UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN ACERCAMIENTO AL PROBLEMA DEL SUBESPACIO INVARIANTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

LAURA ROSALES ORTIZ

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MAGALI LOUISE MARIE FOLCH GABAYET

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.
2018

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Rosales
   Ortiz
   Laura
   Universidad Nacional Autónoma
   de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   413002246

2. Datos del tutor
   Dra.
   Magali Louise Marie
   Folch
   Gabayet

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Rubén Alejandro
   Martínez
   Avendaño

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Javier
   Páez
   Cárdenas

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Alejandro Darío
   Rojas
   Sánchez

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Carlos
   Hernández
   Garciadiego

7. Datos del trabajo escrito
   Un acercamiento al problema
   del subespacio invariante
   127 p
   2018

I

A mi tía

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mi mamá por su admirable fuerza y cariño, a mi papá por todo su apoyo, sus enseñanzas y sus chistes, a mi hermano por la total confianza y por todas las risas y desvaríos que compartimos a diario.
A Ceci, por todo lo que simplemente no cabe aquí.
A mi tía Inés, por ser ese ejemplo de lucha y optimismo, y a Alex, tan importantes para mí. A Abi y Elo que sin duda han estado siempre cerca.

A Alejandro, por ser un gran profesor, un gran amigo, explicarme tantas cosas y por apoyarme en estos años de alguna forma u otra.

A Uriel por compartirme siempre su inagotable alegría, a Neria, Omar, y Martín, he aprendido mucho de ellos. A mis amigos que me acompañaron (ya sea a distancia o de cerca) durante la carrera: Jacquou, Sophie, Meli, Esteban, Omar M., Marce, Argelia, Fer, y unos cuantos más.

Agradezco a Magali, por sus geniales cursos de análisis y por dejarme este tema de tesis que disfruté muchísimo. A Javier, por ser un gran maestro y una persona tan generosa.

A todos los sinodales por leer este trabajo con paciencia, y por todas sus correcciones. Un especial agradecimiento a Rubén por su curso en la Escuela de análisis de Colima, me ayudó a entender muchísimas cosas.

A mis alumnos, con toda seguridad he aprendido más de ellos que ellos de mí.

Finalmente, a Beetsi, por todos los recuerdos, por aquel vuelo.

Agradezco a la UNAM y al proyecto DGAPA-PAPIIT IN106418.

Introducción

El problema del subespacio invariante es uno de los problemas más conocidos en el área de teoría de operadores. Surgió a mediados del siglo pasado y a pesar de los numerosos resultados que ha habido, varias preguntas siguen abiertas.

El objetivo de esta tesis es llegar a estudiar el siguiente problema: dado un espacio de Hilbert X y un operador $T : X \to X$ acotado, ¿T tiene un subespacio S invariante cerrado y no trivial? A este problema abierto, se le conoce como el problema del subespacio invariante.

Estudiar esta pregunta tiene varias motivaciones; si T tuviera un subespacio invariante cerrado no trivial, facilitaría la manipulación del operador. Que T no tenga subespacios invariantes cerrados no triviales nos da también mucha información; dado que siempre se pueden construir subespacios cerrados que sean invariantes bajo T, lograr demostrar que un operador no tiene subespacios invariantes cerrados no triviales, obliga a dichos subespacios a ser densos en X. Esto nos da teoremas de aproximación.

Para abordar el problema, partiremos desde un conjunto de hipótesis muy reducido y a medida que avancemos iremos dotando tanto a la transformación T, como al subconjunto S y al espacio X con nuevas propiedades hasta llegar a las planteadas en la ya mencionada pregunta.

En el primer capítulo se hará la construcción del problema; definiremos conjunto invariante y partiremos de la pregunta ¿cuándo una transformación tiene un conjunto invariante? Haremos varias observaciones para evitar respuestas triviales, daremos ejemplos y, como ya se mencionó, iremos agregando poco a poco hipótesis a X, T y S. Acabaremos planteando la siguiente pregunta: Si X es un espacio vectorial, T una transformación lineal, y S un subespacio de X,

¿T tiene un subespacio invariante distinto del $\{0\}$ y del total?

En el segundo capítulo desmenuzaremos el problema en el caso en que el espacio X sea de dimensión finita. Daremos ejemplos de subespacios invariantes no triviales para ciertas transformaciones lineales y lograremos responder la pregunta separando los casos $\dim X = 1$, $\dim X = 2$ y $\dim X \geqslant 3$. Para ello necesitaremos hacer uso de un poco de álgebra lineal.

Finalmente, en el tercero, estudiaremos lo que sucede si X es de dimensión infinita. Este último estará dividido en cinco partes; en la primera X seguirá siendo simplemente un espacio vectorial. Demostraremos que bajo estas condiciones todo operador lineal tiene un subespacio invariante distinto del $\{0\}$ y del total. A continuación, pediremos que dicho subespacio sea también cerrado, y para ello debemos dotar al espacio X de una topología; demostraremos que si X es un espacio vectorial topológico no separable, entonces toda transformación lineal tiene un subespacio invariante cerrado distinto del $\{0\}$ y del total. Tendremos que definir conceptos de convergencia en estos espacios. En la tercera parte, le agregaremos a X una norma, daremos definiciones y ejemplos, y en la cuarta pediremos además que X sea completo. Introduciremos un poco de teoría espectral de operadores, que acompañaremos con varios ejemplos para finalmente llegar al punto clave de esa parte: el teorema de Lomonosov. Ahí demostraremos que todo operador compacto tiene un subespacio invariante cerrado no trivial. Extenderemos este teorema a una clase más grande de operadores.

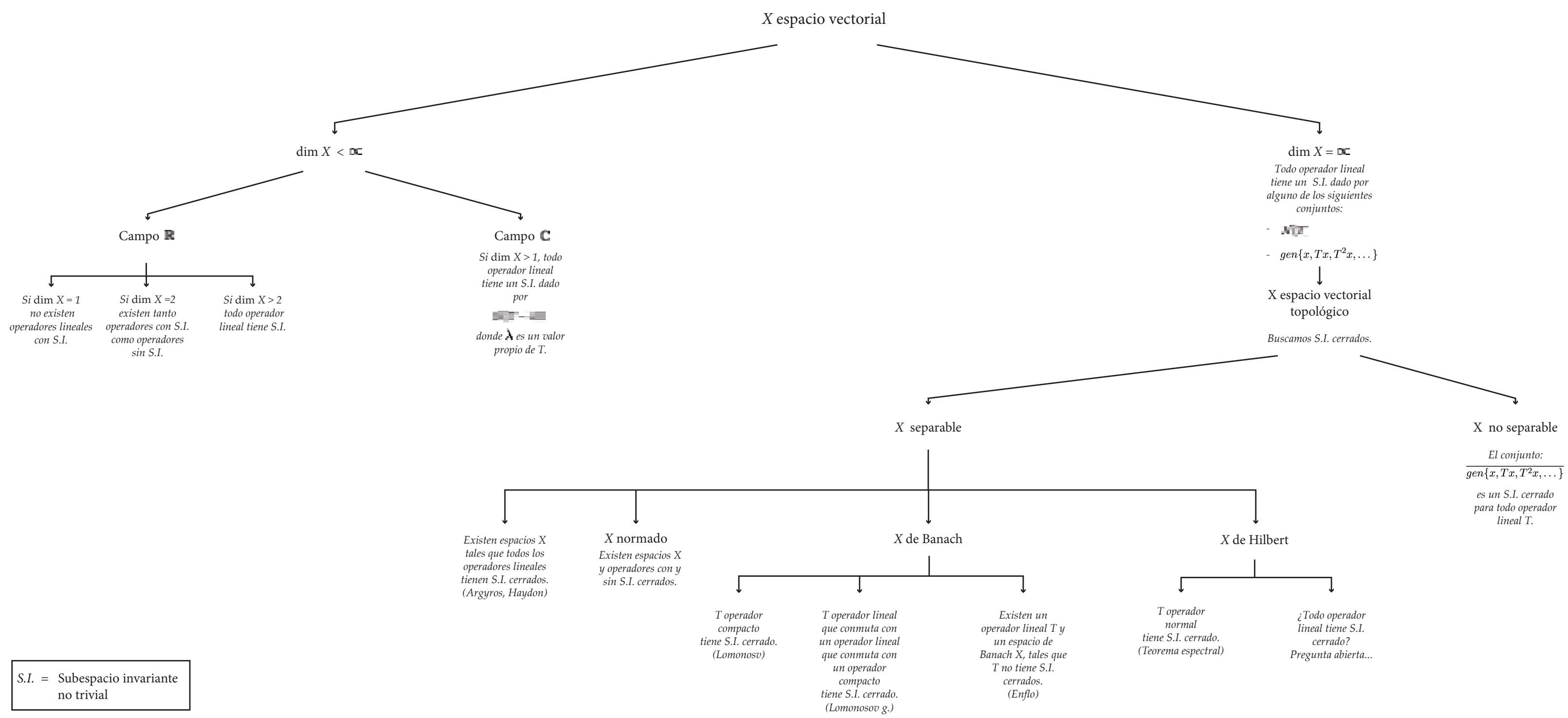
Finalmente en la última parte le otorgaremos al espacio un producto interno, resultando entonces X un espacio de Hilbert. Nuestro objetivo será probar que todo operador normal tiene un subespacio invariante cerrado distinto del $\{0\}$ y del total. Para ello, haremos uso de los teoremas espectrales para operadores autoadjuntos y normales.

En cada una de estas secciones se presentarán las definiciones y los resultados necesarios para la demostración de los teoremas importantes, además de ejemplos para ilustrar dichas definiciones y teoremas.

Durante todo el trabajo denotaremos como $\mathcal{R}(T)$ al rango y como y $\mathcal{N}(T)$ al núcleo de una transformación T. Además $\operatorname{gen} U$ denotará el subespacio generado por el conjunto U.

Este trabajo usa material de Álgebra lineal, Análisis, Topología y Teoría espectral de operadores, se necesita cierta familiaridad con ello.

Varias ideas de la tesis están basadas en el libro [12] y en la exposición sobre dicho problema, que presentó Rubén Martínez durante la Escuela de análisis matemático en Colima 2016.

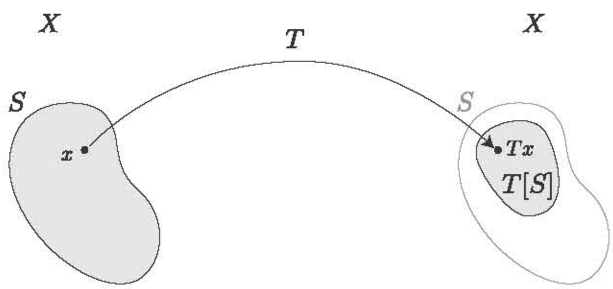

X espacio vectorial
dim X < ∞
dim X = ∞
Todo operador lineal tiene un S.I. dado por alguno de los siguientes conjuntos:
- gen{x, Tx, T²x, ...}
X espacio vectorial topológico
Buscamos S.I. cerrados.
Campo ℝ
Campo ℂ
Si dim X > 1, todo operador lineal tiene un S.I. dado por
donde λ es un valor propio de T.
Si dim X = 1 no existen operadores lineales con S.I.
Si dim X =2 existen tanto operadores con S.I. como operadores sin S.I.
Si dim X > 2 todo operador lineal tiene S.I.
X separable
X no separable
El conjunto: gen{x, Tx, T²x, ...} es un S.I. cerrado para todo operador lineal T.
Existen espacios X tales que todos los operadores lineales tienen S.I. cerrados. (Argyros, Haydon)
X normado
Existen espacios X y operadores con y sin S.I. cerrados.
X de Banach
X de Hilbert
T operador compacto tiene S.I. cerrado. (Lomonosv)
T operador lineal que conmuta con un operador lineal que conmuta con un operador compacto tiene S.I. cerrado. (Lomonosov g.)
Existen un operador lineal T y un espacio de Banach X, tales que T no tiene S.I. cerrados. (Enflo)
T operador normal tiene S.I. cerrado. (Teorema espectral)
¿Todo operador lineal tiene S.I. cerrado? Pregunta abierta...
S.I. = Subespacio invariante no trivial

Índice general

Capítulo 1

Construcción del problema

Vamos a considerar una transformación $T : X \to X$, un conjunto $S \subseteq X$ y nos preguntaremos si $T[S] \subseteq S$. Cuando esto suceda, diremos que S es un conjunto invariante bajo T, o un conjunto T-invariante.



El primer ejemplo de conjunto invariante que se nos podría venir a la mente es el espacio total X; podemos observar que $T[X] \subseteq X$ por pura definición de T. Otros conjuntos que se ocurren rápidamente son los puntos fijos; si T tuviera puntos fijos, todos ellos seran invariantes:

$$S = \{x \in X : T(x) = x\},$$

es un conjunto T-invariante.

Si pensamos en ejemplos sencillos de conjuntos invariantes nos encontramos con una variedad muy grande. Dado que nuestra pregunta es visiblemente demasiado general, vamos a restringirnos un poco. Hay tres caminos de investigación, o tres preguntas que nos podemos hacer:

- ¿Qué podemos pedirle a T?
- ¿Qué podemos pedirle a S?
- ¿Qué podemos pedirle a X?

Estas preguntas están muy relacionadas entre ellas; para pedirle ciertas cosas a S o a T vamos a tener que adecuar el espacio X.

Empecemos tomando transformaciones que se pueden considerar sencillas: las transformaciones lineales. Para trabajar con una transformación lineal definida de X en X debemos otorgar al espacio una estructura en la que tenga sentido hablar de suma de vectores y de producto por escalares. Por esto a partir de aquí X será un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y vamos a considerar nada más transformaciones lineales. De este modo, queda claro que $T(0) = 0$ y por tanto $\{0\}$ es un conjunto invariante bajo T para toda T.

Dado que los conjuntos X y $\{0\}$ son siempre invariantes bajo cualquier transformación lineal, los llamaremos los conjuntos invariantes triviales para T. Nuestro objetivo será entonces analizar cuándo T tiene conjuntos invariantes no triviales.

Vamos a dar unos cuantos ejemplos de conjuntos invariantes de funciones lineales.

Ejemplo 1.0.1. *Empecemos por el ejemplo más accesible, vamos a considerar una transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces $T(x) = \alpha x$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.*

- *Si $\alpha = 1$, todo subconjunto $S \subsetneq \mathbb{R}$ es un conjunto invariante de la transformación $T(x) = x$.*

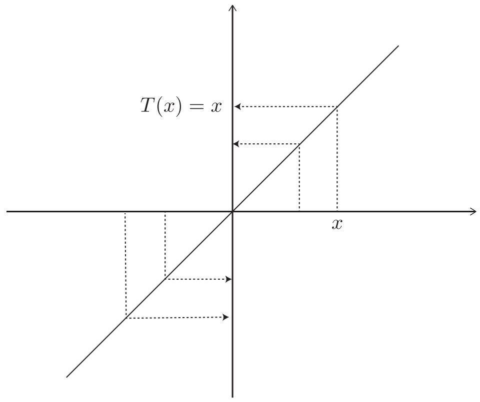


Figura 1.1: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es T-invariante.

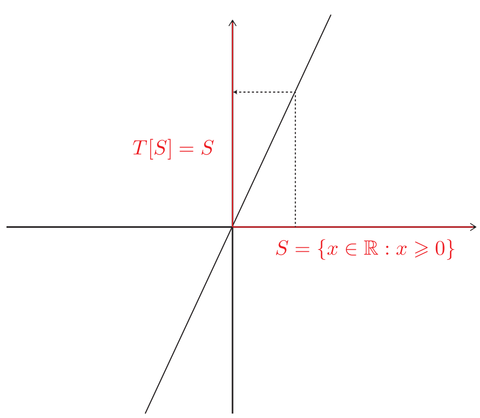
- *Si* $\alpha \geqslant 0$, *entonces sea*

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}\,.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} T[S] &= \{T(x) : x \in S\} \\ &= \{y = \alpha x : x \in S\} \\ &= \{y : y \geqslant 0\} \\ &= S. \end{aligned}$$

Por lo tanto S *es invariante bajo* T.



- *Si $\alpha < 0$, separemos en dos casos:*

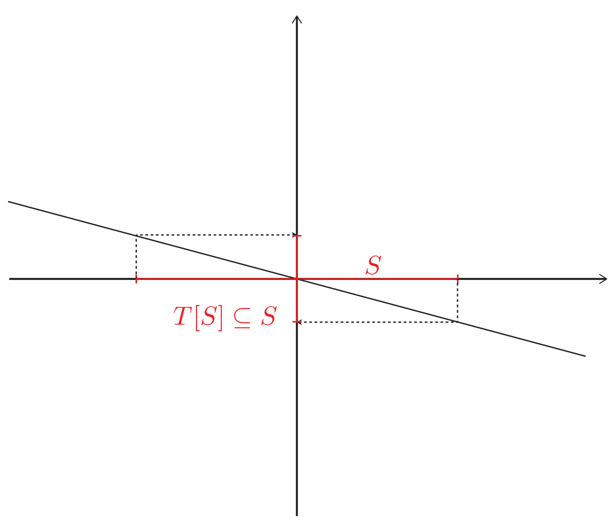
  - *Si $-1 \leqslant \alpha < 0$ entonces sea $a \in \mathbb{R}^+$ y consideremos $S = [-a, a]$.*

$$\begin{aligned} T[S] &= \{T(x) : x \in S\} \\ &= \{y = \alpha x : x \in [-a, a]\} \\ &= [-\alpha \cdot a, \alpha \cdot a]. \end{aligned}$$

Y dado que $-1 \leqslant \alpha < 0$ entonces

$$-a \leqslant -a \cdot \alpha \leqslant a \cdot \alpha \leqslant a,$$

por lo tanto $T[S] \subseteq S$.



  - *Si $\alpha < -1$, los conjuntos invariantes que habíamos encontrado en los casos anteriores ya no sirven aquí.*

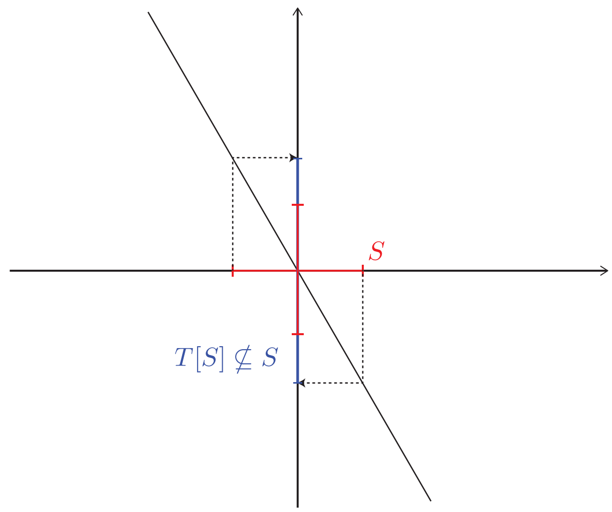


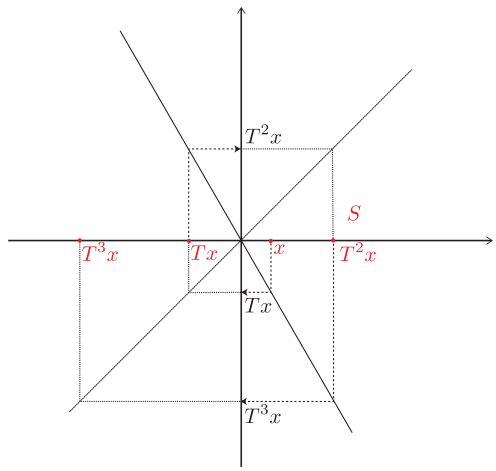
Figura 1.2: Si consideramos nuevamente los conjuntos de la forma $[-a, a]$, valuando T en a tenemos $T(a) = \alpha a < -a$, por lo tanto $T(a) \notin [-a, a]$.

Sin embargo esto no implica que T no tenga conjuntos invariantes. El método que mostraremos a continuación nos será de gran ayuda más adelante. Vamos a construir un conjunto de tal forma que lo forcemos a ser invariante bajo T.

Sea $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, buscamos S tal que $T[S] \subseteq S$. Entonces queremos que $T(x) = \alpha x \in S$. Si esto ocurriera podríamos nuevamente aplicar la transformación y $T^2(x) \in S$. Siguiendo este proceso, llegaríamos a que $T^n(x) = \alpha^n x \in S$. Es decir que si definimos

$$S = \left\{x, Tx, T^2x, T^3x \ldots\right\},$$

entonces S es invariante bajo T. ¿Es no trivial? Como $x \neq 0$ entonces $S \neq \{0\}$, además podemos observar que S es un conjunto numerable, por lo tanto $S \neq \mathbb{R}$.



Este último método nos lleva a hacer varias observaciones; para cada punto hay un conjunto invariante "asociado", es decir cada punto genera a un conjunto invariante. Otra observación es que no usamos que $\alpha < -1$, por tanto pudimos haber encontrado conjuntos invariantes con este mismo método en cualquiera de los casos anteriores. Lo podríamos generalizar a $\mathbb{R}^n$ sin ninguna dificultad, y más aún, lo podemos generalizar a cualquier espacio vectorial X infinito:

Proposición 1.0.1. *Sea X espacio vectorial infinito. Para un $x \neq 0$ consideremos el conjunto:*

$$S = \{x, Tx, T^2x, \dots\},$$

que ya vimos que es invariante bajo T. Como $x \neq 0$, entonces $S \neq \{0\}$.

Si $T^m x = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces S es finito pues a partir de ahí todos sus elementos se anularán. Y por tanto $S \neq X$.

Si $0 \notin S$, entonces $S \neq X$.

En ambos casos X es no trivial.

Esto incluso nos incita a pensar que este método sirve para cualquier T lineal y X espacio vectorial, sin embargo hay que tener cuidado, nuestro espacio X tiene un grado de libertad demasiado grande; podríamos tomar un X que sea finito, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.0.2. *Sea $X = \mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2$. Entonces $X = \{1, 0\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Como $\{1\}$*

es base, existe una transformación lineal tal que $T(1) = 0$. *Ahora, los únicos conjuntos invariantes posibles serían* $\{0\}$, $\{1\}$, *y* $\{0, 1\}$. *De entre éstos, el único que no es trivial es el* $\{1\}$, *pero dado que* $T(1) = 0$ *entonces* $\{1\}$ *no es invariante bajo* T. *En consecuencia* T *no tiene conjuntos invariantes no triviales.*

Nosotros no nos vamos a adentrar en estos terrenos, a partir de aquí sólo consideraremos espacios vectoriales sobre los campos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Lo trabajado en el ejemplo 1.0.1 nos muestra que, restringiéndonos a estos campos, nuestra pregunta carece un poco de sentido con unas hipótesis tan laxas.

Podemos notar que le estamos dando demasiada libertad al conjunto S. Como la estructura de nuestro espacio X es de espacio vectorial y T es lineal, vamos a pedir que S sea un subespacio de X. Dado que los conjuntos $\{0\}$ y X son subespacios, tiene sentido preguntarse por la existencia de subespacios no triviales. Con estas hipótesis llegamos finalmente al problema principal de la tesis: Dado una transformación lineal $T : X \to X$, ¿T tiene un subespacio invariante no trivial?

Primero habría que asegurarnos que nuestra pregunta está bien planteada: ¿el conjunto de todas las transformaciones lineales de X en X que tienen subespacio invariante, es no vacío? Efectivamente, la transformación identidad $I : X \to X$, y sus múltiplos, cumplirán siempre con esto.

A lo largo del trabajo nos haremos repetidamente las siguientes preguntas:

¿Existe alguna transformación lineal $T : X \to X$, que no sea un múltiplo de la identidad, tal que T tenga un subespacio invariante no trivial?

¿Existe alguna transformación lineal $T : X \to X$ tal que no tenga subespacios invariantes no triviales?

En caso de que las respuestas anteriores sean positivas podemos vernos más restrictivos:

¿Qué le podemos pedir a T para poder asegurar que T tenga siempre un subespacio invariante no trivial?

¿Qué le podemos pedir a X para que algún tipo de transformación lineal T, que no sea un múltiplo de la identidad, tenga un subespacio invariante no trivial?

Capítulo 2

X de dimensión finita

En este capítulo trabajaremos con X un espacio vectorial de dimensión finita n con campo $\mathbb{F}$.

2.1. Espacio vectorial real

En un inicio veremos qué ocurre cuando $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Dado que todo espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces nos enfocaremos en estudiar la existencia de subespacios invariantes en $\mathbb{R}^n$. Para ello, primero analizaremos qué ocurre si $n = 1$.

Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal. Como la dimensión del espacio es 1 se tiene que $T(x) = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, además dado $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ se tiene que $\text{gen}\{x\} = \mathbb{R}$. Por lo tanto los únicos subespacios de $\mathbb{R}$ son el $\{0\}$ y $\mathbb{R}$, concluimos entonces que no existen subespacios invariantes no triviales para T.

Supongamos ahora que $n > 1$ y consideremos las siguientes transformaciones:

Ejemplo 2.1.1. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, 6x - y)$.*
Primero veamos qué sucede con el eje y.

$$T(0, y) = (0, -y),$$

por lo tanto dicho eje es un subespacio invariante no trivial para T. Ahora, dado *que los únicos subespacios no triviales de* $\mathbb{R}^2$ *restantes son rectas de la forma* $y = \alpha x$ *entonces quisiéramos encontrar puntos tales que:*

$$T(x, \alpha x) = \lambda(x, \alpha x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Y esto ocurre si y sólo si:

$$(2x, 6x - \alpha x) - \lambda(x, \alpha x) = 0,$$

$$((2 - \lambda)x, (6 - \alpha - \alpha\lambda)x) = 0,$$

es decir:

$$\begin{aligned} \lambda = 2 \quad &y \quad 6 - \alpha - \lambda\alpha = 0, \\ \lambda = 2 \quad &y \quad \alpha = 2. \end{aligned}$$

Por lo cual $S = \operatorname{gen}\{(1, 2)\}$ *es un subespacio invariante no trivial para* T*. En efecto, al evaluar un elemento* $\lambda(1, 2)$ *de* S *en* T *obtenemos que*

$$\begin{aligned} T(\lambda,\lambda\, 2) &= \lambda(2, 6 - 2) \\ &= 2\lambda(1, 2), \end{aligned}$$

el cual es elemento de S*.*

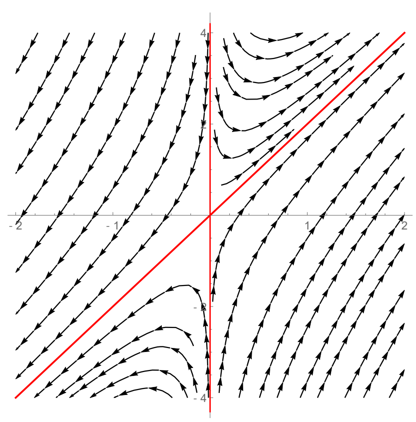


Figura 2.1: Geométricamente T está dejando a los vectores de la rectas $x = 0$ y $y = 2x$ sobre ellas mismas.

Este ejemplo muestra que en dimensión dos existen transformaciones lineales con subespacios invariantes no triviales. ¿Será entonces que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tiene subespacios invariantes no triviales? el siguiente ejemplo muestra que la respuesta a esta pregunta es negativa.

Ejemplo 2.1.2. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-y, x)$. Buscamos S subespacio no trivial tal que $T[S] \subseteq S$, es decir puntos que cumplan que:*

$$T(x, \alpha x) = \lambda(x, \alpha x).$$

Y esto ocurre si y sólo si:

$$\begin{aligned} (-\alpha x, x) &= \lambda(x, \alpha x) \\ ((-\lambda - \alpha)x, (1 - \lambda\alpha)x) &= 0. \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} &\alpha = -\lambda \quad y \quad \alpha\lambda = 1 \\ &\alpha = -\lambda \quad y \quad -\lambda^2 = 1. \end{aligned}$$

Pero dado que $\lambda \in \mathbb{R}$, no es posible que $\lambda^2 = -1$. Llegamos a una contradicción por lo que concluimos que T no tiene subespacios invariantes no triviales.

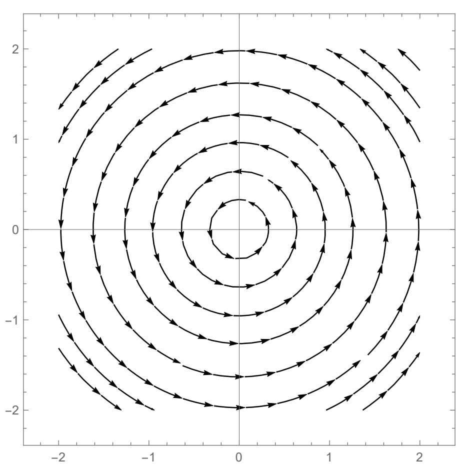


Figura 2.2: Geométricamente, nuestra transformación es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, la cual mueve a todo elemento del plano salvo al origen.

Con este par de ejemplos, estamos mostrando que cuando el campo es real de dimensión 2, nuestro problema está resuelto: existen tanto operadores con algún subespacio invariante no trivial, como operadores sin subespacios invariantes no triviales. Sin embargo el problema se puede estudiar un poco más a fondo y con un poco más de formalidad.

En realidad lo que hicimos en el ejemplo 2.1.1 fue buscar una dirección invariante bajo T. Esto debería recordarnos a un tema importante de álgebra lineal: los vectores propios. Haremos una pequeña pausa para recordar ciertos conceptos. En esta parte denotaremos por A la matriz asociada a la transformación T con respecto a la base canónica.

Definición 2.1.1. *Sea $T : X \to X$ una transformación lineal y A su matriz asociada con respecto a la base canónica.*

- *Se dice que λ es un valor propio de T (o de A) si $Ax = \lambda x$ para algún $x \neq 0$.*
- *A los vectores x correspondientes a dicho λ, se les llama vectores propios asociados al valor propio λ.*
- *El conjunto de todos los vectores propios asociados a λ que denotaremos por*
$$E_\lambda = \{x \in X : Ax = \lambda x\},$$
es un subespacio al que llamaremos espacio propio asociado a λ.

