



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Correcciones radiativas desde la  
perspectiva de la Electrodinámica  
Estocástica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**FÍSICO**

PRESENTA:

**JOSÉ FRANCISCO PÉREZ BARRAGÁN**

TUTOR:

**DR. LUIS DE LA PEÑA AUERBACH**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. DE MÉXICO, 2017





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Pérez  
Barragán  
José Francisco  
(55) 31 89 40 74  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
412005691
2. Datos del tutor  
Dr.  
Luis Fernando  
de la Peña  
Auerbach
3. Datos del sinodal 1  
Dr.  
Adonis Germinal  
Cocho  
Gil
4. Datos del sinodal 2  
M. en C.  
José Luis  
Jiménez  
Ramírez
5. Datos del sinodal 3  
Dra.  
Mirna  
Villavicencio  
Torres
6. Datos del sinodal 4  
Dr.  
Jaime  
Avendaño  
López
7. Datos del trabajo escrito  
Correcciones radiativas desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica  
155 pp  
2017

*A mis padres,  
Jenny y José Francisco.*



# Agradecimientos

El presente trabajo, que representa la conclusión de mis estudios profesionales, no hubiese sido posible sin las enseñanzas, los consejos y el apoyo que me han dado a lo largo de mi vida mi familia y mis profesores. A todos ellos les estoy infinitamente agradecido.

Al Dr. Luis de la Peña, por guiarme a lo largo de la elaboración de esta tesis y por haber sido el profesor que me mostró la belleza y los misterios de la mecánica cuántica. Gracias por todo el conocimiento que usted compartió conmigo estos años, y por la paciencia, tiempo y apoyo que me brindó durante la realización de este trabajo.

A mis sinodales, los doctores Mirna Villavicencio, Germinal Cocho, José Luis Jiménez y Jaime Avendaño, por el tiempo invertido en la revisión de mi tesis. Gracias por sus consejos y contribuciones invaluable que hicieron de este trabajo el mejor posible.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias, por presentarme y enseñarme la física. Gracias por haberme ayudado a desarrollar las capacidades necesarias para poderme llamar científico. En memoria de la Dra. Vivianne Marquina.

A mis padres, Jenny y José Francisco, por todo el amor, cariño y apoyo incondicionales que me han dado, y me siguen dando. Ustedes son las personas que más admiro, pues me enseñaron que con esfuerzo y dedicación se alcanzan los sueños. A ustedes les debo lo que soy como persona. Este es nuestro logro. Gracias mamá y papá.

A mi hermana, Laura Sophia, por ser mi compañera de aventuras desde pequeños y mi primera estudiante. Gracias por haberme ayudado a descubrir el gusto por la docencia. Que este trabajo sea una motivación para ti.

A mis abuelos, Genny, Minelia, Raúl y José, por haberme enseñado, consentido y cuidado tanto. Gracias por ser mis otros padres.

A Brenda Abril, mi novia, amiga y colega, por el amor y el cariño que me das a diario. Gracias por todos estos años de estudio, discusiones y aprendizaje que no solo permitieron la corrección y el mejoramiento de esta tesis, sino que también me han hecho el científico que soy hoy en día.

A mi *alma máter*, la Universidad Nacional Autónoma de México, su Facultad de Ciencias y su Instituto de Física, por darme la oportunidad de desarrollarme y desenvolverme como profesionista, científico y ser humano. Gracias por haber sido mi segundo hogar todos estos años.

# Índice general

Índice general	VII
Índice de figuras	XI
Introducción	1
<b>1. El campo electromagnético del vacío</b>	<b>5</b>
1.1. Descripción estadística del CPC . . . . .	5
1.1.1. Correlaciones a un punto . . . . .	6
1.1.2. Correlaciones a dos puntos . . . . .	8
1.1.3. Momentos estadísticos de orden superior . . . . .	15
<b>2. Interacción entre la materia y el campo de radiación de punto cero</b>	<b>17</b>
2.1. La ecuación de movimiento de la EDE . . . . .	18
2.2. La ecuación generalizada de Fokker-Planck . . . . .	20
2.2.1. La aproximación markoviana . . . . .	24
2.2.2. Relaciones entre los valores medios . . . . .	26
2.3. Transición al espacio de configuración . . . . .	31
2.4. La ecuación generalizada de Schrödinger . . . . .	37
2.4.1. El régimen no radiativo . . . . .	39
2.4.2. Promedios estadísticos y cuánticos . . . . .	42
2.4.3. El límite estacionario . . . . .	44
2.4.4. Balance energético: la constante de Planck . . . . .	45



<b>3. Correcciones radiativas</b>	<b>51</b>
3.1. Transiciones radiativas . . . . .	52
3.2. Rompimiento del balance energético . . . . .	54
3.2.1. El oscilador armónico cuántico unidimensional . . . . .	55
3.3. Tiempos de vida atómicos: los coeficientes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de Einstein . . . . .	57
3.3.1. El decaimiento espontáneo . . . . .	59
3.3.2. La distribución de Planck . . . . .	60
3.4. Tasas de cambio de otras integrales de movimiento del subsistema mecánico . . . . .	61
3.5. Correcciones radiativas a la energía: el corrimiento Lamb . . . . .	64
3.5.1. El significado del efecto Lamb . . . . .	69
3.5.2. Interpretaciones alternativas . . . . .	70
3.6. Efectos externos en las correcciones radiativas . . . . .	72
3.6.1. Correcciones ambientales en los tiempos de vida atómicos . . . . .	72
3.6.2. Correcciones ambientales en los niveles de energía . . . . .	74
<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>A. Principios básicos de la teoría electromagnética</b>	<b>79</b>
A.1. Potenciales electromagnéticos . . . . .	81
A.2. El teorema de Helmholtz . . . . .	82
A.3. Las transformaciones de norma . . . . .	85
<b>B. Descomposición en modos normales</b>	<b>89</b>
B.1. Energía del campo electromagnético . . . . .	90
B.2. Desarrollo en términos de ondas planas . . . . .	92
<b>C. La densidad espectral del campo de radiación de punto cero</b>	<b>97</b>
C.1. Termodinámica de un oscilador armónico . . . . .	97
C.2. La ley de Wien . . . . .	100
<b>D. Contenido energético del campo de radiación de punto cero</b>	<b>105</b>

E. Desarrollo y nociones históricas del campo electromagnético del vacío	109
F. La electrodinámica de una carga puntual	117
G. La ecuación de Abraham-Lorentz	123
G.1. La masa electromagnética y la reacción radiativa . . . . .	126
G.2. Introducción de la regla de corte . . . . .	129
H. La descripción de Heisenberg	131
Bibliografía	137



# Índice de figuras

2.1.	Densidad radial de probabilidad como función del radio. La línea sólida muestra el resultado obtenido a partir de la ecuación de Schrödinger para el estado base del hidrógeno. Las curvas punteadas muestran los resultados obtenidos por Cole y Zou mediante simulaciones numéricas a través de promedios temporales de sus corridas de datos desde un tiempo $t = 0$ hasta el tiempo promedio indicado: a) $1.417 \times 10^{-12}$ s; b) $4.500 \times 10^{-12}$ s; c) $5.705 \times 10^{-12}$ s y d) $7.252 \times 10^{-12}$ s. . . . .	19
3.1.	Comportamientos de las funciones de onda correspondientes a los cuatro estados estacionarios de menor energía del oscilador armónico cuántico unidimensional como funciones de la posición, para el valor $m\omega_0/\hbar = 1$ . . . . .	56
3.2.	Esquema ilustrativo de los niveles de energía del átomo de hidrógeno para los estados con $n = 1, 2, 3$ . En a) se muestran los niveles predichos por la teoría de Schrödinger. En b) se muestran los niveles energéticos al tomar en cuenta las correcciones relativistas y el acoplamiento espín-órbita. Finalmente, en c) se muestran los resultados experimentales y el efecto Lamb entre los niveles atómicos $2s_{1/2}$ y $2p_{1/2}$ . . . . .	65
C.1.	Interpretación geométrica de $\kappa^2 = (4\pi^2/\ell^2)(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ . . . . .	102
E.1.	Energía de un oscilador elemental en equilibrio con el campo de radiación, según las teorías de Planck y de Rayleigh-Jeans, como función de la temperatura, para los valores $\hbar\omega = 1$ y $k_B = 1$ . Nótese que ambas descripciones convergen al mismo comportamiento en el límite de altas temperaturas. . . . .	110
E.2.	Densidad espectral de energía del campo de radiación, de acuerdo con los resultados obtenidos por Planck y por la física clásica, como función de la frecuencia, para los valores $k_B T = 1$ , $\hbar = 1$ , $\pi = 1$ y $c = 1$ . . . . .	112

- E.3. Factor de Debye-Waller, según si se considera la energía de punto cero en conjunto con la energía térmica o solamente la componente térmica, como función de la temperatura, para los valores  $\hbar = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $K = 1$ ,  $m = 1$  y  $k_B = 1$ . Es notable para el caso puramente térmico, que cuando  $T = 0$  se tiene que el factor de Debye-Waller es igual a la unidad, es decir, no predice un difuminado en los patrones de difracción. . . . . 114
- G.1. Representación gráfica de la fuerza  $F(t) = \sin(t)$  y la correspondiente aceleración obtenida a partir de la ecuación de Abraham-Lorentz. El efecto de la preaceleración se ha magnificado al tomar los valores de los parámetros  $m = 1$  y  $\tau = 1$ . . . . . 128

# Introducción

La mecánica cuántica es uno de los pilares fundamentales de la física contemporánea. Esta disciplina ha brindado, a lo largo de sus más de 100 años de existencia, resultados que han ayudado a describir y comprender la parte del universo que pertenece a sus dominios, que actualmente se extienden más allá del mundo atómico que originalmente pretendía explicar; cubriendo parte del mundo macroscópico y subatómico [32]. El éxito científico, tecnológico e incluso económico de la mecánica cuántica es simplemente innegable, y puede observarse a simple vista en aparatos que son producto de sus resultados y predicciones; tales como los reactores nucleares y los teléfonos celulares.

Sin embargo, a pesar de su gran número de éxitos, existen algunas cuestiones en la mecánica cuántica, tanto físicas como conceptuales y filosóficas, que aún no han sido satisfactoriamente resueltas, al menos no para algunos físicos. Unos cuantos de los misterios sin resolver de la teoría cuántica son: su carácter indeterminista, ya que sus leyes dinámicas evolucionan de forma determinista, pero es incapaz de predecir eventos individuales [32]; su acausalidad, cuyo mejor ejemplo reside en las inevitables e irreducibles fluctuaciones cuánticas [32]; la no localidad, ilustrada en un inicio por el teorema de Einstein-Podolsky-Rosen y hoy en día por las desigualdades de Bell [6, 44]; el ser una teoría de observables, ya que en esta carece de sentido el valor de una variable física del sistema hasta que su medición haya sido realizada [32]; o el conocido postulado del colapso de la función de onda, ejemplificado por el gato de Schrödinger [25, 32].

Otro problema fundamental de la mecánica cuántica es el número de interpretaciones físicas que se le han atribuido a su formalismo. La interpretación de una teoría asigna un significado empírico y concreto a los términos en el modelo teórico [32]. En este sentido, debido al significado físico que se le asigna a la función de onda, puede distinguirse entre dos corrientes principales de interpretación de la mecánica cuántica: las interpretaciones de Copenhagen y la estadística. La interpretación de Copenhagen, u ortodoxa, postula que un estado puro proporciona la descripción más completa y exhaustiva posible de un sistema individual [32]. Por su parte, la interpretación estadística, o de *ensemble*, establece que la función de onda se refiere a un ensamble teórico de sistemas igualmente preparados [4, 32]; tal que la descripción dada por  $\psi$  sobre los sistemas individuales que conforman el ensamble estadístico resulta incompleta y no exhaustiva [32].

Adicionalmente a estos problemas, existen algunas razones *a posteriori* para afirmar que la mecánica cuántica tiene límites de aplicabilidad, incluso dentro de sus dominios. Ejemplo de esto es la predicción mecanocuántica sobre la estabilidad de los estados energéticos de un sistema, la cual afirma que todos los estados propios del hamiltoniano son estacionarios, es decir, de vida media infinita, cuando en realidad sucede que solo el estado base es estable, teniendo los estados excitados vidas medias finitas [25]. Lo anterior revela que la descripción del sistema que hace la teoría de Schrödinger es incompleta y no meramente aproximada. Esta deficiencia de la teoría puede corregirse al introducir, de manera un tanto *ad hoc*, el acoplamiento del sistema mecanocuántico con un campo electromagnético cuantizado. Sin embargo, dicha introducción formalmente se escapa de los métodos usuales de la mecánica cuántica, siendo usualmente esta la transición a la electrodinámica cuántica [25].

La electrodinámica cuántica es, precisamente, la teoría física desde la que se obtienen de manera natural las vidas medias de los estados excitados de los sistemas cuánticos [25]. Aunado a estas vidas medias, la electrodinámica cuántica es capaz de describir otras correcciones radiativas, nombre genérico dado a las correcciones en las variables dinámicas originadas por la interacción del sistema mecanocuántico con el campo de radiación, como el corrimiento Lamb y el momento anómalo del electrón [77]. Sin embargo, a pesar de su gran capacidad predictiva, la electrodinámica cuántica resulta ser una teoría compleja, y muchas veces poco clara, que hereda los defectos fundamentales de la mecánica cuántica, sumándole a estos, problemas propios como el de la energía infinita asociada al campo electromagnético del vacío [28].

La electrodinámica estocástica o EDE, teoría conocida en el mundo angloparlante como *Stochastic Electrodynamics* o *SED*, es una formulación alternativa de la mecánica cuántica, en proceso de construcción, que explica la cuantización como un fenómeno emergente, generado por un proceso electromagnético estocástico más fundamental. Esta teoría permite esclarecer algunos de los pilares de la teoría cuántica, como el mecanismo de estabilidad atómica, la naturaleza de las llamadas fluctuaciones cuánticas, el significado de la no localidad cuántica, al menos para distancias de escala molecular, e incluso la interpretación física de la función de onda, dentro de un marco teórico autoconsistente que reafirma los principios fundamentales de la ciencia, como son el realismo, la causalidad y la localidad. La virtud de la EDE, sobre otras formulaciones heterodoxas, es que ofrece una perspectiva del mundo cuántico desde fuera de él, arribando al formalismo cuántico desde un cimiento físico bien definido, obteniéndose, de esta forma, la interpretación de la física y no la física de la interpretación [32]. Concretamente, la EDE explora la idea de que el comportamiento cuántico puede ser entendido como una consecuencia de la interacción entre la materia y el campo de radiación de punto cero [28]. Este tratamiento, en el que la materia y el campo de fondo son considerados como elementos inseparables de un sistema físico más grande, permite que la electrodinámica estocástica vaya más allá del dominio de la mecánica cuántica de forma autoconsistente [32]. Así, la EDE brinda los elemen-

tos necesarios para el estudio de la absorción y emisión de radiación, y las correcciones radiativas a la dinámica del subsistema mecánico que de estas emergen.

El objetivo de esta tesis es deducir la electrodinámica estocástica desde principios físicos fundamentales, a partir de una revisión de sus resultados más notorios, mostrando que esta converge a la mecánica cuántica bajo ciertas condiciones, tal que a partir de ella se puedan deducir las correcciones radiativas predichas por la electrodinámica cuántica no relativista para los tiempos de vida atómicos y el corrimiento Lamb. Para esto, se partirá de los fundamentos del electromagnetismo clásico y la termodinámica, específicamente de la ecuación de Abraham-Lorentz y de la ley de Wien para una cavidad radiante, con el fin de obtener una descripción estadística del principio físico fundamental de la electrodinámica estocástica: el campo de radiación de punto cero. Posteriormente se mostrará que, utilizando los resultados anteriores junto con un tratamiento estadístico, la EDE se reduce a la descripción cuántica al tomar los límites no radiativo y temporal asintótico; y las condiciones de balance energético y ergodicidad. Finalmente, se utilizarán los términos radiativos deducidos, que fueron despreciados en el límite no radiativo, para llegar a expresiones cerradas de las correcciones radiativas mencionadas anteriormente.

Estrictamente hablando, la teoría estudiada en el presente trabajo es conocida como electrodinámica estocástica lineal o EDEL; siendo la EDE una teoría pionera que logró obtener con éxito muchas predicciones cuánticas, que, sin embargo, mostró con el tiempo que sus métodos, más no sus principios, limitaban su capacidad predictiva, brindando resultados equivocados a problemas no lineales. Habiendo fallado la electrodinámica estocástica en proveer una descripción correcta del fenómeno cuántico en general, surge la EDEL como teoría alternativa que permite superar las dificultades de su antecesora [97]. A lo largo de la presente tesis, se referirá a la electrodinámica estocástica lineal como simplemente electrodinámica estocástica, aclarando que se trata de la versión moderna de esta última y no a la teoría originalmente conocida como EDE.





# Capítulo 1

## El campo electromagnético del vacío

*Los principios fundamentales del universo  
son los átomos y el vacío;  
todo lo demás solo se piensa que existe.*

- Demócrito -

El campo electromagnético del vacío, campo de radiación de punto cero o CPC, en inglés *Zero-Point Radiation Field* o *ZPF*, es el nombre asignado a la componente electromagnética del conjunto de campos aleatorios de punto cero existentes en ausencia total de materia [28]. Contrario a la suposición clásica, la cual afirma que en ausencia de fuentes, *i. e.*, de cargas y corrientes eléctricas, no existe campo electromagnético, la noción de campo de radiación de punto cero propone una solución más general a las ecuaciones de Maxwell en el vacío, la cual resulta de la imposición de condiciones a la frontera mejor adaptadas para la descripción de un sistema físico abierto [10]. En este capítulo se desarrollarán las propiedades estadísticas del principio físico fundamental de la electrodinámica estocástica: el CPC, a partir de resultados del electromagnetismo clásico y la termodinámica.

### 1.1. Descripción estadística del CPC

Una de las principales suposiciones sobre el campo de radiación de punto cero en el espacio vacío, es que es altamente desordenado al ser originado por una cantidad inmensa de fuentes externas. Esto implica que el CPC es altamente incoherente, lo que ayuda a explicar que sus efectos son esencialmente inobservables a escalas macroscópicas [28]. La condición anterior, en conjunto con el hecho de que la energía media por modo del CPC es proporcional a su frecuencia de oscilación [28], permiten construir una descripción estadística completa del mismo.

### 1.1.1. Correlaciones a un punto

Supóngase que se efectúa una medición con un tiempo corto de duración  $\tau$ , durante el cual se realiza un promedio temporal de los campos eléctrico y magnético,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  respectivamente, del CPC; debido a la no observabilidad de dichos campos se tiene que sus promedios temporales deben ser nulos [28], es decir,

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dt = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dt = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{r}$  denota la posición,  $t$  el tiempo, y  $\tau$  una cantidad grande comparada con los tiempos atómicos relevantes. En el mismo sentido, puede considerarse que los campos electromagnéticos son, en cada instante, una realización posible de las infinitas realizaciones contenidas en el ensamble estadístico. En este caso, el carácter puramente aleatorio de estos campos implica que el promedio sobre todas las realizaciones es cero [10, 27],

$$\overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} = \mathbf{0}, \quad \overline{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)} = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

donde  $\bar{\zeta}$  expresa el promedio de la cantidad  $\zeta$  sobre todas las realizaciones posibles de las variables aleatorias del ensamble.

Un resultado fundamental de la teoría electromagnética clásica, que se deduce en el apéndice A, es que, en la norma de Coulomb y en ausencia total de materia, los campos eléctrico y magnético pueden ser descritos en términos de un único potencial electromagnético, el llamado potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Aunado a esto, bajo las condiciones mencionadas, es posible expresar tanto el potencial vectorial magnético como los campos eléctrico y magnético en términos de sus modos normales de oscilación, como se muestra en el apéndice B. Así, de la ecuación (B.42) se tiene que el vector potencial magnético se describe, en coordenadas cartesianas, como

$$\mathbf{A} = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}}}{2\epsilon_0\omega_{\boldsymbol{\kappa}}^2 V}} (a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t} + a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t}) \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda, \quad (1.3)$$

donde  $\boldsymbol{\kappa}$  denota el vector de onda,  $\lambda$  el índice de polarización y  $\omega_{\boldsymbol{\kappa}}$  la frecuencia de oscilación asociados a cada modo de oscilación del campo;  $V$  representa el volumen de la cavidad en la que se realizó la descomposición en modos normales. Las amplitudes de la expresión (1.3), representadas como  $a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}$  y  $a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^*$ , son consideradas variables aleatorias, de tal modo que se supone que toda la estocasticidad del vector potencial  $\mathbf{A}$  proviene del conjunto de variables  $\{a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}, a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^*\}$  [28]. Adicionalmente, de la ecuación (B.22) se tiene que el promedio de la función hamiltoniana  $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}$ , asociada a cada modo, cumple que

$$\overline{\mathcal{H}_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}} = \mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}} \overline{|a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}|^2} = \mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (1.4)$$

lo que implica que  $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}}$  representa la energía media de cada modo de oscilación, y que la escala de los coeficientes  $a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}$  se ha elegido de tal forma que

$$\overline{|a_{\kappa,\lambda}|^2} = 1. \quad (1.5)$$

Como ya se mencionó, una propiedad característica del campo de radiación de punto cero, que se deduce en el apéndice C a partir de la ley de Wien para una cavidad radiante, es que la energía media de cada modo normal del campo es proporcional a su frecuencia de oscilación, tal que de la ecuación (C.24) se tiene que  $\mathcal{E}_{\kappa} = \mathcal{A}\omega_{\kappa}$ , donde la constante de proporcionalidad  $\mathcal{A}$  posee al valor  $\hbar/2$ . Es importante aclarar que, por la forma en la que se obtiene este resultado en el apéndice C, la presencia de  $\mathcal{A}$  en los resultados presentados no conlleva ninguna connotación cuántica. Así, la ecuación (1.3) se rescribe, para el caso particular del CPC, como

$$\mathbf{A} = \sum_{\kappa,\lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{2\epsilon_0\omega_{\kappa}V}} (a_{\kappa,\lambda}e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}-i\omega_{\kappa}t} + a_{\kappa,\lambda}^*e^{-i\kappa\cdot\mathbf{r}+i\omega_{\kappa}t}) \check{\mathbf{e}}_{\kappa}^{\lambda}. \quad (1.6)$$

Análogamente, de las ecuaciones (B.43) y (B.47), se tiene que los campos eléctrico y magnético del CPC pueden expresarse, en términos de sus modos normales, como:

$$\mathbf{E} = i \sum_{\kappa,\lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{A}\omega_{\kappa}}{2\epsilon_0V}} (a_{\kappa,\lambda}e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}-i\omega_{\kappa}t} - a_{\kappa,\lambda}^*e^{-i\kappa\cdot\mathbf{r}+i\omega_{\kappa}t}) \check{\mathbf{e}}_{\kappa}^{\lambda}; \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B} = i \sum_{\kappa,\lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{A}\omega_{\kappa}}{2\epsilon_0c^2V}} (a_{\kappa,\lambda}e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}-i\omega_{\kappa}t} - a_{\kappa,\lambda}^*e^{-i\kappa\cdot\mathbf{r}+i\omega_{\kappa}t}) (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\kappa}^{\lambda}). \quad (1.8)$$

Dado que los campos expuestos en las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) describen el campo electromagnético del vacío, sus promedios deben ser iguales a cero, como se mencionó anteriormente. Por esto, las amplitudes  $a_{\kappa,\lambda}$ , correspondientes a los diferentes modos del campo libre, se suponen como estadísticamente independientes [27], de forma que cada amplitud promedia por separado a cero, es decir,

$$\overline{a_{\kappa,\lambda}} = 0, \quad \overline{a_{\kappa,\lambda}^*} = 0, \quad (1.9)$$

así como el producto de dos amplitudes cualesquiera correspondientes a diferentes modos del campo. Con base en esto, en conjunto con la ecuación (1.5), se llega a que

$$\overline{a_{\kappa,\lambda}^*a_{\kappa',\lambda'}} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\kappa\kappa'}, \quad (1.10)$$

donde además se cumplen:

$$\overline{a_{\kappa,\lambda}a_{\kappa',\lambda'}} = 0; \quad \overline{a_{\kappa,\lambda}^*a_{\kappa',\lambda'}^*} = 0. \quad (1.11)$$

Adicionalmente, en el límite continuo,  $V \rightarrow \infty$ , utilizando nuevamente la ecuación (1.5), se obtiene que las amplitudes aleatorias satisfacen que

$$\overline{a_{\lambda}^*(\boldsymbol{\kappa})a_{\lambda'}(\boldsymbol{\kappa}')} = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{\delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}')}{|a_{\kappa,\lambda}|^2} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'). \quad (1.12)$$

Como se menciona al final del apéndice B, existen situaciones en las que es conveniente describir el potencial vectorial magnético y los campos electromagnéticos en términos del conjunto de variables canónicas  $\{q_{\kappa,\lambda}, p_{\kappa,\lambda}\}$ , definidas en las ecuaciones (B.49) y (B.50) como:

$$q_{\kappa,\lambda} \equiv i \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\kappa}}{2\omega_{\kappa}^2}} (a_{\kappa,\lambda} - a_{\kappa,\lambda}^*); \quad (1.13)$$

$$p_{\kappa,\lambda} \equiv \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\kappa}}{2}} (a_{\kappa,\lambda} + a_{\kappa,\lambda}^*). \quad (1.14)$$

Así, para el caso del campo electromagnético del vacío es inmediato notar que, de las ecuaciones (1.9) a (1.11), ambas variables canónicas promedian a cero,

$$\overline{q_{\kappa,\lambda}} = 0, \quad \overline{p_{\kappa,\lambda}} = 0, \quad (1.15)$$

y que no están correlacionadas,

$$\overline{q_{\kappa,\lambda} p_{\kappa,\lambda}} = 0. \quad (1.16)$$

De manera análoga, se tiene que los segundos momentos estadísticos, los cuales coinciden con las varianzas  $\sigma^2$  en este caso por la ecuación (1.15) [82], están dados por:

$$\overline{p_{\kappa,\lambda}^2} = \overline{p_{\kappa,\lambda}^2} - \overline{p_{\kappa,\lambda}}^2 \equiv \sigma_{p_{\kappa,\lambda}}^2 = \mathcal{E}_{\kappa} = \mathcal{A}\omega_{\kappa}, \quad (1.17)$$

$$\overline{q_{\kappa,\lambda}^2} = \overline{q_{\kappa,\lambda}^2} - \overline{q_{\kappa,\lambda}}^2 \equiv \sigma_{q_{\kappa,\lambda}}^2 = \frac{\mathcal{E}_{\kappa}}{\omega_{\kappa}^2} = \frac{\mathcal{A}}{\omega_{\kappa}}. \quad (1.18)$$

Al tomar el producto directo de las varianzas de las variables canónicas  $p_{\kappa,\lambda}$  y  $q_{\kappa,\lambda}$  del CPC, y al sustituir el valor de la constante  $\mathcal{A}$ , se llega a que

$$\sigma_{q_{\kappa,\lambda}}^2 \sigma_{p_{\kappa,\lambda}}^2 = \mathcal{A}^2 = \hbar^2/4. \quad (1.19)$$

El resultado expuesto en la última ecuación muestra explícitamente al CPC fluctuante como el origen último e irreducible de las llamadas fluctuaciones cuánticas [32]. La magnitud de este producto está acotada por debajo debido a la falta de contribuciones térmicas a las fluctuaciones, es decir, el valor mínimo  $\hbar^2/4$  es alcanzado únicamente cuando todas las fluctuaciones térmicas han sido eliminadas al alcanzar el límite de temperatura cero. La ecuación (1.19), obtenida a partir del estudio termodinámico de osciladores armónicos en equilibrio estadístico con el CPC hecho en el apéndice C, corresponde a las desigualdades de Heisenberg para el campo de radiación [25, 32, 97].

### 1.1.2. Correlaciones a dos puntos

Partiendo de los resultados deducidos en la sección anterior es posible obtener correlaciones a dos puntos que involucren diferentes componentes del campo electromagnético. Primeramente, usando los resultados de las ecuaciones de la (1.7) a la (1.11), se tiene que la correlación de dos puntos del campo eléctrico se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& \overline{E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}', t')} = \\
& = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}', \lambda, \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 V} \overline{(a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t)} - a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{\Delta(\mathbf{r}, t)}) (a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} e^{\Lambda(\mathbf{r}', t')} - a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}^* e^{\Lambda^*(\mathbf{r}', t')})} (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k, \\
& = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 V} \left( \overline{a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}} e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t) + \Lambda(\mathbf{r}', t')} + \overline{a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}^* a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}} e^{\Delta(\mathbf{r}, t) + \Lambda^*(\mathbf{r}', t')} \right) (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\
& = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 V} \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}'} \left( e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t) + \Lambda(\mathbf{r}', t')} + e^{\Delta(\mathbf{r}, t) + \Lambda^*(\mathbf{r}', t')} \right) (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\
& = \frac{\mathcal{A}}{2\epsilon_0 V} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \left( e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}}(t - t')} + e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}}(t - t')} \right) \sum_{\lambda} (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_k,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

donde se han definido las funciones  $\Delta(\mathbf{r}, t)$  y  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  como  $\Delta(\mathbf{r}, t) \equiv i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t$  y  $\Lambda(\mathbf{r}, t) \equiv i\boldsymbol{\kappa}' \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}'} t$ , respectivamente. La suma sobre el índice de polarización puede resolverse en términos de deltas de Kronecker [19, 27], de tal forma que, dado que para un campo electromagnético se tiene que  $\lambda = 1, 2$ , se obtiene que

$$\sum_{\lambda} (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_k = (e_j^1 e_k^1 + e_j^2 e_k^2 + e_j^3 e_k^3) - e_j^3 e_k^3 = \delta_{jk} - (\check{\boldsymbol{\kappa}})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}})_k. \tag{1.21}$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación (1.21) en (1.20) se tiene que la correlación a dos puntos entre componentes del campo eléctrico es

$$\overline{E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}', t')} = \frac{\mathcal{A}}{\epsilon_0 V} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}} (\delta_{jk} - (\check{\boldsymbol{\kappa}})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}})_k) \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} - \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t), \tag{1.22}$$

donde se han definido las diferencias  $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  y  $\Delta t \equiv t - t'$ .

Para el caso del campo magnético se procede de la misma forma, de modo que se arribe a que

$$\begin{aligned}
& \overline{B_j(\mathbf{r}, t) B_k(\mathbf{r}', t')} = \\
& = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 c^2 V} \overline{(a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t)} - a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{\Delta(\mathbf{r}, t)}) (a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} e^{\Lambda(\mathbf{r}', t')} - a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}^* e^{\Lambda^*(\mathbf{r}', t')})} \times \\
& \quad \times (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\
& = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 c^2 V} \left( \overline{a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}} e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t) + \Lambda(\mathbf{r}', t')} + \overline{a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}^* a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}} e^{\Delta(\mathbf{r}, t) + \Lambda^*(\mathbf{r}', t')} \right) \times \\
& \quad \times (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\
& = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 c^2 V} \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}'} \left( e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t) + \Lambda(\mathbf{r}', t')} + e^{\Delta(\mathbf{r}, t) + \Lambda^*(\mathbf{r}', t')} \right) (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\
& = \frac{\mathcal{A}}{2\epsilon_0 c^2 V} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \left( e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t} + e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t} \right) \sum_{\lambda} (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda)_k.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

En analogía a la ecuación (1.21), puede mostrarse que la suma sobre el índice de polarización de los productos vectoriales anteriores conduce a deltas de Kronecker [19],

$$\sum_{\lambda} (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_k = \delta_{jk} - (\check{\boldsymbol{\kappa}})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}})_k, \quad (1.24)$$

de forma que la correlación a dos puntos del campo magnético es

$$\overline{B_j(\mathbf{r}, t) B_k(\mathbf{r}', t')} = \frac{\mathcal{A}}{\epsilon_0 c^2 V} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}} (\delta_{jk} - (\check{\boldsymbol{\kappa}})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}})_k) \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} - \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t). \quad (1.25)$$

Por otro lado, la correlación entre un punto del campo eléctrico y un punto del campo magnético puede obtenerse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \overline{E_j(\mathbf{r}, t) B_k(\mathbf{r}', t')} &= \\ &= \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 c V} \overline{(a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t)} - a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{\Delta(\mathbf{r}, t)}) (a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} e^{\Lambda(\mathbf{r}', t')} - a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}^* e^{\Lambda^*(\mathbf{r}', t')})} \times \\ &\quad \times (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\ &= \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 c V} \left( \overline{a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'}} e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t) + \Lambda(\mathbf{r}', t')} + \overline{a_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}} e^{\Delta(\mathbf{r}, t) + \Lambda^*(\mathbf{r}', t')} \right) (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\ &= \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sum_{\boldsymbol{\kappa}', \lambda'} \frac{\mathcal{A} \sqrt{\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}'}}}{2\epsilon_0 c^2 V} \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}'} \left( e^{\Delta^*(\mathbf{r}, t) + \Lambda(\mathbf{r}', t')} + e^{\Delta(\mathbf{r}, t) + \Lambda^*(\mathbf{r}', t')} \right) (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}'}^{\lambda'})_k \\ &= \frac{\mathcal{A}}{2\epsilon_0 c V} \sum_{\boldsymbol{\kappa}} \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \left( e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t} + e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t} \right) \sum_{\lambda} (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_k. \end{aligned} \quad (1.26)$$

En este caso la suma sobre  $\lambda$  conduce a una suma que involucra el símbolo de Levi-Civita,  $\epsilon_{jkl}$ , y la magnitud de una de las componentes del vector  $\boldsymbol{\kappa}$  [19],

$$\sum_{\lambda} (\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_j (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_k = \sum_l \epsilon_{jkl} (\check{\boldsymbol{\kappa}})_l. \quad (1.27)$$

Utilizando la ecuación (1.27) se llega finalmente a que la correlación a dos puntos planteada es

$$\overline{E_j(\mathbf{r}, t) B_k(\mathbf{r}', t')} = \frac{\mathcal{A}}{\epsilon_0 c V} \sum_{\boldsymbol{\kappa}, l} \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \epsilon_{jkl} (\check{\boldsymbol{\kappa}})_l \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} - \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t). \quad (1.28)$$

El hecho de que las expresiones (1.22), (1.25) y (1.28) dependan únicamente de las diferencias  $\Delta \mathbf{r}$  y  $\Delta t$  es debido a la homogeneidad y el carácter estacionario de los campos [28]. Para tener una imagen más explícita de las correlaciones es conveniente tomar el límite continuo de las expresiones anteriores. De esta forma se obtiene que

$$\Gamma_{EE'} \equiv \overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')} = \frac{\mathcal{A} c}{4\pi^3 \epsilon_0} \int \kappa \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \Delta \mathbf{r} - \omega_{\boldsymbol{\kappa}} \Delta t) d^3 \kappa. \quad (1.29)$$

Si se elige, sin pérdida de generalidad, que  $\Delta \mathbf{r}$  corra a lo largo del eje  $z$ , se tiene que la ecuación (1.29) toma la siguiente forma

$$\Gamma_{EE'} = \frac{\mathcal{A}c}{4\pi^3\epsilon_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \kappa^3 \cos(\kappa\Delta r \cos\theta - \omega_\kappa\Delta t) \sin\theta d\theta d\vartheta d\kappa, \quad (1.30)$$

utilizando el cambio de variable  $\xi = \kappa\Delta r \cos\theta - \omega_\kappa\Delta t$ , tal que  $d\xi = -\kappa\Delta r \sin\theta d\theta$ , e integrando sobre el ángulo azimutal  $\vartheta$ , se llega a

$$\Gamma_{EE'} = \frac{\mathcal{A}c}{2\pi^2\epsilon_0\Delta r} \int_0^\infty \kappa^2 \left( \int_{-\kappa\Delta r - \omega_\kappa\Delta t}^{\kappa\Delta r - \omega_\kappa\Delta t} \cos\xi d\xi \right) d\kappa, \quad (1.31)$$

de donde se obtiene, al resolver la integral entre paréntesis, que

$$\Gamma_{EE'} = \frac{\mathcal{A}c}{2\pi^2\epsilon_0\Delta r} \int_0^\infty \kappa^2 (\sin(\kappa\Delta r - \omega_\kappa\Delta t) + \sin(\kappa\Delta r + \omega_\kappa\Delta t)) d\kappa, \quad (1.32)$$

además, utilizando la ecuación (B.3), la integral de  $\Gamma_{EE'}$  sobre  $\kappa$  puede expresarse como

$$\Gamma_{EE'} = \frac{\mathcal{A}c}{2\pi^2\epsilon_0\Delta r} \int_0^\infty \kappa^2 (\sin(\kappa(\Delta r - c\Delta t)) + \sin(\kappa(\Delta r + c\Delta t))) d\kappa, \quad (1.33)$$

con  $c$  igual a la velocidad de la luz. Notando que se cumple la siguiente igualdad,

$$\int_0^\infty \kappa^2 \sin(\kappa\Delta r + a) d\kappa = -\frac{d^2}{d\Delta r^2} \int_0^\infty \sin(\kappa\Delta r + a) d\kappa, \quad (1.34)$$

con  $a$  independiente de  $\Delta r$ , puede describirse la ecuación (1.33) como

$$\Gamma_{EE'} = -\frac{\mathcal{A}c}{2\pi^2\epsilon_0\Delta r} \frac{d^2}{d\Delta r^2} \int_0^\infty (\sin(\kappa(\Delta r - c\Delta t)) + \sin(\kappa(\Delta r + c\Delta t))) d\kappa. \quad (1.35)$$

Si se definen  $a \equiv \Delta r - c\Delta t$  y  $b \equiv \Delta r + c\Delta t$ , y se expresan los senos como sumas de exponenciales complejas, se tiene que la parte integral de la ecuación (1.35) es de la forma

$$I = \frac{1}{2i} \int_0^\infty (e^{i\kappa a} - e^{-i\kappa a} + e^{i\kappa b} - e^{-i\kappa b}) d\kappa. \quad (1.36)$$

Esta integral no está bien definida en su límite superior, por lo que es necesario garantizar su convergencia redefiniéndola de la siguiente manera [25],

$$I = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty (e^{i\kappa(a+i\varepsilon)} - e^{-i\kappa(a-i\varepsilon)} + e^{i\kappa(b+i\varepsilon)} - e^{-i\kappa(b-i\varepsilon)}) d\kappa. \quad (1.37)$$

Integrando directamente la ecuación (1.37) se arriba a que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\kappa\varepsilon} \left( \frac{e^{i\kappa a}}{i(a+i\varepsilon)} + \frac{e^{-i\kappa a}}{i(a-i\varepsilon)} + \frac{e^{i\kappa b}}{i(b+i\varepsilon)} + \frac{e^{-i\kappa b}}{i(b-i\varepsilon)} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{a+i\varepsilon} + \frac{1}{a-i\varepsilon} + \frac{1}{b+i\varepsilon} + \frac{1}{b-i\varepsilon} \right) = \frac{a+b}{ab} = \frac{2\Delta r}{\Delta r^2 - c^2\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$



Al sustituir el último resultado de la ecuación anterior en (1.35) se llega a que la correlación vectorial para el campo eléctrico es de la forma

$$\Gamma_{EE'} = -\frac{\mathcal{A}c}{\pi^2\epsilon_0\Delta r} \frac{d^2}{d\Delta r^2} \left( \frac{\Delta r}{\Delta r^2 - c^2\Delta t^2} \right), \quad (1.39)$$

donde, al realizar la doble derivada, se arriba finalmente a que

$$\Gamma_{EE'}(\Delta r, \Delta t) = -\frac{2\mathcal{A}c}{\pi^2\epsilon_0} \frac{\Delta r^2 + 3c^2\Delta t^2}{(\Delta r^2 - c^2\Delta t^2)^3}, \quad (1.40)$$

para  $\Delta r \neq c\Delta t$ .

Análogamente, puede mostrarse que la correlación a dos puntos del campo magnético está dada por

$$\Gamma_{BB'}(\Delta r, \Delta t) \equiv \overline{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')} = -\frac{2\mathcal{A}}{\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\Delta r^2 + 3c^2\Delta t^2}{(\Delta r^2 - c^2\Delta t^2)^3}, \quad (1.41)$$

expresión que es válida únicamente para las distancias  $\Delta r \neq c\Delta t$ . Por otro lado, por la presencia del símbolo de Levi-Civita y el hecho de que los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son ortogonales entre sí, ecuaciones (1.7) y (1.8), es inmediato que la correlación vectorial entre el campo magnético y el campo eléctrico es nula:

$$\Gamma_{EB'}(\Delta r, \Delta t) \equiv \overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t')} = 0. \quad (1.42)$$

Es notable que, tanto en la ecuación (1.40) como en (1.41), el signo de la covarianza cambia cuando se pasa de un intervalo tipo espacio,  $\Delta r > c\Delta t$ , a un intervalo tipo tiempo,  $\Delta r < c\Delta t$  [28].

Si en la ecuación (1.33) se realiza la evaluación de la integral hasta un valor de corte máximo  $\kappa_c$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \Gamma_{EE'}(\Delta r, \Delta t; \kappa_c) = \Gamma_{EE'}(\Delta r, \Delta t) + \frac{\mathcal{A}c}{\pi^2\epsilon_0\Delta r} \left[ \left( \frac{1}{s_-^3} - \frac{\kappa_c^2}{2s_-} \right) \cos(\kappa_c s_-) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{s_+^3} - \frac{\kappa_c^2}{2s_+} \right) \cos(\kappa_c s_+) + \frac{\kappa_c}{s_-^2} \sin(\kappa_c s_-) + \frac{\kappa_c}{s_+^2} \sin(\kappa_c s_+) \right], \quad (1.43) \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_{EE'}(\Delta r, \Delta t)$  está dada por la expresión (1.40) y se ha definido  $s_{\pm} \equiv \Delta r \pm c\Delta t$ . Los términos adicionales a  $\Gamma_{EE'}(\Delta r, \Delta t)$  en (1.43) oscilan con el número de onda  $\kappa_c$ , de tal forma que, en general, no representan una contribución relevante a la covarianza y pueden ser despreciados [28].

Si uno se ubica sobre el cono de luz, es decir si  $\Delta r = c\Delta t$ , se tiene que la integral de la ecuación (1.33) se reduce de tal manera que puede ser rescrita, introduciendo un número de onda de corte  $\kappa_c$  máximo, como

$$\Gamma_{EE'}(\Delta r, \Delta r; \kappa_c) = -\frac{\mathcal{A}c}{2\pi^2\epsilon_0\Delta r} \frac{d^2}{d\Delta r^2} \int_0^{\kappa_c} \sin(2\kappa\Delta r) d\kappa, \quad (1.44)$$

cuyo resultado final al realizar el proceso de integración es

$$\Gamma_{EE'}(\Delta r, \Delta t; \kappa_c) = -\frac{\mathcal{A}c(1 - (1 - 2\kappa_c^2\Delta r^2)\cos(2\kappa_c\Delta r) - 2\kappa_c\Delta r\sin(2\kappa_c\Delta r))}{2\pi^2\epsilon_0\Delta r^4}. \quad (1.45)$$

Si se analiza el caso particular en que  $\Delta r = c\Delta t = 0$ , se llega a que

$$\Gamma_{EE'}(0, 0; \kappa_c) \equiv \sigma_E^2(\kappa_c) = \frac{\mathcal{A}c\kappa_c^4}{4\pi^2\epsilon_0}, \quad (1.46)$$

donde  $\sigma_E^2(\kappa_c)$  corresponde a la varianza del campo eléctrico [28]. Análogamente, se tiene que la varianza del campo magnético  $\sigma_B^2(\kappa_c)$  está dada por

$$\Gamma_{BB'}(0, 0; \kappa_c) \equiv \sigma_B^2(\kappa_c) = \frac{\mathcal{A}\kappa_c^4}{4\pi^2\epsilon_0c}. \quad (1.47)$$

El coeficiente de correlación  $\gamma$ , definido como el cociente entre la correlación y la varianza, es útil para obtener una idea de las distancias y los tiempos en los que los campos permanecen correlacionados [28]. Por ejemplo, si  $\Delta r = 0$  y  $\Delta t \neq 0$  se tiene para ambos campos, de las parejas de ecuaciones (1.40), (1.46) y (1.41), (1.47), que

$$\gamma_{EE'}(0, \Delta t; \kappa_c) = \gamma_{BB'}(0, \Delta t; \kappa_c) = \frac{\Gamma_{EE'}(0, \Delta t)}{\sigma_E^2(\kappa_c)} = \frac{\Gamma_{BB'}(0, \Delta t)}{\sigma_B^2(\kappa_c)} = \frac{24}{(c\Delta t\kappa_c)^4}, \quad (1.48)$$

alternativamente, para el caso en que  $\Delta t = 0$  y  $\Delta r \neq 0$  se obtiene que el coeficiente de correlación es

$$\gamma_{EE'}(\Delta r, 0; \kappa_c) = \gamma_{BB'}(\Delta r, 0; \kappa_c) = -\frac{8}{(\Delta r\kappa_c)^4}. \quad (1.49)$$

Los resultados anteriores muestran que el tiempo de correlación de los campos es función de su frecuencia más alta y es del orden de  $\omega_c^{-4}$  y, que de manera similar, la longitud de correlación es del orden de  $\kappa_c^{-4}$ . Nótese que únicamente con la introducción de un corte en el número de onda es que estas correlaciones están bien definidas; de manera que estos resultados solo tienen significado físico hasta cuando dicho corte esté justificado [28]. La necesidad y justificación para introducir una frecuencia de corte máxima se analiza y discute en el apéndice D desde una perspectiva energética para el CPC, partiendo de la ley de Stefan-Boltzmann. Al analizar el caso en que  $\kappa_c$  corresponde al número de onda de Compton,  $m_e c/\hbar$ , número de onda de corte que resulta de importancia tanto en la electrodinámica estocástica como en la electrodinámica cuántica no relativista [28], se arriba a que tanto la longitud como el tiempo de correlación son muy pequeños en comparación con las unidades atómicas, al ser del orden de los inversos de la cuarta potencia del número de onda y la frecuencia de Compton respectivamente [28].

Una expresión de utilidad para futuras deducciones puede hallarse tomando  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  directamente en la ecuación (1.22), tal que

$$\overline{E_j(\mathbf{r}, t)E_k(\mathbf{r}, t')} = \frac{\mathcal{A}}{\epsilon_0 V} \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} (\delta_{jk} - (\check{\kappa})_j(\check{\kappa})_k) \cos(\omega_{\kappa}\Delta t), \quad (1.50)$$

al tomar el límite continuo de la última expresión, se llega a que

$$\begin{aligned}\overline{E_j(\mathbf{r}, t)E_k(\mathbf{r}, t')} &= \frac{\mathcal{A}}{8\pi^3\epsilon_0} \int \omega_{\kappa}(\delta_{jk} - (\check{\boldsymbol{\kappa}})_j(\check{\boldsymbol{\kappa}})_k) \cos(\omega_{\kappa}\Delta t) d^3\kappa \\ &= \frac{\mathcal{A}}{8\pi^3\epsilon_0 c^3} \int_0^\infty \omega^3 \cos(\omega\Delta t) \int_{\Omega_{\kappa}} (\delta_{jk} - (\check{\boldsymbol{\kappa}})_j(\check{\boldsymbol{\kappa}})_k) d\Omega d\omega.\end{aligned}\quad (1.51)$$

Dado que el promedio angular de la expresión  $(\check{\boldsymbol{\kappa}})_j(\check{\boldsymbol{\kappa}})_k$  es  $\delta_{jk}/3$  [19, 28, 98], se tiene que la integral angular anterior es igual a

$$\int_{\Omega_{\kappa}} (\delta_{jk} - (\check{\boldsymbol{\kappa}})_j(\check{\boldsymbol{\kappa}})_k) d\Omega = \delta_{jk} \frac{8\pi}{3}.\quad (1.52)$$

Utilizando este resultado se tiene que la correlación es de la forma

$$\overline{E_j(\mathbf{r}, t)E_k(\mathbf{r}, t')} = \frac{\mathcal{A}\delta_{jk}}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^\infty \omega^3 \cos(\omega\Delta t) d\omega.\quad (1.53)$$

Al usar la expresión obtenida en el apéndice C para la densidad de energía espectral del campo de radiación de punto cero  $u_0(\omega) = \mathcal{A}\omega^3/\pi^2 c^3$ , ecuación (C.29), y la definición del espectro de potencias de dicho campo  $\Pi_0(\omega)$ , la cual está dada por

$$\Pi_0(\omega) \equiv \frac{4\pi u_0(\omega)}{3},\quad (1.54)$$

[27, 74], se arriba finalmente a que

$$\overline{E_j(\mathbf{r}, t)E_k(\mathbf{r}, t')} = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \Pi_0(\omega) \cos(\omega(t-t')) d\omega.\quad (1.55)$$

De forma idéntica al desarrollo anterior, puede arribarse a que la correlación a dos tiempos del campo magnético está dada por la expresión siguiente,

$$\overline{B_j(\mathbf{r}, t)B_k(\mathbf{r}, t')} = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^\infty \Pi_0(\omega) \cos(\omega(t-t')) d\omega.\quad (1.56)$$

Para el caso de la correlación entre componentes del campo eléctrico y magnético se utiliza el hecho de que el promedio angular de la componente  $(\check{\boldsymbol{\kappa}})_l$  está dado por  $8\pi/3$  de su valor [98]. Por esto, se llega a que dicha correlación a dos tiempos está dada por

$$\overline{E_j(\mathbf{r}, t)B_k(\mathbf{r}, t')} = \sum_l \frac{\epsilon_{jkl}(\check{\boldsymbol{\kappa}})_l}{4\pi\epsilon_0 c} \int_0^\infty \Pi_0(\omega) \cos(\omega(t-t')) d\omega.\quad (1.57)$$

Las transformadas de Fourier de las ecuaciones (1.55), (1.56) y (1.57) son los equivalentes del teorema de Wiener-Khintchine en la electrodinámica estocástica, ya que proporcionan el espectro de potencias en términos de las transformadas de Fourier de las

correlaciones a dos tiempos de los campos [28, 87, 89]. Dada la definición de la transformada de Fourier para el campo eléctrico [2],

$$\tilde{E}_j(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_j(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.58)$$

y con la ayuda del teorema de Parseval-Plancherel, también llamado relación de Parseval o teorema de Rayleigh [2], en su forma unidimensional

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t) \xi^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(\omega) \tilde{\xi}^*(\omega) d\omega, \quad (1.59)$$

se obtiene de la ecuación (1.55) que la correlación entre componentes de la transformada de Fourier del campo eléctrico es de la forma siguiente [32, 89],

$$\overline{\tilde{E}_j(\mathbf{r}, \omega) \tilde{E}_k^*(\mathbf{r}, \omega')} = \frac{\delta_{jk} \Pi_0(\omega) \delta(\omega - \omega')}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1.60)$$

Por otro lado, se tiene de las ecuaciones (1.56) y (1.57) que la correlación entre las componentes de Fourier del campo magnético y la correlación de componentes de los campos cruzados son:

$$\overline{\tilde{B}_j(\mathbf{r}, \omega) \tilde{B}_k^*(\mathbf{r}, \omega')} = \frac{\delta_{jk} \Pi_0(\omega) \delta(\omega - \omega')}{4\pi\epsilon_0 c^2}; \quad (1.61)$$

$$\overline{\tilde{E}_j(\mathbf{r}, \omega) \tilde{B}_k^*(\mathbf{r}, \omega')} = \sum_l \frac{\epsilon_{jkl}(\check{\boldsymbol{\kappa}})_l \Pi_0(\omega) \delta(\omega - \omega')}{4\pi\epsilon_0 c}, \quad (1.62)$$

respectivamente. Sin embargo, uno de los resultados del apéndice D es que la densidad de energía del campo de punto cero es divergente, ecuación (D.6), lo cual hace necesario introducir una frecuencia de corte máxima con el fin de dar un significado físico definitivo a estas correlaciones [28].

