



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

*“APLICACIÓN DE MÉTODOS DE MUCHOS CUERPOS  
AL TRATAMIENTO NO-PERTURBATIVO DE LA QCD”*

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
**DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

P R E S E N T A :

**DAVID ARTURO AMOR QUIROZ**

*TUTOR PRINCIPAL:*

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT (ICN-UNAM)

*COMITÉ TUTORAL:*

DR. ROELOF BIJKER (ICN-UNAM)

DR. GENARO TOLEDO SANCHEZ (IF-UNAM)



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, CDMX.

MARZO DEL 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi madre y  
a la memoria de mi padre.*



# Agradecimientos

El presente trabajo fue posible gracias al aporte, directo o indirecto de muchas personas. A todos ellos quiero agradecer.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por la formación de calidad que me forjó como físico. En particular a la Facultad de Ciencias (FC-UNAM) y al Instituto de Ciencias Nucleares (ICN-UNAM) por los diversos apoyos brindados y por ser como un hogar para mí.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca y los diversos apoyos económicos durante el desarrollo de mi posgrado, así como al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) por el apoyo económico complementario que me brindó para la obtención del grado a doctor por parte del proyecto IN100418.

Al Dr. Peter O. Hess por la gran cantidad de tiempo, experiencia y consejos entregados de manera casi paternal, así como a los miembros de mi comité tutorial: el Dr. Roelof Bijker y el Dr. Genaro Toledo Sánchez, quienes sirvieron como una guía durante todo mi posgrado.

A los miembros de mi comisión evaluadora, el Dr. Axel Weber, el Dr. Alfredo Raya Montaña, el Dr. Jorge G. Hirsch Ganievich y el Dr. Wolfgang Bietenholz por el tiempo dedicado a la revisión de la presente tesis y por sus valiosos comentarios para mejorar la calidad de mi trabajo.

Al Dr. Tochtli Yépez Martínez y al Dr. Osvaldo Civitarese por ser parte fundamental del equipo y con quienes comparto gran parte de este trabajo.

Al Dr. César Fernández Ramírez por sus consejos y por impulsar mi desarrollo.

A mi padre, a quien no le alcanzó la vida para verme graduado como doctor pero que sé que desde una nube guía mis pasos con orgullo y amor. A mi madre, cuyos cimientos me han hecho el hombre que soy. A mi hermana, quien fue mi primer equipo en este mundo. A ustedes tres porque siempre los llevo en el corazón y cada instante juntos es invaluable y no lo cambiaría por nada en el mundo.

A todos los amigos que omití en nombre de la brevedad y por último pero no menos importante, agradezco a mi novia Paty cuyo amor me ha hecho crecer, pues como se dice popularmente “Atrás de cada gran hombre hay una gran mujer.”

# Índice general

<b>1. Elección de una base</b>	<b>6</b>
1.1. La expansión de la base . . . . .	8
1.2. Paridad de los campos . . . . .	12
<b>2. El Hamiltoniano efectivo</b>	<b>17</b>
2.1. El Hamiltoniano de Propagación Libre . . . . .	19
2.2. El Hamiltoniano de Interacción . . . . .	22
<b>3. Elección de un método de diagonalización</b>	<b>28</b>
3.1. Método de Tamm-Dankoff . . . . .	32
3.2. Aproximación de la fase aleatoria . . . . .	35
<b>4. Renormalización</b>	<b>41</b>
4.1. Renormalización del Hamiltoniano . . . . .	43
4.1.1. Renormalización de las masas . . . . .	44
4.1.2. Renormalización de los parámetros de interacción . . . . .	45
4.2. Resultados numéricos para la renormalización . . . . .	46
4.3. Ancho de oscilador . . . . .	49
<b>5. Resultados</b>	<b>51</b>
5.1. Mesones Pseudoescalares . . . . .	53
5.1.1. Mezcla de sabor $\eta - \eta'$ . . . . .	54

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	0
5.2. Mesones Vectoriales . . . . .	56
5.3. Mesones escalares . . . . .	58
<b>6. Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>Apéndices</b>	<b>63</b>
<b>A. Conmutadores del Álgebra de Pares</b>	<b>64</b>
A.1. Conmutador de 2 pares . . . . .	66
A.2. Conmutador de un generador con un par . . . . .	75
A.2.1. Generador de partículas con un par . . . . .	75
A.2.2. Generador de partículas con un par conjugado . . . . .	76
A.2.3. Generador de antipartículas con un par conjugado . . . . .	78
A.3. Conmutador de dos generadores . . . . .	79
A.3.1. Generadores de partículas . . . . .	79
A.3.2. Generadores de antipartículas . . . . .	81
A.4. El Álgebra de la Interacción . . . . .	83
<b>B. Matrices de adelanto y retraso</b>	<b>86</b>
B.1. Valor esperado de $\gamma^{b'a'}[H, \gamma_{ab}^\dagger]$ . . . . .	86
B.1.1. Valor esperado de $\gamma^{b'a'}[K, \gamma_{ab}^\dagger]$ . . . . .	87
B.1.2. Valor esperado de $\gamma^{b'a'}[V, \gamma_{ab}^\dagger]$ . . . . .	88
B.2. Valor esperado de $[H, \gamma_{ab}^\dagger] \gamma_{a'b'}^\dagger$ . . . . .	100
<b>C. El Hamiltoniano de Interacción</b>	<b>107</b>
<b>D. Remoción del Centro de Masa</b>	<b>113</b>
D.1. Remoción con transformaciones Talmi-Moshinsky . . . . .	113
D.1.1. Definición del par sin excitaciones del centro de masa . . . . .	115
D.2. Separación exacta de estados espúrios . . . . .	120



# Introducción

*Übrigens brauchen wir uns keineswegs darüber zu erschrecken,  
dass die Erkenntnisstufe, auf der wir heute stehen,  
ebensowenig endgültig ist als alle vorhergegangenen.* †

-F. Engels.

En la teoría clásica del electromagnetismo las partículas cargadas -como el electrón-, interactúan mediante un campo electromagnético. Experimentalmente se ha demostrado que dichos campos están cuantizados en paquetes de onda a los que llamamos fotones, razón por la cual se dice que son estos últimos los mediadores de la interacción electromagnética. A la *Teoría Cuántica de Campos* (QFT) encargada de describir tales interacciones se le conoce como *Electrodinámica Cuántica* (QED).

De manera similar a la QED, la *Cromodinámica Cuántica* (QCD) es una teoría de campo que describe a la interacción entre partículas con carga de color -los *quarks*-, mediada por los llamados *gluones*. La nomenclatura usada en QCD proviene de hacer una analogía con la teoría del color, donde se cuenta con tres colores primarios aditivos así como sus tres colores *inversos* o sustractivos.

A la interacción entre cargas de color se le denomina como *interacción fuerte*. Dicho nombre proviene del hecho que en los núcleos estables la interacción fuerte domina a la repulsión electromagnética entre los protones que los conforman.

---

†Por cierto, de ninguna manera debemos asustarnos de que el nivel de conocimiento en el que nos encontramos hoy en día no sea más definitivo que todos los anteriores.

Los gluones representan a los cuantos del campo de color y son los responsables de ligar a los quarks que componen a las partículas que denominamos *hadrones*. Sin contar los casos exóticos, hay dos tipos de hadrón: los *mesones* y los *bariones*. En el modelo de quarks constituyentes se describe a los mesones como partículas compuestas por un par quark-antiquark, mientras que los bariones están compuestos por tres quarks.

La interacción fuerte difiere del electromagnetismo en el hecho de que los gluones contienen en sí mismos carga de color y por lo tanto son *autointeractuantes*. Esto se refleja en el carácter *no-Abeliano* de la teoría de norma  $SU(3)$  de color que se utiliza para la descripción del campo gluónico.

Además de lo anterior, la QCD está caracterizada por dos propiedades fundamentales: el confinamiento y la libertad asintótica. El confinamiento establece que todo estado posible de la naturaleza (estado físico) debe ser necesariamente neutro en color, es decir, un escalar bajo rotaciones  $SU(3)$ ; y *localizado*, de modo que las cargas de color no son observables como estados libres extendidos. La libertad asintótica se refiere al decremento de la constante de acoplamiento de la interacción fuerte  $\alpha_s$  conforme disminuye la distancia entre cargas, lo cual hace posible el estudio *perturbativo* de la QCD a altas energías, por ejemplo, a la escala de energía de un proceso de dispersión entre protones.

Sin embargo, en el régimen de bajas energías ( $\lesssim 1$  GeV) la constante de acoplamiento es del orden de la unidad y por lo tanto resulta imposible modelar a la interacción de color como una perturbación. A pesar de que desde la formulación del modelo estándar se ha dedicado un gran esfuerzo a describir a las interacciones fuertes en el que llamaremos el *régimen no-perturbativo* (NP-QCD), aún no existe una solución satisfactoria para la QCD a bajas energías.

Existen muchos modelos fenomenológicos que han intentado formular una teoría efectiva de la NP-QCD. Uno de los primeros en hacerlo fue el modelo de bolsa del MIT (*MIT Bag Model*) [1], cuya principal desventaja es ser poco realista además de requerir de parámetros externos a la teoría.

Otra aproximación a NP-QCD es la llamada *Teoría de perturbación quiral* (ChPT) donde el Lagrangiano de la QCD se aproxima por un Lagrangiano sin término de masa y se realiza

una expansión perturbativa para masas de quarks pequeñas. Dicha formulación ha tenido éxito en reproducir propiedades importantes de los hadrones ligeros, tales como la polarización del espín del quark, momentos magnéticos y factores de forma débiles. Sin embargo, el hecho de que los cálculos de amplitudes en la ChPT son perturbativos genera una ruptura de la unitariedad a altas energías, donde los momentos externos ya no son un buen parámetro de expansión [2].

Hasta ahora, principalmente el Cálculo en Redes (*Lattice QCD*) [3] es capaz de derivar resultados no-perturbativos a partir de primeros principios. Por ejemplo, ha logrado describir a los estados hadrónicos de bajas energías [4, 5] así como a los estados mesónicos altamente excitados [6, 7] manteniendo la invariancia de norma de manera exacta. Sin embargo, dicho procedimiento está intrínsecamente limitado por el rápido crecimiento del esfuerzo numérico requerido conforme los cálculos se aproximan al límite continuo donde el parámetro de red tiende a cero, o bien, en el límite de volumen infinito. Otra desventaja es el llamado *problema de duplicación de fermiones*, que evita la posibilidad de mantener la simetría quiral como una característica natural de las teorías de campo fermiónicas en la red.

Otra forma de abordar los cálculos de la NP-QCD es mediante la solución de ecuaciones Dyson-Schwinger (DSE). La principal ventaja de tal formalismo es que permite la obtención dinámica de observables a bajas energías, por ejemplo, las constantes de decaimiento y la masa de los quarks [8–10]. Sin embargo, las DSE forman un conjunto infinito de ecuaciones integrales acopladas, por lo cual el sistema debe ser truncado y por ende no puede ser resuelto por completo, además de que no existe una prescripción clara de cómo llevar a cabo dicho truncamiento.

Es por ello que el objetivo general del presente proyecto es formular un modelo que presente una alternativa para realizar cálculos no-perturbativos partiendo de una teoría de campo efectiva. Se pretende además que dicho modelo tenga las siguientes propiedades:

- Que los cálculos involucrados sean capaces de reproducir los resultados de Lattice QCD pero con menor poder de cómputo necesario y sin estar limitados por el espaciado finito de la red, de modo que cualquier truncamiento sea controlado y rápidamente

convergente.

- Que requiera el menor número posible de parámetros libres. Esto se logra mediante el uso de métodos variacionales para relacionar a los parámetros entre sí, tal que no todos ellos sean libres sino que surjan naturalmente como función de la teoría a evaluar. Lo anterior se discute con más detalle en la Sección 4.3.
- Que ofrezca una interpretación física más intuitiva que los modelos arriba mencionados. Esto se espera lograr tras la verificación *a posteriori* de la eficacia de los ansatz asumidos.
- Que sea simple pero realista, es decir, que contenga los ingredientes importantes de la teoría. Esto se pretende conseguir al basar el proyecto en diversos formalismos que, al simular los efectos de la QCD, es de esperar que representen una buena aproximación a los resultados experimentales.
- Por último, se espera que a futuro los resultados numéricos generen un espectro suficientemente rico como para compararle con los resultados de otros métodos no-perturbativos e incluso ser capaz de llevar a cabo predicciones teóricas.

A la fecha, el proyecto del grupo de trabajo del Dr. Peter O. Hess ya ha hecho posible estudiar modelos efectivos para sistemas de quarks y gluones a bajas energías con resultados analíticos y semi-analíticos [11–19].

El modelo expuesto a lo largo del presente documento consta de un Hamiltoniano efectivo de la QCD inspirado en el formalismo de la norma de Coulomb, donde los quarks interactúan via un potencial estático que simula el efecto de los gluones.

La característica principal del modelo es que la parte espacial de los campos fermiónicos es expandida en la base no-relativista de funciones de oscilador armónico tridimensional en el espacio de coordenadas. En el Capítulo 1 se justifica dicha elección y se mencionan algunos aspectos matemáticos que ello involucra.

En el Capítulo 2 se da una expresión para el Hamiltoniano efectivo expandido en las funciones de oscilador armónico. En dicho capítulo se introduce además a las transformacio-

nes *Talmi-Moshinsky* (TM), las cuales permiten ciertas simplificaciones en el cálculo de los elementos de matriz del potencial.

Posteriormente, en el Capítulo 3 se justifica el uso de los llamados métodos de muchos cuerpos para diagonalizar al Hamiltoniano en una base de pares de partícula-agujero que son identificados como estados mesónicos.

En el Capítulo 4 se da un tratamiento detallado a la dependencia del cálculo del espectro mesónico como función del corte en el espacio de funciones de oscilador armónico.

Los resultados de dichos cálculos son presentados en el Capítulo 5 y las conclusiones son enumeradas en el Capítulo 6.

Los Apéndices A, B y C muestran los cálculos intermedios con detalle, mientras que el Apéndice D presenta una discusión sobre cómo se restauran las simetrías del Hamiltoniano perdidas a causa del uso de funciones no-relativistas.

# Capítulo 1

## Elección de una base

No somos el primer grupo que ha hecho uso de los métodos de muchos cuerpos para encontrar el espectro mesónico relacionado con un potencial estático efectivo [20–22]. La diferencia fundamental que propone el proyecto expuesto en el presente documento es el uso de la base de oscilador armónico tridimensional para expandir a los campos fermiónicos en el espacio de posiciones.

En principio cualquier base completa puede ser utilizada para construir el espacio de Fock. Sin embargo, la estructura del vacío dependerá de la base elegida. Entre mejor sea el ansatz para representar al vacío de la teoría interactuante, la elección de la expansión resultará más eficiente en describir a la física involucrada.

Usualmente los campos (fermiónicos o bosónicos) son expandidos en la base de ondas planas, las cuales son soluciones al problema de propagación libre, es decir, a la ecuación de Dirac o de Klein-Gordon, respectivamente. La teoría de campos ha sido explorada a fondo en dicho formalismo que es útil cuando se hacen expansiones perturbativas, pero poco se ha hecho para dar formalismo a una teoría de campo en expansión en funciones de oscilador.

Las razones por las cuales proponemos el uso de una base distinta para desarrollar a los campos son las siguientes:

- Debido al confinamiento, se espera que el dominio de cualquier excitación del campo

de color esté restringido a un volumen *compacto*, con hadrones individuales *localizados*. Es por ello que la base de oscilador es intuitivamente más adecuada, pues establece una escala característica en el espacio de posiciones. Esto se debe a que al expandir los campos en dicha base, las funciones de distribución de carga de color resultan estar suprimidas a largas distancias mediante una exponencial Gaussiana (ver ecuación 1.2). Análogamente la función del *centro de masa* (CM) es suprimida a su vez por una función de peso Gaussiana.

- Si bien la base de oscilador armónico no es una base relativista (no es invariante bajo transformaciones de Lorentz), en principio es posible recuperar la invariancia Galileana del CM de los mesones, por ejemplo, mediante el uso de las antes mencionadas transformaciones TM [23] (ver Apéndice D). Esto quiere decir que los quarks individualmente no serán invariantes ante traslaciones espaciales, sin embargo los grados de libertad importantes a considerar en la QCD a bajas energías son los mesones ligeros y no sus componentes constituyentes.
- No es necesario introducir frecuencias de corte como se hace en la regularización bien conocida en el espacio de momentos. Esto es debido a que las integrales en el espacio de posiciones son finitas tanto para distancias cortas (momentos grandes) o largas (momentos pequeños). El corte sin embargo se ha de introducir numéricamente al truncar la expansión de las funciones en el espacio de Hilbert, por lo que en este formalismo el proceso de regularización hará que la masa y la constante de acoplamiento corrientes sean función de un parámetro de corte discreto.
- Tras realizar una transformación de coordenadas al sistema CM, las integrales involucradas en los elementos de matriz del potencial de interacción se desacoplan, por lo que pueden ser determinados mediante el cálculo de una única integral unidimensional, que será de las llamadas *integrales de Talmi* con resultados analíticos.
- Por último pero no menos importante, el teorema de Jost-Schroer establece que cualquier campo, cuya función de dos puntos coincida con aquella de un campo libre, debe ser

en sí mismo un campo libre [24]. En otras palabras, la función de Green de dos puntos de un campo libre, no es unitariamente equivalente a una función de Green del mismo problema interactuante. Luego, a pesar de que las ondas planas funcionan bien para expansiones perturbativas en teorías débilmente interactuantes (tras aplicar un proceso completo de regularización), en teorías fuertemente interactuantes como NP-QCD no podemos establecer que las soluciones libres sean las más adecuadas.

## 1.1. La expansión de la base

La expansión para los campos fermiónicos está dada por [11–14]

$$\Psi_{cf}(r, \Omega) = \sum_{Nlm\sigma} R_{Nl}(r) Y_{lm}(\Omega) \begin{pmatrix} \chi_{\sigma} \tilde{Q}^{\frac{1}{2}Nlm_i\sigma cf} \\ \chi_{\sigma} \tilde{Q}^{-\frac{1}{2}Nlm_i\sigma cf} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

donde el primer índice de los operadores  $\tilde{Q}$  es el *pseudoespín*  $\tau = \pm\frac{1}{2}$  que referirá a la aniquilación de una *pseudopartícula* si  $\tau = +\frac{1}{2}$  o a la creación de su respectiva antipartícula si  $\tau = -\frac{1}{2}$ . Les denominamos pseudopartículas pues las excitaciones que se representan en esta base no puede ser consideradas como las excitaciones físicas (ver Figura 1.1). Tras diagonalizar al subespacio del pseudoespín para el caso de propagación libre, también se podrá considerar a dicho número cuántico como un indicador de si la partícula es creada por arriba o por debajo del nivel de Fermi.

El resto de los índices involucrados en los operadores de la ecuación (1.1) se refieren a un estado con número cuántico principal  $N$ ; momento angular orbital  $l$  con proyección magnética  $m_l$ ; espín  $\frac{1}{2}$  con proyección  $\sigma = \pm\frac{1}{2}$ ; en la representación (10) de color con  $c = \{Y_c, T_c, T_{c_z}\}$ ; y representación (10) de sabor con  $f = \{Y_f, T_f, T_{f_z}\}$ . Genéricamente  $Y$  denota a la hipercarga y  $T$  al isoespín con proyección  $T_z$ .

Las funciones angulares en la ecuación (1.1) son los armónicos esféricos  $Y_{lm}(\Omega)$ , mientras que las soluciones radiales se relacionan con los polinomios de Laguerre asociados  $L_n^{l+\frac{1}{2}}(x)$

mediante

$$\begin{aligned}
 R_{nl}(r) &= \mathcal{N}_{nl} r^l e^{-\frac{\xi}{2} r^2} L_n^{l+\frac{1}{2}}(\xi r^2) \\
 \mathcal{N}_{nl} &= \left[ \frac{2(n!)}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{3}{4}+\frac{l}{2}} \\
 n &= \frac{N-l}{2} .
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

A  $\xi^{-1/2}$  se le relaciona con el ancho del oscilador armónico. Este no resultará ser un parámetro libre, sino que será calculado mediante el principio variacional de Ritz, es decir, su valor óptimo quedará completamente determinado como función del Hamiltoniano en consideración. Esto último se discutirá en la Sección 4.3.

Sin embargo, en el presente modelo se prefiere trabajar en la base acoplada a un momento angular total  $j$  con proyección  $m_j$ .

$$\tilde{Q}_{\tau N l m_l \sigma c f}^\dagger = \sum_{j m_j} \langle l m_l, \frac{1}{2} \sigma | j m_j \rangle Q_{\tau(Nl) j m_j c f}^\dagger . \tag{1.3}$$

El subíndice  $(Nl)j$  del operador del lado derecho de la ecuación sirve para recordar que, aunque se trata de un esquema con momento angular total bien definido, éste proviene de haber acoplado a un orbital  $(Nl)$  con la representación  $\frac{1}{2}$  de espín. Para fines prácticos, se denota a la base en que están descritos los operadores  $Q$  como *base*  $(\tau Nl)$ .

Como se muestra en el Capítulo 2, el hamiltoniano de propagación libre no resultará ser diagonal en dicha base, por lo cual se define a una transformación unitaria que diagonalice simultáneamente al pseudoespín  $\tau \rightarrow \lambda$  como a los números cuántico principal y de momento angular orbital  $(Nl) \rightarrow (k\pi)$ .

$$Q_{\tau(Nl) j m c f}^\dagger = \sum_{\pi k \lambda} \left( \alpha_{\tau(Nl) \lambda \pi k}^{j f} \right)^* q_{\lambda \pi k j m c f}^\dagger \delta_{\pi, (-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} . \tag{1.4}$$

El índice  $k$  es positivo definido y corre sobre todos los estados orbitales después de la diagonalización. Por ejemplo, para un corte  $N_{cut} = 3$  y  $j = \frac{1}{2}$ , sólo los orbitales  $s$  y  $p$  son posibles, por lo cual  $k = 1, 2$  para cada  $\tau$  fijo.

El índice  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  etiqueta a las excitaciones según se encuentren por encima (debajo) del Mar de Dirac, y por ende uno puede reinterpretarles como excitaciones de quark (antiquark) en analogía al esquema partícula-agujero de los métodos de muchos cuerpos.

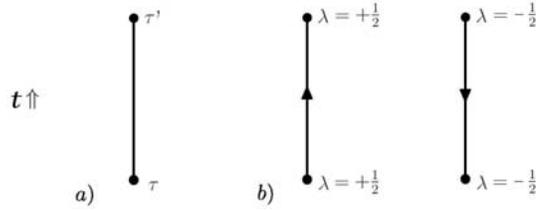


Figura 1.1: a) Diagrama de propagación libre de una pseudopartícula en el esquema del pseudoespín  $\tau$ . La propagación libre no puede generar ninguna excitación, por lo que la transformación de la ec. (1.4) cambia al esquema de partícula-agujero (pseudoespín  $\lambda$ ). b) Diagramas de la propagación libre de una partícula (que se propaga hacia adelante en el tiempo) y su correspondiente agujero (que se propaga hacia atrás en el tiempo).

