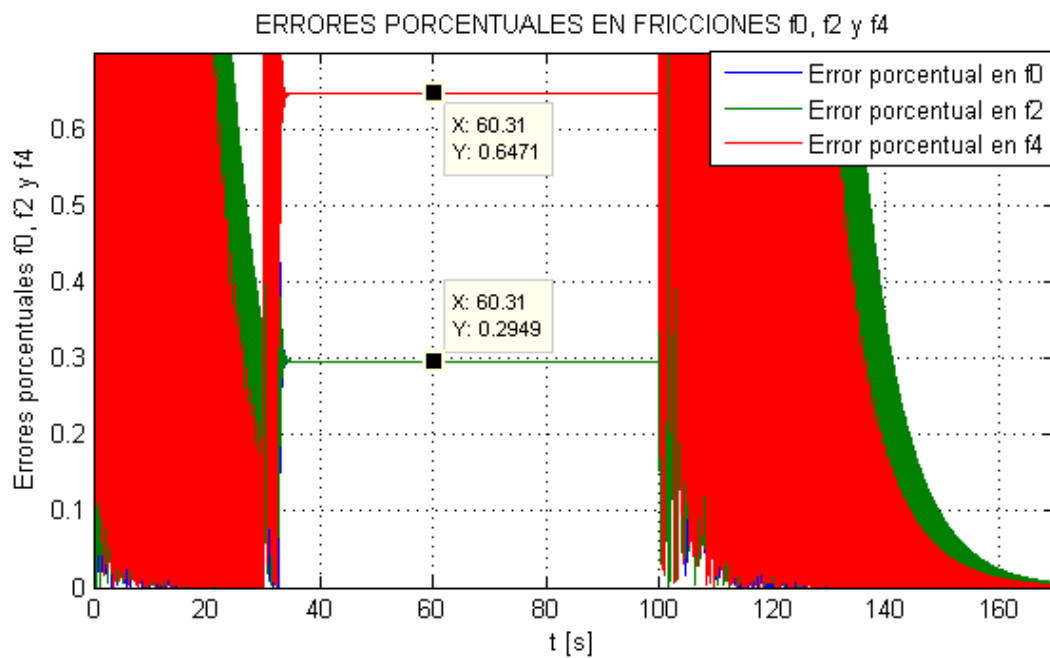


Figura 3.11: Errores en fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y estado medido

Simulaciones considerando sólo mediciones de flujo y un flujo pequeño en el ramal ($\lambda_f = 0.0003$) y factor de olvido $\lambda = 0.7$