### 1.1.3. Momentos estadísticos de orden superior

Para la construcción de momentos de orden superior al segundo es necesario, en general, conocer plenamente la distribución que quiere estudiarse [28]. Una suposición adicional, que comúnmente se hace en la EDE, y que fue propuesta originalmente por A. Einstein y L. Hopf en 1910 [43], es que las amplitudes de los modos normales del campo son variables aleatorias con una distribución normal, es decir, poseen una distribución gaussiana [28]. Por lo anterior, se tiene de las ecuaciones (1.15), (1.17) y (1.18) que las densidades de probabilidad  $w$  de  $p_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}$  y  $q_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}$  pueden expresarse como las siguientes distribuciones:

$$w_q(q_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2}} e^{-q^2/2\sigma_q^2} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\mathcal{A}}} e^{-\omega^2 q^2/2\mathcal{A}\omega}; \quad (1.63)$$

$$w_p(p_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-p^2/2\sigma_p^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathcal{A}\omega}} e^{-p^2/2\mathcal{A}\omega}, \quad (1.64)$$

donde se ha simplificado la notación como  $p = p_{\kappa,\lambda}$  y  $q = q_{\kappa,\lambda}$ . Dado que  $p_{\kappa,\lambda}$  y  $q_{\kappa,\lambda}$  no están correlacionadas, como se observa en la ecuación (1.16), la distribución de probabilidades en el espacio fase,  $w_{qp}$ , puede obtenerse mediante el producto de las ecuaciones (1.63) y (1.64) [28],

$$w_{qp}(q, p) = \frac{1}{2\pi\mathcal{A}} e^{-(p^2 + \omega^2 q^2)/2\mathcal{A}\omega}. \quad (1.65)$$

La expresión deducida es conocida en la teoría cuántica actual como la función de Wigner para los osciladores armónicos [32, 55]. De las ecuaciones (1.65) y (C.24) se tiene que la densidad de probabilidad de energía para un modo del campo es de la forma [28],

$$\mathcal{W}_{\mathcal{E}_0}(\mathcal{H}) \equiv \frac{2\pi w_{qp}(q, p)}{\omega_{\kappa}} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} e^{-\mathcal{H}/\mathcal{E}_0}. \quad (1.66)$$

Dado que las variables aleatorias se han modelado como variables normalmente distribuidas, puede demostrarse que dichas distribuciones cumplen con que sus momentos de orden  $n$  están dados por

$$\overline{\xi^n} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n e^{-\xi^2/2\sigma^2} d\xi = \begin{cases} (2n-1)!!\sigma^{2n} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \quad (1.67)$$

[82]. Así, para  $p_{\kappa,\lambda}$  y  $q_{\kappa,\lambda}$ , cualquier número  $n$  entero positivo dado, cumple respectivamente que:

$$\overline{p_{\kappa,\lambda}^{2n}} = (2n-1)!!\sigma_p^{2n} = (2n-1)!!\mathcal{A}^n \omega_{\kappa}^n; \quad (1.68)$$

$$\overline{q_{\kappa,\lambda}^{2n}} = (2n-1)!!\sigma_q^{2n} = \frac{(2n-1)!!\mathcal{A}^n}{\omega_{\kappa}^n}. \quad (1.69)$$

Como puede observarse de las expresiones anteriores, todos los momentos pares de orden superior de las variables aleatorias  $p_{\kappa,\lambda}$  y  $q_{\kappa,\lambda}$  dependen del valor de sus segundos momentos,  $\sigma_p$  y  $\sigma_q$ , ecuaciones (1.17) y (1.18). Por otro lado, todos los momentos impares son nulos al tener las variables un valor medio cero, como se expresó en la expresión (1.15). De manera análoga al análisis hecho para obtener la ecuación (1.19), puede obtenerse que el producto de los momentos  $n$ -ésimos de las variables canónicas está dado por

$$\overline{p_{\kappa,\lambda}^{2n}} \overline{q_{\kappa,\lambda}^{2n}} = ((2n-1)!!)^2 \mathcal{A}^{2n} = \frac{((2n-1)!!)^2 \hbar^{2n}}{4^n}, \quad (1.70)$$

recordando que este último resultado es únicamente válido en el límite de fluctuaciones atómicas.

Finalmente, en el apéndice E se presenta y comenta, a manera de complemento del presente capítulo, un recuento, de tono histórico, del desarrollo del campo electromagnético del vacío como concepto teórico que permite explicar fenómenos observables.

## Capítulo 2

# Interacción entre la materia y el campo de radiación de punto cero

*El estado actual de nuestro conocimiento  
es siempre provisional y debe haber,  
mas allá de lo que se sabe actualmente,  
regiones nuevas e inmensas por descubrir.*

- Louis de Broglie -

Un resultado importante de la electrodinámica estocástica, obtenido por L. de la Peña y A. M. Cetto, y posteriormente en conjunto con A. Valdés-Hernández, es el hecho de que el campo de radiación adquiere una distribución discreta de energía cuando se halla en equilibrio térmico con la materia y está en presencia de su componente de punto cero [16, 29, 34], es decir, el campo de radiación se cuantiza debido a su interacción con la materia en presencia del CPC. Por ello, resulta de interés estudiar la afectación que sufre la materia al hallarse en contacto con el campo de radiación de punto cero.

En el presente capítulo se partirá de la ecuación de movimiento característica de la electrodinámica estocástica, es decir, aquella que describe el comportamiento de una partícula cargada inmersa en la radiación generada por su movimiento, en interacción con el campo electromagnético del vacío y sujeta a posibles fuerzas externas, que en general son no lineales, en el límite no relativista. Debido a la naturaleza estocástica propia de esta ecuación, se llevará a cabo un tratamiento estadístico con la intención de hallar una expresión para la densidad de probabilidad en el espacio fase del sistema. Finalmente, se mostrará que al reducir la descripción anterior al espacio de configuración se arriba, en la aproximación no radiativa y bajo la condición de balance energético para el estado de mínima energía del subsistema mecánico, al régimen cuántico, el cual se halla descrito por la ecuación de Schrödinger.

## 2.1. La ecuación de movimiento de la EDE

La ecuación de movimiento que rige el comportamiento de una partícula, de masa  $m$  y carga  $q_e$ , sujeta a la acción de una fuerza externa  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , inmersa en un campo electromagnético, que en el caso específico de la electrodinámica estocástica corresponde al campo de radiación de punto cero, y que considera los efectos radiativos generados por su aceleración, en el límite no relativista, es la ecuación de Abraham-Lorentz [32]. En el apéndice F se deduce, a partir del formalismo hamiltoniano, la ecuación de movimiento del sistema anterior, que en general es aplicable en el límite relativista; sin embargo, debido a la poca practicidad de esta, se opta por utilizar su límite no relativista correspondiente a la ecuación de Abraham-Lorentz, el cual se deduce en el apéndice G.

Así, la ecuación de movimiento general de la electrodinámica estocástica está dada por la ecuación (G.19), la cual puede describirse, de manera explícita, como

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + m\tau \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} + q_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + q_e \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  se supone conservativa. El término proporcional a la tercera derivada temporal de la posición de la ecuación (2.1), conocido como de reacción radiativa, modela los efectos radiativos de la carga en movimiento, actuando como un término de resistencia al movimiento de esta, tal que la constante de acoplamiento  $\tau$  posee unidades de tiempo y es del orden de  $6.274 \times 10^{-24}$  segundos para un electrón. Al final del apéndice G se discuten y analizan las consecuencias físicas de considerar el término de reacción radiativa en la dinámica de una partícula puntual. Por otro lado, los campos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , provenientes de la fuerza de Lorentz, son las componentes eléctrica y magnética del CPC, estando, por tanto, descritos por variables estocásticas, ecuaciones (1.7) y (1.8), y teniendo promedio cero, ecuaciones (1.1) y (1.2). Es precisamente dicha estocasticidad la que hace que la ecuación (2.1) sea, de manera general, analíticamente irresoluble [32].

Es relevante mencionar que, pese a que la ecuación (2.1) es imposible de resolver con los métodos matemáticos actuales, D. C. Cole y Y. Zou, y más recientemente T. M. Nieuwenhuizen y M. T. P. Liska, han logrado resolver numéricamente esta ecuación de la EDE para el estado base del átomo de hidrógeno, obteniéndose resultados que se aproximan a la predicción de la teoría de Schrödinger [22, 81], véase la figura 2.1.

Una forma de continuar con el análisis de la ecuación (2.1) es mediante la introducción de una serie de aproximaciones. Primeramente, desde un inicio se supuso que la partícula cargada realiza un movimiento no relativista, de tal forma que se cumple que  $\dot{r} \ll c$  para todo tiempo. De las ecuaciones (1.7) y (1.8) se tiene que  $E = cB$ , resultado que, junto con el argumento anterior, indica que en el límite no relativista la fuerza magnética es despreciable en comparación con la fuerza eléctrica, de tal forma que se tiene que

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + m\tau \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} + q_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

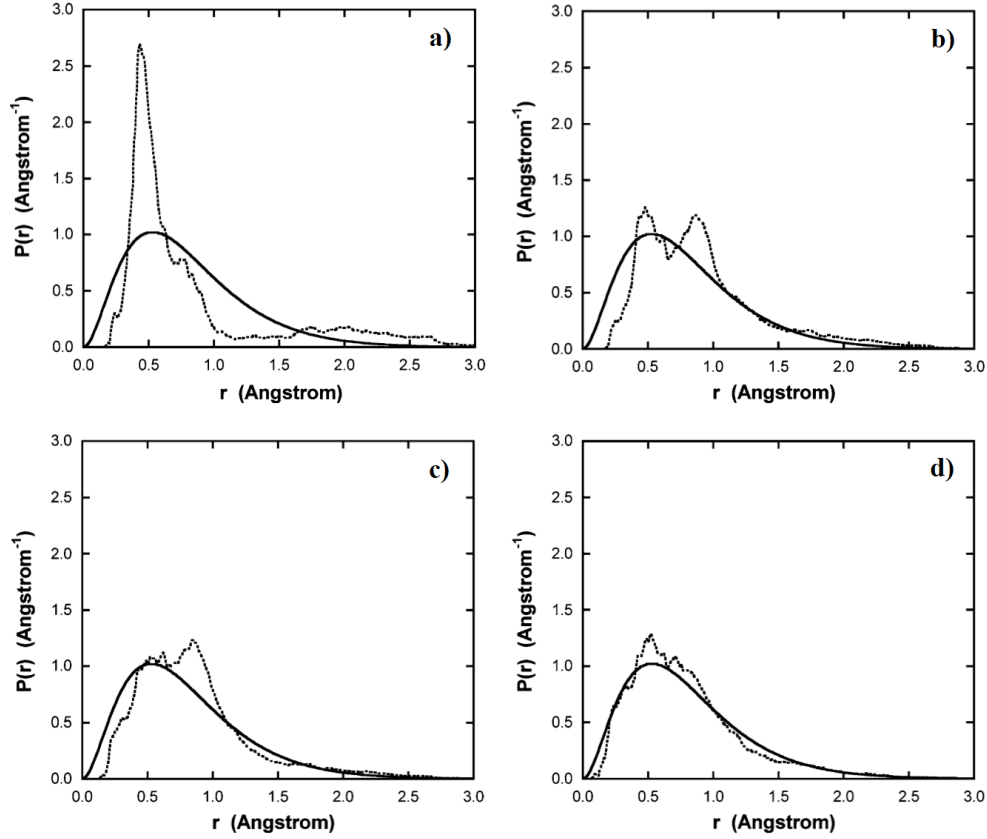


Figura 2.1: Densidad radial de probabilidad como función del radio. La línea sólida muestra el resultado obtenido a partir de la ecuación de Schrödinger para el estado base del hidrógeno, es decir,  $\mathcal{P}(r) = 4\pi r^2 |\phi_0(r)|^2 = (4r^2/\alpha_0^3) \exp(-2r/\alpha_0)$  con  $\alpha_0 \equiv \hbar^2/m_e e^2$ . Las curvas punteadas muestran los resultados obtenidos por Cole y Zou mediante simulaciones numéricas a través de promedios temporales de sus corridas de datos desde un tiempo  $t = 0$  hasta el tiempo promedio indicado: a)  $1.417 \times 10^{-12}$  s; b)  $4.500 \times 10^{-12}$  s; c)  $5.705 \times 10^{-12}$  s y d)  $7.252 \times 10^{-12}$  s. Imagen original tomada de [22].

Adicionalmente, como se discute en el apéndice G, los modos del campo que son relevantes para el movimiento de la partícula poseen longitudes de onda mayores que las dimensiones características del subsistema mecánico, ecuación (G.30), de manera que puede suponerse que, en la región del espacio ocupada por la partícula, el campo eléctrico no varía apreciablemente. Esta simplificación es conocida como aproximación de longitud de onda larga o dipolar eléctrica [16, 27]. Bajo dicha aproximación, la dependencia de la posición del campo eléctrico puede ser despreciada, tal que la ecuación (2.2) se reduce a

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + m\tau \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} + q_e \mathbf{E}(t). \quad (2.3)$$



La ecuación (2.3) es una ecuación diferencial estocástica ordinaria de tercer orden para la posición de la partícula, conocida en el contexto de la EDE como ecuación de Braffort-Marshall [30], que puede ser descompuesta en el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales para la posición  $\mathbf{r}$  y el momento lineal  $\mathbf{p}$  de la partícula cargada:

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{p}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + m\tau \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + q_e \mathbf{E}(t). \quad (2.4)$$

las cuales son ecuaciones diferenciales de primer orden y se hallan acopladas entre sí.

## 2.2. La ecuación generalizada de Fokker-Planck

Paralelamente a la descripción expuesta en la ecuación (2.4), puede estudiarse el presente problema mediante la introducción de la función  $\mathcal{R}$ , que denota la densidad de probabilidad en el espacio fase de la partícula cargada. La densidad de probabilidad  $\mathcal{R}$  satisface para cada realización del campo, que se supone esencialmente inalterado [32], la ecuación de continuidad dada por

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} \dot{r}_j \mathcal{R} + \frac{\partial}{\partial p_j} \dot{p}_j \mathcal{R} = 0, \quad (2.5)$$

donde  $r_j$  y  $p_j$  corresponden a las variables de la ecuación (2.4), y además se ha utilizado la convención indicial de Einstein [16, 31]. Explícitamente se tiene que la ecuación (2.5) se expresa en términos de la ecuación (2.3) como

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} \dot{r}_j \mathcal{R} + \frac{\partial}{\partial p_j} (F_j + m\tau \ddot{r}_j) \mathcal{R} = -q_e \frac{\partial}{\partial p_j} E_j(t) \mathcal{R}. \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) representan generalizaciones de la ecuación de Fokker-Planck, como se apreciará más adelante. En mecánica estadística, se conoce como ecuación de Fokker-Planck, o de Kolmogorov [89], a la ecuación diferencial de segundo orden que describe la evolución de la densidad de probabilidad de una partícula sujeta a fuerzas de difusión y deriva, representadas, según el teorema de Pawula [83], por un ruido blanco, es decir, por un ruido incorrelacionado y con un espectro de potencias constante [32, 87].

La estocasticidad del campo eléctrico es transmitida a la variable  $\mathcal{R}$  a través de las variables  $r_j$  y  $p_j$ , de tal manera que la densidad de probabilidad varía con cada realización del campo, es decir, la ecuación (2.6) puede describir de manera detallada el movimiento de la partícula para una realización dada del campo [32]. Sin embargo, las condiciones específicas de cada realización del campo son, en general, desconocidas, de forma que una trayectoria particular de la ecuación (2.3) no brinda información sobre el comportamiento global de la partícula. Por lo anterior, resulta necesario hacer una descripción reducida de un ensamble de sistemas similares que considere todas las realizaciones posibles dadas las condiciones del problema [16, 31]. Para lograr esto, se define la función  $\mathcal{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , que representa el promedio de la densidad de probabilidad sobre todas las realizaciones del campo, es decir,

$$\mathcal{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \equiv \overline{\mathcal{R}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}. \quad (2.7)$$

La densidad de probabilidad promedio  $\mathcal{Q}$  aporta información de cómo las partículas del ensamble estadístico están distribuidas en la vecindad de un punto  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  para todo tiempo  $t$  [89]. Así, toda referencia a la realización específica del campo está ausente en la descripción estadística proporcionada por  $\mathcal{Q}$ .

Para construir la ecuación de evolución de  $\mathcal{Q}$  se puede proceder mediante el llamado método de suavizado, conocido en inglés como *smoothing method* [16, 31, 32]. Si se define un operador de suavizado  $\hat{P}_s$ , como aquel que actúa sobre una función fase  $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  dando su promedio local, en el espacio fase, sobre todas las realizaciones [32],

$$\hat{P}_s \xi = \bar{\xi}, \quad (2.8)$$

entonces la función  $\xi$  puede ser expresada, en términos de dicho operador, como

$$\xi = \bar{\xi} + \delta\xi = \bar{\xi} + (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s)\xi, \quad (2.9)$$

donde  $\delta\xi$  denota la componente aleatoria de la función  $\xi$ . Así, la ecuación (2.9) representa una descomposición de  $\xi$  en su valor medio  $\bar{\xi}$  más su parte fluctuante. Adicionalmente, es notable que  $\hat{P}_s^2 \xi = \hat{P}_s \bar{\xi} = \bar{\xi} = \hat{P}_s \xi$ , de tal forma que  $\hat{P}_s$  es un operador de proyección idempotente. Al aplicar el operador de suavizado sobre la densidad de probabilidad se obtiene la densidad de probabilidad promedio,

$$\hat{P}_s \mathcal{R} = \mathcal{Q}, \quad (2.10)$$

de tal forma que la densidad de probabilidad puede ser descompuesta como

$$\mathcal{R} = \mathcal{Q} + \delta\mathcal{Q}, \quad (2.11)$$

donde  $\delta\mathcal{Q} = (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s)\mathcal{R}$ . Al sustituir la ecuación (2.11) en (2.6) se llega a que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{Q} + \delta\mathcal{Q}) + \hat{\mathcal{L}}(\mathcal{Q} + \delta\mathcal{Q}) = -q_e \frac{\partial}{\partial p_j} E_j(\mathcal{Q} + \delta\mathcal{Q}), \quad (2.12)$$

donde se ha definido el operador  $\hat{\mathcal{L}}$  como el operador no aleatorio de Liouville para la partícula [16, 31], que en este caso incluye el término de reacción radiativa, como

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial r_j} p_j + \frac{\partial}{\partial p_j} (F_j + m\tau \ddot{r}_j). \quad (2.13)$$

La ecuación (2.12) puede ser descompuesta en sus partes no estocástica y fluctuante al aplicarle los proyectores  $\hat{P}_s$  y  $(\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s)$  respectivamente; y al usar el resultado de la ecuación (1.2),  $\hat{P}_s E_j = 0$ , obteniéndose que:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} \right) \mathcal{Q} = -q_e \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \delta\mathcal{Q}; \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}\right) \delta \mathcal{Q} = -q_e \frac{\partial}{\partial p_j} E_j \mathcal{Q} - q_e \frac{\partial}{\partial p_j} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_j \delta \mathcal{Q}. \quad (2.15)$$

Al definir el operador  $\hat{\mathcal{G}} \equiv (\partial/\partial t + \hat{\mathcal{L}})^{-1}$ , que corresponde a la función de Green del operador diferencial  $(\partial/\partial t + \hat{\mathcal{L}})$ , tal que dada una función fase  $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  se obtenga que

$$\hat{\mathcal{G}}\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int_{-\infty}^t e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') dt', \quad (2.16)$$

[16, 31], donde el operador diferencial  $e^{\hat{\mathcal{L}}(t-t')}$  actúa sobre todas las variables a su derecha, propagándolas de  $\mathbf{r}(t')$  y  $\mathbf{p}(t')$  hacia  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{p}(t)$  respectivamente [32], con  $t' < t$ , siguiendo un camino totalmente determinista, se tiene, aplicándolo a la ecuación (2.15), que

$$\delta \mathcal{Q} = -q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_j} E_j \mathcal{Q} - q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_j} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_j \delta \mathcal{Q},$$

o equivalentemente

$$\left[ \hat{\mathbb{I}} + q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_j} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_j \right] \delta \mathcal{Q} = -q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_j} E_j \mathcal{Q}. \quad (2.17)$$

Al aplicar el operador inverso de la expresión entre paréntesis cuadrados sobre la ecuación anterior, se arriba a una expresión para la parte fluctuante de la función  $\mathcal{R}$ ,

$$\delta \mathcal{Q} = -q_e \left[ \hat{\mathbb{I}} + q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_k \right]^{-1} \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_j} E_j \mathcal{Q}, \quad (2.18)$$

de tal forma que al sustituir esta última expresión en la ecuación (2.14), se llega a que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}\right) \mathcal{Q} = q_e^2 \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \left[ \hat{\mathbb{I}} + q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_k \right]^{-1} \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_l} E_l \mathcal{Q}. \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) es la ley de evolución de la variable promedio  $\mathcal{Q}$ . Sin embargo, la forma en la que depende del campo eléctrico y del operador  $\hat{\mathcal{G}}$  no la hace práctica a la hora de utilizarla. Una forma más manejable de esta expresión puede obtenerse recordando el desarrollo de Taylor de  $x^{-1}$  dado por  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$  [2], es decir, mediante un desarrollo en serie de potencias del operador entre paréntesis cuadrados [26], tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}}\right) \mathcal{Q} &= q_e^2 \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_k \right]^n \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_l} E_l \mathcal{Q} \\ &= -q_e \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_k \right]^n \left( -q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_l} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_l \mathcal{Q} \right) \\ &= -q_e \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_k \right]^{n+1} \mathcal{Q} \\ &= -q_e \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_k \right]^n \mathcal{Q}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para simplificar aún más la ecuación (2.20) deben tomarse en cuenta algunas propiedades estadísticas del CPC. Primeramente, se tiene que las variables canónicas del campo poseen distribuciones simétricas y centradas en cero, de tal forma que, de la ecuación (1.67), se obtiene que el promedio del producto de un número impar de factores se anula [26],

$$\hat{P}_s E_j(t_1) E_j(t_2) \cdots E_j(t_{2n+1}) \hat{P}_s \zeta = 0. \quad (2.21)$$

Adicionalmente, si se supone que las distribuciones son gaussianas, ecuaciones (1.63) y (1.64), se tiene que el promedio del producto de un número par de factores es de la siguiente forma,

$$\hat{P}_s E_j(t_1) E_j(t_2) \cdots E_j(t_{2n}) \hat{P}_s \zeta = \sum_{\text{pares}} \overline{E_j(t_n) E_j(t_{n'})} \cdots \overline{E_j(t_{n''}) E_j(t_{n'''})} \bar{\zeta}, \quad (2.22)$$

donde la suma se realiza sobre todos los pares de factores diferentes [26]. Del resultado expuesto en la ecuación (2.21) es notable que todos los términos de la última igualdad de la ecuación (2.20) con  $n$  par son nulos, de tal forma que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} \right) \mathcal{Q} = q_e \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \sum_{n=0}^{\infty} \left[ q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_k \right]^{2n+1} \mathcal{Q},$$

que es equivalente a

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} \right) \mathcal{Q} = q_e^2 \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{P}_s E_j \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} E_k \sum_{n=0}^{\infty} \left[ q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_l} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_l \right]^{2n} \mathcal{Q}. \quad (2.23)$$

Si se define el operador integrodiferencial de difusión  $\hat{\mathcal{D}}_j(t)$  como

$$\hat{\mathcal{D}}_j(t) \equiv \hat{P}_s E_j(t) \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} E_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ q_e \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_l} (\hat{\mathbb{I}} - \hat{P}_s) E_l(t) \right]^{2n}, \quad (2.24)$$

[16], se llega a que la ecuación que describe la evolución de la densidad de probabilidad promedio  $\mathcal{Q}$  de la partícula es

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \hat{\mathcal{L}} \mathcal{Q} = q_e^2 \frac{\partial}{\partial p_j} \hat{\mathcal{D}}_j(t) \mathcal{Q}. \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) es una ecuación integrodiferencial, es decir, una ecuación diferencial de orden infinito [32], que por la forma del espectro de potencias del CPC, ecuaciones (1.54) y (C.29), involucra un ruido altamente coloreado,  $\Pi_0(\omega) \propto \omega^3$ , tal que no corresponde, como se mencionó al inicio de la presente sección, a una verdadera ecuación de Fokker-Planck, sino a una generalización no markoviana de esta, ya que la derivada temporal de la variable  $\mathcal{Q}$  involucra sus valores previos debido a su dependencia del operador  $\hat{\mathcal{G}}$  [26], ecuación (2.16), siendo precisamente esta memoria responsable de buena parte de su complejidad [32]. El número infinito de términos presentes, provenientes del operador de difusión, en la ecuación (2.25) representan el efecto promedio de las múltiples dispersiones causadas por el CPC a la carga, es decir, representan las correcciones radiativas, no relativistas y de todos los órdenes, a la dinámica de la partícula [26].

### 2.2.1. La aproximación markoviana

Cuando la partícula cargada y el campo de radiación comienzan a interactuar, se da un proceso irreversible de intercambio de energía y momento durante el cual el campo tiene un efecto aleatorizador y disipador en la dinámica de la partícula [16], causado por los modos de frecuencia más alta del campo  $\mathbf{E}(t)$  en la ecuación (2.3) [32]. Sin embargo, es posible explorar la solución de la ecuación (2.25) en el límite temporal asintótico cuando dicho intercambio es reversible, y es aplicable la aproximación markoviana [32].

Primeramente, puede aproximarse la ecuación (2.25) a primer orden en  $q_e^2$  mediante la restricción de la suma infinita existente en el operador de difusión a únicamente su primer sumando. En este sentido, para  $n = 0$ , se tiene de la ecuación (2.24) que el operador  $\hat{\mathcal{D}}_j(t)$  se reduce a

$$\hat{\mathcal{D}}_j(t)\mathcal{Q} \approx \hat{P}_s E_j(t) \hat{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial p_k} E_k(t) \mathcal{Q} = \hat{P}_s E_j(t) \int_{-\infty}^t e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial}{\partial p_k} (E_k(t') \mathcal{Q}(t')) dt', \quad (2.26)$$

donde se ha aplicado explícitamente el operador  $\hat{\mathcal{G}}$ , ecuación (2.16). El campo eléctrico no depende del momento debido a la aproximación de longitud de onda larga, ecuación (2.3), de forma que el operador de difusión puede reescribirse utilizando el resultado (2.22) y el hecho de que  $\mathcal{Q}$  y  $\hat{\mathcal{L}}$  son no fluctuantes, como

$$\hat{\mathcal{D}}_j(t)\mathcal{Q} = \int_{-\infty}^t \overline{E_j(t) E_k(t')} e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial \mathcal{Q}(t')}{\partial p_k} dt'. \quad (2.27)$$

Como se mencionó antes, el operador  $e^{\hat{\mathcal{L}}(t-t')}$  constituye un operador de evolución, de forma que puede establecerse la siguiente ley de evolución

$$\mathcal{Q}(t) = e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \mathcal{Q}(t'), \quad (2.28)$$

utilizando esta última ecuación y el operador identidad, dado por  $\hat{\mathbb{I}} = e^{\hat{\mathcal{L}}(t-t')} e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')}$  [32], se obtiene que parte del integrando de la ecuación (2.27) puede expresarse como

$$e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial \mathcal{Q}(t')}{\partial p_k} = \left( e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \frac{\partial}{\partial p_k} e^{\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \right) \left( e^{-\hat{\mathcal{L}}(t-t')} \mathcal{Q}(t') \right) = \frac{\partial \mathcal{Q}(t)}{\partial p'_k}, \quad (2.29)$$

donde  $p_k(t') \equiv p'_k$ , recordando que  $p_k(t')$  evoluciona a  $p_k(t)$  de manera determinista. Sustituyendo la igualdad anterior en la ecuación (2.27), se llega a que el operador de difusión, en esta aproximación, es

$$\hat{\mathcal{D}}_j(t)\mathcal{Q} = \int_{-\infty}^t \overline{E_j(t) E_k(t')} \frac{\partial \mathcal{Q}(t)}{\partial p'_k} dt'. \quad (2.30)$$

La ecuación (1.55) expresa la correlación entre dos componentes del campo eléctrico para tiempos diferentes, tal que esta correlación a dos puntos puede expresarse como

$$\overline{E_j(t) E_k(t')} = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \Pi_0(\omega) \cos(\omega(t-t')) d\omega = \frac{\delta_{jk} \varpi(t-t')}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.31)$$

donde se ha definido la función  $\varpi$  como

$$\varpi(\xi) \equiv \int_0^\infty \Pi_0(\omega) \cos(\omega\xi) d\omega. \quad (2.32)$$

Al sustituir la segunda igualdad de la ecuación (2.31) en (2.30) se tiene que

$$\hat{\mathcal{D}}_j(t)\mathcal{Q} = \frac{\delta_{jk}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \frac{\partial \mathcal{Q}(t)}{\partial p'_k} dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \frac{\partial \mathcal{Q}(t)}{\partial p'_j} dt'. \quad (2.33)$$

Por medio de la regla de la cadena, puede arribarse a una expresión para la derivada de la densidad de probabilidad promedio con respecto a  $p_j(t')$  en términos de las variables canónicas evaluadas en el tiempo  $t$ , dada por

$$\frac{\partial \mathcal{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial p'_j} = \frac{\partial p_k}{\partial p'_j} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} + \frac{\partial r_k}{\partial p'_j} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k}. \quad (2.34)$$

Sustituyendo dicha expresión en la segunda igualdad obtenida en la ecuación (2.33), se arriba a que

$$\hat{\mathcal{D}}_j(t)\mathcal{Q} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \frac{\partial p_k}{\partial p'_j} dt' \right) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} + \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \frac{\partial r_k}{\partial p'_j} dt' \right) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k}. \quad (2.35)$$

Si se definen los coeficientes de difusión como:

$$\mathcal{D}_{jk}^{pp}(t) \equiv \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \frac{\partial p_k}{\partial p'_j} dt', \quad (2.36)$$

$$\mathcal{D}_{jk}^{pr}(t) \equiv \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \frac{\partial r_k}{\partial p'_j} dt', \quad (2.37)$$

[18, 32], se obtiene que el operador de difusión puede aproximarse, en el límite markoviano de la teoría, en términos de dichos coeficientes de la siguiente forma

$$q_e^2 \hat{\mathcal{D}}_j(t) \approx \mathcal{D}_{jk}^{pp}(t) \frac{\partial}{\partial p_k} + \mathcal{D}_{jk}^{pr}(t) \frac{\partial}{\partial r_k}. \quad (2.38)$$

Al sustituir la aproximación markoviana del operador de difusión en la ecuación (2.25) se llega a que la ecuación de evolución de  $\mathcal{Q}$  en este límite se reduce a

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial r_j} p_j \mathcal{Q} + \frac{\partial}{\partial p_j} (F_j + m\tau \ddot{r}_j) \mathcal{Q} = \frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} + \frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k}. \quad (2.39)$$

Así, se tiene que en esta aproximación markoviana la ecuación generalizada de Fokker-Planck ha “olvidado” todos los valores de la función  $\mathcal{Q}$  a lo largo de su pasado, y por tanto se ha reducido a una ecuación diferencial de segundo orden, convirtiéndose en una ecuación de Fokker-Planck auténtica.

### 2.2.2. Relaciones entre los valores medios

La ecuación (2.25) contiene toda la información estadística de la dinámica de la partícula, parte de la cual puede ser extraída en términos de valores medios. El promedio de una función fase  $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  sobre el espacio fase se define como la integral de dicha función, pesada por la función de densidad de probabilidad promedio, sobre un elemento de volumen fase [87], es decir,

$$\langle \xi \rangle \equiv \int \xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathcal{Q} d^3r d^3p. \quad (2.40)$$

Para el caso particular en el que la función fase no depende explícitamente del tiempo, se tiene que la derivada del promedio fase de  $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  se puede expresar como

$$\frac{d\langle \xi \rangle}{dt} = \int \xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} d^3r d^3p. \quad (2.41)$$

Si se multiplica por la izquierda la ecuación (2.25) por la función fase  $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  y se integra toda la ecuación sobre el espacio fase, se tiene que

$$\int \xi \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} d^3r d^3p = \int \xi \frac{\partial (q_e^2 \hat{\mathcal{D}}_j - F_j - m\tau \ddot{r}_j) \mathcal{Q}}{\partial p_j} d^3r d^3p - \int \xi \frac{\partial \dot{r}_j \mathcal{Q}}{\partial r_j} d^3r d^3p. \quad (2.42)$$

Al integrar por partes el lado derecho de la ecuación anterior, la primera integral con respecto al momento y la segunda con respecto a la posición, suponiendo que la función  $\xi$  es nula en la superficie en el infinito [32] y utilizando la ecuación (2.41), se obtiene que

$$\frac{d\langle \xi \rangle}{dt} = \left\langle \dot{r}_j \frac{\partial \xi}{\partial r_j} \right\rangle + \left\langle F_j \frac{\partial \xi}{\partial p_j} \right\rangle + m\tau \left\langle \ddot{r}_j \frac{\partial \xi}{\partial p_j} \right\rangle - q_e^2 \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial p_j} \hat{\mathcal{D}}_j \right\rangle. \quad (2.43)$$

La ecuación (2.43) puede revelar de forma más clara su contenido, si se expresa como

$$\frac{d\langle \xi \rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\xi}{dt} \right\rangle_{NR} + m\tau \left\langle \ddot{r}_j \frac{\partial \xi}{\partial p_j} \right\rangle - q_e^2 \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial p_j} \hat{\mathcal{D}}_j \right\rangle. \quad (2.44)$$

El primer término del lado derecho de la última igualdad, definido como

$$\left\langle \frac{d\xi}{dt} \right\rangle_{NR} \equiv \left\langle \dot{r}_j \frac{\partial \xi}{\partial r_j} \right\rangle + \left\langle F_j \frac{\partial \xi}{\partial p_j} \right\rangle, \quad (2.45)$$

representa las contribuciones no radiativas a  $d\langle \xi \rangle/dt$ , en contraste con los dos últimos términos de la ecuación (2.43) que generan la reacción radiativa y la fluctuaciones del campo respectivamente [32]. Es notable que dichos términos dan origen a las contribuciones radiativas solo si la función  $\xi$  depende del momento. Si por el contrario se tiene que  $\xi = \xi(\mathbf{r})$ , se tiene que la ecuación (2.44) se reduce a

$$\frac{d\langle \xi \rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\xi}{dt} \right\rangle_{NR}. \quad (2.46)$$

Para ilustrar lo anterior, puede tomarse como ejemplo que  $\xi = r_j, r_j r_k$ , de tal manera que se obtenga, respectivamente:

$$\frac{d\langle r_j \rangle}{dt} = \left\langle \dot{r}_k \frac{\partial r_j}{\partial r_k} \right\rangle = \frac{1}{m} \langle p_j \rangle; \quad (2.47)$$

$$\frac{d\langle r_j r_k \rangle}{dt} = \left\langle \dot{r}_l r_k \frac{\partial r_j}{\partial r_l} + \dot{r}_l r_j \frac{\partial r_k}{\partial r_l} \right\rangle = \frac{1}{m} \langle p_j r_k + p_k r_j \rangle. \quad (2.48)$$

La información expuesta en las ecuaciones (2.47) y (2.48), tomándose además en la última ecuación que  $j = k$ , puede expresarse en forma vectorial como:

$$m \frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} = \langle \mathbf{p} \rangle; \quad (2.49)$$

$$\frac{m}{2} \frac{d\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \rangle}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d\langle r^2 \rangle}{dt} = \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle. \quad (2.50)$$

Los efectos causados por los términos radiativos sobre la dinámica promedio de la partícula pueden apreciarse al tomar, en la ecuación (2.44),  $\xi = p_j, r_j p_k, p_j p_k$  respectivamente, de tal forma que se arribe a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\langle p_j \rangle}{dt} = \langle F_j \rangle + m\tau \langle \ddot{r}_j \rangle - q_e^2 \langle \hat{\mathcal{D}}_j \rangle; \quad (2.51)$$

$$\frac{d\langle r_j p_k \rangle}{dt} = \left\langle \frac{1}{m} p_j p_k + r_j F_k \right\rangle + m\tau \langle r_j \ddot{r}_k \rangle - q_e^2 \langle r_j \hat{\mathcal{D}}_k \rangle; \quad (2.52)$$

$$\frac{d\langle p_j p_k \rangle}{dt} = \langle p_j F_k + p_k F_j \rangle + m\tau \langle p_j \ddot{r}_k + p_k \ddot{r}_j \rangle - q_e^2 \langle p_j \hat{\mathcal{D}}_k + p_k \hat{\mathcal{D}}_j \rangle. \quad (2.53)$$

La ecuación (2.51) exhibe al término  $-q_e^2 \langle \hat{\mathcal{D}}_j \rangle$  como una fuerza media efectiva debida a la difusión, análoga a la fuerza osmótica en el caso del movimiento browniano [32]. Por otro lado, al sumarle su parte antisimétrica a la ecuación (2.52), esta puede expresarse vectorialmente como

$$\frac{d\langle \mathbf{L} \rangle}{dt} = \langle \mathbf{N} \rangle + m\tau \langle \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \rangle - q_e^2 \langle \mathbf{r} \times \hat{\mathcal{D}} \rangle, \quad (2.54)$$

donde se han definido los vectores  $\mathbf{L}$  como el momento angular de la partícula y  $\mathbf{N}$  como la torca generada por la fuerza externa  $\mathbf{F}$  sobre dicha partícula. La ecuación (2.54) muestra que el cambio en el promedio del momento angular depende, además de la fuerza externa, de la interacción de la partícula con el CPC. Alternativamente, si se toma la forma simétrica de la ecuación (2.52),  $j = k$ , se obtiene en notación vectorial que

$$\frac{d\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle p^2 \rangle + \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \rangle + m\tau \langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle - q_e^2 \langle \mathbf{r} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle. \quad (2.55)$$



De manera similar a la última ecuación, si se toma la forma simétrica de la ecuación (2.53), entonces se llega a que

$$\frac{1}{2m} \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} \rangle + \tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle - \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle. \quad (2.56)$$

Si se tiene que la función hamiltoniana del sistema es de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \mathcal{V}(\mathbf{r}), \quad (2.57)$$

y se nota que, a través de la aplicación de la regla de la cadena, el primer término a la derecha de la ecuación (2.56) puede ser expresado alternativamente como

$$\frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \rangle = - \left\langle \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = - \left\langle \frac{d\mathcal{V}(\mathbf{r})}{dt} \right\rangle, \quad (2.58)$$

puede describirse dicha ecuación, en términos del promedio fase de la función hamiltoniana, como

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle}{dt} = \tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle - \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle. \quad (2.59)$$

La ecuación (2.59) muestra que el cambio en la energía media del sistema está regido únicamente por los términos radiativos. De manera general, si  $\xi = C(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  representa una integral de movimiento del problema no radiativo, se tiene que la ecuación (2.45) es nula, y que por tanto el valor promedio de  $C$  es

$$\frac{d\langle C \rangle}{dt} = m\tau \left\langle \ddot{r}_j \frac{\partial C}{\partial p_j} \right\rangle - q_e^2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial p_j} \hat{\mathcal{D}}_j \right\rangle. \quad (2.60)$$

De las ecuaciones obtenidas anteriormente, de (2.47) a (2.60), pueden deducirse expresiones para los valores promedio de las variables dinámicas del sistema en el régimen en el que  $\langle \xi \rangle$  adquiere un valor constante, es decir, cuando  $d\langle \xi \rangle / dt = 0$ . Esto ocurre, en particular, en situaciones estacionarias [32], en las cuales se tiene de las ecuaciones (2.49) y (2.50) que:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle = 0, \quad (2.61)$$

es decir, la nulidad del promedio del momento, y la inexistencia de correlación entre la posición y el momento de la partícula al menos a primer orden. Así mismo, se obtiene de la forma vectorial de la ecuación (2.51) que en este régimen se cumple que

$$\langle \mathbf{F} \rangle = q_e^2 \langle \hat{\mathcal{D}} \rangle - m\tau \langle \ddot{\mathbf{r}} \rangle. \quad (2.62)$$

La ecuación anterior implica que, cuando el promedio del momento deja de variar en el tiempo, la fuerza externa es compensada por los efectos radiativos, en promedio. Análogamente, se arriba a que, para el caso estacionario, la ecuación (2.55) implica que

$$\frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \rangle + \frac{m\tau}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle - \frac{q_e^2}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle = 0. \quad (2.63)$$

En la aproximación no radiativa, la ecuación anterior representa el teorema del virial [52, 69], con promedios fase en lugar de promedios temporales. Por ello, dicha ecuación puede entenderse como una generalización del teorema del virial, tal que el valor medio de la energía cinética tiene correcciones radiativas dadas por

$$\langle \delta \mathcal{K} \rangle = \frac{q_e^2}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle - \frac{m\tau}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle. \quad (2.64)$$

La ecuación (2.59) muestra que cuando se cumple que

$$\tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle = \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle; \quad (2.65)$$

se tiene que la función hamiltoniana deja de variar con respecto al tiempo, convirtiéndose de esta forma en una constante de movimiento del subsistema mecánico. La ecuación (2.65) representa el balance energético existente entre la potencia promedio cedida por la partícula al campo, debido a la reacción radiativa a lo largo de su trayectoria, y la potencia media ganada por dicha partícula al campo de fondo, almacenada en las fluctuaciones de momento [18, 27, 32].

Una forma alternativa de la última ecuación puede ser deducida en términos de expresiones de las variables estocásticas al multiplicar escalarmente la segunda ecuación de la expresión (2.4) por  $\mathbf{p}$ , de tal manera que se obtenga que

$$\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} + m\tau \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + q_e \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(t); \quad (2.66)$$

al usar la regla de derivación de un producto de vectores,  $2(\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{H}}) = d(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})/dt = dH^2/dt$ , dividir entre la masa de la partícula, aplicar la regla de la cadena y emplear la expresión (2.57), se tiene que la última ecuación es equivalente a

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{1}{2m} \frac{dp^2}{dt} + \frac{d\mathcal{V}(\mathbf{r})}{dt} = \tau \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{q_e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (2.67)$$

Es notable que el primer término de la última igualdad de la ecuación (2.67) puede ser descompuesto, utilizando la primera ecuación de la expresión (2.4) y la regla de derivación de un producto escalar entre vectores, como

$$\tau \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\tau}{m} \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{p}} = \frac{\tau}{m} \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}}) - \frac{\tau}{m} \dot{p}^2 = \frac{\tau}{2m} \frac{d^2 p^2}{dt^2} - m\tau \ddot{r}^2, \quad (2.68)$$

tal que, al sustituir la última igualdad de la ecuación (2.68) en (2.67), se llega a

$$\frac{d\mathcal{H}_R}{dt} = -m\tau \ddot{r}^2 + \frac{q_e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (2.69)$$

donde se ha definido  $\mathcal{H}_R$  como la función hamiltoniana mecánica  $\mathcal{H}$  más una corrección radiativa,

$$\mathcal{H}_R \equiv \frac{1}{2m}p^2 - \frac{\tau}{2m} \frac{dp^2}{dt} + \mathcal{V}(\mathbf{r}). \quad (2.70)$$

Es preciso notar que los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación (2.70) corresponden a un desarrollo de Taylor de la función  $p^2$  alrededor de  $\tau = 0$ , de tal manera que el hamiltoniano radiativo puede ser rescrito como

$$\mathcal{H}_R = \frac{1}{2m}p^2(t - \tau) + \mathcal{V}(\mathbf{r}). \quad (2.71)$$

Al igual que la solución no fugaz de la ecuación de Abraham-Lorentz, dada en la expresión (G.26), la última ecuación predice comportamientos preacelerados [32]. Sin embargo, como se menciona en el apéndice G, este comportamiento acausal es consecuencia de las aproximaciones hechas a la teoría con el fin de obtener la ecuación de Abraham-Lorentz [14]. Así, con base en la discusión hecha en dicho apéndice, se puede tomar  $\mathcal{H}_R \approx \mathcal{H}$  tal que se recupere la causalidad del presente desarrollo, siendo lo anterior válido por la magnitud despreciable de la preaceleración, y el hecho de que el promedio de la magnitud  $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}}$  es nulo para movimientos periódicos [32, 69, 71].

Al promediar sobre todas las realizaciones del campo eléctrico, partiendo de la ecuación (2.69), con  $\mathcal{H}$  independiente del tiempo, se arriba a que

$$m\tau\overline{\ddot{r}^2} = \frac{q_e}{m}\overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}. \quad (2.72)$$

La ecuación (2.72), que posee la misma información física que (2.65), muestra de manera explícita que es a través de las fluctuaciones del momento como el campo de radiación de punto cero cede su energía a la partícula.

Finalmente, partiendo del promedio fase de la ecuación (2.39), integrándola por partes dos veces consecutivas y utilizando la definición expresada en la ecuación (2.45), puede deducirse una expresión para  $d\langle\xi\rangle/dt$  en el límite markoviano de la teoría, obteniéndose que esta es igual a

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\xi\rangle}{dt} = & \left\langle \frac{d\xi}{dt} \right\rangle_{NR} + m\tau \left\langle \ddot{r}_j \frac{\partial\xi}{\partial p_j} \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial^2\xi}{\partial p_j \partial p_k} \right\rangle \\ & + \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial^2\xi}{\partial p_j \partial r_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\xi}{\partial p_j} \left( \frac{\partial\mathcal{D}_{jk}^{pp}}{\partial p_k} + \frac{\partial\mathcal{D}_{jk}^{pr}}{\partial r_k} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Puede demostrarse, como se hará al final de la subsección 2.4.4, que esta ecuación se reduce, en el límite markoviano, a la siguiente expresión

$$\frac{d\langle\xi\rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\xi}{dt} \right\rangle_{NR} + m\tau \left\langle \ddot{r}_j \frac{\partial\xi}{\partial p_j} \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial^2\xi}{\partial p_j \partial p_k} \right\rangle + \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial^2\xi}{\partial p_j \partial r_k} \right\rangle, \quad (2.74)$$

ya que el valor medio que involucra la suma de las derivadas de los coeficientes de difusión en la ecuación (2.73) es idénticamente cero [32].