Una vez que se ha eliminado a  $(Nl)$  en favor del nuevo número cuántico principal  $k$ , se pierde la regla de transformación bajo paridad, razón por la cual se ha definido al índice  $\pi = \pm 1$  en la nueva base con la finalidad de compensar la información que se podría perder al llevar a cabo la transformación. En la Sección 1.2 se examinará en mayor detalle a la paridad de los campos fermiónicos, donde además se deducirá a la expresión (1.4) mediante argumentos de paridad.

A la base en que están descritos los operadores  $q$  se le denotará por  $(\lambda\pi k)$  y por construcción el Hamiltoniano de propagación libre es diagonal en dicha base. Sin embargo, sabemos que la solución para dicho Hamiltoniano son las ondas planas, por lo que ambas bases se encuentran íntimamente relacionadas. Para evidenciar dicha relación, supóngase que el espacio de cuantas accesibles de oscilación está truncado, por razones de cómputo, por un número cuántico principal máximo  $N_{cut}$ . Debido a la completez de la base de oscilador armónico, las soluciones deben tender a reproducir a las ondas planas en el límite en que todos los cuantas de oscilación son tomados en cuenta  $N_{cut} \rightarrow \infty$ .

Es por lo anterior que resulta fundamental trabajar en la base  $(\lambda\pi k)$ , pues es la conexión que traduce a las excitaciones descritas por los operadores  $q$  de la ecuación (1.4) con los estados asintóticos de una teoría de campos más estándar, en donde realmente se les puede

interpretar como operadores de quark y antiquark respectivamente.

A este nivel es necesario advertir que por efectos de base, conforme el corte en el número cuántico principal  $N_{cut}$  aumenta, aparecen más y más estados de oscilador armónico, muchos de los cuales tenderán a degenerarse en el límite al continuo. Por tal razón, no todos los estados obtenidos en esta base pueden ser interpretados en términos de excitaciones físicas. Sin embargo, el estado más bajo tendrá una rápida convergencia respecto al corte, mientras que los niveles superiores tenderán a degenerarse con éste. Lo anterior sirve para argumentar que por lo menos el estado base, obtenido después de aplicar los métodos de muchos cuerpos (ver Capítulo 3), puede ser considerado con confianza como un estado físico.

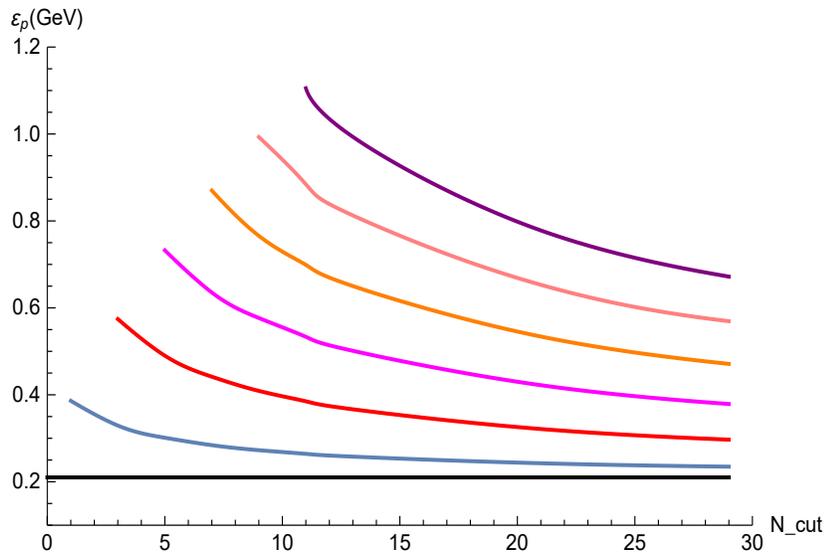


Figura 1.2: Comportamiento con respecto al corte  $N_{cut}$  de los niveles de energía de una partícula  $\varepsilon_p$  [GeV] tras diagonalizar al Hamiltoniano de propagación libre en la base de oscilador armónico. Conforme éste aumenta aparecen más y más estados posibles. El estado más bajo presenta una rápida convergencia respecto a  $N_{cut}$ , mientras que los niveles superiores tenderán a degenerarse con dicho estado.

## 1.2. Paridad de los campos

En cualquier teoría de campo fermiónica, la operación de una transformación de paridad es implementada mediante la matriz  $\gamma^0$  de Dirac, es decir,  $\mathcal{P}\Psi(\mathbf{x})\mathcal{P}^{-1} = \gamma^0\Psi(-\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Con ello, la acción del operador de paridad sobre los campos (1.1) debe ser

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\Psi(\mathbf{x})\mathcal{P}^{-1} &= \sum_{Nlm\sigma cf} R_{Nl}(|\mathbf{x}|)Y_{lm}(-\hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\sigma \tilde{Q}^{\frac{1}{2}Nlm\sigma cf} \\ \chi_\sigma \tilde{Q}^{\frac{1}{2}Nlm\sigma cf} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{Nlm\sigma cf} (-1)^l R_{Nl}(|\mathbf{x}|)Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) \begin{pmatrix} \chi_\sigma \tilde{Q}^{\frac{1}{2}Nlm\sigma cf} \\ -\chi_\sigma \tilde{Q}^{-\frac{1}{2}Nlm\sigma cf} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{Nlm\sigma cf} R_{Nl}(|\mathbf{x}|)Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}})\mathcal{P} \begin{pmatrix} \chi_\sigma \tilde{Q}^{\frac{1}{2}Nlm\sigma cf} \\ \chi_\sigma \tilde{Q}^{-\frac{1}{2}Nlm\sigma cf} \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1}. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

O bien, en términos del pseudoespín  $\tau$  se tiene que en general

$$\mathcal{P}\tilde{Q}^{\tau Nlm\sigma cf}\mathcal{P}^{-1} = (-1)^{l+\frac{1}{2}-\tau}\tilde{Q}^{\tau Nlm\sigma cf}, \tag{1.6}$$

donde podemos observar que la fase  $(-1)^l$  codifica el equivalente en espacio de posiciones a haber hecho el cambio  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ .

Como ya se mencionó, la ecuación (1.4) define a una transformación que diagonaliza simultáneamente al pseudoespín así como a los números cuántico principal y de momento angular orbital. Para hacer que ambos lados de dicha ecuación transformen de manera consistente bajo paridad, pediremos que los operadores en la base  $(\lambda\pi k)$  satisfagan que

$$\mathcal{P}q_{\lambda\pi k j m c f}^\dagger \mathcal{P}^{-1} = (\pi)q_{\lambda\pi k j m c f}^\dagger, \tag{1.7}$$

por lo que de sustituir las reglas de transformación en la transformación  $\alpha$  se puede separar la situación en dos casos:

- Para pseudoespín  $\tau = \frac{1}{2}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}Q_{\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger \mathcal{P}^{-1} &= (-1)^l Q_{\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger \\
 &= \sum_k \left[ \left( \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}+k}^{jf} \right)^* q_{\frac{1}{2}+k}^\dagger - \left( \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}-k}^{jf} \right)^* q_{\frac{1}{2}-k}^\dagger \right. \\
 &\quad \left. + \left( \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}+k}^{jf} \right)^* q_{-\frac{1}{2}+k}^\dagger - \left( \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}-k}^{jf} \right)^* q_{-\frac{1}{2}-k}^\dagger \right], \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

por lo que en este caso, si el momento angular orbital es  $l = \text{par}$  entonces

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}-k}^{jf} &= \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}-k}^{jf} = 0 \\
 \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}+k}^{jf}, \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}+k}^{jf} &\neq 0 \quad , \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

mientras que para el caso  $l = \text{impar}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}+k}^{jf} &= \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}+k}^{jf} = 0 \\
 \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}-k}^{jf}, \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}-k}^{jf} &\neq 0 \quad . \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

- En el caso en que el pseudoespín es  $\tau = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}Q_{-\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger \mathcal{P}^{-1} &= (-1)^{l+1} Q_{-\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger \\
 &= \sum_k \left[ \left( \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}+k}^{jf} \right)^* q_{\frac{1}{2}+k}^\dagger - \left( \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}-k}^{jf} \right)^* q_{\frac{1}{2}-k}^\dagger \right. \\
 &\quad \left. + \left( \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}+k}^{jf} \right)^* q_{-\frac{1}{2}+k}^\dagger - \left( \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}-k}^{jf} \right)^* q_{-\frac{1}{2}-k}^\dagger \right], \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

se tiene que para momento angular orbital  $l = \text{par}$  entonces

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}+k}^{jf} &= \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}+k}^{jf} = 0 \\
 \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}-k}^{jf}, \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}-k}^{jf} &\neq 0 \quad , \quad (1.12)
 \end{aligned}$$

mientras que si  $l = \text{impar}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}-k}^{jf} &= \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}-k}^{jf} = 0 \\
 \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\frac{1}{2}+k}^{jf}, \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)-\frac{1}{2}+k}^{jf} &\neq 0 \quad . \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

Una vez identificados los elementos no nulos podemos reescribir a la transformación en términos de los elementos de matriz reales  $\alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^{jf}$  como

$$\begin{aligned}
 l = \text{par} : \\
 Q_{\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger &= \sum_{k\lambda} \left( \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\lambda+k}^{jf} \right)^* q_{\lambda+kjmcf}^\dagger \\
 Q_{-\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger &= \sum_{k\lambda} \left( \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\lambda-k}^{jf} \right)^* q_{\lambda-kjmcf}^\dagger \\
 l = \text{impar} : \\
 Q_{\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger &= \sum_{k\lambda} \left( \alpha_{\frac{1}{2}(Nl)\lambda-k}^{jf} \right)^* q_{\lambda-kjmcf}^\dagger \\
 Q_{-\frac{1}{2}(Nl)jmcf}^\dagger &= \sum_{k\lambda} \left( \alpha_{-\frac{1}{2}(Nl)\lambda+k}^{jf} \right)^* q_{\lambda+kjmcf}^\dagger .
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Observamos de los casos anteriores que la paridad queda completamente determinada mediante la relación  $\pi = (-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}$ . Es posible entonces escribir a la transformación mediante el uso de deltas de Kronecker que determinen a la paridad de la siguiente manera

$$Q_{\tau(Nl)jmcf}^\dagger = \sum_{\pi k \lambda} \left( \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^{jf} \right)^* q_{\lambda\pi k j m c f}^\dagger \delta_{\pi, (-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} . \tag{1.15}$$

O bien tomando el conjugado hermítico de lo anterior, se tiene que

$$Q^{\tau(Nl)jmcf} = \sum_{\pi k \lambda} \left( \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^{jf} \right) q^{\lambda\pi k j m c f} \delta_{\pi, (-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} . \tag{1.16}$$

En este esquema, la convención para subir o bajar índices está dada por las siguientes reglas de transformación de los operadores:

$$\begin{aligned}
 q^{\lambda\pi k j m c f} &= (-1)^{\chi_f + \chi_c + j - m + \frac{1}{2} - \lambda} q_{\lambda\pi k j - m \bar{c} \bar{f}} \\
 q_{\lambda\pi k j m c f}^\dagger &= (-1)^{\chi_f + \chi_c + j - m + \frac{1}{2} - \lambda} q^{\lambda\pi k j - m \bar{c} \bar{f}} .
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

La notación  $\bar{c}(\bar{f})$  se refiere al conjugado de la representación  $SU(3)$  de color (sabor) de modo que  $c = (\lambda\mu)YTT_z \rightarrow \bar{c} = (\mu\lambda) - Y T - T_z$ .

De acuerdo a la convención de fases que se utiliza en [25], la variable  $\chi_i$  depende de los números magnéticos de la representación  $\Gamma_i = (\lambda_i\mu_i)$  de  $SU(3)$  de la siguiente manera

$$\chi_i = \frac{1}{3}(\lambda_i - \mu_i) - \frac{1}{6}\epsilon_i . \tag{1.18}$$

A su vez,  $\epsilon_i$  es proporcional a la hipercarga  $\epsilon_i = -3Y$ . Es posible observar que la fase  $(-1)^{\frac{1}{2}-\lambda}$  de la ecuación (1.17) se encuentra codificada en el hecho que los operadores  $b$  transforman proporcionalmente a  $(-1)^{j-m}$  y los operadores  $d$  con  $(-1)^{j+m}$ .

Por ejemplo, la ecuación (1.16) se transforma como

$$Q_{\tau(Nl)j-m\bar{c}\bar{f}} = \sum_{\pi k \lambda} (-1)^{\chi_f + \chi_c + j - m + \frac{1}{2} - \lambda} \left( \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^{jf} \right) q_{\lambda\pi k j - m \bar{c} \bar{f}} \delta_{\pi, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau + l}} . \quad (1.19)$$

En este momento cabe insistir que la transformación de las ecuaciones (1.15) y (1.16) puede ser interpretada como un mapeo entre la base de oscilador armónico tridimensional y las soluciones continuas de propagación libre; las cuales se ha argumentado que tienden a representar ondas planas en el límite  $N_{cut} \rightarrow \infty$ .

En el presente documento se optará por absorber las reglas de paridad en los coeficientes de la transformación. Es decir, definiendo  $\tilde{\alpha}_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^{jf} = \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^{jf} \delta_{\pi, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau + l}}$  y luego omitiendo la tilde pero manteniendo dichas reglas implícitas.

Dicha notación tiene la ventaja de ser compacta, sin embargo, habrá que tener cuidado en diferenciar el tratamiento que se da a estados con  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  pues partículas y anti-partículas transforman con representaciones distintas, además de que el concepto de *orden normal* dependerá de dicho índice. Esto es debido a que estamos trabajando en un esquema en términos de excitaciones de partícula-agujero, que antes asociábamos con el esquema de quark-antiquark vía definir a los operadores

$$\begin{aligned} b_{\pi k j m c f}^\dagger &\equiv q_{\frac{1}{2} \pi k j m c f}^\dagger \\ d_{\pi k j m c f} &\equiv q_{-\frac{1}{2} \pi k j m c f}^\dagger , \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde, por construcción el Hamiltoniano libre será diagonal en el nuevo índice de pseudoespín  $\lambda$  y por lo tanto el vacío correspondiente a dicha teoría satisface que

$$q_{-\frac{1}{2} \pi k j m c f}^\dagger |0\rangle = d_{\pi k j m c f} |0\rangle = 0 . \quad (1.21)$$

Es decir, el vacío de la teoría libre se puede interpretar como el mar de Dirac, el cual está ocupado hasta el nivel de Fermi de modo tal que cualquier intento de crear una excitación por

debajo de dicho nivel se elimina por el principio de exclusión. Es en este sentido que el orden normal es definido dejando a los operadores que aniquilan al vacío hasta la derecha, por ejemplo,  $d^\dagger d = q^{\lambda=-\frac{1}{2}} q_{\lambda=-\frac{1}{2}}^\dagger$ .

Las reglas para subir y bajar índices en la base de partícula-antipartícula son:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\mu &= (-1)^{\phi_\mu} \mathbf{b}_{\bar{\mu}} & \mathbf{b}_\mu^\dagger &= (-1)^{\phi_\mu} \mathbf{b}^{\dagger\bar{\mu}} \\ \mathbf{d}^{\bar{\mu}} &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}}} \mathbf{d}_\mu & \mathbf{d}_\mu^\dagger &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}}} \mathbf{d}^{\dagger\mu} , \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde  $(-1)^{\phi_\mu} = (-1)^{\chi_f + \chi_c + j - m}$  y  $(-1)^{\phi_{\bar{\mu}}} = (-1)^{\chi_f + \chi_c + j + m}$ .

Para finalizar la discusión sobre la paridad, podemos observar que a partir de la regla (1.7) y la definición (1.20) se deduce que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} b_{\pi k j m c f}^\dagger \mathcal{P}^{-1} &= \pi b_{\pi k j m c f}^\dagger \\ \mathcal{P} d_{\pi k j m c f}^\dagger \mathcal{P}^{-1} &= -\pi d_{\pi k j m c f}^\dagger , \end{aligned} \quad (1.23)$$

por lo que aplicando la transformación de paridad a los estados de pares partícula-antipartícula que se definirán en el Capítulo 3.1 se tiene que

$$\mathcal{P} \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \mathcal{P}^{-1} = -\pi_a \pi_b \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger . \quad (1.24)$$

Esto último podría resultar útil en su momento para determinar las reglas de selección de los estados posibles para el Hamiltoniano efectivo del modelo.

# Capítulo 2

## El Hamiltoniano efectivo

En general, el lenguaje requerido para describir partículas no masivas usando un campo vectorial resulta necesariamente redundante, es decir, se tienen más variables (las 4 componentes del cuadrivector) que grados de libertad físicos (correspondientes a las 2 posibles polarizaciones del bosón de norma.) Esto tiene por consecuencia que, de insistir en que los campos no masivos transformen como vector bajo las transformaciones de Lorentz, entonces las transformaciones de norma locales no deben tener ninguna consecuencia física. Es por ello que toda teoría de campo debe involucrar una elección: o se trabaja en un formalismo covariante pero redundante, o se utiliza un lenguaje sin redundancia pero no covariante.

En la teoría de campo efectiva del presente modelo se prefiere fijar a la norma a costa de perder la covarianza explícita. Esto se hace con el fin de retener solamente los grados de libertad físicamente relevantes. Más aún, el Hamiltoniano efectivo de la QCD del presente modelo se encuentra fundamentado en el formalismo de la norma de Coulomb, pues dicha elección presenta las siguientes ventajas:

- Al igual que como ocurre en QED, la norma de Coulomb da origen a un potencial estático e instantáneo. Los cálculos de redes han mostrado que dicho potencial es aproximadamente de la forma  $-\frac{\alpha}{r} + \beta r$  [26] donde  $r$  es la distancia relativa entre cargas de color. Dicha interacción se conoce en la literatura como *potencial de Cornell* y su

componente lineal reproduce el fenómeno de confinamiento, pues energéticamente hace cada vez menos favorable el separar a las cargas de color.

- Es posible extraer un potencial estático en tanto que se cumpla la aproximación adiabática [27]. Lo anterior está garantizado para los quarks pesados *charm* ( $c$ ), *bottom* ( $b$ ) y *top* ( $t$ ), haciendo de éste un marco natural para el estudio de estados ligados no-relativistas.
- El modelo de quarks constituyentes (CQM) ha mostrado que un potencial estático también resulta ser una buena aproximación para los sabores ligeros *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ) y *strange* ( $s$ ) una vez que los quarks son identificados con excitaciones de quasipartículas, las cuales saturan a  $\sim 200 \text{ MeV}$  conforme la masa desnuda es reducida [28]. La aproximación no-relativista retiene incluso cierta validez para quarks desnudos no masivos [26].
- Es debido a lo anterior que el potencial de Cornell introduce el efecto de los gluones de manera efectiva, pues representa a la superficie adiabática correspondiente al estado base del gluón. Esto hace posible el tratamiento de una teoría simplificada donde los únicos campos involucrados sean los fermiónicos.
- La aparición de un vacío con la estructura de un condensado de pares quark-antiquark es usualmente asociado con el potencial confinante [29, 30]. De este modo, los métodos de muchos cuerpos que involucran la *bosonización* del vacío reproducen de manera natural a la estructura del condensado.

En el presente trabajo se propone utilizar un potencial estático de interacción entre quarks  $V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ , para simular la presencia de los gluones, de modo que se trabaja con un Hamiltoniano efectivo de la forma

$$\begin{aligned}
H &= \mathbf{H}_{K_q} + \mathbf{H}_{m_q} + V \\
\mathbf{H}_{K_q} &= \int \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r})[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}]\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
\mathbf{H}_{m_q} &= \int \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r})[\beta m_0]\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} &= -\frac{1}{2}g^2\delta_{a'a}\int \rho_a^{(q)}(\mathbf{r})V(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\rho^{(q)a}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}' ,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $\alpha_i$  y  $\beta$  se relacionan con las matrices de Dirac como  $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$  y  $\beta = \gamma^0$ . Se denota como  $m_0$  a la *masa desnuda* del quark que rompe la simetría quiral; y

$$\rho^{(q)a} = \sum_{c'e} \boldsymbol{\psi}^\dagger_{cf} T_{cc'}^a \boldsymbol{\psi}_{e'f} , \tag{2.2}$$

es la densidad de carga de color *restringida únicamente* al sector de quarks ( $q$ ). Se debe notar que este modelo no incluye a los gluones en absoluto. Sin embargo, se espera que el potencial estático  $V$  aproxime en magnitud a la interacción dinámica de los gluones y que reproduzca su efecto confinante.

Vale la pena mencionar que esta aproximación no garantiza la invariancia de norma. Sin embargo se espera que entre mejor sea la aproximación, menor sea el rompimiento de la invariancia. Debe además notarse que un potencial que dependa únicamente de las posiciones, como el usado en el presente modelo, no puede generar una mezcla de sabor. Esto será discutido más a detalle en la Subsección 5.1.1.

Debe entenderse que el procedimiento utilizado a lo largo del presente documento es una primera forma de abordar el problema y es evaluada por sencillez, así como para determinar la factibilidad del modelo.

## 2.1. El Hamiltoniano de Propagación Libre

El Hamiltoniano de propagación libre está conformado por los términos cinético y de masa restringidos al sector de quarks

$$\mathbf{H}_{K_q} + \mathbf{H}_{m_q} = \int \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r})[-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m_0]\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})d\mathbf{r} .$$

Como se mencionó en el Capítulo 1, el hamiltoniano de propagación libre no resultará ser diagonal en la base de polinomios generalizados de Laguerre, por lo cual se define a una transformación unitaria que diagonalice simultáneamente al pseudoespín  $\tau \rightarrow \lambda$  así como a los números cuántico principal y de momento angular orbital  $(Nl) \rightarrow (k\pi)$ .

Esta parte del Hamiltoniano puede ser *prediagonalizado* para un número arbitrario de niveles orbitales determinados por la transformación unitaria de los índices  $(\tau Nl) \rightarrow \lambda\pi k$  que se muestra a continuación:

$$Q_{\tau(Nl)jm_jcf}^\dagger = \sum_{\pi k \lambda} \left( \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^{jf} \right)^* q_{\lambda\pi k jm_jcf}^\dagger, \quad (2.3)$$

donde la delta que determina a la paridad  $\delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}}$  que aparecía en la ecuación (1.4) ha sido absorbida en la definición de los coeficientes  $\alpha$ .