Definición 2.1.2. *(Espectro en dimensión finita) Sea $T : X \to X$ una transformación lineal, X de dimensión finita y A su matriz asociada.*

Al conjunto de todos los valores propios de T lo llamaremos espectro de T (o de A) y lo denotamos por $\sigma(T)$.

Observación 2.1.1. *Es muy importante notar que aquí el espectro de T es el conjunto de todos los valores λ para los cuales existe $x \neq 0$ tal que:*

$$Ax = \lambda x.$$

O equivalentemente:
$$(A - \lambda I)x = 0.$$

En otras palabras, si pensamos a $A-\lambda I$ como una nueva transformación lineal, que denotaremos como A_λ, estamos buscando en realidad los elementos para los cuales A_λ no es invertible. Pues en caso de existir A_λ^{-1} entonces se tendría

$$\begin{aligned} A_\lambda^{-1}A_\lambda x &= A_\lambda^{-1}0 \\ Ix &= 0 \\ x &= 0, \end{aligned}$$

lo cual contradice nuestra hipótesis $x \neq 0$.

Esta observación es muy importante pues en dimensión finita el espectro de T coincide con el conjunto de valores propios, pero en dimensión infinita no es el caso; si A_λ es invertible habrá otras maneras de clasificar al operador y tendremos que modificar nuestra definición de espectro.

La forma más sencilla para ver si A_λ es invertible es recurrir a su determinante. Queremos que A_λ no sea invertible, es decir que $\det(A_\lambda) = 0$. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.1.3. *Sea $T : X \to X$ lineal y A su matriz asociada, a $p(\lambda) = \det A_\lambda$ lo llamaremos el polinomio característico de A.*

En lo que sigue, nuestro objetivo será analizar qué sucede en dimensión $n \geqslant 3$. El siguiente teorema nos indica qué relación hay entre los valores propios y los subespacios invariantes.

Teorema 2.1.1. *Sea $T : X \to X$ una transformación lineal con X de dimensión finita $n > 1$. Si T tiene un vector propio entonces T tiene un subespacio invariante no trivial.*

Demostración. Supongamos que T tiene un vector propio $x \neq 0$ correspondiente al valor propio λ. Entonces $E_\lambda \neq \emptyset$ y, más aún, $E_\lambda \neq \{0\}$. Pero por definición de espacio propio $E_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$, E_λ es T invariante. Consideremos $S = \operatorname{gen}\{x\}$. Entonces como $x \in E_\lambda$, S es invariante bajo T. Además como $x \neq 0$, entonces $S \neq \{0\}$, y finalmente, como $n > 1$, entonces $S \neq X$. Por tanto S es no trivial.

□

En conclusión, siempre que T tenga un vector propio, T tendrá un subespacio in$v$ariante. Ahora surge la siguiente pregunta: ¿todo subespacio invariante proviene de un vector propio de T? en otras palabras ¿se cumplirá el recíproco del teorema anterior?

La respuesta es negativa: intuitivamente podríamos imaginar una transformación que mantenga invariante todo un plano pero rotando todos sus vectores, en consecuencia en ese plano no habría ningún vector propio, y lograr que a todos los demás vectores los rote o transforme de modo que no haya más vectores propios.

Para construir este ejemplo, hay que considerar que, dado que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ son rectas que pasan por el origen, en ese caso efectivamente si T tiene un subespacio invariante entonces T tiene un vector propio. Por tanto tendremos que trabajar en dimensiones más grandes.

Ejemplo 2.1.3. *Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$. Su matriz asociada A con respecto a la base canónica está dada por:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el subespacio $S = \{(a, b, 0, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ y sea $(a, b, 0, 0) \in S$. Entonces:

$$T(a, b, 0, 0) = (-b, a, 0, 0).$$

Pero $(-b, a, 0, 0) \in S$ por lo cual S es un subespacio invariante no trivial. Ahora veamos que T no tiene valores propios reales. Supongamos que existe λ y $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $Tx = \lambda x$. Entonces $A - \lambda I$ no es invertible y por ende

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ (\lambda^2 + 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pero esta ecuación no tiene solución real, con lo que concluimos que T no tiene valores propios y por tanto vectores propios.

Si bien los vectores propios son una herramienta muy útil para encontrar subespacios invariantes pareciera que tendremos que encontrar otros métodos de búsqueda. Regresamos a nuestro problema. Hasta ahora sólo hemos podido dar un ejemplo de transformación lineal sin subespacios invariantes en $\mathbb{R}^2$. ¿Será posible encontrar transformaciones lineales sin subespacios invariantes no triviales en $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 3$?

Demostraremos que en este caso toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene algún subespacio invariante no trivial. Haremos uso del teorema fundamental del álgebra que enunciamos a continuación:

Resultado 2.1.1. *Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado m, entonces*

$$p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m)$$

donde $x_1, x_2, \dots x_m \in \mathbb{C}$ son las raíces de p, no forzosamente distintas.

Lema 2.1.1. *Todo polinomio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ se factoriza como un producto de polinomios de grado uno y de polinomios de grado dos.*

Demostración. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado m. Consideremos su extensión $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Por el teorema fundamental del álgebra sabemos que existen $x_1 \dots x_m \in \mathbb{C}$ (no forzosamente distintos) tales que:

$$p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m)$$

También sabemos que si $x_j \in \mathbb{C}$ es solución de $p(x)$ entonces su conjugado $\bar{x}_j$ también lo es. Reagrupamos dos a dos los productos $(x - x_j)(x - \bar{x}_j)$, entonces, dicho producto $(x - x_j)(x - \bar{x}_j) = |x - x_j|^2$ es un número real.
Sin pérdida de generalidad, sean $x_1, \dots x_k$ y $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$ las raíces no-reales y $x_{2k+1}, \dots x_m$ las reales. Entonces:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - x_1)(x - \bar{x}_1) \dots (x - x_k)(x - \bar{x}_k)(x - x_{k+1}) \dots (x - x_m) \\ &= |x - x_1|^2 \dots |x - x_k|^2 (x - x_{k+1}) \dots (x - x_m), \end{aligned}$$

donde cada $|x - x_j|^2 = x^2 - (x_j + \bar{x}_j)x - |x_j|^2$. Por lo tanto los k primeros términos son polinomios de grado dos, con lo cual finalizamos nuestra prueba.

□

Antes de continuar, recordemos el Teorema de Cayley-Hamilton [1].

Resultado 2.1.2. *Sea X de dimensión finita, $T : X \to X$ una transformación lineal, y p su polinomio característico. Entonces $p(T) = 0$.*

Este resultado y el lema anterior nos permitirán demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.1.2. *Todo operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 3$ tiene un subespacio invariante no trivial.*

Demostración. Consideremos el polinomio característico $p(\lambda)$ de T el cual tiene grado n. Por el teorema anterior, lo podemos factorizar como producto de polinomios de grado uno y dos, digamos:

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda^2 - b_j\lambda - c_j) \prod_{j=2k+1}^{n}(\lambda - d_j).$$

Si $2k + 1 < n$, o en otras palabras, si p tiene al menos un término lineal, ya habríamos acabado pues en dado caso, T tendría un valor propio y por el teorema 2.1.1 se seguiría que T tiene un subespacio invariante no trivial. De esto podemos concluir que si n es impar, entonces T tiene un subespacio invariante no trivial. Supongamos entonces que n es par, y que:

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n/2}(\lambda^2 - b_j\lambda - c_j).$$

Sabemos que, por el teorema de Cayley-Hamilton, resultado 2.1.2, T es solución de su polinomio característico, por lo cual:

$$p(T) = 0.$$

Es decir que:

$$p(T) = \prod_{j=1}^{n/2}(T^2 - b_jT - c_j) = 0.$$

[1] El resultado puede consultarse en [8].

Entonces $(T^2 - b_jT - c_j)v = 0$ para al menos una $j \in \{1, \ldots, n/2\}$ y un $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$. Esto se traduce en que T^2v se puede escribir como combinación lineal de Tv y de v. Consideremos entonces $S = \text{gen}\{v, Tv\}$. Afirmamos que S es un subespacio invariante no trivial para T.

En efecto, sea $y \in S$ entonces $y = \beta Tv + \gamma v$ para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Al aplicar la transformación a este elemento obtenemos, debido a la linealidad de ésta, que:

$$Ty = \beta T^2 v + \gamma Tv.$$

Pero por lo anterior, $T^2v \in \text{gen}\{v, Tv\}$ y en consecuencia $Ty \in S$, es decir que S es un subespacio invariante. Además dado que $v \neq 0$ entonces $S \neq \{0\}$. Falta ver que $S \neq \mathbb{R}^n$ y es aquí donde entra la hipótesis del teorema que aún no hemos usado. Como la dimensión del espacio es mayor o igual a 3, entonces no puede ser generado por dos vectores, con lo que se concluye que $S = \text{gen}\{x, Tx\} \neq \mathbb{R}^n$. □

En resumen trabajando con campo real $\mathbb{R}$, para $n = 1$ no existen operadores lineales con subespacios invariantes no triviales. Para $n = 2$ existen tanto operadores con como sin subespacios invariantes no triviales, pero para $n \geqslant 3$ todo operador lineal $T \neq 0$ tiene al menos un subespacio invariante no trivial. Veremos ahora qué ocurre si el espacio vectorial en el que trabajamos es complejo.

2.2. Espacio vectorial complejo

En esta sección consideraremos ahora $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ sobre el campo $\mathbb{C}$. Retomemos el ejemplo 2.1.2; ahora nuestra transformación va de $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Observamos que la ecuación $\lambda^2 = -1$ sí tiene solución en los complejos y ésta sería tanto $\lambda = i$ como $\lambda = -i$, por lo cual T tiene dos subespacios invariantes no triviales dados por

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : T(x, \alpha x) = i(x, \alpha x)\} \text{ y } S_2 = \{x \in \mathbb{R} : T(x, \alpha x) = -i(x, \alpha x)\},$$

que escritos de otra forma son:

$$S_1 = \text{gen}\{(1, i)\} \text{ y } S_2 = \text{gen}\{(1, -i)\}.$$

Resulta que al trabajar con el campo complejo, el único ejemplo de resultado “negativo” que teníamos sí tiene subespacios invariantes. ¿Será entonces que todo operador lineal en un espacio con campo complejo tiene un subespacio invariante no trivial? El siguiente teorema nos ayudará a responder a esta pregunta:

Teorema 2.2.1. *Todo operador lineal en un espacio vectorial X complejo de dimensión finita, tiene al menos un valor propio.*

Demostración. La prueba de este teorema es una consecuencia directa del teorema fundamental del álgebra.

Consideremos $T : X \to X$ lineal con X de dimensión finita n y A su matriz asociada relativa a la base canónica. Buscamos nuevamente $x \neq 0$ tal que

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Lo cual, como ya habíamos hecho anteriormente nos lleva a analizar las soluciones del polinomio característico

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I).$$

Gracias al teorema fundamental del álgebra que enunciamos en el resultado 2.1.1, sabemos que todo polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene n raíces complejas, posiblemente repetidas. Sea $1 \leqslant k \leqslant n$ el número de raíces distintas. Entonces $p(\lambda)$ tiene k soluciones en $\mathbb{C}$, es decir que T tiene k valores propios y por ende k subespacios invariantes no triviales. $\square$

Corolario 2.2.1. *Todo operador lineal sobre un espacio con campo complejo de dimensión n, con $1 < n < \infty$, tiene un subespacio invariante no trivial.*

Capítulo 3

X de dimensión infinita

Ya hicimos un análisis de lo que sucede con nuestro problema en espacios vectoriales de dimensión finita y pudimos dar resultados concretos acerca de la existencia de subespacios invariantes. En dimensión infinita se tienen muchas más ramas de investigación aún vigentes. Estudiaremos primero la extensión de dimensión finita a infinita sin agregarle más hipótesis al espacio X. Sorprendentemente el problema se resuelve rápidamente; pediremos entonces que el subespacio sea además cerrado, y por tanto tendremos que trabajar con una topología. Enseguida le daremos norma al espacio y finalmente un producto interno.

Durante estas secciones, siempre que mencionemos la palabra operador, nos referiremos a una transformación lineal.

3.1. X espacio vectorial

En esta sección X será un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$.

La primera dificultad con la que nos enfrentamos en dimensión infinita, es que aunque el campo sea complejo, existen operadores lineales sin vectores propios. Un ejemplo muy conocido es el siguiente:

Ejemplo 3.1.1. *Sea X el espacio de sucesiones con coeficientes en $\mathbb{C}$ y sea*

$T : X \to X$ la transformación lineal dada por:

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2 \dots).$$

Afirmamos que T no tiene valores ni vectores propios. En efecto si $(T - \lambda I)x = 0$ para algún $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} Tx - \lambda x &= (-\lambda, x_0 - x_1\lambda, x_1 - x_2\lambda, \dots) \\ &= (0, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\lambda = 0$, y en consecuencia

$$(0, x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, 0, 0, \dots).$$

Por tanto $x = 0$. Pero el vector 0 no puede ser un vector propio, concluimos que T no tiene valores propios.

A pesar de esto, el operador T sí tiene subespacios invariantes. Este ejemplo lo estudiaremos con más cuidado más adelante.

En el capítulo uno, vimos que una manera muy eficaz de encontrar conjuntos T-invariantes era tomando cualquier punto distinto de cero $x \neq 0$ y construyendo el conjunto

$$\left\{x, Tx, T^2x, \dots\right\}.$$

Aunque este conjunto no es un subespacio, podemos considerar ahora su generado y preguntarnos si éste seguirá siendo invariante bajo T.

Lema 3.1.1. *Sea $T : X \to X$ operador lineal y sea $x \in X$. Entonces*

$$S = \operatorname{gen}\left\{x, Tx, T^2x, \dots\right\},$$

es un subespacio T-invariante.

Demostración. Sea $y \in S$ entonces $y = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i T^i x$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y con

$\alpha_i \in \mathbb{C}$. Como T es lineal se tiene que:

$$Ty = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i T^{i+1}x.$$

Y dado que $T^j x \in S$ para todo $j \in \mathbb{N}$ entonces $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i T^{i+1}x \in S$, es decir que $Ty \in S$. $\square$

Observación 3.1.1. *Este lema es válido para cualquier conjunto de la forma*

$$S = \text{gen}\left\{T^k x, T^{k+1}x, T^{k+2}x, \ldots\right\},$$

para toda $k \in \mathbb{N}$.

Queremos demostrar que todo operador lineal tiene un subespacio invariante no trivial, para ello necesitaremos el siguiente lema:

Lema 3.1.2. *Sea $x \in X$ y sea $M_x = \text{gen}\left\{Tx, T^2x, T^3x, \ldots\right\}$. Si $x \in M_x$ entonces M_x es un subespacio de X de dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que $x \in M_x$ con $x \neq 0$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i T^i x,$$

para algún $m \in \mathbb{N}$ y con $a_m \neq 0$.

Denotemos $\tilde{M}_x = \text{gen}\{Tx, \ldots, T^m x\}$. Al aplicar T sucesivamente obtenemos que

$$\begin{array}{lcl}
x & = & a_1Tx + a_2T^2x + \cdots + a_mT^mx \\
Tx & = & a_1T^2x + a_2T^3x + \cdots + a_mT^{m+1}x \\
T^2x & = & a_1T^3x + a_2T^4x + \cdots + a_mT^{m+2}x \\
\vdots & & \\
T^nx & = & a_1T^{n+1}x + a_2T^{n+2}x + \cdots + a_mT^{n+m}.
\end{array}$$

Dado que $a_m \neq 0$ podemos despejar el último término de cada una de estas ecuaciones

$$\begin{array}{rcll} T^m x & = & b_0 x - b_1 Tx - b_2 T^2 x - \cdots - b_{m-1} T^{m-1} x & \\ T^{m+1} x & = & b_0 Tx - b_1 T^2 x - b_2 T^3 x - \cdots - b_{m-1} T^m x & \in \tilde{M}_x \quad (1) \\ T^{m+2} x & = & b_0 T^2 x - b_1 T^3 x - b_2 T^4 x - \cdots - b_{m-1} T^{m+1} x & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Observamos que los primeros $m-1$ términos de la combinación lineal de T^{m+2} están en $\tilde{M}_x$, pero por (1) el último término $b_{m-1}T^{m+1}$ también está en $\tilde{M}_x$ por lo que $T^{m+2}x \in \tilde{M}_x$. Formalicemos esto usando inducción. Sea $n > m$ y supongamos que para toda $j \leq n$ se tiene que $T^j x \in \tilde{M}_x$. Dado que:

$$T^{n+1-m}x = a_1 T^{(n+1-m)+1}x + a_2 T^{(n+1-m)+2}x + \cdots + a_m T^{n+1}x,$$

despejando $T^{n+1}x$ obtenemos que

$$T^{n+1}x = b_0 T^{n+1-m}x - b_1 T^{(n+1-m)+1}x - \cdots - b_{m-1}T^n x.$$

Por hipótesis de inducción todos los términos de la parte derecha del sumando pertenecen a $\tilde{M}_x$ por lo cual $T^{n+1} \in \tilde{M}_x$.

Lo que acabamos de demostrar es que $M_x = \tilde{M}_x$, y dado que este último es generado por un número finito de términos, entonces es un subespacio de dimensión finita y por ende M_x también lo es. $\square$

Teorema 3.1.1. *Todo operador lineal $T : X \to X$ con X de dimensión infinita tiene un subespacio invariante no trivial.*

Demostración. Sea $T : X \to X$ operador lineal con X de dimensión infinita.

Primero consideremos el núcleo de T que denotamos por $\mathcal{N}(T)$. Ya es sabido que S es un subespacio, ahora, si nos tomamos $x \in \mathcal{N}(T)$ entonces

$$Tx = 0.$$

Y dado que $0 \in \mathcal{N}(T)$ entonces $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio invariante. Si es no trivial entonces hemos acabado. Si lo es entonces tenemos dos casos:

- Si $\mathcal{N}(T) = X$, entonces querría decir que $T \equiv 0$ y en dado caso, como X es de dimensión infinita, existe algún subespacio $S \subsetneq X$ tal que $S \neq \{0\}$. S sería un subespacio invariante no trivial.

- Si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ entonces T es inyectiva, en cuyo caso tomemos algún $x \in X$ con $x \neq 0$ y consideremos

$$S = \text{gen}\left\{Tx, T^2x, \ldots\right\}.$$

  Por el lema 3.1.1 S es subespacio invariante, falta ver que no es trivial.

  Tenemos que $S \neq \{0\}$ pues como $x \neq 0$ y T es inyectiva, entonces $T^ix \neq 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Ahora supongamos que $X = S$. Entonces para todo $y \in X$, se tiene que $y \in S$, en particular como $x \in X$, entonces $x \in S$. Por el lema 3.1.2 se tiene que S es de dimensión finita, lo que implica que X es de dimensión finita lo cual es una contradicción.

$\square$

Este resultado es muy sorprendente y hasta este punto el problema queda resuelto. Para poder seguir trabajando, vamos a agregar una hipótesis suplementaria a S. A partir de aquí buscaremos subespacios que sean invariantes, no triviales y además cerrados en X. Dado que la cerradura de todo subespacio es nuevamente un subespacio, esto nos facilitará la construcción de lo que buscamos.

Al hablar de conceptos como "cerrado" o "abierto" en X, inevitablemente le estamos otorgando una topología a nuestro espacio y es lo que abordaremos en la siguiente sección.

Observación 3.1.2. *En espacios de dimensión finita todo subespacio es cerrado, por tanto no era necesario hacer distinción, sin embargo en dimensión infinita no siempre lo son.*

3.2. X espacio vectorial topológico

En esta sección X será un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$. En la primera parte enunciaremos las principales definiciones, proposiciones y algunos ejemplos que necesitaremos; todos ellos están demostrados con detalle en el apéndice A[1]. En la segunda parte vamos a reformular algunos lemas para adecuarlos a esta nueva hipótesis, y demostraremos que si X no es separable entonces tiene un subespacio invariante no trivial.

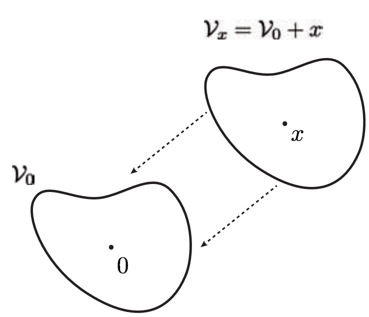
3.2.1. Preliminares

Definición 3.2.1. *Sea X un espacio vectorial y τ una topología para X. Decimos que X es un espacio vectorial topológico si las aplicaciones $\mathcal{S} : X \times X \to X$, $\mathcal{P} : \mathbb{F} \times X \to X$ dadas por*

$$\mathcal{S}(x, y) = x + y \quad y \quad \mathcal{P}(\lambda, x) = \lambda x,$$

son continuas con dicha topología. (Los espacios del dominio están dotados con la topología producto).

Observación 3.2.1. *Diremos que V_x es una vecindad de x si $V_x - x$ es una vecindad del origen. En otras palabras, toda vecindad de un punto x se escribe como $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_0 + x$ donde $\mathcal{V}_0$ es vecindad del 0.*



Definición 3.2.2. *Decimos que un conjunto I equipado con la relación $\preceq$, $(I, \preceq)$ es un conjunto dirigido si se cumplen las siguientes condiciones:*

[1] Los resultados pueden también consultarse en [4] y [10].

1. $\alpha \preceq \alpha$ *para toda* $\alpha \in I$.

2. *Si* $\alpha \preceq \beta$ *y* $\beta \preceq \gamma$ *entonces* $\alpha \preceq \gamma$.

3. *Para toda* $\alpha,\beta \in I$ *existe* $\gamma_{\alpha,\beta} \in I$ *tal que* $\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$ *y* $\beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$.

Definición 3.2.3. *Sea* X *un espacio vectorial topológico. Una red en* X *es una función de un conjunto dirigido* $(I, \preceq)$ *en* X,

$$x : I \to X.$$

Sea $\alpha \in I$, *denotamos la valuación de dicha función como* $x(\alpha) = x_\alpha$.

Daremos un par de ejemplos que usaremos más adelante para ilustrar esta definición, las demostraciones se encuentran en el apéndice A.

Ejemplo 3.2.1. *Sea* (X,τ) *un espacio vectorial topológico y sea* $x \in X$. *Consideremos* $I = \{\mathcal{V} \subseteq X : \mathcal{V}$ *es vecindad de* $x\}$ *con la relación* $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ *si y sólo si* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. *Entonces* $(I, \preceq)$ *es un conjunto dirigido.*

Ejemplo 3.2.2. *Sean* $(I, \preceq_1)$, $(J, \preceq_2)$ *dos conjuntos dirigidos. Entonces* $L = I \times J$, *donde* $I \times J = \{(\alpha,\beta) : \alpha \in I, \beta \in J\}$, *es un conjunto dirigido con la relación* $(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_2, \beta_2)$ *si y sólo si* $\alpha_1 \preceq_1 \alpha_2$ *y* $\beta_1 \preceq_2 \beta_2$.

Se define la convergencia de una red con una topología τ de la misma manera que se define la convergencia de una sucesión en un espacio topológico.

Definición 3.2.4. *Sea* X *un espacio vectorial topológico. Decimos que una red* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *converge a* x *si para toda vecindad* $\mathcal{V}_x$ *de* x *existe* $\alpha_{\mathcal{V}_x}$ *tal que si* $\alpha_{\mathcal{V}_x} \preceq \alpha$ *entonces* $x_\alpha \in \mathcal{V}_x$.

Proposición 3.2.1. *Sea* $M \subseteq X$ *y sea* $x \in X$. *Entonces* $x \in \overline{M}$ *si y sólo si existe una red* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *en* M *que converge a* x.

Definición 3.2.5. *Sean* I *y* J *dos conjuntos dirigidos y* $x : I \to X$ *denotada por* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una red. Si* $g : J \to I$ *es tal que*

1. *Si* $\beta_1 \preceq_1 \beta_2$ *entonces* $g(\beta_1) \preceq_2 g(\beta_2)$, *(g es creciente).*

2. *Para toda* $\alpha \in I$ *existe* $\beta \in J$ *tal que* $\alpha \preceq_2 g(\beta)$,

decimos que $x \circ g : J \to X$ *denotada como* $\left\{x_{g(\beta)}\right\}_{\beta \in J}$ *es una subred de* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Observación 3.2.2. *Para evitar demasiada notación, cuando se hable de subredes ya no distinguiremos explícitamente* $\preceq_1$ *de* $\preceq_2$. *Se entiende que si* $\alpha_1,\ \alpha_2$ *son elementos de* I, *entonces* $\preceq$ *hace referencia a la relación del conjunto dirigido* I *y de la misma manera si* $\beta_1,\ \beta_2 \in J$ *entonces* $\preceq$ *hace referencia a la relación del conjunto dirigido* J.

Proposición 3.2.2. *Sea* $x \in X$ *y* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *una red en* X *que converge a* x. *Entonces toda subred de* $\{x_\alpha\}$ *converge a* x.

Ejemplo 3.2.3. *Sean* I *y* J *dos conjuntos dirigidos y consideremos* $L = I \times J$ *como en el ejemplo A.1.2. Sean* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *y* $\{y_\beta\}_{\beta \in J}$ *dos redes. Definamos* $g : L \to I$ *como* $g(\alpha,\beta) = \alpha$. *Entonces* $\left\{x_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta) \in L}$ *es una subred de* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Si además suponemos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *converge a* $x \in X$, *por la proposición A.1.2 se tiene que* $\left\{x_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta) \in L}$ *converge a* x.

Definición 3.2.6. *Sean* X, Y *dos espacios vectoriales topológicos y* $T : X \to Y$ *una función.* T *es continua en* $x \in X$ *si para toda vecindad* $\mathcal{V}_y$ *de* $y = T(x)$ *existe una vecindad de* x *denotada* $\mathcal{V}_x$ *tal que* $T(\mathcal{V}_x) \subseteq \mathcal{V}_y$.

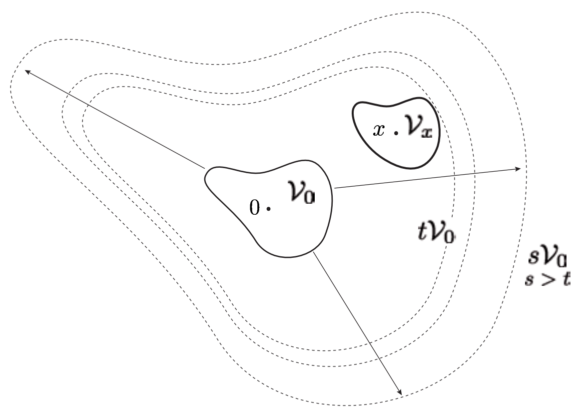
Proposición 3.2.3. *Sean* X, Y *dos espacios vectoriales topológicos y sea* $T : X \to Y$ *una función. Entonces* T *es continua en* x *si y sólo si para toda red* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *que converge a* x, *se tiene que* $T(x_\alpha)$ *converge a* $T(x)$.

Para poder atacar nuestro problema necesitaremos determinar qué tipo de operadores queremos. En el análisis funcional se trabaja generalmente con operadores lineales acotados; aquellos que mandan conjuntos acotados en conjuntos acotados, y se demuestra que en espacios normados un operador lineal es continuo si y sólo si es acotado. En espacios vectoriales topológicos no se cumple la equivalencia; todo operador lineal continuo es acotado pero el regreso no es verdadero. Definiremos y enunciaremos los resultados que nos llevan a ese teorema.

Definición 3.2.7. *Sea* X *espacio vectorial topológico, diremos que un conjunto* $M \subseteq X$ *es acotado si para cada vecindad* $\mathcal{V}_0$ *del origen existe un escalar* $s \in \mathbb{R}$

con $s > 0$ tal que $M \subseteq t\mathcal{V}_0$ para todo $t > s$, donde

$$t\mathcal{V}_0 := \{tx : x \in \mathcal{V}_0\}.$$



Proposición 3.2.4. *Sean X, Y espacios topológicos, $T : X \to Y$ un operador lineal tal que T es continuo en $0 \in X$. Entonces T es continuo en X.*

Definición 3.2.8. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Diremos que T es acotado si para todo conjunto $M \subseteq X$ acotado, se tiene que $T(M)$ es acotado en Y.*

Teorema 3.2.1. *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo, entonces T es acotado.*

Recordamos que las pruebas de estos resultados se pueden consultar en el apéndice A.

3.2.2. Subespacios invariantes en espacios vectoriales topológicos

Debido al teorema 3.2.1 en esta sección consideraremos operadores lineales continuos.

Recordamos que el objetivo de esta parte es demostrar que todo operador lineal continuo sobre un espacio X no separable, tiene un subespacio invariante no trivial. Para ello necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 3.2.1. *Sea M un subespacio vectorial de un espacio vectorial topológico (X,τ). Entonces $\overline{M}$ es un subespacio vectorial.*

Demostración.

- Como $M \subseteq \overline{M}$ y $0 \in M$ entonces $0 \in \overline{M}$.
- Sean $x, y \in \overline{M}$, entonces existen dos redes $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ tales que $x_\alpha \longrightarrow x$ y $y_\beta \longrightarrow y$ con respecto a τ. Vamos a demostrar que existe z_γ tal que converge a $x+y$ en τ. Más aún, veremos que z_γ es de la forma $x_\gamma + y_\gamma$. Sea $\mathcal{V}_{x+y}$ una vecindad de $x+y$. Como la aplicación suma $\mathcal{S}(x,y) = x+y$ es continua, entonces existen vecindades de x y de y $\mathcal{V}_x$, $\mathcal{V}_y$, tales que $\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y \subseteq \mathcal{V}_{x+y}$.

  Para esta parte tenemos que construir un conjunto dirigido que abarque tanto a I como a J. Para ello haremos uso del ejemplo 3.2.2. Consideremos $L = I \times J$, sabemos por este último que L es un conjunto dirigido, además por el ejemplo 3.2.3 también tenemos que si

$$\begin{array}{lll} f : L \to I & \text{dada por} & f(\alpha,\beta) = \alpha \\ g : L \to J & \text{dada por} & g(\alpha,\beta) = \beta, \end{array}$$

  entonces $x \circ g$ y $y \circ f$ denotadas por $\left\{x_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ y $\left\{y_{f(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ son subredes de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y de $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ respectivamente. Notemos que nuestras nuevas subredes están indexadas por el mismo conjunto dirigido L, en consecuencia podemos manipularlas con más facilidad.

