Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Construcciones de espacios clasificantes

T E S I S

que para obtener el título de:

matemático

P R E S E N T A:

Jerónimo García Mejía

Tutor:

Dr. Carlos Prieto de Castro

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

A mis padres, Icela y Victor.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer en primera instancia a mi tutor el Dr. Carlos Prieto de Castro pues fue él quien me introdujo en este basto campo de la Topología algebraica. Agradezco también su apoyo y paciencia que estuvieron presentes durante esta etapa.

Agradezco a quienes con la intención o sin ella contribuyeron en la elaboración de este trabajo. Ustedes, sus palabras de aliento y de crítica bien intencionada, su compañía, amistad y confianza, fueron y siguen siendo una parte importante de quien soy y lo que hago.

Finalmente agradezco el apoyo y los comentarios de mis sinodales el Dr. Marcelo Aguilar, el Dr. Omar Antolín, el Dr. José Luis Cisneros y el Dr. Vinicio Gómez.

Índice general

Introducción

Supongamos que tenemos una función $p\colon E \to B$. La intuición común, nos dice Jänich [Jä84], es pensarla como una transformación de E, cada elemento suyo va a dar bajo p a un elemento de B.

Una perspectiva alternativa para ver a una función es invirtiendo los papeles, en lugar de concentrarnos en E nos enfocamos en B: la función $p\colon E \to B$ puede pensarse como una familia de subconjuntos de E, uno por cada elemento de B. Sin embargo la colección no puede ser arbitraria, ésta tiene que estar determinada por p: $\{E_x \subset E\}_{x \in B}$ donde $E_x = p^{-1}(x)$. Notemos que bajo esta idea al tener B y una vez nombrada la familia de subconjuntos la presencia de p se desvanece y no es necesario hacer mención de p, pues cada miembro de la familia ya tiene una etiqueta correspondiente al punto de B. En pocas palabras, la familia de subconjuntos está parametrizada por B.

Decidirse por un punto de vista o el otro desde luego depende de lo que se quiera estudiar y para qué se considera la función. El concepto de *haz fibrado* adopta el segundo punto de vista. Consideramos que la definición aquí sugerida es fiel a esta visión.

El trabajo inicia con una descripción detallada de la categoría de k-espacios en la cual se desarrolla todo el trabajo. Dicha categoría tiene grandes beneficios para trabajar cuestiones homotópicas y se comporta muy bien bajo cocientes. Se exponen sus ventajas, se mencionan ejemplos y se muestra que la mayoría de las construcciones básicas de topología están dentro de esta categoría, además se muestran las modificaciones necesarias para aquellas que no caen dentro.

En la segunda parte se desarrollan los conceptos básicos de la teoría de haces fibrados. La definición que se da es la propuesta por A. Dold, la cual difiere ligeramente de la que se encuentra en la literatura, pero que destaca los elementos fundamentales y permite distinguir claramente entre haces fibrados y fibraciones localmente triviales.

En la tercera parte se prueba el teorema de clasificación homotópica de los haces fibrados. Para la prueba de este resultado demostramos dos resultados importantes por sí mismos, tales como el teorema de extensión de secciones y el teorema de levantamiento de homotopías para haces. Por otro lado, la prueba supone la existencia de un cierto haz fibrado llamado haz universal cuyo espacio base es llamado espacio clasificante. En el último capítulo mostramos con detalle la existencia de este objeto usando la construcción de Milnor. Esta construcción funtorial funciona para cualquier grupo topológico sin necesidad de restringirnos a la categoría $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En este capítulo describiremos la categoría de k-espacios la cual usaremos a lo largo del trabajo. Posteriormente mencionaremos algunos ejemplos y y resaltaremos las cualidades que la vuelven una categoría adecuada para las construcciones en topología algebraica y teoría de homotopía. La exposición de los temas sigue fielmente el desarrollo en [AP10b], así como en [Vog71], en donde se da una comparación entre ésta y otras categorías conocidas.

1.1. k-espacios. Una categoría conveniente

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico, definimos al espacio $k(X)$ como el mismo conjunto subyacente de X pero con una topología distinta, en particular más fina, definida como:

$A \subseteq X$ es cerrado en $k(X)$ si y sólo si para todo espacio K compacto de Hausdorff y toda aplicación $\alpha : K \to X$, sucede que $\alpha^{-1}(A) \subseteq K$ es cerrado.

A los cerrados en $k(X)$ los llamamos k-*cerrados* y a la topología de $k(X)$ la llamamos k-*topología*. Diremos que el espacio es un k-*espacio* si todos los k-cerrados son cerrados.

Claramente todo cerrado A en X, también lo es en $k(X)$, es decir, la k-topología asociada a un espacio topológico X, es más fina que la original, de modo que la aplicación $\mathrm{id}_X^k : k(X) \to X$ es continua. Denotaremos por $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$ a la categoría cuyos objetos son los k-espacios y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas entre ellos.

La definición anterior puede formularse como sigue: un espacio topológico X es un k-espacio si su topología es final respecto a todas las aplicaciones continuas $K \to X$ para todo K compacto de Hausdorff.

Para una discusión alternativa sobre los k-espacios se puede revisar [Bro06].

Ejemplo(s) 1.2. Los siguientes son ejemplos de k-espacios:

1. Los espacios compactamente generados de Hausdorff, ver [Ste67]. Se dice que X es compactamente generado de Hausdorff si es Hausdorff y los cerrados son precisamente aquellos cuya intersección con cualquier compacto de X es cerrada. Sea X compactamente generado de Hausdorff y $A \subset X$ tal que para cualquier $K \subset X$ compacto de Hausdorff y para toda aplicación $\alpha : K \to X$ continua, $\alpha^{-1}(A) \subset K$ es cerrado. Por lo que para $C \subset X$ compacto (de Hausdorff) y la aplicación continua $i : C \hookrightarrow X$ se tiene que $i^{-1}(A) = A \cap C$ es cerrado en C, por lo que A es cerrado en la topología de espacios compactamente generados de Hausdorff.

2. En particular, los espacios localmente compactos de Hausdorff y los espacios compactos de Hausdorff son k-espacios.

3. Los espacios de Hausdorff 1-numerables.

4. Los complejos CW.

Proposición 1.3. *La asignación $X \mapsto k(X)$ determina un funtor covariante*

$$k : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{K}\text{-}\mathfrak{Top}.$$

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua, denotemos por $k(f) : k(X) \to k(Y)$ a la misma función de conjuntos. Veamos que es continua. Sea A un k-cerraro en Y, debemos probar que $f^{-1}(A)$ es k-cerrado en X. Esto es claro, pues dada una aplicación $\alpha : K \to X$, con K un compacto de Hausdorff, tenemos que $\alpha^{-1}(f^{-1}(A)) = (f \circ \alpha)^{-1}(A)$, que es cerrado en K pues A es k-cerrado en Y. $\square$

Si X es un k-espacio y $A \subset X$, en general, la topología relativa usual de A en X no es una k-topología.

Definición 1.4. Definimos la k-*topología relativa* de A como la topología de $k(A)$ asociada a la topología relativa usual de A. El subconjunto A junto con esta topología es llamado k-*subespacio* de X. Por simplicidad lo llamaremos simplemente subespacio y lo denotaremos por A. Notemos que si X es un k-espacio y $A \subset X$ es cerrado o abierto, entonces A con la topología relativa usual es un k-espacio.

Proposición 1.5. *Sea X un k-espacio y $A \subset X$ k-subespacio. La aplicación inclusión $i : A \hookrightarrow X$ tiene la siguiente propiedad universal:*

- *i es continua.*
- *Si Y es un k-espacio, entonces una aplicación $f : Y \to A$ es continua si y sólo si la composición $i \circ f : Y \to X$ es continua.*

Podemos expresar la propiedad en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] & X \\ Y \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "i \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow i \circ f \text{ es continua.}$$

Demostración. Sea $B \subset X$ k-cerrado. Para cualquier espacio compacto de Hausdorff K y para toda aplicación continua $\alpha : K \to X$, tenemos que $\alpha^{-1}(i^{-1}(B)) = \alpha^{-1}(B \cap A)$ es cerrado en K, pues ambos son k-cerrados, por lo tanto $i^{-1}(B)$ es k-cerrado de $k(A)$. Si $f : Y \to A$ es continua, entonces la composición $i \circ f : Y \to X$ es claramente continua. Inversamente, si $i \circ f : Y \to X$ es continua, tenemos que para todo $B \subset A$ cerrado, $(i \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap A) = f^{-1}(B)$ es cerrado en Y. Por lo tanto f es continua. $\square$

La siguiente propiedad resume algunas de las propiedades ya mencionadas y agrega otras

Proposición 1.6. *1. La construcción $k(X)$ tiene la siguiente propiedad universal que la caracteriza:*

a) *La aplicación $\mathrm{id}_X^k : k(X) \to X$ es continua*

b) *Si Y es un k-espacio, entonces $f : Y \to X$ es una aplicación continua si y sólo si $f : Y \to k(X)$ es continua.*

Esta propiedad la podemos ilustrar con la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & k(X) \arrow[d, "\mathrm{id}_X^k"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

2. *Para cualquier espacio compacto de Hausdorff K, existe una correspondencia biyectiva entre aplicaciones continuas $K \to X$ y aplicaciones continuas $K \to k(X)$.*

3. $k(K) = K$.

4. *El funtor k es idempotente, es decir $k(k(X)) = k(X)$ para cualquier espacio X.*

5. *Si X es un k-espacio y Y es un espacio topológico arbitrario, entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si, para cualquier compacto de Hausdorff K y para toda aplicación continua $\alpha : K \to X$, la composición $f \circ \alpha : K \to Y$ es continua.*

Demostración. 1: $1a$ ya lo demostramos. La necesidad de $1b$ es inmediata, mientras que para la suficiencia sea $A \subset k(X)$, tenemos que $f^{-1}(A) = f^{-1}((\mathrm{id}_x^k)^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$ que es cerrado en Y.

2: Es una consecuencia directa de la propiedad universal.

3: Si K es compacto Hausdorff y A es un cerrado de $k(X)$, en particular tenemos que para $\mathrm{id}_K : K \to K$ que $A = \mathrm{id}_K^{-1}(A) \subset K$ debe ser cerrado en K.

4: Se sigue directamente de la definición y de 1.

5: Claramente si $f : X \to Y$ es continua, entonces la composición $f \circ \alpha : K \to Y$ es continua. Inversamente, si $A \subset Y$ es abierto, para cualquier compacto de Hausdorff K y para toda aplicación continua $\alpha : K \to X$, $\alpha^{-1}(f^{-1}(A))$ es cerrado en K. Es decir, $f^{-1}(A)$ es k-cerrado y como X es k-espacio, entonces es cerrado. Por lo tanto f es continua. $\square$

Proposición 1.7. *Sean X^n k-espacios, $n \in \mathbb{N}$, y $X = \cup_{n=0}^{\infty} X^n$ con la topología de la unión ($A \subset X$ es cerrado en X si y sólo si $A \cap X^n$ es cerrado en X^n para toda n) es un k-espacio.*

Demostración. Para ver que todo k-cerrado es cerrado en la unión, basta considerar las aplicaciones $i_n \circ \alpha : K \to X^n \hookrightarrow X$, donde i_n es la inclusión correspondiente y α una aplicación continua de un compacto de Hausdorff K. $\square$

Como mencionamos al inicio de la sección, una característica que distingue a $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$ de la categoría de espacios compactamente generados de Hausdorff es que es cerrada bajo identificaciones:

Teorema 1.8. *Sean X un k-espacio, Y un espacio topológico y $q : X \to Y$ una identificación. Entonces, Y es un k-espacio.*

Demostración. Ya notamos que todo cerrado es k-cerrado. Por lo que resta ver que los k-cerrados de Y son precisamente los cerrados bajo la topología de identificación. Sea $A \subset Y$ tal que para cualquier espacio compacto y Hausdorff K y para toda aplicación continua $\alpha : K \to Y$, $\alpha^{-1}(A)$ es cerrado en K. En particular podemos tomar $\alpha := q \circ \beta$, con $\beta : K \to X$ continua. De modo que $(\beta)^{-1}(q^{-1}(A))$ es cerrado en K, entonces $q^{-1}(A)$ es cerrado en X. Por lo tanto A es cerrado en Y como queríamos ver. $\square$

En general, dados dos k-espacios arbitrarios X y Y su producto topológico usual $X \times_{\text{Top}} Y$ no necesariamente es un k-espacio. Por ejemplo, los espacios $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son k-espacios, sin embargo el producto topológico $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no lo es, ver [Bro06]. Para salvar esto es posible modificar la noción de producto para permanecer en la categoría de k-espacios. Sean X y Y k-espacios, definimos el k-producto como

$$X \times Y = k(X \times_{\text{Top}} Y).$$

Para el caso infinito la definición es la misma. Para ver que esto es en efecto un producto en $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$ tenemos que ver que satisface la propiedad universal, la cual resulta ser una consecuencia de la definición y de 1.6.

Proposición 1.9. *Para cualquier familia de k-espacios $\{ X_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ el k-producto $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, junto con las proyecciones $\pi_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ es tal que:*

1. *Las proyecciones son continuas.*

2. *Para cualquier k-espacio Y y toda familia de aplicaciones continuas $\{ f_\lambda : Y \to X_\lambda \}$ existe una única aplicación $f : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tal que $\pi_\lambda \circ f = f_\lambda$.*

$$\begin{tikzcd}
& \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\
Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\lambda"'] & X_\lambda
\end{tikzcd}$$

Otra construcción que puede no ser un k-espacio es la del espacio de aplicaciones continuas entre espacios topológicos: dados X y Y espacios topológicos, denotamos por $\mathfrak{Top}(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones continuas $f : X \to Y$. Este conjunto es un espacio topológico vía la topología compacto-abierta que tiene como subbase a los conjuntos $(C,U) = \{\, f \in \mathfrak{Top}(X,Y) : f(C \subset U \,\}$, donde $C \subset X$ es compacto y $U \subset Y$ es abierto. Denotamos por $\mathfrak{Top}_{co}(X,Y)$ al espacio topológico resultante. A priori, aún cuando X y Y son k-espacios, $\mathfrak{Top}_{co}(X,Y)$ no tiene por qué ser k-espacio. Al igual que con el producto existe una manera de garantizar que sí lo sea.

Definición 1.10. Sean X y Y k-espacios. Definimos el k-*espacio de aplicaciones* como

$$M(X,Y) = k(\mathfrak{Top}_{co}(X,Y)).$$

El hecho de que el producto de identificaciones sea nuevamente una identificación descansa en que la aplicación

$$\begin{aligned} \Theta : \mathfrak{K}\text{-}\mathfrak{Top}(X \times Y, Z) &\to \mathfrak{K}\text{-}\mathfrak{Top}(X, M(Y,Z)) \\ f &\mapsto \widehat{f}, \end{aligned}$$

es una biyección, donde $\widehat{f}(x)(y) = f(x,y)$ se conoce como la adjunta de f. Para esto es necesario que la aplicación evaluación $e_{X,Y} : \mathfrak{Top}_{co}(X,Y) \times Y \to X$ sea continua. Notemos que si la aplicación evaluación $e_{X,Y} : \mathfrak{Top}_{co}(X,Y) \times Y \to X$ es continua, entonces tenemos que f es continua si y sólo si $\widehat{f}$ lo es, pues en dicha situación podemos factorizar f vía la evaluación, a esto se le conoce como propiedad universal de la evaluación (en la categoría $\mathfrak{Top}$).

En $\mathfrak{Top}$ tenemos la continuidad de la evaluación si X es localmente compacto de Hausdorff, ver [APG12, p. 3]. Para la categoría $\mathfrak{K}\text{-}\mathfrak{Top}$ la situación es mucho mejor.

Lema 1.11. *Sean Y un k-espacio y Z un espacio arbitrario. Entonces, la aplicación evaluación*

$$e_{Y,Z} : M(Y,Z) \times Y \to Z,$$

dada por $e_{Y,Z}(f,y) = f(y)$, es continua.

Demostración. Por 1.6 basta ver que para cualquier compacto de Hausdorff K y para toda aplicación continua $\alpha \colon K \to M(Y,Z) \times Y$, la composición $e_{Y,Z} \circ \alpha$ es continua. Para esto consideremos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ y el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & M(Y,Z) \times Y \arrow[rr, "e_{Y,Z}"] & & Z \\
K \times K \arrow[r, "\alpha_1 \times \mathrm{id}_K"'] & M(Y,Z) \times K \arrow[u, "\mathrm{id} \times \alpha_2"'] \arrow[r, "\alpha_2^* \times \mathrm{id}_K"'] & M(K,Z) \times K \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathfrak{Top}_{co}(K,Z) \times K, \arrow[u, "e_{(K,Z)}"']
\end{tikzcd}$$

donde δ es la aplicación diagonal que manda c en (c,c), α_2^* es precomponer con α_2 e $\mathrm{id} \colon M(K,Z) \times K \to \mathfrak{Top}_{co}(K,Z) \times K$ es simplemente la abreviación de $\mathrm{id}^k_{\mathfrak{Top}_{co}(K,Z)\times K}$, con $k(\mathfrak{Top}_{co}(K,Z) \times_{\mathrm{Top}} K) = M(K,Z) \times K$. $e_{Y,Z} \circ \alpha$ resulta continua, pues es la composición de las funciones mencionadas: la aplicación diagonal y la identidad son claramente continuas, mientras que la continuidad de la precomposición es consecuencia de verla como la composición

$$\begin{aligned}
\alpha_2 \colon M(Y,Z) &\longrightarrow M(Y,Z) \times \{\alpha_2\} \longrightarrow M(K,Z) \\
\beta &\longmapsto (\beta, \alpha_2) \longmapsto \beta \circ \alpha_2,
\end{aligned}$$

donde la primer aplicación es claramente continua, mientras que la segunda lo es ya que si C es un compacto de K y U un abierto de Z tales que $\beta \circ \alpha_2 \in (C,U)$, entonces el abierto subbásico $(\alpha_2(C), U) \times (C, \beta^{-1}(U))$ va a dar a (C,U) bajo dicha aplicación. $\square$

Antes de establecer la propiedad universal de la evaluación en $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$ enunciemos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 1.12. *Sean X y Y k-espacio y Z un espacio arbitrario. Si $f : X \times Y \to Z$ es continua, entonces la aplicación adjunta $\widehat{f} : X \to M(Y,Z)$, dada por $\widehat{f}(x)(y) = f(x,y)$, es continua.*

Demostración. Dado que X es un k-espacio basta que veamos que para cualquier K compacto de Hausdorff y cualquier aplicación continua $\alpha\colon K \to X$, la composición $\widehat{f} \circ \alpha$ es continua. Tenemos que la composición $f \circ (\alpha \times \mathrm{id}_Y)\colon K \times Y \to Z$ es continua, de modo que $f \circ (\alpha \times \mathrm{id}_Y)\colon K \times_{\mathrm{Top}} Y \to Z$ es continua. Entonces, por ser K compacto de Hausdorff tenemos que se factoriza vía la evaluación y tenemos que la aplicación adjunta $f \circ \widehat{(\alpha \times \mathrm{id}_Y)}\colon K \to \mathfrak{Top}_{co}(Y, Z)$ es continua. Finalmente, del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f\circ\widehat{(\alpha\times\mathrm{id}_Y)}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathfrak{Top}_{co}(Y,Z) \\
X \arrow[r, "\widehat{f}"'] & M(Y,Z), \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

y de la proposición 1 obtenemos lo deseado. □

Como consecuencia de 1.11 y de 1.12, tenemos la propiedad universal de la evaluación en $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$:

Proposición 1.13. *Sean X y Y k-espacios y Z un espacio arbitrario. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\widehat{f}\times\mathrm{id}_Y"'] & & Z \\
& M(Y,Z) \times Y. \arrow[ur, "e_{(Y,Z)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces f es continua si y sólo si $\widehat{f}$ es continua.