En [11] se muestra que el término cinético de quarks definido en (2.1) como

$$\mathbf{H}_{K_q} = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla] \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

toma la siguiente forma al ser expandido en la base de oscilador armónico  $(\tau Nl)$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{K_q} = \sqrt{\xi} \sum_{NN'} k_{NN'}^j & \left[ Q_{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2})j}^\dagger \cdot Q^{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2})j} + Q_{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2})j}^\dagger \cdot Q^{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2})j} \right. \\ & \left. + Q_{-\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2})j}^\dagger \cdot Q^{\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2})j} + Q_{-\frac{1}{2}(N',j-\frac{1}{2})j}^\dagger \cdot Q^{\frac{1}{2}(N,j+\frac{1}{2})j} \right], \quad (2.5) \end{aligned}$$

donde  $\xi^{-1/2}$  es el ancho de oscilador armónico discutido en la Sección 4.3. El producto escalar indica la suma sobre los índices de proyección de espín  $m_j$ , color  $c$  y sabor  $f$ .

Los coeficientes  $k_{NN'}^j$  resultan ser

$$k_{NN'}^j = \sqrt{\frac{N-j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N+1} + \sqrt{\frac{N+j+\frac{3}{2}}{2}} \delta_{N',N-1}, \quad (2.6)$$

de manera que a pesar de no ser diagonal en dicha base, el término cinético sólo mezcla estados con números cuánticos  $(Nl)$  consecutivos, por lo que el esfuerzo numérico para diagonalizarlo no es particularmente mayor que si se hubiera comenzado por una expansión en ondas planas.

Además, la transformación- $\alpha$  de la ecuación (2.3) nos permite diagonalizar simultáneamente a la parte cinética y al término de masa. A este último se le definió en la ecuación (2.1) como

$$\mathbf{H}_{m_q} = \int \boldsymbol{\psi}^\dagger(\mathbf{r})[\beta m_0]\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})d\mathbf{r} . \quad (2.7)$$

Este es el único término del Hamiltoniano en cuestión que distingue el sabor de los quarks, aún cuando no lo mezcla. Es a este nivel que se introduce una diferencia de energía en reposo para los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ .

Usando la expansión de los campos fermiónicos en la base  $(\tau Nl)$  y dada la estructura diagonal del acoplamiento, el término de masa resulta

$$\mathbf{H}_{m_q} = m_0 \sum_{Nlj} \left[ \mathbf{Q}_{\frac{1}{2}(N,l)j}^\dagger \cdot \mathbf{Q}_{\frac{1}{2}(N,l)j} - \mathbf{Q}_{-\frac{1}{2}(N,l)j}^\dagger \cdot \mathbf{Q}_{-\frac{1}{2}(N,l)j} \right] , \quad (2.8)$$

donde una vez más, el producto escalar representa la suma sobre los elementos diagonales en color, sabor y proyección de espín.

Como la estructura de  $\mathbf{H}_{m_q}$  ya es diagonal en todos sus índices, entonces la transformación definida en (2.3) únicamente cambia los índices de suma  $\sum_{N,l} \longrightarrow \sum_{k\pi}$ , obteniéndose así que

$$\mathbf{H}_{m_q} = (m_0)_{YT} \sum_{kj} \left[ \mathbf{q}_{\frac{1}{2}kj}^\dagger \cdot \mathbf{q}^{\frac{1}{2}kj} - \mathbf{q}_{-\frac{1}{2}kj}^\dagger \cdot \mathbf{q}^{-\frac{1}{2}kj} \right] . \quad (2.9)$$

En la ecuación anterior hemos realizado el cambio  $m_0 \rightarrow (m_0)_{YT}$  para distinguir a la masa de los quarks únicamente como función de su hipercarga e isoespín de sabor ( $YT$ ). Para el propósito del presente trabajo, se asume la misma masa para los quarks  $u$  y  $d$ , siendo esta menor que la masa del quark  $s$ .

$$(m_0)_{YT} = m_{u,d}\delta_{Y,\frac{1}{3}}\delta_{T,\frac{1}{2}} + m_s\delta_{Y,-\frac{2}{3}}\delta_{T,0} . \quad (2.10)$$

En conjunto, la transformación- $\alpha$  es entonces introducida para prediagonalizar a los térmi-

nos  $H_{K_q} + H_{m_q}$  del Hamiltoniano, es decir, a la matriz

$$K_{\tau_1 N_1 l_1, \tau_2 N_2 l_2}^{jYT} = \begin{cases} k_{N_1 N_2}^j & \text{si } l_1 = j + \frac{1}{2}, l_2 = j - \frac{1}{2}, \tau_1 \neq \tau_2 \\ k_{N_2 N_1}^j & \text{si } l_1 = j - \frac{1}{2}, l_2 = j + \frac{1}{2}, \tau_1 \neq \tau_2 \\ +(m_0)_{YT} \delta_{N_1 N_2} & \text{si } l_1 = l_2, \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2} \\ -(m_0)_{YT} \delta_{N_1 N_2} & \text{si } l_1 = l_2, \tau_1 = \tau_2 = -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Nótese que dicha prediagonalización se debe hacer de manera separada para los subespacios de los quarks  $u$  y  $d$  ( $m_{u,d}$ ) y el quark  $s$  ( $m_s$ ).

De manera que una vez realizada la transformación- $\alpha$  y utilizando el esquema de partícula-antipartícula de la ecuación (1.20) se obtiene un operador de un cuerpo de la forma

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_{K_q} + \mathbf{H}_{m_q} = \sum_{kj} \epsilon_{kjYT} \left( \mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{kj} - \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} \right), \quad (2.12)$$

donde  $\epsilon_{kjYT}$  son las eigenenergías del Hamiltoniano de propagación libre.

## 2.2. El Hamiltoniano de Interacción

Antes de deducir una expresión analítica para la interacción será necesario recordar que la base de oscilador armónico no es una base relativista, por lo que en el Apéndice D se discuten dos métodos que permitirán restaurar la invariancia traslacional del CM de los estados construidos en el presente modelo. Independientemente del método elegido, las transformaciones TM [31] juegan un papel fundamental en la identificación de excitaciones del CM.

Las transformaciones TM permiten referir a dos funciones de onda centradas en las coordenadas  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  respectivamente, al sistema de coordenadas de Jacobi  $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$  y  $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

$$[\Psi_{N_a l_a}(\mathbf{x}) \otimes \Psi_{N_b l_b}(\mathbf{y})]_M^L = \sum_{N_r l_r, N_R l_R} \langle N_r l_r, N_R l_R; L | N_a l_a N_b l_b; L \rangle [\Psi_{N_r l_r}(\mathbf{r}) \otimes \Psi_{N_R l_R}(\mathbf{R})]_M^L. \quad (2.13)$$

Por conservación de la energía se tiene que

$$N_a + N_b = N_R + N_r , \quad (2.14)$$

mientras que por conservación de momento angular

$$(-1)^{l_a+l_b} = (-1)^{l_R+l_r} . \quad (2.15)$$

Se debe notar que la definición de las coordenadas de Jacobi  $R$  y  $r$  no coincide con la definición de las coordenadas de CM y de movimiento relativo, sin embargo, la diferencia para el caso de partículas con masas iguales es simplemente un factor de  $\sqrt{2}$ . Para describir pares de partículas con masa diferente se puede recurrir a una definición más general de las coordenadas de Jacobi [32]. Sin embargo, un tratamiento alternativo para remover el CM de dichos casos es discutido en la Sección D.2.

Por otro lado, recordamos de la ecuación (2.1) que en el presente modelo se utiliza un potencial estático para simular la interacción quark-antiquark debida al efecto de los gluones.

$$\mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} = -\frac{1}{2}g^2 \int \rho_a(\mathbf{x})V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\rho^a(\mathbf{y})d\mathbf{x}d\mathbf{y} . \quad (2.16)$$

En el Apéndice C se deduce que el operador de interacción de un potencial central arbitrario puede ser escrito en la base  $(\tau N l)$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} = & -\frac{1}{2} \sum_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\} L_0} V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \\ & \times \left[ \left[ Q_{(N_1 l_1) j_1 Y_1 T_1}^\dagger \otimes Q_{(N_2 l_2) j_2 Y_2 T_2} \right]^{0L_0(11)0} \otimes \left[ Q_{(N_3 l_3) j_3 Y_3 T_3}^\dagger \otimes Q_{(N_4 l_4) j_4 Y_4 T_4} \right]^{0L_0(11)0} \right]_{0000}^{00(00)0} , \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde el acoplamiento intermedio se refiere a pseudoespín  $\tau = 0$ , momento angular total  $L_0$ , representación irreducible (11) de color, así como 0 en hipercarga e isoespín de sabor. Por

otro lado, los coeficientes  $V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0}$  están dados por

$$\begin{aligned}
 V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= (-1)^{\frac{1}{3} + \frac{Y_1}{2} + T_1} \frac{\sqrt{2T_1+1}}{\sqrt{3}} (-1)^{\frac{1}{3} + \frac{Y_3}{2} + T_3} \frac{\sqrt{2T_3+1}}{\sqrt{3}} \delta_{Y_1 Y_2} \delta_{T_1 T_2} \delta_{Y_3 Y_4} \delta_{T_3 T_4} \\
 &\quad \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{j}_4 \hat{L}_0 \sum_S \sum_{N'_r N_r l_r N_R l_R L} (-1)^{j_2 + j_3 + L_0 + L} (\hat{l}_r)^2 (\hat{L})^2 (\hat{S})^2 \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_3 & L \\ j_2 & j_4 & L_0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ l_3 & \frac{1}{2} & j_3 \\ l_r & S & L \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ l_4 & \frac{1}{2} & j_4 \\ l_r & S & L \end{array} \right\} \\
 \langle N'_r l_r, N_R l_R; l_r | N_1 l_1, N_3 l_3; l_r \rangle \langle N_r l_r, N_R l_R; l_r | N_2 l_2, N_4 l_4; l_r \rangle \int_0^\infty r^2 dr R_{n'_r l_r}(r) V(\sqrt{2}r) R_{n_r l_r}(r) .
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

En el Apéndice C se muestra también la expresión para los coeficientes  $V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0}$  para el llamado *Potencial de Cornell*  $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta r$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas. En principio se trata de parámetros libres del modelo, sin embargo, se espera que el valor de  $\alpha$  sea de  $1/4\pi$  para recuperar el límite abeliano de la teoría, mientras que el valor de  $\beta$  es de  $0.18 \text{ GeV}^2$  en el modelo de quarks constituyentes, mientras que en los cálculos de redes tiene valores típicos de  $0.26 \text{ GeV}^2$  [26].

El término  $-\frac{\alpha}{r}$  corresponde al potencial inducido por el intercambio de un gluon entre un quark y un anti-quark y se le conoce como la *Parte Coulombiana* del potencial, pues su forma es idéntica al potencial Coulombiano electromagnético. La segunda parte,  $\beta r$ , es conocida como la *Parte Confinante* del potencial y parametriza a los efectos no-perturbativos de la QCD.

Las integrales involucradas en los elementos de matriz del potencial de la ecuación (2.18) son entonces de la forma

$$I_{\{n_i, l_i, L\}} = \int R^2 dR \int r^2 dr R_{n_1 l_1}(r) R_{n_2 l_2}(r) \left( \frac{\alpha}{r} + \beta r \right) R_{n_3 l_3}(R) R_{n_4 l_4}(R) , \tag{2.19}$$

las cuales son llamadas *Integrales de Talmi*. Estas son analíticas y convergentes tanto en el límite de  $r \rightarrow 0$  como de  $r \rightarrow \infty$ . Además, en el sistema de coordenadas de Jacobi la dependencia en la coordenada  $R$  se elimina naturalmente a través de las reglas de ortogonalidad, de modo que la interacción no genera excitaciones *espúrias*.

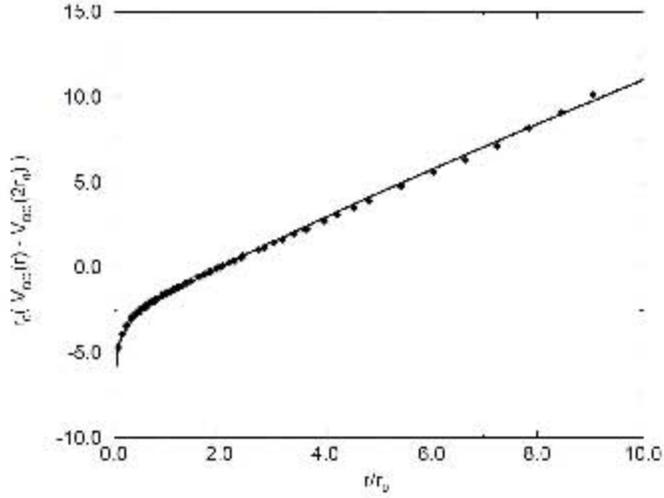


Figura 2.1: Estado base del potencial estático  $q\bar{q}$ . La línea sólida es la solución numérica completa. Aquí  $r_0 \approx 1/430 \text{ MeV}^{-1}$  es el *parámetro de Sommer* de la teoría de lattice. Gráfica tomada de [26].

Tras aplicar la transformación (2.3), sumar sobre el pseudo-espín  $\tau$  y reacoplar, se reescribe a cada uno de los acoplamientos intermedios de la ecuación (2.17) como

$$\begin{aligned}
 & \left[ Q_{\tau_1(N_1 l_1) j_1 Y_1 T_1}^\dagger \otimes Q_{\tau_2(N_2 l_2) j_2 \bar{Y}_2 T_2} \right]^{0L_0(11)00} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\tau \pi_1 k_1 \pi_2 k_2} \\
 & \times \left\{ \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{b}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2} \right]_{MC}^{L_0(11)00} \right. \\
 & - \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) -\frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{b}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1}^\dagger \otimes \mathbf{d}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2}^\dagger \right]_{MC}^{L_0(11)00} \\
 & + \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) -\frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{d}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1} \otimes \mathbf{b}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2} \right]_{MC}^{L_0(11)00} \\
 & \left. - \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) -\frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) -\frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{d}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1} \otimes \mathbf{d}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2}^\dagger \right]_{MC}^{L_0(11)00} \right\}, \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

donde los signos alternantes provienen de la convención de fase de la ec. (1.17) y la suma sobre el pseudoespín  $\lambda_1, \lambda_2$  ha sido escrita explícitamente para poder rastrear el tipo de excitación que representa, así como para poder posteriormente definir el orden normal, tal como se discutió arriba.

Para expresar de manera sencilla el resultado de aplicar la transformación (2.3) a los operadores involucrados en la interacción, será conveniente introducir la notación corta para

los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , que incluye solamente a los acoplamientos en el subespacio  $SU(2)$  de sabor

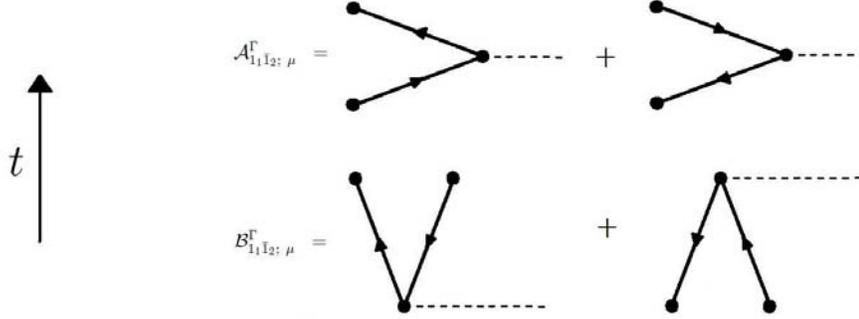


Figura 2.2: El operador  $\mathcal{A}$  involucra diagramas de dispersión mientras que el operador  $\mathcal{B}$  representa procesos de creación o aniquilación de un par.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{\pi_1 1_1 \pi_2 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{b}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2} \right]_{MC}^{L_0(11)00} \\
 &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) - \frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) - \frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{d}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1} \otimes \mathbf{d}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2}^\dagger \right]_{MC}^{L_0(11)00} \\
 \mathcal{B}_{\pi_1 1_1 \pi_2 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) - \frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{d}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1} \otimes \mathbf{b}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2} \right]_{MC}^{L_0(11)00} \\
 &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \frac{1}{2} \pi_1 k_1}^{j_1 f_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) - \frac{1}{2} \pi_2 k_2}^{j_2 f_2} \right) \left[ \mathbf{b}_{\pi_1 k_1 j_1 Y_1 T_1}^\dagger \otimes \mathbf{d}_{\pi_2 k_2 j_2 \bar{Y}_2 T_2}^\dagger \right]_{MC}^{L_0(11)00} .
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Mediante la notación de la ecuación (2.21) se puede expresar a la interacción de manera sencilla como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{coul} &= -\frac{1}{2} \sum_{L_0 \tau \tau'} \sum_{\{N_i l_i k_i j_i \lambda_i \pi_i Y_i T_i\}} V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \\
 &\times \left( [\mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{34}]_0^0 + [\mathcal{A}_{12} \mathcal{B}_{34}]_0^0 + [\mathcal{B}_{12} \mathcal{A}_{34}]_0^0 + [\mathcal{B}_{12} \mathcal{B}_{34}]_0^0 \right) .
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

En el Apéndice B se demuestra que sólo las combinaciones  $[\mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{34}]$  y  $[\mathcal{B}_{12} \mathcal{B}_{34}]$  contribuyen al nivel de las aproximaciones del Capítulo 3, por lo que mediante el proceder expuesto en el presente documento, para todo fin práctico se puede considerar que el Hamiltoniano del modelo sea

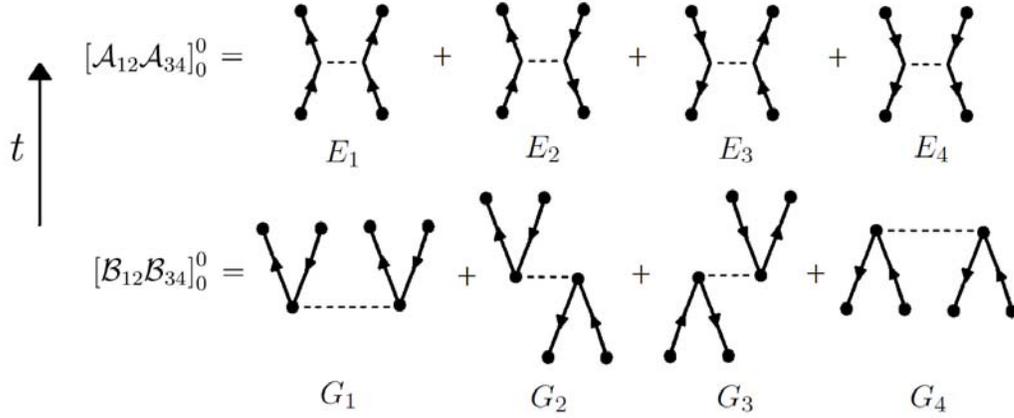


Figura 2.3: Sólo las interacciones tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]$  y  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{34}]$  contribuyen a nivel de los métodos de muchos cuerpos expuestos en el Capítulo 3; mientras que las interacciones del tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{B}_{34}]$  y  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_{34}]$  van más allá de dichos métodos.

$$\mathbf{H} = \sum_{kj} \epsilon_{kjYT} \left( \mathbf{b}_{kj}^\dagger \cdot \mathbf{b}^{kj} - \mathbf{d}_{kj} \cdot \mathbf{d}^{\dagger kj} \right) - \frac{1}{2} \sum_{L_0 \tau \tau'} \sum_{\{N_i l_i k_i j_i \lambda_i \pi_i Y_i T_i\}} V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \left( [\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0 + [\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0 \right), \quad (2.23)$$

donde la expresión analítica para los coeficientes  $V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0}$  es deducida en el Apéndice C.

# Capítulo 3

## Elección de un método de diagonalización

En el Capítulo 2 se contruyó un hamiltoniano que consta de un término de propagación libre de un cuerpo y un término de interacción entre dos cuerpos mediante un potencial estático efectivo. Esta clase de hamiltonianos no relativistas de a lo más dos cuerpos es un problema estándar y sobre el cual existe mucha literatura con varios métodos de solución. En particular, los *Métodos de Muchos Cuerpos* han resultado una herramienta poderosa para describir sistemas cuánticos donde las interacciones entre muchas partículas crean correlaciones cuánticas entre ellas, haciendo de la función de onda correspondiente un objeto complejo y que contiene una gran cantidad de información. Es por ello que tales métodos se han aplicado en diversas áreas de las ciencias básicas, por ejemplo, en la física de materia condensada, la física nuclear y la química cuántica.

En el presente modelo se ha optado por utilizar dos distintos métodos de muchos cuerpos con la finalidad de diagonalizar a nuestro hamiltoniano: el método de *Tamm-Dankoff* (TDA) y el método de la *Aproximación de la fase aleatoria* (RPA). El primero de ellos no incluye un estado base correlacionado, por lo que correspondería al vacío de una teoría libre y por ende es una aproximación burda al problema de la NP-QCD donde las interacciones son fuertes. Las correlaciones son introducidas por el método de RPA, pero ambos métodos son evaluados con

el fin de cuantificar la influencia de dichas correlaciones en el espectro de mesones, además de mostrar cierto valor didáctico al comenzar por un método más sencillo y luego complicarlo.

Pero, ¿cuáles son las razones para en este modelo en particular utilizar a los métodos de muchos cuerpos?

- En el lenguaje de la física nuclear, se considera a un sistema de  $N$  fermiones en su estado base, por lo que de acuerdo al principio de exclusión de Pauli, ocupan los  $N$  estados más bajos hasta cierto nivel: el *Nivel de Fermi*  $\epsilon_F$ . Es por ello que cualquier excitación del sistema puede ser interpretada como la creación de una partícula por encima de  $\epsilon_F$  y un agujero por debajo de éste.

Por otro lado, en el esquema de Dirac se puede interpretar a la antimateria fermiónica como estados con energía negativa que llenan por completo el *Mar de Dirac* hasta una energía de Fermi  $E \sim m$  (en unidades naturales), por lo que en una analogía directa a la física nuclear, se puede interpretar a una excitación quark-antiquark como la creación de una pseudopartícula por encima del Mar de Dirac y la creación de su respectivo agujero por debajo de éste. Esto nos permite modelar a los mesones como la excitación minimal del vacío restringiéndonos *a mano* a pares que sean escalares en color.

- Como ya se mencionó en el Capítulo 2, la norma de Coulomb además de dar origen al potencial estático confinante, genera un vacío con estructura de condensado quark-antiquark. Dicha estructura es el *ansatz* que se ocupa para la expansión del vacío interactuante en los métodos de muchos cuerpos que involucran una *bosonización* de las excitaciones.
- Como se mostrará en las secciones 3.1 y 3.2, los métodos TDA y RPA permiten construir a los propagadores de la teoría interactuante. En ambos casos, los eigenvalores del Hamiltoniano aparecen como polos en dichos propagadores, de manera que es correcto interpretarles como las masas físicas de los estados evaluados.

