



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERIA DE EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN EN RECURSOS NATURALES

REPRESENTACIÓN EMPÍRICA DE LA HETOGENEIDAD DEL MEDIO POROSO COMO  
FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE LA POROSIDAD

MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

GERMÁN JESÚS GALINDO CASTILLO

TUTOR PRINCIPAL:

DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO

Facultad de Ingeniería

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.

MARZO, 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Camacho Velázquez Rodolfo Gabriel

Secretario: M.I. Castrejón Pineda Héctor Ricardo

Vocal: Dr. Samaniego Verduzco Fernando

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Aquino López Ambrosio

2<sup>d o.</sup> Suplente: Dr. Coconi Morales Enrique

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Universidad Nacional Autónoma de México

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Fernando Samaniego Verduzco



-----  
**FIRMA**

## Índice

	Pág.
Introducción.....	7
1.- Medio poroso como distribución de probabilidad.....	9
1.1.- Propiedades del medio poroso.....	10
1.2.- Propiedades de las funciones aleatorias.....	11
1.3.- Descripción estadística del medio poroso.....	12
1.4.- Momentos de distribución.....	17
1.5.- Estacionalidad del medio poroso.....	18
1.6 Propiedades de la función aleatoria fractal.....	20
1.7.- Análisis de rango escalado.....	20
2.- Relación de Permeabilidad.....	24
2.1.- Manejo de datos.....	24
2.2.- Relaciones de Permeabilidad.....	28
3.- Aplicación Petrofísica.....	31
3.1.- Análisis Estructural.....	33
3.2.- Función de porosidad.....	39
3.3.- Función de permeabilidad.....	42
4.- Casos particulares.....	47
Recomendaciones.....	59
 <b>Anexos</b>	
Apéndice Caso 1.....	61
Apéndice Caso 2.....	65
Nomenclatura.....	69
Referencias.....	70

## Lista de Figuras

	Pág.
Fig. 1.1.- Modelo esférico de Hrubiseck.....	11
Fig. 1.2.- Volumen representativo de la porosidad, (Hubbert, 1956).....	13
Fig. 1.3.- Diferencia en la distribución de probabilidad de porosidad para dos medios clásicos, homogéneos e ideales, con diferentes tamaños de grano.....	14
Fig. 1.4.- Porosidad como una distribución aleatoria, caso de Campo Pozo A.....	14
Fig. 1.5.- Semivariogramas de comportamiento cíclico (Schwarzacher, W. 1975).....	18
Fig. 1.6.- Gráfica de $\log(\tau)$ versus $\log(R/S)$ que representa el análisis de rango escalado.....	20
Fig. 1.7.- Grafica de la Variación desde el análisis R/S como función del tamaño de la muestra.....	21
Fig. 2.1.- Conjunto de datos de porosidad, caso 2.....	23
Fig. 2.2.- Configuración estructural, caso 2.....	25
Fig. 3.1.- Columna geológica para el caso 1.....	29
Fig. 3.2.- Dispersión de la porosidad, caso 1.....	31
Fig. 3.3.- Histograma de la porosidad, caso 1.....	32
Fig. 3.4.- Gráfica de la dispersión de la porosidad contra la permeabilidad	34
Fig. 3.5.- Gráfica de la dispersión de la porosidad contra la permeabilidad, con señalización de "outliers".....	34
Fig. 3.6.- Gráfico de la dispersión de la porosidad contra la permeabilidad, sin "Outliers".....	35
Fig. 3.7.- Análisis del rango escalado, caso 1.....	36
Fig. 3.8.- Función de distribución normal, caso 1.....	37
Fig. 3.9.- Análisis de residuos de la función de distribución normal de la porosidad, caso 1.....	38

## Lista de Figuras (continuación)

Fig.3.10.-	Análisis de residuos de la función de distribución normal de la porosidad contra la permeabilidad, caso 1.....	41
Fig.3.11.-	Dispersión de la permeabilidad de núcleos y su función aleatoria.....	45
Fig.3.12.-	Análisis residual de la función de permeabilidad empírica.....	46
Fig. 4.1.-	Distribución de probabilidad de Poisson.....	49
Fig. 4.2.-	Gráfico de leyes de potencia de porosidad-permeabilidad, Bertero (1998).....	50
Fig. 4.3.-	Dispersión de la relación porosidad-permeabilidad, caso 1, escala doble Log.....	52
Fig. 4.4.-	Dispersión de la relación porosidad-permeabilidad, ley de potencias, caso 1, escala doble Log.....	53
Fig. 4.5.-	Distribución de probabilidad bivariada, pozo T336.....	55
Fig. 4.6.-	Distribución de probabilidad bivariada caso 1, comportamiento de ley de potencias.....	56
Fig. 4.7.-	Análisis de residuos de permeabilidad para la distribución de probabilidad bivariada, caso 1.....	57

## Lista de Tablas

Tabla 3.1.- Datos de los núcleos del pozo 1A, caso 1.....	32
Tabla 3.2.- “Outliers” identificados del caso 1.....	37
Tabla 3.3.- Propiedades de función de distribución normal de porosidad, caso 1.....	39
Tabla 3.4.- Propiedades de los residuos de distribución normal, caso 1...	40

## Introducción

La cuantificación de las propiedades de los medios porosos se basan en mediciones directas o indirectas que dependen de su litología, profundidad y a los cambios de magnitud de sus propiedades petrofísicas. El objetivo de esta tesis consiste en ofrecer una aproximación al comportamiento de la porosidad y permeabilidad, sin la necesidad de información adicional a la requerida por los métodos convencionales: registros geofísicos o análisis de núcleos.

Se asumirán las condiciones de aleatoriedad en el medio poroso y esta misma suposición se extenderá a la medición. La determinación de propiedades petrofísicas se obtiene a través de núcleos o bien registros geofísicos, siendo los núcleos mediciones precisas y certeras de las condiciones litológicas del yacimiento, a una escala diminuta en comparación con la magnitud del yacimiento, entendiéndose que las propiedades de un medio poroso deberán de mantener cierta uniformidad, independientemente del volumen de la muestra. Los registros geofísicos por otra parte ofrecen resultados más amplios a través de una medición indirecta. Ya sean por núcleos o por registros; se considera que el comportamiento de las variables se conservara tanto a un nivel microscópico como macroscópico, dado que para esta tesis se asume que la porosidad y la permeabilidad son dos propiedades intrínsecas y aleatorias del medio poroso, y que se mantienen presentes independientemente del tamaño de la muestra.

Aparte de la suposición previamente mencionada, para esta tesis se hacen dos suposiciones más: la consideración de que la porosidad y permeabilidad son dependientes de las condiciones aleatorias del medio y que a la vez son dependientes una de la otra, la otra consideración es que asume la estacionalidad en el medio poroso, es decir que las propiedades del medio no cambiaran independientemente de su traslación, esto último en congruencia con los principios de continuidad geológica. Para emplear estas suposiciones es necesario tener en cuenta bajo qué condiciones se obtuvieron los datos de porosidad y de

permeabilidad, si la porosidad fue obtenida a partir de registros geofísicos de neutrón o sónicos entonces se está hablando de porosidad total, pero si la porosidad es obtenida en laboratorio a partir de núcleos entonces se está hablando de porosidad efectiva, otro factor son las condiciones litológicas, como la estratificación o la continuidad del medio. Estas suposiciones que se realizan ofrecen ventajas al momento de representar la porosidad y la permeabilidad como funciones aleatorias, entendiendo que estas suposiciones que se realizan no son recetas sino consideraciones particulares que se asumen de acuerdo al medio que se está considerando.

Los conjuntos de datos de porosidad y permeabilidad que se emplearon en esta tesis se obtuvieron de registros geofísicos y núcleos cortados de los mismos pozos, edades geológicas, evaluados a las condiciones de presión en laboratorio.

## **1.- Medio Poroso como distribución de probabilidad**

Analizar el medio poroso como una variable aleatoria es una consideración que se toma debido a la complejidad en la distribución de las propiedades de la roca, estas propiedades cambian dependiendo de la litología, lo que impide representar las propiedades de la roca mediante modelos físicos simples. La idea de describir el medio poroso a un nivel macroscópico como un problema aleatorio, surge de la incapacidad de representar de manera efectiva las propiedades observadas.

El representar el medio poroso como una variable aleatoria y posteriormente como una función de distribución de probabilidad en sus propiedades de porosidad y permeabilidad, se basa más en la idea de representar los factores que conforman al medio poroso como aleatorios: la distribución del tamaño de grano, la distribución de los canales de flujo, las microfracturas, las cavidades, los vórgulos, la presencia de arcilla entre otros tantos factores y aunque estos dependen de las características geológicas de la formación estas también se asumen como aleatorias.

La propuesta de considerar las propiedades del medio como aleatorias es una forma particular de interpretar las propiedades del medio desde un punto de vista macroscópico; Esta interpretación puede chocar con otras ideas por ejemplo: una fractura es el resultado de un esfuerzo ejercido en una dirección determinada, aquí en cambio se considera la fractura y los efectos que tiene sobre la porosidad y la permeabilidad como variables aleatorias indeterminadas. Son dos puntos de vista diferentes de interpretar el medio poroso macroscópicamente. En esta tesis solo se están considerando los efectos que la litología y las condiciones geológicas llegan a tener sobre la porosidad y la permeabilidad, sin adentrarse en estas características y considerándolas como heterogeneidades aleatorias.

## **1.1.- Propiedades del medio poroso**

Se consideran las características geológicas del medio poroso como un agregado al análisis e información de la porosidad y permeabilidad con que se cuenta litología, núcleos, registros geofísicos, columna geológica. Aunque se puede proseguir en el análisis con información limitada, la ausencia de una adecuada caracterización del yacimiento generara conclusiones limitadas o erróneas.

Las características geológicas más importantes a considerarse son, el cambio en el transporte en ambientes sub aéreos o sub acuáticos por una gran variedad de procesos de depósito (Allen 1985), cuando ocurre una alteración en los regímenes de transporte, erosión o depósito. El transporte de sedimentos es un proceso periódico que puede representarse ordenadamente, para todas las secuencias de depósito de sedimentos.

Las características del tamaño de poro, su textura y demás propiedades petrofísicas son independientemente del ambiente de depósito (Pettijohn et al., 1987). La textura está controlada por varios parámetros primarios: características de origen, energía de depositación, clima, etc. y los cambios que estos parámetros presentan. Otros parámetros como la compactación y diagénesis también afectan las propiedades petrofísicas.

Los sedimentos carbonatados son de origen biogenético o evaporítico; La estructura primaria puede ser relativamente uniforme (granitos oolíticos), o extremadamente variable (areniscas carbonatadas). Factores como cambios posteriores de la calcita a la dolomita (dolomitación) provoca una reducción en la matriz de la roca, reduciendo la porosidad. Otros procesos de disolución de los sedimentos de carbonatos durante la depositación, así como fracturas hacen que el análisis de las propiedades petrofísicas en rocas carbonatadas sea sumamente complejo. Todo esto sin mencionar los efectos de porosidad secundaria, terciaria o múltiple y demás efectos posteriores a la diagénesis.

## 1.2.- Propiedades de las funciones aleatorias

Una variable aleatoria o variable estocástica es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral, mediante una medición de forma experimental que ocurre de forma aleatoria. A diferencia de otras variables matemáticas, una variable aleatoria presenta resultados variables que se pueden interpretar en un rango de resultados posibles, asociados entre sí de forma estadística. A esta variable aleatoria se le puede dar una interpretación probabilística y con base en esta, una interpretación física.

Empezando por esta definición de lo que es una variable aleatoria, se supone que las propiedades del medio poroso se pueden representar como una función de distribución de probabilidad, o inclusive relacionarse la porosidad con la permeabilidad a través de una función. Sin embargo es posible tener en un registro de porosidad total con varios valores de permeabilidad para un mismo valor de porosidad y viceversa. Entonces el comportamiento de la porosidad y la permeabilidad pueden representarse como una función aleatoria, a pesar de que estas propiedades estrictamente no lo sean.

Una variable aleatoria puede ser discreta, en la que sus resultados inciden en ciertos rangos de valores, o continua, en que puede adquirir cualquier valor numérico en un intervalo o grupo de intervalos. Estos comportamientos pueden describirse en forma de funciones matemáticas, conocidas como distribuciones de probabilidad.

Una variable aleatoria se puede representar, como una función de distribución de probabilidad, de la variable aleatoria, con fin de predecir los resultados posibles de un experimento o evento que todavía no se realiza. Se emplea para predecir la incertidumbre en los resultados que se obtendrán, al emplear información incompleta, o bien cierta incertidumbre inducida por los datos debido a su propia naturaleza. El significado que podrían tener estos resultados no forma parte de la teoría de probabilidad, sino más bien de una interpretación física del medio.

Si se define la porosidad como una función aleatoria: sea  $Z(\phi)$  una función aleatoria definida en  $R^3$ , entonces el vector aleatorio para esta función es  $\{Z(\phi_1), Z(\phi_2), \dots, Z(\phi_n)\}$  que se caracteriza por su distribución de probabilidad n-variada:

$$F_{Z(\phi_1), Z(\phi_2) \dots Z(\phi_n)}(z_1, z_2 \dots z_n) = Pr [z(\phi_1) \leq z_1, z(\phi_2) \leq z_2, \dots, z(\phi_n) \leq z_n] \quad (1.1)$$

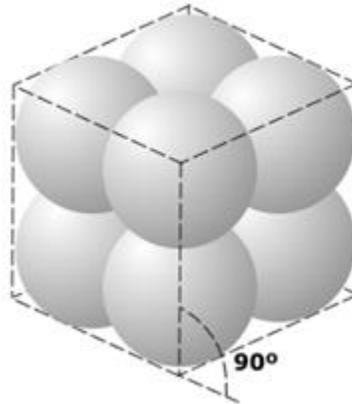
El conjunto de todas las distribuciones para todo valor de  $n$  y para cualquier selección de puntos en  $R^3$  constituye la ley espacial de probabilidad de la función aleatoria  $Z(\phi)$ , es necesario identificar esta función como una función compuesta de  $n$  funciones  $Z(\phi_n)$ , porque existe una cantidad  $n$  de factores físicos que afectan la porosidad y la mayoría de las veces solo se les puede identificar de manera aislada. Esta función en la práctica es imposible de determinar y solo se puede esperar inferir los primeros momentos de la distribución de  $Z(\phi)$ . En las aplicaciones de geoestadística lineal resulta suficiente estimar los momentos hasta de segundo orden, sin embargo en la mayoría de los casos la información disponible no permite inferir momentos de orden superior.

### 1.3.- Descripción estadística del medio poroso

Cualquier resultado de un fenómeno físico puede clasificarse como determinista o aleatorio; en la naturaleza casi todos fenómenos tienen resultados deterministas, precisos y cuantificables; existen muy pocos fenómenos aleatorios absolutos. El paso de fluido a través de un medio poroso es un fenómeno determinista cuantificable microscópicamente, pero debido a la complejidad del medio poroso y a las variables mencionadas previamente es preferible considerarlo macroscópicamente como fenómeno aleatorio.

Hrubisek (1941), fue el primer autor que representó al medio poroso como un modelo geométrico de esferas dentro de un cubo, **Fig. 1.1**, Aunque este es un modelo teórico que no se puede usar para representar medios heterogéneos, este

trabajo tiene un gran valor que no debe menospreciarse, ya que se utilizó para determinar una de las varias relaciones numéricas entre el tamaño de grano, la porosidad y las gargantas de poro.



**Fig. 1.1.-** Modelo esférico de Hrubiseck (1941).

La mayor aportación del trabajo de Hrubisek, se fundamenta en demostrar matemáticamente que el tamaño de grano no afecta la porosidad total, y que el diámetro de la garganta de poro es directamente proporcional al tamaño de grano. Este análisis determina 0.259 como el máximo valor teórico posible de porosidad que un sólido puede llegar a tener. Sugerir la distribución de probabilidad bivariada entre porosidad y permeabilidad como una relación directamente proporcional entre el tamaño de grano y su distribución forma también parte del modelo propuesto por Hrubisek.

Toda correlación física entre variables requiere de un planteamiento inicial que la justifique, sobre todo si las herramientas a emplearse son estadísticas no con la finalidad de evitar errores, sino para evitar un mal uso de las matemáticas. Sobre todo se deberán de aclarar cuáles serán los objetivos de estos análisis.

La hipótesis inicial sugiere considerar el medio poroso, su distribución y las propiedades derivadas de manera íntegra como una variable aleatoria discreta.

Según Scheidegger (1974), los materiales naturalmente porosos poseen una estructura porosa más o menos aleatoria, por lo que no es inusual que para muestras del mismo material, presenten valores diferentes de permeabilidad y porosidad. También se observa que mientras más grande sea la muestra del material analizado, más representativos serán los resultados obtenidos, para los valores de porosidad y permeabilidad, la idea de que las propiedades petrofísicas manifiestan su homogeneidad al incrementarse el volumen representativo de la muestra manejado por (Hubbert, 1956).

La función distribución de probabilidad para la porosidad posee un rango para la variación de la porosidad de  $0 \ll \phi \ll 1$ , lo que significa que las muestras, integralmente se expresan como una distribución discreta y que en una muestra de datos, la desviación estándar de este conjunto se obtiene dividiendo esta distribución entre el número total de muestras.

La desviación estándar para cada función de distribución de probabilidad, indica la dispersión de los datos de la variable que se está analizando, mediante una constante cuyas, unidades son las mismas que las de la variable que se analiza. Esta es la razón principal de la conveniencia de usar la desviación estándar, sobre todo al presentar resultados.

