



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Pronóstico del PIB para Japón y su relación con los
juegos Olímpicos 2020 utilizando información del
PIB en China a través de un análisis de Series de
Tiempo Multivariado.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

José Marcos García Gómez

TUTOR

Dr. Ricardo Ramírez Aldana





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

II

Hoja de datos del Jurado

1. Datos del alumno

García

Gómez

José Marcos

57 02 88 15

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

308260823

2. Datos del asesor

Dr.

Ricardo

Ramírez

Aldana

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Lizbeth

Naranjo

Albarrán

4. Datos del sinodal 2

M. en C.

José Salvador

Zamora

Muñoz

5. Datos del sinodal 3

Act.

Francisco

Sánchez

Villarreal

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Inocencio Rafael

Madrid

Ríos

7. Datos de la tesis

Pronóstico del PIB para Japón y su relación con los juegos Olímpicos 2020 utilizando información del PIB en China a través de un análisis de Series de Tiempo Multivariado.

100 páginas

2018

*Qui studet optatam cursu contingere metam multa tulit fecitque puer, sudavit et
alsit Abstiniuit Venere et Baccho.*

Quinto Horacio Flaco.

Agradecimientos

Con la mayor gratitud y admiración a mi familia. A mi madre, que con mucha paciencia y esfuerzo logró sacar adelante a la familia con una gran sonrisa, que sin ella no sería nada. No alcanzarían las palabras para agradecer y devolver todo lo que hiciste, sólo te puedo dedicar este trabajo, a ti que te preocupas, desvelas y nos apoyas, a mi hermano y a mí. Gracias por todo María Felicitas Gómez Rivera.

A ti hermano, Miguel Ángel (futuro doctor), por enseñarme que con esfuerzo y dedicación cualquier cosa es posible, que con paciencia y perseverancia puedes superar tus propios límites y llegar a ser un ejemplo de que ante cualquier adversidad uno puede llegar a ser grande.

A mis amigos de la facultad, Vero que fuiste siempre una buena y sana competencia por tener las mejores notas; Mariana por siempre alegrarnos la carrera después de tantas presiones; Emilse por todo lo que hiciste por mí no tengo cómo agradecer tanto y Jorge por todo el apoyo que me brindaste en la carrera.

A mi director de tesis, Dr. Ricardo, por tener paciencia para explicar los temas, estar disponible cuando lo necesitaba y brindarme la información que necesitaba, gracias.

A mis sinodales Dra. Lizbeth Naranjo Albarrán, M. en C. José Salvador Zamora Muñoz, Act. Francisco Sánchez Villarreal y M. en C. Inocencio Rafael Madrid Ríos por tomarse el tiempo de leer esta tesis y enriquecerla con sus consejos y comentarios.

Gracias a todas las personas que han estado en mi vida, por dejar un aprendizaje, bueno o malo, me hicieron crecer y aprender, aunque ya no sigan presentes, siempre los recordare por haberme hecho crecer y ser la persona que soy.

Índice general

| | |
|--|-------------|
| Lista de figuras | IX |
| Lista de tablas | XIII |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Producto Interno Bruto | 3 |
| 1.1.1. Definición y tipos de PIB | 4 |
| 1.2. Japón | 5 |
| 1.2.1. Antecedentes históricos de la economía japonesa (1960-2015) | 5 |
| 1.3. China | 8 |
| 1.3.1. Antecedentes históricos de la economía china (1960-2015) | 9 |
| 2. Series de tiempo | 11 |
| 2.1. Definición de series de tiempo | 11 |
| 2.2. Función de Autocovarianza, Autocorrelación y Autocorrelación Parcial | 14 |
| 2.3. Eliminación de Tendencia y Estacionalidad | 17 |
| 2.4. Ruido Blanco | 20 |
| 2.5. Modelos Autoregresivos AR | 22 |
| 2.5.1. Modelo AR(1) Autorregresivo de primer orden | 22 |

| | |
|---|-----------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | VII |
| 2.5.2. Modelo AR(p) | 23 |
| 2.6. Modelo de Medias Móviles MA | 25 |
| 2.6.1. MA(1) Medias Móviles de primer orden | 25 |
| 2.6.2. Modelo MA(q) | 25 |
| 2.7. Modelo ARMA(p,q) | 26 |
| 2.8. Modelo ARIMA | 28 |
| 2.9. Pronóstico de series de tiempo estacionarias | 29 |
| 2.10. Regresión con errores ARMA | 31 |
| 2.10.1. Estimación por máxima verosimilitud | 33 |
| 3. Serie de Tiempo Multivariada | 35 |
| 3.1. Propiedades de Series de Tiempo Multivariada | 36 |
| 3.1.1. Estacionariedad | 37 |
| 3.1.2. Ruido Blanco Multivariado | 39 |
| 3.2. Proceso ARMA Multivariado | 40 |
| 3.2.1. Causalidad e Invertibilidad | 41 |
| 3.2.2. Ecuaciones de Yule-Walker | 44 |
| 3.2.3. Estimación de la media y función de autocovarianza | 46 |
| 3.3. Modelado y Predicción con series de tiempo multivariadas | 51 |
| 3.3.1. Mejores predictores lineales de vectores aleatorios de segundo orden | 51 |
| 3.3.2. Predicción de un proceso Autorregresivo Multivariado | 53 |
| 3.4. Cointegración | 54 |
| 4. Ajuste de modelos de series de tiempo del PIB | 57 |
| 4.1. Ajuste univariado del PIB de Japón | 59 |
| 4.2. Ajuste de regresión con errores ARMA | 68 |
| 4.3. Ajuste multivariado entre China y Japón | 72 |

| | |
|--|-----------|
| 5. Conclusiones | 82 |
| A. Criterio Akaike | 85 |
| B. Códigos en R para el PIB de Japón caso univariado | 86 |
| C. Códigos en R para errores ARMA en el PIB de Japón | 90 |
| D. Códigos en R para ajustar un modelo VAR para el PIB de China y Japón | 94 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 1.1. Ubicación geográfica de Japón, Fuente:d-maps | 6 |
| 1.2. Ubicación geográfica de China, Fuente:d-maps | 9 |
| 2.1. Serie de Tiempo correspondiente al indicador Dow Jones Industrial (DJI) del 31/07/2017 al 27/10/2017. Fuente: Yahoo Finanzas . . . | 12 |
| 2.2. Serie de Tiempo correspondiente al indicador Dow Jones Industrial de 31/07/2017 a 27/10/2017, se muestran de arriba a abajo: los datos observados, el componente de tendencia, el componente de estacionalidad y el componente aleatorio. Fuente: Yahoo Finanzas | 15 |
| 2.3. Estimación de la Función de Autocorrelación para el indicador Dow Jones Industrial, mostrando las bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$ | 16 |
| 2.4. Logaritmo natural del índice Dow Jones Industrial. | 17 |
| 2.5. Serie diferenciada $[\nabla_1 \nabla^1 X_t, t = 1, \dots, 64]$ derivada del Dow Jones Industrial $[X_t, t = 1, \dots, 64]$ | 20 |
| 2.6. Simulación de 300 datos distribuidos como $WN(0,1)$ | 21 |
| 2.7. Estimación de la Función de Autocorrelación para el Dow Jones Industrial, mostrando las bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$ | 29 |
| 2.8. Estimación de la Función de Autocorrelación Parcial para el Dow Jones Industrial, mostrando las bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$ | 30 |
| 3.1. Gráfica de la serie de tiempo de la población en España y su nivel de educación primaria de 1971 al 2014 | 36 |

| | | |
|-------|---|----|
| 3.2. | Gráfico de dispersión entre la educación en España y su Población, respectivamente de 1971 a 2014. Fuente: Banco Mundial | 50 |
| 3.3. | Gráfico de la función de autocorrelación entre la educación en España (V1) y su Población (V2) de 1971 a 2014 con una banda de confianza $\pm 1.96n^{-1/2}$. Fuente: Banco Mundial | 51 |
| 3.4. | Gráfico de dispersión entr la educación en España y su Población de 1971 a 2014 . Fuente: Banco Mundial | 55 |
| 3.5. | Gráfico de la función de autocorrelación entre la educación en España y su Población de 1971 a 2014 con una banda de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Fuente: Banco Mundial | 56 |
| 4.1. | Ubicación geográfica de China y Japón | 58 |
| 4.2. | Gráfico del Producto Interno Bruto de Japón de 1960-2015. Fuente: Banco Mundial | 59 |
| 4.3. | Gráfico de la serie de tiempo del PIB de Japón de 1960-2015, $\nabla(X'_t)$, $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^3(X'_t)$ | 60 |
| 4.4. | Gráfico de la PACF y ACF del PIB de Japón, $\nabla^2(X'_t)$ | 62 |
| 4.5. | Gráfico de la PACF y ACF de los residuos del modelo propuesto ARIMA(2,2,3) del PIB de Japón, $\nabla^2(X'_t)$ | 63 |
| 4.6. | Gráfico de dispersión en recta Normal en los residuos del PIB de un modelo ARIMA(2,2,3) | 64 |
| 4.7. | Histograma de la Normal en los residuos del PIB de un modelo ARIMA(2,2,3) | 64 |
| 4.8. | Análisis de residuos del modelo ARIMA(2,2,3) | 65 |
| 4.9. | Predicción en el modelo ARIMA(2,2,3) de las diferencias del logaritmo en el PIB de Japón | 66 |
| 4.10. | Predicción del modelo ARIMA(2,2,3) del PIB de Japón | 67 |
| 4.11. | Predicción del modelo ARIMA(2,2,3) del PIB de Japón Ampliado | 67 |
| 4.12. | ACF y PACF de los residuos en el PIB de Japón | 68 |
| 4.13. | Prueba Ljung-Box ARIMA(1,2,2) en la serie transformada | 69 |

| | |
|--|----|
| 4.14. Predicción ARIMA(1,2,2) en la serie de las diferencias del logaritmo en el PIB de Japón | 70 |
| 4.15. Predicción del modelo ARIMA(1,2,2) en el PIB de Japón a 10 años utilizando la regresión con errores ARMA | 71 |
| 4.16. Gráfico del Producto Interno Bruto de China (X_t) y Japón (Y_t) de 1960-2015. Fuente: Banco Mundial | 72 |
| 4.17. Gráfico de dispersión entre el Producto Interno Bruto de China (X_t) y Japón (Y_t) de 1960-2015. Fuente: Banco Mundial | 73 |
| 4.18. Gráfico de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial | 74 |
| 4.19. ACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial | 75 |
| 4.20. PACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial | 76 |
| 4.21. ACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial | 77 |
| 4.22. Prueba de estabilidad para el modelo VAR(2). | 78 |
| 4.23. PACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial | 79 |
| 4.24. ACF de los residuos del modelo propuesto VAR(2), serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial | 80 |
| 4.25. Predicción de la serie usando el VAR(2). | 80 |
| 4.26. Predicción en la serie original. | 81 |
| 5.1. Comparación de las predicción univariada ARIMA(2,2,3), Multivariada VAR(2) y Errores ARMA(1,2) | 83 |

Índice de cuadros

| | |
|--|----|
| 1.1. Ranking de Economías Mundiales 2015 en millones. Fuente: Banco Mundial | 9 |
| 4.1. Resumen de resultado AIC en el modelo ARIMA(p,d,q) | 61 |
| 4.2. Resumen de resultado AIC en el modelo ARIMA(p,d,q) | 61 |
| 4.3. Pruebas al modelo final ARIMA(2,2,3) | 65 |
| 4.4. Pruebas al modelo final empleando ajuste con errores ARIMA(1,2,2) | 70 |
| 4.5. Pruebas de correlación entre el PIB de China (X_t) y Japón (Y_t) | 73 |
| 4.6. Pruebas de correlación entre el PIB de China (X_t) y Japón (Y_t) transformada | 74 |
| 4.7. Pruebas del modelo VAR(2) en el PIB de China y Japón | 78 |

Capítulo 1

Introducción

De manera introductoria se darán conceptos básicos de lo que es el Producto Interno Bruto (PIB), así como una descripción de la economía y desarrollo histórico de los dos países en estudio, China y Japón.

Se sabe que una vez anunciada la sede del país anfitrión tendrá una ganancia económica, es por eso que muchos países luchan por ser sede de los juegos olímpicos, aunque el PIB de Japón fue devaluado en el momento de su candidatura en 2012, esto puede ser una estrategia económica adoptada por las complicaciones bancarias.

Para organizar el evento Beijing, China 2008 tuvo que invertir 40,000 millones de dólares en reparación y reconstrucción de instalaciones históricas y una política de reducción de contaminación en el aire y agua, para no perjudicar a los atletas; dichas medidas trajeron complicaciones económicas. Se generaron empleos en el sector de la construcción, además del voluntariado resultando en un 18% de la población participando en el evento. En consecuencia a la candidatura de China, el turismo desde 2003 a 2008 incremento a 22 millones de turistas extranjeros, por lo que los ingresos incrementaron en un total de 1,001 millones de dólares. Por otra parte, mejoraron las relaciones de China con Japón, rival más antiguo del país, lo cual se vio reflejado en volumen de transacciones entre ambos llegando a los 266 mil millones de dólares en 2008.

El crecimiento excepcional del PIB chino durante la celebración de los juegos fue del 13 % por lo que se esperaba que Japón se viera igualmente beneficiado por la entrada de capital, inversiones y turismo por parte del extranjero, aumentando así su PIB.

Se planea utilizar el PIB de China y Japón para poder:

- Ajustar un modelo numérico univariado en el PIB de Japón.
- Ajustar un modelo numérico multivariado entre el PIB de China y Japón.
- Pronosticar el comportamiento del PIB.
- Plantear una medida de acuerdo al pronóstico.

Con esto se planea obtener un modelo que pueda describir la dependencia en el tiempo en las observaciones, así como la dependencia entre ellas, para el caso multivariado. De haber dicha dependencia, se pueden simular escenarios a futuro para así tomar decisiones sobre la economía nipona.

En el capítulo uno se plantean las definiciones del PIB y lo que éste representa en la economía de cualquier país, así como una breve explicación histórica del PIB de Japón y China.

El capítulo dos trata sobre la serie de tiempo para el caso univariado, exponiendo las herramientas utilizadas para el modelado en series de tiempo univariadas y el ajuste de modelos $ARIMA(p,d,q)$.

Mientras, en el capítulo tres se habla sobre las series de tiempo para el caso multivariado, siendo similar que el caso univariado, pero marcando las diferencias que hay entre estos dos métodos de modelado en series de tiempo. Definiendo el modelo $VARMA(p,q)$ para el ajuste de el modelo, nos enfocaremos más en los modelos del tipo $VAR(p)$ debido a lo difícil que puede resultar un ajuste en series de tiempo de un $VARMA(p,q)$.

Posteriormente, en el siguiente capítulo se emplearán los métodos univariado en el PIB de Japón, y el multivariado con la relación que llegue a existir entre China y Japón. Con esto se pronosticará el comportamiento del PIB de Japón durante los siguientes 10 años.

Para finalizar, en las conclusiones se compararán los dos métodos de modelado y se observarán las diferencias que hay entre un método y el otro, además se analizarán medidas que deba tomar Japón para los juegos olímpicos y el impacto que tendrá si no está debidamente preparado.

1.1. Producto Interno Bruto

Antes de dar una definición del Producto Interno Bruto (PIB) es necesario resaltar la manera en que éste es calculado, para así después dar una definición más clara.

El Producto Interno Bruto tiene dos maneras de ser medido, uno es de acuerdo al enfoque de ingreso mientras que el otro es al enfoque de gasto, cualquiera que sea el método elegido se debe llegar al mismo resultado.

La medición con enfoque al ingreso se enfoca en los salarios, ingresos y utilidades ganados en un país incluyendo a los extranjeros. El cálculo está dividido en cuatro partes, que son:

- Ingreso nacional.
- Depreciación.
- Impuestos indirectos menos subsidios.
- Pagos de factores netos al resto del mundo.

La medición con enfoque al gasto se enfoca en los gastos hechos por los agentes de cualquier país que lo integran que son familias, empresas, gobierno y los demás países. Para calcular el gasto se suman diversos gastos que efectúan los agentes, estos son:

- Consumo.
- Inversión.
- Gasto de gobierno.
- Importaciones netas.

Cabe mencionar que el Producto Nacional Bruto (PNB), aunque se calcula considerando todo lo producido en un país, bienes y servicios, es distinto al PIB, pues el PNB toma en consideración sólo a los ciudadanos nacionales, aunque estén en el extranjero y el PIB considera a todo residente en el país, extranjero o ciudadano nacional.

1.1.1. Definición y tipos de PIB

Ya que se expuso la metodología para calcular el PIB podría entenderse mejor la siguiente definición del PIB:

Producto Interno Bruto (PIB): es el cálculo del valor monetario de los bienes y servicios finales procedentes de la actividad económica de una nación en un periodo de un año producido por los ciudadanos de un país, más la producción de extranjeros que se realiza dentro del país. (Ana Luisa Graue Russek; 2013, página 433 [4]).

Una vez definido el PIB, se definen los tipos que existen dependiendo del precio de mercado el cual se toma en cuenta para el cálculo del PIB, éstos se clasifican como sigue:

- **PIB Nominal:** Es la producción de bienes y servicios a precio de ese periodo del mercado.
- **PIB Real:** Es la producción de bienes y servicios constantes o de un año fijo.

Los datos tomados en el PIB real muestran un mejor entendimiento sobre el crecimiento de una economía en cualquier país, aún sabiendo esto, los datos empleados son el PIB nominal.

1.2. Japón

Japón es un país conformado por varias islas, con un gran sistema montañoso que conforma más del 60% del territorio careciendo de recursos naturales, pero con recursos humanos. Japón está situado al este de Asia, con una superficie de 377,000 km^2 , cuenta con una población de 127,000,000 de habitantes, el cual tiene una alta densidad poblacional de 336 habitantes por km^2 . La ubicación geográfica es mostrada en la Figura 1.1.

La capital es Tokio y su moneda el Yen japonés. Japón es uno de los países con menor tasa de desempleo, con sólo el 2.8%.

Algunos rasgos en la economía japonesa serían los siguientes:

- En la agricultura se enfoca más en la autosuficiencia en el consumo de arroz, mientras que en el resto de productos depende de importaciones.
- En la ganadería producen localmente cierto tipo de carne como la carne kobe, dependiendo de las importaciones de países como Argentina o Estados Unidos.
- En la pesca, debido a sus tradiciones, son los primeros consumidores de pescado, desarrollando las piscifactorías para cubrir la demanda.
- En la energía, Japón es el mayor consumidor de petróleo, por lo que debe importar casi la totalidad que consume.
- En la industria elaboran productos complejos y tecnológicamente complejos, representando un 25% del PIB del país.
- Los servicios en Japón representa un 73% de la economía, el cual se enfoca en el sector bancario y telecomunicaciones.

Japón es la tercera economía del mundo por volumen de PIB.

1.2.1. Antecedentes históricos de la economía japonesa (1960-2015)

En este periodo ocurrieron dos grandes acontecimientos a nivel económico en Japón, uno de ellos sería el "milagro japonés" que va del año 1960 hasta el año de 1980 que podría interpretarse como un crecimiento sostenido del Producto Interno

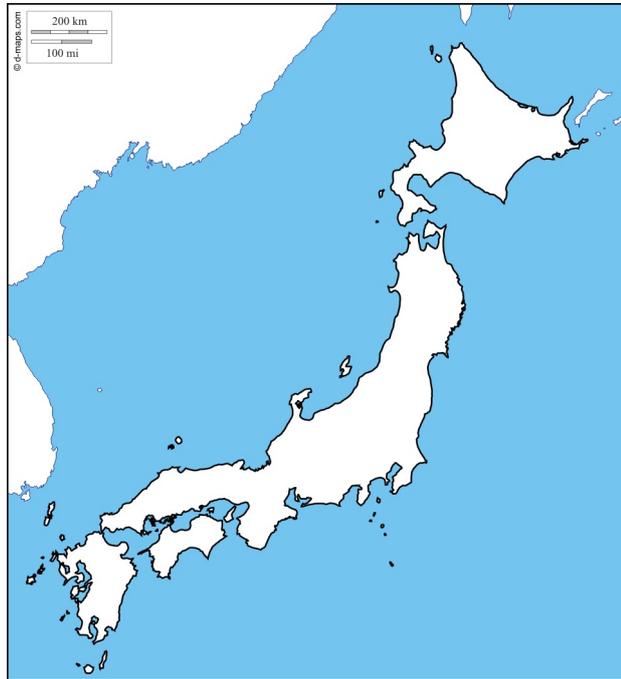


Figura 1.1: Ubicación geográfica de Japón, Fuente:d-maps

Bruto, debido a una tasa de crecimiento económico acelerado en comparación a los demás países desarrollados de un 9% anual.

Las principales razones del crecimiento japonés se muestran a continuación :

- El capital ayudó al crecimiento de sus tasas al 9% anual y a la reducción en los costes de producción.
- El conocimiento ayudó a desarrollar la tecnología, la organización empresarial y capacidad de gestión, importantes en países desarrollados.
- El crecimiento de la producción permitió la expansión en el mercado.
- Aumento de horas laborales y plazas, disminuyendo el desempleo.
- Mejora en la asignación de los recursos, asignando trabajadores independientes a pequeñas empresas.
- Aumentando el nivel educativo, para que así se pudiera adaptar a las nuevas tecnologías.

- Se redujo las barreras internacionales al comercio, permitiendo un crecimiento económico.

El siguiente acontecimiento económico es la llamada "burbuja económica" que va del año 1980 hasta el año de 1990. Esto ocurrió debido a una desregulación bancaria, ocasionando la liberación del sistema financiero, permitiendo la diversificación financiera, la competencia bancaria y al aumento de préstamos a pequeñas y medianas empresas, por lo que también aumentaba el riesgo bancario. Cuando explotó la burbuja en 1990, una gran cantidad de préstamos se volvieron impagables.

Después de estallar la burbuja, Japón ha sufrido crisis económicas a través de los años, por lo que tomó medidas para hacer frente, como ejemplo:

- Desregulación de la economía.
- Ampliación de acceso al mercado japonés.
- Disminución del tipo de interés.
- Aumento del gasto público.

Cabe mencionar que el 11 de marzo de 2011 en Japón ocurrió un terremoto que fue acompañado por un tsunami, lo que detuvo y frenó la economía nipona de ese año, aún se sufre las consecuencias de esta catástrofe natural al analizar el avance en su PIB desde aquel año, en el cual sigue una tendencia a la baja.