Una vez justificados los métodos a evaluar, pasaremos al formalismo que estos involucran:

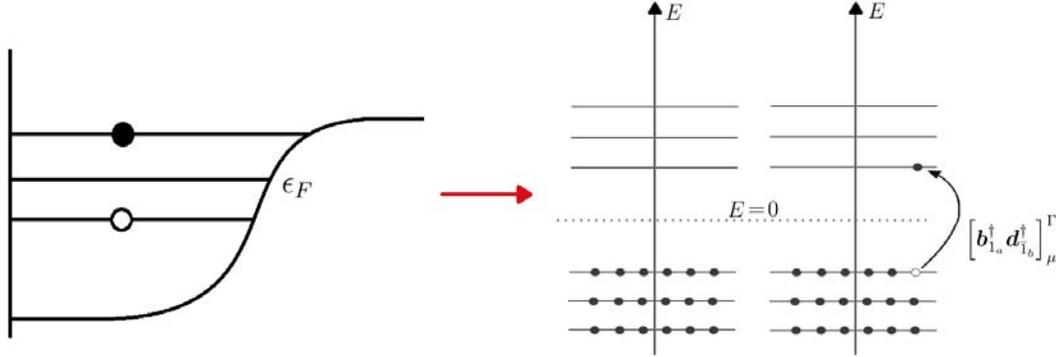


Figura 3.1: A la izquierda, una excitación partícula-agujero por encima del nivel de Fermi. A la derecha, una excitación quark-antiquark por encima del Mar de Dirac.

Para hacer uso de los métodos de muchos cuerpos es necesario definir a los estados de un par partícula-agujero correspondientes a la teoría. Nosotros optamos por definirlos como un acoplamiento a buenos números cuánticos para momento angular total  $L$  y representación (00) de color. Sin embargo, para el sector de sabor hemos decidido romper la simetría  $SU(3)$  en favor de su subálgebra  $SU(2)$ , de manera que se acopla al par sólo a buen isoespín e hipercarga de sabor, conservando las reglas de suma del grupo completo. Dicha elección se debe a que permitimos a priori la mezcla entre estados con (00) y (11) de sabor ya que, aún cuando en el modelo de quarks el  $\eta_1$  corresponde a la representación (00) mientras que  $\eta_8$  corresponde al (11), estos no son los estados físicos, pues sabemos que deben estar mezclados.

$$\gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \equiv \left[ \mathbf{q}_{\frac{1}{2}\pi_a k_a j_a Y_a T_a} \mathbf{q}_{-\frac{1}{2}\pi_b k_b j_b \bar{Y}_b \bar{T}_b} \right]_{M0}^{L(00)_c Y T} . \quad (3.1)$$

Con esta construcción, el operador  $\gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger$  aniquila una partícula por debajo del Mar de Dirac (crea una antipartícula) y crea una partícula por encima de éste. Sin embargo, resultará más conveniente utilizar el esquema de quark-antiquark de la ecuación (1.20), por lo que podemos escribir a la definición de los pares utilizando la siguiente notación corta

$$\begin{aligned} \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger &= \sum_{\mu_a \mu_b} \langle a \mu_a, \bar{b} \bar{\mu}_b | \Gamma \mu \rangle \mathbf{b}_{a \mu_a}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{b} \bar{\mu}_b}^\dagger \\ \gamma^{a\bar{b};\Gamma\mu} &= \left( \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \right)^\dagger . \end{aligned} \quad (3.2)$$

En el presente modelo los operadores de pares de la ecuación (3.2) representan estados

mesónicos singletes en color que están descritos por el álgebra  $SU_j(2) \times SU_f(2) \times SU_c(3)$ , con lo cual los coeficientes Clebsh-Gordan tienen la siguiente estructura [25]:

$$\begin{aligned} \langle a\mu_a, \bar{b}\bar{\mu}_b | \Gamma\mu \rangle &= \langle j_a m_a, j_b - m_b | JM_J \rangle \langle T_a T_{z_a}, T_b - T_{z_b} | TT_z \rangle \langle (10)c_a, (01)\bar{c}_b | (00)0 \rangle_1 . \\ b_a^\dagger &= b_{\pi_a k_a j_a m_a c_a Y_a T_a}^\dagger \\ d_b^\dagger &= d_{\pi_a k_a j_a - m_a \bar{c}_a - Y_a T_a}^\dagger . \end{aligned} \quad (3.3)$$

A pesar de que el acoplamiento de  $SU_f(3)$  de sabor ha sido roto en favor de un acoplamiento  $SU_f(2)$  de isoespín, las reglas para subir o bajar índices de los operadores involucrados en la definición del par, aún transforman con la convención de la ecuación (1.22), es decir, con la fase completa de  $SU_f(3)$ . Con dicha convención, el operador de aniquilación de un par se puede escribir como un acoplamiento de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \gamma^{a\bar{b};\Gamma\mu} &= \sum_{\mu_a \mu_b} \langle a\mu_a, \bar{b}\bar{\mu}_b | \Gamma\mu \rangle \mathbf{d}_{1_b \mu_b}^{\bar{1}_a \mu_a} \mathbf{b}_{1_a \bar{\mu}_a} = \sum_{\mu_a \mu_b} (-1)^{\phi_{\mu_a} + \phi_{\bar{\mu}_b}} \langle a\mu_a, \bar{b}\bar{\mu}_b | \Gamma\mu \rangle \mathbf{d}_{1_b \mu_b} \mathbf{b}_{\bar{1}_a \bar{\mu}_a} \\ &= \sum_{m_a m_b c_a c_b f_a f_b} (-1)^{\chi_{c_a} + \chi_{f_a} + j_a - m_a} (-1)^{\chi_{c_b} + \chi_{f_b} + j_b + m_b} \langle j_a m_a, j_b - m_b | LM \rangle \\ &\times \langle T_{f_a} T_{z_a}, T_{f_b} - T_{z_b} | T_f T_z \rangle \langle (10)c_a, (01)\bar{c}_b | (\lambda_c \lambda_c) C \rangle_1 \mathbf{d}_{1_b \mu_b} \mathbf{b}_{\bar{1}_a \bar{\mu}_a} \\ &= \sum_{m_a m_b c_a c_b f_a f_b} (-1)^{\chi_C + \chi_F + j_a - m_a + j_b + m_b} \langle j_b m_b, j_a - m_a | L - M \rangle \\ &\times \langle T_{f_b} T_{z_b}, T_{f_a} - T_{z_a} | T_f T_z \rangle \langle (10)c_b, (01)\bar{c}_a | (\lambda_c \lambda_c) \bar{C} \rangle_1 \mathbf{d}_{1_b \mu_b} \mathbf{b}_{\bar{1}_a \bar{\mu}_a} \\ &= \underbrace{(-1)^{\chi_C + \chi_F + L - M}}_{(-1)^{\phi_\mu}} \underbrace{(-1)^{j_a + j_b - L}}_{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}} \left[ \mathbf{d}_{1_b} \mathbf{b}_{\bar{1}_a} \right]_{\bar{\mu}}^{\bar{\Gamma}} , \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde -a pesar de no contar con un coeficiente CG que acople a las hipercargas-, se ha identificado a  $(-1)^{\chi_F} = (-1)^{\chi_{f_a} + \chi_{f_b}}$ .

Para aplicar el método de RPA, será necesario además definir una manera de subir y bajar índices de los operadores de un par. Dicha regla de transformación será entonces

$$\begin{aligned} \gamma^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu} &= \sum_{\mu_a \mu_b} \langle a\mu_a, \bar{b}\bar{\mu}_b | \Gamma\mu \rangle b^{\dagger \bar{a}} d^{\dagger b} = (-1)^{\phi_\mu} \gamma_{a\bar{b};\bar{\Gamma}\bar{\mu}}^\dagger \\ \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu} &= (\gamma^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu})^\dagger = (-1)^{\phi_\mu} \gamma^{a\bar{b};\bar{\Gamma}\bar{\mu}} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

La fase  $(-1)^{\phi_\mu}$  es aquella que se definió en la ecuación (3.4).

### 3.1. Método de Tamm-Dankoff

Se denomina *bosonización* al proceso que consiste en definir estados colectivos de pares de fermiones acoplados a un espín entero y es característico de algunos métodos de muchos cuerpos como el BCS, TDA o la RPA [34]. Esto quiere decir que los operadores de un par de fermiones obedecen, al menos en promedio, un álgebra bosónica de la forma  $[a^i, a_j^\dagger] = \delta_j^i$ , ignorando en parte la estructura fermiónica de sus componentes.

El método TDA es en física nuclear, la forma más sencilla pero realista de tratar a las excitaciones partícula-agujero. Consiste en definir al operador de creación de un *fonón* TDA como una combinación lineal de todos los pares  $\gamma^\dagger$  de la forma

$$\Gamma_{\alpha; \Gamma\mu}^\dagger \equiv \sum_{ab} (X_{\alpha; ab\Gamma}) \gamma_{ab; \Gamma\mu}^\dagger . \quad (3.6)$$

El nombre de fonón se utiliza en el lenguaje de los métodos de muchos cuerpos en analogía a la física de materia condensada, ya que se refiere a modos colectivos cuyas amplitudes son comparables en la mayoría de sus configuraciones.

El operador de aniquilación de un fonón se obtiene conjugando a (3.6)

$$\Gamma^{\alpha; \Gamma\mu} = \sum_{ab} (X_{\alpha; ab\Gamma})^* \gamma^{ab; \Gamma\mu} . \quad (3.7)$$

Así pues, el par  $\gamma_{ab; \Gamma\mu}^\dagger$  puede ser un estado  $q\bar{q}$  ( $q = \{u, d\}$ ) o un estado  $s\bar{s}$ , donde  $q$  ( $s$ ) tiene números cuánticos  $a$  mientras que  $\bar{q}$  ( $\bar{s}$ ) tiene números cuánticos  $\bar{b}$ . Esto implica que  $\Gamma_{\alpha; \Gamma\mu}^\dagger$  podría en principio ser una superposición de la forma  $\frac{1}{\sqrt{2}}(q\bar{q} + s\bar{s})$  como uno esperaría a partir del modelo de quarks. Sin embargo, debido a que el Hamiltoniano que se utiliza en el presente modelo no mezcla sabor, los estados colectivos sólo permiten la combinación de pares que acoplen a la misma representación ( $\Gamma\mu$ ).

A partir de su definición, es posible obtener algunas propiedades del fonón TDA. Por ejemplo, de pedir ortonormalidad a los estados  $|\alpha; \Gamma\mu\rangle = \Gamma_{\alpha; \Gamma\mu}^\dagger |0\rangle$  se obtiene que los coeficientes  $X$  de la combinación de pares satisfacen la siguiente propiedad

$$\sum_{ab} (X_{\alpha'; ab\Gamma'})^* X_{\alpha; ab\Gamma} = \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\Gamma'\Gamma} , \quad (3.8)$$

es decir, el *vector*  $X$  tiene la normalización  $\sum |X|^2 = 1$ .

Además, a partir de la ecuación (3.7) es posible observar que el vacío del fonón TDA, es decir, aquel que satisface  $\Gamma|TDA\rangle = 0$ , es el mismo que aniquilan los pares originales  $\gamma|0\rangle = 0$ . Esto significa que el vacío de los estados colectivos que definimos en (3.6) corresponde al vacío de la teoría libre  $|TDA\rangle = |0\rangle$ , es decir, no tiene correlaciones.

Trabajar sobre el vacío de una teoría libre puede ser una muy mala aproximación para una teoría fuertemente interactuante como lo es la NP-QCD. Sin embargo, esto conlleva una gran simplificación: Dado que los viejos pares  $\gamma$  satisfacen en promedio el álgebra de oscilador armónico  $\langle 0| [\gamma^{a'b';\Gamma'\mu'}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger] |0\rangle = \delta_{a'a}\delta_{b'b}\delta_{\Gamma'\Gamma}\delta_{\mu'\mu}$ , entonces los pares TDA y sus conjugados también forman un álgebra bosónica *sobre el vacío*  $\langle 0| [\Gamma^{\alpha';\Gamma'\mu'}, \Gamma_{\alpha;\Gamma\mu}^\dagger] |0\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\Gamma'\Gamma}\delta_{\mu'\mu}$ .

La bosonización TDA consiste además en suponer que se puede escribir al Hamiltoniano de interés en términos de los pares originales  $\gamma$  como una parte diagonal y una no-diagonal, que se puede luego mapear en un Hamiltoniano efectivo tipo oscilador armónico en la base de fonones.

$$H = \sum_{ab\mu} \epsilon_{ab}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{a\bar{b};\Gamma\mu} + \sum_{aba'b'\mu} V_{(ab)(a'b')}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{a'\bar{b}';\Gamma\mu} \xrightarrow{TDA} \sum_{\mu\alpha} \Omega_\alpha^\Gamma \Gamma_{\alpha;\Gamma\mu}^\dagger \Gamma^{\alpha;\Gamma\mu}, \quad (3.9)$$

donde identificamos a  $\Omega_\alpha$  con la  $\alpha$ -ésima energía TDA del sistema en unidades naturales.

De la ecuación (3.9) observamos que antes de realizar el mapeo los operadores  $\gamma^\dagger$  satisfacen la siguiente ecuación de movimiento

$$\left[ H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] = \epsilon_{ab}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger + \sum_{a'b'} V_{(a'b')(ab)}^\Gamma \gamma_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger, \quad (3.10)$$

de donde se deduce que la ecuación de movimiento para los pares TDA es

$$\begin{aligned} \left[ H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger \right] &= \sum_{ab} X_{ab;\Gamma}^\alpha \left[ H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \\ &= \sum_{ab} X_{ab;\Gamma}^\alpha \left( \epsilon_{ab}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger + \sum_{a'b'} V_{(a'b')(ab)}^\Gamma \gamma_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \right) \\ &= \sum_{ab} \left( \epsilon_{ab}^\Gamma X_{ab;\Gamma}^\alpha + \sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^\Gamma X_{a'b';\Gamma}^\alpha \right) \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sin embargo, la ecuación de movimiento de los pares TDA después del mapeo es

$$\left[ H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger \right] = \Omega_\alpha^\Gamma \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger = \Omega_\alpha^\Gamma \sum_{ab} X_{ab;\Gamma}^\alpha \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \quad (3.12)$$

de modo que podemos juntar a las ecuaciones (3.11) y (3.12) en la siguiente ecuación

$$\sum_{ab} \left( \epsilon_{ab}^{\Gamma} X_{ab;\Gamma}^{\alpha} + \sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^{\Gamma} X_{a'b';\Gamma}^{\alpha} \right) \gamma_{ab;\Gamma\mu}^{\dagger} = \Omega_{\alpha}^{\Gamma} \sum_{ab} X_{ab;\Gamma}^{\alpha} \gamma_{ab;\Gamma\mu}^{\dagger}. \quad (3.13)$$

En el método de TDA se define a la llamada *matriz de adelanto* de la siguiente manera

$$\mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} \equiv \left[ \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'}, \left[ H, \gamma_{ab;\mu}^{\dagger\Gamma} \right] \right] = (\epsilon_{ab}^{\Gamma} \delta_{a'a} \delta_{b'b} + V_{(a'b')(ab)}^{\Gamma}) \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}. \quad (3.14)$$

Sin embargo, como el Hamiltoniano debe ser un escalar, siempre es posible definir a la matriz de adelanto reducida  $\mathbb{A}_{(ab)(a'b')}$  mediante la relación

$$\mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} = \mathbb{A}_{(ab)(a'b')} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}. \quad (3.15)$$

De esta manera podemos proyectar a la ecuación (3.13) sobre su espacio dual, obteniendo así la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\sum_{ab} \mathbb{A}_{(ab)(a'b')} X_{ab;\Gamma}^{\alpha} = \Omega_{\alpha}^{\Gamma} X_{a'b';\Gamma}^{\alpha}. \quad (3.16)$$

Es decir, diagonalizar a la matriz de *adelanto* permite encontrar a la energía del fonón TDA, así como determinar a los coeficientes  $X$  de la combinación lineal para que el mapeo sea invertible.

Por otro lado, si despejamos a los coeficientes  $X$  de la ecuación (3.13) se obtiene que

$$X_{ab;\Gamma}^{\alpha} = \frac{\sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^{\Gamma} X_{a'b';\Gamma}^{\alpha}}{\Omega_{\alpha}^{\Gamma} - \epsilon_{ab}^{\Gamma}} \equiv \frac{\Lambda_{ab;\Gamma}^{\alpha}}{\Omega_{\alpha}^{\Gamma} - \epsilon_{ab}^{\Gamma}}, \quad (3.17)$$

donde hemos identificado a la función de vértice  $\Lambda$  como

$$\Lambda_{ab;\Gamma}^{\alpha} = \sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^{\Gamma} X_{a'b';\Gamma}^{\alpha}, \quad (3.18)$$

que genera a la siguiente ecuación de recurrencia

$$\Lambda_{ab;\Gamma}^{\alpha} = \sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^{\Gamma} X_{a'b';\Gamma}^{\alpha} = \sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^{\Gamma} \frac{\Lambda_{a'b';\Gamma}^{\alpha}}{\Omega_{\alpha}^{\Gamma} - \epsilon_{ab}^{\Gamma}}. \quad (3.19)$$

En el Apéndice B se calcula a la matriz adelanto para un potencial estático arbitrario. Su expresión más general está dada en la ecuación (B.42).

### 3.2. Aproximación de la fase aleatoria

El método de la RPA fue introducido en 1953 por Bohm y Pines para describir oscilaciones en un gas degenerado de electrones [35]. La diferencia básica entre el relativamente simple método de TDA y la más sofisticada RPA es la introducción de un *estado base correlacionado*, el cual resulta estar compuesto por un número par de pares [36], es decir, es de la forma

$$|\text{RPA}\rangle = \mathcal{N} e^{\frac{Y}{X} [\gamma_{\Gamma}^{\dagger} \gamma_{\Gamma}^{\dagger}]_0} |0\rangle, \quad (3.20)$$

donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización y

$$\left[ \gamma_{\Gamma}^{\dagger} \gamma_{\Gamma}^{\dagger} \right]_0^0 = \sum_{\mu} \frac{(-1)^{\phi_{\mu}}}{\sqrt{\dim(\Gamma)}} \gamma_{\Gamma\mu}^{\dagger} \gamma_{\Gamma\bar{\mu}}^{\dagger} \quad (3.21)$$

Es posible observar que el vacío de la RPA se reduce al vacío de TDA cuando  $Y = 0$ , es decir,  $|\text{RPA}\rangle = |\text{TDA}\rangle = |0\rangle$ .

Por consistencia con la manera de transformar a los pares definidos en las ecuaciones (3.2) y (3.5), se define al operador de creación del fonón RPA como una combinación lineal de operadores de creación y de aniquilación con todos los índices abajo.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha;\Gamma\mu}^{\dagger} &= \sum_{ab} \left( X_{\alpha;ab\Gamma} \gamma_{ab;\Gamma\mu}^{\dagger} - Y_{\alpha;ab\Gamma} \gamma_{\bar{a}b;\Gamma\mu} \right) \\ \Gamma_{\alpha;\Gamma\mu} &= \left( \Gamma_{\alpha;\Gamma\mu}^{\dagger} \right)^{\dagger} = \sum_{ab} \left( X_{\alpha;ab\Gamma}^* \gamma_{ab;\Gamma\mu} - Y_{\alpha;ab\Gamma}^* \gamma_{\bar{a}b;\Gamma\mu}^{\dagger} \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

De la ecuación anterior se puede notar que  $\gamma|0\rangle = 0 \Rightarrow \Gamma|0\rangle \neq 0$ , es decir, la estructura del vacío efectivamente ha sido modificada para introducir las correlaciones de pares.

La llamada *aproximación quasi-bosónica* consiste en este caso en suponer que el estado base correlacionado no difiere mucho del vacío en la base  $(\lambda\pi k)$ , es decir,  $|\text{RPA}\rangle \approx |0\rangle$ . Dicha aproximación requiere entonces que los coeficientes  $Y$  sean los suficientemente pequeños comparados con los coeficientes  $X$ , tal que RPA representa pequeñas correcciones a lo obtenible por el método TDA, en cuyo caso, de (A.26) se infiere que

$$\langle \text{RPA} | \left[ \gamma^{a'\bar{b}';\Gamma\mu}, \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^{\dagger} \right] | \text{RPA} \rangle \approx \delta_{a'a} \delta_{b'b} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}. \quad (3.23)$$

El nombre de quasi-bosón proviene del hecho de que la ecuación (3.23) sería una relación exacta si los operadores de pares  $\gamma^\dagger$  obedecieran relaciones de conmutación para operadores bosónicos. Sin embargo, dicha ecuación ignora la estructura fermiónica de sus componentes pues desprecia a los términos provenientes del intercambio de partículas.

En lo siguiente omitimos el valor de expectación sobre el vacío de la ecuación (3.23) recordando que los pares  $\gamma^\dagger$  forman un álgebra de oscilador armónico sólo en su promedio sobre el vacío y bajo la aproximación quasi-bosónica.

A partir de las ecuaciones en (3.22) es posible observar que el hecho que los fonones formen un álgebra de oscilador  $[\Gamma^{\Gamma'\mu';\alpha'}, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger] = \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}$ , equivale a pedir que los coeficientes de la combinación de pares satisfagan la siguiente propiedad

$$\sum_{ab} [X_{\alpha';ab\Gamma}^* X_{\alpha;ab\Gamma} - Y_{\alpha';ab\Gamma}^* Y_{\alpha;ab\Gamma}] = \delta_{\alpha'\alpha} , \quad (3.24)$$

de modo que el vector  $(X, Y)$  tiene la normalización  $\sum(X^2 - Y^2) = 1$ .

El método RPA consiste en mapear a un Hamiltoniano con la siguiente estructura

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\Gamma\mu} \sum_{ab} \epsilon_{ab}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{ab;\Gamma\mu} + \sum_{\Gamma\mu} \sum_{aba'b'} V_{(ab)(a'b')}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{a'b';\Gamma\mu} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\Gamma\mu} \sum_{aba'b'} W_{(ab)(a'b')}^\Gamma \left( \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{\dagger b'a';\Gamma\mu} + \gamma_{a'b';\Gamma\mu} \gamma^{ab;\Gamma\mu} \right) , \end{aligned} \quad (3.25)$$

en uno de la forma

$$H = \sum_{\Gamma\mu} \sum_{\alpha} \Omega_\alpha^\Gamma \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger \Gamma^{\Gamma\mu;\alpha} , \quad (3.26)$$

donde se ha abusado de la notación  $\sum_\Gamma \equiv \sum_L$  pues  $\Gamma_c$  y  $\Gamma_f$  son fijos.