  Por la proposición 3.2.2 como $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ convergen a x y y respectivamente, entonces $\left\{x_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ y $\left\{y_{f(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ convergen a x y y, respectivamente.

  Es decir que dado $\mathcal{V}_x$ existe $(\alpha_{\mathcal{V}_x}, \beta_{\mathcal{V}_x})$ tal que si $(\alpha_{\mathcal{V}_x}, \beta_{\mathcal{V}_x}) \preceq (\alpha,\beta)$ entonces $x_{g(\alpha,\beta)} \in \mathcal{V}_x$. Análogamente, dado $\mathcal{V}_y$ existe $(\alpha_{\mathcal{V}_y}, \beta_{\mathcal{V}_y})$ tal que si $(\alpha_{\mathcal{V}_y}, \beta_{\mathcal{V}_y}) \preceq (\alpha,\beta)$ entonces $y_{f(\alpha,\beta)} \in \mathcal{V}_y$. Como L es un conjunto dirigido existe $(\gamma,\delta) \in L$ tal que cumple que

$$(\alpha_{\mathcal{V}_x}, \beta_{\mathcal{V}_x}) \preceq (\gamma,\delta) \quad \text{y} \quad (\alpha_{\mathcal{V}_y}, \beta_{\mathcal{V}_y}) \preceq (\gamma,\delta).$$

  Entonces, si $(\gamma,\delta) \preceq (\alpha,\beta)$ tendremos que $x_{g(\alpha,\beta)} \in \mathcal{V}_x$ y $y_{f(\alpha,\beta)} \in \mathcal{V}_y$ y en consecuencia

$$x_{g(\alpha,\beta)} + y_{f(\alpha,\beta)} \in \mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y \subseteq \mathcal{V}_{x+y}.$$

Como $x_{g(\alpha,\beta)}$ y $y_{f(\alpha,\beta)} \in M$ entonces $x + y \in \overline{M}$.

- Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in \overline{M}$. Entonces existe una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $x_\alpha \longrightarrow x$. Veremos que λx_α converge a λx con respecto a τ.

  Sea $\mathcal{V}_{\lambda x}$ una vecindad de λx, dado que la transformación $\mathcal{P}(\lambda, x) = \lambda x$ es continua en τ, entonces existe $\mathcal{V}_x$ tal que $\lambda \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{V}_{\lambda x}$. Ahora, como $x_\alpha \longrightarrow x$ entonces existe $\alpha_{\mathcal{V}_x} \in I$ tal que si $\alpha_{\mathcal{V}_x} \preceq \alpha$, entonces $x_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Por ende $\lambda x_\alpha \in \lambda \mathcal{V}_x$, y dado que $\lambda \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{V}_{\lambda x}$, entonces $\lambda x_\alpha \in \mathcal{V}_{\lambda x}$.

  En consecuencia λx_α converge a λx, y por tanto se tiene que $\lambda x \in \overline{M}$.

Concluimos que $\overline{M}$ es un subespacio vectorial de X.

□

Lema 3.2.2. *Sea $T : X \to X$ operador lineal y continuo. Si M es un subespacio invariante de X bajo T, entonces $\overline{M}$ también lo es.*

Demostración. Como M es subespacio invariante de T entonces $T(M) \subseteq M$ y en consecuencia $\overline{T(M)} \subseteq \overline{M}$. Ahora, por el lema 3.2.1 ya sabemos que $\overline{M}$ es un subespacio de X. Falta demostrar que es también invariante, es decir que $T(\overline{M}) \subseteq \overline{M}$.

Tomemos $x \in \overline{M}$, entonces por la proposición 3.2.1 existe una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $x_\alpha \longrightarrow x$ y para cada $\alpha \in I$, $x_\alpha \in M$. Como T es continua por la proposición 3.2.3, entonces $T(x_\alpha)$ converge a $T(x)$ y dado que $T(x_\alpha) \in M$ entonces $T(x) \in \overline{T(M)} \subseteq \overline{M}$, que es lo que queríamos demostrar. □

Lema 3.2.3. *Sea $T : X \to X$ un operador lineal y sea $x \in X$. Entonces*

$$S = \overline{\text{gen}\{x, Tx, T^2x, \ldots\}}$$

es un subespacio invariante cerrado.

Demostración. Por el lema 3.2.1 sabemos que si M es un subespacio de X entonces $\overline{M}$ también lo es. Por lo cual $\overline{\operatorname{gen}\{x, Tx, T^2x, \dots\}}$ es un subespacio cerrado de X.

Ahora por el lema 3.1.1 sabemos que gen $\left\{x, Tx, T^2x, \dots\right\}$ es un subespacio invariante bajo T, finalmente por el lema 3.2.3 se tiene que $\overline{\operatorname{gen}\{x, Tx, T^2x, \dots\}}$ es también invariante bajo T, con lo cual acabamos la prueba.

□

Teorema 3.2.2. *Sea X un espacio vectorial topológico de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$, tal que $X \neq \{0\}$. Sea $T : X \to X$ un operador lineal. Si X no es separable, entonces T tiene un subespacio invariante cerrado y no trivial.*

Demostración. Supongamos que X no es separable, es decir que no tiene ningún denso numerable. Sea $x \in X$ con $x \neq 0$. Consideremos

$$M = \left\{x, Tx, T^2x, \dots\right\},$$

y llamemos

$$S = \overline{\operatorname{gen} M} = \overline{\operatorname{gen}\{x, Tx, T^2x, \dots\}}.$$

Por el lema 3.2.3 S es un subespacio invariante. Veamos que no es trivial.
Se tiene que $S \neq \{0\}$ pues $x \neq 0$. Ahora, denotemos por

$$\operatorname{gen}_{\mathbb{Q}} M = \left\{ \sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_j : \alpha_j = a_j + b_j i \textit{ con } a_j, b_j \in \mathbb{Q}\ x_j \in M \textit{ y } m \in \mathbb{N} \right\},$$

es decir las combinaciones lineales de elementos de M con coeficientes complejos pero con parte real e imaginaria racional. Dado que M es numerable entonces $\operatorname{gen}_{\mathbb{Q}} M$ es numerable. Además por la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$, se cumple que:

$$\overline{\operatorname{gen}_{\mathbb{Q}} M} = \overline{\operatorname{gen} M}.$$

Finalmente, como por hipótesis X no tiene ningún conjunto denso numerable, entonces

$$\overline{\operatorname{gen}_{\mathbb{Q}} M} \subsetneq X,$$

y por lo tanto

$$S = \overline{\operatorname{gen} M} = \overline{\operatorname{gen}_{\mathbb{Q}} M} \subsetneq X.$$

Es decir, S es un subespacio invariante cerrado y no trivial. $\square$

A raíz de este teorema, a partir de aquí trabajaremos con espacios separables.

3.3. X normado

Ahora vamos a agregarle una norma $|| \ \ ||$ al espacio X. Primero daremos unas definiciones y a continuación unos ejemplos.

3.3.1. Definiciones

Las proposiciones que mencionaremos a continuación no los demostraremos puesto que son resultados que se ven usualmente en cursos de análisis funcional. Se pueden consultar, por ejemplo, en [9].

Definición 3.3.1. *Sea X o $(X, || \ ||)$ el espacio vectorial dotado de la norma $|| \ ||$ y $\mathcal{V} \subseteq X$. Diremos que $\mathcal{V}$ es un subconjunto acotado si existe $t > 0$ tal que $\mathcal{V} \subseteq \{x \in X : ||x|| < t\}$.*

Esta definición es equivalente a la que habíamos dado en la sección anterior para espacios vectoriales topológicos.

Definición 3.3.2. *Sea X o $(X, || \ ||)$ el espacio vectorial dotado de la norma $|| \ ||$, se dice que un operador lineal $T : X \to X$ es un operador acotado si existe $C > 0$ tal que $||Tx|| \leqslant C||x||$ para todo $x \in X$.*

Observación 3.3.1. *Se puede demostrar que esta definición es equivalente a que el operador mande conjuntos acotados en conjuntos acotados.*

De aquí en adelante, salvo que precisemos lo contrario, todos los operadores con los que trabajaremos serán acotados.

Definición 3.3.3. *Denotamos como $\mathfrak{B}(X, X)$ al conjunto de todos los operadores lineales acotados de X en X. Es decir*

$$\mathfrak{B}(X, X) = \{T : X \to X : T \text{ es acotado}\}.$$

Proposición 3.3.1. *Sea $T : X \to X$ un operador acotado, $T \in \mathfrak{B}(X, X)$, entonces*

$$||T|| = \sup \{||Tx|| : x \in X\},$$

es una norma para $\mathfrak{B}(X, X)$.

Ahora sí, cabe mencionar que tendremos la equivalencia siguiente:

Resultado 3.3.1. *Sea X un espacio vectorial normado y $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces T es continuo si y sólo si T es acotado.*

3.3.2. Ejemplos

Preliminares:

En lo que sigue trabajaremos con el espacio $L^2[0, 1]$ con la medida de Lebesgue que denotaremos por μ. Los resultados que mencionamos a continuación se pueden encontrar en [2].

Definición 3.3.4. *Decimos que una función $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es simple, si su imagen consta de un número finito de términos, digamos $R(\phi) = \{c_1, \ldots, c_k\}$ Denotaremos la representación estándar de ϕ como*

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j \chi_{E_j}(x),$$

donde los conjuntos E_j son disjuntos y los coeficientes c_j distintos. La notación χ_{E_j} representa la función característica de E_j.

Resultado 3.3.2. *Si $f \in L^2[0, 1]$ entonces existe una sucesión de funciones simples $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que ϕ_n converge a f en $L^2[0, 1]$.*

Resultado 3.3.3. *Si Y es tal que $\mu(Y) < \infty$ entonces $L^\infty(Y) \subseteq L^2(Y)$.*

En el siguiente ejemplo demostraremos que el operador dado no tiene ningún subespacio invariante no trivial, con lo cual respondemos a una de las preguntas que nos hemos estado haciendo: en espacios normados existen operadores sin subespacios invariantes no triviales.

Ejemplo 3.3.1. *Sea $X \subseteq L^2[0,1]$ el espacio de polinomios con coeficientes reales en el $[0,1]$, con la norma de $L^2[0,1]$ y sea μ la medida de Lebesgue.*

$$||p||_2^2 = \int_0^1 |p(x)|^2 d\mu.$$

Consideremos la transformación $T : X \to X$ definida como

$$T(p(x)) = x \cdot p(x).$$

En este ejemplo demostraremos que T no tiene subespacios invariantes no triviales en X.

Sea p un elemento en X. Observemos que

$$\begin{array}{lcccl} T^0(p(x)) & = & p(x) & & \\ T(p(x)) & = & x \cdot p(x) & & \\ T^2(p(x)) & = & x \cdot (T(p(x)) & = & x^2 \cdot p(x) \\ T^3(p(x)) & = & x^2 \cdot T(p(x)) & = & x^3 \cdot p(x) \\ & \vdots & & & \\ T^n(p(x)) & = & x^n \cdot p(x). & & \end{array}$$

Entonces el generado de $p(x)$ bajo T se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \operatorname{gen}\left\{T^0(p),\ T^1(p),\ T^2(p)\dots\right\} &= \operatorname{gen}\left\{p(x),\ x\cdot p(x),\ x^2\cdot p(x)\dots\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i x^i p(x)) : k\in\mathbb{N}, \alpha_i\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{p(x)\cdot\sum_{i=0}^{k}(\alpha_i x^i) : k\in\mathbb{N}, \alpha_i\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{p(x)\cdot q(x) : q(x)\in X\right\}. \end{aligned}$$

Llamemos $S = \operatorname{gen}\left\{T^0(p),\ T^1(p),\ T^2(p)\dots\right\}$. Sabemos por el lema 3.2.1 y el lema 3.2.2 que $\overline{S}$ es un subespacio invariante de T.

Afirmación 1. *$\overline{S}$ es el subespacio invariante cerrado más pequeño que contiene a p.*

Demostración. En efecto, sea M otro subespacio invariante cerrado que contiene a p. Entonces $T(p) \in M$ y por ende $T^2(p) \in M$, así

$$\left\{T^0(p),\ T^1(p),\ T^2(p)\dots\right\} \subseteq M.$$

Y como M es subespacio se tiene que:

$$\text{gen}\left\{T^0(p),\ T^1(p),\ T^2(p)\dots\right\} \subseteq M.$$

Por tanto

$$\overline{\text{gen}\left\{T^0(p),\ T^1(p),\ T^2(p)\dots\right\}} \subseteq \overline{M}.$$

Dado que M es cerrado, concluimos que $\overline{S} \subseteq M$. □

Sin embargo, demostraremos que todo polinomio $q \in X$ es límite de elementos en S con la norma de $L^2[0,1]$, con lo cual concluiríamos que $\overline{S} = X$ y por tanto no puede haber subespacios invariantes cerrados no triviales.

Para ello necesitaremos el siguiente lema, cuya prueba veremos más adelante:

Lema 3.3.1. *Para toda función $g \in L^\infty[0,1]$ existe una sucesión de polinomios $\{p_k\}$ tal que p_k converge a g en $L^2[0,1]$.*

Afirmación 2. *Para todo $q \in X$ existe una sucesión de polinomios $\{p_k\}$, tal que $p_k \cdot p$ converge a q en $L^2[0,1]$.*

Demostración. Sea $q \in X$ y supongamos por ahora que p tiene solamente una raíz que denotamos a_1. Vamos a suponer también que $a_1 \neq 0, 1$, esto para que no tengamos que separar en varios casos, pero el razonamiento sería el mismo. Sea $A^n = [0,1] - (a_1 - \frac{1}{n}, a_1 + \frac{1}{n})$ para n suficientemente grande y consideremos:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \tfrac{q(x)}{p(x)} \cdot \chi_{[0,1]-(a_1-\frac{1}{n},a_1+\frac{1}{n})}(x) \\ &= \tfrac{q(x)}{p(x)} \cdot \chi_{A^n}(x). \end{aligned}$$

Como $a_1 \notin A^n$ entonces g_n está bien definida y es acotada en el $[0,1]$. Por el lema 3.3.1, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión de polinomios $\{p_k^n\}_{k=0}^\infty$ que converge a g_n en $L^2[0,1]$.

Ahora, observemos que por definición de g_n tenemos que $p \cdot g_n$ converge a q en $L^2[0,1]$. Efectivamente, sea $C := \max\{q^2(x) : x \in [0,1]\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
||p \cdot g_n - q||_2 &= ||q \cdot \chi_{A^n} - q||_2 \\
&\leqslant C \cdot ||\chi_{A^n} - 1||_2 \\
&\leqslant C \cdot ||\chi_{(a_1 - \frac{1}{n}, a_1 + \frac{1}{n})}||_2 \\
&\leqslant C \cdot \mu(a_1 - \tfrac{1}{n}, a_1 + \tfrac{1}{n}) \\
&\leqslant C \tfrac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Por tanto cuando n tiende a infinito $p \cdot g_n$ tiende a q en $L^2[0,1]$. Sea $\varepsilon > 0$ y $N \gg 1$ tal que $||p \cdot g_N - q||_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por el lema 3.3.1 existe $\{p_k^N\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a g_N en $L^2[0,1]$ y por ende $p \cdot p_k^N$ converge a $p \cdot g_N$ en $L^2[0,1]$. Consideremos

$$\begin{aligned}
||p \cdot p_k^N - q||_2 &\leqslant ||p \cdot p_k^N - p \cdot g_N||_2 + ||p \cdot g_N - q||_2 \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon \quad ,
\end{aligned}$$

esto para enteros k suficientemente grandes. Es decir que $\{p \cdot p_k^N\}_{k=0}^{\infty}$ converge a q, que es lo que queríamos demostrar.

Ahora supongamos que p tiene m raíces, digamos $\{a_1, \ldots, a_m\}$ tales que $a_i \neq 0, 1$ para $i \in \{1, 2 \ldots m\}$. Sean $A_i^n = (a_i - \frac{1}{n}, a_i + \frac{1}{n})$ para $i \in \{1, \ldots m\}$ con n suficientemente grande y llamemos $A^n = [0,1] - \bigcup_{i=1}^{m} A_i^n$. La demostración para este caso es análoga a la que hicimos para una sola raíz, sólamente hay que notar que para n suficientemente grande (de modo que los A_i^n sean disjuntos) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu[\bigcup_{i=1}^{m} A_i^n] &= \sum_{i=1}^{m} \mu[A_i^n] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{n} \\
&= \tfrac{2m}{n}
\end{aligned}$$

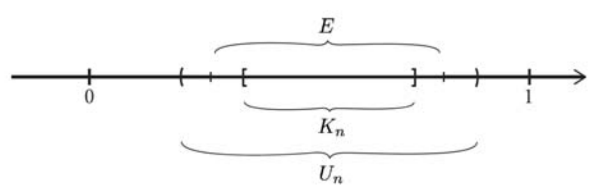
La cual converge a 0 cuando n tiende a infinito. Con esto termina la prueba. $\square$

Para demostrar el lema 3.3.1 vamos a necesitar otro lema.

Lema 3.3.2. *Para toda* $g \in L^\infty[0,1]$ *existe una sucesión de funciones continuas* $\{\psi_n\}$ *tales que* ψ_n *converge a* g *en* $L^2[0,1]$.

Demostración. Sea $g \in L^\infty[0,1]$.

- Caso 1: Supongamos que g es una función característica, es decir, $g = \chi_E$ para algún $E \subseteq [0,1]$ medible. Como la medida μ de Lebesgue es regular, entonces existen $K_n \subseteq E \subseteq U_n$ con K_n compacto, U_n abierto, tales que $\mu(U_n - K_n) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.



Por ejemplo, si E fuera conexo, digamos $E = [a,b]$ entonces K_n y U_n podrían ser $K_n = [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ y $U_n = (a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n})$ para n suficientemente grande. De este modo $\mu(U_n - K_n) = \frac{4}{n} \longrightarrow 0$.

Recordemos el lema de Urysohn [2] aplicado a espacios métricos:

Resultado 3.3.4. *(Lema de Urysohn) Sea* Y *un espacio métrico y* W, V *dos conjuntos cerrados y ajenos. Entonces existe una función continua* $\psi : Y \to [0,1]$ *tal que*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in W \\ 0 & si \quad x \in V. \end{cases}$$

Aquí, como para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos K_n y $[0,1] - U_n$ son cerrados, por el lema de Urysohn existe $\psi_n : [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in K_n \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] - U_n. \end{cases}$$

[2] Se puede consultar en [5]

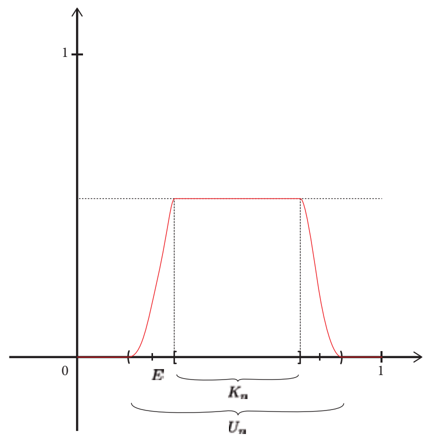


Figura 3.1: Ejemplo de función ψ_n

Afirmamos que ψ_n converge a χ_E en $L^2[0,1]$. En efecto observemos que:
- Si $x \in K_n$, como $K_n \subseteq E$ entonces $\chi_E(x) = 1$. Y por tanto $\psi_n(x) - \chi_E(x) = 0$.
- Si $x \in [0,1] - U_n$, como $[0,1] - U_n \subseteq [0,1] - E$ entonces $\chi_E(x) = 0$ y por tanto $\psi_n(x) - \chi_E(x) = 0$.
- Si $x \in U_n - K_n$ entonces

$$\psi_n(x) - \chi_E(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{si} \quad x \notin E \\ \psi_n(x) - 1 & \text{si} \quad x \in E. \end{cases}$$

En cualquier caso, dado que $0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant 1$ entonces $|\psi_n(x) - \chi_E(x)| \leqslant 1$.
Por tanto:

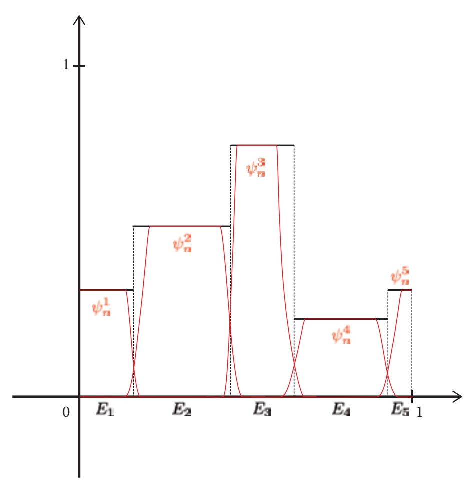
$$\begin{aligned} ||\psi_n - \chi_E||_2^2 &= \int_{[0,1]} |\psi_n - \chi_E|^2 d\mu \\ &= \int_{K_n} |\psi_n - \chi_E|^2 d\mu + \int_{[0,1]-U_n} |\psi_n - \chi_E|^2 d\mu + \int_{U_n - K_n} |\psi_n - \chi_E|^2 d\mu \\ &= 0 + 0 + \int_{U_n - K_n} |\psi_n - \chi_E|^2 d\mu \\ &\leqslant \int_{U_n - K_n} 1 d\mu \\ &\leqslant \mu(U_n - K_n). \end{aligned}$$

En consecuencia, cuando n tiende a infinito, ψ_n converge a χ_E en $L^2[0,1]$.

- Caso 2: Supongamos que g es una función simple, es decir

$$g(x) = \sum_{j=0}^{r} c_i \chi_{E_i}(x).$$

Con los conjuntos E_i disjuntos. Sabemos por el caso 1 que para cada χ_{E_i} existe una función continua ψ_n^i que converge a χ_{E_i} en $L^2[0,1]$. Esto implica que $c_i \cdot \psi_n^i$ converge a $c_i \cdot \chi_{E_i}$ en $L^2[0,1]$, y en consecuencia $\psi_n(x) = \sum_{j=0}^{r} c_i \psi_n^i(x)$ converge a $g(x) = \sum_{j=0}^{r} c_i \chi_{E_i}(x)$ en $L^2[0,1]$. Y ψ_n es una función continua.



- Caso 3: Sea $g \in L^\infty[0,1]$, entonces existe una sucesión de funciones simples $\{\phi_m\}$ tal que converge a g en $L^2[0,1]$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos la sucesión de funciones continuas ψ_n^m tal que $\psi_n^m \longrightarrow \phi_m$. Como esto sucede, tomemos en particular la subsucesión $\{n_m\}$ tal que:

$$||\psi_{n_m}^m - \phi_m||_2 < \frac{1}{m}.$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces para $m \gg 1$ se tiene que $||g - \phi_m||_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ y que $||\psi_{n_m}^m - \phi_m||_2 < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Concluimos que para $m \gg 1$

$$\begin{aligned} ||g-\psi^m_{n_m}||_2 &\leqslant ||g-\phi_m||_2+||\phi_m-\psi^m_{n_m}||_2 \\ &< \varepsilon \quad , \end{aligned}$$

es decir que $\psi^m_{n_m}$ es una sucesión de funciones continuas que converge a g en $L^2[0,1]$, que es lo que queríamos demostrar.

□

Ahora sí demostremos el lema 3.3.1.

Lema 3.3.1 *Para toda función $g \in L^\infty[0,1]$ existe una sucesión de polinomios $\{p_k\}$ tal que p_k converge a g en $L^2[0,1]$.*

Demostración. Dada $g \in L^\infty[0,1]$, por el lema 3.3.2 existe una sucesión de funciones continuas $\{\psi_n\}$ tal que ψ_n converge a g en $L^2[0,1]$. Como $[0,1]$ es compacto, por el teorema de Stone-Weiestrass para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de polinomios $\{p^n_k\}$ que converge a ψ_n en $L^\infty[0,1]$. Al igual que en la demostración anterior, para cada n podemos encontrar una subsucesión de polinomios $p^n_{k_n}$ tal que $||\psi_n - p^n_{k_n}||_\infty < \frac{1}{k}$. Así que dado $\varepsilon > 0$ si tomamos $k \gg 1$ concluimos que:

$$\begin{aligned} ||g-p^n_{k_n}||_2^2 &\leqslant ||g-\psi_n||_2^2+||\psi_n-p^n_{k_n}||_2^2 \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\int_{[0,1]}|\psi_n-p^n_{k_n}|^2 d\mu \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+||\psi_n-p^n_{k_n}||_\infty^2\cdot\mu([0,1]) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}\cdot 1 \\ &< \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

Es decir que $\left\{p^n_{k_n}\right\}$ converge a g en $L^2[0,1]$ que es lo que queríamos demostrar.

□

Presentaremos ahora otro ejemplo:

Ejemplo 3.3.2. *Sea $X = L^2[0,1]$ y μ la medida de Lebesgue. Consideremos $T : X \to X$ dada por*

$$T(f(x)) = xf(x).$$

Tomemos $E \subsetneq [0,1]$ *medible, tal que* $0 < \mu(E) < 1$. *Sea*

$$S_E = \left\{ f \in L^2[0,1] : f = 0 \text{ casi donde sea (cds) en } E \right\}.$$

Entonces S_E *es un subespacio cerrado, invariante y no trivial para* T.

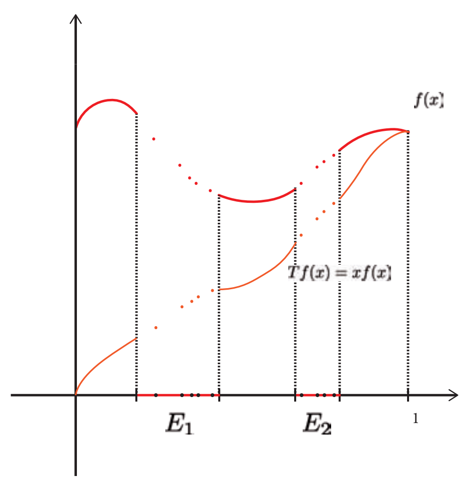


Figura 3.2: $f(x) \in S_E$ donde $E = E_1 \cup E_2$

No demostraremos que es subespacio e iremos directamente a lo demás.

- S_E *es invariante: Sea* $f \in S_E$, *entonces* $T(f(x)) = xf(x)$, *y como* $f(x) = 0$ *casi donde sea en* E, *entonces* $xf(x) = 0$ *cds en* E. *Por tanto* $T(f(x)) \in S_E$.

- S_E *es cerrado: Sea* $f \in \overline{S}_E$, *entonces existe* $\{f_n\} \subseteq S_E$ *tal que* $f_n \to f$ *en* $L^2[0,1]$. *Es decir que para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geqslant N$, *entonces*
$$\left(\int_0^1 |f_n - f|^2 d\mu \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Por tanto
$$\left(\int_E |f_n - f|^2 \; d\mu \right)^{1/2} - \left(\int_{[0,1]\setminus E} |f_n - f|^2 \; d\mu \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Y esto implica que

$$\left(\int_E |f_n - f|^2 \, d\mu\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{[0,1]\setminus E} |f_n - f|^2 \, d\mu\right)^{1/2}.$$

Tenemos que $f_n = 0$ cds en E, por lo tanto el lado izquierdo de la ecuación se reduce a:

$$\left(\int_E |f_n - f|^2 \, d\mu\right)^{1/2} = \left(\int_E |f|^2 \, d\mu\right)^{1/2}.$$

Además como en particular $f_n \to f$ en $[0,1] \setminus E$:

$$\begin{aligned} \left(\int_E |f|^2 \, d\mu\right)^{1/2} &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

Como $|f|^2 \geqslant 0$ entonces $f = 0$ cds en E, concluimos entonces que $f \in S_E$.

- *S_E es no trivial: $S_E \neq L^2[0,1]$ pues $f \equiv 1 \in L^2[0,1]$ y $f \notin S_E$.*
  $S_E \neq \{0\}$ pues la función

  $$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \notin E \\ 0 & si \quad x \in E \end{cases}$$

  está en S_E.

Por lo tanto, S_E es un subespacio invariante cerrado no trivial para T.

La gran diferencia entre los ejemplos que hemos dado, es que en el primer caso, el espacio de polinomios no es completo. Con ello concluimos que si X no es completo, existen operadores sin subespacios invariantes cerrados no triviales. La siguiente pregunta es ¿qué ocurre si X es completo? es decir, si X es un espacio de Banach.

3.4. X de Banach

Trabajaremos en esta sección con X espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$. Estudiaremos los teoremas de Lomonosov, los cuales dan información acerca de la existencia de subespacios invariantes para operadores compactos.

Antes de adentrarnos en ello, será conveniente ofrecer un pequeño panorama de teoría espectral pues de aquí en adelante necesitaremos manejar ciertos conceptos.

3.4.1. Teoría espectral de operadores

Lo que se presentará en esta parte está basado en los textos [9] y [1]. Se presentarán varias definiciones y resultados importantes, que, si bien no los usaremos todos, ayudarán a darnos un contexto acerca del tema.

Al inicio de la sección 3.3.1 mencionamos lo que es un operador acotado. El hecho de que existan operadores no acotados va a influir en la definición de valor espectral que daremos a continuación. Los operadores no acotados se trabajan con herramienta muy distinta a la de los operadores acotados y por ello no los abordaremos aquí.

En dimensión finita es inútil hablar de operadores lineales acotados pues todos lo son. Vimos que dado un operador $T : X \to X$, si $T - \lambda I$ no es invertible, entonces λ es un valor propio de T. Esto nos daba mucha información acerca de los subespacios invariantes de T. Ahora no es suficiente con preguntarnos si T_λ^{-1} existe, también tendremos que preguntarnos si T_λ^{-1} es un operador acotado, y más aún, también nos interrogaremos acerca de si el dominio de éste último es denso en X.