Suponiendo que se tiene una gran muestra de material poroso que se dividirá en un conjunto de paralelepípedos rectangulares muy pequeños; Estos elementos presentan una distribución de valores de porosidad debida a la estructura porosa aleatoria. la cual se denotará con  $F(\phi)$  como la fracción de muestras que tienen una porosidad entre  $(\mu-\delta)$  y  $(\mu+\delta)$ , donde  $\mu$  es el valor medio obtenido y  $\delta$  es la variación en los valores de porosidad (Bear 1988). La porosidad para estos elementos puede determinarse por medio de la función:

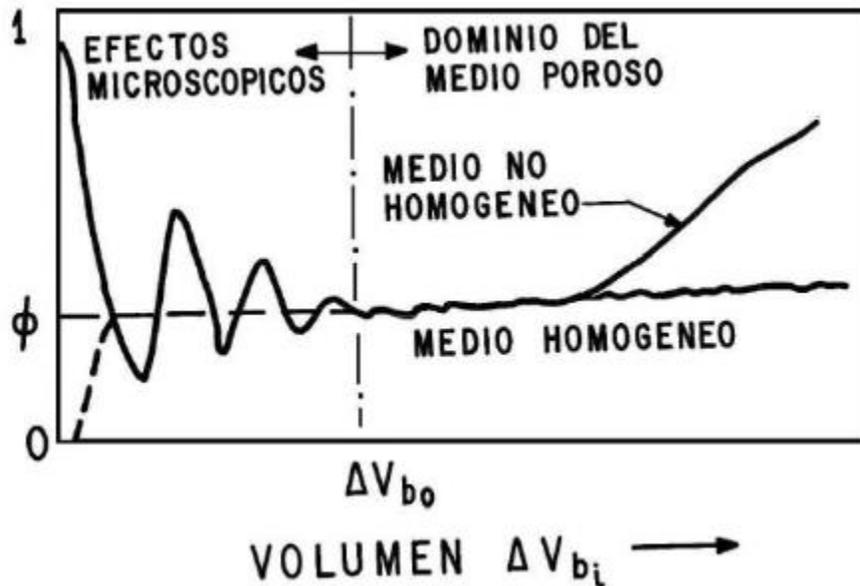
$$\bar{\phi} = \int \phi F(\phi) d\phi \quad (1.2)$$

También la desviación,  $\delta$  de la distribución de la porosidad se define por:

$$\delta = \int (\phi - \mu)^2 F(\phi) d\phi \quad (1.3)$$

donde al tomar  $n$  muestras del material poroso cuyo volumen total es  $V_{bo}$  se puede representar en la **Fig. 1.2**, como la sumatoria de estas  $n$  muestras:

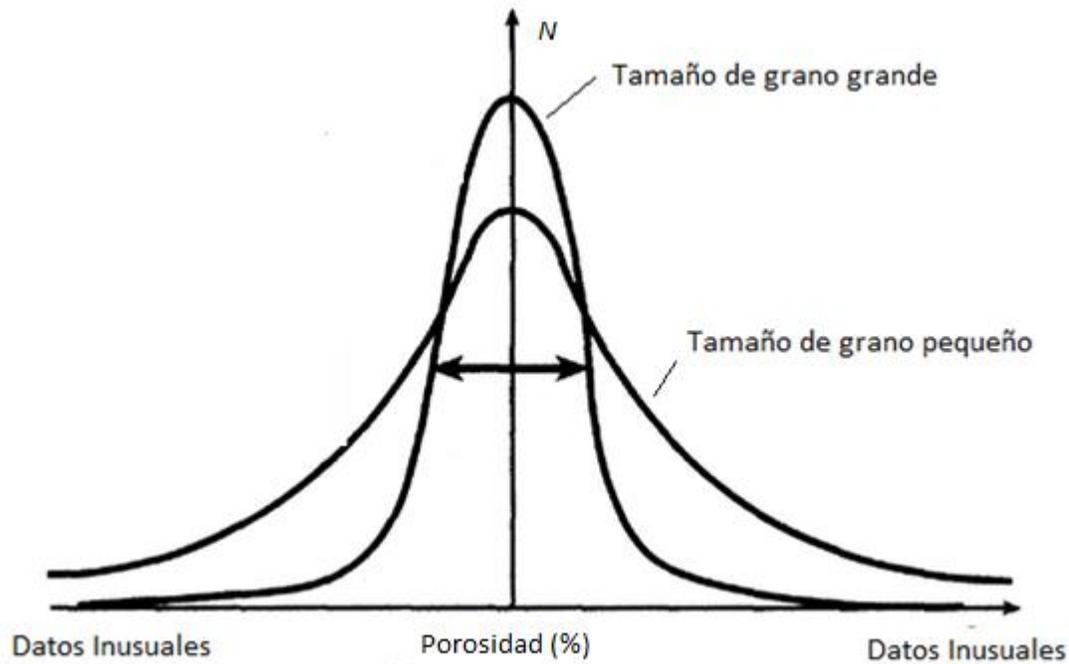
$$V_{bo} = \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (1.4)$$



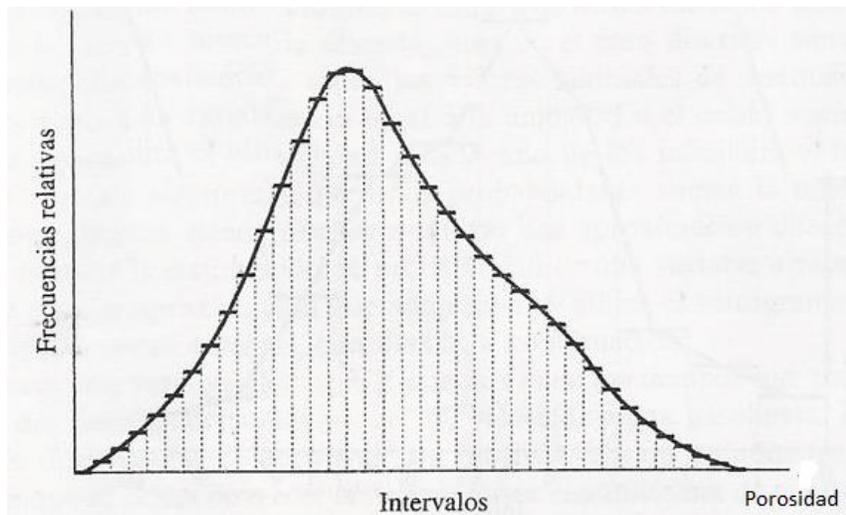
**Fig. 1.2.-** Volumen representativo de la porosidad (Hubbert, 1956).

La inflexión de la curva en la función de distribución, dependerá del tamaño de grano de las muestras que se analizan. Es decir la muestra con el tamaño de grano más pequeño, presenta una tortuosidad, gargantas de poro más pequeñas, un porcentaje en el número de poros no interconectados más grandes y una conductividad hidráulica más pequeña. Lo anterior provoca en la gráfica de porosidad efectiva una mayor dispersión en los datos, da como resultado que la obtención del valor medio de porosidad sea más improbable. En el caso opuesto, suponiendo que el tamaño de grano aumenta, esto generaría que el número de poros interconectados disminuya, haciendo que la incidencia del valor medio de porosidad se incremente y esto hace disminuir el sesgo en los datos obtenidos.

La propuesta de este modelo, consiste en estudiar el tamaño de grano como inversamente proporcional a la desviación estándar de la función, aplicado a casos de medios clásticos; esto se expresa de manera teórica en la **Fig. 1.3**, al emplearse para una litología de arenas arcillosas y lutitas: Pozo A; Se observa que los datos aunque no presentan grandes disparidades, y aunque no es perfectamente homogéneo, estos no se alejan del comportamiento ideal, **Fig. 1.4**.



**Fig. 1.3.-** Diferencia en la distribución de probabilidad de porosidad para dos medios clásticos, homogéneos e ideales, con diferentes tamaños de grano.



**Fig. 1.4.-** Porosidad como una distribución aleatoria, caso de Campo, Pozo A.

#### 1.4.- Momentos de distribución

Como parte del análisis de los datos se debe de definir y cuantificar sus momentos de distribución de acuerdo a las variables involucradas. Lo que se ha presentado hasta el momento son visiones parciales de la distribución; se pretende proporcionar ahora una herramienta eficaz que generalice esta idea, de tal forma que la mayoría de las características se puedan expresar utilizando dicha herramienta. Los momentos de distribución se definen como:

El momento de primer orden de  $Z(\phi)$  es la esperanza matemática definida como:

$$m(\phi) = E[Z(\phi)] \quad (1.5)$$

Los momentos de segundo Orden considerados en estadística son:

- i) La varianza de  $Z(\phi)$

$$\sigma^2(\phi) = Var[Z(\phi)] = E[\{Z(\phi) - m(\phi)\}^2] \quad (1.6)$$

ii) La covarianza de dos variables aleatorias  $Z(\phi_i)$  y  $Z(K_j)$  definida como:

$$c(\phi_i, k_j) = E[\{Z(\phi_i) - m(\phi_i)\}\{Z(k_j) - m(k_j)\}] \quad (1.7)$$

Esta función también es conocida como función de auto covarianza.

iii) El semivariograma  $\gamma(\phi_i, \phi_j)$  también se define como momento de segundo orden en esta sección, el empleo de variogramas en la geoestadística no serán los tema de esta tesis.

### 1.5.- Estacionalidad del medio poroso

Se dice que una función aleatoria es estrictamente estacionaria si su función de distribución Ec. 1.1 es invariante a cualquier traslación respecto a un vector  $h$  o lo que es equivalente como se observa en las Ecs. 1.7 y 1.8, la función de distribución del vector aleatorio  $\{Z(\phi_1), Z(\phi_2), \dots, Z(\phi_n)\}$  es idéntica a la del vector  $\{Z(\phi_1+h), Z(\phi_2+h), \dots, Z(\phi_n+h)\}$  para cualquier  $h$ . En el caso de una litología y aplicado a las propiedades porosas del medio esto implica que existe cierta continuidad geológica en el medio independientemente de su traslación (Díaz Viera 2002), lo cual se mantiene constante en la continuidad geológica.

El representar la función aleatoria como un vector, facilita en primera medida identificar las variables que componen a esta función pero también permite observar los límites de la función aleatoria.

Como se planteó anteriormente, usualmente se trabaja solo con los momentos hasta de segundo orden, por lo que resulta práctico limitar la hipótesis de estacionalidad a estos primeros momentos. La estacionalidad de segundo orden implica que las propiedades también son independiente de la posición y que las medidas de correlación entre variables también son independientes de la posición.

Se dice que una función aleatoria es estacionaria de segundo orden si se cumple que:

- i) Su valor esperado existe y no depende de  $\phi$ .

$$E[Z(\phi)] = m; \forall \phi \quad (1.8)$$

- ii) Para cualquier par de variables aleatorias  $Z(\phi)$  y  $Z(\phi+h)$ , su covarianza existe y solo depende del vector de separación  $h$ .

$$C(h) = C(\phi + h, \phi) = E[Z(\phi + h)Z(\phi)] - m^2 \quad (1.9)$$

La estacionalidad de la varianza implica que la varianza existe, es finita y no depende de  $\phi$ , es decir

$$\sigma^2 = C(0) = Var[Z(\phi)] \quad (1.10)$$

Así mismo, si se busca proceder a momentos de orden superior, bajo esta hipótesis el semivariograma también es estacionario y se cumple que:

$$\gamma(h) = \gamma(\phi + h\phi) = \frac{1}{2}E[\{Z(\phi_i) - Z(\phi_j)\}^2] \quad (1.11)$$

Además existe una relación directa entre el semivariograma también estacionario y la función de covarianza

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (1.12)$$

En este caso resulta suficiente usar una de las dos funciones para caracterizar la dependencia espacial. La razón por la que se busca comprobar la estacionalidad del conjunto de datos, es para descartar la dependencia espacial y que esta no

obstruirá el análisis de los datos. Esto se abordará más adelante como parte del análisis de datos.

### 1.6.- Propiedades de la función aleatoria fractal

En la sección 1.2 se abordó el tema de las propiedades de las funciones aleatorias. Si la función además de aleatoria presenta un comportamiento de variación proporcional a su varianza se asume un comportamiento fractal. Si  $\Delta L(\varnothing)$  y  $\Delta L(\varnothing+\Delta\varnothing)$  presentan un incremento en los cambios sucesivos. Aquí se introduce otro concepto más el de coeficiente de Hurst  $H$ , como indicador de la varianza en una función aleatoria.

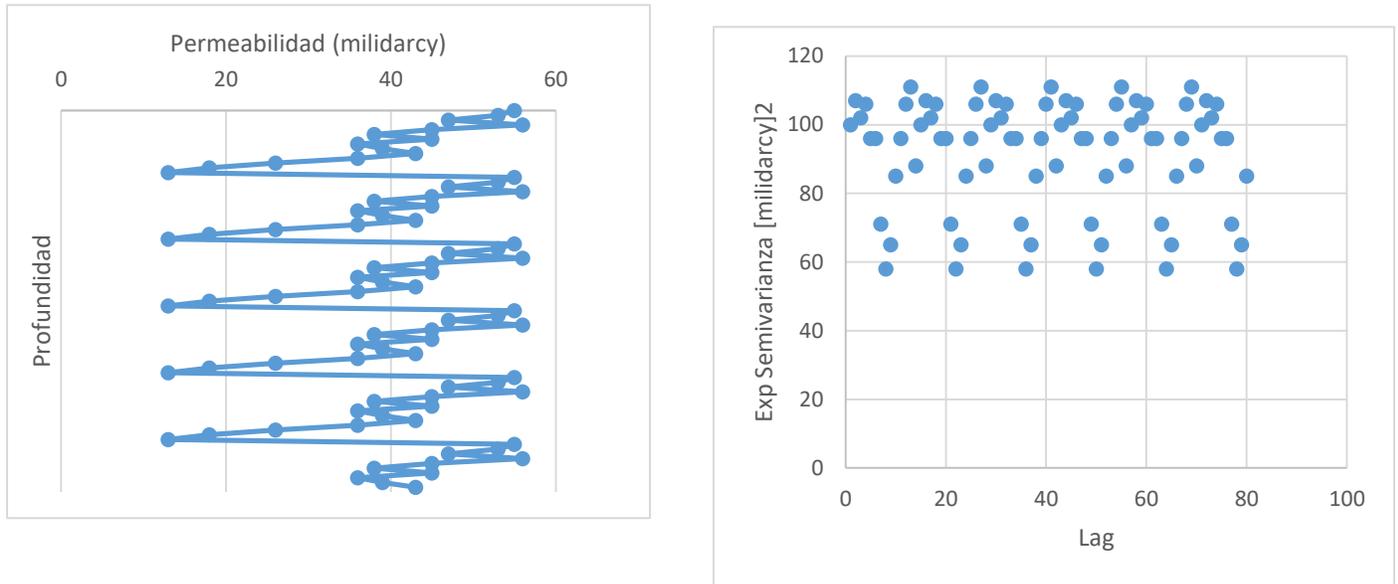
$$\delta(\varnothing) \sim \Delta(\varnothing)^{2H} \quad (1.13)$$

En un proceso fractal los incrementos sucesivos tienen correlación  $\rho$ , independiente del paso de tiempo  $h$ , definido por:

$$2^{2H} = 2 + 2\rho \left( -\frac{1}{2} < \rho < 1 \right) \quad (1.14)$$

### 1.7.- Análisis de rango escalado

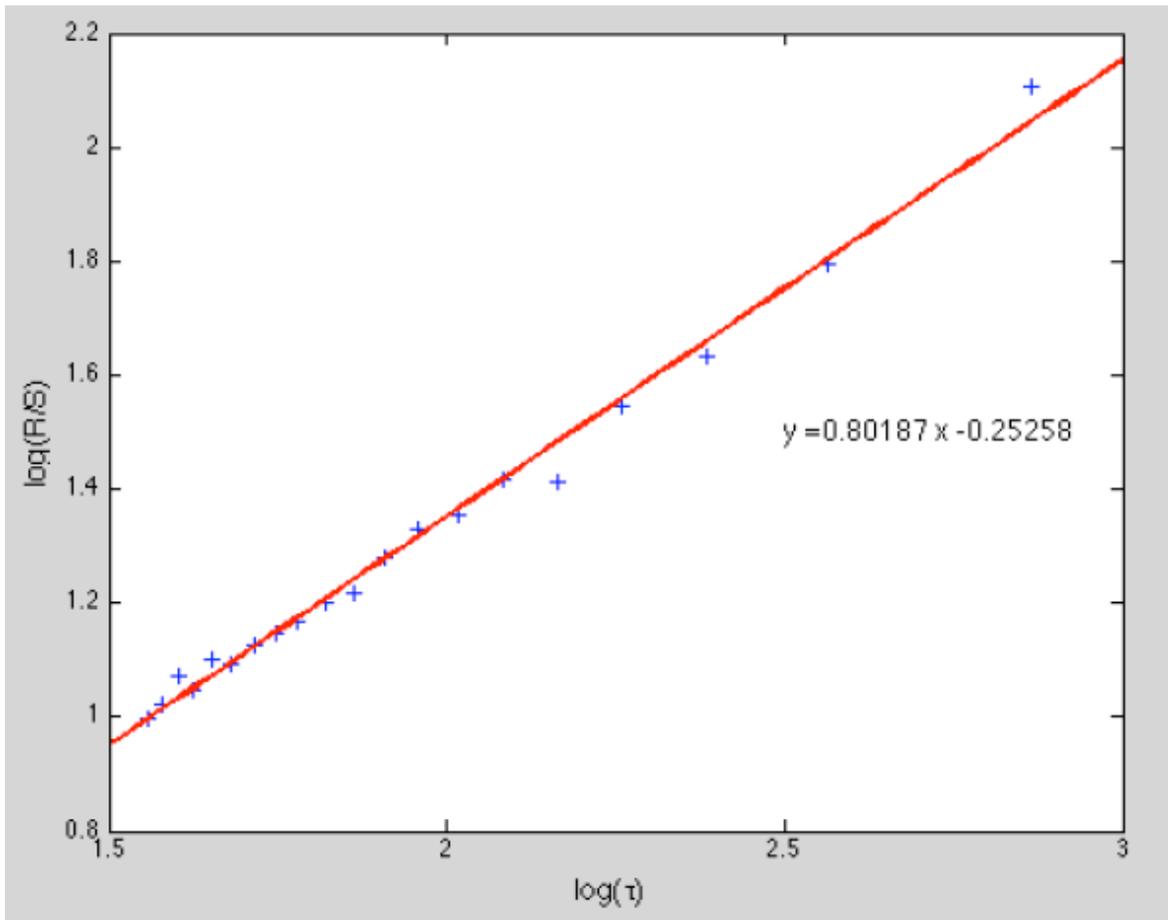
Al correlacionar conjuntos de datos de porosidad y permeabilidad es posible encontrar periodicidad en los intervalos, esta puede ser debido a ausencia de información o debido a las propiedades del medio poroso y a las características de columna geológica. Estos efectos ya han sido estudiados previamente (Schwarzacher, W. 1975):



**Fig. 1.5.-** Efectos de periodicidad en los datos y Semivariograma de comportamiento cíclico

Se debe de tener en cuenta el comportamiento cíclico en los datos pero dado que no es el objetivo de la tesis realizar análisis desde el punto de vista de variogramas se propone otro parámetro como indicador de la continuidad de los datos: el rango re-escalado (R/S) el cual es una medida de como una secuencia varía con el intervalo, se define como una medida de la fluctuación acumulada de una secuencia y su escalamiento ante la desviación estándar. En general mientras mayor es el intervalo estudiado, mayor será R/S. Es decir el análisis R/S consiste en escoger un cierto número de escalas, obtener la media del vector, calcular las diferencias de cada valor con respecto a la media y hacer una suma acumulativa de ellas. En el análisis R/S, el logaritmo del rango re-escalado se grafica contra el logaritmo del intervalo. Si se obtiene una línea recta para la región de intervalos largos, la pendiente se llama  $H$ , la cual se conoce como el exponente de Hurst. El exponente de Hurst, de una serie es importante porque muestra el grado de discontinuidad en los datos. Dado que los valores de  $H$  van de 0 a 1, indica si la serie es aleatoria ( $H=0.5$ ), antipersistente ( $H<0.5$ ) o persistente ( $H>0.5$ ).