## 2.3. Transición al espacio de configuración

La mecánica cuántica actual usualmente se desarrolla en términos de funciones de onda descritas en el espacio de configuración [25, 75]. Por ello es importante, con el fin de establecer contacto entre los desarrollos hechos hasta ahora y la mecánica cuántica, reducir la descripción hecha en el espacio fase a un problema en el espacio de configuración de la partícula. Para realizar dicha transición al espacio de configuración, se define la función característica  $\tilde{Q}$  como la transformada de Fourier de  $Q$  [2],

$$\mathcal{F}[Q](\mathbf{r}, \mathbf{z}, t) \equiv \tilde{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{z}, t) = \int Q(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}} d^3p. \quad (2.75)$$

Adicionalmente, el término de reacción radiativa  $m\tau\ddot{\mathbf{r}}$  puede ser aproximado al orden más bajo en  $\tau$ , o equivalentemente en  $q_e^2$ , al hacer un desarrollo en serie de potencias de la fuerza externa en la solución no fugaz de la ecuación de Abraham-Lorentz alrededor de  $\tau\xi = 0$  [59, 78], como se muestra en la ecuación (G.28), de tal forma que tenga que

$$m\tau\ddot{r}_j \approx \tau \frac{dF_j}{dt}, \quad (2.76)$$

de manera que el término de reacción radiativa puede expresarse alternativamente, utilizando la regla de la cadena, como

$$\tau \frac{dF_j}{dt} = \tau \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \frac{dr_k}{dt} = \frac{\tau}{m} \frac{\partial F_j}{\partial r_k} p_k. \quad (2.77)$$

Esta aproximación es válida en el límite temporal asintótico no radiativo [32], es decir, en un proceso markoviano no radiativo. Sustituyendo las expresiones (2.76) y (2.77) en (2.39) y obteniendo la transformada de Fourier de esta última ecuación, mediante la realización de algunas integraciones por partes, se llega a que en el límite markoviano se cumple que

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} - \frac{i}{m} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial r_j \partial z_j} - iz_j F_j \tilde{Q} - \frac{\tau}{m} z_j \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z_k} = -iz_j \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial Q}{\partial p_k} \right] - iz_j \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial Q}{\partial r_k} \right]. \quad (2.78)$$

Por otro lado, se define la densidad de probabilidad  $\rho(\mathbf{r}, t)$  en el espacio de configuración como la siguiente probabilidad marginal,

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \int Q(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p = \tilde{Q}(\mathbf{r}, 0, t). \quad (2.79)$$

Adicionalmente, se define el promedio local de una función genérica  $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  como la expresión siguiente

$$\langle \xi \rangle_{\mathbf{r}} \equiv \frac{1}{\rho} \int \xi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) Q d^3p. \quad (2.80)$$

Es importante notar que  $\langle \xi \rangle_{\mathbf{r}}$  representa una cantidad parcialmente promediada ya que esta continúa dependiendo del vector posición, de ahí el adjetivo de local. El promedio total de la función  $\xi$ , ecuación (2.40), está dado en términos de  $\langle \xi \rangle_{\mathbf{r}}$  por

$$\langle \xi \rangle = \int \langle \xi \rangle_{\mathbf{r}} \rho d^3 r. \quad (2.81)$$

La función característica  $\tilde{\mathcal{Q}}$  es también llamada función generadora de momentos, ya que es posible deducir todos los momentos locales de  $p_j$  a partir de ella [82]. Por ejemplo, el promedio local de  $p_j^r p_k^s p_l^t$  es [32]:

$$\langle p_j^r p_k^s p_l^t \rangle_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\rho} \int p_j^r p_k^s p_l^t \mathcal{Q} d^3 p = (-i)^{r+s+t} \left( \frac{1}{\tilde{\mathcal{Q}}} \frac{\partial^{r+s+t} \tilde{\mathcal{Q}}}{\partial z_j^r \partial z_k^s \partial z_l^t} \right) \Big|_{z=0}. \quad (2.82)$$

Para realizar la transición al espacio de configuración, se realiza un desarrollo en serie de potencias del término  $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}}$  en la ecuación (2.78) alrededor de  $z = 0$  [16, 26, 31], de tal manera que se obtenga que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \int \mathcal{Q} d^3 p + iz_k \int \mathcal{Q} p_k d^3 p - \frac{z_k z_l}{2} \int \mathcal{Q} p_k p_l d^3 p \right) \\ & + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \int \mathcal{Q} p_j d^3 p + iz_k \int \mathcal{Q} p_j p_k d^3 p \right) - \frac{z_k z_l}{2m} \frac{\partial}{\partial r_j} \int \mathcal{Q} p_j p_k p_l d^3 p \\ & - iz_j F_j \int \mathcal{Q} d^3 p + z_j z_k F_j \int \mathcal{Q} p_k d^3 p - \frac{i\tau z_j}{m} \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \int \mathcal{Q} p_k d^3 p \\ & + \frac{\tau z_j z_l}{m} \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \int \mathcal{Q} p_k p_l d^3 p + iz_j \left( \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} \right] + \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right] \right) \Big|_{z=0} \\ & - z_j z_l \left( \mathcal{F} \left[ p_l \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} \right] + \mathcal{F} \left[ p_l \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right] \right) \Big|_{z=0} + \mathcal{O}(z^3) = 0. \quad (2.83) \end{aligned}$$

La ecuación anterior puede expresarse en términos de los promedios locales del momento, a partir de la definición expresada en la ecuación (2.80), como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + iz_k \frac{\partial \rho \langle p_k \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{z_k z_l}{2} \frac{\partial \rho \langle p_k p_l \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \rho \langle p_j \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial r_j} + \frac{iz_k}{m} \frac{\partial \rho \langle p_j p_k \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial r_j} \\ & - \frac{z_k z_l}{2m} \frac{\partial \rho \langle p_j p_k p_l \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial r_j} - iz_j F_j \rho + z_j z_k F_j \rho \langle p_k \rangle_{\mathbf{r}} - \frac{i\tau z_j}{m} \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \rho \langle p_k \rangle_{\mathbf{r}} \\ & + \frac{\tau z_j z_l}{m} \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \rho \langle p_k p_l \rangle_{\mathbf{r}} + iz_j \left( \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} \right] + \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right] \right) \Big|_{z=0} \\ & - z_j z_l \left( \mathcal{F} \left[ p_l \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} \right] + \mathcal{F} \left[ p_l \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right] \right) \Big|_{z=0} + \mathcal{O}(z^3) = 0. \quad (2.84) \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, las primeras tres ecuaciones que pueden obtenerse de la expresión anterior, para los términos independientes, lineales y cuadráticos en las componentes de  $\mathbf{z}$ , son las siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \rho \langle p_j \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial r_j} = 0; \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \langle p_j \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \rho \langle p_j p_k \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial r_k} - F_j \rho - \frac{\tau}{m} \frac{\partial F_j}{\partial r_k} \rho \langle p_k \rangle_{\mathbf{r}} \\ = - \left( \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} \right] + \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right] \right) \Big|_{z=0}; \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \langle p_j p_k \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \rho \langle p_j p_k p_l \rangle_{\mathbf{r}}}{\partial r_l} - (F_j \langle p_k \rangle_{\mathbf{r}} + F_k \langle p_j \rangle_{\mathbf{r}}) \rho + \frac{2\tau}{m} \left[ \frac{\partial F_j}{\partial r_l} \langle p_k p_l \rangle_{\mathbf{r}} + \frac{\partial F_k}{\partial r_l} \langle p_j p_l \rangle_{\mathbf{r}} \right] \rho \\ = \left( \mathcal{F} \left[ p_k \mathcal{D}_{jl}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_l} \right] + \mathcal{F} \left[ p_j \mathcal{D}_{kl}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_l} \right] + \mathcal{F} \left[ p_k \mathcal{D}_{jl}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_l} \right] + \mathcal{F} \left[ p_j \mathcal{D}_{kl}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_l} \right] \right) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

La ecuación (2.85) está acoplada con (2.86) a través del primer momento de  $p$ , de la misma forma, las ecuaciones (2.86) y (2.87) están relacionadas vía el segundo momento de  $p$ , y así sucesivamente para el resto de las ecuaciones que pueden ser obtenidas para cada potencia de  $z$  en el desarrollo de la ecuación (2.78). En ese sentido, las ecuaciones (2.85), (2.86) y (2.87) son los tres primeros términos de un conjunto infinito de ecuaciones no lineales acopladas entre sí [16, 31].

La ecuación (2.85) es una ecuación de continuidad en el espacio de configuración que describe la transferencia de materia [48, 57, 68]. Al definir la densidad local de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  como  $\rho \langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}} / m$  y la velocidad de flujo como

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}}, \quad (2.88)$$

[32], se tiene que la ecuación (2.85) es equivalente a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_j}{\partial r_j} = 0. \quad (2.89)$$

El vector  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  representa una velocidad media local que describe un promedio sobre un subsamplado de partículas, que para un tiempo  $t$  dado están localizadas en la vecindad de  $\mathbf{r}$  y se mueven con velocidad  $\mathbf{p}/m$  [32].

La ecuación (2.86), por otro lado, describe la transferencia de momento lineal local, o equivalentemente, la evolución del vector de densidad local de corriente [16, 31], ya que al sustituir la definición de este último y al definir el tensor de densidad local de flujo de momento lineal como  $\Theta_{jk} \equiv \rho \langle p_j p_k \rangle_{\mathbf{r}} / m^2$  [68], se observa que

$$\frac{\partial J_j}{\partial t} + \frac{\partial \Theta_{jk}}{\partial r_k} = \frac{\rho F_j}{m} + \frac{\tau J_k}{m} \frac{\partial F_j}{\partial r_k} - \frac{1}{m} \left( \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} \right] + \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right] \right) \Big|_{z=0}. \quad (2.90)$$

La ecuación (2.87) describe, consecutivamente, el flujo medio local de energía [32]. Así, las ecuaciones para mayores potencias de  $z$  representan ecuaciones de transporte adicionales, cada una conteniendo una nueva función local de la forma  $\langle p^n \rangle_{\mathbf{r}}$  [26]. Es por esto que la descripción en el espacio fase es equivalente a un conjunto infinito de ecuaciones de transporte en el espacio de configuración. Sin embargo, para valores pequeños de  $z$ , la ecuación (2.78) puede ser aproximada a primer orden, de tal modo que la descripción en el espacio de configuración se reduzca únicamente a las ecuaciones (2.85) y (2.86) [16].

Los primeros dos momentos estadísticos del momento  $p$  pueden ser rescritos, en términos de la función  $\tilde{Q}$ , a partir de la ecuación (2.82) como:

$$\langle p_j \rangle_{\mathbf{r}} = -i \left( \frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z_j} \right) \Big|_{z=0} = -i \left( \frac{\partial \ln \tilde{Q}}{\partial z_j} \right) \Big|_{z=0}; \quad (2.91)$$

$$\langle p_j p_k \rangle_{\mathbf{r}} = \left( \frac{1}{\tilde{Q}} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial z_k \partial z_j} \right) \Big|_{z=0} = - \left( \frac{\partial^2 \ln \tilde{Q}}{\partial z_k \partial z_j} \right) \Big|_{z=0} + \langle p_j \rangle_{\mathbf{r}} \langle p_k \rangle_{\mathbf{r}}. \quad (2.92)$$

Al definir un nuevo conjunto de variables en términos de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{z}$  como:

$$\mathbf{z}_+ \equiv \mathbf{r} + \eta \mathbf{z}; \quad (2.93)$$

$$\mathbf{z}_- \equiv \mathbf{r} - \eta \mathbf{z}, \quad (2.94)$$

y expresar la función  $\tilde{Q}$  como el siguiente producto de funciones

$$\tilde{Q}(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t) = \varphi_+(\mathbf{z}_+, t) \varphi_-(\mathbf{z}_-, t) \chi(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t), \quad (2.95)$$

con  $\eta$  un parámetro real con dimensiones de acción, aún por determinar, y la función  $\chi(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t)$  denotando las partes no factorizables en términos de  $\mathbf{z}_+$  y  $\mathbf{z}_-$  de  $\tilde{Q}(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t)$  [16, 26, 31], se observa de la ecuación (2.75) que

$$\tilde{Q}^*(\mathbf{r}, \mathbf{z}, t) = \tilde{Q}(\mathbf{r}, -\mathbf{z}, t), \quad (2.96)$$

de forma que:

$$\varphi_+(\mathbf{z}_{\pm}, t) = \varphi^*(\mathbf{z}_{\pm}, t); \quad (2.97)$$

$$\chi^*(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t) = \chi(\mathbf{z}_-, \mathbf{z}_+, t). \quad (2.98)$$

Por la ecuación (2.97), se tiene que la función  $\tilde{Q}$  puede ser expresada como

$$\tilde{Q}(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t) = \varphi(\mathbf{z}_+, t) \varphi^*(\mathbf{z}_-, t) \chi(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t), \quad (2.99)$$

donde se ha expresado  $\varphi_+ \equiv \varphi$ . Al expresar la densidad de probabilidad  $\rho$  en términos de la función compleja  $\varphi$  y la función  $\chi$ , se obtiene que

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \tilde{Q}(\mathbf{r}, 0, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) \varphi^*(\mathbf{r}, t) \chi_0(\mathbf{r}, t), \quad (2.100)$$

donde se ha definido  $\chi_0(\mathbf{r}, t)$  como la función evaluada  $\chi(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t)|_{\mathbf{z}_+ = \mathbf{z}_-}$ , una función real, que puede ser considerada como una constante, al ceder sus posibles dependencias de la posición y el tiempo a las funciones  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  y  $\varphi^*(\mathbf{r}, t)$  [32]. Si en particular se toma que

$$\chi_0(\mathbf{r}, t) = 1, \quad (2.101)$$

se tiene, sin pérdida de generalidad, de la ecuación (2.100), que la densidad de probabilidad se reduce a

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t)\varphi^*(\mathbf{r}, t). \quad (2.102)$$

Con base en en las ecuaciones anteriores, de (2.93) a (2.102), se tiene, de los primeros momentos estadísticos de  $p$ , ecuaciones (2.91) y (2.92), que

$$\langle p_j \rangle_{\mathbf{r}} = -i\eta \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \left( \frac{\varphi(\mathbf{r}, t)}{\varphi^*(\mathbf{r}, t)} \right) + g_j, \quad (2.103)$$

donde se definió la componente  $j$ -ésima de la función vectorial  $\mathbf{g}$  como

$$g_j \equiv i\eta \left( \frac{\partial}{\partial z_{-j}} - \frac{\partial}{\partial z_{+j}} \right) \ln \chi \Big|_{z_+ = z_-}, \quad (2.104)$$

y el elemento  $jk$ -ésimo de la dispersión del momento lineal  $\Gamma$  como

$$\Gamma_{jk} \equiv \langle p_j p_k \rangle_{\mathbf{r}} - \langle p_j \rangle_{\mathbf{r}} \langle p_k \rangle_{\mathbf{r}} = -\eta^2 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} \ln \rho(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{jk}, \quad (2.105)$$

con la entrada  $jk$ -ésima del tensor  $\Sigma$  dada por

$$\Sigma_{jk} = \Sigma_{kj} = \eta^2 \left( \frac{\partial}{\partial z_{-k}} - \frac{\partial}{\partial z_{+k}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z_{+j}} - \frac{\partial}{\partial z_{-j}} \right) \ln \chi \Big|_{z_+ = z_-}. \quad (2.106)$$

Puede observarse que las funciones  $\mathbf{g}$  y  $\Sigma$  solo dependen de la parte no factorizable de  $\tilde{\mathcal{Q}}$ , es decir, están únicamente determinadas por la forma de la función  $\chi(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t)$ .

Al sustituir las definiciones y resultados expuestos en las expresiones (2.88), (2.103) y (2.105) en las ecuaciones (2.85) y (2.86), se obtiene que la descripción de la dinámica de la partícula en el espacio de configuración, hasta primer orden en  $z$ , está determinada por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial r_j} = 0; \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \rho v_j}{\partial t} + m \frac{\partial \rho v_j v_k}{\partial r_k} - \frac{\eta^2}{m} \frac{\partial}{\partial r_k} \left( \rho \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_k} \ln \rho \right) + \frac{1}{m} \frac{\partial \Sigma_{jk} \rho}{\partial r_k} - F_j \rho \\ = \tau \rho v_k \frac{\partial F_j}{\partial r_k} - \left( \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} \right] + \mathcal{F} \left[ \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right] \right) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.108)$$



Las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas alternativamente, en notación vectorial, como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + m \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + m \mathbf{v} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) - \frac{\eta^2}{m} \nabla \cdot (\rho \hat{\text{Hess}}(\ln \rho)) + \frac{1}{m} \nabla \cdot \rho \Sigma - \rho \mathbf{F} \\ = \tau \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathcal{F}[(\mathbb{D}^{\text{pp}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}) \mathcal{Q}] + \mathcal{F}[(\mathbb{D}^{\text{pf}} \cdot \nabla) \mathcal{Q}]) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

En la ecuación (2.110) se ha definido el operador hessiano,  $\hat{\text{Hess}}_{jk} \equiv \partial^2 / \partial r_j \partial r_k$ , como un operador tensorial que obtiene la matriz hessiana de la función escalar a la que se aplica, es decir, la matriz formada por las segundas derivadas de dicha función escalar [13],

$$\hat{\text{Hess}}(\xi) \equiv \nabla(\nabla \xi) = \begin{bmatrix} \partial^2 \xi / \partial x^2 & \partial^2 \xi / \partial x \partial y & \partial^2 \xi / \partial x \partial z \\ \partial^2 \xi / \partial y \partial x & \partial^2 \xi / \partial y^2 & \partial^2 \xi / \partial y \partial z \\ \partial^2 \xi / \partial z \partial x & \partial^2 \xi / \partial z \partial y & \partial^2 \xi / \partial z^2 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

Adicionalmente, se han denotado  $\Sigma$ ,  $\mathbb{D}^{\text{pp}}$  y  $\mathbb{D}^{\text{pf}}$  como tensores de segundo orden, a los cuales se arriba al aplicar el operador gradiente a funciones vectoriales.

Es claro que, en el cuarto término de la izquierda de la ecuación (2.110), el hessiano del logaritmo de  $\rho$  puede ser rescrito, en términos de  $\sqrt{\rho}$ , mediante la aplicación consecutiva de la regla de la cadena y la regla de derivación de un producto como

$$\hat{\text{Hess}}(\ln \rho) = 2 \hat{\text{Hess}}(\ln \sqrt{\rho}) = 2 \nabla(\nabla \ln \sqrt{\rho}) = 2 \nabla \left( \frac{\nabla \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right). \quad (2.112)$$

Llegándose a que

$$\hat{\text{Hess}}(\ln \rho) = \frac{2}{\sqrt{\rho}} \hat{\text{Hess}}(\sqrt{\rho}) - \frac{2}{\rho} (\nabla \sqrt{\rho})(\nabla \sqrt{\rho}), \quad (2.113)$$

recordando que en el último término de la expresión anterior se tiene un producto exterior entre los vectores  $\nabla \sqrt{\rho}$ . De esta forma, todo el término mencionado, puede ser expresado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \cdot (\rho \hat{\text{Hess}}(\ln \rho))}{\rho} &= \nabla \cdot \hat{\text{Hess}}(\ln \rho) + \frac{\nabla \rho \cdot \hat{\text{Hess}}(\ln \rho)}{\rho} \\ &= 2 \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) - 2 \nabla \left( \frac{(\nabla \sqrt{\rho})^2}{\rho} \right) + \frac{4}{\rho} (\nabla \sqrt{\rho}) \cdot \nabla(\nabla \sqrt{\rho}) - \frac{4(\nabla \sqrt{\rho})^2}{\rho^{3/2}} \nabla \sqrt{\rho} \\ &= 2 \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) + \frac{4}{\rho} (\nabla \sqrt{\rho}) \cdot \nabla(\nabla \sqrt{\rho}) - \frac{4(\nabla \sqrt{\rho})^2}{\rho^{3/2}} \nabla \sqrt{\rho} \\ &\quad - 2(\nabla \sqrt{\rho})^2 \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{2}{\rho} \nabla(\nabla \sqrt{\rho})^2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Finalmente, al aplicar la regla de la cadena para la derivación en los dos últimos términos de la expresión anterior, esta última se reduce a

$$\frac{\nabla \cdot (\rho \hat{\text{Hess}}(\ln \rho))}{\rho} = 2\nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right). \quad (2.115)$$

Aplicando este resultado en la ecuación (2.110), se obtiene que dicha ecuación puede expresarse, al dividirla toda entre  $\rho$  y expresar la fuerza  $\mathbf{F}$  en términos del gradiente del potencial  $\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{F} = -\nabla\mathcal{V}$ , como

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla \left( \mathcal{V} - \frac{2\eta^2}{m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) + \frac{1}{m\rho} \nabla \cdot \rho \Sigma \\ = \tau(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \frac{(\mathcal{F}[(\mathbb{D}^{\text{pp}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}})\mathcal{Q}] + \mathcal{F}[(\mathbb{D}^{\text{pr}} \cdot \nabla)\mathcal{Q}])}{\rho} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

donde, además, se ha sustituido la ecuación (2.109) y se ha utilizado la regla de derivación de productos para el término  $\rho\mathbf{v}$  en la ecuación (2.110). Es importante notar que la ecuación (2.116) contiene toda la información física de las ecuaciones (2.109) y (2.110), de tal forma que esta es la ecuación diferencial que describe, en el espacio de configuración, la dinámica de la partícula en interacción con el CPC bajo la aproximación propuesta.

Como se mencionó con anterioridad, la ecuación (2.116) es similar, en su forma matemática, a la ecuación de conservación del flujo de momento para un fluido viscoso en la hidrodinámica clásica [48, 57, 68], con un tensor de estrés o esfuerzos igual a  $\rho\Sigma/m^2$ . La diferencia entre ambos sistemas radica en el hecho de que el término proporcional a  $(\nabla^2 \sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$  es cinético, no disipativo y de origen estocástico, que se manifiesta como una característica natural de los sistemas de la EDE [26].

## 2.4. La ecuación generalizada de Schrödinger

La ecuación (2.116) puede describirse, utilizando  $\nabla H^2 = 2\mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + 2(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H}$  [2], de la siguiente manera

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{m}{2} \nabla v^2 - m\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \left( \mathcal{V} - \frac{2\eta^2}{m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = \mathbf{F}_{\text{rad}} + \mathbf{F}_{\Sigma}, \quad (2.117)$$

donde se han definido los vectores de fuerza  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  y  $\mathbf{F}_{\Sigma}$  como:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \tau(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \frac{(\mathcal{F}[(\mathbb{D}^{\text{pp}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}})\mathcal{Q}] + \mathcal{F}[(\mathbb{D}^{\text{pr}} \cdot \nabla)\mathcal{Q}])}{\rho} \Big|_{z=0}; \quad (2.118)$$

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = -\frac{1}{m\rho} \nabla \cdot \rho \Sigma. \quad (2.119)$$

Adicionalmente, la función  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  puede expresarse, en términos de la ecuación (2.102), en su forma polar de la siguiente manera,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho} e^{i\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.120)$$

denotando  $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$  la parte imaginaria de  $\varphi$ . Sustituyendo el resultado anterior en la expresión para el promedio local del momento, ecuación (2.103), y utilizando la expresión para la velocidad media local de la partícula, ecuación (2.88), se obtiene que

$$m\mathbf{v} = -i\eta \nabla \ln \left( \frac{\varphi(\mathbf{r}, t)}{\varphi^*(\mathbf{r}, t)} \right) + \mathbf{g} = 2\eta \nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{g}, \quad (2.121)$$

lo que implica, en conjunto con el resultado de que el rotacional de un vector gradiente es siempre nulo [2], que el rotacional de  $m\mathbf{v}$  se reduzca a

$$\nabla \times m\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{g}. \quad (2.122)$$

Al sustituir el rotacional de  $m\mathbf{v}$  y la ecuación (2.121) en el tercer término de la ecuación de movimiento (2.117) se llega a la igualdad siguiente

$$\nabla M = \mathbf{F}_{\text{rad}} + \mathbf{F}_{\Sigma} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{g}), \quad (2.123)$$

en la cual se ha definido que

$$M \equiv 2\eta \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2} m v^2 - \frac{2\eta^2}{m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \mathcal{V}. \quad (2.124)$$

La ecuación (2.124) es esencialmente, para el caso particular en que  $M = 0$  y  $\eta = \hbar/2$ , la ecuación del tipo Hamilton-Jacobi de la teoría desarrollada por D. Bohm en 1952, la cual se deduce a partir de la ecuación de Schrödinger [8]. Adicionalmente, la ecuación mencionada es precisamente una de las ecuaciones fundamentales de la teoría estocástica de la mecánica cuántica, es decir, la contraparte fenomenológica del presente desarrollo [18, 28, 32]. Por esto, el desarrollo hecho ofrece una justificación física de los postulados de la mecánica cuántica estocástica y permite la determinación de parámetros libres desde primeros principios [26].

De la ecuación (2.120) puede obtenerse que  $\ln \varphi = (1/2) \ln \rho + i\mathcal{S}$ , expresión que al ser sustituida en la ecuación (2.109) conduce a

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\frac{i}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i \nabla \cdot \mathbf{v}}{2} - \frac{i \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi}{\varphi} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{S}. \quad (2.125)$$

La derivada temporal anterior puede ser rescrita en términos de la ecuación (2.121) como

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\frac{i}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i\eta}{m} \nabla^2 \mathcal{S} - \frac{i}{2m} \nabla \cdot \mathbf{g} - \frac{2i\eta}{m\varphi} \nabla \mathcal{S} \cdot \nabla \varphi - \frac{i}{m\varphi} \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi - \frac{2\eta}{m} (\nabla \mathcal{S})^2 - \frac{1}{m} \mathbf{g} \cdot \nabla \mathcal{S}. \quad (2.126)$$

Al sustituir el último resultado y la expresión (2.121),  $mv^2 = (2\eta\nabla\mathcal{S} + \mathbf{g})^2/m$ , en la ecuación (2.124) se obtiene que

$$M = \frac{1}{\varphi} \left[ -2i\eta \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(-2i\eta\nabla + \mathbf{g})^2}{2m} \varphi + \mathcal{V}\varphi \right] - \frac{2\eta^2}{m} \left[ i\nabla^2\mathcal{S} + \frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} - (\nabla\mathcal{S})^2 + \frac{i}{\rho}\nabla\mathcal{S} \cdot \nabla\rho - \frac{\nabla^2\varphi}{\varphi} \right]. \quad (2.127)$$

Es notable que la expresión  $\varphi^{-1}\nabla^2\varphi$  puede escribirse en términos de las funciones  $\mathcal{S}$  y  $\rho$ , a partir de la ecuación (2.120), como

$$\frac{\nabla^2\varphi}{\varphi} = \frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + i\nabla^2\mathcal{S} + \frac{i}{\rho}\nabla\mathcal{S} \cdot \nabla\rho - (\nabla\mathcal{S})^2, \quad (2.128)$$

de tal forma que el segundo paréntesis cuadrado de la expresión (2.127) es nulo. Con base en lo anterior, se tiene que la ecuación de movimiento (2.117) se reduce a la siguiente igualdad,

$$\nabla \left( \frac{1}{\varphi} \hat{M}\varphi \right) = \mathbf{F}_{\text{rad}} + \mathbf{F}_{\Sigma} - \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{g}), \quad (2.129)$$

donde se ha definido el operador lineal  $\hat{M}$  como los términos diferenciales y constantes no nulos de la expresión (2.127), es decir,

$$\hat{M} \equiv -2i\eta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(-2i\eta\nabla + \mathbf{g})^2}{2m} + \mathcal{V}. \quad (2.130)$$

La ecuación (2.129) se conoce como ecuación generalizada de Schrödinger dentro del formalismo de la EDE [32], pues esta se reduce, como se mostrará en la siguiente subsección, a la ecuación de Schrödinger al tomar el límite no radiativo de la teoría.

### 2.4.1. El régimen no radiativo

Las fuerzas presentes en el lado derecho de la ecuación (2.129) son las responsables de la dinámica desarrollada por la partícula cargada al estar en interacción con el CPC, por lo que es relevante analizar el origen físico de cada una de ellas por separado.

El primer término del lado derecho de la definición de  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$ , ecuación (2.118), tiene un efecto disipativo en el movimiento de la partícula originado por la reacción radiativa [32]. En ausencia del segundo término de la ecuación (2.118), el término de reacción de radiación conduciría al decaimiento del sistema a su estado clásico de mínima energía. En este sentido, la reacción radiativa provocaría, por ejemplo, que el electrón orbital de un átomo de hidrógeno emita toda su energía cinética en forma de radiación, precipitándose al núcleo, colapsando así dicho átomo. Por su parte, el segundo término de  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  ejerce una

acción permanente y aleatoria sobre el movimiento de la carga originado por las fluctuaciones del CPC [32]. En ausencia de la reacción radiativa, este segundo término conduciría a un movimiento electrónico errático e inestable. Además, este término involucra efectos de memoria, ya que en su definición posee integraciones temporales desde el momento inicial hasta el tiempo  $t$  [32], ecuaciones (2.36) y (2.37).

Como se mencionó con anterioridad, son de particular interés aquellas situaciones en las que la acción combinada de las fuerzas disipativas y fluctuantes conducen a una condición de balance energético, ecuación (2.65). Bajo estas condiciones todo efecto residual, proveniente de los términos radiativos, conduce a correcciones menores en la ecuación (2.129) que pueden ser despreciadas en una primera aproximación [18]. Es precisamente esta situación, conocida como la aproximación no radiativa [18, 32], la que conduce a una reducción de la ecuación (2.129) dada por

$$\nabla \left( \frac{1}{\varphi} \hat{M}\varphi \right) = \mathbf{F}_{\Sigma} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{g}). \quad (2.131)$$

Como puede observarse en las ecuaciones (2.104) y (2.106), los términos restantes en el lado derecho de la ecuación (2.131) dependen, respectivamente, de la primera y segunda derivadas de  $\chi(\mathbf{z}_+, \mathbf{z}_-, t)$  evaluadas en  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Sin embargo, a pesar de que la función  $\chi$  es desconocida, la forma de la ecuación (2.131) sugiere un significado físico para los términos  $\mathbf{g}$  y  $\Sigma$ . En este sentido, es notable que los términos que dependen explícitamente de  $\mathbf{g}$  tienen la estructura de la fuerza de Lorentz,  $q_e(\mathbf{E}_{\chi} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\chi})$ , indicando que dicho vector juega el papel de un potencial magnético efectivo [32], dado por

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = -q_e \mathbf{A}_{\chi}(\mathbf{r}, t), \quad (2.132)$$

tal que de las ecuaciones (A.46) y (A.47) se tenga que  $\mathbf{E}_{\chi} = -\partial \mathbf{A}_{\chi} / \partial t$  y que  $\mathbf{B}_{\chi} = \nabla \times \mathbf{A}_{\chi}$ . En este sentido, se observa que al sustituir la ecuación (2.132) en (2.103), se obtiene la relación correcta entre el momento mecánico local  $\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}}$  y el momento canónico local  $\langle \mathbf{P} \rangle_{\mathbf{r}}$  [52], como puede observarse en la ecuación (F.11),

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}} = -i\eta \nabla \ln \left( \frac{\varphi(\mathbf{r}, t)}{\varphi^*(\mathbf{r}, t)} \right) + \mathbf{g} = \langle \mathbf{P} \rangle_{\mathbf{r}} - q_e \mathbf{A}_{\chi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.133)$$

Por otro lado, la estructura de la fuerza  $\mathbf{F}_{\Sigma}$ , ecuaciones (2.106) y (2.119), sugiere asignarle al tensor  $\Sigma$  el rol de un tensor de estrés efectivo transmitido a través del campo  $\mathbf{A}_{\chi}$  [32]. Por los argumentos anteriores, dentro del marco de la aproximación no radiativa todos los términos que contengan al vector  $\mathbf{g}$  o al tensor  $\Sigma$  pueden ser despreciados de forma independiente cada uno [32], lo que conduce a que la ecuación (2.131) se reduzca a

$$\nabla \left( \frac{1}{\varphi} \hat{M}\varphi \right) = \nabla \left[ \frac{1}{\varphi} \left( -2i\eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{2\eta^2}{m} \nabla^2 \varphi + \mathcal{V}\varphi \right) \right] = 0, \quad (2.134)$$

de tal forma que, bajo un primer proceso de integración, se tenga que

$$-2i\eta\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{2\eta^2}{m}\nabla^2\varphi + \mathcal{V}\varphi = \mathcal{C}(t)\varphi, \quad (2.135)$$

donde  $\mathcal{C}(t)$  es una función arbitraria, en general dependiente del tiempo.

Si se supone que la función  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  es de la forma siguiente

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)e^{\frac{i}{2\eta}\int \mathcal{C}(t')dt'}, \quad (2.136)$$

entonces se obtiene que la densidad de probabilidad está dada, en términos de las ecuaciones (2.102) y (2.136), por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t), \quad (2.137)$$

y que la ecuación (2.135) se reduce a

$$-\frac{2\eta^2}{m}\nabla^2\psi + \mathcal{V}\psi = 2i\eta\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (2.138)$$

Sin pérdida de generalidad, puede elegirse en la ecuación (2.136) que la función resultante del proceso de integración sea nula [18, 32],  $\mathcal{C}(t) = 0$ , de tal forma que

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.139)$$

La ecuación (2.138) tiene precisamente la forma de la ecuación de Schrödinger para la amplitud de probabilidad  $\psi$  en términos del aún indeterminado parámetro  $\eta$ .

La función de onda  $\psi$  puede ser expresada en su forma polar, también llamada representación de Madelung [72], según las ecuaciones (2.120) y (2.139), como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho}e^{i\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)}. \quad (2.140)$$

De tal manera que, en la aproximación no radiativa, se observa que el momento canónico local coincide con el momento mecánico local, ya que de las ecuaciones (2.141) y (2.140) se tiene que

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}} = -i\eta\nabla \ln \left( \frac{\psi(\mathbf{r}, t)}{\psi^*(\mathbf{r}, t)} \right) = 2\eta\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{P} \rangle_{\mathbf{r}}. \quad (2.141)$$

Adicionalmente, de la ecuación (2.105), se tiene que la dispersión del momento es

$$\langle p^2 \rangle_{\mathbf{r}} - \langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}}^2 = -\eta^2\nabla^2 \ln \rho. \quad (2.142)$$

Al realizar la aproximación no radiativa, se tiene que las primeras dos ecuaciones del conjunto infinito de ecuaciones de transporte obtenibles de la ecuación (2.78) se convierten en un sistema independiente de dos ecuaciones no lineales para  $\rho(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  completamente desacoplado del resto de ecuaciones de dicho conjunto infinito [32], el cual está dado por:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0; \quad (2.143)$$

$$m \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + m \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + m \mathbf{v} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) - \frac{\eta^2}{m} \nabla \cdot (\rho \hat{\mathbb{H}} \text{ess}(\ln \rho)) - \rho \mathbf{F} = 0. \quad (2.144)$$

La forma de ambas ecuaciones, (2.143) y (2.144), es similar a las ecuaciones obtenidas de la teoría cinética para un fluido [48], como se mencionó con anterioridad. Sin embargo, para llevar a cabo una analogía hidrodinámica de esta clase se tendría que tratar al término proporcional a  $\eta^2$ , en la ecuación (2.144), como un tipo de estrés actuando sobre un “fluido cuántico”, lo cual resulta en una interpretación artificial, ya que ningún fluido real soportaría un estrés de esa forma [18, 32].

Conceptualmente, el término proporcional a  $\eta^2$  no requiere de ninguna interpretación adicional en el presente contexto, ya que de acuerdo con las ecuaciones (2.105) y (2.142) es generado por las correlaciones y fluctuaciones en el momento. Una propiedad importante de dicho término es su naturaleza no local manifestada a través de su dependencia en la distribución de partículas en todo el espacio de configuración  $\rho$  [16, 18, 31]. Es por esto que el término proporcional a  $\eta^2$  ha de considerarse como un punto clave en la explicación de fenómenos tan peculiares como las fluctuaciones y la no localidad cuánticas [32]. Es precisamente este término, en la forma en la que se halla expuesto en la ecuación (2.117), el equivalente al llamado potencial cuántico, deducido por Bohm en su interpretación de la teoría cuántica en términos de variables ocultas [8], denotado por

$$\mathcal{V}_Q = -\frac{2\eta^2}{m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (2.145)$$

Esta es la razón de que la presencia del término proporcional a  $\eta^2$ , en las ecuaciones de la dinámica de la partícula en el espacio de configuración, sea un indicativo definitivo de una desviación de los comportamientos usuales descritos por la física clásica.

### 2.4.2. Promedios estadísticos y cuánticos

Con la introducción de la función de onda  $\psi(\mathbf{r}, t)$  en la ecuación (2.136), es posible describir las definiciones de los promedios estadísticos en términos de esta. De las ecuaciones (2.81) y (2.141) se tiene que el valor medio del momento es

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int \rho \langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}} d^3r = -i\eta \int \rho \nabla \ln \left( \frac{\psi}{\psi^*} \right) d^3r = -i\eta \int (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) d^3r. \quad (2.146)$$

Al realizar una integración por partes en el segundo término de la última igualdad en la ecuación anterior, y suponiendo que  $\rho$  es nula en infinito, se obtiene que

$$\langle \mathbf{p} \rangle = -2i\eta \int \psi^* \nabla \psi d^3r = \int \psi^* \hat{\mathbf{p}}_\eta \psi d^3r, \quad (2.147)$$

donde se ha definido el operador diferencial de momento  $\hat{\mathbf{p}}_\eta$  como

$$\hat{\mathbf{p}}_\eta \equiv -2i\eta \nabla. \quad (2.148)$$

De forma similar puede hallarse, de la ecuación (2.142), que el segundo momento estadístico del vector momento se expresa, en términos de la función de onda, como

$$\langle p^2 \rangle = \int \rho \langle p^2 \rangle_{\mathbf{r}} d^3 r = \int (\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}}^2 - \eta^2 \nabla^2 \ln \rho) \rho d^3 r = \int \psi^* \hat{p}_\eta^2 \psi d^3 r. \quad (2.149)$$

Por otro lado, ya que cualquier función de la forma  $\xi(\mathbf{r}, t)$  coincide con su valor medio local  $\langle \xi \rangle_{\mathbf{r}}$ , ecuación (2.80), se tiene de la ecuación (2.137) que

$$\langle \xi \rangle = \int \rho \xi(\mathbf{r}, t) d^3 r = \int \psi^* \xi(\hat{\mathbf{r}}, t) \psi d^3 r, \quad (2.150)$$

donde  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}$ . Como resultado, en el presente formalismo los promedios estadísticos  $\langle \mathbf{p} \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$  y  $\langle \xi \rangle$  coinciden con los promedios definidos por las normas cuánticas usuales,

$$\langle \hat{\zeta} \rangle \equiv \int \psi^* \hat{\zeta} \psi d^3 r, \quad (2.151)$$

en términos de un operador  $\hat{\zeta}$  apropiado, asociado a la variable dinámica  $\zeta$  [32]. En particular, si  $\zeta = \mathcal{H}$  se tiene, de las ecuaciones (2.138) y (2.148), que los operadores hamiltoniano y de energía son:

$$\hat{\mathcal{H}}_\eta \equiv \frac{\hat{p}_\eta^2}{2m} + \mathcal{V}(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{2\eta^2}{m} \nabla^2 + \mathcal{V}(\hat{\mathbf{r}}); \quad (2.152)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_\eta \equiv 2i\eta \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.153)$$

Como se mostró con anterioridad, en el límite asintótico temporal, dentro del régimen no radiativo, la dinámica del subsistema mecánico de la partícula en interacción permanente con el campo de punto cero fluctuante está gobernada por la ecuación (2.138), es decir, por una ecuación tipo Schrödinger, lo que significa que las reglas cuánticas, en términos del aun desconocido parámetro  $\eta$ , que emergen de este tipo de estructura matemática son aplicables [32]. Bajo estas circunstancias, las variables dinámicas del sistema pasan a ser representadas por sus correspondientes operadores cuánticos, los cuales, en general, no conmutan entre sí. y cuyos valores de expectación son calculados con las herramientas cuánticas usuales. En particular, significa que los paréntesis, o corchetes, de Poisson clásicos deben ser remplazados por conmutadores cuánticos [32] de acuerdo con la siguiente transformación,

$$[\xi, \zeta]_{clas} \rightarrow \frac{1}{2i\eta} [\hat{\xi}, \hat{\zeta}]. \quad (2.154)$$

El argumento anterior es de crucial importancia, ya que es en este punto de la teoría donde se da la transición de lo clásico a lo cuántico: cuando la ecuación de Schrödinger opera, son las reglas asociadas a esta las que toman relevancia. Adicionalmente, la necesidad de representar a las variables dinámicas mediante operadores una vez alcanzado el régimen cuántico se muestra en el apéndice H, donde se estudia la descripción de Heisenberg.



### 2.4.3. El límite estacionario

Como se ha mencionado antes, una condición suficiente para que se cumpla que

$$\frac{d\langle \xi \rangle_{\mathbf{r}}}{dt} = 0, \quad (2.155)$$

es que el sistema físico haya alcanzado un estado estacionario, en el cual  $\partial Q/\partial t = 0$ . Si se cumple esto, entonces la función  $\mathcal{Q}$  es de la forma  $\mathcal{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , de tal manera que la distribución marginal  $\rho$  depende únicamente de la posición. En esta situación, la velocidad media local, ecuación (2.88), se vuelve independiente del tiempo,

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \int \mathbf{p} \mathcal{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 p = m\mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (2.156)$$

Si la velocidad media local es independiente del tiempo, se tiene, de la ecuación (2.141), que  $\nabla \mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$  es también una función independiente del tiempo, de tal forma que puede descomponerse la función  $\mathcal{S}$  como  $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}) + \mathcal{S}(t)$ . Así, de la ecuación (2.140), la función de onda puede expresarse en este límite como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{i(s(\mathbf{r}) + \mathcal{S}(t))} = \phi(\mathbf{r}) e^{i\mathcal{S}(t)}, \quad (2.157)$$

donde se ha definido, en la última igualdad, la función  $\phi(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{\rho(\mathbf{r})} e^{is(\mathbf{r})}$ . El aplicar el operador hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}_{\eta}$  a la última ecuación, conduce a que

$$\hat{\mathcal{H}}_{\eta} \psi = -2\eta \frac{d\mathcal{S}}{dt} \psi, \quad (2.158)$$

tal que al multiplicar la ecuación anterior, por la izquierda, por el complejo conjugado de la función de onda,  $\psi^*$ , e integrarla, esta se rescribe, utilizando las ecuaciones (2.57) y (2.152), como

$$\langle \hat{\mathcal{H}}_{\eta} \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle + \langle \mathcal{V} \rangle = \mathcal{E} = -2\eta \frac{d\mathcal{S}}{dt}, \quad (2.159)$$

donde  $\mathcal{E}$  es la energía, constante, del sistema en su estado estacionario [32]. Mediante la integración directa de la última igualdad de la ecuación (2.159), se llega a que

$$\mathcal{S}(t) = -\frac{\mathcal{E}}{2\eta} t. \quad (2.160)$$

De tal forma que la función de onda se expresa, al sustituir este resultado en la ecuación (2.157), como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mathcal{E}t/2\eta}, \quad (2.161)$$

y que la ecuación de estacionariedad, obtenida de la ecuación (2.138), está dada por

$$-\frac{2\eta^2}{m} \nabla^2 \phi + \mathcal{V} \phi = \mathcal{E} \phi. \quad (2.162)$$

La ecuación (2.162) es una ecuación de valores propios, los cuales representan las posibles energías  $\mathcal{E}$  del sistema en cuestión [32], que posee la misma forma que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, dada en términos del parámetro  $\eta$ . El valor propio correspondiente a la función propia  $\phi_n$  será denotado como  $\mathcal{E}_n$ , con  $n \geq 0$ , siendo  $\mathcal{E}_0$  la representación del valor propio del estado de mínima energía. Así, se tiene que la ecuación (2.161) se rescribe como

$$\psi_n(\mathbf{r}, t) = \phi_n(\mathbf{r})e^{-i\mathcal{E}_n t/2\eta}, \quad (2.163)$$

al utilizar la notación anterior.