Hay nombres para todos estos conceptos:

Definición 3.4.1. *Sea $T : X \to X$ un operador acotado. Sea $T_\lambda = T - \lambda I$.*

- *Si T_λ^{-1} no existe, entonces λ es un valor propio de T. Al conjunto de valores propios de T lo llamamos espectro puntual y lo denotamos como $\sigma_p(T)$.*
- *Si T_λ^{-1} existe, entonces:*

- *Si T_λ^{-1} es acotada y tiene dominio denso en X, diremos que λ es un valor resolvente de T. Al conjunto de valores resolventes lo denotamos por $\rho(T)$.*
- *Si T_λ^{-1} no es acotada y tiene dominio denso en X, diremos que λ es un valor espectral continuo de T. Al conjunto de valores espectrales continuos, lo denotamos por $\sigma_c(T)$ y lo llamamos espectro continuo.*
- *Si T_λ^{-1} no tiene dominio denso en X, diremos que λ es un valor espectral residual (sin importar que T_λ^{-1} sea acotada o no). Al conjunto de valores espectrales residuales, lo denotamos por $\sigma_r(T)$ y lo llamamos espectro residual.*

Definición 3.4.2. *A la unión de $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ y $\sigma_r(T)$ se le llama el espectro de T, y se denota por*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

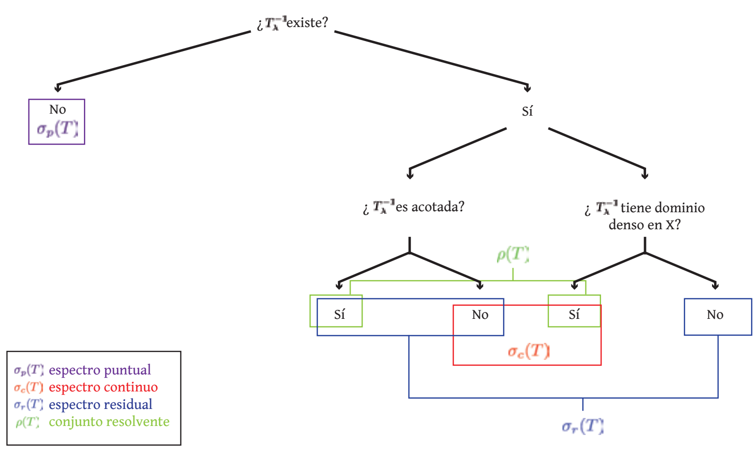


Figura 3.3: Esquema de los distintos espectros de T.

Se va a cumplir que el campo complejo está compuesto del conjunto de todos los valores definidos anteriormente, es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \rho(T) \cup \sigma(T) \\ &= \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \end{aligned}$$

Resulta además, que la "mayor parte" del campo complejo está constituido de valores resolventes (los que se portan bien). Más aún, se tiene el siguiente resultado, que es bastante impresionante:

Resultado 3.4.1. *Sea $T : X \to X$ un operador acotado. Entonces $\sigma(T)$ es compacto en $\mathbb{C}$.*

Este hecho nos permite definir lo siguiente,

Definición 3.4.3. *El radio espectral $r_\sigma(T)$ de un operador $T \in \mathfrak{B}(X, X)$ se define como $r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

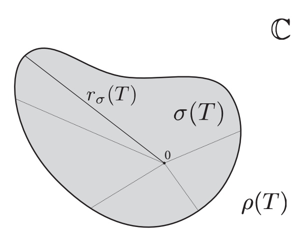


Figura 3.4: Representación del radio espectral de T.

Trabajar con el radio espectral a partir de la definición puede a veces ser laborioso, así que mencionamos otro resultado que nos permitirá expresarlo de una manera más explícita:

Resultado 3.4.2. *Si T es un operador lineal en un espacio complejo de Banach entonces el radio espectral de T está dado por:*

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}$$

Lo siguiente a preguntarnos sería acerca de los espectros de operadores acotados en concreto. Antes de esto, definamos unas cuantas clases de operadores:

Definición 3.4.4. *Sea X un espacio normado,*

1. *$T : X \to X$ es un operador compacto si para todo $K \subseteq X$ acotado, $T(K)$ es compacto.(Esta definición es válida para cualquier transformación $T : X \to X$).*

2. *$T : X \to X$ es un operador polinomialmente compacto si existe un polinomio p no constante, tal que $p(T)$ es un operador compacto.*

3. *Si además X un espacio de Hilbert, $T : X \to X$ es un operador normal si $T^*T = TT^*$, donde T^* denota el operador adjunto a T, es decir el que, de existir, cumple que*

$$< Tx, y >=< x, T^*y >,$$

   para toda $x, y \in X$.

4. *Sea X nuevamente un espacio de Hilbert, $T : X \to X$ es un operador autoadjunto si $T = T^*$.*

Ahora sí, presentaremos algunas características de los operadores que acabamos de definir:

- Si $T : X \to X$ es tal que X es de dimensión finita, entonces $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Además es un conjunto finito, que fue justamente lo que usamos en el segundo capítulo.

- Si X es normado y T es compacto, entonces $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, (ref. 3.4.3). Además $\sigma_p(T)$ es numerable y el único punto de acumulación posible de σ es el 0.

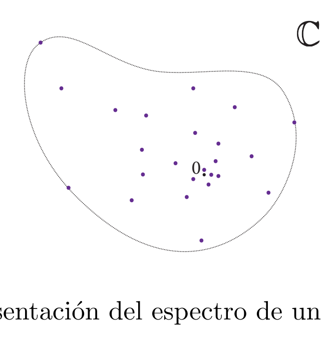


Figura 3.5: Representación del espectro de un operador compacto.

- Si X es de Hilbert (nos adelantamos un poco), y T es autoadjunto, entonces $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Más aún, es un subconjunto acotado y $\sigma_r(T) = \emptyset$.

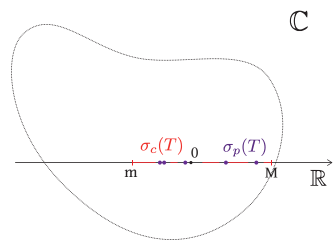


Figura 3.6: Representación del espectro de un operador autoadjunto.

A continuación trabajaremos con operadores compactos. Éstos son más sencillos de manejar pues tienen un comportamiento similar al de los operadores lineales en dimensión finita. Una muestra de esto es lo mencionado en el primer punto y que formalizamos con el siguiente resultado:

Resultado 3.4.3. *(Alternativa de Fredholm) Sea $T : X \to Y$ un operador lineal compacto en X de Banach. Entonces todo valor espectral $\lambda \neq 0$ de T es un valor propio de éste mismo. Es decir que*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}\,.$$

Resultado 3.4.4. *Sea $T : X \to X$ operador acotado. Si $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$, entonces T es un operador compacto.*

Resultado 3.4.5. *Sea $T_n : X \to X$ una sucesión de operadores compactos que converge a T, es decir $||T_n - T|| \longrightarrow 0$. Entonces T es un operador compacto.*

3.4.2. Ejemplos

Ejemplo 3.4.1. *Sean $X = \{x \in l_2 : x_1 = 0\} \subseteq l_2$ con la norma*

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2,$$

y $T : X \to X$ definido como

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

T es un operador acotado y $||T|| = 1$. En la sección 3.1 del capítulo 3 vimos que este operador no tiene valores propios, por lo tanto $\sigma_p(T) = \emptyset$. Sin embargo, el espectro de T no es vacío, veremos que el valor 0 es un valor espectral residual.

En efecto, consideremos

$$\begin{aligned} T_0 &= T - 0I \\ &= T. \end{aligned}$$

$T^{-1} : T(X) \to X$ existe y está dado por

$$T^{-1}(y_1, y_2, \dots) = (y_2, y_3, \dots).$$

(Observación: con el objetivo de que este operador sea efectivamente el operador inverso de T fue que no tomamos nuestro espacio como todo l_2). Además T^{-1} es acotado pues

$$\begin{aligned} ||T^{-1}(y)||^2 &= \sum_{i=2}^{\infty} |y_i|^2 \\ &\leqslant ||y||. \end{aligned}$$

Sin embargo $\overline{T(X)} \neq X$ pues $T(X) = \{y \in X : y_1 = y_2 = 0\}$. Por lo tanto $\lambda = 0 \in \sigma_r(T)$.

Habíamos dejado pendiende la pregunta de si este operador tiene o no subespacios invariantes cerrados no triviales. Vamos a aprovechar para responderla ahora.

Sea

$$M = \{x \in l_2 : x = (0, 0, x_3, \dots)\}.$$

Omitiremos probar que M es subespacio. Veamos que es cerrado; sea $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \overline{M}$, entonces existe $\overline{x}_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots) \in M$ tal que $\overline{x}_n$ converge a x en X. Dado que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_i^n| \leqslant ||\overline{x}_n||_2$, entonces, en particular la primera coordenada x_1^n y la segunda x_2^n convergen a

x_1 y x_2 respectivamente. Esto implica que $x_1 = 0 = x_2$. Por lo cual $x \in M$.

- *Dado $x \in M$, $T(x) = (0, 0, 0, x_3, \dots) \in M$, por lo cual M es invariante bajo T.*
- *El elemento $e_2 = (0, 1, 0, \dots) \notin S$ y en consecuencia $S \neq l_2$.*
- *Dado que $e_3 = (0, 0, 1, 0 \dots) \in S$, entonces $S \neq \{0\}$.*

Ahora veamos un ejemplo de un operador compacto.

Ejemplo 3.4.2. *Sea nuevamente $X = l_2$ y $T : l_2 \to l_2$ definido como*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots)$$

Veremos que T es un operador compacto.

Sean

$$T_n(x) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0 \dots).$$

Primero observemos que, dado que se cumple que $\dim(\mathcal{R}(T_n)) < \infty$, entonces por el resultado 3.4.4 para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n es un operador compacto.

Además T puede ser aproximado por $\{T_n\}$. Primero observemos que, si $x \in l_2$ entonces $|x_i|^2$ converge a 0 y por lo tanto existe $C > 0$ tal que $|x_i|^2 \leqslant C$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Ahora,

$$\begin{aligned} ||(T - T_n)x||^2 &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i^2} \\ &\leqslant C \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}. \end{aligned}$$

Y como $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge a 0 cuando n tiende a ∞, entonces $||T - T_n||$ converge a 0.

Por el resultado 3.4.5 concluimos que T es compacto.

Este operador es muy similar al operador del ejemplo 3.4.1, y con los mismos argumentos podemos concluir que no tiene valores propios, el 0 es valor espectral, y tiene subespacios invariantes cerrados y no triviales.

Ejemplo 3.4.3. *Sean ahora $X = L^2[0,1]$ y el operador $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ defnido como*

$$(Tf)(x) = \int_{[0,x)} f(t)dt.$$

Este operador es conocido como el operador de Volterra y es compacto. Además se puede probar que los subconjuntos

$$S_\alpha := \{f \in L^2[0,1] : f = 0 \text{ cds en } [0,\alpha]\}$$

para $\alpha \in [0,1]$ son todos los subespacios invariantes cerrados no triviales. Este resultado fue obtenido por Donoghue [6] en 1957.

Esto nos puede inducir a pensar que todo operador compacto en un espacio de Banach tiene un subespacio invariante cerrado no trivial. Demostrar esto será nuestro siguiente paso.

3.4.3. El teorema de Lomonosov

En 1930 John von Neumann desarrolla una técnica para encontrar subespacios invariantes para operadores compactos en espacios de Hilbert. Más adelante, en 1954, K. T. Smith y N. Aronszajn extienden el resultado para espacios de Banach y varios años después, y con ciertas dificultades de por medio, Halmos, copiando ideas de Robinson, logra demostrarlo para operadores polinomialmente compactos. Fue una sorpresa inmensa cuando en 1976, el matemático ruso V. Lomonosov generaliza de forma contundente el resultado demostrando que es suficiente que un operador A conmute con un operador que conmuta a su vez con uno compacto para que A tenga un subespacio invariante cerrado y no trivial. Lomonosov usa una técnica muy ingeniosa y novedosa que le permite hacer una prueba mucho más breve y sencilla.

En esta sección nuestro objetivo será presentar un primer resultado, siguiendo la prueba reducida de Hilden [11].

Vamos a iniciar definiendo lo que es un subespacio hiperinvariante.

Definición 3.4.5. *Se dice que un operador T acotado tiene un subespacio S hiperinvariante, si todo operador acotado A que conmuta con T tiene a S como* *subespacio invariante. Es decir si $AT = TA$, entonces $A(S) \subseteq S$.*

Observación 3.4.1. *Todo subespacio T- hiperinvariante es T- invariante, sin embargo lo recíproco no es cierto.*

Lema 3.4.1. *Si S es hiperinvariante con respecto a T entonces $\overline{S}$ es hiperinvariante con respecto a T.*

Demostración. Sea S hiperinvariante bajo T y A un operador acotado que conmuta con T. Entonces S es subespacio invariante de A, es decir que

$$A(S) \subseteq S.$$

Queremos demostrar que $A(\overline{S}) \subseteq \overline{S}$. Como A es un operador continuo cumple que

$$A(\overline{S}) \subseteq \overline{A(S)}.$$

Pero como $A(S) \subseteq S$ entonces $\overline{A(S)} \subseteq \overline{S}$. Por tanto

$$A(\overline{S}) \subseteq \overline{A(S)} \subseteq \overline{S}$$

Es decir que $\overline{S}$ es un subespacio invariante para A, por tanto $\overline{S}$ es hiperinvariante para T. □

Teorema de Lomonosov

Teorema 3.4.1. *(Lomonosov) Sea X de Banach, entonces todo operador lineal $T : X \to X$ compacto no nulo tiene un subespacio hiperinvariante cerrado no trivial.*

Observemos que con esto se resolvería nuestro problema, pues si T tiene un subespacio S hiperinvariante, entonces para toda A tal que $AT = TA$ se tendría que $A(S) \subseteq S$. En particular T conmuta consigo mismo por lo cual $T(S) \subseteq S$.

Antes de adentrarnos en la prueba, haremos un esbozo de demostración. Seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. Usar que, como T es un operador compacto, su espectro consta sólamente del elemento 0 y de valores propios. Si T tuviera un valor propio demostraremos que T tiene un subespacio hiperinvariante. En caso contrario, entonces $\lambda = 0$ es el único valor espectral.

Paso 2. De lo anterior, concluir usando la fórmula del radio espectral, que para toda $k \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} ||(kT)^n|| = 0.$$

Paso 3. Tomar un elemento x_0 tal que $1 < ||T(x_0)||$, y llegar a que $0 \notin \overline{T(\mathcal{B})}$ y que $0 \notin \mathcal{B}$, donde

$$\mathcal{B} = \{x \in X : ||x - x_0|| < 1\}.$$

Paso 4. Considerar, para cada $y \neq 0$ los subespacios

$$\overline{S_y} = \{Ay : AT = TA\},$$

y demostrar que son hiperinvariantes.

Paso 5. Demostrar que existe $y \in X$ tal que $\overline{S_y}$ es un subespacio no trivial. Para esto, supondremos que $\overline{S_y} = X$ para todo $y \in X$; usando la compacidad de T y un método recursivo llegaremos a que $0 \in \overline{T(\mathcal{B})}$, lo cual contradiría el punto 3.

Demostración. Sea $T : X \to X$ un operador compacto con X de Banach. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\|T\| = 1$ pues en el caso contrario trabajamos con $\frac{T}{\|T\|}$.

1. Consideremos $\lambda \in \sigma(T)$. Como T es un operador compacto, por el resultado 3.4.3, tenemos que

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}.$$

Por tanto

1. $\lambda \in \sigma_p(T)$ (incluyendo al 0),
2. o bien $\lambda \in \{0\} \setminus \sigma_p(T)$.

El primer caso corresponde a decir que T tiene valores propios. Afirmamos entonces que el conjunto

$$S = \{x : T(x) = \lambda x\}$$

es hiperinvariante. En efecto, consideremos $x \in S$ y A tal que $AT = TA$, entonces

$$\begin{aligned} TAx &= ATx \\ &= A\lambda x \\ &= \lambda Ax. \end{aligned}$$

Por definición de S se tiene que $Ax \in S$, y por ende $A(S) \subseteq S$. Es decir S es hiperinvariante.

Supongamos entonces, como en el caso 2, que T no tiene vectores propios, y que por tanto $\sigma(T) = \{0\}$.

2. Ahora, por definición de radio espectral

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|,$$

y puesto que $\sigma(T) = \{0\}$, entonces $r_\sigma(T) = 0$. Al mismo tiempo, por el resultado 3.4.2 tenemos

$$r_\sigma(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}.$$

De estas dos ecuaciones concluimos que

$$r_\sigma(T) = 0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||T^n||}.$$

Veamos que de esto se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n|| = 0$. En efecto por definición de límite tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$ entonces

$$\sqrt[n]{||T^n||} < \epsilon\ .$$

En particular tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe N tal que si $n \geqslant N$, entonces

$$\sqrt[n]{||T^n||} < \frac{1}{2}.$$

Por lo cual $||T^n|| < (\frac{1}{2})^n$ y como $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n|| = 0$.

Ahora sea $k \in \mathbb{C}$, y consideremos el operador $\widetilde{T} = kT$ que es acotado y tiene las mismas propiedades que T, en particular, el mismo radio espectral. Entonces, usando lo anterior, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} ||\widetilde{T}^n|| \quad = \quad 0.$$

Y por lo tanto concluimos que para todo $k \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} ||(kT)^n|| = 0. \tag{3.4.1}$$

Esto lo usaremos más adelante.

3. Tomamos algún $x_0 \in X$ tal que $\|Tx_0\| > 1$ y consideramos la bola centrada en x_0 definida como

$$\mathcal{B} = \{x :\| x - x_0 \|< 1\}.$$

Afirmamos que $0 \notin \overline{T\mathcal{B}}$ y que $0 \notin \overline{\mathcal{B}}$. Lo primero se debe a que, al ser T acotado, se cumple:

$$||T(x - x_0)|| \leqslant ||T|| \cdot ||x - x_0||,$$

para todo $x \in \mathcal{B}$. Como $||T|| = 1$ y $||x-x_0|| < 1$ entonces $||T(x-x_0)|| < 1$. Además, como T es lineal, tenemos que

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| < 1.$$

Pero $||Tx|| - || Tx_0|| \leqslant ||Tx - Tx_0||$, por tanto

$$||Tx_0|| < 1 + ||Tx||.$$

Y dado que nos tomamos x_0 tal que $1 < ||Tx_0||$ entonces

$$1 < ||Tx_0|| < 1 + ||Tx||$$

Concluimos que

$$0 < ||Tx_0|| - 1 < ||Tx||, \tag{3.4.2}$$

para todo $x \in \mathcal{B}$. En otras palabras $0 \notin T\mathcal{B}$.

Ahora sea $y \in \overline{T\mathcal{B}}$ entonces existe una sucesión $\{Tx_n\}$ en $T\mathcal{B}$ tal que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. Por lo cual dada $\varepsilon = ||Tx_0|| - 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$ entonces $||Tx_n - y|| < ||Tx_0|| - 1$. Por tanto

$$||Tx_n|| - (||Tx_0|| - 1) < ||y|.$$

De la ecuación (3.4.2) concluimos que $0 < ||Tx_n|| - (||Tx_0|| - 1) < ||y||$ lo cual implica que $0 < ||y||$, es decir

$$0 \notin \overline{T\mathcal{B}}. \tag{3.4.3}$$

Lo segundo se sigue de lo primero pues si $0 \in \overline{\mathcal{B}}$ entonces $0 = T(0) \in T\overline{\mathcal{B}}$ pero $T\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{T\mathcal{B}}$, y en consecuencia $0 \in \overline{T\mathcal{B}}$, lo cual vimos que no sucede. Por lo tanto

$$0 \notin \overline{\mathcal{B}}. \tag{3.4.4}$$

Otra observación importante es que $1 < ||x_0||$, pues

$$\begin{aligned} 1 < ||Tx_0|| &\leqslant ||T|| \cdot ||x_0|| \\ &\leqslant ||x_0||. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

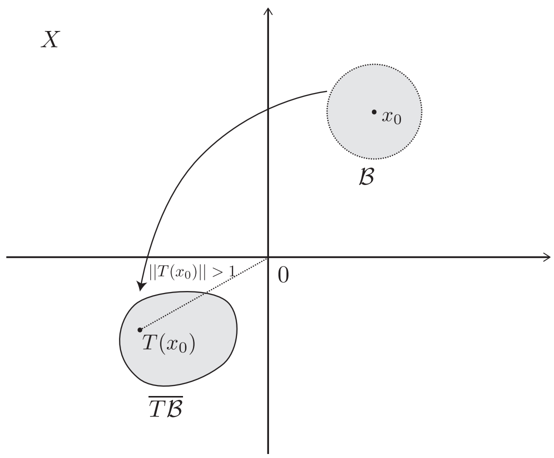


Figura 3.7: $0 \notin \overline{\mathcal{B}}$, $\overline{T\mathcal{B}}$

4. Consideremos para cada $y \in X$ con $y \neq 0$, el siguiente conjunto

$$S_y = \{Ay : A \in \mathfrak{B}(X, X) \text{ y } AT = TA\}.$$

Denotaremos por

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathfrak{B}(X, X) : AT = TA\}, \tag{3.4.6}$$

entonces

$$S_y = \{Ay : A \in \mathcal{A}\}. \tag{3.4.7}$$

Demostraremos que S_y es un subespacio invariante bajo los operadores que conmutan con T, es decir que S_y es hiperinvariante.

Veamos primero que S_y es subespacio de X.

- El 0 está en S_y pues el operador 0 es acotado y conmuta con T.
- Sean $Ay, By \in S_y$ entonces, como A y B son acotados, $A + B$ es acotado y

$$\begin{aligned} (A+B)T &= AT + BT \\ &= TA + TB \\ &= T(A+B). \end{aligned}$$

Por tanto $A+B \in \mathcal{A}$ y por ende $(A+B)y \in S_y$.

- Finalmente sea $Ay \in S_y$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces αA es un operador acotado y

$$\begin{aligned}(\alpha A)T &= \alpha TA \\ &= T(\alpha A).\end{aligned}$$

Por tanto $\alpha A \in \mathcal{A}$ y por ende $(\alpha A)y \in S_y$.

Concluimos que S_y es efectivamente un subespacio de X.

Ahora veremos que S_y es hiperinvariante. Sea B un operador que conmuta con T, $TB = BT$. Demostremos que

$$B(S_y) \subseteq S_y,$$

es decir que dado $x \in S_y$, entonces $Bx \in S_y$.

Como $x \in S_y$ entonces $x = Ay$ para algún A acotado y tal que $AT = TA$. Por lo cual

$$Bx = BAy.$$

Pero $BAy \in S_y$ pues BA es acotado y

$$\begin{aligned}(BA)T &= B(TA) \\ &= (TB)A \\ &= T(BA).\end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que S_y es hiperinvariante. Ahora consideremos $\overline{S_y}$. Por el lema 3.4.1, $\overline{S_y}$ es hiperinvariante.

Tenemos entonces que, para cada $y \neq 0$ el conjunto $\overline{S_y}$ es un subespacio hiperinvariante cerrado, faltaría ver que no es trivial.

5. Es importante notar que, dado que el 0 no es valor propio, entonces $T(y) \neq 0$. Como $y \neq 0$ y $T \in S_y$ entonces para cada y, $S_y \neq \{0\}$ y por ende $\overline{S_y} \neq \{0\}$.

Veamos que existe algún $y \in X$ tal que $\overline{S_y} \neq X$. En otras palabras lo que queremos demostrar es que existe $y \in X$ tal que S_y no es denso en

X. Hagamos esto por contradicción; supongamos que para todo $y \neq 0$ se tiene que $\overline{S_y} = X$. Entonces, dado $y \in X$, para todo $x \in X$, y $\epsilon > 0$ existe $z \in S_y$ tal que

$$||z - x|| < \epsilon \,.$$

Como $z \in S_y$ entonces $z = Ay$ para algún A acotado y que conmuta con T. En consecuencia

$$||Ay - x|| < \epsilon \,.$$

Esto para cada $x \in X$, en particular para $x = x_0$. Además tomando $\epsilon = 1$ tenemos que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$||Ay - x_0|| < 1.$$

Por tanto

$$\mathcal{U}(A) = \{y \in X : ||Ay - x_0|| < 1\} \neq \emptyset.$$

Además notemos que

$$\mathcal{U}(A) = A^{-1}(\mathcal{B}),$$

donde recordamos que $\mathcal{B}$ denota la bola abierta de radio 1 y centro x_0. Como A es continua entonces $\mathcal{U}(A)$ es abierto, para cada A.

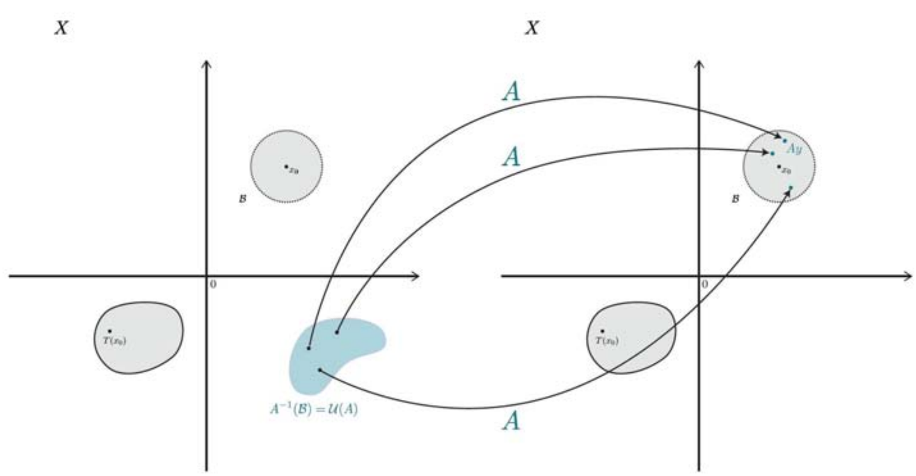


Figura 3.8: $Ay \in \mathcal{B}$ por tanto $\mathcal{U}(A)$ es no vacío.

Consideremos ahora

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{U}(A),$$

que es una unión de abiertos. Afirmamos que cubre a todo el espacio menos el $\{0\}$, es decir que

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{U}(A) = X \setminus \{0\}. \tag{3.4.8}$$

En efecto, si $z \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{U}(A)$ entonces $z \in \mathcal{U}(A)$ para algún operador $A \in \mathcal{A}$, pero $0 \notin \mathcal{U}(A)$ pues de estarlo se tendría que

$$||x_0|| = ||A0 - x_0|| < 1.$$

Lo cual es una contradicción ya que tomamos a x_0 tal que $1 < ||Tx_0||$, y vimos en (3.4.5) que esto implica que $1 < ||x_0||$. Es decir que

$$z \in \mathcal{U}(A) \subseteq X \setminus \{0\}.$$

Por tanto

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{U}(A) \subseteq X \setminus \{0\}.$$

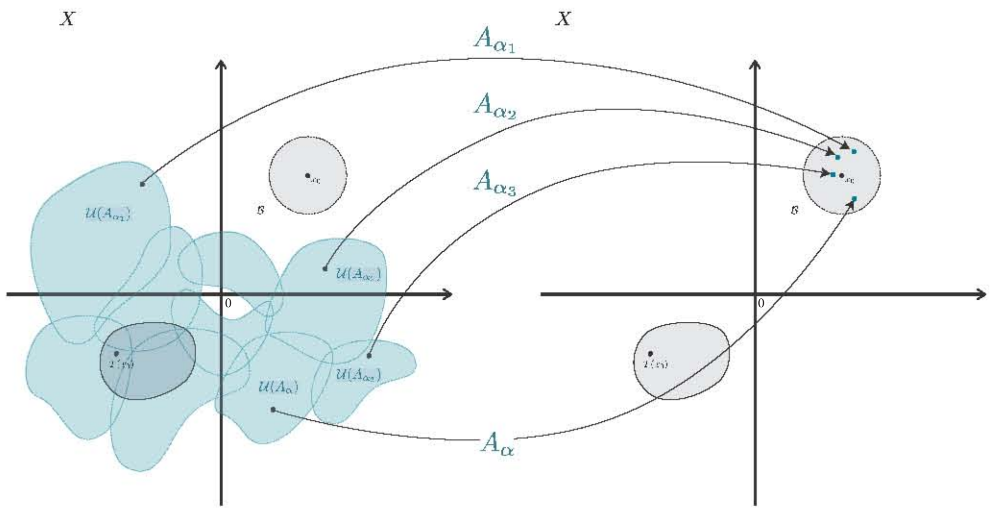
Ahora veamos que $X \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{U}(A)$. Sea $z \in X \setminus \{0\}$, entonces, como S_z es denso en X, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$||Az - x_0|| < 1.$$

En otras palabras, se tiene que $z \in \mathcal{U}(A)$ y por tanto

$$X \setminus \{0\} \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{U}(A).$$

Podemos concluir que $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \mathcal{U}(A)$ es una cubierta abierta de $X \setminus \{0\}$.