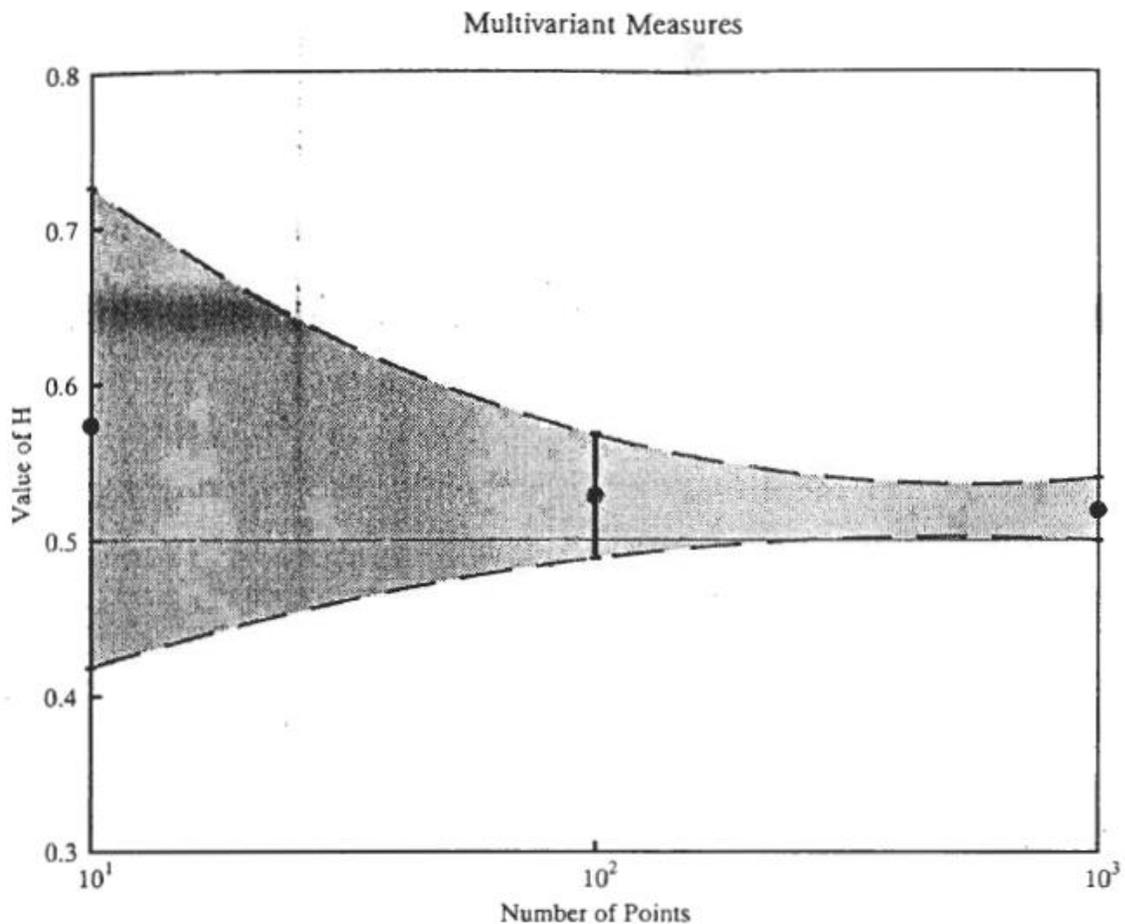
El objetivo del análisis de rango re-escalado es analizar las variables porosidad y permeabilidad desde el punto de vista de su continuidad y frecuencia entre estas sirviendo como indicador de la heterogeneidad del medio poroso. Para este ejemplo **Fig. 1.6** se tiene una línea recta de pendiente  $H = 0.5$  correspondiente al ruido blanco no correlacionable. El análisis R/S no es sensible al histograma global de la secuencia ni a las fluctuaciones de alta frecuencia, por lo que es necesario comprobar previamente las condiciones de estacionalidad.



**Fig. 1.6.-** Gráfica del  $\log(\tau)$  versus  $\log(R/S)$  que representa el análisis de rango escalado.

En la **Fig. 1.6**, se obtiene una pendiente  $H$  de 0.8018, la cual está cercana al valor de 1, este valor es atribuible a dos razones. La primera es que  $H$  es un parámetro estadístico y segundo que secuencias generadas artificialmente tienen una  $H$

produciendo secuencias con diferente longitud. Para secuencias cortas, con pocos datos, existe una amplia variación en  $H$ , y conforme la secuencia crece, la variación decrece acercándose a 0.5.



**Fig. 1.7.-** Grafica de la Variación desde el análisis R/S como función del tamaño de la muestra.

El análisis R/S trabaja mejor para intervalos cortos (altas frecuencias) **Fig. 1.7.** El análisis de Rango escalado a diferencia de otros análisis está directamente relacionado a la varianza, el Análisis R/S y la densidad espectral brindan un mejor análisis que otras propiedades estadísticas, debido al bajo valor de la varianza. Esta última propiedad está condicionada al volumen de datos con que se cuente.

## **2.- Relación de Permeabilidad**

### **2.1- Manejo de datos**

La aplicación de esta tesis se plantea originalmente para casos de yacimientos maduros empleando dos ejemplos uno para una formación de carbonatos terrígenos y el otro de arenas con presencia de arcillas estos son mencionados como Caso 1 y 2, más adelante se detalla las características de estas formaciones. En casos en que la información es limitada, o nunca se recopiló en primer lugar (como en ocasiones pasa con los pozos exploratorios de campos no desarrollados); La información con la que se cuenta es incompleta y en ocasiones la información con la que se cuenta es la que data desde la perforación, llegando a requerir trabajos de digitalización.

Dado que la información con la que se cuenta es limitada e incompleta, otro problema es el definir la veracidad de la información disponible. Muchas veces se cuenta con datos de producción sobrevalorada o infravalorada, datos apócrifos, entre otros defectos de origen. Definir la calidad y veracidad dependerá de los datos analizados para este estudio.

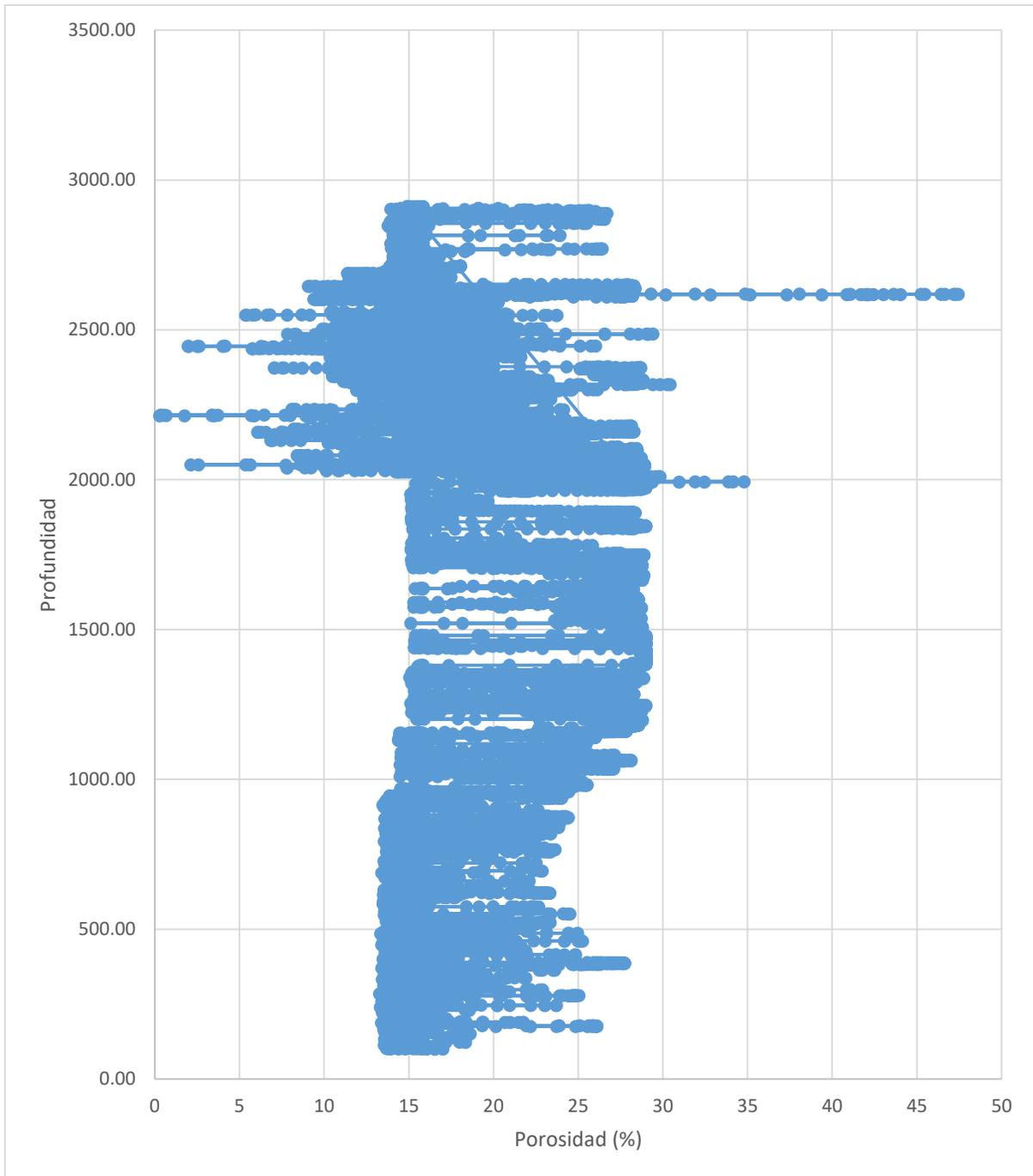
Los datos empleados en esta tesis son de porosidad relativa de núcleos y de porosidad total obtenida de registros geofísicos. Si bien la interpretación de los registros geofísicos nos brinda una idea sobre la litología, lo ideal es contar con algún reporte de perforación o de recortes que nos proporcione una idea de la litología de la columna geológica.

Otro factor que deberá de tenerse en cuenta son las suposiciones que se plantearon en el capítulo 1; para comprobar que estas suposiciones se cumplan hay que homologar los datos tanto de manera muestral como espacial.

Si se están empleando datos de núcleos estos deberán de ser núcleos tomados a las mismas profundidades y en el mismo intervalo. El método que se haya empleado para analizar los núcleos deberá de ser el mismo en todas las muestras al igual que las condiciones de presión que se hayan empleado. Debido a lo mencionado anteriormente, la información obtenida de laboratorio a través de núcleos es la más confiable en cuanto a las propiedades petrofísicas del medio poroso, principalmente por los datos que se obtiene son datos de porosidad efectiva.

Esta dificultad para integrar conjuntos de datos no se presenta de igual forma en los registros geofísicos, donde las condicionantes para integrar conjuntos de datos están limitadas al empleo de la misma herramienta y su adquisición a la misma profundidad. Un registro geofísico puede ofrecer miles de porosidad total por corrida **Fig. 2.1**, mientras que un núcleo seccionado y analizado en el intervalo propuesto 8 o 10 como máximo.

En esta tesis se propone y se recomienda el empleo de datos de diferentes pozos siempre y cuando estos cumplan con los requerimientos anteriores. Ahora bien en el capítulo anterior se mencionó la estacionalidad como una propiedad intrínseca de los datos, es decir que los datos obtenidos de un pozo serán consistentes independientemente de su ubicación; y esto será válido mientras se cumplan las condiciones previas, es importante tener idea de la caracterización del yacimiento para contar con información sobre la columna geológica y de los intervalos muestreados con tal de contar con la certeza de la continuidad del medio, **Fig. 2.2**.



**Fig. 2.1.-** Conjunto de datos de porosidad, caso 1

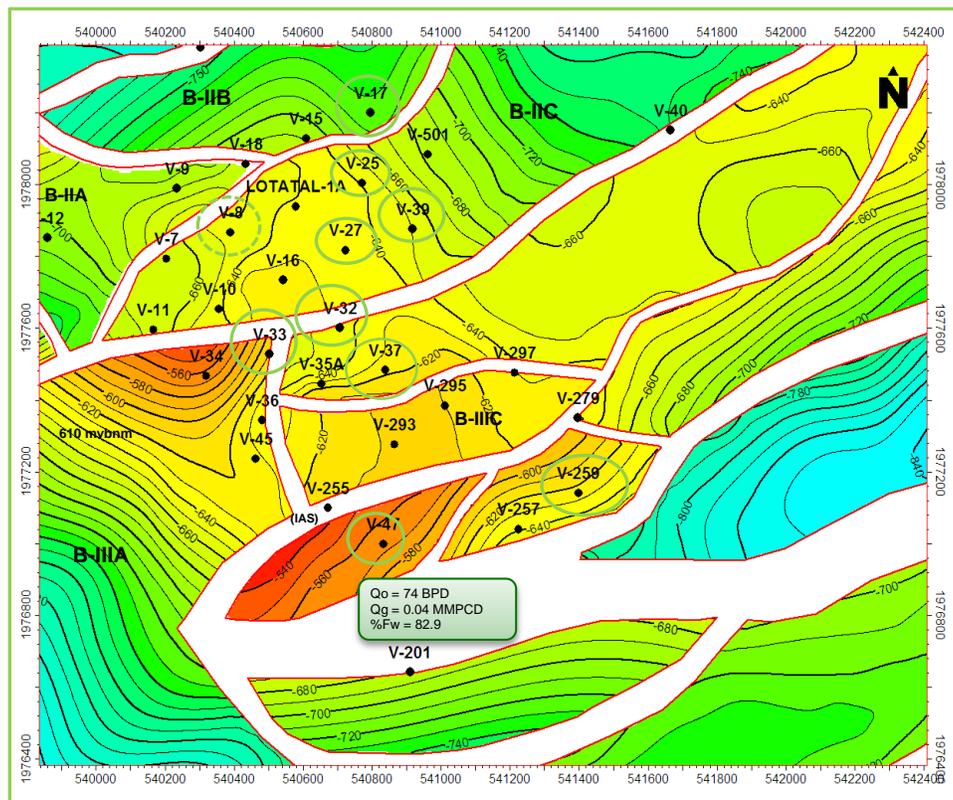
Hay autores que ya han presentado trabajos para evaluar cómo es que estas variaciones afectan a la permeabilidad, buscando cuantificar cada una de estas anomalías en los datos como series de secuencias, con aplicación principalmente

en la simulación y problemas de escalamiento, con un éxito moderado Nolen et al (1992) Ec. 2.1 y Civan (1996) Ec. 2.2.

$$K = b\Pi_i x_i^{a_i} \tag{2.1}$$

$$K = b\Pi_i \exp(a_i x_i) \tag{2.2}$$

Donde  $x_i$  e  $i=1,2,\dots,m$  representan la porosidad, dimensión de la muestra y ubicación con respecto al plano de referencia, donde  $a$  y  $b$  es representado a través de parámetros empíricos.



**Fig. 2.2.- Configuración Estructural, caso 2**

Para los datos del caso 2 se cuenta con información de la litología y de las condiciones estructurales, con esta información se puede visualizar cuáles pozos no presentaran condiciones de estacionalidad entre ellos.

## 2.2.- Relaciones de Permeabilidad

Los datos de permeabilidad pueden provenir de núcleos o pruebas de presión. La fuente de estos datos de permeabilidad viene de diferentes tamaños de muestras a diferentes escalas. Un núcleo típico mide 2 pulgadas de diámetro por 2 pulgadas de largo, y es tomada de un núcleo completo de 1 pie de largo. Este volumen representativo es el equivalente a 0.0036 pies cúbicos. En contraste con un registro de resonancia magnética donde se tiene una resolución vertical de hasta 2 o 5 pies dependiendo de la configuración de la herramienta, a lo largo de varias decenas de metros pareciera insignificante. El volumen evaluado con un registro de resonancia magnética a la vez pareciera diminuto si se compara con el volumen evaluado a través de una prueba de presión.

Discutir sobre cual es mejor no es el objetivo de este trabajo. Ya existen métodos que buscan integrar datos de permeabilidad provenientes de diferentes métodos a través de regresión lineal Al-Ali y Worthington, Shafer y Ezekwe, a través de las Ecuaciones de Coates.

