



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APROXIMACIONES A LA
LOCOMOCIÓN DE LAS
MEDUSAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

PRESENTA:

Diego Brayán Hernández Juárez

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Gerardo Ruíz Chavarría

Ciudad Universitaria. CDMX 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Hernández

Juárez

Diego Brayan

5564948990

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

309106524

2. Datos del tutor

Dr.

Gerardo

Ruiz

Chavarría

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Julio Javier

Martinell

Benito

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Gerardo Jorge

Vázquez

Fonseca

5. Datos del sinodal 3

M. en C.

Sergio

Hernández

Zapata

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Pablo Luis

Rendón

Garrido

7. Datos del trabajo escrito

Aproximaciones a la locomoción de las medusas

80 páginas

2018

*Nunca vas a ser el mejor.
Créeme siempre habrá alguien delante que lo hará mucho mejor que tú.
Vayas a donde vayas, hagas lo que hagas, habrá obstáculos enormes, inamovibles, que no
te dejarán avanzar.
Todas tus victorias no serán más que gotas en un mar de fracasos.
Y llegará un momento en que busques las sombras, porque pensarás que lo único que
puedes ofrecerle al mundo es tu silencio.
Pero eso no te detendrá
Porque sólo tienes que ser lo suficientemente bueno para vencer tus miedos.
Los obstáculos sólo te harán volar más alto.
Y el fracaso será siempre el mejor maestro.
En el silencio la luz se rebela a la oscuridad.*

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi asesor, el doctor Gerardo Ruíz Chavarría, que hizo que mi tesis fuera algo más o menos decente, y que me ha apoyado académicamente bastante. Es genial profesor, algún día quisiera ser como usted.

Quisiera agradecer también a los profesores y ayudantes de la carrera de física Rosario Paredes Gutiérrez, Claude Thions Chaudy, Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez, Jorge Pérez López, Jorge Chávez Carlos, Jesús Armado Lara Velázquez, Zaahel Mata Pinzon, Gertrudis Hortensia González Gómez, Jorge Gustavo Hirsch Ganievich, Hugo Martín Sobral, Abigail Trujillo Vázquez, Clara Esquivel Huesca, Alejandro Valderrama Zaldívar, Susana Orozco Segovia, Luis Fernando Magaña Solís, Fernando Ángeles Uribe, Roberto Velasco Segura, José Manuel Alvarado Reyes, Sergio Hernández Zapata, Jimena Castro Gutiérrez, Pablo Luis Rendón Garrido, José Jesús Carlos Quintanar Sierra, Marcos Ley Koo, Ismael Rivera Jiménez, Enrique Camarillo García y Mónica Maldonado Terron, ya que su apoyo me fue imprescindible.

Un agradecimiento especial a mis sinodales, los doctores Julio Javier Martinell Benito, Gerardo Vázquez Fonseca, Pablo Luis Rendón Garrido y al maestro en ciencias Sergio Hernández Zapata por sus valiosos comentarios sobre este trabajo, que permitieron su conclusión existosa.

También quisiera agradecer a mis profesores de divulgación José Ramón Hernández, Gloria Delgado, Jackeline Rechy, Isaías Hernández, Federico Najera y Fernando Sampayo pues sus enseñanzas y motivación me ayudo a entender que la ciencia es hermosa, y es más hermosa cuando se comparte.

Agradezco a mis amigos de la infancia, Leo y Carlos, a mis amigos de la prepa 9, Ale, Misael, Iván, Ana Karen, Oscar y Joaquín; mis amigos de la facultad Brenda, Manuel y Francisco y de SCIRE, Juan, Brandon y Conde; a los amigos que hice en el museo de la Luz, Karen, Dulce, Daniel, Mariela y Edith por todas las aventuras que vivimos juntos.

Por último quisiera agradecer a mi familia, pero en especial a mi madre, a mi tía Laura y a mi hermano por todo. Sé que no soy el mejor hijo, ni el mejor hermano, gracias por soportarme.

Este trabajo se realizó con el apoyo del proyecto PAPIIT IN115315 “Ondas y estructuras coherentes en dinámica de fluidos.”

Índice general

Agradecimientos	II
Índice	IV
Lista de figuras	IV
Lista de tablas	VII
Resumen	IX
Introducción	1
1. Principios básicos	3
1.1. Mecánica de Fluidos	3
1.1.1. Teorema de Transporte de Reynolds	5
1.1.2. Ecuaciones de Navier-Stokes y de Euler	9
1.1.3. Vorticidad y vórtices	12
1.1.4. Circulación	15
1.1.5. Analogía con la teoría electromagnética	16
1.2. Características Generales de las Medusas	18
1.2.1. Características Físicas de la Forma Medusoide	19
1.2.2. Sistema de locomoción	20
2. Modelos analíticos	22
2.1. Arrastre	25
2.2. Empuje	29
2.3. Inercia del Animal y Acción de Aceleración	31
2.4. Energía del nado de medusas e índice del escape	34
2.5. Resultados de modelos computacionales	35
2.6. Modelo de empuje por vórtice anular	43
2.7. Modelo de Seikman y de interacción con vórtice anterior	50
3. Propiedades experimentales de un vórtice anular	57
3.1. Anemómetro de hilo caliente	58
3.1.1. Calibración	60
3.1.2. Montaje experimental	62
3.1.3. Adquisición de Datos	64
3.2. Resultados y discusión	65
3.2.1. Consideraciones a los modelos de empuje por vórtice anular	73

4. Conclusiones	76
Bibliografía	78

Índice de figuras

1.1.	Esfuerzo $\vec{\tau}$ aplicado sobre la superficie de un elemento de fluido para deformarlo.	3
1.2.	(a) Volumen de control arbitrario en los tiempos t y $t + \delta t$, y (b) superposición de los volúmenes de control en donde se observa el cambio del volumen del elemento δV . Tomado de [5]	5
1.3.	Flujo ente dos placas. Tomado de [15].	9
1.4.	Fluido rotando con velocidad angular constante Ω	12
1.5.	Calle de vórtices de von Karman formado en la atmósfera. Tomado de [1] .	13
1.6.	Sistema coordenado para representar un vórtice anular	14
1.7.	Vórtice anular C de radio a	17
1.8.	Medusas adultas de la especie <i>Chrysaora quinquecirrha</i> . Tomada de [2] . .	18
1.9.	A forma de pólipo, B forma medusoide. Tomada de [32]	19
1.10.	<i>Aequorea victoria</i> en su forma medusoide. Tomada de [2]	19
1.11.	Anatomía general y descripción del mecanismo de propulsión de a) calamar y b) medusa. Modificada de [18]	20
1.12.	Secuencia de la formación del vórtice anular durante dos ciclos de medusa <i>Aurelia aurita</i> . Tomada de [6]	21
2.1.	Balance de fuerzas en la dirección perpendicular del movimiento.	23
2.2.	Esquema que muestra el chorro de la medusa con un anillo de vorticidad. Los vórtices anulares son vistos transversalmente, donde A es la longitud del chorro, B es el diámetro del núcleo del anillo de vorticidad, C es la distancia entre dos anillos y D es le diámetro del anillo. Tomada de [6] . .	24
2.3.	Balance de fuerzas en el movimiento de la medusa.	25
2.4.	Un flujo con una superficie discontinua como es descrita en la teoría de Kirchhoff y Rayleigh. Modificado de [37]	26
2.5.	Dirección de la fuerza de arrastre D en (a) la fase de contracción t_c y (b) la fase de relajación t_r	29
2.6.	Cantidad del volumen de fluido con velocidad constante U que pasa por una superficie, en un tiempo t y en un tiempo $t + \Delta t$	30
2.7.	Gráfica de la velocidad de la medusa para seis ciclos de nado. Se tomó $t_c = 0,1$ y $t_r = 2t_c$	36
2.8.	Gráfica de la velocidad de la medusa para cien ciclos. Se tomó $t_c = 0,2$ y $2t_r = t_c$	37
2.9.	Gráfica de la velocidad de la medusa para cien ciclos de nado. Se tomó $t_c = 0,1$ y $t_r = t_c$	38

2.10. Gráfica de la velocidad de la medusa para cien ciclos de nado. Se tomó $t_c = 0,1$ y $t_r = 2t_c$	38
2.11. Velocidades terminales promedio a las que llega la medusa en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.	39
2.12. La energía que gasta la medusa en cien ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.	40
2.13. Índice de escape promedio en cien ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.	41
2.14. Índice de escape promedio en cincuenta ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.	42
2.15. Índice de escape promedio para distinta cantidad de ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.	42
2.16. Índice de escape promedio en cien ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.	43
2.17. Volumen de agua saliendo en forma del cilindro de la medusa.	45
2.18. Campo de velocidades para un vórtice anular. Datos obtenidos de modelos computacionales.	46
2.19. Campo de velocidades para un dipolo de vórtices. Datos obtenidos de modelos computacionales.	46
2.20. Esquema de dos vórtices libre girando en direcciones contrarias. Las líneas puntuadas son ejemplos de líneas de corriente.	47
2.21. velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983) y el modelo de empuje por vórtice anular. Para hacer las gráficas se usaron los datos de Daniel de una medusa estándar.	50
2.22. Esquema que muestra el modelo de Seikman. Tomado de [34]	51
2.23. Esquema de cuatro vórtices libres, dos girando en una dirección, y los otros dos en dirección contraria.	52
2.24. Velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983), el modelo de empuje por vórtice anular, el modelo de Seikman (1962) y el modelo de vórtice anular con mejora por interacción con vórtice anterior ($\frac{C}{D} = 0,5$)	53
2.25. Velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983), el modelo de empuje por vórtice anular, el modelo de Seikman (1962) y el modelo de vórtice anular con mejora por interacción con vórtice anterior ($\frac{C}{D} = 1$)	54
2.26. Velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983), el modelo de empuje por vórtice anular, el modelo de Seikman (1962) y el modelo de vórtice anular con mejora por interacción con vórtice anterior ($\frac{C}{D} = 10$)	54
3.1. Diagrama del sistema del anemómetro IFA 300. *No se usó en este experimento ya que se hizo a temperatura constante. Modificado de [36]	58
3.2. Ejemplo de sensor. Tomado de [23]	59
3.3. Puente de Wheatstone usado en el anemómetro IFA 300. Tomado de [36]	59
3.4. a) Túnel de viento usado b) Variac	60
3.5. Gráfica de calibración obtenida de los datos medidos en el túnel de viento.	61

3.6. Sistema de medición. (a) generador de vórtices, (b) motores de paso, (c) Sonda.	62
3.7. Ejemplo del pulso mandado a la bocina.	63
3.8. Aparatos usados (a) amplificador (b), generador de funciones, (c) pre amplificador usado para la sincronización de la toma de datos con la producción del pulso eléctrico (d) fuente de voltaje	63
3.9. Tarjeta de Adquisición de Datos	64
3.10. Ejemplo de componentes u_x en el eje x para un tiempo determinado.	65
3.11. Ejemplo de componentes u_x en el eje r para un tiempo determinado. Hay que señalar que en esta gráfica el centro del vórtice anular está en el milímetro 25	65
3.12. Ejemplo de componentes u_x en el eje r para un tiempo determinado (Corrección en las orillas).	66
3.13. Ejemplo de componentes u_x del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista frontal). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.	66
3.14. Ejemplo de componentes u_x del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista por arriba). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.	67
3.15. Ejemplo de componentes u_r del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista frontal). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.	68
3.16. Ejemplo de componentes u_r del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista por arriba). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.	68
3.17. Ejemplo de campo de velocidades en un tiempo determinado	69
3.18. Componente θ de la vorticidad en un tiempo dado (vista frontal).	69
3.19. Componente θ de la vorticidad (vista por arriba).	70
3.20. Movimiento del máximo de la componente u_x en el eje x . Los valores que se muestran en gráfica son tomados en la línea en el eje r que corresponde al eje de simetría del vórtice, situada en el centro del anillo. Las gráficas se tomaron con un tiempo de 2.5 ms entre ellas.	70
3.21. Movimiento del máximo de la componente u_x en el eje x	71
3.22. Ajuste de la velocidad por Biot-Savart.	72
3.23. Comparación de las velocidades terminales del modelo de Daniel y del empuje por vórtice anular corregido.	74
3.24. Comparación de las velocidades terminales del modelo de Daniel y del empuje por vórtice anular corregido.	74
3.25. Comparación de las velocidades terminales del modelo de Daniel y del empuje por vórtice anular corregido.	75

Índice de cuadros

3.1. Parámetros importantes del anillo	71
3.2. Valores de Γ para los distintos modelos. Donde $R = \frac{D}{2}$ y $b = \frac{B}{2}$	73

Resumen

En este trabajo se presentan distintos modelos para describir la locomoción de las medusas, las cuales se mueven por propulsión a chorro. Los modelos parten de un análisis de las fuerzas que actúan sobre el nado de las medusas. Estas fuerzas son el empuje, el arrastre, la fuerza para vencer la inercia del animal y la fuerza de masa añadida. Estas fuerzas se modelan y con ellas se obtiene una ecuación diferencial para la velocidad, usando la segunda ley de Newton. Esta ecuación diferencial se resuelve usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Además se calcula la energía gastada por la medusa y su índice de escape.

En una primera aproximación el empuje se modela de forma análoga a un empuje por chorro estacionario. En una siguiente aproximación se incorpora vorticidad, ya que al ser expulsado el chorro genera un vórtice anular. Un primer modelo se propone suponiendo el empuje dado por un solo vórtice, luego se corrige el modelo para introducir la interacción entre vórtices, con uno y una infinidad de vórtices anteriores.

Se realiza un experimento también, con el fin de evaluar que tan cercanas a la realidad son las hipótesis propuestas por los modelos. El experimento consistió en medir algunas propiedades de un vórtice anular de aire, como su velocidad y radio. A partir de estos se calcularon otras propiedades del vórtice, en particular la circulación. Para generar el vórtice anular se usó una cavidad con un orificio conectada a una bocina. Se utilizó la técnica de anemometría de hilo caliente para determinar la componente de la velocidad en dirección del movimiento del vórtice, y mediante la ecuación de continuidad se pudo encontrar la componente radial. Con estos datos se encontró el campo de velocidades del anillo de vorticidad, su diámetro y el diámetro de su núcleo, y con ello se estimó la circulación.

Introducción

Moverse es una de las cosas que los animales hacen, lo que da origen al estudio de la biomécanica, intersección entre la Física y la Biología que pretende describir los procesos de locomoción y demás movimientos de los seres vivos. La biomécanica por lo general se centra en los seres humanos o animales superiores, ignorando muchas veces a seres vivos como los invertebrados o las bacterias. Esto hace perder un campo vasto y de bastante interés, que podría resultar de utilidad en el desarrollo de tecnología.

El biomimetismo es un enfoque de la tecnología en la que se desarrollan dispositivos que imiten las propiedades naturales de los seres vivos. Aunque el biomimetismo es ya conocido desde hace siglos, sólo basta recordar los diseños de alas de Leonardo Da Vinci basados en las alas de los pájaros, hace apenas unas cuantas décadas cobró un auge impresionante.

En una parte del biomimetismo actual se copian los procesos de los seres, en apariencia menos complejos, como insectos o arácnidos. Los procesos de estos han demostrado ser muchas veces más eficientes que sus análogos en animales considerados como superiores. Un ejemplo de esto es la imitación de insectos voladores en el desarrollo de modernos drones para su uso en operaciones de rescate y espionaje. Es de esto que resulta interesante, y con un potencial enorme de desarrollo el hacer modelos biomecánicos de seres vivos menos complejos, como los invertebrados. Uno de estos seres es la medusas.

La locomoción de las medusas resalta por su aparente simplicidad y belleza, la cual fue de hecho una de las primeras formas de movimiento animal en el mundo. La antigüedad de esta forma de locomoción da un indicio de su valor práctico, y eficiencia lo cual la llevaría a ser de interés para la bioimitación, y por lo tanto resulta indispensable contar con modelos que nos permitan conocer como se lleva a cabo. De esto surge la motivación de este trabajo.

Los objetivos generales de este trabajo son entonces poder desarrollar modelos que sean de utilidad en la descripción del movimiento de las medusas, y también que permitan conocer su eficiencia energética. Para ello se hará una aproximación desde la mecánica de fluidos, esto por el hecho de que las medusas tienen como hábitat los mares, por lo que se hará hincapié en todos los fenómenos relacionados con los fluidos. Por lo que este trabajo inicia con una recapitulación de los principios básicos de la mecánica de fluidos. Tales modelos fueron obtenidos en su mayoría, en la literatura, aunque basandonos en estas, se proponen algunos modelos nuevos.

Hay que reconocer también que en muchas ocasiones, el describir fielmente los fenómenos

relacionados a la locomoción es bastante complicado, por lo que es necesario hacer suposiciones que permitan continuar adelante el desarrollo del modelo, esperando que estas aproximaciones no alejen de los comportamientos reales. También se debe entender que debido a estas suposiciones los resultados de los modelos no predecirán con total exactitud al fenómeno estudiado. Lo que sí puede esperarse es que los modelos den los comportamientos muy aproximados, aunque no los valores exactos, de la locomoción de las medusas.

Por último hay que decir que aunque lo ideal sería comparar los modelos con el fenómeno real, es decir con el movimiento de una medusa esto no se hace debido a que no se contaba con el equipo necesario para trabajar con seres vivos. Es por ello que se han medido de forma experimental las propiedades de vórtices anulares, ya que, para este trabajo, los vórtices son importantes en el nado de las medusas para su estudio experimental, y las conclusiones de este estudio se extienden a los modelos.

Capítulo 1

Principios básicos

1.1. Mecánica de Fluidos

Un fluido es una sustancia que se deforma al aplicarle un esfuerzo cortante, sin importar lo pequeño que sea este corte. Un esfuerzo cortante es una fuerza por unidad de área (figura 1.1). Ejemplos de fluidos son los líquidos y los gases. Se define a la Mecánica de Fluidos como la ciencia que estudia la cinemática y la dinámica de los fluidos ante la acción de fuerzas aplicadas.

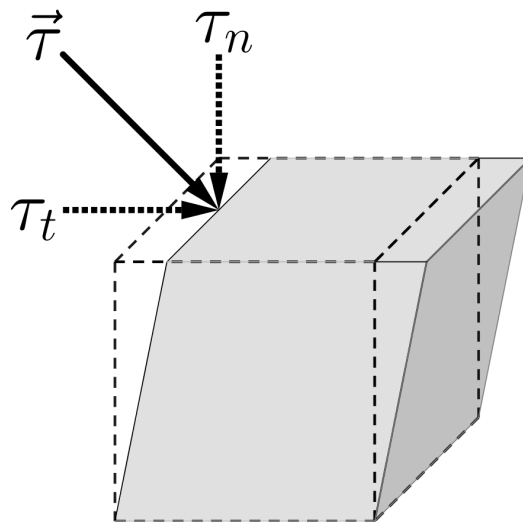


Figura 1.1: Esfuerzo $\vec{\tau}$ aplicado sobre la superficie de un elemento de fluido para deformarlo.

Puesto que los fenómenos considerados en la mecánica de fluidos son macroscópicos, un fluido se considera como un medio continuo. Esto significa que siempre se supone que cualquier elemento de volumen pequeño del fluido es suficientemente grande para contener un gran número de moléculas [19]. Esto es llamado la hipótesis del continuo, la cual es válida para longitudes mayores que el camino libre medio de las moléculas y menores que una escala macroscópica. De acuerdo con ello, cuando hablamos de elementos del volumen infinitamente pequeños, siempre se quiere significar aquellos que son «físicamente» pequeños, es decir, muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema

en consideración, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas. En un sentido semejante han de entenderse las expresiones *partícula de fluido* y *punto en un fluido*.

Existen dos posibilidades para describir el movimiento de un fluido. En la primera conocida como descripción euleriana o espacial, el estudio de un fluido en movimiento se efectúa observando a las partículas que pasan por un determinado punto del espacio. La segunda llamada material o Lagrangiana consiste en seguir la evolución de las partículas. Esta es la descripción usual en la mecánica del punto y de cuerpo rígido.

En la descripción euleriana las variables independientes son la posición $\vec{r} = (x, y, z)$ y el tiempo t . La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$ y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. En la descripción lagrangiana las variables independientes son el tiempo y por ejemplo, la posición inicial de la partícula.

Considérese una partícula de fluido con velocidad $\vec{u}(x, y, z, t)$, la aceleración \vec{a} está dada como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad (1.1)$$

dado a que la velocidad es función de las coordenadas espaciales y del tiempo la diferencial de \vec{u} es:

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} dz, \quad (1.2)$$

entonces \vec{a} queda como:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt}; \quad (1.3)$$

pero $\frac{dx}{dt} = u_x$, $\frac{dy}{dt} = u_y$ y $\frac{dz}{dt} = u_z$. De esto la aceleración queda como:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z, \quad (1.4)$$

reescribiendo esto:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}. \quad (1.5)$$

Se propone entonces un nuevo operador, llamado derivada material o sustancial, definido como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla), \quad (1.6)$$

entonces se puede escribir la aceleración como $\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt}$.

El primer término de la aceleración \vec{a} , la parcial con respecto a t , es llamada aceleración local, y el segundo término es llamada aceleración convectiva. El nombre de derivada material viene de que se toma del sistema lagrangiano, es decir, que sigue a la sustancia. Con la derivada material podemos también, por ejemplo, obtener la razón de cambio de temperatura de una partícula de fluido.

1.1.1. Teorema de Transporte de Reynolds

En termodinámica suele hacerse una distinción entre aquellas propiedades de una sustancia cuya medida depende de la cantidad de sustancia presente y aquellas propiedades cuya medida es independiente de la cantidad de sustancia presente. Las primeras se conocen como propiedades extensivas y las segundas como propiedades intensivas. Algunos ejemplos de propiedades extensivas son la masa, el momento, el volumen y la energía. Al cambiar la cantidad de masa cambia directamente el valor de estas propiedades y por esta razón las propiedades extensivas se consideran directamente asociadas con el material en sí.

Para cada variable extensiva, como el volumen V y la energía E , pueden introducirse las propiedades intensivas correspondientes mediante mediciones distributivas, por ejemplo, el volumen por unidad de masa v y la energía por unidad de masa e , respectivamente. El teorema de transporte de Reynolds relaciona la tasa de cambio de dos de estas propiedades, permitiendo relacionar el marco de referencia lagrangiano con un marco de referencia euleriano.

Sea un volumen de control arbitrario $V(t)$, ver figura 1.2, que posee una propiedad extensiva L relacionada con una propiedad intensiva l de la siguiente manera:

$$L = \int_{V(t)} l(x, y, z, t) dV. \quad (1.7)$$

L podría referirse a la masa M , y l a la densidad ρ .

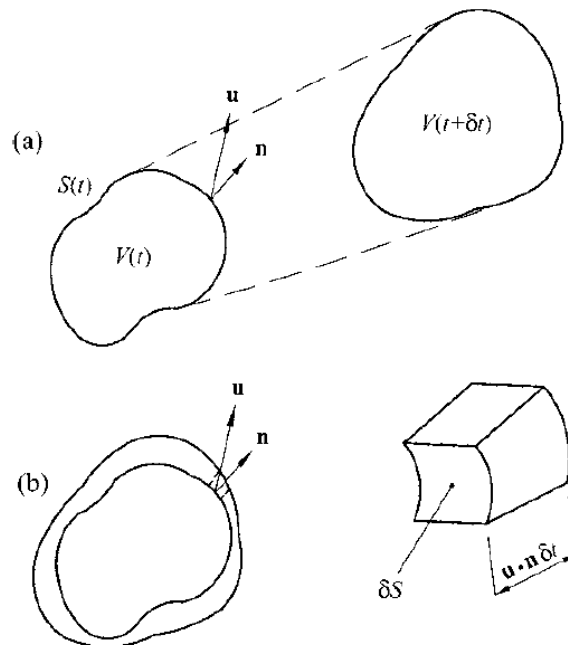


Figura 1.2: (a) Volumen de control arbitrario en los tiempos t y $t + \delta t$, y (b) superposición de los volúmenes de control en donde se observa el cambio del volumen del elemento δV . Tomado de [5]

Calculando el cambio de L , tomando un intervalo de tiempo corto, δt que hacemos tender a cero:

$$\frac{DL}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L(t + \delta t) - L(t)}{\delta t} \right], \quad (1.8)$$

Reescribiendo ahora $L(t + \delta t)$ en términos de l :

$$L(t + \delta t) = \int_{V(t+\delta t)} l(x, y, z, t + \delta t) dV. \quad (1.9)$$

Hay que notar que esta última integral es sobre el volumen de control en el tiempo $t + \delta t$ por lo que puede ser escrita en dos partes, una correspondiente a la parte del volumen de control en el tiempo t y otra, que corresponde al volumen que aumentó en el tiempo δt , ver figura 1.2, por lo que $L(t + \delta t)$ quedaría como:

$$L(t + \delta t) = \int_{V(t)} l(x, y, z, t + \delta t) dV + \int_{V(\delta t)} l(x, y, z, t + \delta t) dV, \quad (1.10)$$

Llamemos al primer término del lado derecho L_1 y al segundo L_2 . Escribiendo la ecuación 1.8:

$$\frac{DL}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L_1 + L_2 - L(t)}{\delta t} \right]. \quad (1.11)$$

Como el límite de una suma es la suma de los límites, se puede escribir lo anterior como:

$$\frac{DL}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L_1 - L(t)}{\delta t} \right] + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L_2}{\delta t} \right], \quad (1.12)$$

Veamos que el primer límite puede ser escrito como:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L_1 - L(t)}{\delta t} \right] = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\int_{V(t)} l(x, y, z, t + \delta t) dV}{\delta t} - \int_{V(t)} \frac{l(x, y, z, t)}{\delta t} dV \right]. \quad (1.13)$$

Como ambas integrales son sobre el mismo dominio podemos unirlas en una sola integral:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L_1 - L(t)}{\delta t} \right] = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\int_{V(t)} \frac{l(x, y, z, t + \delta t) - l(x, y, z, t)}{\delta t} dV \right]. \quad (1.14)$$

También podemos intercambiar los operadores del límite y la integral:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L_1 - L(t)}{\delta t} \right] = \left[\int_{V(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{l(x, y, z, t + \delta t) - l(x, y, z, t)}{\delta t} dV \right]. \quad (1.15)$$

Pero el integrando corresponde a la definición de la derivada parcial con respecto al tiempo de l , por lo que:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{L_1 - L(t)}{\delta t} \right] = \int_{V(t)} \frac{\partial l}{\partial t} dV, \quad (1.16)$$

Por lo que la ecuación 1.8 queda:

$$\frac{DL}{Dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial l}{\partial t} dV + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{L_2}{\delta t}. \quad (1.17)$$

Consideremos ahora el término L_2 . Este se refiere a un incremento del volumen del control δV , ver figura 1.2. El diferencial de volumen dV puede ser visto como una diferencial de superficie dA por el camino que ha recorrido este diferencial de superficie, esto es la componente normal de la velocidad por el tiempo transcurrido, es decir δt :

$$L_2 = \int_A l(x, y, z, t + \delta t) dA [\vec{u} \cdot \hat{n}] \delta t; \quad (1.18)$$

Nótese que la integral ha dejado de ser sobre un volumen y se ha vuelto una integral de superficie. De esta última integral:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{L_2}{\delta t} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_A \frac{l(x, y, z, t + \delta t) dA [\vec{u} \cdot \hat{n}] \delta t}{\delta t} \right], \quad (1.19)$$

Como se hizo anteriormente, podemos intercambiar los operadores, además dt se cancela y entonces queda lo siguiente::

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{L_2}{\delta t} = \int_A \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} l(x, y, z, t + \delta t) dA [\vec{u} \cdot \hat{n}] \right], \quad (1.20)$$

En esta última ecuación, tomar el límite es simplemente evaluar l en t :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{L_2}{\delta t} = \int_A l(x, y, z, t) [\vec{u} \cdot \hat{n}] dA, \quad (1.21)$$

De esto la ecuación 1.8 queda como:

$$\frac{DL}{Dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial l}{\partial t} dV + \int_A l [\vec{u} \cdot \hat{n}] dA. \quad (1.22)$$

Usando el teorema de Gauss, que relaciona una integral de superficie con un integral de volumen podemos reescribir la última ecuación como:

$$\frac{DL}{Dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial l}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot (\vec{u}l) dV. \quad (1.23)$$

Como ambas integrales son sobre el mismo dominio:

$$\frac{DL}{Dt} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial l}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}l) \right] dV. \quad (1.24)$$

Esta última ecuación es el teorema de Transporte de Reynolds [5]. Consideremos ahora el caso en el que L es la masa m , y l la densidad ρ , es decir

$$m = \int_{V(t)} \rho(x, y, z, t) dV, \quad (1.25)$$

En este caso por 1.24 se obtiene que:

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\rho) \right] dV, \quad (1.26)$$

Pero por principio de conservación de la masa, el término $\frac{Dm}{Dt}$ es cero.

$$0 = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\rho) \right] dV, \quad (1.27)$$

Pero como la integral anterior es sobre un volumen arbitrario, la única forma para que sea cero es que el integrando sea cero, por lo que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0. \quad (1.28)$$

A 1.28 se le conoce como la ecuación de continuidad.

Otro caso interesante es cuando L es el momento lineal, en una dirección, p :

$$p = \int_{V(t)} \rho u dV, \quad (1.29)$$

En este caso, por 1.24 se obtiene que

$$\frac{Dp}{Dt} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\rho\vec{u}) \right] dV. \quad (1.30)$$

Donde la primera parte del integrando es:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Y la segunda parte queda como:

$$\nabla \cdot (u\rho\vec{u}) = u\nabla \cdot (\rho\vec{u}) + \rho\vec{u} \cdot \nabla u, \quad (1.32)$$

Entonces sustituyendo en 1.30:

$$\frac{Dp}{Dt} = \int_{V(t)} \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\nabla \cdot (\rho\vec{u}) + \rho\vec{u} \cdot \nabla u \right] dV, \quad (1.33)$$

Reescribiendo esto:

$$\frac{Dp}{Dt} = \int_{V(t)} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u \right) + u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) \right) \right] dV. \quad (1.34)$$

Observemos que el segundo paréntesis corresponde a la ecuación de continuidad, ecuación 1.28, por lo que es cero:

$$\frac{Dp}{Dt} = \int_{V(t)} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u \right) dV, \quad (1.35)$$

En tres dimensiones queda como:

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \int_{V(t)} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right) dV. \quad (1.36)$$

1.1.2. Ecuaciones de Navier-Stokes y de Euler

Para un fluido newtoniano e incompresible y de acuerdo a la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas aplicadas sobre un elemento del fluido V , tanto las aplicadas sobre el volumen como sobre la superficie, es igual al cambio del momento por unidad de tiempo [15]. De esto:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_A \vec{\sigma} \cdot d\vec{A}, \quad (1.37)$$

Donde ρ es la densidad del fluido, \vec{f} corresponde a las fuerzas externas por unidad de volumen, y el término $\vec{\sigma}$ corresponde a las fuerzas de superficie, fuerzas provenientes de la presión del fluido y fuerzas viscosas.