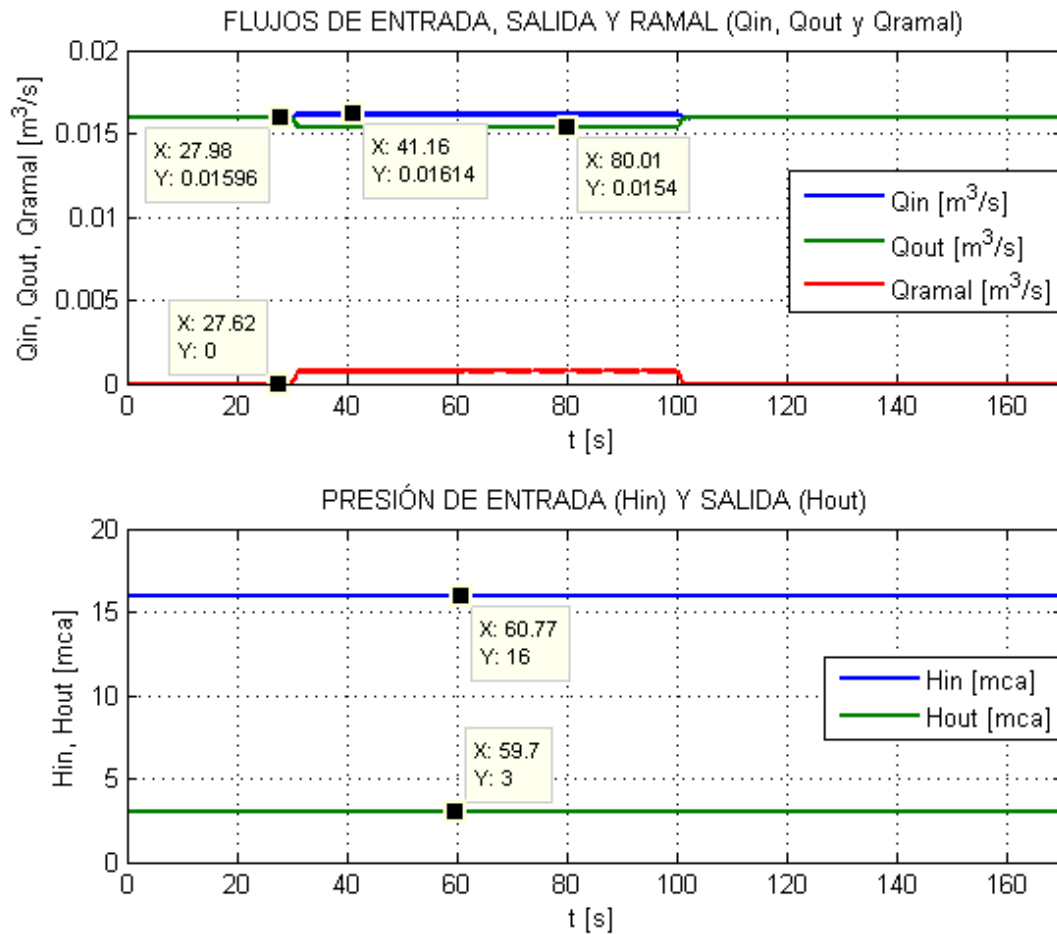


Figura 3.12: Flujos y presiones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas

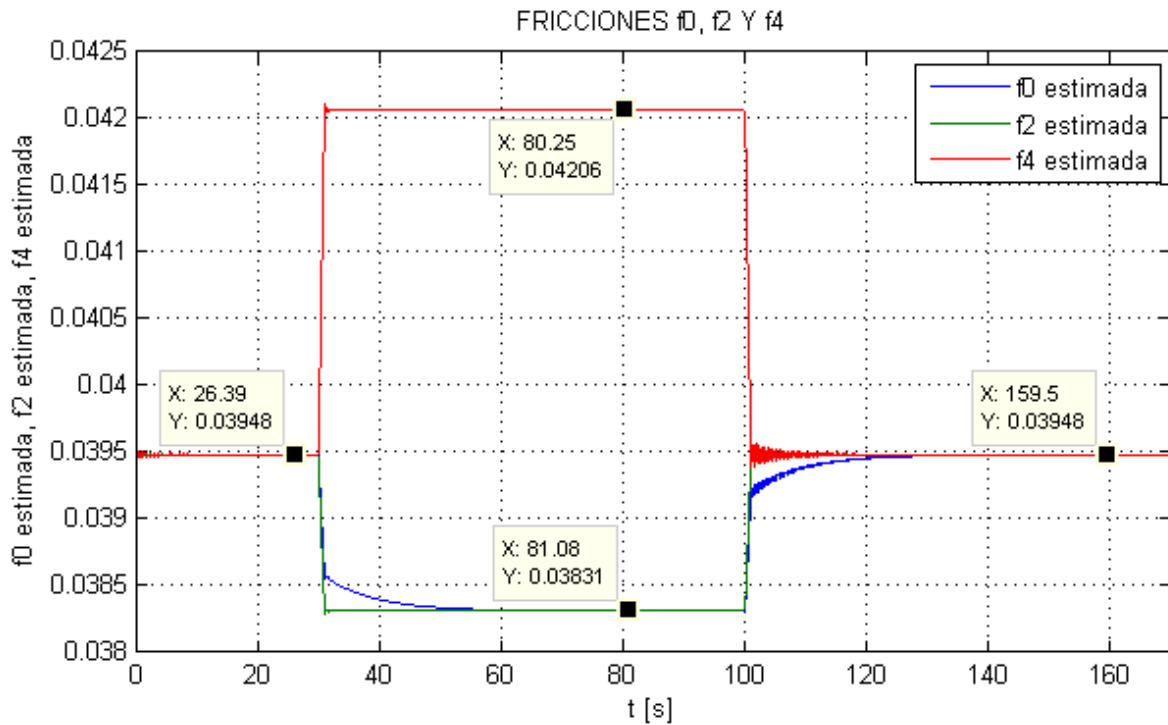


Figura 3.13: Fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas

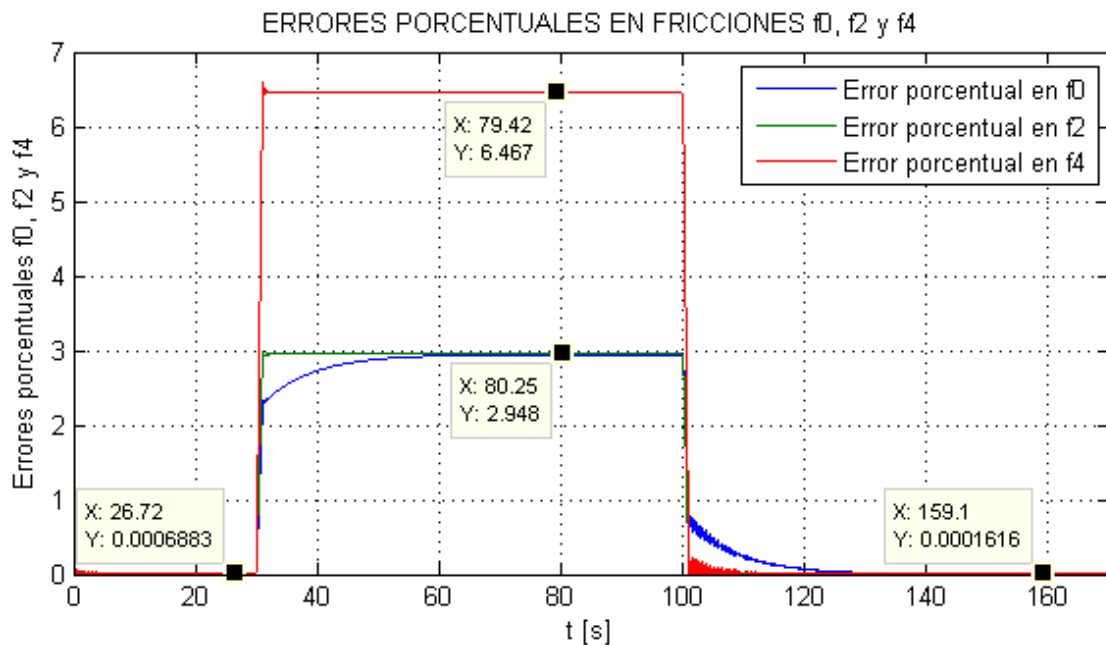


Figura 3.14: Errores en fricciones considerando el modelo METD, flujo pequeño en el ramal y presiones H_1 y H_3 estimadas

3.4.3. Resumen de resultados

En la tabla 3.3 se expone un resumen de los resultados obtenidos en simulación con el algoritmo de identificación de Mínimos Cuadrados Recursivo con factor de olvido. Se contemplan tres escenarios importantes para cada modelo que son presentados en la tabla de resultados: la presencia de un flujo pequeño en el ramal con excitaciones constantes, un flujo grande en el ramal con excitaciones constantes y un flujo grande en el ramal con excitaciones senoidales. Además, cada uno de estos escenarios es aplicado considerando dos casos posibles, es decir, aquél en donde se considera todo el vector de estados x medible y en donde sólo se considera el vector de flujos x_Q medible. En este último caso las presiones H_1 y H_3 son determinadas por medio de la metodología II expuesta en (3.24). Las celdas sombreadas en amarillo representan los resultados considerando todo el estado medible (x^k). Las celdas sombreadas en azul cielo representan los resultados considerando sólo los flujos medibles (x_Q^k). Como se puede ver, en general, los errores porcentuales del cálculo de la fricción sin ramal y en presencia del mismo son menores utilizando los datos simulados con el modelo MTC que con el modelo METD. Aunque ambos modelos presentan un error cercano a cero sin la presencia del ramal (del orden de 10^{-11} para el modelo MTC considerando excitaciones constantes y de 10^{-3} para el modelo METD bajo las mismas excitaciones), la diferencia radica cuando se presenta el ramal.

Por simplicidad, en este trabajo se muestran los resultados empleando datos simulados considerando el modelo METD discretizado en cuatro secciones ($N = 4$). Sin embargo, dicho modelo requiere un mayor número de tramos en su discretización espacial para obtener mejores resultados en lo que corresponde a la identificación de la fricción.