Con los resultados anteriores obtenemos la siguiente proposición que será clave para la demostración de 1.16.

Proposición 1.14. *Sean X y Y k-espacios y Z un espacio arbitrario. La asignación $f \mapsto \widehat{f}$ induce una biyección*

$$\Theta : \mathfrak{K}\text{-}\mathfrak{Top}(X \times Y, Z) \to \mathfrak{K}\text{-}\mathfrak{Top}(X, M(Y, Z)).$$

Demostración. Dada $f : X \times Y \to Z$ continua, por 1.12, $\Theta(f) = \widehat{f}$ es continua. Inversamente, si $\widehat{f} : X \to M(Y, Z)$ es continua, entonces $f : X \times Y \to Z$ definida como $f = e_{(Y,Z)} \circ (\widehat{f} \times \mathrm{id}_Y)$ es continua, ya que la evaluación es continua por 1.11. □

Si en la proposición anterior consideramos solamente objetos en $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$ podemos decir más sobre dicha biyección:

Corolario 1.15. *Sean X, Y y Z k-espacios. Entonces*

$$\Theta : M(X, M(Y, Z)) \to M(X \times Y, Z)$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Esto es resultado de la propiedad universal de las evaluaciones involucradas en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M(X, M(Y,Z)) \times X \times Y \arrow[r, "e_1 \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\Theta \times \mathrm{id}"'] & M(Y,Z) \times Y \arrow[d, "e_2"] \\
M(X \times Y, Z) \times X \times Y \arrow[ur, "\widehat{e_3} \times \mathrm{id}"] \arrow[r, "e_3"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

La continuidad de Θ está garantizada por la propiedad universal de la evaluación e_3, ya que la primera hace conmutar el cuadrado. El triángulo inferior conmuta por la propiedad universal de e_2, en particular la diagonal es continua. Por lo que la propiedad universal de e_2 garantiza que $(\widehat{e_3} \circ (\Theta \times \mathrm{id}) = e_1$.

Por otro lado, la inversa de Θ es la adjunta de $\widehat{e_3}$:

$$\Psi : M(X \times Y, Z) \to M(X, M(Y, Z)),$$

la cual, por la propiedad universal de e_3, es continua y $e_1 \circ (\Psi \times \mathrm{id}) = \widehat{e_3}$. □

Finalmente podemos enunciar el resultado que hace de $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$ una categoría conveniente para el desarrollo del trabajo.

Teorema 1.16. *Sean X, Z k-espacios y $p : X \to Y$ una identificación. Entonces,*

$$p \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$$

es una identificación.

Demostración. Notemos que Y también es un k-espacio, por 1.8. Además, al ser p e id_Z continuas, su producto también lo es. Para ver que $p \times \mathrm{id}_Z$ es una identificación basta ver que cumple la propiedad universal. Es decir dada g : $Y \times Z \to W$, con W un k-espacio arbitrario, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \times Z \arrow[r, "g\circ(p\times \mathrm{id}_Z)"] \arrow[d, "p\times \mathrm{id}_Z"'] & W \\
Y \times Z, \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Dicho de otra forma $g \circ (p \times \mathrm{id}_Z)$ es continua si y sólo si g lo es. Basta probar que si $g \circ (p \times \mathrm{id}_Z)$ es continua, entonces g es continua.

Consideremos las siguientes biyecciones, ver 1.14,

$$\Theta : M(X \times Z, W) \to M(X, M(Z, W))$$

y su análoga

$$\Theta' : M(Y \times Z, W) \to M(Y, M(Z, W)).$$

Como la composición $g \circ (p \times \mathrm{id}_Z)$ es continua, tenemos que $\Theta(g \circ (p \times \mathrm{id}_Z)$ es continua. Además

$$\Theta(g \circ (p \times \mathrm{id}_Z))(x)(z) = g \circ (p \times \mathrm{id}_Z)(x, z) = g(p(x), z) = \Theta'(g)(p(x))(z)$$

para todos $x \in X$ y $z \in Z$. Por lo que $\Theta(g \circ (p \times \mathrm{id}_Z)) = \Theta'(g) \circ p$. De donde concluimos que $\Theta'(g)$ es continua ya que p es identificación. Más aún, por ser biyección g es continua. Por lo tanto, $p \times \mathrm{id}_Z$ es identificación. $\square$

En general, el resultado de la proposición anterior no siempre es válido. Por ejemplo, si consideramos la identificación $q : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, entonces el producto $q \times \mathrm{id} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$ no es una identificación. Los detalles pueden consultarse en [Bro06, p. 111].

Nota 1.17. A partir de ahora cuando hagamos referencia a espacios o espacios topológicos, nos estaremos refiriendo a los k-espacios, al igual que con los cerrados o abiertos. Las construcciones de espacios topológicos se asumirán dentro de esta categoría. Para una discusión alternativa sobre los k-espacios se puede revisar [Bro06].

1.2. Homotopía

Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que una aplicación

$$H : X \times I \to Y$$

es una homotopía de X en Y. Si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones, diremos que son homotópicas si existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ tal que

$$H(x, 0) = f(x) \text{ y } H(x, 1) = g(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Donde $I = [0, 1]$, con la topología heredada por $\mathbb{R}$. En este caso diremos que la homotopía H empieza en f y termina en g y lo denotaremos como $H : f \simeq g$.

Nota 1.18. Por 1.13 es equivalente tener una homotopía $H : X \times I \to Y$ a tener una aplicación $\omega : I \to M(X, Y)$. Esto nos permite pensar geométricamente a H como una familia de aplicaciones parametrizadas por $t \in I$, $\{ H_t := \omega(t) \}_{t \in I}$.

El concepto de homotopía entre funciones nos permite generalizar el concepto de *conectable por trayectorias*. Al igual que antes, la relación $f \simeq g$ es una relación de equivalencia. Al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $X \to Y$, lo denotaremos por $[X, Y]$. Si, X y Y con espacios basados, denotaremos por $[X, Y]_*$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones punteadas.

Decimos que dos espacios X y Y tienen el mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Un espacio X es contraíble si existe una homotopía entre $\mathrm{id}_X : X \to X$ y la aplicación constante $c_{x_0} : X \to X$, es decir si la aplicación identidad es nulhomotópica. Es decir, si X tiene el mismo tipo de homotopía que $\{*\}$.

1.3. Fibraciones

Definición 1.19. Decimos que una aplicación $p : E \to X$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopías (PLH) o que es una *fibración de Hurewicz* si para todo espacio Y y cualquier diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & X, \end{tikzcd}$$

$$p \circ f = H \circ j_0,$$

existe $\widetilde{H} : Y \times I \to E$ que hace conmutar los triángulos.

Con esto surge la interrogante de bajo qué condiciones un fibrado localmente trivial es una fibración de Hurewicz. Esto sucede, en particular, si el espacio base tiene una cubierta con ciertas propiedades, i.e. si es numérica (ver 3.9).

1.4. Grupos topológicos

Definición 1.20. Un *grupo topológico* G es un conjunto provisto de una estructura de grupo y de una topología tal que la multiplicación del grupo

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

y la involución

$$\begin{aligned} \iota : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

son funciones continuas.

Nota 1.21. De manera análoga, podemos definir un monoide topológico, como un monoide que a su vez es un espacio topológico tal que la multiplicación es continua. Por otro lado, si el grupo es abeliano, decimos que el grupo topológico es abeliano.

Definición 1.22. Una acción izquierda de un grupo G en un espacio X es una aplicación continua

$$\lambda : G \times X \to X$$

tal que para todos $x, y \in X$, para todos $g, h \in G$ y el neutro $e \in G$:

- $\lambda(g, \lambda(h, x)) = \rho(gh, x)$.
- $\lambda(e, x) = x$.

En este caso decimos que G actúa (por la izquierda) en X. Si denotamos a la imagen de (g, x) bajo λ como gx, podemos escribir las dos propiedades como $g(hx) = (gh)x$ y $ex = x$, respectivamente. A la pareja (X, ρ) la llamaremos *G-espacio* (izquierdo) o grupo de transformaciones.

De manera análoga se puede definir una acción derecha. Dada una acción izquierda λ es posible definir una acción derecha como $\rho(x,g) = \lambda(g^{-1},x)$. Por lo que el estudio de las acciones derechas es análogo al estudio de las acciones izquierdas.

Ejemplo(s) 1.23.

1. Sea G un grupo topológico. G actúa sobre sí mismo de dos maneras distintas, por multiplicación y por conjugación.

2. El grupo ortogonal $O(n)$ actúa por rotaciones y reflexiones en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.24. Para cada $g \in G$ se tiene una aplicación continua llamada *traslación (izquierda)* por g

$$\begin{aligned} L_g : X &\to X \\ x &\mapsto \lambda(g,x). \end{aligned}$$

La traslación resulta ser un homeomorfismo, con inverso $L_{g^{-1}}$. Esto es inmediato de las propiedades de la acción: $L_g L_h = L_{gh}$ y $L_e = \mathrm{id}_X$. Análogamente definimos la traslación derecha $R_g(x) = \rho(x,g)$, vía la acción derecha inducida.

Definición 1.25. Decimos que la acción de G es *efectiva* si el homomorfismo

$$\begin{aligned} G &\to \mathrm{Homeo}(X) \\ g &\mapsto L_g, \end{aligned}$$

es inyectivo.

En este caso podemos considerar, vía el homomorfismo, a G como un subgrupo de $\mathrm{Homeo}(X)$, el grupo de homeomorfismos de X.

Nota 1.26. Una caracterización equivalente para una acción efectiva es la siguiente: si $gx = x$ para todo $x \in X$, entonces $g = e$. Podemos considerar, vía el homomorfismo, a G como un subgrupo de $\mathrm{Homeo}(X)$, el grupo de homeomorfismos de X.

Definición 1.27. Diremos que la acción es *libre* si $gx = x$ implica $g = e$. En este caso diremos que el G-espacio es libre.

Nota 1.28. La diferencia entre una acción efectiva y una acción libre es sutil: para el segundo caso basta que $gx = x$ para *algún* $x \in X$, para poder asegurar que g es el neutro, mientras que en el primero tiene que pasar para *todo* $x \in X$. Es decir, toda acción libre es una acción efectiva; sin embargo el inverso no es cierto un ejemplo de esto es la acción de $O(n)$ en $\mathbb{R}^n$ mencionada arriba.

1.5. Ensamble topológico

La siguiente construcción será usada posteriormente en la construcción de Milnor de un espacio clasificante. Aunque Milnor realiza esta construcción únicamente para un grupo topológico G, ver [Mil56], vale la pena discutirla en el caso general.

Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios topológicos y consideremos el conjunto de sucesiones $(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n)$ tales que $t_i \geq 0$ para toda $i = 1, \dots, n$, $\Sigma_{i=1}^n t_i = 1$ y $x_i \in X_i$. Diremos que dos sucesiones $(t_1, x_1, \dots, t_n, x_n)$ y $(t'_1, x'_1, \dots, t'_n, x'_n)$ son equivalentes si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $t_i = t'_i$ para toda i.
- para toda i, $x_i = x'_i$ o $t_i = t'_i = 0$.

De esta manera podemos establecer una relación de equivalencia entre sucesiones. A la clase de equivalencia de una sucesión la denotaremos como $x = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$.

Definición 1.29. Al conjunto de clases de equivalencia de dichas sucesiones lo llamamos *ensamble topológico* de $X_1, \dots, X_n$ y lo denotamos por

$$X_1 * \cdots * X_n.$$

En general, podemos hacer la misma construcción para una cantidad numerable de espacios topológicos con la condición de que sólo un número finito de t_i sean distintas de cero.

Tenemos la siguiente aplicación de conjuntos

$$\begin{aligned} X_1 * \cdots * X_{n-1} &\hookrightarrow X_1 * \cdots * X_{n-1} * X_n \\ t_1x_1 + \cdots + t_{n-1}x_{n-1} &\mapsto t_1x_1 + \cdots + t_{n-1}x_{n-1} + 0x_n \end{aligned}$$

Existen dos maneras usuales de topologizar este conjunto. La más común es vía la topología cociente o débil. Consideremos el espacio

$$X_1 \times \cdots \times X_n \times \Delta^{n-1}$$

y la relación de equivalencia dada por

$$(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_i = 0, \ldots t_n) \sim (x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_i = 0, \ldots, t_n).$$

Es posible ver que bajo ciertas hipótesis en los espacios el espacio cociente resultante es el ensamble. Dado que no usaremos esta topología referimos al lector a [Bro06].

La segunda es por medio de la topología fuerte[1], definida como la topología final respecto a las funciones coordenadas:

$$\begin{aligned} t_j : X_1 * ... * X_n &\longrightarrow [0,1] & \qquad x_j : t_j^{-1}(0,1] &\longrightarrow X_j \\ t_1x_1 + ... + t_nx_n &\longmapsto t_j & \qquad t_1x_1 + ... + t_nx_n &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

Es decir, los abiertos subbásicos de esta topología están dados por:

$$t_j^{-1}\left((a,b)\right) = \{\, t_1x_1 + ... + t_nx_n \mid t_j \in (a,b) \,\}, \text{ donde } (a,b) \subset [0,1].$$

$$x_j^{-1}(A) = \{\, t_1x_1 + ... + t_nx_n \mid t_j \neq 0 \text{ y } x_j \in A \,\}, \text{ donde } A \subset X_j \text{ es abierto.}$$

Nota 1.30. Esta topología está caracterizada por la siguiente propiedad universal: dado Y un espacio arbitrario, $f : Y \to X_1 * ... * X_n$, es continua si y sólo si $t_j \circ f$ y $a_j \circ f$ son continuas para toda $1 \leq j \leq n$.

Es posible ver, [Bro06], que para el caso en que los espacios en cuestión sean compactos y de Hausdorff, entonces las dos topologías en el caso finito coinciden.

[1]Milnor, en su construcción, utiliza esta topología

Capítulo 2

Haces fibrados

En este capítulo introduciremos el concepto de haz fibrado sugerido en [AP10a]. Para un tratamiento más estándar de dicho concepto se puede consultar [Ste51].

2.1. Haces fibrados

2.1.1. Definiciones básicas

Sean B y F espacios topológicos y G un grupo topológico. Consideremos una acción (izquierda) efectiva de G en F. Recordemos que esto nos permite pensar a G como subgrupo de Homeo$F$.

El espacio F, el grupo topológico G y la acción serán los mismos a lo largo de esta sección.

Definición 2.1. Un

Definición 2.2. haz de conjuntos sobre B con fibra F es una familia de conjuntos

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_x \mid x \in B \}$$

donde para toda $x \in B$ el conjunto $\mathcal{F}_x$ tiene la misma cardinalidad de F.

Definición 2.3. Para cada $x \in B$ y un abierto $U \subset B$ que contenga a x, consideramos una familia

$$\varphi = \{ \varphi_x : F \to \mathcal{F}_x \mid x \in U \},$$

donde cada φ_x es una biyección. Llamamos *carta local* de $\mathcal{F}$ a la familia φ.

Es claro que cada abierto determina una familia de biyecciones, para hacer explícita esta situación denotaremos al abierto U con U_φ.

Al variar x en B las familias φ también lo harán. La siguiente definición nos da una pauta para determinar cuáles de estas familias, al variar x, son apropiadas para los conceptos que vamos a desarrollar más adelante.

Definición 2.4. Un *atlas* para $\mathcal{F}$ respecto al grupo G es un conjunto $\mathcal{A}$ de cartas locales de $\mathcal{F}$ que satisface las siguientes condiciones:

(B1) $\bigcup_{\varphi\in\mathcal{A}} U_\varphi = B$.

(B2) Para cualquier par de cartas locales $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ y cualquier $x \in U_\varphi \cap U_\psi$, la aplicación
$$g(x) := \psi_x^{-1}\varphi_x : F \to F$$
es un elemento de $G \leqslant$Homeo(F).

(B3) La aplicación
$$g : U_\varphi \cap U_\psi \to G, \quad x \mapsto g(x),$$
es continua.

Decimos que un atlas es *trivial* si tiene una única carta.

Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ dos haces de conjuntos (con la misma fibra F) sobre B y B', con atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ con respecto a G. Recordemos que F, G y la acción del grupo en la fibra son fijos.

Definición 2.5. Una aplicación de haces de conjuntos es una pareja $(f, \overline{f})$ que consiste en una aplicación continua $\overline{f} : B \to B'$ y una familia de biyecciones $f = \{ f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}'_{\overline{f}(x)} \mid x \in B \}$. A dicha aplicación la denotaremos con
$$(f, \overline{f}) : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$$

Definición 2.6. Decimos que $(f, \overline{f})$ es *compatible* con $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(C1) Si $\varphi \in \mathcal{A}$, $\phi \in \mathcal{A}'$ y $x \in U_\varphi \cap \overline{f}^{-1}(U_\psi)$, entonces la biyección

$$g(x) = \psi_y^{-1} f_x \varphi_x : F \to F,$$

donde $y = \overline{f}(x)$, es un elemento de G.

(C2) La aplicación $g : U_\varphi \cap \overline{f}^{-1}(U_\psi) \to G$, dada por $x \mapsto g(x)$, es continua.

Definición 2.7. Decimos que dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son *equivalentes* si su unión es un atlas. Esto forma una relación de equivalencia.