Usando el teorema de Transporte de Reynolds la ecuación anterior queda como:

$$\int_V \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_V (\nabla \cdot \vec{\sigma}) dV, \quad (1.38)$$

De donde se obtiene que:

$$\int_V \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} - \rho \vec{f} - \nabla \cdot \vec{\sigma} \right) dV = 0. \quad (1.39)$$

Como la integral anterior es cero, para un volumen arbitrario, el integrando debe ser cero:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \sigma. \quad (1.40)$$

Separando las componentes de presión p y fuerzas viscosas σ' de σ :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \nabla \cdot \sigma', \quad (1.41)$$

Analicemos ahora la parte correspondiente a las fuerzas viscosas. σ' . Para esto veamos el caso de un flujo estacionario entre dos placas paralelas infinitas una quieta y otra en movimiento con velocidad U_0 , normales a la dirección y con una separación a , como se muestra en la figura 1.3

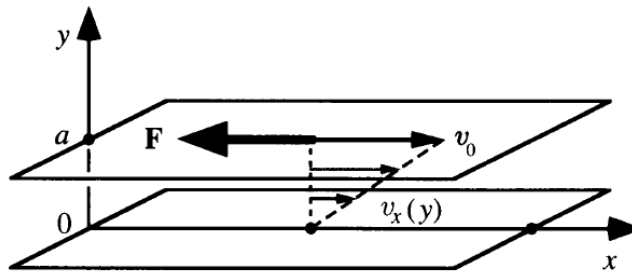


Figura 1.3: Flujo entre dos placas. Tomado de [15].

En la placa superior el flujo lleva una velocidad U_0 :

$$u(a) = U_0 \quad (1.42)$$

Esto ocurre porque la placa «arrastra» al fluido en el sentido de su movimiento. En la placa inferior el fluido debe cumplir que sea cero, por las mismas razones. Esto es:

$$u(a) = 0 \quad (1.43)$$

De esto podemos ver que la velocidad es una función sólo de y (no depende del tiempo ya que es un flujo estacionario), también podemos suponer que es una función lineal, esto es:

$$u(y) = U_0 \frac{y}{a}. \quad (1.44)$$

Este flujo es conocido como Flujo de Couette [15]. Haciendo un símil con dos placas con temperaturas distintas bajo condiciones estacionarias, podemos observar que al igual que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperaturas, existe una proporcionalidad entre la fuerza por unidad de área y el gradiente de velocidad:

$$\frac{F_x}{A} = -\frac{\mu U_0}{L} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.45)$$

Donde el signo negativo se establece dado a que la fuerza de fricción es contraria al movimiento. El término μ es conocido como el coeficiente de viscosidad dinámica (en asociación con la fuerza). Esta tiene dimensiones de Pascales por segundo $[\mu] = Pas$. En tres dimensiones esta fuerza, que habíamos llamado σ' queda como:

$$\sigma' = -\mu \nabla \vec{u}. \quad (1.46)$$

Y la ecuación 1.41 queda como:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (1.47)$$

A ésta se le conoce como ecuación de Navier-Stokes.

Por lo común en mecánica de fluidos se suelen adimensionalizar las ecuaciones. Para ello se introducen parámetros de escalamiento, los cuales son propiedades medibles del fluido a estudiar. Para el caso de la ecuación 1.41 son L longitud, U velocidad, F fuerza, y p_0 una presión de referencia.

De los parámetros anteriores surgen las variables adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U}; \quad t^* = \frac{Ut}{L}; \quad \vec{f}^* = \frac{\vec{f}}{F}; \quad p' = p - p_0; \quad p^* = \frac{p'}{p_0}, \quad (1.48)$$

se adimensionalizan también los operadores:

$$\nabla^* = L \nabla; \quad \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{L}{U} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.49)$$

escribiendo la ecuación 1.47 de forma explícita:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (1.50)$$

escribiendo esta ecuación en variables adimensionales:

$$\frac{U^2}{L} \rho \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} \rho (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = F \rho \vec{f}^* - \frac{p_0}{L} \nabla p^* + \frac{U \mu}{L^2} (\nabla^*)^2 \vec{u}^*, \quad (1.51)$$

simplificando la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + (\vec{u}^* \cdot \nabla^*) \vec{u}^* = \frac{FL}{U^2} \vec{f}^* - \frac{p_0}{U^2} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho LU} (\nabla^*)^2 \vec{u}^*. \quad (1.52)$$

Al inverso del parámetro que acompaña a la fuerza viscosa que es una cantidad adimensional, se le da un nombre, el número de Reynolds. Hay que comentar también que a otras fuerzas, como la de Coriolis, también se les asocia números adimensionales. En el área de ingeniería estos números adimensionales son importantes para caracterizar fluidos. Basados en el teorema Pi de Buckingham, que nos dice que si se tiene un fluido descrito por N parámetros que dependen de K unidades fundamentales, el fluido puede caracterizarse por $N - K$ números adimensionales. En el caso del Reynolds los parámetros que describen al fluido son la longitud característica, la velocidad, la densidad y la viscosidad dinámica:

$$Re = \frac{\rho LU}{\mu}, \quad (1.53)$$

donde L y U son una longitud y velocidad característica del fluido respectivamente, como se dijo antes, y μ es la viscosidad dinámica del fluido. Se puede escribir la viscosidad dinámica a partir de la viscosidad cinématica ν .

$$\mu = \rho \nu. \quad (1.54)$$

Por lo que otra forma de escribir el número de Reynolds es:

$$Re = \frac{LU}{\nu}. \quad (1.55)$$

El número de Reynolds es útil para predecir el comportamiento de un flujo, en tubos por ejemplo. Para Reynolds menores de 2100 el flujo es laminar y para Reynolds mayores el flujo es turbulento. Cabe aclarar que estos cambios no son bruscos, sino que existen regiones en que el flujo se comporta en un régimen mixto entre laminar y turbulento en los Re dichos. El número de Reynolds es también importante por el principio de semejanza, el cual nos dice que dos flujos con los mismos parámetros adimensionales, como el número de Reynolds, son iguales. Así por ejemplo, las mediciones que se hacen con modelos aerodinámicos a escala en un túnel de viento son útiles para los modelo a tamaño real, si se tiene el mismo número de Reynolds. Otros números son el número de Froude, importante en fenómenos que involucran la acción de la gravedad (como las ondas de superficie); el de Weber, relacionado con las fuerzas de tensión superficial; el número de Rossby, asociado a la fuerza de Coriolis; y el de Cauchy, relacionado con fuerzas elásticas .

En casos de fluidos no viscosos (en los que el número de Reynolds no tiene sentido), es decir para un fluido ideal, incompresible y sin fuerzas viscosas, el término σ' es cero, por lo que la ecuación 1.41, que tiene dimensiones:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f}. \quad (1.56)$$

La ecuación 1.56 es conocida como la ecuación de Euler. Suponiendo que la densidad ρ es una función que puede ser sacada del operador derivada material, se obtiene que:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \frac{p}{\rho} + \vec{f}, \quad (1.57)$$

si además \vec{f} puede escribirse como un potencial ϕ tal que $\vec{f} = -\nabla\phi$ y pueda ser introducida la ecuación de Euler queda como:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \phi\right). \quad (1.58)$$

1.1.3. Vorticidad y vórtices

El movimiento de un fluido es descrito por el vector velocidad $\vec{u}(x, y, z, t)$. El rotacional de la velocidad es llamado *vorticidad* $\vec{\omega}(x, y, z, t)$ [33] :

$$\vec{\omega}(x, t) = \nabla \times \vec{u}(x, y, z, t). \quad (1.59)$$

Un ejemplo donde hay vorticidad es un fluido rotando en dos dimensiones como un cuerpo rígido, figura 1.4, con velocidad angular constante Ω en dirección z . En este caso, la velocidad de un elemento de fluido en una línea de corriente sólo depende de x y de y , es decir $\vec{u} = \vec{u}(x, y)$. \vec{u} tiene solamente las componentes en las direcciones \hat{i} y \hat{j} , es decir:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, 0). \quad (1.60)$$

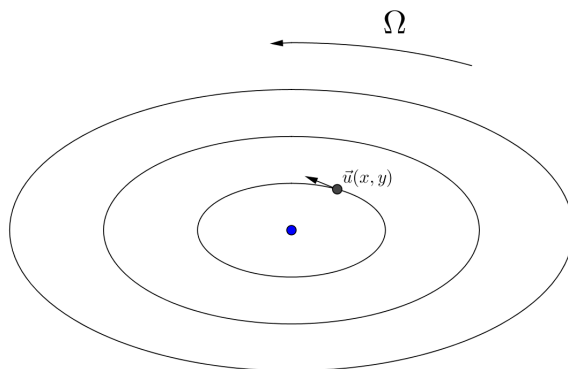


Figura 1.4: Fluido rotando con velocidad angular constante Ω

Para calcular las componentes u_x y u_y veamos que en coordenadas polares:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \theta = \arctan \frac{y}{x};$$

derivemos ahora. Como no hay velocidad radial en este caso, la derivada de r sería cero y la derivada de θ es Ω :

$$0 = xu_x + yu_y \quad y \quad \Omega = \frac{u_yx - u_xy}{y^2 + x^2};$$

Así obtenemos un sistema para u_x y u_y con lo que obtenemos que tienen los valores de $-\Omega y$ y Ωx respectivamente. Entonces por 1.59 la vorticidad es:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{k} = \left(\frac{\partial \Omega x}{\partial x} - \frac{\partial (-y\Omega)}{\partial y} \right) \hat{k} = (\Omega + \Omega) \hat{k} = 2 \Omega \hat{k}. \quad (1.61)$$

El caso anterior es un ejemplo de un vórtice. Un vórtice es un patrón formado por partículas de fluido que se mueven en una trayectoria cerrada, alrededor de uno o más puntos. Los vórtices son de vital importancia en la mecánica de fluidos. Existen vórtices a todas escalas, siendo tan pequeños como el formado en un lavabo, o tan grandes que ocupen varios kilómetros, como los huracanes. Un ejemplo de vórtice fácil de observar es el vórtice de Rankine, el cual puede ser creado usando una botella de cabeza llena de agua, a la cual se le deja salir el líquido por la boquilla. Se observará que se forma un remolino, más o menos simétrico alrededor del eje vertical de la botella.

Otra forma de crear vórtices es hacer pasar un flujo por un vástago. El flujo se enrollará creando vórtices, que se mueven siguiendo la trayectoria del flujo inicial. Tales vórtices conforman la calle de vórtices de Von Karman ver figura 1.5.

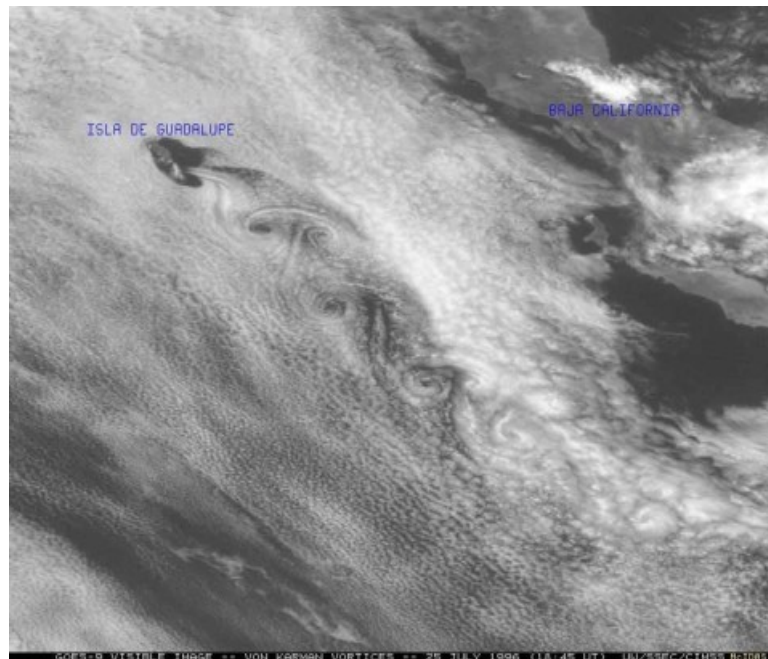


Figura 1.5: Calle de vórtices de von Karman formado en la atmósfera. Tomado de [1]

Otro caso interesante es el de los vórtices anulares axisimétricos, como las donas de humo. Calculemos para la vorticidad para un vórtice anular. Pasemos a coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .

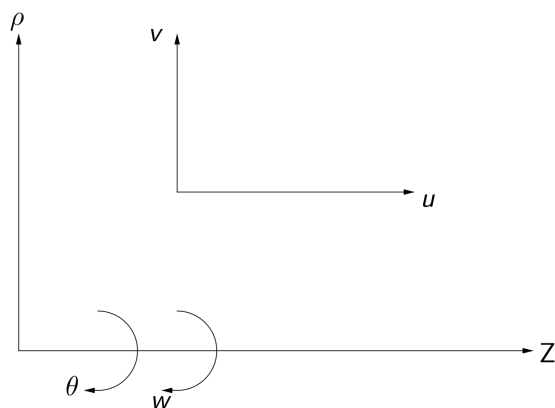


Figura 1.6: Sistema coordenado para representar un vórtice anular

En este caso la velocidad \vec{u} tiene las componentes (u, w, v) , ver figura 1.6 Para este caso debido a la axisimetría, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$. Usando 1.59 podemos calcular las componentes de la vorticidad $\vec{\omega}$ como el determinante de una matriz :

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & rw & v \end{vmatrix}$$

; por lo que la vorticidad queda como:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial rw}{\partial z} \right) \hat{e}_r - \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{e}_\theta + \left(\frac{\partial rw}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \hat{e}_z; \quad (1.62)$$

pero las parciales con respecto a θ son cero, debido a la axisimetría:

$$\vec{\omega} = \left(-\frac{\partial rw}{\partial z} \right) \hat{e}_r - \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{e}_\theta + \left(\frac{\partial rw}{\partial r} \right) \hat{e}_z. \quad (1.63)$$

Además la componente de la velocidad en dirección de θ , w , es independiente de r y z pues es constante para la primer coordenada y no tiene componentes en la segunda, por lo que:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta. \quad (1.64)$$

Como se supone al fluido incompresible entonces tiene una función de corriente ψ . La función de corriente surge del concepto de función potencial, por el cual la velocidad en ciertos casos, como el presente, puede ser visto como el gradiente de una función (que es la función de corriente). Al graficar la función de corriente se obtiene la trayectoria que seguiría una partícula a través del tiempo. De esta manera, usando la función de corriente, la velocidad es:

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad y \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (1.65)$$

En términos de la función corriente, $\vec{\omega}$ es:

$$\vec{\omega} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \hat{e}_\theta. \quad (1.66)$$

O visto de otro modo:

$$\vec{\omega} = \nabla^2 \psi \quad (1.67)$$

En donde el laplaciano está en dos dimensiones, en coordenadas cilíndricas.

El vector vorticidad está relacionada con una rotación local, [15]. Puede existir una rotación global en el fluido sin que haya rotaciones locales, esto es que la vorticidad sea cero. Los flujos irrotacionales son aquellos para los cuales $\vec{\omega} = 0$ en todos los puntos del flujo, y los flujos rotacionales son aquellos en los cuales $\vec{\omega} \neq 0$ en algún punto del fluido.

1.1.4. Circulación

Otra función, esta vez escalar, relacionada con la velocidad es la *circulación* Γ , que se define como la integral de línea de la velocidad alrededor de una curva cerrada C :

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}, \quad (1.68)$$

siguiendo del Teorema de Stokes:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{u}) \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}, \quad (1.69)$$

donde A es una superficie abierta, cuya frontera es la curva C . La ecuación 1.69 relaciona la vorticidad con la circulación, dando una nueva forma de interpretar a ésta última. Así de los extremos de 1.69 se puede decir que la circulación es la cantidad de vorticidad que hay en una superficie dada.

Para el caso particular de un vórtice anular la circulación está relacionada con U , la velocidad de traslación del anillo, de la siguiente manera [33]:

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\log \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right], \quad (1.70)$$

donde R es el radio del anillo y a es el radio del núcleo del anillo. El núcleo de anillo es la región donde la vorticidad es diferente de cero. Para que la relación anterior sea válida se requiere que el anillo sea delgado, esto es que $\frac{a}{R} \ll 1$

Por otro lado, $d\vec{l}$ puede ser descrito como la diferencia $\delta\vec{r}$ entre los radios vectores \vec{r} por lo que se puede escribir 1.68 como:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot \delta\vec{r}. \quad (1.71)$$

Consideremos ahora un contorno cerrado dibujado en el fluido en un instante determinado, este será un «contorno fluido», es decir compuesto por partículas fluidas que están sobre él mismo. Estas partículas se mueven junto al contorno en el transcurso del tiempo. Calculando la derivada temporal:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \vec{u} \cdot \delta\vec{r}, \quad (1.72)$$

como el contorno también cambia con el tiempo, se debe derivar también $\delta\vec{r}$. Por regla de la cadena:

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{u} \cdot \delta\vec{r} = \oint_C \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{r} + \oint_C \vec{u} \cdot \frac{D\delta\vec{r}}{Dt}. \quad (1.73)$$

Ahora al fijarse en el integrando de la segunda integral del lado derecho, vemos que derivada con respecto al tiempo de \vec{r} es \vec{u} entonces:

$$\vec{u} \cdot \frac{D\delta\vec{u}}{Dt} = \vec{u} \cdot \delta \frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{u} \cdot \delta\vec{u}, \quad (1.74)$$

pero la integral de línea de una diferencial total es cero. Entonces la ecuación 1.73 queda como:

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{u} \cdot \delta\vec{r} = \oint_C \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{r}. \quad (1.75)$$

Y de 1.58 se tiene que:

$$\oint_C \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \delta\vec{u} = \int_A (\nabla \times (-\nabla(p + \phi))) \cdot d\vec{A} = 0. \quad (1.76)$$

Eso pues $\nabla \times (\nabla - (p + \phi)) = 0$. De esta última ecuación y de 1.75, regresando a la notación anterior se tiene que:

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (1.77)$$

o bien:

$$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \text{constante}. \quad (1.78)$$

Esto es llamado el Teorema de Kelvin o ley de conservación de la circulación y dice que en un fluido ideal la circulación de la velocidad a lo largo de un «contorno fluido» es constante en el tiempo [19].

1.1.5. Analogía con la teoría electromagnética

La ecuación 1.59 es semejante a:

$$\vec{J}(x, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}(x, t), \quad (1.79)$$

donde \vec{J} es la vector de densidad de corriente y \vec{B} es el campo magnético en el vacío. Haciendo una analogía de 1.59 y 1.79, en la cual \vec{u} es análogo de \vec{B} y \vec{J} de $\vec{\omega}$ [15].

Para seguir con la analogía hay que decir que si el fluido es incompresible, cosa que se cumple si la velocidad del fluido es pequeña comparada a la del sonido, entonces por la ecuación de continuidad (1.28):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.80)$$

y recordando la ley de Gauss para campo magnético:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.81)$$

La ley de Ampère en forma integral y ausencia de campos eléctricos variables en el tiempo:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \int_A (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (1.82)$$

Es posible ver que 1.81 y 1.80 son iguales en su forma, como lo son 1.82 y 1.68. Entonces estas ecuaciones tendrán las mismas soluciones siempre y cuando sus condiciones de frontera sean idénticas. De esto además se puede obtener otro similar, el de circulación Γ con la corriente I en el caso electromagnético.

De esta analogía se puede obtener una ecuación similar a la de Biot-Savart en el caso electromagnético, pero para relacionar la velocidad en un punto \vec{r} de un fluido con la circulación, esto es [15]:

$$d\vec{u} = -\frac{1}{4\pi} \Gamma \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|r|^3}. \quad (1.83)$$

Un anillo de vorticidad es un caso al que puede aplicarse 1.83 para obtener la magnitud de la velocidad de forma analítica, al menos en un punto O sobre la línea de simetría en el centro de la espira. Este caso es al análogo hidrodinámico de una espira por la que pasa una corriente I .

En la figura 1.7 se puede ver una idealización de vórtice anular, imaginándolo como una línea. Este anillo tiene al eje Z como eje de simetría central, y \hat{e}_r ¹ y \hat{e}_l son vectores unitarios de \vec{r} y $d\vec{l}$ respectivamente.

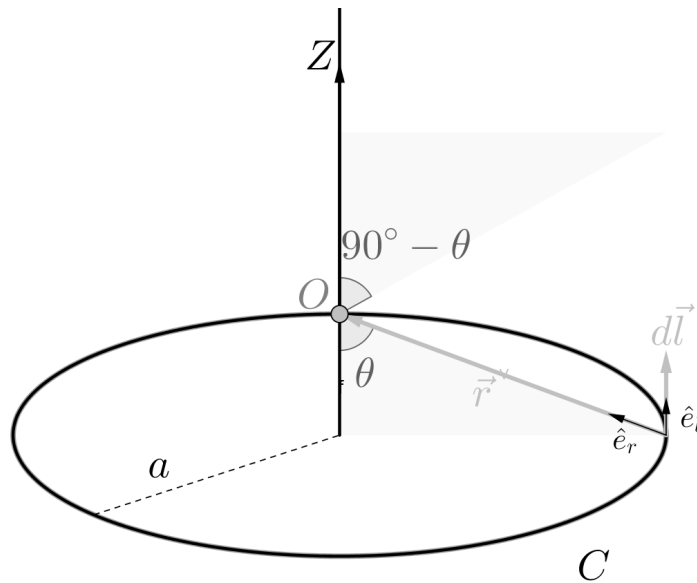


Figura 1.7: Vórtice anular C de radio a .

Para este caso 1.83 queda de la forma

$$d\vec{u} = -\frac{1}{4\pi} \Gamma \frac{\hat{e}_l \times \hat{e}_r r dl}{|r|^3}, \quad (1.84)$$

¹No confundir \vec{e}_r con r , la coordenada radial en coordenadas cilíndricas

siguiendo esto y viendo la figura 1.7 vemos que \hat{e}_r y \hat{e}_l son siempre perpendiculares, y más aún, su producto cruz es -1 . Entonces 1.84 queda como:

$$du = \frac{1}{4\pi} \Gamma \frac{dl}{r^2}, \quad (1.85)$$

$d\vec{u}$ tiene dos componentes, uno a lo largo del eje Z con valor $du \cos(90 - \theta)$ y uno perpendicular a Z con magnitud $du \sin(90 - \theta)$. Este último es cero para todos los casos, por lo que sólo queda la componente que está en dirección del eje. Integrando sobre C :

$$u = \int_C du \cos(90 - \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \oint_C dl = \frac{\Gamma a \sin(\theta)}{2r^2}. \quad (1.86)$$

De la figura 1.7 $a = r \sin(\theta)$ y $r = \sqrt[2]{a^2 + z^2}$, por lo que 1.86 queda como:

$$u = \frac{\Gamma a^2}{2(\sqrt[2]{a^2 + z^2})^3}. \quad (1.87)$$

Para un caso más general, es decir que el punto O no esté en el eje Z la ecuación 1.83 se vuelve demasiado complicada para resolverla por medios analíticos y es preciso recurrir a métodos de integración numérica.

1.2. Características Generales de las Medusas



Figura 1.8: Medusas adultas de la especie *Chrysaora quinquecirrha*. Tomada de [2]

Las medusas, figura 1.8, pertenecen al reino Animal, en específico a la filo Cnidaria o Celenterados de la que también son miembros las hidras, anémonas y corales [32]. Existen tres clases de medusas Hydrozoa, Sciphozoa y Cubozoa. En ellas coexisten dos morfologías, la de pólipo y la de forma medusoide [2], éstas pueden verse en la figura 1.9. En la primera forma, la de pólipo, las medusas están fijadas al sustrato del que se alimentan. En el caso de tener la forma medusoide éstas pueden nadar libremente. El tipo de forma

depende de la especie, y en algunas de ellas se tienen las dos, siendo la pólipo la morfología de las crías y la medusoide la de los adultos.

Estas formas también son inversas una de otra, ya que al darle la vuelta a un pólipo, se obtendrá la forma medusoide.

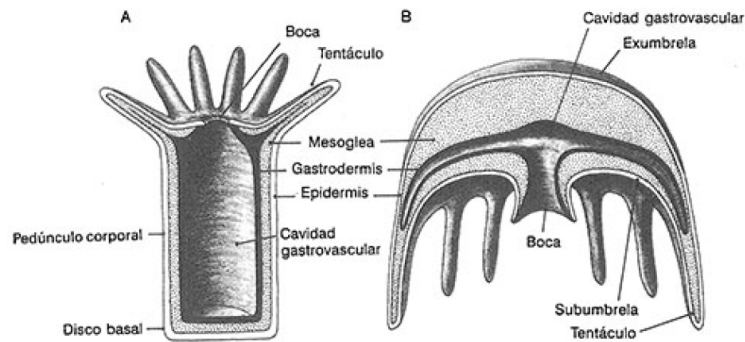


Figura 1.9: A forma de pólipo, B forma medusoide. Tomada de [32]

1.2.1. Características Físicas de la Forma Medusoide

El cuerpo de la medusa toma aspecto de campana o de sombrilla, con la cara convexa dirigida hacia arriba y la boca en el centro de la cara cóncava. Las medusas presentan una cavidad digestiva que también tiene funciones de transporte de nutrimentos en el cuerpo de la medusa. Presentan también un círculo de brazos que rodean la boca y les sirve para alimentarse. La pared de sus cuerpos consiste en tres capas básicas (ver figura 1.9): un epitelio externo, la epidermis; un epitelio interno, la gastrodermis, que recubre la cavidad gastrovascular; y entre estas dos una capa llamada mesoglea.



Figura 1.10: *Aequorea victoria* en su forma medusoide. Tomada de [2]

Mientras que la mesoglea de los pólipos es más o menos fina, la mesoglea de las medusas es extremadamente gruesa y constituye la mayor parte del volumen del animal [32]. Debido a que la consistencia de esta masa de mesoglea es gelatinosa, las medusas son llamadas en inglés *jellyfish* (pescado gelatinoso). Sus tamaños van desde los cuatro milímetros hasta los dos metros [2], dependiendo de su clase y especie. un término importante en las medusas

es el radio de finura de la medusa [24] que es el cociente entre su altura y su diámetro. y nos dice que tan achatada o alargada está la medusa. Para radios de finura menores a un medio tenemos medusas oblatas y para radios de finura superiores a un medio tenemos prolatas.

1.2.2. Sistema de locomoción

Las medusas se mueven por propulsión a chorro [20], específicamente las clases Hydrozoa y Sciphozoa que tienen forma de paracaídas. En el cuerpo de la medusa se genera una contracción de los músculos de la subumbrela capaz de expulsar un chorro de agua a grandes velocidades que empuja al animal en la dirección contraria al chorro por un principio de acción y reacción.

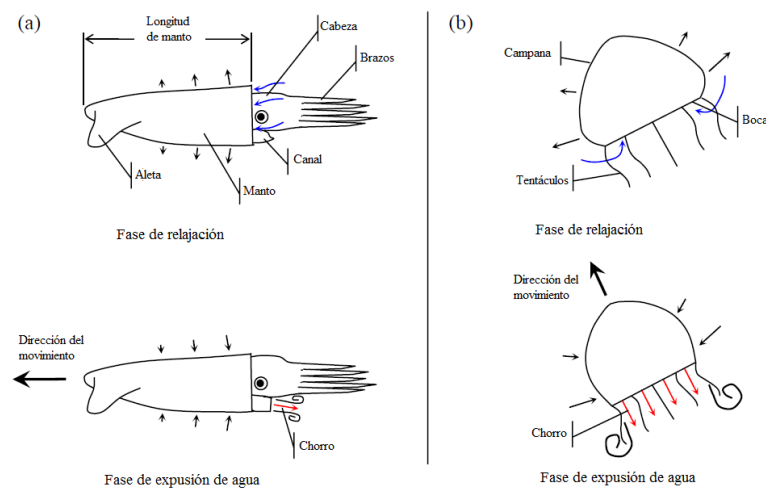


Figura 1.11: Anatomía general y descripción del mecanismo de propulsión de a) calamar y b) medusa. Modificada de [18]

Este método de propulsión es compartido por otras criaturas marinas como los calamares (figura 1.11). Dependiendo del tamaño de la medusa, esta puede alcanzar velocidades de hasta cuatro metros por segundo. Investigaciones en la locomoción de calamares y medusas han demostrado la formación de un vórtice anular durante la expulsión del chorro de agua en estas especies [18]. Para observar esto pueden usarse marcadores de colorante fluorescente inyectado en algunas locaciones alrededor de la medusa durante el nado [6], como lo muestra la figura 1.12.

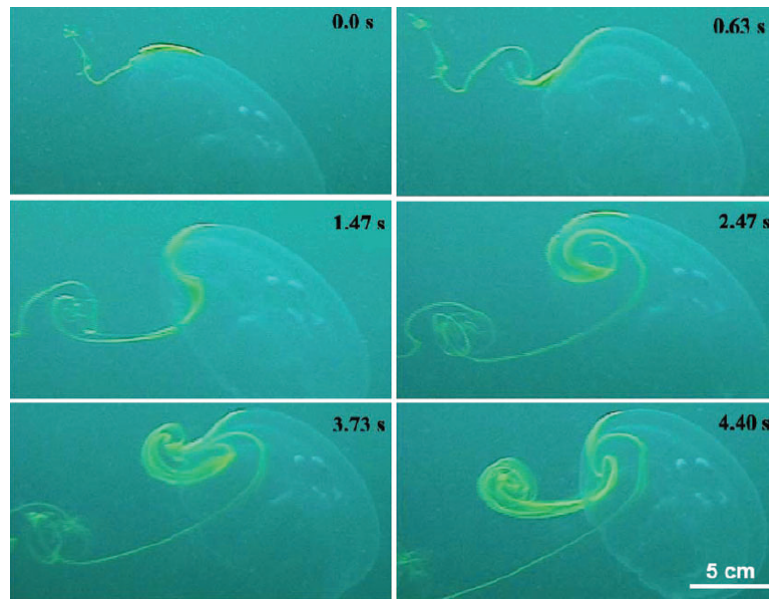


Figura 1.12: Secuencia de la formación del vórtice anular durante dos ciclos de medusa *Aurelia aurita*. Tomada de [6]

Este anillo de vorticidad es importante ya que ayuda a dar un mejor impulso al animal, además de mantener una sola dirección del chorro, que significa un movimiento más eficiente.

Capítulo 2

Modelos analíticos

Existen tres clases de medusas Hydrozoa, Sciphozoa y Cubozoa. El sistema de locomoción de las medusas de las clases Hydrozoa y Sciphozoa, es por propulsión a chorro. Las medusas nadan para obtener su alimento y para escapar de sus depredadores. Uno de los primeros en describir este medio de locomoción fue Seikman (1962), quien lo observó en seres como calamares. Lighthill (1969) explica que la propulsión también es el método de las medusas, aunque sin profundizar en ello, ni proponer ningún modelo para su descripción. Gladfalter (1972) describe por otro lado la estructura de locomoción de la especie de medusas *Polyorchis monterreyensis*. Daniel(1983) propone un modelo basado en un balance de fuerzas (que es el modelo usado en este trabajo). A partir de este modelo inicial se han propuesto distintos cambios que intentan dar al modelo una mejor aproximación, ya que Daniel afirma que la formación de vórtices durante la fase de contracción no es importante para la propulsión, hecho que fue desmentido por trabajos como el de Linden y Turner (2001) quienes encuentran como la formación de un vórtice anular óptimo hace más eficiente el empuje, McHenry(2003) valida estos resultados al obtener errores en el modelo de Daniel al compararlos con mediciones experimentales. Sin embargo, el modelo de Daniel es la base de otros, no sólo son analíticos, también los hay computacionales como los trabajos de Park(2014) y colaboradores. Cabe resaltar que la formación de los vórtices en el ciclo de nado de la medusa es un tema recurrente, algunos trabajos notables son los de Dabiri(2005) y colaboradores, así como los de Raspa *et al*(2014). Gemmell *et al* (2015) y sus colaboradores han observado que existe una contribución al empuje que han asociado a la aparición de una zona de baja presión en las cercanías de la medusa durante la etapa de succión. Han encontrado que esta contribución al empuje es más importante que el dado por el vórtice expulsado. Esta propuesta no está considerada en esta tesis.