A diferencia de los coeficientes del potencial  $V_{(ab)(a'b')}^\Gamma$ , los coeficientes  $W_{(ab)(a'b')}^\Gamma$  representan una interacción que no conserva el número de pares partícula-agujero. Por ejemplo, en física nuclear pueden representar la creación de un par por absorción de un rayo gamma en el núcleo, o la aniquilación de un par preexistente en éste [37].

Del Hamiltoniano en (3.25), las ecuaciones de movimiento para los pares resultan ser

$$\begin{aligned}
 [H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger] &= \epsilon_{ab}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger + \sum_{a'b'} V_{(a'b')(ab)}^\Gamma \gamma_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{a'b'} (-1)^{\phi_\mu} (W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma) \gamma^{b'a';\bar{\Gamma}\bar{\mu}} \\
 [H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}] &= (-1)^{\phi_\mu} \left( -\epsilon_{ab}^\Gamma \gamma^{ba;\Gamma\mu} - \sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^\Gamma \gamma^{b'a';\Gamma\mu} \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{a'b'} (W_{(ab)(a'b')}^\Gamma + W_{(a'b')(ab)}^\Gamma) \gamma_{a'b';\bar{\Gamma}\bar{\mu}}^\dagger, \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

por lo cual la ecuación de movimiento para los fonones resulta ser

$$\begin{aligned}
 &[H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger] \\
 &= \sum_{ab} X_{ab;\Gamma}^\alpha \left\{ \epsilon_{ab}^\Gamma \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger + \sum_{a'b'} V_{(a'b')(ab)}^\Gamma \gamma_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{a'b'} (-1)^{\phi_\mu} (W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma) \gamma^{b'a';\bar{\Gamma}\bar{\mu}} \right\} \\
 &+ \sum_{ab} Y_{ab;\Gamma}^\alpha \left\{ (-1)^{\phi_\mu} \left( \epsilon_{ab}^\Gamma \gamma^{ba;\bar{\Gamma}\bar{\mu}} + \sum_{a'b'} V_{(ab)(a'b')}^\Gamma \gamma^{b'a';\bar{\Gamma}\bar{\mu}} \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{a'b'} (W_{(ab)(a'b')}^\Gamma + W_{(a'b')(ab)}^\Gamma) \gamma_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \right\}. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Así pues, podemos obtener relaciones entre los coeficientes  $\epsilon$ ,  $V$  y  $W$  proyectando como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 [\gamma^{a'b';\Gamma'\mu'}, [H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger]] &= \left( X_{a'b';\Gamma}^\alpha \epsilon_{a'b'}^\Gamma + \sum_{a''b''} X_{a''b'';\Gamma}^\alpha V_{(a'b')(a''b'')}^\Gamma \right) \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{a''b''} Y_{a''b'';\Gamma}^\alpha \left( W_{(a''b'')(a'b')}^\Gamma + W_{(a'b')(a''b'')}^\Gamma \right) \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\
 [\gamma_{a'b';\Gamma'\mu'}^\dagger, [H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger]] &= - \left( Y_{a'b';\Gamma}^\alpha \epsilon_{a'b'}^\Gamma + \sum_{a''b''} Y_{a''b'';\Gamma}^\alpha V_{(a''b'')(a'b')}^\Gamma \right) \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{a''b''} X_{a''b'';\Gamma}^\alpha \left( W_{(a'b')(a''b'')}^\Gamma + W_{(a''b'')(a'b')}^\Gamma \right) \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}. \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Mientras que del Hamiltoniano en (3.26) se tiene la ecuación de movimiento

$$\left[ H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger \right] = \Omega_\alpha^\Gamma \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger = \Omega_\alpha^\Gamma \sum_{ab} \left[ X_{ab;\Gamma}^\alpha \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger - (-1)^{\phi_\mu} Y_{ab;\Gamma}^\alpha \gamma^{ba;\bar{\Gamma}\bar{\mu}} \right]. \quad (3.30)$$

A partir de lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} \left[ \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'}, \left[ H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger \right] \right] &= \Omega_\alpha^\Gamma X_{a'b';\Gamma}^\alpha \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\ \left[ \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'}, \left[ H, \Gamma_{\Gamma\mu;\alpha}^\dagger \right] \right] &= \Omega_\alpha^\Gamma Y_{a'b';\Gamma}^\alpha \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

De la misma manera como se hizo en la sección 3.1 podemos despejar a  $X$  de las ecuaciones (3.29) y (3.31) obteniendo que

$$X_{ab;\Gamma}^\alpha = \sum_{a'b'} \frac{V_{(ab)(a'b')}^\Gamma X_{a'b';\Gamma}^\alpha + \frac{1}{2} Y_{a'b';\Gamma}^\alpha \left( W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma \right)}{\Omega_\alpha^\Gamma - \epsilon_{ab}^\Gamma} \equiv \frac{\Lambda_{ab;\Gamma}^\alpha}{\Omega_\alpha^\Gamma - \epsilon_{ab}^\Gamma}, \quad (3.32)$$

donde esta vez hemos identificado a la función de vértice  $\Lambda$  como

$$\Lambda_{ab;\Gamma}^\alpha = \sum_{a'b'} \left[ V_{(ab)(a'b')}^\Gamma X_{a'b';\Gamma}^\alpha + \frac{1}{2} \left( W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma \right) Y_{a'b';\Gamma}^\alpha \right]. \quad (3.33)$$

Análogamente, de despejar a los coeficientes  $Y$  de las ecuaciones (3.29) y (3.31) se obtiene que

$$Y_{ab;\Gamma}^\alpha = - \sum_{a'b'} \frac{V_{(ab)(a'b')}^\Gamma Y_{a'b';\Gamma}^\alpha + \frac{1}{2} X_{a'b';\Gamma}^\alpha \left( W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma \right)}{(\Omega_\alpha^\Gamma + \epsilon_{ab}^\Gamma)} \equiv \frac{\Delta_{ab;\Gamma}^\alpha}{(\Omega_\alpha^\Gamma + \epsilon_{ab}^\Gamma)}, \quad (3.34)$$

donde esta vez hemos identificado a la función de vértice  $\Delta$  como

$$\Delta_{ab;\Gamma}^\alpha = - \sum_{a'b'} \left[ V_{(ab)(a'b')}^\Gamma Y_{a'b';\Gamma}^\alpha + \frac{1}{2} \left( W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma \right) X_{a'b';\Gamma}^\alpha \right]. \quad (3.35)$$

Sustituyendo a los coeficientes  $X$  y  $Y$  en las definiciones de  $\Lambda$  y  $\Delta$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} \Lambda_{ab;\Gamma}^\alpha &= \sum_{a'b'} \left[ \frac{V_{(ab)(a'b')}^\Gamma}{(\Omega_\alpha^\Gamma - \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} \Lambda_{a'b';\Gamma}^\alpha + \frac{\frac{1}{2} (W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma)}{(\Omega_\alpha^\Gamma + \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} \Delta_{a'b';\Gamma}^\alpha \right] \\ \Delta_{ab;\Gamma}^\alpha &= - \sum_{a'b'} \left[ \frac{V_{(ab)(a'b')}^\Gamma}{(\Omega_\alpha^\Gamma + \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} \Delta_{a'b';\Gamma}^\alpha + \frac{\frac{1}{2} (W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma)}{(\Omega_\alpha^\Gamma - \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} \Lambda_{a'b';\Gamma}^\alpha \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

que es equivalente a la ecuación vectorial

$$\sum_{a'b'} \begin{pmatrix} \delta_{(ab)(a'b')} - \frac{V_{(ab)(a'b')}^\Gamma}{(\Omega_\alpha^\Gamma - \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} & -\frac{1}{2} \frac{(W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma)}{(\Omega_\alpha^\Gamma + \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} \\ \frac{1}{2} \frac{(W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma)}{(\Omega_\alpha^\Gamma - \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} & \delta_{(ab)(a'b')} + \frac{V_{(ab)(a'b')}^\Gamma}{(\Omega_\alpha^\Gamma + \epsilon_{a'b'}^\Gamma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{a'b';\Gamma}^\alpha \\ \Delta_{a'b';\Gamma}^\alpha \end{pmatrix} = 0, \quad (3.37)$$

por lo cual una solución no trivial existe cuando el determinante de la matriz anterior es cero.

Por otro lado, para determinar a las energías RPA  $\Omega_\alpha^\Gamma$  será necesario primero introducir a las siguientes matrices

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} &\equiv \langle 0 | \left[ \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'}, \left[ H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right] | 0 \rangle = \left( \epsilon_{ab}^\Gamma \delta_{a'a} \delta_{b'b} + V_{(a'b')(ab)}^\Gamma \right) \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\ \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} &\equiv -\langle 0 | \left[ \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'}, \left[ H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right] | 0 \rangle = \frac{1}{2} \left( W_{(a'b')(ab)}^\Gamma + W_{(ab)(a'b')}^\Gamma \right) \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

podemos juntar a las ecuaciones (3.29) y (3.31) en una ecuación de autovalores de la forma

$$\sum_{ab} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} & \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} \\ -\mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} & -\mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ab;\Gamma}^\alpha \\ Y_{ab;\Gamma}^\alpha \end{pmatrix} = \Omega_\alpha^\Gamma \begin{pmatrix} X_{a'b';\Gamma}^\alpha \\ Y_{a'b';\Gamma}^\alpha \end{pmatrix} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}. \quad (3.39)$$

La matriz  $\mathbb{A}$  es la matriz de *adelanto* que ya fue introducida en la Sección 3.1, mientras que a la matriz  $\mathbb{B}$  se le nombra matriz de *retraso*. A partir de la ecuación (3.38) se puede observar que ambas matrices son hermitianas y que el método TDA se recupera cuando  $\mathbb{B}$  y  $Y$  se anulan.

La ecuación (3.39) es una ecuación de autovalores para una matriz no-Hermitiana, que ha sido ampliamente estudiada en la literatura y cuyas soluciones son estándar. Usualmente se le puede encontrar reescrita de la siguiente manera

$$\sum_{ab} \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} & \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} \\ \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} & \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma'\mu')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ab;\Gamma}^\alpha \\ Y_{ab;\Gamma}^\alpha \end{pmatrix} = \Omega_\alpha^\Gamma \begin{pmatrix} X_{a'b';\Gamma}^\alpha \\ -Y_{a'b';\Gamma}^\alpha \end{pmatrix} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu}. \quad (3.40)$$

Esta forma de expresar las ecuaciones de RPA tiene un uso más bien didáctico, pues en particular permite notar que si una solución  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  corresponde a una energía  $\Omega$  entonces, tomando el complejo conjugado, otra solución  $\begin{pmatrix} y^* \\ x^* \end{pmatrix}$  es obtenida con energía  $-\Omega^*$ . Es por ello que para resolver a las ecuaciones de RPA en lo general se utiliza la llamada *descomposición*

de *Choleski* para reducir por la mitad las soluciones posibles, reteniendo solamente aquellas con energía positiva [38].

Cabe mencionar que una de las propiedades más notables de las ecuaciones de la RPA es la aparición de soluciones complejas cuando las interacciones involucradas en el Hamiltoniano sobrepasan cierta intensidad crítica, de modo que el vacío inicial (en este caso  $|0\rangle$ ) se aleja demasiado del *verdadero* estado base para ser un sustituto aceptable en las ecuaciones de movimiento. Se puede demostrar que no aparecerán dicho tipo de soluciones siempre que la matriz  $M$  definida por

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^* & \mathbb{A}^* \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

sea positiva definida. Esto a su vez ha demostrado ser equivalente a que el vacío realmente minimice al valor de expectación de la energía para cualquier operador partícula-agujero anti-Hermitiano arbitrario [37].

Para finalizar la discusión sobre la RPA debe notarse que a pesar de que el método de la RPA es conocido por preservar (en principio) las simetrías del Hamiltoniano total [39] tal como la invariancia traslacional y Galiliana, dichas simetrías pueden ser rotas debido a alguna de las siguientes razones [40]:

- a) Uso de energías empíricas (no-autoconsistentes) de una partícula.
- b) Uso de interacciones que no sean invariantes traslacionales.
- c) Truncamiento del espacio de configuraciones.

En el caso del presente modelo es el uso de energías de oscilador armónico para una partícula lo que impide que los cálculos de RPA conserven las simetrías adecuadas. Es por ello que en la sección D.2 se evalúa la manera de modificar a las ecuaciones de RPA de manera que sea posible separar a los estados espúrios provenientes de la no-autoconsistencia de los cálculos.

La expresión para la matriz adelanto  $\mathbb{A}$  corresponde a la ecuación (B.42). A su vez, la expresión más general para la matriz retraso  $\mathbb{B}$  está dada por la ecuación (B.58).

# Capítulo 4

## Renormalización

Hemos discutido en los Capítulos 1 y 2 que en el caso particular de nuestro modelo, la expansión en funciones de oscilador armónico tridimensional introduce integrales en el espacio de posiciones que son bien comportadas tanto a distancias relativas cortas como grandes. Sin embargo, por razones numéricas se introduce un corte equivalente en cierta manera al parámetro de corte ultravioleta  $\Lambda$  de la regularización por *fuera bruta*. En lugar de un corte continuo que trunque a las integrales en el espacio de momentos  $|p| < \Lambda$ , en el presente modelo el corte  $N_{cut}$  trunca al espacio del número de cuantas de oscilación admisibles y por ende no es un corte en un espacio continuo.

Antes de hablar de renormalización, será necesario definir a la masa física de una partícula como el eigenvalor del Hamiltoniano completo en el eigenestado de mínima energía que describe a una partícula en reposo. Es posible demostrar que con dicha definición, la masa física corresponde con la ubicación del primer polo aislado en el propagador de la partícula en cuestión.

De cuantizar una teoría libre sería posible identificar directamente al parámetro  $m_0$  de la ecuación (2.7) como la masa física de las partículas. Sin embargo, la ubicación del polo en el propagador recibe una contribución de las interacciones, por lo que decimos que la masa se *viste* con las interacciones. Esta es la razón por la que en el Capítulo 2 denominamos a  $m_0$  como la masa desnuda.

El hecho de que la masa desnuda, así como el acoplamiento entre distintas partículas se modifiquen (se vistan) como resultado inevitable de la existencia de interacciones, hace que se pierda la conexión directa entre los parámetros del Hamiltoniano (o del Lagrangiano, según el formalismo utilizado) y los correspondientes parámetros físicos medibles  $m$  y  $g$ . Nos interesará siempre expresar nuestras cantidades físicas en términos de dichos parámetros físicos y no de los parámetros desnudos  $m_0$  y  $g_0$ . A este cambio de parámetros se le conoce como renormalización.

Vale la pena enfatizar que de entrada, la necesidad de renormalizar no está intrínsecamente relacionada con la existencia de divergencias, y está igualmente presente incluso en teorías que son finitas desde un principio, como es el caso de ciertas teorías supersimétricas [41, 42]. La necesidad en general de la renormalización se debe a que uno debe reportar las amplitudes de dispersión en términos de cantidades finitas y medibles (o al menos, relacionadas con algo medible). Es entonces que usualmente se define al acoplamiento renormalizado haciendo referencia a un proceso de dispersión, por ejemplo, a una dispersión  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$  en QED a cierta escala de momento. El punto es simplemente que si se escogiera otra escala, la definición de los acoplamientos tendría que cambiar.

En este punto cabe insistir en que la renormalización usualmente se hace pidiendo que las funciones de correlación que representan determinados procesos de dispersión no dependan del corte. En este caso, el proceso de renormalización requerirá de dos etapas consecutivas: En la primera de ellas (Subsección 4.1.1) se pide que las observables físicas independientes del corte sean las masas de los quarks, a pesar de que debido al confinamiento no es posible representar al quark como un estado asintótico y por ende no hay tal cosa como la masa física de un quark. En la segunda etapa (Subsección 4.1.2) se renormaliza a los parámetros de interacción. Para ello la observable física que se mantiene independiente del corte es la masa del pion.

En la Sección 4.3 se agrega por completez una breve discusión sobre la elección del ancho del oscilador  $\xi^{-1/2}$ , en donde se argumenta que no se trata de un parámetro libre y que además dicha elección puede ser considerada independiente del corte  $N_{cut}$ .

## 4.1. Renormalización del Hamiltoniano

Después de diagonalizar al término de propagación libre, el Hamiltoniano efectivo tiene esquemáticamente la siguiente estructura:

$$H = \sum_p \varepsilon_p n_p - \alpha \frac{1}{r} + \beta r, \quad (4.1)$$

donde  $r$  es la notación corta para representar a la interacción lineal,  $\frac{1}{r}$  para la interacción Coulombiana estándar y  $\varepsilon_p$  es la energía de propagación libre de una partícula relacionada al estado  $p$  (ver Figura 1.2). Se denota por  $n_p$  a la suma de los operadores de número de quarks y antiquarks después de ser evaluados sobre el estado  $p$ .

Es posible observar que los valores de expectación dependen del corte  $N_{cut}$ . Esto se debe a que al tomar en cuenta más estados posibles del oscilador armónico, las energías de una partícula disminuyen al aproximarse a la solución continua de ondas planas, mientras que la precisión en el cálculo tanto del valor esperado  $\langle \frac{1}{r} \rangle$  como el de  $\langle r \rangle$  aumenta de acuerdo a su expansión en integrales de Talmi

$$\langle \mathbf{H} \rangle_{N_{cut}} = \sum_p \varepsilon_p^{N_{cut}} \langle \mathbf{n}_p \rangle_{N_{cut}} - \alpha_{N_{cut}} \langle \frac{1}{r} \rangle_{N_{cut}} + \beta_{N_{cut}} \langle r \rangle_{N_{cut}}. \quad (4.2)$$

De este modo, si se ajusta a los parámetros del Hamiltoniano para reproducir algunos estados de bajas energías (por ejemplo, el estado del pión) para un corte a usar como *punto de renormalización* dado  $N_0$ ; entonces el valor de expectación del Hamiltoniano para dicho corte será

$$\langle \mathbf{H} \rangle_{N_0} = \sum_p \varepsilon_p^{N_0} \langle \mathbf{n}_p \rangle_{N_0} - \alpha_{N_0} \langle \frac{1}{r} \rangle_{N_0} + \beta_{N_0} \langle r \rangle_{N_0}. \quad (4.3)$$

Su relación con la ecuación (4.2) para un corte finito  $N_{cut}$  es entonces

$$\langle \mathbf{H} \rangle_{N_{cut}} = \langle \mathbf{H} \rangle_{N_0} + \langle \mathbf{H} \rangle_{N_{cut} > N_0}, \quad (4.4)$$

donde el último término se refiere a las contribuciones para  $N_{cut} > N_0$ .

La ecuación (4.4) puede ser extendida a cualquier tipo de operador, sustituyendo al Hamiltoniano  $\mathbf{H}$  por el operador  $\mathbf{O}$ , el cual puede ser  $r$  o cualquiera de los otros operadores involucrados en la ecuación (4.1).

### 4.1.1. Renormalización de las masas

En adelante denotaremos con  $m_{N_{cut}}^f$  a la masa del quark con sabor  $f = \{q, s\}$  ( $q = \{u, d\}$ ) descrito en la base  $(\tau Nl)$ . El subíndice  $N_{cut}$  denota su dependencia con el corte en el número de cuantas de oscilación. Esta masa corresponde a la definición de la ecuación (2.10) y por ende se trata de la masa de las pseudopartículas en la base de oscilador armónico, es decir, antes de la prediagonalización del Hamiltoniano de propagación libre.

Las masas  $m_{N_{cut}}^f$  son parámetros libres de nuestro modelo y no son elegidas en conformidad con las masas desnudas reportadas por los cálculos de redes, las cuales corresponden a  $\bar{m}_{ud} = 3.42$  MeV y  $\bar{m}_s = 93.8$  MeV [44]. En su lugar argumentamos que la escala característica inducida por el ancho de oscilador armónico (Ver Sección 4.3) genera una masa -aún en ausencia de interacciones-, vía el principio de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta p \Delta x \sim \hbar \longrightarrow (mc)(\sqrt{\gamma})^{-1} \sim \hbar . \quad (4.5)$$

Esto da por resultado una masa de  $\sim 270$  MeV para un ancho de oscilador de  $0,75$  fm. Por supuesto que este resultado no depende ni del sabor ni del corte, pero ayuda a estimar que las masas  $m_{N_{cut}}^f$  se encontrarán entre los 100 y hasta 400 MeV sólo por efectos de la base, es decir, muy por encima de los valores desnudos expuestos en el párrafo anterior.

Por otro lado, interpretaremos como *masa efectiva* al primer estado de una partícula  $\varepsilon_{k,j,Y,T}$  con  $K = 1$ ,  $j = \frac{1}{2}$  dependiendo de su isospín de sabor, i.e.,  $m_q^{eff} = \varepsilon_{1,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$  y  $m_s^{eff} = \varepsilon_{1,\frac{1}{2},0,0}$ . Dichas masas están entonces definidas en la base  $(\lambda\pi k)$ , en la cual el Hamiltoniano de propagación libre de la ecuación (2.12) es diagonal, de modo que tal base sería la de ondas planas en el límite  $N_{cut} \longrightarrow \infty$ .

De hecho, el uso de una base confinante como punto de partida -como lo es la base de oscilador armónico-, rompe la simetría quiral [10] y hace imposible el recuperar el límite quiral aún cuando se fije a las masas  $m_{N_{cut}}^f$  a cero.

Observamos que las masas efectivas ya no tienen un subíndice que denote la dependencia con el corte. Esto es debido a que el proceso de renormalización aquí propuesto consiste en mantener a dichas masas fijas para todo  $N_{cut}$  al valor de energía que tenía en el punto de

renormalización  $N_0$ .

Por otro lado, es posible observar que conforme se incrementa el número máximo de cuantas  $N_{cut} > N_0$  que conforman al espacio a considerar, las masas  $m_{N_{cut}}^f$  deben ser reescaladas para mantener a la masa efectiva independiente del corte. Para conseguir tal efecto, se les multiplica por una función a ser determinada

$$m_{N_{cut}}^f = m_{N_0}^f \sqrt{x_{N_{cut}}^f}. \quad (4.6)$$

La función  $\sqrt{x_{N_{cut}}^f}$  resulta ser diferente para las masas  $m_{u,d}$  y  $m_s$ , por lo que el superíndice  $f$  denota la dependencia de la función con el sabor.

Desafortunadamente, no es posible hacer una comparación directa con las masas corrientes que se obtienen en modelos que utilizan ondas planas como base para los campos fermiónicos. Esto se debe a la contribución que proviene de la energía cinética del oscilador armónico, el cual como hemos mencionado no es sujeto a la renormalización, de modo que la renormalización de las masas debe compensar por este hecho. Quizás podría ser interesante para un proyecto a futuro el buscar una forma de conectar el esquema de renormalización del presente modelo con otras formas más “estándar” de llevar a cabo dicho proceso.