Por otro lado, sabemos que T es un operador compacto y $\mathcal{B}$ es un conjunto acotado, en consecuencia $\overline{T(\mathcal{B})}$ es un conjunto compacto de X. Recordemos además que por (3.4.3), tenemos que $0 \notin \overline{T(\mathcal{B})}$, es decir

$$\overline{T(\mathcal{B})} \subseteq X \setminus \{0\}.$$

Y por lo anterior

$$\overline{T(\mathcal{B})} \subseteq X \setminus \{0\} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{U}(A).$$

Como $\overline{T(\mathcal{B})}$ es compacto y $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{U}(A)$ es una cubierta abierta, entonces existen $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{A}$ tales que

$$\overline{T(\mathcal{B})} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}(A_j).$$

Será muy importante tener en mente que acabamos de fijar la n. Iniciaremos un proceso recursivo:

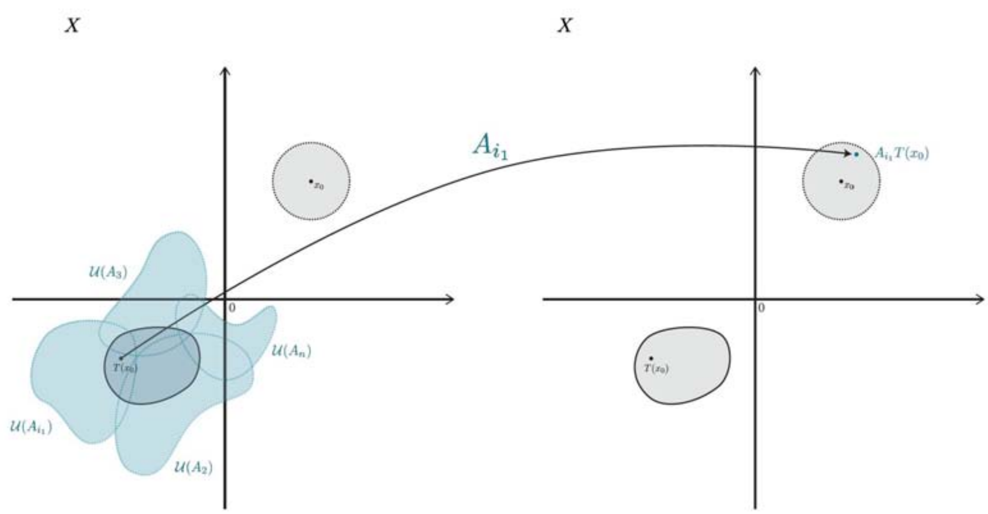
Paso 1. Tenemos que $x_0 \in \mathcal{B}$, por tanto

$$Tx_0 \in T(\mathcal{B}) \subseteq \overline{T(\mathcal{B})} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}(A_j).$$

Es decir que $Tx_0 \in \mathcal{U}(A_{i_1})$ para algún $i_1 \in \{1, \ldots n\}$. Pero por definición de $\mathcal{U}(A_{i_1})$ se tiene que

$$||A_{i_1}Tx_0 - x_0|| < 1.$$

En consecuencia $A_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{B}$.



Paso 2. Tenemos que $A_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{B}$, por tanto

$$TA_{i_1}Tx_0 \in T\mathcal{B}.$$

Es decir que $TA_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{U}(A_{i_2})$ para alguna $i_2 \in \{1, \ldots n\}$.

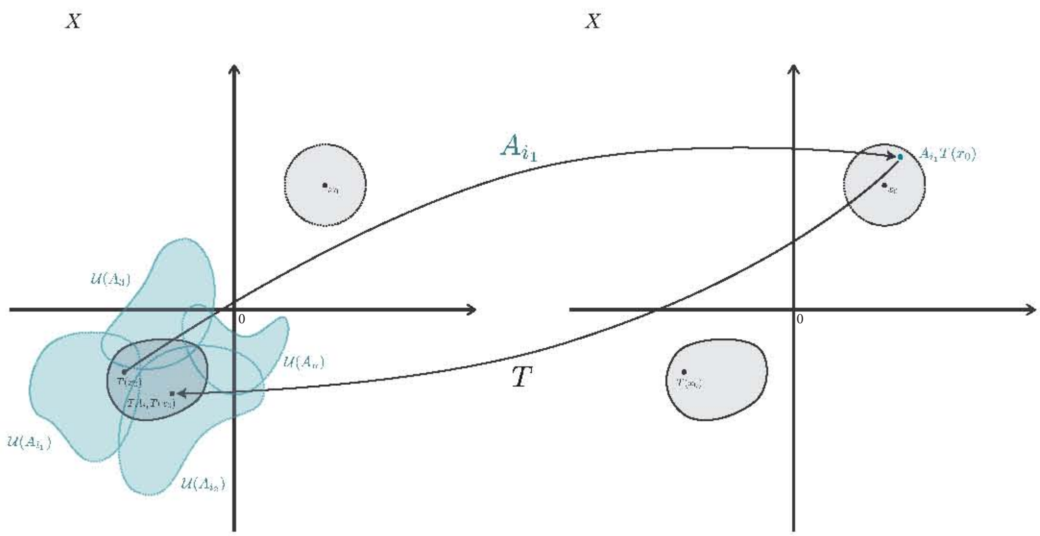


Figura 3.9: $TA_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{U}(A_{i_2})$

Pero por definición de $\mathcal{U}(A_{i_2})$ se tiene que

$$||A_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 - x_0|| < 1.$$

En consecuencia $A_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{B}$.

Paso 3. Tenemos que $A_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{B}$, por tanto

$$TA_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 \in T\mathcal{B}.$$

Es decir que $TA_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{U}(A_{i_3})$ para alguna $i_3 \in \{1, \dots n\}$. Pero por definición de $\mathcal{U}(A_{i_3})$ se tiene que

$$||A_{i_3}TA_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 - x_0|| < 1.$$

En consecuencia $A_{i_3}TA_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{B}$.

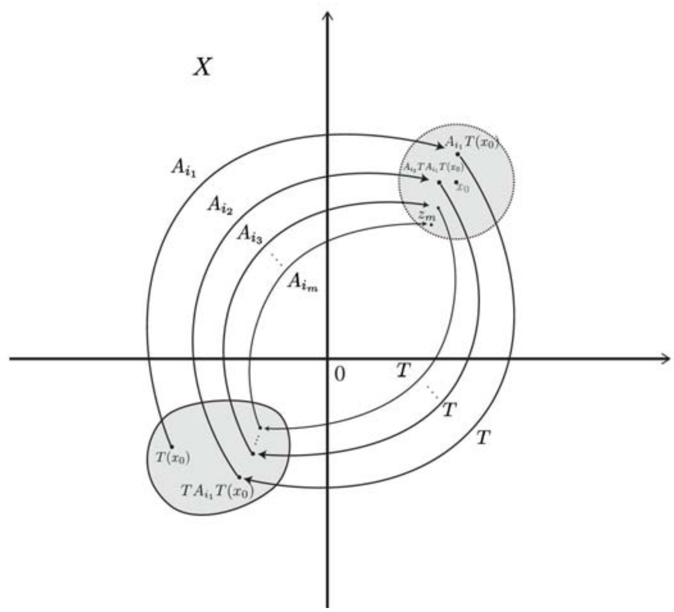
$\vdots$

Haciendo esto m veces, obtenemos que:

$A_{i_m}TA_{i_{m-1}}T \dots A_{i_3}TA_{i_2}TA_{i_1}Tx_0 \in \mathcal{B}$ para algunas $i_1, \dots i_m \in \{1, \dots n\}$.

Sea $c = \text{máx}\{||A_j|| : j \in \{1, \dots n\}\}$ y llamemos

$$z_m = A_{i_m} T A_{i_{m-1}} T \dots A_{i_3} T A_{i_2} T A_{i_1} T x_0.$$



Recordemos además que para toda $j \in \{1, \dots n\}$, $\;A_j \in \mathcal{A}$ y por ende A_j conmuta con T. Entonces

$$\begin{aligned}
z_m &= A_{i_m} A_{i_{m-1}} \dots A_{i_3} A_{i_2} A_{i_1} T^m x_0 \\
&= c^m \cdot c^{-m} A_{i_m} A_{i_{m-1}} \dots A_{i_3} A_{i_2} A_{i_1} T^m x_0 \\
&= c^{-1} A_{i_m} c^{-1} A_{i_{m-1}} \dots c^{-1} A_{i_3} c^{-1} A_{i_2} c^{-1} A_{i_1} c^m T^m x_0 \\
&= (c^{-1} A_{i_m})(c^{-1} A_{i_{m-1}}) \dots (c^{-1} A_{i_3})(c^{-1} A_{i_2})(c^{-1} A_{i_1})(cT)^m x_0.
\end{aligned}$$

Ahora, por definición de c se tiene que

$$c^{-1}||A_j|| \leq 1.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
||z_m|| &= ||(c^{-1}A_{i_m})(c^{-1}A_{i_{m-1}})\dots(c^{-1}A_{i_3})(c^{-1}A_{i_2})(c^{-1}A_{i_1})(cT)^m x_0|| \\
&\leq ||(c^{-1}A_{i_m})|| \cdot ||(c^{-1}A_{i_{m-1}})|| \dots ||(c^{-1}A_{i_3})|| \cdot ||(c^{-1}A_{i_2})|| \\
&\quad \cdot ||(c^{-1}A_{i_1})|| \cdot ||(cT)^m|| \cdot ||x_0|| \\
&\leq ||(cT)^m|| \cdot ||x_0||.
\end{aligned}$$

Pero en (3.4.1) vimos que

$$\lim_{m\to\infty} ||(cT)^m|| = 0,$$

por tanto $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$, es decir que $0 \in \overline{\mathcal{B}}$, lo cual es una contradicción a (3.4.4).

Es muy importante observar que al hacer tender m a ∞ se tendrá inevitablemente que $m > n$, y por tanto estamos diciendo que las i_j se repiten dentro del conjunto $\{1, \dots n\}$. Lo que es clave, es que la n es fija, lo que implica que c también es fijo y no depende ya de la m, esta es la razón por la cual podemos tomar el proceso límite.

Concluimos que S_y no puede ser denso en X y en consecuencia existe $y \in X$ con $y \neq 0$ tal que $\overline{S_y}$ es un subespacio hiperinvariante no trivial y cerrado de X.

□

3.4.4. Lomonosov Generalizado

En esta sección generalizaremos el resultado anterior: demostraremos que es suficiente que un operador T conmute con un operador compacto, para que T tenga un subespacio hiperinvariante. En otras palabras, si K es un operador compacto tal que $TK = KT$, y A es un operador que conmuta con T entonces A tiene un subespacio invariante. Para ello usaremos los siguientes resultados que ya demostramos durante la prueba del Teorema de Lomonosov pequeño y que enunciaremos nuevamente para tenerlos en mente.

Resultado 3.4.6. *Sean* $\mathcal{A} = \{A \in \mathfrak{B}(X,X) : AK = KA\}$*,* $y \in X$ *y* K *un operador compacto, entonces el conjunto* $S_y = \{Ay : A \in \mathcal{A}\}$ *es un subespacio hiperinvariante para* K*.*

Resultado 3.4.7. *Si* K *es un operador acotado, el conjunto* $\{x : Kx = \lambda x\}$ *es hiperinvariante para* K*. En otras palabras* $\mathcal{N}(K - \lambda I)$ *es hiperinvariante para* K*.*

Antes de adentrarnos en la demostración del teorema, daremos unas definiciones, unos resultados y probaremos unos lemas que necesitaremos más adelante. Las siguientes proposiciones son sencillas y las usaremos al demostrar el teorema de Lomonosov generalizado.

Resultado 3.4.8. *Sea* X *un espacio normado y* U *un conjunto compacto. Si* $V \subseteq U$ *es cerrado, entonces* V *es compacto.*

Proposición 3.4.1. *Sean* $K, A : X \to X$ *transformaciones continuas tales que* K *es compacta. Entonces la transformación* AK *es compacta.*

Demostración. Sea S un conjunto acotado de X. Como K es compacta, sabemos que $\overline{K(S)}$ es compacto.

Queremos demostrar que $\overline{AK(S)}$ es un conjunto compacto. Como A es continua $A[\overline{K(S)}] \subseteq X$ es compacto y por ende cerrado. Ahora, dado que

$$K(S) \subseteq \overline{K(S)},$$

entonces

$$AK(S) \subseteq A[\overline{K(S)}].$$

Lo cual implica que

$$\overline{AK(S)} \subseteq \overline{A[\overline{K(S)}]}.$$

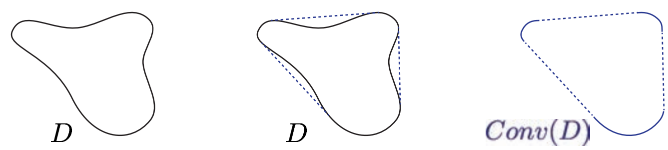
Al ser $\overline{AK(S)}$ un cerrado contenido en un compacto, concluimos que es también un compacto de X, que es lo que se quería demostrar. $\square$

Proposición 3.4.2. *Sea* $K : X \to X$ *una transformación compacta y* $M \subseteq X$ *un conjunto. Entonces* $K \restriction_M : M \to X$ *es también una transformación compacta.*

La prueba de esta proposición se omite, se puede consultar en [9].

Durante la prueba del teorema de Lomonosov generalizado necesitaremos saber un poco de teoría sobre la envolvente convexa de un conjunto. Vamos a mencionar ciertas definiciones y proposiciones que usaremos, las demostraciones de éstas se encuentran en el apéndice B, también pueden ser consultados en [15].

Definición 3.4.6. *Dado un conjunto $D \subseteq X$ definimos la envolvente convexa de D como el conjunto convexo más pequeño que contiene a D. La denotaremos por* $\operatorname{conv}(D)$.



Proposición 3.4.3. *La cerradura de un conjunto convexo es convexa.*

Definición 3.4.7. *Dado un conjunto $D \subseteq X$ diremos que x es una combinación convexa de D, si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ con $x_j \in D$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tales que:*

1. $\lambda_j \geqslant 0$ *para toda* $j \in \{1, \ldots, n\}$,
2. $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Proposición 3.4.4. *Sea $D \subseteq X$, entonces la envolvente convexa de D es el conjunto de las combinaciones convexas de D. Es decir:*

$$\operatorname{conv}(D) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j : \ n \in \mathbb{N}, \ x_j \in D, \lambda_j \in \mathbb{R}, \ \ \lambda_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Definición 3.4.8. *Un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial con producto, el cual satisface lo siguiente:*

1. $x(yz) = (xy)z$,
2. $(x+y)z = xz + yz$ *y* $x(y+z) = xy + xz$,

3. $\alpha(xy) = (\alpha z)y = x(\alpha y)$,

donde $x, y, z \in \mathcal{A}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Los siguientes dos resultados los daremos por hecho, el segundo es un teorema muy conocido de análisis, se pueden consultar en [9].

Resultado 3.4.9. *El conjunto de todos los operadores acotados* $\mathfrak{B}(X, X)$ *es un álgebra, con el producto definido como la composición de dos operadores.*

Resultado 3.4.10. *Sea* X *un espacio normado, entonces*

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in X : ||x|| \leqslant 1\},$$

es compacta si y sólo si $\dim X < \infty$.

Lema 3.4.2. *Sea* $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}(X, X)$ *un álgebra con* $\mathcal{A} \neq \{0\}$*, entonces para todo* $y \neq 0$*, el conjunto* $\{Ay : A \in \mathcal{A}\}$ *es denso en* X *si y sólo si no existe un subespacio invariante cerrado no trivial común para todo* $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que para todo $y \neq 0$ el conjunto $\{Ay : A \in \mathcal{A}\}$ es denso en X, y supongamos además que existe S, un subespacio invariante cerrado no trivial común para todo $A \in \mathcal{A}$.

Sea $x \in S$ con $x \neq 0$, entonces $Ax \in S$ para toda $A \in \mathcal{A}$, es decir que

$$\{Ax : A \in \mathcal{A}\} \subseteq S.$$

Como S es cerrado tenemos que

$$\overline{\{Ax : A \in \mathcal{A}\}} \subseteq S.$$

Pero por hipótesis $\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ es denso en X, por lo que

$$X = \overline{\{Ax : A \in \mathcal{A}\}} \subseteq S.$$

Concluimos que $X = S$, lo cual es una contradicción a que S sea no trivial , en consecuencia no existe un subespacio invariante cerrado no trivial común para todo $A \in \mathcal{A}$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que no existe un subespacio invariante cerrado no trivial y común para todo $A \in \mathcal{A}$.

Sea $x \in X$ con $x \neq 0$, ya vimos que para cada $y \in X$ el conjunto

$$S_y = \{Ay : A \in \mathcal{A}\},$$

es un subespacio vectorial. Además es invariante para toda $A \in \mathcal{A}$ pues si $z \in S_y$ y $A \in \mathcal{A}$ entonces $Az \in S_y$. En efecto, $Az = AAy$, y como $\mathcal{A}$ es álgebra, entonces $AA \in \mathcal{A}$. Es decir que para toda $y \in X$

$$A(S_y) \subseteq S_y \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Por el lema 3.2.3, $\overline{S_y}$ es también un subespacio invariante cerrado para toda $A \in \mathcal{A}$. Como $\overline{S_y} \neq \{0\}$ y $\overline{S_y}$ es trivial, entonces $\overline{S_y} = X$ que es lo que queríamos demostrar. □

El siguiente lema es lo último que necesitaremos para demostrar el teorema de Lomonosov generalizado.

Lema 3.4.3. *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}(X, X)$ un álgebra tal que, para toda $y \neq 0$, el conjunto $\{Ay : A \in \mathcal{A}\}$ es denso en X y sea K un operador compacto no nulo. Entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que*

$$\mathcal{N}(AK - I) \neq \{0\}.$$

Es decir que existe $x \in X$ con $x \neq 0$ tal que $AKx = x$.

Vamos a hacer un esbozo de prueba. Tenemos que tener en mente que lo que queremos construir es el operador A, y queremos construirlo de tal forma que exista $x \neq 0$ tal que $AKx = x$. Lo cual se traduce en que el operador AK tenga un punto fijo distinto del cero. Esto nos da una idea de lo que va a ser el final de la prueba; vamos a adecuar el terreno para poder aplicar el teorema de punto fijo de Schauder, el cual se puede consultar en [18].

Teorema 3.4.2. *(Teorema de punto fijo de Schauder) Sea X un espacio de Banach, $D \subseteq X$ un conjunto compacto, convexo, no vacío y $H : D \to D$ una transformación compacta y continua. Entonces H tiene un punto fijo. Es decir,* *existe* $x \in D$ *tal que*

$$H(x) = x.$$

Para poder aplicar el teorema, tenemos que construir el conjunto D compacto, convexo y no vacío, y un operador A tal que AK sea continuo y $AK : D \to D$. La proposición 3.4.1 nos asegura que AK es compacto, por lo que podremos hacer uso de dicho teorema.

Vamos a hacerlo en el siguiente orden:

1. Sentar las bases repitiendo los primeros pasos de lo que hicimos en el teorema de Lomonosov pequeño.

2. Construir una transformación continua y compacta Φ tal que Φ: $\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$.

3. Construir un conjunto $D \subseteq \mathcal{B}$ compacto, convexo y no vacío.

4. Adecuar la transformación y el conjunto para que cumplan lo deseado.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $||K|| = 1$ pues en caso contrario consideramos $\frac{K}{||K||}$. Si encontramos $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{N}(A\frac{K}{||K||} - I) \neq \{0\},$$

entonces $\tilde{A} = \frac{A}{||K||}$ cumple que

$$\mathcal{N}(\tilde{A}K - I) \neq \{0\}.$$

1. Como ya mencionamos, en el inicio de la demostración seguiremos prácticamente los mismos pasos que en la prueba del teorema de Lomonosov 3.4.1.

Sea $x_0 \in X$ tal que $1 < ||K(x_0)||$. Entonces, como $||K|| = 1$ y K es acotado, se tiene que

$$||K(x_0)|| \leqslant ||x_0||.$$

Por lo que

$$1 < ||x_0||.$$

Denotemos nuevamente a la bola de radio uno y centro x_0 como

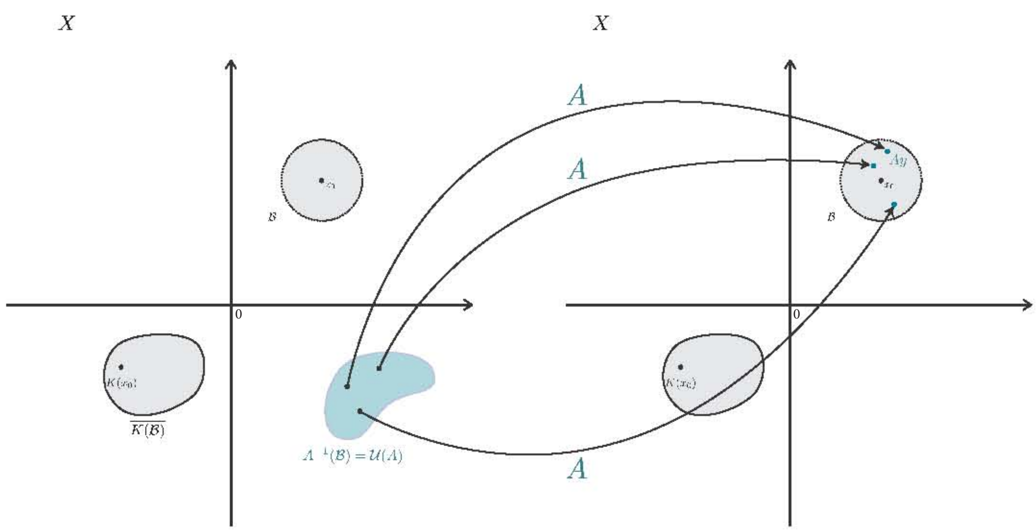
$$\mathcal{B} = \{x \in X : ||x - x_0|| < 1\}.$$

Entonces, por (3.4.3) y (3.4.4), $0 \notin \overline{K\mathcal{B}}$ y $0 \notin \mathcal{B}$.

Dado $A \in \mathcal{A}$, denotamos también como

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(A) &= A^{-1}(\mathcal{B}) \\ &= \{x \in X : ||Ax - 1|| < 1\},\end{aligned}$$

y recordamos que, por la continuidad de A, $\mathcal{U}(A)$ es un conjunto abierto.

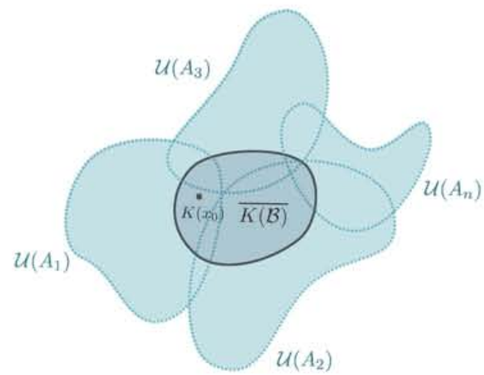


Por (3.4.8) se tiene además que

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{U}(A) = X \setminus \{0\}.$$

Finalmente, como K es un operador compacto y $\mathcal{B}$ un conjunto acotado, entonces existen $A_1, A_2, \ldots A_n$ tales que

$$\overline{K(\mathcal{B})} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}(A_j). \tag{3.4.9}$$



2. Aquí cambiamos de rumbo. Recordamos que la estrategia que vamos a seguir consiste en construir un operador continuo A y un conjunto compacto y convexo $D \subseteq \mathcal{B}$ tales que $AK : D \to D$, para poder poder aplicar el teorema de punto fijo de Schauder. En esta parte nos encargaremos de construir una transformación continua Φ: $\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$.

Empecemos definiendo ciertas funciones auxiliares: Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ sea $\alpha_j : \overline{K(\mathcal{B})} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\alpha_j(x) = \text{máx}\ \{0, 1 - ||A_j x - x_0||\}.$$

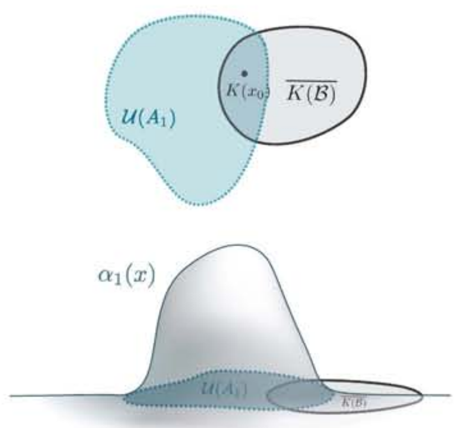


Figura 3.10: La función que representamos aquí aún no está restringida a $\overline{K(\mathcal{B})}$, pero muestra el comportamiento de las α_j.

Dado que la función máximo es continua entonces α_j es continua. Además

$$\alpha_j(x) \geqslant 0 \quad \text{para toda } j \in \{1, \ldots, n\}\,, \text{ y para toda } x \in \overline{K\mathcal{B}}.$$

Finalmente $\alpha_j(x) = 0$ si y sólo si $1 \leqslant ||A_j x - x_0||$. Es decir si y sólo si $A_j x \notin \mathcal{B}$ o en otras palabras si y sólo si

$$x \notin A_j^{-1}(\mathcal{B}), \tag{3.4.10}$$

como se muestra en la figura 3.10.

Sea $x \in \overline{K(\mathcal{B})}$ entonces por (3.4.9), $x \in \mathcal{U}(A_i)$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Lo cual implica que

$$||A_i x - x_0|| < 1.$$

Por lo que para dicha i, se tiene que $0 < \alpha_i(x)$. Es decir que para todo $x \in \overline{K(\mathcal{B})}$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\alpha_i(x) > 0. \tag{3.4.11}$$

Ahora, como $\alpha_j \geqslant 0$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) > 0 \qquad \forall\ x \in \overline{K(\mathcal{B})}.$$

Definimos para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ la función $\beta_j : \overline{K(\mathcal{B})} \to [0, 1]$ como

$$\beta_j(x) = \frac{\alpha_j(x)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)}.$$

β_j está bien definida por lo anterior, es continua y $\beta_j(x) = 0$ si y sólo si $\alpha_j(x) = 0$. Y esto sucede si y sólo si $x \notin A_j^{-1}(\mathcal{B})$, por 3.4.10.

Además para cada $x \in \overline{K(\mathcal{B})}$ por 3.4.11, existe i tal que $\alpha_i(x) > 0$ y en consecuencia $\beta_i(x) > 0$.

Observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j(x)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)}\\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)}\\ &= 1.\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Finalmente definimos Φ: $\overline{\mathcal{B}} \to X$ como

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j(Kx)A_jKx.$$

Φ no es una transformación lineal, pero sí es continua por ser suma de funciones continuas. Además está bien definida pues si $x \in \overline{B}$ entonces $Kx \in K(\overline{B})$. Pero como K es un operador continuo,

$$K(\overline{\mathcal{B}}) \subseteq \overline{K(\mathcal{B})},$$

y β_j toma valores en $\overline{K(\mathcal{B})}$.
Finalmente, como K es un operador compacto, entonces Φ es compacta.

Recordemos que nuestro objetivo es encontrar una transformación continua y compacta que vaya de un conjunto en sí mismo y que este último sea compacto, convexo y que esté contenido en la bola unitaria. Si bienΦ no es lineal y por tanto no es el operador buscado, será de gran utilidad demostrar que Φ: $\overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$, o en otras palabras, que

$$\Phi(\overline{\mathcal{B}}) \subseteq \overline{\mathcal{B}}.$$

Sea $x \in \overline{\mathcal{B}}$, demostremos que

$$||\Phi(x) - x_0|| \leqslant 1.$$

Recordemos que por construcción (3.4.12)

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j(y) = 1 \quad \text{para toda } y \in \overline{K(\mathcal{B})}.$$

En particular $Kx \in \overline{K(\mathcal{B})}$ por lo que

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx) = 1.$$

Consideremos

$$\begin{aligned}
||\Phi(x) - x_0|| &= ||\sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx) A_j Kx - x_0|| \\
&= ||\sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx) A_j Kx - \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx) x_0|| \\
&= ||\sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx)(A_j Kx - x_0)|| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} ||\beta_j(Kx)(A_j Kx - x_0)||.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\beta_j(x) \in [0, 1]$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n} ||\beta_j(Kx)(A_j Kx - x_0)|| = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx)||(A_j Kx - x_0)||.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que

$$||AjKx - x_0|| < 1 \quad \text{ó} \quad ||AjKx - x_0|| \geqslant 1.$$

Pero vimos que $||AjKx - x_0|| \geqslant 1$ si y sólo si $\alpha_j(Kx) = 0$, y esto sólo se da si $\beta_j(Kx) = 0$. Lo cual implica que todos los términos para los cuales

$$||AjKx - x_0|| \geqslant 1,$$

se anulan. Es decir que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx)||(A_jKx - x_0)|| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por tanto $||\Phi(x) - x_0|| \leqslant 1$, con lo que se concluye que $\Phi(x) \in \overline{\mathcal{B}}$.

Es importante notar que dado que $\dim X = \infty$, la bola cerrada $\overline{\mathcal{B}}$ no es un conjunto compacto (resultado 3.4.10), y por ende no es el conjunto que buscamos para poder aplicar el teorema de punto fijo de Schauder.

3. El siguiente paso será construir un conjunto $D \subseteq \mathcal{B}$ compacto y convexo. Para ello recurriremos al teorema de Mazur, el cual enunciaremos enseguida. Recordemos que como K es un operador compacto y para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ el operador A_j es acotado, entonces por la proposición 3.4.1, A_jK es compacto. Por tanto $\overline{A_jK(\mathcal{B})}$ es compacto y por ende

$$\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_jK(\mathcal{B})},$$

es compacto. Sin embargo no podemos asegurar que esta unión sea convexa, la manera más directa de, dado un conjunto, obtener un conjunto convexo a partir de él, es tomando la envolvente convexa de éste, conv(D). Surge la pregunta ¿conv(D) es compacto? o si acaso ¿$\overline{\text{conv}(D)}$ lo es? Presentemos el teorema de Mazur. [3]

Teorema 3.4.3. *(Teorema de Mazur) La cerradura de la envolvente convexa de un conjunto compacto en un espacio de Banach es compacta.*

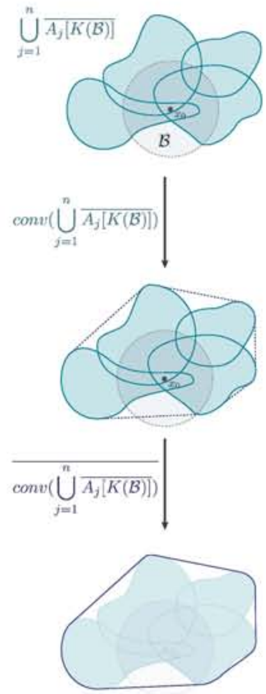
[3]Puede ser consultado en [15]

Aplicando este teorema al conjunto $\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A_jK(\mathcal{B})}$ obtenemos que

$$\overline{\mathrm{conv}(\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A_jK(\mathcal{B})})},$$

es compacto. Además por el teorema 3.4.3, tenemos que este conjunto es también convexo. Llamemos

$$\mathcal{C}=\overline{\mathrm{conv}(\bigcup_{j=1}^{n}\overline{A_jK(\mathcal{B})})}.$$



Dado que $\overline{\mathcal{B}}$ es cerrado, y $\mathcal{C}\cap\overline{B}\subseteq\mathcal{C}$, por el resultado 3.4.8, $\mathcal{C}\cap\overline{B}$ es compacto y convexo.