#### 2.4.4. Balance energético: la constante de Planck

Como ya se ha mencionado en reiteradas ocasiones, la interacción entre una partícula cargada y el CPC resulta, en el límite temporal asintótico y bajo la aproximación no radiativa, en una descripción en el espacio de configuración regida por una ecuación de tipo Schrödinger, ecuación (2.138), en términos del parámetro  $\eta$ . El valor de este parámetro, puede ser deducido mediante la imposición de la ecuación de balance energético, ecuación (2.65), en el estado base descrito por la ecuación estacionaria obtenida [32], ecuación (2.162). Al suponer que el campo de radiación se halla en su estado de mínima energía, con una densidad espectral dada por la ecuación (C.29), y que el subsistema mecánico se encuentra en su estado base,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ , se tiene que la ecuación de balance energético puede ser rescrita, en el límite markoviano y estacionario, sustituyendo la función arbitraria  $\xi$  de la ecuación (2.74) por el hamiltoniano del subsistema mecánico, como

$$m\tau \left\langle \ddot{r}_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right\rangle_0 = - \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_k} \right\rangle_0 - \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial r_k} \right\rangle_0. \quad (2.164)$$

Al sustituir explícitamente las ecuaciones de Hamilton en la última expresión se llega a que la condición de balance se expresa de la siguiente manera

$$\tau \langle \ddot{r}_j p_j \rangle_0 = \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pr} \frac{\partial F_k}{\partial p_j} \right\rangle_0 - \frac{1}{m} \left\langle \mathcal{D}_{jk}^{pp} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right\rangle_0 = -\frac{1}{m} \langle \mathcal{D}_{jk}^{pp} \delta_{jk} \rangle_0 = -\frac{1}{m} \langle \mathcal{D}_{jj}^{pp} \rangle_0. \quad (2.165)$$

De esta forma, la condición de balance energético se rescribe, en notación vectorial, en el límite markoviano de la teoría como

$$\tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_0 = -\frac{1}{m} \langle \text{Tr} \mathbb{D}^{\text{pp}} \rangle_0, \quad (2.166)$$

donde se ha definido la traza del operador de difusión como  $\text{Tr} \mathbb{D}^{\text{pp}} \equiv \sum_j \mathcal{D}_{jj}^{pp}$ . Para calcular de manera explícita ambos lados de la igualdad anterior, se aplican los métodos matemáticos usuales, que emergen de la estructura de la ecuación (2.138). En particular, de la ecuación (2.163), se tiene que, en el límite estacionario, se cumple que

$$\mathbf{r}_{kn}(t) = \int \psi_k^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \psi_n(\mathbf{r}, t) d^3 r = e^{i\omega_{kn} t} \int \phi_k^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \phi_n(\mathbf{r}) d^3 r = e^{i\omega_{kn} t} \mathbf{r}_{kn}(0), \quad (2.167)$$

donde se ha definido  $\omega_{kn} \equiv (\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_n)/2\eta$ . De la ecuación (2.167) pueden obtenerse, mediante derivación con respecto al tiempo, los elementos de matriz de los operadores  $\hat{\mathbf{p}}$  y  $\hat{\dot{\mathbf{r}}}$  [18, 32], los cuales están dados por:

$$\mathbf{p}_{kn}(t) = m\dot{\mathbf{r}}_{kn}(t) = im\omega_{kn}\mathbf{r}_{kn}(t); \quad (2.168)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{kn}(t) = -i\omega_{kn}^3\mathbf{r}_{kn}(t). \quad (2.169)$$

Por la forma de los resultados expuestos en las últimas ecuaciones, es inmediato notar que para cualquier estado  $n$  se cumple que

$$\langle \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} \rangle_n = \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n, \quad (2.170)$$

es decir, la forma de ordenar dichos operadores es irrelevante para el cálculo de sus valores medios. Consecuentemente, el lado izquierdo de la ecuación (2.166) puede expresarse, alternativamente, como

$$\tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_0 = \tau \sum_k \mathbf{p}_{0k} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{k0} = -m\tau \sum_k \omega_{0k}^4 |\mathbf{r}_{0k}|^2. \quad (2.171)$$

Para hallar una expresión alternativa del lado derecho de la expresión (2.166), debe notarse que las contribuciones dominantes de los coeficientes de difusión, ecuaciones (2.36) y (2.37), provienen de los tiempos  $t'$  cercanos a  $t$ , cuando el sistema se halla en el régimen antes mencionado [32]. Por esto, las variables dinámicas que forman parte de las definiciones de dichos coeficientes deben ser expresadas en términos de sus correspondientes operadores diferenciales. Para lograr esto, es necesario que las derivadas parciales  $\partial p_k / \partial p'_j$  y  $\partial r_k / \partial p'_j$  sean rescritas, en términos de los paréntesis de Poisson, como:

$$[r'_j, p_k]_{clas} = \frac{\partial r'_j}{\partial r'_l} \frac{\partial p_k}{\partial p'_l} - \frac{\partial r'_j}{\partial p'_l} \frac{\partial p_k}{\partial r'_l} = \delta_{jl} \frac{\partial p_k}{\partial p'_l} = \frac{\partial p_k}{\partial p'_j}; \quad (2.172)$$

$$[r'_j, r_k]_{clas} = \frac{\partial r'_j}{\partial r'_l} \frac{\partial r_k}{\partial p'_l} - \frac{\partial r'_j}{\partial p'_l} \frac{\partial r_k}{\partial r'_l} = \delta_{jl} \frac{\partial r_k}{\partial p'_l} = \frac{\partial r_k}{\partial p'_j}. \quad (2.173)$$

Estas expresiones deben verse como conmutadores al utilizar la regla de transformación expresada en la ecuación (2.154), de tal forma que se tienen las siguientes equivalencias:

$$\frac{\partial p_k}{\partial p'_j} = [r'_j, p_k]_{clas} \rightarrow \frac{1}{2i\eta} [\hat{r}'_j, \hat{p}_k]; \quad (2.174)$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial p'_j} = [r'_j, r_k]_{clas} \rightarrow \frac{1}{2i\eta} [\hat{r}'_j, \hat{r}_k]. \quad (2.175)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las definiciones de los coeficientes de difusión se obtiene que estos pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\mathcal{D}_{jk}^{pp}(t) = \frac{q_e^2}{8i\pi\epsilon_0\eta} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') [\hat{r}'_j, \hat{p}_k] dt', \quad (2.176)$$

$$\mathcal{D}_{jk}^{pr}(t) = \frac{q_e^2}{8i\pi\epsilon_0\eta} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') [\hat{r}'_j, \hat{r}_k] dt'. \quad (2.177)$$

Así, la traza del operador de difusión  $\mathcal{D}_{jk}^{pp}$  adquiere una forma integral en términos de conmutadores, al sustituir la ecuación (2.176) en (2.166), dada por

$$\langle \mathcal{D}_{jj}^{pp} \rangle_0 = -\frac{iq_e^2}{8\pi\epsilon_0\eta} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \langle [\hat{r}'_j, \hat{p}_j] \rangle_0 dt', \quad (2.178)$$

donde al emplear la definición de la constante  $\tau$ , la densidad espectral  $u_0(\omega)$  y la función  $\varpi(t-t')$  de forma explícita, ecuaciones (G.17), (C.29) y (2.32) respectivamente, se obtiene

$$\langle \mathcal{D}_{jj}^{pp} \rangle_0 = -\frac{im\tau\mathcal{A}}{\pi\eta} \int_0^\infty \omega^3 I(\omega) d\omega, \quad (2.179)$$

donde se ha definido

$$I(\omega) \equiv \int_{-\infty}^t \cos(\omega(t-t')) \langle [\hat{r}'_j, \hat{p}_j] \rangle_0 dt'. \quad (2.180)$$

Es importante recordar que la constante  $\mathcal{A}$ , expresada en la ecuación (2.179), posee un valor universal, ya que es la que determina el espectro de equilibrio de la radiación en el límite atómico, al denotar la constante de proporcionalidad entre la energía media de un modo elemental de oscilación del campo de radiación a temperatura cero  $\mathcal{E}_0$  y su frecuencia  $\omega$ , ecuación (C.24). Como se mencionó en el apéndice C, se sabe que la constante  $\mathcal{A}$  posee unidades de acción y que su valor corresponde a

$$\mathcal{A} = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.181)$$

De la ecuación (2.168), se tiene que el valor medio del conmutador dentro de la integral  $I(\omega)$  es de la forma

$$\langle [\hat{r}'_j, \hat{p}_j] \rangle_0 = \sum_k (\hat{r}'_{j0k} \hat{p}_{jk0} - \hat{p}_{j0k} \hat{r}'_{jk0}) = 2im \sum_k \omega_{0k} |r_{j0k}|^2 \cos(\omega_{0k}(t-t')), \quad (2.182)$$

de manera que

$$I(\omega) = 2im \sum_k \omega_{0k} |r_{j0k}|^2 \int_{-\infty}^t \cos(\omega(t-t')) \cos(\omega_{0k}(t-t')) dt'. \quad (2.183)$$

Con el fin de resolver la parte integral de  $I(\omega)$ , se reescribe el producto de cosenos, mediante la identidad  $2 \cos((\xi + \zeta)/2) \cos((\xi - \zeta)/2) = \cos \xi + \cos \zeta$ , de tal forma que

$$\cos(\omega(t-t')) \cos(\omega_{0k}(t-t')) = \frac{\cos((\omega - \omega_{0k})(t-t')) + \cos((\omega + \omega_{0k})(t-t'))}{2}, \quad (2.184)$$

y se toma el cambio de variable  $\Delta t \equiv t - t'$ , arribándose a que

$$I(\omega) = im \sum_k \omega_{0k} |r_{j0k}|^2 \left( \int_0^\infty [\cos(\Delta t(\omega - \omega_{0k})) + \cos(\Delta t(\omega + \omega_{0k}))] d\Delta t \right). \quad (2.185)$$

Las integrales de la derecha de la ecuación anterior se identifican con la definición de la delta de Dirac, expresada en la ecuación (G.12), de tal forma que  $I(\omega)$  se reduce a

$$I(\omega) = i\pi m \sum_k \omega_{0k} |r_{j0k}|^2 (\delta(\omega - \omega_{0k}) + \delta(\omega + \omega_{0k})). \quad (2.186)$$

Sin embargo, dado que para el estado base no existen frecuencias negativas, es decir,  $\omega_{0k} > 0$ , se tiene que el factor  $\omega + \omega_{0k}$  nunca es nulo, de modo que  $\delta(\omega + \omega_{0k})$  es siempre nula. Así, la expresión (2.186) se reduce a

$$I(\omega) = i\pi m \sum_k \omega_{0k} |r_{j0k}|^2 \delta(\omega - \omega_{0k}). \quad (2.187)$$

Al sustituir la última ecuación en (2.179), se obtiene que

$$\langle \mathcal{D}_{jj}^{pp} \rangle_0 = \frac{m^2 \tau \mathcal{A}}{\eta} \sum_k \omega_{0k} |r_{j0k}|^2 \int_0^\infty \omega^3 \delta(\omega - \omega_{0k}) d\omega, \quad (2.188)$$

donde al integrar directamente se halla, utilizando notación vectorial, que

$$\langle \text{Tr} \mathbb{D}^{pp} \rangle_0 = \frac{m^2 \tau \mathcal{A}}{\eta} \sum_k \omega_{0k}^4 |\mathbf{r}_{0k}|^2. \quad (2.189)$$

Con base en los resultados de las ecuaciones (2.171) y (2.189), se tiene que la condición de balance energético se satisface si se cumple que

$$m\tau \left( 1 - \frac{\mathcal{A}}{\eta} \right) \sum_k \omega_{0k}^4 |\mathbf{r}_{0k}|^2 = 0. \quad (2.190)$$

Esta igualdad es válida para toda  $k$  si el coeficiente de cada uno de los sumandos es nulo, es decir, si se cumple que

$$\eta = \mathcal{A}. \quad (2.191)$$

En términos del valor explícito de la constante  $\mathcal{A}$ , ecuación (2.181), se tiene que el estado base del subsistema mecánico cumple con ser un verdadero estado estacionario si se tiene que el valor del parámetro  $\eta$  es exactamente igual a  $\hbar/2$  [32]. Con este valor particular de  $\eta$ , se tiene que la ecuación (2.138) se convierte en la auténtica ecuación de Schödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \mathcal{V} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.192)$$

Este resultado permite afirmar que el régimen conocido como cuántico corresponde inequívocamente al régimen temporal asintótico y no radiativo, en el cual el subsistema mecánico es correctamente descrito por la ecuación de Schrödinger [32]. La afirmación anterior es precisamente la razón por la que se considera a la ecuación (2.129) como una ecuación generalizada de Schrödinger, ya que la ecuación (2.192) es, simplemente, la aproximación no radiativa de esta ecuación. En el mismo sentido, la ecuación generalizada de Schrödinger se reduce a ser el caso markoviano de la ecuación generalizada de Fokker-Planck, ecuación (2.25). Aunado a esto, el desarrollo hecho anteriormente muestra que la aproximación no radiativa es equivalente a suponer que la función  $\tilde{Q}$  es completamente factorizable en términos de las variables  $\mathbf{z}_{\pm}$ , es decir, a tomar la función  $\chi(\mathbf{z}_{+}, \mathbf{z}_{-}, t)$  de la ecuación (2.95) como idénticamente igual a la unidad.

Por otro lado, los resultados obtenidos permiten afirmar que la condición de balance energético, ecuación (2.166), determina inequívocamente la ecuación de Schrödinger. Con base en esto, se puede afirmar que la ecuación de Schrödinger describe más que una partícula, describe una partícula en interacción permanente con el CPC en el régimen reversible en el tiempo, en el cual el campo ha impreso sobre la partícula sus fluctuaciones características y sus propiedades tipo onda [18, 32].

Adicionalmente, el hecho de que el valor del parámetro  $\eta$  no dependa del problema específico, sino únicamente de la naturaleza del campo de punto cero, muestra la ya conocida validez universal de la ecuación de Schrödinger [32]. Además de introducir la constante de Planck de manera natural al desarrollo, el valor específico de  $\eta$  confirma la densidad espectral del CPC,  $u_0 \propto \omega^3$ , como la única distribución de frecuencias que conduce a situaciones de equilibrio con el estado base del sistema mecánico, ya que es esta la que garantiza que las expresiones (2.171) y (2.189) posean la misma estructura algebraica. Lo anterior puede entenderse como que la condición de balance energético se cumple, no solo de manera global, sino que término a término, es decir, la partícula y el campo han alcanzado un balance energético detallado [16, 18, 32].

Como pudo notarse, el campo de punto cero es el elemento que más fuertemente influye en la dinámica de la partícula para tiempos muy cortos. Sin embargo, es también este campo el que permite al subsistema mecánico alcanzar un régimen de equilibrio, en el cual el mismo CPC adquiere un papel más sutil [32]. Además, es el CPC lo que determina el tamaño de las fluctuaciones y produce las correcciones radiativas al sistema, lo que permite explicar la presencia universal de dichas fluctuaciones, asignándoles, además, un origen causal [32]. Finalmente, el desarrollo presentado muestra al CPC como el mecanismo que permite a los átomos alcanzar y mantener su estabilidad, ya que es este campo el que suministra la energía que los electrones pierden radiando al hallarse en trayectorias curvas [32], es decir, el campo de radiación de punto cero genera al tipo de mecanismo mencionado en el apéndice E, propuesto originalmente por W. Nernst en 1916. En este sentido, la EDE resuelve la antigua cuestión sobre la estabilidad atómica al exhibir el mecanismo que la cimienta y explica.

Adicionalmente, utilizando las reglas matemáticas que acompañan la ecuación de Schrödinger, es decir, el álgebra de operadores, es posible demostrar la reducción hecha en la ecuación (2.73). Partiendo de las expresiones para los coeficientes de difusión en el límite markoviano de la teoría, ecuaciones (2.176) y (2.177), se tiene de la regla de transformación (2.154) que sus derivadas parciales se expresan en términos de conmutadores de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pp}}{\partial p_k} = -\frac{q_e^2}{16\pi\epsilon_0\eta^2} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') [\hat{r}_k, [\hat{r}'_j, \hat{p}_k]] dt'; \quad (2.193)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pr}}{\partial r_k} = -\frac{q_e^2}{16\pi\epsilon_0\eta^2} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') [[\hat{r}'_j, \hat{r}_k], \hat{p}_k] dt'. \quad (2.194)$$

Al utilizar las dos últimas expresiones, se tiene que la suma de las derivadas parciales de los coeficientes de difusión es

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pp}}{\partial p_k} + \frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pr}}{\partial r_k} = -\frac{q_e^2}{16\pi\epsilon_0\eta^2} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \{ [\hat{r}_k, [\hat{r}'_j, \hat{p}_k]] + [[\hat{r}'_j, \hat{r}_k], \hat{p}_k] \} dt'. \quad (2.195)$$

Por otro lado, la identidad de Jacobi, válida tanto para los paréntesis de Poisson como para los conmutadores, expresa, en particular, que

$$[\hat{r}_k, [\hat{r}'_j, \hat{p}_k]] + [\hat{r}'_j, [\hat{p}_k, \hat{r}_k]] + [\hat{p}_k, [\hat{r}_k, \hat{r}'_j]] = 0, \quad (2.196)$$

[25]. Sin embargo, es notable que el segundo término del lado izquierdo de la ecuación anterior es nulo, de tal modo que esta conduce a que

$$\hat{r}_k, [\hat{r}'_j, \hat{p}_k] = -[\hat{p}_k, [\hat{r}_k, \hat{r}'_j]] = [[\hat{r}_k, \hat{r}'_j], \hat{p}_k] = -[[\hat{r}'_j, \hat{r}_k], \hat{p}_k]. \quad (2.197)$$

Este resultado implica que la suma expresada en la ecuación (2.195) es nula, lo que permite eliminar el último término de la derecha de la ecuación (2.73), obteniéndose de esta manera la ecuación (2.74).

Finalmente, por su importancia como resultado para la electrodinámica estocástica, en el apéndice H se hace una revisión breve del desarrollo hecho desde esta perspectiva para arribar a la descripción de Heisenberg de la mecánica cuántica. A pesar de que ambas descripciones, la de Schrödinger y la de Heisenberg, son matemáticamente equivalentes, el acercamiento realizado desde la EDE muestra como la condición de ergodicidad es lo que permite que el sistema converja al régimen cuántico [32].

# Capítulo 3

## Correcciones radiativas

*La física moderna nos ha enseñado que la naturaleza de cualquier sistema no puede ser descubierta mediante su división en sus partes constituyentes y el estudio de cada parte por separado, ya que este método a menudo implica la pérdida de propiedades importantes del sistema. Debemos mantener nuestra atención fija en el todo y en las interconexiones entre las partes.*

- Max Planck -

Las fluctuaciones del campo electromagnético del vacío son, en la actualidad, ampliamente aceptadas como las responsables de dar origen a algunos fenómenos observables, de gran importancia física, que pertenecen al dominio de la electrodinámica cuántica [32, 77]. Muestra de ello son los tiempos de vida finitos de los estados atómicos excitados, en donde las fluctuaciones del vacío contribuyen, junto con la reacción de radiación, a las transiciones espontáneas de dichos estados [77]. Aunado a esto, se ha mostrado que tanto el efecto Lamb, como las fuerzas de Casimir y de Van der Waals son atribuibles a los cambios en la energía del CPC debido a la presencia de materia [77].

El análisis de las correcciones radiativas, dentro del marco teórico tradicional de la mecánica cuántica, implica la introducción *ad hoc* de un campo electromagnético de radiación inicialmente cuantizado, incluyendo su componente de vacío; y el uso de métodos perturbativos para el cálculo de sus efectos sobre el sistema mecánico en cuestión [32]. Por el contrario, en la electrodinámica estocástica el campo de radiación es una parte del sistema de estudio desde un principio, apareciendo los efectos radiativos explícitamente en las ecuaciones para las variables dinámicas medias deducidas a lo largo del estudio de la ecuación generalizada de Fokker-Planck hecho en el capítulo 2.



Así, para hallar la solución exacta del problema de una partícula cargada en interacción con el campo de radiación se debe regresar a la ecuación de movimiento original de la EDE, y estudiar la evolución del sistema partícula-campo hasta el régimen cuántico sin hacer aproximaciones en el proceso. Sin embargo, como ya se dijo antes, resolver este problema está más allá de las posibilidades actuales [32]. Por esto, en este último capítulo se realizará un acercamiento más restrictivo al problema en cuestión. Primero, se dejará evolucionar el sistema completo hasta el régimen cuántico; después, partiendo de las soluciones a orden cero en  $\tau$ , se calcularán los efectos de los términos radiativos contenidos en las ecuaciones originales de la subsección 2.2.2. Específicamente, con este proceso, se estudiarán los tiempos de vida atómicos finitos y el corrimiento Lamb. Adicionalmente, se analizará la evolución del valor medio de una integral de movimiento arbitraria bajo las condiciones de rompimiento de balance.

### 3.1. Transiciones radiativas

En el capítulo anterior se estableció que la evolución temporal del promedio del hamiltoniano de un sistema formado por una partícula, de carga eléctrica  $q_e$  y masa  $m$ , en permanente interacción con el campo de punto cero, en el límite temporal asintótico y el régimen markoviano, está dada por la ecuación (2.59),

$$\frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{dt} = \tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle - \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle, \quad (3.1)$$

donde el primer término del lado derecho de la ecuación representa la potencia media cedida por la partícula, debido a su reacción radiativa, al campo de fondo, mientras que el segundo término representa la energía media por unidad de tiempo ganada por la partícula al campo a través de las fluctuaciones de momento.

Como se mostró en el capítulo 2, se arribó al régimen cuántico al exigirle al sistema un balance entre los términos de la ecuación (3.1), es decir, al pedir que  $d\langle\mathcal{H}\rangle/dt$  fuese nula. Bajo esta condición se obtuvo que el sistema esta regido por una ecuación de Schrödinger escrita en términos de un parámetro  $\eta$  inicialmente desconocido, dada por la ecuación (2.138). Esta ecuación resultó corresponder a la auténtica ecuación de Schrödinger al hallar la relación entre dicho parámetro y la constante de Planck,  $\eta = \hbar/2$ , mediante la imposición de la condición de balance energético al estado base de la partícula, es decir,

$$\tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_0 = \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle_0. \quad (3.2)$$

Este resultado muestra de manera explícita que la ecuación de Schrödinger contiene información clave sobre el campo de fondo con el que interactúa el subsistema mecánico. Adicionalmente, dicho resultado indica que la existencia de un balance detallado de energía para una partícula en su estado base se limita a cuando esta se halla en equilibrio con un campo cuya densidad espectral de energía sea igual a  $u_0$ , ecuación (C.29).

Para el caso general de un estado arbitrario del sistema, representado por la función de onda  $\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n e^{-i\mathcal{E}_n t/\hbar} \phi_n(\mathbf{r})$ ; donde los coeficientes  $c_n$  denotan la amplitud de probabilidad con la que las funciones de onda estacionarias  $\phi_n$ , ecuación (2.163), contribuyen a  $\psi$  [25], que sea solución de la ecuación de Schrödinger, ecuación (2.192), se obtiene, utilizando el resultado de la ecuación (2.159), que el valor esperado del hamiltoniano del sistema está dado por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle_\psi &= \sum_{k,n} c_k^* c_n e^{-i(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k)t/\hbar} \int \phi_k^* \hat{\mathcal{H}} \phi_n d^3r = \sum_{k,n} \mathcal{E}_n c_k^* c_n e^{-i(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k)t/\hbar} \int \phi_k^* \phi_n d^3r \\ &= \sum_{k,n} \mathcal{E}_n c_k^* c_n e^{-i(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k)t/\hbar} \delta_{kn} = \sum_n \mathcal{E}_n |c_n|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Del último resultado se observa que, bajo las condiciones mencionadas,  $\langle \mathcal{H} \rangle_\psi$  es independiente del tiempo, cumpliéndose inmediatamente que

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_\psi}{dt} = 0. \quad (3.4)$$

Sin embargo, contrario a lo esperado, para un estado estacionario  $\phi_n$ , la ecuación

$$\tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n = \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle_n, \quad (3.5)$$

no se satisface en general para estados distintos al base [32], es decir, para  $n \neq 0$ . Lo anterior podría interpretarse como una violación de la condición de balance, ecuación (3.1), para el  $n$ -ésimo estado del sistema. Sin embargo, la aparente paradoja se resuelve al recordar que la expresión (3.4) es una ecuación estrictamente mecanocuántica consistente con la ecuación de Schrödinger, la cual ha sido deducida en la aproximación no radiativa; mientras que los términos presentes en la ecuación (3.5) representan precisamente aquellos términos radiativos que fueron despreciados en la aproximación mencionada. Como resultado, cuando la partícula o el campo de fondo, o ambos, se hallan en un estado excitado, el balance energético se rompe en general dando lugar a las llamadas transiciones radiativas, las cuales explican los tiempos de vida finitos de dichos estados [32]. Así, la tasa de cambio de energía del sistema no corresponde a  $d\langle \mathcal{H} \rangle_n/dt$ , sino a una corrección radiativa de esta, denotada como

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = \tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n - \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle_n, \quad (3.6)$$

ecuación que puede expresarse alternativamente en el límite markoviano de la teoría como

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = \tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n + \frac{1}{m} \langle \text{Tr} \mathbb{D}^{\text{pp}} \rangle_n, \quad (3.7)$$

al utilizar la ecuación (2.74) y las ecuaciones de Hamilton.

## 3.2. Rompimiento del balance energético

Como ya se mencionó, existe un balance detallado de energía cuando el sistema, formado por la partícula y el campo de fondo, se halla en su estado base. Por ello, resulta necesario investigar si existe alguna condición en la que exista dicho balance para estados excitados del sistema. Para esto, puede suponerse que, a través de algún mecanismo, el subsistema mecánico ha sido transferido a un estado excitado  $n$ , manteniendo al campo de fondo en su estado base, es decir, descrito por la densidad espectral  $u_0$ . Bajo las condiciones anteriores, ambos términos en el lado derecho de la ecuación (3.7) deben ser recalculados. Ya que se considera que el régimen cuántico ha sido alcanzado, el cálculo de dichos términos puede hacerse con el mismo procedimiento de la subsección 2.4.4. Así, se tiene que el término que representa la potencia media perdida por el subsistema mecánico debido a la reacción radiativa está dado, en analogía a la ecuación (2.171), por

$$\tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n = \tau \langle \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} \rangle_n = -m\tau \sum_k \omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2, \quad (3.8)$$

recordando que se ha definido  $\omega_{nk} \equiv (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k)/\hbar$ . Por otro lado, para el término correspondiente a la potencia ganada al campo de punto cero, se puede proceder de manera idéntica al cálculo hecho en el capítulo 2, únicamente notando que para frecuencias negativas es la segunda integral de la ecuación (2.186) la que contribuye a la suma, tal que dicho término puede expresarse, de manera compacta, como

$$\frac{1}{m} \langle \text{Tr} \mathbb{D}^{\text{pp}} \rangle_n = -m\tau \sum_k \omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2 \text{sign}(\omega_{nk}). \quad (3.9)$$

A diferencia de la ecuación (3.8), esta expresión contiene una combinación de contribuciones positivas y negativas a la potencia media del sistema. Al sustituir las expresiones deducidas en las dos últimas ecuaciones en (3.7), se llega a que el cambio temporal de la energía media del subsistema mecánico es igual a

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = -m\tau \sum_k \omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2 (1 - \text{sign}(\omega_{kn})), \quad (3.10)$$

suma que puede dividirse en dos partes, una para las  $k > n$  y otra para las  $k < n$ . El primer caso corresponde a frecuencias positivas, tal que los términos presentes en la ecuación (3.10) se anulan entre ellos. El segundo caso implica frecuencias negativas, obteniéndose que

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = -2m\tau \sum_{k < n} \omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2. \quad (3.11)$$

La expresión (3.11) muestra que no puede existir balance energético entre el CPC y una partícula en un estado excitado, es decir, que el estado  $n$  no es realmente estacionario [17]. Únicamente para el caso  $n = 0$  se tiene que la ecuación (3.11) es nula, lo que implica que solo el estado base de la partícula es mantenido por el campo de punto cero [15, 16, 17].

Aunado a esto, dicha ecuación muestra que las llamadas transiciones “espontáneas” del subsistema, las transiciones de un estado  $n$  a un estado  $k < n$ , son inducidas únicamente por la presencia del CPC [32]. La potencia perdida en cada transición,  $W_{nk}$ , puede hallarse al rescribir la potencia total perdida como una suma de contribuciones de las posibles transiciones, es decir,

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = \sum_k W_{nk}, \quad (3.12)$$

donde al comparar con la ecuación (3.11) se obtiene que

$$W_{nk} = -2m\tau\omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2. \quad (3.13)$$

Una expresión como la ecuación (3.11) únicamente tiene sentido en un contexto estadístico. Para entender su significado se tiene que considerar un ensamble estadístico de sistemas preparados inicialmente en el mismo estado excitado  $n$ , y sujetos a la acción del CPC. Entonces, de acuerdo con la ecuación (3.12), los miembros del ensamble tienen una cierta probabilidad por unidad de tiempo para realizar una transición al estado  $k$  de menor energía, la cual está determinada por los valores de  $\omega_{nk}$  y  $|\mathbf{r}_{nk}|$ , es decir, por las propiedades específicas del sistema. Sin embargo, el saber cuál transición se llevará a cabo en cada instante es imposible, debido a la naturaleza estadística de la presente descripción [32].

Por otro lado, es posible estudiar si existe un campo de fondo, externo o excitado, que pueda estar en equilibrio con un estado excitado del subsistema mecánico. Para esto, es conveniente definir la densidad espectral de energía de un campo de fondo excitado como  $u(\omega) \equiv u_0(\omega)\mathfrak{K}(\omega)$ , donde  $\mathfrak{K}(\omega) > 1$  es una función par, tal que

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = -m\tau \sum_k \omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2 (1 - \mathfrak{K}(\omega_{kn}) \text{sign}(\omega_{kn})), \quad (3.14)$$

[15, 17, 32]. La última expresión resulta ser una generalización de la ecuación (3.10) para la densidad espectral  $u(\omega)$ . Esta expresión posee términos con diferentes signos, dependiendo de si la frecuencia  $\omega_{kn}$  se refiere a transiciones hacia arriba o hacia abajo. Por esto, no es posible satisfacer la condición de balance energético en general [15, 16, 17].

### 3.2.1. El oscilador armónico cuántico unidimensional

A pesar de la conclusión anterior, existe un sistema mecánico particular que puede coexistir con el campo de fondo en un estado distinto al base: el oscilador armónico unidimensional [15, 16, 17]. En este caso, todas las frecuencias  $|\omega_{nk}|$  que contribuyen a la suma de la ecuación (3.14) poseen el mismo valor, siendo este igual a la frecuencia característica del oscilador  $\omega_0$ . Para este sistema específico se tiene que las funciones de onda estacionarias son de la siguiente forma

$$\phi_n(x) = \left( \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}} \right)^{1/2} e^{-m\omega_0 x^2 / 2\hbar} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x \right), \quad (3.15)$$

donde  $H_n(x)$  denota el  $n$ -ésimo polinomio de Hermite. La figura 3.1 muestra el comportamiento de  $\phi_n(x)$  para  $n = 0, 1, 2, 3$ . Utilizando la relación de recurrencia para  $H_n(x)$ ,  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$  [2], y las funciones de onda anteriores se obtiene que

$$x_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)x\phi_k(x)dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \left( \delta_{n+1,k}\sqrt{\frac{n+1}{2}} + \delta_{n-1,k}\sqrt{\frac{n}{2}} \right); \quad (3.16)$$

tal que, al elevar al cuadrado la última expresión, se llega a que

$$|x_{nk}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} [(n+1)\delta_{n+1,k} + n\delta_{n-1,k}]. \quad (3.17)$$

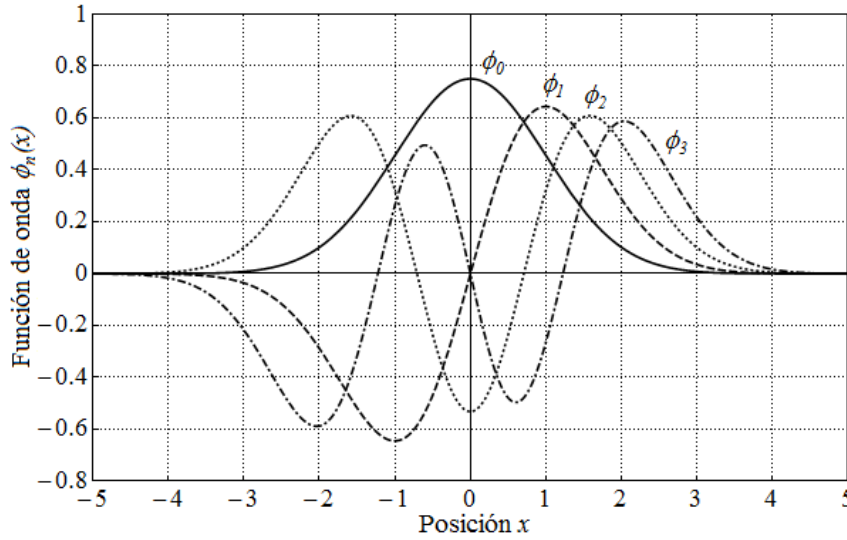


Figura 3.1: Comportamientos de las funciones de onda correspondientes a los cuatro estados estacionarios de menor energía del oscilador armónico cuántico unidimensional como funciones de la posición, para el valor  $m\omega_0/\hbar = 1$ .

Al sustituir la ecuación (3.17) en (3.8) se tiene que la potencia cedida por el oscilador al campo de fondo es igual a

$$\tau \langle p\ddot{x} \rangle_n = -m\tau\omega_0^4 \sum_k |x_{nk}|^2 = -\frac{\hbar\tau\omega_0^3}{2}(2n+1). \quad (3.18)$$

De manera análoga, al usar la ecuación (3.17) en el segundo término de la derecha de la ecuación (3.14), se arriba a que la potencia ganada por el oscilador al campo de fondo, a través de sus fluctuaciones, es

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \langle \mathcal{D}^{pp} \rangle_n &= m\tau\omega_0^4 \sum_k |x_{nk}|^2 \mathfrak{K}(\omega_{kn}) \text{sign}(\omega_{kn}) \\ &= \frac{\hbar\tau\omega_0^3}{2} [(n+1)\mathfrak{K}(\omega_{n+1,n}) \text{sign}(\omega_{n+1,n}) + n\mathfrak{K}(\omega_{n-1,n}) \text{sign}(\omega_{n-1,n})], \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde al tomar en cuenta que la función  $\mathfrak{K}$  es par se obtiene que

$$\frac{1}{m} \langle \mathcal{D}^{pp} \rangle_n = \frac{\hbar \tau \omega_0^3}{2} \mathfrak{K}(\omega_0). \quad (3.20)$$

Al sustituir las expresiones (3.18) y (3.20) en (3.14) se observa que el balance energético detallado existe solamente si  $\mathfrak{K}_n(\omega_0) = 2n+1$ , es decir, si se tiene que el oscilador armónico, en su  $n$ -ésimo estado excitado, se halla sumergido en un campo de fondo con una densidad espectral de energía igual a

$$u(\omega) = (2n+1)u_0(\omega) = \frac{\hbar \omega_0^3}{\pi^2 c^3} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.21)$$

Siendo así, entonces existen tantas absorciones como emisiones por unidad de tiempo, todas con una frecuencia  $\omega_0$ , tales que el valor medio de la energía del oscilador se mantiene constante [32]. Este resultado no es de sorprender si se considera que el campo posee una energía por modo normal de  $\hbar \omega_0(n+1/2)$ , igual a la energía del oscilador mecánico con el que se halla en equilibrio. Lo anterior resulta ser el punto central de la distribución de Planck y la cuantización del campo electromagnético: en principio cada modo normal de oscilación del campo puede adquirir cualquier energía, sin embargo, solo aquellos modos que tengan una energía media igual a  $\hbar \omega_0(n+1/2)$  lograrán alcanzar el equilibrio con la materia [15, 16, 17].

### 3.3. Tiempos de vida atómicos: los coeficientes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de Einstein

En ausencia de un balance energético detallado, el sistema materia-campo experimenta cambios en la distribución de la energía media que pueden ser cuantificados utilizando la ecuación (3.14). Si se supone un subsistema mecánico, preparado en un estado arbitrario  $n$ , sujeto a la acción de un campo de radiación con una densidad espectral arbitraria  $u(\omega) = u_0(\omega)\mathfrak{K}(\omega)$ , que pueda ser rescrita en términos de la función adimensional  $\mathfrak{K}$  como  $\mathfrak{K}(\omega) \equiv 1 + \mathfrak{K}_a(\omega)$  con la intención de separar la contribución proveniente del campo de fondo adicional,

$$u(\omega) = u_0(\omega)\mathfrak{K}(\omega) = u_0(\omega) + u_a(\omega), \quad (3.22)$$

donde  $u_a(\omega) \equiv u_0(\omega)\mathfrak{K}_a(\omega)$  [15, 16, 17], entonces, al usar la ecuación (3.22) en (3.14), se tiene que el cambio en la energía media del subsistema mecánico es igual a

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} &= -m\tau \sum_k \omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2 [1 - (1 + \mathfrak{K}_a(\omega_{nk})) \text{sign}(\omega_{kn})] \\ &= m\tau \sum_k \omega_{nk}^4 |\mathbf{r}_{nk}|^2 \left[ (\mathfrak{K}_a) \Big|_{\omega_{kn}>0} - (2 + \mathfrak{K}_a) \Big|_{\omega_{kn}<0} \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

El primer término dentro de los paréntesis cuadrados en la última igualdad, proporcional a  $\varkappa_a$ , representa las absorciones, es decir, las transiciones en las que el subsistema mecánico le gana energía al campo de fondo, pasando de un estado energético  $n$  a uno  $k > n$ . Por otro lado, el segundo término de la ecuación (3.23), proporcional a  $2 + \varkappa_a$ , representa las emisiones o las transiciones en las que el subsistema mecánico le cede energía al campo de fondo, decayendo a un estado energético  $k < n$ . Es notable, de la ecuación (3.23), que solo pueden existir absorciones cuando el campo de fondo está excitado, lo que implica que exista una componente externa no nula  $u_a \neq 0$ . Esto explica porqué los detectores ópticos, incluidas las placas fotográficas, no son activados por el CPC [17], aunado a esto permite identificar a la componente adicional del campo de fondo con el campo de radiación fotónico [32]. Paralelamente, las emisiones pueden dividirse en “espontáneas”, en el sentido bohriano de acausales [76], cuando el sistema se halla en interacción únicamente con el campo de radiación de punto cero, o estimuladas, en caso de estar interactuando adicionalmente con el campo representado por  $\varkappa_a$ .

Los coeficientes que aparecen en cada uno de los términos en el lado derecho de la ecuación (3.23) determinan las tasas de pérdida y ganancia energética del subsistema mecánico, razón por la cual deben estar directamente relacionados con los coeficientes  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  de Einstein para las probabilidades de transición [32]. El coeficiente  $\mathcal{A}$  se define usualmente como aquel que determina la tasa de emisiones espontáneas [40, 41, 77],

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_{n\tau}^{\text{em esp}} \equiv -\hbar \sum_{k<n} \omega_{nk} \mathcal{A}_{nk}. \quad (3.24)$$

Así,  $\mathcal{A}_{nk}$  es la probabilidad de que el subsistema mecánico, particularmente el átomo, realice una transición espontánea de un estado  $n$  a un estado de menor energía  $k$  por unidad de tiempo, con una consecuente pérdida de energía dada por  $\hbar\omega_{nk}$  [32]. Por otro lado, el coeficiente  $\mathcal{B}_{nk}^{\text{em}}$  define la tasa de pérdida de energía por transiciones inducidas o estimuladas por el campo externo [40, 41, 77], tal que

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_{n\tau}^{\text{em ind}} \equiv -\hbar \sum_{k<n} \omega_{nk} \mathcal{B}_{nk}^{\text{em}} u_a(\omega_{nk}). \quad (3.25)$$

Análogamente, el coeficiente  $\mathcal{B}_{kn}^{\text{abs}}$  establece la tasa de ganancia de energía debido a las absorciones inducidas por el campo externo [40, 41, 77], de tal manera que

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_{n\tau}^{\text{abs ind}} \equiv \hbar \sum_{k>n} \omega_{kn} \mathcal{B}_{kn}^{\text{abs}} u_a(\omega_{nk}). \quad (3.26)$$

Con base en las definiciones anteriores, los coeficientes  $\mathcal{B}$  son las probabilidades de transición en presencia de un campo fotónico con densidad espectral  $u_a(\omega_{nk})$  [32]. La tasa total de cambio en la energía del sistema puede ser rescrita, en términos de las ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.26), como

$$\frac{d\langle\mathcal{H}\rangle_{n\tau}}{dt} = \frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_{n\tau}^{\text{em esp}} + \frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_{n\tau}^{\text{em ind}} + \frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_{n\tau}^{\text{abs ind}}, \quad (3.27)$$

o equivalentemente como

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = \sum_{k>n} \hbar \omega_{kn} \mathcal{B}_{kn}^{\text{abs}} u_a(\omega_{nk}) - \sum_{k<n} \hbar \omega_{nk} [\mathcal{A}_{nk} + \mathcal{B}_{nk}^{\text{em}} u_a(\omega_{nk})], \quad (3.28)$$

que puede expresarse de manera compacta de la siguiente manera

$$\frac{d\langle \mathcal{H} \rangle_{n\tau}}{dt} = \sum_k \hbar |\omega_{nk}| \left[ (\mathcal{B}_{kn}^{\text{abs}} u_0 \mathfrak{K}_a) \Big|_{\omega_{kn}>0} - (\mathcal{A}_{nk} + \mathcal{B}_{nk}^{\text{em}} u_0 \mathfrak{K}_a) \Big|_{\omega_{kn}<0} \right]. \quad (3.29)$$

Al comparar las ecuaciones (3.23) y (3.29), y sustituir la definición de la constante  $\tau$ , ecuación (G.17), se arriba a una expresión para el coeficiente de emisión espontánea,

$$\mathcal{A}_{nk} = \frac{q_e^2 \omega_{nk}^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |\mathbf{r}_{nk}|^2. \quad (3.30)$$

Con base en la definición dada del coeficiente  $\mathcal{A}$  y la última ecuación, puede establecerse que la probabilidad por unidad de tiempo de que el sistema decaiga a algún estado de menor energía, sin importar cuál específicamente, es la suma de los coeficientes  $\mathcal{A}_{nk}$  de todas las transición posibles del estado  $n$  a algún estado  $k < n$ , al ser cada uno de estos eventos excluyentes entre sí. De esta forma, se tiene que el inverso de la suma anterior representa el tiempo medio que tarda en ocurrir alguna de las transiciones permitidas, es decir, la vida media del  $n$ -ésimo estado excitado [25, 95],

$$\tau_n \equiv \left( \sum_k \mathcal{A}_{nk} \right)^{-1} = \frac{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}{q_e^2} \left( \sum_k \omega_{nk}^3 |\mathbf{r}_{nk}|^2 \right)^{-1}. \quad (3.31)$$

Por otro lado, al realizar el procedimiento utilizado para la obtención de la ecuación (3.30) y emplear la definición de la densidad espectral de energía del CPC, ecuaciones (C.29) y (2.181), pueden hallarse expresiones analíticas para los coeficientes  $\mathcal{B}$  de la ecuación (3.29), resultando que

$$\mathcal{B}_{kn}^{\text{abs}} = \mathcal{B}_{nk}^{\text{em}} = \frac{\pi q_e^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} |\mathbf{r}_{nk}|^2 \equiv \mathcal{B}_{nk}. \quad (3.32)$$

Los resultados expuestos en las ecuaciones (3.30), (3.31) y (3.32) están en total acuerdo con los respectivos resultados de la electrodinámica cuántica [25, 76, 95], de manera que estos confirman el papel primordial que juegan la reacción radiativa y el campo electromagnético de fondo en determinar las tasas de transición entre los estados del sistema y sus respectivos tiempos de vida.

### 3.3.1. El decaimiento espontáneo

La emisión, o decaimiento, espontánea ha sido atribuida a dos fenómenos físicos distintos a lo largo de su historia. La explicación más antigua relaciona dicha emisión con la reacción



radiativa [76], como lo explica P. A. M. Dirac en su artículo de 1927 sobre la emisión y la absorción de la radiación [37]. Posteriormente, las investigaciones sobre el corrimiento Lamb, como la realizada por T. A. Welton en 1948, condujeron a la idea de que la emisión espontánea podía ser atribuida a las fluctuaciones del campo electromagnético de punto cero [99]. Sin embargo, con el paso de los años se fue reconociendo que ambos fenómenos son necesarios para la explicación de la radiación espontánea emitida por los átomos [23, 51, 76]. Para explicar el origen de dicha idea puede recurrirse al cociente entre las tasas de emisión espontánea y estimulada, deducidas anteriormente,

$$\frac{\mathcal{A}_{nk}}{\mathcal{B}_{nk}} = \frac{\hbar\omega_{nk}^3}{\pi^2 c^3} = 2u_0(\omega_{nk}). \quad (3.33)$$

Dadas las definiciones de los coeficientes  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , es de esperar que el cociente expresado en la ecuación (3.33) corresponda exactamente a la densidad espectral del CPC y no al doble de esta. El factor 2 en la mencionada ecuación podría hacer pensar que el campo de punto cero es el doble de efectivo al inducir transiciones radiativas en comparación con el resto de campos electromagnéticos [94]. Sin embargo, la interpretación correcta de dicho factor, como ya se mencionó, es que son dos fenómenos físicos independientes los que contribuyen con igual magnitud  $u_0$  al decaimiento espontáneo del sistema, por un lado se tienen las fluctuaciones impresas por el campo en la partícula y por el otro la radiación de Larmor. El presente contexto permite no solo explicar el resultado expresado en la ecuación (3.33), sino que también muestra de manera clara que el hecho de que ambas contribuciones sean iguales es lo que conduce a un balance exacto entre ellas, garantizando de esta manera la estabilidad del estado base del sistema [15, 16, 17].

### 3.3.2. La distribución de Planck

Finalmente, al seguir el procedimiento usado por Einstein en su publicación de 1917 sobre radiación, en la cual predijo la razón expuesta en la ecuación (3.33) y la igualdad entre los coeficientes  $\mathcal{B}_{kn}^{\text{abs}}$  y  $\mathcal{B}_{nk}^{\text{em}}$  con base en consideraciones estadísticas [40, 41], es posible arribar a la distribución de Planck a partir de los coeficientes  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  obtenidos, suponiendo que se tiene un sistema de dos estados  $n$  y  $k$ , con  $\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k = \hbar\omega_{nk} > 0$  y poblaciones  $N_n$  y  $N_k$  respectivamente. Al suponer que dicho sistema se halla en equilibrio térmico a una temperatura  $T$ , y despreciando todas las posibles degeneraciones inconsecuentes [32], se tiene que la razón entre las poblaciones de sus estados es

$$N_k/N_n = e^{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k)/k_B T}. \quad (3.34)$$

Por otro lado, con base en la ecuación (3.23), se tiene que el número de absorciones, transiciones  $m \rightarrow n$ , es proporcional a  $N_k \mathfrak{K}_a(\omega_{nk})$ , y que el número de emisiones, transiciones  $n \rightarrow k$ , es proporcional a  $N_n [2 + \mathfrak{K}_a(\omega_{nk})]$ . Así, de la condición de equilibrio estadístico, se tiene que

$$N_k \mathfrak{K}_a = N_n (2 + \mathfrak{K}_a), \quad (3.35)$$

donde al despejar  $\varkappa_a$  y sustituir las ecuación (3.34) se arriba a que

$$\varkappa_a(\omega_{nk}) = \frac{2}{e^{(\varepsilon_n - \varepsilon_k)/k_B T} - 1}. \quad (3.36)$$

Así, usando la ecuación (3.36) en (3.22), se llega a que la densidad espectral de energía del campo de fondo fotónico está dada por la distribución de Planck, ecuación (E.3),

$$u_a(T, \omega_{nk}) = u_0(\omega_{nk})\varkappa_a(T, \omega_{nk}) = \frac{\omega_{nk}^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega_{nk}}{e^{\hbar \omega_{nk}/k_B T} - 1}. \quad (3.37)$$

Es relevante notar que la ecuación de equilibrio (3.35) implica un balance detallado de energía, ya que las emisiones y absorciones individuales conllevan al intercambio de una misma cantidad de energía,  $\hbar \omega_{nk}$ , entre el subsistema mecánico y el campo de fondo [17, 32]. Finalmente, al sumar el resultado anterior y la expresión para  $u_0$ , dada por la ecuación (C.29), se obtiene que la densidad espectral de energía del campo de radiación total, que interactúa con el subsistema mecánico, es igual a

$$u(T, \omega_{nk}) = u_0(\omega_{nk}) + u_a(T, \omega_{nk}) = \frac{\omega_{nk}^2}{\pi^2 c^3} \left( \frac{\hbar \omega_{nk}}{2} + \frac{\hbar \omega_{nk}}{e^{\hbar \omega_{nk}/k_B T} - 1} \right), \quad (3.38)$$

tal y como lo anticipó Nernst en 1916.

### 3.4. Tasas de cambio de otras integrales de movimiento del subsistema mecánico

En la última sección se estudió la variación temporal del valor medio de la función hamiltoniana del sistema  $\langle \mathcal{H} \rangle$ , y sus efectos, cuando no existe un balance detallado entre el subsistema mecánico y el campo de fondo; si se sabe que para cada sistema mecánico cerrado de  $N$  grados de libertad existen  $2N - 1$  integrales de movimiento independientes [69], de las cuales solo una corresponde a la energía del sistema, entonces es de interés estudiar cuáles son las tasas de cambio para las  $2N - 2$  variables “conservadas” restantes. Con este fin, debe recordarse que para cada cantidad dinámica  $C(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  que represente una integral de movimiento clásica, es decir, una integral de movimiento cuando no existe interacción con el campo de radiación, se cumple que el cambio de su valor medio está dado por la ecuación (2.60), que en notación vectorial se expresa como

$$\frac{d\langle C \rangle}{dt} = m\tau \langle \ddot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} C \rangle - q_e^2 \langle \nabla_{\mathbf{p}} C \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle. \quad (3.39)$$

Ya que tanto  $\mathcal{H}$  como  $C$  son constantes de movimiento, entonces sus correspondientes operadores diferenciales,  $\hat{\mathcal{H}}$  y  $\hat{C}$ , conmutan entre sí, pues ambos forman parte del conjunto maximal de operadores conmutativos del sistema, lo que significa que la matriz asociada a  $\hat{C}$  es diagonal en la representación de la energía [25], es decir,

$$C_{nk} = C_n \delta_{nk}, \quad (3.40)$$

donde el índice  $n = (n'_H, n''_C)$  se ha definido tal que incluya los números cuánticos correspondientes a los valores propios de ambos operadores [32]. Si se supone que el subsistema mecánico ha sido preparado en su  $n$ -ésimo estado excitado, se tiene, de la ecuación (3.39), que la evolución temporal radiativa, a primer orden en  $\tau$ , de  $\langle C \rangle_n$  es, en notación indicial, igual a

$$\frac{d\langle C \rangle_{n\tau}}{dt} = m\tau \left\langle \dot{\hat{r}}_j \frac{\partial C}{\partial p_j} \right\rangle_n - q_e^2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial p_j} \hat{D}_j \right\rangle_n. \quad (3.41)$$

Para realizar el cálculo de los términos de la derecha de la ecuación anterior se recurre a la definición de los paréntesis de Poisson, y a la relación entre estos y los conmutadores cuánticos, expresada en la ecuación (2.154), tal que

$$\frac{\partial C}{\partial p_j} = \frac{\partial r_j}{\partial r_k} \frac{\partial C}{\partial p_k} - \frac{\partial r_j}{\partial p_k} \frac{\partial C}{\partial r_k} = [r_j, C]_{clas} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{r}_j, \hat{C}], \quad (3.42)$$

de manera que se llegue a

$$\left( \frac{\partial C}{\partial p_j} \right)_{nk} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{r}_j, \hat{C}]_{nk} = \frac{r_{jnk}}{i\hbar} (C_k - C_n), \quad (3.43)$$

donde  $r_{jnk}$  está dado por la componente  $j$ -ésima de la ecuación (2.167). Así, al utilizar los resultados de las ecuaciones (2.169) y (3.43) se tiene que

$$\left\langle \left[ \hat{\dot{r}}_j, \frac{[\hat{r}_j, \hat{C}]}{i\hbar} \right] \right\rangle_n = \sum_k \frac{|r_{jnk}|^2}{\hbar} (C_k - C_n) (\omega_{nk}^3 + \omega_{kn}^3) = 0, \quad (3.44)$$

en función de la definición antisimétrica de la frecuencia  $\omega_{nk} = (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_k)/\hbar$ . La ecuación (3.44) implica que los operadores  $\hat{\dot{r}}_j$  y  $[\hat{r}_j, \hat{C}]$  conmutan entre sí, y que por tanto no existe ambigüedad en el ordenamiento de estos. Con base en esto, se tiene que el primer término de la derecha de la ecuación (3.39) es

$$m\tau \langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} C \rangle_n = \frac{1}{i\hbar} \sum_k \hat{\mathbf{r}}_{nk} \cdot [\hat{\mathbf{r}}, \hat{C}]_{kn} = -\frac{m\tau}{\hbar} \sum_k \omega_{nk}^3 |\mathbf{r}_{nk}|^2 (C_n - C_k). \quad (3.45)$$

Para obtener una expresión explícita del segundo término requerido de la ecuación (3.41), se recurre a la expresión para el operador de difusión en la aproximación markoviana, en términos de la densidad espectral de energía  $u(\omega)$ , dada por la ecuación (2.33),

$$q_e^2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial p_j} \hat{D}_j \right\rangle_n = \frac{q_e^2}{3\epsilon_0} \int_0^\infty u(\omega) \int_{-\infty}^t \cos(\omega(t-t')) \left( \frac{\partial^2 C}{\partial p_j' \partial p_j} \right)_{nn} dt' d\omega, \quad (3.46)$$

de la cual, al utilizar la regla de transformación expresada en (3.42), se tiene que

$$q_e^2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial p_j} \hat{D}_j \right\rangle_n = -\frac{q_e^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \int_0^\infty u(\omega) \int_{-\infty}^t \cos(\omega(t-t')) \left\langle [\hat{r}'_j, [\hat{r}_j, \hat{C}]] \right\rangle_n dt' d\omega. \quad (3.47)$$

El conmutador de la ecuación anterior puede deducirse de manera análoga a la utilizada para la obtención de la ecuación (3.44), tal que

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ \hat{r}'_j, [\hat{r}_j, \hat{C}] \right] \right\rangle_n &= \sum_k \left( r'_{jnk} [\hat{r}_j, \hat{C}]_{kn} - [\hat{r}_j, \hat{C}]_{nk} r'_{jkn} \right) \\ &= 2 \sum_k |r_{jnk}|^2 (C_k - C_n) \cos(\omega_{nk}(t - t')). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Al sustituir el conmutador hallado, en la expresión integral (3.47), y permitir un posible campo de fondo adicional al CPC, tal que  $u(\omega) \equiv u_0(\omega)\mathfrak{K}(\omega)$ , se arriba a que

$$\begin{aligned} q_e^2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial p_j} \hat{\mathcal{D}}_j \right\rangle_n &= -\frac{2q_e^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \sum_k |r_{jnk}|^2 (C_k - C_n) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty u_0(\omega) \mathfrak{K}(\omega) \int_{-\infty}^t \cos(\omega(t - t')) \cos(\omega_{nk}(t - t')) dt' d\omega, \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde al usar la expresión para  $u_0(\omega)$  de la ecuación (C.29) y al utilizar las ecuaciones (2.181) y (2.184) se llega, en el límite  $t \rightarrow \infty$ , a

$$\begin{aligned} q_e^2 \left\langle \frac{\partial C}{\partial p_j} \hat{\mathcal{D}}_j \right\rangle_n &= -\frac{q_e^2}{6\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \sum_k |r_{jnk}|^2 (C_k - C_n) \times \\ &\quad \times \int_0^\infty \omega^3 \mathfrak{K}(\omega) (\delta(\omega - \omega_{nk}) + \delta(\omega + \omega_{nk})) d\omega, \end{aligned} \quad (3.50)$$

que bajo una integración directa conduce a que el segundo término de la derecha de la ecuación (3.41) se pueda expresar, en notación vectorial, como

$$\begin{aligned} q_e^2 \left\langle \hat{\mathcal{D}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} C \right\rangle_n &= -\frac{q_e^2}{6\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \sum_k |\omega_{nk}|^3 |\mathbf{r}_{nk}|^2 (C_k - C_n) \mathfrak{K}(\omega_{nk}) \text{sign}(\omega_{nk}) \\ &= -\frac{m\tau}{\hbar} \sum_k |\omega_{nk}|^3 |\mathbf{r}_{nk}|^2 (C_k - C_n) \mathfrak{K}(\omega_{nk}) \text{sign}(\omega_{nk}), \end{aligned} \quad (3.51)$$

lo que implica que

$$\frac{d\langle C \rangle_{n\tau}}{dt} = -\frac{m\tau}{\hbar} \sum_k \omega_{nk}^3 |\mathbf{r}_{nk}|^2 (C_n - C_k) [1 - \mathfrak{K}(\omega_{kn}) \text{sign}(\omega_{kn})]. \quad (3.52)$$

De la ecuación (3.52) se sigue que si el campo de fondo es el CPC, es decir si  $\mathfrak{K}(\omega) = 1$ , y el subsistema mecánico se halla en su estado base, tal que  $\text{sign}(\omega_{kn}) = 1$  para toda  $\omega_{kn}$ , entonces existe un balance detallado en el valor medio de no solo la energía del sistema sino de toda integral de movimiento “clásica” de la forma aquí considerada [32].