Una condición necesaria y suficiente para que dos atlas sean equivalentes es la siguiente:

Proposición 2.8. *Sea $\mathcal{F}$ un haz de conjuntos sobre B con dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. Entonces $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas si y sólo si la aplicación de haces* $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} = (e, \mathrm{id}_B)$ *es compatible con $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, donde $e = \{\, e_x = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_x} : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x \mid x \in U_e \,\}$.*

Demostración. Es una consecuencia directa de la definición 2.6, pues $U_\varphi \cap \mathrm{id}_B^{-1}(U_\psi) = U_\varphi \cap U_\psi$ y $\psi_{\mathrm{id}_B(x)}^{-1} e_x \varphi_x = \psi_x^{-1} \varphi_x$. □

Proposición 2.9. *Sea $\mathcal{A}$ un atlas para $\mathcal{F}$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *La unión $\widehat{\mathcal{A}}$ de todos los atlas equivalentes a $\mathcal{A}$ es un atlas.*
2. *El atlas $\widehat{\mathcal{A}}$ es el más grande que es equivalente a $\mathcal{A}$.*
3. *El atlas $\widehat{\mathcal{A}}$ es máximo en el conjunto ordenado (respecto a la inclusión) de todos los atlas para $\mathcal{F}$.*

Demostración. 1. Es claro que la unión de los abiertos de $\widehat{\mathcal{A}}$ es todo el espacio B, de modo que (B1) se cumple. Por otro lado, sean $\varphi, \psi \in \widehat{\mathcal{A}}$. Existen atlas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, ambos equivalentes a $\mathcal{A}$, tales que $\varphi \in \mathcal{A}_1$ y $\psi \in \mathcal{A}_2$. Notemos que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son equivalentes, por definición se cumplen las condiciones (B2) y (B3).

2. Por como definimos a $\widehat{\mathcal{A}}$ es claro que, de ser equivalente a $\mathcal{A}$, es el más grande. Como la unión de $\widehat{\mathcal{A}} \cup \mathcal{A}$ es nuevamente $\widehat{\mathcal{A}}$, tenemos que $\widehat{\mathcal{A}}$ es equivalente a $\mathcal{A}$.

3. Supongamos que hay un atlas $\mathcal{B}$ tal que $\widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Por lo que $\mathcal{B}$ sería equivalente a $\mathcal{A}$, pues su unión es nuevamente un atlas. Pero por como definimos a $\widehat{\mathcal{A}}$, tendríamos que $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{A}}$. Es decir $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$. □

Nota 2.10. Como consecuencia de esta proposición tenemos que cada clase de equivalencia contiene un atlas máximo, la unión de los atlas que conforman dicha clase.

Observemos que la aplicación de haces de conjuntos $(e, \mathrm{id}_B) \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ es siempre compatible con $\mathcal{A}$ y $\widehat{\mathcal{A}}$ *en los dos sentidos de la flecha*.

Definición 2.11. Un haz de conjuntos $\mathcal{F}$ sobre B con fibra F, sobre la cual actúa G por la izquierda, junto con un atlas máximo $\mathcal{A}$ respecto a G, es llamado *haz fibrado* o simplemente haz. A dicho haz fibrado lo denotaremos con

$$\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A}),$$

al grupo G le llamaremos grupo estructural de ξ y a B espacio base.

Con 2.10, un haz de conjuntos junto con una clase de equivalencia de atlas definen un haz fibrado. Denotaremos a la clase de equivalencia de un atlas de ξ simplemente como $\mathcal{A}$, aunque éste no sea máximo.

Nota 2.12. Notemos que un haz de conjuntos puede no tener un atlas, mientras que un haz fibrado está constituido por uno.

Definición 2.13. Una *aplicación de haces fibrados* $\xi \to \xi'$, donde

$$\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A}) \quad \text{y} \quad \xi' = (F, G, B'; \mathcal{F}', \mathcal{A}'),$$

es una aplicación de haces de conjuntos $(f, \overline{f}) : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ que es compatible con los atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$(2.6).

Sin riesgo de confusión, a una aplicación de haces fibrados la denotaremos con $(f, \overline{f})$.

Notemos que una aplicación de haces de conjuntos, es compatible con algunos atlas para dichos haces de conjuntos si y sólo si es compatible con los atlas máximos correspondientes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\widehat{\mathcal{A}}} \arrow[r, "(f,\overline{f})"] \arrow[d, leftrightarrow, "(e{,}\mathrm{id}_B)"'] & \mathcal{F}'_{\widehat{\mathcal{A}'}} \arrow[d, leftrightarrow, "(e'{,}\mathrm{id}'_B)"] \\
\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \arrow[r, "(f,\overline{f})"'] & \mathcal{F}'_{\mathcal{A}'} .
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del diagrama se sigue del teorema 2.9 y de 2.10, observando que la composición de aplicaciones de haces de conjuntos compatibles (con ciertos atlas) es una aplicación de haces compatible respecto a los atlas adecuados. Esto es consistente con la aclaración que hicimos respecto a poder definir a ξ con atlas que no sean máximos.

Teorema 2.14. *Sea $(\overline{f}, f)\colon (\mathcal{F}, B) \to (\mathcal{F}', B')$ una aplicación de haces de conjuntos. Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ atlas equivalentes para $\mathcal{F}$ y sean $\mathcal{A'}_1$ y $\mathcal{A'}_2$ atlas equivalentes para $\mathcal{F}$. Entonces $(\overline{f}, f)$ es compatible con $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A'}_1$ si y sólo sí es compatible con $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A'}_2$.*

Demostración. La demostración de este resultado se sigue de un diagrama similar al de arriba.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{F}, \mathcal{A}_1) \arrow[r, "(\overline{f},f)"] \arrow[d, "(e,\mathrm{id}_b)"'] & (\mathcal{F}', \mathcal{A'}_1) \\
(\mathcal{F}, \mathcal{A}_2) \arrow[r, "(\overline{f},f)"'] & (\mathcal{F}', \mathcal{A'}_2). \arrow[u, "(e',\mathrm{id}_{B'})"']
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis las aplicaciones correspondientes a las flechas verticales son compatibles con los atlas, de modo que si la aplicación de abajo es compatible con los atlas, lo es también la aplicación de arriba. $\square$

Como era de esperarse, los haces fibrados junto con las aplicaciones de haces fibrados forman una categoría.

Teorema 2.15. *Para un objeto $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$, la aplicación identidad está dada por $(e, id_B)\colon \xi \to \xi$, la denotaremos simplemente por id_ξ. Mientras que la composición de aplicaciones $(f, \overline{f}) : \xi \to \xi'$ y $(g, \overline{g})\colon \xi' \to \xi''$, está dada por $(h, \overline{h})\colon \xi \to \xi''$ donde*

$$\overline{h} = \overline{g} \circ \overline{f} \quad h = \left\{ g_{\overline{f}(x)} \circ f_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_{\overline{g}(\overline{f}(x))} \right\}.$$

Demostración. Para ver que definidas así las aplicaciones son en efecto aplicaciones de haces, tenemos que comprobar que son compatibles con los atlas correspondientes. Para la primera parte es claro que al ser el mismo atlas, su unión resulta ser el mismo atlas, de modo que id_ξ está bien definida.

Para la segunda parte veamos que las condiciones de 2.6 se cumplen. Sean $\varphi \in \mathcal{A}$, $\chi \in \mathcal{A}''$ y $x \in U_\varphi \cap \overline{h}_{-1}(U_\chi)$. Consideremos $\psi \in \mathcal{A}'$ tal que

$$\psi = \{\, \psi_y \colon F \to \mathcal{F}_y \mid y = \overline{f}(x) \in U_\psi \,\}\,.$$

De modo que si $x \in U_\varphi \cap \overline{f}^{-1}(\overline{g}^{-1}(U_\chi))$ y $\overline{f}(x) \in U_\psi$, entonces $x \in U_\varphi \cap \overline{f}^{-1}(U_\psi)$. Por lo que, si $z = \overline{h}(x)$,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \chi_y^{-1} \circ h_x \circ \varphi_x = \chi_y^{-1} \circ g_y \circ f_x \circ \varphi_x \\ &= \chi_y^{-1} \circ g_y \psi_y \circ \psi_y^{-1} \circ f_x \circ \varphi_x \\ &= g(x)g'(y) \in G, \end{aligned}$$

pues $g(x)$ y $g'(y)$ están en G. Ahora, resta comprobar que la aplicación

$$g'' \colon U_\varphi \cap \overline{h}_{-1}(U_\chi) \to G$$

es continua. Como vimos anteriormente, para que la primera condición de compatibilidad se cumpla, x debe estar en la intersección del dominio de g y la imagen inversa del dominio de g' bajo $\overline{f}$:

$$\overline{f}^{-1}(U_\psi) \cap \overline{f}^{-1}(\overline{g}^{-1}(U_\chi)) \cap U_\varphi.$$

Resulta que estos abiertos forman una cubierta del dominio de g'':

$$\bigcup_\psi \overline{f}^{-1}(U_\psi) \cap \overline{f}^{-1}(\overline{g}^{-1}(U_\chi)) \cap U_\varphi = U_\varphi \cap \overline{h}^{-1}(U_\chi),$$

donde $\psi = \{\, \psi_y \mid y = \overline{f}(U_\varphi \cap \overline{h}^{-1}(U_\chi) \,\}$. En cada abierto de esta cubierta tenemos que

$$\begin{aligned} g''(x) &= \mu(g'(y), g(x)) = \mu(g'(\overline{f}(x)), g(x)) \\ &= \mu \circ g' \times g \circ \overline{f} \times \mathrm{id}_B \circ \Delta(x), \end{aligned}$$

donde μ es la multiplicación en G y Δ la aplicación diagonal, $x \mapsto (x, x)$. □

De modo que en esta categoría los objetos son haces de conjuntos que tienen un atlas (máximo) asociado y los morfismos son aplicaciones de haces de conjuntos que con compatibles con dichos atlas. Una equivalencia de haces fibrados es una aplicación de haces fibrados con inversa. Claramente, la aplicación de haces fibrados (e, id_B) es una equivalencia. En general, cualquier aplicación de haces fibrados (f, id_B) es una equivalencia, la familia f esta formada por biyecciones, de modo que la inversa estará dada por la familia de las inversas a éstas.

Definición 2.16. Consideremos dos haces fibrados

$$\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A}) \quad \text{y} \quad \xi' = (F, G, B; \mathcal{F}', \mathcal{A}')$$

y la aplicación de haces $(f, \mathrm{id}_B)\colon \xi \to \xi'$ compatible con los atlas.

A la aplicación $(f, \mathrm{id}_B)\colon \xi \to \xi'$ le llamamos *equivalencia sobre* B. A las clases de equivalencia sobre B de haces fibrados sobre B, con fibra F y grupo estructural G, lo denotaremos como

$$k_G(F, B).$$

En caso de que no sea necesario mencionar a la fibra, como en el caso de haces principales 2.32, a dicho conjunto lo denotaremos simplemente como $k_G(B)$.

Con esta nueva relación podemos reemplazar las fibras del haz de conjuntos por fibras homeomorfas y seguir en la misma clase de equivalencia.

2.1.2. Transformaciones coordenadas

Nota 2.17. Sea $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ un haz fibrado. El atlas (máximo) está dado por $\mathcal{A} = \{\, \varphi_j \mid j \in J \,\}$. A los abierto de B los denotaremos como U_j en lugar de U_{φ_j}, entonces a las cartas locales las podemos denotar como $\varphi_j = \{\, \varphi_{j,x} : F \to \mathcal{F}_x \mid x \in U_j \,\}$ y a las funciones $\varphi_{i,x}^{-1} \circ \varphi_{j,x}$, con $x \in U_i \cap U_j$, como $g_{ij}(x)$.

Definición 2.18. A las aplicaciones

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$$

las llamaremos *transformaciones coordenadas* de ξ. Éstas satisfacen que

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \tag{TC1}$$

para todo $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ y todos $i, j, k \in J$.

Como veremos más adelante, por medio de estas aplicaciones es posible reconstruir el haz.

Definición 2.19. Sea G un grupo topológico, B un espacio arbitrario y $\mathcal{U} = \{ U_j \mid j \in J \}$ cubierta abierta de B. A una familia de aplicaciones continuas

$$\{ g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to G \mid i, j \in J \}$$

que satisfacen TC1, le llamamos 1-*cociclo* para $\mathcal{U}$ con *coeficientes* en G. También lo denotaremos como $\{ g_{ij} \}$. Por simplicidad a un 1-cociclo para $\mathcal{U}$ con coeficientes en G, lo llamaremos *cociclo* para $\mathcal{U}$.

Teorema 2.20. *Sea $\{ g_{ij} \}$ un cociclo para $\mathcal{U}$ con coeficientes en G. Entonces para todo espacio topológico F en el cual G actúa efectivamente, existen un haz de conjuntos sobre $B := \bigcup_{j \in J} U_j$ con fibra F y un atlas para G cuyas transformaciones coordenadas son las aplicaciones del cociclo.*

Demostración. Sea F un espacio topológico sobre el cual G actúa efectivamente. Para cada $x \in B$ tomamos un índice $k_x \in J$, para el cual $x \in U_{k_x}$. Definamos un haz $\mathcal{F}$ y un conjunto de cartas locales $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{ \mathcal{F}_x \mid x \in B \}, \quad F = \mathcal{F}_x, \\ \mathcal{A} &= \{ \varphi_j \mid j \in J \}, \quad \varphi_j = \{ \varphi_{j,x} \mid x \in U_j \}, \end{aligned}$$

donde

$$\varphi_{j,x} = g_{k_x j}(x) \colon F \to F, \; x \in U_j.$$

Por definición $\varphi_{j,x}$ es un elemento de G y como éste actúa efectivamente en F, es una aplicación biyectiva. De modo que $\mathcal{A}$ es un conjunto de cartas locales. Más aún, por construcción es claro que se cumplen las condiciones (B1) y (B3) de 2.4. Para ver que se satisface (B2), consideremos $x \in U_i \cap U_j$, $\varphi_{i,x}$ y $\varphi_{j,x}$. Entonces, por 2.19 y TC1 tenemos que:

$$\varphi_{i,x}^{-1} \varphi_{j,x} = g_{k_x i}(x)^{-1} g_{k_x j}(x) = g_{ik_x}(x) g_{k_x j}(x) = g_{ij}(x) \in G.$$

Tenemos así un haz fibrado para el cual los elementos del cociclo son las transformaciones coordenadas. $\square$

Definición 2.21. Decimos que dos cociclos $g = \{ g_{ij} \}$ y $\widetilde{g} = \{ \widetilde{g}_{ij} \}$ para una cubierta $\mathcal{U} = \{ U_j \mid j \in J \}$ son *cohomólogos* en $\mathcal{U}$ si existe una familia de aplicaciones continuas $\{ \lambda_j \colon U_j \to G \}$ tal que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\widetilde{g}_{ij}(x) \lambda_j(x) = \lambda_i(x) g_{ij}(x), \tag{TC2}$$

para $x \in U_i \cap U_j$, con $i, j \in J$.

Teorema 2.22. *Sean ξ, $\widetilde{\xi}$ haces fibrados sobre B, con fibra F y grupo estructural G, y $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ sus atlas correspondientes con la misma cubierta $\mathcal{U}$. Consideremos $g = \{ g_{ij} \}$ y $\widetilde{g} = \{ \widetilde{g}_{ij} \}$ cociclos para $\mathcal{U}$. Entonces, ξ y $\widetilde{\xi}$ son equivalentes sobre B si y sólo sí los cociclos g y $\widetilde{g}$ son cohomólogos en $\mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $(f, \mathrm{id}_B)\colon \xi \to \widetilde{\xi}$ la equivalencia de haces. Por ser aplicación de haces, la asignación $x \mapsto \lambda_j(x) = \widetilde{\varphi}_{j,x}^{-1} \circ f_x \circ \varphi_{j,x}$ determina una aplicación continua $\lambda_j : U_j \to G$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_{ij}(x)\lambda_j(x) &= (\widetilde{\varphi}_{j,x}^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_{j,x}) \circ (\widetilde{\varphi}_{j,x}^{-1} \circ f_x \circ \varphi_{j,x}) \\
&= \widetilde{\varphi}_{j,x}^{-1} \circ f_x \circ (\varphi_{i,x} \circ \varphi_{i,x}^{-1}) \circ \varphi_{j,x} \\
&= (\widetilde{\varphi}_{j,x}^{-1} \circ f_x \circ \varphi_{i,x}) g_i j(x) \\
&= \lambda_i(x) g_{ij}(x).
\end{aligned}$$

Es decir, los cocíclos correspondientes son cohomólogos.

Inversamente, supongamos que $g = \{g_i j\}$ y $\widetilde{g} = \{\widetilde{g}_{ij}\}$ son cohomólogos en $\mathcal{U}$. Entonces, la aplicación $f_x = \widetilde{\varphi}_{j,x} \circ \lambda_j(x) \circ \varphi_{j,x}^{-1} : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ determina una aplicación de haces $f = \{f_x\}$. Es claro que debido a la relación de cohomología f_x no depende de j. De modo que, tenemos una aplicación de haces (f, id_B), la cual cumple las condiciones de 2.13, ya que $\widetilde{\varphi}_{i,x} \circ f_x \circ \varphi_{j,x} = \widetilde{g}_{ij}(x)\lambda_j(x) \in G$. $\square$

En particular, este teorema nos dice que un haz fibrado está caracterizado, salvo equivalencia sobre B, por sus transformaciones coordenadas.

La siguiente noción nos permite construir un nuevo cociclo a partir de uno dado. Sean $\mathcal{U} = \{ U_j \mid j \in J \}$ y $\mathcal{V} = \{ V_k \mid k \in K \}$ cubiertas abiertas de B. Decimos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ si existen una función $\alpha : K \to J$ tal que

$$V_k \subset U_{\alpha(k)}$$

para toda k en K.

Consideremos un cociclo $g = \{ g_{ij} \mid i, j \in J \}$ para $\mathcal{U}$ con coeficientes en G. Definimos un cociclo para $\mathcal{V}$ con coeficientes en G, cuyas funciones coordenadas están dadas por

$$h_{kl} = g_{\alpha(k)\alpha(l)}|_{V_k \cap V_l},$$

para k, l en K. Al cociclo $\alpha^{\#}(g) = \{ h_{kl} \mid k, l \in K \}$ le llamamos *cociclo inducido* por el refinamiento.

Es natural preguntarnos si dadas dos cubiertas abiertas de B con sus respectivos cociclos existe alguna relación. La respuesta es afirmativa.

Definición 2.23. Sean g y $\widetilde{g}$ cociclos con coeficientes en G para las cubiertas $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\, \widetilde{U}_j \mid J \,\}$ y $\mathcal{U} = \{\, U_j \mid \widetilde{J} \,\}$, respectivamente. Decimos que g y $\widetilde{g}$ son *cohomólogos en* B si existen un refinamiento común para $\mathcal{U}$ y $\widetilde{\mathcal{U}}$, $\mathcal{V} = \{\, V_k \mid k \in K \,\}$, y funciones $\alpha : K \to J$ y $\widetilde{\alpha} : K \to \widetilde{J}$ tales que $\alpha^{\#}(g)$ y $\widetilde{\alpha}^{\#}(\widetilde{g})$ son cohomólogos en $\mathcal{V}$.