El concepto de permeabilidad como constante es evaluado a través de la ecuación de Darcy, para flujo lineal y en una sola fase:

$$K = \frac{q \cdot \mu \cdot L}{A \cdot \Delta P} \quad (2.3)$$

La unidad de la permeabilidad los miliDarcys que se evalúan como un Área, la cual esta físicamente relacionada la superficie expuesta al flujo. Basándose en esta definición de lo que son los milidarcys se respalda la suposición de la relación directa entre porosidad y permeabilidad. La ecuación de Darcy no es útil para esta tesis debido a lo que se busca es una función que relacione la porosidad con la permeabilidad, en una función de distribución de probabilidad.

La ecuación que predice la permeabilidad desde la porosidad y la superficie expuesta al flujo, fue propuesta por Kozeny y Carman (1938) como:

$$K = \frac{\phi^3}{F_s \tau^2 A_g^2 (1-\phi)^2} \quad (2.4)$$

La ecuación de Kozeny-Carman considera además de la porosidad, también las propiedades que se relacionan directamente con el área involucrada en el flujo como la tortuosidad y el área de los granos. Aunque Kozeny y Carman consideran únicamente el flujo monofásico, otros autores mejoran esta ecuación añadiendo el término de la Saturación de agua irreductible, Wyllie y Rose (1950):

$$K^{1/2} = \frac{C_1 \phi}{S_{wir} - C_2} \quad (2.5)$$

Wyllie y Rose comenzaron su trabajo añadiendo constantes  $C_1$  y  $C_2$ , las cuales actúan como factores de corrección dependiendo de la tortuosidad y la relación entre porosidad total y efectiva. Otra variación es la ecuación de Timur (1968) la cual en vez de valores constantes asigna  $P$ ,  $Q$  y  $S$  como factores de corrección obtenidos de la regresión lineal de los datos:

$$K = \frac{P \phi^Q}{S_{wir}^R} \quad (2.6)$$

Así como existen relaciones generales para la porosidad y permeabilidad también existen relaciones particulares, para casos específicos, como la ecuación de Timur para arenas:

$$K = \frac{0.136 \phi^{4.4}}{S_{wir}^2} \quad (2.7)$$

Puede ser incluso más específico, o bien como la ecuación de Timur para arenas de Norte América:

$$K = \left[ \frac{100 \phi^{2.25}}{S_{wir}} \right]^2 \quad (2.8)$$

Una correlación importante al momento de predecir la permeabilidad es la desarrollada por Amaefule (1993), a partir de la ecuación de Kozeny-Carman, dividiendo ambos extremos de la Ec. 2.1 entre  $\phi_e$  y tomando la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación:

$$\sqrt{\frac{k}{\phi_e}} = \left[ \frac{\phi_e}{1-\phi_e} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{F_S \tau A_g}} \right] \quad (2.7)$$

Amaefule introduce un parámetro proporcional a la permeabilidad, al que llama índice de calidad del yacimiento (RQI):

$$RQI = 0.0314 \sqrt{\frac{K}{\phi_e}} \quad (2.8)$$

El cual se evalúa como una unidad de longitud, proporcional a la permeabilidad. La porosidad efectiva  $\phi_e$  se relaciona de la siguiente manera con la fracción de porosidad total  $\phi_z$ .

$$\phi_z = \frac{\phi_e}{1-\phi_e} \quad (2.10)$$

De la porosidad total  $\phi_z$ , el índice de calidad en el yacimiento RQI, se obtiene otro parámetro. El indicador de la zona de Flujo:

$$FZI = \frac{1}{\sqrt{F_S \tau A_g}} = \frac{RQI}{\phi_z} \quad (2.11)$$

Tomando el logaritmo desde ambos extremos:

$$\log RQI = \log FZI + \log \phi_z \quad (2.12)$$

Al graficar en escala logarítmica la porosidad contra RQI, se aprecia una relación lineal similar a la que se observaría si se graficará contra FZI o incluso la permeabilidad, de la Ec. 2.11 se deduce:

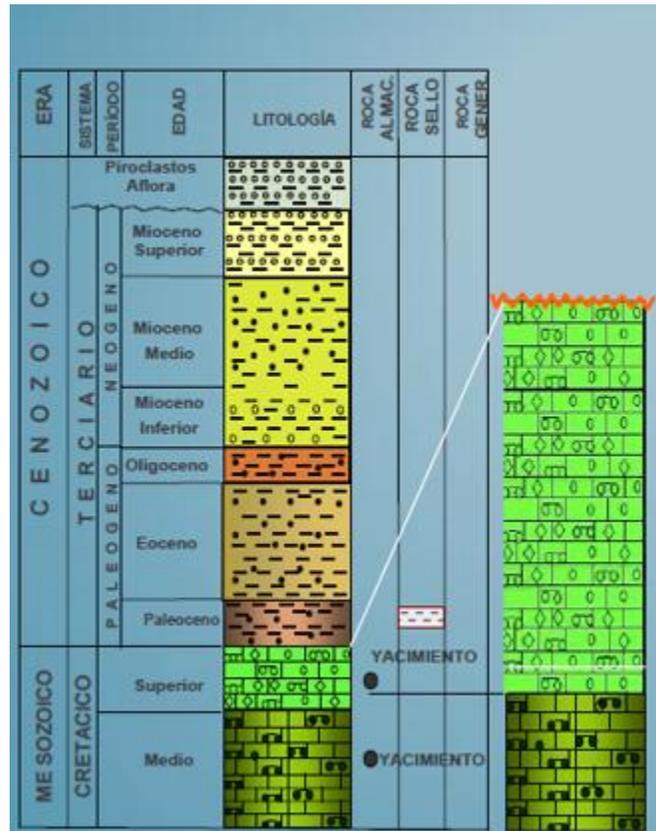
$$\log k = a\phi + b \quad (2.13)$$

La cual será una ecuación que se empleara en el capítulo 4 más extensamente, aunque independientemente de la relación que se emplee estas presentan la misma limitante, que al igual que las ecuaciones 2.1 y 2.2 y es que se requiere un gran volumen de datos para apreciar y comprobar la correlación entre las variables

### 3.- Aplicación Petrofísica

#### Caso 1

Se tienen los datos petrofísicos de núcleos de un yacimiento que se ubica en la formación Cretácico Superior, cuya columna geológica se menciona en la **Fig. 3.1**.



**Fig. 3.1.-** Columna Geológica para el caso 1.

De acuerdo a la información obtenida de los estudios petrofísicos en los núcleos y de los recortes de la perforación, se determina la columna geológica a partir del cretácico superior de la siguiente manera: una toba volcánica café claro a crema, en partes alterada por caolinización, que cumple la función de roca sello, seguido por lutita gris claro y gris verdoso, con intercalaciones de lutita café rojizo con intercalaciones de arenisca; parte superior se tienen conglomerados constituidos por cuarzo, mudstone y fragmentos de roca ígnea en matriz areno arcillosa.

En el intervalo productor del Cretácico Superior se tienen lutita gris claro y gris verdoso, ligeramente calcárea, en partes arenosa bentonítica y ligeramente calcárea, con intercalaciones de bentonita y lutita gris claro y gris verdoso, semidura, ligeramente calcárea y bentonítica, con pequeñas intercalaciones de arena gris claro.

En el intervalo productor del Cretácico Inferior se tiene una formación de Wackstone-grainstone crema y café claro a oscuro, de liólidos, intraclastos, ligeramente arcillosos y dolomitizados.

La información disponible de los núcleos con la que se cuenta tenemos para el pozo 1A, se muestran en la **Tabla 3.1**:

**Tabla 3.1.-** Datos de núcleos pozo 1A, caso 1.

Profundidad	Muestra	$\emptyset$ (%)	$K_H$	$S_w$ (% Vp)
2716	1-1-H	24.4	44.96	59.1
2716.75	1-2-H	16.6	28.17	55
2717.5	1-4-H	21.9	20.698	61
2718.4	2-1-H	20.2	2.808	63.8
2719.2	2-2-V	13.4	1.876	
2719.9	2-3-H	24.4	8.432	59.9
2720.7	2-4-V	21.5	6.009	53.9
2721.5	2-5-H	23.7	10.854	66.2
2722.3	2-6-H	22.2	31.56	
2723	2-7-H	25.7		61
2723.8	2-8-H	23.3	22.13	63.4
2724.6	2-9-H	24.1	13.764	59.2

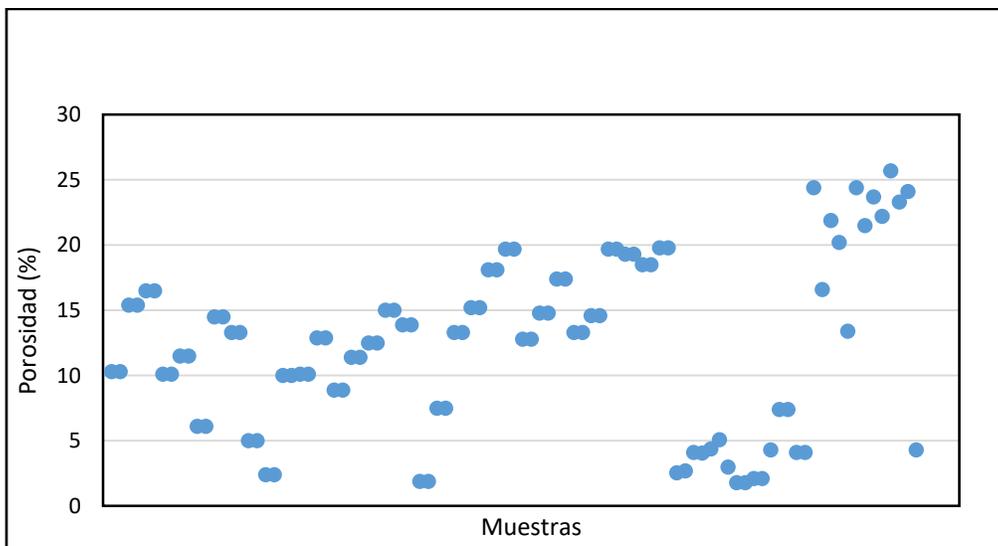
El trabajar con datos de núcleos tiene la ventaja de manejar datos de porosidad efectiva, pero debido a las condiciones de las muestras y del laboratorio se termina considerando la permeabilidad para un sentido de flujo en particular en este caso (Horizontal). La información con la que se cuenta es mucha y muy variada en algunos casos y escasa en otros, a partir de aquí se determina el área de estudio como el Cretácico Superior y se limita los datos que se emplearán. Solamente se utilizarán los datos ubicados en una profundidad entre los 2665 a 2750 metros,

siempre y cuando estos datos de núcleos cumplan con las características litológicas señaladas previamente.

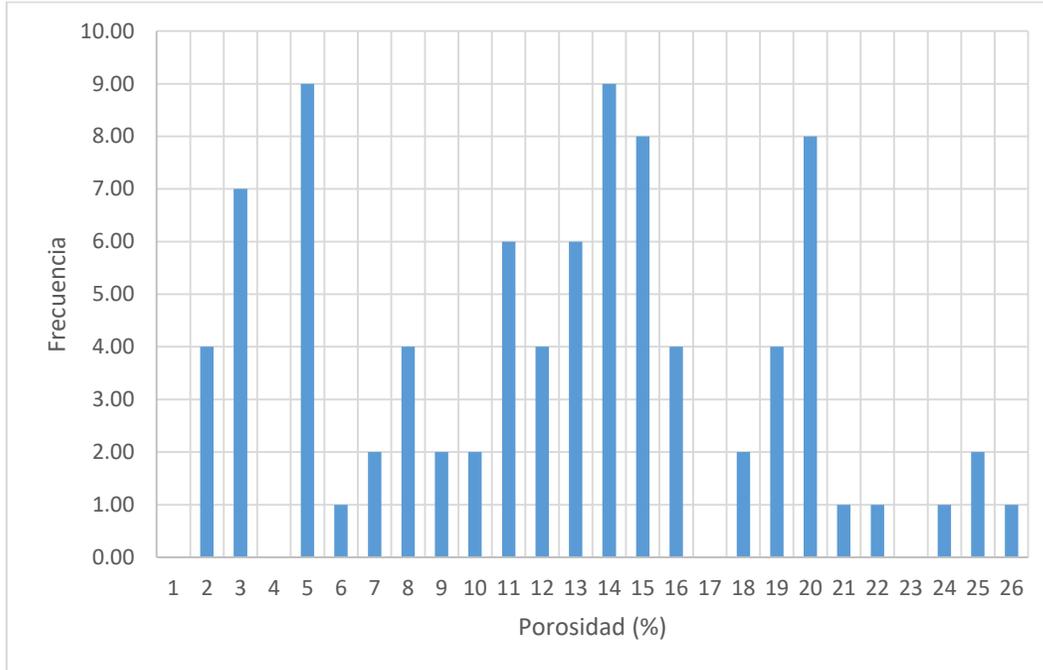
Al momento de organizar la información se deberá de descartar la información en los casos en los que no se pueda integrar conjuntos de datos aceptables, dentro de parámetros como: cantidad mínima, calidad y métodos de obtención, toda la información y el archivo completo de estos yacimientos deberá de leerse y archivar, dado que mucha de esta información será útil sobre todo al momento de interpretar los resultados y obtener conclusiones.

### 3.1.-Análisis Estructural

Al decir análisis estructural de los datos se está señalando la caracterización espacial estructural de una propiedad en particular las **Figs. 3.2** y **3.3** muestran la dispersión, concentración y distribución de los datos y son el punto de partida de cualquier función o correlación que se aplique posteriormente. Como el objetivo es determinar una función de distribución de probabilidad para la porosidad y de ahí avanzar hacia la permeabilidad. El análisis estructural deberá efectuarse con respecto a la porosidad.



**Fig. 3.2.-** Dispersión de la porosidad, caso 1



**Fig. 3.3.-** Histograma de la porosidad, caso 1

En un análisis inicial se obtiene que la porosidad presenta un valor de porosidad porcentual medio de 12.40, con un máximo de 25.7 y mínimo 1.8  $\sigma_{\phi} = 6.44$ .

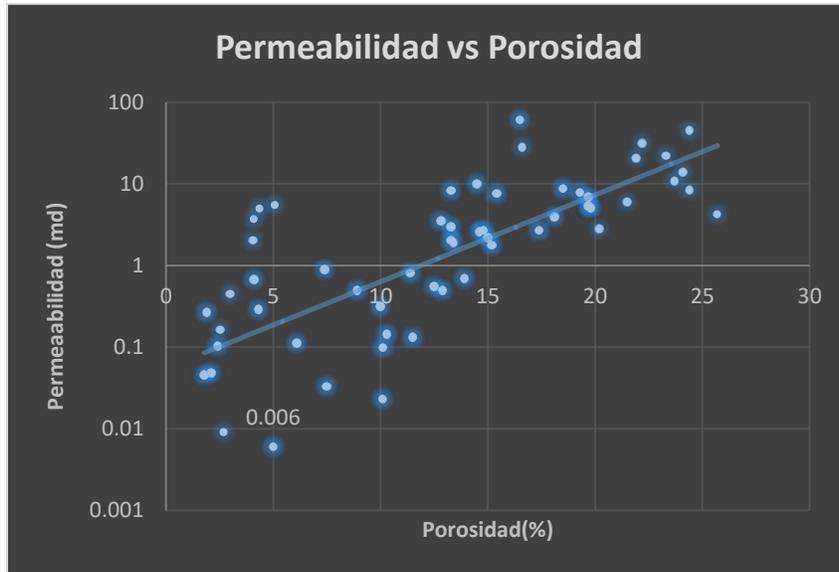
El comportamiento de los datos de acuerdo a su profundidad y puede relacionarse con la columna geológica; ahora bien hay que aclarar que los datos de porosidad presentados corresponden a núcleos cortados de diferentes pozos, por lo que espacialmente puede haber porciones de varios metros con ausencia de datos. Esta es una limitante, y estos vacíos en los datos se aprecian más adelante en los gráficos de dispersión; se requiere que esta ausencia de datos afecte lo menos posible los análisis y esto es factible, dado que todos los datos corresponden a diferentes núcleos, de diferentes pozos, pero del mismo yacimiento y de la misma formación productora de lutitas del Cretácico Superior. La principal fuente de error en este procedimiento proviene de la representación adecuada del medio físico como un grupo muestral representativo.

Se considera que en todo conjunto de datos medidos de forma experimental se manifestarán anomalías estadísticas, estos son los considerados “Outliers”, en el caso de datos de porosidad y permeabilidad obtenidos de núcleos los “Outliers” son las Fracturas, Fallas, Vúgulos o errores muestrales que terminarán afectando la correlación de los datos, pero que estadísticamente representan una minoría.

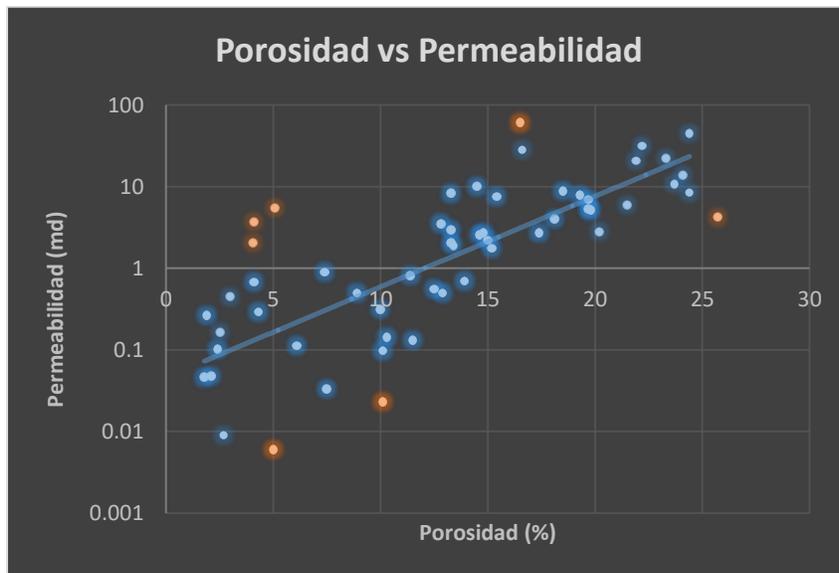
La importancia que los “Outliers” puedan tener depende del tipo de formación y de la correlación que se esté buscando por ejemplo; En una formación de arenas arcillosas donde los datos “Outliers” que afectan la correlación principalmente son los que contienen las más altas concentraciones de arcillas, estos puntos afectan la correlación y lo conveniente es retirarlos del conjunto de datos siempre y cuando no representen más de un 10 % del conjunto de datos.