Como se dijo antes, se usa el modelo de Daniel, para ello por razones de simplicidad vamos a suponer que el movimiento de la medusa es en una sola dimensión, y esta dirección es la perpendicular a la dirección en que actúa la gravedad, ver figura 2.1. Esta suposición se hace pensando en que la fuerza de gravedad se ve anulada por el empuje vertical resultante del principio de Arquímedes. Debido a esto, no hay fuerzas que actúen en esa dirección, y por lo tanto sólo se hará un balance de fuerzas en la dirección perpendicular a la de la gravedad.

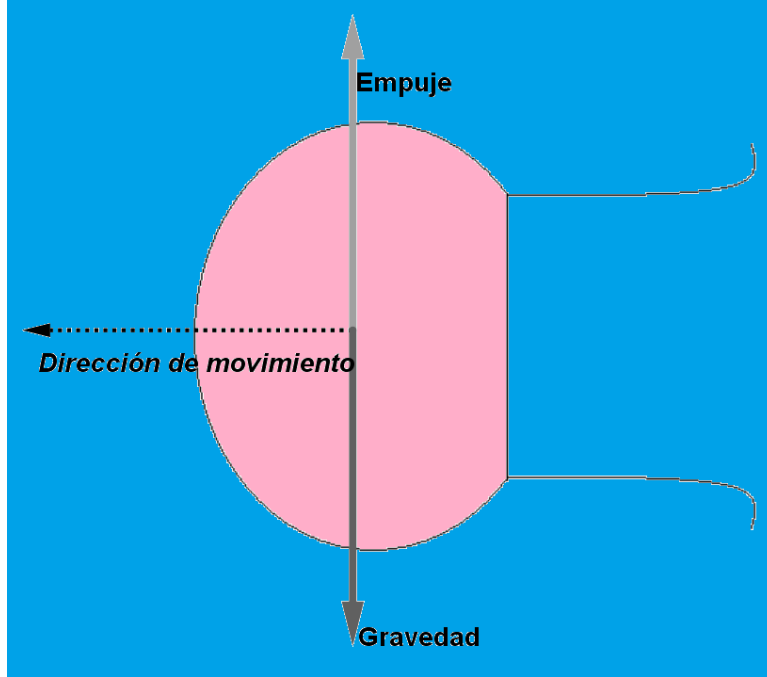


Figura 2.1: Balance de fuerzas en la dirección perpendicular del movimiento.

Otra suposición importante que se hace para este modelo es que la densidad de la medusa es la misma que la del agua. Tal aproximación no está tan fuera de la realidad ya que la medusa está compuesta en más de un noventa por ciento de agua [26], y el resto se compone de lípidos, carbohidratos y grasas que no alteran la densidad total de la medusa. Por lo que:

$$\rho_{medusa} = \rho_{agua} = \rho.$$

El movimiento de la medusa es cíclico, en donde existen dos fases: la fase de relajación con una duración de t_r y la fase de contracción con una duración de t_c . Durante la fase de contracción, la medusa eyecta un chorro de agua, y en la fase de relajación la medusa se traslada a la vez que rellena de agua su cavidad, para volver a impulsarse. El período T_t del ciclo de la medusa es entonces la suma de ambas fases:

$$T_t = t_r + t_c;$$

la frecuencia del movimiento de la medusa es entonces f [10]:

$$f = \frac{1}{t_c + t_r}.$$

Como se dijo en el capítulo anterior, el chorro que eyecta la medusa viene acompañada de un vórtice anular, en la figura 2.2 se pueden observar algunas características geométricas del chorro y del vórtice. Los parámetros geométricos que ahí aparecen son A es la longitud del chorro, B es el diámetro del núcleo del anillo de vorticidad, C es la distancia entre dos anillos y D es el diámetro del anillo. Algunos de esos están relacionados con las fases descritas anteriormente.

A está relacionado con t_c , pues entre más tarde la medusa en eyectar su chorro, mayor longitud tendrá este. En este caso, es la velocidad del chorro el que relaciona una cantidad con otra.

$$A = \int_0^{t_c} u_e(t) dt.$$

Si se supone que la velocidad del chorro u_e es constante, A sería el producto de la velocidad del chorro por t_c :

$$A = t_c u_e(t).$$

Por otro lado C está relacionado con t_r ya que entre más tiempo dure la fase de relajación, más grande será la distancia entre dos chorros y esto depende también de la velocidad de la medusa u . En este caso:

$$C = \int_{t_c}^{t_r} u(t) dt.$$

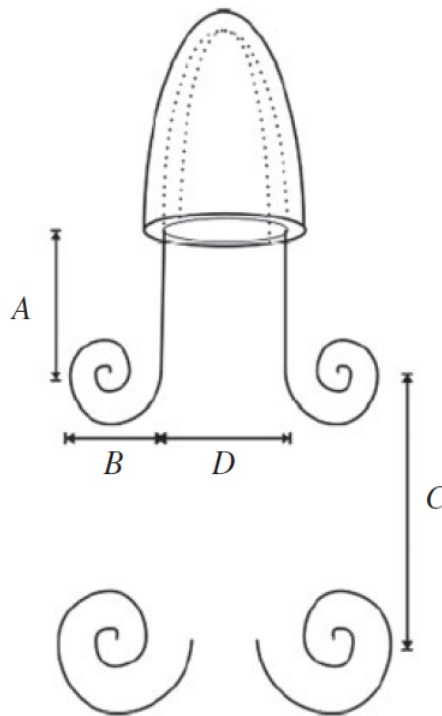


Figura 2.2: Esquema que muestra el chorro de la medusa con un anillo de vorticidad. Los vórtices anulares son vistos transversalmente, donde A es la longitud del chorro, B es el diámetro del núcleo del anillo de vorticidad, C es la distancia entre dos anillos y D es el diámetro del anillo. Tomada de [6]

Ya que, como se verá más adelante, es posible suponer que la velocidad del chorro es la misma que la de la medusa, al menos en la fase de contracción de lo anterior se sigue que:

$$A + C = \int_0^{T_t} u dt, \quad (2.1)$$

la frecuencia f del ciclo de nado sería:

$$f = \frac{u_e(t)u(t)}{u(t)A + u_e(t)C}. \quad (2.2)$$

T. L. Daniel [10] propuso una ecuación, resultante de un balance de fuerzas, con la cual se puede obtener la velocidad de la medusa a todo tiempo. Para ello hay que considerar todas las fuerzas que actúan sobre el animal, estas son el empuje, T , que actúa en dirección del movimiento y el arrastre (D) que va en dirección contraria a la del movimiento. También hay que considerar la aparición de una tercera fuerza resultante de la masa añadida, que llamaremos reacción de aceleración. Por la segunda ley de Newton:

$$m(t)\frac{du(t)}{dt} = T - D - G,$$

donde el término G del lado derecho es la reacción de aceleración que se mencionó antes, este surge en todos los fenómenos en los que hay un objeto acelerándose en un fluido, el cual es el caso de la medusa. Este tiene la forma [22]:

$$G = \alpha m \frac{d(u - v_f)}{dt},$$

donde α se conoce como el coeficiente de masa añadida y v_f es la velocidad del agua, que se puede considerar como cero por razones de simplicidad. Reescribiendo la ecuación anterior (ver figura 2.3):

$$T = (1 + \alpha)m(t)\frac{du(t)}{dt} + D.$$

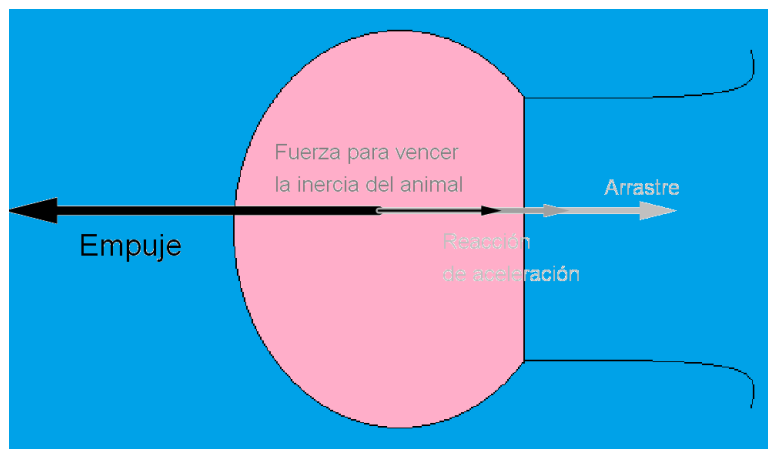


Figura 2.3: Balance de fuerzas en el movimiento de la medusa.

A continuación se analizarán cada una de las fuerzas involucradas en el movimiento de la medusas. Para evitar confusiones con la notación, en este trabajo se usará u para indicar la velocidad de la medusa, u_e para la velocidad del chorro que eyecta la medusa, y w con ó sin subíndices para la velocidad de cualquier otro objeto.

2.1. Arrastre

Como se mencionó en el capítulo anterior, existen fuerzas de interacción entre un objeto sólido y el fluido. Una de ellas es la debida a las fuerzas viscosas que actúan sobre

la superficie, se mostró además que ésta puede ser caracterizada por un parámetro adimensional conocido como el número de Reynolds. Esta fuerza también actúa cuando un cuerpo sólido, como la medusa, se mueve a través del fluido. Hay que decir que existe una componente de la presión a esta fuerza de resistencia [9] tanto, para el arrastre como la sustentación.

La primer persona en desarrollar una teoría analítica sobre la resistencia de los fluidos (en particular del aire), fue D'Alambert [37] en el siglo XVIII. Él, al aplicar su modelo, llegó a la conclusión de que la fuerza de fricción del aire que actúa sobre un cuerpo es cero, lo cual se contradice con las observaciones. A esto se le llama *La paradoja de D'Alambert*. Un siglo después Kirchhoff y Rayleigh desarrollaron una teoría para evitar las conclusiones de D'Alambert y con esto su paradoja. En ésta se describe el movimiento de una placa inclinada con un cierto ángulo, de tal forma que el plano en el que está la placa es perpendicular a la dirección del flujo. Se supone que la superficie de discontinuidad (es decir, donde deja de existir un obstáculo al flujo) de la placa está formada por los bordes de ésta, de modo que la placa es seguida por una estela de *aire estancado* (una zona del aire que está quieto) que se extiende desde detrás de la placa hasta el infinito como se puede ver en la figura 2.4.

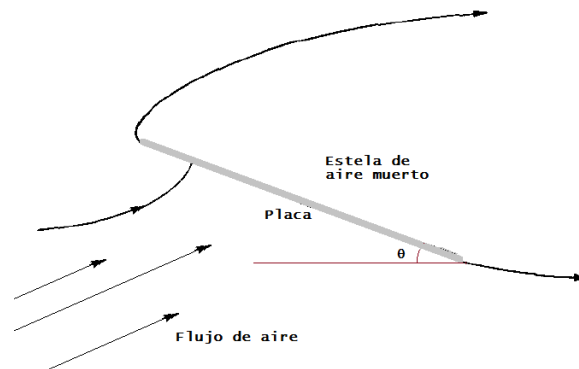


Figura 2.4: Un flujo con una superficie discontinua como es descrita en la teoría de Kirchhoff y Rayleigh. Modificado de [37]

Con estas suposiciones se puede calcular la fuerza que actúa sobre la placa, incluso cuando esta fuerza es cero. Para esto se hace una «separación» de la fuerza del flujo en dos componentes tanto normal como tangencial a la dirección del flujo, es posible hacer concordar la teoría con los hechos experimentales.

Estas dos componentes son conocidas como la sustentación (o *lift*) y el arrastre (o *drag*).

La sustentación L es la componente normal, con respecto a la dirección de movimiento, de la fuerza de resistencia [3] y viene dada como:

$$L = \frac{C_L \rho u^2 S}{2},$$

donde S es la superficie que interactúa con el fluido y C_L es llamado coeficiente de sustentación. Su magnitud depende de la forma del cuerpo, ya que la sustentación aparece en

los casos en que se rompe la simetría en la forma de los objetos, por lo que en la medusa no podría existir.

El arrastre (D) es una fuerza que actúa en dirección del movimiento del cuerpo y se opone al movimiento de éste. El arrastre es proporcional a la velocidad del cuerpo, su forma y disposición geométrica [3]. puede ser calculada cómo [10]:

$$D = \frac{C_D \rho S u^2}{2}, \quad (2.3)$$

donde S es el área del animal proyectada en la dirección de su movimiento, u la velocidad de la medusa y C_D es el coeficiente de arrastre. Este coeficiente de arrastre, por lo común, depende de la geometría y del número de Reynolds. Por ejemplo, para una esfera de radio R_s , moviéndose con velocidad w en un fluido de viscosidad cinética ν , con un $Re < 1$, la fuerza de arrastre viene dada por la ley de Stokes [3]:

$$D_{esfera} = 6\rho\pi R_s \nu w,$$

el coeficiente de arrastre sería dado entonces como:

$$C_D^{esfera} = \frac{D_{esfera}}{\frac{1}{2}\rho w^2 S_{esfera}},$$

$$C_D^{esfera} = \frac{12\pi R_s \nu w}{S_{esfera} w^2},$$

Siguiendo con el desarrollo:

$$C_D^{esfera} = \frac{6\pi D_s^2}{S_{esfera}} \frac{1}{Re},$$

donde D_s es el diámetro de la esfera. En un caso más general el coeficiente de arrastre es proporcional al número de Reynolds del fluido Re , y puede ser calculado cómo [17]:

$$C_D = \frac{24}{Re^n}, \quad (2.4)$$

donde n es un número que depende del valor de Re . Para valores de Re menores a 1, n tiene un valor de 1.0 y tiene un valor de 0.7 para Reynolds entre 1 y 500. En el caso de la esfera, es fácil ver que se cumple esto, ya que suponemos $Re \ll 1$ y la superficie proyectada de la esfera es $S_{esfera} = \pi \left(\frac{D_s}{2}\right)^2$, por lo que el coeficiente de arrastre para la esfera es:

$$C_D^{esfera} = \frac{6\pi D_s^2}{\pi \frac{1}{4} D_s^2} \frac{1}{Re} = \frac{24}{Re},$$

que es lo que se esperaba. Para el caso específico de la medusa, el Reynolds rara vez llega a 500. Por lo que:

$$C_D = \frac{24}{Re^{0,7}}; \quad (2.5)$$

por otro lado el área de la medusa que interacciona con el fluido durante su carrera, es variable con respecto al tiempo. Esto debido a que la medusa deforma su cuerpo al eyectar el chorro de agua y volverse a llenar. Esta deformación cambia el volumen del animal y

con ella la superficie S . Para calcular esta superficie, supongamos que la medusa tiene una forma de una media esfera, de radio r , con volumen $V(t)$ y una superficie proyectada $S(t)$:

$$V(t) = \frac{2}{3}\pi r^3,$$

$$S(t) = \pi r^2,$$

tomando el cociente entre volumen y superficie:

$$\frac{V(t)}{S(t)} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{2}{3}r. \quad (2.6)$$

Podemos suponer que este r corresponde al radio paralelo a la dirección de movimiento, que sería la longitud de la medusa y a diferencia de los radios que son perpendiculares a este, no cambia con el tiempo. Para distinguir uno de otro, al radio que siempre permanece constante se le llamará h y a los radios perpendiculares se les llamará R :

$$V(t) = \frac{2h}{3}S(t), \quad (2.7)$$

al derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo y despejar la derivada temporal de S , se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{3}{2h} \frac{dV}{dt}. \quad (2.8)$$

Al resolver esta ecuación diferencial se obtiene una manera de encontrar S . Si se supone que los términos $\frac{dV}{dt}$ y h son constantes la solución es:

$$S = S_0 + \frac{3}{2h} \left(\frac{dV}{dt} \right) t. \quad (2.9)$$

El signo del término $\frac{dV}{dt}$ indica la magnitud de la fuerza de arrastre, ver figura 2.5. Durante la fase de relajación la medusa aumenta su volumen por lo que el incremento de este es positivo, entonces la magnitud de la fuerza de arrastre D se incrementa. En cambio durante la fase de contracción t_c , el signo del diferencial de volumen es negativo, pues la medusa experimenta una disminución en su volumen, por lo que la magnitud de D decrece.

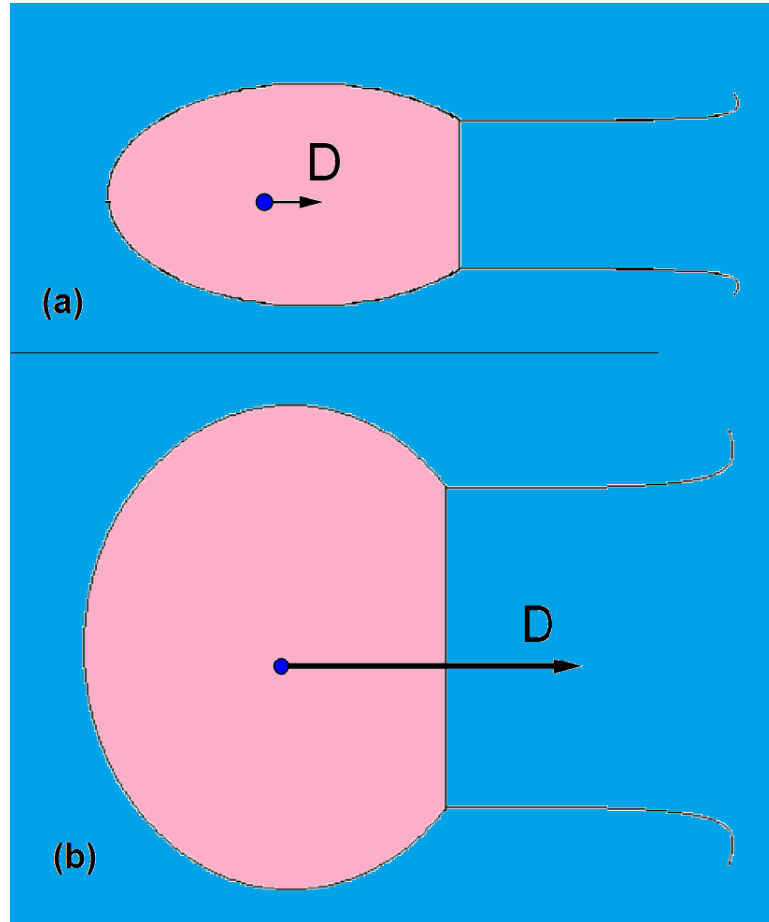


Figura 2.5: Dirección de la fuerza de arrastre D en (a) la fase de contracción t_c y (b) la fase de relajación t_r

De esta forma la fuerza de arrastre tiene la siguiente forma:

$$D = \rho \frac{(S_0 + \frac{3}{2h} (\frac{dV}{dt}) t) \frac{24}{Re^{0,7}} u^2}{2}. \quad (2.10)$$

Recordando la forma de Re :

$$D = 24\rho \frac{(S_0 + \frac{3}{2h} (\frac{dV}{dt}) t) u^{1,3} (\frac{\nu}{2h})^{0,7}}{2}. \quad (2.11)$$

2.2. Empuje

La propulsión en la medusa está dada por el impulso dado por el chorro de agua eyectado durante la fase de contracción. Como se discutió en el capítulo uno, este chorro transfiere momento a la medusa por tercera ley de Newton. De la segunda ley de Newton, el cambio de momento debe ser igual a la fuerza que impulsa al animal, esto es el empuje T :

$$T = \frac{d(mu_e)}{dt}, \quad (2.12)$$

donde m es la masa del agua eyectada por la medusa, la cual depende del tiempo, y u_e es la velocidad del chorro, el cual es constante en el tiempo en que ocurre la transferencia de momento. Desarrollando la ecuación de propulsión:

$$T = m \frac{du_e}{dt} + u_e \frac{dm}{dt} = u_e \frac{dm}{dt}, \quad (2.13)$$

el término $\frac{dm}{dt}$ es el gasto másico, o caudal másico [13]. El gasto másico puede definirse como la cantidad de materia que atraviesa una superficie por unidad de tiempo, en un tubo por ejemplo.

Otro parámetro, relacionado con el gasto másico es el gasto volumétrico, o caudal volumétrico Q , el cual es la cantidad de volumen del fluido que pasa por una superficie A en una unidad de tiempo. Una manera de explicar el gasto volumétrico es suponer un canal en el cual pasa un flujo con velocidad constante U , ver figura 2.6.

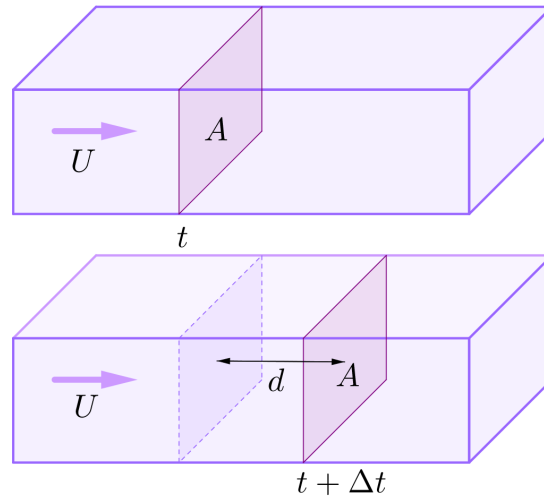


Figura 2.6: Cantidad del volumen de fluido con velocidad constante U que pasa por una superficie, en un tiempo t y en un tiempo $t + \Delta t$.

En este caso, como se ve en la figura, la cantidad de fluido que pasó por A en el intervalo de tiempo Δt recorre una distancia d , la cual es:

$$d = U \Delta t, \quad (2.14)$$

de aquí el volumen de fluido ΔV que atraviesa por la superficie A es:

$$\Delta V = Ad\Delta U = AU\Delta t, \quad (2.15)$$

de donde se obtiene que:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = UA, \quad (2.16)$$

a esta tasa de cambio del volumen en el tiempo es lo que se llama gasto volumétrico Q . En caso de que la velocidad del flujo no sea constante en el espacio, es decir $u = u(x, y, z, t)$, la ecuación anterior se generaliza como:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \int_A u(x, y, z, t) dA. \quad (2.17)$$

Como se dijo antes el gasto volumétrico está relacionado con el gasto másico. De la 2.17:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dm} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt}, \quad (2.18)$$

de donde:

$$\frac{dm}{dt} = \rho Q = \rho \frac{dV}{dt}. \quad (2.19)$$

Por otro lado, multipliquemos y dividamos la ecuación 2.17 por A

$$Q = \left(\frac{1}{A} \int_A u(x, y, z, t) dA \right) A. \quad (2.20)$$

En la ecuación anterior, la parte dentro de los paréntesis corresponde a la velocidad promedio en la superficie A . En el caso de la medusa, podemos asociar esta velocidad con la velocidad de su chorro u_e . Esto es:

$$Q = u_e A, \quad (2.21)$$

entonces por 2.19 y la ecuación anterior:

$$\frac{dm}{dt} = \rho u_e A, \quad (2.22)$$

de donde:

$$u_e = \frac{1}{\rho A} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dV}{dt}. \quad (2.23)$$

De las ecuaciones 2.19 y 2.23 podemos reescribir 2.13 del siguiente modo:

$$T = \frac{\rho}{A} \left(\frac{dV}{dt} \right)^2. \quad (2.24)$$

2.3. Inercia del Animal y Acción de Aceleración

La inercia del animal está descrita como:

$$m(t) \frac{du}{dt} = \rho V(t) \frac{du}{dt}, \quad (2.25)$$

que viene de la segunda ley de Newton, y es igual a la suma de las fuerzas aplicadas a la medusa, que son el empuje, el arrastre y como se dijo antes también existe un término que surge de la interacción de la medusa con el fluido que se llamó reacción de aceleración o fuerza de masa añadida. Este término sólo aparece cuando hay una aceleración, como su nombre lo indica, a diferencia del arrastre que siempre está presente en un cuerpo moviéndose en un fluido viscoso.

Este efecto se debe a que parte de la masa del fluido se agrega a la masa del objeto, creando una masa virtual. Este fenómeno fue observado en 1828, por el matemático alemán Friedrich Bessel. Estudiando un péndulo moviéndose en un fluido, Bessel observó que la frecuencia de oscilación del péndulo no correspondía a la frecuencia de oscilación

fuera del fluido [4]. Para poder explicar esto ideó el concepto de masa hidrodinámica o masa añadida.

Si se observa la energía cinética total **ECT** del sistema fluido más cuerpo [9]:

$$ECT = \frac{Mw^2}{2} + \frac{1}{2} \int_V \rho w^2 dV,$$

donde M y w son la masa y la velocidad del cuerpo moviéndose en el fluido, y V es el volumen del fluido que se está moviendo. Reemplazando la integral de volumen por una energía cinética adicional, definida como el producto de un coeficiente y la energía cinética del fluido con un volumen igual al desplazado por el cuerpo. Por lo tanto, la energía cinética efectiva es

$$ECT = \frac{1}{2}(m + \alpha m)w^2,$$

α es el coeficiente de masa añadida y el producto αm es la masa añadida. Esta masa añadida modifica la inercia de los objetos, y depende de la forma de estos, al depender α también de la forma. Para un cilindro moviéndose «transversalmente», $\alpha = 1,0$, para una esfera, $\alpha = 0,50$, y para un elipsoide moviéndose «de cabeza» con el eje mayor dos veces más grande que el menor, $\alpha = 0,20$. Además depende del cociente entre las densidades del objeto y el fluido. Para un objeto muy denso moviéndose en un fluido de densidad baja, como un avión moviéndose en el aire, el efecto de masa es tan pequeño que resulta despreciable a comparación de otras fuerzas. En el caso de la medusa, su densidad es bastante cercana a la del agua de mar, por lo que es necesario considerar a la masa añadida, más adelante se dará una fórmula para obtener el α de la medusa, el cual es dependiente del tiempo ya que la medusa va deformándose al moverse.

Veamos un caso en el que la masa añadida juega un papel importante. Supongamos un objeto que se mueve con una aceleración \vec{a} a través un fluido, la segunda ley de Newton quedaría como:

$$(m + m_a)\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.26)$$

las F_i son las fuerzas aplicadas al objeto. En el caso de un resorte con una masa que se mueve en una dimensión, la fuerza correspondería a la ley de Hooke, por lo que:

$$(m + \alpha m) \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

con k la constante del resorte. De la ecuación anterior se sigue que:

$$(m + \alpha m) \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

La solución a esto es:

$$x(t) = A_k e^{iw_m t},$$

donde A_k es la amplitud de las oscilaciones y w_m es la frecuencia de oscilación y está dada como:

$$w_m = \sqrt{\frac{k}{m + \alpha m}}.$$

Recordando que la frecuencia w_0 para un oscilador sin masa añadida, está dada como:

$$w_0 = \sqrt[2]{\frac{k}{m}}.$$

Usando lo anterior, una forma de calcular el α de un cuerpo experimentalmente es poniéndolo a oscilar dentro y fuera del fluido, y luego medir su frecuencia de oscilación en cada caso. El coeficiente estará dado como:

$$\alpha = \frac{w_0^2}{w_m^2} - 1. \quad (2.27)$$

Regresando al caso de la medusa, el coeficiente de masa añadida es una función del tiempo. Este corresponde a un elipsoide, [10]:

$$\alpha = \left(\frac{h}{R}\right)^{1,4}, \quad (2.28)$$

donde h y R son los semiejes del elipsoide, como se vio en la sección 2.1. R está dado como:

$$R(t) = R_0 + \sqrt[2]{\frac{\pi}{6hV(t)}} \frac{dV}{dt} t,$$

como R depende del tiempo, α también depende de él.

Con esto, la fuerza para vencer la inercia del animal y de masa añadida queda como:

$$(1 + \alpha)\rho V \frac{du}{dt}, \quad (2.29)$$

donde el volumen V depende del tiempo. Una forma de calcular este volumen es:

$$V(t) = V_0 + \left(\frac{dV}{dt}\right) t,$$

de esto la ecuación de movimiento de la medusa queda como:

$$\frac{\rho}{A_v(t)} \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = 0,5\rho S(t) \left(\frac{\nu}{2h}\right)^{0,7} u(t)^{1,3} + \left(1 + \left(\frac{h}{R(t)}\right)^{1,4}\right) \rho V(t) \frac{du}{dt},$$

esta ecuación se puede simplificar:

$$\frac{1}{A_v(t)} \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = 0,5S(t) \left(\frac{\nu}{2h}\right)^{0,7} u(t)^{1,3} + \left(1 + \left(\frac{h}{R(t)}\right)^{1,4}\right) V(t) \frac{du}{dt}. \quad (2.30)$$

Llamemos $X(t) = \frac{1}{A_v(t)} \left(\frac{dV}{dt}\right)^2$, $Y(t) = 0,5S(t) \left(\frac{\nu}{2h}\right)^{0,7}$ y $Z(t) = \left(1 + \left(\frac{h}{R(t)}\right)^{1,4}\right) V(t)$.