La relación de ser cohomólogos en B, es una relación de equivalencia. La reflexividad es inmediata de la definición. Mientras que para ver que es simétrica tomamos la misma cubierta cuyo refinamiento sea la misma cubierta. Para la transitividad supongamos que tenemos g cohomólogo a $\widetilde{g}$ que a su vez es cohomólogo a $\widehat{g}$, es decir por un lado tenemos $\mathcal{V} = \{V_k \mid k \in K\}$ refinamiento común de $\mathcal{U}$ y $\widetilde{\mathcal{U}}$ con $\alpha\colon K \to J$ y $\widetilde{\alpha} : K \to \widetilde{J}$ funciones de refinamiento tales que $\alpha^{\#}(g)$ y $\widetilde{\alpha}^{\#}(\widetilde{g})$ son cohomólogos en $\mathcal{V}$; por otro lado, tenemos $\mathcal{W} = \{W_l \mid l \in L\}$ refinamiento común a $\widetilde{\mathcal{U}}$ y $\widehat{U}$, con $\widetilde{\beta}\colon L \to \widetilde{J}$ y $\widehat{\beta}\colon L \to \widehat{J}$ funciones de refinamiento tales que $\widetilde{\beta}^{\#}(\widetilde{g})$ y $\widehat{\beta}^{\#}(\widehat{g})$ son cohomólogos en $\mathcal{W}$.

De las relaciones de cohomología sobre los refinamientos comunes tenemos

$$g_{\alpha(k)\alpha(k')}(x)\lambda_{k'}(x) = \lambda_k \widetilde{g}_{\widetilde{\alpha}(k)\widetilde{\alpha}(k')}, \widetilde{g}_{\widetilde{\beta}(l)\widetilde{\beta}(l')}(x)\kappa_{l'}(x) = \kappa_l(x)\widehat{g}_{\widehat{\beta}(l)\widehat{\beta}(l')}.$$

Definimos un refinamiento común a $\mathcal{U}$ y $\widehat{\mathcal{U}}$, $\mathcal{O} = \{O_{(k,l)} = V_k \cap W_l \mid (k,l) \in K \times_\sim L\}$, donde $K \times_\sim L = \{(k,l) \in K \times L \mid \widetilde{\alpha}(k) = \widetilde{\beta}(l)\}$. Las funciones de refinamiento las definimos como $\alpha_1\colon K \times_\sim L \to J$ y $\alpha_2\colon K \times_\sim L \to \widehat{J}$, donde $\alpha_1(k,l) = \alpha(k)$ y $\alpha_2(k,l) = \widehat{\beta}(l)$.

Finalmente, $\alpha_1^{\#}(g) = \{g_{\alpha_1(k,l)\alpha_1(m,n)} = g_{\alpha(k)\alpha(m)}\}$ y $\alpha_2^{\#}(\widehat{g}) = \{\widehat{g}_{\alpha_2(k,l)\alpha_2(m,n)} = \widehat{g}_{\widehat{\beta}(l)\widehat{\beta}(n)}\}$ son cohomólogos en $\mathcal{O}$ vía las funciones $\mu_{(k,l)}(x) = \lambda_k\kappa_l(x)$,

$$\begin{aligned} g_{\alpha_1(k,l)\alpha_1(k',l')}(x)\mu_{(k',l')}(x) &= g_{\alpha(k)\alpha(k')}(x)\lambda_{k'}(x)\kappa_{l'}(x) \\ &= \lambda_k(x)\widetilde{g}_{\widetilde{\alpha}(k)\widetilde{\alpha}(k')}(x)\kappa_{l'}(x) = \lambda_k(x)\widetilde{g}_{\widetilde{\beta}(l)\widetilde{\beta}(l')}(x)\kappa_{l'}(x) \\ &= \lambda_k(x)\kappa_k(x)\widehat{g}_{\widehat{\beta}l\widehat{\beta}(l')}(x) = \mu_{(k,l)}(x)g_{\alpha_2(k,l)\alpha_2(k',l')}. \end{aligned}$$

A la clase de equivalencia $[g]$ le llamaremos clase de cohomología de g y denotaremos por $H^1(B;G)$ a las clases de cohomología de cociclos para cubiertas en B con coeficientes en G.

Teorema 2.24. *Existe una biyección*

$$\gamma\colon k_G(F,B) \to H^1(B;G),$$

que manda un haz fibrado a la clase de cohomología del cociclo determinado por sus transformaciones coordenadas.

Antes de pasar a la prueba necesitamos un lema previo. Sea $\mathcal{F}$ un haz de conjuntos sobre B con atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_j \mid j \in J\}$ para la cubierta $\mathcal{U} = \{U_j \mid ij \in J\}$ y $\mathcal{V} = \{V_k \mid k \in K\}$ un refinamiento abierto de la cubierta $\mathcal{U}$ con función de refinamiento $\alpha\colon K \to J$. Definimos $\psi_k = \{\varphi_{\alpha(k),x} \mid x \in V_k\}$ y $\alpha^\# \mathcal{A} = \{\psi_k \mid k \in K\}$.

Lema 2.25. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$\alpha^\#\mathcal{A}$ es un atlas equivalente a $\mathcal{A}$.*

2. *Si g es el cociclo que consta de las transformaciones coordenadas de $\mathcal{A}$, entonces $\alpha^\# g$ es el cociclo que consta de las transformaciones coordenadas de $\alpha^\#\mathcal{A}$.*

Demostración. 1. Claramente para cada $k \in K$ tenemos que $\psi_k \subset \varphi_{\alpha(k)}$. De modo que la unión de $\mathcal{A}$ y $\alpha^\#\mathcal{A}$ es nuevamente $\mathcal{A}$, es decir, un atlas; por lo que en efecto son equivalentes.

2. Sea $x \in V_k \cap V_l \subset U_{\alpha(k)} \cap U_{\alpha(l)}$, entonces $h_{kl} = g_{\alpha(k)\alpha(l)}|_{V_k \cap V_l} = \varphi^{-1}_{\alpha(k),x} \circ \varphi_{\alpha(l),x} = \psi^{-1}_{k,x} \circ \psi_{l,x} = g^\#_{kl}$, es decir, $\alpha^\#(g) = \{h_{kl}\} = \{g^\#_{kl}\}$.

$\square$

Demostración (del teorema 2.24). Primero veamos que la aplicación γ está bien definida.

Sean $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ haces de conjuntos sobre B con fibra F; $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$ atlas para $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ respecto al grupo G con cubiertas $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ y $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}_j \mid j \in \widetilde{J}\}$; sean g y $\widetilde{g}$ los cociclos formados por las transformaciones coordenadas de $\mathcal{A}$ y $\widetilde{\mathcal{A}}$ respectivamente. Entonces, $\mathcal{V} = \{U_j \cap \widetilde{U}_i \mid (j,i) \in J \times \widetilde{J}\}$ es un refinamiento para las cubiertas. Definimos las funciones de refinamiento $\alpha\colon J \times \widetilde{J} \to J$ y $\widetilde{\alpha}\colon J \times \widetilde{J} \to \widetilde{J}$ como $\alpha(j,i) = j$ y $\widetilde{\alpha}(j,i) = i$. Ahora, como $(\mathcal{F},\mathcal{A})$ y $(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\mathcal{A}})$ son equivalentes sobre B, por 2.14 y 1, tenemos que $(\mathcal{F},\alpha^\#)$ y $(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\alpha^\#\widetilde{\mathcal{A}}})$ son también equivalentes sobre B. De modo que, por el teorema 2.22 y el inciso 2 del lema anterior, $\alpha^{\#}g$ y $\widetilde{\alpha}^{\#}\widetilde{g}$ son cohomólogos. Por lo que, por 2.23, g y $\widetilde{g}$ son cohomólogos en B.

La suprayectividad de γ se sigue del teorema 2.20

Finalmente, veamos que γ es inyectiva. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$ g y $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{U}}$, $\widetilde{g}$ como en la primer parte de la prueba, con g y $\widetilde{g}$ cohomólogos en B. Por definición, existe un refinamiento común a $\mathcal{U}$ y $\widetilde{\mathcal{U}}$, $\mathcal{V} = \{V_k \mid k \in K\}$, con funciones de refinamiento $\alpha\colon K \to J$ y $\widetilde{\alpha}\colon K \to \widetilde{J}$ tales que $\alpha^{\#}(g)$ y $\widetilde{\alpha}^{\#}(\widetilde{g})$ son cohomólogos en $\mathcal{V}$. De modo que, por el inciso 2 del lema anterior y el teorema 2.22, $(\mathcal{F}, \alpha^{\#}\mathcal{A})$ y $(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\alpha}^{\#}\widetilde{\mathcal{A}})$ son equivalentes sobre B. Entonces, por el inciso 1 del lema, $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ y $(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{A}})$ son equivalentes sobre B. $\square$

Nota 2.26. Notemos que $H^1(B; G)$ es independiente de la fibra F, de modo que la biyección $k_G(F, B) \to H^1(B; G)$ nos permite establecer una relación entre haces con diferentes fibras pero con mismo grupo estructural G. A dichos haces, con fibras distintas, pero con mismo grupo estructural que vayan a dar a la misma clase de cohomología les llamaremos haces asociados.

2.1.3. Fibrados localmente triviales y haces

Definición 2.27. Decimos que una aplicación $p : E \to X$ es un *fibrado localmente trivial* con fibra F, si todo punto $x \in X$ tiene un abierto $U \subset X$ junto con un homeomorfismo $\phi_U\colon U \times F \to p^{-1}(U)$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr, "\phi_U"] \arrow[dr, "\mathrm{proy}_1"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $p|_U$ es la restricción de p a $p^{-1}(U)$ y π_1 es la proyección en la primer coordenada. La cubierta abierta formada por las vecindades U es llamada cubierta trivializadora, los abiertos U son llamados abiertos trivializadores y las aplicaciones ϕ_U son llamadas aplicaciones trivializadoras.

Del diagrama anterior se puede notar que ϕ_U se restringe a un homeomorfismo entre $F \approx \{x\} \times F \approx \pi_1^{-1}(x)$ y $p^{-1}(x)$,es decir cada conjunto $p^{-1}(x)$ son homeomorfos a la fibra F. Es por esto que en la definición se hace mención a la fibra F.

A partir de un haz de conjuntos $\mathcal{F}$ sobre B con fibra F con atlas asociado $\mathcal{A}$ respecto a G es posible construir un fibrado localmente trivial. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que si $x, y \in B$ son distintos, entonces $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y = \emptyset$. De no ser así podríamos sustituir cada $\mathcal{F}_x$ por $\mathcal{F}_x \times \{x\}$.

Sea $\mathcal{A} = \{\, \varphi_j \mid j \in J \,\}$, donde $\varphi_j = \{\, \varphi_{j,x} \colon F \to \mathcal{F}_x \mid x \in U_j \,\}$ son las cartas coordenadas.

Sean

$$E = \bigcup_{x \in B} \mathcal{F}_x$$

$$p \colon E \to B, \quad p(\mathcal{F}_x) = \{x\}.$$

Esta aplicación, junto con este espacio, es en efecto un fibrado localmente trivial. Para ver esto, necesitamos asignar una topología adecuada a E. Sea $\phi_j \colon U_j \times F \to p^{-1}(U_j)$ definida como $(x, y) \mapsto \varphi_{j,x}(y)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U_j \times F \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & p^{-1}(U_j) \arrow[dl, "p|_{U_j}"] \\ & U_j & \end{tikzcd}$$

donde $p^{-1}(U_j) = \bigcup_{x \in U_j} \mathcal{F}_x$. Del diagrama anterior, si definimos $\phi(x, y, j) = \phi_j(x, y)$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigcup_{j \in J} U_j \times F \times \{j\} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

Con este diagrama es natural asignar a E la topología de identificación con la que p se vuelve continua. Resta probar que esta aplicación es localmente trivial. En vista de 2.27, para esto es suficiente probar que ϕ_j es un homeomorfismo.

Lema 2.28. *La aplicación ϕ_i es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $X_i = U_i \times F \times \{i\}$ y $E_i = p^{-1}(U_i)$. Consideremos $\phi_i = \phi|_{X_i}$[1] Consideremos la aplicación

[1]Hay un detalle en esta igualdad, pues ϕ_i definida como la restricción no es exactamente igual a la aplicación trivializadora de p, también denotada como ϕ_i, pues sus dominios de definición no son el mismo, podemos decir que coinciden salvo homeomorfismo: $U_i \times F \approx U_i \times F \times \{i\}$.

$$g_{ij}\colon \phi_j^{-1}(E_i \cap E_j) \xrightarrow{\phi_j} E_i \cap E_j \xrightarrow{\phi_i^{-1}} \phi_i^{-1}(E_i \cap E_j)$$

tal que

$$(x, y, j) \longmapsto (x, \varphi_{i,x}^{-1}\varphi_{j,x}(y), i).$$

g_{ij} es continua, pues la acción de G en la fibra es continua, $\varphi_{i,x}^{-1}\varphi_{j,x} \in G$ y por definición de la topología en E la dependencia en x es continua. Además, es claro que la inversa de g_{ij} es g_{ji}, por lo que g_{ij} es un homeomorfismo.

ϕ_i es, por definición, biyectiva y continua. De modo que para probar que es un homeomorfismo, sólo es necesario probar que es abierta. Sea A en X_i abierto, entonces $\phi_i(A)$ es abierto en $E_i = p^{-1}(U_i)$ si y sólo si $\phi^{-1}(\phi_i(A))$ es abierto en $\bigcup_{j\in J} U_j \times F \times \{j\}$, esto equivale a que la intersección con cada $X_j = U_j \times F \times \{j\}$ es abierta para cada $j \in J$. Veamos que en efecto esto sucede. Tenemos

$$X_i \cap \phi^{-1}(\phi_j(A)) = g_{ij}^{-1}(A) = g_{ji}(A \cap \phi_j^{-1}(E_i \cap E_j))$$

pues $u \in X_i \cap \phi^{-1}(\phi_j(A))$ si y sólo si $u = (x, y, i)$ y $\phi(u) = \phi(x', y', j)$, con (x', y', j) en A, es decir, $\phi_i(x, y) = \phi_j(x', y')$. Esto pasa si y sólo si $\varphi_{i,x}(y) = \varphi_{j,x'}(y')$, notemos que x es igual a x' pues las fibras son ajenas, de aquí obtenemos la igualdad mencionada.

De modo que, al ser $\phi_j^{-1}(E_i \cap E_j) = (U_i \cap U_j) \times F \times \{j\}$ abierto en X_j y g_{ij} un homeomorfismo, $g_{ij}^{-1}(A) = g_{ji}(A \cap \phi_j^{-1}(E_i \cap E_j))$ es abierto en X_i para toda i. □

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.29. *La aplicación $p : E \to B$ es un fibrado localmente trivial.*

□

En particular, esta construcción sirve para un haz fibrado.

Definición 2.30. Sea $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ un haz fibrado. Al fibrado localmente trivial que construimos anteriormente le llamaremos *fibrado localmente trivial asociado* a ξ y a E_ξ le llamaremos *espacio total*. Esto lo denotaremos como $p_\xi\colon E_\xi \to B_\xi$, donde $B = B_\xi$.

Concluimos esta sección con una definición sencilla que tendrá relevancia más adelante.

Definición 2.31. Sea $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ un haz fibrado y $p_\xi \colon E_\xi \to B$ el fibrado localmente trivial asociado. Decimos que una aplicación continua $s \colon B \to E$ es una *sección* de ξ o de p_ξ si satisface que $p_\xi \circ s = \mathrm{id}_{B_\xi}$.

2.2. Haces principales

De la discusión en la sección de transformaciones coordenadas podemos notar que para clasificar a los haces sobre un espacio B con grupo estructural G, no es propiamente relevante la información de la fibra por lo que podemos considerar cualquier fibra que queramos, en particular al mismo grupo G. Los haces cuya fibra es igual al grupo estructural son llamados haces principales. En esta sección introducimos este tipo especial de haz fibrado. Estos haces, como veremos, tienen mayor estructura (una acción en el espacio total).

Definición 2.32. Un *G-haz principal* es un haz fibrado de la forma

$$\xi = (G, G, B; \mathcal{G}, \mathcal{A}).$$

Es decir, es un haz fibrado con fibra G; en este caso G actúa sobre sí mismo por multiplicación a la izquierda. Cuando sea claro el grupo G y, por lo tanto, la fibra, lo llamaremos haz principal.

Definición 2.33. Para un haz principal ξ es posible definir una acción derecha en el espacio total, llamada *acción principal*. Sean $u \in G$ y $z \in \mathcal{G}_x$ definimos una acción derecha como

$$zu = \varphi_x[(\varphi_x^{-1} z)u].$$

Esta definición no depende de la elección de φ para la cual $x \in U_\varphi$. La continuidad se sigue de la continuidad de cada φ_x, la cual está garantizada por la manera en que le asignamos una topología al espacio total E_ξ, ver 2.30. Las propiedades de 1.22 claramente se cumplen. Estas acciones en cada fibra definen la acción principal (en el espacio total):

$$\rho_\xi \colon E_\xi \times G \to E_\xi.$$

Por construcción está bien definida, es continua y es una acción derecha.

Veamos que dado cualquier haz fibrado $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ es posible construir un haz principal, recordemos que la acción de G en la fibra F supusimos que es efectiva. Para esto necesitamos la siguiente definición:

Definición 2.34. Decimos que una aplicación $f\colon F \to \mathcal{F}_x$ es *admisible* si $\varphi_x^{-1} \circ f \in G$, para $\varphi \in \mathcal{A}$ y $x \in U_\varphi$.

Esta definición no depende de la elección de la carta φ tal que $x \in U_\varphi$. En efecto, si $\psi \in \mathcal{A}$ y $x \in U_\varphi \cap U_\psi$ tenemos que

$$\psi_x^{-1} \circ f = \psi_x^{-1} \circ \varphi_x \circ \varphi_x^{-1} \circ f \in G.$$

El haz de conjuntos está determinado por las aplicaciones admisibles.

$$\mathcal{G} = \{\, \mathcal{G}_x \mid x \in B \,\} \quad \mathcal{G}_x := \{\, f\colon F \to \mathcal{F}_x \mid f \text{ es admisible} \,\}\,.$$

Por otro lado, las cartas están dadas por:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_x\colon G &\longrightarrow \mathcal{G}_x \\ v &\longmapsto (F \xrightarrow{v} F \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{F}_x) \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida, $\varphi_x^{-1} \circ (\varphi_x \circ v) = v \in G$, de modo que $\widetilde{\varphi}_x(v)$ es admisible, es decir, pertenece a $\mathcal{G}_x$. De la definición se ve que es biyectiva. Además, para cada φ_x hay exactamente una $\widetilde{\varphi}_x$ asociada. Finalmente, definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} &:= \{\, \widetilde{\varphi}_x \mid x \in U_\varphi \,\} \\ \widetilde{\mathcal{A}} &:= \{\, \widetilde{\varphi} \mid \varphi \in \mathcal{A} \,\}\,. \end{aligned}$$

Definidos así, éstos forman el atlas y las cartas coordenadas para el haz principal asociado.