Por otro lado en una formación de carbonatos donde la mayoría de los datos presentan bajas porosidades y permeabilidades, los “Outliers” serían los datos de alta permeabilidad donde se presentan las fracturas, a pesar de que estos datos representen menos del 10 % del volumen muestral en la formación pueden llegar a representar los principales canales de flujo, en estos casos los “Outliers” son los puntos más representativos y son el punto central de los análisis a realizarse. El tipo de formación con la que se trabaje determinara el tipo de correlación que se quiera emplear.

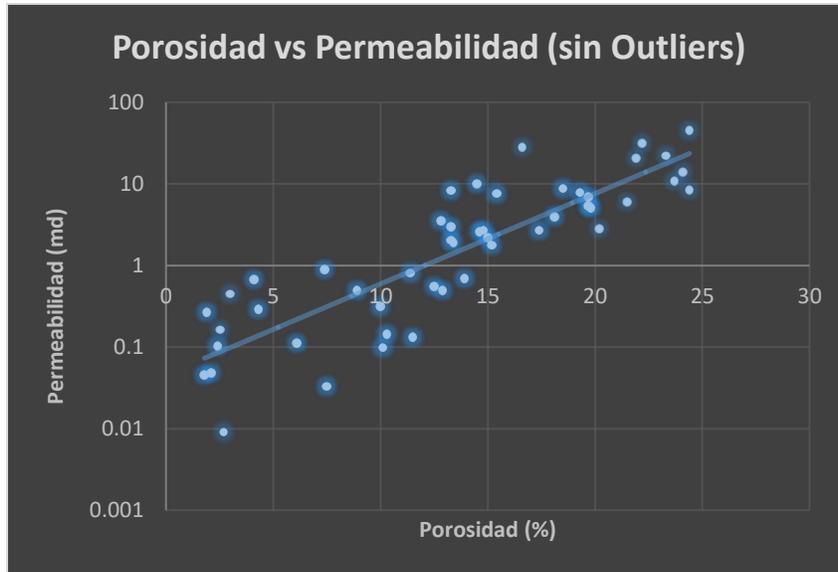
Para la identificación de estos datos se emplea un gráfico de porosidad contra permeabilidad, **Fig. 3.4**; El identificar estas anomalías puntos depende principalmente de la detección visual de los “Outliers” en la **Fig 3.5**; es decir los datos que combinen valores anormales de porosidad y de permeabilidad.



**Fig. 3.4.-**Gráfica de la dispersión de la porosidad contra la permeabilidad



**Fig. 3.5.-**Gráfica de la dispersión de la porosidad contra la permeabilidad, con señalización de “outliers”.



**Fig. 3.6.**-Gráfico de dispersión porosidad contra permeabilidad, sin “Outliers”

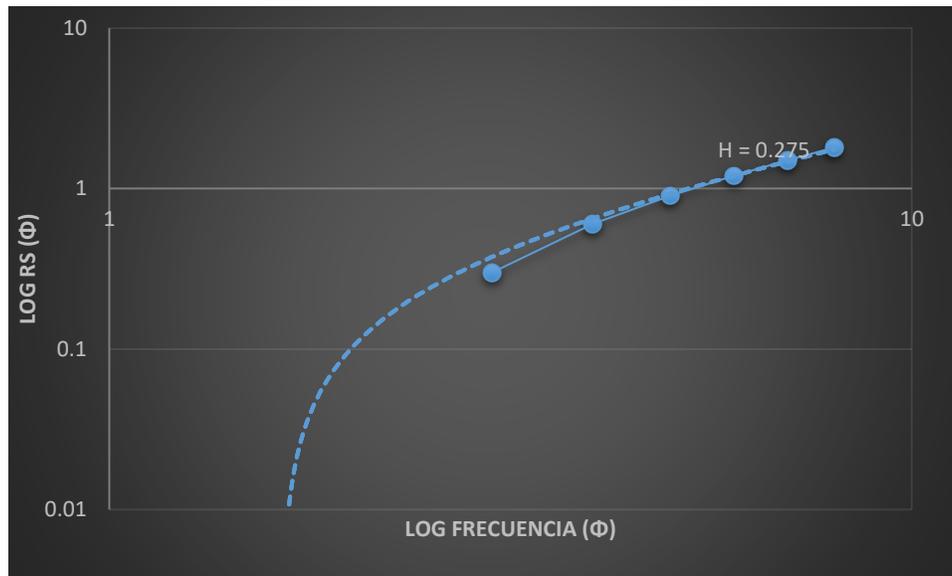
El objetivo del análisis de “Outliers” es mejorar la correlación de los datos afectándolos lo menos posible, llegados a este punto en la **Fig. 3.6** se pueden eliminar los “Outliers”, pero se corre el riesgo de afectar el análisis al trabajar cada vez con menos datos. No hay una regla general respecto al manejo de los datos, pero lo que se busca es mejorar la correlación de los datos, retirando la menor cantidad de datos **Tabla 3.2.**

**Tabla 3.2.-** “Outliers” identificados del caso 1

Profundidad	Núcleo	Porosidad (%)	KL(MiliDarcy)
2-2-H	2676	4.07	2.034
2-1-H	2675.1	4.1	3.693
2-2-H	2614	5	0.006
2-2-H	2614	5	0.006
2-4-H	2678	5.08	5.466
1-6-H-1	2564.5	10.1	0.023
1-6-H-1	2564.5	10.1	0.023

Este análisis estructural de los datos es importante debido a que permite identificar y complementar los intervalos con ausencia de información.

El análisis escalado que se presentó en el primer capítulo, se vendrá a representar con los datos del Caso 1 en la **Fig. 3.7**:



**Fig. 3.7.-** Análisis de rango escalado, caso 1

De la Fig. 3.7, se aprecia un coeficiente de Hurst de 0.275. lo cual indica que se tiene una formación antipersistente, es decir que existe una correlación correspondiente negativa entre sus incrementos. Es decir Heterogénea.

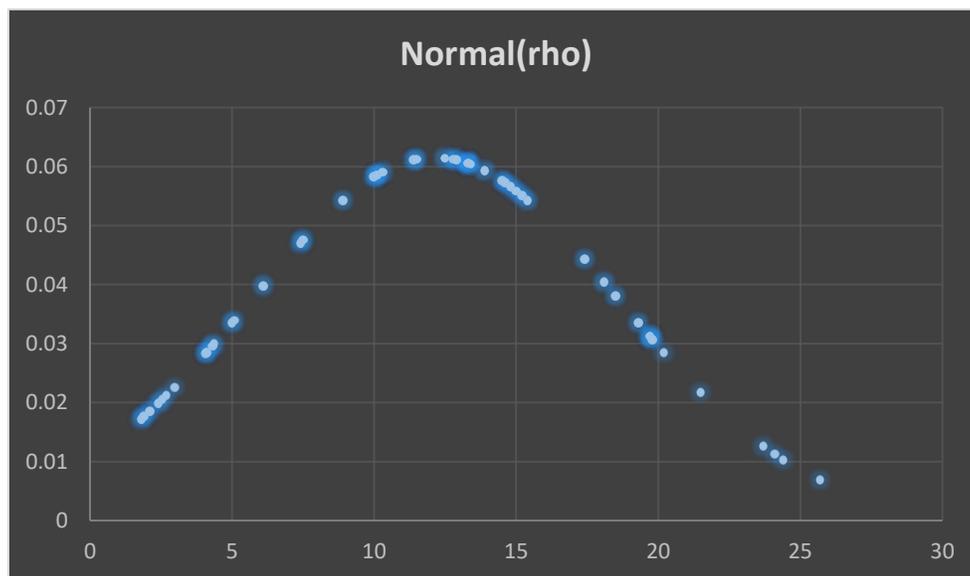
El comportamiento del rango escalado se mantiene independientemente de la cantidad de datos que se esté manejando, por ejemplo el Caso 2 donde se tiene más de 8,000 datos de registros. Se mantiene su comportamiento aunque se suavicen los datos. El coeficiente de Hurst expresado por  $H$  es una representación de la continuidad del medio poroso clasificando los datos como persistentes o antipersistentes, sirve como indicador de heterogeneidad, es una variable directamente relacionada con la dimensión fractal; Para esta tesis es útil si al plantear la función de distribución de probabilidad se quiere definir esta de forma el comportamiento fractal, debido a su correlación directa con la dimensión fractal,  $1 < D_f < 2$ , entonces:

$$D_f = 2 - H \quad (3.1)$$

Si se tiene  $H = 0.5$ , se tiene entonces una serie de datos con ruido Browniano, es decir sus incrementos son independientes de la teoría de probabilidad y su correlación es cero. En este caso este valor no se da y de hecho la suposición inicial en esta tesis dice que se asume una relación física directa entre la porosidad efectiva y la permeabilidad.

### 3.2- Función de porosidad

Con los datos de porosidad se procede a probar funciones de probabilidad para los valores de porosidad efectiva obtenida de núcleos, se busca una función que represente la mínima desviación estándar posible, en este caso se inicia trabajando con una función de distribución normal, **Fig. 3.8** y **Tabla 3.3**.



**Fig. 3.8.-** Función de distribución normal de porosidad normal, caso 1.

**Tabla 3.3.-** Propiedades de la función de distribución Normal de porosidad, caso 1.

Desviación Estándar	6.48
Valor Medio	12.15
Valor Mínimo	1.8
Valor Máximo	23.7

La herramienta que se emplea en estos casos para determinar el comportamiento de la función, así como para apreciar si es que se presentan otros tipos de fenómenos que no se alcanzan a apreciar es a través del análisis de residuos y sus parámetros **Fig. 3.9** y **Tabla 3.4**.

**Tabla 3.4.-** Propiedades de los residuos de distribución normal, caso 1.

Desviación Estándar	0.016
Valor Medio	$2.28 \times 10^{-17}$
Valor Mínimo	-0.036
Valor Máximo	0.018



**Fig. 3.9.-** Análisis de residuos de la función de distribución normal de la porosidad, caso 1.

En casos de formaciones heterogéneas se pueden presentar casos donde la correlación entre las dos variables puede ser alta a pesar de que la relación entre las variables no sea lineal. En el caso de la Fig. 3.9 se presenta esta relación no lineal, pero que mantiene una relación entre las variables. La función de los gráficos de residuos para este ejemplo es para comprobar si los supuestos del modelo lineal de regresión lineal son correctos.

Se puede graficar los residuos contra cualquier otra variable, incluso las no consideradas en la función de probabilidad; por ejemplo: Residuos vs. Profundidad, Residuos vs. Compresibilidad o Residuos vs. Densidad, **Fig. 3.10**, con la finalidad de explicar cualquier variación que pueda verse en los residuos. En un conjunto de datos de porosidad y permeabilidad es normal que se manifiesten anomalías debido a las heterogeneidades del medio poroso, el análisis de residuos es una herramienta para la identificación de estas heterogeneidades.



**Fig. 3.10.-** Análisis de residuos de la función de distribución normal de la porosidad contra la permeabilidad, caso 1.

En la Fig. 3.10, aunque se aprecia el efecto de la columna geológica en la variación de los datos, la principal ventaja es que permite determinar los intervalos de confianza; es decir los puntos en los que los datos se alinean entre sí, aportando mayor confianza y los intervalos de baja confianza donde los datos se dispersan unos de otro siendo estos los intervalos donde se manifiestan las heterogeneidades. El identificar estos intervalos será relevante al momento de aportar conclusiones.

Los datos presentados en la Fig. 3.9 están ordenados respecto a su magnitud de porosidad, las agrupaciones presentadas en el análisis de residuos corresponden a conjuntos de núcleos con magnitudes similares, por lo que el comportamiento presentado por los núcleos es de acuerdo a su magnitud en relación a su densidad de probabilidad. El acomodo de los datos de porosidad efectiva de manera ascendente, no es una manipulación que afecte su resultado. Esto es con la finalidad de representar la función de la mejor manera posible dado que ya se revisó cada núcleo y cada dato para que correspondieran a la misma formación geológica su reacomodo de acuerdo a la magnitud de su porosidad en la mayoría de los casos muestra una correlación lineal con la profundidad, atendiendo de esta forma los principios físicos de compresibilidad.

El emplear una función normal de límite central para expresar el comportamiento de las variables en medios de arenas homogéneas, el conjunto de datos del caso 1 son arenas e intercalaciones de lutitas, que facilitan esta suposición. Sin embargo esta suposición no está limitada a la teoría de límite central, en la literatura se pueden encontrar numerosas funciones de probabilidad para casos particulares y en caso de ser necesario se puede elaborar y ajustar una función de distribución de probabilidad propia.

### **3.3.- Función de la permeabilidad**

La función de la permeabilidad correspondiente al Caso 1, es una función dependiente de la porosidad y de su distribución; buscando la correlación entre porosidad y permeabilidad. Aunque exista tendencia entre las variables se puede observar que la permeabilidad para una cierta porosidad puede variar más de un orden de magnitud. Las correlaciones siguientes no son recomendables por la

banda de error que manejan y porque no se mantienen constantes dentro del yacimiento. Si bien este tipo de relaciones puede emplearse para analizar núcleos y es difícil extrapolarlos para las condiciones del yacimiento, se proponen para construir la función porosidad-permeabilidad.

$$k = a10^{b\phi} \quad (3.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros de ajuste. Habrá variaciones en los datos que deberán de corregirse en la selección de la función. Por ejemplo donde el avance de la herramienta en la pared del pozo en la medición de registros geofísicos, provocara variaciones estas disparidades pueden suavizarse si se considera el ruido Gaussiano,  $f_g(\sigma)$  como numero aleatorio de una distribución Gaussiana de media cero y desviación estándar  $\sigma$ , se puede usar la relación:

$$k = a10^{b\phi+f_g(\sigma)} \quad (3.2)$$

El empleo de distribuciones no Gaussianas para  $f_g(\sigma)$ , permite que  $\sigma$  sea función de la porosidad, dependiendo de los datos disponibles. También se pueden emplear relaciones no lineales entre porosidad y permeabilidad usando expresiones de leyes de potencias:

$$k = a10^{b_n\phi^n+b_{n-1}\phi^{n-1}+\dots+b_1\phi+f_g(\sigma)} \quad (3.3)$$

Se recomienda el uso de este tipo de funciones para formaciones de carbonatos fracturados donde se supone se puede un comportamiento fractal entre los datos, las funciones de leyes de potencias pueden representar este comportamiento.

Aunque no se trate de una formación de carbonatos fracturados se recomienda el uso de funciones de leyes de potencias para comprobar o descartar la presencia de fractalidad en la función de distribución de probabilidad; la mera observación no es suficiente para descartar heterogeneidades en los datos. Otra relación útil puede ser:

$$k = a\phi^b \quad (3.4)$$

con  $a$  y  $b$  como parámetros de ajuste, estas correlaciones provienen de interpretaciones físicas realizadas por autores; por ejemplo la Ec. 3.3 es una interpretación física del Índice de Calidad del Yacimiento a partir de la Ecuación de Kozeny y Carman (1938), Ec. 2.13. Identificar su procedencia y sus criterios confiere mayor certeza a los resultados.