Cabe señalar que con los datos del modelo MTC las simulaciones de la identificación de la fricción presentan grandes oscilaciones en la apertura y cierre de la válvula antes de converger al valor correcto, al igual que en las simulaciones empleando el modelo METD con todo el estado medido. Sin embargo, al considerar los datos del modelo METD y estimar las presiones intermedias, estas oscilaciones desaparecen.

Además, en todas las simulaciones se obtiene el comportamiento esperado en las fricciones en ausencia del ramal y en presencia del mismo. Mientras el ramal no esté presente en la tubería, los valores de las fricciones son los mismos a lo largo del ducto debido a que el flujo de entrada y salida es el mismo. Cuando se presenta el ramal las fricciones aguas arriba y aguas abajo son diferentes, es decir, como el flujo aguas abajo disminuye por la aparición del ramal, la fricción aguas abajo se incrementa y viceversa. El factor de olvido de 0.7 ha permitido detectar un posible cambio en los parámetros cuando el algoritmo lleva un tiempo considerable funcionando, lo anterior debido a que se pondera mayormente a las muestras más recientes pero se presenta mayor sensibilidad al ruido.

Por último, en lo que corresponde a las estimaciones de las presiones intermedias H_1 y H_3 , éstas presentan un error porcentual cercano a cero cuando los modelos MTC o METD presentan un Q_{Ramal} pequeño o grande con excitaciones constantes. Sin embargo, la presión en el nodo donde se coloca el ramal (H_3) presenta un error porcentual mayor que la presión H_1 . Los errores en ambas presiones se incrementan al abrir y cerrar la válvula requiriendo un tiempo considerable (de hasta 45 s para el modelo METD) para converger a cero.

Modelo	Escenario				Estado Medible x	Vector de flujos x q medible (presiones estimadas)	Valores promedios de fricciones estimadas con el algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo con factor de olvido			Valores promedios de fricciones calculadas con la fórmula de Swamee (1993)			Error porcentual promedio de las fricciones estimadas		
	Q Ramal grande	Q Ramal pequeño	Entradas constantes	Entradas senoidales			Con ramal		Sin ramal	Con ramal		Sin ramal	Con ramal		Sin ramal
							Aguas arriba	Aguas abajo		Aguas arriba	Aguas abajo		Aguas arriba	Aguas abajo	
MTC		X	X		X		0.03947	0.03951	0.03948	0.03947	0.03951	0.03948	2.88E-11	5.30E-11	1.18E-10
MTC	X		X		X		0.03943	0.03978	0.03948	0.03943	0.03978	0.03948	4.39E-11	4.16E-10	7.54E-12
MTC	X			X	X		0.039405	0.03974	0.039455	0.039405	0.03974	0.03946	0.1561	0.858	0.3041
MTC		X	X			X	0.03947	0.03951	0.03948	0.03947	0.03951	0.03948	2.23E-11	6.04E-11	8.52E-11
MTC	X		X			X	0.03943	0.03978	0.03948	0.03943	0.03978	0.03948	2.09E-11	2.15E-10	1.45E-11
MTC	X			X		X	0.03941	0.03975	0.0395	0.039405	0.03974	0.03946	0.1971	0.855	0.03028
METD		X	X		X		0.03936	0.03976	0.03948	0.03947	0.03951	0.03948	0.2949	0.6471	0.00332
METD	X		X		X		0.03964	0.04376	0.0395	0.03943	0.03978	0.03948	1.994	9.926	0.03717
METD	X			X	X		0.03864	0.04355	0.03947	0.039405	0.03974	0.03946	0.3754	8.95	1.6585
METD		X	X			X	0.03831	0.04206	0.03948	0.03947	0.03951	0.03948	2.948	6.467	0.00016
METD	X		X			X	0.03157	0.07925	0.03948	0.03943	0.03978	0.03948	19.94	99.2	0.00797
METD	X			X		X	0.0319	0.07465	0.03946	0.039405	0.03974	0.03946	19.9	95.71	0.00497

Tabla 3.3: Resumen de resultados obtenidos en simulación con el algoritmo de identificación de Mínimos Cuadrados Recursivo con factor de olvido de 0.7