- $U_{\widetilde{\varphi}} = U_\varphi$, de modo que $\bigcup_{\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{A}}} U_{\widetilde{\varphi}} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi$.
- Para $x \in U_{\widetilde{\varphi}} \cap U_{\widetilde{\psi}}$, tenemos que $\widetilde{g}(x)(v) = \widetilde{\psi}_x^{-1} \widetilde{\varphi}_x(v) = \psi_x^{-1} \varphi_x \circ v = g(x) \circ v \in G$ para toda $v \in G$. Por lo que $\widetilde{\psi}_x^{-1} \widetilde{\varphi}_x \colon G \to G$.
- $\widetilde{g}\colon U_{\widetilde{\varphi}} \cap U_{\widetilde{\psi}} \to G$, es claramente continua.

De manera equivalente, podemos usar 2.20, para construir $\widetilde{\xi}$. Es decir, podemos utilizar las transformaciones coordenadas de ξ tomando a G como fibra, para dar una interpretación distinta a ξ.

Sea $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$. Para cada $x \in B$, escogemos $k_x \in \mathcal{J}$ para el cual $x \in U_{k_x}$ y definimos

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_x \mid x \in B\} \quad \mathcal{G}_x = G,$$
$$\mathcal{A} = \{\widetilde{\varphi}_j \mid j \in \mathcal{J}\} \quad \widetilde{\varphi}_j = \{\widetilde{\varphi}_{j,x} \colon G \to G \mid x \in U_j\}, \quad \widetilde{\varphi}_{j,x} = g_{k_x j}(x) \in G.$$

Notemos que G actúa sobre sí mismo por traslación derecha, por lo que las aplicaciones $\widetilde{\varphi}_{j,x}$, están bien definidas.

Ambas definiciones son equivalentes. Para cada $g \in G$, $x \in U_i$, construimos

$$h_g \colon F \to \mathcal{F}_x$$
$$h_g(y) = \varphi_{i,x}(\widetilde{\varphi}_{i,x}^{-1}(g) \cdot y)$$

Donde $\cdot$ representa la acción de G en la fibra F. Esta aplicación es admisible, ya que $\varphi_{i,x} \circ h_g = \widetilde{\varphi}_{i,x}^{-1}(g) \in G$. Más aún, por ser $\widetilde{\varphi}_{i,x}^{-1}$ biyectiva, para elementos distintos de G tenemos distintas aplicaciones. Por otro lado, dada $h \colon F \to \mathcal{F}_x$, admisible con $x \in U_i$, definimos

$$g = \widetilde{\varphi}_{i,x}(\varphi_{i,x}^{-1}) \in G.$$

Claramente, $h_g(y) = h(y)$ para toda $y \in F$.

Definición 2.35. Al haz principal $\widetilde{\xi} = (G, G, B; \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{A}})$ que construimos, le llamamos *haz principal asociado* a $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$.

Nota 2.36. Como es de esperarse un haz principal y su haz principal asociado son equivalentes sobre el espacio base. Sean $\xi = (G, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ un G-haz principal y $\widetilde{\xi} = (G, G, B; \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{A}})$ su haz principal asociado. Sea

$$(f, \mathrm{id}_B) \colon \xi \to \widetilde{\xi},$$

donde $f = \{f_x \mid x \in B\}$. Para cada $x \in B$ definimos $f_x(z) = \widetilde{\varphi}_x(\psi_x^{-1}(z)) = \varphi_x \circ \psi_x^{-1}(z)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_x \arrow[r, "f_x"] \arrow[d, "\psi_x"'] & \mathcal{G}_x \\ G. \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_x"'] & \end{tikzcd}$$

Es claro que así definida cada f_x es una biyección. Más aún la aplicación de haces es compatible con los atlas, ver 2.6:

- Si $x \in U_k \cap \widetilde{U}_l = U_k \cap U_l$, entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(x)(v) &= \widetilde{\varphi}_{l,x}^{-1} \circ f_x \circ \psi_{k,x}(v) = \widetilde{\varphi}_{l,x}^{-1} \circ (\varphi_{j,x} \circ \psi_{i,x}^{-1}) \circ (\psi_{k,x}(v))) \\ &= \varphi_{l,x}^{-1} \circ \varphi_{j,x} \circ \psi_{ix}^{-1} \circ \psi_{k,x}(v) \quad \forall v \in G, \end{aligned}$$

  de modo que, $\widetilde{g}(x) \in G$.

- Por otro lado, la aplicación que a cada x le asigna el elemento $\widetilde{g}(x)$ determinado por el punto de arriba es claramente continua, pues $\widetilde{g}(x) = g_{lj}(x)g_{ik}(x)$.

Esto nos dice que los elementos de las fibras de un haz principal los podemos pensar como aplicaciones admisibles. Esto será útil más adelante en la demostración del teorema de clasificación de haces.

2.3. Construcciones de haces

El objetivo de esta parte es ilustrar algunas construcciones de haces fibrados a partir de haces, funciones continuas y funciones continuas entre ellos. Las construcciones aquí mostradas van a ser parte medular de la prueba del teorema de clasificación de haces 3.14.

Nota 2.37. Si ξ es cualquier haz, denotaremos con índices las partes que lo componen. De modo que

$$\xi = (F^\xi, B_\xi, G^\xi; \mathcal{F}^\xi, \mathcal{A}^\xi) \tag{2.1}$$

$$p_\xi \colon E_\xi \to B_\xi \tag{2.2}$$

2.3.1. Haz inducido

Consideremos un haz fibrado $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ y una aplicación continua $\alpha\colon A \to B$ continua.

Definición 2.38. Al haz fibrado

$$\alpha^*(\xi) = (F, G, A; \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{A}}),$$

le llamamos *haz inducido* por ξ vía la aplicación α o el *pullback*[1] de ξ por α, donde

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{\mathcal{F}}_a\}, \qquad \widetilde{\mathcal{F}}_a = \mathcal{F}_{\alpha(a)},\\
&\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{\varphi}_i\}_{i\in\mathcal{J}}, \quad \widetilde{\varphi}_i = \{\widetilde{\varphi}_{i,a} = \varphi_{i,\alpha(a)}\colon F \to \widetilde{\mathcal{F}}_a \mid a \in \alpha^{-1}(U_i)\}.
\end{aligned}$$

Notemos que si $\{g_{ij}\}$ son las transformaciones coordenadas de ξ, entonces las correspondientes para $\alpha^*(\xi)$ están dadas por $\{\widetilde{g}_{ij} = g_{ij}\alpha\}$:

$$\widetilde{g}_{ij}(a) = \widetilde{\varphi}_{i,a}^{-1}\widetilde{\varphi}_{j,a} = \varphi_{i,\alpha(a)}^{-1}\varphi_{j,\alpha(a)} = g_{ij}(\alpha(a)).$$

Dado que ambos haces tienen la misma fibra, es claro que $\alpha^*(\xi)$ es un haz principal si ξ lo es.

Nota 2.39. Entre estos dos haces existe una aplicación de haces definida como

$$(\alpha^\star, \alpha)\colon \alpha^*(\xi) \to \xi,$$

donde $\alpha_a^\star = \mathrm{id}\colon \widetilde{\mathcal{F}}_a \to \mathcal{F}_{\alpha(a)}$.

Proposición 2.40. *Sea $(f, \alpha)\colon \widehat{\xi} \to \xi$ una aplicación de haces fibrados, donde*

$$\widehat{\xi} = (F, G, A; \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{A}}) \quad \xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A}).$$

Entonces existe una única aplicación de haces $(h, \mathrm{id}_A)\colon \widehat{\xi} \to \alpha^*(\xi)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

[1]Sería adecuado contar con una palabra en español para este concepto que va más allá del ámbito de este trabajo. Algunas sugerencias ya existentes son *patraseo* y *retrotracción*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\xi} \arrow[dd, "{(h,\mathrm{id}_A)}"'] \arrow[dr, "{(f,\alpha)}"] & \\
& \xi \\
\alpha^*(\xi) \arrow[ur, "{\alpha^\star,\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Observemos que $f = \{f_a : \widehat{\mathcal{F}}_a \to \mathcal{F}_{\alpha(a)} = \widetilde{\mathcal{F}}_a\}$. Tomando esto en cuenta y la necesidad de conmutatividad del diagrama, la única opción de definir $h_a : \widehat{\mathcal{F}}_a \to \widetilde{\mathcal{F}}_a$ es $h_a = f_a$. Por lo que resta ver que la aplicación de haces de conjuntos es una aplicación de haces fibrados, pero esto se sigue de la siguiente relación:

$$\widetilde{\psi}^{-1}_{\mathrm{id}_A(a)} \circ h_a \circ \widehat{\varphi}_a = \psi^{-1}_{\alpha(a)} \circ f_a \circ \widehat{\varphi}_a$$

La parte izquierda es precisamente la condición de compatibilidad de la aplicación (f, α), de modo que en efecto es un elemento de G y depende continuamente de $a \in A$. □

Corolario 2.41. *$\widehat{\xi}$ es equivalente a $\alpha^*(\xi)$ sobre A.*

□

2.3.2. Haz funcional

Dados dos G-haces principales ξ, η y una función continua $f : B_\xi \to B_\eta$ construiremos un haz (ξ, η, f) de manera que ciertas funciones continuas $B_\xi \to E_{(\xi,\eta,f)}$ estén en biyección con aplicaciones de haces $\xi \to \eta$. Resultará que este nuevo haz tiene fibra G pero su grupo estructural es distinto.

Antes de pasar directamente a la construcción hagamos la siguiente definición análoga a 2.34.

Definición 2.42. Decimos que una aplicación de haces $h : \mathcal{F}^\xi_x \to \mathcal{F}^\eta_y$ es *admisible* si $\psi^{-1}_{y,j} \circ h \circ \varphi_{i,x} \in G$. [1]

[1] h no es por sí misma una aplicación de haces. Abusamos de la notación al referirnos únicamente a h como tal. Sin embargo, es claro que h induce una aplicación de haces, al determinar una aplicación continua en las bases $x \mapsto y$.

Al igual que en 2.34 es fácil notar que esta definición no depende de la elección de cartas.

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\xi &= \{\varphi_i\}_{i\in I} & \mathcal{A}^\eta &= \{\psi_j\}_{j\in J} \\ \varphi_i &= \{\varphi_{i,x}\colon G \to \mathcal{F}^\xi_x \mid x \in U_i\} & \psi_j &= \{\psi_{j,y}\colon G \to \mathcal{F}^\eta_y \mid y \in V_i\} \end{aligned}$$

Abusando de la notación denotaremos por $\phi_i\colon U_i \times G \to p_\xi^{-1}(U_i)$ y $\psi_j\colon V_j \times G \to p_\eta^{-1}(V_j)$ a los homeomorfismos respectivos, ver 2.30.

Para evitar cargar con demasiados índices, en el caso del haz (ξ, η, f) no denotaremos a sus componentes con la etiqueta correspondiente. Este nuevo haz tendrá como espacio base al conjunto $B = \mathrm{Graf} f = \{(x, f(x)) \mid x \in B_\xi\} \subset B_\xi \times B_\eta$.

La cubierta abierta está dada por $W_{ij} = (U_i \times V_j) \cap B$, mientras que las fibras $\mathcal{F}_{(x,f(x))}$ sobre cada punto están dadas por el conjunto de aplicaciones admisibles $\mathcal{F}^\xi_x \to \mathcal{F}^\eta_{f(x)}$. Los elementos del atlas los definimos como

$$\phi_{ij} = \{\phi_{ij,(x,f(x))}\colon G \to \mathcal{F}_{(x,f(x))} \mid (x, f(x)) \in W_{ij}\},$$

donde $\phi_{ij,(x,f(x))}(v) = \psi_{j,f(x)} \circ v \circ \varphi^{-1}_{i,x}$. Claramente está bien definida pues

$$\psi^{-1}_{k,f(x)} \circ (\psi_{j,f(x)} \circ v \circ \varphi^{-1}_{i,x}) \circ \varphi_{l,x} = \psi^{-1}_{k,f(x)} \circ \psi_{j,f(x)}) \circ v \circ (\varphi^{-1}_{i,x} \circ \varphi_{l,x}) \in G.$$

Además es biyectiva, su inversa está dada por $h \mapsto \psi^{-1}_{j,f(x)} \circ h \circ \varphi_{i,x}$.

Como mencionamos al principio, este haz tiene como fibra al mismo grupo G. Sin embargo, el atlas dado arriba no es un atlas para este grupo, pero lo es para un grupo que podemos construir a partir de él. Los cambios de coordenadas son:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}_{ij,(x,f(x))}\phi_{kl,(x,f(x))}(v) &= \phi^{-1}_{ij,(x,f(x))}(\psi_{l,f(x)} \circ v \circ \varphi^{-1}_{k,x}) \\ &= \psi^{-1}_{j,f(x)}\psi_{l,f(x)} \circ v \circ \varphi^{-1}_{k,x}\varphi_{i,x} = g_{jl}(f(x))vg^{-1}_{ki}(x). \end{aligned}$$

Esto nos lleva a definir

$$\begin{aligned} \lambda : (G \times G) \times G &\to G \\ ((u, \widehat{u}), v) &\mapsto uv\widehat{u}^{-1}. \end{aligned}$$

Sin embargo, esta acción no tiene por que ser efectiva. Si $uv\widehat{u}^{-1} = v$ para toda $v \in G$, en particular $u\widehat{u}^{-1} = e$, entonces $u = \widehat{u}$; de modo que $u \in Z(G) = \{g \in G \mid gv = vg\}$. Para que la acción sea efectiva basta remover estos elementos, es decir, tomar como grupo a

$$\widetilde{G} = G \times G/H,$$

donde $H = \{(g, g) \in G \times G \mid g \in Z(G)\}$. Además, por ser subgrupo normal de G, $\widetilde{G}$ es un grupo. Por lo tanto la acción inducida por λ es una acción efectiva izquierda de $\widetilde{G}$ en la fibra G. Finalmente, el atlas definido resulta un atlas para este grupo, ya que la asignación

$$(x, f(x)) \mapsto (g_{jl}(f(x)), g_{ki}(x))$$

es continua.

Lo que hace relevante a esta construcción es que dada una aplicación de haces $(F, f)\colon \xi \to \eta$ podemos definir una aplicación $\widetilde{s}\colon B_\xi \to E_{(\xi,\eta,f)}$ como

$$x \longmapsto (F_x \colon \mathcal{F}^\xi_x \to \mathcal{F}^\eta_{f(x)})$$

por definición (ver 2.13) los elementos F_x de F son aplicaciones admisibles. Además tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ B_\xi \arrow[ur, "\widetilde{s}"] \arrow[r, hook, "i"'] & \mathrm{Graf} f, \end{tikzcd}$$

es decir, $p(\widetilde{s}(x)) = (x, f(x))$, donde $E = \bigcup_{(x,f(x))\in \mathrm{Graf} f} \mathcal{F}_{(x,f(x))}$.

Proposición 2.43. *Sea $f\colon B_\xi \to B_\eta$ una función continua. Existe una biyección entre aplicaciones de haces de la forma $(F, f)\colon \xi \to \eta$ y aplicaciones continuas $\widetilde{s}\colon B_\xi \to E$ tales que $p(\widetilde{s}(x)) = (x, f(x))$.*

Demostración. Tenemos que ver que está bien definida, que es una biyección es claro. Veamos que f es compatible con $\mathcal{A}^\xi$ y $\mathcal{A}^\eta$ si y sólo sí $\widetilde{s}$ es continua. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} W_{ij} \times G \arrow[rr, "\phi_{ij}"] & & p^{-1}(W_i j) \\ & U_i \cap f^{-1}(V_j) \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "\widetilde{s}"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

Si definimos $g(x) = ((x, f(x)), \psi^{-1}_{j,f(x)} \circ F_x \circ \varphi_{i,x}$ el diagrama conmuta. Además, la continuidad de $\widetilde{s}(x)$ es equivalente a la continuidad de $g(x)$. Esta última es equivalente a la continuidad de F_x, pero esto es lo mismo que decir que (F, f) compatible con los atlas, ver TC2. Finalmente, como los abiertos $U_i \cap f^{-1}(V_j)$ cubren a B_ξ tenemos el resultado deseado. □

Definición 2.44. Al haz

$$(\xi, \eta, f) = (G, \widetilde{G}, \mathrm{Graf}f; \mathcal{A}, \mathcal{F}),$$

donde $\mathcal{A} = \{\phi_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ y $\mathcal{F} = \{h \colon \mathcal{F}^\xi_x \to \mathcal{F}^\eta_{f(x)} \mid h \text{ es admisible }\}$, le llamamos *haz funcional*.

Nota 2.45. Notemos que la construcción hecha funciona sin una función continua f. En este caso denotaremos simplemente como (ξ, η) al haz funcional compuesto por

$$(G, \widetilde{G}, B_\xi \times B_\eta; \mathcal{A}, \mathcal{F}), \tag{2.3}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^\xi \times \mathcal{A}^\eta \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \{h \colon \mathcal{F}^\xi_x \to \mathcal{F}^\eta_y \mid h \text{ es admisible }\}. \tag{2.4}$$

En este caso podemos enunciar la proposición 2.43 como:

Proposición 2.46. *Sean ξ y η dos G-haces principales. Para cada aplicación de haces $(F, f) \colon \xi \to \eta$ existe una única aplicación continua $\widetilde{s} \colon B_\xi \to E$ definida como*

$$x \longmapsto (F_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_{f(x)})$$

tal que $p(\widetilde{s}(x)) = (x, f(x))$

2.3.3. Haz funcional parcial

La construcción que haremos en este apartado es similar a la anterior, como su nombre lo indica. También partiremos de dos G-haces principales ξ y η. Sin embargo, en este caso el haz construido sí tendrá como grupo estructural a G y más importante aún, la biyección será entre secciones de este haz y aplicaciones de haces $\xi \to \eta$.

Sean ξ, η dos G-haces principales y (ξ, η) el haz funcional construido en la sección anterior. Construimos un nuevo haz χ mediante los siguientes elementos:

$$F^\chi = E_\eta, \quad G_\chi = G, \quad B_\chi = B_\xi,$$
$$\mathcal{F}^\chi = \{\mathcal{F}^\chi_x\}, \quad \mathcal{F}^\chi_x = \{h\colon \mathcal{F}^\xi_x \to \mathcal{F}^\eta_y \mid h \text{ es admisible y } y \text{ es arbitrario }\}$$
$$\mathcal{A}^\chi = \{\varphi^\chi_i\}, \quad \varphi^\chi_i = \{\varphi^\chi_{i,x}\colon F^\chi \to \mathcal{F}^\chi_x \mid x \in U^\xi_i\}.$$

Los elementos de las cartas están definidos como:

$$\varphi^\chi_{i,x}\colon (v\colon F^\eta \to \mathcal{F}^\eta_y) \mapsto (v\varphi^{-1}_{i,x}\colon \mathcal{F}^\xi_x \to \mathcal{F}^\eta_y)$$

Es claro que si v es admisible entonces $v\varphi^{-1}_{i,x}$ también lo es.