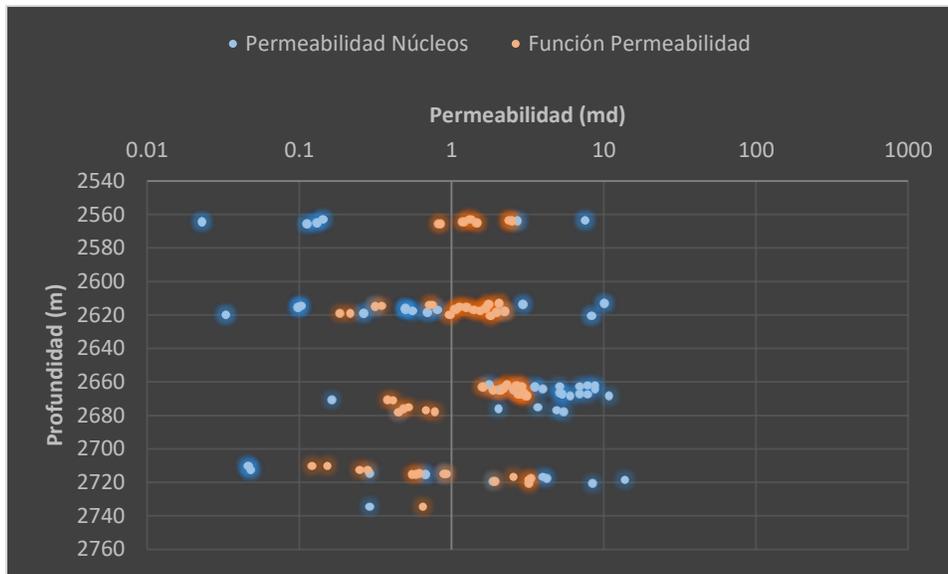
Las correlaciones que se emplea en este caso son empíricas y correspondientes a conjuntos de datos en particular, con la finalidad de representar la más certera correlación posible con los datos de permeabilidad obtenidos de los núcleos, para el caso 1 se parte de la correlación:

$$k = a10^{b\phi} \quad (3.5)$$

donde  $a$  y  $b$  son factores de correlación. A partir de aquí se correlaciona esta ecuación con los datos que se tienen hasta llegar a:

$$k = 0.078 * 10^{0.0235d_f\phi} + 2.79 \frac{N_i}{N_n} \quad (3.6)$$

donde  $d_f$  es la dimensión fractal calculada a partir del coeficiente de Hurst,  $N_i$  y  $N_n$  son factores dependientes de su ubicación en la columna. Al compararse esta función con respecto a los valores obtenidos de núcleos en una gráfica de dispersión se obtiene:

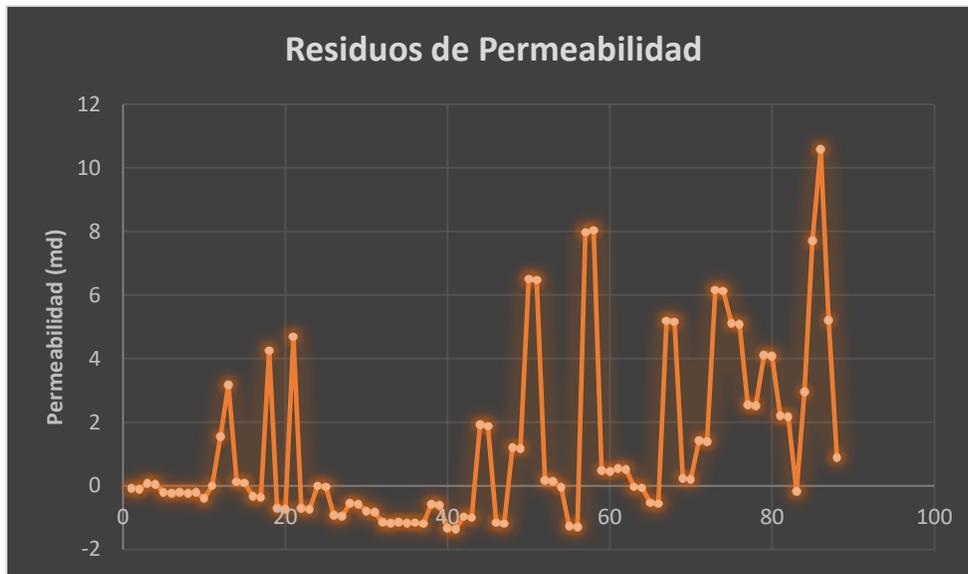


**Fig. 3.11.-** Dispersión de la permeabilidad de núcleos y su función aleatoria

El coeficiente de correlación entre los datos a partir de la función de permeabilidad empírica y de los núcleos presenta un valor de 0.9909,  $r^2 = 0.9819$  y coeficiente de asimetría de 0.0751. Lo que se aprecia en la Fig. 3.11 y a través de los factores de correlación es que se tiene una buena correlación acompañada de una dispersión considerable en los datos. Un comportamiento en el que los datos se mantienen alejados del valor medio, es característico de una formación heterogénea.

Como se mencionó brevemente en la sección 2.1 no hay una función de probabilidad que pueda correlacionar todos los efectos de heterogeneidad presentes en el yacimiento de manera ideal. Se aprecia que los residuos siguen presentando una tendencia debido alguna heterogeneidad (Fracturas dentro de la formación de lutitas). La función de probabilidad normal para la porosidad y la función de probabilidad empírica de permeabilidad aquí empleados dieron preferencia a los efectos de porosidad, he hicieron dependientes a la permeabilidad.

Como método de ajuste a la función de permeabilidad, se procede a quitar la tendencia mediante método de diferencias, **Fig. 3.12:**



**Fig. 3.12.-** Análisis residual de la función de permeabilidad empírica.

Lo que se aprecia en los residuos es que la diferencia entre los datos de la función propuesta y de los datos de núcleos, presentan una mejor aproximación mientras más pequeños sean los datos indicando que la función propuesta presenta errores al aproximarse a altos valores de permeabilidad. Es decir, la Heterogeneidad del medio sigue siendo un problema al momento ajustar la función a los datos, proceder a retirar la tendencia o seguir excluyendo datos “Outliers” puede mejorar la correlación en cierta medida.

Parte importante de analizar es corroborar que tipo de errores están presentes en la dispersión de los datos por ejemplo; Errores de tipo accidental procedentes de la medición este tipo de errores son comunes y están presentes en todo conjunto de datos obtenidos de campo o de manera experimental. El objetivo del análisis de residuos es identificar errores constantes en el conjunto de datos, este tipo de errores describen condiciones particulares es decir, describen heterogeneidades específicas que se manifiestan en el conjunto de datos: La presencia de arcillas, vóculos o cambios de litología.

Se debe evitar confundir los tipos de errores, porque así como se presentan errores de medición, accidentales o constantes; También se pueden presentar errores de asociados al método, asociados al modelo teóricos y suposiciones que se hayan

realizado durante el análisis. Es necesario corroborar los resultados mediante otras funciones, repitiendo procedimientos de análisis de residuos y retiro de la tendencia, para diferenciar que tipo de errores se están presentando.

#### **4.- Casos Particulares.**

El objetivo los gráficos de porosidad contra permeabilidad es describir el comportamiento de estas variables, en muchos casos como una función en términos de la porosidad, tiene su ventaja presentar ambas asociadas a una densidad de probabilidad. Bajo la suposición de que la función porosidad y permeabilidad están relacionadas de acuerdo a las dimensiones del canal de flujo, se puede obtener cualitativamente las dimensiones de garganta de poro o diámetro de fractura dependiendo del tipo de canal de flujo que se tenga en la formación en cuestión.

Para determinar la relación entre la porosidad y la permeabilidad por medio de una función de distribución de probabilidad se pueden emplear herramientas estocásticas o bien apoyar esta función con otras relaciones en la literatura.

En el Caso 1 se discute una función construida a partir de relaciones empíricas, aproximando sus resultados mediante iteraciones y análisis de residuos. Se recomienda el uso de métodos iterativos para la construcción de funciones estocásticas; para el caso de un medio carbonatado y fracturado se pueden emplear otros métodos, que sirvan para describir el comportamiento que se ve reflejado, si bien no en el medio poroso al menos que refleje el comportamiento de los datos registrados, se debe mencionar que a veces describir el comportamiento de los datos es diferente a describir las características del medio poroso, esta idea se desarrolla más adelante.

En la Sección 3.1 se mencionó el Efecto que los “Outliers” pueden llegar a tener sobre las formaciones, que dependiendo de las características predominantes en la litología los “Outliers” pueden ser aislados del conjunto de datos o bien ser estudiados por separado como los datos representativos del volumen muestral. Al querer considerar los “Outliers” como valores representativos se debe de considerar una distribución de probabilidad que considere el volumen total de los datos, pero

que de particular importancia a estos “Outliers” se propone una distribución alejada del valor medio, por ejemplo un caso particular de la distribución binomial: la distribución de Poisson; Donde una de las condiciones centrales es que la relación entre el Volumen de datos y los “Outliers” sea de 10 a 1:

$$n \geq 50 \text{ y } nk \leq 5$$

Considerando la expresión general para la distribución binomial:

$$P(k) = \binom{n}{k} \rho^k (1 - \rho)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \rho^k (1 - \rho)^{n-k} \quad (4.1)$$

Sustituyendo:

$$P(k) = \binom{n}{k} \rho^k (1 - \rho)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \rho^k (1 - \rho)^{n-k} \quad (4.2)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \rho^k (1 - \rho)^{n-k} \quad (4.3)$$

Sea:

$$\rho = \frac{\lambda}{n} \quad (4.4)$$

Desarrollando:

$$1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{n} = \frac{n-\lambda}{n} \quad (4.5)$$

Sustituyendo:

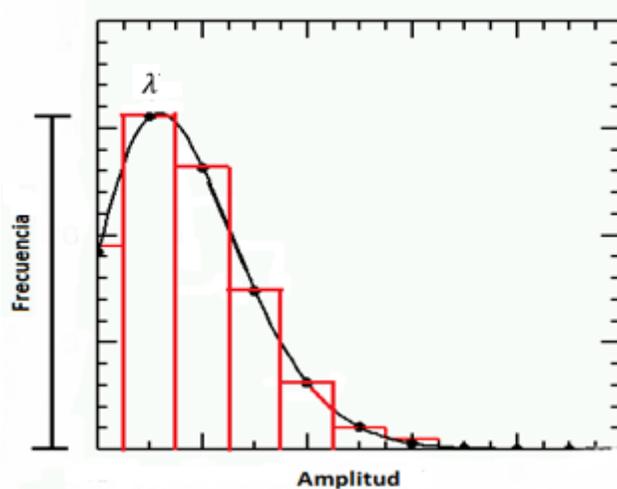
$$\begin{aligned} P(x = k) &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[ \left(1\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[ \left(1\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^n \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{-k} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sea que  $n \rightarrow \infty$ , o bien una cantidad de datos elevada en comparación con el volumen de “Outliers” de tal forma que  $nk \rightarrow \lambda$  permanezca constante. Esto significa que  $\rho \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En la última expresión los términos de la forma:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots \quad (4.7)$$

Expresados como distribución de Poisson, **Fig. 5.1:**

$$P(k \geq 20) = \sum_{k=0}^{20} \left(\frac{\lambda}{k!}\right)^k e^{-\lambda} \quad (4.8)$$



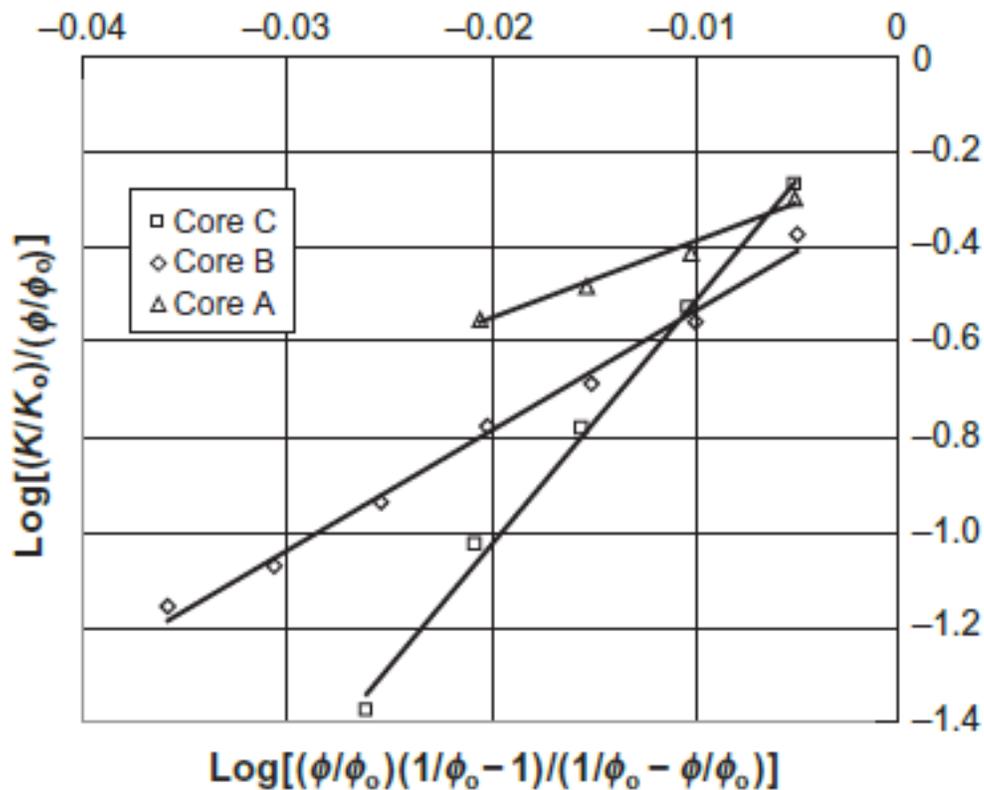
**Fig. 4.1.-** Distribución de probabilidad de Poisson

Aunque el flujo a través del yacimiento muchas veces se da por un canal de flujo preferencial, que termina imponiendo un valor representativo para la permeabilidad debido a condiciones del medio poroso (una fractura o falla), igualmente hay características de porosidad preferentes que rigen los valores de porosidad, el problema radica en determinar si es que los valores obtenidos de un registro geofísico o estudios de núcleos pueden demostrar estas características del medio, esto dependerá del tipo de modelo que se empleó, a lo que surgen otras interrogantes; las herramientas que se emplearon o los métodos con que se calcularon.

En muchos casos la relación de porosidad y permeabilidad está sujeta a las condiciones de escalamiento; Es decir que está relacionado al volumen de datos y la dimensión del problema. La porosidad – permeabilidad puede presentar una relación tipo ley de potencias Bertero (1988):

$$\frac{K}{K_o} = f_{\infty} \frac{\phi}{\phi_o} \left[ \frac{\phi(1-\phi_o)}{\phi_o(1-\phi)} \right]^{2\beta} \quad (4.10)$$

En la Ec. 4.10 el parámetro de ajuste  $\beta$ , está relacionado a la heterogeneidad del medio poroso. Estos factores de ajuste, que se presentan en modelos de leyes de potencias son empleados aproximar el mejor ajuste posible con los datos; A pesar de que no se tiene una interpretación física completa del significado de estos parámetros, se consideran asociados a las particularidades del medio.



**Fig. 4.2.-** Gráfico de leyes de potencia de porosidad-permeabilidad, Bertero (1998).

El aporte principal de Faruk-Civan con respecto al trabajo de Bertero, es agregar más coeficiente de ajuste, señalándolos como indicadores del medio y aplicando de esta forma modelos de leyes de potencias a problemas particulares de

escalamiento. Kozeny-Carman (1993) Ec. 4.11, realizaron los primeros trabajos para describir el comportamiento de la relación porosidad-permeabilidad mediante leyes potencias y relacionando este comportamiento con yacimientos fracturados la, empleando datos de porosidad total obtenida de registros geofísicos. Civan (2000), Ec. 4.12, continúa y complementa el trabajo de Kozeny-Carman, mejorando su modelo y buscando aplicaciones en problemas de escalamiento:

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \gamma \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) \quad (4.11)$$

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \gamma \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)^\beta \quad (4.12)$$

Partiendo de la Ec. 4.12. Se sigue un proceso de ajuste y calibración de ecuaciones de ley de potencias, al aplicarse a casos particulares. Por ejemplo Cuando  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  son Variables constantes:

$$\log \left( \frac{K}{\phi} \right) = 2 \log \lambda + 2\beta \log \left( \frac{\phi}{\alpha-\phi} \right) \quad (4.13)$$

$$\log \left( \frac{K}{\alpha-\phi} \right) = 2 \log \lambda + (2\beta + 1) * \log \left( \frac{\phi}{\alpha-\phi} \right) \quad (4.14)$$

$$\log \left[ \left( \frac{\alpha-\phi}{1-\phi} \right)^{2\beta} \frac{k}{\phi} \right] = 2 \log \lambda + 2\beta * \log \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) \quad (4.15)$$

Pueden tenerse casos combinados entre variables constantes. Si  $\lambda$  y  $\beta$ , varían pero  $\alpha$  es constantes

$$(2\beta)^{-1} * \log \left[ \frac{k}{\phi \lambda^2} \right] = \log \left( \frac{\phi}{\alpha-\phi} \right) \quad (4.16)$$

$$(2\beta + 1)^{-1} * \log \left[ \frac{k}{(\alpha-\phi) \lambda^2} \right] = \log \left( \frac{\phi}{\alpha-\phi} \right) \quad (4.17)$$

$$(2\beta)^{-1} * \log \left[ \left( \frac{\alpha-\phi}{1-\phi} \right)^{2\beta} * \frac{k}{\phi \lambda^2} \right] = \log \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) \quad (4.18)$$

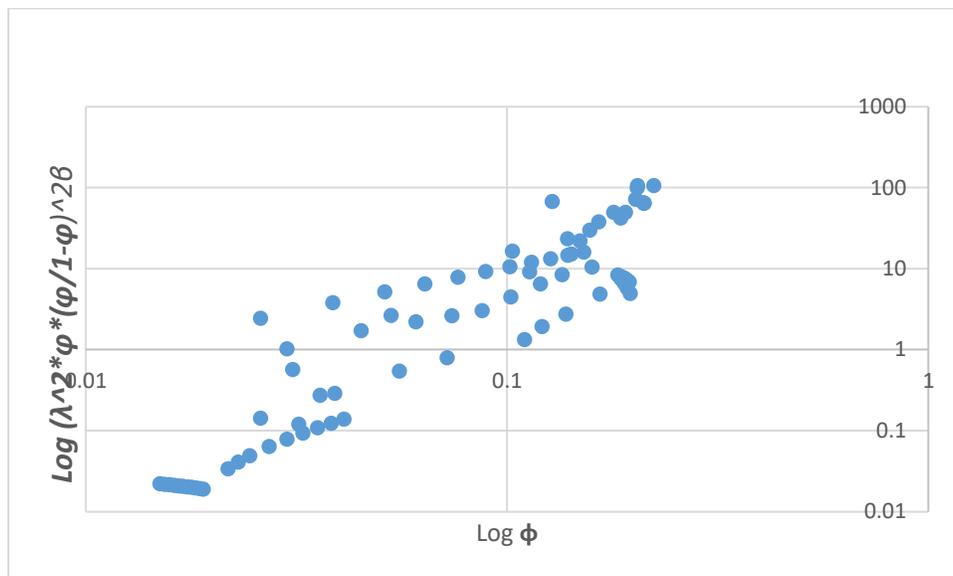
$$2(\beta + 1)^{-1} * \log \left[ \left( \frac{\alpha-\phi}{1-\phi} \right)^{2\beta} * \frac{k}{(1+\phi) \lambda^2} \right] = \log \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)$$

Si  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\lambda$  varían por igual, se llega a una solución general de la Ec. 4.12.