Justifiquemos rápidamente por qué esta intersección es no vacía. Como $K\not\equiv 0$ y por 3.4.9, tenemos que existe $x\in\overline{K(\mathcal{B})}$ tal que $x\in\mathcal{U}(A_i)$ para alguna $i\in\{1,\dots n\}$. Esto implica que $A_ix\in\mathcal{B}$ y $A_ix\in A_i\overline{K(\mathcal{B})}$. Por tanto $A_ix\in\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}$.

4. Ahora vamos a demostrar que, en realidad, no sólo logramos construir una transformación Φ que cumple que $\Phi(\overline{\mathcal{B}})\subseteq\overline{\mathcal{B}}$, sino que además $\Phi(\overline{\mathcal{B}})\subseteq\mathcal{C}$. Primero observemos que dado que $\Phi\colon\ \overline{\mathcal{B}}\to X$ se expresa como

$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j(Kx)A_jKx,$$

con $\sum_{j=1}^{n}\beta_j(Kx)=1$, entonces $\Phi(x)$ es una combinación convexa de elementos de $\bigcup_{j=1}^{n} A_j K(\overline{B})$. Gracias a la proposición 3.4.4, tenemos entonces que $\Phi(x) \in \operatorname{conv}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j K(\overline{\mathcal{B}}))$. Pero por continuidad de K y de A_j se cumple que

$$\operatorname{conv}(\bigcup_{j=1}^{n} A_j K(\overline{\mathcal{B}})) \subseteq \operatorname{conv}(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j K(\mathcal{B})}),$$

y a su vez

$$\operatorname{conv}(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j K(\mathcal{B})}) \subseteq \overline{\operatorname{conv}(\bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j K(\mathcal{B})})}.$$

Es decir que$\Phi(x) \in \mathcal{C}$, y por tanto $\Phi(\overline{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{C}$.

Por otra parte, ya demostramos que $\Phi(\mathcal{B}) \subseteq \overline{\mathcal{B}}$. Usando estas identidades obtenemos entonces que

$$\Phi(\overline{\mathcal{B}}) \subseteq \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{C},$$

y por ende

$$\Phi(\overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{C}) \subseteq \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{C}.$$

Finalmente tenemos todo lo necesario para poder hacer uso del teorema de punto fijo de Schauder, que enunciamos previamente en 3.4.2.

Tenemos la transformación continua, compacta,$\Phi \restriction_{\mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{B}}}: \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}} \to \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}$ y ya demostramos que $\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}$ es compacto, convexo, y no vacío. Por el teorema de punto fijo de Schauder podemos concluir que existe $x \in \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{B}}$ tal que $\Phi(x) = x$, es decir que

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx) A_j Kx = x.$$

Llamemos $A = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx) A_j$. Recalcamos que ahora el punto x está fijo. Hasta ahora no hemos usado todas las hipótesis del lema, vamos a ello: como $\mathcal{A}$ es álgebra y dado que $\beta_j(x) \in [0, 1]$ y $A_j \in \mathcal{A}$ entonces, ahora sí A es un operador lineal acotado; $A \in \mathcal{A}$. Podemos reescribir la ecuación que obtuvimos como

$$AKx = x.$$

O lo que es equivalente a

$$(AK - I)x = 0.$$

Para terminar con la demostración, sólo faltaría demostrar que $x \neq 0$, pero esto se cumple ya que $x \in \overline{\mathcal{B}}$ y vimos al inicio que $0 \notin \overline{\mathcal{B}}$.

Acabamos de encontrar entonces $A \in \mathcal{A}$ y $x \neq 0$ tales que

$$\mathcal{N}(AK - I) \neq \{0\},$$

que es lo que queríamos probar.

$\square$

Ahora sí, vamos a la demostración del teorema de Lomonosov generalizado, cabe mencionar que en realidad y por fortuna, la parte más difícil de la prueba de dicho teorema es el lema que acabamos de demostrar.

Teorema 3.4.4. *(Teorema de Lomonosov generalizado) Sea X espacio de dimensión infinita, $T, K : X \to X$ operadores tales que T no es múltiplo de la identidad y K es compacto con $K \not\equiv 0$. Si T conmuta con K, entonces T tiene un subespacio hiperinvariante.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{A} = \{A \in \mathfrak{B}(X, X) : AT = TA\}$. Sea $K : X \to X$ un operador compacto tal que $KT = TK$, entonces $K \in \mathcal{A}$.

Si existiera un subespacio invariante cerrado no trivial y común para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces hemos acabado, pues en dado caso dicho subespacio sería hiperinvariante. Sino, entonces por el lema 3.4.2, para todo $y \neq 0$ el conjunto

$$S_y = \{Ay : A \in \mathcal{A}\},$$

es denso en X.

Ahora, por el resultado 3.4.6 sabemos que el conjunto S_y es un subespacio hiperinvariante para T y por el lema 3.2.3, entonces $\overline{S_y}$ es también hiperinvariante para T. Supongamos nuevamente que para todo $y \neq 0$ se tiene

$$\overline{S_y} = X.$$

En consecuencia, como K es compacto, por el lema 3.4.3 existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{N}(AK - I) \neq \{0\}.$$

Llamemos $\mathcal{M} = \mathcal{N}(AK - I)$, y sea $x \in \mathcal{M}$ entonces

$$(AK - I)x = 0.$$

Por lo cual

$$AKx = x.$$

Pero $x \in \mathcal{M}$ es decir que $AK(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ y además $AK \restriction_{\mathcal{M}} = I \restriction_{\mathcal{M}}$.

Por las proposiciones 3.4.1 y 3.4.2 sabemos que si K es compacto tanto AK como $K \restriction_{\mathcal{M}}$ también lo son. Por lo cual, aquí tenemos que, como K es compacto entonces $AK \restriction_{\mathcal{M}}$ es compacto y por ende $I \restriction_{\mathcal{M}}$ es compacto.

Por definición de operador compacto, y dado que

$$\{x \in X : ||x|| < 1\} = \mathcal{B}_1(0),$$

es un conjunto acotado, entonces $\overline{I(\mathcal{B}_1(0))}$ es compacto. Además

$$\overline{I(\mathcal{B}_1(0))} = \overline{\mathcal{B}_1(0)}.$$

Es decir que $\overline{\mathcal{B}_1(0)}$ es compacta. Pero por el resultado 3.4.10 sabemos que un espacio normado es de dimensión finita si y sólo si la bola cerrada es compacta. Por tanto aquí concluimos que X es de dimensión finita lo cual es una contradicción.

Ésta viene de suponer que para todo $y \in X$ con $y \neq 0$ se tiene que $\overline{S_y} = X$, por lo cual concluimos que existe $y \neq 0$ tal que $\overline{S_y} \subsetneq X$. Es decir que $\overline{S_y}$ es un subespacio hiperinvariante cerrado y no trivial para T, con esto queda queda demostrado el teorema de Lomonosov generalizado. $\square$

Llegados a este punto nos podemos hacer numerosas preguntas. Hemos demostrado que todo operador que conmuta con un operador que a su vez conmuta con un operador compacto, tiene un subespacio hiperinvariante cerrado no trivial. Pero ¿qué tan "grande" es el tamaño del conjunto de operadores compactos? Más aún ¿qué tan grande es el tamaño de todos los operadores que conmutan con un operador que conmuta con un operador compacto? Dado un operador fijo ¿cómo se podría asegurar que no existe ningún operador compacto (no cero) que conmute con él? Pareciera que es una pregunta complicada de responder. Durante siete años se creyó que tal vez el resultado de Lomonosov daba la respuesta al problema del subespacio invariante en espacios de Banach. Sin embargo, en 1980 D. W. Hadvin, E. A. Nodgren, H. Radjavi y P. Rosenthal construyeron un operador que no conmuta con ningún operador compacto (no cero), [13]. Este descubrimiento permitió que el problema se mantuviera abierto.

3.4.5. El contraejemplo

En 1976 Enflo encuentra un operador en un espacio de Banach sin subespacios cerrados invariantes no triviales. Sin embargo, el ejemplo es tan elaborado que el artículo tardó cinco años en ser revisado y finalmente se publicó hasta 1987. Durante ese tiempo, basándose en el método que usó Enflo, Charles Read [14] construye un ejemplo ligeramente más sencillo (supuestamente), en el espacio de sucesiones l_1. A partir del operador multiplicación define un operador que no tiene subespacios cerrados invariantes no triviales. Más aún, en 1988 construye un ejemplo que no tiene ni siquiera conjuntos cerrados invariantes. Por otro lado, Beauzamy [3] también simplifica el ejemplo de Enflo pero él lo trabaja completando el espacio de polinomios.

A pesar de todas estas simplificaciones, las construcciones son bastante elaboradas y no las abordaremos en este trabajo[4].

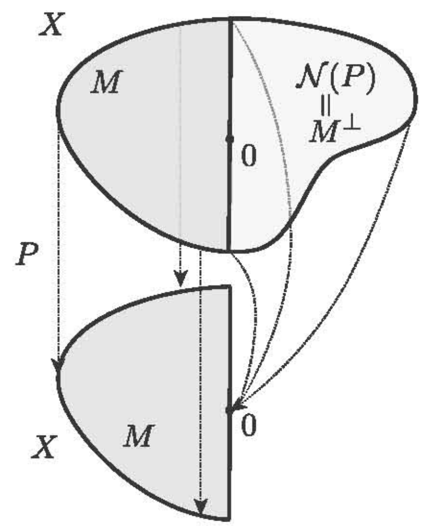
3.5. X de Hilbert

Ahora trabajaremos con X un espacio con producto interno $<\ ,\ >$ sobre el campo $\mathbb{C}$. Esto nos da mucha más herramienta para describir a ciertos operadores del espacio; nuestro objetivo será demostrar que todo operador normal tiene un subespacio invariante no trivial.

Sabemos que, al ser X un espacio de Hilbert, dado un subespacio cerrado

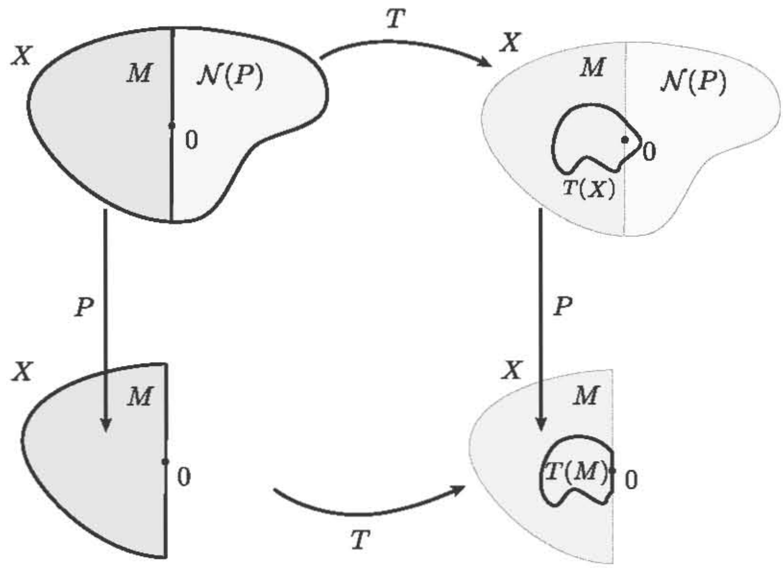
[4] Estos datos se pueden consultar en [17].

M, podemos escribir a X como $X = M \oplus M^{\perp}$, por tanto cada elemento de x se puede representar como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^{\perp}$. Una proyección $P : X \to X$ sobre un conjunto M, es una transformación que cumple que, para todo $x \in X$, $P(x) = x_1$. Es decir que, por pura definición, el subespacio M es invariante para P.



Esto nos indica que las proyecciones son transformaciones para las cuales encontrar subespacios invariantes es sencillo ¿Cómo podríamos ayudarnos de este hecho para analizar la existencia de subespacios invariantes para otros operadores?

Se demuestra el siguiente hecho: si $T : X \to X$ es un operador acotado y $P : X \to X$ una proyección ortogonal sobre M, entonces M es T- invariante si y sólo si $TP = PT$.
Observemos que $TP = PT$, si y sólo si para todo $x \in M$ se cumple que $TP(x) = PT(x)$, y esto sucede si y sólo si $T(x) = P(T(x))$ el cual pertenece a M si y sólo si $T(x) \in M$.



Es decir ya tenemos una relación entre operadores y proyecciones ortogonales, bastaría encontrar una proyección adecuada que conmute con T y que además su rango no sea trivial.

Los teoremas espectrales permiten establecer una relación entre ciertos tipos de operadores y ciertas familias de proyecciones ortogonales.

Por esto mismo, para lograr nuestro objetivo, tendremos que trabajar con proyecciones ortogonales y demostrar o hacer un esbozo de demostración del teorema espectral para operadores normales. Los llamados teoremas espectrales, requieren mucha teoría y trabajo previo, de modo que asumiremos una gran cantidad de resultados. Iniciaremos introduciendo notación y varias propiedades importantes. El esquema de trabajo en esta sección será el siguiente:

- Definir los conceptos que necesitaremos a lo largo de la sección.
- Enunciar los teoremas espectrales para operadores autoadjuntos y para operadores normales.
- Mencionar, sin demostrar, que la representación que damos se puede simplificar definiendo una medida adecuada.
- Demostrar que todo operador normal tiene un subespacio invariante ce-

rrado no trivial.

En el apéndice C, hacemos un esbozo de prueba del teorema espectral para operadores autoadjuntos y demostramos el de operadores normales a partir de este último.

3.5.1. Preliminares

Integral de Riemann-Stieltjes

Las definiciones que presentaremos se pueden encontrar en [16] y en [9].

Definición 3.5.1. *Una función $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si*

$$V(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\lambda_i) - \alpha(\lambda_{i-1})| \right\},$$

es finito, donde $\mathcal{P} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$.

Definición 3.5.2. *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{P}_n = \{\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_n\}$ una partición de $[a,b]$. Denotamos por ξ_i a un punto arbitrario en el intervalo $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$.*

Ahora consideremos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y llamamos

$$\eta(\mathcal{P}_n) = \text{máx}\{\lambda_1 - \lambda_0, \ldots, \lambda_n - \lambda_{n-1}\}.$$

Definimos la suma parcial de Stieltjes como

$$S(f, \mathcal{P}_n, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\alpha(\lambda_i) - \alpha(\lambda_{i-1})).$$

Definición 3.5.3. *Decimos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Stieltjes integrable con respecto a la función α si existe un número I que cumple la propiedad siguiente: para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si*

$$\eta(\mathcal{P}_n) < \delta\,,$$

entonces

$$|I - S(f, \mathcal{P}_n, \alpha)| < \varepsilon\,.$$

Denotamos dicho número como

$$I = \int_a^b f \ d\alpha \ .$$

Resultado 3.5.1. *Sea f una función continua. Si α es de variación acotada, entonces* $\int_a^b f \ d \ \alpha$*existe.*

Durante toda la sección, las integrales con las que trabajaremos serán integrales de Riemann-Stieltjes. Seguido denotaremos al proceso límite como

$$\lim_{i\to\infty} \sum_i f(\xi_i)(\alpha(\lambda_i) - \alpha(\lambda_{i-1})) = \int_a^b f \ d\alpha \ .$$

Va a ser importante tener en mente la siguiente propiedad:

Proposición 3.5.1. *Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ es diferencia de dos funciones monótonas crecientes, entonces es de variación acotada.*

Demostración. Supongamos que $\alpha(\lambda) = f(\lambda) - g(\lambda)$ con f, g crecientes. Observemos que, dada una partición arbitraria $\mathcal{P} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ del intervalo $[a,b]$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n |\alpha(\lambda_i) - \alpha(\lambda_{i-1})| \quad \leqslant \quad \sum_{i=1}^n [\ |f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})| + |g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})|\ ],$$

y como f, g son crecientes

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n [\ |f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})| + |g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1})|\ ] \\
&= \ \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(\lambda_i) - g(\lambda_{i-1}) \\
&= \ f(a) - f(b) + g(a) - g(b).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$V(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha(\lambda_i) - \alpha(\lambda_{i-1})| \right\} < \infty.$$

□

Todas estas definiciones se generalizan a $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ sin mayor dificultad trabajando con parte real e imaginaria.

Propiedades de operadores autoadjuntos

Definición 3.5.4. *Sea $T : X \to X$ un operador autoadjunto. Denotamos*

$$M_T = \sup_{||x||=1} \{< Tx, x >\} \quad y \quad m_T = \inf_{||x||=1} \{< Tx, x >\}.$$

El siguiente resultado se puede consultar en [9].

Resultado 3.5.2. *Sea $T : X \to X$ un operador autoadjunto. Entonces*

$$||T|| = \sup_{||x||=1} \{| < Tx, x > |\}.$$

Notación 3.5.1. *Dados dos operadores A, B, la notación $A \leqslant B$ será una abreviación para indicar que $< Ax, x > \leqslant < Bx, x >$ para todo $x \in X$.*

Lema 3.5.1. *Sea $T : X \to X$ un operador autoadjunto tal que*

$$-\varepsilon I \leqslant T \leqslant \varepsilon I.$$

Entonces $||T|| \leqslant \epsilon$.

Demostración. Por la notación 3.5.1, tenemos que

$$-\varepsilon < x, x > \quad \leqslant \quad < Tx, x > \quad \leqslant \quad \varepsilon < x, x >$$

En particular, si $||x|| = 1$ obtenemos que

$$| < Tx, x > | \leqslant \varepsilon$$

Y por la proposición 3.5.2 concluimos que

$$||T|| \leqslant \varepsilon.$$

□

La siguiente proposición es una consecuencia de la identidad de polarización y es válida para cualquier operador.

Resultado 3.5.3. *Sea $T : X \to X$ un operador, entonces*

$$\begin{aligned} < Tx, y > &= \tfrac{1}{4}[< T(x+y), x+y > - < T(x-y), x-y > \\ &\quad + i(< T(x+iy), x+iy > - < T(x-iy), x-iy >)]. \end{aligned}$$

Proyecciones ortogonales y resoluciones de la identidad

Los siguientes resultados, pueden ser consultados en [1].

Resultado 3.5.4. *Si $E : X \to X$ es una proyección ortogonal, entonces E es un operador lineal acotado, y $||E|| = 1$.*

Resultado 3.5.5. *Un operador $E : X \to X$ es una proyección ortogonal si y sólo si $E^2 = E$ y $E = E^*$. Es decir, si es idempotente y autoadjunta.*

Resultado 3.5.6. *Si $E : X \to X$ es una proyección ortogonal entonces $\mathcal{R}(E)$ es cerrado en X.*

El siguiente resultado nos indica que el producto de dos proyecciones ortogonales es nuevamente una proyección ortogonal si y sólo si conmutan.

Resultado 3.5.7. *Sean $E_1, E_2 : X \to X$ proyecciones ortogonales. Entonces E_1E_2 es una proyección ortogonal si y sólo si $E_1E_2 = E_2E_1$.*

Definición 3.5.5. *Sean $E_1, E_2 : X \to X$ proyecciones ortogonales. Diremos que E_1 y E_2 son ortogonales si $E_1E_2 = 0$ (lo cual implica que $E_2E_1 = 0$).*

Resultado 3.5.8. *Sean $E_1, E_2 : X \to X$ proyecciones ortogonales, entonces E_1 es ortogonal a E_2 si y sólo si sus rangos son ortogonales, es decir $\mathcal{R}(E_1) \perp \mathcal{R}(E_2)$.*

Resultado 3.5.9. *Si $\{E_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una familia de proyecciones ortogonales, ortogonales entre ellas, entonces*

$$E = \sum_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$$

es una proyección ortogonal en

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha} = \sum_{\alpha\in\Lambda} \oplus M_\alpha,$$

donde $M_\alpha = \mathcal{R}(E_\alpha)$.

El resultado que acabamos de mencionar requiere profundizar en la notación, esto se puede consultar en el capítulo 24 de [1].

Definición 3.5.6. *Una resolución de la identidad, es una familia de proyecciones ortogonales* $\{E(\lambda)\}$, $E(\lambda) : X \to X$ *que dependen de un parámetro* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y que cumplen las siguientes propiedades:*

- *Si* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, *entonces* $E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda_2)E(\lambda_1) = E(\lambda_1)$.
- $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0^+} E(\lambda) = E(\lambda_0^+) = E(\lambda_0)$.
- $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = 0$, *y* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E(\lambda) = 1$.

Observación 3.5.1. *Va a ser muy importante observar que el primer punto es equivalente a decir que si* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, *entonces* $E_{\lambda_1} \leqslant E_{\lambda_2}$, *recordando que esto último quiere decir que* $< E_{\lambda_1}x, x > \leqslant < E_{\lambda_2}x, x >$ *para toda* $x \in X$. *Esto se debe a que* $E(\lambda_1)$ *y* $E(\lambda_2)$ *son proyecciones ortogonales y por lo tanto*

$$\begin{aligned} ||(E(\lambda_2) - E(\lambda_1))x||^2 &= < (E(\lambda_2) - E_(\lambda_1))x, (E(\lambda_2) - E_(\lambda_1))x > \\ &= < (E(\lambda_2) - E(\lambda_1))^2 x, x > \\ &= < (E(\lambda_2) - E(\lambda_1))x, x > . \end{aligned}$$

Observación 3.5.2. *Observemos que el tercer punto implica que* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E(\lambda)x = x$. *Es decir que al tender a* ∞ *obtenemos el operador identidad, de ahí el nombre.*

Definición 3.5.7. *Sea* $T : X \to X$ *un operador autoadjunto. Diremos que* $\{E_T(\lambda)\}$ *es una resolución de la identidad asociada a* T, *si además de cumplir lo mencionado en la definición 3.5.6, safisface que*

$$E_T(\lambda) = 0 \quad si \quad \lambda < m_T \quad y \quad E_T(\lambda) = 1 \quad si \quad \lambda \geqslant M_T,$$

donde m_T *y* M_T *son los valores definidos en 3.5.4.*

En toda esta sección haremos uso de la integral de Stieltjes con respecto a resoluciones de la identidad, para poder trabajar con ello, primero tenemos que justificar que la función

$$\alpha(\lambda) =< E(\lambda)x, y >,$$

es de variación acotada.

Proposición 3.5.2. *Sea $E(\lambda)$ una resolución de la identidad. Entonces*

$$\alpha(\lambda) =< E(\lambda)x, y >,$$

es de variación acotada.

Demostración. Por el resultado 3.5.3 sabemos que $< E(\lambda)x, y >$ puede escribirse como diferencia de las funciones

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda) & = & \frac{1}{4} < E(\lambda)(x+y), x+y > \\ g(\lambda) & = & \frac{1}{4} < E(\lambda)(x-y), x-y > \\ & y & \\ h(\lambda) & = & \frac{1}{4} < E(\lambda)(x+iy), x+iy > \\ k(\lambda) & = & \frac{1}{4} < E(\lambda)(x-iy), x-iy >, \end{array}$$

en la parte real e imaginaria, respectivamente.

Ahora, por la observación 3.5.1, f, g, h y k, son funciones monótonas crecientes. En consecuencia, por la proposición 3.5.1, concluimos que $\alpha(\lambda)$ es de variación acotada, que es lo que queríamos probar.

□

Esta proposición nos permite de ahora en adelante, integrar con respecto a una resolución de la identidad $E(\lambda)$.

Notación 3.5.2. *Vamos a denotar*

$$\int_a^b f(\lambda)\ dE(\lambda)$$

como una abreviación de

$$\int_a^b f(\lambda)\ d < E(\lambda)x, y > .$$

Lema 3.5.2. *Sea $T : X \to X$ un operador autoadjunto, m_T y M_T como los definimos en 3.5.4 y $E_T(\lambda)$ una resolución de la identidad. Entonces*

$$\int_{m_T}^{M_T} 1\ dE_T(\lambda) = 1.$$

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_k\}$ una partición del intervalo $[m_T, M_T]$. Entonces las sumas parciales de Stieltjes son de la forma

$$\begin{aligned} S(1, \mathcal{P}, E_T) &= \sum_{j=1}^{k}(E_T(\lambda_j) - E_T(\lambda_{j-1})) \\ &= E_T(\lambda_0) - E_T(\lambda_k) \\ &= -E_T(m_T) + E_C(M_T) \\ &= -0 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{m_T}^{M_T} 1\ dE_T(\lambda) = 1.$$

□

3.5.2. Teoremas espectrales y familia espectral

Antes de presentar el teorema espectral para operadores normales, vamos a enunciar el de operadores autoadjuntos. En el apéndice C se hace un esbozo de prueba de este último, y una demostración detallada del primero.

Teorema 3.5.1. (Teorema espectral para operadores autoadjuntos)

Sea $A : X \to X$ un operador autoadjunto. Entonces existe una resolución de la identidad $\{E(\lambda)\}$ tal que:

$$A = \int_{m^-}^{M} \lambda\ dE(\lambda),$$

donde $M = M_A$ *y* $m = m_A$.

Gracias a este teorema se puede demostrar el de operadores normales. El siguiente lema permite relacionar estos dos teoremas.

Lema 3.5.3. *Sea* $T : X \to X$ *un operador normal, y* B, C *los operadores definidos de la siguiente manera:*

$$B = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad y \quad C = \frac{1}{2}i(T - T^*).$$

Entonces B, *y* C *son operadores autoadjuntos y acotados que conmutan, tales que:*

$$T = B - iC.$$

Demostración. Veamos que $C^* = C$:

$$\begin{aligned} C^* &= (\tfrac{1}{2}\ i\ (T - T^*))^* \\ &= \tfrac{1}{2}\ \bar{i}\ (T^* - T^{**}) \\ &= -\tfrac{1}{2}\ i\ (T^* - T) \\ &= \tfrac{1}{2}\ i\ (T - T^*) \\ &= C. \end{aligned}$$

Para ver que son acotados basta con recordar que $||T|| = ||T^*||$ y notar que:

$$\begin{aligned} ||C|| &\leqslant \tfrac{1}{2}(||T|| + ||T^*||) \\ &= \tfrac{1}{2}(||T|| + ||T||) \\ &= ||T||. \end{aligned}$$

La demostraciones de que $B^* = B$ y que B es acotado son análogas. Ahora veamos que

$$\begin{aligned} B - iC &= \tfrac{1}{2}[(T + T^*) + (T - T*)] \\ &= T. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos a demostrar que $BC = CB$:

$$\begin{aligned} BC &= \tfrac{1}{2}(T + T^*)\ \tfrac{1}{2}\ i\ (T - T^*) \\ &= \tfrac{1}{4}\ i\ (T^2 - TT^* + T^*T - (T^*)^2). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$CB = \frac{1}{4}\, i\ (T^2 + TT^* - T^*T - (T^*)^2).$$

Como T es normal $TT^* = T^*T$, por lo cual se tiene la igualdad. □

Teorema 3.5.2. (Teorema espectral para operadores normales)

Sea $T : X \to X$ un operador normal, B, C los operadores definidos como en el lema 3.5.3 y $\{E_B(\lambda)\}$, $\{E_C(\mu)\}$ sus respectivas resoluciones de la identidad resultantes del Teorema espectral para operadores autoadjuntos. Entonces:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + i\mu)\ dE_B(\lambda) dE_C(\mu).$$

Observación 3.5.3. *Los límites de integración $\pm\infty$ sólo son notación para evitar escribir M_B, M_C y m_B, m_C.*

La idea de la prueba de este último teorema, es utilizar que, dado que B y C son operadores acotados autoadjuntos, el teorema espectral para operadores autoadjuntos 3.5.1 nos asegura la existencia de resoluciones de la identidad $E_B(\lambda)$ y $E_C(\mu)$ tales que:

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\ dE_B(\lambda) \ \text{ y } \ C = \int_{-\infty}^{\infty} \mu\ dE_C(\mu).$$

Por el lema 3.5.3, sabemos que $T = B - iC$, entonces:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\ dE_B(\lambda) - i \int_{-\infty}^{\infty} \mu\ dE_C(\mu)$$

Todo lo que hay que hacer es demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\ dE_B(\lambda) - i \int_{-\infty}^{\infty} \mu\ dE_C(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda - i\mu\ dE_B(\lambda) dE_C(\mu) \quad (3.5.1)$$

Para lograrlo, será fundamental el hecho de que B, C conmutan lo cual nos permitirá probar que, dadas $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ fijas, $E_B(\lambda)E_C(\mu) = E_C(\mu)E_B(\lambda)$.

La explicación de la notación de doble integral, y los detalles de esta prueba están en el apéndice C.

Familia espectral

A partir de la doble integral que hemos obtenido, podemos definir una medida y gracias a ella se puede simplificar la notación del teorema 3.5.2. Este proceso puede ser consultado en [1], también se hace un esbozo de ello en el apéndice C.0.3.

Lo que se hace es definir una transformación

$$E : \mathbb{C} \to \mathfrak{B}(X, X)$$

de tal forma que $E(\xi)$ sigue siendo una familia de proyecciones ortogonales y éstas siguen cumpliendo básicamente las mismas propiedades que E_B y E_C. Más aún, esta familia será de operadores ortogonales entre ellos (rangos ortogonales).

Corolario 3.5.1. *Sea $T : X \to X$ un operador normal. Entonces existe una familia de proyecciones ortogonales $\{E(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{C}}$ y $\Delta \subseteq \mathbb{C}$, tales que*

$$T = \int_{\Delta} \xi \; dE(\xi).$$

A esta familia, la nombraremos familia espectral asociada a T. Se cumple que estas proyecciones conmuntan entre ellas.