Finalmente, definamos la acción de G en la fibra $F^\chi = E_\eta$. Bajo la misma idea de la construcción anterior veamos cómo son los cambios de coordenadas:

$$\begin{aligned}(\varphi^\chi_{i,x})^{-1}(\varphi_{j,x})(v) &= v\varphi^{-1}_{i,x}\varphi_{j,x}\\ &= v(g^\xi_{ij}(x))^{-1}.\end{aligned}$$

Definimos la acción $\lambda^\chi : G \times E_\eta \to E_\eta$ como $\lambda^\chi(u,h) = \rho_\eta(h, u^{-1}) = hu^{-1}$, por lo que la continuidad y el ser efectiva lo hereda de ρ_η.

Definición 2.47. Al G-haz fibrado que consta de los elementos arriba enlistados lo denotamos con $(\xi, \eta)_1$ y lo llamamos *haz funcional parcial.*

Para finalizar la construcción veamos que tiene la propiedad que al inicio mencionamos. Es decir, que las secciones del haz están en correspondencia biyectiva con aplicaciones de haces $\xi \to \eta$. Notemos que en el caso de un haz funcional asociamos una función continua y no una sección. En este caso resulta que esta misma función es la sección de nuestro nuevo haz. Para ver esto necesitamos ver que los espacios totales del haz funcional y del haz funcional parcial tienen la misma topología.

Por un lado

$$E_\chi = \bigcup_{x \in B_\xi} \mathcal{F}^\chi_x = \bigcup_{x \in B_\xi} \bigcup_{y \in B_\eta} \mathcal{F}_{(x,y)} = E_{(\xi,\eta)}.$$

Por lo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E_{(\xi,\eta)} \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_{(\xi,\eta)}"'] & E_\chi \arrow[d, "p_\chi"] \\ B_\xi \times B_\eta \arrow[r, "proy_1"'] & B_\xi, \end{tikzcd}$$

y define al fibrado localmente trivial asociado al haz funcional parcial.

Lema 2.48. *Los espacios $E_{(\xi,\eta)}$ y E_χ tienen la misma topología.*

Demostración. Las topologías de los espacios totales en cuestión están determinadas por las siguientes aplicaciones:

$$\phi_{(\xi,\eta)} : U_\xi \times U_\eta \times \longrightarrow p^{-1}_{(\xi,\eta)}(U_\xi \times U_\eta)$$
$$\phi_\chi : U_\xi \times E_\eta \longrightarrow p^{-1}_\chi(U_\xi)$$

Por otro lado, tenemos la aplicación que determina la topología del espacio total de η, es decir de la fibra de χ:

$$\phi_\eta : U_\eta \times G \to p^{-1}_\eta(U_\eta).$$

Esta información la podemos juntar en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U_\xi \times U_\eta \times G \arrow[r, "\mathrm{id}\times\phi_\eta"] \arrow[d, "\phi_{(\xi,\eta)}"'] & U_\xi \times p^{-1}_\eta(U_\eta) \arrow[r, hook, "i"] & U_\xi \times E_\eta \arrow[d, "\phi_\chi"] \\ p^{-1}_{(\xi,\eta)}(U_\xi \times U_\eta) \arrow[r, hook] & p^{-1}_{(\xi,\eta)}(U_\xi \times B_\eta) \arrow[r, equal] & p^{-1}_\chi(U_\xi), \end{tikzcd}$$

en donde la igualdad está dada por el diagrama previo al lema 2.3.3.

De modo que lo que basta ver es que $p^{-1}_\chi(U_\xi)$ es abierto en $E_{(\xi,\eta)}$ y que ϕ_χ es un homeo sobre $p^{-1}_\chi(U_\xi)$. Lo primero sale del diagrama previo al lema 2.3.3, pues $p_\chi = proy_1 \circ p_{(\xi,\eta)}$. Por otro lado, tenemos por el diagrama anterior que $\phi_\chi \circ i = \phi_\chi|_{U_\xi \times p^{-1}_\eta(U_\eta)}$, es decir, $p^{-1}_{(\xi,\eta)}(U_\xi \times U_\eta) \approx p^{-1}_\chi(U_\xi)$ vía $\phi_\chi|_{U_\xi \times p^{-1}_\eta(U_\eta)}$, lo cual prueba la segunda afirmación deseada, ya que $(U_\xi \times p^{-1}_\eta(U_\eta)$ cubren a $U_\xi \times E_\eta$ y los abiertos $p^{-1}_{(\xi,\eta)}(U_\xi \times U_\eta)$ cubren a $p^{-1}_{(\xi,\eta)}(U_\xi \times B_\eta) = p^{-1}_\chi(U_\xi)$. □

La propiedad que tiene este haz es resultado directo del lema anterior y de la propiedad del haz funcional, pues la biyección es la misma.

Corolario 2.49. *Sea $f : B_\xi \to B_\eta$ continua. Hay una biyección entre aplicaciones de haces de la forma $(F, f) : \xi \to \eta$ y secciones del haz (ξ, η).*

Capítulo 3

Clasificación de haces

El resultado de este capítulo consiste en relacionar el conjunto $[X, B_\xi]$ de clases de homotopía de aplicaciones continuas entre un espacio arbitrario X y un espacio B_ξ que llamaremos espacio clasificante, con el conjunto $k_G^{\#}(X)$ de clases de equivalencia (sobre X) de G-haces fibrados principales numéricos, con espacio base X.

Este resultado es debido a Dold; el tratamiento que daremos de éste será siguiendo sus pasos, ver [Dol63].

En las primeras dos secciones desarrollamos aspectos técnicos que son necesarios para la demostración del teorema que caracteriza a los haces universales. Finalmente enunciamos y probamos la clasificación de haces principales numéricos, así como la definición y caracterización de los haces universales.

3.0.1. Extensión de una sección

Los conceptos de esta parte se pueden consultar direcatmente en [Der68] o en[Kel95].

A lo largo de esta sección denotaremos por $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a una cubierta (no necesariamente abierta) de un espacio X, por $\mathcal{P} = \{p_\beta \colon X \to [0,1]\}_{\beta \in B}$ a una familia de aplicaciones continuas; al soporte de p_β lo denotaremos como $\overline{V_\beta}$, donde $V_\beta = \{x \in X \mid p_\beta(x) > 0\}$. Siguiendo a [Der68], diremos que la familia $\mathcal{P}$ tiene la propiedad P si la familia $\{V_\beta \mid \beta \in B\}$ tiene la propiedad P.

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico.

- Decimos que una familia $\{p_\beta \colon X \to [0,1] \mid \beta \in B\}$ de aplicaciones continuas es σ-*discreta* si $B = \bigcup\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una unión ajena tal que la colección $\{V_\beta \mid \beta \in B_n\}$ es discreta para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, para cada $x \in X$, existe una vecindad que intersecta a lo más a un miembro de la familia.

- Un *partición de la unidad* es una familia $\{p_\beta \colon X \to [0,1]\}_{\beta \in B}$ de aplicaciones continuas tal que para cada $x \in X$

  - $p_\beta(x) = 0$ para casi toda $\beta \in B$, también se dice que la familia es puntualmente finita.
  - $\Sigma_{\beta \in B} p_\beta(x) = 1$.

- Decimos que la partición de la unidad es *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe una vecindad V tal que $p_\beta|_V = 0$ para casi toda $\beta \in B$.

- Decimos que $\mathfrak{U}$ es *numérica* si existe una partición de la unidad localmente finita $\{p_\beta \colon X \to [0,1]\}_{\beta \in B}$, tal que $\{\overline{V_\beta}\}_{\beta \in B}$ es un refinamiento de la cubierta, es decir tal que cada $\overline{V_\beta}$ está contenido en algún U_α. En particular cada V_β está contenido en algún U_α.

- Decimos que $\mathfrak{U}$ es σ-*numérica*[1], si existen familias $\{p_\beta \mid \beta \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cuya unión refina a $\mathfrak{U}$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ la familia $\{p_\beta \mid \beta \in B_m\}$ es localmente finita.

Tenemos el siguiente resultado debido a [Der68], el cual nos permitirá probar de manera sencilla el teorema de extensión de secciones.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio y $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta de X. Son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{U}$ es numérica.*

2. *Existe una partición de la unidad localmente finita $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $V_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in A$; algunas p_α's pueden ser cero.*

3. *Existe una partición de la unidad localmente finita σ-discreta cuyos soportes refinan a $\mathfrak{U}$.*

[1]El prefijo σ suele utilizarse pare denotar numerabilidad.

4. $\mathcal{U}$ es σ-numérica.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: Sea $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$ una partición de la unidad localmente finita tal que $V_\beta \subset U_\alpha$ para alguna $\alpha \in A$. Definimos $\tau\colon B \to A$ como $\tau(\beta) = \alpha$, donde $V_\beta \subset U_{\tau(\beta)}$. Con ayuda de esta función construimos una familia de funciones continuas indexada por el mismo índice de nuestra cubierta $\mathcal{U}$ original:

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \tau^{-1}(\alpha) = \emptyset, \\ \sum\{q_\beta(x) \mid \beta \in \tau^{-1}(\alpha)\}, & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Veamos que en efecto es una partición de la unidad localmente finita; tenemos que

$$\sum_\alpha p_\alpha(x) = \sum_\alpha \left(\sum_{\beta\in\tau^{-1}(\alpha)} q_\beta(x) + 0's \right) = \sum_\beta q_\beta(x) = 1.$$

Por otro lado, para toda $x \in X$ existe una vecindad V de x, tal que $q_\beta|_V = 0$ para casi toda β; sean $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ los índices para los cuales no se anulan y $\alpha_i = \tau(\beta_i)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. De modo que $p_{\alpha_i}|_V \neq 0$, por definición, mientras que para los otros índices, $p_\alpha|_V = 0$ pues $q_\beta|_V = 0$ y $\overline{V_\beta} \cap V = \emptyset$, es decir, $\tau^{-1}(\alpha) = \emptyset$.

$2 \Rightarrow 3$: Sean $B = \{\text{subconjuntos finitos de } A \text{ no vacíos}\}$ y $B_n = \{\beta \in B \mid |\beta| = n\}$; estos últimos son claramente disjuntos, además $B = \bigcup_n B_n$. Sea $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ partición de la unidad localmente finita cuyos soportes refinan a $\mathcal{U}$.

Para $\beta \in B$ definimos $m_\beta\colon X \to [0,1]$ como

$$m_\beta(x) = \text{mín}\{p_\alpha(x) \mid \alpha \in \beta\},$$

y $M_\beta\colon X \to [0,1]$ como

$$M_\beta(x) = \text{máx}\{p_\alpha(x) \mid \alpha \notin \beta\}.$$

Al ser $\{p_\alpha\}$ localmente finita, ambas funciones están bien definidas. Por medio de estas, definimos $P\colon X \to [0,1]$ como

$$P(X) = \text{máx}\{0, m_\beta(x) - M_\beta(x) \mid \beta \in B\}.$$

Notemos que esta función siempre es positiva. Sea $x \in X$, sabemos que existe una vecindad V de x tal que $p_\alpha|_V = 0$ para casi toda $\alpha \in A$, sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ aquellos índices para los cuales las correspondientes funciones no se anulan en

V. Sea $\beta_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha\}$, entonces $M_{\beta_0}(x) = 0$ y $m_{\beta_0}(x) > 0$. De modo que $P(x) \geq 0$. Esto nos permite asegurar que la función $Q_\beta\colon X \to [0,1]$, definida como

$$Q_\beta(x) = \text{máx}\{0, m_\beta(x) - M_\beta(x) - \tfrac{1}{2}P(x)\},$$

está bien definida.

Más aún, afirmamos lo siguiente:

a) Si $V_\beta = \{x \mid Q_\beta(x) > 0\}$ y $W_\beta = \{x \mid m_\beta(x) > M_\beta(x)\}$, entonces $\overline{V_\beta} \subset W_\beta \subset \cap\{U_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$.

b) $\{V_\beta \mid \beta \in B\}$ es una cubierta localmente finita de X, s decir, para toda $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que $V \cap V_\beta = \emptyset$ para casi toda β.

c) $\{\overline{V_\beta}\}$ es una familia discreta, es decir, para cada $x \in X$, existe una vecindad que intersecta a lo más a un miembro de la familia.

En efecto, a): Si $x \in \overline{V_\beta}$, entonces $Q_\beta(x) \geq 0$, es decir, $m_\beta(x) - M_\beta(x) \geq \frac{1}{2}P(x) > 0$, por lo que $x \in W_\beta$. Por otro lado, si $x \in W_\beta$, entonces $m_\beta(x) > M_\beta(x) \geq 0$. Esto implica que para toda $\alpha \in \beta$, $p_\alpha(x) > 0$, de lo contrario $m_\beta = 0$. Entonces,

$$x \in \bigcap_{\alpha\in\beta}\{x' \mid p_\alpha(x') > 0\} \subset \bigcap_{\alpha\in\beta} U_\alpha.$$

b): Como la partición de la unidad es localmente finita, dada $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que $\gamma = \{\alpha \in A \mid V \cap V_\alpha\} \neq \emptyset$ es un conjunto finito. Si $V \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces por i), $V \cap (\cap_{\alpha\in\beta} U_\alpha) \neq \emptyset$. En particular, $V \cap U_\alpha$ para toda $\alpha \in \beta$, es decir, $\beta \subset \gamma$. Por lo que β es finito. Más aún, como $P(x) = m_\beta(x) - M_\beta(x)$, tenemos que $Q_\beta(x) > 0$; por lo que la colección es una cubierta.

c): Por a), basta ver que W_β y W'_β son disjuntos si $\beta \neq \beta'$, con β y β' de tamaño n. Sean $\beta \neq \beta'$ de la misma longitud n, entonces existen al menos α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 \in \beta$, $\alpha_1 \notin \beta'$, $\alpha_2 \notin \beta$ y $\alpha_2 \in \beta'$. De modo que si $x \in W_\beta$, tenemos que $p_{\alpha_1}(x) \geq m_\beta(x) > M_\beta(x) \geq p_{\alpha_2}(x)$; por otro lado, si $x \in W_{\beta'}$, entonces $p_{\alpha_2}(x) \geq m_{\beta'}(x) > M_{\beta'}(x) \geq p_{\alpha_1}(x)$. De modo que, $W_\beta \cap W_{\beta'} = \emptyset$.

Finalmente, definimos la partición de la unidad localmente finita que satisface el enunciado de 3, esto lo hacemos al normalizar Q_β:

$$q_\beta := \frac{Q_\beta}{\sum\{Q'_\beta \mid \beta' \in B\}}, \qquad \beta \in B = \bigcup_n B_n.$$

Además, $\{x \mid q_\beta(x) > 0\} = \{x \mid Q_\beta(x) > 0\} = V_\beta$. Más aún, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{V_\beta\} \subset \{\overline{V_\beta}\}$ es discreto. Por otro lado, es claro que

$$\sum_{\beta \in B} q_\beta(x) = 1.$$

Mientras que de b), vemos que es localmente finita.

$3 \Rightarrow 4$: Es inmediato. Como mencionamos al principio, la propiedad de $\{p_\beta \mid \beta \in B_n\}$ de ser localmente finita para cada n estaría heredada de la familia $\{V_\beta \mid \beta \in B_n\}$ para cada n. Pero sabemos que para cada n, esta última colección es discreta, en particular es localmente finita. Por lo que $\{p_\beta \mid \beta \in B_n\}$ es localmente finita y esto garantiza que $\mathcal{U}$ es σ-numérica.

$4 \Rightarrow 1$: Supongamos que $\mathcal{U}$ es σ-numérica, es decir, existe una familia $\mathcal{P} = \{p_\beta \mid \beta \in B_n, n \in \mathbb{N}\}$ tal que refina a $\mathcal{U}$ y, además, para cada n la colección $\{p_\beta \mid \beta \in B_n\}$ es localmente finita. Queremos construir una partición de la unidad semejante pero que cumpla ser localmente finita. El candidato ideal para esto es empezar por la que tenemos, sin embargo, al variar n es claro que se pierde la finitud local. Esto lo podemos resolver como sigue:

Para cada $k > 0$ definimos

$$q_k = \sum_{i<k} \{p_\beta \mid \beta \in B_i\}$$

y para $\beta \in B_n$ definimos

$$\widetilde{p_\beta}(x) = \text{máx}\{0, p_\beta(x) - nq_n(x)\}.$$

Sean $x \in X$ y r el mínimo tal que $p_\beta(x) \neq 0$ para alguna $\beta \in B_r$. Entonces, por definición, $q_r(x) = 0$, y para $\beta \in B_r$, $\widetilde{p_\beta}(x) = p_\beta(x) \neq 0$. Es decir, los conjuntos $\{x \mid \widetilde{p_\beta}(x) > 0\}$ cubren a X.

Más aún, si $N > r$ tal que $p_\beta(x) > \frac{1}{N}$, con $\beta \in B_r$, entonces $q_N(x) > \frac{1}{N}$, i.e. $Nq_N(x) > 1$. Por continuidad, existe una vecindad de x tal que para todo y en esa vecindad $Nq_N(y) > 1$.

En esta vecindad, por definición, $\widetilde{p_\beta}$ se anula para toda $\beta \in B_m$, con $m \geq N$. Es decir, en esta vecindad $\widetilde{p_\beta} \neq 0$ para toda $\beta \in B_i$, con $i < r$. De hecho, en este caso $\widetilde{p_\beta} = p_\beta$.

Como sabemos que $\{p_\beta \mid \beta \in B_r\}$ es localmente finita, podemos concluir que la familia $\{\widetilde{p_\beta}\}_\beta \in B\}$ es localmente finita. Además, $\{x \mid \widetilde{p_\beta}(x) > 0\} \subset$

$\{x \mid p_\beta(x) > 0\}$. Finalmente normalizando cada $\widetilde{p_\beta}$ obtenemos la partición de la unidad deseada. $\square$

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.3. *Sean E, B espacios, $\mathfrak{U}$ una cubierta numérica de B y $p : E \to B$ un fibrado localmente trivial sobre cada miembro de la cubierta, ver 2.27. Entonces, existe una partición de la unidad localmente finita y numerable $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que p es trivial en una vecindad del soporte de p_n para cada n.*

Demostración. La cubierta $\mathfrak{U}$ es numérica, lo cual es equivalente al enunciado 3. De modo que tenemos una partición de la unidad localmente finita, $\{q_\beta \mid \beta \in B\}$ tal que $B = \cup_n B_n$ es una unión disjunta y $\{V_\beta \mid \beta \in B_n\}$ es discreto para cada n, donde $\overline{V_\beta} \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in A$.