Reescribiendo la ecuación de esta forma:

$$X(t) = Y(t)u^{1,3} + Z(t)\frac{du}{dt}.$$

2.4. Energía del nado de medusas e índice del escape

Un punto importante, en cuanto al movimiento de las medusas, es la energía que la medusa gasta para poder moverse. La medusa utiliza energía para comprimir los músculos de su campana y así eyectar un chorro, que es el que le impulsa; esta energía se ve disipada por fenómenos como el arrastre, que se vio antes. Recordando la definición de trabajo:

$$\text{Trabajo} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{f} \cdot d\vec{l}.$$

En nuestro caso, como la medusa se mueve en una sola dimensión y además las fuerzas aplicadas son paralelas a la dirección de movimiento, el trabajo quedaría como:

$$\text{Trabajo} = \int_{x_i}^{x_f} f dl.$$

Por el teorema del trabajo-energía, este trabajo neto debe ser igual al cambio en la energía cinética de la medusa E [38].

$$E = \int_{x_i}^{x_f} f dl,$$

si multiplicamos y dividimos el integrando por dt obtenemos que:

$$E = \int_{x_i}^{x_f} f \frac{dl}{dt} dt,$$

cambiando la integral espacial a una de tiempo:

$$E = \int_{t_i}^{t_f} f u dt, \quad (2.31)$$

siguiendo esto, al dividir por un intervalo de tiempo Δt , obtendríamos la potencia promedio \hat{P}_k :

$$\hat{P}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} f u dt. \quad (2.32)$$

Cuando la medusa se comprime para impulsarse, existe una potencia de entrada P_i, t que está presente durante la fase de contracción. La potencia promedio usada por la propulsión, por la ecuación 2.32, puede ser calculada como:

$$\hat{P}_{i,t} = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} T u_e dt,$$

donde u_e es la velocidad del chorro, y T el empuje, ambos dependientes del tiempo como se vio antes. De esto la energía usada para el empuje está dada como:

$$E_{i,t} = \int_0^{t_c} T u dt.$$

Durante le fase de relajación la medusa tiene que volver a llenar su cavidad con agua. Para hacer esto también gasta energía (E_f). Parte de esta energía se pierde por la viscosidad y las propiedades de su cuerpo, en especial de la mesoglea. Esta energía perdida depende de

un factor de disipación Δ . Así la energía total de entrada E_t durante la fase de relajación sería:

$$E_t = E_f + \Delta E_t,$$

de donde se puede obtener la energía total de entrada en términos de la energía de llenado.

$$E_t = \frac{E_f}{1 - \Delta},$$

El término $(1 - \Delta)$ es la eficiencia de almacenamiento de energía elástica. Si el factor de disipación Δ es 1 significa que toda la energía es pérdida por acción de la viscosidad y la eficiencia de almacenamiento de energía es cero. Cuando no hay energía pérdida por la viscosidad la eficiencia de almacenamiento es 1, y significa que toda la energía es usada para llenar la cavidad. La potencia de entrada durante la fase de relajación está dada por:

$$P_{i,r} = \frac{E_f}{t_r(1 - \Delta)}.$$

Ahora se va a hacer la suposición de que la energía de llenado puede ser calculada como:

$$E_f = \frac{1}{1 - \Delta} \int_0^{t_r} T u_e dt,$$

donde T es el empuje y u_e la velocidad de llenado, ambos durante la fase de relajación. Sumando las energías de entrada durante la fase de relajación y durante la fase de contracción de obtiene la energía total que gasta la medusa para moverse:

$$E = \frac{1}{1 - \Delta} \int_0^{t_r} T u_e dt + \int_0^{t_c} T u dt.$$

Con la energía se puede calcular el costo de beneficio, o índice de escape ϵ [10] que es la cantidad de energía que gasta para moverse una distancia d , con una aceleración a y una masa m :

$$\epsilon = \frac{E}{mad},$$

este parámetro es un número adimensional que sirve como referencia para ver que tan eficiente es el nado de la medusa. Entre más pequeño sea el índice de escape el nado de la medusa es más eficiente pues recorre una mayor distancia con una mayor aceleración usando poca energía, a comparación de un índice de escape más grande.

2.5. Resultados de modelos computacionales

La ecuación 2.3 se resolvió usando el método Runge-Kutta de cuarto orden. Los parámetros usados fueron:

La altura de la medusa $h = 1cm$, su radio inicial $r(0) = 1$, el área velar A_v es la mitad de la superficie $S(t)$ y el cambio máximo en el volumen de la medusa es de la mitad de su volumen total. La condición inicial para la velocidad de la medusa fue $u(0) = 0$. En la figura 2.7, se observan las gráficas obtenidas para la posición, la velocidad y la aceleración, esto para seis ciclos, en esta figura puede observarse que cada ciclo está compuesta por

una región donde la velocidad y la aceleración aumenta, y otra donde disminuyen. El crecimiento de la velocidad es más o menos constante, pero se ve que conforme avanzan los ciclos de nado, empieza a notarse una especie de asíntota. La aceleración regresa siempre a un valor constante, aunque se observan picos. En cuanto a la posición, podemos ver que el crecimiento es exponencial.

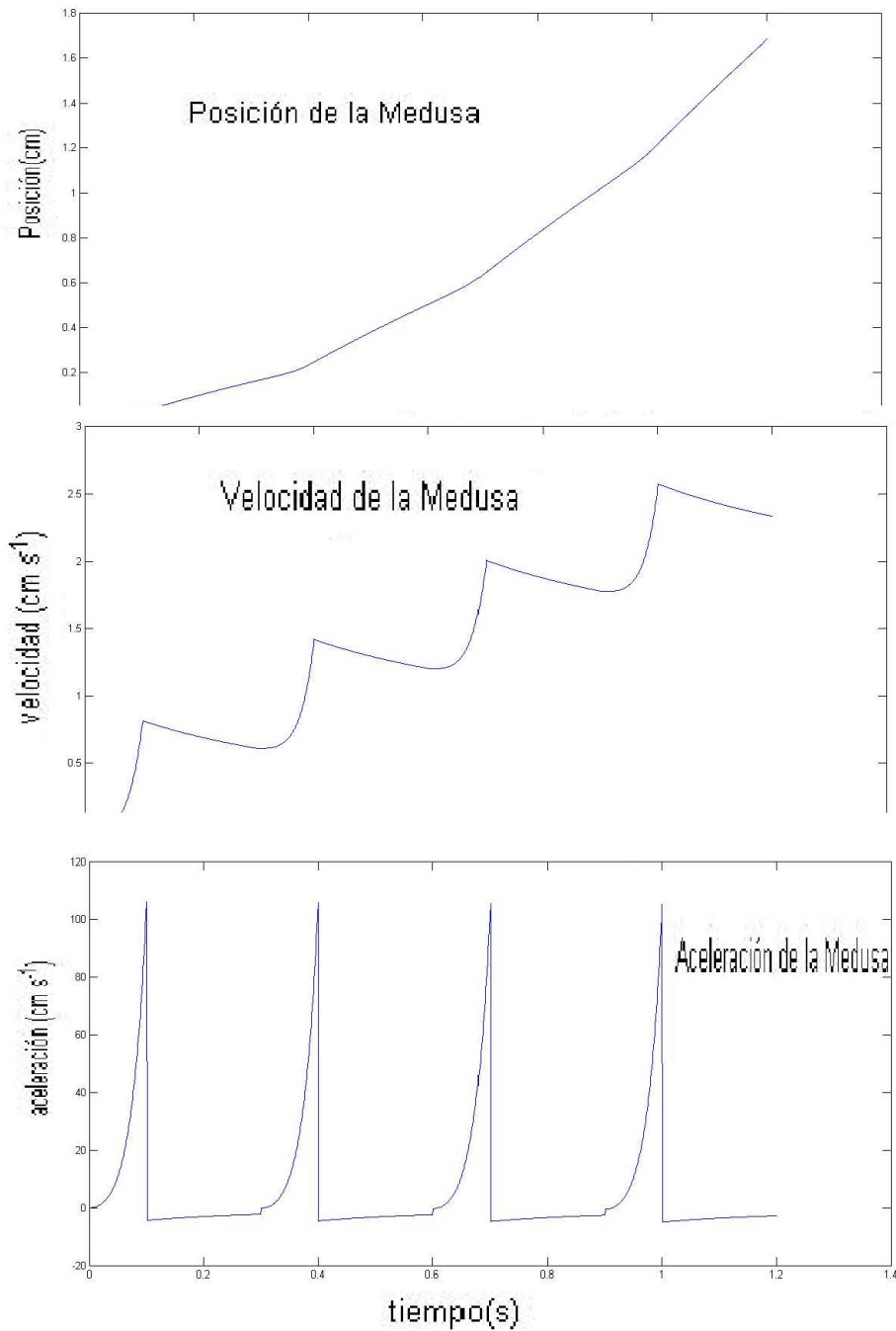


Figura 2.7: Gráfica de la velocidad de la medusa para seis ciclos de nado. Se tomó $t_c = 0,1$ y $t_r = 2t_c$

En una siguiente parte, se variaron los tiempos de las fases de contracción y relajación, y se volvió a resolver la ecuación. A continuación se muestran algunas gráficas de la velocidad de la medusa, para cien ciclos obtenidas con el modelo de Daniel. En cuanto a las gráficas de la posición y la aceleración, continúan con el mismo comportamiento, por lo cual no se consideró importante incluirlas puesto que no aportaban más información.

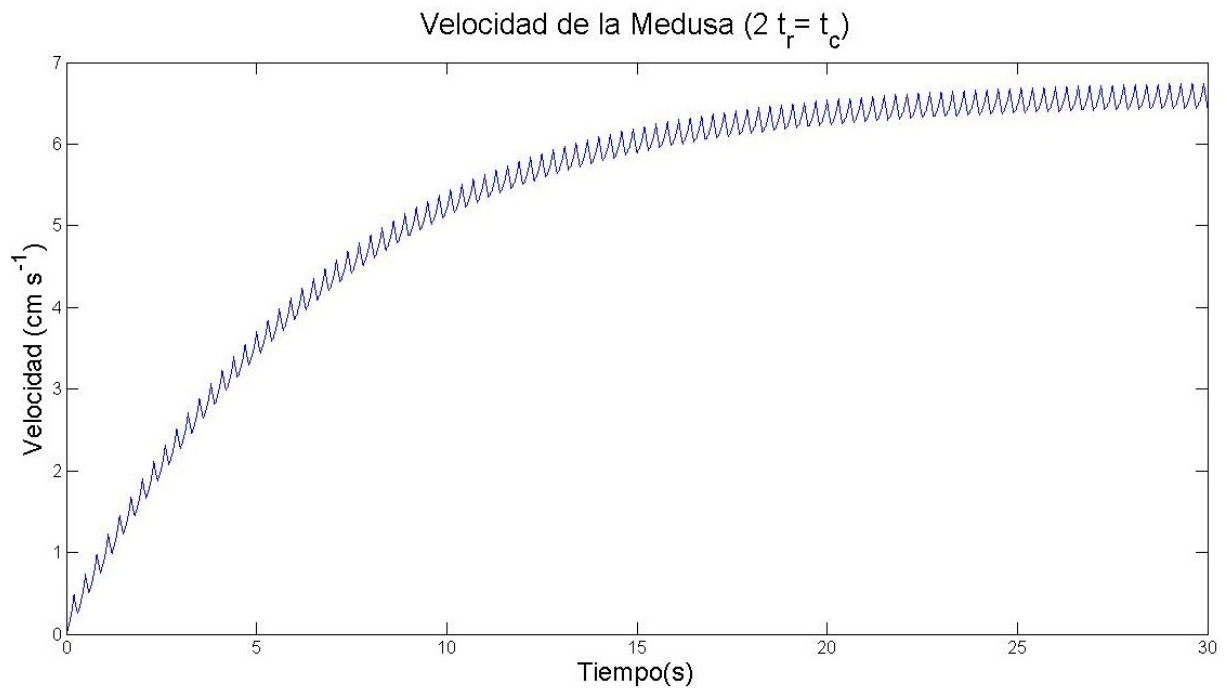


Figura 2.8: Gráfica de la velocidad de la medusa para cien ciclos. Se tomó $t_c = 0,2$ y $2t_r = t_c$

En esta gráfica se han graficado cien ciclos de nado, aunque en la vida real una medusa rara vez llegaría a tal número de ciclo, o no o haría en la misma dirección (lo cual estaría en conflicto con una de las primeras suposiciones que se hicieron), pero se consideró interesante observar el comportamiento en estas condiciones. En la gráfica 2.8 observamos como se nota ahora la asíntota, esto es que la velocidad de la medusa llega a una velocidad terminal.

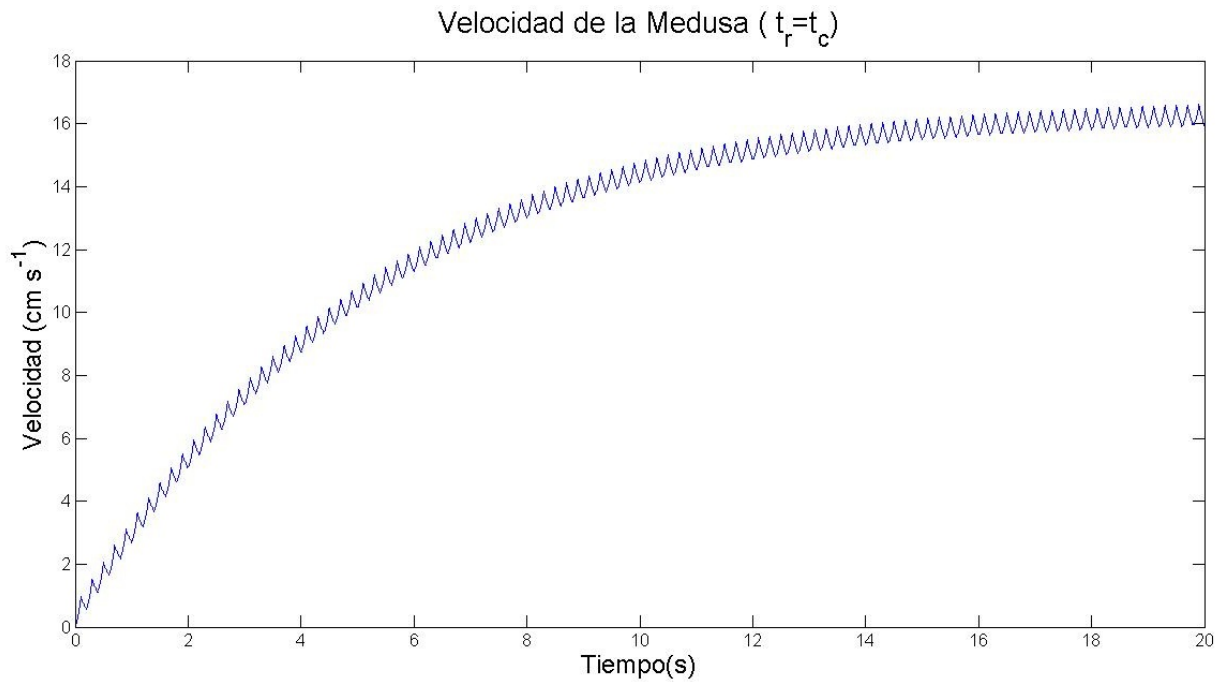


Figura 2.9: Gráfica de la velocidad de la medusa para cien ciclos de nado. Se tomó $t_c = 0,1$ y $t_r = t_c$

En la figura anterior se observa el mismo comportamiento, aunque la velocidad terminal ahora a aumentado.

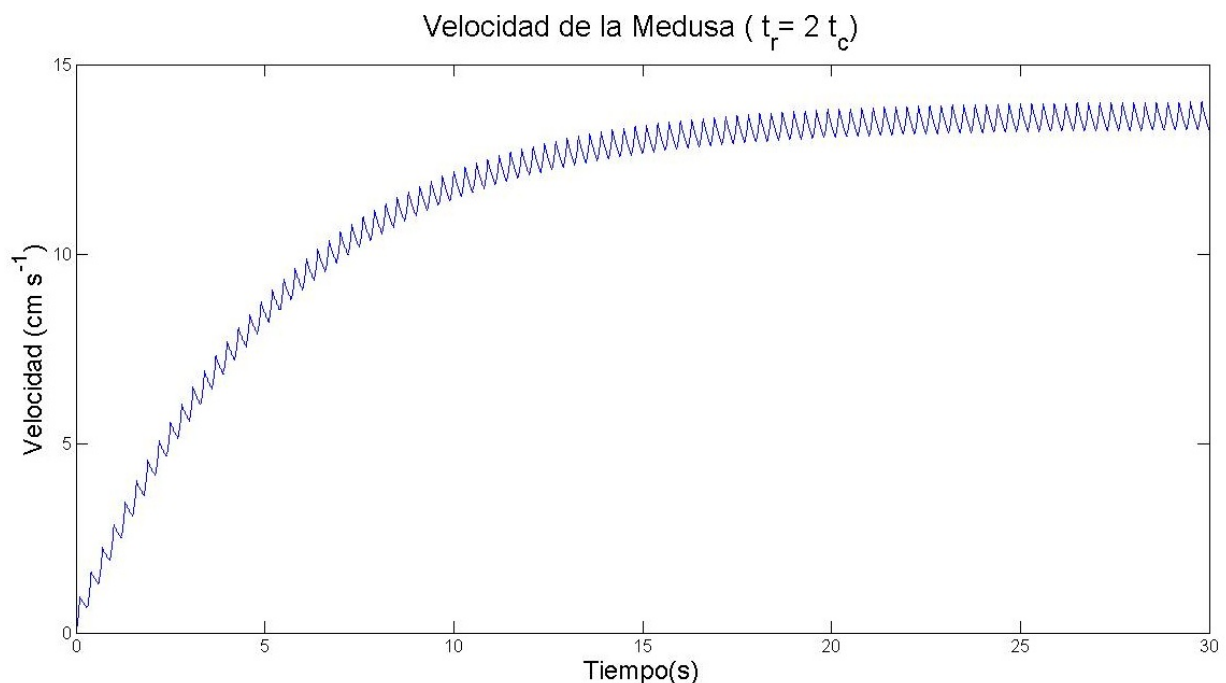


Figura 2.10: Gráfica de la velocidad de la medusa para cien ciclos de nado. Se tomó $t_c = 0,1$ y $t_r = 2t_c$

Se observa el mismo comportamiento de las gráficas anteriores, pero esta vez la veloci-

dad terminal ha disminuido, aunque no tanto como el primer de los casos.

De las gráficas anteriores pueden verse varias cosas. La primera de ellas es que la medusa llega a una velocidad máxima terminal. Esto debido a que el arrastre depende de una potencia de la velocidad, y llega un punto en que se equilibra con el empuje haciendo que la suma de las dos fuerzas sea cero, y con ello la aceleración y la fuerza de masa añadida. Por lo que para ciclos mayores las únicas dos fuerzas que actúan en promedio sobre la medusa son el empuje y el arrastre.

Otra cosa que puede verse en las gráficas de la figura 2.8 es que cuando la fase de contracción es mayor, la velocidad máxima terminal es menor que cuando ambas iguales o cuando la fase de contracción es menor a la de relajación. Esto se podría explicar pensando en que entre más tiempo tarda la medusa en expulsar el chorro, menos velocidad tendrá este chorro, y menos empuje le dará a la medusa.

También se observa una máxima velocidad terminal cuando ambas fases son iguales, figura 2.9. Y cuando la fase de relajación crece la velocidad terminal disminuye, ver figura 2.10. Esto es porque entre más grande el tiempo de relajación, menos tiempo actúa el empuje, lo que hace que las aceleraciones sean menores. En la figura 2.11 se grafican las velocidades terminales promedio para diferentes cocientes de $\frac{t_r}{t_c}$. Se ve que existe un máximo cuando tal cociente es uno, es decir cuando la fase de relajación dura lo mismo que la de contracción, como se dijo antes.

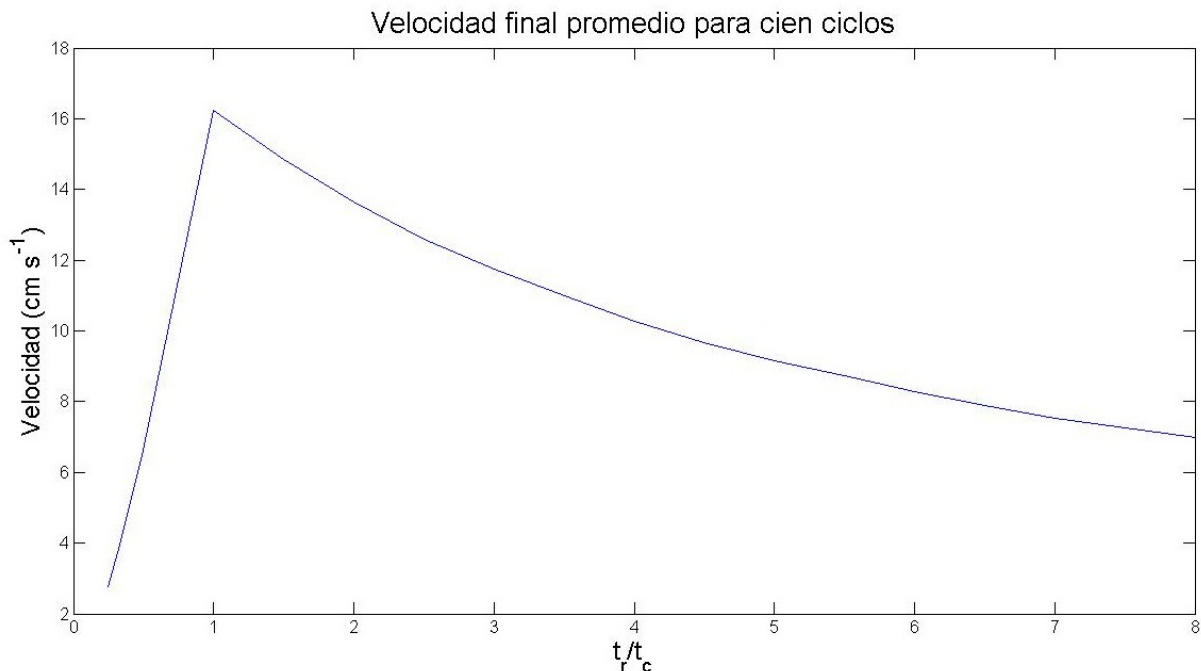


Figura 2.11: Velocidades terminales promedio a las que llega la medusa en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.

Por lo que pareciera que es más conveniente para la medusa hacer que ambas fases fueran iguales para así tener una velocidad mayor, sin embargo Gladfelter (1972) [14]

apunta que medusas con una morfología similar a la propuesta para el modelo, tienen una fase de relajación que corresponde al doble de la de contracción. Para explicar esto debemos analizar la energía que gasta la medusa. Debido a que sólo queremos comparar la energía de las medusas, para este caso supondremos que no hay pérdidas de la energía, $\Delta = 0$, aclarando que no se está diciendo que esa sea la verdadera energía que gasta la medusa. En la figura 2.12 se grafica la energía que gasta la medusa en cien ciclos contra el cociente entre la duración de las fases. Puede verse que existe un máximo de gasto de energía cuando ambas fases tienen la misma duración. También se ve que cuando la fase de relación dura una fracción de la de contracción la energía disminuye rápidamente, y en el caso contrario (cuando t_c es fracción de t_r) la velocidad parece llegar a una velocidad terminal mínima asintóticamente.

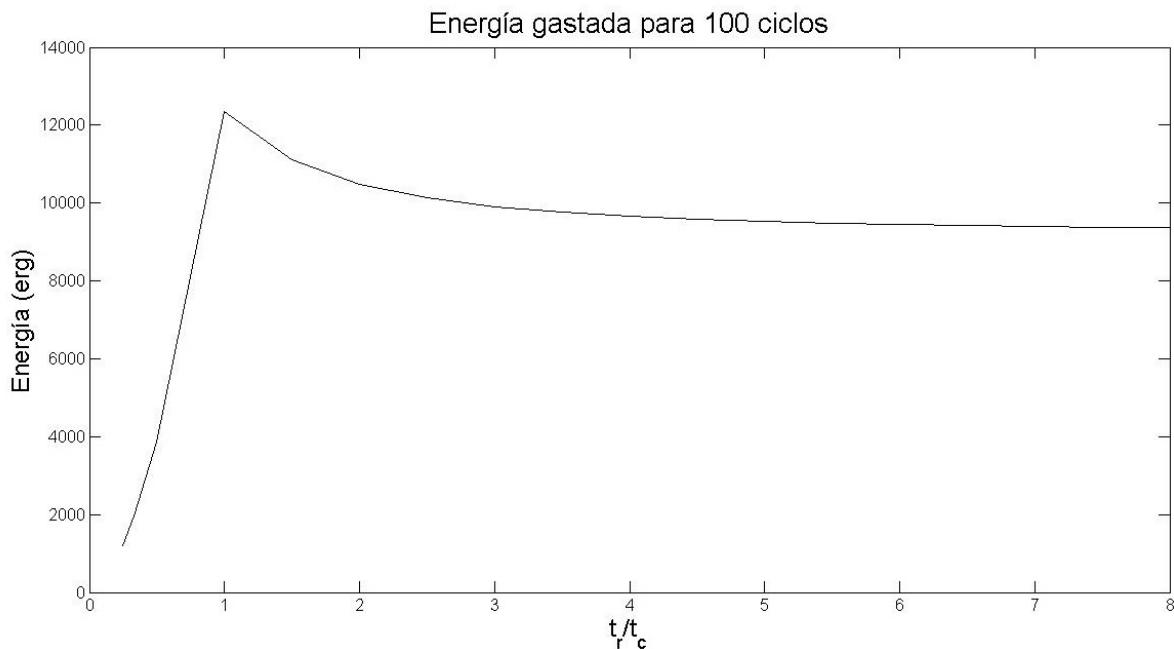


Figura 2.12: La energía que gasta la medusa en cien ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.

Sigamos con el índice de escape. En la figura 2.13 se grafica el índice de escape promedio contra el cociente entre las fases de contracción y relajación. Este índice de escape se calculó usando una aceleración y masa promedio en cien ciclos, así como la distancia recorrida en tales ciclos, y la energía calculada anteriormente. Puede verse que el índice de escape crece cuando el tiempo de relajación es una fracción de la de contracción, y con eso se puede dar por sentado que a la medusa no le conviene tener una fase de contracción demasiado larga. Tampoco le es conveniente a la medusa hacer que la fase de relajación crezca respecto a la de contracción, pues el índice de escape también crece.

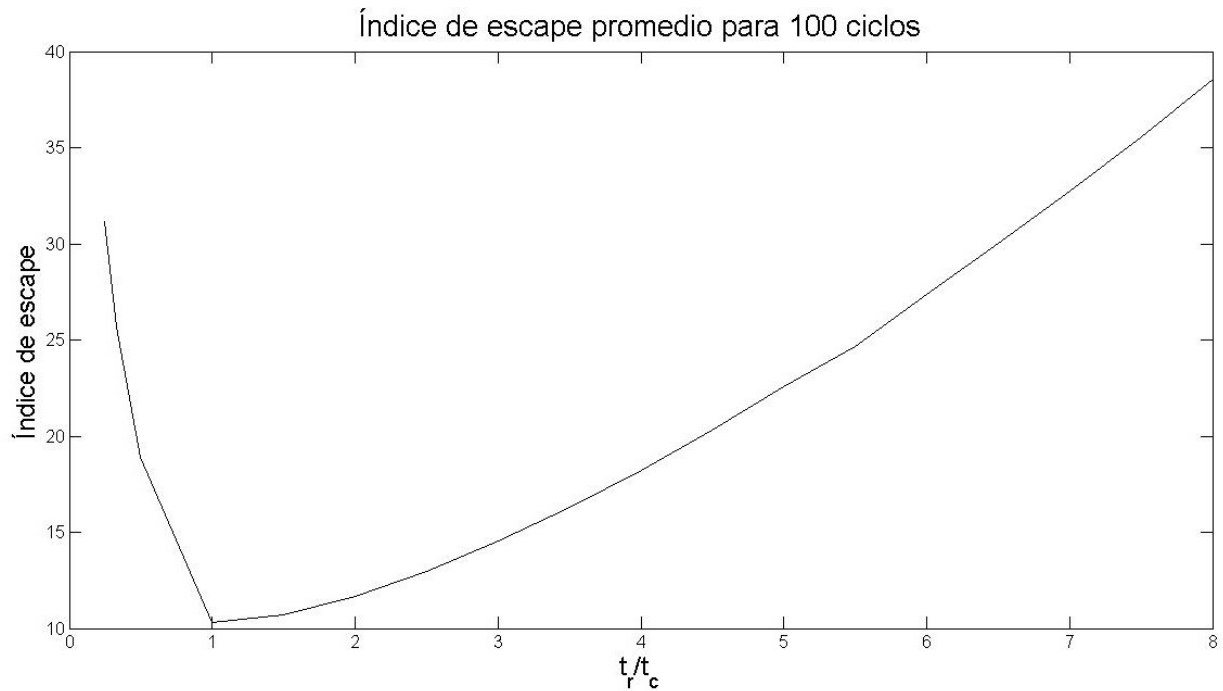


Figura 2.13: Índice de escape promedio en cien ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.

Aquí se ve un máximo para el valor de cociente uno, por lo que obtenemos lo mismo con las velocidades sin embargo, al graficar los índices de escape para otra cantidad de ciclos, como en la figura 2.14, vemos que el máximo se movió entre uno y dos. Graficando lo mismo para distinta cantidad de ciclos (figura 2.15) puede verse que el mínimo para el índice de escape depende del número de ciclos que tenga el nado de la medusa. Esto debido a que aunque con un cociente $\frac{t_r}{t_c}$ gaste más energía, se vio antes que también con el mismo cociente de fases, se logra una velocidad mayor, por lo cual la medusa avanzará más, disminuyendo el índice de escape. Si graficamos ahora la energía, figura 2.16, para una cantidad distinta de ciclos, vemos que el máximo siempre se mantiene en uno.

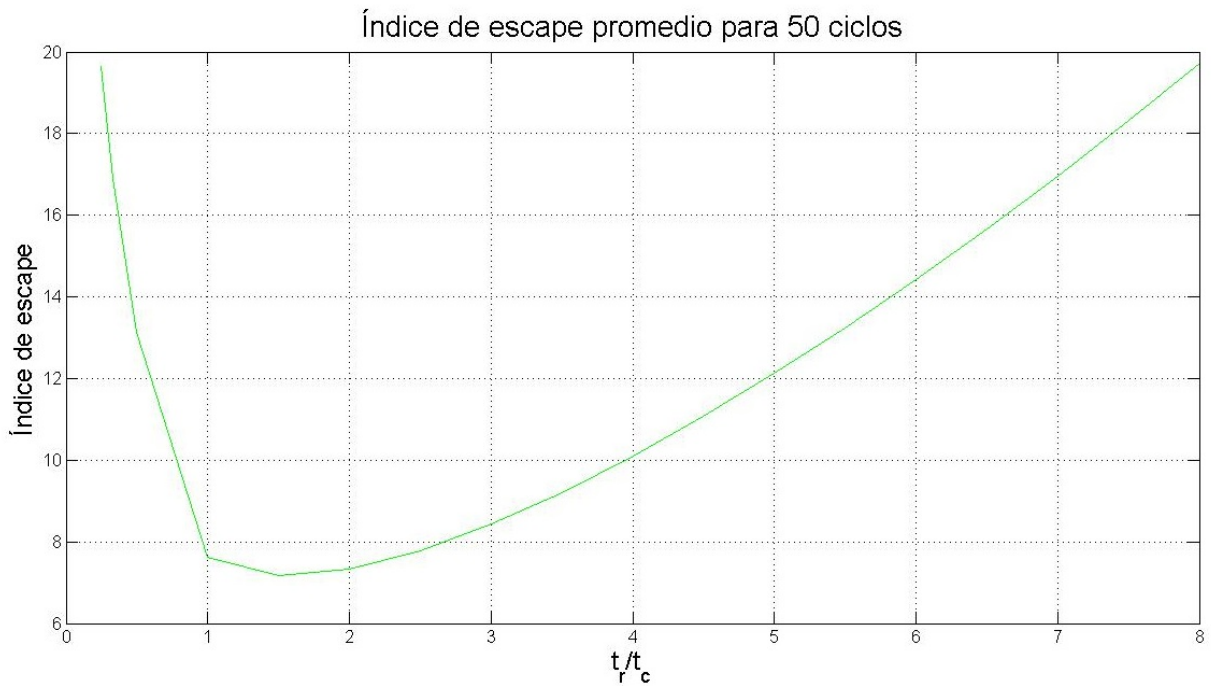


Figura 2.14: Índice de escape promedio en cincuenta ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.