1.3. China

La República Popular China, o China para abreviar, cuenta con una población de 1,314,000,000 de habitantes, siendo un cuarto de la población mundial, en un territorio de 9,600,000 km^2 siendo una doceava parte del territorio mundial. China es uno de los países más extensos del mundo, dividiendo el territorio en 22 provincias, 5 regiones autónomas y cuatro municipalidades dependientes de Pekín; con una densidad poblacional de 140 habitantes por km^2 .

El clima y relieve limitan las áreas cultivables, aunque el subsuelo guarda grandes recursos naturales. La ubicación geográfica es mostrada en la Figura 1.2.

La capital es Pekín y su moneda es el Yuan chino. Es el país con menor índice de analfabetas, contado sólo con el 9% de la población.

Las principales fuentes de ingreso económico chino serían:

- Agricultura.
- Industria.
- Construcción.
- Servicios.

Cabe recalcar que el país es auto-suficiente en abastecerse en cereales, por lo que no depende de importaciones, aunque en productos como la carne necesita importar esta clase de alimentos, ya que no son capaces de abastecer la demanda que tiene el pueblo chino.

China es la segunda economía del mundo por debajo de Estados Unidos, como se muestra en el Cuadro 1.1 en el cual se muestran las primeras cinco economías mundiales, además se puede observar el lugar que ocupa Japón, como se mencionó en el apartado anterior.

China tiene comercio informal, como consecuencia a la gran cantidad de despidos que hubo, por esa razón el PIB no refleja en su totalidad la producción total del país, aumentando un 17%.



Figura 1.2: Ubicación geográfica de China, Fuente:d-maps

1.3.1. Antecedentes históricos de la economía china (1960-2015)

Para el año de 1960 China surge una nueva política a consecuencia de los “años negros ” (1959-1961) en la cual se implementan las siguientes medidas:

- Tratar de restaurar la agricultura.
- Potenciar los estímulos materiales.
- Desarrollar la educación científica y técnica.

| Puesto | País | PIB |
|--------|----------------|---------------|
| 1 | Estados Unidos | 18,036,648.00 |
| 2 | China | 11,064,664.79 |
| 3 | Japón | 4,383,076.30 |
| 4 | Alemania | 3,363,446.82 |
| 5 | Reino Unido | 2,861,090.73 |

Cuadro 1.1: Ranking de Economías Mundiales 2015 en millones. Fuente: Banco Mundial

- Enfocarse más en aspectos cualitativos que cuantitativos en la valuación productiva.

Con dichas medidas, para el año de 1966 China disolvió la deuda que tenía con la Unión Soviética.

La Revolución cultural va del año de 1966-1970, cuyo líder Mao Tse Tung, intentó depurar el Partido de burgueses, llevando a violentos conflictos provocando después una crisis económica llamada "Gran Salto Adelante ", desde 1970 hasta 1978 pierde la organización económica central.

Debido al Gran Salto Adelante y a la Revolución cultural, las ambiciones de la sociedad requería un plan que movilizara los recursos y los asignara a los sectores más necesitados. Por esta razón se mantuvieron los principios de organización planificada de la economía, las reformas utilizadas fueron las siguientes:

- Asignación de recursos financieros (inversiones).
- Asignación de materiales (productos semiterminados y bienes de equipo).
- Asignación humana (mano de obra) en las empresas industriales.
- Sin autonomía en la toma de decisiones.
- Entrega de beneficios íntegros al Estado.

Debido al éxito de las reformas en la agricultura en 1984, el Comité Central del Partido promulga un sistema mixto en el cual coexisten planificación y mercado, evitando con ello el choque de una liberación repentina de precios, aunque viene de múltiples fugas de un circuito a otro.

Debido a la caída de la URSS en 1991, en China, los conservadores se convencen en que el poder descansa en el desarrollo económico, mejorando el nivel de vida de la población, apoyando a los reformistas.

Capítulo 2

Series de tiempo

En este capítulo definiremos las series de tiempo para el caso univariado, así como sus propiedades. Definiremos estacionalidad, autocorrelación y el proceso de ruido blanco, el cual es importante en el proceso de verificación de un modelo adecuado. Ya que el modelo, utilizado para el control, explicación o pronóstico del evento en observación necesita ser confiable. Se utilizarán estas características para verificar que sea confiable.

Esto es necesario para poder generalizar el modelo y llevarlo al caso multivariado que es el caso donde se utiliza más de una serie de tiempo.

2.1. Definición de series de tiempo

Una serie de tiempo es una serie de observaciones X_t , que son registradas a través de un periodo de tiempo t , ordenadas de acuerdo al momento en que ocurrieron.

Las series de tiempo se dividen en dos tipos *Tiempo Discreto*, siendo las observaciones indexadas en un conjunto numerable t , mientras que a *Tiempo Continuo* las observaciones son guardadas en un intervalo de tiempo continuo.

El principal objetivo en el análisis de una Serie de Tiempo es proponer un modelo probabilista hipotético que represente el comportamiento de las observaciones para elegir la familia adecuada estimando los parámetros que se encuentran en el modelo que se propone.

En las observaciones registradas puede que se encuentre la presencia de

componentes no estacionarios, como tendencia, estacionalidad, etc., por lo que es necesario quitárselos ya que no se desea que se confunda con tendencia a largo plazo. Esto es útil para el análisis de observaciones como el movimiento de los precios en la bolsa, comportamiento en las ventas, etc., que al ser ajustadas para obtener un modelo, se pretende que la simulación tenga un bajo nivel de error.

Se puede ver un ejemplo de una serie de tiempo en la Figura 2.1 que registra el movimiento del índice bursátil Dow Jones Industrial diario del periodo de 31/07/2017 al 27/10/2017.

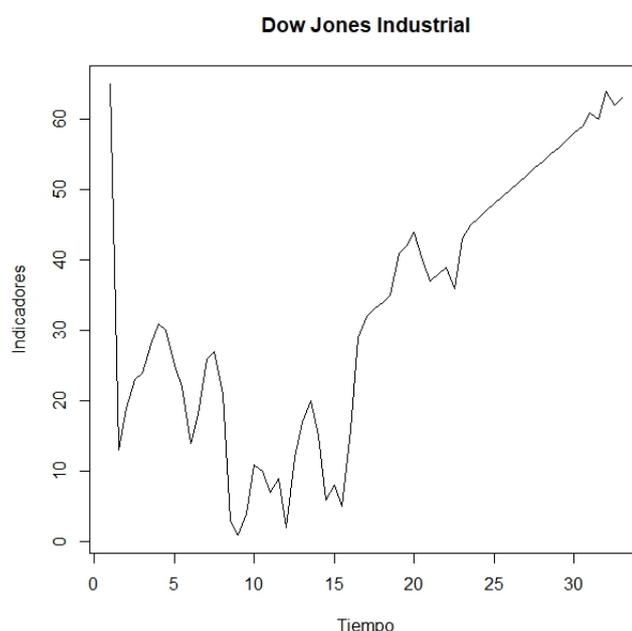


Figura 2.1: Serie de Tiempo correspondiente al indicador Dow Jones Industrial (DJI) del 31/07/2017 al 27/10/2017. Fuente: Yahoo Finanzas

Modelo de Serie de Tiempo: Un modelo para una serie de tiempo es una especificación de distribución conjunta del vector aleatorio de una secuencia de variables aleatorias X_{t_1}, \dots, X_{t_n} de ahí que puede ser denotado como un proceso estocástico:

$$\{X_t; t \in T\}, \quad (2.1)$$

para cada $n \in \{1, 2, \dots\}$ tomamos $t_1, \dots, t_n \in T$. Cabe mencionar que habrá un abuso de notación puesto que se emplea el término *series de tiempo* para referirnos a los

datos y al proceso ajustado con las observaciones realizadas.

Un proceso $\{X_t\}$ es estacionario de segundo orden, también se le conoce como *débilmente estacionario*, si para cada $n \in \{1, 2, \dots\}$ para cualquier $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ y para todo τ tal que $\tau + t_1, \tau + t_2, \dots, \tau + t_n \in T$ se tiene que los momentos de orden uno y dos del vector X_{t_1}, \dots, X_{t_n} son iguales a los del vector $X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}$, es decir:

- a) $\mathbb{E}[X_t] = \mu$. Esto quiere decir que la esperanza no depende del tiempo.
- b) $Cov[X_t, X_{t+h}] = \gamma_h$. Esto significa que la covarianza entre las dos variables es independiente al tiempo t para cada h , por lo que sólo depende de la distancia o retraso entre los tiempos.

Estacionariedad Fuerte: Un proceso estocástico $[X_t; t \in T]$ se llama estacionario fuerte si para todo $n \geq 1$ para cualquier $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ y para τ tal que $\tau + t_1, \tau + t_2, \dots, \tau + t_n \in T$, la distribución conjunta del vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es igual a la función de distribución conjunta del vector $(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$, es decir:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(X_1, \dots, X_n) = F_{t_1+\tau, \dots, t_n+\tau}(X_1, \dots, X_n) \quad (2.2)$$

Modelos con tendencia: Es una función de cambio en relación al tiempo con respecto a la media de la serie de tiempo denotada de la forma m_t en el modelo:

$$X_t = m_t + Y_t \quad (2.3)$$

con Y_t un proceso estacionario al tiempo t , X_t una serie estacionaria no necesariamente estacionaria y $\mathbb{E}[Y_t] = 0$

En el ajuste del método de *regresión por mínimos cuadrados*, la m_t asociada a una tendencia cuadrática se define como:

$$m_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 \quad (2.4)$$

Mientras que la tendencia lineal se define como:

$$m_t = a_0 + a_1t \quad (2.5)$$

Ambas pertenecientes a una familia paramétrica de $\{a_i\}_{i=0}^n$ de la forma:

$$m_t = \sum_{i=0}^n a_i t^i \quad (2.6)$$

Modelos con estacionalidad: La estacionalidad es un movimiento periódico s_t en el tiempo t con periodo d , tal que $s_{t-d} = s_t$, la estacionalidad puede ser por día, mes o años. Dicho movimiento se denota en la serie de tiempo del modelo como:

$$X_t = s_t + Y_t \quad (2.7)$$

Un posible ajuste para s_t sería una *Suma Armónica* dada por:

$$s_t = a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)) \quad (2.8)$$

llamando al método como *Regresión Armónica*.

De lo anterior podremos denotar al *Modelo de descomposición clásica* como:

$$X_t = m_t + s_t + Y_t \quad (2.9)$$

Donde Y_t es el componente del ruido aleatorio del modelo.

Estas propiedades son ejemplificadas en la Figura 2.2, en la cual podemos observar el movimiento del indicador Dow Jones a través de los días y un movimiento errático, además de no ser estacionaria en la serie de tiempo.

Para poder manejar los datos de una manera adecuada así como obtener una serie estacionaria se requiere eliminar la tendencia y estacionalidad de la serie. Dichos métodos se verán más adelante para la construcción de un modelo apropiado.

2.2. Función de Autocovarianza, Autocorrelación y Autocorrelación Parcial

Para comenzar a explicar la función de autocorrelación, primero definiremos la *función de autocovarianza*, (ACVF por sus siglas en inglés), γ_X para una serie de tiempo estacionaria $[X_t, t \in \mathbb{Z}]$ con su valor de retraso h , de la siguiente manera:

2.2. FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA, AUTOCORRELACIÓN Y AUTOCORRELACIÓN PARCIAL 15

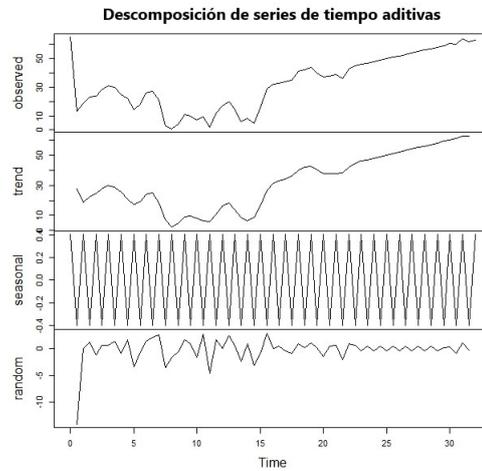


Figura 2.2: Serie de Tiempo correspondiente al indicador Dow Jones Industrial de 31/07/2017 a 27/10/2017, se muestran de arriba a abajo: los datos observados, el componente de tendencia, el componente de estacionalidad y el componente aleatorio. Fuente: Yahoo Finanzas

$$\gamma_X(h) = Cov(X_{t+h}, X_t) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_X(t))(X_{t+h} - \mu_X(t+h))] \forall t \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

donde $\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t)$ es la media del parámetro X_t .

Debido a que X_t se define como estacionaria de segundo orden, la $\gamma_X(h)$ no depende del tiempo t . Se puede notar que $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$, indicando que la sucesión de autocovarianzas es simétrica con respecto al origen .

Debido a que las observaciones son obtenidas en serie cabe la posibilidad que haya cierta correlación, esta puede ser representada con la **Función de Autocorrelación**, ACF por sus siglas en inglés, calculada como:

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = Corr(X_{t+h}, X_t). \quad (2.11)$$

Cabe mencionar que $\gamma_X(0) = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t), \quad \forall t$.

Para comenzar, se utiliza la función de autocorrelación muestral de los datos, en la cual se estimarán los valores de la ACF, para posibles modelos estacionarios de una serie de tiempo, de la siguiente manera:

Estimación de la función de autocovarianza

$$\hat{\gamma}(h) := n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}), \quad -n < h < n \quad (2.12)$$

Estimación de la función de autocorrelación

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad -n < h < n \quad (2.13)$$

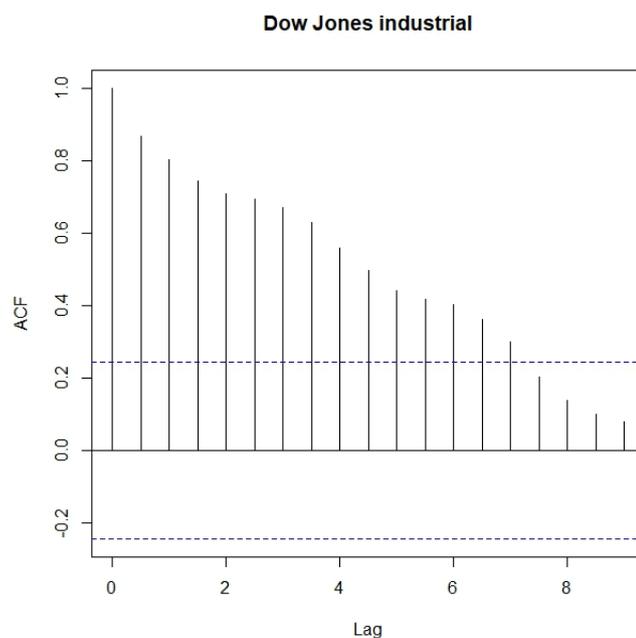


Figura 2.3: Estimación de la Función de Autocorrelación para el indicador Dow Jones Industrial, mostrando las bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$

Función de Autocorrelación Parcial Se utiliza para medir la correlación que hay entre dos variables Y_t y $Y_{t-\tau}$ el efecto que induce en ellas el conjunto de variables que intervienen $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-\tau+1}$. El coeficiente obtenido es conocido como la autocorrelación parcial (PACF, por sus siglas en inglés) con retraso τ y es denotado como $\phi_{\tau\tau}$. Para estimar la PACF se abordará más adelante.

2.3. Eliminación de Tendencia y Estacionalidad

Como podemos notar cierta existencia de tendencia en la serie de tiempo del Dow Jones Industrial antes mencionada. Para poder eliminar la tendencia existen diferentes métodos, que se presentaran a continuación.

Para comenzar se elabora la gráfica de los datos con el objetivo de notar la existencia de tendencia, en caso de haber se utilizará la descomposición clásica del modelo, Ecuación 2.7, con el objetivo de identificar los componentes m_t, s_t para así poder obtener la serie transformada sea estacionaria Y_t .

Debido a los datos demasiado altos se opta por utilizar la transformación logarítmica para así tener un control sencillo en los datos utilizados, esto empleándolo antes de cualquier análisis. Para el ejemplo del DJI, se aplica el logaritmo natural en la serie debido a que los datos son demasiado grandes complicando el análisis en los datos, dando como resultado un cambio en la escala observada en la Figura 2.3

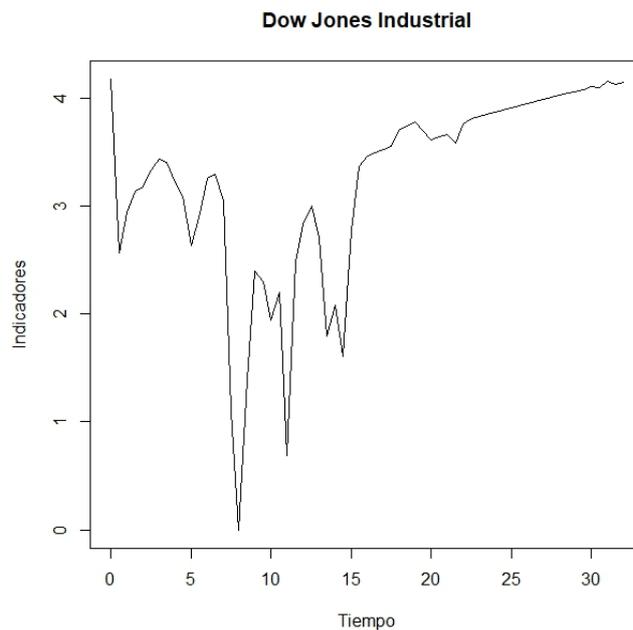


Figura 2.4: Logaritmo natural del índice Dow Jones Industrial.

1. Eliminación de tendencia en ausencia de estacionalidad

Con ausencia de estacionalidad, el modelo de la Ecuación 2.9 sería de la siguiente forma

$$X_t = m_t + Y_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Dónde $\mathbb{E}(Y_t) = 0$

Un método muy usual para eliminar la tendencia es por medio de diferencias, en vez de quitar la tendencia por un método de suavizamiento en los datos. Para ello se define el operador ∇ de la siguiente manera :

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t \quad (2.15)$$

Donde B es el operador de retraso

$$BX_t = X_{t-1} \quad (2.16)$$

De esto se tiene que $B^j(X_t) = X_{t-j}$ que implica la siguiente relación

$$\nabla^j(X_t) = (1 - B)^j X_t, \quad j \geq 1 \quad (2.17)$$

Aplicando el operador a una tendencia lineal $m_t = \alpha t + \beta$ se obtiene una función constante, esto quiere decir que se elimina la tendencia.

$$\begin{aligned} \nabla m_t &= m_t - m_{t-1} \\ &= \beta + \alpha t - (\beta + \alpha(t-1)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Ahora usando el operador en una tendencia cuadrática $X_t = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$

$$\begin{aligned} \nabla X_t &= \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0 - (\alpha_2 (t-1)^2 + \alpha_1 (t-1) + \alpha_0) \\ &= 2\alpha_2 t + \alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned}$$

Como se puede observar, aún no se elimina la tendencia en la serie, debido a que se conserva en el término $2\alpha_2 t$. Para poder eliminarlo, se debe volver utilizar el operador ∇ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_t &= \nabla(2\alpha_2 t + \alpha_1 - \alpha_2) \\ &= 2\alpha_2 t + \alpha_1 - \alpha_2 - (2\alpha_2 (t-1) + \alpha_1 - \alpha_2) \\ &= 2\alpha_2 \end{aligned}$$

Como ejemplo, si $X_t = m_t + Y_t$ donde $m_t = \sum_{j=0}^k c_j t^j$ con Y_t estacionario con media cero y se aplica ∇^k se obtiene como resultado :

$$\nabla^k X_t = k!c_k + \nabla^k Y_t, \quad (2.18)$$

siendo un proceso estacionario con media $k!c_k$, esto sugiere la posibilidad de dada una secuencia de datos x_t , al aplicar el operador ∇ repetidas veces hasta encontrar el posible modelo de un proceso estacionario. Aunque en la practica es poco común utilizar una diferencia mayor $d=2$ para eliminar la tendencia.

2. Eliminación de Tendencia y Estacionalidad

Utilizando el Modelo de descomposición clásica como sigue:

$$X_t = m_t + s_t + Y_t, \quad t = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

donde $\mathbb{E}[Y_t] = 0$, $s_{t+d} = s_t$ y $\sum_{j=1}^d s_j = 0$, se intentará quitar su tendencia y estacionalidad con el siguiente método.

Esta técnica de eliminación utiliza el método de diferencia con estacionalidad, similar al que usamos para la tendencia de la estacionalidad. Se utiliza un retraso o lag -d, con el operador ∇_d , que no debe ser confundido con $\nabla^d = (1 - B)^d$ antes descrito en el primer método. El operador es definido de la siguiente manera:

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t \quad (2.20)$$

Aplicando el operador ∇_d a la Ecuación 2.25 donde s_t tiene periodos -d tenemos que:

$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d}$$

La cual nos indica la descomposición de la diferencia de $\nabla_d X_t$ en una componente de tendencia ($m_t - m_{t-d}$) y un término de ruido ($Y_t - Y_{t-d}$). La tendencia $m_t - m_{t-d}$ puede ser eliminada mediante el operador ∇^j .