Definimos

$$p_n = \sum_{\beta \in B_n} q_\beta.$$

Es claro que para toda $x \in X$, $\sum_n p_n(x) = \sum_{\beta \in B} q_\beta(x) = 1$. Por otro lado, también es claro que al ser la colección $\{V_\beta \mid \beta \in B_n\}$ discreta para cada n, la colección $\{\overline{V_\beta} \mid \beta \in B_n\}$ también lo es. Más aún, un punto es punto de acumulación de $\cup_{\beta \in B_n} V_\beta$ si y sólo si es punto de acumulación de algún V_β. Por lo que tenemos:

$$\overline{\{x \mid p_n(x) > 0\}} = \overline{\{x \mid \sum_{\beta \in B_n} q_\beta(x) > 0\}} = \overline{\bigcup_{\beta \in B_n} V_\beta} = \bigcup_{\beta \in B_n} \overline{V_\beta}.$$

El último término es una unión ajena, pues la familia es discreta. Por lo que, en efecto, $p : E \to B$ es trivial sobre una vecindad de $\overline{\{x \mid p_n(x) > 0\}}$ $\square$

Antes de continuar con los resultados del teorema 3.2. Establezcamos la siguiente definición fundamental.

Definición 3.4. Decimos que un haz fibrado es *numérico* si tiene un atlas cuya cubierta abierta es numérica.

En particular todo haz fibrado cuya base sea un espacio paracompacto (toda cubierta abierta admite un refinamiento localmente finito) es numérico. Esta clase incluye a todos los complejos CW.

Vía el corolario 3.3 tenemos una demostración sencilla de un caso particular del resultado expuesto en [Dol63, p. 229], el cual usaremos para poder probar la caracterización de G-haces principales numéricos. Antes de enunciar este resultado, establezcamos la siguiente definición y el siguiente lema, los cuales usaremos en la prueba.

Definición 3.5. Sean B un espacio y $A \subset B$. Decimos que V es un *halo* de A en B, si existe una función $f\colon B \to [0,1]$ continua tal que

$$\begin{aligned} A &\subset f^{-1}(0), \\ B - V &\subset f^{-1}(1). \end{aligned}$$

Lema 3.6. *Sean $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ un haz fibrado, tal que la fibra F es contraíble, y $p\colon E \to B$ el fibrado localmente trivial asociado, ver 2.30. Sean V un halo de A en B y $s\colon V \to E$ una sección de p sobre V. Para cada elemento de la cubierta trivializadora U que toque a V existen un halo W de A en B y una sección $s_U\colon W \cup U \to E$ de p tal que $W \subset V$ y $s_U|_W = s|_W$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos $f\colon B \to [0,1]$ tal que $A \subset f^{-1}(0)$ y $B - V \subset f^{-1}(1)$, $\phi\colon U \times F \to p^{-1}(U) \subset E$ la trivialización sobre U y una homotopía $H\colon F \times I \to F$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = *$.

Definimos

$$\begin{gathered} W = \{b \in B \mid f(b) < \tfrac{1}{2}\}, \\ \overline{s}\colon V \cap U \to F, \quad \phi^{-1}(s(b)) = (b, \overline{s}(b)). \end{gathered}$$

Es claro que $W \subset V$, por definición. La función $g(x) = \text{mín}\{1, 2f(x)\}$ garantiza que W es un halo de A en B. Con esto en mano podemos construir la sección que modifica a s. Sea $s_U\colon W \cup U \to E$ definida como:

$$s_U(b) = \begin{cases} s(b), & \text{si } b \in W \text{ y } f(b) \leq \frac{1}{2}, \\ \phi(b, H(\overline{s}(b), 4f(b) - 2), & \text{si } b \in U \cap V \text{ y } \frac{1}{2} \leq f(b) \leq \frac{3}{4}, \\ \phi(b, *), & \text{si } b \in U \text{ y } f(b) \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Veamos que en efecto, s_U es sección de p:

Si $b \in W$ y $f(b) \leq \frac{1}{2}$, entonces $p(s_U(b)) = p(s(b)) = b$.

Si $b \in U \cap V$ y $\frac{1}{2} \leq f(b) \leq \frac{3}{4}$, entonces $p(s_U(b)) = p(\phi(b, H(\overline{s}(b), 4f(b) - 2)) = b$, ver 2.27. Al igual que para $b \in U$ y $f(b) \geq \frac{3}{4}$.

La continuidad de s_U es clara de la definición. □

Ya tenemos todos los elementos para enunciar y probar el teorema que será fundamental para la caracterización de los haces. Notemos que en el caso anterior tenemos una sección para cada abierto trivializador, de modo que para obtener una sección global nos gustaría pegar cada una de ellas, sin embargo esto sólo funciona en casos especiales como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sean $\xi = (F, G, B; \mathcal{F}, \mathcal{A})$ una G-haz fibrado numérico, tal que la fibra F es contraíble, y $p\colon E \to B$ el fibrado localmente trivial asociado. Sean V un halo de A en B y $s\colon V \to E$ una sección de p sobre V. Entonces existe una sección $S\colon B \to E$ tal que $S|_A = s|_A$. En particular, p siempre tiene una sección.*

Demostración. Sea $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una partición de la unidad como en el corolario 3.3, es decir, es una partición de la unidad localmente finita y numerable tal que $p\colon E \to B$ es trivial sobre una vecindad U_n del soporte de p_n para cada n.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el orden de los U_n's nos permite aplicar el lema anterior, 3.6, a los conjuntos V, A y U_1, tenemos una sección $s_1 : W_1 \cup U_1 \to E$, donde W_1 es un halo de A en B, $W_1 \subset V$ y $s_1|_{W_1} = s|_{W_1}$, en particular $s_1|_A = s|_A$.

Definamos $f_1 = 1 - p_1\colon B \to [0,1]$, $B_1 = f_1^{-1}(0)$ y $f_1^{-1}(1) = p_1^{-1}(0) \supset B - U_1$. Tenemos que $W_1 \cup U_1$ es un halo de $A_1 = A \cup B_1$ en B: Sea $q : B \to [0,1]$ la función continua que tenemos debido a que W_1 es un halo de A en B. Definamos $h : B \to [0,1]$ como $h(b) = \frac{1}{2}(f_1(b) + q(b))$. Entonces $h^{-1}(0) = f_1^{-1}(0) \cup q^{-1}(0) \supset B_1 \cup A = A_1$ y $h^{-1}(1) = f_1^{-1}(1) \cup q^{-1}(1) \supset (b - U_1) \cup (B - W_1) = B - (W_1 \cup U_1)$.

Con esto podemos aplicar nuevamente el lema anterior a los conjuntos $W_1 \cup U_1, A$ y U_2, para obtener una sección $s_2\colon W_2 \cup U_2 \to E$, con W_2 halo de A en B, $W_2 \subset W_1 \cup U_1$ y $s_2|_{W_2} = s_1|_{W_2}$.

Definimos

$$f_n = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_n\colon B \to [0,1],$$
$$B_n = f_n^{-1}(0) \quad \text{y} \quad A_n = A \cup B_n$$

De manera inductiva obtenemos $s_n\colon W_n \cup U_n \to E$ sección, con W_n halo de A en B, $W_n \subset W_{n-1} \cup U_{n-1}$ y $s_n|_{W_n} = s_{n-1}|_{W_n}$.

De esta manera definimos una sección global $S \colon B \to E$ como $S(x) = s_n(x)$ si $x \in A_n$. Además cumple que $S|_A = s|_A$, como $S(x) = s_n(x)$ si $x \in A_n$. En efecto, notemos que

$$B_n = f_n^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{n} p_i^{-1}(0) \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} p_i^{-1}(0) = f_{n+1}^{-1}(0) = B_{n+1},$$

de modo que $A_n \subset A_{n+1}$. Además, $W_{n+1} \cup U_{n+1}$ es halo de A_{n+1} en B, en particular, $A_{n+1} \subset W_{n+1} \cup U_{n+1}$ con $W_{n+1} \subset W_n \cup U_n$ y $s_{n+1}|_{W_{n+1}} = s_n|_{W_{n+1}}$ por lo que, en particular, $s_{n+1}|_{A_{n+1}} = s_n|_{a_{n+1}}$. Incluso más, $A \subset \cap_n A_n$ y $B = \bigcup_n A_n = \bigcup_n (A \cup B_n) = \bigcup (A \cup U_n)$. Por lo que efectivamente las dos secciones coinciden al restringirlas a A.

Finalmente, S es continua debido a que la familia es localmente finita:

Para ver la última afirmación basta tomar $A = V = \emptyset$. □

3.0.2. Propiedad de levantamiento de homotopía

Recordemos la definición de propiedad de levantamiento de homotopías (PLH) 1.19.

Definición 3.8. Decimos que una aplicación $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopías (PLH) o que es una fibración de Hurewicz si para todo espacio Y y cualquier diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & B, \end{tikzcd}$$

existe $\widetilde{H} : Y \times I \to E$ que lo hace conmutar.

Como mencionamos anteriormente, ver 1.19, una fibración de Hurewicz es una aplicación que tiene la PLH para todos los espacios. El siguiente resultado nos permite ver la pertinencia del concepto de cubierta numérica. Dado que la prueba de este resultado es técnica y no es imprescindible para lo que realizaremos más adelante, decidimos omitirla. Para los detalles se puede consultar [PP13].

Teorema 3.9. *Sea $p : E \to B$ continua y $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ una cubierta de B, tal que $p|_{p^{-1}(U_i)}$ es una fibración de Hurewicz, ver 1.19. Si $\mathfrak{U}$ es numérica, entonces p es una fibración de Hurewicz.*

□

El siguiente resultado es análogo al anterior para aplicaciones de haces.

Teorema 3.10. *Sean ξ y η G-haces principales numéricos, $(f, \overline{f})\colon \xi \to \eta$ una aplicación de haces y $D\colon B_\xi \times [0,1] \to B_\eta$ una deformación de $\overline{f}$, es decir $D(b,0) = \overline{f}(b)$. Entonces existe una aplicación de haces $(F, \overline{F})\colon \xi \times [0,1] \to \eta$ tal que $\overline{F} = D$ y $F_b(z,0) = f_b(z)$ para todas $z \in E_\xi$ y $b \in B_\xi$.*

Antes de pasar a la prueba de este resultado necesitaremos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 3.11. *Si $p\colon E \to B \times I$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopías, entonces toda sección s de p sobre $B \times \{0\}$ tiene una extensión sobre $B \times I$.*

Demostración. La aplicación $\overline{H} = \mathrm{id}_{B \times I}$ es una deformación de $p \circ s$, i.e $\overline{H}(b,0) = p(s(b))$. Más aún, una homotopía H que sea un levantamiento de $\overline{H}$ y que inicie con s es una sección como la buscada. En un diagrama

$$\begin{tikzcd} B \approx B \times \{0\} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ B \times I \arrow[r, "\overline{H} = \mathrm{id}"'] \arrow[ur, "H"] & B \times I. \end{tikzcd}$$

□

Demostración (prueba de 3.10). Consideremos el haz funcional parcial $\zeta = (\xi \times [0,1], \eta, D)$, ver 2.47, recordemos que este haz tiene la propiedad de que las secciones están en correspondencia con aplicaciones de haces $\xi \times [0,1] \to \eta$. La aplicación de haces $(f, \overline{f})\colon \xi \to \eta$ podemos verla como una aplicación de $\xi \times \{0\}$ en η, es decir, como una sección del haz funcional parcial sobre $B_\xi \times \{0\}$. Por el lema 3.11, esta sección se extiende a una sección sobre todo $B_\xi \times [0,1]$ y ésta, a su vez, da pie a la extensión de la aplicación $(f, \overline{f})$, es decir, a $(F, \overline{F})\colon \xi \times [0,1] \to \eta$. □

Corolario 3.12. *Si η es un haz principal numérico y $f_0, f_1 : X \to B_\eta$ son aplicaciones homotópicas, entonces los haces inducidos $f_0^*(\eta)$ y $f_1^*(\eta)$ son equivalentes sobre X.*

Demostración. Sea $(f_0^\star, f_0) : f_0^*(\eta) \to \eta$ la equivalencia de haces. Como f_0 es homotópica a f_1, existe $D : X \times I \to B_\eta$ tal que $D(x, 0) = f_0(x)$ y $D(x, 1) = f_1(x)$. Entonces por el teorema 3.10 existe una aplicación de haces (D', D) : $f_0^*(\eta) \times [0, 1] \to \eta$, ésta induce una aplicación de haces

$$(D'|_{f_0^* \times \{1\}}, f_1) : f_0^*(\eta) \to \eta.$$

Por otro lado, tenemos la aplicación de haces $(f_1^\star, f_1) : f_1^*(\eta) \to \eta$. Por lo que, usando 2.40 y 2.41, tenemos que los haces $f_0^*(\eta)$ y $f_1^*(\eta)$ son equivalentes sobre X. □

3.0.3. Clasificación de haces principales numéricos

Sea G un grupo topológico. Recordemos que denotamos con $k_G^\#(X)$ a las clases de equivalencia de G-haces principales numéricos sobre X. Como veremos en esta sección $k_G^\#(X)$ es un conjunto.

Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación continua podemos definir una aplicación $k_G^\#(Y) \to k_G^\#(X)$ que manda a un haz al haz inducido bajo f (ver 2.38), dicha aplicación la denotamos por $k_G f$. De esta manera $k_G^\#$ define un funtor contravariante de la categoría $\mathfrak{K}$-$\mathfrak{Top}$ a la categoría de conjuntos. Más aún como aplicaciones homotópicas inducen haces equivalentes, ver 3.12, dicho funtor se puede ver como un funtor de la categoría $\mathcal{H}$, cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son clases de homotopía de aplicaciones continuas, a la categoría de conjuntos.

Por otro lado, si B es un espacio topológico tenemos un funtor contravariante $[-, B]$ de la categoría $\mathcal{H}$ a la categoría de conjuntos.

De modo que dado η un G-haz principal numérico fijo, para cualquier espacio X tenemos una aplicación bien definida

$$T_\eta\colon [X, B_\eta] \to k_G^\#(X).$$

tal que manda a $[f]$ a la clase de equivalencia sobre X de $f^*(\eta)$.

Definición 3.13. Decimos que un G-haz principal numérico es universal si la aplicación T_η es una biyección. Al espacio base B_η le llamamos espacio clasificante de G.

El siguiente resultado es debido a Dold, ver [Dol63]. Este resultado además de caracterizar a los haces universales nos permite clasificar a los haces principales numéricos.

Teorema 3.14. *Sea η un G-haz principal numérico. Entonces η es universal si y sólo si E_η es contraíble.*

Demostración. Supongamos que E_η es contraíble y sea ξ un G-haz principal numérico arbitrario. Denotemos por X al espacio base B_ξ. Consideremos el haz funcional parcial $(\xi, \eta)_1$, ver 2.47. Observemos que el haz $(\xi, \eta)_1$ es numérico pues tiene la misma base que ξ, el cual es numérico. Recordemos que las secciones $s\colon X \to E_{(\xi,\eta)_1}$ están en correspondencia biyectiva con aplicaciones de haces $(S, \overline{s})\colon \xi \to \eta$.

Ahora, como E_η es contraíble y $(\xi, \eta)_1$ numérico tenemos, por 3.7, que la aplicación $p_{(\xi,\eta)_1}\colon E_{(\xi,\eta)_1} \to X$ tiene una sección. Por lo mencionado en el párrafo anterior, esto equivale a tener una aplicación de haces $\xi \to \eta$. En particular, existe $\overline{s}\colon X \to B_\eta$ tal que $\overline{s}^*(\eta) = \xi$, ver 2.40. Esto muestra que T_η es suprayectiva, pues $T_\eta([\overline{s}]) = [\xi]$.

Por otro lado, supongamos que $f_1, f_0\colon X \to B$ inducen haces equivalentes $T_\eta[f_i] = f_i^*(\eta) = \xi_i$, para $i = 0, 1$. Sean $(s_i, f_i)\colon \xi_i \to \eta$ las correspondientes aplicaciones de haces y $(h, \mathrm{id}_X)\colon \xi_0 \to \xi_1$ la equivalencia de haces. En un diagrama tenemos:

$$\begin{tikzcd}
E_{\xi_0} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "s_0"] \arrow[dr] & E_{\xi_1} \arrow[r, "s_1"] \arrow[d] & E_\eta \arrow[d, "p_\eta"] \\
 & X \arrow[r, "f_0, f_1"'] & B_\eta
\end{tikzcd}$$

donde $h = \{h_x\colon \mathcal{F}_x^{\xi_0} \to \mathcal{F}_1^{\xi_1} \mid x \in X\}$ y $\overline{s}_i = \mathrm{id}\colon \mathcal{F}_x^{\xi_i} \to \mathcal{F}_{f_i(x)}^{\eta}$.

Consideremos $\pi\colon X \times [0,1] \to X$ tal que $\pi(x,t) = x$. Esta aplicación induce un haz sobre $X \times [0,1]$, $\pi^*(\xi_0)$, el cual denotaremos simplemente como ξ. Definamos

$$s = (s, \alpha)\colon \xi|_{X \times ([0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1])} \to \eta$$

como $s = \{s_{(x,t)} \mid (x,t) \in X \times ([0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1])\}$, donde

$$\overline{s}_{(x,t)}(z,t) = \begin{cases} \overline{s}_0(z) & \text{si} \quad t < \frac{1}{2}, \\ \overline{s}_1(h(z)) & \text{si} \quad t > \frac{1}{2}, z \in E_{\xi_0} \end{cases}$$

y $\alpha(x,t) = f_0(x)$ si $t < \frac{1}{2}$ y $\alpha(x,t) = f_1(x)$ si $t > \frac{1}{2}$. De la misma manera que antes, esta aplicación de haces corresponde a una sección de $p_{(\xi,\eta)}$. De manera explícita, la asignación $(x,t) \mapsto s_{(x,t)}$ define la sección mencionada, la cual denotaremos simplemente como s, sin temor a generar confusión.

Como el conjunto $X \times ([0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1])$ es un halo al rededor de $X \times (\{0\} \cup \{1\}) \subset X \times [0,1]$, vía la función $f : X \times [0,1] \to [0,1]$ tal que $f(x,t) = |2t-1|$ ($f^{-1}(1) = X \times (\{0\} \cup \{1\})$ y $f^1(0) = X \times \{\frac{1}{2}\}$). La sección s se extiende, ver el teorema 3.7, a una sección global S que coincide con s en $X \times (\{0\} \cup \{1\})$.

Esta sección global corresponde a una aplicación de haces $(S,H)\colon \xi \to \eta$, donde $S = \{S(x,t) : \mathcal{F}_x^{\xi_0} \times [0,1] \to \mathcal{F}^{\eta}_{\alpha(x,t)}\}$, Además, $S_{(x,0)} = s_{(x,0)}$ y $S_{(x,1)} = s_{(x,1)}$, por lo que en la base, la aplicación H es tal que $H(x,0) = f_0(x)$ y $H(x,1) = f_1(x)$. Es decir, $f_0 \simeq f_1$. Dicho de otra manera T_η es inyectiva.