Capítulo 4

Conclusiones

Se ha propuesto un modelo discretizado en espacio y tiempo del fluido, nombrado Modelo de Espacio y Tiempo Discretos (METD), en el cual se consideran tomas laterales o ramales. Se ha incluido un ramal a la ecuación de estado del modelo original presentado en Kowalczyk y Tatara (2017) y se han realizado las simulaciones correspondientes con el modelo obtenido. Cabe señalar que el modelamiento del ramal y su incorporación en la ecuación es una de las aportaciones en este documento. Sin embargo, el ramal debe colocarse en cualquiera de aquellos nodos en donde se describe la presión. Dicho modelo ha sido llevado a la forma de regresor y con ello se han podido identificar los parámetros de fricción por medio de un algoritmo de Mínimos Cuadrados Recursivo con factor de olvido. Cabe mencionar la importancia del factor de olvido cuyo valor puede ser ajustado entre 0 y 1. Este factor ha permitido detectar un posible cambio en los parámetros cuando el algoritmo lleva un tiempo considerable funcionando, lo anterior debido a que se pondera mayormente a las muestras más recientes. Con un factor de olvido pequeño se descartan datos pasados más rápidamente, por lo que éste permite detectar posibles cambios en los parámetros, pero es más sensible al ruido. Con un factor de olvido grande o muy cercano a la unidad se presentan problemas para detectar cambios en las fricciones porque se adapta lentamente, pero es más insensible al ruido.

El algoritmo de identificación se ha desarrollado a partir del modelo METD. Sin embargo, también se han empleado datos simulados del modelo MTC para verificar cuál de los dos modelos permite mayor claridad en la estimación paramétrica. Con base en los resultados mostrados, los errores porcentuales del cálculo de la fricción sin ramal y en presencia del mismo son menores utilizando los datos simulados con el modelo MTC que con el modelo METD. Aunque ambos modelos presentan un error cercano a cero con la ausencia del ramal, la diferencia importante radica cuando éste se presenta. En todas las simulaciones se obtiene el comportamiento esperado en las fricciones, mientras el ramal no esté presente en la tubería los valores de las fricciones son los mismos a lo largo del ducto debido a que el flujo de entrada y salida es el mismo. Cuando se presenta el ramal las fricciones aguas arriba y aguas abajo son diferentes, es decir, como el flujo aguas abajo disminuye por la aparición del ramal, la fricción aguas abajo se incrementa y viceversa.

Finalmente, con base en el objetivo de este trabajo acerca de analizar dos modelos para tratar de dar solución al problema de cuál es el más adecuado para la identificación en línea de la fricción en tuberías con ramales, se concluye que el modelo METD con cuatro secciones permite ser llevado a la forma de regresor para la identificación de la fricción. Al emplear los datos simulados del modelo METD en el algoritmo de identificación paramétrica, los resultados presentan un error porcentual en las fricciones mayor que al utilizar los datos simulados con el modelo MTC. Como trabajo a futuro se pretende extender el número de tramos en la discretización espacial del modelo METD para presentar mejores resultados y emplear los datos reales en los puntos requeridos de la tubería y la implementación física en el ducto del laboratorio de Hidrodinámica del Instituto de Ingeniería de la UNAM para la estimación en línea de la fricción.

Referencias

- Albert, Arthur y Robert W Sittler (1965). A method for computing least squares estimators that keep up with the data. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control* **3**(3), 384–417.
- Åström, Karl Johan y Peter Eykhoff (1971). System identification - a survey. *Automatica* **7**(2), 123–162.
- Bergant, Anton, Angus Ross Simpson y John Vitkovsk (2010). Developments in unsteady pipe flow friction modelling. *Journal of Hydraulic Research* **39**(3), 249–257.
- Carrera, Méndez, Rolando y Cristina Verde, Rodarte (2001). Localizador automático de fugas en un ducto. *Ingeniería hidráulica en México* **16**(2), 139–151.
- Carrera, Méndez, Rolando y Cristina Verde, Rodarte (2010). *Prototipo para detección de fugas en tuberías: Manual de uso*. Instituto de Ingeniería - UNAM,. México.
- Cayetano, SR (2016). Identificación de parámetros de fricción en ductos con tomas laterales. Tesis de doctorado. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Chaudhry, M. H. (2014). *Applied hydraulic transients*. 3rd ed. Springer. New York. 583pp.
- Churchill, Stuart W (1977). Friction-factor equation spans all fluid-flow regimes. *Chemical engineering* **84**(24), 91–92.
- Dulhoste, Jean-François, Gildas Besançon, Lizeth Torres, Ofelia Begovich y Adrian Navarro (2011). About friction modeling for observer-based leak estimation in pipelines. En: *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*. IEEE. pp. 4413–4418.
- Eykhoff, P (1974). *System Identification: Parameter and State Estimation*. Wiley-Interscience, London.
- Genin, Y (1968). A note on linear minimum variance estimation problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **13**(1), 103–103.
- Isermann, R. y M. Münchhof (2011). *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing Series. Springer Berlin Heidelberg.
- Isermann, Rolf (2011). *Fault-diagnosis applications: model-based condition monitoring: ac-*