Un ejemplo de la eliminación de la tendencia en los datos del PIB como se muestra en la Figura 2.4 donde se utilizó una $d=1$ y una $j=1$ en el operador ∇

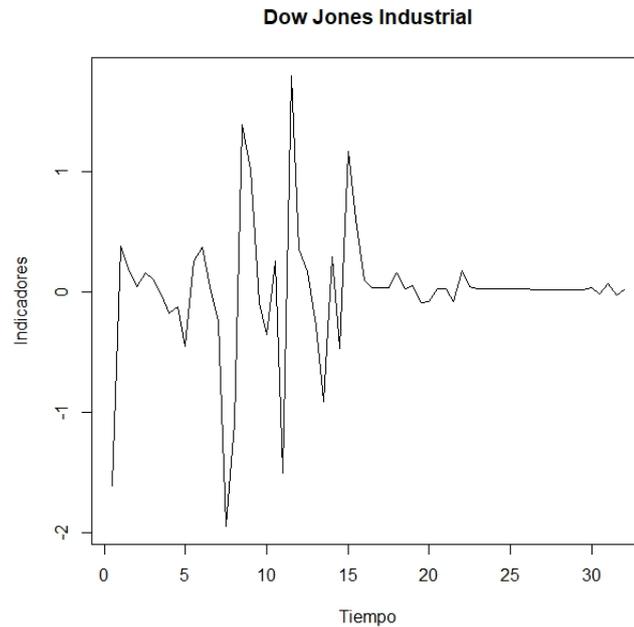


Figura 2.5: Serie diferenciada $[\nabla_1 \nabla^1 X_t, t = 1, \dots, 64]$ derivada del Dow Jones Industrial $[X_t, t = 1, \dots, 64]$

2.4. Ruido Blanco

El ruido blanco es una sucesión X_t de variables aleatorias no correlacionadas, que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{E}(X_t) = 0$
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma_x^2 \quad \forall t$

Dicho proceso será indicado por la notación:

$$\{X_t\} \sim WN(0, \sigma_x^2). \quad (2.21)$$

La sucesión de autocovarianzas del ruido blanco es :

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq 0 \\ \sigma_x^2 & \text{si } h = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

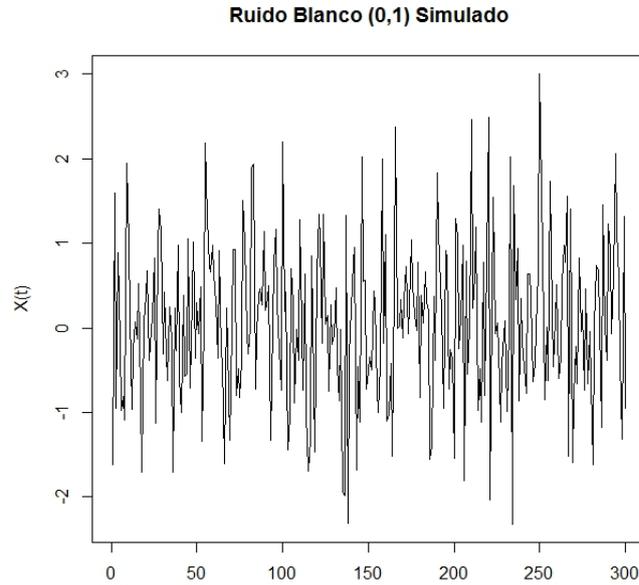


Figura 2.6: Simulación de 300 datos distribuidos como $WN(0,1)$

Un ejemplo claro sobre cómo se comporta una sucesión de variables aleatorias siendo Ruido Blanco se muestra en la Figura 2.5.

La sucesión de las autocorrelaciones (ACF) de un ruido blanco está dada por:

$$\rho_x(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq 0 \\ 1 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Proceso Lineal Causal: Una serie de tiempo $\{X_t\}$ es un proceso lineal causal si podemos escribirlo como:

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \quad \forall t \quad (2.23)$$

Con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ y ψ_i es una serie de constantes, con $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty$, para suponer la varianza de $\{X_t\}$ constante; si $|\psi_i| = 0$ para $i < 0$, se dice que el proceso es causal, es decir, el proceso al no depende de los valores futuros de ε_t al tiempo t

2.5. Modelos Autoregresivos AR

2.5.1. Modelo AR(1) Autorregresivo de primer orden

Asumimos que $\{X_t\}$ es una serie estacionaria que satisface:

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

Donde $\{\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)\}$, $|\phi_1| < 1$ y ε_t no tiene relación con X_s , $s < t$, al utilizar el proceso centrado $Y_t = X_t - \mu$ tendremos como resultado:

$$\mathbb{E}(Y_t) = 0$$

Para encontrar la función de Autocorrelación de Y_t multiplicamos cada lado por $X_{t-\tau}$ $\tau > 0$, teniendo:

$$\begin{aligned} \gamma_Y(\tau) &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-\tau}) \\ &= \text{Cov}(\phi_1 Y_{t-1}, Y_{t-\tau}) + \text{Cov}(\varepsilon_t, Y_{t-\tau}) \\ &= \phi_1 \gamma_Y(\tau - 1) \\ &\vdots \\ &= \phi_1^\tau \gamma_Y(0) \end{aligned}$$

Observamos que $\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$. Usando la definición de la función de autocorrelación, tenemos que:

$$\rho_Y(\tau) = \frac{\gamma_Y(\tau)}{\gamma_Y(0)} = \phi^{|\tau|} \quad \tau = 0, \pm 1, \dots$$

Se sigue que por la linealidad de la función de covarianza en cada argumento y al no estar relacionado ε_t con Y_{t-1} :

$$\begin{aligned} \gamma_Y(0) &= \text{Cov}(Y_t, Y_t) \\ &= \text{Cov}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) \\ &= \phi_1^2 \text{Cov}(Y_0, Y_0) + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \phi_1^2 \gamma_Y(0) + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Al despejar la $\gamma_Y(0)$ de la ecuación, obtendremos la varianza del proceso, teniendo como resultado:

$$\gamma_Y(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

Dando un ejemplo de un proceso lineal causal, veremos las propiedades en un proceso AR(1) como sigue:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} \\ &\vdots \\ &= \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \phi^k \varepsilon_{t-k} \\ X_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

siendo equivalente a escribir el proceso lineal causal de la Ecuación (2.23), por lo que un proceso AR(1) es un proceso lineal causal siempre que converja, esto se requiere para expresar la variable X_t en términos de datos pasados, por lo que los pronósticos serían independientes a datos futuros.

2.5.2. Modelo AR(p)

Sea X_t un proceso estacionario de segundo orden, es decir la esperanza $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ y la covarianza $\gamma(h) = \text{Corr}(X_{t+h}, X_t)$ escrito de la siguiente manera:

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad \phi_n \neq 0, \forall n = 1, \dots, p \quad (2.24)$$

con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ y $\phi_n \in \mathbb{R}, \forall n = 1, \dots, p$ a este proceso se le conoce como Autorregresivo de orden p , esto quiere decir que las observaciones X_t dependen de las observaciones anteriores que se encuentran en la serie.

Se utilizará el proceso centrado $Y_t = X_t - \mu$, como consecuencia queda:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.25)$$

Para poder obtener las autocovarianzas o autocorrelaciones en un proceso AR(p) se necesitarán las ecuaciones de Yule-Walker. Para poder llegar a ellas

multiplicamos la Ecuación (2.21) por $Y_{t-\tau}$ con $1 \leq \tau \leq p$ para aplicar la Esperanza, teniendo:

$$\mathbb{E}(Y_t Y_{t-\tau}) = \phi_1 \mathbb{E}(Y_{t-1} Y_{t-\tau}) + \phi_2 \mathbb{E}(Y_{t-2} Y_{t-\tau}) + \dots + \phi_p \mathbb{E}(Y_{t-p} Y_{t-\tau}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t Y_{t-\tau}) \quad (2.26)$$

utilizando que $\mathbb{E}(Y_t) = 0$, propiedad supuesta en causalidad, es posible ver la $\mathbb{E}(Y_t Y_{t-\tau})$ como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t Y_{t-\tau}) &= \mathbb{E}(Y_t Y_{t-\tau}) - \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_{t-\tau}) \\ &= \text{Cov}(Y_t Y_{t-\tau}) \\ &= \gamma_Y(\tau) \end{aligned}$$

Con esto la ecuación (2.26) puede ser escrita como:

$$\gamma(\tau) - \phi_1 \gamma(\tau - 1) - \dots - \phi_p \gamma(\tau - p) = \mathbb{E}(\varepsilon_t Y_{t-\tau}) \quad (2.27)$$

Al utilizar la definición de causalidad, que $\mathbb{E}(\varepsilon_t Y_{t-\tau}) = 0$, al sustituir en la ecuación (2.27), ε_t un proceso de ruido blanco, además dividimos entre $\gamma_Y(0)$ en los casos en que $1 \leq \tau \leq p$, con lo que tendremos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (\tau = 1) \quad \rho(1) - \phi_1 - \dots - \phi_p \rho(p-1) &= 0 \\ (\tau = 2) \quad \rho(2) - \phi_1 \rho(1) - \dots - \phi_p \rho(p-2) &= 0 \\ (\tau = 3) \quad \rho(3) - \phi_1 \rho(2) - \dots - \phi_p \rho(p-3) &= 0 \\ &\vdots \\ (\tau = p) \quad \rho(p) - \phi_1 \rho(p-1) - \dots - \phi_p &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema corresponde a las ecuaciones de Yule-Walker. Más explícito se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\tau 1} + \rho_1 \phi_{\tau 2} + \rho_2 \phi_{\tau 3} + \dots + \rho_{\tau-1} \phi_{\tau \tau} &= \rho_1 \\ \rho_1 \phi_{\tau 1} + \phi_{\tau 2} + \rho_1 \phi_{\tau 3} + \dots + \rho_{\tau-2} \phi_{\tau \tau} &= \rho_2 \\ \vdots & \\ \rho_{\tau-1} \phi_{\tau 1} + \rho_{\tau-2} \phi_{\tau 2} + \rho_{\tau-3} \phi_{\tau 3} + \dots + \phi_{\tau \tau} &= \rho_{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Se toman las ρ conocidas buscando un resultado para las $\phi_{\tau k}$, excepto $k = \tau$ que son los valores que interesa obtener, para cualquier proceso estacionario. Si el proceso es $\text{AR}(p)$ causal, entonces, de acuerdo a las ecuaciones de Yule-Walker, se tiene que $\phi_{\tau \tau} = \phi_p$. Además, $\phi_{\tau \tau} = 0$ para $\tau > p$. Con esto se hablaría de un modelo $\text{AR}(p)$.

2.6. Modelo de Medias Móviles MA

2.6.1. MA(1) Medias Móviles de primer orden

Considerar la serie definida por la siguiente ecuación:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

Donde μ y θ_1 son constantes reales y el proceso $[\varepsilon_t] \sim WN(0, \sigma^2)$. Utilizando el proceso centrado $Y_t = X_t - \mu$ se puede concluir que $\mathbb{E}[Y_t] = 0$, $\mathbb{E}[Y_t^2] = \sigma^2(1 + \theta^2) < \infty$, y

$$\gamma_Y(t + \tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta) & \text{si } \tau = 0 \\ \sigma^2\theta_1 & \text{si } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{si } |\tau| > 1 \end{cases}$$

De esto se cumple que es débil estacionaria y $\{X_t\}$ es estacionaria y la función de autocorrelación de X_t es:

$$\rho_Y(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ \theta/(1 + \theta^2) & \text{si } \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{si } |\tau| > 1 \end{cases}$$

Concluyendo que el modelo no depende del tiempo y es finito, por lo que el proceso $\{Y_T\}$ es un proceso estacionario

2.6.2. Modelo MA(q)

Diremos que el proceso X_t se llama de *promedios móviles* con orden q , o MA(q) por sus siglas en inglés *Moving Average* si se puede escribir como:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.29)$$

donde μ y $\theta_j \quad j = 1, \dots, q$ son constantes reales y el proceso $\{\varepsilon_t\}$ es $WN(0, \sigma^2)$.

Utilicemos el proceso centrado $Y_t = X_t - \mu$ por lo que tenemos las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{E}[Y_t] = 0$
2. $\text{Var}(Y_t) = \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^q \theta_j^2 \right)$, $\theta_0 = 1$

$$3. \text{Cov}[Y_t, Y_{t+\tau}] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \right) \left(\sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-\tau-i} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y_t, Y_{t+\tau}] &= \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^q \theta_j \theta_i \mathbb{E}[\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-\tau-i}] \\ &= \sum_{j=0}^{q-\tau} \sum_{i=0}^{q-\tau} \theta_j \theta_i \sigma^2 \\ &= \gamma_\tau \end{aligned}$$

para $\tau = 0, 1, 2, \dots, q$ y $\gamma_\tau = 0$ para $\tau > q$. Por otro lado la sucesión de autocorrelación (ACF) es dada como:

$$\rho_Y(|\tau|) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{q-|\tau|} \theta_i \theta_{|\tau|+i}}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2} & \text{si } |\tau| = 0, 1, \dots, q \\ 0 & \text{si } |\tau| > q \end{cases} \quad (2.30)$$

Concluyendo que el proceso MA(q) es un proceso estacionario ya que al calcular el primer y segundo momento sus expresiones no dependen del tiempo.

Si se obtuvieran $\rho_Y(1), \rho_Y(2), \dots$, en algún momento de τ valen cero y hablaríamos de un MA(q). En un modelo AR(p) no existe por lo que se emplean la sucesión de autocorrelaciones parciales (PACF), que nos ayuda a identificar el modelo AR(p).

2.7. Modelo ARMA(p, q)

Diremos que el proceso X_t estacionario es Autorregresivo de Medias Móviles (ARMA(p, q) por sus siglas en inglés) si se puede escribir como:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.31)$$

en la que $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ y los polinomios $(1 - \phi_1 \varepsilon - \dots - \phi_p \varepsilon^p)$ y $(1 + \theta_1 \varepsilon + \dots + \theta_q \varepsilon^q)$ no tienen raíces en común. Una forma más concisa de la ecuación 2.31 es la siguiente:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (2.32)$$

donde $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ Son polinomios de grado p y q respectivamente

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon) &= 1 - \phi_1\varepsilon - \dots - \phi_p\varepsilon^p \\ \theta(\varepsilon) &= 1 + \theta_1\varepsilon + \dots + \theta_q\varepsilon^q \end{aligned}$$

y B es el operador de retroceso ($B^j X_t = X_{t-j}, B^j \varepsilon_t = \varepsilon_{t-j}, j = 0, \pm 1, \dots$).

Se dice que la serie $\{X_t\}$ es Modelo Autorregresivo de orden p (AR(p)) si $\theta(\varepsilon) = 1$ y Modelo de Medias Móviles de orden q (MA(q)) si $\phi(\varepsilon) = 1$.

Una propiedad necesaria del proceso ARMA(p,q) es la causalidad, que nos permite escribir el proceso X_t como una combinación lineal de los ε_t anteriores. Un proceso ARMA(p,q) es causal si existen constantes ψ_j tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ y se puede escribir como:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \forall t. \quad (2.33)$$

La causalidad es equivalente a la condición:

$$\phi(\varepsilon) = 1 - \phi_1\varepsilon - \dots - \phi_p\varepsilon^p \neq 0 \quad \forall |\varepsilon| \leq 1 \quad (2.34)$$

La identificación de un modelo AR(p) y MA(q) en un proceso X_t se propone mediante el cálculo del ACF y PACF.

Invertibilidad El proceso X_t ARMA(p,q) es *invertible* si existen constantes $\{\pi_j\}$ finitas, tal que, $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ y con:

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \quad \forall t \quad (2.35)$$

La invertibilidad es equivalente a la condición:

$$\theta(\varepsilon) = 1 + \theta_1\varepsilon + \dots + \theta_q\varepsilon^q \neq 0 \quad \forall |\varepsilon| \leq 1 \quad (2.36)$$

esto es equivalente a que las raíces del polinomio característico estén fuera del círculo unitario.

2.8. Modelo ARIMA

El modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles (ARIMA(p, d, q)) por sus siglas en inglés) es una generalización del modelo ARMA(p, q), utilizado en series de tiempo no estacionarias, las cuales pueden serlo mediante la aplicación de diferencias sobre la serie original, dada por:

$$Y_t := (1 - B)^d X_t = \nabla^d X_t \quad (2.37)$$

esta definición significa que X_t satisface la ecuación de la forma:

$$\phi^*(B)X_t \equiv \phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Donde $\phi(\varepsilon)$ y $\theta(\varepsilon)$ son polinomios de grado p y q , respectivamente, y $\phi(\varepsilon) \neq 0$ para $|\varepsilon| \leq 1$. Si el proceso X_t es estacionario y $d=0$ entonces se reduciría a un proceso ARMA(p, q).

De manera gráfica, en la figura 2.7 suponiendo la serie de tiempo estacionaria, muestra el orden que le correspondería a un modelo MA(q) que puede tomar el orden q los valores de $q = 0, 1, 2, 3, 4$ debido a que salen de las bandas de confianza; mientras que la figura 2.8 nos estaría indicando el orden del modelo AR(p) con el orden de valor $p = 0, 1, 2$; entretanto el grado de no estacionalidad del modelo es $d = 1$. Con esta información podría sugerirse un modelo ARIMA(p, d, q). Para poder seleccionar un modelo se tomaría en consideración el criterio de información akaike, el cual nos indicaría la calidad del modelo.

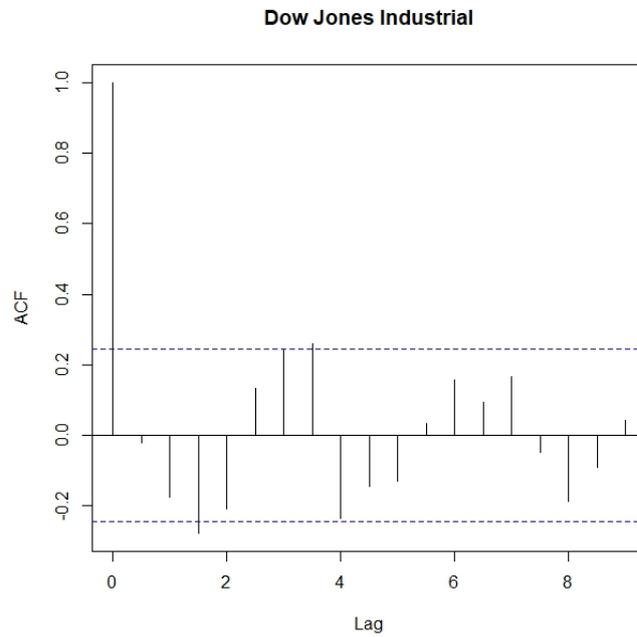


Figura 2.7: Estimación de la Función de Autocorrelación para el Dow Jones Industrial, mostrando las bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$

2.9. Pronóstico de series de tiempo estacionarias

Ahora consideramos el predecir los valores $X_n + h$, $h > 0$, de una serie de tiempo estacionaria con media μ y la función de autocovarianza γ en términos de los valores $\{X_n, \dots, X_1\}$, hasta el tiempo n . El objetivo es encontrar la combinación lineal de $1, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1$, que pronostica X_{n+h} con error cuadrático medio mínimo. El mejor predictor lineal en términos de $1, X_n, \dots, X_1$ se denotará por $P_n X_{n+h}$ teniendo la forma:

$$P_n X_{n+h} = a_0 + a_1 X_n + \dots + a_n X_1.$$

Solo resta determinar los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n , al encontrar los valores que minimizan:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \mathbb{E}(X_{n+h} - a_0 - a_1 X_n - \dots - a_n X_1)^2.$$

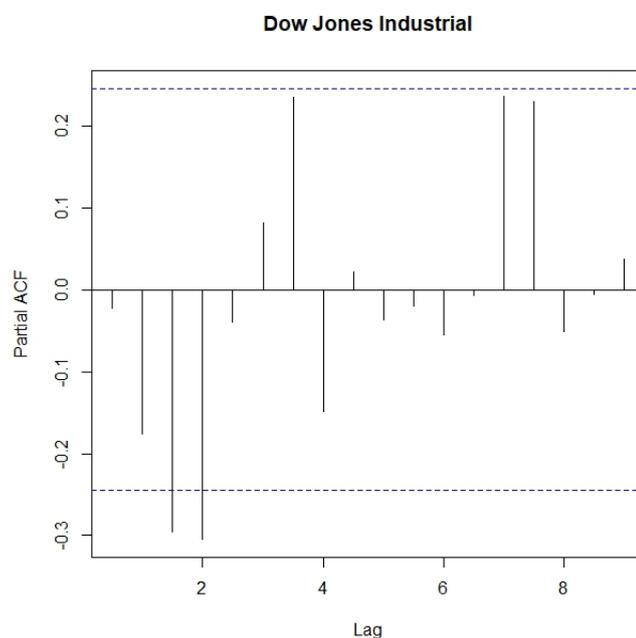


Figura 2.8: Estimación de la Función de Autocorrelación Parcial para el Dow Jones Industrial, mostrando las bandas de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$

Como S es una función cuadrática de a_0, a_1, \dots, a_n y está limitado debajo del cero, es claro que hay al menos un valor de a_0, a_1, \dots, a_n que minimiza S y que el mínimo a_0, a_1, \dots, a_n satisface las ecuaciones:

$$\frac{\delta S(a_0, a_1, \dots, a_n)}{\delta a_j} = 0, \quad j = 0, \dots, n.$$

La evaluación derivada de la ecuación anterior da las siguientes equivalencias:

$$a_0 = \mu \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

y

$$\Gamma_n a_n = \gamma_n(h)$$

donde

$$a_n = (a_1, \dots, a_n)', \quad \Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^n.$$

y

$$\gamma_n(h) = (\gamma(h), \gamma(h+1), \dots, \gamma(h+n-1))'$$

Por lo tanto,

$$P_n X_{n+h} = \mu + \sum_{i=1}^n a_i (X_{n+1-i} - \mu),$$

2.10. Regresión con errores ARMA

En la regresión lineal estándar, se supone que los errores (o la desviación de las observaciones de la función de regresión) son independientes e idénticamente distribuidos. En varias aplicaciones del análisis de regresión, sin embargo, esta suposición se rompe, como se puede ver por el análisis de los residuos de la regresión ajustada y sus autocorrelaciones de la muestra. A menudo es más apropiado suponer que los errores son observaciones de un proceso estacionario de segundo orden de media cero. Dado que muchas funciones de autocorrelación se pueden aproximar mediante la función de autocorrelación de un proceso ARMA (p, q) elegido adecuadamente, por lo que habría de considerar el modelo.

$$Y = X\beta + \underline{\xi} \quad (2.38)$$

donde $Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$ es el vector de las observaciones al tiempo $t = 1, \dots, n$, X es la matriz de los valores de las variables explicativas al tiempo t (también pueden corresponder a tendencia), $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ es el coeficiente de regresión y el componente $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)'$ corresponde a un proceso ARMA(p,q) con media-cero causal que satisface:

$$\phi(B)\xi_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

el modelo Y_t se crea a partir de la estimación de tendencia en la serie de tiempo.