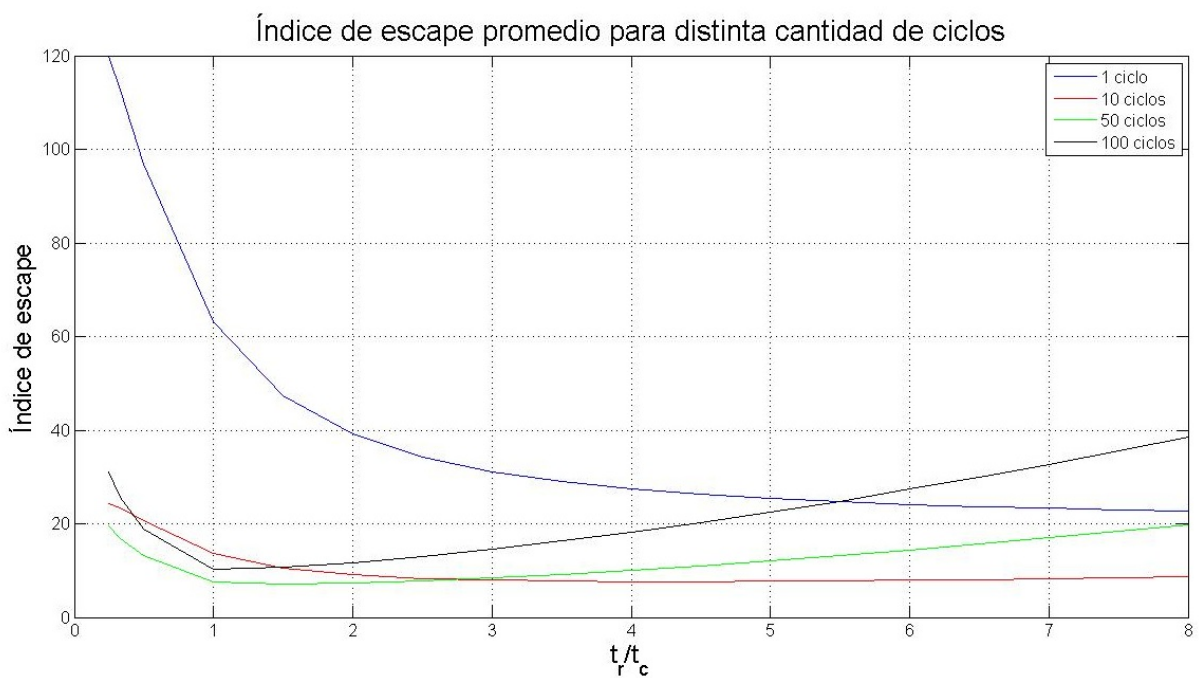


Figura 2.15: Índice de escape promedio para distinta cantidad de ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.

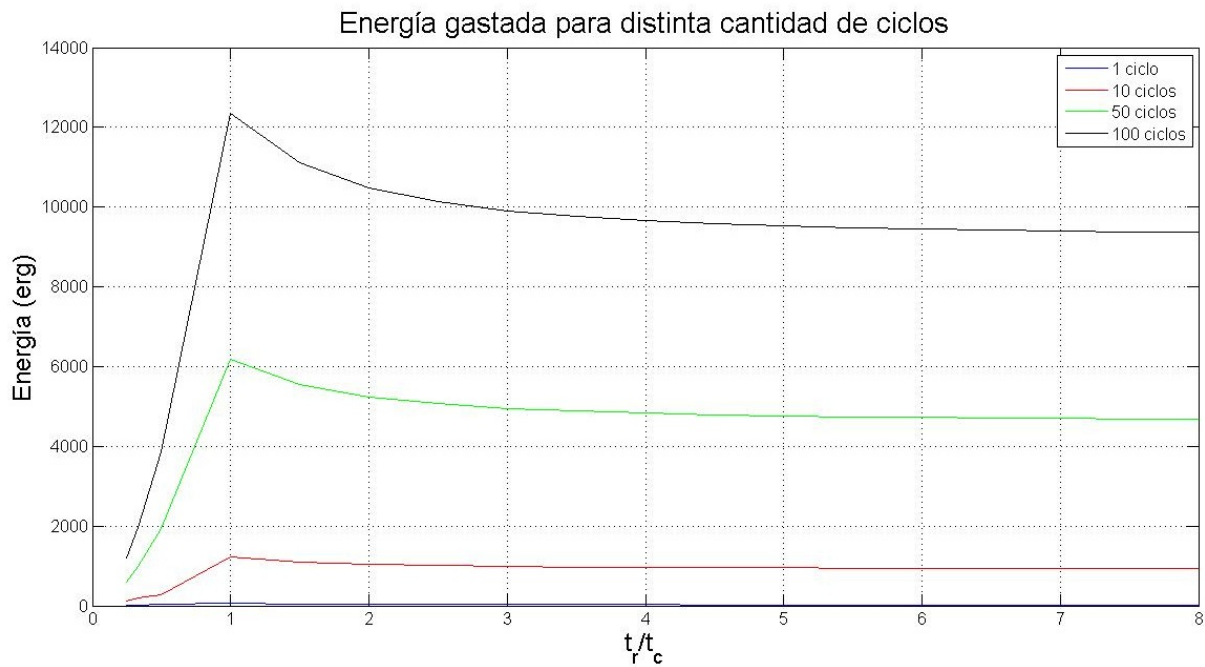


Figura 2.16: Índice de escape promedio en cien ciclos en función del cociente entre las fases de contracción y relajación.

En la naturaleza la medusa no sabe cuantos ciclos durará su nado, para poder decidir el cociente entre la duración de sus fases para así optimizar su índice de escape; sin embargo, es fácil pensar que evitará los valores menores a uno, ya que estos maximizan sus índices de escape y le dan una velocidad terminal menor. Algo parecido pasa para valores del cociente $\frac{t_r}{t_c}$ mucho mayores a uno. Y dado que en el caso de que ambas fases son iguales existe un máximo, vendría el problema de gastar más energía que en otros casos, por lo que para la medusa no sería conveniente igualar ambas fases, si quiere ahorrar energía.

Esto podría explicar lo que observó Gladfelter, ya que al hacer la fase de contracción la mitad de la de relajación, la medusa está más cerca del óptimo de su índice de escape, además de que obtiene una velocidad mayor que en la mayoría de otros casos.

2.6. Modelo de empuje por vórtice anular

En la parte anterior se dio un modelo para describir el movimiento de las medusas. En ese modelo se propuso que el empuje era uno equivalente al empuje por un chorro estacionario. Esto, sin embargo, no es del todo correcto. Como se dijo antes, se ha visto que al expulsar el chorro, se forma un vórtice anular.

Es necesario modificar el modelo que se tiene del empuje para considerar este vórtice. Una manera de hacer esto, es pensar en que este vórtice tiene un momento I , si pensamos que antes de expulsar ese vórtice el sistema medusa-vórtice tiene un momento cero, al ocurrir el chorro por conservación del momento la medusa tendría el mismo momento I

con signo contrario. Este impulso I está dado como:

$$I = \rho V_v U,$$

donde U es la velocidad del vórtice y V_v es el volumen del agua eyectada por la medusa vórtice, incluida el volumen del anillo. Este volumen se puede suponer como el que pierde la medusa en la fase de contracción. Al derivar está ecuación con respecto al tiempo y gracias a la tercera ley de Newton obtenemos el empuje T_V :

$$T_V = \frac{dI}{dt} = \rho \frac{d}{dt} (V_v U).$$

Dabiri(2005) [8] propone que se debe tener en cuenta una aportación de la masa añadida al empuje. Antes se ha dicho que el fenómeno de masa añadida ocurre con objetos sólidos, donde su densidad es cercana a la del fluido en el que se están moviendo; sin embargo Dabiri propone que este fenómeno ocurre también en cuerpos de fluido acelerando. La dificultad para observar esta masa añadida, nos dice él, viene de no poder establecer con claridad la frontera del cuerpo. También propone que el coeficiente de masa añadida es equivalente al de un objeto sólido con la misma forma que del cuerpo fluido que se está moviendo, mediante el uso de una herramienta matemática que está más allá de este trabajo, Dabiri da una expresión para encontrar este coeficiente de masa añadida. Esta propuesta es validada por él experimentalmente, en la que observa que debido a la forma alargada de la estela de vórtices se produce una diferencia entre el empuje predicho con el empuje medido por el fenómeno de masa añadida. Dabiri establece una fórmula para una estela en tres dimensiones, por lo que el coeficiente de masa añadida pasa a ser un tensor de 3 por 3. En nuestro caso supondremos que sólo existe movimiento en una dirección por lo que el tensor de tres por tres, pasa a ser de uno por uno, o en otras palabras pasa a ser un escalar, y así recuperamos el coeficiente de masa añadida α_V . Por lo que [7]:

$$T_V = \frac{dI}{dt} = (1 + \alpha_V) \rho \frac{d}{dt} (V_v U).$$

Como se dijo antes, se supondrá que el volumen de agua V_v es el mismo que el que eyecta la medusa, por lo que:

$$V_v = -\frac{dV}{dt} t.$$

También se supondrá que al salir, esta masa de agua forma un cilindro que se mueve transversalmente en dirección contraria a la dirección en que se mueve la medusa (ver figura 2.17), de esta manera $\alpha_v = 1$. Y por esta forma se trabajará en coordenadas cilíndricas (r, θ, x) .

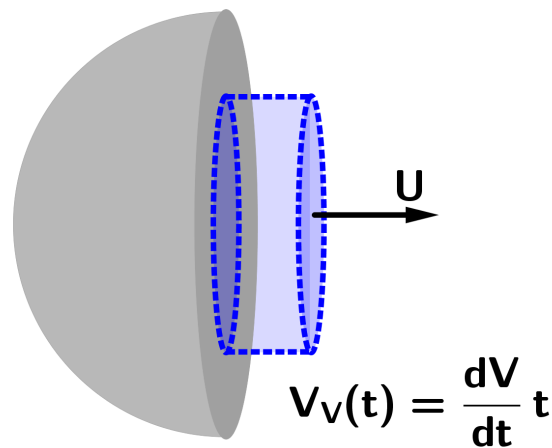


Figura 2.17: Volumen de agua saliendo en forma del cilindro de la medusa.

Con esas suposiciones hechas, sólo falta una manera de encontrar la velocidad del vórtice anular, para ello se usará la teoría del potencial complejo. Para esto, se tiene que hacer la aproximación de que el flujo es bidimensional. Como se dijo antes, para los vórtices anulares existe simetría axial, podemos pensar que no hay dependencia de la coordenada angular, así que sólo tenemos la coordenada radial r y la coordenada horizontal x por lo que la aproximación de que es un flujo bidimensional no está tan alejada de la realidad. Para conservar nuestra notación de coordenadas cilíndricas diremos que $z = x + ir$. También debemos suponer que los vórtices son sólo puntos en el plano (es decir que $B = 0$). El potencial complejo se define como [5]:

$$F(z) = \phi + i\psi;$$

donde ϕ es el flujo potencial y ψ la función de corriente. Este potencial complejo cumple que:

$$\frac{dF(z)}{dz} = U_x + iU_r.$$

Este potencial complejo cumple también el principio de superposición, y aprovecharemos esto para encontrar una fórmula para la velocidad del vórtice anular de diámetro D , suponiendo que es la suma de dos vórtices libres. Esta aproximación no es tan extraña, viendo que existe una cierta semejanza en ambos fenómenos, como lo muestran las figuras 2.18 y 2.19.

Campo de velocidades para vórtice anular (se grafica un corte transversal)

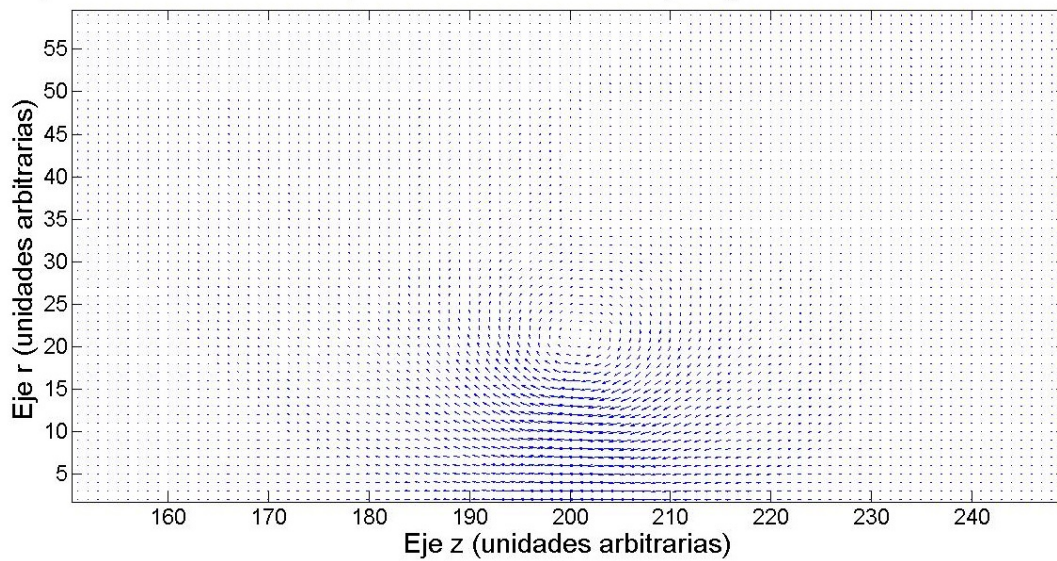


Figura 2.18: Campo de velocidades para un vórtice anular. Datos obtenidos de modelos computacionales.

Campo de velocidades para un dipolo de vórtices (se grafica un solo vórtice)

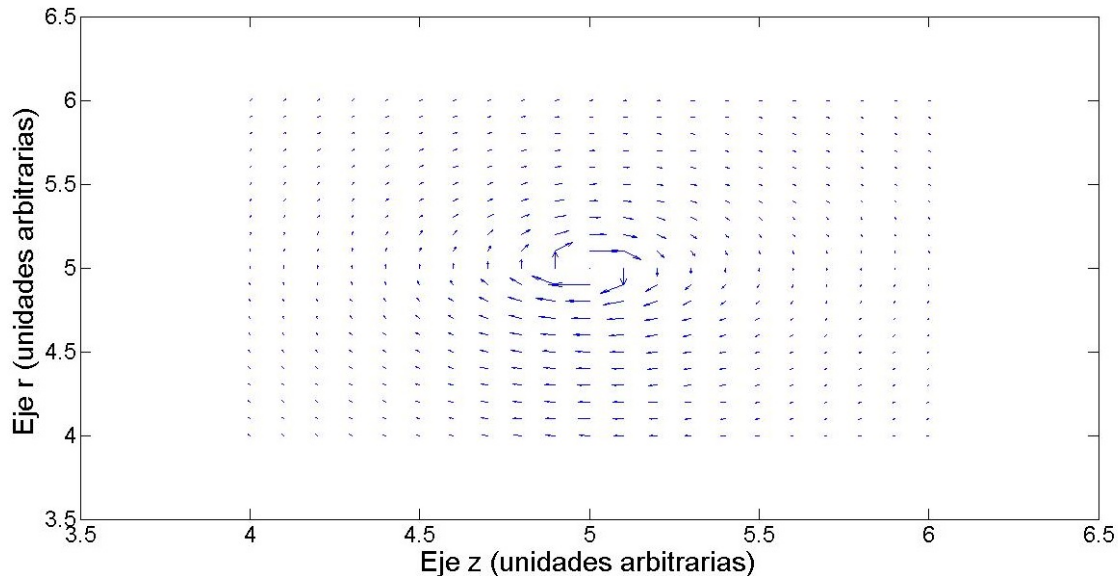


Figura 2.19: Campo de velocidades para un dipolo de vórtices. Datos obtenidos de modelos computacionales.

Este método es algo usual para obtener la velocidad de flujos complejos, en este caso se hace la aproximación de que el anillo de vorticidad se comporta como un dipolo de vórtices, en donde la circulación de cada vórtice tiene la misma magnitud, pero sentido contrario. Otro caso interesante es el del dipolo de vórtices con la misma circulación, en la cual se obtendrá que ambos vórtices giran con centro en el punto en medio de los dos.

Pensemos en dos vórtices libres que giran en sentido contrario, y están puestos en el eje imaginario a $D/2$ y $-D/2$ del origen respectivamente (ver figura 2.20). En este caso el potencial complejo es:

$$F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z + iD/2) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - iD/2);$$

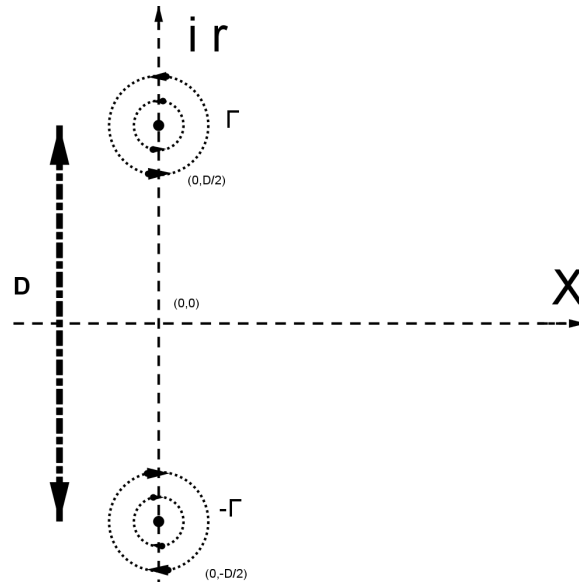


Figura 2.20: Esquema de dos vórtices libre girando en direcciones contrarias. Las líneas puntuadas son ejemplos de líneas de corriente.

donde Γ es la circulación y el signo menos indica que giran en direcciones contrarias. También conviene aclarar que el logaritmo en la ecuación se refiere al logaritmo natural. Con esto al derivar la función potencial se obtiene que:

$$\frac{dF(z)}{dz} = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - iD/2} \right) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z + iD/2} \right),$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= -i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{x + i(r - D/2)} \right) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{x + i(r + D/2)} \right) \\ &= -i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{x - i(r - D/2)}{x^2 + (r - D/2)^2} \right) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{x - i(r + D/2)}{x^2 + (r + D/2)^2} \right) \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r + D/2}{x^2 + (r + D/2)^2} - \frac{r - D/2}{x^2 + (r - D/2)^2} \right) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + (r + D/2)^2} - \frac{x}{x^2 + (r - D/2)^2} \right). \end{aligned}$$

Si nos situamos a la mitad de cada uno de los vórtices, la velocidad en ese punto es:

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi D}.$$

Esto significa que los dos vórtices se están moviendo en línea recta con velocidad constante. Se puede hacer lo mismo para un vórtice sólo y se verá que en ese caso, el vórtice no tiene

ninguna velocidad, esto quiere decir que el vórtice tienen una velocidad autoinducida que vale cero. Lo que sucede en el caso de dos vórtices es que cada uno induce una velocidad al otro, por lo que en suma hacen que se mueva. Con esto podemos escribir la fórmula del empuje:

$$-T_V = 2\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma}{2\pi D} \frac{dV}{dt} t \right) = \rho \frac{\Gamma}{\pi D} \frac{dV}{dt} + \rho \frac{1}{2\pi} \frac{dV}{dt} \frac{d\Gamma}{dt} t.$$

El signo menos viene debido a que el empuje que estamos buscando es el de la medusa que va en dirección contraria a la que va el empuje del vórtice. El problema aquí es encontrar una manera de calcular Γ y su derivada, para ello usaremos el modelo conocido como «slug-flow» [35]. Este modelo se propuso para estimar la velocidad de un vórtice generado por un pistón, aproximando que la velocidad del chorro es la misma que la del pistón. En nuestro caso, donde el chorro no es producto de un pistón, diremos de forma más general que la velocidad sólo tiene componente en la dirección z , y que esta velocidad es la velocidad del chorro que eyecta la medusa $u_x = u_e$. Suponemos también que u_e no depende de θ

$$\vec{u} = (0, 0, u_e).$$

Por lo que la vorticidad en este caso sería:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \nabla \times \vec{u} = \\ & \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_x \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & u_e \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial u_e}{\partial \theta} \hat{e}_r - \frac{\partial u_e}{\partial r} \hat{e}_\theta = \left(0, -\frac{\partial u_e}{\partial r}, 0 \right). \end{aligned}$$

Y como se vio antes la circulación puede escribirse en términos de la vorticidad:

$$\Gamma = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}.$$

Debido a que la vorticidad está direccionada en \hat{e}_θ , hay que tener cuidado a la hora de escoger la superficie A de integración. Sí se escoge, por ejemplo, una superficie orientada en dirección \hat{e}_x la circulación sería cero. Lo mismo pasa con una superficie orientada en \hat{e}_r . Por eso escogamos $d\vec{A}$ del siguiente modo:

$$d\vec{A} = dr dx \hat{e}_\theta = (0, dr dx, 0),$$

Con esto el integrando puede escribirse como:

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial \theta}, -\frac{\partial u_e}{\partial r}, 0 \right) \cdot (0, dr dx, 0) = -\frac{\partial u_e}{\partial r} dr dx,$$

la circulación es entonces:

$$\Gamma = \int_0^r \int_0^x -\frac{\partial u_e}{\partial r} dr dx.$$

La integral respecto a la coordenada x puede ser resuelta con un cambio de variable:

$$y = u_e \quad dy = \frac{\partial u_e}{\partial r} dr,$$

con esto la circulación queda como:

$$\Gamma = - \int_0^r \int_{y=u_e(0)=0}^{y=u_e(x)} dy dx;$$

resolviendo:

$$\Gamma = - \int_0^r u_e dx,$$

derivando la ecuación con respecto al tiempo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_0^r u_e dx = - \int_0^r \frac{du_e}{dt} dx,$$

cambiando de una derivada en x por una en t

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int_{t(0)=0}^{t(r)=t} \frac{du_e}{dt} \frac{dx}{dt} dt,$$

el término $\frac{dx}{dt}$ corresponde a u_e por lo que:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int_{t(0)=0}^{t(r)=t} \frac{du_e}{dt} u_e dt,$$

integrando:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \frac{1}{2} u_e^2,$$

entonces la circulación, a la que llamaremos Γ_{slug} para recordar que viene de la aproximación «slug-flow», está dada como:

$$\Gamma_{slug} = - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} u_e(t)^2 dt,$$

En nuestro caso la expulsión del chorro corresponde a la fase de contracción de la medusa, por lo que los límites de integración van de $t = 0$ a $t = t_c$. De esta manera el modelo del empuje T_V por vórtice anular quedaría como:

$$T_V = \frac{1}{2\pi D} \frac{dV}{dt} \int_0^{t_c} \frac{du_e}{dt} u_e dt + \frac{1}{2\pi D} \frac{dV}{dt} t \int_0^{t_c} u_e dt.$$

Hay que notar que el empuje por vórtice anular hace que la velocidad terminal de la medusa sea menor al que le daría el empuje por un chorro estacionario como puede verse en la figura 2.21. Una de las posibles causas de esta baja en la eficiencia puede ser que parte de la energía del chorro se va en crear el vórtice como tal, y ya no se usa en la propulsión de la medusa.

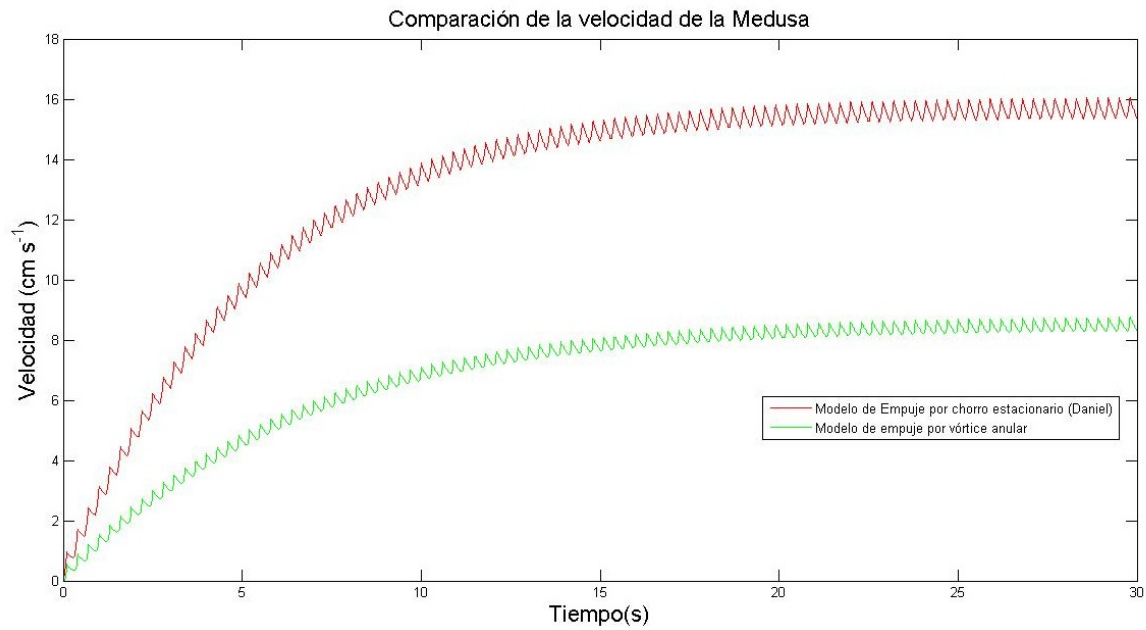


Figura 2.21: velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983) y el modelo de empuje por vórtice anular. Para hacer las gráficas se usaron los datos de Daniel de una medusa estándar.

Esto hace parecer que la creación del vórtice es perjudicial en el movimiento de la medusa, pues no le permite alcanzar una velocidad terminal mayor; sin embargo, no estamos tomando en cuenta que el vórtice que le da la propulsión a la medusa está interactuando con el vórtice que la medusa expulso en el ciclo anterior. Esta interacción hace que la velocidad del vórtice aumente, y por lo tanto el momento que le da a la medusa, y con ello el empuje.

2.7. Modelo de Seikman y de interacción con vórtice anterior

Seikman(1962) [34] propone un empuje por vórtice anular en el cual el vórtice expulsado interactúa con una calle de infinitos vórtices *reffig:callevort*. Esta mejora depende del diámetro del vórtice anular y de la distancia de los vórtices. Para ello Seikamn propone que el potencial complejo es similar al de la calle de von Karman [34] visto antes:

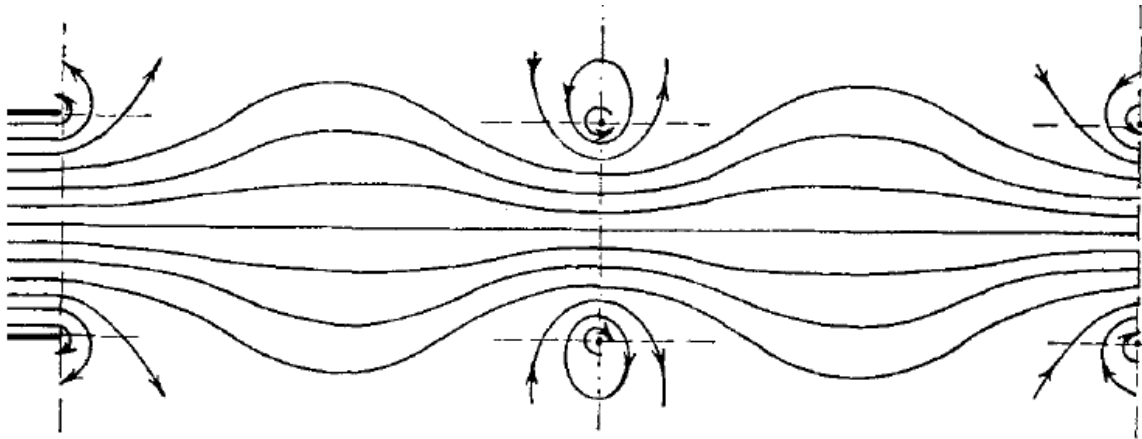


Figura 2.22: Esquema que muestra el modelo de Seikman. Tomado de [34]

$$F(z) = -U_s z + \frac{\Gamma}{2i\pi} \log \left(\frac{\sin \pi(z - z_0)/C}{\pi(z - z_0)/C} \right)$$

Donde U_s es la velocidad dada por el vórtice sólo, $z_0 = C + iD/2$ y C es la distancia entre los vórtices. Con esto, Seikman encuentra el campo de velocidades y ocupando el teorema de momento para un chorro no estacionario encuentra una fórmula para el empuje T_S :

$$T_S = \frac{\rho\Gamma D^2}{2t_c} + \frac{\rho\Gamma^2 D^2}{2C^2} \coth \pi \frac{D}{C} - \frac{1}{2\pi} \frac{\rho\Gamma^2 D}{2C}$$

El modelo de Seikman tiene la desventaja de que la hipótesis de calle de infinitos vórtices en muchos casos no se cumple ya que la medusa necesitaría haber pasado muchos ciclos para tener una estela de vórtices que puedan considerarse «infinitos», además de que por acciones de la viscosidad del fluido, estos vórtices acabarían desapareciendo si el tiempo entre formación de vórtices es demasiado largo.

Por ello se propone un modelo más simple que el de Seikman, en el que el vórtice expulsado sólo interactúa con el vórtice anterior, pensando en que los vórtices anteriores se destruyen antes del ciclo. Para poder modelar esta mejora por interacción con el vórtice anterior también se usará el potencial complejo como Seikman, aunque no se usará el teorema de momento, si no que se usará el mismo procedimiento que se usó para encontrar el empuje de un vórtice solo.

Para ello y siguiendo con la aproximación de que el vórtice anular se comporta como un dipolo de vórtices, al potencial que ya teníamos les sumamos el potencial de otros vórtices libres que están a una distancia C de los otros dos vórtices (ver figura 2.23)

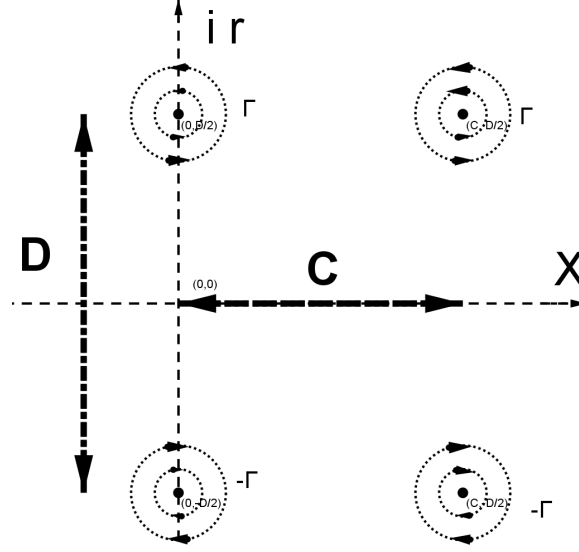


Figura 2.23: Esquema de cuatro vórtices libres, dos girando en una dirección, y los otros dos en dirección contraria.