### 4.1.2. Renormalización de los parámetros de interacción

Para determinar a los parámetros de interacción óptimos  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  se ajusta al espectro para un corte dado  $N_0$ , por ejemplo, pidiendo que la masa del pion sea de 137 MeVs. De la misma manera como se hizo con las masas, se pide que  $\alpha$  y  $\beta$  reescalen con el corte de acuerdo a una función de la forma

$$\begin{aligned} \alpha_{N_{cut}} &= \alpha_{N_0} \sqrt{x_{N_{cut}}} \\ \beta_{N_{cut}} &= \beta_{N_0} / \sqrt{x_{N_{cut}}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Posteriormente, se varía a  $\alpha_{N_{cut}}$  y  $\beta_{N_{cut}}$  dejando fija la masa del pión al mismo valor de 137 MeV. En este caso se ha *impuesto* que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  reescalen con la misma proporción como función del parámetro de corte. Esto implica que conforme decrezca el valor de  $\beta$  a altas

energías (libertad asintótica) entonces el término Coulombiano de la interacción va teniendo más y más influencia en el espectro de mesones.

Tomemos como ejemplo el operador de interacción lineal, entonces multiplicado a la ecuación (4.4) por el parámetro de interacción, puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\beta_{N_{\text{cut}}}\langle\mathbf{r}\rangle_{N_{\text{cut}}} &= \beta_{N_{\text{cut}}}\left(1 + \frac{\langle\mathbf{r}\rangle_{N_{\text{cut}}>N_0}}{\langle\mathbf{r}\rangle_{N_0}}\right)\langle\mathbf{r}\rangle_{N_0} \\ &= \beta_{N_0}\langle\mathbf{r}\rangle_{N_0},\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde la relación entre  $\beta_{N_0}$  and the  $\beta_{N_{\text{cut}}}$  es

$$\begin{aligned}\beta_{N_{\text{cut}}} &= \beta_{N_0}/\sqrt{x_{N_{\text{cut}}}} \\ \sqrt{x_{N_{\text{cut}}}} &= \left(1 + \frac{\langle\mathbf{r}\rangle_{N_{\text{cut}}>N_0}}{\langle\mathbf{r}\rangle_{N_0}}\right).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Esto garantiza el mismo valor de expectación vía la renormalización de  $\beta$  como función del corte. En la ecuación (4.9) las contribuciones de frontera para  $N$  mayor que  $N_0$  son asimiladas. El expresar a la función de reescalamiento como una raíz cuadrada es por conveniencia. Análogamente, para la interacción  $\frac{1}{\mathbf{r}}$  y asumiendo que el comportamiento  $\langle\frac{1}{\mathbf{r}}\rangle \approx \frac{1}{\langle\mathbf{r}\rangle}$  es satisfecho, tenemos que  $\alpha_{N_{\text{cut}}} \approx \alpha_{N_0}\sqrt{x_{N_{\text{cut}}}}$ .

## 4.2. Resultados numéricos para la renormalización

La diagonalización se efectúa escogiendo el ancho de oscilador  $\xi^{-1/2}$  de acuerdo al principio variacional discutido en la Sección 4.3 para un corte dado  $N_{\text{cut}} = N_0$ . Tal ancho de oscilación se mantendrá fijo para todos los valores posibles de  $N_{\text{cut}}$  de manera que se utilice *la misma base* durante todo el proceso.

Para los resultados expuestos en el presente documento, hemos usado un punto de renormalización a bajas energías con  $N_0 = 3$ . En el cuadro 4.1 se muestra cómo rescalan las masas  $m_{N_{\text{cut}}}^f$  de los quarks así como los parámetros de interacción para mantener un espectro RPA aproximadamente invariante.

$N_{cut}$	$m_q[GeV]$	$m_s[GeV]$	$\alpha$	$\beta[GeV^2]$	$m_q^{eff}[GeV]$	$m_s^{eff}[GeV]$	$\pi_{RPA}[GeV]$
3	0.050	0.310	0.160	0.400	0.258	0.400	0.136
5	0.142	0.337	0.229	0.280	0.258	0.400	0.136
7	0.173	0.351	0.288	0.222	0.258	0.400	0.137
9	0.191	0.360	0.333	0.191	0.258	0.400	0.138
11	0.202	0.367	0.381	0.168	0.258	0.400	0.138
13	0.210	0.371	0.423	0.151	0.258	0.400	0.137

Cuadro 4.1: Renormalización numérica de las masas y de los parámetros de interacción. En acuerdo con el Cuadro 4.3, todos los cálculos se realizan usando  $\xi = 0.07 \text{ GeV}^2$ .

En el Cuadro 4.1 se muestra a la energía RPA del estado más bajo con los números cuánticos del pión  $\pi^0$  como función del corte. Como puede verse, la energía del pión permanece aproximadamente constante, mientras que las masas de los quarks y los acoplamientos reescalan aproximadamente como una ley de potencias con

$$\begin{aligned}
x_{N_{cut}} &= 1 + a (N_{cut} - N_0)^b \\
x_{N_{cut}}^f &= 1 + a^f (N_{cut} - N_0)^{b^f} \quad , \quad (4.10)
\end{aligned}$$

donde los parámetros  $a, b, a^f, b^f$  ( $f = \{q, s\}$ ) son listados en el Cuadro 4.2, mientras que  $x_{N_{cut}}$  y  $x_{N_{cut}}^f$  satisfacen por construcción las condiciones de frontera  $x_{N_0} = 1$  y  $x_{N_0}^f = 1$ , respectivamente.

$a$	$b$	$a^q$	$b^q$	$a^s$	$b^s$
0.49	1.08	5.17	0.52	0.13	0.52

Cuadro 4.2: Parámetros del ajuste en potencias para las funciones de renormalización de la ecuación (4.10).

En la figura 4.1, se muestran los valores adimensionales  $\tilde{m}_q = \frac{m_q^{N_{\text{cut}}}}{m_q^{N_0}}$ ,  $\tilde{m}_s = \frac{m_s^{N_{\text{cut}}}}{m_s^{N_0}}$ ,  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_{N_{\text{cut}}}}{\alpha_{N_0}}$  y  $\tilde{\beta} = \frac{\beta_{N_{\text{cut}}}}{\beta_{N_0}}$ .

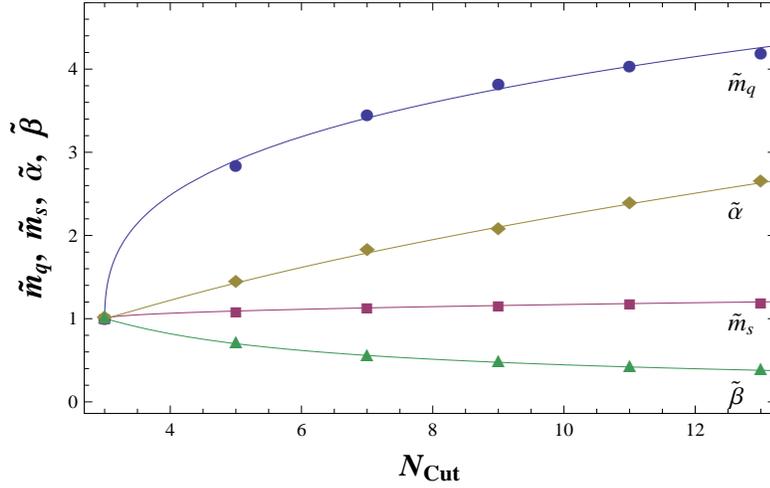


Figura 4.1: Renormalización de los parámetros.

De acuerdo a los resultados del Cuadro 4.2 es posible simplificar a las expresiones para las funciones de renormalización mediante las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}
 m_{N_{\text{cut}}}^f &\approx m_{N_0}^f \sqrt{1 + a^f (N_{\text{max}} - N_0)^{\frac{1}{2}}} \\
 \alpha_{N_{\text{cut}}} &\approx \alpha_{N_0} \sqrt{1 + \frac{1}{2} (N_{\text{max}} - N_0)} \\
 \beta_{N_{\text{cut}}} &\approx \frac{\beta_{N_0}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} (N_{\text{max}} - N_0)}} .
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Hemos llevado a cabo una serie de diagonalizaciones numéricas, incrementando  $N$  desde 3 hasta 13 en pasos de 2 y determinando  $x_{N_{\text{cut}}}$  y  $x_{N_{\text{cut}}}^q$  de modo que la primera energía de partícula libre es aproximadamente la misma. Cambiando las masas y las constantes de interacción de acuerdo a las ecuaciones anteriores, efectivamente se obtiene un espectro RPA aproximadamente invariante. No podemos dar una expresión analítica a la renormalización a causa de su naturaleza altamente no trivial.

### 4.3. Ancho de oscilador

Durante una conferencia en 1953, Enrico Fermi criticó la complejidad del modelo de Freeman Dyson al citar a John von Neumann, quien supuestamente afirmó “Con cuatro parámetros puedo ajustar un elefante, y con cinco puedo lograr que mueva su trompa” [43]. Esta frase habla por sí sola, pero para ejemplificarla aún más podemos establecer que cualesquiera  $N$  puntos se pueden ajustar con una precisión arbitrariamente buena si se utiliza como ajuste un polinomio de grado  $N - 1$ . Sin embargo, una teoría que pretende ser fundamental debe ser capaz de predecir el comportamiento de un sistema a través de primeros principios y no a través de un gran número de parámetros libres.

Es por ello que, como se menciona en la Introducción, uno de los objetivos del presente modelo es requerir el menor número posible de parámetros libres. Ello se logra en primera instancia al determinar al ancho de oscilador armónico de la base mediante el uso de un método variacional que nos permite relacionarlo con los demás parámetros del Hamiltoniano en cuestión.

A pesar de que el ancho de oscilación no es un parámetro intrínseco de la teoría -pues en principio se puede usar cualquier base para la expansión de los campos fermiónicos-, lo cierto es que no cualquier elección de base será suficientemente buena en términos de convergencia. De este modo, el fijar el ancho de oscilador vía un principio variacional hace que la base utilizada surja naturalmente como aquella que optimiza al espectro energético de la teoría a evaluar.

Con dicha finalidad se utiliza la paquetería *MINUIT* del CERN [45], la cual permite minimizar al valor de los elementos de matriz diagonales del Hamiltoniano en la base de pares que se definirán en la Sección 3.1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{ab} \langle a\bar{b}\Gamma | H | a\bar{b}\Gamma \rangle &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sum_{ab} \langle a\bar{b}\Gamma | H | a\bar{b}\Gamma \rangle &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde la suma está restringida al subespacio de números cuánticos del pion, es decir,  $\{J^P, (Y, T)\} =$

$\{0^-, (0, 0)\}$  donde  $Y$  y  $T$  se refieren a hipercarga e isospín de sabor.

En el Cuadro 4.3 se muestra el valor óptimo que se obtuvo numéricamente para la colección de parámetros que se presentará en el Capítulo 4.

$N_{cut}$	$m_q[GeV]$	$m_s[GeV]$	$\alpha$	$\beta[GeV^2]$	$\xi_{opt}[GeV^2]$
3	0.050	0.310	0.16	0.40	0.070
5	0.142	0.337	0.23	0.28	0.068
7	0.173	0.351	0.29	0.22	0.068
9	0.191	0.360	0.33	0.19	0.070
11	0.202	0.367	0.38	0.17	0.071
13	0.210	0.371	0.42	0.15	0.072

Cuadro 4.3: Valor óptimo para  $\xi$  como función del corte  $N_{cut}$  y de los parámetros del Hamiltoniano usados en el Capítulo 4.

Obtenemos en promedio un valor óptimo  $\xi_{opt} = 0.07 \text{ GeV}^2$ , el cual induce una escala característica  $\xi^{-1/2} = 0.75 \text{ fm}$  para los mesones del presente modelo. Dicho resultado es del orden de lo deseable pues en la literatura se considera que la escala característica de los mesones es de 1 fm.

# Capítulo 5

## Resultados

En el presente capítulo se presentan nuestros resultados y son comparados con los datos experimentales disponibles. También se compara a los métodos de TDA y RPA entre sí con la finalidad de explorar la influencia de las correlaciones del estado base sobre los diferentes subespacios  $\{J^P, (0,0)_C, (Y, T)\}$ , donde ambos métodos son implementados. En adelante se omite a la representación singlete de color  $(0,0)_C$ , ya que por construcción todos los estados colectivos de TDA y RPA son escalares en color.

Con el fin de agrupar las principales características del sector de bajas energías del espectro mesónico, vale la pena enlistar los números cuánticos de isospin, spin y paridad  $T(J^P)$  para los estados de hasta 1 GeV [46].

- 1) Los Mesones Pseudoescalares son reportados en la Sección 5.1 y se les puede identificar de la siguiente manera:
  - Los estados *tipo pión* tienen  $T(J^P) = 1(0^-)$ .
  - Los estados *tipo kaón* tienen  $T(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$ .
  - Los estados *tipo  $\eta$  y  $\eta'$*  tienen  $T(J^P) = 0(0^-)$ .
- 2) Los Mesones Vectoriales son reportados en la Sección 5.2 y son identificados con los siguientes números cuánticos:

- El mesón  $\rho$  tiene  $T(J^P) = 1(1^-)$ .
  - Los estados *tipo kaón vectorial* tienen  $T(J^P) = \frac{1}{2}(1^-)$ .
  - Los estados *tipo  $\omega$  y  $\phi$*  tienen  $T(J^P) = 0(1^-)$ .
- 3) Finalmente, los Mesones Escalares son reportados en la Sección 5.3 y es posible identificarlos como se muestra a continuación:
- El mesón  $a_0$  tiene  $T(J^P) = 1(0^+)$ .
  - El estado  $K_0^*$  tiene  $T(J^P) = \frac{1}{2}(0^+)$ .
  - Los estados  $f_0(500), f_0(980) = f_0^*$  tienen  $T(J^P) = 0(0^+)$ .

No hay mesones pseudovectoriales reportados con energías por debajo de 1 GeV, [46].

En este momento es necesario recordar que el Hamiltoniano efectivo de la ecuación (2.1) no mezcla sabor. Sin embargo, el procedimiento para remover los estados espúrios mostrado en la Sección D.2 genera una mezcla de sabor que en general es pequeña, razón por la cual los eigenestados reportados en el presente Capítulo -a menos que se establezca lo contrario-, son *estados puros*, es decir, de la forma  $q\bar{q}$  ( $q = u, d$ ) ó  $s\bar{s}$ .

En el Cuadro 5.1 se muestran los valores asignados a los distintos parámetros del modelo para dos cálculos diferentes. Dichos cálculos se realizaron para dar un análisis cuantitativo de la importancia del potencial de Coulomb (tipo  $-\alpha/r$ ) respecto al potencial lineal  $\beta r$ . Esto se logra tras comparar al espectro que se obtiene utilizando  $\alpha = 0$  (set 1) con aquel que resulta de usar  $\alpha \neq 0$  (set 2), manteniendo fijo al resto de los parámetros en ambos cálculos.

Los dos cálculos del Cuadro 5.1 se realizan utilizando un corte en el espacio de cuantas de oscilación  $N_{\text{cut}} = 3$  y en  $j_{\text{max}} = 3/2$ , así como un valor para  $\xi_{\text{opt}} = 0.075 \text{ GeV}^2$  que corresponde a un ancho de oscilador de 0.8 fm, en concordancia con lo expuesto en el Cuadro 4.3. Los parámetros son ajustados de modo que el cálculo del RPA reproduzca lo mejor posible a las masas de los mesones  $\rho$  y  $\omega$ , pues dichos mesones no son demasiado influenciados por la simetría quiral. El resto del espectro RPA es una consecuencia de tal ajuste.

Set \ parámetros	$m_{u,d}[GeV]$	$m_s[GeV]$	$\alpha$	$\beta[GeV^2]$
1	0.05	0.23	0.0	0.42
2	0.05	0.23	0.1	0.42

Cuadro 5.1: Parámetros utilizados para los cálculos de TDA y RPA: 1) el parámetro  $\alpha$  se pone a cero y 2) el parámetro  $\alpha$  se establece en 0.1. Para ambos cálculos se usa un ancho de oscilador armónico correspondiente a 0.8 fm.

## 5.1. Mesones Pseudoescalares

Para los mesones pseudoscalares se requieren en principio cuatro diagonalizaciones independientes, una para cada subespacio  $\{T, Y\}$ . Sin embargo, los subespacios  $(T, Y) = (1/2, 1)$  y  $(1/2, -1)$  resultan ser equivalentes dada la invariancia de conjugación de carga del Hamiltoniano.

Puesto que por el momento no se hace ninguna distinción entre mesones cargados y neutros, se reporta solamente un estado tipo pión, así como un único estado tipo kaon, correspondiente al valor propio más bajo para  $T = 1$  y  $T = \frac{1}{2}$ , respectivamente (ver Cuadro 5.2). Por otro lado, como ya se argumentó antes, no es posible identificar a los estados tipo  $\eta$  y  $\eta'$  hasta no introducir un ángulo de mezcla. Sin embargo, en el presente documento se identifica a dichos estados como aquellos correspondientes a los dos valores propios más bajos  $q\bar{q}$  y  $s\bar{s}$  del subespacio  $(T, Y) = (0, 0)$ , respectivamente. Esta identificación necesariamente conduce a un estado *tipo- $\eta$*  degenerado con el estado *tipo pión*.

Es posible observar del Cuadro 5.2 que las correlaciones de vacío que introduce el método RPA hacen que la energía del pión decrezca hasta en un 9,7% respecto a su valor TDA, mientras que los estados tipo Kaon permanecen sin cambios, es decir, las contribuciones que reciben de dichas correlaciones son despreciables.

De la misma manera se puede notar que, para los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  reportados en el Cuadro 5.1, la influencia del potencial de Coulomb tipo  $\alpha/r$  hace que las energías de los estados pseudoescalares se reduzcan entre 2 y 3 MeV de su valor respecto al caso en que dicho

Estado	Exp.	TDA(Set1)	TDA(Set2)	RPA(Set1)	RPA(Set2)
$\pi$	139	590	588	534	531
K	495	678	676	678	676
$\eta$	547	590	588	534	531
$\eta'$	957	761	759	736	734

Cuadro 5.2: Masas experimentales de los mesones pseudoescalares [MeV] comparadas con los resultados para TDA y RPA, usando los *sets* de parámetros del Cuadro 5.1.

potencial no existiera. Por lo anterior se justifica que la contribución de dicho término puede ser despreciada en nombre de reducir el número de parámetros del modelo.

### 5.1.1. Mezcla de sabor $\eta - \eta'$

Sabemos que los estados con hipercarga e isoespín de sabor  $(YT) = (00)$  deben presentar mezcla de sabor, por ejemplo, los mesones físicos  $\eta$  y  $\eta'$  se obtienen en el modelo de quarks al realizar una rotación de los estados singlete  $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$  y  $\eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$  con un ángulo que experimentalmente se reporta alrededor de los  $17^\circ$  [47].

Una descripción realista de los mesones pseudoscalares  $\eta$  y  $\eta'$  demanda la presencia de algún tipo de procedimiento que dé origen a la mezcla de sabor, lo cual necesariamente implica la introducción de un término extra de interacción en el Hamiltoniano de la ecuación (2.1) a ser diagonalizado utilizando los métodos de muchos cuerpos, es decir, al mismo tiempo que el Hamiltoniano en su totalidad.

Sin embargo, en el presente Capítulo sólo se evalúa por completez un método *a posteriori* para llevar a cabo la mezcla de sabor, en el cual la interacción es introducida después haber diagonalizado mediante los métodos de muchos cuerpos. De esta manera se impone que la mezcla sólo se realice sobre los estados  $q\bar{q}$  y  $s\bar{s}$  que previamente habíamos identificado con los estados  $\eta$  y  $\eta'$ .

El mecanismo físico responsable de la mezcla de sabor es la aniquilación de un par quark-

antiquark en dos o tres gluones (Ver Figura 5.1) acoplados a color cero que subsecuentemente crean un nuevo par quark-antiquark sin color, pero no necesariamente con el mismo sabor. Es por ello que tal proceso sólo puede ocurrir en el sector con hipercarga e isoespín de sabor nulos, que correspondería al estado singlete de  $SU(3)$ . Las amplitudes para dichos procesos de aniquilación virtuales son independientes del sabor pues los gluones se acoplan de la misma manera a diferentes tipos de quark.

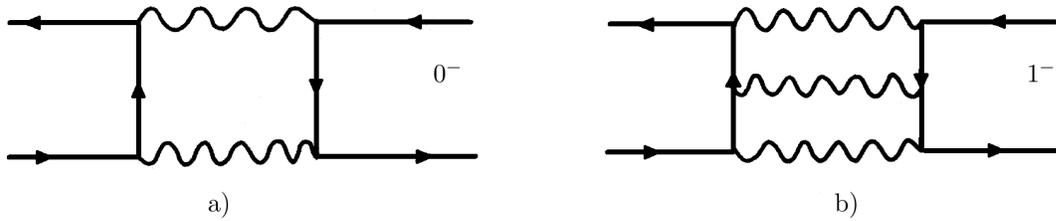


Figura 5.1: Aniquilación virtual de dos mesones neutros en gluones para a)  $J^P = 0^-$  y b)  $J^P = 1^-$ . Tales procesos son responsables de la mezcla dinámica de sabor.

Para simular dicho proceso se introduce en [48] una matriz  $3 \times 3$  cuyos valores propios corresponden a las masas del pión, el  $\eta$  y  $\eta'$ , sin embargo, el grado de libertad del pión resulta redundante, por lo que en el presente proyecto se ha optado por manipular una matriz de  $2 \times 2$  cuyos eigenvalores correspondan únicamente a las masas de  $\eta$  y  $\eta'$ . Para ello, denotamos con  $H_{FM}$  a los elementos de matriz del Hamiltoniano de mezcla de sabor que conectan a un fonón (a nivel TDA ó RPA) con otro, por lo cual, la matriz a diagonalizar es

$$\begin{pmatrix} M_{q\bar{q}} + 2H_{FM} & \sqrt{2}H_{FM} \\ \sqrt{2}H_{FM} & M_{s\bar{s}} + H_{FM} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Las masas  $M_{q\bar{q}}$  y  $M_{s\bar{s}}$  de la ecuación (5.1) corresponden a los eigenvalores más bajos a nivel TDA ó RPA para los estados puros  $q\bar{q}$  y  $s\bar{s}$  del Hamiltoniano (2.1) en el subespacio  $\{0^-, (0,0)\}$  y cuyos valores se muestran en el Cuadro 5.2. Aún cuando  $H_{FM}$  debe ser función de la escala de energía de manera que decrezca con la energía en concordancia con la libertad

asintótica, en el presente caso se utiliza un valor constante que pudiera interpretarse como una aproximación de campo medio.