Mínimos Cuadrados Ordinarios: El estimador de mínimos cuadrados ordinarios (OLS por sus siglas en inglés) de β es el valor $(\hat{\beta}_{OLS})$ que minimiza la suma de cuadrados:

$$(Y - X\beta)'(Y - X\beta) = \sum_{t=1}^n (Y_t - X_t'\beta)^2 \quad (2.39)$$

igualando a cero la derivada parcial con respecto a la componente β y asumiendo que $X'X$ es no singular, observamos que:

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (2.40)$$

El estimador OLS maximiza la verosimilitud de las observaciones cuando los errores ξ_1, \dots, ξ_n son independientes e idénticamente distribuidos y Gaussiano. Aún cuando no cumpla con las condiciones e incluso que X es no aleatoria, el estimador OLS es insesgado, es decir, $\mathbb{E}[\hat{\beta}_{OLS}] = \beta$ y según el teorema de Gauss-Markov es el estimador lineal insesgado no Gaussiano aleatorio de menor varianza. La matriz de covarianza del estimador es:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{OLS}) = (X'X)^{-1}X'\Gamma_n X(X'X)^{-1} \quad (2.41)$$

donde $\Gamma_n = \mathbb{E}(\xi\xi')$ es la matriz de covarianza de ξ siendo los errores independientes no Gaussiano en la serie.

Mínimos Cuadrados Generalizados: El estimador por mínimos cuadrados generalizados (GLS por sus siglas en inglés) de β es el valor que minimiza la suma ponderada de cuadrados:

$$(Y - X\beta)' \Gamma_n^{-1} (Y - X\beta) \quad (2.42)$$

Diferenciando parcialmente con respecto al componente β e igualándolos a cero, obtendremos:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Gamma_n^{-1}X)^{-1}X'\Gamma_n^{-1}Y \quad (2.43)$$

la matriz de covarianza del estimador GLS es:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{GLS}) = (X'\Gamma_n^{-1}X)^{-1} \quad (2.44)$$

Este resultado indica el estimador OLS es un caso particular del estimador GLS, ya que también es un estimador lineal de las Y 's insesgado para β . Es decir, para cualquier vector c y cualquier insesgado $\hat{\beta}$ del componente β que es una función lineal de las observaciones Y_1, \dots, Y_n ,

$$\text{Var}(c'\hat{\beta}_{GLS}) \leq \text{Var}(c'\hat{\beta})$$

Con esto se muestra que el estimador GLS es superior al estimador OLS por tener menor varianza.

Sea $V(\phi, \theta)$ la matriz $\sigma^{-2}\Gamma_n$, existe la matriz $T(\phi, \theta)$ que cumple $TT' = V^{-1}$, es decir, T es raíz cuadrada de V^{-1} . Entonces multiplicamos cada lado de la ecuación (2.38) por T , obteniendo:

$$TY = TX\beta + T\underline{\xi} \quad (2.45)$$

una ecuación de regresión con el vector de coeficientes β , el vector de datos TY , la matriz de datos TX y el vector de error $T\underline{\xi}$, este último con media cero y varianza σ^2 :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T\underline{\xi}) &= \mathbb{E}[(T\underline{\xi})(T\underline{\xi})'] \\ &= T\mathbb{E}(\underline{\xi}\underline{\xi}')T' \\ &= T\Gamma_n T' \\ &= [(T')^{-1}\Gamma_n^{-1}T^{-1}]^{-1} \\ &= \mathbb{I}_{n \times n} \end{aligned}$$

así que puede el estimador de β por mínimos cuadrados generalizados ser obtenido usando el estimador OLS a la ecuación de regresión (2.45), dando como resultado:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'T'TX)^{-1}X'T'TY$$

el cual es idéntico a estimador $\hat{\beta}_{GLS}$. Simplificando la ecuación tenemos:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X^*X^*)^{-1}X^*Y^* \quad (2.46)$$

Con $X^* = TX$ y $Y^* = TY$

2.10.1. Estimación por máxima verosimilitud

En el caso en el que los parámetros del modelo ARMA(p,q) donde los errores son desconocidos, son estimados junto a los coeficientes usando la máxima verosimilitud Gaussiana:

$$L(\beta, \phi, \theta, \sigma^2) = (2\pi)^{-n/2}(\det\Gamma_n)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(Y - X\beta)' \Gamma_n^{-1}(Y - X\beta)\right\},$$

donde $\Gamma_n(\phi, \theta, \sigma^2)$ es la matriz de covarianza de $W = Y - X\beta$. Por ser $\{W_t\}$ un proceso ARMA(p,q) con parámetros (ϕ, θ, σ^2) , los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{\beta}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$ son encontrados minimizando:

$$\ell(\beta, \phi, \theta) = \ln(n^{-1}S(\beta, \phi, \theta)) + n^{-1} \sum_{t=1}^n \ln r_{t-1} \quad (2.47)$$

donde $S(\beta, \phi, \theta) = \sum_{t=1}^n (W_t \hat{W}_t)^2 / r_{t-1}$, \hat{W}_t es el mejor predictor de W_t y $r_{t-1} \sigma^2$ es el error cuadrático medio.

Un proceso iterativo, propuesto por Cochrane y Orcutt (1949) para el caso $q = 0$, ahorra la minimización. Se basa en la observación de que para ϕ y θ fijos, el valor de β que minimiza $l(\beta, \phi, \theta)$ es $\hat{\beta}_{GLS}(\phi, \theta)$, que puede ser calculado algebraicamente de la ecuación (2.46) en lugar de buscar numéricamente el valor mínimo.

El proceso es como sigue:

1. Calcular $\hat{\beta}_{OLS}$ y el residuo estimado $Y_t - X_t' \hat{\beta}_{OLS}, t = 1, \dots, n$, donde X_t es el vector de variables explicativas en el tiempo t .
2. Ajustar un modelo ARMA(p,q) mediante máxima verosimilitud Gaussiana para los residuos estimados.
3. Para el modelo ARMA ajustado, calcular el estimador $\hat{\beta}_{GLS}$ correspondiente a la ecuación (2.46).
4. Calcular los residuos $Y_t - X_t' \hat{\beta}_{GLS}, t = 1, \dots, n$ y regresar al punto 2, hasta que el proceso converja.

Capítulo 3

Serie de Tiempo Multivariada

Una serie de tiempo multivariada considera varias series de tiempo de manera simultánea, con mayor énfasis en datos dependientes. El estudio del análisis estadístico más complejo se debe a la necesidad de poder responder a las diversas situaciones que se dan en la vida real, así como a las decisiones que a menudo se deben tomar y que se encuentran envueltas en variables múltiples inter-relacionadas.

Cabe mencionar que la dificultad, en comparación con el análisis de series univariadas es mayor en estas predicciones, especialmente cuando el número de series a considerar es vasto.

El objetivo del análisis de series de tiempo multivariadas es el de mejorar la exactitud de la predicción y el estudio de la relación entre variables que serán comparadas con las de series univariadas más adelante.

Como ejemplo se usarán los datos de la población de España y su nivel de educación, la cual se muestra en la Figura 3.1 para usarse en futuros ejemplos de series multivariadas. En ésta podemos observar que a menor educación la población aumenta y viceversa, por lo que están inversamente relacionadas, concluyendo que su correlación sería negativa. Este tipo de análisis es el que emplearemos para series multivariadas.

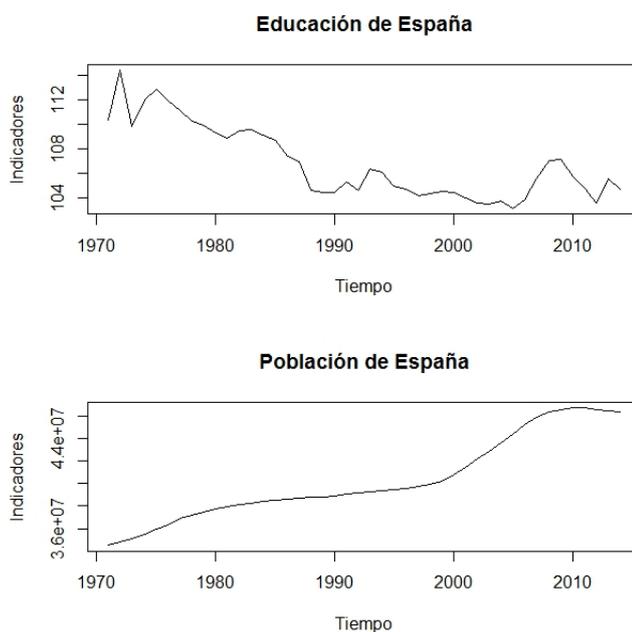


Figura 3.1: Gráfica de la serie de tiempo de la población en España y su nivel de educación primaria de 1971 al 2014

3.1. Propiedades de Series de Tiempo Multivariada

Para comenzar nos referiremos a $\{X_{t,i}, t = 0, \pm 1, \dots\}, i = 1, \dots, m$, con $\mathbb{E}(X_{t,i}^2) < \infty$, la serie de tiempo multivariada \underline{X}_t con m variables aleatorias, donde:

$$\underline{X}_t = \begin{bmatrix} X_{t1} \\ \vdots \\ X_{tm} \end{bmatrix}, \quad t = 0, \pm 1, \dots \quad (3.1)$$

Definiremos la media como:

$$\mu_t = \mathbb{E}[\underline{X}_t] = \begin{bmatrix} \mu_{t1} \\ \vdots \\ \mu_{tm} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

y la matriz de covarianza:

$$\Gamma(t+h, t) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(t+h, t) & \cdots & \gamma_{1m}(t+h, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(t+h, t) & \cdots & \gamma_{mm}(t+h, t) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

donde

$$\gamma_{ij}(t+h, t) = \text{Cov}(X_{t+h,i}, X_{t,j})$$

Cabe mencionar que la matriz $\Gamma(t+h, t)$ puede ser escrita como :

$$\Gamma(t+h, t) = \mathbb{E}[(\underline{X}_{t+h} - \underline{\mu}_{t+h})(\underline{X}_t - \underline{\mu}_t)']$$

3.1.1. Estacionariedad

Así como vimos en el caso univariado, $\{\underline{X}_t\}$ es **débilmente estacionario**, también llamado *estacionariedad*, si cumple:

1. $\mu_x(t)$ no depende de t
2. $\Gamma_X(t+h, t)$ no depende de t para cada h

para series estacionarias se usa la siguiente notación:

$$\underline{\mu} := \mathbb{E}[\underline{X}_t] = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

y

$$\Gamma(h) := \mathbb{E}[(\underline{X}_{t+h} - \underline{\mu})(\underline{X}_t - \underline{\mu})'] = \begin{bmatrix} \gamma_h^{11} & \cdots & \gamma_h^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_h^{m1} & \cdots & \gamma_h^{mm} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

para la media de la serie empleamos $\underline{\mu}$ y para la matriz de autocovarianza con retraso h , $\Gamma(h)$. Si $\{\underline{X}_t\}$ es débilmente estacionario, entonces cada serie $\{X_{t,i}\}$ es estacionaria con función de covarianza γ_h^{ii} . La función γ_h^{ij} , $i \neq j$, es la covarianza

cruzada de dos series $\{\underline{X}_{ti}\}$ y $\{\underline{X}_{tj}\}$, cabe señalar que γ_h^{jj} no difiere de γ_h^{ii} por las propiedades de Covarianza.

La matriz de correlación es:

$$R(h) := \begin{bmatrix} \rho_h^{11} & \cdots & \rho_h^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_h^{m1} & \cdots & \rho_h^{mm} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

donde:

$$\rho_h^{ij} = \frac{\gamma_h^{jj}}{[\gamma_0^i \gamma_0^j]^{1/2}}$$

el denominador depende de las varianzas de los procesos i, j .

Propiedades básicas de $\Gamma(\cdot)$:

1. $\Gamma(h) = \Gamma'(-h)$
2. $|\gamma_h^{jj}| \leq [\gamma_0^i \gamma_0^j]^{1/2}$, $i, j = 1, \dots, m$
3. $\gamma_{(\cdot)}^{ii}$ es una función de autocovarianza $\forall i = 1, \dots, m$ por ser un proceso estacionario
4. $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \underline{a}'_j \Gamma(j-k) \underline{a}_k \geq 0 \quad \forall n \in \{1, 2, \dots\}$ y $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$

Demostración(1):

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= \mathbb{E}[(\underline{X}_{t+h} - \mu)(\underline{X}_t - \mu)'] \\ &= \mathbb{E}[(\underline{X}_t - \mu)(\underline{X}_{t-h} - \mu)'] \\ &= \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_{t,1}, X_{t-h,1}) & \cdots & \text{Cov}(X_{t,1}, X_{t-h,m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_{t,m}, X_{t-h,1}) & \cdots & \text{Cov}(X_{t,m}, X_{t-h,m}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{-h}^{11} & \cdots & \gamma_{-h}^{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{-h}^{1m} & \cdots & \gamma_{-h}^{mm} \end{bmatrix} \\ &= \Gamma'(-h) \end{aligned}$$

Demostración(2):

$$\begin{aligned} \rho_h^{ij} &\leq |1| \\ -1 &\leq \frac{\gamma_h^{jj}}{[\gamma_0^i \gamma_0^j]^{1/2}} \leq 1 \\ \gamma_h^{jj} &\leq [\gamma_0^i \gamma_0^j]^{1/2} \end{aligned}$$

La propiedad 4 viene del hecho de que:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n a'_j(\underline{X}_j - \mu)\right)^2 \geq 0.$$

además $\rho_0^{ii} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m.$

3.1.2. Ruido Blanco Multivariado

La definición de ruido blanco multivariado es análoga al ruido blanco univariado.

Ruido Blanco Multivariado: Sea la serie m -variada $\{\underline{Z}_t\}$ es *ruido blanco con media 0 y matriz de covarianza* \mathbb{X} denotándose:

$$\{\underline{Z}_t\} \sim WN(0, \mathbb{X}), \quad (3.7)$$

si $\{\underline{Z}_t\}$ es estacionaria con vector de media 0 y matriz de covarianza, entonces:

$$\Gamma(h) = \begin{cases} \mathbb{X}, & \text{si } h = 0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Cabe mencionar que $\Gamma(0) = \mathbb{E}[\underline{X}_t, \underline{X}_t']$ es la matriz de varianza y covarianza del proceso al tiempo t , por otro lado $\Gamma(h)$ está conformada por la covarianza entre las series, adelantada en h unidades de tiempo una de otra. Es similar al caso univariado como se vio en el apartado 2.4.

LLa serie $\{\underline{Z}_t\}$ es **ruido blanco i.i.d con media cero y covarianza** \mathbb{X} escrita como:

$$\{\underline{Z}_t\} \sim iid(0, \mathbb{X}) \quad (3.9)$$

si los vectores aleatorios $\{\underline{Z}_t\}$ son independientes e idénticamente distribuidos con media 0 y matriz de covarianza \mathbb{Z} .

La serie $\{\underline{X}_t\}$ es un **proceso lineal** si puede representarse como:

$$\underline{X}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \underline{Z}_{t-j}, \quad \{\underline{Z}_t\} \sim WN(0, \mathbb{Z}), \quad (3.10)$$

donde $\{C_j\}$ es una secuencia de matrices $m \times m$ cuyos componentes son absolutamente sumables. Esto nos indicaría lo siguiente:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_j(i, l)| < \infty \quad i, l = 1, \dots, m.$$

3.2. Proceso ARMA Multivariado

Así como vimos en el caso univariado, se podrá definir una clase de proceso estacionario multivariado $\{\underline{X}_t\}$ satisfaciendo un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Se dice que $\{\underline{X}_t\}$ es un proceso **ARMA**(p,q) si $\{\underline{X}_t\}$ es estacionario y si para cada t ,

$$\underline{X}_t - \Phi_1 \underline{X}_{t-1} - \dots - \Phi_p \underline{X}_{t-p} = \underline{Z}_t + \Theta_1 \underline{Z}_{t-1} + \dots + \Theta_q \underline{Z}_{t-q}, \quad (3.11)$$

donde $\{\underline{Z}_t\} \sim WN(0, \mathbb{Z})$.

$\{\underline{X}_t\}$ es un proceso **ARMA**(p,q) con media μ si $\{\underline{X}_t - \mu\}$ es un proceso **ARMA**(p,q).

Las dimensiones de las $\bar{\phi}_j$ y de $\bar{\theta}_j$ son de $m \times m$. Por ejemplo en el modelo **AR**(1) con $m = 2$,

$$X_t = \begin{cases} X_{t1} &= \phi_{11,1} X_{t-1,1} + \phi_{12,1} X_{t-1,2} + Z_{t1} \\ X_{t2} &= \phi_{21,1} X_{t-1,1} + \phi_{22,1} X_{t-1,2} + Z_{t2} \end{cases}$$

donde X_{t1} es la primer serie y X_{t2} la segunda serie al tiempo t y ϕ el coeficiente de retraso, donde, en forma vectorial y matricial:

$$\underline{X}_t = \begin{pmatrix} X_{t1} \\ X_{t2} \end{pmatrix}, \quad \underline{Z}_t = \begin{pmatrix} Z_{t1} \\ Z_{t2} \end{pmatrix} \sim WN(0, \mathbb{Z}),$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{pmatrix}$$

La ecuación (3.11) puede escribirse en forma polinomial como:

$$\Phi(B)\underline{X}_t = \Theta(B)\underline{Z}_t$$

donde $\Phi(Z) = \mathbb{I} - \Phi_1 Z - \Phi_2 Z^2 - \dots - \Phi_p Z^p$, $\Theta(Z) = \mathbb{I} - \Theta_1 Z - \Theta_2 Z^2 - \dots - \Theta_p Z^p$ e \mathbb{I} es la matriz identidad y se usa B, el operador de retraso. En el ejemplo se tiene que:

$$\begin{aligned} \Phi(B)X_t &= (\mathbb{I} - \Phi_1(B))X_t \\ &= \underline{X}_t - \Phi_1(B)X_t \\ &= \begin{pmatrix} X_{t1} \\ X_{t2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t1} \\ X_{t2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y para Θ :

$$\begin{aligned} \Theta(B)\underline{Z}_t &= \mathbb{I}\underline{Z}_t \\ &= \begin{pmatrix} Z_{t1} \\ Z_{t2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y el proceso es de la forma $\Phi(B)\underline{X}_t = \Theta(B)\underline{Z}_t$.

Por lo tanto el proceso AR(1) es:

$$X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \Sigma) \quad (3.12)$$

3.2.1. Causalidad e Invertibilidad

Así como lo hicimos en el proceso univariado, se definirá la causalidad e invertibilidad en el proceso ARMA(p,q) multivariado con la diferencia en lo coeficientes ψ_j, π_j son reemplazadas por matrices de $m \times m$ Ψ_j, Π_j , ambas absolutamente sumables.

Causalidad: Un proceso ARMA(p,q) $\{\underline{X}_t\}$ es **causal**, o una *función causal* de $\{\underline{Z}_t\}$, si existen matrices $\{\Psi_j\}$ con componentes absolutamente sumables, que cumpla:

$$\underline{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \underline{Z}_{t-j} \quad \forall t, \{\underline{Z}_t\} \sim WN(0, \Sigma) \quad (3.13)$$

por lo que el proceso ARMA(p,q) causal es un proceso lineal en el cual $C_j = 0$ para $j < 0$. Un proceso ARMA(p,q) es causal si cumple con la condición:

$$\det(\Phi(z)) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad |z| \leq 1 \quad (3.14)$$

Como ejemplo, en el proceso AR(1):

$$\underline{X}_t = \Phi \underline{X}_{t-1} + \underline{Z}_t, \quad \{\underline{Z}_t\} \sim WN(0, \Sigma)$$

se tiene que $\Phi(Z) = \mathbb{I} - \Phi Z$, en consecuencia ocurre que $\det(\Phi(z)) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad |z| \leq 1$. De lo anterior, notemos que es equivalente a que los valores propios de Φ son en norma, menores a 1.

Las matrices $\{\Psi\}$ se encuentran de manera recursiva de las ecuaciones:

$$\Psi = \Theta_j + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \Psi_{j-k}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.15)$$

donde $\Psi_0, \Theta_0 = \mathbb{I}, \Theta_j = 0$ para $j > q, \Phi_j = 0$ para $j > p$, y $\Psi_j = 0$ para $j < 0$.

Para un proceso AR(1) tenemos que:

$$\begin{array}{llll} j=0 & \Psi_0 & = & \mathbb{I}, \\ j=1 & \Psi_1 & = & \Phi \Psi_0 = \Phi, \\ j=2 & \Psi_2 & = & \Phi \Psi_1 = \Phi^2, \\ & \vdots & & \vdots \\ j=n & \Psi_n & = & \Phi \Psi_{n-1} = \Phi^n, j \geq 3, \end{array}$$

por lo que en un proceso AR(1) causal $\underline{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \underline{Z}_{t-j}$.

Ejemplo: Para un proceso AR(1) bivariado:

$$\underline{X}_t = \Phi \underline{Z}_{t-1} + \underline{Z}_t, \quad \{\underline{Z}_t\} \sim WN(0, \Sigma) \quad \text{con} \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que :

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo que $\Phi^j = 0 \quad \forall j \geq 1$. Ahora, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\Phi - Z\mathbb{I}) \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \det \begin{bmatrix} -Z & 0.5 \\ 0 & -Z \end{bmatrix} \\ &= Z^2, \text{ así que } Z = 0 < 1 \end{aligned}$$

lo cual indica el proceso causal, ya que los procesos AR(1) son causales cuando los valores propios son menores que 1. Entonces:

$$\underline{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \underline{Z}_{t-j} = \underline{Z}_t + \Phi \underline{Z}_{t-1}$$

que es también un proceso MA(1), al mismo tiempo que un AR(1).

Invertibilidad: Un proceso ARMA(p,q) $\{\underline{X}_t\}$ es **invertible** si existen matrices $\{\underline{\Pi}_j\}$ con componentes absolutamente sumables, tales que:

$$\underline{Z}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{\Pi}_j \underline{X}_{t-j} \quad \forall t. \quad (3.16)$$

un proceso ARMA(p,q) $\{\underline{X}_t\}$ es invertible si cumple con lo siguiente:

$$\det \Theta(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| \leq 1 \quad (3.17)$$

las matrices $\underline{\Pi}_j$ se encuentran recursivamente de las ecuaciones:

$$\underline{\Pi}_j = -\Phi_j - \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k \underline{\Pi}_{j-k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

donde $\Phi_0 = -\mathbb{I}$, $\Phi_j = 0$ para $j > p$, $\Theta_j = 0$ para $j > q$ y $\underline{\Pi}_j = 0$ para $j < 0$.