Una forma alternativa de la ecuación (3.52) puede hallarse al rescribir esta de manera análoga a la ecuación (3.23), es decir,

$$\frac{d\langle C \rangle_{n\tau}}{dt} = -\frac{m\tau}{\hbar} \sum_k \omega_{nk}^3 |\mathbf{r}_{nk}|^2 (C_n - C_k) \left[ (\mathfrak{K}_a) \Big|_{\omega_{kn}>0} - (2 + \mathfrak{K}_a) \Big|_{\omega_{kn}<0} \right], \quad (3.53)$$

tal que el cambio temporal del valor medio de la integral de movimiento  $C$  pueda expresarse en términos de los coeficientes de Einstein, ecuaciones (3.30) y (3.32), como

$$\frac{d\langle C \rangle_{n\tau}}{dt} = \sum_{\omega_{kn}>0} (C_k - C_n) u_a(\omega_{nk}) \mathcal{B}_{kn} - \sum_{\omega_{kn}<0} (C_n - C_k) [\mathcal{A}_{nk} + u_a(\omega_{nk}) \mathcal{B}_{nk}]. \quad (3.54)$$

El primer término de la derecha de la ecuación anterior representa la tasa de cambio de la variable  $C$  debido a las transiciones radiativas a un estado de mayor energía. Por su parte, el segundo término ilustra la tasa de cambio de  $C$  correspondiente a las emisiones del subsistema mecánico al decaer a un estado de menor energía.

### 3.5. Correcciones radiativas a la energía: el corrimiento Lamb

Otra consecuencia de los efectos residuales del campo de radiación de punto cero es la generación de corrimientos en los niveles energéticos atómicos. Este fenómeno, conocido como corrimiento o efecto Lamb, es de gran relevancia física ya que marcó el inicio de la electrodinámica cuántica moderna al introducir en su explicación teórica reglas para el tratamiento y descarte de divergencias [77].

Para entender el efecto Lamb, debe recordarse que la solución de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno arroja que los niveles de energía dependen únicamente del número cuántico principal  $n$ , estando por tanto estos totalmente degenerados con respecto al número cuántico orbital  $\ell_n$  [25]. Por otro lado, de la teoría de Dirac se obtiene que el acoplamiento espín-órbita y las correcciones relativistas resuelven parcialmente esta degeneración entre estados. Sin embargo, aquellos estados que poseen el mismo número cuántico  $n$  y el mismo número cuántico de momento angular total  $j$ , como los niveles  $2s_{1/2}$  y  $2p_{1/2}$ , permanecen degenerados [25, 77], como se observa en el espectro de energías de estructura fina del hidrógeno,

$$\mathcal{E}_{n,j} = mc^2 \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha_f}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - (Z\alpha_f)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (3.55)$$

donde  $\alpha_f = q_e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$  denota la constante de estructura fina,  $Z$  el número atómico,  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , y  $j + 1/2 \leq n$  [75, 77].

A pesar de la predicción teórica anterior, los experimentos realizados durante la década de 1930 mostraban que las energías de los estados  $2s_{1/2}$  y  $2p_{1/2}$  podían diferir entre sí, aun cuando los datos no fuesen concluyentes [77]. Sin embargo, en 1947, W. E. Lamb Jr. y R. C. Retherford realizaron experimentos que mostraron de manera convincente que el nivel  $2s_{1/2}$  se halla cerca de 1000 MHz, o  $0.030 \text{ cm}^{-1}$ , arriba del nivel  $2p_{1/2}$  [66], como se muestra esquemáticamente en la figura 3.2. Poco después, Lamb y Retherford reportaron una medida más precisa de alrededor de 1060 MHz [67]. Es precisamente esta pequeña diferencia de energía lo que se conoce como corrimiento Lamb, y la razón de que la teoría de Dirac, que conduce a la ecuación (3.55), no pueda reproducir este fenómeno se debe a que esta ignora el acoplamiento existente entre el electrón atómico y el campo electromagnético del vacío [77].

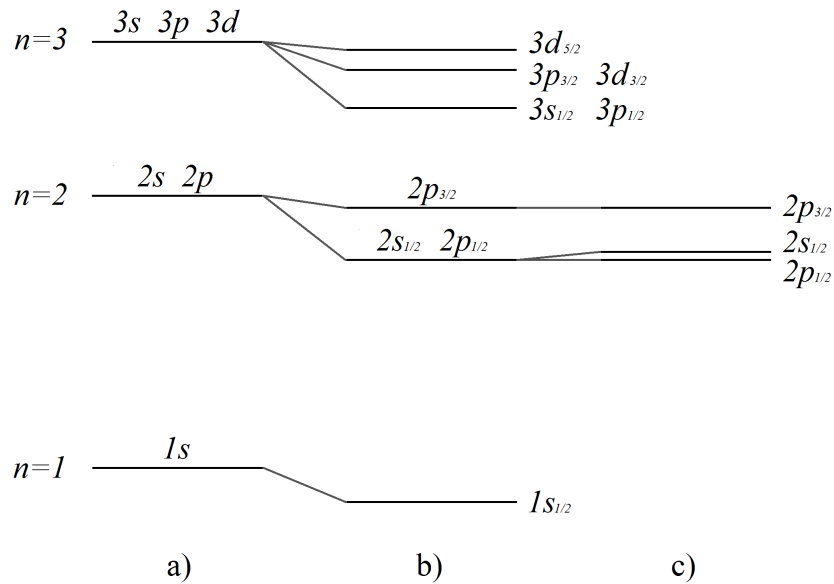


Figura 3.2: Esquema ilustrativo de los niveles de energía del átomo de hidrógeno para los estados con  $n = 1, 2, 3$ . En a) se muestran los niveles predichos por la teoría de Schrödinger. En b) se muestran los niveles energéticos al tomar en cuenta las correcciones relativistas y el acoplamiento espín-órbita. Finalmente, en c) se muestran los resultados experimentales y el efecto Lamb entre los niveles atómicos  $2s_{1/2}$  y  $2p_{1/2}$ .

A diferencia de la teoría de Dirac, en la EDE la interacción entre la partícula cargada, específicamente el electrón atómico, y el CPC es la protagonista en el establecimiento del llamado comportamiento cuántico y, como se ha mostrado en este capítulo, es el mecanismo detrás de las transiciones radiativas. Así, el corrimiento Lamb puede estudiarse desde la presente perspectiva. Para esto, se debe recordar que la ecuación (2.64) expresa las correcciones radiativas a la energía cinética media del subsistema mecánico, de orden más bajo en  $\tau$ , que para caso del  $n$ -ésimo estado cuántico se expresan como

$$\langle \delta\mathcal{K} \rangle_{n\tau} = -\frac{m\tau}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n + \frac{q_e^2}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle_n. \quad (3.56)$$

El primer término de la derecha de la última ecuación está relacionado con la reacción de radiación y puede mostrarse, expresándolo en términos de las soluciones de la ecuación de Schrödinger, ecuaciones (2.163) y (2.167), que es nulo,

$$\begin{aligned} -\frac{m\tau}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n &= -\frac{m\tau}{2} \sum_k \mathbf{r}_{nk}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{kn}(t) = -\frac{m\tau}{2} \sum_k \mathbf{r}_{nk}(t) \cdot \left( -\frac{i\omega_{kn}^3}{\hbar^3} \mathbf{r}_{kn}(t) \right) \\ &= \frac{m\tau}{2} \sum_k \left( \frac{i\omega_{nk}}{\hbar} \mathbf{r}_{nk}(t) \right) \cdot \left( \frac{\omega_{kn}^2}{\hbar^2} \mathbf{r}_{kn}(t) \right) = \frac{m\tau}{2} \sum_k \dot{\mathbf{r}}_{nk}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_{kn}(t) \\ &= \frac{m\tau}{2} \langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n = \frac{m\tau}{2} \left\langle \frac{d\dot{r}^2}{dt} \right\rangle_n = \frac{m\tau}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{r}^2 \rangle_n = 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

por lo que no contribuye al corrimiento energético de los estados estacionarios en promedio [15, 17, 33]. Es importante notar que, cuando el promedio anterior es calculado en términos cuánticos, existe una ambigüedad en el ordenamiento de los operadores, ya que

$$\langle [\hat{r}_j, \hat{r}_j] \rangle_n = \langle \hat{r}_j \hat{r}_j \rangle_n - \langle \hat{r}_j \hat{r}_j \rangle_n = -2i \sum_k \omega_{kn}^3 |r_{jkn}|^2 \neq 0, \quad (3.58)$$

y solamente el operador simetrizado

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^S \equiv \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{2} = \frac{\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}\}}{2}, \quad (3.59)$$

donde  $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}\}$  representa el anticonmutador entre los operadores  $\hat{\mathbf{r}}$  y  $\hat{\mathbf{r}}$ , posee un valor medio real y nulo, en concordancia con la ecuación (3.57) [32]. Por otro lado, puede mostrarse que la contraparte antisimétrica del operador anterior,

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^A \equiv \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{2} = \frac{[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}]}{2}, \quad (3.60)$$

predice valores medios imaginarios. Para esto, puede obtenerse, de la ecuación (3.58), que

$$\langle \delta\mathcal{K} \rangle_{n\tau}^A \equiv -\frac{m\tau}{2} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^A_{nn} = \frac{im\tau}{2} \sum_k |\mathbf{r}_{nk}|^2 \omega_{nk}^3. \quad (3.61)$$

Al rescribir la ecuación anterior en términos de (3.30) y (3.31), se arriba a que

$$\langle \delta\mathcal{K} \rangle_{n\tau}^A = \frac{i\hbar}{4} \sum_k \mathcal{A}_{nk} = \frac{i\hbar}{4\mathcal{T}_n}, \quad (3.62)$$

resultado que puede interpretarse como una modificación en la vida media del estado del subsistema mecánico causada por el cambio en la energía debido al corrimiento Lamb.

De esta manera, se tiene que el valor esperado del operador  $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}})^A$  arroja un número imaginario proporcional al inverso del tiempo de vida del correspondiente estado excitado [33], mientras que el valor medio de  $(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}})^S$  representa una contribución al corrimiento en la energía, siendo en este caso nulo, para el mismo estado [32].

Al sustituir en la ecuación (3.56) el resultado obtenido en (3.57), se arriba a que la corrección radiativa a la energía proviene únicamente del acoplamiento entre el dipolo eléctrico instantáneo del átomo,  $\mathbf{d} \equiv q_e \mathbf{r}$ , y la componente eléctrica del campo electromagnético de fondo [32],

$$\langle \delta \mathcal{K} \rangle_{n\tau} = \frac{q_e^2}{2} \langle \mathbf{r} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle_n = \frac{q_e}{2} \langle \mathbf{d} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle_n. \quad (3.63)$$

Para llevar a cabo el cálculo explícito de los términos a la derecha de la última ecuación, se retoma la expresión del operador de difusión en el límite markoviano dado en términos de coeficientes de difusión, ecuación (2.38), tal que al integrar primero sobre el espacio fase e integrar una vez por partes cada término, se tenga que

$$\begin{aligned} q_e^2 \langle r_j \hat{\mathcal{D}}_j \rangle &= \int \left( \mathcal{D}_{jk}^{pp} r_j \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial p_k} + \mathcal{D}_{jk}^{pr} r_j \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r_k} \right) d^3 r d^3 p \\ &= \int \left( \mathcal{D}_{jk}^{pp} r_j \mathcal{Q} - \int \frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pp} r_j}{\partial p_k} \mathcal{Q} d^3 p \right) d^3 r + \int \left( \mathcal{D}_{jk}^{pr} r_j \mathcal{Q} - \int \frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pr} r_j}{\partial r_k} \mathcal{Q} d^3 r \right) d^3 p \\ &= \int \mathcal{D}_{jk}^{pp} r_j \mathcal{Q} d^3 r - \int r_j \left( \frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pp}}{\partial p_k} + \frac{\partial \mathcal{D}_{jk}^{pr}}{\partial r_k} \right) \mathcal{Q} d^3 r d^3 p + \int \mathcal{D}_{jk}^{pr} r_j \mathcal{Q} d^3 p - \int \mathcal{D}_{jj}^{pr} \mathcal{Q} d^3 r d^3 p. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Las integrales positivas en la última igualdad de la ecuación anterior son nulas al estar ambas evaluadas en la superficie en el infinito; de la misma manera, la integral proporcional a la suma de las derivadas de los coeficientes de difusión es cero de acuerdo con el resultado de la ecuación (2.195). Así, se llega a

$$q_e^2 \langle r_j \hat{\mathcal{D}}_j \rangle = - \int \mathcal{D}_{jj}^{pr} \mathcal{Q} d^3 r d^3 p = - \langle \mathcal{D}_{jj}^{pr} \rangle. \quad (3.65)$$

Con base en este resultado y en la ecuación (2.177) se encuentra que

$$q_e^2 \langle r_j \hat{\mathcal{D}}_j \rangle_n = - \frac{i q_e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar} \int_{-\infty}^t \varpi(t-t') \langle [\hat{r}_j, \hat{r}'_j] \rangle_n dt'. \quad (3.66)$$

El conmutador dentro de la expresión integral hallada puede calcularse de manera análoga a la ecuación (2.182), obteniéndose que

$$\langle [\hat{r}_j, \hat{r}'_j] \rangle_n = -2i \sum_k |r_{jnk}|^2 \sin(\omega_{kn}(t-t')), \quad (3.67)$$



tal que, al sustituir la expresión de  $\varpi(t - t')$  de la ecuación (2.32), se arriba a

$$q_e^2 \langle r_j \hat{\mathcal{D}}_j \rangle_n = -\frac{q_e^2}{3\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_k |r_{jnk}|^2 \int_0^\infty \omega^3 \int_{-\infty}^t \cos(\omega(t - t')) \sin(\omega_{kn}(t - t')) dt' d\omega. \quad (3.68)$$

La integral sobre  $t'$ , puede ser rescrita en términos de  $\Delta t \equiv t - t'$ . Adicionalmente, al utilizar las mismas identidades trigonométricas con las que se obtuvo la ecuación (2.187), se tiene que la integral se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \cos(\omega(t - t')) \sin(\omega_{kn}(t - t')) dt' &= \int_0^\infty \cos(\omega \Delta t) \sin(\omega_{kn} \Delta t) d\Delta t \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty [\sin((\omega_{kn} + \omega) \Delta t) + \sin((\omega_{kn} - \omega) \Delta t)] d\Delta t. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Por otro lado, con un procedimiento análogo al empleado en la deducción de la ecuación (1.40), se llega a que la última integral es igual a

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty [\sin((\omega_{kn} + \omega) \Delta t) + \sin((\omega_{kn} - \omega) \Delta t)] d\Delta t = \frac{\omega_{kn}}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}. \quad (3.70)$$

Así, de las ecuaciones (3.65) y (3.70) se llega a que

$$\frac{q_e^2}{2} \langle r_j \hat{\mathcal{D}}_j \rangle_n = -\frac{q_e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_k |r_{jnk}|^2 \omega_{kn} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}. \quad (3.71)$$

De la ecuación anterior se tiene que la corrección radiativa al valor medio de la energía, en notación vectorial, es

$$\delta \mathcal{E}_n \equiv \langle \delta \mathcal{K} \rangle_{n\tau} = -\frac{q_e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{r}_{nk}|^2 \omega_{kn} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}. \quad (3.72)$$

El efecto Lamb propiamente dicho, también llamado corrimiento Lamb observable, se deduce al sustraer del corrimiento total de energía la contribución de partícula libre [32, 77], que se halla representada por la ecuación (3.72) en el límite de energías electrónicas continuas, es decir, cuando  $\omega_{kn}$  es despreciable en comparación con  $\omega$  en el denominador de dicha ecuación [15, 17], es decir,

$$\delta \mathcal{E}^{\text{libre}} = \frac{q_e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{r}_{kn}|^2 \omega_{kn} \int_0^\infty \omega d\omega = \frac{q_e^2 \hbar}{4\pi^2 \epsilon_0 m c^3} \int_0^\infty \omega d\omega. \quad (3.73)$$

Se arribó a la última igualdad al utilizar la llamada regla de la suma de Thomas-Reiche-Kuhn  $\sum_k |\mathbf{r}_{kn}|^2 \omega_{kn} = 3\hbar/2m$  [75, 91]. Así, al tomar la diferencia entre las ecuaciones (3.72) y (3.73), se obtiene que el efecto Lamb observable para el nivel  $n$ -ésimo es

$$\delta \mathcal{E}_n^{\text{obs}} = \delta \mathcal{E}_n - \delta \mathcal{E}^{\text{libre}} = -\frac{1}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{r}_{kn}|^2 \omega_{kn}^3 \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}. \quad (3.74)$$

Para evitar la divergencia logarítmica de la integral anterior, se introduce la regla de corte usual para procesos no relativistas, es decir,  $\omega_C = mc^2/\hbar$  [15, 17], tal que

$$\delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}} = \frac{1}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{r}_{kn}|^2 \omega_{kn}^3 \ln \left| \frac{mc^2}{\hbar\omega_{kn}} \right|. \quad (3.75)$$

Este resultado es idéntico al presentado por H. A. Bethe en 1947 para el corrimiento Lamb desde los fundamentos de la electrodinámica cuántica [15, 17, 77]. Adicionalmente, al realizar el cálculo numérico de la ecuación (3.75) para el caso del estado  $2s_{1/2}$  del hidrógeno, este arroja un valor que concuerda con los resultados experimentales:  $\delta\mathcal{E}_{2s}^{\text{obs}} \approx 1040$  MHz [7]. Sin embargo, es notable que en el presente desarrollo no se necesitó de ninguna renormalización explícita de la masa del electrón, adicional a la tomada en la deducción de la ecuación de Abraham-Lorentz, ecuación (G.19), en el apéndice G.

### 3.5.1. El significado del efecto Lamb

El resultado expuesto en la ecuación (3.72) es igual al hallado por E. A. Power en 1966 para el efecto Lamb [77, 85], basándose en el argumento de R. Feynman de 1961 [46], desde el marco de la electrodinámica cuántica. De acuerdo con Feynman, la presencia del átomo genera una débil perturbación en el campo de fondo cercano, tal que este actúa como un medio refractante [46]. El efecto de esta perturbación es el cambiar las frecuencias del campo de fondo en la vecindad del átomo, de  $\omega$  a  $\omega/N(\omega)$  [32, 85], donde  $N$  denota el índice de refracción. Así, el corrimiento en la energía del CPC debido a la presencia del átomo es

$$\Delta\mathcal{E}_n = \frac{1}{2} \sum_{\kappa,\lambda} \frac{\hbar\omega_\kappa}{N_n(\omega_\kappa)} - \frac{1}{2} \sum_{\kappa,\lambda} \hbar\omega_\kappa \approx -\frac{1}{2} \sum_{\kappa,\lambda} [N_n(\omega_\kappa) - 1] \hbar\omega_\kappa, \quad (3.76)$$

donde el índice de refracción del medio está dado en la presente aproximación por

$$N(\omega_\kappa) \approx 1 + \frac{1}{3\epsilon_0\hbar V} \sum_k \frac{|\mathbf{d}_{kn}|^2 \omega_{kn}}{\omega_{kn}^2 - \omega_\kappa^2}, \quad (3.77)$$

[17, 24, 77], donde  $\mathbf{d}_{kn} = q_e \mathbf{r}_{kn}$  denota el momento dipolar eléctrico de la transición. Al sustituir la ecuación anterior en la última igualdad de (3.76), tomar el límite continuo sobre  $\omega_\kappa$ , sumar sobre las polarizaciones e integrar sobre el ángulo sólido  $\Omega_\kappa$ , se obtiene que

$$\Delta\mathcal{E}_n = -\frac{1}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{d}_{kn}|^2 \omega_{kn} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}, \quad (3.78)$$

resultado que coincide con la ecuación (3.72). De igual forma, al sustraer la contribución de partícula libre, Power llegó, desde esta perspectiva, a una expresión para el corrimiento Lamb observable idéntica a la ecuación (3.74) [32, 77, 85].

Es importante observar que la ausencia del término  $\tau^2\omega^4$  en el denominador de la ecuación (3.74), proveniente de la reacción radiativa, es debido a que ha sido despreciado en el presente cálculo, ya que este es realizado en el orden más bajo en  $q_e^2$ . La introducción de este término es importante para algunas aplicaciones, en particular para deducir expresiones válidas para el índice de refracción en la ecuación (3.77) [32].

### 3.5.2. Interpretaciones alternativas

La interpretación del corrimiento Lamb, como un cambio en los niveles energéticos del átomo debido a la interacción de este con el CPC contiguo, está en línea con el acercamiento general de la presente teoría. Este corrimiento es una manifestación de la influencia ejercida por la partícula en el campo de fondo cercano, que después interactúa de regreso con la partícula [32]. Una manera alternativa de ver esta influencia recíproca es considerando la relación general entre la polarizabilidad atómica  $P(\omega)$  y el índice de refracción del medio afectado por esta [17], que para  $N(\omega) \approx 1$  cumple con que

$$N(\omega) = 1 + 2\pi P(\omega). \quad (3.79)$$

Al comparar la última expresión con la ecuación (3.77), se obtiene que

$$P_n(\omega) = \frac{1}{6\pi\epsilon_0\hbar} \sum_k \frac{|\mathbf{d}_{kn}|^2 \omega_{kn}}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}, \quad (3.80)$$

que corresponde a la fórmula de Kramers-Heisenberg [91]. Lo anterior indica que el efecto Lamb puede ser interpretado como un efecto Stark de segundo orden en  $q_e^2\mathbf{E}$  [17] asociado al momento dipolar,  $\mathbf{d}(\omega) = P(\omega)\mathbf{E}$ , inducido por la componente eléctrica del CPC en el átomo [32].

Otra forma de rescribir la ecuación (3.74), común en los libros y mejor adaptada para cálculos directos, es en términos de la energía de los estados,  $\mathcal{E}_n = \hbar\omega_n$ . Así, al definir

$$\mathcal{I}_{nk} \equiv \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{(\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_n)^2 - \mathcal{E}^2}, \quad (3.81)$$

se tiene que la ecuación (3.74) es igual a

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}} &= -\frac{q_e^2}{6\pi^2\epsilon_0\hbar c^3} \sum_k \mathcal{I}_{nk} \omega_{kn}^3 |\mathbf{r}_{kn}|^2 \approx -\frac{q_e^2 \mathcal{I}_n}{6\pi^2\epsilon_0\hbar m^2 c^3} \sum_k |\mathbf{p}_{kn}|^2 (\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_n) \\ &= -\frac{q_e^2 \mathcal{I}_n}{6\pi^2\epsilon_0\hbar m^2 c^3} \sum_k \langle n | [\mathbf{p}, \hat{\mathcal{H}}] | k \rangle \cdot \langle k | \mathbf{p} | n \rangle = -\frac{iq_e^2 \mathcal{I}_n}{6\pi^2\epsilon_0 m^2 c^3} \sum_k \langle n | \mathbf{F} | k \rangle \cdot \langle k | \mathbf{p} | n \rangle, \end{aligned} \quad (3.82)$$

donde se utilizó la ecuación (2.168) y se ha supuesto que  $\mathcal{I}_{nk}$  depende tan débilmente del índice  $k$  que tal dependencia puede ser ignorada [32]. Adicionalmente, al utilizar que  $\mathbf{F} = -\nabla\mathcal{V}$ , se llega a que

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}} &= \frac{iq_e^2\mathcal{I}_n}{6\pi^2\epsilon_0m^2c^3}\langle n|\nabla\mathcal{V}\cdot\mathbf{p}|n\rangle = \frac{iq_e^2\mathcal{I}_n}{12\pi^2\epsilon_0m^2c^3}\langle n|[\nabla\mathcal{V},\hat{\mathbf{p}}]|n\rangle \\
&= -\frac{\hbar q_e^2\mathcal{I}_n}{12\pi^2\epsilon_0m^2c^3}\langle n|\nabla^2\mathcal{V}|n\rangle = -\frac{\hbar q_e^2\mathcal{I}_n}{12\pi^2\epsilon_0m^2c^3}\langle\nabla^2\mathcal{V}\rangle_n,
\end{aligned} \tag{3.83}$$

[17, 32, 77]. El interés en la expresión anterior radica en que permite interpretar la corrección a la energía como debida a las fluctuaciones del valor del potencial  $\mathcal{V}$ , resultantes de las fluctuaciones  $\delta\mathbf{r}$  de la posición instantánea del electrón atómico [17]. Así, mediante un desarrollo en serie de potencias, se arriba a que

$$\mathcal{V}(\mathbf{r} + \delta(\mathbf{r})) = \mathcal{V}(\mathbf{r}) + \delta r_j \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial r_j} + \frac{\delta r_j \delta r_k}{2} \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial r_j \partial r_k} + \dots \tag{3.84}$$

Suponiendo que las fluctuaciones son esféricamente simétricas en promedio y estadísticamente independientes en direcciones ortogonales, tal que  $\overline{\delta r_j} = 0$  y  $\overline{\delta r_j \delta r_k} = \overline{(\delta\mathbf{r})^2} \delta_{jk}/3$  [32, 77, 99], se tiene que el promedio, sobre el conjunto de fluctuaciones, de  $\mathcal{V}(\mathbf{r} + \delta(\mathbf{r}))$  es

$$\overline{\mathcal{V}(\mathbf{r} + \delta(\mathbf{r}))} = \mathcal{V}(\mathbf{r}) + \frac{\overline{(\delta\mathbf{r})^2} \nabla^2\mathcal{V}}{6} + \dots \tag{3.85}$$

Al escribir el corrimiento energético, ecuación (3.83), en términos del valor de expectación de la desviación  $\mathcal{V}(\mathbf{r} + \delta(\mathbf{r})) - \mathcal{V}(\mathbf{r})$  [32], y al despreciar los términos de mayor orden, se obtiene que

$$\delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}} = \left\langle \overline{\mathcal{V}(\mathbf{r} + \delta(\mathbf{r}))} - \mathcal{V}(\mathbf{r}) \right\rangle_n = \frac{\overline{(\delta\mathbf{r})^2}}{6} \langle\nabla^2\mathcal{V}\rangle_n = -\frac{\hbar q_e^2\mathcal{I}_n}{12\pi^2\epsilon_0m^2c^3} \langle\nabla^2\mathcal{V}\rangle_n. \tag{3.86}$$

De estas ecuaciones se sigue que el desplazamiento cuadrático medio de la posición del electrón es

$$\overline{(\delta\mathbf{r})^2} = -\frac{\hbar q_e^2\mathcal{I}_n}{2\pi^2\epsilon_0m^2c^3} = -\frac{q_e^2\mathcal{I}_n}{2\pi^2\epsilon_0\hbar c} \lambda_C^2, \tag{3.87}$$

donde  $\lambda_C$  representa la longitud de onda de Compton. De la ecuación (3.87) se tiene numéricamente que

$$\frac{\sqrt{\overline{(\delta\mathbf{r})^2}}}{\lambda_C} = \sqrt{-\frac{q_e^2\mathcal{I}_n}{2\pi^2\epsilon_0\hbar c}} \sim 10^{-1}, \tag{3.88}$$

[32]. Cualitativamente, este resultado está en acuerdo con la propuesta de Welton de 1948 de identificar al efecto Lamb como una consecuencia de las fluctuaciones en la posición del electrón debidas a la interacción con el CPC [32, 77, 99]. Es relevante observar que las fluctuaciones que dan origen al corrimiento Lamb son, en promedio, un orden de magnitud más pequeñas que la longitud de onda de Compton, que es ya por sí misma una cantidad pequeña comparada con el radio de Bohr. Así, este corrimiento resulta ser una corrección muy pequeña de los niveles energéticos del átomo, tan pequeña que para ser detectada se requiere del uso de espectroscopios especialmente refinados [32].

Es importante notar que si bien en un inicio se consideró al efecto Lamb como una corrección radiativa a la energía cinética, ecuación (3.72), la ecuación (3.83) muestra este corrimiento como una componente extra de la energía potencial, siendo, en ambos desarrollos, las fluctuaciones en la posición del electrón el origen de la corrección. La razón de esto es que las fluctuaciones  $\delta\mathbf{r}$  generan tanto difusión como energía potencial extra. De esta manera, se tiene que ambas descripciones resultan equivalentes entre sí [32].

## 3.6. Efectos externos en las correcciones radiativas

En las secciones anteriores se ha mostrado que ciertas propiedades básicas del campo de vacío, como la intensidad de sus fluctuaciones o su distribución espectral, están directamente relacionadas con las correcciones radiativas aquí estudiadas. Esto implica que un cambio en dichas propiedades conduciría, al menos en principio, a una correspondiente modificación de las mencionadas correcciones. El campo de fondo puede ser alterado, por ejemplo, al aumentar la temperatura del sistema, al introducir radiación externa, o al introducir materia adicional que altere las condiciones a la frontera del sistema, afectando así la distribución de modos normales del campo [17, 32]. Estas modificaciones conducen a efectos observables tanto en las vidas medias como en los niveles energéticos atómicos.

Estos efectos externos o “ambientales” han sido estudiados por más de siete décadas, usualmente dentro del marco de la teoría cuántica [17]; ejemplo de ello son las ideas de E. M. Purcell de 1946 sobre la emisión espontánea [86]. En el presente trabajo la dependencia del campo de fondo, así como de sus modificaciones, ha sido explícita desde el principio, lo que permite estudiar los efectos externos, antes mencionados, de manera clara.

### 3.6.1. Correcciones ambientales en los tiempos de vida atómicos

En la ecuación (3.23) se mostró que las tasas de transiciones estimuladas atómicas son directamente proporcionales a la distribución espectral del campo de fondo externo, sin importar su forma específica. En el caso particular de que el campo externo en cuestión sea térmico y se halle a una temperatura  $T$ , con  $\mathfrak{K}_a(\omega_{nk})$  dada por la ecuación (3.36), se tiene, partiendo de la ecuación (3.29), que la tasa de transiciones inducidas del estado  $n$ -ésimo al estado  $k$ -ésimo está dada por

$$\frac{dN_{nk}}{dt} = u_0(\omega_{nk})\mathfrak{K}_a(\omega_{nk})\mathcal{B}_{kn} = \frac{q_e^2|\omega_{nk}|^3|\mathbf{r}_{nk}|^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \frac{1}{e^{\hbar|\omega_{nk}|/k_B T} - 1}. \quad (3.89)$$

La ecuación (3.89) muestra que ningún estado propio del hamiltoniano del sistema es estable para  $T > 0$ , y que el campo térmico induce tanto transiciones hacia arriba como hacia abajo [17, 32]. Para el caso de transiciones hacia abajo,  $\omega_{nk} > 0$ , es notable que puede rescribirse la última ecuación en términos de  $\mathcal{A}_{nk}$  como sigue

$$\frac{dN_{nk}}{dt} = u_0(\omega_{nk})\mathfrak{K}_a(\omega_{nk})\mathcal{B}_{kn} = \frac{\mathcal{A}_{nk}}{e^{\hbar|\omega_{nk}|/k_B T} - 1}. \quad (3.90)$$

De la última expresión se llega a que el efecto del campo térmico en la tasa de decaimiento es apenas notable a temperatura ambiente,  $k_B T \approx 0.025$  eV, ya que para frecuencias ópticas usuales, el denominador de la ecuación (3.90) oscila entre  $e^{-40}$  y  $e^{-400}$  [17, 32]. Para que el campo térmico genere efectos observables en las vidas medias atómicas,  $T$  debe ser del orden de  $10^4$  K, temperaturas a las cuales otros efectos serían dominantes en la estabilidad atómica, siempre que el átomo aun exista [17]. Por otro lado, la simple adición de un campo monocromático de alta intensidad de frecuencia  $\omega_{nk}$ , como el producido por un láser, puede generar efectos observables en las tasas de emisión, como es bien sabido. Este efecto es, de hecho, parte de la base del funcionamiento de un láser [92].

Cuando la geometría del sistema o la densidad espectral del campo de fondo son modificados por la presencia de materiales conductores, tales como placas metálicas o las paredes de una cavidad, las tasas de transición son afectadas [17]. Supóngase, por ejemplo, que el campo modificado es aún isotrópico, con una densidad de modos de una frecuencia dada  $\omega_{nk}$ , que únicamente ha sido reducida por un factor geométrico  $\mathfrak{K}_a(\omega_{nk}) < 1$ . Así, de acuerdo con los resultados de la sección 3.3, las correspondientes tasas de transición son reducidas por el mencionado factor, ya que tanto  $\mathcal{A}$  como  $u(\omega_{nk})\mathcal{B}$  son proporcionales a la densidad de modos. De esta forma, al encerrar átomos en cavidades de alta calidad que excluyan los modos del campo apropiados, es posible inhibir las correspondientes transiciones radiativas [17, 32]. Para un campo anisotrópico, más general, los cálculos son algo más complicados, sin que estos conduzcan a un punto de vista físico distinto [17]. Los efectos de cavidad han sido estudiados en múltiples pruebas experimentales a partir de las propuestas de D. Kleppner en 1981 y los resultados obtenidos por P. Goy, J. M. Raimond, M. Gross y S. Haroche en 1983 [53, 62].

En el capítulo 2, se mostró que el campo de fondo juega un papel primordial al determinar la estructura básica y el comportamiento cuántico del átomo, de acuerdo con la EDE. Por esto, puede esperarse que una modificación geométrica de este campo produzca un impacto en el comportamiento del átomo al nivel mecanocuántico. Para esclarecer lo anterior, considerese la ecuación (3.5),

$$\tau \langle \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle_n = \frac{q_e^2}{m} \langle \mathbf{p} \cdot \hat{\mathcal{D}} \rangle_n. \quad (3.91)$$

Es notable que cualquier alteración en los modos del campo afectará tanto la reacción radiativa como el CPC por igual. La razón de esto es que en ambos lados de la última ecuación el campo entra únicamente a través de su función de correlación, aproximada al orden significativo más bajo [32]. Lo anterior conduce a una importante conclusión, que las soluciones estacionarias de la ecuación de Schrödinger, que están en total acuerdo con la ecuación de balance energético, son inmunes a tales modificaciones ambientales del campo de fondo. Esto puede interpretarse como un signo de la robustez de la descripción hecha en términos de los estados estacionarios cuánticos [32].

### 3.6.2. Correcciones ambientales en los niveles de energía

En el mismo sentido que en la subsección 3.6.1, es posible usar las ecuaciones (3.73) y (3.74) para calcular los cambios en los corrimientos energéticos producidos por la adición de un campo de fondo externo. Para este fin, primero debe deducirse el corrimiento  $\delta\mathcal{E}_n(u)$  producido por el campo total  $u = u_0 + u_a$ , siguiendo el mismo procedimiento que condujo a la ecuación (3.72). Posteriormente, a la correspondiente contribución de partícula libre  $\delta\mathcal{E}^{\text{libre}}(u)$  y el correspondiente corrimiento Lamb observable  $\delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}}(u)$ , se les debe sustraer los corrimientos originales,  $\delta\mathcal{E}^{\text{libre}}(u_0)$  y  $\delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}}(u_0)$ , producidos por el CPC [17, 32]. Así, se obtienen los siguientes resultados:

$$\Delta(\delta\mathcal{E}^{\text{libre}}) = \frac{q_e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{r}_{nk}|^2 \omega_{kn} \int_0^\infty \left( \frac{u_a(\omega)}{u_0(\omega)} \right) \omega d\omega; \quad (3.92)$$

$$\Delta(\delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}}) = -\frac{q_e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{r}_{nk}|^2 \omega_{kn} \int_0^\infty \left( \frac{u_a(\omega)}{u_0(\omega)} \right) \frac{\omega d\omega}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}, \quad (3.93)$$

válidos para el caso de un campo electromagnético homogéneo. Si, por ejemplo, el campo adicional representa radiación de cuerpo negro a una temperatura  $T > 0$ , es decir, si  $u_a(\omega, T) = u_0(\omega) \mathfrak{K}_a(\omega, T)$ , con  $\mathfrak{K}_a(\omega, T)$  dada por la ecuación (3.36), se tiene de la ecuación (3.92) que

$$\Delta_T(\delta\mathcal{E}^{\text{libre}}) = \frac{q_e^2 (k_B T)^2}{2\pi^2 \epsilon_0 \hbar m c^3} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{q_e^2 k_B^2}{12 \epsilon_0 \hbar m c^3} T^2. \quad (3.94)$$

A su vez, la expresión para el cambio en el efecto Lamb observable está dada por

$$\Delta_T(\delta\mathcal{E}_n^{\text{obs}}) = -\frac{q_e^2}{3\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_k |\mathbf{r}_{nk}|^2 \omega_{kn} \int_0^\infty \left( \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right) \frac{\omega d\omega}{\omega_{kn}^2 - \omega^2}. \quad (3.95)$$

Los resultados anteriores, ecuaciones (3.94) y (3.95), coinciden con las predicciones teóricas deducidas por P. L. Knight y G. Barton desde la perspectiva de la electrodinámica cuántica en 1972 [5, 63], siendo los correspondientes corrimientos térmicos observados experimentalmente por L. Hollberg y J. L. Hall en 1984 [56]. Desde el punto de vista de la EDE, la interpretación de estos corrimientos es clara: representan contribuciones adicionales a la energía cinética impresa a la partícula por el campo térmico [32].

# Conclusiones

La electrodinámica estocástica es una teoría física en proceso de construcción que permite obtener un marco teórico claro y autoconsistente, desde el cual es posible estudiar los llamados fenómenos o efectos cuánticos. Como se mostró a lo largo de la presente tesis, esta teoría permite entender los comportamientos característicos de la mecánica cuántica, como la estabilidad atómica, el fenómeno de la cuantización o las fluctuaciones cuánticas, mediante una descripción basada en consideraciones únicamente físicas, siendo su fundamento físico principal la interacción entre un sistema mecánico y el campo electromagnético de punto cero o CPC. A continuación se mencionarán, examinarán y discutirán brevemente los resultados más relevantes, obtenidos en los desarrollos hechos en los capítulos anteriores.

A partir del análisis estadístico del campo electromagnético del vacío, llevado a cabo en el capítulo 1, se arribó a que el valor del producto de las varianzas de la posición y el momento canónicos del campo se halla acotado, en el límite atómico, por la cantidad  $\hbar^2/4$ , ecuación (1.19). Este resultado, correspondiente a las desigualdades de Heisenberg cuánticas, muestra al CPC como el origen físico, último e irreducible de las fluctuaciones cuánticas “acausales”, dándose respuesta de esta forma a uno de los misterios más grandes de la mecánica cuántica actual. Consecutivamente, se halló que para que las correlaciones a dos puntos del CPC posean significado físico, es necesaria la introducción de la regla de corte, pues se obtuvo que los tiempos y las distancias de correlación de dicho campo son dependientes de los inversos de la frecuencia y el número de onda máximos, respectivamente.

Partiendo de la ecuación de Abraham-Lorentz y de las propiedades estadísticas del CPC obtenidas, se comenzó el capítulo 2 con la construcción de la ecuación general de movimiento de la EDE. Esta ecuación resultó ser una ecuación diferencial de naturaleza estocástica, ecuación (2.1), cuya estocasticidad proviene de la fuerza de Lorentz experimentada por la partícula al hallarse inmersa en el campo de vacío. A través de un estudio estadístico de esta ecuación de movimiento, se halló que esta está representada, en la descripción de Fokker-Planck, por una ecuación generalizada no markoviana, ecuación (2.25), dependiente de un operador integrodiferencial de difusión, el cual físicamente describe el efecto promedio de las múltiples dispersiones causadas por el CPC en la partícula.



La descripción en el espacio fase brindada por la ecuación generalizada de Fokker-Planck obtenida, se reduce inequívocamente a la descripción cuántica de Schrödinger, en el espacio de configuración, al tomar los límites markoviano y no radiativo de la presente formulación y al aplicarle la condición de balance energético, ecuación (2.65), al estado base del subsistema mecánico en cuestión. Así, se mostró que el llamado régimen cuántico se reduce a ser un caso particular de la electrodinámica estocástica, tal que la ecuación de Schrödinger no sólo describe una partícula, sino a una partícula en interacción permanente con el CPC en el régimen reversible en el tiempo, en el cual el campo ha impreso a la partícula sus fluctuaciones y propiedades de onda características. Aunado a esto, los resultados del capítulo 2 muestran al campo de radiación de punto cero como la entidad física que restituye la energía que los electrones radian al orbitar el núcleo atómico, brindando así el mecanismo que garantiza la estabilidad del átomo.

En el capítulo 3 se estudió el caso en el que el estado del subsistema mecánico no cumple la condición de equilibrio (2.65), lo cual sucede, por ejemplo, cuando este no se halla en su estado base. Bajo esta circunstancia, se halló que el cambio en el valor medio de la energía no es nulo, ecuación (3.11), y que por tanto los estados excitados del subsistema no son en realidad estacionarios, a diferencia de lo predicho por la teoría de Schrödinger. De manera análoga, se estudió el caso en el que el campo de vacío está en un estado excitado, obteniéndose nuevamente que, en general, no existen estados energéticos estables del subsistema mecánico distintos al base, ecuación (3.14). Sin embargo, se encontró, como excepción, que el oscilador armónico unidimensional posee estados excitados estables en presencia del campo fotónico, lo cual se debe a que la energía media de los osciladores coincide con la de los modos de oscilación del campo en el equilibrio, siendo este el argumento detrás de la cuantización del campo electromagnético.

Finalmente, a partir de las ecuaciones para la evolución de los valores medios de la energía, las constantes de movimiento, y las correcciones de origen radiativo a la energía cinética, ecuaciones (2.59), (2.60) y (2.64), fue posible estudiar las llamadas correcciones radiativas del sistema. En primer lugar, se estudiaron las probabilidades de transición de un estado energético a otro cuando no existe balance energético detallado. Estas probabilidades, conocidas como coeficientes de Einstein, se estudiaron desde la electrodinámica estocástica de manera clara y concisa, siendo los resultados idénticos a los predichos desde el formalismo de la electrodinámica cuántica. Adicionalmente, este desarrollo permitió explicar el origen de las emisiones “espontáneas” de N. Bohr, siendo estas generadas por la interacción del subsistema mecánico con el CPC, aclarándose la supuesta acausalidad de dicho fenómeno, y obtener la distribución de Planck para la densidad espectral de energía de la radiación térmica. Análogamente, se estudió la evolución del valor medio para toda integral de movimiento clásica cuando se rompe el balance entre los términos radiativos del sistema, hallándose que estas únicamente poseen valores medios constantes cuando se desprecia la interacción con el CPC, o cuando el sistema se halla en su estado base, es decir, cuando el sistema está en el régimen cuántico.

La última corrección radiativa que se estudió fue el corrimiento Lamb, este corrimiento se dedujo mediante las correcciones radiativas a la energía cinética del subsistema mecánico. Las expresiones halladas para el efecto Lamb observable resultaron corresponder a las halladas históricamente desde la electrodinámica cuántica que permitieron explicar la separación energética de 1040 MHz entre los estados  $2s_{1/2}$  y  $2p_{1/2}$  del átomo de hidrógeno, ecuación (3.75). Las expresiones obtenidas para las correcciones radiativas estudiadas corresponden con las expresiones obtenidas desde la electrodinámica cuántica en su límite no relativista, siendo, en el caso de la EDE, consecuencias naturales del sistema en estudio, y obteniéndose estas de una manera autoconsistente con la teoría. Para finalizar el último capítulo de la tesis, se estudiaron los efectos externos o ambientales que pudieran afectar el sistema partícula-campo, como por ejemplo puede ser el aumento de la temperatura del sistema, la introducción de radiación ajena o la modificación de las condiciones a la frontera del problema. En todos los casos se arribó a expresiones que han sido obtenidas desde la perspectiva de la electrodinámica cuántica, y más importante, que han podido ser comprobadas experimentalmente.

Con base en lo anterior, esta tesis permite concluir que la EDE es una teoría alternativa de la mecánica cuántica, que si bien aún no resuelve los problemas como la no localidad o la acausalidad, brinda una explicación de sus orígenes, restableciendo dichos principios físicos, al nivel físico fundamental. La descripción que se ha realizado corresponde inequívocamente al régimen cuántico, de tal manera que la hipótesis original de la electrodinámica estocástica, el que el comportamiento cuántico puede ser entendido como una consecuencia de la interacción entre la partícula cargada y el campo de punto cero, resulta ser el trasfondo físico de la mecánica cuántica. Finalmente, se mostró que la EDE tiene la capacidad de describir fenómenos que sobrepasan los límites de la mecánica cuántica usual, gracias a que los efectos del CPC han sido considerados desde el principio de la formulación, arribando correctamente a resultados obtenidos únicamente desde el marco teórico de la electrodinámica cuántica no relativista.