La notación nuevamente se refiere a que para toda $x, y \in X$,

$$< Tx, y >= \int_{\Delta} \xi \; d < E(\xi)x, y > .$$

3.5.3. Subespacios invariantes para operadores normales

Lema 3.5.4. *Sea $T : X \to X$ un operador normal y $\{E(\xi)\}$ su familia espectral, entonces para toda $\eta \in \mathbb{C}$ se tiene que:*

$$TE(\eta) = E(\eta)T.$$

Demostración. Sea T un operador normal, entonces por el corolario 3.5.1, existe una familia espectral $\{E(\xi)\}$ y $\Delta \subseteq \mathbb{C}$, tales que

$$T = \int_{\Delta} \xi \, dE(\xi).$$

Es decir que

$$< Tx, y >= \int_{\Delta} \xi \, d < E(\xi)x, y >,$$

para toda $x, y \in X$. Sea $\eta \in \mathbb{C}$ y consideremos la proyección $E(\eta)$, entonces como $E(\eta)$ son proyecciones ortogonales, se tiene que $E(\eta) = E(\eta)^*$, y por tanto

$$\begin{aligned} < E(\eta)Tx, y > &= < Tx, E(\eta)^* y > \\ &= < Tx, E(\eta)y > . \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos la descomposición espectral aplicada a $z = E(\eta)y$,

$$\begin{aligned} < Tx, E(\eta)y > &= < Tx, z > \\ &= \int_{\Delta} \xi \, d < E(\xi)x, z > \\ &= \int_{\Delta} \xi \, d < E(\xi)x, E(\eta)y > \\ &= \int_{\Delta} \xi \, d < E(\eta)^* E(\xi)x, y > \\ &= \int_{\Delta} \xi \, d < E(\eta)E(\xi)x, y > . \end{aligned}$$

Pero, por el corolario 3.5.1, $E(\eta)$ y $E(\xi)$ conmutan, en consecuencia

$$\begin{aligned} < Tx, E(\eta)y > &= \int_{\Delta} \xi \, d < E(\xi)E(\eta)x, y > \\ &= < TE(\eta)x, y > . \end{aligned}$$

Concluimos que para toda $x, y \in X$

$$< E(\eta)Tx, y > = < TE(\eta)x, y >,$$

y por ende $E(\eta)T = TE(\eta)$.

□

Ahora sí vamos a demostrar el teorema que ha sido el objetivo de toda esta sección:

Teorema 3.5.3. *Sea $T : X \to X$ un operador normal no identicamente 0. Entonces T tiene un subespacio invariante no trivial.*

Demostración. Sea T un operador normal, entonces por el corolario 3.5.1 existen una familia espectral $\{E(\xi)\}$ y un subconjunto$\Delta \subseteq \mathbb{C}$, tales que

$$T = \int_{\Delta} \xi \, dE(\xi).$$

Por el lema 3.5.4, sabemos además que, para toda $\eta \in \Delta$ se tiene que

$$TE(\eta) = E(\eta)T.$$

Consideremos

$$S_\eta = \mathcal{R}(E(\eta)).$$

Observemos que si $y \in S_\eta$, entonces existe x tal que

$$Ty = TE(\eta)x = E(\eta)Tx,$$

pero $E(\eta)Tx \in S_\eta$, por tanto para toda η el conjunto S_η es invariante bajo T. Más aún, por el resultado 3.5.6 S_η es cerrado en X.

Bastaría encontrar un $\eta \in \Delta$ tal que S_η sea no trivial. Para ello vamos a proceder por contradicción, pero antes hagamos un par de observaciones. Sea $\omega \subseteq \Delta$, entonces:

- Si $\mathcal{R}(E(\xi)) = \{0\}$ para toda $\xi \in \omega$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\omega} \xi \; d < E(\xi)x, y > &= \int_{\omega} \xi \; d < 0, y > \\ &= 0,\end{aligned}$$

  para toda $x, y \in X$.

- Si $\mathcal{R}(E(\xi)) = X$ para toda $\xi \in \omega$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(E(\xi)) &= \{y \in X : E(\xi)y = y\} \\ &= X,\end{aligned}$$

es decir que $E(\xi)x = x$ para toda $x \in X$. En otras palabras $E(\xi) = I$ para toda $\xi \in \omega$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} \int_\omega \xi \, d < E(\xi)x, y > &= \int_\omega \xi \, d < x, y > \\ &= 0, \end{aligned}$$

para toda $x, y \in X$. Para justificar la última igualdad, no hay que olvidar que la definición de esta integral surgió en un inicio de sumas de Stieltjes. En este caso, estaríamos integrando con respecto a la constante x.

Ahora supongamos que para toda $\xi \in \Delta$ se tiene que, o bien $\mathcal{R}(E(\xi)) = \{0\}$, o bien $\mathcal{R}(E(\xi)) = X$. Es decir que el rango de cada operador es un subespacio invari*a*nte trivial. Llamemos

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{\xi \in \Delta : \mathcal{R}(E(\xi)) = \{0\}\} \\ &\text{y} \\ \omega_2 &= \{\xi \in \Delta : \mathcal{R}(E(\xi)) = X\}. \end{aligned}$$

Entonces $\Delta = \omega_1 \cup \omega_2$, y estos conjuntos son ajenos.

Veamos que ω_1 consta de sólo un elemento. En efecto, supongamos que existen complejos distintos $\eta, \xi \in \Delta$ tales que $E(\eta) = E(\xi) = I$. Sabemos por otra parte que $\{E(\xi)\}_{\xi \in \Delta}$ es una familia de proyecciones ortogonales entre ellas, es decir que, si $\eta \neq \xi$ entonces

$$E(\eta)E(\xi) = E(\xi)E(\eta) = 0.$$

Pero por lo anterior tendríamos que para todo $x \in X$ se cumple que

$$0 = E(\eta)E(\xi)(x) = x,$$

lo cual es una contradicción. Concluimos que $\eta = \xi$.

Por tanto ω_1 es medible y como $\omega_1 \cup \omega_2 = \Delta$ es medible por hipótesis, entonces ω_2 también lo es. Ahora sí podemos integrar sobre estos conjuntos.

Tenemos pues que

$$\begin{aligned} < Tx, y > &= \int_{\Delta} \xi \; d < E(\xi)x, y > \\ &= \int_{\omega_1} \xi \; d < E(\xi)x, y > + \int_{\omega_2} \xi \; d < E(\xi)x, y > \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como esto es para toda $x, y \in X$, entonces concluimos que $T \equiv 0$, lo cual es una contradicción a las hipótesis del teorema.

Por ende podemos asegurar que existe $\eta \in \Delta$ tal que $\mathcal{R}(E(\eta))$ es no trivial y en consecuencia S_η es un subespacio invariante cerrado y no trivial para T.

$\square$

Observación 3.5.4. *Se puede demostrar que, además, el subespacio encontrado es hiperinvariante, con lo cual se extiende el conjunto de operadores que tienen subespacios invariantes no triviales a todos los que conmutan con T. Sin embargo aquí ya no abordaremos dicho resultado.*

Apéndice A

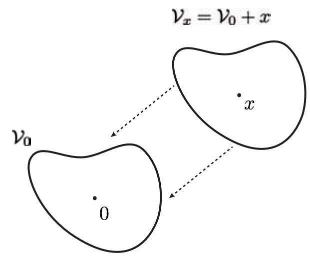
Espacios Vectoriales Topológicos

En álgebra lineal se estudia la estructura vectorial de un espacio; esto nos permite manipular los elementos que se relacionan entre ellos gracias a la operación definida. Esta última sigue ciertas "reglas", lo cual implementa una cierta rigidez o orden al nuevo espacio. A pesar de ser una estructura muy rica, no podemos definir la noción de cercanía entre elementos o conjuntos, y por lo tanto no tenemos manera de de trabajar con convergencia, ni límites. En los espacios vectoriales topológicos, no se pierde la rigidez de los espacios vectoriales y además nos da una manera de aproximarnos sin necesidad de una métrica.

A.1. Convergencia en espacios vectoriales topológicos

Definición A.1.1. *Dado un elemento $x \in X$, diremos que un conjunto $\mathcal{V}_x$ es una vecindad de x si $x \in int(\mathcal{V}_x)$.*

Observación A.1.1. *Diremos que $\mathcal{V}_x$ es una vecindad de x si $\mathcal{V}_x - x$ es una vecindad del origen. En otras palabras toda vecindad de un punto x se escribe como $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_0 + x$ donde $\mathcal{V}_0$ es vecindad del 0.*



Definición A.1.2. *Sea X un espacio vectorial y τ una topología para X. Decimos que X es un espacio vectorial topológico si las aplicaciones $\mathcal{S} : X \times X \to X$, $\mathcal{P} : \mathbb{F} \times X \to X$ dadas por*

$$\mathcal{S}(x, y) = x + y \quad y \quad \mathcal{P}(\lambda, x) = \lambda x$$

son continuas con dicha topología.

Esto se traduce en que dado un punto $(x, y) \in X \times X$ y una vecindad $\mathcal{V}_{x+y}$ de $\mathcal{S}(x, y) = x + y \in X$, existen vecindades $\mathcal{V}_x$ y $\mathcal{V}_y$ de x y y respectivamente, tales que

$$\mathcal{V}_x + \mathcal{V}_y \subseteq \mathcal{V}_{x+y}$$

De forma similar, dado un punto $(\lambda, x) \in X \times X$ y una vecindad $\mathcal{V}_{\lambda x}$ de $\mathcal{P}(\lambda, x) = \lambda x$, existe una vecindad de x, digamos $\mathcal{V}_x$ y un real $\delta > 0$ tales que si $|\lambda - \alpha| < \delta$ entonces $\alpha \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{V}_{\lambda x}$

En los espacios toplógicos el concepto de sucesión se vuelve obsoleto ya que no se va a cumplir que el límite de una sucesión que converge sea único, ni que un punto pertenece a su cerradura si una sucesión del conjunto converge a él. Esto crea conflicto al querer obtener resultados de convergencia de operadores continuos. Sin embargo, el concepto de sucesión se puede generalizar al concepto de red, de tal forma que las redes sí nos permitan trabajar con la continuidad de transformaciones. Es práctico puesto que estas redes se manejan de forma muy parecida a las sucesiones.

Definición A.1.3. *Decimos que un conjunto I equipado con la relación $\preceq$, $(I, \preceq)$ es un conjunto dirigido si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\alpha \preceq \alpha$ para toda $\alpha \in I$.*

2. *Si* $\alpha \preceq \beta$ *y* $\beta \preceq \gamma$ *entonces* $\alpha \preceq \gamma$.

3. *Para toda* $\alpha,\beta \in I$ *existe* $\gamma_{\alpha,\beta} \in I$ *tal que* $\alpha \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$ *y* $\beta \preceq \gamma_{\alpha,\beta}$.

Definición A.1.4. *Sea X un espacio vectorial topológico. Una red en X es una función de un conjunto dirigido $(I, \preceq)$ en X,*

$$x : I \to X.$$

Sea $\alpha \in I$, denotamos la valuación de dicha función como $x(\alpha) = x_\alpha$.

Esta definición no es más que una generalización de una sucesión. Las redes nos permiten indexar un conjunto de puntos a un repertorio muchísimo más vasto de conjuntos; podemos tener que I sea finito, hasta no numerable, entre otras cosas.

Daremos un par de ejemplos que usaremos más adelante para ilustrar esta definición:

Ejemplo A.1.1. *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico y sea $x \in X$. Consideremos $I = \{\mathcal{V} \subseteq X : \mathcal{V}$ es vecindad de $x\}$ con la relación $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ si y sólo si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.*

Entonces $(I, \preceq)$ es un conjunto dirigido:

1. *En efecto se cumple que $\mathcal{V} \preceq \mathcal{V}$ pues $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$.*

2. *Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in I$ son tales que $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} \preceq \mathcal{W}$ entonces $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ y por ende $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. Es decir que $\mathcal{U} \preceq \mathcal{W}$.*

3. *Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in I$. Entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in I$ pues es una vecindad de x, además $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$, es decir que $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.*

Ejemplo A.1.2. *Sean $(I, \preceq_1)$, $(J, \preceq_2)$ dos conjuntos dirigidos. Entonces $L = I \times J$, donde $I \times J = \{(\alpha,\beta) : \alpha \in I, \beta \in J\}$, es un conjunto dirigido con la relación $(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_2, \beta_2)$ si y sólo si $\alpha_1 \preceq_1 \alpha_2$ y $\beta_1 \preceq_2 \beta_2$.*

- *Sea $(\alpha,\beta) \in L$. Como I y J son conjuntos dirigidos se tiene que $\alpha \preceq_1 \alpha$ y $\beta \preceq_2 \beta$, por tanto $(\alpha,\beta) \preceq (\alpha,\beta)$.*

- *Sean* $(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2),\ (\alpha_3, \beta_3) \in L$ *tales que*

$$(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_2, \beta_2) \quad y \quad (\alpha_2, \beta_2) \preceq (\alpha_3, \beta_3).$$

  Como I *y* J *son conjuntos dirigidos se tiene que* $\alpha_1 \preceq_1 \alpha_3$ *y* $\beta_1 \preceq_2 \beta_3$*, por tanto* $(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_3, \beta_3)$*.*

- *Sean* $(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2) \in L$*. Como* I *y* J *son conjuntos dirigidos se tiene que existe* $\alpha_3 \in I$ *tal que* $\alpha_1 \preceq_1 \alpha_3$ *y* $\alpha_2 \preceq \alpha_3$*, de igual manera como* J *es conjunto dirigido, existe* $\beta_3 \in J$ *tal que* $\beta_1 \preceq_2 \beta_3$ *y* $\beta_2 \preceq_2 \beta_3$*. Por tanto*

$$(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_3, \beta_3) \quad y \quad (\alpha_2, \beta_2) \preceq (\alpha_3, \beta_3).$$

Se define la convergencia de una red con una topología τ de la misma manera que se define la convergencia de una sucesión en un espacio topológico.

Definición A.1.5. *Sea* X *un espacio vectorial topológico. Decimos que una red* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *converge a* x *si para toda vecindad* $\mathcal{V}_x$ *de* x *existe* $\alpha_{\mathcal{V}_x}$ *tal que si* $\alpha_{\mathcal{V}_x} \preceq \alpha$ *entonces* $x_\alpha \in \mathcal{V}_x$*.*

La siguiente propiedad nos va a ser de gran utilidad.

Proposición A.1.1. *Sea* $M \subseteq X$ *y sea* $x \in X$*. Entonces* $x \in \overline{M}$ *si y sólo si existe una red* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *en* M *que converge a* x*.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \overline{M}$. Entonces para toda vecindad $\mathcal{V}_x$ de x se cumple que $\mathcal{V}_x \cap M \neq \emptyset$. Tomemos $\mathcal{V}_x$ vecindad de x. Por el ejemplo A.1.1 sabemos que el conjunto $I = \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ } es\ vecindad\ de\ x\}$ es un conjunto dirigido. Como para cada $\mathcal{U} \in I$ se tiene que $\mathcal{U} \cap M \neq \emptyset$ entonces podemos considerar la red $\{x_\mathcal{U}\}_{\mathcal{U} \in I}$ donde $x_\mathcal{U} \in \mathcal{U} \cap M$. De este modo si $\mathcal{V}_x \preceq \mathcal{U}$, es decir que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}_x$, se tiene que $x_\mathcal{U} \in \mathcal{V}_x$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que existe una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en M que converge a $x \in X$. Por definición, esto quiere decir que dada una vecindad $\mathcal{V}_x$ de x entonces si $\alpha_{\mathcal{V}_x} \preceq \alpha$ entonces $x_\alpha \in \mathcal{V}_x$. Y por lo tanto $M \cap \mathcal{V}_x \neq \emptyset$.

□

Recordamos que dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se define una subsucesión de $\{x_n\}$ si y sólo si existe una función $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ creciente. Se demuestra que en dado caso se cumple que $n\leqslant g(n)$. La defínción que enunciaremos de subred es muy similar;

Definición A.1.6. *Sean I y J dos conjuntos dirigidos y $x:I\to X$ denotada por $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una red. Si $g:J\to I$ es tal que*

1. *Si $\beta_1\preceq_1\beta_2$ entonces $g(\beta_1)\preceq_2 g(\beta_2)$, ($g$ es creciente).*

2. *Para toda $\alpha\in I$ existe $\beta\in J$ tal que $\alpha\preceq_2 g(\beta)$.*

Decimos entonces que $x\circ g:J\to X$ denotada como $\left\{x_{g(\beta)}\right\}_{\beta\in J}$ es una subred de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Observación A.1.2. *Para evitar demasiada notación, cuando se hable de subredes ya no distinguiremos explícitamente $\preceq_1$ de $\preceq_2$. Se entiende que si $\alpha_1,\ \alpha_2$ son elementos de I, entonces $\preceq$ hace referencia a la relación del conjunto dirigido I y de la misma manera si $\beta_1,\ \beta_2\in J$ entonces $\preceq$ hace referencia a la relación del conjunto dirigido J.*

Proposición A.1.2. *Sea $x\in X$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una red en X que converge a x. Entonces toda subred de $\{x_\alpha\}$ converge a x.*

Demostración. Sea $\left\{x_{g(\beta)}\right\}_{\beta\in J}$ una subred de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y sea $\mathcal{V}_x$ una vecindad de x. Como $\{x_\alpha\}$ converge a x existe $\alpha_{\mathcal{V}_x}$ tal que si $\alpha_{\mathcal{V}_x}\preceq\alpha$ entonces $x_\alpha\in\mathcal{V}_x$. Por *2.* sabemos que existe $\beta\in J$ tal que $\alpha_{\mathcal{V}_x}\preceq g(\beta_{\mathcal{V}_x})$. Ahora, como g es creciente, para toda $\beta_{\mathcal{V}_x}\preceq\beta$ se tiene que

$$\alpha_{\mathcal{V}_x}\preceq g(\beta_{\mathcal{V}_x})\preceq g(\beta).$$

En consecuencia $x_{g(\beta)}\in\mathcal{V}_x$, es decir que $\left\{x_{g(\beta)}\right\}_{\beta\in J}$ converge a x. $\square$

Ejemplo A.1.3. *Sean I y J dos conjuntos dirigidos y consideremos $L=I\times J$ como en el ejemplo A.1.2. Sean $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ dos redes. Definamos $g:L\to I$ como $g(\alpha,\beta)=\alpha$. Entonces $\left\{x_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ es una subred de $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$.*

En efecto se tiene que

1. *Si* $(\alpha_1, \beta_1) \preceq (\alpha_2, \beta_2)$ *entonces en particular* $\alpha_1 \preceq \alpha_2$. *Por lo tanto*

$$g(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 \preceq \alpha_2 = g(\alpha_2, \beta_2).$$

2. *Sea* $\alpha \in I$ *entonces en particular* $\alpha \preceq \alpha = g(\alpha,\alpha)$.

En consecuencia $\left\{x_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ *es una subred de* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$. *Análogamente, si definimos* $f : L \to J$ *como* $f(\alpha,\beta) = \beta$ *entonces* $\left\{y_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ *es una subred de* $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$.

Si además suponemos que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *converge a* $x \in X$, *por la proposición A.1.2 se tiene que* $\left\{x_{g(\alpha,\beta)}\right\}_{(\alpha,\beta)\in L}$ *converge a* x.

Ahora definiremos lo que es una función continua entre dos espacios vectoriales topológicos, ni esta definición ni la equivalencia que probaremos enseguida requieren la estructura de espacio vectorial, se usan en espacios topológicos.

Definición A.1.7. *Sean* X, Y *dos espacios vectoriales topológicos y* $T : X \to Y$ *una función.* T *es continua en* $x \in X$ *si para toda vecindad* $\mathcal{V}_y$ *de* $y = T(x)$ *existe una vecindad de* x *denotada* $\mathcal{V}_x$ *tal que* $T(\mathcal{V}_x) \subseteq \mathcal{V}_y$.

Proposición A.1.3. *Sean* X, Y *dos espacios vectoriales topológicos y sea* $T : X \to Y$ *una función. Entonces* T *es continua en* x *si y sólo si para toda red* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *que converge a* x, *se tiene que* $T(x_\alpha)$ *converge a* $T(x)$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que T es continua en x y sea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una red en X que converge a x. Consideremos una vecindad $\mathcal{V}_y$ de $y = T(x)$, entonces, por definición de continuidad tenemos que existe una vecindad de x, $\mathcal{V}_x$ tal que $T(\mathcal{V}_x) \subseteq \mathcal{V}_y$. Como $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ converge a x, entonces para $\alpha_{\mathcal{V}_x} \preceq \alpha$ se tiene que $x_\alpha \in \mathcal{V}_x$ y por lo tanto para $\alpha_{\mathcal{V}_x} \preceq \alpha$ se tiene que $T(x_\alpha) \in \mathcal{V}_y$. Es decir que $\{T(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ converge a $y = T(x)$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que siempre que $x_\alpha \to x$ se cumple que $T(x_\alpha) \to T(x)$. Supongamos también que T no es continua en x; entonces existe $\mathcal{V}_y$ con $y = T(x)$ tal que para toda vecindad $\mathcal{V}_x$ de x se tiene que $T(\mathcal{V}_x) \nsubseteq \mathcal{V}_y$. Consideremos nuevamente el conjunto dirigido $I = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}\ \textit{es vecindad de}\ x\}$ del ejemplo A.1.1. Y sea $\{x_{\mathcal{U}}\}_{\mathcal{U}\in I}$ la red construida por los $x_{\mathcal{U}}$ tales que $\mathcal{U} \in I$ pero

$T(x_{\mathcal{U}}) \notin \mathcal{V}_y$. Entonces $x_{\mathcal{U}}$ converge a x pero $T(x_{\mathcal{U}})$ no converge a $T(x)$, lo cual es una contradicción.

□

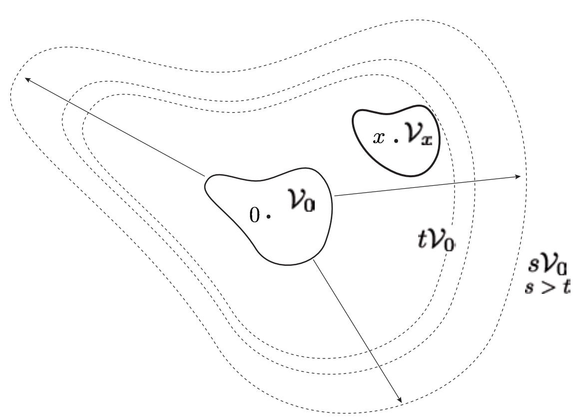
A.2. Operadores lineales y continuos en espacios vectoriales topológicos

Sabemos que en espacios normados un operador lineal es continuo si y sólo si es acotado. En espacios vectoriales topológicos cambian las cosas; todo operador lineal continuo es acotado, pero el regreso no es cierto.

Para nuestro propósito que es analizar subespacios vectoriales de funciones lineales será por consecuente suficiente pedir que T sea continua. Nuestro objetivo en esta sección será demostrar dicha implicación, para ello necesitaremos adentrarnos un poco más en las propiedades de la estructura de espacio vectorial de X.

Empezaremos demostrando que, al igual que en espacios normados, pedir continuidad en el origen es condición suficiente para que un operador sea continuo en todo X. Para ello necesitaremos unas definiciones.

Definición A.2.1. *Sea X espacio vectorial topológico, diremos que un conjunto $M \subseteq X$ es acotado si para cada vecindad $\mathcal{V}_0$ del origen existe un escalar $s \in \mathbb{R}$, $0 < s$, tal que $M \subseteq t\mathcal{V}_0$ para todo $t > s$.*



Proposición A.2.1. *Sean X, Y espacios topológicos, $T : X \to Y$ un operador lineal tal que T es continuo en $0 \in X$. Entonces T es continuo en X.*

Demostración. Sea $T : X \to Y$ tal que T es continuo en el origen y sea $x \in X$ con $T(x) = y$. Consideremos $\mathcal{V}_y$ una vecindad de este último, entonces $\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_0 + y$ con $\mathcal{V}_0$ vecindad del origen. Como T es continuo entonces existe $\mathcal{U}_0$ vecindad de 0 en X tal que $T(\mathcal{U}_0) \subseteq \mathcal{V}_0$. Consideremos

$$\begin{aligned} T(\mathcal{U}_0 + x) &= T(\mathcal{U}_0) + T(x) \\ &= T(\mathcal{U}_0) + y \\ &\subseteq \mathcal{V}_0 + y = \mathcal{V}_y. \end{aligned}$$

Observemos que $\mathcal{U}_0 + x = \mathcal{U}_x$ es una vecindad de $x \in X$, por lo tanto T es continuo en x. □

Definición A.2.2. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Diremos que T es acotado si para todo conjunto $M \subseteq X$ acotado, se tiene que $T(M)$ es acotado en Y.*

Teorema A.2.1. *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $T : X \to Y$ un operador continuo, entonces T es acotado.*

Demostración. Sea $M \subseteq X$ un conjunto acotado en X. Sea $\mathcal{V}_0$ vecindad del origen en Y. Como T es continuo existe $\mathcal{U}_0 \subseteq X$ tal que $T(\mathcal{U}_0) \subseteq \mathcal{V}_0$. Como M es acotado existe $s > 0$ tal que $M \subseteq t\,\mathcal{U}_0$ para toda $t > s$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} T(M) &\subseteq T(t\,\mathcal{U}_0) \\ &= tT(\mathcal{U}_0) \\ &\subseteq t\,\mathcal{V}_0. \end{aligned}$$

para toda $t > s$. En consecuencia $T(M)$ es un conjunto acotado de Y. □

Apéndice B

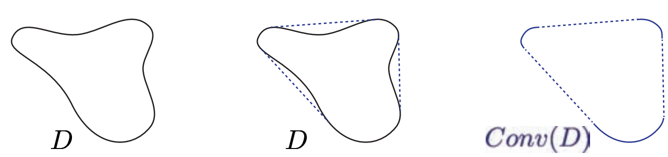
Convexidad

En este apéndice trabajaremos con X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Recordemos la definición de convexidad y de la envolvente convexa de un conjunto:

Definición B.0.1. *Decimos que un conjunto $D \subseteq X$ es convexo si para todo $x, y \in D$ se tiene que*

$$\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\} \subseteq D.$$

Definición B.0.2. *Dado un conjunto $D \subseteq X$ definimos la envolvente convexa de D como el conjunto convexo más pequeño que contiene a D. La denotaremos por* $\operatorname{conv}(D)$.



Definición B.0.3. *Dado un conjunto $D \subseteq X$ diremos que x es una combinación convexa de D, si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ con $x_j \in D$, $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tal que:*

1. *$\lambda_j \geqslant 0$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

2. $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$

Demostremos el siguiente lema:

Lema B.0.1. *Si D es un conjunto convexo de X, entonces cualquier combinación convexa de elementos de D se queda en D.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{C}(D)$ al conjunto de las combinaciones convexas de D. Queremos demostrar que $\mathcal{C}(D) \subseteq D$. Hagámoslo por inducción sobre n.

Para $n = 1$, si $x = \lambda_1 x_1$ es una combinación convexa, entonces $\lambda_1 = 1$ y $x_1 \in D$. Por tanto $x \in D$.

Para $n = 2$, si $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ entonces por definición de convexidad $x \in D$.

Sea $n \geqslant 3$ y supongamos que toda combinación convexa de n o menos elementos, está en D. Consideremos

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j,$$

con $x_j \in D$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ y los coeficientes λ_j cumplen las hipótesis de la definición. Podemos suponer que $\lambda_j \neq 0$ pues en el caso contrario por hipótesis de inducción ya acabaríamos. Por tanto $0 < \lambda_j < 1$ para toda $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Escribamos a x de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j x_j \\ &= \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j. \end{aligned}$$

Observemos que, dado que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$, entonces $\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1 - \lambda_1$. En consecuencia

$$\frac{\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_1} = 1.$$

Es decir que $y = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j$ es una combinación convexa de tamaño n. Y por hipótesis de inducción está en D. Finalmente, como D es convexo y tenemos que

$$x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y.$$

Podemos concluir que $x \in D$, pues $\lambda_1 + 1 - \lambda_1 = 1$.

$\square$

Probaremos la siguiente proposición:

Proposición B.0.1. *Sea $D \subseteq X$, entonces la envolvente convexa de D es el conjunto de las combinaciones convexas de D. Es decir:*

$$\operatorname{conv}(D) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j : \; n \in \mathbb{N}, \; x_j \in D, \lambda \;_j \in \mathbb{R}, \; \lambda_j \geqslant 0, \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Demostración. Llamemos $\mathcal{C}(D)$ al conjunto de las combinaciones convexas de D.

$\supseteq$) Sabemos que $D \subseteq \operatorname{conv}(D)$ por tanto $\mathcal{C}(D) \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{conv}(D))$. Y como $\operatorname{conv}(D)$ es convexo, por el Lema B.0.1 $\mathcal{C}(\operatorname{conv}(D)) \subseteq \operatorname{conv}(D)$, por lo cual:

$$\mathcal{C}(D) \subseteq \mathcal{C}(\operatorname{conv}(D)) \subseteq \operatorname{conv}(D).$$

$\subseteq$) Recordemos que $\operatorname{conv}(D)$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a D. Dado que $D \subseteq \mathcal{C}(D)$,pues $x = 1x \in D$ es una combinación convexa de D, bastará demostrar que $\mathcal{C}(D)$ es un conjunto convexo.

Sean $x, y \in \mathcal{C}(D)$, entonces

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad y = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j x_j.$$

Sea $t \in [0, 1]$ y consideremos

$$tx + (1-t)y = \sum_{j=1}^{n} t\lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{m} (1-t)\gamma_j x_j.$$

Pero $t\lambda_j \geqslant 0$ y $(1-t)\gamma_j \geqslant 0$, además

$$\sum_{j=1}^{n} t\lambda_j + \sum_{j=1}^{m} (1-t)\gamma_j = t + 1 - t = 1.$$

Es decir que $tx + (1-t)y$ es una combinación convexa de D, y por ende $\mathcal{C}(D)$ es convexo, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Apéndice C

Teoremas espectrales

En este apéndice demostraremos el teorema espectral para operadores normales, ahondaremos un poco más en la construcción de las familias espectrales, y haremos un esbozo de la prueba del teorema espectral para operadores autoadjuntos.