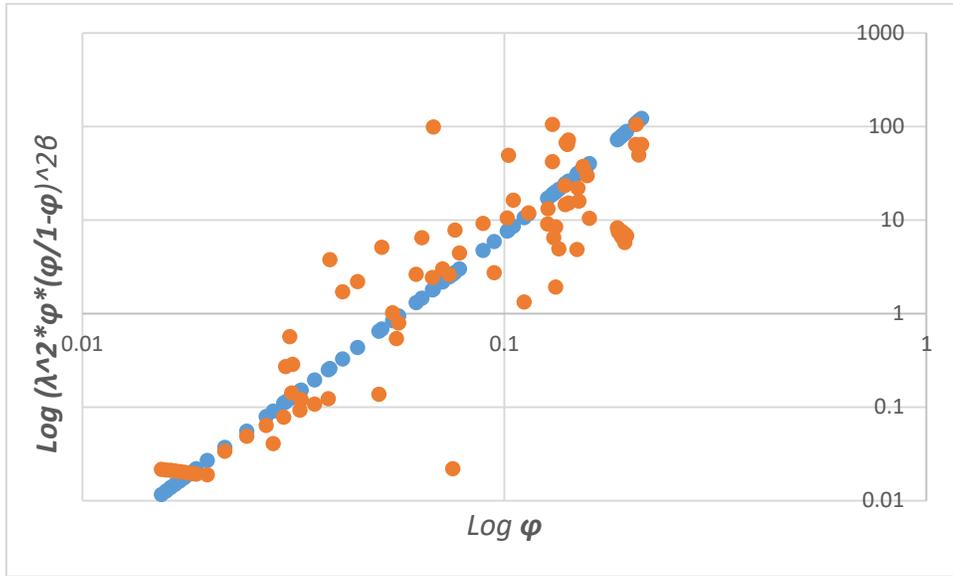
$$\log \left( \frac{k/k_o}{\phi/\phi_o} \right) = 2 \log \left[ \lambda \sqrt{\frac{\phi_o}{k_o}} \right] + 2\beta \log \left[ \frac{\phi/\phi_o}{\alpha/\phi_o - \phi/\phi_o} \right] \quad (4.19)$$

$$\frac{K\phi_o}{K_o\phi} = f(\beta, \lambda) \left[ \frac{\phi(1-\phi_o)}{\phi_o(1-\phi)} \right]^{2\beta} \quad (4.20)$$

Partiendo de la Ec. 4.12, y empleando los factores de ajuste, con los valores de permeabilidad del Caso 1, de las Ecs. 4.19 y 4.20 se obtienen las **Figs. 4.3 y 4.4**:



**Fig. 4.3.-** Dispersión de la relación porosidad-permeabilidad, caso 1, escala doble Log.



**Fig. 4.4.-** Dispersión de la relación porosidad-permeabilidad, ley de potencias, caso 1, escala doble Log

En la Fig. 4.4, Los factores de corrección  $\lambda$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  se obtuvieron a partir de procesos iterativos para identificar

De la función de distribución de probabilidad normal expresada por la Ec. 4.21, se parte para obtener para la función distribución de probabilidad bivariada básica, Ec. 4.22:

$$FDP(\phi) = \frac{1}{\sigma_{\phi}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\phi-\mu_{\phi})}{\sigma_{\phi}}\right)^2\right) \quad (4.21)$$

$$FDP(\phi, k) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\phi}\sigma_k\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{\phi-\mu_{\phi}}{\sigma_{\phi}}\right)^2 + \left(\frac{k-\mu_k}{\sigma_k}\right)^2 - \frac{2\rho(\phi-\mu_{\phi})(k-\mu_k)}{\sigma_{\phi}\sigma_k}\right)\right) \quad (4.22)$$

Se simplifica el exponente de la Ec. 4.22:

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{\emptyset - \mu_\emptyset}{\sigma_\emptyset} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\emptyset - \mu_\emptyset}{\sigma_\emptyset} \right) \left( \frac{k - \mu_k}{\sigma_k} \right) + \left( \frac{k - \mu_k}{\sigma_k} \right)^2 \right] \quad (4.23)$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_\emptyset^2\sigma_k^2} [(\emptyset - \mu_\emptyset)^2\sigma_k^2 - 2\rho(\emptyset - \mu_\emptyset)(k - \mu_k)\sigma_\emptyset\sigma_k + (k - \mu_k)^2\sigma_\emptyset^2 + (\emptyset - \mu_\emptyset)^2\sigma_k^2\rho^2 - (\emptyset - \mu_\emptyset)^2\sigma_k^2\rho^2] \quad (4.24)$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_\emptyset^2\sigma_k^2} [(\emptyset - \mu_\emptyset)^2\sigma_k^2\rho^2 - 2\rho(\emptyset - \mu_\emptyset)(k - \mu_k)\sigma_\emptyset\sigma_k + (k - \mu_k)^2\sigma_\emptyset^2 + (\emptyset - \mu_\emptyset)^2\sigma_k^2(1 - \rho^2)] \quad (4.25)$$

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_\emptyset^2\sigma_k^2} \left[ \left( (\emptyset - \mu_\emptyset)\sigma_k\rho - (k - \mu_k)\sigma_\emptyset \right)^2 - (\emptyset - \mu_\emptyset)^2\sigma_k^2(1 - \rho^2) \right] \quad (4.26)$$

$$-\frac{(\emptyset - \mu_\emptyset)^2\sigma_k^2(1 - \rho^2)}{2(1-\rho^2)\sigma_\emptyset^2\sigma_k^2} - \frac{\left( (\emptyset - \mu_\emptyset)\sigma_k\rho - (k - \mu_k)\sigma_\emptyset \right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_\emptyset^2\sigma_k^2} \quad (4.27)$$

$$-\frac{(\emptyset - \mu_\emptyset)^2}{2\sigma_\emptyset^2} - \frac{\left( (\emptyset - \mu_\emptyset)\sigma_k\rho - (k - \mu_k)\sigma_\emptyset \right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_\emptyset^2\sigma_k^2} \quad (4.28)$$

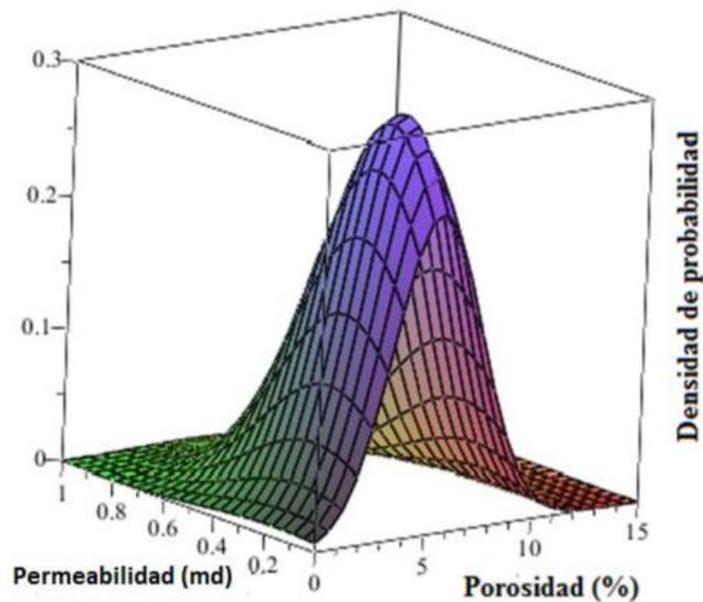
La extensión de la distribución normal para dos variables aleatorias es una distribución de probabilidad bivariada; en esta función los parámetros  $\mu_\emptyset$  y  $\mu_k$  son las medias estadísticas de la porosidad y permeabilidad; Los parámetros  $\mu_\emptyset$  y  $\mu_k$  son valores numéricos, a los que se les asocia rangos de confianza con los posibles valores que pueden tomar la porosidad y permeabilidad. La función bivariada comparte las propiedades que la distribución normal de Gauss, además del factor de correlación  $\rho$  que asocia ambas variables, el cual tiene las propiedades siguientes:

- 1.- Cuando  $\rho = 0$ , no hay ninguna relación entre las dos variables.
- 2.- Cuando  $\rho = 1$  o  $\rho = -1$ , se tiene una relación lineal positiva o negativa según sea el signo.

Los parámetros  $\sigma_\emptyset$  y  $\sigma_k$  son indicadores de la dispersión de los datos de porosidad y permeabilidad, al emplearse en la Ec. 4.21 discretizan los resultados obtenidos en un rango de valores con límites finitos para  $\emptyset$ ; donde las funciones marginales de

una distribución normal bivariada están definidas por las funciones marginales de porosidad y permeabilidad, para este caso homogéneo, Ec. 4.21.

La distribución de probabilidad de la permeabilidad y porosidad, se puede representar como las funciones marginales de una distribución de probabilidad bivariada. La dependencia entre las funciones de la Ec. 4.21 con su contraparte de permeabilidad se define como el factor de correlación  $\rho$ ; es decir un factor que indica la correlación entre el aumento de la porosidad y el de la permeabilidad.



**Fig. 4.5.-** Distribución de probabilidad bivariada, pozo T336

Si bien la **Fig. 4.5** ejemplifica un medio homogéneo ideal, para el caso de un pozo de arenas y lutitas.

$$k = \gamma^2 \phi \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)^{2\beta} \quad (4.29)$$

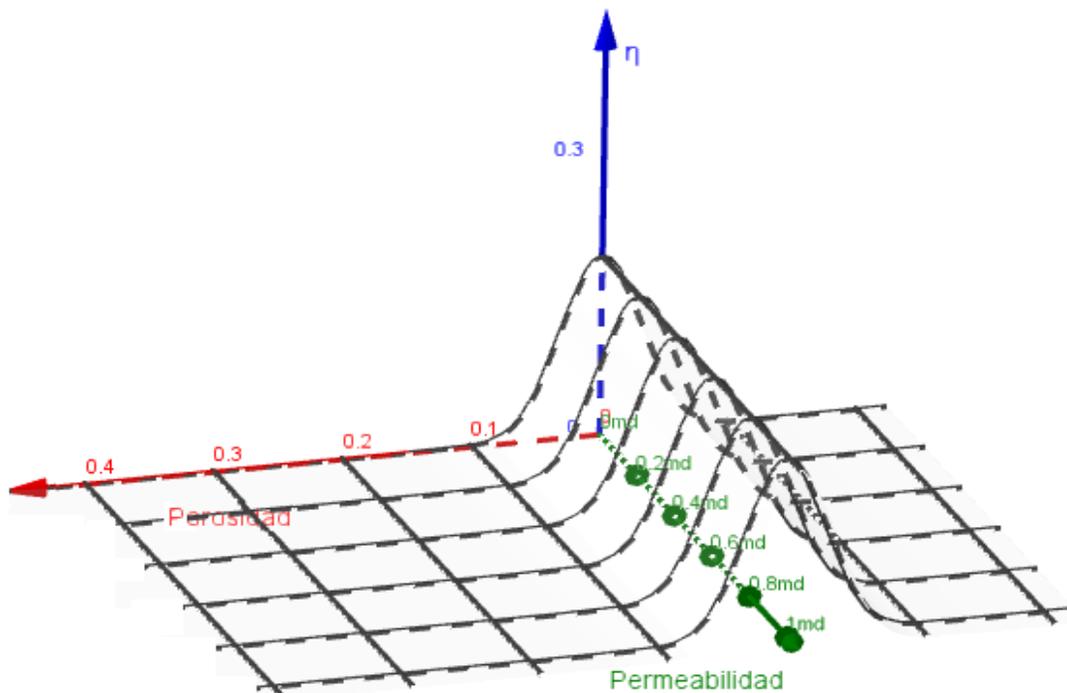
al sustituirse la Ec. 4.22 en la Ec. 4.29, se obtiene:

$$FDP(\phi, k) = \frac{1}{2\pi\sigma_\phi\sigma_k\sqrt{1-p^2}} * \exp\left(-\frac{1}{2(1-p^2)}\left(\left(\frac{\phi-\mu_\phi}{\sigma_\phi}\right)^2 + \left(\frac{\gamma^2\phi\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^{2\beta}-\mu_k}{\sigma_k}\right)^2 - \frac{2p(\phi-\mu_\phi)\left(\gamma^2\phi\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^{2\beta}-\mu_k\right)}{\sigma_\phi\sigma_k}\right)\right) \quad (4.30)$$

Simplificando:

$$FDP(\phi, k) = \frac{1}{2\pi\sigma_\phi\sigma_k\sqrt{1-p^2}} * \exp\left(-\frac{1}{2(1-p^2)}\left\{\left(\frac{\phi-\mu_\phi}{\sigma_\phi}\right)^2 + \frac{\left(\gamma^2\phi\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^{2\beta}-\mu_k\right)^2}{\sigma_k^2}\left[1 - \frac{2p(\phi-\mu_\phi)}{\sigma_\phi\left(\gamma^2\phi\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^{2\beta}-\mu_k\right)}\right]\right\}\right) \quad (4.31)$$

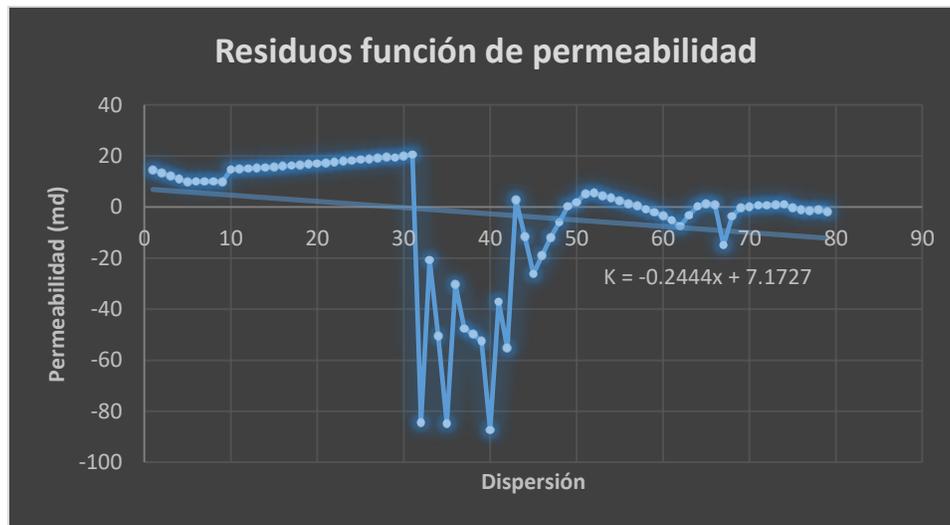
En la gráfica de abajo se supone que la variable dependiente (la porosidad) tiene un comportamiento homogéneo y que la variable independiente (la permeabilidad), posee un comportamiento tipo ley de potencias. Como se ve en la Fig. 4.6:



**Fig. 4.6.-** Distribución de probabilidad bivariada Caso 1, comportamiento de ley de potencias.

Un propósito importante de esta tesis es mantener el comportamiento de las Figs. 4.3 y 4.4 en el que la permeabilidad mantiene un comportamiento variable tipo leyes de potencias, independientemente de los datos de porosidad que seguirán mostrando un comportamiento homogéneo. Es primordial determinar el rango de valores de porosidad según la teoría de límite central para el valor de la permeabilidad en cuestión.

De acuerdo a la **Fig. 4.6** además del comportamiento homogéneo en la porosidad, se presenta una distribución de probabilidad descendente conforme la permeabilidad incrementa, esto se ilustra en la **Fig. 4.7**, donde se muestra un análisis de residuos con los datos de permeabilidad obtenidos de la función propuesta.



**Fig. 4.7.-** Análisis de residuos de permeabilidad para la distribución de probabilidad bivariada caso 1.

Si bien los residuos también muestran discrepancia en los valores centrales esta es debido a la condición de disminución en los valores de permeabilidad, estos valores altos de permeabilidad presentan progresivamente menores valores de probabilidad, al analizarse los datos como una secuencia se aprecia que aunque esta relación se

mantiene de manera general, habrá casos en los que se presentes fuertes variaciones en los datos; a diferencia de la sección anterior y del método empleado en este capítulo no es recomendable quitar la tendencia para mejorar el ajuste, debido a que uno de los objetivos es apreciar la tendencia en los datos debido al comportamiento de leyes de potencia.

Por esta razón antes de iniciar el estudio así se recomienda un análisis de rango escalado, de esa manera se puede descartar continuar con el análisis si es que el comportamiento de los datos no presenta continuidad a largo plazo, es decir un comportamiento antipersistente.

## Recomendaciones

- 1) No es posible desarrollar métodos generalizados que correlacionen la porosidad y permeabilidad, y que considere todas las posibles heterogeneidades contenidas en el medio poroso. Si bien es cierto que esta relación está presente, no es posible desarrollarla como una ecuación. Lo que se sugiere en esta tesis es el fijar una serie de criterios que determinen como construir esta función de distribución de probabilidad en base a las herramientas y al tipo de porosidad con el que se cuente.
- 2) Es importante antes de empezar cualquier análisis el conocer la información del yacimiento: los intervalos productores, su geología, su caracterización, se debe de hacer énfasis en que el análisis en cuestión, no se elabora en forma dinámica, sino un análisis de las condiciones estáticas del yacimiento. Igualmente es importante conocer en qué año se tomó la información, que herramientas se usaron, los métodos que se emplearon para determinar la veracidad de los datos. Esto último es algo que al momento de recopilarse la información deberá de cuestionarse y dependerá del criterio del ingeniero el determinar, cuando los datos deberán de descartarse.
- 3) Hay datos de porosidad, obtenidos de núcleos o registros geofísicos de un yacimiento determinado, que pueden llegar a tener un comportamiento similar a los de otro yacimiento de características diferentes. Las funciones podrán tener parámetros similares, habrá ocasiones en las que la caracterización del yacimiento y los parámetros de ajuste en estas funciones sean los que determinaran las diferencias en estos casos.

- 4) El comportamiento y correlación de los datos no siempre es una descripción de las condiciones del medio poroso, algunas veces es un reflejo de las herramientas y de los métodos empleados, sus limitaciones y los criterios con que los analizaron originalmente.
  
- 5) En general la función distribución de probabilidad para la porosidad-permeabilidad puede obtenerse, pero hay que ser prudente y señalar que su determinación no puede darse a través de una metodología universal. Sino a través de un análisis minucioso de los datos, que se extienda a su origen, obtención y análisis.