# Apéndice A

## Principios básicos de la teoría electromagnética

El electromagnetismo clásico, formulado por J. C. Maxwell a mediados del siglo XIX, describe de manera condensada los fenómenos eléctricos y magnéticos, es decir, las interacciones del campo electromagnético consigo mismo y con la materia cargada [59]; bajo una sola teoría fundamentada en cuatro ecuaciones diferenciales conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones consisten en generalizaciones de observaciones experimentales que detallan la evolución de los campos eléctrico y magnético [88],  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  respectivamente, como funciones del tiempo y de la posición en presencia de materia representada por cargas y corrientes eléctricas [59].

La primera ecuación de Maxwell, conocida como ley de Gauss, expresa la proporcionalidad entre el flujo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada y la cantidad de carga eléctrica encerrada por dicha superficie. La ley de Gauss matematiza el hecho de que las cargas eléctricas son fuentes y sumideros del campo eléctrico, simbolizando de manera compacta la ley de Coulomb y el principio de superposición para este campo [59]. En forma diferencial, y en el Sistema Internacional de Unidades, la ley de Gauss se escribe como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\rho_e = \rho_e(\mathbf{r}, t)$  representa la densidad de carga eléctrica del sistema a tratar. La segunda ecuación, que consiste en el análogo magnético de la ley de Gauss, muestra que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es siempre nulo. Esta ecuación es resultado de la falta de evidencia experimental sobre la existencia de cargas magnéticas [59], también conocidas como monopolos magnéticos. La ley anterior establece que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (\text{A.2})$$

La ley de inducción electromagnética de Faraday, o simplemente ley de Faraday, describe la generación de campos eléctricos como resultado de las variaciones temporales en el campo magnético. Formalmente, esta ley establece que el cambio en el tiempo del flujo magnético a través de una espira cerrada es igual a una fuerza electromotriz inducida sobre la frontera de dicha espira [59]. En su forma diferencial, la ley de Faraday está dada por

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.3})$$

Finalmente, la ecuación de Ampère-Maxwell describe la generación de campos magnéticos por parte de dos fenómenos físicos distintos: la existencia de corrientes eléctricas y las variaciones temporales en el campo eléctrico. La ecuación establece que la integral de línea del campo magnético sobre una espira cerrada es proporcional a la cantidad de líneas de corriente eléctrica que atraviesan la superficie generada por la espira, así como al cambio temporal del flujo eléctrico sobre la misma [59]. De esta forma, la ecuación de Ampère-Maxwell es

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  representan la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío respectivamente, y el vector  $\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t)$  denota la densidad de corriente eléctrica.

Adicionalmente a las cuatro ecuaciones anteriores, existe otra ecuación igualmente importante para la teoría electromagnética: la ecuación de continuidad. Esta ecuación puede obtenerse tomando la divergencia de la ecuación de Ampère-Maxwell. La ecuación de continuidad describe la conservación local de la carga eléctrica global [19, 47, 59], en función de las densidades de carga y de corriente presentes en el sistema de estudio. La ecuación de continuidad se expresa como

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Las ecuaciones de Maxwell forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas, a partir del cual pueden hallarse las ecuaciones de evolución de los campos eléctrico y magnético. Para el campo eléctrico se tiene, al tomar el rotacional de la ecuación (A.3) y utilizar la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$  [2], que

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}. \quad (\text{A.6})$$

Al sustituir las ecuaciones (A.1) y (A.4) en (A.6), se obtiene que la ecuación de evolución del campo eléctrico está dada por la ecuación de onda con fuentes siguiente

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_e + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_e}{\partial t}, \quad (\text{A.7})$$

donde se utilizó que  $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz [59]. Análogamente, tomando el rotacional de la ecuación de Ampère-Maxwell y empleando las ecuaciones (A.2) y (A.3), se llega a que el campo magnético cumple de igual forma con una ecuación de onda con fuentes, la cual está dada por

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\nabla \times \mathbf{J}_e. \quad (\text{A.8})$$

La ecuación (A.7) exhibe de manera explícita que el campo eléctrico posee dos componentes físicas distintas, generadas por la densidad de carga y la densidad de corriente respectivamente. Por su parte, la ecuación (A.8) muestra que la evolución del campo magnético únicamente se ve afectada por la densidad de corriente.

## A.1. Potenciales electromagnéticos

Una forma alternativa de representar las ecuaciones de Maxwell y con ellas a los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , especialmente útil en la descripción hamiltoniana de la electrodinámica, es mediante funciones generadoras conocidas como potenciales. Para construir estos potenciales basta notar que la ecuación (A.2) muestra que el campo magnético  $\mathbf{B}$  es un campo solenoidal al tener divergencia nula, de modo que es posible definir un campo vectorial  $\mathbf{A}$  tal que se tenga que el campo magnético circula alrededor de dicho vector [2], es decir,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.9})$$

El vector  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  se conoce como potencial vectorial magnético [59]. Por otro lado, al sustituir la ecuación (A.9) en la ley de inducción de Faraday se obtiene que

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.10})$$

donde se observa que el vector dentro del paréntesis de la ecuación anterior es un campo vectorial irrotacional, por lo que existe una función escalar cuyo gradiente es igual a dicho vector [2]. Esto define el potencial escalar eléctrico como  $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$  [59], tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi. \quad (\text{A.11})$$

Al igual que en la ecuación (A.7), la ecuación (A.11) muestra que el campo eléctrico posee dos componentes vectoriales, siendo estas expresadas en términos del potencial escalar  $\Phi$  y del potencial vectorial  $\mathbf{A}$ . De esta forma el campo eléctrico se puede expresar como

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

Análogamente a las ecuaciones de evolución de los campos eléctrico y magnético, es posible, partiendo de las ecuaciones (A.9) y (A.12) en conjunto con las ecuaciones de Maxwell, hallar las ecuaciones de evolución de los potenciales electromagnéticos. Al sustituir la ecuación (A.12) en la ley de Gauss y las ecuaciones (A.9) y (A.12) en la ecuación de Ampère-Maxwell se arriba a:

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho_e; \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{J}_e. \quad (\text{A.14})$$

A diferencia de las expresiones (A.7) y (A.8), las ecuaciones de evolución de los potenciales siguen estando acopladas entre sí, lo que las hace un sistema de ecuaciones aparentemente más complicado de resolver, sin embargo, la ventaja de resolver un problema en términos de los potenciales, en lugar de los campos, reside en que cada campo vectorial posee tres componentes espaciales y una temporal, de forma que sus ecuaciones de evolución son formas diferenciales que agrupan cuatro ecuaciones diferenciales escalares. Esto implica que al resolver un problema en términos de los campos se obtenga un sistema de ocho ecuaciones diferenciales, mientras que al hacerlo en términos de los potenciales se tiene un sistema de solo seis ecuaciones, cuatro correspondientes al potencial vectorial y dos al potencial escalar.

## A.2. El teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz es un resultado del análisis vectorial, muy útil en el electromagnetismo, que establece que un campo vectorial  $\mathbf{H}$ , nulo en infinito y diferenciable, puede expresarse de manera única como la suma de sus partes longitudinal y transversal [2],

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\parallel} + \mathbf{H}^{\perp}, \quad (\text{A.15})$$

las cuales pueden escribirse, en términos del campo vectorial original, como:

$$\mathbf{H}^{\parallel} = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla' \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}d^3r'; \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{H}^{\perp} = \frac{1}{4\pi}\nabla \times \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\nabla' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}d^3r'. \quad (\text{A.17})$$

De las ecuaciones (A.16) y (A.17) es inmediato que  $\mathbf{H}^{\parallel}$  es irrotacional,  $\nabla \times \mathbf{H}^{\parallel} = \mathbf{0}$ , mientras que  $\mathbf{H}^{\perp}$  es solenoidal,  $\nabla \cdot \mathbf{H}^{\perp} = 0$ . Las condiciones anteriores son los orígenes de los nombres de las partes longitudinal y transversal del campo respectivamente.

El par de ecuaciones (A.7) y (A.8) muestra la relación existente entre los campos eléctrico y magnético con las densidades de carga y de corriente. Por su parte, las ecuaciones (A.9) y (A.12) muestran cómo dichos campos son generados por una pareja de potenciales. Por otro lado, mediante la aplicación sistemática del teorema de Helmholtz es posible establecer para cada componente de cada campo una conexión entre los potenciales y las fuentes de los campos. Lo anterior permitirá desacoplar, al menos de manera parcial, las ecuaciones de evolución de los potenciales, ecuaciones (A.13) y (A.14).

Para el caso del campo eléctrico se tiene, de la ecuación (A.16) y la ley de Gauss, que su parte longitudinal puede expresarse en términos de la densidad de carga como

$$\mathbf{E}^{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right). \quad (\text{A.18})$$

El término entre paréntesis de la ecuación (A.18) resulta ser la expresión integral del potencial instantáneo de Coulomb  $\Phi$ , debido a una densidad de carga eléctrica  $\rho_e$  [59]. De esta forma, a través del teorema de Helmholtz, se obtiene que la parte longitudinal del campo eléctrico es generada exclusivamente por el gradiente del potencial escalar,

$$\mathbf{E}^{\parallel} = -\nabla\Phi. \quad (\text{A.19})$$

Procediendo de igual manera, se tiene de la ecuación (A.17) y de la ecuación de Faraday que la parte transversal del campo eléctrico está dada por

$$\mathbf{E}^{\perp} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right), \quad (\text{A.20})$$

donde se tiene, de las ecuaciones (A.12) y (A.15), que el término entre paréntesis corresponde al potencial vectorial magnético. Así la parte transversal del campo eléctrico corresponde al cambio temporal del potencial vectorial,

$$\mathbf{E}^{\perp} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.21})$$

El proceso de la descomposición de Helmholtz del campo magnético resulta más simple en comparación con el desarrollo del campo eléctrico debido a que la ecuación (A.2) establece desde un principio el carácter transversal de este campo, como puede comprobarse al sustituir dicha ecuación en (A.16),

$$\mathbf{B}^{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \mathbf{0}. \quad (\text{A.22})$$

De manera que se tiene, de la ecuación (A.17) y la ecuación de Ampère-Maxwell, que la componente transversal del campo magnético es



$$\begin{aligned}\mathbf{B}^\perp &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right).\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

De la misma manera que en la ecuación (A.20), puede mostrarse utilizando las ecuaciones (A.9), (A.15) y (A.22) que el término entre paréntesis de la expresión anterior corresponde a una forma alternativa de expresar el potencial vectorial magnético; por lo que el campo magnético queda determinado por

$$\mathbf{B}^\perp = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.24})$$

Al sustituir la ecuación (A.24) en (A.20) se obtiene que la parte solenoidal del campo eléctrico es función únicamente de la componente transversal del campo magnético,

$$\mathbf{E}^\perp = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right). \quad (\text{A.25})$$

Con la intención de realizar una sustitución, similar a la última, en la última igualdad de la ecuación (A.23), es notable que para un campo vectorial arbitrario  $\mathbf{H}$ , nulo en infinito, se cumple que

$$\nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \quad (\text{A.26})$$

[2], de tal forma que para el campo eléctrico se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times (\mathbf{E}^\parallel(\mathbf{r}') + \mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times \mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'.\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

Así, al utilizar el resultado de la ecuación (A.27) en la segunda igualdad de (A.23) se observa explícitamente la dependencia del campo magnético de la componente transversal del campo eléctrico,

$$\mathbf{B}^\perp = \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right). \quad (\text{A.28})$$

Como se mencionó, el desarrollo anterior, de la ecuación (A.18) a la ecuación (A.28), no solo muestra la conexión entre las fuentes de los campos y los potenciales, sino que permite también observar qué potencial contribuye a qué componente de los campos. Específicamente, se halló que el potencial que contribuye a la parte longitudinal del campo eléctrico, única no nula, es el potencial escalar  $\Phi$ , el cual es generado debido a la presencia de la densidad de carga  $\rho_e$ . Como consecuencia de esto, en el caso de ausencia de materia,

los campos carecerían de componentes longitudinales. Por otro lado, también se observa, de las ecuaciones (A.25) y (A.28), que las componentes transversales de los campos están relacionadas entre sí, siendo ambas generadas por el potencial vectorial. Adicionalmente, de estas últimas ecuaciones, se obtuvieron dos expresiones equivalentes para el potencial vectorial,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'; \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}_e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (\text{A.30})$$

las cuales pueden ser deducidas alternativamente al sustituir la ecuación (A.9) en la ecuación de Ampère-Maxwell, ecuación (A.4).

### A.3. Las transformaciones de norma

Para lograr un mayor desacople entre las ecuaciones de evolución de los potenciales electromagnéticos, es posible aprovechar la arbitrariedad con la que estos han sido definidos [59], ecuaciones (A.9) y (A.12). Con este fin, es notable que la ecuación (A.9) muestra que un potencial vectorial magnético de la forma

$$\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A} + \nabla\zeta, \quad (\text{A.31})$$

genera el mismo campo magnético que el generado únicamente por el potencial  $\mathbf{A}$ , bajo el argumento de que para toda función escalar  $\zeta$  se cumple que su gradiente es irrotacional [2],  $\nabla \times \nabla\zeta = 0$ . Esto exhibe que el campo magnético  $\mathbf{B}$  es invariante ante una transformación como la expuesta en la ecuación (A.31). Por otro lado, al sustituir la ecuación (A.31) en (A.12), escrita en términos de un potencial escalar arbitrario  $\Phi'$ , se llega a que

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi' - \frac{\partial(\mathbf{A} + \nabla\zeta)}{\partial t} = -\nabla\left(\Phi' + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.32})$$

En la ecuación (A.32) puede dejarse invariante el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  con una elección apropiada del potencial  $\Phi'$ . Específicamente, al tomar la transformación

$$\Phi' \equiv \Phi - \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad (\text{A.33})$$

se concluye que las parejas de potenciales  $(\mathbf{A}', \Phi')$  y  $(\mathbf{A}, \Phi)$  generan los mismos campos electromagnéticos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ . Las ecuaciones (A.31) y (A.33) forman una transformación conocida como transformación de norma, mientras que la invariancia de las ecuaciones (A.9) y (A.12) bajo dicha transformación se conoce como invariancia de norma [59].

Una manera de tomar ventaja de esta libertad de norma es hallando una transformación adecuada que fije el valor de la divergencia del vector potencial  $\mathbf{A}$  como cero con la intención de simplificar las ecuaciones de evolución de los potenciales. Así, dado un potencial vectorial magnético arbitrario se tiene, sin pérdida de generalidad, que

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \xi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.34})$$

con  $\xi$  alguna función escalar de la posición y del tiempo. Al tomar la divergencia de la transformación expresada en la ecuación (A.31) y sustituir (A.34), se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' - \nabla \cdot \nabla \zeta = \xi(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \zeta. \quad (\text{A.35})$$

La ecuación (A.35) muestra que el vector potencial magnético  $\mathbf{A}$  es solenoidal si y solo si la función  $\zeta$  cumple la siguiente ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \zeta = \xi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.36})$$

El desarrollo hecho, de la ecuación (A.34) a la (A.36), implica que dado un vector potencial siempre se puede elegir trabajar con otro vector potencial que genere el mismo campo que el original pero con divergencia nula. A esta elección de potencial se le conoce como norma de Coulomb o de radiación, e implica la condición de transversalidad para el potencial magnético [19, 59], expresada vectorialmente como

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.37})$$

El tomar la norma de Coulomb implica que, al sustituir la condición de transversalidad sobre el potencial magnético en las ecuaciones (A.13) y (A.14), las ecuaciones de evolución de los potenciales se reduzcan a:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e; \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t}. \quad (\text{A.39})$$

La ecuación (A.38) es una ecuación de Poisson, cuya solución, suponiendo que el potencial eléctrico  $\Phi$  es nulo en infinito, está dada por

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_e(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \quad (\text{A.40})$$

[93], que corresponde, al igual que en la ecuación (A.18), al potencial instantáneo de Coulomb debido a la densidad de carga  $\rho_e$ . Este es el origen del nombre “Norma de Coulomb” [59].

Por otro lado, la inhomogeneidad de la ecuación de onda para el potencial vectorial, ecuación (A.39), puede descomponerse, utilizando nuevamente el teorema de Helmholtz, en una parte longitudinal y una parte transversal. Así, para el vector densidad de corriente  $\mathbf{J}_e$  se tiene que

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_e^\perp + \mathbf{J}_e^\parallel. \quad (\text{A.41})$$

La ecuación (A.19) muestra que los términos dependientes del gradiente del potencial escalar eléctrico aportan información únicamente a las componentes longitudinales de los campos electromagnéticos. Por lo anterior, al sustituir en la ecuación de continuidad, ecuación (A.5), la ecuación (A.38) y la densidad de corriente, en sus partes longitudinal y transversal, se obtiene que

$$\mu_0 \mathbf{J}_e^\parallel = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t}, \quad (\text{A.42})$$

tal que al sustituir la ecuación (A.42) en (A.39), se observa que la fuente que realmente afecta la ecuación de onda del vector potencial magnético es la parte transversal de la densidad de corriente,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_e^\perp. \quad (\text{A.43})$$

La ecuación (A.43) muestra el origen de uno de los otros nombres de la norma de Coulomb, “Norma Transversal”. Una peculiaridad de la norma de Coulomb radica en que la ecuación (A.40) predice que el potencial eléctrico  $\Phi$  se propaga instantáneamente a todo el espacio, es decir, el potencial eléctrico registra los cambios en la densidad de carga  $\rho_e$  inmediatamente, por mínimo que este sea, y sin importar qué tan lejos se dé este cambio en el espacio [59]. De manera contraria, la ecuación (A.43) indica que el potencial vectorial magnético satisface la ecuación de onda, lo que implica que se propaga a velocidad finita  $c$ . La predicción que concierne al potencial escalar está en conflicto con el hecho de que las perturbaciones electromagnéticas se propagan a velocidades finitas menores o iguales que la velocidad de la luz. Sin embargo, una primera forma de entender y remediar este comportamiento, que carece de sentido físico, es notar que la cantidad física mensurable es el campo y no el potencial, siendo los campos eléctrico y magnético soluciones de ecuaciones de onda, ecuaciones (A.7) y (A.8), tal y como lo es el potencial vectorial magnético [59].

Una situación en la que la norma de Coulomb es especialmente útil es en ausencia de materia cargada, es decir, con densidades de carga eléctrica nulas,  $\rho_e = 0$ , y falta de corrientes eléctricas,  $\mathbf{J}_e = \mathbf{0}$ , ya que en este límite la ecuación (A.40) predice un potencial eléctrico nulo, mientras que la ecuación (A.43) se reduce a la ecuación de onda homogénea, como también lo hacen las ecuaciones de evolución de los campos eléctrico y magnético,

$$\Phi = 0, \quad (\text{A.44})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.45})$$

Como se expuso al final de la sección anterior del presente apéndice, la condición  $\Phi = 0$  implica campos electromagnéticos carentes de componentes longitudinales. Aunado a esto, las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético, ecuaciones (A.25) y (A.28), quedan expresadas por:

$$\mathbf{E}^\perp = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{B}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right); \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{B}^\perp = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right). \quad (\text{A.47})$$

El tercer nombre alternativo de la norma de Coulomb, “Norma de Radiación”, proviene del hecho de que los campos de radiación transversales son generados únicamente por el vector potencial magnético, como se observa en las ecuaciones (A.46) y (A.47), el cual en esta norma cumple la condición de transversalidad [59].

# Apéndice B

## Descomposición en modos normales

Una forma conveniente de describir el potencial vectorial magnético es en términos de sus modos normales de oscilación a través de una descomposición espectral de Fourier, ya que esto permite separar la dependencia temporal en las ecuaciones del potencial. Así, se tiene que el vector potencial  $\mathbf{A}$  se puede expresar como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \left( \tilde{\mathbf{A}}_{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_{\alpha}) e^{-i\omega_{\alpha} t} + \tilde{\mathbf{A}}_{\alpha}^*(\mathbf{r}, \omega_{\alpha}) e^{i\omega_{\alpha} t} \right), \quad (\text{B.1})$$

[28, 47, 77]. Siendo así, se tiene al sustituir la ecuación (B.1) en (A.45), y utilizando la ortogonalidad de las funciones exponenciales, que

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\alpha} + \kappa_{\alpha}^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.2})$$

donde se ha definido la frecuencia de oscilación de cada modo normal como

$$\omega_{\alpha}^2 \equiv c^2 \kappa_{\alpha}^2. \quad (\text{B.3})$$

De igual forma, al sustituir la ecuación (B.1) en (A.37) se obtiene una condición de transversalidad para los modos normales del potencial vectorial magnético,

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\alpha} = 0, \quad (\text{B.4})$$

así como los complejos conjugados de las ecuaciones (B.2) y (B.4).

La ecuación (B.2) es una ecuación de Helmholtz que, junto con la ecuación (B.4) y unas condiciones a la frontera apropiadas, genera un problema hermitiano, también llamado hermítico, de valores propios, cuya solución puede ser expresada, de manera general, en términos de una familia de funciones ortonormales [2],

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_{\alpha}) = b_{\alpha} \mathbf{G}_{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_{\alpha}), \quad (\text{B.5})$$

donde  $\mathbf{G}_\alpha(\mathbf{r}, \omega_\alpha)$  cumple con las siguientes condiciones:

$$\nabla^2 \mathbf{G}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{G}_\alpha = \mathbf{0}; \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G}_\alpha = 0, \quad (\text{B.7})$$

además de las condiciones de ortonormalidad propias de cada familia de funciones ortonormales [2], las cuales se expresan como:

$$\int_V \mathbf{G}_\alpha^* \cdot \mathbf{G}_\beta d^3r = \delta_{\alpha\beta}; \quad (\text{B.8})$$

$$\int_V \mathbf{G}_\alpha^* \cdot \mathbf{G}_\beta^* d^3r = \int_V \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta d^3r = 0. \quad (\text{B.9})$$

Los coeficientes  $b_\alpha$  son característicos de cada problema particular, siendo dependientes, en general, de la familia de funciones utilizada, la geometría del espacio y las condiciones a la frontera impuestas.

De esta manera, al sustituir las ecuaciones (B.1) y (B.5) en (A.9) y (A.12), se llega a que los campos eléctrico y magnético se expresan, en términos de las funciones  $\mathbf{G}_\alpha$ , como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} (\mathbf{G}_{\alpha} b_{\alpha} e^{-i\omega_{\alpha} t} - \mathbf{G}_{\alpha}^* b_{\alpha}^* e^{i\omega_{\alpha} t}); \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} (b_{\alpha} e^{-i\omega_{\alpha} t} \nabla \times \mathbf{G}_{\alpha} + b_{\alpha}^* e^{i\omega_{\alpha} t} \nabla \times \mathbf{G}_{\alpha}^*), \quad (\text{B.11})$$

correspondiendo estas expresiones a una primera descomposición de dichos campos.

## B.1. Energía del campo electromagnético

La función hamiltoniana del campo electromagnético, que da una medida de la energía contenida en los campos electromagnéticos, está expresada en términos de sus componentes eléctrica y magnética como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d^3r, \quad (\text{B.12})$$

[19, 59]. Así, partiendo de la expresión obtenida en la ecuación (B.10), se tiene que la componente eléctrica de la energía electromagnética contenida está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\epsilon_0 \omega_{\alpha} \omega_{\beta}}{2} \int_V (\mathbf{G}_{\alpha} b_{\alpha} e^{-i\omega_{\alpha} t} - \mathbf{G}_{\alpha}^* b_{\alpha}^* e^{i\omega_{\alpha} t}) \cdot (\mathbf{G}_{\beta} b_{\beta} e^{-i\omega_{\beta} t} - \mathbf{G}_{\beta}^* b_{\beta}^* e^{i\omega_{\beta} t}) d^3r \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\epsilon_0 \omega_{\alpha} \omega_{\beta}}{2} \delta_{\alpha\beta} (b_{\alpha} b_{\beta}^* e^{-it(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})} + b_{\beta} b_{\alpha}^* e^{it(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})}) = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 |b_{\alpha}|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

donde se usó la ortogonalidad de las funciones  $\mathbf{G}_\alpha$ , ecuaciones (B.8) y (B.9). Por otro lado, para la componente magnética es de utilidad notar, partiendo de la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\mathbf{H} \times \boldsymbol{\Xi}) = \boldsymbol{\Xi} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Xi})$  [2], que

$$(\nabla \times \mathbf{G}_\alpha) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}_\beta^*) = \mathbf{G}_\beta^* \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}_\alpha) + \nabla \cdot (\mathbf{G}_\beta^* \times \nabla \times \mathbf{G}_\alpha). \quad (\text{B.14})$$

Al integrar la ecuación (B.14) sobre un volumen  $V$  y utilizar el teorema de la divergencia de Gauss, se arriba a que

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \times \mathbf{G}_\alpha) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}_\beta^*) d^3r &= \int_V \mathbf{G}_\beta^* \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}_\alpha) d^3r + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{G}_\beta^* \times \nabla \times \mathbf{G}_\alpha) d^3r \\ &= \int_V \mathbf{G}_\beta^* \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}_\alpha) - \nabla^2 \mathbf{G}_\alpha) d^3r + \oint_{\partial V} (\mathbf{G}_\beta^* \times \nabla \times \mathbf{G}_\alpha) \cdot \mathbf{\hat{n}} d^2r \\ &= \kappa_\alpha^2 \int_V \mathbf{G}_\beta^* \cdot \mathbf{G}_\alpha d^3r + \mathcal{C}_1 \oint_{\partial V} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{\hat{n}} d^2r, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

donde se han usado las ecuaciones (B.7), (B.10) y (B.11),  $\mathcal{C}_1$  es una constante de proporcionalidad y se ha denotado  $\mathbf{\hat{n}}$  como el vector unitario normal a la frontera de  $V$ . Al definir el vector de Poynting, en función de los campos eléctrico y magnético, como

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (\text{B.16})$$

[59], y utilizar la condición de ortogonalidad, ecuación (B.8), resulta que

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{G}_\alpha) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}_\beta^*) d^3r = \kappa_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{C}_2 \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{\hat{n}} d^2r, \quad (\text{B.17})$$

donde  $\mathcal{C}_2$  es otra constante de proporcionalidad. La integral de superficie de la ecuación (B.17) representa la contribución de la potencia total que fluye fuera del volumen  $V$ . Para el caso particular de ausencia de cargas esta integral converge a cero [28], por lo que se tiene que

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{G}_\alpha) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}_\beta^*) d^3r = \kappa_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.18})$$

Utilizando los resultados anteriores se concluye que la contribución magnética a la función hamiltoniana está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_M &= \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\alpha,\beta} \int_V (b_\alpha e^{-i\omega_\alpha t} \nabla \times \mathbf{G}_\alpha + (\text{c.c.})_\alpha) \cdot (b_\beta e^{-i\omega_\beta t} \nabla \times \mathbf{G}_\beta + (\text{c.c.})_\beta) d^3r \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\kappa_\alpha^2}{2\mu_0} \delta_{\alpha\beta} (b_\alpha b_\beta^* e^{-it(\omega_\alpha - \omega_\beta)} + b_\beta b_\alpha^* e^{it(\omega_\alpha - \omega_\beta)}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \sum_\alpha \kappa_\alpha^2 |b_\alpha|^2 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \sum_\alpha \omega_\alpha^2 |b_\alpha|^2 = \epsilon_0 \sum_\alpha \omega_\alpha^2 |b_\alpha|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$



donde **c.c.** denota el complejo conjugado del término  $be^{-i\omega t}\nabla \times \mathbf{G}$ . De esta forma, al sustituir los resultados de las ecuaciones (B.13) y (B.19) en (B.12) se obtiene que la energía contenida en el campo electromagnético está dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_M = 2\epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 |b_{\alpha}|^2. \quad (\text{B.20})$$

Dado que el campo electromagnético se supuso estacionario, al haber sido expresado en términos de sus modos normales, se tiene que cada modo normal contribuye con un término constante a la energía del sistema [28]. Esto permite renombrar los coeficientes  $b_{\alpha}$  como

$$b_{\alpha} \equiv a_{\alpha} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\alpha}}{2\epsilon_0\omega_{\alpha}^2}}, \quad (\text{B.21})$$

de tal forma que la contribución energética de cada modo del campo sea

$$\mathcal{H}_{\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha} |a_{\alpha}|^2, \quad (\text{B.22})$$

donde puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que  $\mathcal{E}_{\alpha} = \mathcal{E}(\omega_{\alpha})$  es la energía asociada al  $\alpha$ -ésimo modo del campo cuando los coeficientes  $a_{\alpha}$  se hallan normalizados [28, 77],  $|a_{\alpha}|^2 = 1$ . De esta forma, sustituyendo las ecuaciones (B.5) y (B.21) en (B.1), se tiene que el potencial vectorial magnético es

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\alpha}}{2\epsilon_0\omega_{\alpha}^2}} (\mathbf{G}_{\alpha} a_{\alpha} e^{-i\omega_{\alpha} t} + \mathbf{G}_{\alpha}^* a_{\alpha}^* e^{i\omega_{\alpha} t}), \quad (\text{B.23})$$

tal que la dependencia en la energía de cada uno de sus modos de oscilación se ha hecho explícita.

## B.2. Desarrollo en términos de ondas planas

Los desarrollos anteriores, de la ecuación (B.1) a (B.23), no requirieron hacer ninguna suposición geométrica sobre el espacio físico, de modo que son válidos para cualquier sistema coordinado en general. Un sistema particularmente importante es el sistema cartesiano, en el que es posible teselar todo el espacio tridimensional partiendo de un volumen finito, un paralelepípedo de volumen  $V = \ell_x \ell_y \ell_z$ , con condiciones periódicas en sus fronteras [28, 77]. Así, la ecuación de Helmholtz para las funciones  $\mathbf{G}_{\alpha}$ , ecuación (B.6), se expresa en coordenadas cartesianas como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_{\alpha}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{\alpha}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{\alpha}}{\partial z^2} + \kappa_{\alpha}^2 \mathbf{G}_{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.24})$$

Al proponer que la función  $G(\mathbf{r})$  es de la forma  $G(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  y sustituir en (B.24), se arriba a las tres ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \kappa_x^2 X = 0; \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \kappa_y^2 Y = 0; \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \kappa_z^2 Z = 0, \quad (\text{B.27})$$

donde la variable  $\kappa$  de la ecuación (B.24) se relaciona con las constantes de separación  $\kappa_x, \kappa_y$  y  $\kappa_z$  por medio de

$$\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2}. \quad (\text{B.28})$$

Si se denota  $\xi = x, y, z$ , se tiene que las ecuaciones (B.25), (B.26) y (B.27) son ecuaciones de tipo oscilador armónico, cuya solución general es de la forma

$$\Xi(\xi) = A_\xi e^{i\kappa_\xi \xi}. \quad (\text{B.29})$$

Aplicando las condiciones a la frontera sobre la solución general, ecuación (B.29), se obtiene como resultado que:

$$\begin{aligned} \Xi(\xi) &= \Xi(\xi + \ell_\xi); \\ A_\xi e^{i\kappa_\xi \xi} &= A_\xi e^{i\kappa_\xi \xi} e^{i\kappa_\xi \ell_\xi}; \\ e^{i\kappa_\xi \ell_\xi} &= 1; \\ \kappa_\xi &= \frac{2\pi n_\xi}{\ell_\xi}. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

La última igualdad de la ecuación (B.30) es la condición de periodicidad del sistema. De esta forma se tiene que la solución  $G(\mathbf{r})$  está dada por

$$G(\mathbf{r}) = (A_x e^{i\kappa_x x})(A_y e^{i\kappa_y y})(A_z e^{i\kappa_z z}) = A_\kappa e^{i\kappa \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{B.31})$$

donde se ha definido el vector  $\kappa$  como

$$\kappa \equiv (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z) = 2\pi \left( \frac{n_x}{\ell_x}, \frac{n_y}{\ell_y}, \frac{n_z}{\ell_z} \right), \quad (\text{B.32})$$

con  $n_\xi = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Por otra parte,  $\mathbf{G}$  debe cumplir con las ecuaciones (B.7) y (B.8), por lo que al sustituir en la condición de ortonormalidad se llega a que

$$\begin{aligned} \int_V G^*(\mathbf{r})G(\mathbf{r})d^3r &= \int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_y} \int_0^{\ell_z} (A_\kappa^* e^{-i\kappa \cdot \mathbf{r}}) (A_\kappa e^{i\kappa \cdot \mathbf{r}}) dz dy dx \\ &= |A_\kappa|^2 \int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_y} \int_0^{\ell_z} dz dy dx = |A_\kappa|^2 \ell_x \ell_y \ell_z = |A_\kappa|^2 V = 1, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

lo que fija el valor de la constante de proporcionalidad en

$$A_\kappa = \frac{1}{\sqrt{V}}. \quad (\text{B.34})$$

Luego, la solución  $G(\mathbf{r})$  se encuentra normalizada al estar expresada de la forma

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{B.35})$$

Por otro lado, de la condición de transversalidad se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (G\check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \left( \frac{\partial e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\partial x} (\check{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}}) + \frac{\partial e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\partial y} (\check{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}}) + \frac{\partial e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}}{\partial z} (\check{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \cdot \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} (i\kappa_x e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} (\check{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} \cdot \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}}) + i\kappa_y e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} (\check{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}}) + i\kappa_z e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} (\check{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \cdot \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}})) \\ &= i(\kappa_x \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}}, \kappa_y \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}, \kappa_z \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \check{\mathbf{e}}_{\mathbf{G}} \right) = i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{G}, \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

por lo que la ecuación (B.7) implica que

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{G} = 0. \quad (\text{B.37})$$

La ecuación (B.37) se puede interpretar como que dado el vector  $\boldsymbol{\kappa}$  existen dos direcciones ortogonales del vector  $\mathbf{G}$ , las cuales se identifican como las direcciones de polarización de  $\mathbf{G}$  [28, 77]. Así, se tiene que la solución al problema de valores propios en coordenadas cartesianas está dada por

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda, \quad (\text{B.38})$$

donde  $\lambda = 1, 2$  denota el índice de polarización. Además, se tiene que los vectores  $\check{\boldsymbol{\kappa}}$  y  $\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda$  forman una base ortonormal [2], tales que cumplen que:

$$\check{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda = 0; \quad (\text{B.39})$$

$$\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda \cdot \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}; \quad (\text{B.40})$$

$$\check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^1 \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^2 = \check{\boldsymbol{\kappa}}. \quad (\text{B.41})$$

Al sustituir la ecuación (B.38) en (B.23) se obtiene que el potencial vectorial magnético se descompone en coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{A} = \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}}}{2\epsilon_0 \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^2 V}} (a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t} + a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t}) \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^\lambda. \quad (\text{B.42})$$

Análogamente, sustituyendo la ecuación (B.38) en (B.10) se tiene la expresión para el campo eléctrico,

$$\mathbf{E} = i \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}}}{2\epsilon_0 V}} (a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t} - a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t}) \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda}. \quad (\text{B.43})$$

Para la parte vectorial del campo magnético es notable, al utilizar notación indicial, que

$$\nabla \times \mathbf{G} = \varepsilon_{jkl} \frac{\partial G_l}{\partial r_k} \check{\mathbf{e}}_j = \frac{\varepsilon_{jkl}}{\sqrt{V}} \frac{\partial (e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda})_l}{\partial r_k} \check{\mathbf{e}}_j = i\varepsilon_{jkl} \left( \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda} \right)_l \kappa_k \check{\mathbf{e}}_j, \quad (\text{B.44})$$

lo que en notación vectorial se resume en la expresión siguiente,

$$\nabla \times \mathbf{G} = i\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{G} = iG(\boldsymbol{\kappa} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda}). \quad (\text{B.45})$$

De esta manera, usando los resultados de las ecuaciones (B.11) y anterior, resulta que el campo magnético es

$$\mathbf{B} = i \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}}}{2\epsilon_0 \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^2 V}} (a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t} - a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t}) (\boldsymbol{\kappa} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda}). \quad (\text{B.46})$$

Utilizando la ecuación (B.3) se tiene que el campo magnético se expresa alternativamente como

$$\mathbf{B} = i \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\boldsymbol{\kappa}}}{2\epsilon_0 c^2 V}} (a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t} - a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}^* e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} + i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t}) (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda}). \quad (\text{B.47})$$

Al considerar cada modo normal del campo vectorial como un oscilador armónico elemental, tratamiento usual tanto en la electrodinámica estocástica como en la electrodinámica cuántica [28, 77], es conveniente definir

$$a_{\alpha}(t) = a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda}(t) \equiv a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} e^{-i\omega_{\boldsymbol{\kappa}} t}, \quad (\text{B.48})$$

de tal manera que se pueda introducir un nuevo conjunto de variables canónicas, definidas como:

$$q_{\alpha} \equiv i \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\alpha}}{2\omega_{\alpha}^2}} (a_{\alpha} - a_{\alpha}^*); \quad (\text{B.49})$$

$$p_{\alpha} \equiv \sqrt{\frac{\mathcal{E}_{\alpha}}{2}} (a_{\alpha} + a_{\alpha}^*), \quad (\text{B.50})$$

[28]. De esta forma, al invertir el sistema de ecuaciones anterior, ecuaciones (B.49) y (B.50), se obtiene que:

$$a_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_{\alpha}}} (p_{\alpha} - i\omega_{\alpha} q_{\alpha}); \quad (\text{B.51})$$

$$a_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha}}(p_\alpha + i\omega_\alpha q_\alpha). \quad (\text{B.52})$$

Luego, al sustituir las ecuaciones (B.21), (B.51) y (B.52) en (B.20) se halla que la función hamiltoniana, en términos de las variables canónicas de los osciladores, es de la forma

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \frac{p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2}{2}, \quad (\text{B.53})$$

de manera que para cada modo se tiene que la energía asociada es

$$\mathcal{H}_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2} + \frac{\omega_\alpha^2 q_\alpha^2}{2}. \quad (\text{B.54})$$

La ecuación (B.54) muestra que cada modo de oscilación del campo ha sido representado como un oscilador armónico independiente de masa unidad,  $m_\alpha = 1$ , y frecuencia  $\omega_\alpha$ . Bajo esta suposición, se tiene, sustituyendo las ecuaciones (B.51) y (B.52) en (B.42), que el potencial vectorial magnético se expresa como

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_\alpha \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \omega_\alpha^2 V}} \left( (p_\alpha - i\omega_\alpha q_\alpha) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} + (p_\alpha + i\omega_\alpha q_\alpha) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} \right) \check{\mathbf{e}}_\boldsymbol{\kappa}^\lambda \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \omega_\alpha^2 V}} \left( \frac{p_\alpha (e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} + e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}})}{2} + \frac{\omega_\alpha q_\alpha (e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} - e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}})}{2i} \right) \check{\mathbf{e}}_\boldsymbol{\kappa}^\lambda \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \omega_\alpha^2 V}} (p_\alpha \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) + \omega_\alpha q_\alpha \sin(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})) \check{\mathbf{e}}_\boldsymbol{\kappa}^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Análogamente, de las ecuaciones (B.43) y (B.47) se obtienen los campos eléctrico y magnético en términos de las variables canónicas,

$$\mathbf{E} = \sum_\alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} (\omega_\alpha q_\alpha \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) - p_\alpha \sin(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})) \check{\mathbf{e}}_\boldsymbol{\kappa}^\lambda, \quad (\text{B.56})$$

$$\mathbf{B} = \sum_\alpha \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 c^2 V}} (\omega_\alpha q_\alpha \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) - p_\alpha \sin(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})) (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_\boldsymbol{\kappa}^\lambda). \quad (\text{B.57})$$

Las últimas expresiones deducidas, ecuaciones (B.55), (B.56) y (B.57), son físicamente equivalentes a las ecuaciones (B.42), (B.43) y (B.47), siendo estas los desarrollos en términos de ondas planas del potencial vectorial magnético y de los campos eléctrico y magnético respectivamente.

# Apéndice C

## La densidad espectral del campo de radiación de punto cero

Una de las propiedades más importantes y relevantes del CPC es su densidad espectral de energía, ya que es a partir de esta última de donde se parte para construir muchas de sus descripciones físicas. Este espectro puede ser deducido, desde la teoría cuántica moderna, partiendo del hecho de que la energía mínima de un oscilador armónico cuántico es  $\hbar\omega/2$  [50, 75, 77]. Sin embargo, debido a la importancia teórica que representa este resultado, sería insatisfactorio simplemente importarlo de la mecánica cuántica actual. Por ello, es relevante deducir este espectro de frecuencias de los argumentos más generales posibles.

La aplicación de la ley de Wien para una cavidad radiante en el límite atómico,  $T = 0$ , y el uso de argumentos de invariancia de Lorentz sobre la densidad espectral de energía del campo de radiación,  $u(T, \omega)$ , en el mismo límite [9, 73], son dos de los procedimientos usualmente utilizados por la EDE para la deducción de la densidad espectral requerida, que poseen la característica de partir de principios físicos fundamentales. En el presente apéndice, se utilizará la primera de estas opciones, ya que ofrece la posibilidad de extraer mucha información física adicional del sistema de estudio.

### C.1. Termodinámica de un oscilador armónico

Una manera de deducir la ley de Wien, propuesta por T. H. Boyer, es mediante el análisis termodinámico de un oscilador armónico unidimensional de masa unitaria, frecuencia  $\omega$  y con movimiento no relativista [12], que como se mostró en el apéndice B representa un modo normal de oscilación del campo electromagnético. Partiendo de que este sistema posee un hamiltoniano como el expuesto en la ecuación (B.54),

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}, \quad (\text{C.1})$$

se tiene que, al considerar un cambio infinitesimal en alguno de los parámetros del oscilador, como su frecuencia, la acción del sistema es una invariante a primer orden con respecto a dicho parámetro, es decir, es una invariante adiabática [52].

La acción puede definirse, para un sistema periódico, como el área encerrada por una órbita de energía constante  $\mathcal{E}$  en su espacio fase [52]. Así, la acción  $\mathcal{J}$  se expresa como

$$\mathcal{J} \equiv \frac{1}{2\pi} \oint pdq. \quad (\text{C.2})$$

La ecuación (C.1) puede despejarse para hallar la ecuación de la órbita formada por el sistema oscilatorio en el espacio fase, resultando ser una elipse descrita por la relación

$$p^2 + \omega^2 q^2 = 2\mathcal{E}, \quad (\text{C.3})$$

tal que

$$p(q) = \pm \sqrt{2\mathcal{E} - \omega^2 q^2}. \quad (\text{C.4})$$

Así, la integral de acción, ecuación (C.2), puede expresarse, para el caso del oscilador armónico, como

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2\mathcal{E}}}^{\sqrt{2\mathcal{E}}} \sqrt{2\mathcal{E} - \omega^2 q^2} dq. \quad (\text{C.5})$$

En la expresión anterior puede hacerse el cambio de variable dado por  $\omega q = \sqrt{2\mathcal{E}} \cos \xi$ , de tal forma que se tenga que  $dq = -(\sqrt{2\mathcal{E}}/\omega) \sin \xi d\xi$ , tal que la acción esté dada por

$$\mathcal{J} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi\omega} \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos^2 \xi} \sin \xi d\xi = \frac{2\mathcal{E}}{\pi\omega} \int_0^\pi \sin^2 \xi d\xi, \quad (\text{C.6})$$

de manera que se obtenga la siguiente expresión

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{\omega}. \quad (\text{C.7})$$

Así, se tiene que la acción  $\mathcal{J}$  permanece constante ante cambios infinitesimales de la frecuencia y la energía del sistema, de tal manera que

$$d\mathcal{E} = \mathcal{J} d\omega = \frac{\mathcal{E}}{\omega} d\omega. \quad (\text{C.8})$$

Por otro lado, el trabajo  $dW$  hecho por el sistema sobre el agente externo que modifica la frecuencia del oscilador está dado por el inverso aditivo del cambio en la energía [12], al tratarse de un proceso adiabático, es decir,

$$dW = -\frac{\mathcal{E}}{\omega} d\omega. \quad (\text{C.9})$$

Boyer afirma que si se supone que el oscilador armónico se halla en equilibrio con un baño térmico a una temperatura  $T$ , entonces, este tendrá una energía media  $\mathcal{E}(T, \omega)$  y una entropía  $\mathcal{S}(T, \omega)$  que dependen tanto de la temperatura  $T$  como de la frecuencia natural de oscilación  $\omega$  [12]. De la primera ley de la termodinámica, se tiene que

$$dQ = Td\mathcal{S}(T, \omega) = d\mathcal{E}(T, \omega) + dW(T, \omega), \quad (\text{C.10})$$

donde al sustituir la ecuación (C.9) se llega a que

$$Td\mathcal{S}(T, \omega) = d\mathcal{E}(T, \omega) - \frac{\mathcal{E}}{\omega}d\omega. \quad (\text{C.11})$$

Considerando cambios infinitesimales en la temperatura del baño térmico y la frecuencia del oscilador puede describirse la ecuación (C.11) como

$$T \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \right)_{\omega} dT + \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \omega} \right)_{T} d\omega \right] = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_{\omega} dT + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \omega} \right)_{T} d\omega - \frac{\mathcal{E}}{\omega} d\omega. \quad (\text{C.12})$$

Ya que la temperatura y la frecuencia de oscilación son las variables independientes del sistema en cuestión [12], se tiene que los coeficientes de cada diferencial de dichas variables deben cumplir con ser cero simultáneamente, de tal forma que se tienen dos ecuaciones dadas por las siguientes expresiones:

$$T \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T} \right)_{\omega} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_{\omega}; \quad (\text{C.13})$$

$$T \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \omega} \right)_{T} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \omega} \right)_{T} - \frac{\mathcal{E}}{\omega}. \quad (\text{C.14})$$

Al tomar la derivada parcial de la ecuación (C.13) con respecto a la frecuencia del sistema  $\omega$  se arriba a que

$$T \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \omega \partial T} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \omega \partial T}, \quad (\text{C.15})$$

de la misma manera, derivando parcialmente la expresión (C.14) con respecto a la temperatura se obtiene la ecuación siguiente

$$\left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \omega} \right)_{T} + T \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial T \partial \omega} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial T \partial \omega} - \frac{1}{\omega} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_{\omega}. \quad (\text{C.16})$$

Restando entre sí las dos últimas ecuaciones, se llega a que

$$\left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \omega} \right)_{T} = -\frac{1}{\omega} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \right)_{\omega}. \quad (\text{C.17})$$

Al sustituir la ecuación (C.14) en (C.17) se arriba a una ecuación diferencial parcial de primer orden para la energía del oscilador armónico, dada por



$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \omega}\right)_T + \frac{T}{\omega} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_\omega = \frac{\mathcal{E}}{\omega}. \quad (\text{C.18})$$

Si se supone que la energía media del sistema oscilatorio puede expresarse como

$$\mathcal{E}(T, \omega) = \omega f(T, \omega), \quad (\text{C.19})$$

y se sustituye en la ecuación (C.18), entonces esta se reduce a una ecuación diferencial homogénea para la función  $f(T, \omega)$  de la forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_T + \frac{T}{\omega} \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\omega = 0. \quad (\text{C.20})$$

Al suponer un problema de Cauchy de la forma  $f(T_0, \omega)$ , puede hallarse que la solución de la ecuación anterior, utilizando el método de características, está dada por

$$f(T, \omega) = f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (\text{C.21})$$

de modo que al sustituir la ecuación (C.21) en (C.19) se tiene que la energía media del oscilador en equilibrio con el baño térmico puede expresarse como

$$\mathcal{E}(T, \omega) = \omega f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (\text{C.22})$$

donde  $f$  es una función arbitraria de la variable  $\omega/T$ . La ecuación (C.22) exhibe la información contenida en la ley de Wien para una cavidad radiante [12, 32].

## C.2. La ley de Wien

La ley de Wien para una cavidad radiante fue deducida por W. Wien en 1893 utilizando argumentos basados únicamente en la electrodinámica clásica y la termodinámica. Wien supuso que dentro de una cavidad cilíndrica reflectora perfecta, provista de un pistón móvil, se hallaba encerrada radiación, de tal manera que al realizarse una expansión adiabática de la misma se obtenía un corrimiento Doppler por parte de las ondas electromagnéticas que eran reflejadas por el pistón [49]; esto permitía el intercambio de energía radiante entre las distintas frecuencias de la radiación [77]. La ley de Wien fue el primer paso significativo en el camino para establecer la forma general de la distribución que rige el espectro de emisión de un cuerpo negro. Sin embargo, la incapacidad de la física del siglo XIX para hallar de forma teórica la función universal  $f$  de la ecuación (C.22) que se ajustara de manera correcta a los resultados experimentales, señaló el fracaso definitivo de la teoría clásica en dicho problema [49].