Haremos uso de los resultados ya presentados en 3.5 pero hará falta mencionar unos cuantos más. Nuevamente, aquí nos estamos guiando en el texto [1].

C.0.1. Preliminares

Convergencia fuerte en $\mathfrak{B}(X,X)$

Definición C.0.1. *Sean $T_n, T \in \mathfrak{B}(X,X)$, decimos que T_n converge fuertemente a T si para todo $x \in X$ se tiene que $T_n x$ converge a Tx. Es decir para todo $\epsilon > 0$ y para todo $x \in X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant N$, entonces*

$$||T_n x - Tx|| < \epsilon \, .$$

Denotaremos, esto por $T_n \xrightarrow{s} T$.

Lema C.0.1. *Sean $D_n, E, D : X \to X$ operadores acotados tales que $D_n \xrightarrow{s} D$. Si $D_n E = E D_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $DE = ED$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\begin{aligned} ||DEx - EDx|| &= ||DEx - D_nEx + ED_nx - EDx|| \\ &\leqslant ||(D - D_n)Ex|| + ||E(D_n - D)x||. \end{aligned}$$

Como $Ex \in X$, entonces para n suficientemente grande

$$||(D - Dn)Ex|| < \frac{\varepsilon}{||E|| + 1}.$$

Por otra parte como E es acotado, se cumple que

$$||E(D_n - D)x|| \leqslant ||E|| \cdot ||(D_n - D)x||.$$

Y nuevamente, por la convergencia fuerte, se tiene que

$$||(D - Dn)x|| < \frac{\varepsilon}{||E|| + 1}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} ||DEx - EDx|| &\leqslant ||(D - D_n)Ex|| + ||E(D_n - D)x|| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{||E|| + 1} + ||E||\frac{\epsilon}{||E|| + 1} \\ &= \varepsilon\frac{(||E|| + 1)}{||E|| + 1} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que $DE = ED$.

□

Corolario C.0.1. *Sean $D_n, E_n, E, D : X \to X$ operadores acotados tales que $D_n \xrightarrow{s} D$ y $E_n \xrightarrow{s} E$. Si $D_nE_m = E_mD_n$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $DE = ED$.*

Demostración. Se tiene que $D_n \xrightarrow{s} D$, por el lema C.0.1 se tiene que $DE_m = E_mD$. Ahora, como $E_n \xrightarrow{s} E$, usando nuevamente el lema anterior, concluimos que $DE = ED$. □

C.0.2. Teorema espectral para operadores normales

Empezaremos demostrando el teorema espectral para operadores normales usando el de autoadjuntos.

El siguiente resultado es una consecuencia de la demostración de este último.

Resultado C.0.1. *Sea $A : X \to X$ un operador autoadjunto, entonces existe una sucesión monótona de polinomios $\{p_n\}$ tal que $\{p_n(A)\}$ converge fuertemente por arriba a A.*

Teorema C.0.1. (Teorema espectral para operadores normales)

Sea $T : X \to X$ un operador normal, B, C los operadores definidos como en el lema anterior y $\{E_B(\lambda)\}$, $\{E_C(\mu)\}$ sus respectivas resoluciones de la identidad. Entonces:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + i\mu)\ dE_B(\lambda) dE_C(\mu).$$

Demostración. Por el lema 3.5.3, tenemos que B y C son operadores acotados autoadjuntos. Por el teorema espectral para operadores autoadjuntos 3.5.1, existen resoluciones de la identidad $E_B(\lambda)$ y $E_C(\mu)$ tales que:

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\ dE_B(\lambda) \ \text{ y } \ C = \int_{-\infty}^{\infty} \mu\ dE_C(\mu).$$

Sabemos además por el resultado C.0.1 que, tomando $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ fijas, existen sucesiones monótonas de polinomios p_n y q_m tales que $\{p_n(B)\}$ y $\{q_m(C)\}$ convergen fuertemente y por arriba a $E_B(\lambda)$ y $E_C(\mu)$, respectivamente.

Por el lema 3.5.3 sabemos que $BC = CB$. No es difícil ver que entonces $p_n(B)$ y $q_m(C)$ conmutan. Ahora, como

$$p_n(B) \xrightarrow{s} E_B(\lambda) \ \text{ y } \ q_m(C) \xrightarrow{s} E_C(\mu),$$

por el corolario C.0.1 concluimos que para toda $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que $E_B(\lambda)E_C(\mu) = E_C(\mu)E_B(\lambda)$.

Sabemos además, también por el lema 3.5.3, que $T = B - iC$, es decir que:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_B(\lambda) - i \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, dE_C(\mu).$$

Nuestro objetivo, será demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_B(\lambda) - i \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, dE_C(\mu) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda - i\mu \, dE_B(\lambda) dE_C(\mu) \quad \text{(C.0.1)}$$

Antes de adentrarnos en esto, vamos a explicar qué representa esta última doble integral.

Sean $\mathcal{P} = \{\lambda_0, \lambda_1 \ldots, \lambda_k\}$ y $\mathcal{Q} = \{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r\}$ particiones respectivas de $[m_B, M_b]$ y de $[m_C, M_C]$. Llamamos

$$\Omega_{ij} = \{(\lambda, \mu) : \lambda_{i-1} \leqslant \lambda < \lambda_i, \; \mu_{j-1} \leqslant \mu < \mu_j\},$$

al rectángulo semi-abierto $[\lambda_{i-1}, \lambda_i) \times [\mu_{j-1}, \mu_j)$. Y sea $\xi_{ij} \in \Omega_{ij}$.

Se tiene que la doble integral de la ecuación C.0.1 corresponde a:

$$\sup_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{k} \xi_{ij} (E_B(\lambda_i) - E_B(\lambda_{i-1})) \cdot (E_C(\mu_j) - E_C(\mu_{j-1})).$$

Abusando un poco de notación, denotaremos esto último como el siguiente límite:

$$\lim_{i,j \to \infty} \sum_{j,i} \xi_{ij} (E_B(\lambda_i) - E_B(\lambda_{i-1})) \cdot (E_C(\mu_j) - E_C(\mu_{j-1})).$$

Llamemos

$$\begin{aligned} H_i &= E_B(\lambda_i) - E_B(\lambda_{i-1}) \\ K_j &= E_C(\mu_j) - E_C(\mu_{j-1}) \\ \xi_{ij} &= \lambda_{ij} + i\mu_{ij}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{j,i} \xi_{ij} (E_B(\lambda_i) - E_B(\lambda_{i-1})) \cdot (E_C(\mu_j) - E_C(\mu_{j-1}))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j,i} \xi_{ij} H_i K_j \\
&= \sum_{j,i} (\lambda_{ij} + i\mu_{ij}) H_i K_j \\
&= \sum_{j,i} \lambda_{ij} H_i K_j + i \sum_{j,i} \mu_{ij} H_i K_j.
\end{aligned}
$$

Si tomamos una partición regular (es decir, intervalos de mismo tamaño) suficientemente pequeña, digamos que cumpla que $|\lambda_i - \lambda_{i-1}| < \varepsilon$, entonces $|\lambda_i - \lambda_{ij}| < \varepsilon$, esto ya que $\lambda_{i-1} \leqslant \lambda_{ij} \leqslant \lambda_i$. Por tanto $\lambda_i - \varepsilon < \lambda_{ij} < \lambda_i + \varepsilon$.

Recordamos que la notación $A < B$ la interpretamos como $< Ax, x > < < Bx, x >$. Ahora, como $E_B(\lambda)$ y $E_C(\mu)$ son monótonas crecientes, entonces

$$
\sum_{ij} (\lambda_i - \varepsilon) H_i K_j \quad < \quad \sum_{ij} \lambda_{ij} H_i K_j \quad < \quad \sum_{ij} (\lambda_i + \varepsilon) H_i K_j.
$$

Por tanto

$$
\sum_i (\lambda_i - \varepsilon) H_i \sum_j K_j \quad < \quad \sum_{ij} \lambda_{ij} H_i K_j \quad < \quad \sum_i (\lambda_i + \varepsilon) H_i \sum_j K_j. \tag{C.0.2}
$$

Ahora, por el lema 3.5.2 se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_j K_j &= \sum_{j=1}^{r} E_C(\mu_j) - E_C(\mu_{j-1})) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Por tanto, usando esto en la ecuación C.0.2 obtenemos:

$$
\sum_i (\lambda_i - \varepsilon) H_i \quad < \quad \sum_{ij} \lambda_{ij} H_i K_j \quad < \quad \sum_i (\lambda_i + \varepsilon) H_i.
$$

De forma análoga, se tiene que $\sum_i H_i = 1$, por lo cual

$$
\sum_i \lambda_i H_i - \varepsilon \quad < \quad \sum_{ij} \lambda_{ij} H_i K_j \quad < \quad \sum_i \lambda_i H_i + \varepsilon.
$$

Y concluimos entonces, que

$$
-\varepsilon \quad < \quad \sum_{ij} \lambda_{ij} H_i K_j - \sum_i \lambda_i H_i \quad < \quad \varepsilon \quad .
$$

Queremos usar el lema 3.5.1 para poder concluir que

$$||\sum_{ij}\lambda_{ij}H_iK_j - \sum_i \lambda_i H_i|| < \varepsilon \ . \tag{C.0.3}$$

Pero para poder usarlo, primero tenemos que justificar por qué el operador $\sum_{ij}\lambda_{ij}H_iK_j - \sum_i \lambda_i H_i$ es autoadjunto. Para ello, vamos a demostrar que es una proyección ortogonal, y por tanto tendremos lo deseado.

Como sabemos que $E_B(\lambda)$ y $E_C(\mu)$ son proyecciones ortogonales, y dado que H_i y K_j son sumas de éstas, entonces por el resultado 3.5.9 se tiene que H_i y K_j son proyecciones ortogonales.

Por otra parte dado que $E_B(\lambda)$ y $E_C(\mu)$ conmutan, H_i y K_j conmutan también. Y por el resultado 3.5.7, H_iK_j es también proyección ortogonal, para cada i, j.

Nuevamente por el resultado 3.5.9, concluimos que $\sum_{i,j}\lambda_{ij}H_iK_j$ es también una proyección ortogonal.

Finalmente, usando esto último y por el resultado 3.5.5, tenemos entonces que $\sum_{i,j}\lambda_{ij}H_iK_j$ es autoadjunto.

De forma similar se justifica que $\sum_i \lambda_i H_i$ es un operador autoadjunto, y juntando estas dos conclusiones obtenemos que $\sum_{ij}\lambda_{ij}H_iK_j - \sum_i \lambda_i H_i$ es autoadjunto. Ahora sí, por el lema 3.5.1 obtenemos la ecuación

$$||\sum_{ij}\lambda_{ij}H_iK_j - \sum_i \lambda_i H_i|| < \varepsilon \ . \tag{C.0.4}$$

Por otra parte, dado que la función $f(\lambda) = \lambda$ es integrable, usando la notación convenida, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{ij}\sum_{ij}\lambda_{ij}H_iK_j &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda \ dE_B(\lambda)dE_C(\mu) \\
& y \\
\lim_{ij}\sum_{i}\lambda_{i}H_i &= \int_{-\infty}^{\infty}\lambda \ dE_B(\lambda).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, juntando estos dos resultados obtenemos que para toda $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
& || \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_B(\lambda) dE_C(\mu) - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_B(\lambda) || \\
\leqslant \; & \\
& || \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_B(\lambda) dE_C(\mu) - \sum_{ij} \lambda_{ij} H_i K_j || + || \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_B(\lambda) - \sum_{i} \lambda_i H_i || \\
& + || \sum_{ij} \lambda_{ij} \; H_i K_j - \sum_{i} \lambda_i H_i || \\
\leqslant \; & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
= \; & \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_B(\lambda) dE_C(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_B(\lambda) \\
&= B.
\end{aligned} \tag{C.0.5}$$

De manera análoga podemos llegar a que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\mu \; dE_B(\lambda) dE_C(\mu) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \mu \; dE_C(\mu) \\
&= iC.
\end{aligned} \tag{C.0.6}$$

Restando las ecuaciones C.0.5 y C.0.6, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda + i\mu \; dE_B(\lambda) dE_C(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; dE_B(\lambda) - i \int_{-\infty}^{\infty} \mu \; dE_C(\mu) \\
&= B - iC.
\end{aligned}$$

Y con esto termina la prueba. □

C.0.3. Medidas espectrales

Consideremos la familia de rectángulos semi abiertos$\Omega_{\;ij}$ definidos en la sección anterior. Es decir:

$$[\lambda_{i-1}, \lambda_i) \times [\mu_{j-1}, \mu_j),$$

y llamémosla $\mathscr{R}_1 = \{\Omega_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$. Definamos la transformación $E : \mathscr{R}_1 \to X$ como

$$E(\Omega_{ij}) := (E_B(\lambda_i) - E_B(\lambda_{i-1})) \circ (E_C(\mu_j) - E_C(\mu_{j-1})).$$

Se va cumplir lo siguiente:

- Cada $E(\Omega_{ij})$ es una proyección ortogonal. Esto ya que $E_B(\lambda)$ y $E_C(\mu)$ son proyecciones ortogonales y conmutan.
- La familia $\{E(\Omega_{ij})\}$ es una familia ortogonal de proyecciones ortogonales. Es decir, si $k \neq i$ o $m \neq j$, entonces $E(\Omega_{ij})E(\Omega_{km}) = 0$.
- Por lo anterior y el resultado 3.5.9, concluimos que $\sum_{ij} E(\Omega_{ij})$ es una proyección ortogonal sobre

$$\sum_{i,j} \oplus \mathcal{R}(E(\Omega_{ij})).$$

- Se adopta la convención $E(\emptyset) = 0$.
- Por el lema 3.5.2 se cumple que $E(\mathbb{C}) = 1$.

Vamos a definir una medida, para ello hay que extender el dominio de E:

- Extender el dominio de E a todos los rectángulos (ya sean abiertos, cerrados, semi-abiertos, o cualquier otra combinación) del plano complejo, $\mathscr{R} = \{R : R \text{ es un rectángulo}\}$.
- Extender el dominio de E a las uniones numerables de rectángulos en $\mathscr{R}$.
- Extender el dominio de E a cualquier conjunto de $\mathbb{C}$.
- Definir la transformación $E^* = \{E(S) : S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\}$. Y usar el siguiente resultado, C.0.2, y el teorema de Carathéodory, que pueden consultarse en [7], para obtener una medida E tal que
  1. $E(\mathbb{C}) = 1$
  2. Si $\{U_i\}$ son conjuntos disjuntos entonces

$$E(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} E(S_i).$$

Resultado C.0.2. *Sea* $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ *y* $\rho : \Sigma \to [0, \infty)$ *tal que* $\emptyset, X \in \Sigma$ *y* $\rho(\emptyset) = 0$. *Para cualquier* $A \subseteq X$ *definamos*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) E_i \in \Sigma, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}.$$

Entonces μ^* *es una medida exterior.*

De esta forma, la integral del teorema C.0.1, se puede reescribir de la siguiente manera

$$T = \int_{\Delta} \xi dE(\xi),$$

donde $\xi = \lambda + i\mu$.

C.0.4. Teorema espectral para operadores autoadjuntos

Existen muchas pruebas para este teorema. No demostraremos todos los detalles, la idea será hacer un esbozo de demostración dejando en claro qué cosas vamos a asumir y cuáles no.

Recordamos que estamos denotando

$$M = \sup_{||x||=1} \{< Ax, x >\} \quad \text{y} \quad m = \text{ínf}_{||x||=1} \{< Ax, x >\}.$$

Resultado C.0.3. *Sea* A_n *una sucesión de operadores acotados, autoadjuntos y que conmutan entre ellos. Si se cumple que*

$$A_1 \geqslant A_2 \geqslant A_3 \cdots \geqslant A_n \geqslant A_{n+1} \cdots \geqslant 0,$$

entonces existe un operador autoadjunto y acotado A*, tal que* A_n *converge fuertemente a* A *con* $A \geqslant 0$.

Teorema C.0.2. *Sea* $A : X \to X$ *un operador autoadjunto. Entonces existe una resolución de la identidad* $\{E(\lambda)\}$ *tal que:*

$$A = \int_{m^-}^{M} \lambda \, dE(\lambda).$$

Demostración. Haremos un esbozo de prueba siguiendo los siguientes pasos:

Notación C.0.1. *Denotemos por* $\mathscr{P}_{[m,M]}$ *el espacio de polinomios con coeficientes reales en el intervalo* $[m, M]$.

Sea $\mathscr{S}_1$ *el espacio de funciones semicontinuas superiormente, no negativas; es decir, aquellas que para todo* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$ *existe* δ *tal que si* $x \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$ *entonces*

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon \ .$$

Sea $\mathscr{S}_2$ *el espacio de diferencias de funciones semicontinuas superiormente. Es decir*

$$\mathscr{S}_2 = \{h = f_1 - f_2 : f_1,\ f_2 \in \mathscr{S}_1\} \ .$$

Paso 1 Definamos la transformación

$$\begin{array}{rcl} \Phi_1 : \mathcal{P}[m, M] & \rightarrow & \mathfrak{B}(X, X) \\ p(\lambda) & \rightarrow & p(A). \end{array}$$

Entonces:

1. $\Phi_1(p_1 + p_2) = p_1(A) + p_2(A)$.
2. $\Phi_1(p_1 \cdot p_2) = p_1(A) \cdot p_2(A)$.
3. Para todo $\alpha \in \mathcal{R}$, $\Phi_1(\alpha \cdot p) = \alpha \cdot p(A)$.
4. Si $p(\lambda) \geqslant 0$ en $[m, M]$, entonces $p(A) \geqslant 0$, es decir que

$$< p(A)x, x > \quad \geqslant \quad 0 \quad \text{para toda } x \in X.$$

5. Si $p_1(\lambda) \geqslant p_2(\lambda)$ en $[m, M]$, entonces $p_1(A) \geqslant p_2(A)$.

Observemos que las primeras tres propiedades nos están diciendo que$\Phi\ _1$ es un homomorfismo. Las últimas dos, nos indican que$\Phi\ _1$ respeta una cierta monotonía. Finalmente, no es dificil ver que la transformación está bien definida.

Paso 2 Vamos a extender el dominio del homomorfismo a $\mathscr{S}_1$. Queremos definir

$$\overline{\Phi}_1 : \mathscr{S}_1 \rightarrow \mathfrak{B}(X, X).$$

Para ello usaremos el hecho de que para cada $f \in \mathscr{S}_1$ existe una sucesión de polinomios p_n, tal que converge puntualmente a f por arriba. Es decir, se cumple que

$$p_1(\lambda) \geqslant p_2(\lambda) \geqslant p_3(\lambda) \dots p_n(\lambda) \geqslant p_{n+1}(\lambda) \geqslant \cdots \geqslant f(\lambda) \geqslant 0.$$

Por la propiedad 5 del paso anterior, se tiene entonces que

$$p_1(A) \geqslant p_2(A) \geqslant p_3(A) \dots p_n(A) \geqslant p_{n+1}(A) \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

Observemos que para toda $j, k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$p_j(A)p_k(A) = p_k(A)p_j(A).$$

Además para toda k, $p_k(A)$ es autoadjunto. Por el resultado C.0.3, existe B operador autoadjunto y acotado, tal que $p_n(A)$ converge fuertemente a B. Llamemos $B = f(A)$.

Definamos ahora $\overline{\Phi}_1$ como:

$$\overline{\Phi}_1(f) = \begin{cases} p(A) & \text{si} \quad f = p \in \mathscr{P}_{[m,M]} \\ f(A) & \text{si} \quad f \in \mathscr{S}_1 \text{ donde } f(A) = \lim_s p_n(A) \end{cases}$$

Llamemos$\Phi_2 = \overline{\Phi}_1$. Se cumple lo siguiente:

1. $\Phi_2(f_1 + f_2) = f_1(A) + f_2(A)$.
2. $\Phi_2(f_1 \cdot f_2) = f_1(A) \cdot f_2(A)$.
3. Para todo $\alpha \geqslant 0$,$\Phi_2(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot f(A)$.
4. Si $f_1(\lambda) \geqslant f_2(\lambda)$ en $[m, M]$, entonces $f_1(A) \geqslant f_2(A)$.
5. $f(A)$ es autoadjunto para toda $f \in \mathscr{S}_1$.

Se puede demostrar queΦ_2 está bien definida, pero lo omitiremos. Observamos queΦ_2 es casi un homomorfismo. Para arreglar el punto 3 tendremos que extender un poco más nuestro dominio.

Paso 3 Vamos a extender el dominio de Φ_2 a $\mathscr{S}_2$. Para ello basta con definir

$$\overline{\Phi}_2 : \mathscr{S}_2 \to \mathfrak{B}(X, X),$$

como

$$\overline{\Phi}_2(h) = \Phi_2(f) - \Phi_2(g),$$

donde $h = f - g$ con $f, g \in \mathscr{S}_1$. Llamemos $\Phi_3 = \overline{\Phi}_2$, Φ_3 está bien definida y va a cumplir lo mismo que Φ_2, pero además, si $\alpha < 0$:

$$\alpha(f - g) = (-\alpha)g - (-\alpha)f,$$

y $-\alpha g$ y $-\alpha f$ están en $\mathscr{S}_1$ pues $-\alpha > 0$.

Con esto tenemos un homomorfismo Φ_3 entre $\mathscr{S}_2$ y $\mathfrak{B}(X, X)$.

Paso 4 Definamos la siguiente familia de funciones $\{k_\mu(\lambda)\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ semicontinuas superiormente

$$k_\mu(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant \mu \\ 0 & \text{si} \quad \lambda > \mu \end{cases}$$

Demostraremos que bajo Φ_3,

$$\begin{aligned} \Phi_3(k_\mu) &= k_\mu(A) \\ &:= E(\mu), \end{aligned}$$

es una resolución de la identidad para el operador autoadjunto A. De acuerdo con la definición 3.5.7 hay que demostrar lo siguiente:

- **Para cada μ, $E(\mu)$ es una proyección ortogonal:** En el paso 3 vimos que $\Phi_3(f)$ es un operador acotado y autoadjunto. Por tanto $E(\mu)$ es acotado y autoadjunto. Además

  $$k_\mu(\lambda) k_\mu(\lambda) = k_\mu(\lambda)$$

  por pura definición. Por tanto $E(\mu)^2 = E(\mu)$. Por el teorema 3.5.5

concluimos que $E(\mu)$ es una proyección ortogonal.

- **Si** $\mu \leqslant \nu$**, entonces** $E(\mu)E(\nu) = E(\nu)E(\mu) = E(\mu)$**:** Si $\mu \geqslant \nu$, entonces $k_\mu(\lambda)k_\nu(\lambda) = k_\nu(\lambda)k_\mu(\lambda) = k_\mu(\lambda)$ por definición de k_μ. Por tanto
$$k_\mu(A)k_\nu(A) = k_\nu(A)k_\mu(A) = k_\mu(A).$$
Es decir
$$E(\mu)E(\nu) = E(\nu)E(\mu) = E(\mu).$$
- $\lim_{x\to\lambda_0^+} E(\lambda)x = E(\lambda_0^+)x = E(\lambda_0)x.$
- **Si** $\mu < m$ **entonces** $E(\mu) = 0$**, y si** $\mu > M$**, entonces** $E(\mu) = 1$**:**
Si $\mu < m$, entonces $k_\mu(\lambda) = 0$ en $[m, M]$. Como el polinomio 0 converge por arriba a $k_m(\lambda)$ en $[m, M]$ entonces por el resultado C.0.3,$\Phi_3(k_\mu) = 0$. Es decir que $E(\mu) = 0$.
- $A = \displaystyle\int_{m^-}^{M} \lambda \, dE(\lambda)$:
Sea $\mu \geqslant \nu$, entonces $k_\mu(\lambda) \leqslant k_\nu(\lambda)$ y por ende $0 \leqslant k_\nu(\lambda) - k_\nu(\lambda)$.

Afirmación C.0.1. *Se cumple que*

$$\mu(k_\nu(\lambda) - k_\mu(\lambda)) \;\leqslant\; \lambda(k_\nu(\lambda) - k_\mu(\lambda)) \;\leqslant\; \nu(k_\nu(\lambda) - k_\mu(\lambda))$$

Demostración. Separemos en tres casos:
- Si $\lambda < \mu$ y $\nu \leqslant \mu$, entonces $k_\mu(\lambda) = 1 = k_\nu(\lambda)$ por tanto

$$k_\nu(\lambda) - k_\mu(\lambda) = 0.$$

- Si $\nu \leqslant \mu$ y $\nu < \lambda$, entonces $k_\mu(\lambda) = 0 = k_\nu(\lambda)$ por tanto

$$k_\nu(\lambda) - k_\mu(\lambda) = 0.$$

- Si $\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu$ entonces $k_\mu(\lambda) = 0$, $1 = k_\nu(\lambda)$ y por tanto

$$k_\nu(\lambda) - k_\mu(\lambda) = 1.$$

En cualquier caso se cumple la desigualdad deseada, con lo cual queda demostrada la afirmación. $\square$

Por la monotonía del homomorfismoΦ_3, tenemos entonces que

$$\Phi_3[\mu(k_\nu(\lambda)-k_\mu(\lambda))] \leqslant \Phi_3[\lambda(k_\nu(\lambda)-k_\mu(\lambda))] \leqslant \Phi_3[\nu(k_\nu(\lambda)-k_\mu(\lambda))].$$

Y dado queΦ_3 es un homomorfismo y abre sumas y saca escalares:

$$\begin{aligned} \mu\ (\Phi_3[k_\nu(\lambda)] - \Phi_3[k_\mu(\lambda))]) &\leqslant (\Phi_3[\lambda(k_\nu(\lambda)] - \Phi_3[\lambda k_\mu(\lambda))]) \\ &\leqslant \nu\ (\Phi_3[k_\nu(\lambda)] - \Phi_3[k_\mu(\lambda)]). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\mu(E(\nu) - E(\mu)) \leqslant A(E(\nu) - E(\mu)) \leqslant \nu(E(\nu) - E(\mu)).$$

Sea $a < m$ y $M < b$, consideremos una partición $\mathcal{P} = \{\lambda_0, \dots \lambda_n\}$ del intervalo $[a, b]$. Se tiene entonces que $\lambda_0 < \lambda_1, \dots < \lambda_n$ y por tanto podemos aplicar lo anterior a los valores λ_k. Es decir:

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_0(E(\lambda_1) - E(\lambda_0)) & \leqslant & A(E(\lambda_1) - E(\lambda_0)) & \leqslant & \lambda_1(E(\lambda_1) - E(\lambda_0)) \\ \lambda_1(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)) & \leqslant & A(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)) & \leqslant & \lambda_2(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)) \\ & & \vdots & & \end{array}$$

$$\lambda_{n-1}(E(\lambda_n)-E(\lambda_{n-1})) \leqslant A(E(\lambda_n)-E(\lambda_{n-1})) \leqslant \lambda_n(E(\lambda_n)-E(\lambda_{n-1})).$$

Sumando estas desigualdades obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) &\leqslant A\sum_{k=1}^{n}(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})). \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \leqslant A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})).$$

Ya tenemos prácticamente una suma parcial de Stieltjes, consideremos para cada $k = 1, \dots n$ los elementos $\lambda'_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$. Entonces $\lambda_{k-1} \leqslant \lambda'_k \leqslant \lambda_k$ y $\lambda_k - \lambda'_k \leqslant \lambda_k - \lambda_{k-1}$, en consecuencia

$$\begin{aligned} A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \quad &\leqslant \quad \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k'})(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \\ &\leqslant \quad \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})). \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos una partición de tal forma que $\lambda_k - \lambda_{k-1} < \epsilon$ para toda k. Entonces por el lema 3.5.2, concluimos que

$$A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})) \ < \ \varepsilon \ .$$

De manera análoga, se demuestra que

$$-\varepsilon \ < \ A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})).$$

Tenemos pues que

$$|A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}))| \ < \ \varepsilon \ .$$

Dado que A es autoadjunto, por el lema 3.5.1, concluimos que

$$||A - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k (E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}))|| \ < \ \varepsilon \ .$$

En otras palabras

$$\begin{aligned} A \quad &= \quad \int_a^b \lambda \, dE(\lambda) \\ &= \quad \int_{m^-}^{M} \lambda \, dE(\lambda). \end{aligned}$$

$\square$

Bibliografía

[1] G. Bachman y L. Narici, *Functional Analysis*, Dover Publications, 2000.

[2] R. G. Bartlet, *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, 1966.

[3] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland Math. Library, 1988.

[4] L. Bernal González y T. Domínguez Benavides, *Espacios Vectoriales Topológicos y Espacios Funcionales*, Universidad de Sevilla, 2012.

[5] F. Casarrubias y A. Tamariz, *Elementos de la Topología General*, Aportaciones Matemáticas, IMATE, 2015.

[6] W. Donoghue, *The lattice of Invariant Subspaces of a Completely Continous Quasinilpotent Transformation*, Pacific J. Math, vol.7, 1031-1035, 1957.

[7] J. B. Folland, *Modern Techniques and Their Applications*, John Willey and Sons, 1999.

[8] H. Friedberg, A. Insel, L. Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall College , 2002.

[9] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons , 1978.

[10] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.

[11] A. J. Michaels, *Hilden's Simple Proof of Lomonosov's Invariant Subspace Theorem*, Department of Mathematics, Mitchel College, Advances in Mathematics 25, 56-58, 1977.

[12] H. Radjavi y P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Dover Publications, 2^{nd} edition, 2003.

[13] H. Radjavi, P. Rosenthal, E. Nordgren y D. Hadwin, *An Operator Not Satisfying Lomonosov's Hypothesis*, Journal of Functional Analysis 38, 410-415, 1980.

[14] C. J. Read, *A Short Proof Concerning the Invariant Subspace Problem*, J. London Math. Soc. (2) 34 335-348, 1986.

[15] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[16] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1976.

[17] B. S. Yadav, *The Invariant Subspace Problem*, Indian Society for History of Mathematics, NAW 5/6 n.2, 2005.

[18] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1995.