Se puede aplicar un resultado para procesos lineales que indica que para:

$$\underline{X}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \underline{Z}_{t-j}$$

la matriz de autocovarianza es $\Gamma(h) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+h} \Sigma C_j$ en el cual el proceso $\{\underline{Z}_t\}$ es estacionario con media 0 para inferir que un proceso causal, el cual es un proceso lineal con $C_j = 0 \quad \forall j < 0$ y $C_j = \Psi \quad j \geq 0$, es estacionario con media 0 y matrices de covarianza:

$$\Gamma(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{j+h} \Sigma \Psi_j \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.2.2. Ecuaciones de Yule-Walker

Se supone un proceso ARMA(p,q) causal:

$$\Phi(B)\underline{X}_t = \theta(B)\underline{Z}_t \quad (3.19)$$

Similar al caso univariado, cuando se obtuvieron las ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{aligned} \Gamma(k) - \sum_{r=1}^p \Phi_r \Gamma(k-r) &= \Gamma(k) - \Phi_1 \Gamma(k-1) - \dots - \Phi_p \Gamma(k-p) \\ &= \sum_{j=k}^q \theta_j \Sigma \Psi_{j-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En particular en un proceso AR(p)

$$\begin{aligned} k = 0 \quad \Gamma(0) - \Phi_1 \Gamma(-1) - \dots - \Phi_p \Gamma(-p) &= \Theta_0 \Sigma \Psi_0 \\ \text{o sea} \quad \Gamma(0) - \sum_{j=1}^p \Phi_j \Gamma(-j) &= \Sigma \end{aligned}$$

o bien $\Gamma(0) - \Phi_1 \Gamma'(1) - \dots - \Phi_p \Gamma'(p) = \Sigma$

Para $k = 1, \dots, p$

$$\sum_{j=k}^q \theta_j \Sigma \Psi_{j-k} \quad \text{debido a que } \theta_j = 0$$

y entonces,

$$\Gamma(k) - \Phi_1\Gamma(k-1) - \dots - \Phi_p\Gamma(k-p) = 0$$

suponiendo $p > 1$ tendremos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} k=1 & \Gamma(1) - \Phi_1\Gamma(0) - \Phi_2\Gamma(-1) - \dots - \Phi_p\Gamma(1-p) & = 0 \\ k=2 & \Gamma(2) - \Phi_1\Gamma(1) - \Phi_2\Gamma(0) - \dots - \Phi_p\Gamma(2-p) & = 0 \\ & \vdots & \\ k=p & \Gamma(p) - \Phi_1\Gamma(p-1) - \Phi_2\Gamma(p-2) - \dots - \Phi_p\Gamma(0) & = 0 \end{array}$$

en forma general:

$$\Gamma(i) = \sum_{j=1}^p \Phi_j\Gamma(i-j), \quad i = 1, \dots, p$$

También se tienen ecuaciones para valores $k = p+1, p+2, \dots$ en general para un modelo ARMA(p,q) causal, empleando el mismo proceso de resolver las ecuaciones de $k = 0, 1, \dots, p$ para obtener $\Gamma(0), \Gamma(1), \dots, \Gamma(p)$ usando en caso necesario que $\Gamma(-h) = \Gamma'(h)$ y luego se resuelven de forma recursiva las ecuaciones de $k = p+1, p+2, \dots$. Por ejemplo, para $\Gamma(0), \dots, \Gamma(p)$ suponiendo que $\bar{\theta}_j \quad \forall j, \quad \phi_j \quad \forall j, \quad \Psi_j \quad \forall j$ y \mathbb{X} son conocidas, entonces tenemos:

$$k = (p+1) \quad \Gamma(p+1) - \Phi_1\Gamma(p) - \Phi_2\Gamma(p-1) - \dots - \Phi_p\Gamma(0) = \sum_{j=k}^q \theta_j \mathbb{X} \Psi_{j-k}$$

por esa razón:

$$\Gamma(p+1) = \sum_{j=k}^q \theta_j \mathbb{X} \Psi_{j-k} + \Phi_1\Gamma(p) + \Phi_2\Gamma(p-1) + \dots + \Phi_p\Gamma(0)$$

y así sucesivamente.

Cabe recalcar que las ecuaciones de $k = 1, 2, \dots, p$, forman un sistema de ecuaciones complejo, debido a que cada ecuación involucra un sistema de ecuaciones de $m \times m$, aunque para el proceso causal puede usarse:

$$\Gamma(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{j+h} \Psi_j'$$

Al truncarse la serie, se puede llegar a una aproximación de la matriz de autocovarianzas.

3.2.3. Estimación de la media y función de autocovarianza

La estimación del vector media y la covarianza de una serie de tiempo multivariado estacionario es importante al momento de describir y modelar la dependencia de los componentes.

Estimación de $\underline{\mu}$

Sea $\{\underline{X}_t\}$ estacionaria con media $\underline{\mu}$, un estimador insesgado de $\underline{\mu}$ basado en las observaciones $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ es el vector de medias:

$$\bar{\underline{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \underline{X}_t.$$

la media estimada del vector j -ésimo en la muestra es:

$$\bar{X}_{nj} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{tj}$$

y es insesgado porque:

$$\mathbb{E}[\bar{\underline{X}}_n] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\underline{X}_t]$$

pero $\mathbb{E}[\underline{X}_t] = \underline{\mu}$ no depende de t , entonces:

$$\mathbb{E}[\bar{\underline{X}}_n] = \underline{\mu}$$

Así como en el caso univariado, la varianza de cada entrada de $\bar{\underline{X}}_n$ debe ser estadísticamente cero. Esto es, si $\{\underline{X}_t\}$ es estacionaria con media $\underline{\mu}$ y función de covarianza $\Gamma(\cdot)$, entonces si $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{E}[(\bar{\underline{X}}_n - \underline{\mu})'(\bar{\underline{X}}_n - \underline{\mu})] \rightarrow 0 \quad \text{si } \gamma_h^i \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

esto es, si la autocovarianza con un lag h tiende a cero en cada serie cuando hay muchas muestras en cada serie, entonces la suma de la varianza de los promedios se vuelve cero debido a que las varianzas de la media en cada serie disminuye.

Además

$$n\mathbb{E}[(\bar{\underline{X}}_n - \underline{\mu})'(\bar{\underline{X}}_n - \underline{\mu})] \rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h^{ii} \quad \text{si} \quad \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_h^{ii}| < \infty, \quad 1 \leq i \leq m$$

Con un poco de más suposiciones restrictivas en el proceso $\{\underline{X}_t\}$ podría mostrarse que $\{\bar{\underline{X}}_t\}$ tiene asociada una distribución normal para muestras grandes, pero hacerlo es complicado y poco práctico.

Estimación de $\Gamma(h)$

Como en el caso univariado, un estimador de la covarianza

$\Gamma(h) = [(\underline{X}_{t+h} - \underline{\mu})(\underline{X}_t - \underline{\mu})']$ es :

$$\hat{\Gamma}(h) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (\underline{X}_{t+h} - \bar{\underline{X}}_n)(\underline{X}_t - \bar{\underline{X}}_n)' & \text{para } 0 \leq h \leq n-1 \\ \hat{\Gamma}'(-h) & \text{para } -n+1 \leq h < 0 \end{cases}$$

$\hat{\Gamma}(h)$ es la matriz de varianza y covarianza muestral para un retraso h . Por ejemplo en una serie bivariada:

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\begin{pmatrix} X_{t1} \\ X_{t2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{X}_{n1} \\ \bar{X}_{n2} \end{pmatrix} \right] [(X_{t1}, X_{t2}) - (\bar{X}_{n1}, \bar{X}_{n2})] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} X_{t1} - \bar{X}_{n1} \\ X_{t2} - \bar{X}_{n2} \end{pmatrix} [X_{t1} - \bar{X}_{n1}, X_{t2} - \bar{X}_{n2}] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_{t1} - \bar{X}_{n1})^2 & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_{t1} - \bar{X}_{n1})(X_{t2} - \bar{X}_{n2}) \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_{t1} - \bar{X}_{n1})(X_{t2} - \bar{X}_{n2}) & \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_{t2} - \bar{X}_{n2})^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se denota como $\hat{\gamma}_h^{ij}$ a cada componente de $\hat{\Gamma}(h)$, $i, j = 1, 2, \dots$, entonces las

correlaciones cruzadas estimadas son:

$$\hat{\rho}_h^{ij} = \frac{\hat{\gamma}_h^{ij}}{\sqrt{\hat{\gamma}_0^{ii} \hat{\gamma}_0^{jj}}}$$

si $i = j$, entonces $\hat{\rho}_h^{ij}$ se reduce a la función de autocorrelación de la serie i -ésima.

En series multivariadas las series pueden estar correlacionadas entre sí. En caso de que no suceda bastará con modelar cada serie de forma univariada. La siguiente prueba sirve para comprobar si dos series estacionarias son independientes.

Sea $\{\underline{X}_t\}$ la serie de tiempo bivariada cuyas componentes son definidas como:

$$X_{t1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k Z_{t-k,1}, \quad \{Z_{t1}\} \sim \text{IID}(0, \sigma_1^2)$$

y

$$X_{t2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k Z_{t-k,2}, \quad \{Z_{t2}\} \sim \text{IID}(0, \sigma_2^2)$$

donde $\{Z_{t1}\}$ y $\{Z_{t2}\}$ son independientes, $\sigma_1 + |\alpha_k| < \infty$ y $\sigma_2 + |\beta_k| < \infty$.

Entonces para todos los enteros h y k con $h \neq k$, para n grande el vector aleatorio formado por las variables aleatorias $n^{1/2} \hat{\rho}_h^{12}$ y $n^{1/2} \hat{\rho}_k^{12}$ es aproximadamente normal bivariado con media 0, varianza $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j^{11} \rho_j^{22}$, y covarianza $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j^{11} \rho_{j+k-h}^{22}$.

Suponiendo $\{Z_{t1}\}$ y $\{Z_{t2}\}$ son ruido blanco, entonces $n^{1/2} \hat{\rho}_h^{12}$ es aproximadamente normal con media 0 y varianza $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j^{11} \rho_j^{22} = \rho_0^{11} \rho_0^{22} = \sigma^2$.

Entonces $\hat{\rho}_h^{12}$ es aproximadamente normal con media 0 y varianza $1/n$ y además la covarianza entre $\hat{\rho}_h^{12}$ y $\hat{\rho}_k^{12}$ es cero pues para $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j^{11} \rho_{j+k-h}^{22}$ como $k \neq h$ $\hat{\rho}_{j+k-h}^{22} = 0$ a menos que $j = h - k$, pero en este caso $\rho_{h-k}^{11} = 0$ y entonces, la suma vale cero.

Así que si tenemos ruido blanco $\hat{\rho}_h^{12}$ es aproximadamente $N(0, 1/n)$. En general las series $\{X_{t1}\}$ y $\{X_{t2}\}$ no son ruido blanco, aunque se podrían aproximar como ruido blanco a través de filtros.

El filtro de una serie $\{Y_t\}$ en función de una serie $\{X_t\}$ es un conjunto $\{\tau_j\}$ tal que:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j X_{t-j} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j B^j X_t \\
&= T(B)X_t
\end{aligned}$$

donde $T(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j B^j$ es un operador.

Sean $\{X_{t1}\}$ y $\{X_{t2}\}$ procesos ARMA(p,q) invertibles, obtener

$$Z_{ti} = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j^{(i)} X_{t-j,i} \quad i = 1, 2$$

donde $\Pi_j^{(i)}$ se obtiene de acuerdo al teorema de invertibilidad como:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j^{(i)} Z^j = \frac{\phi_z^i}{\theta_z^i}$$

con ϕ^i y θ^i los polinomios autorregresivos y de promedios móviles de cada serie; $i = 1, 2$.

En la práctica se desconoce $X_{t,i}$ para $t \leq 0$ y en el modelo teórico se reemplaza $\{Z_{ti}\}$ por los residuos $\{W_{ti}\}$ obtenidos al ajustar el proceso ARMA(p,q) adecuado. Estos deben ser ruidos blancos y podemos usar la anterior aproximación si se cumplen los supuestos:

1. W_{ti} se escribe en función de $X_{t-j,i}$, las cuales queremos obtener y son independientes.
2. Por ser invertible $\sum_j |\pi_j^i| < \infty$, bajo el supuesto $\{X_{t1}\}$ y $\{X_{t2}\}$ son independientes, las series $\{Z_{ti}\}$ son independientes, entonces, las correlaciones $\hat{\rho}_h^{12}$, $\hat{\rho}_k^{12}$ $h \neq k$ para $\{Z_{t1}\}$ y $\{Z_{t2}\}$ son aproximadamente normales para n grandes e independientes con distribución $N(0, 1/n)$.

Así que puede probarse de forma aproximada independencia entre las series usando la aproximación normal y rechazo H_0 a un nivel α si:

$$|\rho_h^{12}| > \frac{Z^{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

Aplicando la regla de decisión, con $\alpha = 0.05$, $|\rho_h^{12}| > 1.96/\sqrt{n}$.

Si un proceso ARMA(p,q) se ajusta al probar los supuestos, debe suceder que los gráficos ACF, incluso los cruzados, estén dentro de las bandas de confianza y cuando las series originales son independientes, no conviene modelarlas conjuntamente, es decir, la $\hat{\rho}_h^{12}$ no sale de la banda y lo mismo sucede con $\hat{\rho}_h^{21}$.

Ejemplo

En el siguiente ejemplo se emplearán los datos de la educación en España, así como su Población, para hacer notar la posible relación que exista entre estas series.

Se puede observar en la Figura 3.2 la dispersión entre las series. Se calcula la correlación para saber si existe relación en los datos, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.6671762 \\ -0.6671762 & 1 \end{pmatrix}$$

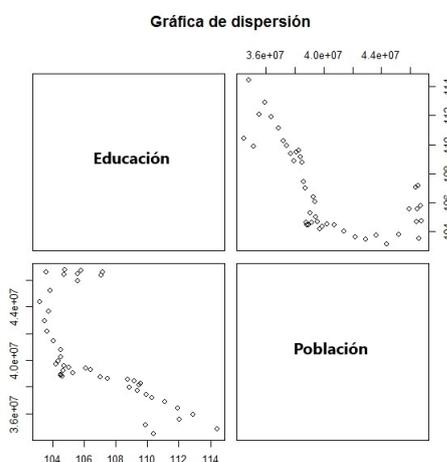


Figura 3.2: Gráfico de dispersión entre la educación en España y su Población, respectivamente de 1971 a 2014. Fuente: Banco Mundial

Podemos concluir que están inversamente correlacionadas, es decir, al crecer una decrece la otra y viceversa; esto tiene sentido pues al aumentar la educación en un país se tiene un mejor control natal de la población.

3.3. MODELADO Y PREDICCIÓN CON SERIES DE TIEMPO MULTIVARIADAS 51

Como se puede apreciar en la Figura 3.3, vale la pena utilizar esta relación entre los datos, confirmando correlación inversa e indicando la dependencia necesaria, permitiendo un análisis multivariado.

Aunque la correlación de las series son calculadas en el mismo periodo, es decir, sin retraso, más adelante se calculará la correlación con retraso usando el operador diferencia.

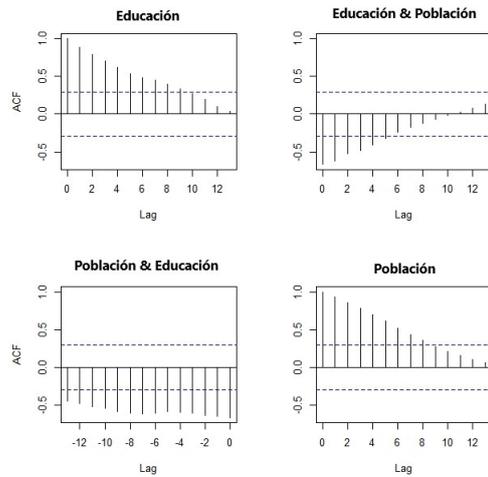


Figura 3.3: Gráfico de la función de autocorrelación entre la educación en España (V1) y su Población (V2) de 1971 a 2014 con una banda de confianza $\pm 1.96n^{-1/2}$. Fuente: Banco Mundial

3.3. Modelado y Predicción con series de tiempo multivariadas

3.3.1. Mejores predictores lineales de vectores aleatorios de segundo orden

Sea $\{\underline{X}_t = (X_{t1}, \dots, X_{tm})'\}$ una serie de tiempo m -variada de segundo orden con media $\underline{\mathbb{E}}[X_t] = \underline{\mu}_t$ y matriz de covarianza $m \times m$ dada por:

$$\mathbb{E}[\underline{X}_t \underline{X}_j'] - \underline{\mu}_t \underline{\mu}_j' = \Gamma(i, j)$$

así como en el caso univariado, se puede obtener la mejor predicción lineal de un vector aleatorio $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)'$ con segundo momento finito y $\mathbb{E}[\underline{Y}] = \underline{\mu}$, definida como:

$$P_n(\underline{Y}) = (P_n Y_1, \dots, P_n Y_m)' \quad (3.20)$$

donde $P_n(Y_j)$ es el mejor predictor lineal de la componente Y_j de \underline{Y} , y la constante 1. Se sigue por las propiedades del operador predicción que:

$$P_n(\underline{Y}) = \underline{\mu} + A_1(X_n - \mu_n) + A_2(X_{n-1} - \mu_{n-1} + \dots + A_n X_1 - \mu_1) \quad (3.21)$$

para algunas matrices A_1, \dots, A_n , también:

$$\underline{Y} - P_n(\underline{Y}) \perp \underline{X}_{n+1-i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

decimos que dos vectores aleatorios de dimensión m X e Y son ortogonales (escritos como $X \perp Y$), si $\mathbb{E}[XY'] = 0$.

Un caso especial es reemplazando \underline{Y} por X_{n+1} , el mejor predictor lineal \hat{X}_{n+1} de X_{n+1} en términos de X_1, \dots, X_n se obtiene lo siguiente:

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ P_n(X_{n+1}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

por lo que podremos escribir:

$$\hat{X}_{n+1} = \Phi_{n1}X_n + \dots + \Phi_{nn}X_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

y por la ecuación (3.22) tendremos:

$$\mathbb{E}[(\underline{X}_{n+1} - \hat{X}_{n+1})(\underline{X}'_{n+1-i})] = 0. \quad (3.23)$$

En el caso donde $\{X_t\}$ es estacionario se llega a:

$$\sum_{j=1}^n \Phi_{nj} \Gamma(i-j) = \Gamma(i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.24)$$

estas ecuaciones son sencillas de resolver recursivamente, primero para $P_n X_{n+1}$, después para $P_n X_{n+2}$, así sucesivamente. Si $n \geq p$, entonces los predictores del h -ésimo paso basados en todos los componentes de X_j , $-\infty < j \leq n$, también satisfacen (3.26) y por lo tanto son los mismos que los predictores del h -ésimo paso basado en X_1, \dots, X_n .

3.4. Cointegración

Como se vio en las series de tiempo univariada no estacionarias, éstas pueden ser transformadas a estacionarias mediante el uso del operador diferencia $\nabla = 1 - B$ repetidamente.

Si $\{\nabla^d X_t\}$ es estacionario para algún entero positivo d pero $\{\nabla^{d-1} X_t\}$ es no estacionario, decimos que $\{X_t\}$ es **integrado de orden d** , es decir, $\{X_t\} \sim I(d)$. Muchas veces en macroeconomía, las series de tiempo tienen integración de orden 1.

Si $\{\underline{X}_t\}$ es una serie de tiempo m -variada, definimos $\{\nabla^d X_t\}$ como la serie cuya j -ésima componente se obtiene aplicando el operador $(1 - B)^d$ para el j -ésimo componente de $\{X_t\}$, $j = 1, \dots, m$.

La idea de una serie de tiempo multivariada cointegrada fue introducida por Granger y desarrollada por Engle y Granger.

Se dice que la serie de tiempo $\{X_t\}$ m -dimensional es integrada de orden d , o $\{X_t\} \sim I(d)$, si d es un entero positivo, $\{\nabla^d X_t\}$ es estacionaria, y $\{\nabla^{d-1} X_t\}$ es no estacionaria. El proceso $I(d)$ de $\{X_t\}$ se dice que es **cointegrado con vector de cointegración α** si α es un vector $m \times 1$ tal que $\{\alpha' X_t\}$ es de orden menor que d .

Ejemplo:

Se emplearán los mismos datos de España, con la diferencia de que se utilizará el método de cointegración de los datos, con lo que se tienen datos estacionarios.

En la Figura 3.4 después de aplicar la diferencia, se observa una concentración de los datos en el gráfico de dispersión y se calcula la siguiente matriz de correlación:

Para confirmar la correlación que hay en la serie, se calcula y se obtiene la siguiente matriz de correlación:

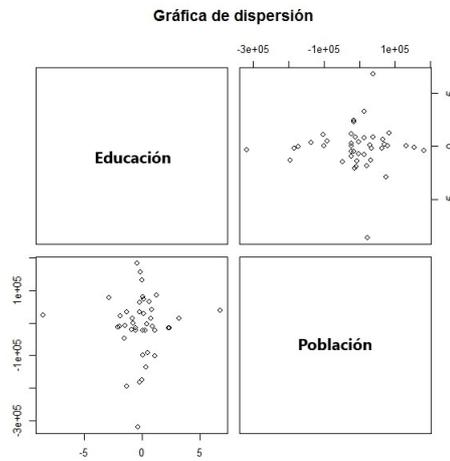


Figura 3.4: Gráfico de dispersión entre la educación en España y su Población de 1971 a 2014 . Fuente: Banco Mundial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.009730459 \\ 0.009730459 & 1 \end{pmatrix}$$

De lo anterior, la correlación de la series se ve alterada, debido al cambio de signo cercana a cero. Intuyendo que no es necesario un análisis multivariado en la serie, ya que no se sabe qué sucede con la otra serie cuando sólo una tiene retraso.

En la figura 3.5 mostramos la función de autocorrelación y es más notoria la independencia entre ambas series, por lo que se recomendaría ajustar por separado, una serie de tiempo univariada para cada una de ellas.