El potencial complejo sería entonces:

$$F(z) = i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z + iD/2) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z + iD/2) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - C + iD/2) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - C - iD/2),$$

derivando:

$$\frac{dF(z)}{dz} = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - iD/2} \right) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z + iD/2} \right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - C + iD/2} \right) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - C - iD/2} \right).$$

Los primeros términos darán la velocidad U que ya conocíamos. Ahora sólo nos falta encontrar la velocidad U_m . Desarrollando la parte real sería:

$$U_m = U + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(-\frac{r - D/2}{(x - c)^2 + (r - D/2)^2} + \frac{r + D/2}{(x - C)^2 + (r + D/2)^2} \right).$$

Situándonos nuevamente en los vórtices originales (que corresponderían al vórtice anular que está expulsando la medusa) veremos que:

$$U_m = \frac{\Gamma}{2\pi D} + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{2D/2}{C^2 + D^2} \right),$$

$$U_m = \frac{\Gamma}{2\pi D} \left(1 + \frac{1}{\frac{C^2}{D^2} + 1} \right),$$

y el empuje sería:

$$T_{VV} = \frac{1}{2\pi D} \frac{dV}{dt} \left(1 + \frac{1}{\frac{C^2}{D^2} + 1} \right) \int_0^{t_c} \frac{du_e}{dt} u_e dt + \left(1 + \frac{1}{\frac{C^2}{D^2} + 1} \right) \frac{1}{2\pi D} \frac{dV}{dt} \int_0^{t_c} u_e dt.$$

Esta mejora en el empuje depende del diámetro D del vórtice y de la distancia C entre los dos vórtices, tal como el modelo de Seikman. Cuando esa distancia tiende a cero, el

empuje, según la fórmula, sería el doble y este sería el caso en que dos vórtices se expulsan al mismo tiempo. Y si la distancia tiende a infinito la mejora tiende a cero y regresamos al caso del vórtice solo. También la mejora será mayor en cuanto más grande se el radio del vórtice. Por esto, se usa el cociente $\frac{Distancia}{Diámetro}$, pues así se condensa ambos parámetros que dan información importante. A continuación se muestran distintas velocidades terminales obtenidas de este modelo y el de Seikman, con distintos cocientes $\frac{C}{D}$. Para realizar las gráficas se tomó $t_r = 2t_c$, $t_c = 0,1$, y los parámetros que se usaron previamente.

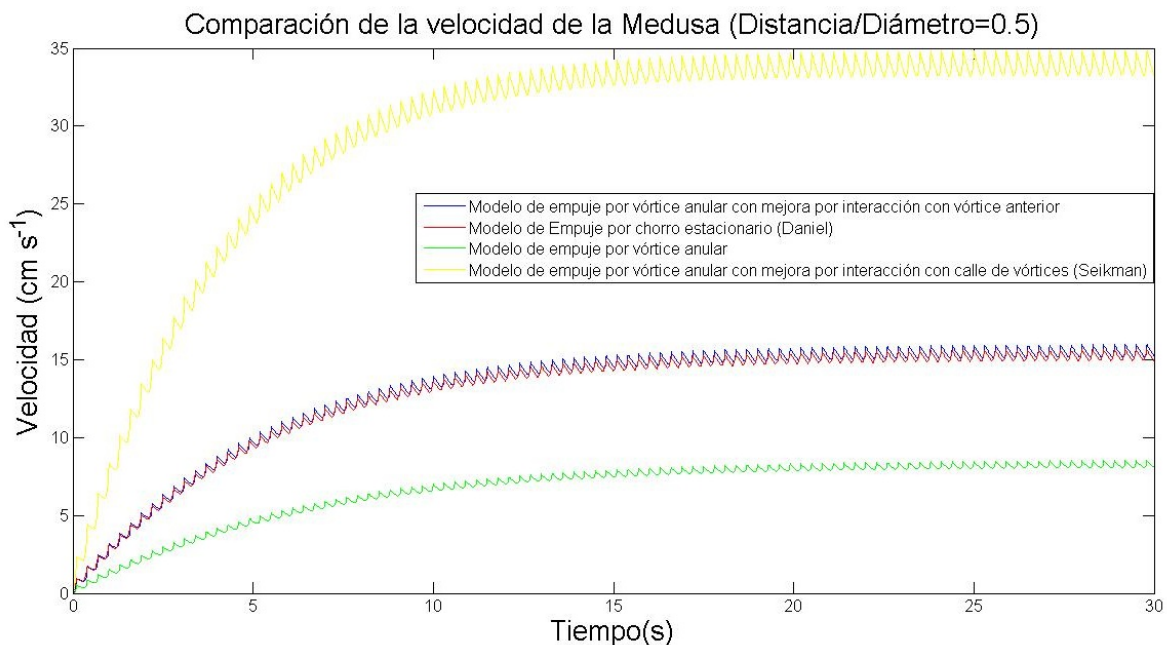


Figura 2.24: Velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983), el modelo de empuje por vórtice anular, el modelo de Seikman (1962) y el modelo de vórtice anular con mejora por interacción con vórtice anterior ($\frac{C}{D} = 0,5$)

En la figura anterior puede observarse como el modelo de Seikman da una velocidad terminal mucho mayor que la velocidad terminal que los otros modelos. El modelo de interacción con vórtice anterior da una mejora al de Daniel también, aunque muy poco.

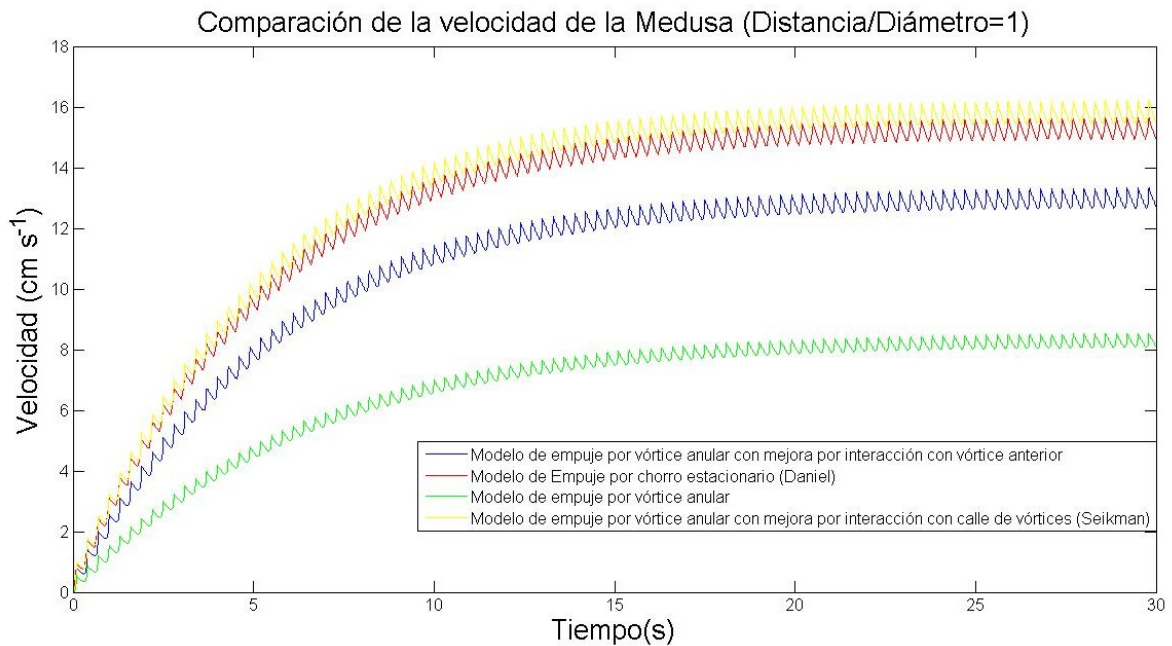


Figura 2.25: Velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983), el modelo de empuje por vórtice anular, el modelo de Seikman (1962) y el modelo de vórtice anular con mejora por interacción con vórtice anterior ($\frac{C}{D} = 1$)

En la figura anterior se observa que el modelo de Seikman ya sólo da una pequeña mejora al modelo de Daniel, y el modelo de interacción con vórtice anterior da una velocidad terminal menor que el modelo de Daniel.

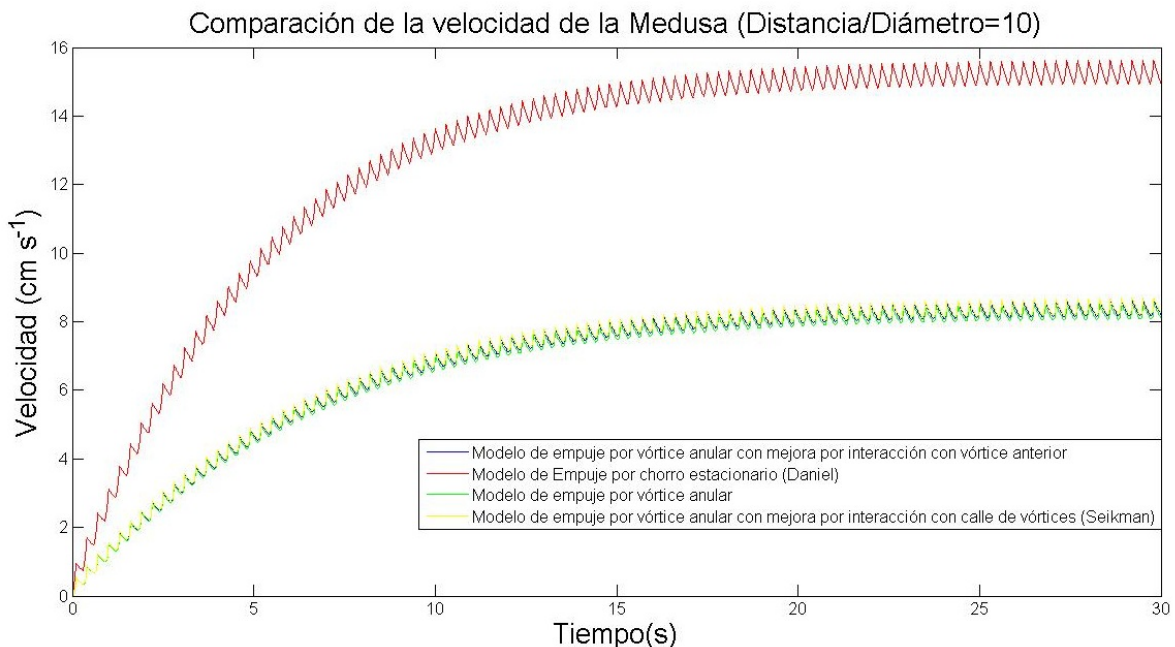


Figura 2.26: Velocidad terminal para los modelos de empuje por chorro estacionario de Daniel (1983), el modelo de empuje por vórtice anular, el modelo de Seikman (1962) y el modelo de vórtice anular con mejora por interacción con vórtice anterior ($\frac{C}{D} = 10$)

se observa que tanto el modelo de Seikman como el de interacción con vórtice anterior colapsan en el modelos de empuje por vórtice anular solo.

Como se dijo antes, a distancias pequeñas en comparación al diámetro, la mejora en la velocidad terminal es mayor, y entre mayor sea esta distancia nos acercamos más al caso del vórtice anular solo, tanto para el modelo de Seikman como para el de interacción con vórtice solo 2.26. Y entre más pequeña sea la distancia entre vórtices, el empuje de Seikman predice una velocidad terminal mucho mayor 2.24. Esto es por que el máximo empuje que podría dar el modelo de interacción con el vórtice anterior, es el de empuje dado por dos vórtices, en cambio el modelo de Seikman correspondería a un empuje por una infinidad de vórtices 2.25.

Puede verse también de las gráficas que existe un valor para el cociente $\frac{C}{D}$ para el cual existe una mejora en comparación al modelo de Daniel del chorro estacionario para ambos casos. Para el caso del modelo de Seikman este valor es cercano al uno, y para el modelo de interacción con vórtice anterior es cercano al 0.5. Con los datos de la medusa de Daniel, $\frac{C}{D} = 0,42$, por lo que debe existir una mejora, tanto para el caso del empuje de Seikman como para el modelo de interacción de dos vórtices anulares.

McHenry (2003) [25] después de analizar el movimiento de la medusa *Aurelia Aurita* y compararla con el modelo de empuje de chorro estacionario, reporta que el empuje predicho por tal modelo es menor a la medida experimentalmente (y por lo tanto también del modelo del vórtice sin interacción). Debido a esto McHenry llega a la conclusión de que el modelo de Daniel del empuje no es el más conveniente para describir el movimiento de las medusas reales, y propone que existe una mejora debido a que la medusa también tienen una contribución por el aleteo que hace al deformarse.

Sin embargo esta contribución resulta también insuficiente para explicar el que el empuje observado sea menor al predicho por el modelo de Daniel, o por el modelo del vórtice sin interacción. Es por ello que los modelos de Seikman y de interacción con un vórtice son los más adecuados para el tipo de casos como el que presenta McHenry.

Para que el modelo de Seikman sea más cercano a la realidad se necesitaría que los vórtices no se destruyeran. Una causa para que esto pasara es que el tiempo que dura cada ciclo debería ser más pequeño, y en particular la fase de relajación. Del modelo de Daniel obtuvimos que el índice de escape depende de la duración de esta fase comparada a la de relajación.

Para las medusas no siempre es necesaria una velocidad muy alta, por lo que no les sería útil tener tiempos de relajación pequeños para tener una estela de vórtices grande, y tener una mejora en la velocidad como la que propone Seikman. Por ejemplo, cuando se alimentan, las medusas preferirían tener un índice de escape menor, pues así gastan menos energía. Así, el modelo de interacción con un solo vórtice sería quizá más conveniente para estos casos. Aunque cuando la medusa necesite una mayor velocidad, como cuando escapa de sus depredadores, le convendría disminuir su fase de relajación y así tener una mejora por la interacción con la calle de vórtices tal y como propone Seikman.

Otro parámetro para decidir cual modelo sería más fiel a la realidad es observando experimentalmente con cuántos vórtices interactúa el vórtice que eyecta la medusa. Entre más vórtices se observen, el modelo de Seikman será el más adecuado, ya que se cumplen su principal hipótesis. En caso de que sean pocos vórtices con los que compongan la estela, el modelo con mejora con interacción será mejor.

Capítulo 3

Propiedades experimentales de un vórtice anular

En el capítulo previo, para obtener el modelo de empuje se hicieron varias hipótesis. Una de las más cruciales era que el vórtice anular se podría representar cómo una línea, para así obtener la velocidad del anillo. Estas hipótesis pueden ser arriesgadas, ya que no necesariamente se cumplen en todos los casos. Para probar en que medida se cumplen las aproximaciones, se hizo un experimento para determinar las características de un vortice anular, en particular la circulación Γ con las distintas aproximaciones.

La primer forma para obtener Γ fue la definición de ésta. La segunda fue usando la velocidad del anillo, que surgió de la teoría del potencial complejo suponiendo que el anillo se comportaba como un dipolo de vórtices. La tercera fue a partir de la aproximación de anillo delgado, para lo cual se requiere el radio del núcleo del anillo. Y la cuarta fue ajustando los datos de velocidad sobre el eje de simetría con la fórmula obtenida a partir de la ley de Biot-Savart

En la siguiente sección se describe el método experimental que se usó para medir las propiedades del vórtice anular, como su diámetro, el de su núcleo, la velocidad del flujo y del vórtice, entre otros. Estos resultados luego se extrapolan al caso de la medusa, usando el criterio de semejanza. Este criterio puede ser geométrico, cinemático y dinámico. El caso geométrico se refiere a que las dimensiones de longitud de ambos fenómenos son proporcionales. Puede verse que este criterio se cumple, ya que los vórtices anulares tienen todos la misma forma. El criterio de semejanza cinemático se refiere a que exista proporcionalidad en cuanto al tiempo y velocidad en el que ocurren ambos fenómenos. Este criterio no se cumple necesariamente en este experimento. Por último está el criterio de semejanza dinámico, el cual nos dice que dos fenómenos son iguales si las fuerzas en ellos son proporcionales. Este criterio se cumple inmediatamente igualando los números adimensionales que intervengan en ambos fenómenos físicos. Así por ejemplo, los números de Rossby y Webber deben ser iguales en fenómenos donde intervenga la fuerza de Coriolis y tensión superficial, para que se cumpla el criterio de semejanza dinámica. En el caso de la medusa, por las suposiciones hechas, no hay dependencia de fuerzas externas, como la gravedad o Coriolis, ni de fenómenos de tensión superficial, por lo cual para que exista la semejanza dinámica los números de Reynolds deben ser iguales. Para el vórtice anular

creado por la medusa, el número de Reynolds está entre cien y cuatrocientos¹.

3.1. Anemómetro de hilo caliente

Se midió la velocidad de un vórtice anular en aire usando un anemómetro de hilo caliente. En este caso se usó el anemómetro IFA 300 de la marca TSI. Un anemómetro de hilo caliente consiste en un filamento calentado que queda expuesto al paso de un flujo. Este filamento está conectado a un circuito eléctrico que es capaz de monitorear, en este caso las variaciones de resistencia eléctrica por la acción del flujo. Entonces, se puede establecer una relación entre la velocidad del flujo y la resistencia observada en el filamento calentado [23]. En la figura 3.1 se puede observar el diagrama del anemómetro IFA 300.

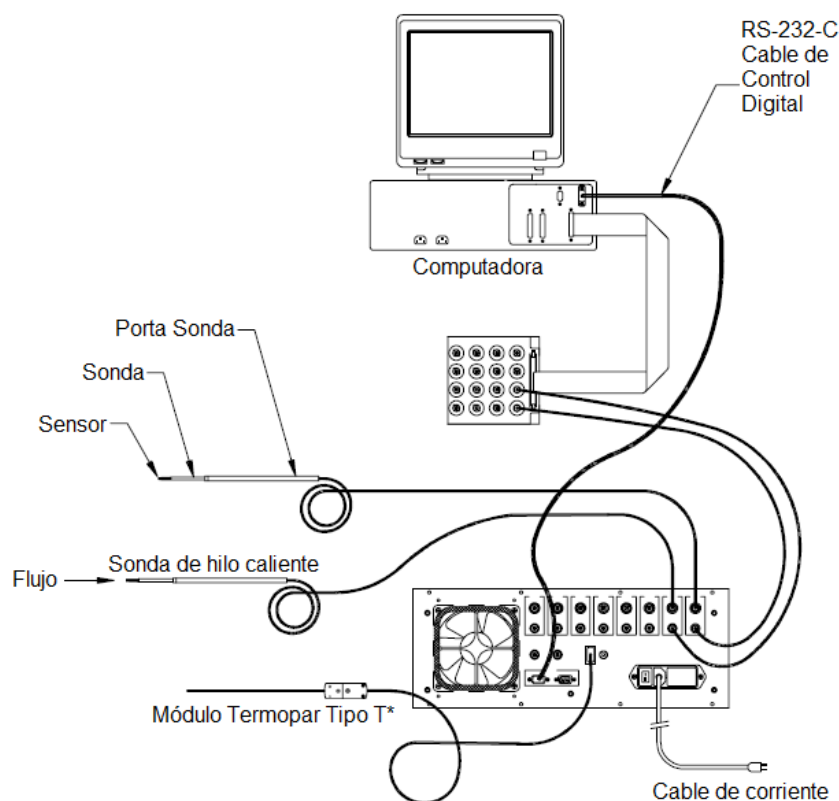


Figura 3.1: Diagrama del sistema del anemómetro IFA 300.*No se usó en este experimento ya que se hizo a temperatura constante. Modificado de [36]

El principio físico de funcionamiento de los anemómetros de hilo caliente está basado en la transferencia de calor por convección entre el hilo calentado (figura 3.2) y el flujo pasando a su alrededor. En estos sensores, una pequeña estructura es calentada y expuesta al flujo para medir el intercambio térmico que se produce. La relación entre la velocidad del flujo y la tensión de salida es deducida sobre la base de las ecuaciones de transferencia

¹Como se vio en la parte previa, la velocidad del vórtice se ve afectado por los vórtices expulsados anteriormente, por lo que se propusieron distintos modelos, los cuales arrojaban distintas velocidades del vórtice. De ahí que exista un conjunto de valores para el número de Reynolds en este caso

de calor, tomando por referencia la potencia generada por la corriente eléctrica que pasa por el hilo.

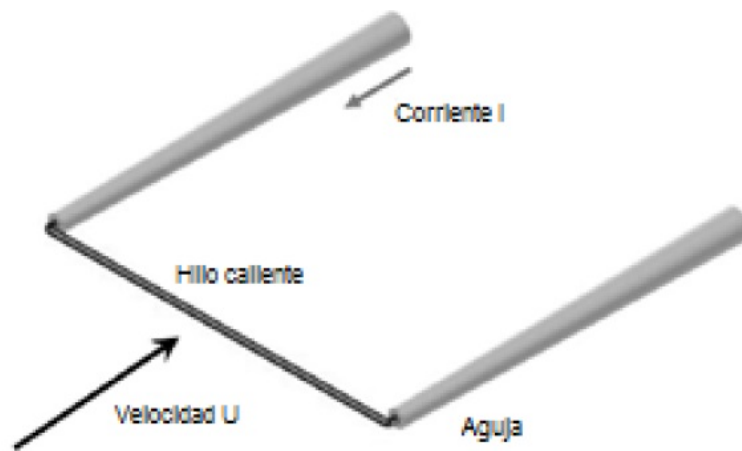


Figura 3.2: Ejemplo de sensor. Tomado de [23]

El sensor es calentado por una corriente eléctrica y enfriado proporcionalmente, de acuerdo a la componente de la velocidad del aire que incide perpendicular al elemento sensible, gracias a esto se midió solamente la componente de velocidad en la dirección de propagación del anillo. Suponiendo que el vórtice es simétrico, es posible, a partir de la ecuación de continuidad, calcular la componente de velocidad radial (se supone que se trabaja en coordenadas cilíndricas y que el eje de simetría del vórtice coincide con el eje x). Siguiendo con la manera en que el anemómetro mide la temperatura, este se basa en el cambio de la resistencia eléctrica que es medido usando un puente de Wheatstone, ver figura 3.3, con la cual al variar la resistencia (partiendo de una resistencia de operación) se producía un voltaje, el que era medido para obtener la velocidad.

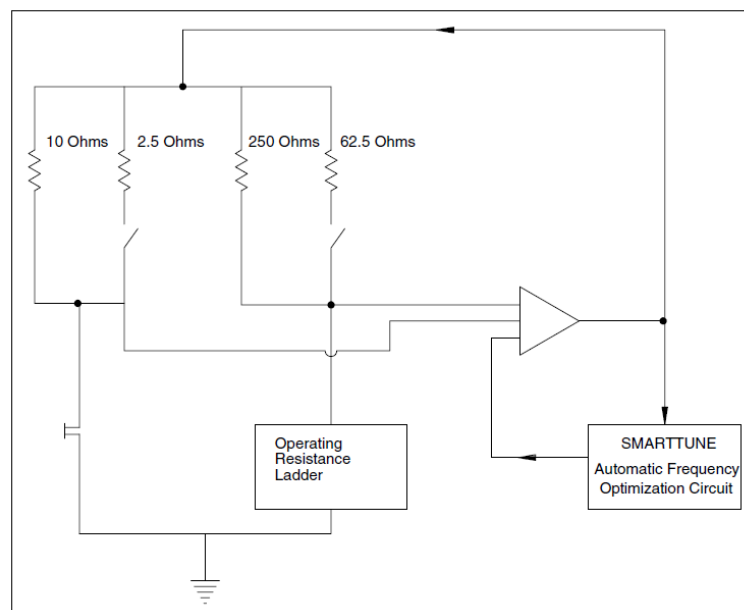


Figura 3.3: Puente de Wheatstone usado en el anemómetro IFA 300. Tomado de [36]

En el aire se sugiere que las sondas de hilo caliente operen entre 200 y 300 grados centígrados. Las sondas de hilo caliente se fabrican de platino o de tungsteno, o de aleaciones entre ellas. Éstos materiales tienen la característica de que su resistencia es proporcional a la temperatura. Por otra parte, las dimensiones típicas de una sonda de hilo caliente son diámetros de 5 a 50 micras y longitudes de 0.25 a 2 mm . Para este caso, las longitudes son semejantes a las sondas de hilo caliente, mientras que los diámetros típicos son de 40-60 μm [31].

3.1.1. Calibración

Antes de hacer las mediciones de los vórtices, se tuvo que calibrar el anemómetro, Para esto se usó un túnel de viento, cuya área transversal era de $(15 \pm 0,5)cm$ por $(15 \pm 0,5)cm$, ver figura 3.4 a). El túnel contaba con dos turbinas, estas se alimentaban con un Variac (figura 3.4 b)). Al modificar el voltaje del variac se modificaba la velocidad del aire. Los voltajes a los que se trabajó estuvieron en un rango de 50 a 140 V, variando de 5 en 5 V.

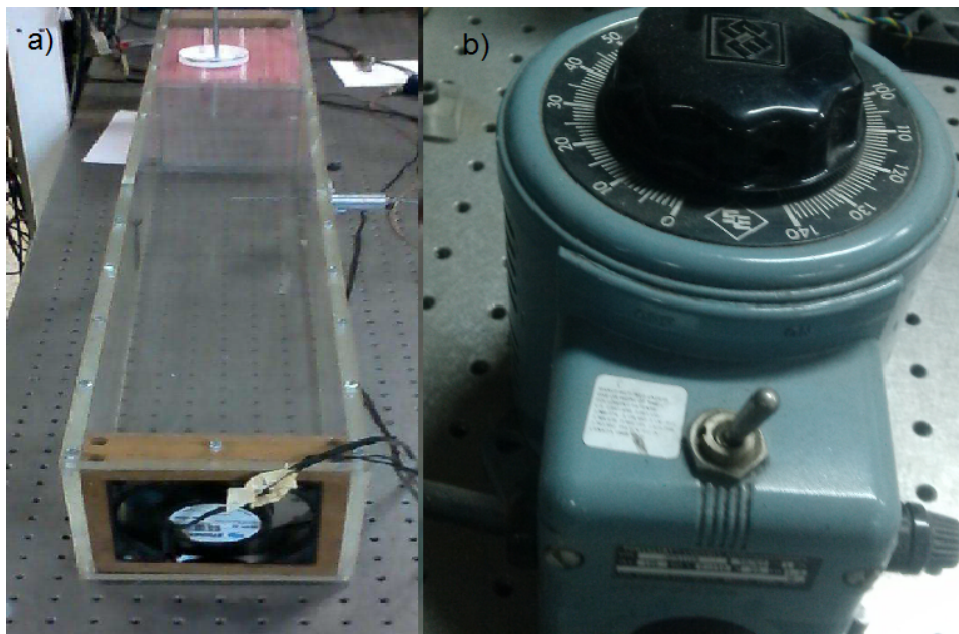


Figura 3.4: a) Túnel de viento usado b) Variac

Para la calibración de la sonda se hicieron dos tipos de mediciones. La primera fue produciendo una calle de Von Karman por la presencia de un cilindro sólido. Está bien establecido que la frecuencia de emisión de los vórtices está relacionada con el número de Reynolds y por lo tanto con la velocidad del flujo. La relación es (Roschko,1969) [29]:

$$f = (0,212Re - 4,5) \frac{\nu}{d^2};$$

en estas medidas se determinó la frecuencia de emisión de vórtices y por lo tanto la velocidad del flujo lejos del cilindro. Este cilindro era de acero, con un diámetro $D = (126 \pm 0,25)mm$, el anemómetro se colocó a un par de centímetros del cilindro. En el segundo tipo de mediciones se hizo quitando el cilindro. En esta ocasión se midió el voltaje que daba el anemómetro a esa velocidad.

Para la medición de la velocidad en nuestro experimento se usó una sonda de hilo caliente marca TSI, tomando los parámetros de operación sugeridos por dicho fabricante. Se eligió como resistencia de operación de la sonda el valor 9.06 Ohms. Se tomaron de 16,384 datos con una tasa de 1000 en cada serie. En cada serie se midió el tiempo y voltaje.

Para las mediciones con el cilindro se obtuvieron 19 series de datos. Estos datos se graficaban, se les sacaba la transformada de Fourier rápida y se obtenía la frecuencia de formación de vórtices. Estas frecuencias se usaron para obtener la velocidad V del fluido.

En el caso de las mediciones sin el cilindro, se obtuvieron 19 series de datos. Para cada serie se calculó el voltaje promedio. Este voltaje es el que produce el anemómetro para esa velocidad de flujo dentro del túnel de viento. La calibración consiste en determinar los valores de las constantes A y B de la siguiente fórmula:

$$E^2 = A\sqrt{V} + B; \quad (3.1)$$

donde E es el voltaje y V la velocidad. Haciendo los cambios de variable:

$$y = E^2 \quad (3.2)$$

y

$$x = \sqrt{V} \quad (3.3)$$

La ecuación 3.1 queda como la ecuación de una recta:

$$y = Ax + B \quad (3.4)$$

Con esta última ecuación se encontró una relación entre el voltaje y la velocidad, obteniendo los parámetros A y B . Los datos medidos se graficaron, figura 3.5.

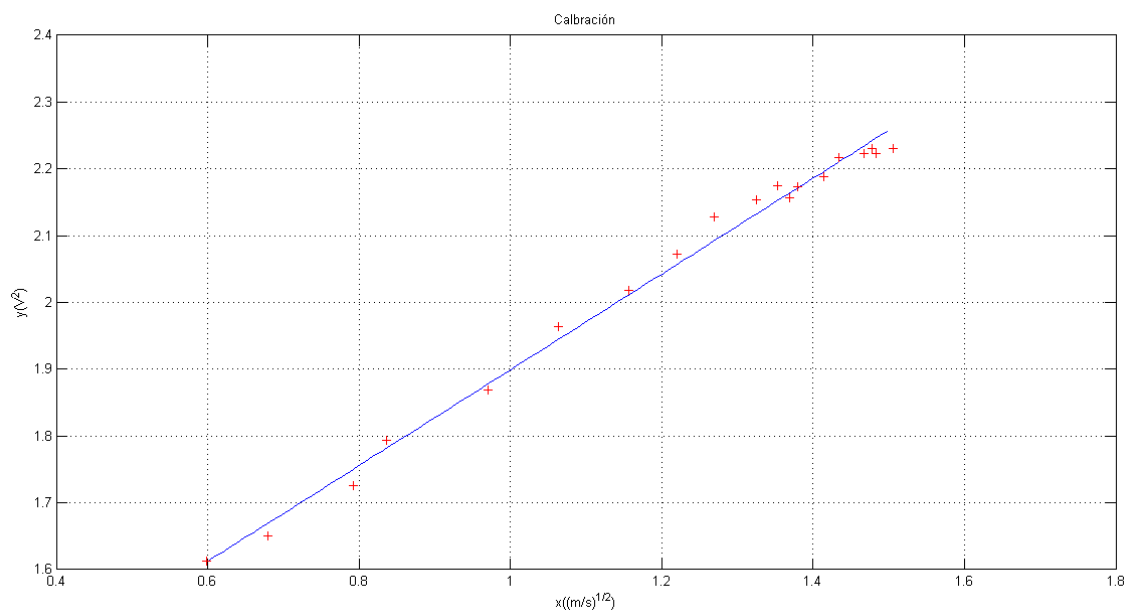


Figura 3.5: Gráfica de calibración obtenida de los datos medidos en el túnel de viento.