Los factores de 2 y  $\sqrt{2}$  que multiplican a  $H_{FM}$  son consecuencia del hecho de que no hace distinción entre los estados  $|u\bar{u}\rangle$  y  $|d\bar{d}\rangle$  en la formulación hasta ahora presentada. Es por ello que el estado  $|q\bar{q}\rangle$  debe ser identificado con el estado singlete  $|q\bar{q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$ .

Por último, los eigenvalores de la matriz de mezcla de sabor de la ecuación (5.1) están dados por

$$E_{\pm} = \frac{1}{2} ( M_{q\bar{q}} + M_{s\bar{s}} + 3H_{FM} \pm \sqrt{9H_{FM}^2 + 2H_{FM}(M_{q\bar{q}} - M_{s\bar{s}}) + (M_{q\bar{q}} - M_{s\bar{s}})^2} ) . \quad (5.2)$$

En el cuadro 5.3 se muestra el ajuste realizado tanto a nivel TDA como RPA para el parámetro  $H_{FM}$  tal que se reproduzca la masa del mesón  $\eta'$  de manera exacta.

Estado	Exp.	TDA(Set2)	$H_{FM}$	RPA(Set2)	$H_{FM}$
$\eta$	547	674	90	634	105
$\eta'$	957	942	90	946	105

Cuadro 5.3: Energías experimentales y resultados a nivel TDA y RPA después de haber implementado una mezcla de sabor fenomenológica para las masas de los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  [MeV].

Sin embargo, otra elección para el ajuste pudo haber sido obtener la mejor aproximación posible a la diferencia de energías entre  $\eta$  y  $\eta'$ . Esta propuesta es mejor si se desea dar una buena descripción de la composición de quarks  $s\bar{s}$  de ambos estados, con la desventaja de que las energías de ambos estados resultan menores a la experimental.

## 5.2. Mesones Vectoriales

Para los mesones vectoriales calculados utilizando los valores para las masas y los parámetros de interacción enlistados en el Cuadro 5.1, se obtuvieron los resultados que se enumeran en el Cuadro 5.4.

Estado	Exp.	TDA(Set1)	TDA(Set2)	RPA(Set1)	RPA(Set2)
$\rho$	770	785	784	775	774
$\omega$	782	792	791	782	782
$K^*$	892	872	872	872	872
$\phi$	1020	1087	1090	1081	1083

Cuadro 5.4: Masas experimentales para los mesones vectoriales [MeV] comparados con los cálculos a nivel TDA y RPA, correspondientes a los parámetros del Cuadro 5.1.

En este momento cabe mencionar que el procedimiento de remoción del CM expuesto en la Sección D.2 genera en sí mismo un mesón  $\phi$  con mezcla de sabor sin requerir de ningún procedimiento adicional. Dicho mesón resulta tener un contenido de 75 % de quarks  $s\bar{s}$ , el cual es quizás demasiado bajo para los datos experimentales, donde se considera que la extrañeza del  $\phi$  es casi del 100 %.

Las diferencias de energía entre las masas experimentales de los mesones vectoriales y los resultados aquí mostrados, tanto a nivel TDA como de RPA están alrededor del 10 % o menos, por lo que considerando lo sencillo del procedimiento seguido y el bajo tiempo computacional necesario, el presente modelo puede representar una alternativa para los cálculos no-perturbativos.

En la Figura 5.2, se muestran los resultados de la RPA obtenidos con el Set-2 de parámetros después de haber llevado a cabo la mezcla de sabor con  $H_{FM} = 105$  MeV. Se compara a dichos resultados tanto con los valores experimentales [46] como con los resultados de la referencia [20].

Exceptuando los valores para energía RPA para los estados tipo pion y kaon -que resultan demasiado altos respecto a sus valores experimentales-, varias características del espectro de mesones pseudoescalares y vectoriales se reproducen satisfactoriamente.

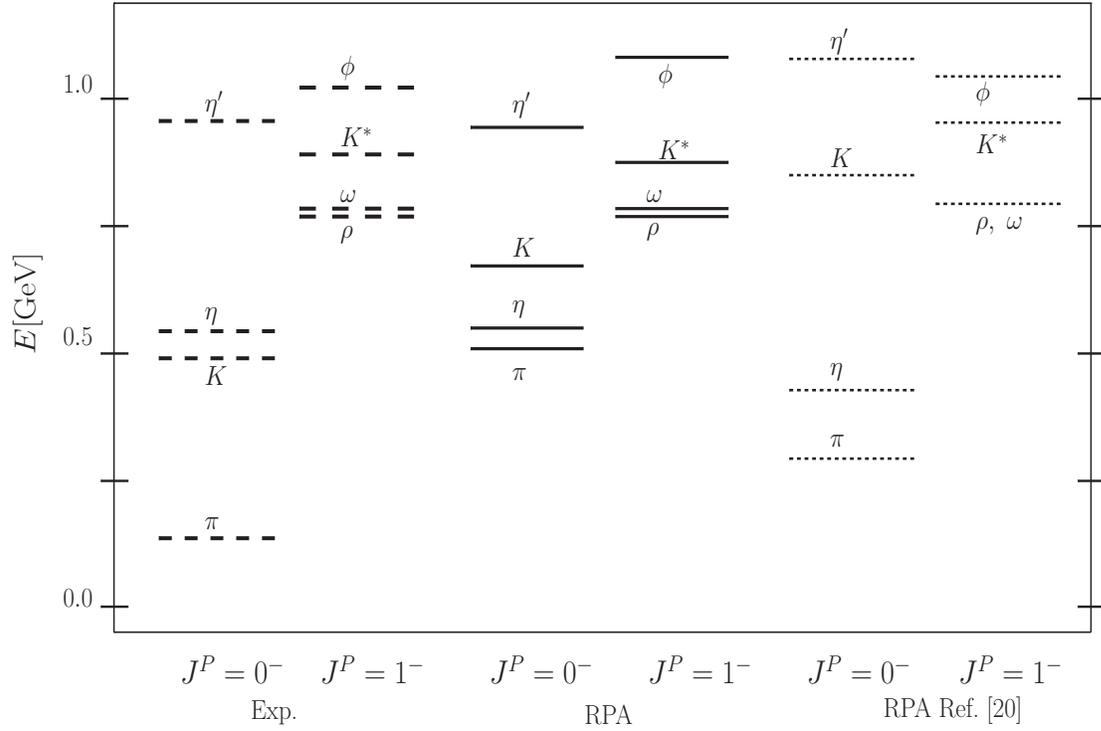


Figura 5.2: Espectro experimental y RPA para los mesones pseudoescalares y vectoriales para el Set-2 de parámetros después de haber implementado la mezcla de sabor y haber removido el CM con el método Meyer-ter-Vehn mostrado en la Sección D.2.

La característica más notable del procedimiento de eliminación del CM es que rompe la degeneración de los estados  $\rho$  y  $\omega$ , subiendo a este último como debería. Esto se debe al hecho que la estructura del vacío en el método ter-Vehn permite una pequeña mezcla de sabor, incluso si el Hamiltoniano conserva la simetría de sabor.

### 5.3. Mesones escalares

Un análisis similar al realizado para los estados pseudoscalares y vectoriales se hace para los estados escalares. Los mesones escalares con energía inferior a 1 GeV son estados muy controvertidos [46, 49, 50], ya que en general tienen un gran ancho de decaimiento, lo cual

causa un alto traslape entre las resonancias y el fondo, complicando así la interpretación experimental de tales estados.

Sin embargo, algunos pocos mesones escalares son listados en el PDG [46] y vale la pena mencionar sus números cuánticos  $T(J^P)$  y anchuras:

- El  $K_0^*(800)$  (ó  $\kappa$ ) con  $\frac{1}{2}(0^+)$  y un ancho de 547 MeV.
- El  $a_0(980)$  con  $1(0^+)$  y un ancho de 50 – 100 MeV.
- El  $f_0(500)$  (ó  $\sigma$ ) y el  $f_0(980)$ , ambos con números cuánticos  $0(0^+)$  y anchos de 400 – 700 MeV y 10 – 100 MeV respectivamente.

En el Cuadro 5.5, se muestran los resultados para el espectro TDA y RPA para los estados escalares por debajo de 1 GeV.

Una vez más, en el presente documento se reportan los resultados sin implementar ninguna especie de mezcla en el subespacio  $\{T, Y\} = (0, 0)$  de sabor, de manera que se interpreta como  $f_0(500)$  al primer estado puro  $q\bar{q}$ , mientras que se identifica al estado  $f_0(500)$  con el primer estado puro  $s\bar{s}$ . Para los casos con  $T = \frac{1}{2}$  y  $T = 1$ , es decir,  $K_0^*$  y  $a_0$ , respectivamente, se muestran los resultados a nivel TDA y RPA que se encuentran lo más cercanos al valor experimental. Los demás estados obtenidos por debajo de 1 GeV en tales subespacios se discuten más adelante.

El valor promedio del Cuadro 5.5 es tomado de [46]. Este toma en cuenta el gran número de reportes sobre los estados escalares, así como las discrepancias dentro de la literatura.

En la Figura 5.3 es posible observar que en el presente modelo los estados tipo Kaón escalar se aproximan en muy buena medida a los resultados experimentales. Esto tras considerar que las predicciones teóricas para el estado  $K_0^*(800)$  van desde los 594 MeV y hasta los 905 MeV, mientras que los valores experimentales lo sitúan en el rango de 706 – 855 MeV [46].

En el Cuadro 5.5 se reporta a la masa del mesón escalar  $a_0(980)$  como la energía del primer estado excitado (y no el de menor energía como en toda la discusión anterior). Sin embargo se argumenta que es este quien corresponde al estado físico mientras que el resto del espectro actúa como *fondo* a ser analizado en el futuro.

State	Exp.	TDA(Set1)	TDA(Set2)	RPA(Set1)	RPA(Set2)
$f_0(500)$	(400-500)	601	599	546	542
$K_0^*(800)$	682	687	686	687	686
$f_0(980)$	990	1032	1035	979	981
$a_0(980)$	980	932	933	893	894

Cuadro 5.5: Masas experimentales para los mesones escalares [MeV], [46], comparadas con lo resultados a nivel TDA y RPA, para los parámetros reportados en el Set-2 del Cuadro 5.1.

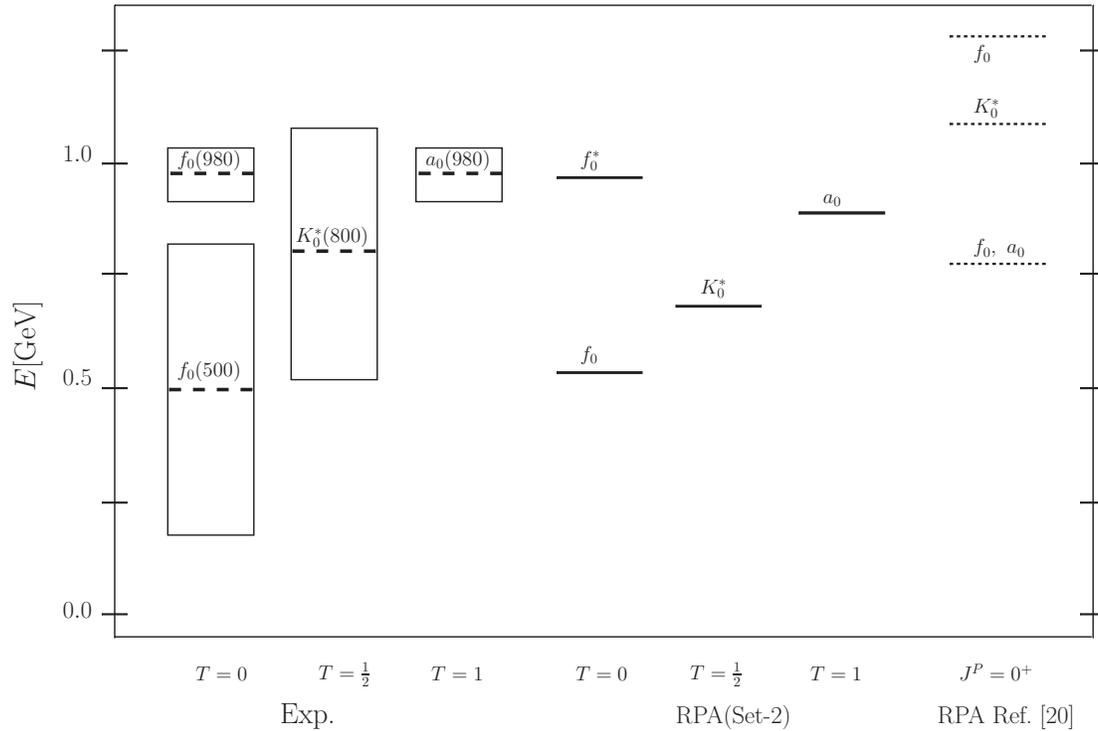


Figura 5.3: Estados escalares de la RPA para el Set-2 de parámetros del Cuadro 5.1, comparado con los datos experimentales y con la referencia [20].

# Capítulo 6

## Conclusiones

En conclusión, el modelo presentado es simple pero parcialmente exitoso. El modelo no está listo todavía y el espectro mostrado en la figura 5.2 aún puede ser mejorado drásticamente. Sin embargo, las ventajas del modelo obtenidas hasta ahora se resumen a continuación:

- 
- Una vez que se ha despreciado la contribución del término coulombiano del potencial, se cuenta únicamente con cuatro parámetros libres:  $m_{u,d}$ ,  $m_s$ ,  $\beta$  y  $H_{FM}$ . Dichos parámetros son ajustados a las masas de los mesones  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\omega$  y  $\rho$ . Los kaones vectoriales  $K^*$ , el mesón  $\phi$  y todos los mesones escalares se encuentran en buena concordancia con los resultados experimentales.
- La base del oscilador armónico es confinante y permite la integración analítica, ya que las integrales involucrados en los elementos de la matriz de interacción se comportan bien en los límites de distancia relativa nula e infinita.
- Se tiene una rápida convergencia de las soluciones respecto al número de cuantos considerados. Introduciendo un esquema de renormalización [14], las soluciones apenas cambian después de  $N_{max} = 8$ .

- Lo anterior implica que no se requiere demasiada potencia computacional. Esto además es debido al hecho de que las integrales son precalculadas analíticamente, como se ha mencionado antes.
- El espacio de coordenadas no contiene ninguna divergencia como las encontradas en el espacio de momentos para cálculos de ondas planas.
- A diferencia de lattice QCD, el espacio-tiempo es continuo, no introduciendo ningún error intrínseco debido al espaciado finito de la red.
- La estructura de un vacío correlacionado introducido por el método RPA simula la creación y aniquilación de pares virtuales.
- El método de Meyer-ter-Vehn permite restaurar las simetrías de traslación y Galileana de los estados mesónicos construidos. Esto tiene como consecuencia una pequeña mezcla de sabor evidente en la separación de los mesones vectoriales  $\omega$  y  $\rho$ .

Debido a lo anterior, la conclusión final es que el modelo es factible pero requiere una mayor investigación para poder competir con los enfoques actuales para los cálculos NP-QCD.

Una posible extensión a futuro del presente modelo es, como se mencionó en la Subsección 5.1.1, introducir un término en el Hamiltoniano que introduzca la mezcla de sabor *a priori* y de preferencia partiendo de primeros principios [51]. Se recomienda también buscar una manera de incorporar un rompimiento dinámico de la simetría quiral así como interacciones espín-espín [52].

Otra forma de mejorar el espectro es el uso de métodos de muchos cuerpos más sofisticados, por ejemplo, utilizando el llamado Faddeev RPA, que introduce correcciones a la aproximación quasibosónica mencionada en la Sección 3.2 al tomar en cuenta el principio de exclusión de Pauli [53].

Una vez que el espectro experimental sea reproducido de manera satisfactoria será necesario investigar el ancho de los estados obtenidos tanto a nivel TDA como RPA, de manera que sea posible caracterizar a los mesones escalares y quizás en el proceso mejorar la comprensión

que se tiene actualmente sobre tales estados. Subsecuentemente se puede probar la eficacia del modelo para reproducir el espectro de bariones e incluso para estudiar estados de tetraquarks y pentaquarks [54, 55].

# Apéndice A

## Conmutadores del Álgebra de Pares

El presente Apéndice tiene por finalidad el servir como formulario para referenciar los diversos cálculos de conmutadores que se llevarán a cabo a lo largo del Apéndice B. En él, se calcula el álgebra compuesta por los operadores de creación y aniquilación de un par  $\gamma^\dagger$  y  $\gamma$ ; así como de los generadores de partículas  $[b^\dagger b]$  y antipartículas  $[dd^\dagger]$ .

Sin embargo, resultará conveniente primero aclarar la notación, así como enunciar algunas de las propiedades de los coeficientes involucrados en los cálculos.

Comencemos por reducir al coeficiente  $\langle 1_1\mu_1, \bar{1}_2\bar{\mu}_2 | \Gamma\mu \rangle_1$  definido en la ecuación (3.3) en los subespacios que lo conforman

$$\begin{aligned}
 \langle 1_1\mu_1, \bar{1}_2\bar{\mu}_2 | \Gamma\mu \rangle_1 \Big|_{SU_c(3)} &\equiv \langle (10)\mu_1, (01)\bar{\mu}_2 | \Gamma_c\mu_c \rangle_1 \\
 \langle 1_1\mu_1, \bar{1}_2\bar{\mu}_2 | \Gamma\mu \rangle_1 \Big|_{SU_f(2)} &\equiv \langle T_1 T_{z_1}, T_2 - T_{z_2} | T T_z \rangle \\
 \langle 1_1\mu_1, \bar{1}_2\bar{\mu}_2 | \Gamma\mu \rangle_1 \Big|_{SU_j(2)} &\equiv \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | L M \rangle, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

donde se ha descompuesto al grupo  $SU(3)$  de sabor en su subgrupo  $SU(2) \times U(1)$ , dejando del lado al componente isoescalar para manipulaciones posteriores.

Con dicha notación podemos condensar a las propiedades de los coeficientes Clebsch-

Gordan (CG) tanto de  $SU(2)$  [56] como de  $SU(3)$  [25] de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 &= (-1)^{\phi_{\mu_4}} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma')}{\dim(1_1)}} \langle \Gamma' \mu', 1_4 \mu_4 | 1_1 \mu_1 \rangle_1 \\ \langle \bar{1}_4 \bar{\mu}_4, 1_2 \mu_2 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 &= \langle 1_4 \mu_4, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \bar{\Gamma}'' \bar{\mu}'' \rangle_1 . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Se tendrán adicionalmente para  $SU(2)$  las siguientes identidades que relacionan a los coeficientes CG de  $SU(2)$  con símbolos  $3j$ ; y entre tres  $3j$  con un  $6j$  [56] que se muestran a continuación

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle &= (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \hat{j}_3 \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix} &= \sum_{m'_1 m'_2 m'_3} (-1)^{l_1 + l_2 + l_3 + m'_1 + m'_2 + m'_3} \\ \times \begin{pmatrix} j_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m'_2 & -m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & j_2 & l_3 \\ -m'_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ m'_1 & -m'_2 & m_3 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde se usa la notación corta  $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$ . Se tienen además las siguientes relaciones:

$$\sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J' \\ m_1 & m_2 & M' \end{pmatrix} = \frac{\delta_{J'J} \delta_{M'M}}{(\hat{J})^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_X (-1)^{p+q+x} (\hat{X})^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ d & c & q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & c & q \\ b & d & p \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\sum_X (\hat{X})^2 \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & X \\ c & d & q \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{pq}}{(\hat{p})^2} \{adp\} \{bcp\} . \quad (\text{A.6})$$

La notación  $\{abc\}$  representa al símbolo que es igual a 1 si  $a, b, c$  satisfacen las reglas del triángulo y son cero de otra manera [56].

Por otro lado, para el álgebra  $SU(3)$  será útil tener a la mano las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_{12}} \langle \Gamma_1 \alpha_1, \Gamma_2 \alpha_2 | \Gamma_{12} \alpha_{12} \rangle_{\rho_{12}} \langle \Gamma_2 \alpha_2, \Gamma_3 \alpha_3 | \Gamma_{23} \alpha_{23} \rangle_{\rho_{23}} \langle \Gamma_{12} \alpha_{12}, \Gamma_3 \alpha_3 | \Gamma \alpha \rangle_{\rho_{123}} \\ = \sum_{\rho} \langle \Gamma_1 \alpha_1, \Gamma_{23} \alpha_{23} | \Gamma \alpha \rangle_{\rho} U [\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma \Gamma_3 ; \Gamma_{12} \rho_{12} \rho_{123} \Gamma_{23} \rho_{23} \rho] , \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde  $U[\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma \Gamma_3 ; \Gamma_{12} \rho_{12} \rho_{123} \Gamma_{23} \rho_{23} \rho]$  son los coeficientes de una transformación unitaria que relaciona a los acoplamientos de 3 representaciones irreducibles de  $SU(3)$  dependiendo del orden del acoplamiento  $\{\Gamma_1 \otimes \Gamma_2\} \otimes \Gamma_3 \rightarrow \Gamma$  con  $\Gamma_1 \otimes \{\Gamma_2 \otimes \Gamma_3\} \rightarrow \Gamma$ .

Los coeficientes  $U$  pueden ser escritos en términos de coeficientes CG de  $SU(3)$  como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} & U[\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma \Gamma_3 ; \Gamma_{12} \rho_{12} \rho_{12,3} \Gamma_{23} \rho_{23} \rho_{1,23}] \\ &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_{12} \mu_{23}} \langle \Gamma_1 \mu_1, \Gamma_2 \mu_2 | \Gamma_{12} \mu_{12} \rangle_{\rho_{12}} \langle \Gamma_{12} \mu_{12}, \Gamma_3 \mu_3 | \Gamma \mu \rangle_{\rho_{12,3}} \\ & \quad \times \langle \Gamma_2 \mu_2, \Gamma_3 \mu_3 | \Gamma_{23} \mu_{23} \rangle_{\rho_{23}} \langle \Gamma_1 \mu_1, \Gamma_{23} \mu_{23} | \Gamma \mu \rangle_{\rho_{1,23}} . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A partir de la ecuación (A.8) se puede demostrar que en general

$$U[\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma \Gamma_3 ; \Gamma_{12} \rho \rho' (00) - -] = (-1)^{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_{12}} \delta_{\rho' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_{12})}{\dim(\Gamma_1) \dim(\Gamma_2)}} , \quad (\text{A.9})$$

independientemente del valor de  $\rho_{23}$  y  $\rho_{1,23}$ . La fase de la ecuación anterior está definida en [25] como  $(-1)^{\Gamma_i} = (-1)^{\lambda_i + \mu_i}$  para  $\Gamma = (\lambda_i \mu_i)$ .