Las deducciones usuales de la ley de Wien no garantizan su aplicabilidad en el cero absoluto [32]. Sin embargo, mediante el uso de argumentos de continuidad que involucran la condicionante de que el calor específico de la radiación, para una frecuencia dada, se mantenga finito para toda temperatura, puede suponerse que la ley de Wien es aplicable en el límite de temperatura cero [61]. Equivalentemente, mediante la aplicación de la segunda ley de la termodinámica al movimiento cuasiestático de los dipolos oscilantes de las paredes de la cavidad que encierra la radiación, Cole fue capaz de deducir una versión generalizada de la ley de Wien que garantiza su aplicabilidad en el cero absoluto [20, 21]. Bajo estos argumentos, se tiene que la ley de Wien puede expresarse en el límite atómico como

$$\mathcal{E}_0(\omega) = \omega f(\infty), \quad (\text{C.23})$$

donde  $f(\infty)$  debe tener un valor finito. La elección del valor de la constante anterior genera un punto de inflexión: por un lado, si se elige que  $f(\infty) = 0$ , entonces se recupera uno de los resultados de la ley de equipartición de la energía, es decir, nulo movimiento en el cero absoluto; alternativamente, si se supone que en el límite del cero absoluto la función de la ley de Wien es constante pero no nula,  $f(\infty) = \mathcal{A}$ , entonces se tiene que en el límite atómico aún existen movimientos, y con ellos una energía de punto cero dada por

$$\mathcal{E}_0(\omega) = \mathcal{A}\omega, \quad (\text{C.24})$$

obteniéndose de esta forma que la energía media de un oscilador en equilibrio con un baño térmico a temperatura cero es proporcional a su frecuencia.

Ya que se ha denotado a la densidad espectral del campo electromagnético como  $u(T, \omega)$ , se tiene que  $u(T, \omega)d\omega$  será la energía electromagnética por unidad de volumen de un ancho de banda  $d\omega$  que contiene a  $\omega$ . De igual forma, dado que  $\mathcal{E}(T, \omega)$  representa la energía media de un modo de oscilación del campo, entonces puede establecerse que

$$u(T, \omega) = \mathcal{N}(\omega)\mathcal{E}(T, \omega), \quad (\text{C.25})$$

donde  $\mathcal{N}(\omega)$  es la densidad de estados contenidos en la cavidad, y  $\mathcal{N}(\omega)d\omega$  representa entonces el número de modos de oscilación de frecuencia  $\omega$  por unidad de volumen contenidos en un ancho de banda  $d\omega$  [28]. Es notable que  $\mathcal{N}(\omega)$  no depende de la temperatura y puede ser determinado solamente por consideraciones geométricas [60]. De la ecuación (B.32) se tiene que los modos de oscilación acomodados dentro de una caja, de volumen  $\ell^3$ , cumplen que

$$\kappa^2 = \frac{4\pi^2}{\ell^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \quad (\text{C.26})$$

La ecuación (C.26) puede interpretarse como el cuadrado de la distancia entre el origen y un punto en el espacio recíproco cuyos ejes coordenados corresponden a  $\kappa_j = (2\pi/\ell)n_j$  con  $j = x, y, z$ , y  $n_j$  enteros, como se observa en la figura C.1. Adicionalmente, de la ecuación (C.26) se observa que la mínima separación entre dos modos normales es de  $2\pi/\ell$  de tal forma que un modo normal corresponde en el espacio recíproco a una celda

tridimensional de volumen  $(2\pi/\ell)^3$ . Con base en los argumentos anteriores puede deducirse que la densidad de estados dentro de un cascarón de radio interior  $\kappa$  y radio exterior  $\kappa + d\kappa$  está dada por la expresión

$$\mathcal{N}(\kappa)d\kappa = \frac{2}{V} \int_{\Omega_\kappa} \frac{d^3\kappa}{(2\pi/\ell)^3} = \frac{\kappa^2}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\vartheta d\kappa = \frac{\kappa^2 d\kappa}{\pi^2}, \quad (\text{C.27})$$

donde el factor 2 corresponde a las dos posibles direcciones de polarización correspondientes a cada modo normal y  $\Omega_\kappa$  representa el ángulo sólido del espacio recíproco [28].

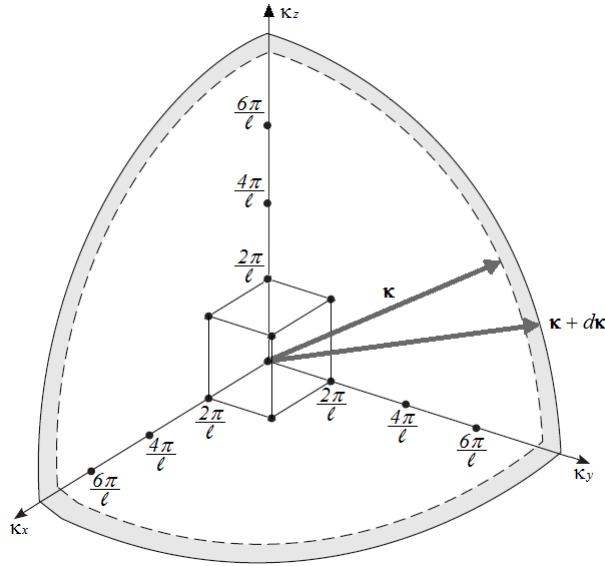


Figura C.1: Interpretación geométrica de  $\kappa^2 = (4\pi^2/\ell^2)(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ . Imagen original tomada de [96]

Al utilizar la ecuación (B.3), se llega a que la densidad de estados como función de la frecuencia es

$$\mathcal{N}(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (\text{C.28})$$

Es relevante notar que el resultado expresado en la última ecuación es precisamente el factor, proporcional a la frecuencia al cuadrado, por el que se encuentran multiplicadas tanto la ley de Planck, ecuación (E.3), como la ley de Rayleigh-Jeans, ecuación (E.5), presentadas en el apéndice E. Finalmente, al utilizar los resultados expresados en las ecuaciones (C.25) y (C.28), se obtiene que la densidad espectral del campo de radiación de punto cero,  $u_0(\omega)$ , es

$$u_0(\omega) = \frac{\mathcal{A}\omega^3}{\pi^2 c^3}. \quad (\text{C.29})$$

El valor de la constante  $\mathcal{A}$  debe ser universal ya que determina el espectro de equilibrio en el cero absoluto, el cual es de carácter universal de acuerdo con la ley de Kirchhoff [32]. En la actualidad se sabe que el valor de dicha constante es igual a  $\hbar/2$ . Sin embargo, es importante notar que, por la forma en la que han sido deducidos, la presencia de  $\mathcal{A}$  en los resultados presentados no aporta ninguna connotación cuántica [32].



# Apéndice D

## Contenido energético del campo de radiación de punto cero

La ley de Stefan-Boltzmann, propuesta inicialmente por J. Stefan en 1874 y deducida de la teoría termodinámica por L. Boltzmann en 1884 [50, 77], propone que la densidad de energía total radiada por un cuerpo negro ideal es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura [28]:

$$\mathcal{U}(T) \equiv \int_0^\infty u(T, \omega) d\omega = a_S T^4, \quad (\text{D.1})$$

donde  $a_S$  representa una constante universal, inicialmente solo conocida empíricamente [28], que puede ser expresada como  $a_S = 4\sigma_S/c$  [50], donde  $\sigma_S$  es nombrada actualmente como constante de Stefan-Boltzmann [87]. Al sustituir la ley de Wien para una cavidad radiante y la distribución de modos de Rayleigh-Jeans, ecuaciones (C.22) y (C.28), en la ley de Stefan-Boltzmann se llega a que

$$\mathcal{U}(T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega, \quad (\text{D.2})$$

si se define el cambio de variables  $\xi = T/\omega$ , de tal manera que  $d\xi = -(T/\omega^2)d\omega$ , entonces se tiene que la integral anterior puede expresarse como

$$\mathcal{U}(T) = \frac{T^4}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{f(1/\xi)}{\xi^5} d\xi = a_S T^4, \quad (\text{D.3})$$

de esta última ecuación puede obtenerse una expresión integral para la constante de la ley de Stefan-Boltzmann,

$$a_S = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{f(1/\xi)}{\xi^5} d\xi. \quad (\text{D.4})$$

Ya que  $a_S$  es una cantidad finita, entonces la integral de la expresión (D.4) debe existir.

La ley de Stefan-Boltzmann entra en conflicto con los modelos clásicos elementales del equilibrio entre la materia y la radiación [77], ya que por sí misma es una prueba de que la energía contenida por la radiación es finita para una temperatura finita dada. Es notable, por ejemplo, que si en lugar de sustituir la ley de Wien en la ecuación (D.1) se sustituye la ley de Rayleigh-Jeans, entonces se obtiene que la constante  $a_S$  es proporcional a una integral fuertemente divergente, problema físico al que P. Ehrenfest denominó en 1911 como la catástrofe ultravioleta [25],

$$\mathcal{U}_{RJ}(T) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega = \frac{k_B T^4}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^4} \rightarrow \infty. \quad (\text{D.5})$$

De manera análoga a los desarrollos anteriores, puede encontrarse la densidad de energía total radiada por un cuerpo negro a temperatura cero si se considera como la densidad espectral de energía a la ecuación (C.29), de tal forma que se tenga que

$$\mathcal{U}_0 \equiv \mathcal{U}(0) = \frac{\mathcal{A}}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \rightarrow \infty. \quad (\text{D.6})$$

Como puede observarse en la última expresión, la cantidad  $\mathcal{U}_0$  es infinita y por tanto viola, al igual que la ley de Rayleigh-Jeans, la ley de Stefan-Boltzmann; sin embargo, esta divergencia resulta un problema que se escapa actualmente a la física clásica [28, 47].

Como se menciona en el apéndice G, para el problema de la corrección electromagnética de la masa, la divergencia planteada por la ecuación (D.6) hace necesario introducir un corte en el límite superior de las frecuencias, la denominada regla de corte. Existen dos argumentos utilizados por la electrodinámica cuántica, ambos aplicables a la EDE, para justificar el uso de este corte en el espectro del campo de radiación de punto cero con la finalidad de mantener finita la densidad de energía total  $\mathcal{U}_0$ : el primero de ellos consiste en la falta de evidencia de que las reglas de la electrodinámica puedan ser aplicables a frecuencias arbitrariamente altas [47]; el otro argumento es que el espectro, expresado en la ecuación (C.29), puede deducirse a partir del requerimiento de ser un invariante de Lorentz [9, 10], el cual es solamente una aproximación de un requerimiento más profundo: la covariancia general. Es razonable, por lo último, suponer que un espectro que cumpla con todas las reglas de la relatividad general debe ser integrable, y que el espectro usado aquí es únicamente una aproximación local a bajas frecuencias del primero [28, 47].

La ecuación (D.6) es frecuentemente usada como objeción a la existencia de un campo de punto cero real, y es que un campo con dicha cantidad de energía almacenada implicaría efectos electromagnéticos y gravitacionales enormes que no se podrían pasar por alto [28]. Para tener una idea de la energía contenida en el CPC puede estimarse la densidad de energía asociada a una banda de frecuencias específica, en ese sentido se tiene, de la ecuación (D.6), que la densidad de energía total para un intervalo de frecuencias es

$$\mathcal{U}_0(\omega_1, \omega_2) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} u_0(\omega) d\omega = \frac{\hbar(\omega_2^4 - \omega_1^4)}{8\pi^2 c^3} = \frac{\hbar c(k_2^4 - k_1^4)}{8\pi^2}. \quad (\text{D.7})$$

Para la región visible del espectro electromagnético, longitudes de onda entre 400 y 700 nm, la ecuación (D.7) implica una energía de alrededor de  $22 \text{ J/m}^3$  equivalente a  $137 \times 10^6 \text{ TeV/m}^3$  [77]. De la misma forma, para un número de onda de corte razonable, como el propuesto en la ecuación (G.31), se obtiene, mediante la relación de masa-energía de Einstein, una densidad de masa equivalente de  $m^4 c^3 / 8\pi^2 \hbar^3$  que numéricamente es del orden de  $2 \times 10^{18} \text{ kg/m}^3$  o de aproximadamente  $10^{48} \text{ electrones/m}^3$  [47]. Por esto, la imagen prevaleciente hoy en día del CPC en la electrodinámica cuántica es la de meramente un campo virtual, que es equivalente a redefinir o renormalizar su energía como cero, que produce efectos observables [47, 77]. Sin embargo, en un tratamiento totalmente relativista de la teoría, la energía cero no puede ser definida arbitrariamente [28], de modo que no es fácil escapar de la impresión de que tanto la energía como el problema de su divergencia son reales y que estos deben ser estudiados a profundidad.

La electrodinámica estocástica propone una respuesta parcial con respecto a los efectos electromagnéticos del CPC y es que estos no pasan del todo desapercibidos, sino por el contrario, son sistemáticamente observados en forma de las propiedades cuánticas de la materia [28]. Por otra parte, los efectos gravitacionales de escala cósmica que deberían ser producidos por la gran masa equivalente del campo de punto cero simplemente no se observan [47]. Muchos mecanismos de compensación con otros efectos han sido sugeridos para explicar lo anterior, tales como el enorme estrés asociado [47], las densidades de masa gravitacional negativa predichas por las teorías inflacionarias [54], la polarización del vacío [100], etc. Sin embargo, la gran variedad de hipótesis propuestas solo pone en evidencia que la solución correcta para este problema aún es desconocida [28].





# Apéndice E

## Desarrollo y nociones históricas del campo electromagnético del vacío

Históricamente, el campo de radiación de punto cero vio su nacimiento con la elaboración de la segunda teoría de la radiación de cuerpo negro por parte de M. Planck en 1912 [11, 32, 77]. Dicha teoría propone que la energía media de un radiador elemental de frecuencia natural  $\omega$ , en equilibrio térmico con el campo de radiación a temperatura  $T$ , está dada en notación actual por

$$\mathcal{E}(T, \omega) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (\text{E.1})$$

donde  $k_B$  denota la constante de Boltzmann y  $\hbar$  la constante de Planck normalizada [84]. La ecuación (E.1) fue la primera expresión en mostrar una componente de la energía de origen puramente atómico, la llamada energía de punto cero [77] o de vacío [47], la cual se expresa como

$$\mathcal{E}_0(\omega) \equiv \mathcal{E}(0, \omega) = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (\text{E.2})$$

La ecuación (E.2) muestra una ruptura con los resultados de la física clásica, especialmente con los obtenidos de la electrodinámica clásica y el principio de equipartición de la energía, es decir, la ley de Rayleigh-Jeans, desarrollada por Lord Rayleigh y J. H. Jeans a principios del siglo XX [50], en la cual se afirma que todos los movimientos cesan en  $T = 0$ . La ecuación (E.2) exhibe que en el mundo microscópico las fluctuaciones se siguen dando incluso en el límite del cero absoluto, como se observa en la figura E.1.

Como se mencionó con anterioridad, la ecuación (E.1) describe osciladores materiales, de forma que en la teoría de Planck son estos los que poseen una energía de punto cero  $\mathcal{E}_0$ , y no el campo de radiación. En la teoría de la radiación de cuerpo negro de 1912, Planck supuso que la absorción de radiación se daba de acuerdo con la teoría clásica, mientras que era la emisión de radiación la que se daba de forma discontinua por medio de *quanta*

de energía, es decir, un oscilador elemental solo podía radiar después de haber absorbido de forma continua una energía  $\hbar\omega$  [49, 77, 84]. Es por esto que cuando Planck dedujo una expresión para la densidad espectral del campo electromagnético esta no presentara una energía de punto cero. Planck obtuvo que, para el campo de radiación, se cumplía que

$$u(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (\text{E.3})$$

tal que  $u(T, \omega)$  tiende exponencialmente a cero conforme  $T \rightarrow 0$  [84].

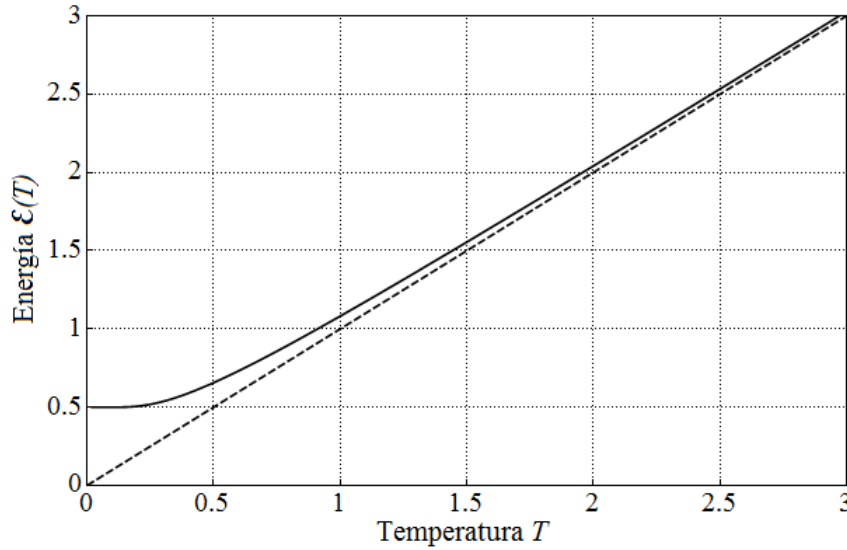


Figura E.1: Energía de un oscilador elemental en equilibrio con el campo de radiación, según las teorías de Planck, curva continua, y de Rayleigh-Jeans, curva punteada, como función de la temperatura, para los valores  $\hbar\omega = 1$  y  $k_B = 1$ . Nótese que ambas descripciones convergen al mismo comportamiento en el límite de altas temperaturas.

Para 1914, Planck estaba convencido de que la energía de punto cero no tendría ninguna consecuencia experimental [77]. Sin embargo, para ese momento el concepto de energía de punto cero había llamado la atención y se había convertido en una de las premisas principales del trabajo de científicos notables como Einstein y O. Stern [28].

Las primeras interpretaciones de Einstein sobre los *quanta* de energía surgieron en 1905 cuando este afirmó, en un artículo sobre la emisión y transformación de la luz, que “la radiación monocromática de baja densidad, dentro del rango de validez de la fórmula de radiación de Wien, se comporta termodinámicamente como si consistiera de un número de quanta de energía independientes de magnitud  $R_g\beta\nu/N_A$ ” [3, 39], donde  $R_g$  representa la constante de los gases ideales,  $N_A$  el número de Avogadro,  $\nu$  la frecuencia de la luz y  $\beta$  es una constante para representar el cociente entre las constantes de Planck y de

Boltzmann, de tal forma que  $R_g\beta/N_A = 2\pi\hbar$ . Basado en este punto de vista, Einstein propuso su laureada relación entre la frecuencia de la radiación y el potencial de frenado de los materiales para explicar el efecto fotoeléctrico [39]. En 1906, Einstein argumentó que la emisión y absorción de energía por un oscilador de Planck cambia en saltos enteros múltiplos de  $\hbar\omega$ , propuesta que puede ser considerada como el comienzo del concepto de *quantum* de luz [77], nombrado originalmente en alemán como *lichtquant* [3, 39], que posteriormente sería renombrado como fotón por G. N. Lewis en 1926 [70].

En un artículo de 1910, Einstein y Hopf estudiaron un modelo simple para representar el equilibrio térmico entre dipolos eléctricos y radiación electromagnética [42]. En dicho trabajo, se halló que, al permitir interactuar los dipolos con el campo de radiación, sobre estos se generaba una fuerza de retardo que hacía disminuir su energía cinética. Por otro lado, también se encontró que, cuando los osciladores emitían o absorbían radiación, el campo actuaba incrementando la energía cinética de los dipolos [77]. La condición de equilibrio entre el aumento y la disminución de energía cinética anteriores condujo a una ecuación diferencial de primer orden no lineal que debía ser satisfecha por la densidad de energía espectral de la radiación para una temperatura fija  $T$ ,

$$\frac{du(T, \omega)}{d\omega} - \frac{3}{\omega}u(T, \omega) + \frac{\pi^2 c^3}{\omega^3 k_B T} u^2(T, \omega) = 0, \quad (\text{E.4})$$

[42]. Einstein y Hopf probaron que si el problema de condiciones iniciales se elegía de tal forma que  $u(T, 0) = 0$ , se obtenía una solución de la forma

$$u(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T, \quad (\text{E.5})$$

que corresponde simplemente a la ley de Rayleigh-Jeans, cuyo comportamiento se compara con el del resultado deducido por Planck, ecuación (E.3), en la figura E.2. Con el análisis anterior pudo mostrarse de manera clara y concisa que la expresión encontrada por Rayleigh y Jeans para la radiación de cuerpo negro es una consecuencia inexorable del uso de argumentos de la física clásica [42, 77].

Tres años más tarde, en 1913, Einstein y Stern hallaron una forma de expresar la ecuación diferencial para la densidad de energía espectral, ecuación (E.4), tal que tuviera una dependencia explícita de la energía media de cada dipolo oscilante [45, 77],

$$\frac{du(T, \omega)}{d\omega} - \frac{3}{\omega}u(T, \omega) + \frac{\mathcal{E}}{\omega k_B T} u(T, \omega) = 0. \quad (\text{E.6})$$

Einstein y Stern propusieron que la energía media de los osciladores podía expresarse como una energía de origen térmico más una componente atérmica dada por  $\hbar\omega$ , de tal forma que en la ecuación (E.6) remplazaron  $\mathcal{E}$  por  $\mathcal{E} + \hbar\omega$  [77], llegándose así a que

$$\frac{du(T, \omega)}{d\omega} - \frac{3}{\omega}u(T, \omega) + \frac{\mathcal{E}}{\omega k_B T} u(T, \omega) + \frac{\hbar}{k_B T} u(T, \omega) = 0, \quad (\text{E.7})$$

donde al utilizar la ecuación (E.5), se arriba a que

$$\frac{du(T, \omega)}{d\omega} - \frac{3}{\omega}u(T, \omega) + \frac{\pi^2 c^3}{\omega^3 k_B T} \left( u^2(T, \omega) + \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} u(T, \omega) \right) = 0, \quad (\text{E.8})$$

al tomar, como antes, la condición inicial dada por  $u(T, 0) = 0$  se obtiene que la ecuación (E.8) tiene como solución la expresión (E.3), es decir, el hecho de suponer que los dipolos oscilantes tienen una energía de punto cero de magnitud  $\hbar\omega$  en el modelo de Einstein-Hopf implica que el espectro de radiación en equilibrio sea el de Planck [45].

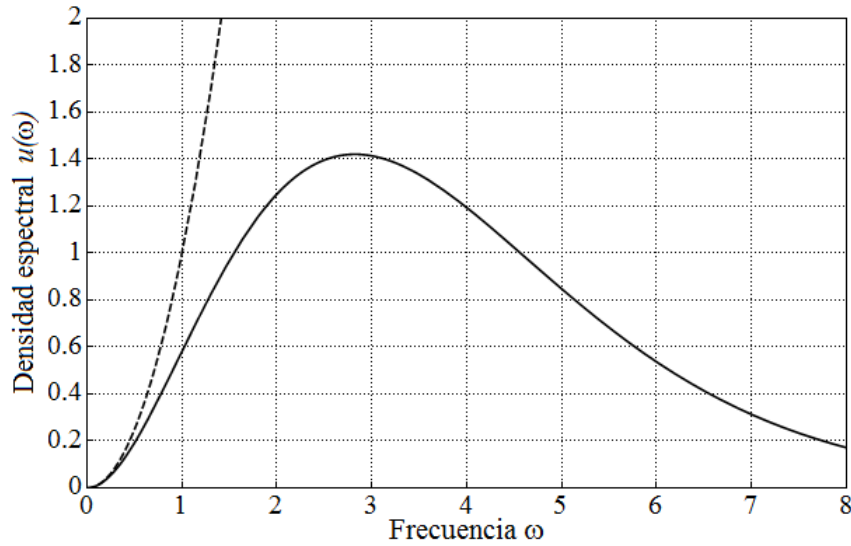


Figura E.2: Densidad espectral de energía del campo de radiación, de acuerdo con los resultados obtenidos por Planck, curva continua, y por la física clásica, curva punteada, como función de la frecuencia, para los valores  $k_B T = 1$ ,  $\hbar = 1$ ,  $\pi = 1$  y  $c = 1$ .

El desarrollo presentado por Einstein y Stern en 1913 propone que la energía de punto cero de los osciladores materiales es de magnitud  $\hbar\omega$ , siendo el doble de la magnitud hallada por Planck en 1912, ecuación (E.2). Aun cuando se sabe que la expresión presentada por Planck es correcta, es interesante analizar como Einstein y Stern pudieron reproducir el espectro correcto partiendo de una energía de punto cero incorrecta. De acuerdo con la teoría cuántica moderna, un modo normal de un campo de frecuencia  $\omega$  tiene una energía de punto cero de magnitud  $\hbar\omega/2$ , igual a la que tiene un oscilador material [50, 75, 77]. Por lo anterior, es inmediato notar que la energía de punto cero total de un dipolo oscilante de frecuencia  $\omega$ , en equilibrio con un modo normal de un campo de la misma frecuencia, es

$$\mathcal{E}_0^{(\text{dipolo})} + \mathcal{E}_0^{(\text{campo})} = \hbar\omega/2 + \hbar\omega/2 = \hbar\omega. \quad (\text{E.9})$$

La ecuación (E.9) es precisamente la energía de punto cero que Einstein y Stern propusieron. Sin embargo, en el trabajo de 1913 esta energía fue adjudicada únicamente a los osciladores materiales [45]. Sin saberlo, Einstein y Stern habían utilizado por primera vez la energía almacenada en el CPC.

La importancia que Einstein y Stern le adjudicaron a la energía de punto cero como ente físico fue de tal magnitud que esta siguió formando parte de sus investigaciones posteriores ese mismo año, como fue el caso del artículo sobre el calor específico del hidrógeno molecular a bajas temperaturas, de la autoría de ambos [45], y el artículo de Stern sobre el cálculo de la presión de vapor en los sólidos [77].

En 1914, P. Debye observó que los movimientos térmicos de los átomos en una red cristalina producían un difuminado en los patrones de difracción de rayos X [36]. La teoría que explica esta reducción de la intensidad de los patrones de difracción, ahora conocida como efecto Debye-Waller [28], considera que los átomos de la red cristalina poseen un movimiento armónico en todas sus direcciones, y que el promedio de este desplazamiento es proporcional a la energía térmica del sistema, es decir que  $m\omega^2\langle r^2 \rangle/2 = 3k_B T/2$ , de tal modo que el factor que reduce la intensidad en los patrones es

$$F_{\text{DW}}(T, \omega) \equiv \exp\left(-\frac{K^2\langle r^2 \rangle}{6}\right) = \exp\left(-\frac{K^2 k_B T}{2m\omega^2}\right), \quad (\text{E.10})$$

[77], donde  $K$  representa la magnitud de la diferencia entre los vectores de onda incidente y dispersado. Sin embargo, Debye notó que este difuminado se mantenía incluso cuando  $T \rightarrow 0$  [36]. Para corregir el factor de Debye-Waller se debe considerar que, en particular, cuando  $T = 0$  existe un desplazamiento promedio no nulo asociado a la energía de punto cero,  $m\omega^2\langle r^2 \rangle/2 = 3(\hbar\omega/2)$ . Así, se tiene que el promedio de  $r^2$  es proporcional a la energía expresada en la ecuación (E.1), tal que

$$F_{\text{DW}}(T, \omega) = \exp\left[-\frac{\hbar K^2}{m\omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\right)\right]. \quad (\text{E.11})$$

El resultado anterior reproduce el orden de magnitud correcto para el factor de Debye-Waller a temperatura cero [77], y converge al factor expresado en la ecuación (E.10) en el límite de altas temperaturas, como puede comprobarse en la figura E.3.

Sería hasta 1916 cuando se le asignaría al campo electromagnético una energía de punto cero, dando lugar de manera formal al CPC. Ese año, W. Nernst argumentó que las diferencias entre materia y campo son inadmisibles si ambos sistemas se hallan en equilibrio estadístico, por estar en contacto térmico, y que por lo tanto la ecuación (E.1) es válida para describir la energía media de ambas entidades [11, 64]. Nernst consideraba al campo de radiación de punto cero como un campo presente en todo momento y posición bajo cualquier circunstancia, de naturaleza electromagnética, de origen desconocido y con fluctuaciones mínimas pero no nulas [28]. El CPC tenía un carácter tan real para Nernst que incluso se aventuró a proponer que este podía considerarse como la fuente

de los potenciales de las interacciones elementales entre las partículas, y hasta como un reservorio de energía aprovechable [28].

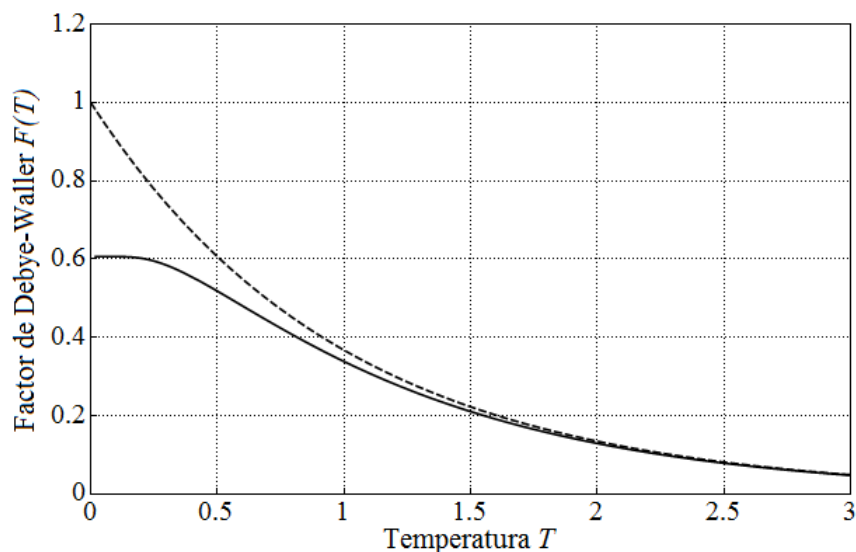


Figura E.3: Factor de Debye-Waller, según si se considera la energía de punto cero en conjunto con la energía térmica, curva continua, o solamente la componente térmica, curva punteada, como función de la temperatura, para los valores  $\hbar = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $K = 1$ ,  $m = 1$  y  $k_B = 1$ . Es notable para el caso puramente térmico, que cuando  $T = 0$  se tiene que el factor de Debye-Waller es igual a la unidad, es decir, no predice un difuminado en los patrones de difracción.

Entre otras ideas que propuso Nernst sobre el CPC, están que este pudiera ayudar a explicar la estabilidad atómica mediante el abastecimiento de un mecanismo que compensase la pérdida de energía mediante radiación por parte de los electrones atómicos, y que el campo de punto cero es el origen del comportamiento cuántico de la materia [28].

La primera evidencia experimental directa de la energía de punto cero fue hallada en los espectros de vibraciones moleculares por R. S. Mulliken en 1924 [28, 77]. Mulliken estudiaba los espectros de las moléculas  $B^{10}O^{16}$  y  $B^{11}O^{16}$  y cómo, debido a la diferencia de masas entre los isótopos del boro, los sistemas poseían diferencias en sus frecuencias de vibración, que a pesar de ser pequeñas podían ser mensurables. Entre sus conclusiones se encuentran que “*si uno supone que los verdaderos valores de los números cuánticos vibracionales no son  $n$  ni  $n'$ , sino cada uno más un factor de  $1/2$ ... es entonces probable que el mínimo de la energía vibracional de las moléculas de BO sea  $1/2$  quantum*” [80]. Mulliken concluyó lo anterior con base en sus datos espectroscópicos un año antes de que W. Heisenberg dedujera la energía de punto cero de un oscilador armónico, de manera teórica, utilizando la mecánica cuántica matricial [77].

Con el paso de los años, la idea de un campo de radiación de punto cero ha hallado aprobación entre los físicos tanto teóricos como experimentales. Muestra de lo anterior, son los muchos fenómenos que se consideran son causados por la interacción de la materia con el CPC, entre los que se hallan las fuerzas de Van der Waals y de Casimir entre cuerpos macroscópicos, y la vida media de los estados atómicos excitados [28]. Adicionalmente, la sugerencia hecha por Welton de que se mire al corrimiento Lamb como una consecuencia de las fluctuaciones generadas en la posición del electrón por el CPC [99], ha ganado gran aceptación. Concretamente, Power mostró, basándose en una sugerencia hecha por Feynman [46], que el corrimiento Lamb atómico se puede interpretar como una medida del cambio en la energía del CPC originado por los efectos dieléctricos de los átomos de hidrógeno sobre el campo de vacío circundante [85].





# Apéndice F

## La electrodinámica de una carga puntual

Para una partícula puntual de carga  $q_e$  y masa  $m$ , con movimiento no relativista, en interacción con el campo de radiación y algún potencial externo bien comportado  $\mathcal{V}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ , se tiene que la función hamiltoniana del sistema está dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})^2 + \mathcal{V}_{\text{ext}} + \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d^3 r. \quad (\text{F.1})$$

La ecuación (F.1) consta de tres partes: la primera representa el término cinético del sistema, que para el caso de una partícula en un campo electromagnético externo consta de una parte mecánica y una parte electromagnética proporcional al vector potencial magnético [52],

$$\mathcal{H}_{\text{cin}} = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})^2; \quad (\text{F.2})$$

la segunda parte expresa la interacción con el potencial externo  $\mathcal{V}_{\text{ext}}$ ; y finalmente, se tiene la contribución energética del campo electromagnético presente [19, 59], es decir, la función hamiltoniana del campo electromagnético, dada por la ecuación (B.12).

Como se mostró en el apéndice A, mediante el uso del teorema de Helmholtz es posible descomponer el campo eléctrico en sus partes longitudinal y transversal, tales que la parte longitudinal proviene de un potencial escalar, ecuación (A.19), mientras que la parte transversal de un potencial vectorial, ecuación (A.21), de tal forma que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})^2 + \mathcal{V}_{\text{ext}} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^{\parallel 2} d^3 r + \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 E^{\perp 2} + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d^3 r. \quad (\text{F.3})$$

La parte longitudinal del campo eléctrico puede describirse en términos del potencial  $\Phi$  utilizando la ecuación (A.19), la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\zeta \nabla \zeta) = \zeta \nabla^2 \zeta + \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta$  [2], el teorema de la divergencia y la ecuación de Poisson, ecuación (A.38), de tal modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^{\parallel 2} d^3r &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla\Phi)^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \int_V \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) d^3r - \int_V \Phi\nabla^2\Phi d^3r \right) \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \left( \oint_{\partial V} (\Phi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{\hat{n}} d^2r - \int_V \Phi\nabla^2\Phi d^3r \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_V \rho_e \Phi d^3r - \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial V} \Phi \mathbf{E}^{\parallel} \cdot \mathbf{\hat{n}} d^2r.
\end{aligned} \tag{F.4}$$

La última expresión puede reducirse bajo las siguientes consideraciones: si se supone que lejos de las cargas el campo  $\mathbf{E}^{\parallel}$  y el potencial  $\Phi$  se pueden aproximar como de Coulomb, se tiene que, conforme  $V \rightarrow \infty$ , el campo eléctrico cambia proporcionalmente a  $1/r^2$  mientras que el potencial varía como  $1/r$ , por otro lado, el elemento de área de la integral varía como  $r^2$  y el de volumen como  $r^3$ , de forma que la integral de volumen crece proporcionalmente a  $r^2$  mientras que la integral superficial decrece proporcionalmente a  $1/r$ , de manera que en el límite  $V \rightarrow \infty$ , la integral de superficie tiende a cero. De este modo se obtiene que

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^{\parallel 2} d^3r = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho_e \Phi d^3r. \tag{F.5}$$

Bajo la suposición de partículas puntuales, la densidad de carga puede expresarse como

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \sum_j q_{ej} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \tag{F.6}$$

[59], por lo que sustituyendo la densidad de carga  $\rho_e(\mathbf{r})$ , ecuación (F.6), en la ecuación (F.5) se arriba a que

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^{\parallel 2} d^3r = \frac{1}{2} \sum_j q_{ej} \Phi(\mathbf{r}_j), \tag{F.7}$$

donde el factor  $1/2$  resulta de no contar dos veces la interacción entre pares de las partículas [59]. Por esto, para una única partícula inmersa en un potencial eléctrico externo  $\Phi$ , resulta que

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^{\parallel 2} d^3r = q_e \Phi. \tag{F.8}$$

De esta manera se tiene que la contribución energética expresada en la ecuación (F.1) se describe como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})^2 + q_e \Phi + \mathcal{V}_{\text{ext}} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \epsilon_0 E^{\perp 2} + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d^3r. \tag{F.9}$$

Una forma alternativa de expresar la función hamiltoniana anterior es en términos de las variables canónicas del campo de radiación, de modo que al sustituir la ecuación (B.53) en esta, se llega a que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})^2 + q_e \Phi + \mathcal{V}_{\text{ext}} + \sum_{\alpha} \frac{p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2}{2}. \tag{F.10}$$

Con base en esto, se tiene una función hamiltoniana con varios conjuntos de variables conjugadas, siendo estos  $\{\mathbf{r}, \mathbf{P}\}$  y  $\{q_\alpha, p_\alpha\}$  para cada  $\alpha$ , a partir de la cual pueden obtenerse las ecuaciones de Hamilton que describan el sistema físico global en cuestión, partícula-campo. Para la ecuación de la velocidad asociada a la partícula se tiene:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}}{m}. \quad (\text{F.11})$$

La ecuación anterior muestra las componentes del momento canónico [52]. Con respecto a la ecuación de Hamilton para  $\mathbf{P}$ , utilizando  $\nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) = 2\mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + 2(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H}$  [2], así como las ecuaciones (A.9) y (F.11), se arriba a que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} = -q_e \nabla \Phi - \nabla \mathcal{V}_{\text{ext}} - m^{-1}(\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}) \times (\nabla \times (\mathbf{P} - q_e \mathbf{A})) \\ &\quad - m^{-1}((\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}) \cdot \nabla)(\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}) \\ &= -q_e \nabla \Phi - \nabla \mathcal{V}_{\text{ext}} - \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{P} - q_e \nabla \times \mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{P} + q_e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ &= -q_e \nabla \Phi - \nabla \mathcal{V}_{\text{ext}} + q_e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + q_e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Para cada modo normal del campo electromagnético se tiene un par de ecuaciones de movimiento asociadas a sus respectivas variables canónicas, dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{q}_\alpha &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} = p_\alpha - \frac{q_e}{m}(\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_\alpha} \\ &= p_\alpha - \frac{q_e}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \frac{\cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}{\omega_\alpha} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\alpha), \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\alpha} = -\omega_\alpha^2 q_\alpha + \frac{q_e}{m}(\mathbf{P} - q_e \mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_\alpha} \\ &= -\omega_\alpha^2 q_\alpha + \frac{q_e}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sin(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) (\dot{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\alpha). \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Así, al definir un nuevo par de variables canónicas como:

$$c_\alpha(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha}}(p_\alpha - i\omega_\alpha q_\alpha); \quad (\text{F.15})$$

$$c_\alpha^*(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha}}(p_\alpha + i\omega_\alpha q_\alpha), \quad (\text{F.16})$$

[28], puede calcularse la derivada parcial de  $c_\alpha(t)$ , así como la de su complejo conjugado, con respecto al tiempo en términos de las ecuaciones (F.13) y (F.14),

$$\begin{aligned} \dot{c}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha}}(\dot{p}_\alpha - i\omega_\alpha \dot{q}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha}} \left( -i\omega_\alpha(p_\alpha - i\omega_\alpha q_\alpha) + \frac{i q_e}{\sqrt{\epsilon_0 V}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\alpha) (\cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) - i \sin(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})) \right) \\ &= -i\omega_\alpha c_\alpha + \frac{i q_e}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha \epsilon_0 V}} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\alpha) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

La última expresión de la ecuación (F.17) es una ecuación diferencial ordinaria que puede resolverse por integración directa,

$$\begin{aligned} (\dot{c}_\alpha + i\omega_\alpha c_\alpha)e^{i\omega_\alpha t} &= \frac{iq_e}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha\epsilon_0 V}}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha)e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}+i\omega_\alpha t}, \\ \int \frac{d(c_\alpha(t)e^{i\omega_\alpha t})}{dt} dt &= c_\alpha(t)e^{i\omega_\alpha t} = a_\alpha + \frac{iq_e}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha\epsilon_0 V}} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}(t') \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha)e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}(t')+i\omega_\alpha t'} dt', \quad (\text{F.18}) \\ &= a_\alpha e^{-i\omega_\alpha t} + \frac{iq_e}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha\epsilon_0 V}} e^{-i\omega_\alpha t} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}(t') \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha)e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}(t')+i\omega_\alpha t'} dt'. \end{aligned}$$

Aquí  $a_\alpha(t) \equiv a_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}$  representa la variable canónica del campo de radiación antes de que la partícula comience su movimiento [19, 28, 77]. Es importante aclarar que las amplitudes  $c_\alpha$  difieren de  $a_\alpha$  por la contribución radiada por la partícula, con su velocidad como fuente [28]. De esta forma se obtiene que

$$c_\alpha(t) = a_\alpha(t) + \frac{iq_e}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha\epsilon_0 V}} e^{-i\omega_\alpha t} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}(t') \cdot \mathbf{e}_\alpha)e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}(t')+i\omega_\alpha t'} dt'. \quad (\text{F.19})$$

Al derivar la ecuación (F.11) con respecto al tiempo y sustituir en ella el resultado final de la ecuación (F.12) se halla la siguiente ecuación de movimiento,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{P}} - q_e \frac{d\mathbf{A}}{dt} = -q_e \nabla \Phi - \nabla \mathcal{V}_{\text{ext}} + q_e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + q_e (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A} - q_e \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (\text{F.20})$$

La variación del vector potencial magnético  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  en el tiempo consta de dos componentes: la originada por la variación externa del vector potencial y la causada por el movimiento de la partícula cargada. De este modo, al utilizar la regla de la cadena, se tiene que la derivada temporal total del vector potencial magnético se expresa como una derivada material dada por

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (\text{F.21})$$

Sustituyendo la última ecuación en (F.20) y utilizando (A.21) se obtiene que la fuerza aplicada al subsistema mecánico es

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = -q_e \nabla \Phi - \nabla \mathcal{V}_{\text{ext}} + q_e \mathbf{E}^\perp + q_e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (\text{F.22})$$

que es la conocida fuerza de Lorentz para una partícula puntual [59], donde los campos  $\mathbf{E}^\perp$  y  $\mathbf{B}$  tienen la particularidad de poseer información sobre el movimiento de la partícula, más la contribución del potencial externo. Sustituyendo en la ecuación (F.22) las ecuaciones (B.56) y (B.57) se arriba que

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -q_e \nabla \Phi - \nabla \mathcal{V}_{\text{ext}} + \frac{q_e}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \left( \check{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_\alpha)}{c} \right) \times \\
 &\quad \times \sum_\alpha (\omega_\alpha q_\alpha \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) - p_\alpha \sin(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})) \\
 &= -q_e \nabla \Phi - \nabla \mathcal{V}_{\text{ext}} + i q_e \sum_\alpha \sqrt{\frac{\mathcal{E}_\alpha}{2\epsilon_0 V}} \left( \check{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_\alpha)}{c} \right) \times \\
 &\quad \times (c_\alpha e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} - c_\alpha^* e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}).
 \end{aligned} \tag{F.23}$$

Con base en los resultados anteriores, es posible expresar la fuerza obtenida como

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{Lorentz}} + \mathbf{F}_{\text{auto}}. \tag{F.24}$$

Al sustituir la ecuación (F.19) en la expresión final de (F.23) se halla que las fuerzas definidas en la ecuación (F.24) son de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} \equiv -\nabla(q_e \Phi + \mathcal{V}_{\text{ext}}); \tag{F.25}$$

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} \equiv i q_e \sum_\alpha \sqrt{\frac{\mathcal{E}_\alpha}{2\epsilon_0 V}} \left( \check{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_\alpha)}{c} \right) (a_\alpha e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} - a_\alpha^* e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}}); \tag{F.26}$$

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} \equiv \frac{q_e}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_\alpha \left( \check{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_\alpha)}{c} \right) \mathcal{G}(\mathbf{r}, t). \tag{F.27}$$

En la ecuación (F.27) se define la función  $\mathcal{G}(\mathbf{r}, t)$  como la parte integral resultante de la suma de  $c_\alpha(t)$  y su complejo conjugado, es decir,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &\equiv \frac{i^2 q_e}{2\sqrt{\epsilon_0 V}} \left( e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_\alpha t} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}' + i\omega_\alpha t'} dt' + e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - i\omega_\alpha t} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}' + i\omega_\alpha t'} dt' \right) \\
 &= \frac{i^2 q_e}{2\sqrt{\epsilon_0 V}} \left( \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + i\omega_\alpha (t' - t)} dt' + \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - i\omega_\alpha (t' - t)} dt' \right) \\
 &= \frac{i^2 q_e}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha) \left( \frac{e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + i\omega_\alpha (t' - t)} + e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - i\omega_\alpha (t' - t)}}{2} \right) dt' \\
 &= -\frac{q_e}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_\alpha) \cos(\omega_\alpha (t' - t) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})) dt'.
 \end{aligned} \tag{F.28}$$

Sustituyendo la última igualdad de la ecuación (F.28) en (F.27) se llega a que la última componente de la fuerza de la ecuación (F.24) está dada por

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = -\frac{q_e^2}{\epsilon_0 V} \sum_\alpha \left( \check{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\check{\boldsymbol{\kappa}} \times \check{\mathbf{e}}_\alpha)}{c} \right) \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{e}_\alpha) \cos(\omega_\alpha (t' - t) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})) dt'. \tag{F.29}$$

La ecuación (F.25) expresa la fuerza debida al gradiente del potencial escalar eléctrico, que es equivalente a la fuerza externa ejercida por la componente longitudinal del campo eléctrico, y las fuerzas externas ajenas al campo electromagnético. Por su parte, la ecuación (F.26) representa la fuerza de Lorentz experimentada por la carga puntual debida a la presencia del campo electromagnético libre. Finalmente, la ecuación (F.29) expresa la fuerza autoinducida en la carga debida al campo electromagnético que radia al moverse en el espacio [28].