62CAPÍTULO 3. PROPIEDADES EXPERIMENTALES DE UN VÓRTICE ANULAR

A estos datos se les aproximó la recta descrita antes, figura 3.5, y obtuvieron los parámetros:

$$A = 0,7173 \frac{\text{volts}^2}{\sqrt{\frac{\text{metro}}{\text{segundo}}}} \quad (3.5)$$

$$B = 1,1818 \text{volts}^2 \quad (3.6)$$

Con estos podemos relacionar la velocidad del fluido con el voltaje medido, a partir del cambio de resistencia en el sensor del anemómetro de hilo caliente.

3.1.2. Montaje experimental

Para producir vórtices anulares se construyó una cavidad con un orificio. Una parte de la cavidad es una bocina [31] a la cual se le colocó por la parte de enfrente un disco compacto, el que ya tiene un orificio central circular de $(1,2 \pm 0,5) \text{cm}$ de diámetro, figura 3.6 (a). La bocina se perturba enviando un pulso que ha sido producido por un generador de funciones en la modalidad de función de onda arbitraria.

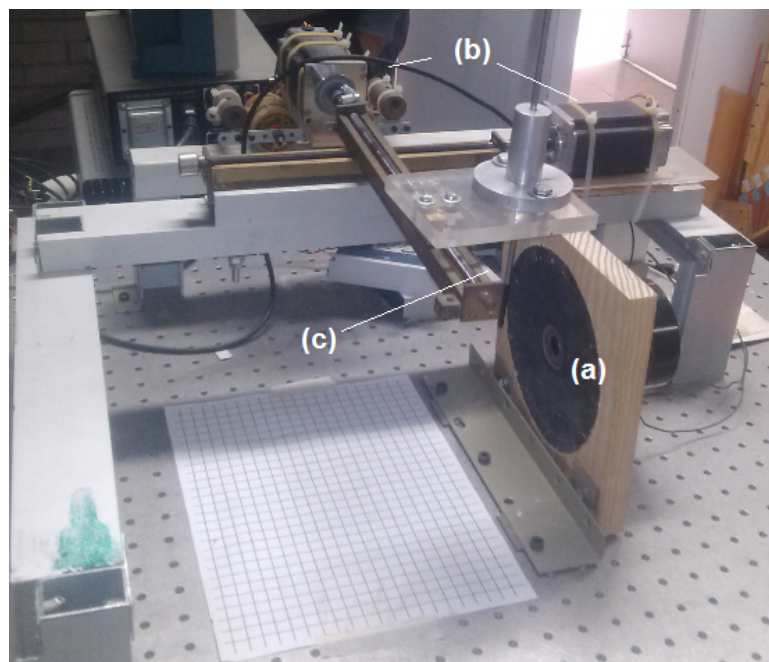


Figura 3.6: Sistema de medición. (a) generador de vórtices, (b) motores de paso, (c) Sonda.

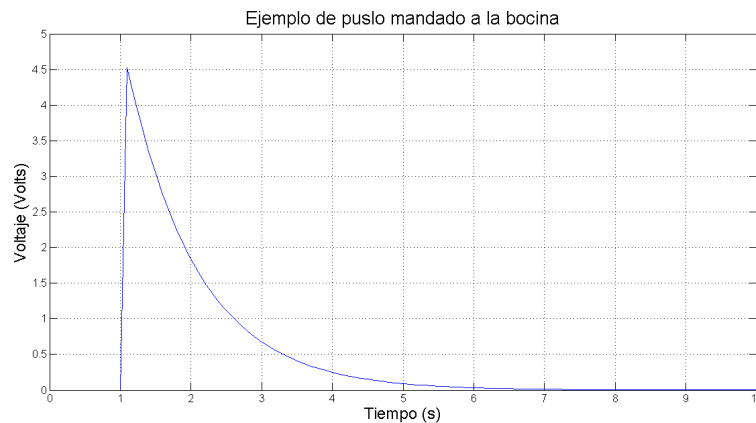


Figura 3.7: Ejemplo del pulso mandado a la bocina.

Se utilizó un generador de funciones marca Stanford Research System, modelo DS345 (figura 3.8(b)), que se ha programado por el puerto serial para producir una función que crece rápidamente en el tiempo y luego decrece de forma exponencial, esta función es $\exp(-kt)$ donde $k = 50$ y t es el tiempo, figura 3.7. El pulso fue amplificado por un amplificador PASCO, figura 3.8 (a).

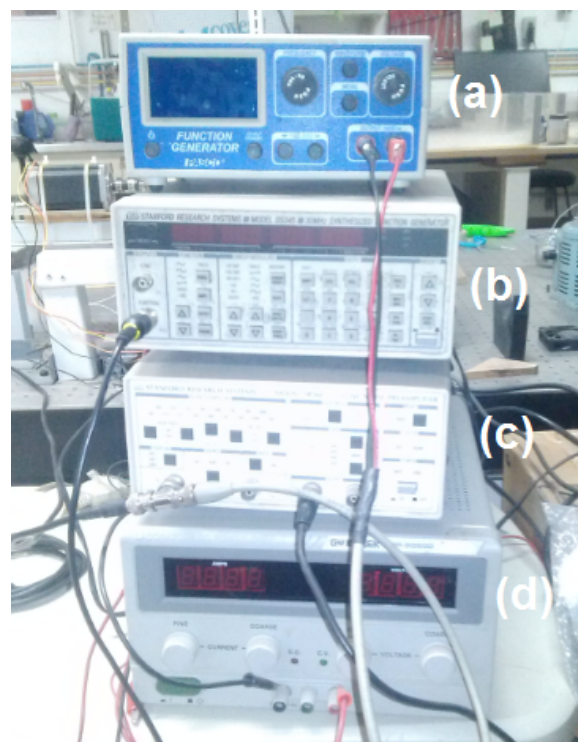


Figura 3.8: Aparatos usados (a) amplificador (b), generador de funciones, (c) pre amplificador usado para la sincronización de la toma de datos con la producción del pulso eléctrico (d) fuente de voltaje

La sonda, figura 3.6 (c), se colocó frente al generador de vórtices y se fue moviendo en un plano usando motores de paso como se puede ver en la figura 3.6 (b), estos motores eran alimentados con una fuente de voltaje (figura 3.8 (d)) y controlados con un programa

escrito en el lenguaje *C* creado en el taller de Fluidos de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

3.1.3. Adquisición de Datos

Se tomaron datos en 1600 puntos, en cada punto se hicieron 6000 mediciones con una tasa de muestreo de 4000 datos por segundo. Para cada punto de ellos se hicieron cinco mediciones que se promediaban, el tiempo de toma de datos era de 1.5 segundos. Debido a que sólo se podía medir un punto a la vez, el experimento se reproducía cada diez segundos y cada vez se tomaban las mediciones para cada punto.

Se usó el programa *Thermal Pro XP* para poder usar el anemómetro IFA 300, en el cual se introdujeron los parámetros de operación de la sonda, en este caso, la resistencia de trabajo, que como se dijo antes fue de 9.06Ω . También es importante decir que las señales recibidas eran acondicionadas, esto es, se le resto un offset y la señal resultante se multiplicó por un factor de ganancia.

En una computadora alterna a la que se corría el programa *Thermal Pro XP*, se tomaban y guardaban los datos en otro programa creado en el Taller de Fluidos escrito en *C*. Este programa también permitía activar los motores de paso, y así mover la sonda de un punto a otro. Para toma de datos se usó una tarjeta de adquisición de datos (figura 3.9) con cuatro canales analógicos y cuya tasa máxima era de 48000 datos por segundo. Una característica importante de la tarjeta de adquisición es la que tiene la posibilidad de iniciar toma de datos al enviar un pulso digital, lo cual se hacía conectando la salida del generador de funciones que enviaba el pulso a la bocina, hay que señalar que se usaba un pre amplificador para aumentar el voltaje(ver figura 3.8 c). Esto se requiere para sincronizar la generación de vórtices con la bocina y la toma de datos.



Figura 3.9: Tarjeta de Adquisición de Datos

Se tomaron datos en una área de 4.2 cm por 4.2 cm, los motores daban pasos de aproximadamente 1.04 mm, y se hicieron cuarenta puntos en cada dirección. Se trabajó en coordenadas cilíndricas (r, θ, x) aunque por la simetría sólo se tomaron en cuenta las coordenadas r y x . En esta parte se usará u para la velocidad del aire, y U para la velocidad del vórtice.

3.2. Resultados y discusión

Se obtuvieron las componentes u_x del campo de velocidades para distintos tiempos. En las figuras 3.10 y 3.11 pueden verse ejemplos de la velocidad u_x para los ejes x y r . Para este último debe hacerse una corrección ya que el anemómetro sólo mide el valor absoluto de la velocidad, y en las orillas el valor de esta velocidad es negativo. En la figura 3.12 se pueden ver las gráficas con las correcciones.

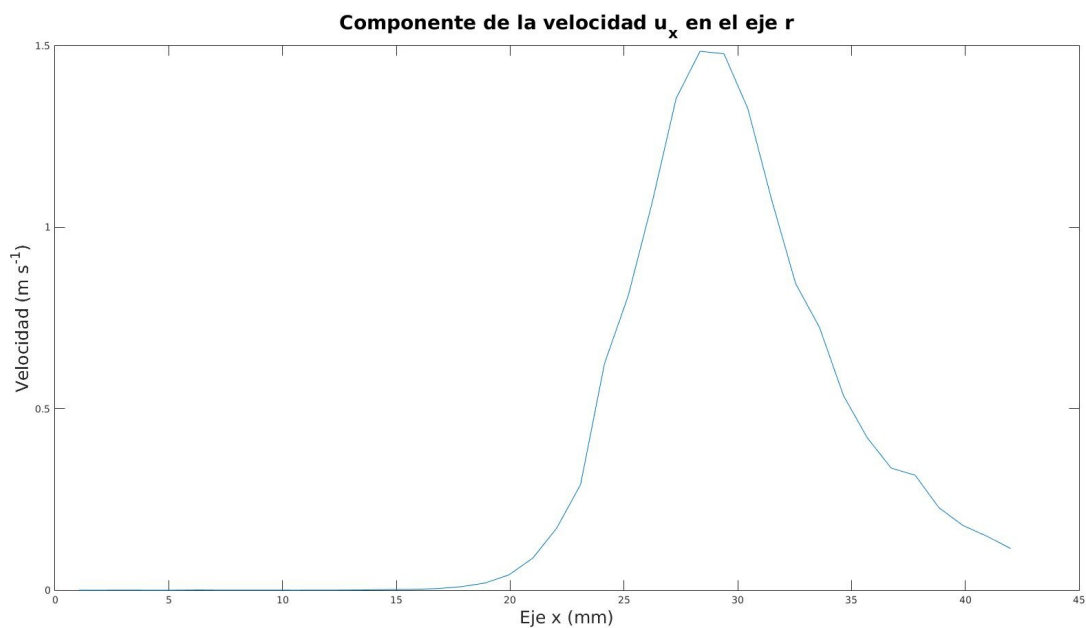


Figura 3.10: Ejemplo de componentes u_x en el eje x para un tiempo determinado.

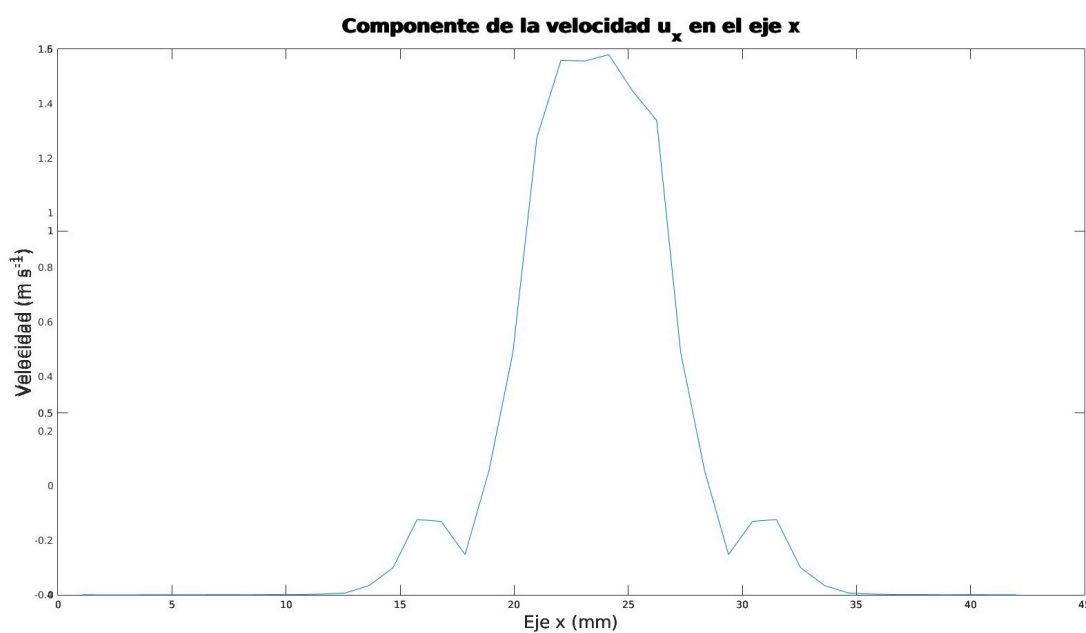


Figura 3.11: Ejemplo de componentes u_x en el eje r para un tiempo determinado. Hay que señalar que en esta gráfica el centro del vórtice anular está en el milímetro 25

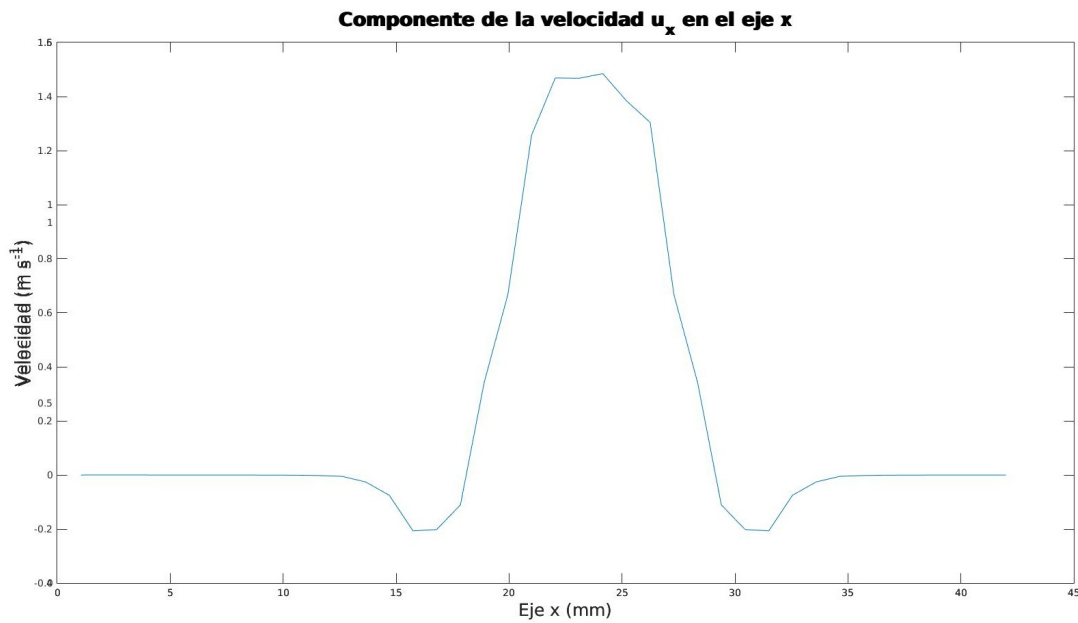


Figura 3.12: Ejemplo de componentes u_x en el eje r para un tiempo determinado (Corrección en las orillas).

Con las correcciones hechas, en las figuras 3.13 y 3.14 se grafican las componentes u_x para el plano donde se midió, en un tiempo determinado.

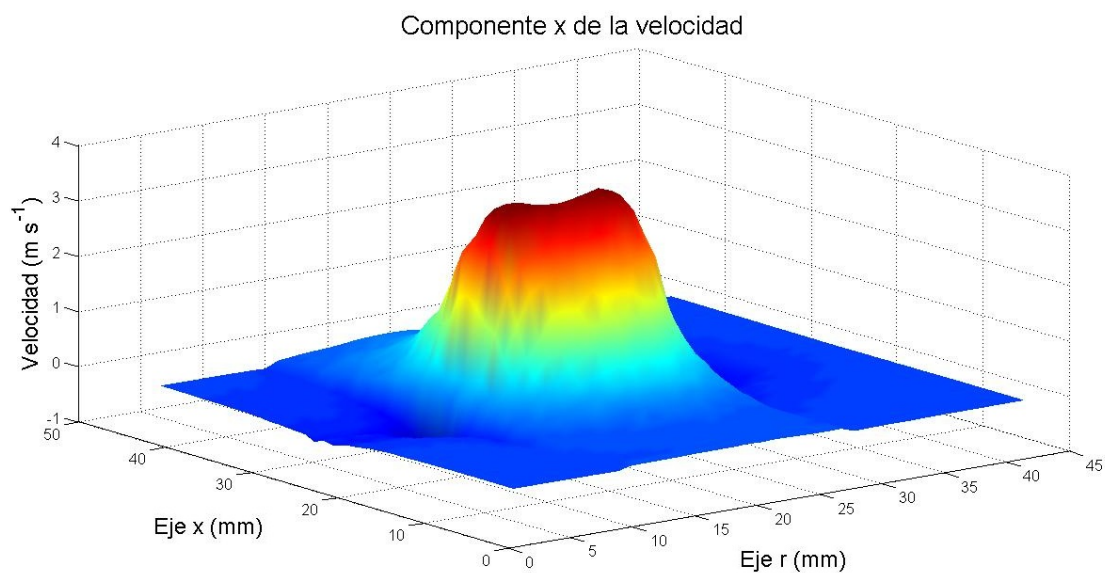


Figura 3.13: Ejemplo de componentes u_x del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista frontal). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.

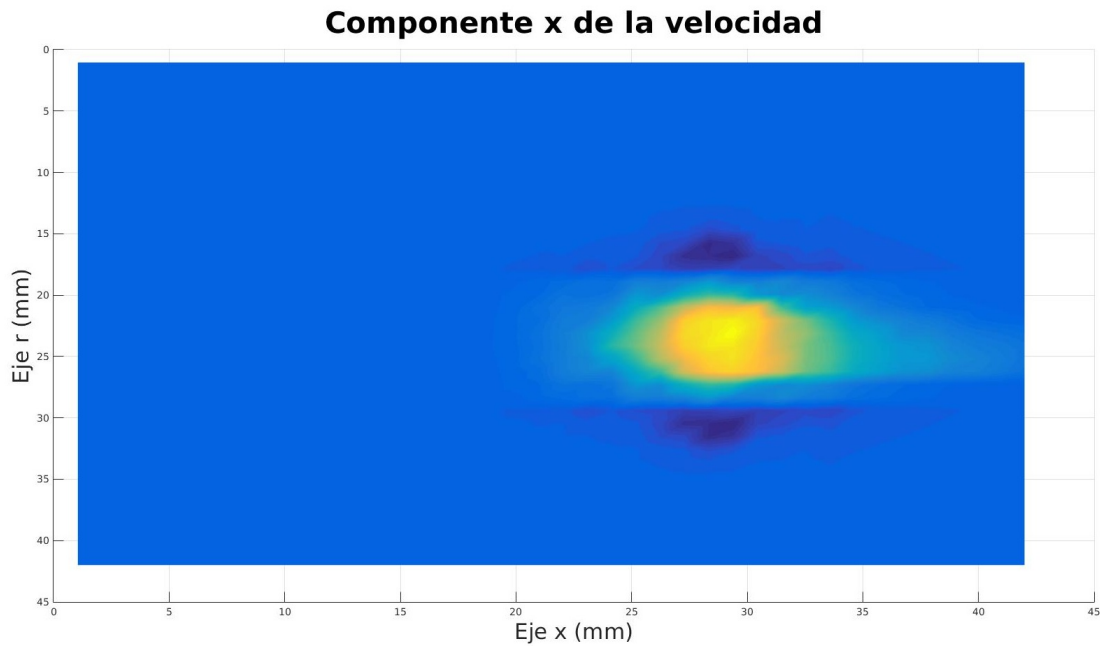


Figura 3.14: Ejemplo de componentes u_x del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista por arriba). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.

Utilizando la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} = 0.$$

Se calculó la componente r de la velocidad, mediante el método de diferencias finitas, como se muestra en la figura :

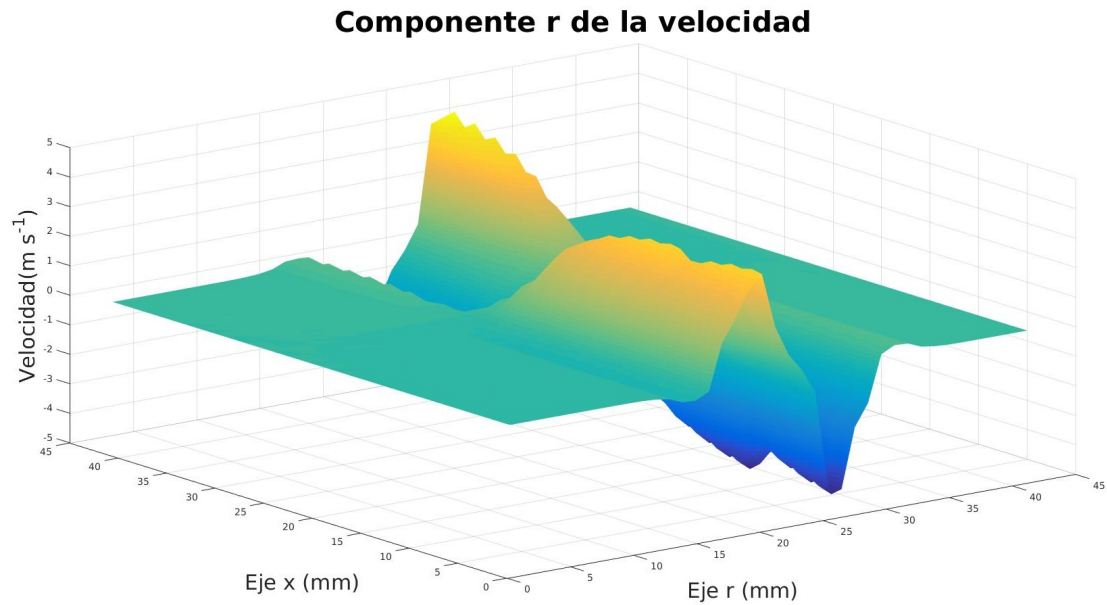


Figura 3.15: Ejemplo de componentes u_r del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista frontal). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.

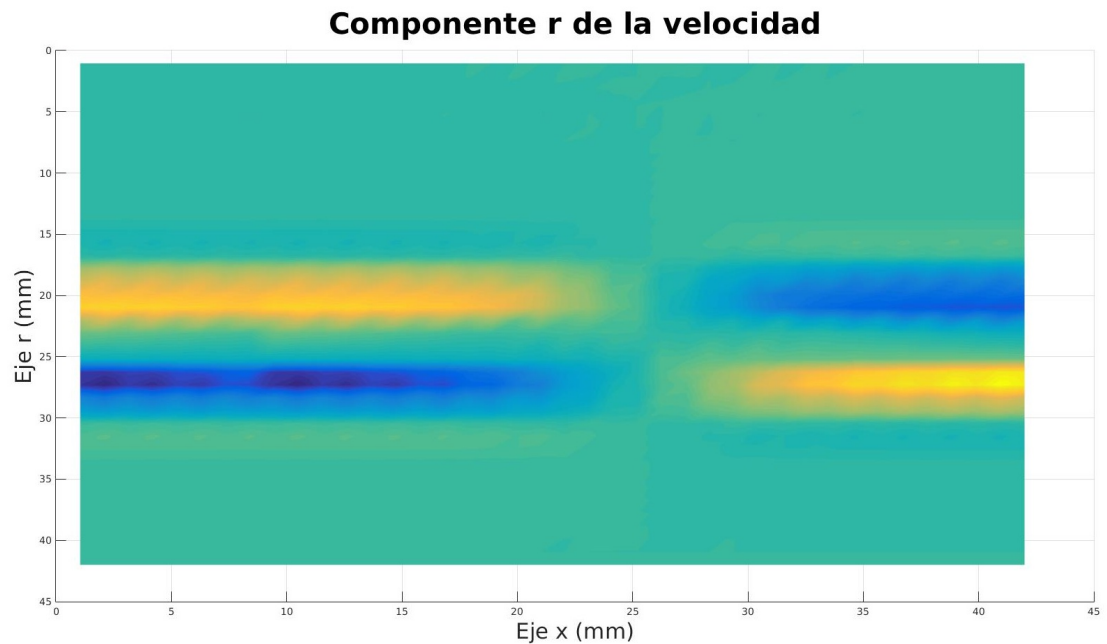


Figura 3.16: Ejemplo de componentes u_r del campo de velocidades para un tiempo determinado (vista por arriba). Aquí los colores azules corresponden a velocidades negativas y las amarillas y naranjas a velocidades positivas.

Con esto se calculó también el campo de velocidades (figura 3.17) y la componente angular de la vorticidad (figuras 3.18 y 3.19). Cabe señalar que las otras componentes de la vorticidad son cero.

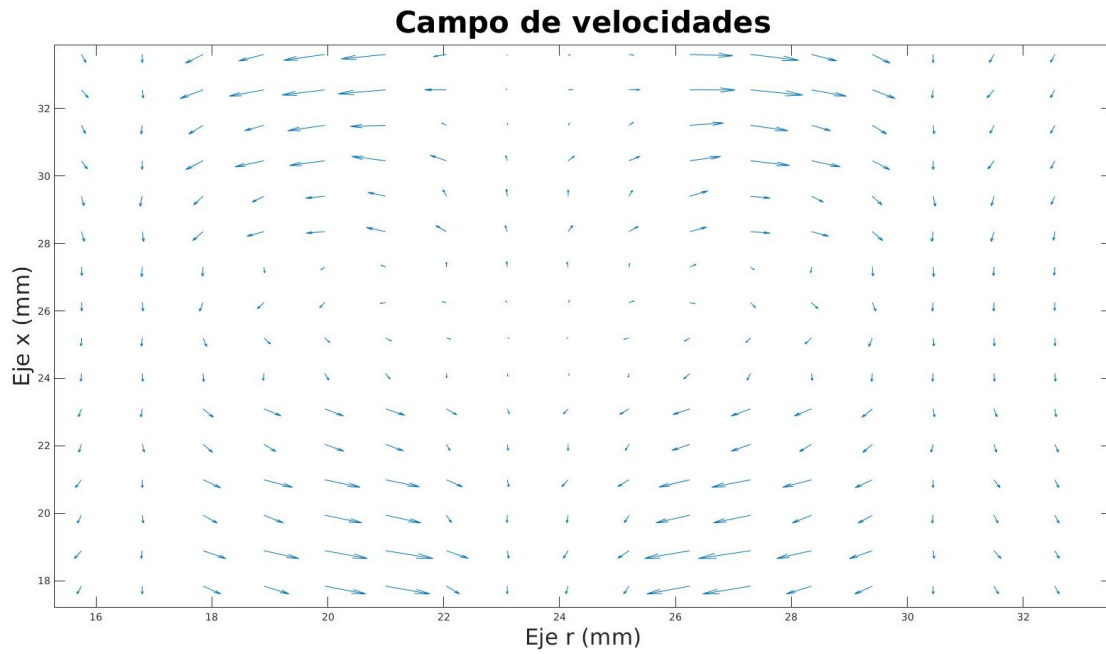


Figura 3.17: Ejemplo de campo de velocidades en un tiempo determinado

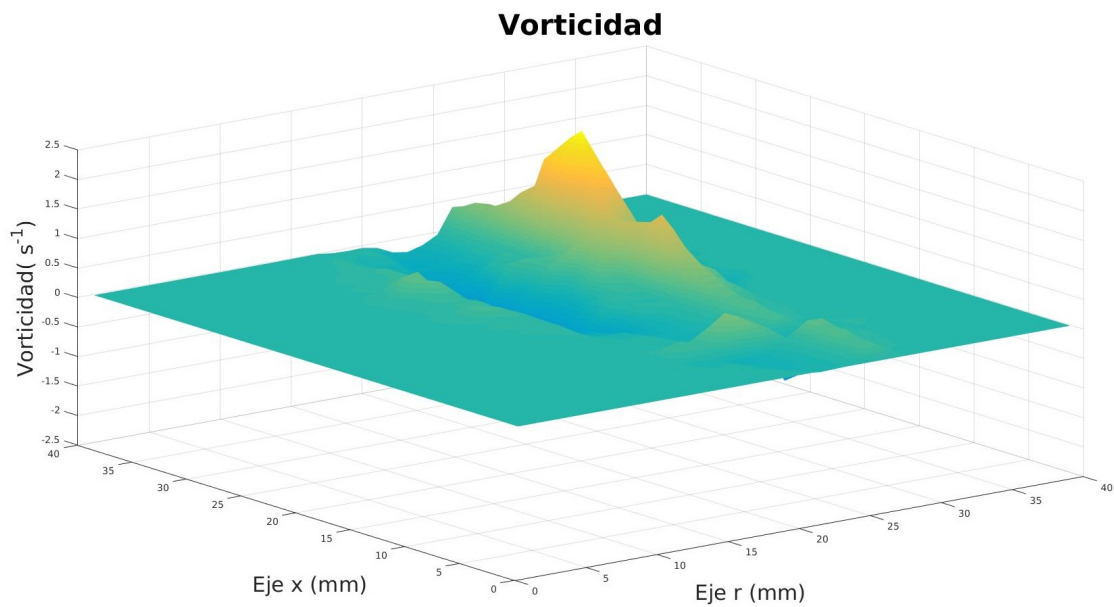


Figura 3.18: Componente θ de la vorticidad en un tiempo dado (vista frontal).

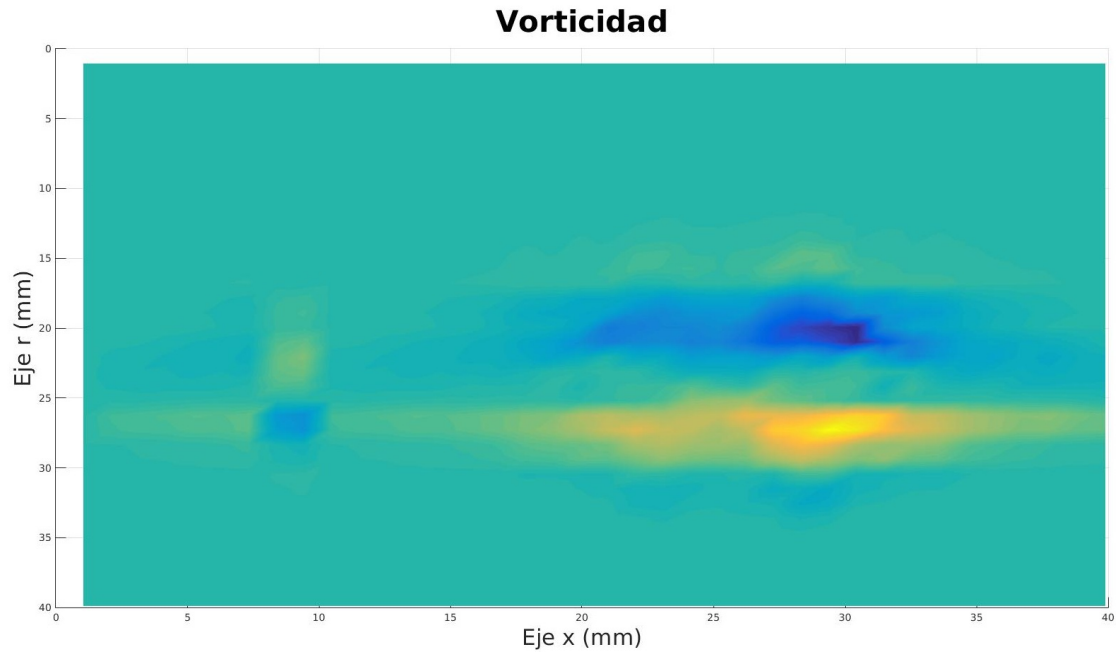


Figura 3.19: Componente θ de la vorticidad (vista por arriba).