- tuators, drives, machinery, plants, sensors, and fault-tolerant systems*. Springer Science & Business Media.
- Isermann, Rolf y L Billmann (1987). Leak detection methods for pipelines. *Automatica* **23**(3), 381–385.
- Jiménez, Javier, Lizeth Torres, Cristina Verde y Marco Sanjuán (2017). Friction estimation of pipelines with extractions by using state observers. *IFAC-PapersOnLine* **50**(1), 5361–5366.
- Korbicz, Józef, Zdzislaw Kowalczyk y Keerthi Gunawickrama (2004). *Fault Diagnosis. Models Artificial Intelligence Applications*. número 21. Springer-Verlag.
- Kowalczyk, Z y M Tatara (2013). Analytical modeling of flow processes: Analysis of computability of a state-space model. En: *XI International Conference on Diagnostics of Processes and Systems*. pp. 74–1.
- Kowalczyk, Zdzislaw y Keerthi Gunawickrama (2004). Detecting and locating leaks in transmission pipelines. En: *Fault Diagnosis*. Cap. 21, pp. 821–864. Springer.
- Kowalczyk, Zdzislaw y Marek Tatara (2017). Numerical issues and approximated models for the diagnosis of transmission pipelines. En: *Modeling and Monitoring of Pipelines and Networks: Advanced Tools for Automatic Monitoring and Supervision of Pipelines*. Cap. 3, pp. 39–62. Springer.
- Lee, KI (1964). Optimal estimation, identification, and control, massachusetts institute of technology research monographs.
- Lennart, Ljung (1999). *System identification: Theory for the user*. 2nd edition ed. PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series, Upper Saddle River, New Jersey.
- Navarro, Adrian, Ofelia Begovich y Gildas Besançon (2011). Calibration of fitting loss coefficients for modelling purpose of a plastic pipeline. En: *Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA), 2011 IEEE 16th Conference on*. IEEE. pp. 1–6.
- PEMEX (2018). *Transporte por ducto*. Pemex.com. <http://www.pemex.com/nuestro-negocio/logistica/Paginas/ductos.aspx>.
- Siebert, Helmut (1977). Untersuchung verschiedener methoden zur lecküberwachung bei pipelines. Tesis de doctorado. Kernforschungszentrum.
- Skiba, Y. (2005). *Metodos Y Esquemas Numericos : Un Analisis Computacional*. Universidad Nacional Autonoma.
- Swamee, Prabhata K (1993). Design of a submarine oil pipeline. *Journal of transportation Engineering* **119**(1), 159–170.
- Swamee, Prabhata K y Nimisha Swamee (2007). Full-range pipe-flow equations. *Journal of Hydraulic Research* **45**(6), 841–843.
- Torres, Lizeth, Cristina Verde, Rolando Carrera y Raúl Cayetano (2014). Algoritmos de diagnóstico para fallas en ductos. *Tecnología y ciencias del agua* **5**(4), 57–78.

- Verde, C. (2001). Multi-leak detection and isolation in fluid pipelines. *Control Engineering Practice* **9**(6), 673 – 682.
- Verde, Cristina, Sylviane Gentil y Rubén Morales-Menéndez (2013). Detección de fugas en un ducto. En: *Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos*. Cap. 6, pp. 167–188. Trillas.
- Verde, Cristina y Lizeth Torres (2017). *Modeling and Monitoring of Pipelines and Networks: Advanced Tools for Automatic Monitoring and Supervision of Pipelines*. Springer.
- Wylie, E. B. & Streeter, V. L. (1978). *Fluid transients*. New York, McGraw-Hill International Book Co., 1.
- y Nancy Visairo y Sylviane Gentil, Cristina Verde (2007). Two leaks isolation in a pipeline by transient response. *Advances in Water Resources* **30**(8), 1711 – 1721.
- Zadeh, Lotfi A (1996). *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, And Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A Zadeh*. World Scientific.