## Apéndice Caso 1

Muestra	Profundidad	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcy)	Rango Escalado $R_s$
4-1-H	2710	1.8	0.046	0
4-1-H	2710	1.8	0.046	0
2-12-H	2619	1.9	0.266	1.1477
2-12-H	2619	1.9	0.266	1.4377
4-2-H	2712.5	2.1	0.048	1.1728
4-2-H	2712.5	2.1	0.048	1.0606
2-3-H	2614.5	2.4	0.103	1.0992
2-3-H	2614.5	2.4	0.103	1.1347
1-1-H	2670.5	2.54	0.163	1.2234
1-2-H	2671	2.69	0.009	1.0833
2-4-H-1	2678.1	2.98	0.449	1.0255
2-2-H	2676	4.07	2.034	0.5666
2-1-H	2675.1	4.1	3.693	0.5574
4-6-H-1	2715.25	4.1	0.674	0.5857
4-6-H-1	2715.25	4.1	0.674	0.6124
4-4-H	2714.5	4.3	0.29	0.6072
4-4-H	2734.5	4.3	0.29	0.6033
2-3-H	2677	4.37	4.926	0.6049
2-2-H	2614	5	0.006	0.5787
2-2-H	2614	5	0.006	0.5560
2-4-H	2678	5.08	5.466	0.5939
1-8-H	2565.5	6.1	0.112	0.5763
1-8-H	2565.5	6.1	0.112	0.5607
4-5-H	2714.75	7.4	0.893	0.5727
4-5-H	2714.75	7.4	0.893	0.5844
2-14-H	2620	7.5	0.033	0.5678

Apéndice Caso 1 (Continuación)

Muestra	Profundidad	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcy)	Rango Escalado $R_s$
2-14-H	2620	7.5	0.033	0.5529
2-7-V	2616.5	8.9	0.496	0.5537
2-7-V	2616.5	8.9	0.496	0.5547
2-4-H	2615	10	0.314	0.5507
2-4-H	2615	10	0.314	0.5470
1-6-H-1	2564.5	10.1	0.023	0.5353
1-6-H-1	2564.5	10.1	0.023	0.5244
2-5-H	2615.5	10.1	0.098	0.5164
2-5-H	2615.5	10.1	0.098	0.5089
1-4-H	2563	10.3	0.143	0.5030
1-4-H	2563	10.3	0.143	0.4976
2-8-V	2617	11.4	0.808	0.5072
2-8-V	2617	11.4	0.808	0.5167
1-7-H	2565	11.5	0.131	0.5112
1-7-H	2565	11.5	0.131	0.5059
2-9-H	2617.5	12.5	0.553	0.5103
2-9-H	2617.5	12.5	0.553	0.5145
3-5-H-1	2663	12.8	3.51	0.5421
3-5-H-1	2663	12.8	3.51	0.5691
2-6-H	2616	12.9	0.496	0.5702
2-6-H	2616	12.9	0.496	0.5714
2-1-H-1	2613.5	13.3	2.94	0.5966
2-1-H-1	2613.5	13.3	2.94	0.6210
2-16-H	2620.5	13.3	8.3	0.5853
2-16-H	2620.5	13.3	8.3	0.5826

Apéndice Caso 1 (Continuación)

Muestra	Profundidad	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcy)	Rango Escalado $R_s$
3-8-H-1	2664.75	13.3	2.04	0.5964
3-8-H-1	2664.75	13.3	2.04	0.6100
2-2-V	2719.2	13.4	1.876	0.6220
2-11-H	2618.5	13.9	0.692	0.6216
2-11-H	2618.5	13.9	0.692	0.6214
2-1-H	2613	14.5	10.01	0.6066
2-1-H	2613	14.5	10.1	0.6072
3-8-H-2	2665	14.6	2.58	0.6194
3-8-H-2	2665	14.6	2.58	0.6315
3-6-H	2663.75	14.8	2.71	0.6440
3-5-H-5	2663.75	14.8	2.71	0.6564
2-10-H	2618	15	2.2	0.6656
2-10-H	2618	15	2.2	0.6746
3-2-H	2661.75	15.2	1.77	0.6807
3-2-H	2661.75	15.2	1.77	0.6867
3-2-H	2661.75	15.2	1.77	0.7002
1-5-H	2563.5	15.4	7.56	0.7143
1-5-H	2563.5	15.4	7.56	0.7245
1-5-H-1	2564	17.4	2.71	0.7345
1-5-H-1	2564	17.4	2.71	0.7493
1-2-H	2716.75	18.1	3.98	0.7639
3-7-H	2664.25	18.1	3.98	0.7712
3-7-H	2664.25	18.5	8.78	0.7801
3-3-H	2662	18.5	8.78	0.7934
3-15-H	2667.5	19.3	7.82	0.8220

Apéndice Caso 1 (Continuación)

Muestra	Profundidad	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcy)	<i>R<sub>s</sub></i>
3-15-H	2667.5	19.7	5.33	0.8369
3-14-H-1	2667	19.7	5.33	0.8515
3-14-H-1	2667	19.7	6.95	0.8659
3-3-H-1	2662.5	19.7	6.95	0.8798
3-3-H-1	2662.5	19.8	5.12	0.8934
3-14-H	2666.5	19.8	5.12	0.8993
3-14-H	2666.5	20.2	2.808	0.9133
3-17-H	2668.5	21.5	6.009	0.9127
3-17-H	2668.5	23.7	10.854	0.8954
2-1-H	2718.4	24.1	13.764	0.9079
2-4-V	2720.7	24.4	8.432	0.9172

## Apéndice Caso 2

Prof. (metros)	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcys)	Porosidad Suavizada (%)	Permeabilidad Aprox función. (Milidarcys)	Función Distribución de Probabilidad Real	Función Distribución de Probabilidad Aprox.
2666.50	0.1950	6.81	0.1950	88.8310	0.0003	0.0012
2666.75	0.1925	7.2	0.1925	84.4018	0.0003	0.0013
2667.00	0.1900	7.59	0.1896	79.5976	0.0004	0.0014
2667.25	0.1865	7.95	0.1865	74.4894	0.0005	0.0015
2667.50	0.1830	8.31	0.1852	72.5465	0.0006	0.0015
2667.75	0.1862	7.47	0.1862	74.0975	0.0005	0.0015
2668.00	0.1895	6.63	0.1895	79.3219	0.0004	0.0014
2668.25	0.1927	5.79	0.1927	84.8366	0.0003	0.0013
2668.50	0.1960	4.95	0.1345	21.4086	0.0069	0.0007
2710.00	0.0150	0.022	0.0754	2.6460	0.0442	0.0111
2710.25	0.0154	0.0217	0.0154	0.0116	0.1107	0.1411
2710.50	0.0158	0.0214	0.0158	0.0127	0.1105	0.1402
2710.75	0.0162	0.0211	0.0162	0.0138	0.1103	0.1393
2711.00	0.0166	0.0208	0.0166	0.0149	0.1100	0.1383
2711.25	0.0170	0.0205	0.0170	0.0162	0.1098	0.1373
2711.50	0.0174	0.0202	0.0174	0.0175	0.1095	0.1363
2711.75	0.0178	0.0199	0.0178	0.0189	0.1093	0.1353
2712.00	0.0182	0.0196	0.0182	0.0204	0.1090	0.1343
2712.25	0.0186	0.0193	0.0186	0.0219	0.1087	0.1333
2712.50	0.0190	0.019	0.0197	0.0270	0.1079	0.1302
2712.75	0.0217	0.0338	0.0217	0.0371	0.1065	0.1247
2713.00	0.0245	0.0487	0.0245	0.0555	0.1042	0.1168
2713.25	0.0272	0.0636	0.0272	0.0795	0.1018	0.1085
2713.50	0.0300	0.0785	0.0300	0.1101	0.0991	0.1000

Apéndice Caso 2 (continuación)

Prof. (metros)	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcys)	Porosidad Suavizada (%)	Permeabilidad Aprox función. (Milidarcys)	Función Distribución de Probabilidad Real	Función Distribución de Probabilidad Aprox.
2713.75	0.0327	0.0933	0.0327	0.1483	0.0963	0.0916
2714.00	0.0355	0.1082	0.0355	0.1951	0.0933	0.0832
2714.25	0.0382	0.1231	0.0382	0.2516	0.0902	0.0751
2714.50	0.0410	0.138	0.0504	0.6489	0.0753	0.0442
2714.75	0.0720	0.794	0.0561	0.9427	0.0689	0.0331
2715.00	0.0555	0.541	0.0555	0.9045	0.0694	0.0343
2715.25	0.0390	0.288	0.0315	0.1299	0.0979	0.0954
2715.50	0.2040	105.7333	0.1300	18.8204	0.0000	0.0008
2757.75	0.1860	42.1	0.1300	18.8204	0.0099	0.0008
2759.25	0.2020	72	0.1416	25.9361	0.0012	0.0007
2759.50	0.2230	106	0.2053	109.1647	0.0000	0.0004
2759.75	0.1910	49.7	0.2083	115.7223	0.0004	0.0002
2760.00	0.2110	64.7	0.2044	107.2805	0.0002	0.0004
2760.25	0.2113	64.7	0.2113	122.5954	0.0002	0.0001
2760.50	0.2116	64.7	0.1410	25.4811	0.0022	0.0007
2760.75	0.2035	99.35	0.0678	1.8191	0.0000	0.0174
2761.50	0.1790	49.4	0.1023	7.8402	0.0125	0.0023
2853.50	0.1280	67.7	0.1400	24.8101	0.0018	0.0007
2853.75	0.1130	9.11	0.1266	17.0939	0.0113	0.0008
2854.00	0.1390	23.405	0.139	24.1529	0.0094	0.0007
2854.25	0.1650	37.7	0.1536	35.2565	0.0052	0.0007
2854.50	0.1570	29.85	0.157	38.2567	0.0048	0.0008
2854.75	0.1490	22	0.1493	31.6334	0.0062	0.0007
2855.00	0.1420	15.225	0.142	26.1659	0.0073	0.0007
2855.25	0.1350	8.45	0.1323	20.1061	0.0088	0.0007

Apéndice Caso 2 (continuación)

Prof. (metros)	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcys)	Porosidad Suavizada (%)	Permeabilidad Aprox función. (Milidarcys)	Función Distribución de Probabilidad Real	Función Distribución de Probabilidad Aprox.
2855.50	0.1200	6.49	0.131	19.3635	0.0086	0.0008
2890.75	0.1380	2.74	0.0946	5.9233	0.0281	0.0035
2891.00	0.0260	2.43	0.0675	1.7911	0.0568	0.0177
2891.25	0.0386	3.787	0.0386	0.2595	0.0937	0.0741
2891.50	0.0512	5.144	0.0512	0.6844	0.0802	0.0426
2891.75	0.0638	6.501	0.0638	1.4683	0.0657	0.0219
2892.00	0.0764	7.858	0.0764	2.7632	0.0516	0.0105
2892.25	0.0890	9.215	0.089	4.7495	0.0387	0.0049
2892.50	0.1016	10.572	0.1016	7.6392	0.0279	0.0024
2892.75	0.1142	11.929	0.1142	11.6802	0.0192	0.0013
2893.00	0.1268	13.286	0.1268	17.1605	0.0126	0.0008
2893.25	0.1394	14.643	0.1394	24.4141	0.0080	0.0007
2893.50	0.1520	16	0.1501	32.2795	0.0052	0.0007
2893.75	0.1590	10.435	0.159	40.1501	0.0028	0.0008
2894.00	0.1660	4.87	0.1486	31.1027	0.0036	0.0007
2894.25	0.1210	1.93	0.1323	20.1061	0.0066	0.0007
2894.50	0.1100	1.33	0.1113	10.6454	0.0151	0.0015
2894.75	0.1030	16.4	0.105	8.6049	0.0274	0.0020
2895.00	0.1020	4.47	0.0783	3.0181	0.0463	0.0093
2962.25	0.0300	1.02	0.0543	0.8403	0.0716	0.0364
2962.50	0.0310	0.57	0.031	0.1230	0.0987	0.0969
2962.75	0.0320	0.12	0.033	0.1522	0.0961	0.0908
2963.00	0.0360	0.272	0.0303	0.1143	0.0990	0.0990
2963.25	0.0230	0.041	0.0283	0.0907	0.1007	0.1051
2963.50	0.0260	0.142	0.0313	0.1276	0.0979	0.0959

Apéndice Caso 2 (continuación)

Prof. (metros)	Porosidad (%)	Permeabilidad (MiliDarcys)	Porosidad Suavizada (%)	Permeabilidad Aprox función. (Milidarcys)	Función Distribución de Probabilidad Real	Función Distribución de Probabilidad Aprox.
2963.75	0.0450	1.71	0.0413	0.3279	0.0887	0.0665
2964.00	0.0530	2.64	0.0617	1.3103	0.0643	0.0246
2964.25	0.0872	3.02	0.0714	2.1791	0.0528	0.0141
2964.50	0.0740	2.61	0.074	2.4692	0.0492	0.0121
2964.75	0.0607	2.2	0.0449	0.4361	0.0850	0.0570

## Nomenclatura

<b>Símbolo</b>	<b>Definición</b>	<b>Dimensión</b>
$\phi_e$	Porosidad Efectiva	Adimensional
$S_{wir}$	Saturación del agua intersticial	Adimensional
$\sigma_\phi$	Desviación estándar de la porosidad	Adimensional
$\sigma_k$	Desviación estándar de la permeabilidad	$[L]^2$
$C_1$ y $C_2$	Factores de Ajuste ecuación de Willie y Ross	Adimensional
$E(\phi)$	Valor esperado de porosidad	Adimensional
$h$	Desplazamiento transversal	$[L]$
$H$	Coefficiente de Hurst	Adimensional
$K$	Permeabilidad	$[L]^2$
$m$	Valor esperado	Adimensional
$\rho$	Coefficiente de correlación de Pearson	Adimensional
$\phi$	Porosidad	Adimensional
$P, Q$ y $S$	Factores de Ajuste ecuación de Timur	Adimensional
$V_{bo}$	Volumen poroso	Adimensional
$Z(\phi)$	Función de porosidad	Adimensional
$FZI$	Indicador de la Zona de Flujo	$[L]$
$RQI$	Indice de calidad del Yacimiento	$[L]$
$\beta$	Factor de ajuste de Bertero	Adimensional
$\mu_k$	Valor medio de la permeabilidad	$[L]^2$
$\mu_\phi$	Valor medio de la porosidad	Adimensional
$\tau$	Tortuosidad	Adimensional

## Referencias

- Barenblatt, G. I., Entov, V. M. y Ryzhik, V. M. 1990. *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Bear, J. 1972. *Dynamics of Fluids in Porous Media*, New York American Elsevier Publ. Co., Inc., 760-764.
- Bhat, S.K., & Kavscek, A.R., 1999, *Statistical Network Theory of Silica Deposition and Dissolution in Diatomite*, In-Situ, Vol. 23, No. 1, pp. 21-53.
- Civan, F. 1994. Comment on: On Scaling Immiscible Displacements in Permeable Media, by E.J. Peters, N., Afzal and E. Gharbi (1993). Letter to the Editor. *Journal of Petroleum Science Engineering* **11** (4): 351–352. [https://doi.org/10.1016/0920-4105\(94\)90053-1](https://doi.org/10.1016/0920-4105(94)90053-1).
- Civan, F. 2000 *Predictability of Porosity and Permeability Alterations by Geochemical and Geomechanical Rock and Fluid Interactions*, Paper SPE 58746, Proceeding of the SPE International symposium on Formation Damage held in Lafayette, Louisiana, 23-24.
- Civan, F. 2001. Scale Effect on Porosity and Permeability: Kinetics, Model, and Correlation. *AIChE Journal* **47** (2): 271–287. <https://doi.org/10.1002/aic.690470206>.
- Civan, F. 2011. *Porous Media Transport Phenomena*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 33-52, 79-97.
- Collins, E.R., 1961 *Flow of Fluids Through Porous Materials*, Penn Well Publishing Co., Tulsa, Oklahoma, 1961, 270 p.
- Díaz Viera Martin A. 2002. *Geoestadística Aplicada*. Instituto de Geofísica, UNAM. Instituto de Geofísica y Astronomía, CITMA, Cuba.
- Hardy, H. H. y Beier, R. A. 1994. *Fractals in Reservoir Engineering*. Singapore: World Scientific. 23-47, 137-162.
- Kozeny, J. 1927. Über Kapillare Leitung des Wasser im Boden: (Aufstieg, Versickerung und Anwendung auf die Bewässerung). *Sitzungsbericht der Akademieder Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*

**136** (2a): 271–306. [https://www.zobodat.at/pdf/SBAWW\\_136\\_2a\\_0271-0306.pdf](https://www.zobodat.at/pdf/SBAWW_136_2a_0271-0306.pdf).

- Maritz, J. S. 1981. *Distribution-Free Statistical Methods*. London: Chapman & Hall.
- Nolan, G. T. and Kavanagh, P. E., 1992, Computer simulation of random packing of hard spheres, *Powder Technology*, Vol. 72, No. 1, pp 140-155.
- Pittman, E. 1992. Relationship of Porosity and Permeability to Various Parameters Derived from Mercury Injection-Capillarity Pressure Curves for Sandstone. *AAPG Bull.* **76** (2):191-198. <https://dx.doi.org/10.1306/BDF87A4-1718-11D7-8645000102C1865D>.
- Scheidegger, A. E. 1963. *The Physics of Flow through Porous Media*. Toronto: University of Toronto Press.
- Wyllie, M. R. J. y Gardner, G. H. F. 1958a. The Generalized Kozeny-Carman Equation. Part 1 — Review of Existing Theories. *World Oil* **146**: 121–126.
- Wyllie, M. R. J. y Gardner, G.H.F. 1958b. The Generalized Kozeny-Carman Equation. Part 2 — A Novel Approach to Problems of Fluid Flow. *World Oil* **146**: 210–228.
- Yarus, J. M. y Chambers, R. L., eds. 1994. *Stochastic Modeling and Geostatistics: Principles, Methods, and Case Studies*. Tulsa, Oklahoma: AAPG.