Inversamente, supongamos que T_η es una biyección. Como veremos más adelante, en la construcción de Milnor, existe un G-haz numérico tal que su espacio total es contraíble. Denotemos dicho haz como ζ. La primer parte de esta prueba nos garantiza que T_ζ es biyectivo. Ahora, por la suprayectividad de T_η y T_ζ tenemos aplicaciones de haces

$$\eta \xrightarrow{(f,\overline{f})} \zeta \xrightarrow{(g,\overline{g})} \eta.$$

Por ser T_η inyectiva, tenemos que $\overline{g} \circ \overline{f} \simeq_D \mathrm{id}_{B_\eta}$, donde $D\colon B_\eta \times I \to B_\eta$. Entonces, por el teorema 3.10, existe una aplicación de haces $(H, \overline{H})\colon \eta \times I \to \eta$ tal que $\overline{H}(b,t) = D(b,t)$ y $H(z,0) = \overline{g} \circ \overline{f}(z)$. Es decir, $\overline{h}(b) := \overline{H}(b,1) = \mathrm{id}_{B_\eta}(b)$, para toda $b \in B_\eta$, y $h(z) := H(z,1)$ para toda $z \in E_\eta$. Es decir, $h \simeq g \circ f$, de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_\eta \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "h \simeq \mathrm{id}_{E\eta}"] & E_\xi \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"] & E_\eta \arrow[d] \\
B_\eta \arrow[r, "\overline{f}"'] \arrow[rr, bend right, "\overline{h} = \mathrm{id}_{B_\eta}"'] & B_\xi \arrow[r, "\overline{g}"'] & B_\eta.
\end{tikzcd}$$

En donde el triángulo superior conmuta salvo homotopía. Por lo que $g \circ f = g \circ \mathrm{id}_{E_\xi} \circ f \simeq 0$, ya que $E_\xi \simeq *$. Además, como $\overline{h} = \mathrm{id}_{B_\eta}$ tenemos que $\mathrm{id}_{E_\eta} \simeq h \simeq g \circ f \simeq 0$, por lo que $E_\eta \simeq \{*\}$. $\square$

En resumen, un G-haz principal numérico η es universal si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para todo G-haz principal numérico ω sobre X, existe $f\colon X \to B_\eta$ tal que $f^*(\eta)$ y ω son equivalentes sobre X.

2. Si para $f, g\colon X \to B_\eta$, los haces inducidos $f^*(\eta)$ y $g^*(\eta)$ son equivalente sobre X, entonces $f \simeq g$.

Capítulo 4

Construcción de Milnor

Definición 4.1. Consideremos un grupo topológico G y al ensamble topológico con $n+1$ copias de G

$$E_n := G * ... * G \quad (n+1)\text{-factores} \ ,$$

con la topología fuerte, ver 1.29.

Recordemos que dos puntos $t_0g_0 + \cdots + t_ng_n$ y $t_0'g_0' + \cdots + t_n'g_n'$ en el ensamble son equivalentes si para toda i

- $t_i = t_i'$,
- $g_i = g_i'$ o $t_i = t_i' = 0$.

Podemos definir una acción, traslación derecha, de G en este espacio:

$$\begin{aligned} \rho_n \colon E_n \times G &\longrightarrow E_n \\ (t_0g_0 + ... + t_ng_n, g) &\longmapsto t_0(g_0g) + ... + t_n(g_ng). \end{aligned}$$

Notemos que

$$(t_j \circ \rho_n)(t_0g_0 + ... + t_ng_n) = t_j(g_j \circ R) \qquad (t_0g_0 + ... + t_ng_n, g) = g_jg.$$

Con esto es claro que la acción es continua, ya que $t_j \circ \rho_n = t_j \circ \mathrm{proy}_1$ y $g_j \circ \rho_n = R_g \circ (g_j \times \mathrm{id}_G)$, donde $\mathrm{proy}_1 \colon E_n \times G \to E_n$ es la proyección en el primer factor y $R_g \colon G \to G$ la traslación derecha, ver 1.24. Más aún, la acción es libre y por lo tanto efectiva, pues G actúa libremente sobre sí mismo.

Definición 4.2. Denotemos por B_n al espacio $E_n/_\sim$ donde $x \sim x'$ si $x' = R(x,g)$ para alguna $g \in G$. La topología está dada por la aplicación cociente

$$p_n \colon E_n \to B_n.$$

Proposición 4.3. *p_n es un fibrado localmente trivial.*

Demostración. Tenemos lo siguiente:

1. Los abiertos trivializadores están dados por
$$V_j := \{\, p_n(t_0 g_0 + ... + t_n g_n) \mid 0 < t_j \,\}.$$
2. Las aplicaciones trivializadores las definimos como
$$\begin{aligned} \phi_j \colon V_j \times G &\longrightarrow p_n^{-1}(V_j) \\ (p_n(t_0 g_0 + ... + t_n g_n), g) &\longmapsto t_0(g_0 g_j^{-1} g) + ... + t_n(g_n g_j^{-1} g). \end{aligned}$$
3. Las transformaciones coordenadas las definimos como
$$\begin{aligned} g_{ij} \colon V_i \cap V_j &\longrightarrow G \\ p_n(t_0 g_0 + ... + t_n g_n) &\longmapsto g_i g_j^{-1}. \end{aligned}$$

Claramente V_j es abierto, pues están definidos por la condición abierta $t_j > 0$.

Para ver que ϕ_j es continua consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} p_j \colon p^{-1}(V_j) &\to G \\ t_0 g_0 + \cdots + t_n g_n &\mapsto g_j. \end{aligned}$$

La continuidad de p_j sigue de notar que $p_j = g_j|_{p_n^{-1}(V_j)}$.

Por otro lado, las aplicaciones trivializadoras están bien definidas: Si

$$t_0 g_0 + \cdots + t_n g_n \sim t'_0 g'_0 + \cdots + t'_n g'_n,$$

entonces existe $h \in G$ tal que $t_0 g_0 + \cdots + t_n g_n = t'_0 g'_0 h + \cdots + t'_n g'_n h$, es decir, $t_i = t'_i$ y $g_i = g'_i h$ para toda $1 \leq i \leq n$. Entonces, si

$$(p_n(t_0 g_0 + \cdots + t_n g_n), g) = (p_n(t'_0 g'_0 + \cdots + t'_n g'_n), g)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_j(p_n(t_0g_0+\cdots+t_ng_n),g) &= t_0(g_0g_j^{-1}g)+\cdots+t_n(g_ng_j^{-1}g)\\ &= t_0(g_0h^{-1}hg_j^{-1}g)+\cdots+t_n(g_nh^{-1}hg_j^{-1}g)\\ &= t_0(g_0'g_j'^{-1}g)+\cdots+t_n(g_n'g_j'^{-1}g)\\ &= \phi_j(p_n(t_0'g_0'+\cdots+t_n'g_n'),g).\end{aligned}$$

La continuidad de estas aplicaciones se sigue de la siguiente relación

$$\phi_j(p_n(x),e) = R_n(x,g_j^{-1}) = R_n(x,p_j(x)^{-1}),$$

donde $e \in G$ es el neutro. De modo que $\phi_j(p(x),e)$ depende continuamente de x. Como p_n es una identificación esto equivale a que $\phi_j(y,e)$ dependa continuamente de $y \in V_j$.

Por otro lado, $\phi_j(x,g) = R_n(\phi_j(x,e),g)$, de modo que ϕ_j depende continuamente de las dos coordenadas. Más aún, para toda $1 \le j \le n$ ϕ_j es un homeomorfismo y su inverso está dado por

$$\begin{aligned}&(p_n,p_j): p_n^{-1}(V_j)\to V_j\times G\\ &t_0g_0+\cdots+t_ng_n \mapsto (p_n(t_0g_0+\cdots+t_ng_n),g_j).\end{aligned}$$

En efecto, como

$$\begin{aligned}\phi\circ(p_n,p_j))(x) &= \phi(p(x),g_j) = x,\\ (p_n\circ\phi_j)(y,g) &= \mathrm{proy}_1(y,g) = y,\\ (p_j\circ\phi_j)(y,g) &= g_jg_j^{-1}g = g.\end{aligned}$$

Finalmente, para ver la continuidad de las transformaciones coordenadas basta notar que $g_{ij}(x) = g_ig_j^{-1} = (p_i\circ\phi_j)(x,e)$. □

Este fibrado localmente trivial nos permite construir, vía el teorema 2.20, un G-haz principal.

Corolario 4.4.

$$\xi_{BG_n} = (G,G,B_n;\mathcal{G},\mathcal{A}).$$

el haz de conjuntos y las cartas locales están dadas por:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &:= \{\,\mathcal{G}_x \mid x\in X_n\,\}, & \mathcal{G}_x &:= G\\ \mathcal{A} &:= \{\,\varphi_j \mid j=0,...,n\,\}, & \varphi_j &:= \{\,\varphi_{j,x} := g_{k_xj}(x) \mid x\in V_j\,\},\end{aligned}$$

donde para cada $x \in X_n$ llamamos k_x al índice para el cual $x \in V_{k_x}$.

□

En este caso particular tenemos las inclusiones de cada nivel en el siguiente:

$$E_n \hookrightarrow E_{n+1},$$
$$t_0g_0 + \ldots + t_ng_n \mapsto t_0g_0 + \ldots + t_ng_n + 0e.$$

De modo que tenemos la siguiente sucesión

$$\{e\} \subset G \subset G * G * \cdots G * G * \cdots * G \subset \cdots$$

con la cual podemos considerar el espacio colímite $EG = G * G * \cdots * G * \cdots$, en el cual la topología es la final respecto a la familia de aplicaciones $\{t_i, g_i\}_{i\geq 0}$.

Las aplicaciones coordenadas en EG se definen dada la restricción en cada nivel

$$\tau_j \colon EG \longrightarrow [0,1] \quad \tau_j(t_0g_0 + \ldots t_ng_n + \ldots) = t_j$$
$$\gamma_j \colon \tau_j^{-1}(0,1] \longrightarrow G \quad \gamma_j(t_0g_0 + \ldots t_ngn + \ldots) = g_j.$$

Análogamente definimos la acción derecha de G en EG y denotamos por BG al espacio de órbitas. La continuidad de la acción se sigue del hecho de que las funciones coordenadas para el caso infinito heredan las propiedades del caso finito, es decir, τ_j es G-invariante y γ_j es G-equivariante.

De manera análoga podemos dar una descripción explícita de este colímite. Sea $G^\infty \times \Delta_\infty$ el conjunto de sucesiones infinitas

$$(g_0, t_0, \ldots, g_n, t_n, \ldots),$$

donde $g_i \in G$ y $(t_i)_{i\geq 0}$ es una sucesión de números tales que $t_i \geq 0$, con sólo una cantidad finita distinta de 0 y $\Sigma t_i = 1$. En este conjunto decimos que dos sucesiones $(g_0, t_0, \ldots, g_n, t_n, \ldots)$ y $(g'_0, t'_0, \ldots, g'_n, t'_n, \ldots)$, son equivalentes si $t_i = t'_i$ para toda i y $g_i = g'_i$ para toda i tal que $t_i \neq 0$. El conjunto de clases de equivalencia es EG. En ambos casos topología está determinada por las funciones coordenadas.

Con esto obtenemos un G-haz fibrado

$$\xi_{BG} = (G, G, BG; \mathcal{G}, \mathcal{A}).$$

Abusando de notación, el haz de conjuntos $\mathcal{G}$ y el atlas se definen de manera similar para el caso infinito. El fibrado localmente trivial asociado

$$p\colon EG \to BG$$

lo definimos de manera análoga.

En este caso, es claro que EG_n y BG_n son subespacios de EG y BG, definidos por las igualdades $t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = 0$. Al estar definidos por una condición cerrada estos subespacios son cerrados, de modo que BG es un espacio filtrado

$$\{*\} \subset BG_1 \subset BG_2 \subset \cdots \subset BG_n \subset \cdots \subset BG.$$

Esta generalización se vuelve pertinente pues este haz fibrado $\mathcal{B}\mathcal{G}$ es universal, ver 3.13, como lo veremos a continuación.

Proposición 4.5. *El haz fibrado ξ_{BG} es numérico.*

Demostración. Claramente las aplicaciones $t_i\colon EG \to [0,1]$ son invariantes bajo la acción de G, por lo que inducen aplicaciones en el cociente, $\tau_i : BG \to [0,1]$, definidas semejantemente. De modo que los abiertos trivializadores V_j los podemos definir como $\tau_j^1(0,1]$. Veamos que esta cubierta es numérica, sean

$$\begin{aligned} &\pi_j\colon BG \to [0,1], \\ &\quad \pi_j(b) = \max\{\, 0, \tau_j(b) - \Sigma_{\mu<j}\tau_\mu(b)\,\}. \end{aligned}$$

Para $b_0 \in BG$ fijo tomamos k como el mínimo entero para el cual $\tau_k(b) \neq 0$ y tomamos alguna N para la cual $\Sigma_{i=0}^N \tau_i(b_0) = 1$. Entonces, como $\tau_\mu(b) = 0$ para toda $\mu < k$, $\pi_k(b_0) = \tau_k(b_0) \neq 0$. Por otro lado, como para cualquier $b \in BG$ existe dicho entero mínimo, es claro que $\bigcup_k \pi_k^{-1}(0,1] = BG$.

Más aún, la familia $\{\pi_j\}$ es localmente finita. Para toda $j > N$, se tiene que $\pi_j(b) = 0$ para toda $b \in BG$ tal que $\Sigma_{i=0}^N \tau_i(b) > \frac{1}{2}$. En efecto, $\frac{1}{2} < \Sigma_{i=0}^N \tau_i(b) \leq \Sigma_{i=0}^{j-1}\tau_i(b)$ y $1 = \Sigma_{i=0}^{j-1}\tau_i(b) + \tau_j(b) + \Sigma_{i=j+1}^{\infty}\tau_i(b)$, entonces $\tau_j(b) + \Sigma_{i=j+1}^{\infty}\tau_i(b) < \frac{1}{2}$. Por lo que $\tau_j(b) < \frac{1}{2}$, es decir $\tau_j(b) - \Sigma_{\mu<j}\tau_\mu(b) < 0$. De modo que la condición abierta $\Sigma_{i=0}^N \tau_i(b) > \frac{1}{2}$, define una vecindad de b_0, i.e. $U = \{\, b \in BG \mid \Sigma_{i=0}^N \tau_i(b) > \frac{1}{2}\,\}$, para la cual $\pi_j(b) = 0$ para casi toda $j = 0, 1, \ldots$.

Finalmente, vía estas funciones, construimos una partición de la unidad $\widetilde{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\Sigma_\mu \pi_\mu}$. Del párrafo anterior se sigue que esta familia de aplicaciones es localmente finita. $\square$

Proposición 4.6. *El espacio $EG = G * G * \cdots * G * \cdots$ es contraible.*

Demostración. Queremos construir una nulhomotopía de la identidad de dicho espacio. Primero veamos que existe una homotopía entre la aplicación tal que

$$t_0g_0 + t_1g_1 + \cdots \longmapsto t_0g_0 + 0g + t_1g_1 + \cdots , \tag{4.1}$$

y la identidad, notemos que aunque ambos lados de 4.1 parezcan iguales no lo son, ya que el término g_1 del lado izquierdo pertenece al segundo miembro del ensamble, mientras que el g_1 pertenece al tercer miembro del ensamble.

Construiremos esta homotopía por pasos, la construcción de ésta se puede encontrar en [tD08] y en [tD66]; cada paso consistirá en ir recorriendo el término $0g$ hacia la derecha:

En el primer paso, definimos $H_1 \colon EG \times [0, \frac{1}{2}] \to EG$, definida como:

$$t_0g_0 + t_1g_1 + \cdots \longmapsto t_0g_0 + (2t)t_1g_1 + (1-2t)t_1g_1 + t_2g_2 \cdots .$$

En el segundo, definimos $H_2 \colon EG \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \to EG$ como:

$$t_0g_0 + t_1g_1 + \cdots \longmapsto t_0g_0 + t_1g_1 + (4t-2)t_2g_2 + (3-4t)t_2g_2 \cdots t_3g_3 + \cdots$$

Para el paso n-ésimo definimos

$$H_n : EG \times [\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}] \to EG$$

como

$$\begin{aligned} t_0g_0 + t_1g_1 + \cdots \longmapsto & t_0g_0 + \cdots + (2^nt + 2^n - 2)t_ng_n + \\ & (3 - 2^nt - 2^n)t_ng_n + t_{n+1}g_{n+1} + \cdots . \end{aligned}$$

La continuidad de cada H_i sigue de la propiedad universal para el ensamble, ver 1.30. La homotopía entre la identidad y la aplicación definida en 4.1 estará definida como la restricción en cada uno de estos subintervalos como la H_i correspondiente.

Por otro lado, la aplicación 4.1 es nulhomotópica, vía la homotopía tal que

$$t_0g_0 + 0g + t_1g_1 + \cdots \longmapsto (1-t)t_0g_0 + te + (1-t)t_1g_1 + \cdots .$$

De modo que la identidad id_{EG} es nulhomotópica. □

Corolario 4.7. *El haz fibrado*

$$\xi_{BG} = (G, G, BG; \mathcal{G}, \mathcal{A})$$

es un haz universal.

$\square$

Bibliografía

[AP10a] Marcelo Aguilar and Carlos Prieto. *Fiber Bundles*. Manuscrito, 2010.

[AP10b] Marcelo Aguilar and Carlos Prieto. *Homotopical Homology and Cohomology*. Manuscrito, 2010.

[APG12] Marcelo Aguilar, Carlos Prieto, and Samuel Gitler. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer-Verlag, second edition, 2012.

[Bro06] R. Brown. *Topology and groupoids*. BookSurge, 2006.

[Der68] J. Derwent. A note on numerable covers. *Proc. Amer. Math Soc.*, vol. 19:1130–1132, 1968.

[Dol63] A. Dold. Partitions of unity in the theory of fibrations. *Annals of Mathematics*, vol. 78:223–255, 1963.

[Jä84] Klaus Jänich. *Topology*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1984.

[Kel95] John L. Kelley. *General Topology*. Graduated Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.

[Mil56] J. Milnor. Construction of universal bundles, II. *Annals of Mathematics*, vol. 63 No. 3:430–436, 1956.

[PP13] Petar Pavešić and Renzo A. Piccinini. *Fibrations and their Classification*, volume 33 of *Research and Exposition in Mathematics*. Heldermann Verlag, Lemgo, 2013.

[Ste51] N. Steenrod. *The Topology of Fiber Bundles*. Princeton University Press, 1951.

[Ste67] N. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Mich. Math. J.*, vol. 14:133–152, 1967.

[tD66] Tammo tom Dieck. Klassifikation numerierbarer bündel. *Archiv der Mathematik*, vol. XVII:595–599, 1966.

[tD08] Tammo tom Dieck. *Algebraic Topology*. European Mathematicl Society, 2008.

[Vog71] R.M. Vogt. Convenient ccategories of topological spaces for homotopy theory. *Archiv der Mathematik*, vol. XXII:545–555, 1971.