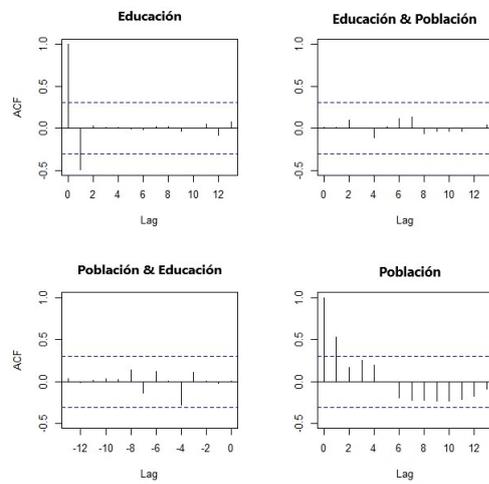


Figura 3.5: Gráfico de la función de autocorrelación entre la educación en España y su Población de 1971 a 2014 con una banda de confianza $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Fuente: Banco Mundial

Capítulo 4

Ajuste de modelos de series de tiempo del PIB

Existen modelos que asumen observaciones independientes, convirtiendo la dependencia de las observaciones en un impedimento para su análisis. A pesar de ello, en los datos obtenidos en cualquier práctica en donde el tiempo juega un papel importante, se llega a una dependencia, por lo que se plantea el uso del análisis de series de tiempo. Estos modelos son de gran relevancia por lo siguiente:

- Modelan la tendencia en el comportamiento de las series de tiempo.
- Permiten el pronóstico de valores futuros en la serie de tiempo.
- No requieren necesariamente tener información de las variables exógenas que afectan la serie para su análisis. Las series pueden ser univariadas o multivariadas.

Se modelarán los datos del Producto Interno Bruto (PIB) de Japón del año 1960 al año 2015 de manera univariada y multivariada en conjunto con el PIB de China en el mismo periodo de tiempo. Lo anterior debido a que China organizó los juegos olímpicos en 2008.

Como lo explicamos en el capítulo uno, los datos recabados en el Banco Mundial, corresponden al Producto Interno Bruto Nominal de datos anuales.

Dada su cercanía geográfica (Figura 4.1) e idiosincrasia similar, con una amistad entre ambos países, se piensa que ambas series están lo suficientemente

relacionadas como para poder pronosticar el comportamiento del PIB, dentro de 10 años tanto en China como en Japón. Esto con el fin de conocer si es de provecho organizar los juegos olímpicos que se planean para Japón en 2020, debido al atractivo turístico y la inversión extranjera que implica un evento de tal magnitud.



Figura 4.1: Ubicación geográfica de China y Japón

4.1. Ajuste univariado del PIB de Japón

En la serie del PIB de Japón, Figura 4.2 , podemos notar una tendencia a la baja en los datos en los últimos años esto debido al tsunami que ocurrió en 2011 [14] , por lo que claramente notamos que la serie no es estacionaria. Para llegar a que la serie sea estacionaria se usará la diferencia con distintos retrasos, además, la serie tiene una tendencia exponencial, por lo que conviene utilizar el logaritmo en los datos.

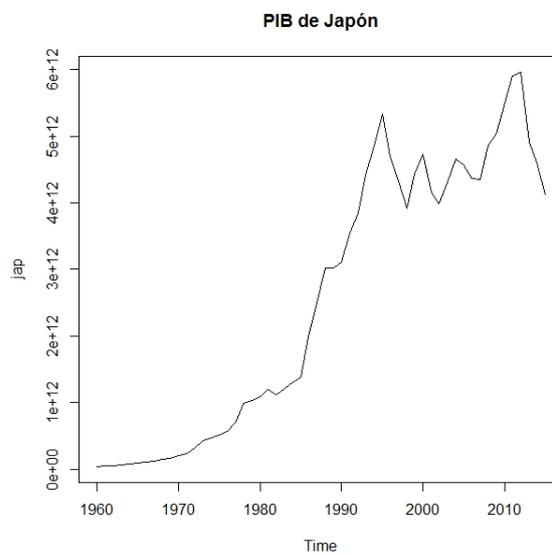


Figura 4.2: Gráfico del Producto Interno Bruto de Japón de 1960-2015. Fuente: Banco Mundial

60 CAPÍTULO 4. AJUSTE DE MODELOS DE SERIES DE TIEMPO DEL PIB

Al emplear el método de diferencia para quitar la estacionalidad en los datos, comparamos los resultados de manera gráfica, en la Figura 4.3, y resalta que en la segunda diferencia los datos no presentan triángulos, rombos o alguna estructura de algún tipo, por lo que supondremos ausencia de estacionalidad y, para efectos del trabajo, homoscedasticidad. Entonces la serie a analizar será el logaritmo de la segunda diferencia:

$$\nabla^2(X'_t) = (1 - B)^2 X'_t \quad \text{con } X'_t = \log(X), \quad \forall t$$

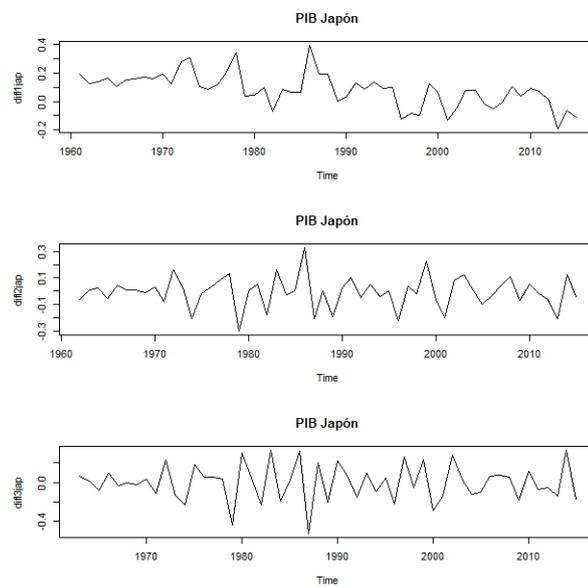


Figura 4.3: Gráfico de la serie de tiempo del PIB de Japón de 1960-2015, $\nabla(X'_t)$, $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^3(X'_t)$.

En la Figura 4.4 los valores que salen de la banda de confianza en la ACF y PACF indican posibles parámetros del modelo teniendo como resultado, $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, al analizar todos los posibles modelos, nos fijamos en el criterio Akaike (AIC) para proponer un modelo.

| Modelo | AIC | Modelo | AIC | Modelo | AIC |
|--------------|--------|--------------|--------|--------------|--------|
| ARIMA(0,2,0) | -77.97 | ARIMA(1,2,0) | -80.37 | ARIMA(2,2,0) | -81.96 |
| ARIMA(0,2,1) | -88.44 | ARIMA(1,2,1) | -90.05 | ARIMA(2,2,1) | -88.65 |
| ARIMA(0,2,2) | -90.45 | ARIMA(1,2,2) | -88.46 | ARIMA(2,2,2) | -87.55 |
| ARIMA(0,2,3) | -88.46 | ARIMA(1,2,3) | -87.46 | ARIMA(2,2,3) | -91.93 |
| ARIMA(0,2,4) | -86.46 | ARIMA(1,2,4) | -85.89 | ARIMA(2,2,4) | -90.28 |
| ARIMA(0,2,5) | -90.83 | ARIMA(1,2,5) | -90.76 | ARIMA(2,2,5) | -89.76 |
| ARIMA(0,2,6) | -91.36 | ARIMA(1,2,6) | -89.43 | ARIMA(2,2,6) | -88.08 |
| ARIMA(0,2,7) | -89.5 | ARIMA(1,2,7) | -89.77 | ARIMA(2,2,7) | -88.51 |

Cuadro 4.1: Resumen de resultado AIC en el modelo ARIMA(p,d,q)

| Modelo | AIC | Modelo | AIC | Modelo | AIC |
|--------------|--------|--------------|--------|--------------|--------|
| ARIMA(3,2,0) | -82.29 | ARIMA(4,2,0) | -87.55 | ARIMA(5,2,0) | -85.57 |
| ARIMA(3,2,1) | -87.23 | ARIMA(4,2,1) | -86.00 | ARIMA(5,2,1) | -85.33 |
| ARIMA(3,2,2) | -85.45 | ARIMA(4,2,2) | -85.41 | ARIMA(5,2,2) | -83.93 |
| ARIMA(3,2,3) | -89.94 | ARIMA(4,2,3) | -89.90 | ARIMA(5,2,3) | -88.47 |
| ARIMA(3,2,4) | -89.80 | ARIMA(4,2,4) | -88.42 | ARIMA(5,2,4) | -86.52 |
| ARIMA(3,2,5) | -89.78 | ARIMA(4,2,5) | -87.79 | ARIMA(5,2,5) | -86.21 |
| ARIMA(3,2,6) | -86.16 | ARIMA(4,2,6) | -85.78 | ARIMA(5,2,6) | -83.15 |
| ARIMA(3,2,7) | -88.07 | ARIMA(4,2,7) | -84.14 | ARIMA(5,2,7) | -86.16 |

Cuadro 4.2: Resumen de resultado AIC en el modelo ARIMA(p,d,q)

Con la información en los cuadros 4.1 y 4.2 podremos proponer el modelo, utilizando la información AIC, ARIMA(2,2,3). La verificación del supuesto de que el residuo es ruido blanco, se obtiene con ayuda de las ACF y PACF de los residuales en la Figura 4.5. De ésta se observa que los datos obtenidos están dentro de las bandas de confianza, lo que nos da seguridad de concluir, de manera gráfica, que los residuales se comportan como ruido blanco.

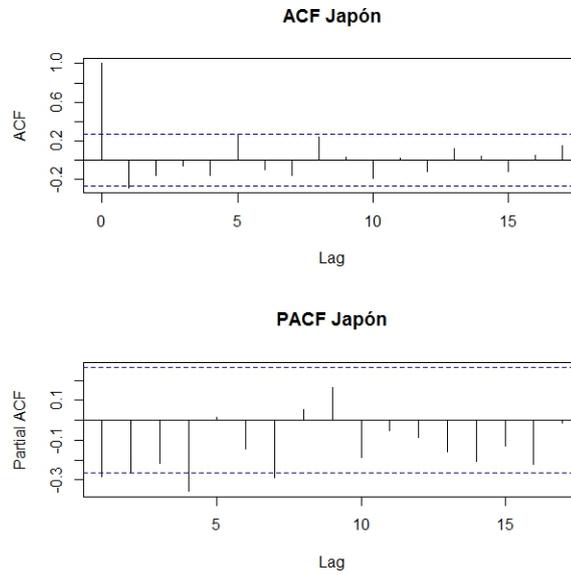


Figura 4.4: Gráfico de la PACF y ACF del PIB de Japón, $\nabla^2(X'_t)$

El modelo ARIMA(2,2,3), de acuerdo al cuadro 4.1, incluyendo los valores de los parámetros, queda de la forma:

$$\theta(X) = 1 - 0.4544x + 0.6722x^2 - 0.8432x^3; \quad \nabla^2(X'_t)$$

$$\phi(X) = 1 + 0.0956x + 0.7205x^2; \quad \nabla^2(X'_t)$$

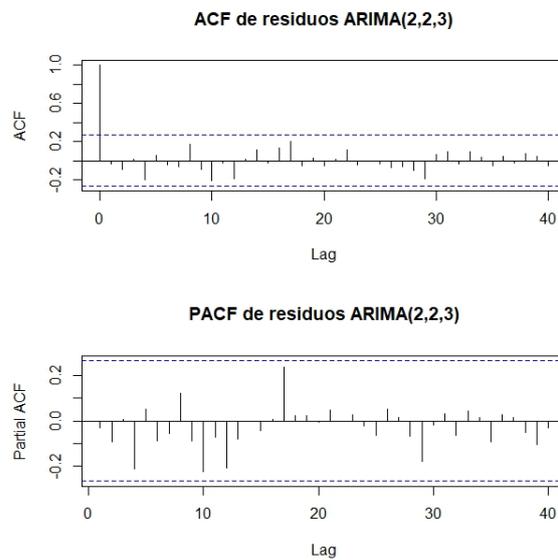


Figura 4.5: Gráfico de la PACF y ACF de los residuos del modelo propuesto ARIMA(2,2,3) del PIB de Japón, $\nabla^2(X_t')$

Es importante que se converja a una distribución normal porque de esta parten otras distribuciones además de poder realizar inferencia estadística, esto es pruebas de hipótesis e intervalos de confianza. Una forma de ver de manera gráfica si los datos son normales, es por medio de las gráficas del tipo QQ-plot en los residuos. Como podemos observar en las Figuras 4.6 y 4.7, se supondría que se comporta de manera normal, más adelante se darán pruebas formales.

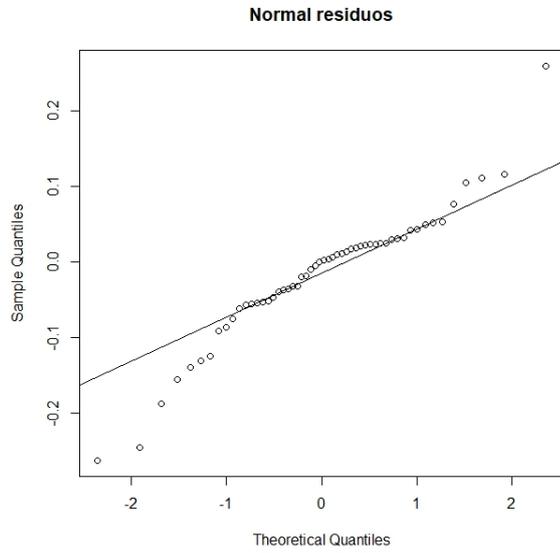


Figura 4.6: Gráfico de dispersión en recta Normal en los residuos del PIB de un modelo ARIMA(2,2,3)

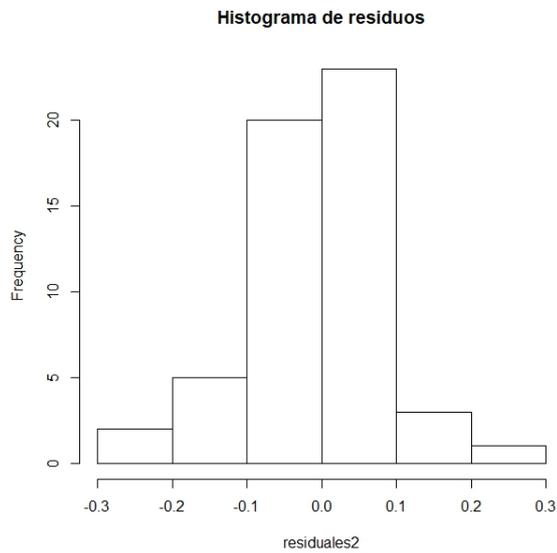


Figura 4.7: Histograma de la Normal en los residuos del PIB de un modelo ARIMA(2,2,3)

En la tabla 4.2 se muestran algunas pruebas estadísticas en los datos para poder decir si los residuos cumplen con varios supuestos estadísticos.

Para probar que los datos se ajustan a una distribución normal primero comprobamos la independencia con la prueba Ljung-Box y la prueba de Box-Pierce mostrada en la Figura 4.8, la cual nos indican que los residuos son independientes; ahora utilizamos las pruebas Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling y Shapiro-Francia, para muestras pequeñas.

La prueba t, bajo el supuesto de que la media μ tiene valor cero, obtenemos el resultado que tiene media $\mu = -0.01683266$, siendo estadísticamente cero 0.

Se muestran los resultados de las pruebas en el código R que en su mayoría cumple con lo que se requería.

| Prueba | P-Value | Resultado |
|--------------------|----------|--|
| Dickey - Fuller | 0.01 | Se rechaza que la serie no es estacionaria |
| Ljung-Box | 0.8208 | Se cumple el supuesto, los residuos son independientes |
| Kolmogorov-Smirnov | 0.4756 | Se cumple el supuesto, es Normal |
| Anderson-Darling | 0.003388 | No se cumple el supuesto, no se distribuye Normal |
| Shapiro-Francia | 0.003868 | No se cumple el supuesto, no se distribuye Normal |
| t-test | 0.1628 | Se cumple el supuesto por lo que tiene media estadísticamente cero |
| Box-Pierce | 0.8256 | Se cumple el supuesto, los residuos no están correlacionados |

Cuadro 4.3: Pruebas al modelo final ARIMA(2,2,3)

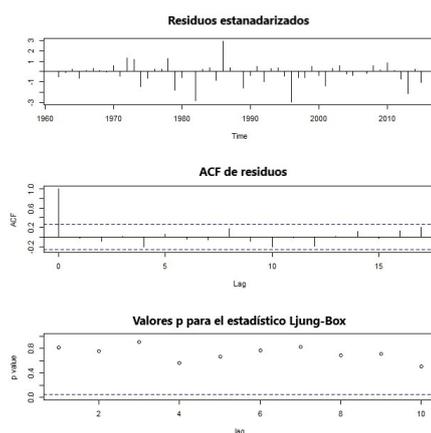


Figura 4.8: Análisis de residuos del modelo ARIMA(2,2,3)

66 CAPÍTULO 4. AJUSTE DE MODELOS DE SERIES DE TIEMPO DEL PIB

Aunque la muestra no se comporte como una distribución normal, podremos pronosticar el comportamiento del PIB de Japón 10 años a futuro, mostrando en la Figura 4.9 los datos del PIB con los datos modificados, para regresar la serie utilizamos la suma inversa conociendo el primer dato de la serie podemos utilizar este comando (`diffinv[]`), observamos en la Figura 4.10 una tendencia a la baja en los datos originales del PIB de Japón.

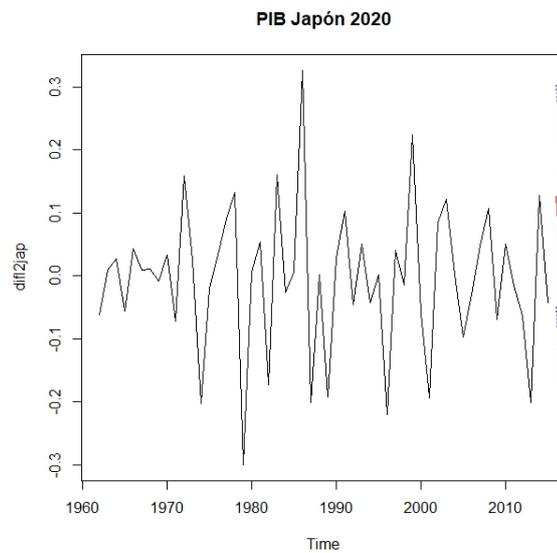


Figura 4.9: Predicción en el modelo ARIMA(2,2,3) de las diferencias del logaritmo en el PIB de Japón

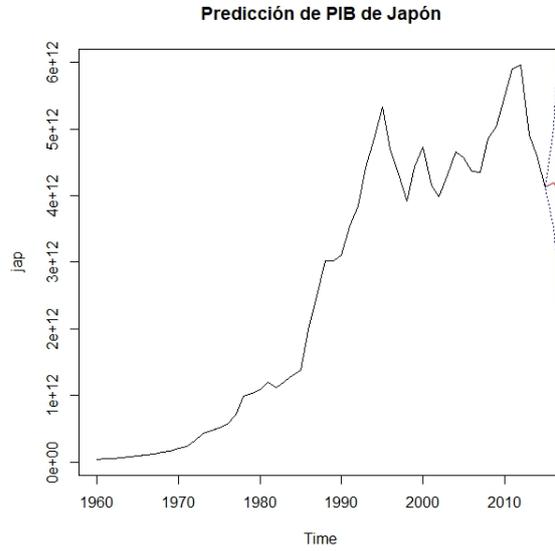


Figura 4.10: Predicción del modelo ARIMA(2,2,3) del PIB de Japón

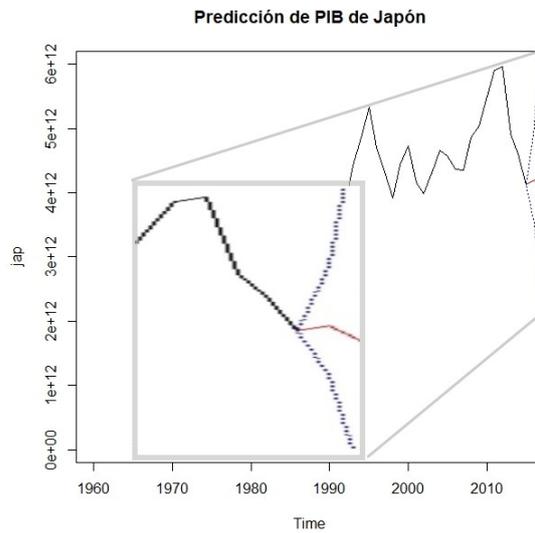


Figura 4.11: Predicción del modelo ARIMA(2,2,3) del PIB de Japón Ampliado

4.2. Ajuste de regresión con errores ARMA

Se usarán los datos del logaritmo del Producto Interno Bruto de Japón, con la segunda diferencia ya que se vio que es estacionario, y el método de mínimos cuadrados generalizados usado regresión con errores ARMA siendo la variable explicativa el tiempo o los años en la que ésta ocurre. Se calcula el ACF y PACF inicialmente, se muestran en la Figura 4.12.

Se checa los valores propuestos en la PACF Y ACF ajustándolo directamente con errores ARMA, tomando el criterio akaike con un valor -104.4819 se propone el modelo $ARIMA(1, 2, 2)$:

$$\theta(X) = 1 - 1.5088547\theta_1 + 0.9153981\theta_2$$

$$\phi(X) = 1 - 0.3129856\phi_1$$

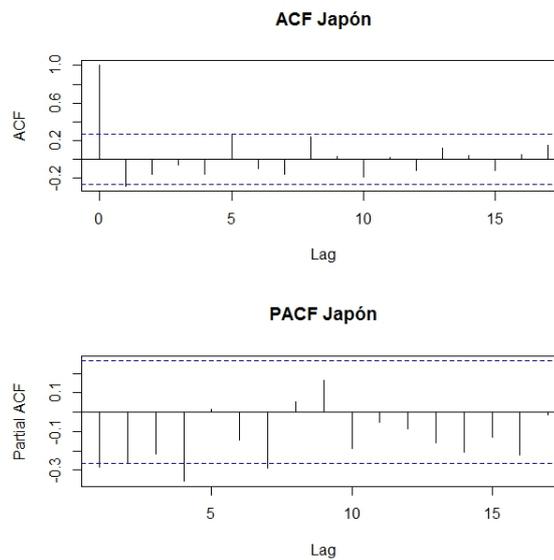


Figura 4.12: ACF y PACF de los residuos en el PIB de Japón

Aplicando el método sugerido por este método aplicamos las pruebas para comprobar su efectividad, así como se usaron en el caso anterior.

En la tabla 4.4 se muestran algunas pruebas estadísticas en los datos para poder decir si los residuos cumplen con varios supuestos estadísticos.