# Apéndice G

## La ecuación de Abraham-Lorentz

La fuerza expresada en la ecuación (F.29) al final del apéndice F carece de valor práctico debido a la complejidad de su estructura. Sin embargo, es usual hacer un par de aproximaciones de forma que se arribe a una expresión más compacta y útil. Primeramente, dado que se supuso que el movimiento de la carga se restringe al límite no relativista, se cumple que  $\dot{r} \ll c$ , por lo que la ecuación (F.29) queda reducida a

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = -\frac{q_e^2}{\epsilon_0 V} \sum_{\alpha} \check{\mathbf{e}}_{\alpha} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_{\alpha}) \cos(\omega_{\alpha}(t' - t) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})) dt'. \quad (\text{G.1})$$

La segunda aproximación, nuevamente fundamentada en el movimiento no relativista de la partícula, reside en el argumento del coseno en el integrando de la ecuación (G.1), el cual puede describirse y aproximarse como:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}(t' - t) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \omega_{\alpha}(t' - t) \left( 1 - \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\omega_{\alpha}(t' - t)} \right) = \omega_{\alpha}(t' - t) \left( 1 - \frac{\check{\boldsymbol{\kappa}} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{c(t' - t)} \right); \\ (\omega_{\alpha}(t' - t) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})) &\approx \omega_{\alpha}(t' - t). \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

De manera que en este límite se tiene que la ecuación (G.1) se reduce a

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = -\frac{q_e^2}{\epsilon_0 V} \sum_{\alpha} \check{\mathbf{e}}_{\alpha} \int_0^t (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}_{\alpha}) \cos(\omega_{\alpha}(t' - t)) dt'. \quad (\text{G.3})$$

Con el fin de simplificar el proceso de integración en la ecuación anterior, puede tomarse el límite continuo de esta. Para esto, se tiene que la ecuación (B.30) implica, en el límite infinitesimal, que

$$\lim_{\ell_{\xi} \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell_{\xi}} = \frac{d\kappa_{\xi}}{2\pi}, \quad (\text{G.4})$$



de modo que pueda expresarse el cambio a una estructura continua mediante la siguiente transformación,

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \xi(\boldsymbol{\kappa}, \check{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\lambda}) a_{\boldsymbol{\kappa}, \lambda} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \sum_{\lambda} \int_{V_{\boldsymbol{\kappa}}} \xi(\boldsymbol{\kappa}, \check{\mathbf{e}}^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa})) a^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa}) d^3\boldsymbol{\kappa}, \quad (\text{G.5})$$

[28]. Utilizando los resultados expresados en la ecuación (G.5), se obtiene que el límite continuo de la ecuación (G.3) es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{auto}} &= -\frac{q_e^2}{8\pi^3\epsilon_0} \sum_{\lambda} \int_{V_{\boldsymbol{\kappa}}} \int_0^t \check{\mathbf{e}}^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa}) (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa})) \cos(\omega(\boldsymbol{\kappa})(t' - t)) dt' d^3\boldsymbol{\kappa} \\ &= -\frac{q_e^2}{8\pi^3\epsilon_0} \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} \kappa^2 \int_0^t \cos(\omega(\boldsymbol{\kappa})(t' - t)) \int_{\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}} \check{\mathbf{e}}^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa}) (\dot{\mathbf{r}}' \cdot \check{\mathbf{e}}^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa})) d\Omega_{\boldsymbol{\kappa}} dt' d\boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

Además, se tiene para un vector cualquiera, independiente de los índices de polarización, que

$$\sum_{\lambda} \int_{\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}} \check{\mathbf{e}}^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa}) (\mathbf{H} \cdot \check{\mathbf{e}}^{\lambda}(\boldsymbol{\kappa})) d\Omega_{\boldsymbol{\kappa}} = \int_{\Omega_{\boldsymbol{\kappa}}} \mathbf{H}^{\perp} d\Omega_{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{8\pi}{3} \mathbf{H}, \quad (\text{G.7})$$

[19, 28, 77, 98], por lo que utilizando la ecuación anterior en la última igualdad de (G.6) se arriba a que

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = -\frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \kappa^2 \int_0^t \dot{\mathbf{r}}' \cos(\omega(\boldsymbol{\kappa})(t' - t)) dt' d\boldsymbol{\kappa}. \quad (\text{G.8})$$

Utilizando la ecuación (B.3) en (G.8) se llega a que

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = -\frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 \int_0^t \dot{\mathbf{r}}' \cos(\omega(t' - t)) dt' d\omega. \quad (\text{G.9})$$

Por otro lado, al sustituir la identidad

$$\omega^2 \int_0^{\infty} \dot{\mathbf{r}}' \cos(\omega(t' - t)) dt' = \ddot{\mathbf{r}}(t) - \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\infty} \dot{\mathbf{r}}' \cos(\omega(t' - t)) dt', \quad (\text{G.10})$$

en la ecuación (G.9), se llega a que

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = -\frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \int_0^{\infty} d\omega - \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_0^t \dot{\mathbf{r}}' \int_0^{\infty} \cos(\omega(t' - t)) d\omega dt' \right) \right). \quad (\text{G.11})$$

Una posible definición de la delta de Dirac, útil en el presente desarrollo, es

$$\delta(\xi - \xi') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\zeta(\xi - \xi')) d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\zeta(\xi - \xi')) d\zeta, \quad (\text{G.12})$$

[2], donde se usó que el coseno es una función par. Por otro lado, puede considerarse a la delta de Dirac como el límite de una secuencia de funciones par [2], de modo que se cumpla que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 2 \int_0^{\infty} \delta(\xi) d\xi. \quad (\text{G.13})$$

De esta forma, al utilizar la ecuación (G.12) y posteriormente (G.13) en la expresión (G.11) se tiene finalmente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{auto}} &= -\frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \int_0^{\infty} d\omega - \pi \frac{d^2}{dt^2} \left( \int_0^t \dot{\mathbf{r}}' \delta(t' - t) dt' \right) \right) \\ &= -\frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \left( \ddot{\mathbf{r}}(t) \int_0^{\infty} d\omega - \frac{\pi}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\dot{\mathbf{r}}(t)) \right) \\ &= -\frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{r}}(t) \int_0^{\infty} d\omega + \frac{q_e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

Al expresar la fuerza  $\mathbf{F}_{\text{auto}}$  como

$$\mathbf{F}_{\text{auto}} = m\tau \ddot{\mathbf{r}}(t) - \delta m \ddot{\mathbf{r}}(t), \quad (\text{G.15})$$

es posible compararla con la última expresión de la ecuación (G.14), de tal manera que se hallen las definiciones de las constantes de proporcionalidad propuestas, obteniéndose que estas son:

$$\delta m \equiv \frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^{\infty} d\omega; \quad (\text{G.16})$$

$$\tau \equiv \frac{q_e^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3}. \quad (\text{G.17})$$

La ecuación (G.15) muestra que la partícula cargada se induce, a través de su propia radiación, dos efectos: primero, una corrección electromagnética de  $\delta m$  a la masa de la carga [79]; y segundo, una fuerza de reacción proporcional al cambio en el tiempo de la aceleración de la partícula, conocida como reacción radiativa, que actúa como un término de resistencia al movimiento [71]. Al agrupar la fuerza de Lorentz y las fuerzas externas como

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{Lorentz}}, \quad (\text{G.18})$$

se tiene que la ecuación (F.24) se rescribe como

$$m \left( \ddot{\mathbf{r}} - \tau \frac{d\ddot{\mathbf{r}}}{dt} \right) = \mathbf{F}, \quad (\text{G.19})$$

donde se ha redefinido  $m \equiv (m_o + \delta m)$  como la masa experimentalmente observable de la partícula cargada [65], consistente en la masa desnuda  $m_o$  de la carga más la correspondiente corrección electromagnética [77].

A la ecuación (G.19) se le conoce como ecuación de Abraham-Lorentz para una partícula cargada puntual, con movimiento no relativista, en interacción con el campo electromagnético de radiación originado por su movimiento en el espacio vacío [28, 77]. Esta ecuación de la física fue deducida primeramente por M. Abraham en 1904 y posteriormente, de forma independiente, por H. A. Lorentz en 1909 en su teoría del electrón clásico, dentro del modelo de partícula extendida, tomando el límite de partícula puntual [1, 28, 71].

## G.1. La masa electromagnética y la reacción radiativa

La ecuación de Abraham-Lorentz, tal como se ha expresado en la ecuación (G.19), posee dos grandes problemas fundamentales con los principios básicos de la física clásica al predecir, por un lado, correcciones infinitas a la masa del sistema, y por el otro, al dar soluciones cuyas aceleraciones divergen con el tiempo [79]. En ambos casos, se requiere tener almacenadas inicialmente energías infinitas en el sistema.

El resultado de que la corrección electromagnética a la masa sea una cantidad infinita, ecuación (G.16), puede entenderse bajo el siguiente argumento: la energía electrostática de una partícula de radio  $R$  y carga  $q_e$  uniformemente distribuida en su superficie, está dada por la expresión

$$\mathcal{E}_{elec} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2 d^3r = 2\pi\epsilon_0 \int_R^\infty \left( \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr = \frac{q_e^2}{8\pi\epsilon_0 R}, \quad (\text{G.20})$$

[59]. De la equivalencia masa-energía de Einstein,  $\mathcal{E} = mc^2$ , se llega a que la masa electromagnética del sistema anterior es

$$m_{elec} = \frac{q_e^2}{8\pi\epsilon_0 R c^2}. \quad (\text{G.21})$$

Al suponer que la masa electromagnética es igual a la corrección  $\delta m$ , ecuación (G.16), se obtiene que el radio correspondiente a la configuración adoptada, bajo dicha aproximación, está dado por la siguiente igualdad

$$\frac{q_e^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 R} = \frac{q_e^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^\infty d\omega = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{q_e^2 \omega}{3\pi^2\epsilon_0 c^3}, \quad (\text{G.22})$$

siendo el radio de la partícula igual a

$$R = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{3\pi c}{8\omega}. \quad (\text{G.23})$$

La ecuación (G.23) muestra que el hecho de haber obtenido una corrección electromagnética infinita a la masa es resultado directo de haber supuesto que la partícula cargada es puntual. Para el caso particular de un electrón atómico este resultado puede ser adjudicado a dos posibilidades: por un lado, a que actualmente no existe una teoría lo suficientemente refinada para hallar el valor físico y finito de  $\delta m$  [77]; por el otro, a que el hecho de considerar al electrón como una partícula puntual simplemente significa que su radio es demasiado pequeño para ser observado, sin que esto implique una falta de estructura interna [90]. Sin embargo, tomando en cuenta lo expuesto anteriormente, y de forma práctica, el haber supuesto que  $m$ , en la ecuación (G.19), posee el valor experimental de la masa de la partícula se basa en la no observabilidad fundamental de la masa desnuda, eliminándose así el problema de masas infinitas [65]. El proceso anterior es una de las primeras suposiciones del programa de renormalización actual de la electrodinámica cuántica moderna [28].

Por otro lado, al resolver la ecuación de Abraham-Lorentz para la aceleración de la partícula cargada, suponiendo que la fuerza es función únicamente del tiempo,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ , se halla como solución general que

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(0)e^{t/\tau} - \frac{1}{m\tau} \int_0^t \mathbf{F}(t')e^{-(t'-t)/\tau} dt'. \quad (\text{G.24})$$

La ecuación (G.19) posee la particularidad de ser una ecuación diferencial de tercer orden en la posición, por lo que su solución general no solo dependerá de las condiciones iniciales usuales de la mecánica clásica, sino que depende también de la aceleración inicial del sistema. Adicionalmente, la ecuación (G.24) predice que la aceleración del sistema,  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ , eventualmente crecerá exponencialmente con el tiempo, conduciendo a valores finales infinitos para la velocidad y la energía; este tipo de soluciones se conocen como soluciones fugaces, o divergentes, de la ecuación de Abraham-Lorentz [79]. Una forma de evitar la dificultad anterior es seleccionando una aceleración inicial que, a pesar de su artificialidad, conduzca a una aceleración final nula,  $\ddot{\mathbf{r}}(\infty) = 0$ , siendo tal aceleración la dada por la expresión

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = \frac{1}{m\tau} \int_0^\infty \mathbf{F}(t')e^{-t'/\tau} dt', \quad (\text{G.25})$$

[38, 58], de tal forma que al sustituir la condición inicial, expresada en la última ecuación, en (G.24) se arriba a que:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \frac{1}{m\tau} \left( \int_0^\infty \mathbf{F}(t')e^{-(t'-t)/\tau} dt' - \int_0^t \mathbf{F}(t')e^{-(t'-t)/\tau} dt' \right) \\ &= \frac{1}{m\tau} \int_t^\infty \mathbf{F}(t')e^{-(t'-t)/\tau} dt' \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty \mathbf{F}(t + \tau\xi)e^{-\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{G.26})$$

La última igualdad de la ecuación (G.26) predice aceleraciones finitas en todo tiempo para fuerzas  $\mathbf{F}(t)$  bien comportadas. Sin embargo, la solución anterior implica que  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  dependa del valor de la fuerza para tiempos futuros en todo tiempo, es decir, la partícula anticipa toda variación en la fuerza aplicada [79]. Este fenómeno es conocido como preaceleración y consiste en una forma de comportamiento acausal [28], como puede observarse en el ejemplo expuesto en la figura G.1.

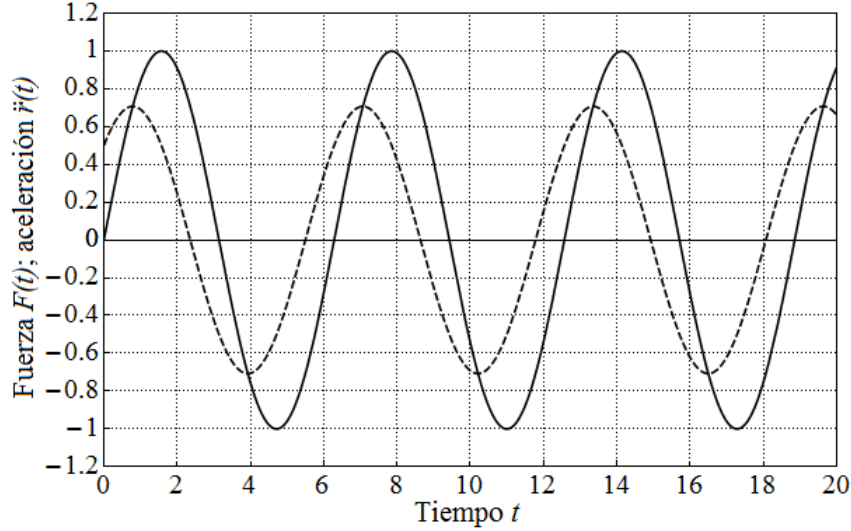


Figura G.1: Representación gráfica de la fuerza  $F(t) = \sin(t)$ , curva continua, y la correspondiente aceleración obtenida a partir de la ecuación de Abraham-Lorentz, curva punteada. El efecto de la preaceleración se ha magnificado al tomar los valores de los parámetros  $m = 1$  y  $\tau = 1$ .

Nuevamente de manera pragmática, el tiempo  $\tau$  para un electrón es del orden de  $6.274 \times 10^{-24}$  segundos, el cual es demasiado pequeño para variaciones realistas de la fuerza aplicada [77], de tal modo que al realizar un desarrollo de Taylor de  $\mathbf{F}(t + \tau\xi)$  alrededor de  $\tau\xi = 0$  [59, 78] se tiene de la ecuación (G.26) que

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n} \int_0^{\infty} \xi^n e^{-\xi} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \mathbf{F}(t)}{dt^n}. \quad (\text{G.27})$$

La ecuación (G.27) muestra que, para orden cero en  $\tau$ , la ecuación de Abraham-Lorentz se reduce a la segunda ley de Newton, al haber sido despreciada totalmente la reacción radiativa. Por otro lado, al aproximar a primer orden en  $\tau$ , se obtiene que el término de reacción radiativa puede expresarse proporcionalmente a la primera derivada temporal de la fuerza externa aplicada,

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) \approx \mathbf{F}(t) + \tau \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}. \quad (\text{G.28})$$

Numéricamente,  $\tau$  puede interpretarse como el tiempo que le toma a la luz recorrer la distancia

$$c\tau = \frac{q_e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right) = \frac{2R_{clas}}{3}, \quad (\text{G.29})$$

donde  $R_{clas}$  es el radio clásico de la partícula. De manera general,  $\tau$  representa el tiempo que le toma a la luz propagarse a través de una partícula elemental, de tal modo que no es de esperarse que la preaceleración acausal de la ecuación (G.26) conduzca a consecuencias o fenómenos observables [77].

## G.2. Introducción de la regla de corte

Una forma de garantizar una corrección electromagnética a la masa finita es mediante la introducción de una cota superior o corte en las frecuencias en la ecuación (G.16). En 1977, E. J. Moniz y D. H. Sharp dedujeron una ecuación del tipo Abraham-Lorentz para una carga clásica extendida, hallando que esta predice comportamientos causales y correcciones electromagnéticas finitas a la masa [79]. Lo anterior, junto con la expresión (G.23), permite afirmar que un corte efectivo en las frecuencias es introducido por la estructura de la partícula cargada. Cualitativamente, puede entenderse esta afirmación notando que una carga extendida realiza un promedio del campo de radiación a lo largo de su extensión, de tal manera que elimina el efecto de las componentes de longitudes de onda iguales o menores que el radio de su estructura [28]. De la ecuación (G.23) puede observarse, al introducir una frecuencia de corte, que en general el radio de la estructura es inversamente proporcional a la frecuencia máxima del campo de radiación,

$$\omega_c \propto \frac{c}{R}, \quad (\text{G.30})$$

donde el factor de proporcionalidad es característico de cada distribución particular de carga en la partícula [28].

La introducción de un corte en las frecuencias puede entenderse como una consecuencia de la falta de interacciones entre las componentes del campo de radiación de altas frecuencias,  $\omega > c/R$ , y la partícula, de tal forma que las primeras puedan ser despreciadas. Las frecuencias anteriores corresponden a intervalos temporales de menor duración que  $R/c$ , tal que si, usando la ecuación (G.29),  $R > c\tau \approx R_{clas}$ , es decir, si la partícula se extiende sobre un radio mayor que su radio clásico, entonces todos los efectos no causales asociados a la ecuación de Abraham-Lorentz, ecuación (G.19), desaparecen. En este sentido, la introducción de una frecuencia de corte, o equivalentemente de una estructura a la partícula, restablece la causalidad en el desarrollo. La cota superior  $\omega_c$  puede tener su origen en una combinación de muchos factores, siendo solo uno de ellos la estructura; otros pueden ser causados por los efectos dinámicos de la partícula [28].

El corte en las frecuencias, denominado originalmente por Feynman en inglés como *The Cutoff Rule* [47], es introducido no porque sea práctico o posible, sino porque es necesario para recuperar la consistencia de la teoría. Para el caso electrónico, la carga extendida puede entenderse como una estructura efectiva originada por las rápidas fluctuaciones existentes en la posición de la carga puntual [28]. La explicación anterior es la usualmente adoptada en la electrodinámica cuántica [77].

Una frecuencia de corte o máxima comúnmente utilizada en la electrodinámica estocástica es la frecuencia de Compton [28], dada por

$$\omega_C = \frac{mc^2}{\hbar}. \quad (\text{G.31})$$

Para esta frecuencia característica se tiene una corrección electromagnética a la masa finita, dada por la ecuación (G.16), de

$$\delta m = \frac{q_e^2 \omega_C}{3\pi^2 \epsilon_0 c^3} = \frac{q_e^2 m}{3\pi^2 \epsilon_0 \hbar c}. \quad (\text{G.32})$$

Para el caso específico de un electrón, se obtiene que la razón entre la corrección a la masa correspondiente y su masa es  $\delta m_e/m_e = 3 \times 10^{-3}$ , la cual resulta una corrección a la masa razonable. En este sentido, puede afirmarse que la frecuencia de Compton  $\omega_C$  resulta ser una cota superior natural para la presente descripción no relativista.

Es importante resaltar que la función hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , presentada en el apéndice F, representa una teoría causal, de manera que cualquier descripción exacta basada en esta debe preservar dicha causalidad [28]. Por lo anterior, independientemente del mecanismo utilizado para tratar de explicar las anomalías existentes en los comportamientos predichos por la ecuación de Abraham-Lorentz, se debe tener siempre presente que estas dificultades son producidas por las aproximaciones hechas a lo largo del proceso de deducción de la ecuación (G.19), y que no constituyen parte integral de la teoría [14, 27].

# Apéndice H

## La descripción de Heisenberg

Como se mostró a lo largo del capítulo 2, al partir de la ecuación estocástica de Abraham-Lorentz, ecuación (2.3), se puede arribar a la descripción de Schrödinger de la mecánica cuántica, representada por la ecuación (2.192). Esto permite afirmar que el fenómeno de la cuantización en la materia surge como una consecuencia de la interacción entre esta y el campo de radiación de punto cero, descartándose así la idea comúnmente aceptada de que la cuantización es una característica o propiedad intrínseca de la materia.

La descripción de Schrödinger no es la única formulación matemática de la mecánica cuántica, un ejemplo relevante de lo anterior es la descripción de Heisenberg, también conocida como la mecánica cuántica matricial [25]. Sin embargo, como mostraron Dirac, E. Schrödinger y otros, ambas descripciones son equivalentes entre sí [75], siendo al mismo tiempo mutuamente excluyentes [25], estando ambas conectadas a través de una transformación matemática [32]. Dicha conexión permite afirmar que si la EDE puede arribar a la descripción de Schrödinger, entonces debe ser capaz, bajo un tratamiento alternativo, de reproducir la descripción de Heisenberg de la mecánica cuántica. Esta afirmación ha sido comprobada de manera exitosa por de la Peña, Cetto y Valdés-Hernández en una serie de publicaciones recientes [30, 35, 97]. Por su importancia como resultado de la EDE, y como un complemento final del capítulo 2, se expondrá de manera sintética el desarrollo llevado a cabo, desde la electrodinámica estocástica, para el arribo a la ecuación de Heisenberg.

Al igual que al comienzo del capítulo 2, si se considera el sistema mecánico de una partícula de masa  $m$  y carga  $q_e$  sujeta a una fuerza externa  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , que se supone conservativa, y en permanente interacción con el campo de radiación de punto cero, se tiene entonces que la ecuación de movimiento de dicho sistema, en la aproximación no relativista y dipolar, es la ecuación (2.3), que en el caso unidimensional se reduce a

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) + m\tau \frac{d^3 x}{dt^3} + q_e E(t). \quad (\text{H.1})$$

Al enfocarse únicamente en las soluciones estacionarias, se tiene que el campo eléctrico



$E(t)$  puede ser desarrollado en términos de ondas planas [30, 35, 97], de forma análoga a la ecuación (B.1), de tal manera que se exprese como

$$E(t) = \sum_{\omega_j} \tilde{E}(\omega_j) a(\omega_j) e^{i\omega_j t} + c.c. = \sum_j \tilde{E}_j a_j e^{i\omega_j t} + c.c., \quad (\text{H.2})$$

donde se ha introducido la notación compacta  $\tilde{E}(\omega_j) \equiv \tilde{E}_j$ . De manera analoga, se tiene que la solución  $x(t)$  puede descomponerse como una serie de Fourier, mientras que la fuerza  $F(x)$ , puede suponerse como una serie de potencias de  $x$ , de tal forma que

$$x(t) = \sum_j \tilde{x}_j a_j e^{i\omega_j t} + c.c., \quad (\text{H.3})$$

$$F(x(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n(t) = \sum_j \tilde{F}_j a_j e^{i\omega_j t} + c.c. \quad (\text{H.4})$$

Es importante resaltar que los coeficientes  $\tilde{F}_j$  y  $\tilde{x}_j$ , y las frecuencias  $\omega_j$ , dependen en general, y sobre todo para el caso de fuerzas no lineales, de las amplitudes estocásticas  $a_k$  del campo [32], tales que explícitamente deben denotarse como  $\tilde{F}_j = \tilde{F}(\omega_j, a_j)$ ,  $\tilde{x}_j = \tilde{x}(\omega_j, a_j)$  y  $\omega_j = \omega_j(a_j)$ . Así, al sustituir las expresiones (H.2), (H.3) y (H.4) en la ecuación (H.1) se obtiene que la ecuación de movimiento se reescribe como

$$-m\omega_j^2 \tilde{x}_j = \tilde{F}_j - im\tau\omega_j^3 \tilde{x}_j + q_e \tilde{E}_j, \quad (\text{H.5})$$

donde el índice  $j$  corre sobre cada uno de los posibles modos de oscilación. De la ecuación anterior, se tiene que la transformada de Fourier de la solución  $x(t)$  puede expresarse alternativamente, mediante un despeje directo, como

$$\tilde{x}_j = -\frac{q_e}{m} \frac{\tilde{E}_j}{\omega_j^2 - i\tau\omega_j^3 + \tilde{F}_j/m\tilde{x}_j} = -\frac{q_e}{m} \frac{\tilde{E}_j}{\Delta_j}, \quad (\text{H.6})$$

donde se ha definido  $\Delta_j = \Delta(\omega_j, a_j)$  como

$$\Delta_j \equiv \omega_j^2 - i\tau\omega_j^3 + \frac{\tilde{F}_j}{m\tilde{x}_j}. \quad (\text{H.7})$$

Es notable que las contribuciones más importantes a la solución  $x(t)$  provienen de los polos de  $\tilde{x}_j$  [30, 35, 97], es decir, a aquellas frecuencias que satisfacen que

$$\omega_j^2 \approx -\tilde{F}_j/m\tilde{x}_j. \quad (\text{H.8})$$

Las resonancias a estas frecuencias son extremadamente angostas debido al diminuto valor de la constante  $\tau$  [32, 35, 97]. Adicionalmente, para distintas respuestas se tendrá

un conjunto de frecuencias resonantes distinto, de tal forma que, para hacer esta distinción evidente, se introduce un índice extra que señale la elección de la respuesta y la frecuencia resonante. Así, se denota la frecuencia como  $\omega_{jk}$  en lugar de  $\omega_j$ . Finalmente, al ser las frecuencias de la ecuación (H.8) las más relevantes para los estados resonantes, se tiene, sustituyendo la ecuación (H.6) en el desarrollo de Fourier de  $x(t)$ , y haciendo explícita la dependencia de esta a la realización del campo introduciendo el índice  $l$ , que

$$x_k^{(l)}(t) = \sum_j \tilde{x}_{jk}^{(l)} a_{jk}^{(l)} e^{-i\omega_{jk}^{(l)} t} = -\frac{q_e}{m} \sum_j \frac{\tilde{E}_{jk}^{(l)}}{\Delta_{jk}^{(l)}} a_{jk}^{(l)} e^{-i\omega_{jk}^{(l)} t}. \quad (\text{H.9})$$

De la última ecuación puede arribarse a una expresión para el cuadrado de la solución  $x_k^{(l)}(t)$ , a partir de la cual puede obtenerse, en el límite en que  $t \rightarrow \infty$  [32], el promedio de dicha cantidad sobre las realizaciones del campo, dado por

$$\overline{x_k^2(t)} \equiv \overline{\left(x_k^{(l)}(t)\right)^2} = \sum_j \overline{\left|\tilde{x}_{jk}^{(l)}\right|^2 \left|a_{jk}^{(l)}\right|^2}. \quad (\text{H.10})$$

Análogamente, se tiene que el promedio temporal, para un lapso temporal lo suficientemente largo  $\tau$  [32], de la expresión para el cuadrado de la solución  $x_k^{(l)}(t)$  es

$$\left\langle \left(x_k^{(l)}(t)\right)^2 \right\rangle_{\tau} = \sum_j \left|\tilde{x}_{jk}^{(l)}\right|^2 \left|a_{jk}^{(l)}\right|^2. \quad (\text{H.11})$$

Es claro que al comparar las expresiones anteriores, en general, estas resultan diferentes. El promedio sobre las realizaciones del campo es, por construcción, independiente de dichas realizaciones ( $l$ ), mientras que el promedio temporal adquiere un valor distinto para cada realización. Esto significa que en general el sistema no es ergódico, ni siquiera en el caso unidimensional en el cual solo existe una integral de movimiento [32]. Sin embargo, ya que la partícula está en contacto permanente con el campo de punto cero, es de esperarse que este último alcance todos los puntos fase accesibles del sistema, es decir, que tenga un comportamiento ergódico [35]. Esta hipótesis es el punto esencial de la presente teoría [97]. El que el sistema sea ergódico conduce a que

$$\tilde{x}_{jk}^{(l)} = \tilde{x}_{jk}. \quad (\text{H.12})$$

Esta ecuación implica que tanto  $\omega_{jk}^{(l)}$  como  $\Delta_{jk}^{(l)}$  no pueden depender de los coeficientes  $a_{jk}^{(l)}$ , o equivalentemente de la realización característica del campo, debido a su conexión con  $\tilde{x}_{jk}$ , expuesta en la ecuación (H.6), siendo dichos coeficientes los responsables de las estocasticidad asociada a  $x(t)$ . En este sentido, la ecuación (H.9) representa un desarrollo explícito en términos de  $a_{jk}^{(l)}$ , es decir, la respuesta mecánica del sistema, a esta altura de

su evolución, es ya lineal en las componentes estocásticas del campo [35, 97]. Así, una vez que se ha alcanzado el régimen estacionario y ergódico, se cumple que

$$x_k^{(l)}(t) = -\frac{q_e}{m} \sum_j \frac{\tilde{E}_{jk}}{\Delta_{jk}} a_{jk}^{(l)} e^{-i\omega_{jk}t}, \quad (\text{H.13})$$

con  $\omega_{jk}$  y  $\Delta_{jk}$  ahora independientes de los coeficientes  $a_{jk}^{(l)}$ . El argumento anterior es la razón por la cual la teoría que emana como un resultado de la condición de ergodicidad es llamada Electrodinámica Estocástica Lineal o EDEL [35, 97].

El hecho de que  $\omega_{jk}$  sea independiente de las realizaciones de campo solo puede cumplirse si las amplitudes estocásticas y las frecuencias resonantes satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$a_{jk} = a_{jl} a_{ll'} a_{l'l''} \cdots a_{l^{(n)}k}; \quad (\text{H.14})$$

$$\omega_{jk} = \omega_{jl} + \omega_{ll'} + \omega_{l'l''} + \cdots + \omega_{l^{(n)}k}, \quad (\text{H.15})$$

[30, 35, 97]. Estos resultados sintetizan la denominada regla de la cadena en el presente contexto [97]. Adicionalmente, la ecuación (H.15) implica una relación de la siguiente forma

$$\omega_{jk} = \Omega_j - \Omega_k, \quad (\text{H.16})$$

[30, 35, 97], expresión que conduce a una equivalencia entre los índices  $k$ , asociado a un cierto estado estacionario y por ende a una cierta energía, y  $j$ , asociado a los modos de oscilación del campo, al correr sobre el mismo conjunto de valores. Lo anterior exhibe la estrecha relación existente entre la energía de la partícula y las frecuencias relevantes, la cual tiene como origen la ecuación (C.24),  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{A}\omega$ , satisfecha por todos y cada uno de los modos de oscilación del campo de radiación de punto cero [97].

Es notable que la regla de la cadena, ecuaciones (H.14) y (H.15), implica un álgebra matricial, es decir, representa una mecánica matricial [30, 35]. Al aplicar la regla de la cadena puede observarse, por ejemplo, que

$$\sum_j \mathcal{F}[x^3]_{jk} a_{jk} e^{-i\omega_{jk}t} = \sum_{j,l,n} \tilde{x}_{jl} \tilde{x}_{ln} \tilde{x}_{nk} a_{jl} a_{ln} a_{nk} e^{-i(\omega_{jl} + \omega_{ln} + \omega_{nk})t}, \quad (\text{H.17})$$

de tal modo que se describa la transformada de Fourier de  $x^3$  como

$$\mathcal{F}[x^3]_{jk} = \sum_{l,n} \tilde{x}_{jl} \tilde{x}_{ln} \tilde{x}_{nk}. \quad (\text{H.18})$$

La última expresión coincide con la regla de multiplicación matricial para las amplitudes  $\tilde{x}_{jk}$ ; esto permite identificar dicha cantidad como el elemento  $jk$ -ésimo de la matriz cuadrada  $\hat{\mathbf{x}}$  [97], denotada en adelante como  $\hat{\mathbf{x}}$ . Los resultados anteriores permiten describir la ecuación (H.1), en notación matricial compacta, como

$$m \frac{d^2 \hat{\mathbf{x}}(t)}{dt^2} = \hat{\mathbf{F}}(t) + m\tau \frac{d^3 \hat{\mathbf{x}}(t)}{dt^3} + q_e \hat{\mathbf{E}}(t). \quad (\text{H.19})$$

Es importante notar que la ecuación anterior representa mucho más que una simple rescritura de la ecuación de movimiento (H.1). La ecuación (H.19) ha perdido su naturaleza estocástica, sin que esto implique que deje de tener un carácter estadístico, a consecuencia de la condición de ergodicidad [35, 97], la cual implica, como se ya mencionó, que  $\tilde{x}_{jk}$ ,  $\tilde{F}_{jk}$  y  $\omega_{jk}$  sean independientes de las amplitudes estocásticas  $a_{jk}$ . La ecuación (H.19) es por tanto la ley matemática que describe la dinámica del subsistema mecánico en el régimen temporal asintótico, estacionario y ergódico. Aunado a esto, la ecuación matricial de movimiento obtenida resulta ser idéntica a la ecuación de Heisenberg de la electrodinámica cuántica no relativista. Por esto se afirma que el régimen adoptado a lo largo del desarrollo, temporal asintótico, estacionario y ergódico, corresponde al llamado régimen cuántico [30, 35, 97].

Al arribar el sistema al régimen cuántico, los términos en la ecuación de movimiento que involucran al campo eléctrico del CPC y a la reacción radiativa han jugado ya su papel fundamental al llevar a dicho sistema mecánico a un estado de equilibrio [35]. Por lo anterior, los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación (H.19) representan, en el régimen cuántico, únicamente correcciones radiativas al movimiento, y por tanto pueden ser despreciados en una primera aproximación. Esta aproximación corresponde a la aproximación no radiativa del sistema [97], hallándose, de la ecuación (H.19) que:

$$\hat{\mathbf{p}} = m \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt}, \quad \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = \hat{\mathbb{F}}. \quad (\text{H.20})$$

Las igualdades expuestas en la ecuación anterior pueden identificarse como las ecuaciones de Heisenberg para el movimiento de una partícula usuales de la mecánica cuántica. Sin embargo, estas ecuaciones han perdido toda referencia de la estocasticidad y del CPC, de tal forma que se vuelve importante reintroducir, al igual que en la deducción de la ecuación de Schrödinger, la información acerca de la intensidad de las fluctuaciones impresas por el campo en el subsistema mecánico [35]. Para esto, se recurre al conmutador canónico  $[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}]$ , cuyos elementos diagonales pueden expresarse, en términos de las ecuaciones (H.13) y (H.20), en el límite continuo como

$$[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}]_{jj} = \frac{2iq_e^2}{m} \int_0^\infty \frac{\tilde{E}(\omega)\tilde{E}^*(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2} \omega d\omega, \quad (\text{H.21})$$

[32, 35], donde al sustituir explícitamente el término  $\tilde{E}(\omega)\tilde{E}^*(\omega)$ , que corresponde a la contribución, en el límite continuo, de una componente cartesiana del campo a la densidad espectral de energía [32, 35, 89], ecuación (1.60),

$$\tilde{E}(\omega)\tilde{E}^*(\omega) = \frac{\Pi_0(\omega)}{4\pi\epsilon_0} = \frac{u_0(\omega)}{3\epsilon_0} = \frac{\mathcal{A}\omega^3}{3\pi^2\epsilon_0 c^3}, \quad (\text{H.22})$$

se obtiene, mediante un proceso de integración y aproximando  $\Delta(\omega) \approx \omega^2 - i\tau\omega^3 - \omega_r^2$  [32, 35], con  $\omega_r$  la frecuencia de resonancia del sistema, que

$$[\hat{x}, \hat{p}]_{jj} = \frac{4i\tau\mathcal{A}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^4}{|\Delta(\omega)|^2} d\omega = 2i\mathcal{A}. \quad (\text{H.23})$$

Bajo un proceso de deducción similar, puede mostrarse que los elementos de matriz no diagonales del conmutador canónico son nulos [35]. Al combinar los resultados anteriores y la ecuación (2.181), se tiene que el conmutador canónico es

$$[\hat{x}, \hat{p}] = 2i\mathcal{A}\hat{\mathbb{I}} = i\hbar\hat{\mathbb{I}}. \quad (\text{H.24})$$

Finalmente, con base en este resultado es posible obtener la ecuación de evolución del operador matricial asociado a una variable dinámica cualquiera  $A$  [32, 35, 97], la cual, al utilizar el valor explícito de la constante  $\mathcal{A} = \hbar/2$ , corresponde a la ecuación de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{\mathbb{H}}], \quad (\text{H.25})$$

donde  $\hat{\mathbb{H}}$  representa el operador hamiltoniano del sistema mecánico. Adicionalmente, el resultado de la ecuación (H.24) conduce a que la ecuación (H.16) se transforme en la regla de Bohr [32, 97], mostrando de esta forma que las frecuencias de transición corresponden a las resonancias en las respuestas del sistema atómico

$$\omega_{jk} = \frac{\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_k}{\hbar}. \quad (\text{H.26})$$

Las ecuaciones anteriores muestran que cuando el sistema mecánico es ergódico, este converge inequívocamente al régimen cuántico [32, 35, 97]. De forma alternativa, en el desarrollo hecho en el capítulo 2, se halló que cuando el sistema alcanza el balance energético, este converge de igual manera al régimen cuántico [32]. Ya que estos requisitos distintos convergen a resultados equivalentes, las descripciones de Heisenberg y Schrödinger, entonces estos deben estar íntimamente relacionados.

Así, es notable que cuando el régimen ergódico, no radiativo, es alcanzado, el balance energético se satisface, ya que las soluciones estacionarias se encuentran caracterizadas por una energía fija. Análogamente, cuando se tiene una órbita estacionaria, en presencia del CPC, se entiende que la partícula ha visitado todos los puntos fase disponibles en la superficie de energía constante del estado estacionario, dando origen, de esta forma, a un comportamiento ergódico [32]. Esto muestra de manera clara la equivalencia física, además de la matemática, entre las descripciones de la mecánica cuántica.

# Bibliografía

- [1] ABRAHAM, M. Die Grundhypothesen der Elektronentheorie. *Zeit. Phys.* **5** (1904), 576–579.
- [2] ARFKEN, G. B., WEBER, H. J., AND HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists. A Comprehensive Guide*, séptima ed. Academic Press, 2013.
- [3] ARONS, A. B., AND PEPPARD, M. B. Einstein’s Proposal of the Photon Concept: A Translation of the Annalen der Physik paper of 1905. *Am. J. Phys.* **33** (1965), 367–374.
- [4] BALLENTINE, L. E. *Quantum Mechanics. A Modern Development*. World Scientific, 1998.
- [5] BARTON, G. Temperature Dependence of the Lamb Shift. *Phys. Rev.* **A5** (1972), 468–470.
- [6] BELL, J. S. *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, segunda ed. Cambridge University Press, 2004.
- [7] BETHE, H. A. The Electromagnetic Shift of Energy Levels. *Phys. Rev.* **72** (1947), 339–341.
- [8] BOHM, D. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables I. *Phys. Rev.* **85** (1952), 166–179.
- [9] BOYER, T. H. Derivation of the Blackbody Radiation Spectrum without Quantum Assumptions. *Phys. Rev.* **182** (1969), 1374–1383.
- [10] BOYER, T. H. Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation. *Phys. Rev.* **D11** (1975), 790–808.
- [11] BOYER, T. H. *A Brief Survey of Stochastic Electrodynamics. Barut, A. O. Foundations of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics*. Springer Science+Business Media, 1980, pp. 49–63.

- [12] BOYER, T. H. Thermodynamics of the harmonic oscillator: Wien's displacement law and the Planck spectrum. *Am. J. Phys.* **71** (2003), 866–870.
- [13] CALLAHAN, J. J. *Advanced Calculus. A Geometric View*. Springer, 2010.
- [14] CETTO, A. M., AND DE LA PEÑA, L. Causal version of the Abraham-Lorentz equation for point particles. *Rev. Mex. Fís.* **29** (1983), 537–549.
- [15] CETTO, A. M., AND DE LA PEÑA, L. Radiative corrections for the matter-zero-point field system: establishing contact with quantum electrodynamics. *Phys. Scr.* **T151** (2012), 014009.
- [16] CETTO, A. M., DE LA PEÑA, L., AND VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. Quantization as an emergent phenomenon due to matter-zero-point field interaction. *J. Phys. JPCS* **361** (2012), 012013.
- [17] CETTO, A. M., DE LA PEÑA, L., AND VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. Atomic radiative corrections without QED: role of the zero-point field. *Rev. Mex. Fís.* **59** (2013), 433–443.
- [18] CETTO, A. M., DE LA PEÑA, L., AND VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. Specificity of the Schrödinger equation. *Quantum Stud.: Math. Found.* **2** (2015), 275–287.
- [19] COHEN-TANNOUJJI, C., DUPONT-ROC, J., AND GRYNBERG, G. *Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley-VCH, 1997.
- [20] COLE, D. C. Entropy and other thermodynamic properties of classical electromagnetic thermal radiation. *Phys. Rev.* **A42** (1990), 7006–7024.
- [21] COLE, D. C. Thermodynamics of Blackbody Radiation via Classical Physics for arbitrarily shaped cavities with perfectly Conducting Walls. *Found. Phys.* **30** (2000), 1849–1867.
- [22] COLE, D. C., AND ZOU, Y. Quantum mechanical ground state of hydrogen obtained from classical electrodynamics. *Phys. Lett.* **A317** (2003), 14–20.
- [23] DALIBARD, J., DUPONT-ROC, J., AND COHEN-TANNOUJJI, C. Vacuum fluctuations and radiation reaction: identification of their respective contributions. *J. Physique* **43** (1982), 1617–1638.
- [24] DAVYDOV, A. S. *Quantum Mechanics*, segunda ed. Pergamon Press, 1976.
- [25] DE LA PEÑA, L. *Introducción a la mecánica cuántica*, tercera ed. Fondo de Cultura Económica, 2006.

- [26] DE LA PEÑA, L., AND CETTO, A. M. Derivation of quantum mechanics from stochastic electrodynamics. *J. Math. Phys.* **16** (1977), 1612–1622.
- [27] DE LA PEÑA, L., AND CETTO, A. M. Teorías estocásticas de la mecánica cuántica. *Rev. Mex. Fís.* **37** (1991), 17–55.
- [28] DE LA PEÑA, L., AND CETTO, A. M. *The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics*. Springer International Publishing, 1996.
- [29] DE LA PEÑA, L., AND CETTO, A. M. Planck’s law as a consequence of the zeropoint radiation field. *Rev. Mex. Fís.* **48**, **S1** (2002), 1–8.
- [30] DE LA PEÑA, L., AND CETTO, A. M. The Foundations of Linear Stochastic Electrodynamics. *Found. Phys.* **36** (2006), 350–368.
- [31] DE LA PEÑA, L., CETTO, A. M., AND VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. Quantum behavior derived as an essentially stochastic phenomenon. *Phys. Scr.* **T151** (2012), 014008.
- [32] DE LA PEÑA, L., CETTO, A. M., AND VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. *The Emerging Quantum. The Physics Behind Quantum Mechanics*. Springer International Publishing, 2015.
- [33] DE LA PEÑA, L., CETTO, A. M., AND VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. Extended Ehrenfest theorem with radiative corrections. *Phys. Scr.* **T165** (2015), 014004.
- [34] DE LA PEÑA, L., VALDÉS-HERNÁNDEZ, A., AND CETTO, A. M. Statistical consequences of the zero-point energy of the harmonic oscillator. *Am. J. Phys.* **76** (2008), 947–955.
- [35] DE LA PEÑA, L., VALDÉS-HERNÁNDEZ, A., AND CETTO, A. M. Quantum Mechanics as an Emergent Property of Ergodic Systems Embedded in the Zero-point Radiation Field. *Found. Phys.* **39** (2009), 1240–1272.
- [36] DEBYE, P. Interferenz von Röntgenstrahlen und Wärmebewegung. *Ann. d. Phys.* **43** (1914), 49–92.
- [37] DIRAC, P. A. M. The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A114** (1927), 243–265.
- [38] DIRAC, P. A. M. Classical theory of radiating electrons. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A167** (1938), 148–169.
- [39] EINSTEIN, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Ann. d. Phys.* **17** (1905), 132–148.



- [40] EINSTEIN, A. Strahlungs-Emission und -Absorption nach der Quantentheorie. *Verhandl. Deutsch. Phys. Ges.* **18** (1916), 318–323.
- [41] EINSTEIN, A. Zur Quantentheorie der Strahlung. *Zeit. Phys.* **18** (1917), 121–128.
- [42] EINSTEIN, A., AND HOPF, L. Statistische Untersuchung der Bewegung eines Resonators in einem Strahlungsfeld. *Ann. d. Phys.* **33** (1910), 1105–1115.
- [43] EINSTEIN, A., AND HOPF, L. Über einem Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung in der Strahlungstheorie. *Ann. d. Phys.* **33** (1910), 1096–1104.
- [44] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., AND ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* **47** (1935), 777–780.
- [45] EINSTEIN, A., AND STERN, O. Einige Argumente für die Annahme einer molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt. *Ann. d. Phys.* **40** (1913), 551–560.
- [46] FEYNMAN, R. P. *The Present Status of Quantum Electrodynamics*. Stoops, R. *The Quantum Theory of Fields*. Wiley Interscience, 1961, pp. 61–91.
- [47] FEYNMAN, R. P., HIBBS, A. R., AND STYER, D. F. *Quantum Mechanics and Path Integrals*, emended ed. Dover Publications, 2010.
- [48] FUJITA, S., AND GODOY, S. V. *Mathematical Physics*. Wiley-VCH, 2010.
- [49] GARCÍA-COLÍN, L. *La Naturaleza Estadística de la Teoría de los Cuantos*, segunda ed. El Colegio Nacional, 2004.
- [50] GARCÍA-COLÍN, L. *Introducción a la Física Estadística*. El Colegio Nacional, 2005.
- [51] GINZBURG, V. L. The nature of spontaneous radiation. *Sov. Phys. Usp.* **26** (1983), 713–719.
- [52] GOLDSTEIN, H., POOLE, C., AND SAFKO, J. *Classical Mechanics*, tercera ed. Pearson Addison Wesley, 2001.
- [53] GOY, P., RAIMOND, J. M., GROSS, M., AND HAROCHE, S. Observation of Cavity-Enhanced Single-Atom Spontaneous Emission. *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983), 1903–1906.
- [54] GROEN, O. Repulsive gravitation and inflationary universe models. *Am. J. Phys.* **54** (1986), 46–52.
- [55] HILLERY, M., O’CONNELL, R. F., SCULLY, M. O., AND WIGNER, E. P. Distribution functions in physics: fundamentals. *Phys. Rep.* **106** (1984), 121–167.

- [56] HOLLBERG, L., AND HALL, J. L. Measurement of the Shift of Rydberg Energy Levels Induced by Blackbody Radiation. *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984), 230–233.
- [57] HUANG, K. *Statistical Mechanics*, segunda ed. John Wiley & Sons, 1987.
- [58] IVANENKO, D. D., AND SOKOLOV, A. A. *Klassicheskaya Teoriya Polya*, segunda ed. Gostekhizdat Moskva, 1949.
- [59] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*, tercera ed. John Wiley & Sons, 1998.
- [60] JEANS, J. H. XI. On the partition of energy between matter and Æther. *Phil. Mag.* **10** (1905), 91–98.
- [61] JIMÉNEZ, J. L., DE LA PEÑA, L., AND BRODY, T. A. Zero-point term in cavity radiation. *Am. J. Phys.* **48** (1980), 840–846.
- [62] KLEPPNER, D. Inhibited Spontaneous Emission. *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981), 233–236.
- [63] KNIGHT, P. L. Effects of external fields on the Lamb shift. *J. Phys.* **A5** (1972), 417–425.
- [64] KRAGH, H. Preludes to dark energy: zero-point energy and vacuum speculations. *Arch. Hist. Exact. Sci.* **66** (2012), 199–240.
- [65] KRAMERS, H. A. Fundamental difficulties of a theory of particles. *Ned. T. Natuurk.* **11** (1944), 134–140.
- [66] LAMB, W. W. J., AND RETHERFORD, R. C. Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method. *Phys. Rev.* **72** (1947), 241–243.
- [67] LAMB, W. W. J., AND RETHERFORD, R. C. Fine Structure of the Hydrogen Atom. IV. *Phys. Rev.* **86** (1952), 1014–1022.
- [68] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Mecánica de Fluidos. Volumen 6 del Curso de Física Teórica*, segunda ed. Reverté, 1985.
- [69] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Mecánica. Volumen 1 del Curso de Física Teórica*, segunda ed. Reverté, 1994.
- [70] LEWIS, G. N. The Conservation of Photons. *Nature* **118** (1926), 874–875.
- [71] LORENTZ, H. A. *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*. Dover Publications, 2003.
- [72] MADELUNG, E. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Zeit. Phys.* **40** (1927), 322–326.

- [73] MARSHALL, T. W. Random Electrodynamics. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A276** (1963), 475–491.
- [74] MARSHALL, T. W. A Classical Treatment of Blackbody Radiation. *Nuovo Cim.* **38** (1965), 206–215.
- [75] MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*, tercera ed. John Wiley & Sons, 1998.
- [76] MILONNI, P. W. Why spontaneous emission? *Am. J. Phys.* **52** (1984), 340–343.
- [77] MILONNI, P. W. *The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Academic Press, 1993.
- [78] MONIZ, E. J., AND SHARP, D. H. Absence of runaway and divergent self-mass in nonrelativistic quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* **D10** (1974), 1133–1136.
- [79] MONIZ, E. J., AND SHARP, D. H. Radiation reaction in nonrelativistic quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* **D15** (1977), 2850–2865.
- [80] MULLIKEN, R. S. The Band Spectrum of Boron Monoxide. *Nature* **114** (1924), 349–350.
- [81] NIEUWENHUIZEN, T. M., AND LISKA, M. T. P. Simulation of the hydrogen ground state in stochastic electrodynamics. *Phys. Scr.* **T165** (2015), 014006.
- [82] PAPOULIS, A., AND UNNIKRIISHNA PILLAI, S. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, cuarta ed. McGraw-Hill, 2002.
- [83] PAWULA, R. F. Approximation of the Linear Boltzmann Equation by the Fokker-Planck Equation. *Phys. Rev.* **162** (1967), 186–188.
- [84] PLANCK, M. Üeber die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung. *Ann. d. Phys.* **37** (1912), 642–656.
- [85] POWER, E. A. Zero-Point Energy and the Lamb Shift. *Am. J. Phys.* **34** (1966), 516–518.
- [86] PURCELL, E. M. B10. Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies. *Phys. Rev.* **69** (1946), 681.
- [87] REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. Waveland Press, 2009.
- [88] REITZ, J. R., AND MILFORD, F. J. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, 1969.
- [89] RISKEN, H. *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*, segunda ed. Springer-Verlag, 1989.

- [90] ROHRLICH, F. *Classical Charged Particles*, tercera ed. World Scientific, 2007.
- [91] SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1967.
- [92] SALEH, B. E. A., AND TEICH, M. C. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, 1991.
- [93] SALSA, S. *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*. Springer, 2008.
- [94] SCHIFF, L. I. *Quantum Mechanics*, tercera ed. McGraw-Hill, 1968.
- [95] SCHWABL, F. *Quantum Mechanics*, cuarta ed. Springer, 2007.
- [96] SERWAY, R. A., MOSES, C. J., AND MOYER, C. A. *Física Moderna*, tercera ed. Cengage Learning, 2006.
- [97] VALDÉS-HERNÁNDEZ, A. *Investigación del origen del enredamiento cuántico desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica Lineal*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2010.
- [98] WAGNIÈRE, G. The evaluation of three-dimensional rotational averages. *J. Chem. Phys.* **76** (1982), 473–480.
- [99] WELTON, T. A. Some Observable Effects of the Quantum-Mechanical Fluctuations of the Electromagnetic Field. *Phys. Rev.* **74** (1948), 1157–1167.
- [100] ZEL'DOVICH, Y. B. Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology. *Sov. Phys. Usp.* **24** (1981), 216–230.