Para calcular la velocidad U del vórtice se graficó la posición de la velocidad máxima u_x (que es el centro del vórtice) en el eje x , ya que como puede verse en la figura 3.20 este se mueve.

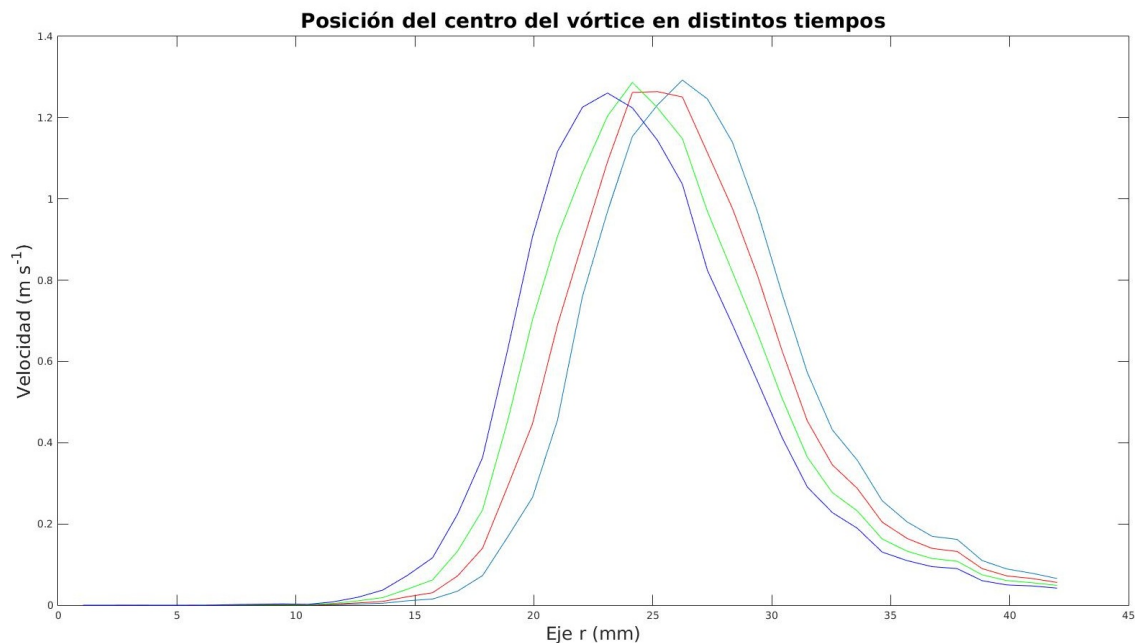


Figura 3.20: Movimiento del máximo de la componente u_x en el eje x . Los valores que se muestran en gráfica son tomados en la línea en el eje r que corresponde al eje de simetría del vórtice, situada en el centro del anillo. Las gráficas se tomaron con un tiempo de 2.5 ms entre ellas.

Se graficó la posición de este máximo con respecto al tiempo, en un intervalo en el que se consideró que el máximo se movía con velocidad constante, y se ajustaron los datos a una recta con mínimos cuadrados, como se puede ver en la figura 3.21. La pendiente de esta gráfica es la velocidad U . En el cuadro 3.1 se muestran parámetros importantes del anillo que resultan de las mediciones con anemometría de hilo caliente, tal como su número de Reynolds, que está en el límite de los valores del vórtice expulsado de la medusa, en este caso no se bajó más el número de Reynolds debido a problemas con el generador de vórtice, que se volvía inestable a velocidades más pequeñas. Otro parámetro importante es la velocidad de traslación del anillo. Esta velocidad se utilizó para calcular la circulación por el modelo de potencial complejo y anillo delgado, las cuales se muestran en el cuadro 3.2. En este cuadro se han puesto además, otras estimaciones de la circulación, por ejemplo, la definición como integral de línea.

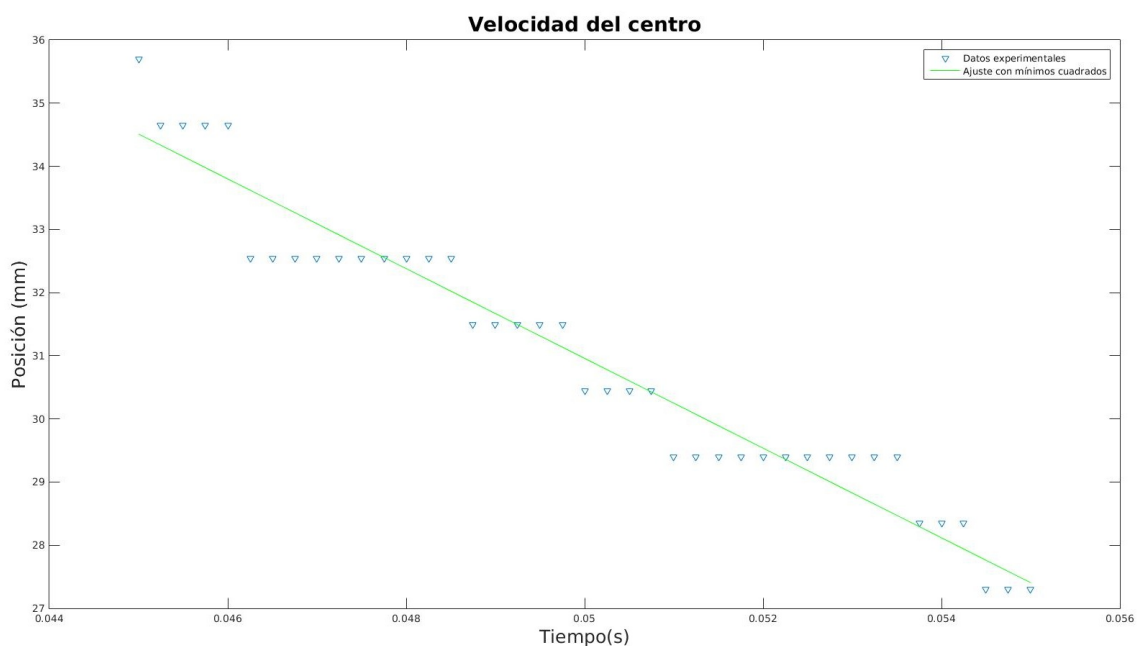


Figura 3.21: Movimiento del máximo de la componente u_x en el eje x .

Cuadro 3.1: Parámetros importantes del anillo

Diámetro D	$0,84 \pm 0,05cm$
Diámetro del núcleo B	$0,42 \pm 0,05cm$
Velocidad U	$0,85 \pm 0,06m/s$
Número de Reynolds Re	399

La circulación también puede estimarse si se tiene la velocidad u_x en el centro de simetría mediante la ley de Biot-Savat 1.87 con el valor de la velocidad u_z en el centro

del anillo, en un tiempo en que la velocidad del anillo era constante, ya que puede verse que en ese punto $x = 0^2$ y la ley de Biot-Savart se transforma en:

$$u_z = \frac{\Gamma}{D}$$

Con el valor $u_z = 1,52 \pm 0,004m/s$ se obtuvo la circulación reportada en el cuadro 3.2. Con este valor de la circulación se ajustaron los valores de la velocidad u_x medidos en la línea transversal que cruzaba el centro del anillo, con los valores obtenidos por la fórmula de Biot-Savart, ver 3.22.

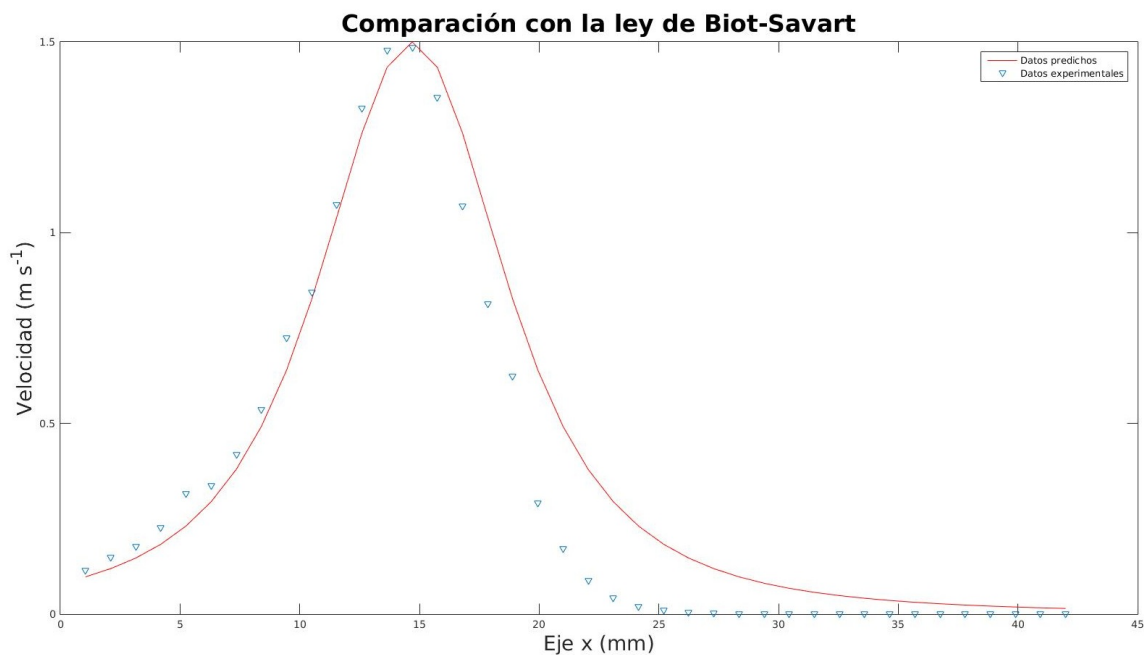


Figura 3.22: Ajuste de la velocidad por Biot-Savart.

En el caso de la definición, se obtuvieron dos valores de la circulación, debido a que como se ve en la figura 3.19 existen dos regiones de vorticidad, una positiva y una negativa (que corresponderían a los dos vórtices libres que se supusieron en el modelo de potencial complejo). En la introducción se mostró que:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$$

Usando eso, en este caso se integró la vorticidad en el el área que correspondía a cada vórtice libre. Las circulaciones así obtenidas se muestran en la tabla 3.2

²Aquí se movió el eje r de tal forma que el eje de simetría coincidiera con $r = 0$

Cuadro 3.2: Valores de Γ para los distintos modelos. Donde $R = \frac{D}{2}$ y $b = \frac{B}{2}$

Modelo	Ecuación	$\Gamma(\frac{m^2}{s})$
Definición (vórtice superior)	$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$	- 0.0078 \pm 0.0004
Definición (vórtice inferior)	$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{A}$	0.0075 \pm 0.0003
Aproximación dipolo	$U = \frac{\Gamma}{4\pi R}$	0.0376 \pm 0.00008
Anillo delgado	$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\log \frac{8R}{b} - \frac{1}{4} \right)$	0.0083 \pm 0.0003
Biot-Savart	$u_z = \frac{\Gamma R^2}{2(\sqrt{R^2+x^2})^3}$	0.0073 \pm 0.0007

Puede verse que la ley de Biot-Savart arrojó un valor de la circulación más cercano a la dada por la definición, y después la aproximación por anillo delgado. En el caso del modelo de potencial complejo, hay una gran diferencia con el valor esperado. Interpretando esto, el modelo de potencial complejo estimaría velocidades de traslación del vórtice menores a las reales. Esto influiría en nuestros modelos dando como resultado empujes menores a los que se observarían en la realidad.

3.2.1. Consideraciones a los modelos de empuje por vórtice anular

Los resultados obtenidos nos hacen cuestionarnos acerca de la validez de los modelos para el empuje. Con los datos obtenidos aquí podría decirse que los modelos subestimarían el valor del empuje y harían que se esperara una velocidad terminal menor que la observada. Esto tienen mucho de verdad, sin embargo el que tanto diverge tiene que ver con la estructura del anillo.

Si bien los modelos de interacción son más complicados de corregir, el de vórtice solo es bastante sencillo. Podemos ver que la velocidad del potencial complejo es bastante parecida a la de anillo delgado salvo un factor, que viene de suponer estructura al anillo. Este factor depende del diámetro D del anillo, y del diámetro de su núcleo B , ya que

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\log \frac{8R}{b} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\log \frac{8D}{B} - \frac{1}{4} \right)$$

En las figuras 3.23, 3.24 y 3.25 pueden verse distintos valores del cociente D/B para el modelo de vórtice anular solo.

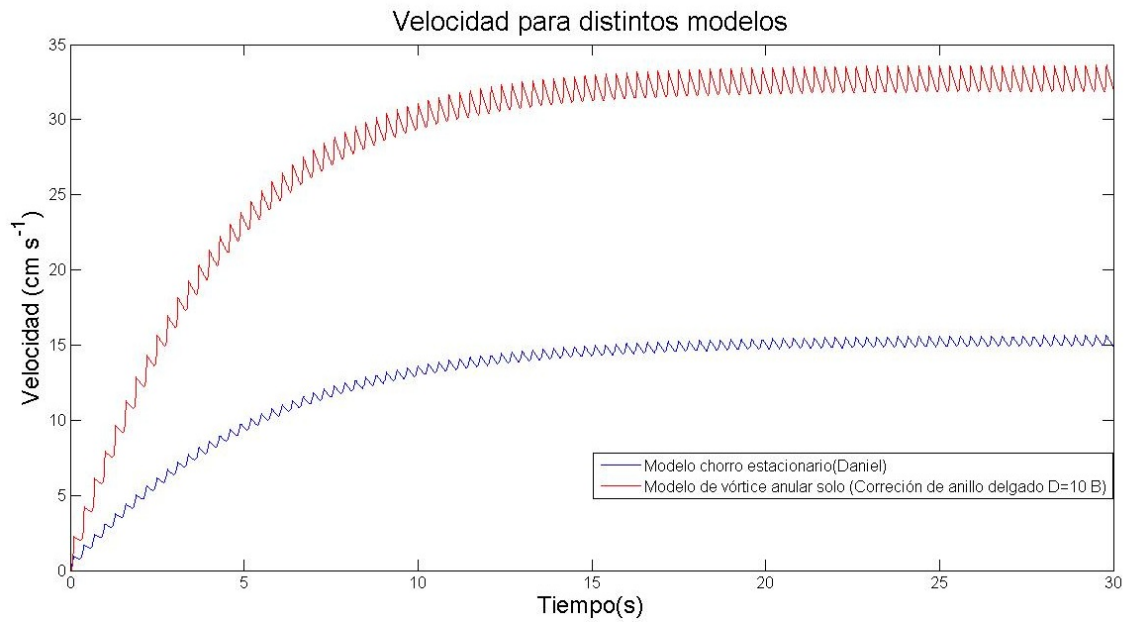


Figura 3.23: Comparación de las velocidades terminales del modelo de Daniel y del empuje por vórtice anular corregido.

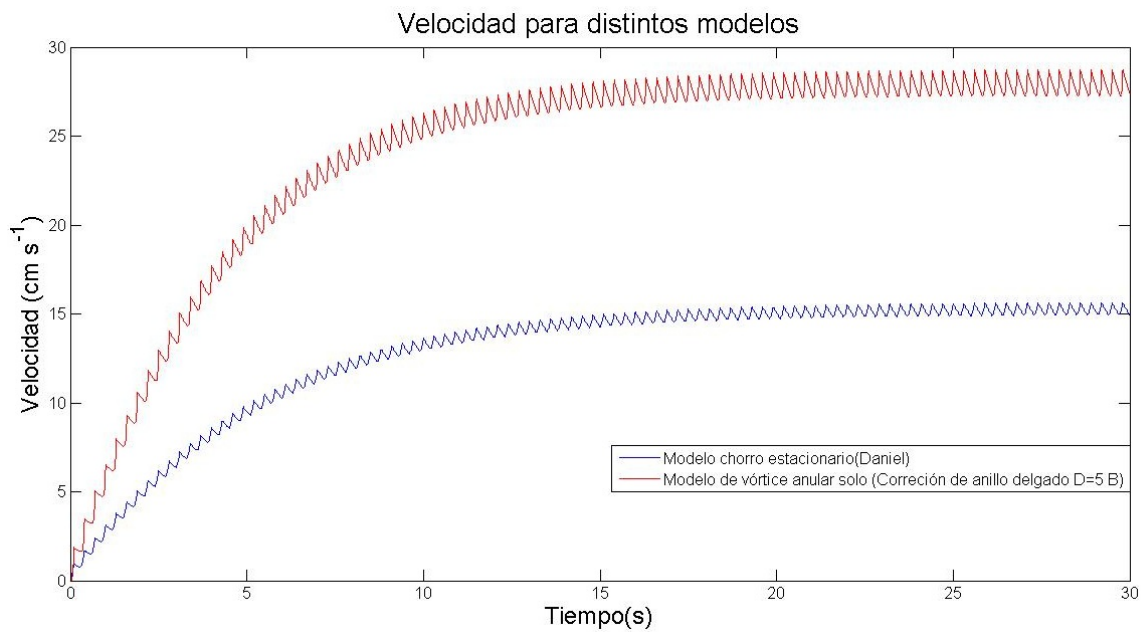


Figura 3.24: Comparación de las velocidades terminales del modelo de Daniel y del empuje por vórtice anular corregido.

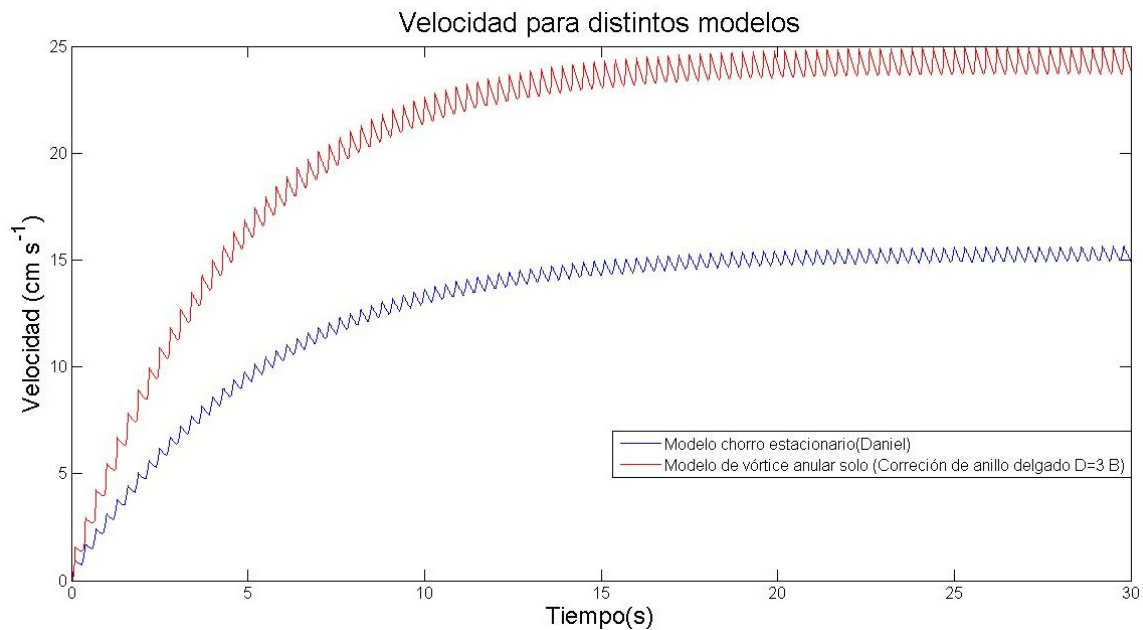


Figura 3.25: Comparación de las velocidades terminales del modelo de Daniel y del empuje por vórtice anular corregido.

Con la corrección puede verse que el modelo de empuje por vórtice anular ya supera al de Daniel, en cuanto a velocidad terminal. Esta mejora al empuje es mayor cuando el anillo es más delgado. Según aproximaciones numéricas de Hernández-Zapata(2015) y datos experimentales de Dabiri(2005)

$$\left(\log \frac{8D}{B} - \frac{1}{4} \right) \approx 3,$$

por lo que estaríamos en el caso de la figura 3.25. Esto explica mejor el que McHenry haya obtenido valores superiores a los propuestos por Daniel, aunque para calcular un valor más exacto del empuje debería considerarse la interacción con los vórtices anteriores. Esto podría ser tema de un trabajo posterior.

Capítulo 4

Conclusiones

Se obtuvieron varios modelos que describían el modelo de las medusas. Todos estos partían de la segunda ley de Newton, en la que las fuerzas involucradas eran el empuje, el arrastre, la fuerza para vencer la inercia y la masa añadida. La diferencia entre cada uno fue el modelo que se usaba para el empuje.

En una primera aproximación, usando el modelo de empuje por chorro estacionario, se encontró que la medusa llegaba a una velocidad terminal, que no podía sobrepasar. También se encontró que existía un máximo en la energía cuando la fase de contracción y la fase de relajación eran iguales, y esto para cualquier cantidad de ciclos. Se observó además que el mínimo índice de escape respecto al cociente de la duración de las fases, es dependiente de la cantidad de ciclos que lleve a cabo la medusa. Esto llevó a pensar en una posible explicación a la elección de la duración de las fases en la medusa.

En un siguiente paso, se mejoró el modelo de chorro estacionario incorporándole vorticidad, en un primer paso se consideró al vórtice solo, lo que dio como resultado un empuje menor que el de chorro estacionario y por lo tanto una velocidad terminal menor. Luego se modeló el empuje considerando que el vórtice expulsado interactuaba con el vórtice anterior, o con una infinidad de vórtices anteriores. Esto mejoró el empuje dando una velocidad terminal mayor que el empuje por chorro estacionario.

Por último se determinó que tan válidas eran las hipótesis que se hicieron, en especial suponer que el anillo de vorticidad era una línea, que se podía modelar bidimensionalmente con superposición de dos vórtices libres. Para ello se estimó la circulación usando los distintos modelos propuestos, como la definición de circulación, la ley de Biot-Savart, el modelo dado por el potencial complejo la aproximación de anillo delgado. Esto arrojó que el modelo de potencial complejo predecía una velocidad de traslación del vórtice menor a la real. Por lo que se concluyó que posiblemente los modelos dan un empuje menor al real. Esto porque no se consideró que el vórtice anular tuviera estructura, por lo que se corrigió el modelo para un vórtice solo, usando la velocidad dada por la aproximación de anillo delgado, con lo cual se obtuvo una velocidad promedio mayor.

Trabajos posteriores podrían refinar los modelos considerando la estructura del anillo de vorticidad, proponiendo en que manera los vórtices anteriores influyen en el empuje

del vórtice expulsado por la medusa y también es necesario determinar la duración de los vórtices para con ello poder establecer que modelo de interacción con vórtices se apega más a la realidad, y que parámetros son importantes para decidir que modelo usar en cada caso.

Otro punto importante para refinar los modelos es suponer que pasaría si en vez de una sola medusa existieran más, cuyos chorros alteraran el chorro de la primer medusa. También quitar la restricción de movimiento unidimensional podría arrojar modelos más cercanos a la realidad. Por último, el enfoque que aquí se trató fue desde la mecánica de fluidos, sin embargo, sería necesario contar también con ayuda de otras áreas, como la mecánica de sólidos elásticos, en aras de un modelo más cercano a la realidad. Esto es importante, puesto que como se mencionó al principio del capítulo 2, Gemmell ha encontrado que existe una contribución mayor por la formación de regiones de baja presión, lo cual es originado por las deformaciones de la medusa misma. De ser posible, se podría encontrar un modelo para describir ese empuje y compararlo con los modelos aquí presentados.

Bibliografía

- [1] ATKINSON, B. A., *Meso-scale atmospheric circulation*, Academic Press, USA, 1981, págs. 201,261.
- [2] ALLEN, C., *Corals, jellyfishes,, and other simple animals*, grzimeks Student Animal Life Resource, USA, 2005, págs. 57,61.
- [3] BATCHELOR, G.K. *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, USA, 2000, págs 331-334.
- [4] CORONA-CRUZ, A., JIMÉNEZ-SALGADO, B.y J. Sisko «Cuerpos geométricos oscilando en un líquido: Masa virtual, paradoja de D’Alambert», *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, **7** (2013), págs. 24-27.
- [5] CURRIE, G. I. *Fundamental Mechanics of Fluid*, Third Edition, Marcel Dekker Inc., USA, 2003, págs 8-20.
- [6] DABIRI, O. J., *et al* «Flow patterns generated by obladed medusan jellyfish:field measurements and laboratory analyses», *The Journal of Experimental Biology*, **208** (2005), págs. 1257-1256.
- [7] DABIRI, J. O., COLIN, S.P. y COSTELLO, J. H., «Fast-swimming hydromedusae exploit velar kinematics to form an optimal vortex wake», *The Journal of Experimental Biology*, **209**(2006), págs. 2025-2042.
- [8] DABIRI, J. O., «On the estimation of swimming and flying forces from wake measurements», *The Journal of Experimental Biology*, **208** (2005), págs. 3519-3532.
- [9] DAILY, J.W., HARLEMAN, R.F. *Dinámica de los fluidos*, Editorial Trillas, México, 1975, págs. 421-465.
- [10] DANIEL, T. L., «Mechanics and energetics of medusan jet propulsion», *Can. J. Zool.*, **61** (1983), págs. 1406-1420.
- [11] DANIEL, T. L., «Cost of locomotion: undsteady medusan swimming», *Can. J. Zool.*, **61** (1983), págs. 1406-1420.
- [12] GEMELL, B. J., *et al* «Suction-based propulsion as a basis for efficient animal swimming», *Nature Comunication*, (2015), págs. 1-8.
- [13] GERHANT, P., GROSS, R. y J. HOCHSTEIN *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*, Segunda edición, Addison-Wesley, USA, 1995, págs 8-20.

- [14] GLADFELTER, W.G., «Structure and function of the locomotory system of *Polyorchis montereyensis* (Cnidaria, Hydrozoa)», *Helgol. Wiss. Meeresunters*, **23** (1972), págs. 38-79.
- [15] GUYON, E., L. PETIT, J. HULIN y C.D. MITESCU, *Physical Hydrodynamics*, Primera Edición, Oxford University Press, USA, New York, 2001, págs. 269-278.
- [16] HERNÁNDEZ-ZAPATA, S., LÓPEZ-SÁNCHEZ, E. J. y RUIZ-CHAVARRÍA, G., «Collision d'un tourbillon fluide sur une surface conique», *Rencontre du Non-Linéaire*, **12** (2015), págs. 61-66.
- [17] HOERNER, S.F. *Fluid dynamic drag*, Midland Park, USA, 1965.
- [18] KUEGER, P. S., *et al* «Vortex Rings in Bio-inspired and Biological Jet Propulsion», *Advances in Science and Technology*, **58** (2008), págs. 237-246.
- [19] LANDAU, L.D., E. M. LIFSHITZ, *Mecánica de fluidos Vol. 6 del Curso de Física Teórica*, Editorial Reverté, México, 1985, págs. 1,16-17.
- [20] Lighthill, M. J., «Hydromechanics of aquatic animal propulsion», *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **1** (1969), págs. 413-446.
- [21] Lindent, M. J., Turner, J. S., «Optimal Vortex rings and aquatic propulsion mechanism», *Proc. R. Lond.*, **271** (2004), págs. 647-653.
- [22] LÓPEZ-SÁNCHEZ, E. J., RUIZ-CHAVARRÍA, G., «Vorticity and particle transport in periodic flow leaving channel», *European Journal of Mechanics B/Fluid*, **42** (2013), págs. 92-103.
- [23] MARTÍN-RODRIGUEZ, P. ET AL, «Utilización de anemómetro de hilo caliente a temperatura constante para mediciones de velocidad de aire en túnel de viento», *Revista de Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, **XXXV** (2014), págs. 78-92.
- [24] MARUT, K., STEWART, MICHAEL, T., VILLANUEVA, A. y PRIYA, S., «A jellyfish-inspired jet propulsion robot actuated by an iris mechanism», *Samrt Mater Struct.*, **22**(2013), págs. 1-12.
- [25] MCHENRY, M. J., JED JASON, «The ontogenetic scaling of hydrodynamics and swimming performance in jellyfish (*Aurelia Aurita*)», *The Journal of Experimental Biology*, **206** (2003), págs. 4125-4137.
- [26] MILLS, C., «Density Is Altered in Hydromedusae and Ctenophores in Response to Changes in Salinity », *Biological Bulletin*, **1** (1984), págs. 206-215.
- [27] PARK, S. G., CHANG, C. B., HUANG W., SUNG, H. J., «Simulation of swimming oblate jellyfish with a paddling-based locomotion», *Journal of Mechanics Fluid*, **748** (2014), págs. 731-755
- [28] POTTER, M. C., D. C. WIGGERT, *Mechanics of fluids*, Primera Edición, Prentice-Hall, USA, New York, 1991, págs. 81-82.

- [29] ROSCHKO, P.J., «Experiments on the flow past a circular cylinder a», *Journal of Fluids Mechanics*, **4** (1959), págs. 903-908.
- [30] RASPA, V., GODOY-DIANA, R., THIRIA, B., «: Topology-induced effect in bio-mimetic propulsive wakes», *J. Fluid Mech.*, **729** (2013), págs. 377-387.
- [31] RUÍZ-CHAVARRÍA, G., «Determinación experimental de las características de vórtices anulares.», *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, **4** (2010), págs. 903-908.
- [32] RUPPERT, E.E., R.D. BARNES, *Zoología de los invertebrados*, Sexta Edición, McGRAW-HILL INTERAMERICANA, México, DF, 1997, págs. 106,107,120,128.
- [33] SAFFMAN, P.G., *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, USA, 1992, págs. 1-8, 192-195.
- [34] SEIKMAN, J., «On a pulsating jet from the end of a tube, with application to the propulsion of certain aquatic animals», *Fluid Mech.*, **15**(1962), págs. 399-418.
- [35] SHARIFF, K., LEONARD, A. , «Vortex Ring», *Annu. Rev. Fluid. Mecha.*, **24** (1992), págs. 235-279.
- [36] TSI (FLUID MECHANICS INSTRUMENT DIVISION) *IFA 300 Constant Temperature Anemometer System Instruction Manual*, TSI Incorporated, USA, 2000, págs 20-22.
- [37] VON KARMAN, T. *Aerodynamics*, Mc Graw-Hill, London, 1963, págs 25-27.
- [38] YOUNG, H.D., FREEDMAN, R. A y FORD, L. *Física Universitaria vol. 1*, Decimo-segunda Edición, Addison-Wesley, México, 2009, pág. 187