Para probar que los datos se ajustan a una distribución normal se utilizan las pruebas Anderson-Darling y Shapiro-Francia para muestras de tamaño menor a 50. Pero en la prueba Lilliefors (parecido a Kolmogorov-Smirnov) se simula una distribución Normal utilizando los datos y así comprobar su distribución.

Debido a que se distribuye normal se puede emplear la prueba t bajo el supuesto de que la media μ tiene valor cero, con el resultado obtenido podemos concluir que la media es estadísticamente cero, por lo que se puede afirmar que es ruido blanco con media cero.

La prueba de Box-Pierce es una prueba relacionada con la Ljung-Box mostrada en la Figura 4.13, la cual nos indican que los residuos se distribuyen de forma independiente.

Se muestran los resultados de las pruebas en el código R que en su mayoría cumple con lo que se requería.

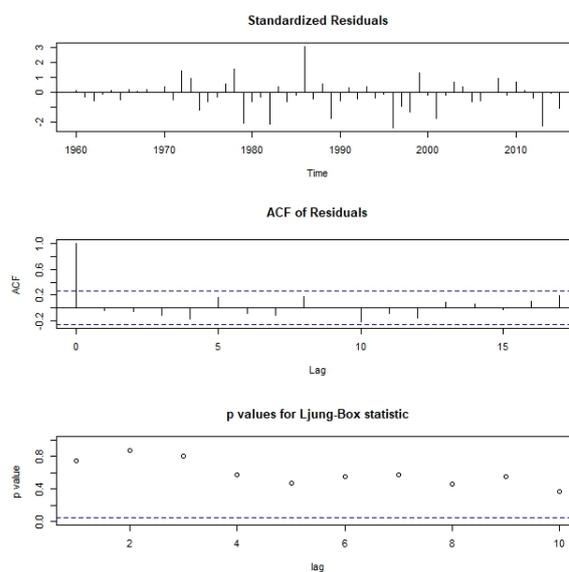


Figura 4.13: Prueba Ljung-Box ARIMA(1,2,2) en la serie transformada

70 CAPÍTULO 4. AJUSTE DE MODELOS DE SERIES DE TIEMPO DEL PIB

| Prueba | P-Value | Resultado |
|--------------------|---------|---|
| Kolmogorov-Smirnov | 0.5209 | Se cumple el supuesto, se distribuye Normal |
| Anderson-Darling | 0.02519 | No se cumple el supuesto, se rechaza la distribución Normal |
| Shapiro-Francia | 0.06073 | Se cumple el supuesto, se distribuye Normal |
| t-test | 0.8523 | Se cumple el supuesto con media 0.002 |
| Box-Pierce | 0.7564 | Se cumple el supuesto, los datos no están correlacionados |

Cuadro 4.4: Pruebas al modelo final empleando ajuste con errores ARIMA(1,2,2)

Al predecir la serie, tenemos la Figura 4.14 y al regresar los datos a su serie original se obtiene la Figura 4.15.

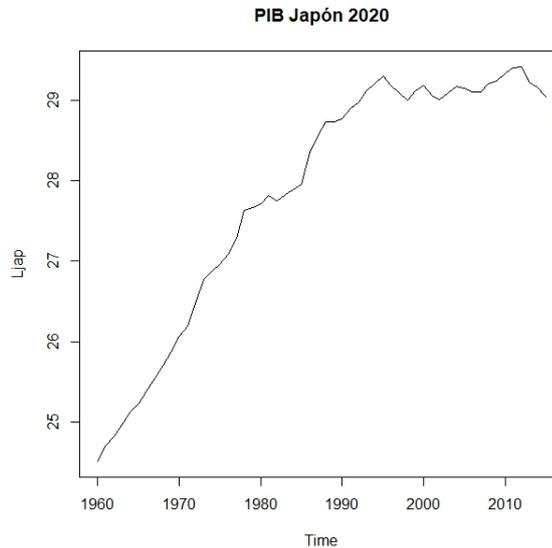


Figura 4.14: Predicción ARIMA(1,2,2) en la serie de las diferencias del logaritmo en el PIB de Japón

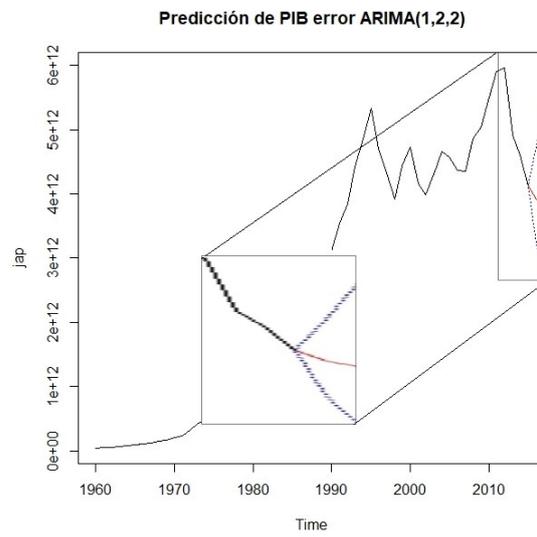


Figura 4.15: Predicción del modelo ARIMA(1,2,2) en el PIB de Japón a 10 años utilizando la regresión con errores ARMA

4.3. Ajuste multivariado entre China y Japón

Se toman los datos para convertirlos en series de tiempo y con ello mostrar las gráficas de como se comporta el PIB en la Figura 4.16 de China (X_t) y de Japón (Y_t). Cabe mencionar que en el año 2008, año en que se llevaron a cabo las olimpiadas en China, hay un incremento notorio en el PIB de ambos países. Sin embargo, hay una decaída en el PIB de Japón en 2011, esto debido al terremoto y tsunami que ocurrió el 11 de marzo de 2011 frenando su economía y estropeando el crecimiento que estaba teniendo[14].

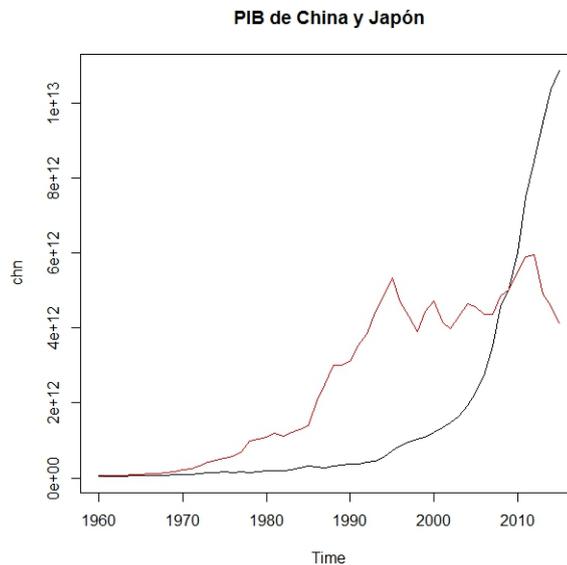
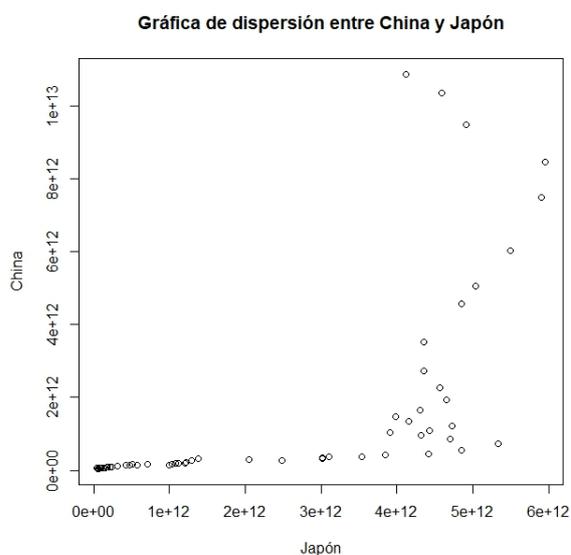


Figura 4.16: Gráfico del Producto Interno Bruto de China (X_t) y Japón (Y_t) de 1960-2015. Fuente: Banco Mundial

Se realizan pruebas de correlación sobre los datos del PIB de China y Japón, teniendo como resultado el Cuadro 4.6, la cual nos indica que están relacionados inversamente y la correlación es significativa. Esto se puede notar con mayor claridad con la gráfica de dispersión en la Figura 4.18, se nota que están inversamente relacionados.

| Prueba | Correlación | Dos lados | Mayor | Inferior |
|----------|-------------|-------------------------|-------------------------|----------|
| Pearson | 0.6158063 | 4.383×10^{-07} | 2.191×10^{-07} | 1 |
| Spearman | 0.9457963 | 2.2×10^{-16} | 2.2×10^{-16} | 1 |
| Kendall | 0.8454545 | 2.2×10^{-16} | 2.2×10^{-16} | 1 |

Cuadro 4.5: Pruebas de correlación entre el PIB de China (X_t) y Japón (Y_t)Figura 4.17: Gráfico de dispersión entre el Producto Interno Bruto de China (X_t) y Japón (Y_t) de 1960-2015. Fuente: Banco Mundial

Por lo que sí conviene realizar un análisis con los datos de forma multivariada, cabe mencionar en la correlación calculada la serie no hay retraso.

Utilizando las transformaciones de logaritmo y la diferencia podremos convertir ambas series en estacionarias, teniendo en la varianza de Japón un valor de 0.0135365, mientras que para la varianza en China es un valor de 0.0118343, la covarianza entre el PIB de ambos países tiene el valor -0.00183113 y las correlaciones entre las series transformadas se encuentra en el cuadro 4.7, una vez transformadas ambas series obtendremos la Figura 4.18 .

| Prueba | Correlación | Dos lados | Mayor | Inferior |
|----------|-------------|-----------|--------|----------|
| Pearson | -0.1446754 | 0.2966 | 0.8517 | 0.1483 |
| Spearman | 0.02923575 | 0.8334 | 0.4167 | 0.5835 |
| Kendall | 0.03563941 | 0.7036 | 0.3518 | 0.6482 |

Cuadro 4.6: Pruebas de correlación entre el PIB de China (X_t) y Japón (Y_t) transformada

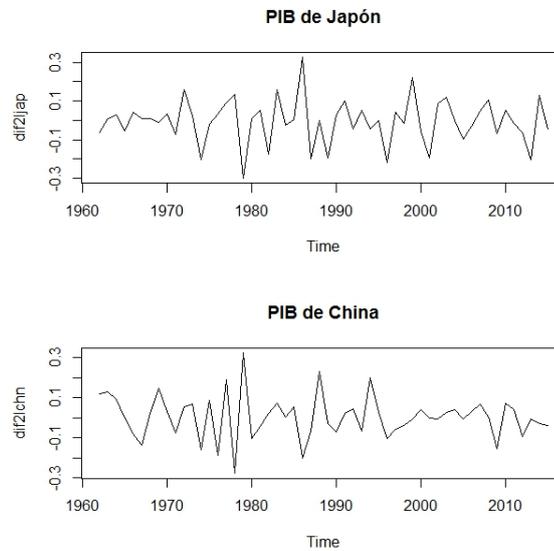


Figura 4.18: Gráfico de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X_t)$, $\nabla^2(Y_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial

En el Cuadro 4.5 se calcula la correlación en la serie con lo que se tiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.1446754 \\ -0.1446754 & 1 \end{pmatrix}$$

confirmando lo que decían las correlaciones y pruebas asociadas, las series están inversamente relacionadas, lo cual hace plausible utilizar un análisis de tipo multivariado.

Para saber si conviene modelar simultáneamente el PIB de China y Japón, se obtienen las autocorrelaciones y correlaciones cruzadas, así como las

autocorrelaciones parciales y autocorrelaciones parciales cruzadas de la Figura 4.19 y Figura 4.20, para emplear el modelo multivariado debe haber valores fuera de las bandas de confianza para la ACF y PACF entre China, Japón y viceversa. En el caso en donde no salgan de las bandas, no conviene hacer el análisis puesto que no están relacionadas entre sí y convendría más hacer un análisis univariado.

Se puede pensar, por los resultados obtenidos, que la economía nipona depende en gran medida de la economía China.

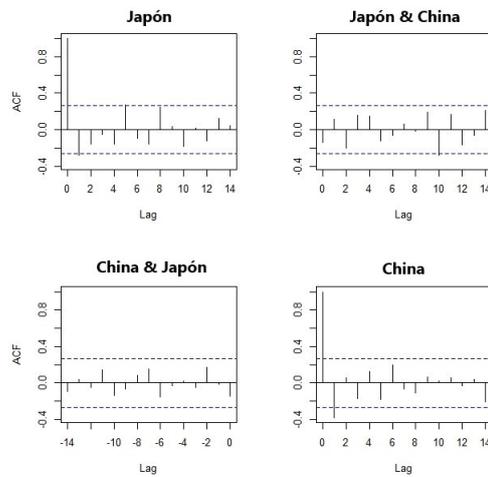


Figura 4.19: ACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial

Para elegir el modelo a emplearse se utiliza el criterio AIC, la estimación se basa en mínimos cuadrados ordinarios en una regresión multivariada de la forma:

$$\underline{X}_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_p X_{t-p} + \underline{u}_t$$

donde las Φ_i son matrices de $n \times n$ y $\underline{u}_t = \sigma^2 \mathbb{I}_t$ (error aleatorio de tipo esférico de dimensión n , en nuestro caso \underline{u}_t es de dimensión 2), donde σ^2 es un parámetro que indica la varianza en cada observación, mientras que \mathbb{I}_t es la matriz identidad $n \times n$ al tiempo t . Con *underline* \underline{u}_t se suele dividir en dos partes, Homocedasticidad y ausencia de autocorrelación, esto sucede cuando:

- Homecedasticidad: Esto ocurre cuando los errores \underline{u}_t ($t=1,2,\dots,n$) tienen la misma varianza σ^2 :

$$\text{Var}(\underline{u}_t) = \sigma^2, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

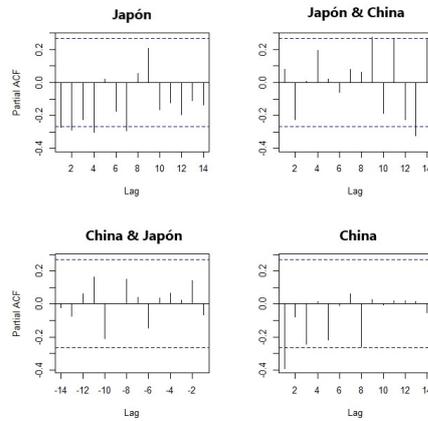


Figura 4.20: PACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial

- Ausencia de autocorrelación: Las covarianzas (también las correlaciones) entre cada par de errores son nulas:

$$\text{Cov}(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = 0, \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Si además se distribuyen normalmente, esto implicaría que los errores son estocásticamente independientes y no están correlacionadas; por lo que los valores estimados bajo el modelo VAR(2) son de la forma:

$$\underline{X}_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \underline{u}_t$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} -0.343933 & -0.019109 \\ -0.008586 & -0.453197 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} -0.292477 & -0.226476 \\ 0.148399 & -0.096992 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_t = \begin{pmatrix} -0.006779 \\ 0.002459 \end{pmatrix}$$

En la Figura 4.22 se tienen las ACF y autocorrelaciones cruzadas de los residuos del modelo propuesto VAR(2). Si ninguno de los valores sale de la banda de

confianza, es decir, son significativamente cero, se tiene un indicativo de un ruido blanco. En estas series se nota que en ningún valor sale de las bandas, por lo que no se estarían violando los supuestos estadísticos del modelo.

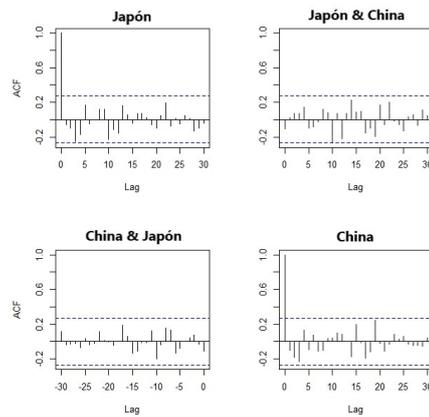


Figura 4.21: ACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X_t)$, $\nabla^2(Y_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial

Al obtener las raíces en VAR(2) tenemos los siguientes valores:

- 0.5526553
- 0.5526553
- 0.4504635
- 0.4504635

ya que ninguna es uno, se puede decir que el modelo es estable y no es necesario utilizar un modelo SVAR.

En la Figura 4.23 se puede ver de forma gráfica la estabilidad en la serie debido a que los valores no salen de la banda de confianza.

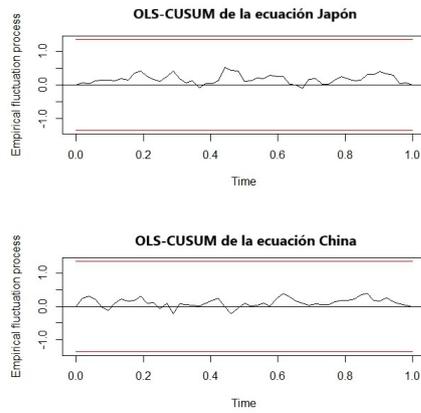


Figura 4.22: Prueba de estabilidad para el modelo VAR(2).

En el cuadro 4.8 damos las pruebas necesarias para verificar supuestos en el modelo VAR(2); para una mejor explicación de cada una de las pruebas revisar la bibliografía [13] [14].

| Prueba | p-value | Resultado |
|---------------------|---------|---|
| ARCH (multivariado) | 0.8454 | Se acepta la homoscedasticidad , varianza constante |
| Jarque y Bera | 0.4706 | Se acepta la distribución normal |
| Asimetría | 0.835 | Se acepta la distribución normal |
| Curtosis | 0.2032 | Se acepta la distribución normal |
| Anderson Darling | 0.2658 | Se acepta la distribución normal |
| Portmanteau | 0.2549 | Se acepta que no están autocorrelacionadas |

Cuadro 4.7: Pruebas del modelo VAR(2) en el PIB de China y Japón

Ahora al calcular las ACF, en la Figura 4.23, y PACF, en la Figura 4.24, los valores no salen de las bandas de confianza, por lo que podemos concluir que es ruido blanco.

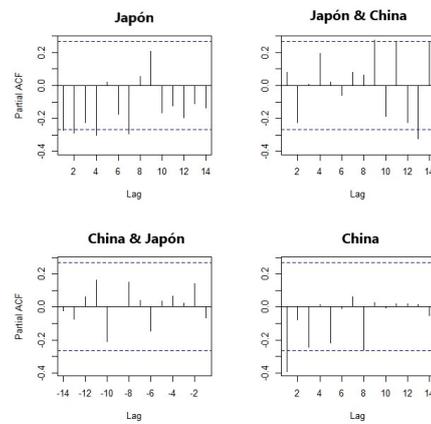


Figura 4.23: PACF de la serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X'_t)$, $\nabla^2(Y'_t)$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial

Como paso final, se hace la predicción para 10 años en el PIB de China y Japón, al mostrar los resultados se muestra el PIB de ambos países, la gráfica se muestra en la Figura 4.25, aunque estos son los datos transformados. Para poder regresar a la serie original para el caso de Japón, el cual es el que nos interesa predecir, se tomarán los 10 datos predichos, así como su banda de confianza y serán unidos a la serie modificada para después ser utilizada con el comando *diffinv* para regresar a la serie original, mostrada en la Figura 4.26. Cabe recalcar una tendencia a la baja por parte del PIB de Japón .

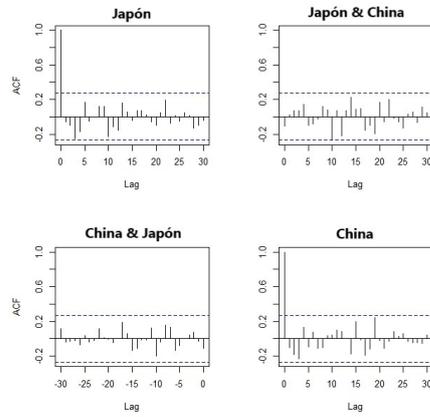


Figura 4.24: ACF de los residuos del modelo propuesto VAR(2), serie de tiempo del PIB de China y Japón de 1960-2015. $\nabla^2(X_t')$, $\nabla^2(Y_t')$ respectivamente. Fuente: Banco Mundial

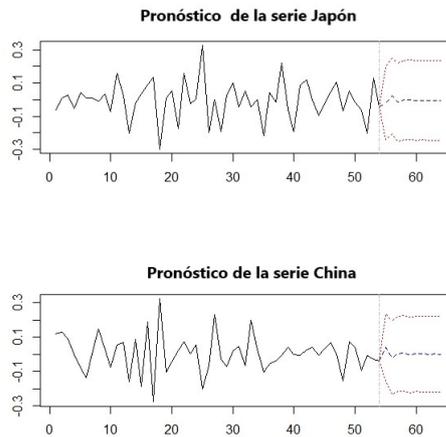


Figura 4.25: Predicción de la serie usando el VAR(2).

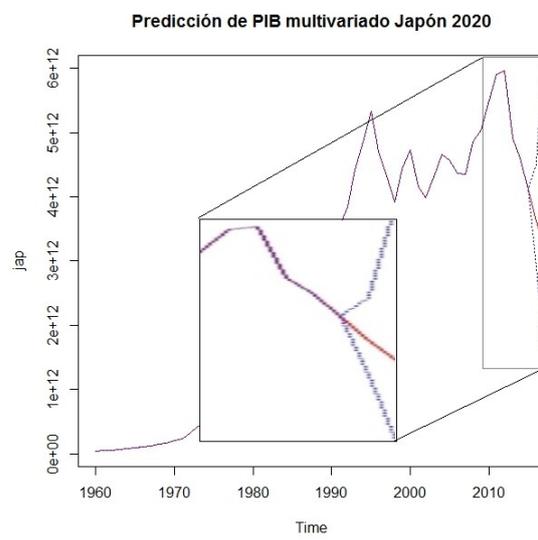


Figura 4.26: Predicción en la serie original.

Capítulo 5

Conclusiones

La serie original en el Producto Interno de China y Japón cuenta con 56 registros que se obtiene anualmente desde el año de 1960, tomando en cuenta la producción de bienes y servicios en cada país. Cabe mencionar que Japón sufrió un terremoto en el año de 2011 por lo que se vio afectado su crecimiento en comparación con China, que tuvo un acelerado crecimiento.

Al principio se modeló la serie de Japón como un caso univariado, en la cual se observaba una serie no estacionaria y crecimiento exponencial, aplicando una transformación logarítmica y doble diferencia, con la cual la serie se convertiría en estacionaria.

Para continuar al calcular y obtener las gráficas ACF y PACF, se pudo proponer el modelo ARIMA(2,2,3), se mostró que la serie de residuos se distribuye normal, es ruido blanco y con media cero; esto nos permite predecir los datos de Japón a 10 años en la serie, lo que muestra una tendencia a la baja de su PIB, incluso durante y después de los juegos olímpicos planeados en 2020.

Después se hace de manera similar al univariado, un ajuste que ahora se toma en cuenta dos series de tiempo, supuestamente relacionadas, ya que si no lo estuvieran no tendría caso realizar un análisis multivariado y sería mejor analizar cada serie de manera separada, primero se prueba que las series estén correlacionadas suponiendo que no existe retraso entre ellas. Encontramos que están inversamente correlacionadas, lo que nos permite utilizar el análisis multivariado, se utilizó entonces el comando VARselect, el cual devuelve los criterios de información y el error de predicción final para el incremento secuencial del orden de retraso en un proceso VAR (p). Estos criterios se basan en el mismo

tamaño de muestra. De acuerdo a estos, se selecciona un VAR(2) con el criterio AIC.

Al realizar las pruebas necesarias, se demuestra que los residuos se distribuyen normal, hay homoscedasticidad y no están auto-correlacionadas, lo cual nos permite predecir los datos de China y Japón 10 años en la serie. Después se anexan los datos a la serie modificada y se hace lo mismo que en el caso univariado y errores ARMA para volver a la serie original, los pronósticos tiene una tendencia a la baja nuevamente.

Cuando se comparan las predicciones en el PIB de Japón en el caso univariado (superior azul), errores ARMA (medio morado) y el multivariado (inferior rojo) mostrado en la Figura 5.1 notamos que para el caso multivariado tiene una tendencia a la baja marcada que en el caso univariado y errores ARMA, esto podría ser ya que en la predicción se tomó en consideración el PIB de China, que crecía aún más, y al estar inversamente relacionadas, su tendencia a la baja es marcada.

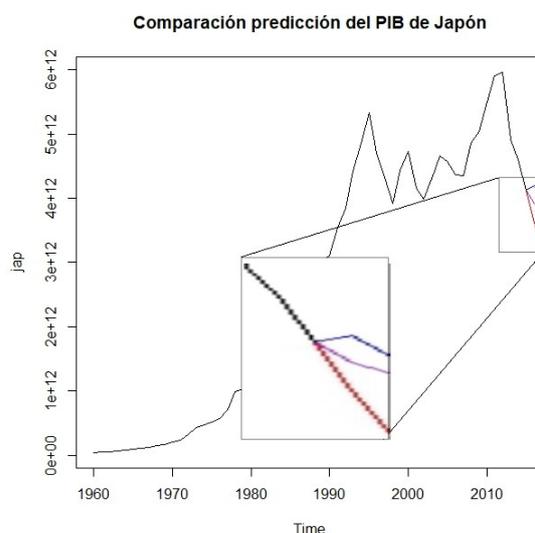


Figura 5.1: Comparación de las predicción univariada ARIMA(2,2,3), Multivariada VAR(2) y Errores ARMA(1,2)

Ahora para decidir cuál es el mejor estimador, eso es más subjetivo, y podría tomarse como mejor estimador al caso multivariado, pues se está tomando en cuenta una relación que tiene historia entre China y Japón como naciones geográficamente cercanas.

En conclusión, el gobierno Japonés debe de tomar medidas para que aumente su PIB y ser más llamativo para las empresas extranjeras con el fin de atraer capital extranjero y aumentar su PIB y estar preparados para un gasto como lo es llevar un evento como lo son los juegos olímpicos. Se esperaría que con dicho evento ya hubiera aumentado su PIB por la difusión que tuvo en los pasados juegos de Brasil 2016 y durante el evento aumente más como sucedió en los juegos Olímpicos de China 2008 con Japón.

Apéndice A

Criterio Akaike

El criterio de información de Akaike (AIC) es una medida de la calidad relativa de un modelo estadístico, para un conjunto dado de datos. Como tal, el AIC proporciona un medio para la selección del modelo.

El análisis de regresión está basado en la estimación de ecuaciones generalizadas (EEG), es un método importante para el ajuste de modelos de regresión. El Akaike Information Criterion (AIC) no puede ser aplicado directamente ya que está basado en la función de máxima verosimilitud, es por eso que existan criterios disponibles en R como lo son el AICC (Akaike Information Corrected Criterion) y el BIC (Bayesian Information Criterion), por lo que los modelos en R para series de tiempo están ajustados con base en la función de máxima verosimilitud.

De manera general el AIC es calculado como:

$$AIC = -2\ln(L) + 2k.$$

En donde L es la función de verosimilitud y k el número de parámetros del modelo ajustado. El AIC mide la calidad del ajuste ya que además de verificar que se haya maximizado la verosimilitud supone un castigo por la utilización de un gran número de parámetros, ayudando de esta manera a escoger los modelos que presenten una menor parametrización. Para cada colección de parámetros fijos, el maximizar la función de verosimilitud equivale a minimizar el AIC. Es por ello que el procedimiento que se sigue para la elección del mejor modelo es encontrar el que reporte el menor AIC.

Apéndice B

Códigos en R para el PIB de Japón caso univariado

A continuación se escribe el código en R empleado para realizar el análisis en el PIB de Japón:

```
PIB<-read.table("PIB.csv",sep=" ",header=FALSE)
# Asigna los datos de Japón
jap1<-PIB[,1]
# Convierte el PIB a serie de tiempo
jap<-ts(jap1, frequency = 1, start = c(1960, 1))
# Gráfica el PIB de Japón
plot(jap, main="PIB de Japón")
# Calcula el logaritmo del PIB de Japón
Ljap<-log(jap)
# Calcula la diferencia y retraso
difl2jap<-diff(Ljap, lag = 1, differences = 2)
# Calcula la varianza en los datos
var(difl2jap)
# Gráfica la segunda diferencia del logaritmo
```

```

plot(difl2jap, main = "PIB Japón")
# Carga la librería tseries para la prueba Dickey-Fuller
library(tseries)
adf.test(difl2jap, k=0)
pp.test(difl2jap)
# Gráfica la ACF y PACF del PIB de Japón
# Sugiriendo q=0,1,2,3,4,5 y p=0,1,2,3,4,5,6,7
acf(difl2jap, main=". ACF Japón")
pacf(difl2jap, main="PACF Japón")
# Calcula el AIC y los valores de las variables
# Con el criterio AIC nos quedamos con el modelo ARIMA(2,2,3)
japar4=arima(Ljap,order=c(2,2,3),include.mean= FALSE)
# Calcula los residuos y Grafica ACF y PACF
residuales2=japar4$residuals
par(mfrow=c(2,1))
acf(residuales2, main=".ACF de residuos ARIMA(2,2,3)")
pacf(residuales2, main="PACF de residuos ARIMA(2,2,3)")
par(mfrow=c(1,1))
# Comprobamos la independencia en los residuos
Box.test(residuales2, type = c("Ljung-Box"))
# Gráfica el QQ-plot de la Normal en los residuales y su histograma
qqnorm(residuales2,main="Normal residuos")
qqline(residuales2)
hist(residuales2, main= "Histograma de residuos")
# se carga la libreria nortest para hacer la prueba Kolmogorov-Smirnov
library(nortest)

```

88 APÉNDICE B. CÓDIGOS EN R PARA EL PIB DE JAPÓN CASO UNIVARIADO

```
# Simula datos normales para compararlos con los residuos
simulados1=rnorm(1000,mean(residuales2),sd(residuales2))
ks.test(residuales2,simulados1)

# Emplea la prueba Anderson Darling
ad.test(residuales2)

# Emplea la prueba Shapiro-Francia
sf.test(residuales2)

# Emplea la prueba One Sample t Ho:μ = 0
t.test(residuales2, mu=0)

# Gráfica pruebas L-jung Box
tsdiag(japar4)

# Emplea la prueba Box-Pierce
Box.test(residuales2)

# Predice dentro de diez años el PIB de Japón
pred2=predict(japar4,interval=".confidence",n.ahead=10)
plot(difl2jap,type="l", main="PIB Japón 2020")
lines(pred2$pred,col=red")
lines(pred2$pred+1.96*pred2$se,col="blue",lty=3)
lines(pred2$pred-1.96*pred2$se,col="blue",lty=3)

# Vuelve a la serie original junto con la predicción y bandas de confianza
pred2=predict(japar4,interval=".confidence",n.ahead=10)
plot(difl2jap,type="l", main="PIB Japón 2020")
lines(pred2$pred,col=red")
lines(pred2$pred+1.96*pred2$se,col="blue",lty=3)
lines(pred2$pred-1.96*pred2$se,col="blue",lty=3)

Pred=c(difl2jap,pred2$pred)
```

```
I1=diffinv(Pred, xi = .1886923)
I2=diffinv(I1, xi = 24.51442)
Jap=exp(I2)
# Intervalo de confianza
Pred1=c(diff2jap,pred2$pred+1.96*pred2$se)
Pred2=c(diff2jap,pred2$pred-1.96*pred2$se)
I11=diffinv(Pred1, xi = .1886923)
I12=diffinv(Pred2, xi = .1886923)
I21=diffinv(I11, xi = 24.51442)
I22=diffinv(I12, xi = 24.51442)
Jap1=exp(I21)
Jap2=exp(I22)
JAP<-ts(Jap, frequency = 1, start = c(1960, 1))
JAP1<-ts(Jap1, frequency = 1, start = c(1960, 1))
JAP2<-ts(Jap2, frequency = 1, start = c(1960, 1))
plot(jap, main="Predicción de PIB")
lines(JAP,col=red")
lines(JAP1,col="blue",lty=3)
lines(JAP2,col="blue",lty=3)
lines(jap,col="black")
```

Apéndice C

Códigos en R para errores ARMA en el PIB de Japón

A continuación se escribe el código en R empleado para realizar el análisis en el PIB de Japón:

```
# Se cargan los datos  
PIB<-read.table("PIB.csv",sep=" ",header=FALSE)  
  
# Asigna los datos de Japón  
jap1<-PIB[,1]  
  
# Convierte el PIB a serie de tiempo  
jap<-ts(jap1, frequency = 1, start = c(1960, 1))  
  
# Grafica el PIB de Japón  
plot(jap, main="PIB de Japón")  
  
# Calcula el logaritmo del PIB de Japón  
Ljap<-log(jap)  
  
# Se calcula la segunda diferencia  
diff2jap <- diff(Ljap, lag = 1, differences = 2)  
  
# se carga la librería necesaria para el análisis gls.  
library(nlme)
```

```

#se saca la tendencia, para poder usarse en el análisis gls
tendencialj<-seq(1,length(Ljap))
regresi<-lm(difl2jap tendencialj)
acf(resid(regresi), lag.max=40, main=".ACF de los residuos PIB")
pacf(resid(regresi), lag.max=40, main="PACF de los residuos PIB")
# El método gls nos sugiere un ARIMA(1,2,2)
jp1<-gls(difl2jap~tendencialj,correlation=corARMA(p=1,
q=2),method="ML")
summary(jp1)
jp1=arima(Ljap,order=c(1,2,2))
jp1
# Se observa la significancia en las variables para construir el modelo
ARMA(1,2)
# ar1 Es significativo
liar1=0.9945-1.96*0.0073
lsar1=0.9945+1.96*0.0073
cbind(liar1,lsar1)
# ma1 Es significativo
liar1=0.5336-1.96*0.1058
lsar1=0.5336+1.96*0.1058
cbind(liar1,lsar1)
# ma2 Es significativo
liar1=0.6074-1.96*0.2584
lsar1=0.6074+1.96*0.2584
cbind(liar1,lsar1)
# Emplea una simulación para utilizar la prueba Kolmogorov-Smirnov
simulados3=rnorm(1000,mean(resid),sd(resid))

```

92 APÉNDICE C. CÓDIGOS EN R PARA ERRORES ARMA EN EL PIB DE JAPÓN

```
ks.test(resid,simulados3)
# Emplea la prueba Anderson Darling
ad.test(resid)
# Emplea la prueba Shapiro-Francia
sf.test(resid)
# Emplea la prueba One Sample t  $H_0:\mu=0$ 
t.test(resid,mu=0)
# Emplea la prueba Box-Pierce
Box.test(resid)
# Grafica pruebas L-jung Box
tsdiag(jp1)
# Se calcula la predicción de Japón por 10 años
jp1=arima(Ljap,order=c(1,2,2))
preder=predict(jp1,interval=".confidence",n.ahead=10)
# Se grafican los datos en la serie modificada
plot(Ljap,type="l", main="PIB L Japón 2020")
lines(preder$pred,col=red")
lines(preder$pred+1.96*preder$se,col="blue",lty=3)
lines(preder$pred-1.96*preder$se,col="blue",lty=3)
# Se regresa a la serie original y lo grafica
Pred1=c(Ljap,preder$pred)
Pred11=c(Ljap,preder$pred+1.96*preder$se)
Pred21=c(Ljap,preder$pred-1.96*preder$se)
jap11 = exp(Pred1)
jap111 = exp(Pred11)
jap121 = exp(Pred21)
```

```
JAP1<-ts(jap11, frequency = 1, start = c(1960, 1))  
JAP11<-ts(jap111, frequency = 1, start = c(1960, 1))  
JAP21<-ts(jap121, frequency = 1, start = c(1960, 1))  
plot(jap, main="Predicción de PIB error ARMA(1,2)")  
lines(JAP1,col=red)  
lines(JAP11,col="blue",lty=3)  
lines(JAP21,col="blue",lty=3)  
lines(jap, col="black")
```

Apéndice D

Códigos en R para ajustar un modelo VAR para el PIB de China y Japón

A continuación se escribe el código en R empleado para realizar el análisis multivariado en el PIB de China y Japón.

Lee y asigna los datos recabados en la base de datos del Banco Mundial del año 1960-2015

```
PIB<-read.table("PIB.csv",sep=" ",header=FALSE)
```

```
# Asigna los datos de china y japon y se toman como serie de tiempo
```

```
jap1<-PIB[,1]
```

```
chn1<-PIB[,2]
```

```
jap<-ts(jap1, frequency = 1, start = c(1960, 1))
```

```
chn<-ts(chn1, frequency = 1, start = c(1960, 1))
```

```
# Grafica los datos del PIB de China y Japón
```

```
plot(chn, main = "PIB de China y Japón")
```

```
lines(jap,col= red")
```

Se analiza graficamente la correlación en los datos con la gráfica de dispersión

```

pairs(PIB, main="Gráfica de dispersión entre Japón y China")
# Pruebas de Correlación para ambas colas, derecha e izquierda.
cor.test(jap,chn,method="pearson",alternative = "two.side", conf.level = 0.95)
cor.test(jap,chn,method="pearson",alternative = "g", conf.level = 0.95)
cor.test(jap,chn,method="pearson",alternative = "l", conf.level = 0.95)
cor.test(jap,chn,method="spearman",alternative = "two.side", conf.level =
0.95)
cor.test(jap,chn,method="spearman",alternative = "g", conf.level = 0.95)
cor.test(jap,chn,method="spearman",alternative = "l", conf.level = 0.95)
cor.test(jap,chn,method="kendall",alternative = "two.side", conf.level = 0.95)
cor.test(jap,chn,method="kendall",alternative = "g", conf.level = 0.95)
cor.test(jap,chn,method="kendall",alternative = "l", conf.level = 0.95)
# Transformación logarítmica y diferencia en los datos del PIB de China y
Japón
# Así como su varianza
Ljap<-log(jap)
Lchn<-log(chn)
dif2ljap<-diff(Ljap, lag = 1, differences = 2)
dif2lchn<-diff(Lchn, lag = 1, differences = 2)
var(dif2ljap)
var(dif2lchn)
# Grafico de la serie estacionaria
plot(dif2ljap,main="PIB de Japón")
plot(dif2lchn,main="PIB de China")
# Se unen las dos series en una sola tipo data frame, quedando con nombre
dif2ljap y dif2lchn
dif2LPIB <- data.frame(dif2ljap, dif2lchn)

```

96 APÉNDICE D. CÓDIGOS EN R PARA AJUSTAR UN MODELO VAR PARA EL PIB DE CHINA Y

```
# Cargar el paquete vars que sirve para ajustar modelos multivariados tipo VAR
library(vars)

# Sacar la varianza y correlación de los datos.
var(dif2LPIB)
cor(dif2LPIB)

# ACF y PACF de la diferencia del logaritmo de China y Japón como un solo
tipo.
acf(dif2LPIB)
pacf(dif2LPIB)

# Para hacer una selección del mejor modelo. Nos proporciona 4 criterios: AIC,
BIC (llamado SC) FPE (error de predicción final) y el criterio de Hannan-Quinn
(HQ). En todos los casos

# se busca minimizar. Pero Se usará el criterio AIC como en el caso univariado
VARselect(dif2LPIB, lag.max=10, type="const")

# Se ajusta un VAR(2), sacando los valores del modelo VAR(2)
VAR2<-VAR(dif2LPIB, p=2, type="const")
summary(VAR2)

# Calcula las ACF de los residuales del modelo propuesto VAR(2)
acf(resid(VAR2),30)

# Las raíces son calculadas y menores a 1 por lo que se podría decir que es
estable
roots(VAR2)

# Se grafica la estabilidad
VAR2.stab<-stability(VAR2)
plot(VAR2.stab)

# Prueba de heteroscedasticidad
VAR2arc<-arch.test(VAR2)
```

```

VAR2arc
# Se prueba que se distribuye normal
VAR2nor<-normality.test(VAR2)
VAR2nor
# Se prueba que se distribuye normal
VAR2ad<-ad.test(VAR2)
VAR2ad
# Se hace la prueba de que estén autocorrelacionadas
serial.test(VAR2, type="PT.adjusted")
# El mejor modelo VAR(2) se hace la predicción 10 años para Japón 2020
VAR2.pr<-predict(VAR2, n.ahead = 10 , ci = .95)
VAR2.pr
# Gráfica la predicción hecha con el modelo VAR(2)
fanchart(VAR2.pr)
plot(VAR2.pr)
# Gráfica de la predicción en la serie original, con bandas de confianza
# Se concatenan los datos del PIB de Japón con los datos predichos y
# se utiliza el mismo código que en el caso univariado
j.Pre<-c(dif2ljap, -0.022371706, 0.021275118, -0.016660395, -0.003048945,
-0.001761228, -0.006585773, -0.003361282, -0.004359786, -0.004596834,
-0.004102352)
j.Pre1<-c(dif2ljap, -0.2404022, -0.2091907, -0.2531482, -0.2440845,
-0.2429600, -0.2479225, -0.2447725, -0.2457808, -0.2460199, -0.2455262)
j.Pre2<-c(dif2ljap,0.1956588, 0.2517409, 0.2198274, 0.2379867, 0.2394375,
0.2347509, 0.2380499,0.2370613, 0.2368262, 0.2373215)
II=diffinv(j.Pre, xi = .1886923)
III=diffinv(j.Pre1, xi = .1886923)

```

98 APÉNDICE D. CÓDIGOS EN R PARA AJUSTAR UN MODELO VAR PARA EL PIB DE CHINA Y

```
II2=diffinv(j.Pre2, xi = .1886923)
II=diffinv(II, xi = 24.51442)
III=diffinv(III, xi = 24.51442)
II2=diffinv(II2, xi = 24.51442)
JapM=exp(II)
JapM1=exp(III)
JapM2=exp(II2)
JAPM<-ts(JapM, frequency = 1, start = c(1960, 1))
JAPM1<-ts(JapM1, frequency = 1, start = c(1960, 1))
JAPM2<-ts(JapM2, frequency = 1, start = c(1960, 1))
plot(jap, main="Predicción de PIB multivariado Japón 2020")
lines(JAPM,col=red")
lines(JAPM1,col="blue",lty=3)
lines(JAPM2,col="blue",lty=3)
```

Bibliografía

- [1] MASAO NAKAMURA, *The Japanese Business and Economic System: history and prospects for the 21st century*, Houndmills, Basingstoke, Hampshire: Palgrave, 2000.
- [2] FRANÇOISE LEMOINE ; traducción DE MARÍA HERNÁNDEZ P. WOLFE, *La economía China*, editorial Alianza, Madrid, 2007.
- [3] ÀNGELS PELEGRÍN SOLÉ y AMADEU JENSANA TANEHASHI ; *Economía de Japón*, editorial Barcelona, España: Universitat Oberta de Catalunya, 2011.
- [4] ANA LUISA GRAUE RUSSEK, *Introducción a la economía*, editorial Pearson, México, 2014.
- [5] PETER J. BROCKWELL y RICHARD A. DAVIS, *Introduction to time series and forecasting*, editorial Springer Verlag, New York, 2002.
- [6] ROB J. HYNDMAN y GEORGE ATHANASOPOULOS, *Forecasting: Principles and practice*, Mayo 2012, en dirección electrónica: <http://otexts.com/fpp/>.
- [7] GUERRERO-GUZMÁN, *Análisis estadístico de series de tiempo económicas*, Thompson 2ª edición, México, 2003.
- [8] WEI, WILLIAM W.S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, Pearson Addison Wesley 2ª edición, Boston, 2006.
- [9] JONATHAN D. CRYER y KUNG-SIK CHAN, *Time Series Analysis: With Applications in R*, Springer, New York, 2010.
- [10] PAUL S. P. COWPERTWAIT y ANDREW V. METCALFE, *Introductory Time Series with R*, Springer Verlag, Dordrecht, 2009.
- [11] ROBERT H. SHUMWAY y DAVID S. STOFFER, *Time Series Analysis and Its Applications*, Springer 4ª edición, Suiza:Cham, 2013.

- [12] BANCO MUNDIAL, *Producto Interno Bruto Mundial*, 1960-2015. Base de datos disponible en: <http://datos.bancomundial.org/indicador/NY.GDP.MKTP.CD>
- [13] BERNHARD PFAFF VAR, *SVAR and SVEC Models: Implementation Within R Package vars*, Volume 27, Issue 4, July 2008, disponible en: <http://www.jstatsoft.org/>
- [14] PABLO BUSTELO *El terremoto de Tohoku (Japón) de marzo de 2011: implicaciones económicas (ARI)*, Abril 2011 disponible en: <http://biblioteca.ribei.org/2085/1/ARI-72-2011.pdf>