## A.1. Conmutador de 2 pares

De la ecuación (3.4) se tiene que el operador de aniquilación de un par  $\gamma$  está relacionado con el operador  $[db]$  por una fase. Sin embargo, en la presente Sección se calcula por conveniencia tanto al conmutador de  $[db]$  con un par, como el conmutador de un par con su conjugado  $[b^\dagger d^\dagger]$ . Para ello, primero se calcula de forma general al siguiente conmutador

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{d}^i \mathbf{b}^j, \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \right] &= \mathbf{d}^i \mathbf{b}^j \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \mathbf{d}^i \mathbf{b}^j \\ &= \mathbf{d}^i (\delta_{jk} - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^j) \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger (\delta_{il} - \mathbf{d}^i \mathbf{d}_l^\dagger) \mathbf{b}^j \\ &= \delta_{jk} \mathbf{d}^i \mathbf{d}_l^\dagger - \delta_{il} \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^j \\ &= \delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{jk} \mathbf{d}_l^\dagger \mathbf{d}^i - \delta_{il} \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^j . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Con lo anterior calculamos el conmutador de dos pares como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma \right)^\dagger, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \left[ \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2} \mathbf{b}^{1_1 \mu_1}, \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \\
 &\quad \times \left( \delta_{1_1 1_3} \delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \delta_{\bar{\mu}_2 \bar{\mu}_4} - \delta_{1_1 1_3} \delta_{\mu_1 \mu_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2} - \delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \delta_{\bar{\mu}_2 \bar{\mu}_4} \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{b}^{1_1 \mu_1} \right) . \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

Luego analizamos cada uno de los términos entre paréntesis por separado. Para el primero de ellos se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \delta_{1_1 1_3} \delta_{\mu_1 \mu_3} \delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \delta_{\bar{\mu}_2 \bar{\mu}_4} \\
 &= \delta_{1_1 1_3} \delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \\
 &= \delta_{1_1 1_3} \delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \delta_{\Gamma \Gamma'} \delta_{\mu \mu'} , \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

donde se ha abusado del hecho de que sólo los términos con  $1_1 = 1_3$  y  $\bar{1}_2 = \bar{1}_4$  contribuyen a la suma para así poder usar la regla de ortogonalidad de los coeficientes C-G.

Para el siguiente término utilizamos las reglas para bajar índices expresadas en (1.22) y reacomplamos, resultando que

$$\begin{aligned}
 & -\delta_{1_1 1_3} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \delta_{\mu_1 \mu_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2} \\
 &= -\delta_{1_1 1_3} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_2}} \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \mathbf{d}_{1_2 \mu_2} \\
 &= -\delta_{1_1 1_3} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_2}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle \bar{1}_4 \bar{\mu}_4, 1_2 \mu_2 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 &\quad \times \left[ \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \mathbf{d}_{1_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} . \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

Recordamos que el término entre llaves de la ecuación (A.22) es una notación abreviada para los coeficientes C-G, por lo que los simplificaremos un subespacio a la vez.

Para la parte  $SU(3)$  de color se tiene que  $\Gamma_c = (\lambda\lambda)$  implica que  $\dim(\Gamma_c)$  puede tomar los valores 1 y 8 para  $\lambda = 0, 1$  respectivamente; mientras que  $\dim(10) = \dim(01) = 3$ . Se obtiene entonces que la parte  $SU(3)$  del término entre llaves en (A.22) resulta ser

$$\sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_2} + \phi_{\mu_4}} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma')}{3}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle \Gamma' \mu', 1_4 \mu_4 | 1_1 \mu_1 \rangle_1 \langle 1_4 \mu_4, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \bar{\Gamma}'' \bar{\mu}'' \rangle_1 . \quad (\text{A.14})$$

Tras comparar a (A.14) con la identidad de la ecuación (A.7) es posible reescribir al término entre llaves de la ecuación (A.22) como

$$(-1)^{\phi_{\mu''}} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma')}{3}} \sum_{\rho} \langle \Gamma' \mu', \bar{\Gamma}'' \bar{\mu}'' | \Gamma \mu \rangle_{\rho} U [\Gamma' \ 1_4 \ \Gamma \ \bar{1}_2 ; \ 1_1 \ 1 \ 1 \ \bar{\Gamma}'' \ 1 \ \rho] , \quad (\text{A.15})$$

donde se ha simplificado la fase usando que del último coeficiente de C-G de la expresión (A.14) se tiene que  $\bar{\mu}_2 + \mu_4 = \mu''$ .

Por otro lado, para la parte  $SU(2)$  de espín se tiene que el término entre llaves de la ecuación (A.22) es

$$\sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_2+m_2} \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | LM \rangle \langle j_1 m_1, j_4 - m_4 | L' M' \rangle \langle j_4 - m_4, j_2 m_2 | L'' M'' \rangle . \quad (\text{A.16})$$

En esta ocasión requerimos las identidades de la ecuación (A.3), con las cuales podemos reescribir a la parte  $SU(2)$  del término entre llaves de la ecuación (A.22) como

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_2+m_2} (-1)^{j_1-j_2-M} (-1)^{j_1-j_4-M'} (-1)^{j_4-j_2-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\ & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & L' \\ m_1 & -m_4 & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & L'' \\ -m_4 & m_2 & -M'' \end{pmatrix} \\ & = \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_2+m_2-M'-M-M''} (-1)^{j_1+j_4+L'} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\ & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & L' \\ -m_1 & m_4 & M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & L'' \\ -m_4 & m_2 & -M'' \end{pmatrix} \\ & = \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_2+m_2-M'-M-M''} (-1)^{j_4+j_2+L''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\ & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & L' & j_4 \\ -m_1 & M' & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'' & j_2 & j_4 \\ -M'' & m_2 & -m_4 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Luego reescribimos la fase como

$$\begin{aligned} & (-1)^{j_2+m_2-M'-M-M''+j_4+j_2+L''} \\ & = (-1)^{j_1+j_2+j_4+m_1+m_2+m_4} [(-1)^{j_2+m_2-M'-M-M''+j_4+j_2+L''-(j_1+j_2+j_4+m_1+m_2+m_4)}] . \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

Para simplificar la fase entre corchetes observamos que del segundo coeficiente CG en la ecuación (A.16) se tiene que  $m_1 - m_4 = M'$ , luego

$$(-1)^{j_1+j_2+m_1-m_4-M-M'-M''} = (-1)^{j_1+j_2+L''-M-M''} , \quad (\text{A.19})$$

resultando así que la parte  $SU(2)$  del término entre llaves de la ecuación (A.22) es

$$(-1)^{j_1+j_2+L''-M'} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ -M'' & M' & -M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{matrix} \right\}, \quad (\text{A.20})$$

donde la fase se ha reescrito una vez más usando que del coeficiente 6j se tiene que  $M + M'' = M'$ .

Ahora juntamos las partes de  $SU(2)$  y  $SU(3)$  y las sustituimos de forma explícita en la ecuación (A.22) obteniendo que el segundo término mostrado en la ecuación (A.11) es

$$\begin{aligned} & -\delta_{j_1 j_3} \delta_{k_1 k_3} \delta_{Y_1 Y_3} \delta_{T_1 T_3} \\ & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} (-1)^{\phi_{\mu_c''}} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c'')}{3}} \langle \Gamma_c' \mu_c', \bar{\Gamma}_c'' \bar{\mu}_c'' | \Gamma_c \mu_c \rangle_{\rho} U \left[ \Gamma_c' (10) \Gamma_c (01) ; (10) 1 1 \bar{\Gamma}_c'' 1 \rho \right] \right\} \\ & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_1+T_2+T''-T_z} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ -T_z'' & T_z' & -T_z \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{matrix} \right\} \right\} \\ & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1+j_2+L''-M'} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ -M'' & M' & -M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{matrix} \right\} \right\} \\ & \times \left[ \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^{\dagger} \mathbf{d}_{1_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

El tercer término de dicha ecuación (A.22) es

$$\begin{aligned} & -\delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \delta_{\bar{\mu}_2 \bar{\mu}_4} \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^{\dagger} \mathbf{b}^{1_1 \mu_1} \\ & = -\delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma' \mu' \rangle_1 (-1)^{\phi_{\mu_1}} \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^{\dagger} \mathbf{b}_{\bar{1}_1 \bar{\mu}_1} \\ & = -\delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_4} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} (-1)^{\phi_{\mu_1}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\ & \quad \times \left[ \mathbf{b}_{1_3}^{\dagger} \mathbf{b}_{\bar{1}_1} \right]_{\mu''}^{\Gamma''}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Por lo que esta vez, la parte  $SU(3)$  del término entre llaves es

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\dim(\Gamma'')}{3}} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle \Gamma'' \mu'', 1_1 \mu_1 | 1_3 \mu_3 \rangle_1 \\ & = \sqrt{\frac{\dim(\Gamma'')}{3}} \sum_{\rho} \langle \Gamma'' \mu'', \Gamma \mu | \Gamma' \mu' \rangle_{\rho} U \left[ \Gamma'' 1_1 \Gamma' \bar{1}_2 ; 1_3 1 1 \Gamma 1 \rho \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Por otro lado, la parte  $SU(2)$  del término entre llaves en la ecuación (A.22) resulta ser

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_1 - m_1} \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | LM \rangle_1 \langle j_3 m_3, j_2 - m_2 | L' M' \rangle_1 \langle j_3 m_3, j_1 - m_1 | L'' M'' \rangle_1 \\
 &= \sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_1 - m_1} (-1)^{j_1 - j_2 - M} (-1)^{j_3 - j_2 - M'} (-1)^{j_3 - j_1 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\
 & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & L' \\ m_3 & -m_2 & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & L'' \\ m_3 & -m_1 & -M'' \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_1 - m_1 - M - M' - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\
 & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & j_2 & j_3 \\ M' & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & L'' & j_3 \\ -m_1 & -M'' & m_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})
 \end{aligned}$$

En esta ocasión se utiliza que  $m_2 = m_1 - M$  y  $m_3 = M'' + m_1$  para simplificar la fase, obteniendo que la parte  $SU(2)$  es entonces

$$(-1)^{j_2 + j_3 - M'} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ M' & -M'' & -M \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{matrix} \right\}. \quad (\text{A.25})$$

De lo anterior se tiene entonces que el conmutador de 2 pares es

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma \right)^\dagger, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \delta_{1_1 1_3} \delta_{1_2 1_4} \delta_{\Gamma \Gamma'} \delta_{\mu \mu'} \\
 & \quad - \delta_{j_1 j_3} \delta_{k_1 k_3} \delta_{Y_1 Y_3} \delta_{T_1 T_3} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} (-1)^{\phi_{\mu_c''}} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c'')}{3}} \langle \Gamma_c' \mu_c', \bar{\Gamma}_c'' \bar{\mu}_c'' | \Gamma_c \mu_c \rangle_\rho U \left[ \Gamma_c' (10) \Gamma_c (01) ; (10) 1 1 \bar{\Gamma}_c'' 1 \rho \right] \right\} \\
 & \quad \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_1 + T_2 + T'' - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ -T_z'' & T_z' & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1 + j_2 + L'' - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ -M'' & M' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \mathbf{d}_{1_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \\
 & \quad - \delta_{j_2 j_4} \delta_{k_2 k_4} \delta_{Y_2 Y_4} \delta_{T_2 T_4} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c'')}{3}} \langle \Gamma_c'' \mu_c'', \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c' \mu_c' \rangle_\rho U \left[ \Gamma_c'' (10) \Gamma_c' (01) ; (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho \right] \right\} \\
 & \quad \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_2 + T_3 - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ T_z' & -T_z'' & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_2 + j_3 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ M' & -M'' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{1_1} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} .
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

La llamada *aproximación quasi-bosónica* mencionada en la Sección 3.2 consiste en suponer que el estado base correlacionado no difiere mucho del estado base de la base en que están descritos los pares [34], por lo que de (A.26) se infiere que

$$\begin{aligned}
 \langle RPA | \left[ \left( \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma \right)^\dagger, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] | RPA \rangle & \approx \langle 0 | \left[ \left( \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma \right)^\dagger, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] | 0 \rangle \\
 & = \delta_{1_1 1_3} \delta_{1_2 1_4} \delta_{\Gamma \Gamma'} \delta_{\mu \mu'} .
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Dicha expresión justifica entonces a la ecuación (3.23) .

Ya hemos calculado el conmutador de un par con su par conjugado. Ahora calcularemos explícitamente el conmutador de  $[db]$  con un par, pues es esta estructura la que aparece en el Hamiltoniano de interacción y no la del par conjugado. Para ello volvemos a calcular el

conmutador (A.10), esta vez partiendo de operadores con los índices abajo y dejando todo en términos del acoplamiento  $[dd^\dagger]$ .

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{d}_i \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger] &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i} + \phi_{\mu_j}} \left( \mathbf{d}^i \mathbf{b}^j \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \mathbf{d}^i \mathbf{b}^j \right) \\
 &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i} + \phi_{\mu_j}} \left( \mathbf{d}^i (\delta_{jk} - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^j) \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger (\delta_{il} - \mathbf{d}^i \mathbf{d}_l^\dagger) \mathbf{b}^j \right) \\
 &= (-1)^{\phi_{\mu_j}} \delta_{jk} \mathbf{d}_i \mathbf{d}_l^\dagger - (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i}} \delta_{il} \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_j, \tag{A.28}
 \end{aligned}$$

a partir de lo cual calculamos al siguiente conmutador de acoplamientos

$$\begin{aligned}
 &\left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \left[ \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}, \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \\
 &\quad \times \left( (-1)^{\phi_{\mu_2}} \delta_{1_2 1_3} \delta_{\mu_2 \mu_3} \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger - (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1}} \delta_{\bar{1}_1 \bar{1}_4} \delta_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_4} \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{b}_{1_2 \mu_2} \right). \tag{A.29}
 \end{aligned}$$

El primer término en (A.29) es

$$\begin{aligned}
 &\delta_{1_2 1_3} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} (-1)^{\phi_{\mu_2}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_2 \mu_2, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 &\quad \times \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''}, \tag{A.30}
 \end{aligned}$$

donde la parte  $SU(3)$  del término entre llaves es

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma)}{3}} \langle \Gamma \mu, 1_2 \mu_2 | 1_1 \mu_1 \rangle_1 \langle 1_2 \mu_2, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \\
 &= \sqrt{\frac{\dim(\Gamma)}{3}} \sum_\rho \langle \Gamma \mu, \Gamma' \mu' | \Gamma'' \mu'' \rangle_\rho U[\Gamma \ 1_2 \ \Gamma'' \ \bar{1}_4; \ 1_1 \ 1 \ 1 \ \Gamma' \ 1 \ \rho], \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

mientras que para la parte  $SU(2)$ , dicho término es

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | LM \rangle \langle j_2 m_2, j_4 - m_4 | L' M' \rangle \langle j_1 m_1, j_4 - m_4 | L'' M'' \rangle \\
 &= \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_2 - m_2} (-1)^{j_1 - j_2 - M} (-1)^{j_2 - j_4 - M'} (-1)^{j_1 - j_4 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\
 & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & L' \\ m_2 & -m_4 & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & L'' \\ m_1 & -m_4 & -M'' \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_2 - m_2 - M - M' - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\
 & \times \begin{pmatrix} L' & j_2 & j_4 \\ -M' & m_2 & -m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & L'' & j_4 \\ -m_1 & M'' & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{j_1 + j_4 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix}. \tag{A.32}
 \end{aligned}$$

Por otro, el segundo término en (A.29) es

$$\begin{aligned}
 & \delta_{1_1 1_4} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 & \times \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''}, \tag{A.33}
 \end{aligned}$$

cuya parte  $SU(3)$  es dada por

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma')}{3}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle \Gamma' \mu', 1_1 \mu_1 | 1_3 \mu_3 \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \\
 &= \sqrt{\frac{\dim(\Gamma')}{3}} \sum_{\rho} \langle \Gamma' \mu', \Gamma \mu | \Gamma'' \mu'' \rangle_{\rho} U [\Gamma' \ 1_1 \ \Gamma'' \ \bar{1}_2; \ 1_3 \ 1 \ 1 \ \Gamma \ 1 \ \rho], \tag{A.34}
 \end{aligned}$$

mientras que para la parte  $SU(2)$  se tiene

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_1+m_1} \langle j_1 m_1, j_2 - m_2 | LM \rangle \langle j_3 m_3, j_1 - m_1 | L' M' \rangle \langle j_3 m_3, j_2 - m_2 | L'' M'' \rangle \\
 &= \sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_1+m_1} (-1)^{j_1-j_2-M} (-1)^{j_3-j_1-M'} (-1)^{j_3-j_2-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\
 & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & L' \\ m_3 & -m_1 & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & L'' \\ m_3 & -m_2 & -M'' \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{m_1 m_2 m_4} (-1)^{j_1+m_1-M-M'-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \\
 & \times \begin{pmatrix} L'' & j_2 & j_3 \\ M'' & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & L' & j_3 \\ -m_1 & -M' & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & L \\ m_1 & -m_2 & -M \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{j_2-j_3-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ M'' & -M' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix}. \tag{A.35}
 \end{aligned}$$

Poniendo todo junto se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{11} \mathbf{b}_{\bar{1}2} \right]_{\mu}^{\Gamma}, \left[ \mathbf{b}_{13}^{\dagger} \mathbf{d}_{\bar{1}4}^{\dagger} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \delta_{j_2 j_3} \delta_{k_2 k_3} \delta_{Y_2 Y_3} \delta_{T_2 T_3} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c, \Gamma_c' \mu_c' | \Gamma_c'' \mu_c'' \rangle_{\rho} U [\Gamma_c (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c' 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_1+T_4-T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ -T_z' & T_z'' & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1+j_4-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{d}_{11} \mathbf{d}_{\bar{1}4}^{\dagger} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \\
 & \quad - \delta_{j_1 j_4} \delta_{k_1 k_4} \delta_{Y_1 Y_4} \delta_{T_1 T_4} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c')}{3}} \langle \Gamma_c' \mu_c', \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c'' \mu_c'' \rangle_{\rho} U [\Gamma_c' (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_2-T_3-T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T_z'' & -T_z' & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_2-j_3-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ M'' & -M' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{b}_{13}^{\dagger} \mathbf{b}_{\bar{1}2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''}. \tag{A.36}
 \end{aligned}$$

En adelante se prefiere calcular a los conmutadores de manera exacta en términos del acoplamiento  $[dd^\dagger]$ , ya que como habíamos mencionado antes, es esta estructura la que aparece en el Hamiltoniano de interacción.

## A.2. Conmutador de un generador con un par

### A.2.1. Generador de partículas con un par

Primero se calcula de forma general al siguiente conmutador

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger] &= [\mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k^\dagger] \mathbf{d}_l^\dagger + \mathbf{b}_k^\dagger [\mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j, \mathbf{d}_l^\dagger] = \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j \mathbf{d}_l^\dagger \\
 &= \mathbf{b}_i^\dagger \left( (-1)^{\phi_{\mu_j}} \delta_{jk} - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_j \right) \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j \mathbf{d}_l^\dagger \\
 &= (-1)^{\phi_{\mu_j}} \delta_{jk} \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger .
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

De lo anterior es posible observar que el conmutador de un generador con un par tiene un único término, por lo que ahora calculamos

$$\begin{aligned}
 & \left[ [\mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2}]_\mu^\Gamma, [\mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 [\mathbf{b}_{1_1 \mu_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}, \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger] \\
 &= \delta_{1_2 1_3} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_2 \mu_2, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 (-1)^{\phi_{\mu_2}} \mathbf{b}_{1_1 \mu_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \\
 &= \delta_{1_2 1_3} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} (-1)^{\phi_{\mu_2}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_2 \mu_2, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 & \quad \times [\mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger]_{\mu''}^{\Gamma''} .
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

Observamos que el término entre llaves es el mismo que aparece en la ecuación (A.30), por

lo que ya hemos calculado sus partes  $SU(2)$  y  $SU(3)$ , de modo que es inmediato calcular que

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{1_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \delta_{j_2 j_3} \delta_{k_2 k_3} \delta_{Y_2 Y_3} \delta_{T_2 T_3} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c, \Gamma_c' \mu_c' | \Gamma_c'' \mu_c'' \rangle_\rho U \left[ \Gamma_c (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c' 1 \rho \right] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_1 + T_4 - T_z''} \hat{T}' \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ -T_z' & T_z'' & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1 + j_4 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''}, \tag{A.39}
 \end{aligned}$$

es el conmutador de un generador de partículas con el operador de creación de un par.

### A.2.2. Generador de partículas con un par conjugado

A partir del siguiente conmutador

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j, \mathbf{d}_k \mathbf{b}_l \right] & = \mathbf{d}_k \left[ \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_l \right] + \left[ \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j, \mathbf{d}_k \right] \mathbf{b}_l = \mathbf{d}_k \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j \mathbf{b}_l - \mathbf{d}_k \mathbf{b}_l \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j \\
 & = \mathbf{d}_k \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j \mathbf{b}_l - \mathbf{d}_k \left( (-1)^{\phi_{\mu l}} \delta_{il} - \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_l \right) \mathbf{b}_j \\
 & = -(-1)^{\phi_{\mu l}} \delta_{il} \mathbf{d}_k \mathbf{b}_j. \tag{A.40}
 \end{aligned}$$

Por conveniencia reescribimos a la fase de la ecuación anterior como  $-(-1)^{\phi_{\mu l}} = (-1)^{\phi_{\bar{\mu} i}}$ , donde hemos abusado de que la delta de Kronecker sólo permite la contribución de los términos con  $i = l$ . Con esto calculamos

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{1_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{1_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \left[ \mathbf{b}_{1_1 \mu_1}^\dagger \mathbf{b}_{1_2 \bar{\mu}_2}, \mathbf{d}_{1_3 \mu_3} \mathbf{b}_{1_4 \bar{\mu}_4} \right] \\
 & = \delta_{1_1 1_4} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma' \mu' \rangle_1 (-1)^{\phi_{\bar{\mu} 1}} \mathbf{d}_{1_3 \mu_3} \mathbf{b}_{1_2 \bar{\mu}_2} \\
 & = \delta_{1_1 1_4} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} (-1)^{\phi_{\bar{\mu} 1}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 & \quad \times \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{1_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''}. \tag{A.41}
 \end{aligned}$$

Observamos que el término entre llaves es el mismo que aparece en la ecuación (A.33), por lo que una vez más es inmediato calcular que

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \delta_{j_1 j_4} \delta_{k_1 k_4} \delta_{Y_1 Y_4} \delta_{T_1 T_4} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c')}{3}} \langle \Gamma_c' \mu_c', \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c'' \mu_c'' \rangle_\rho U [\Gamma_c' (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_2 - T_3 - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T_z'' & -T_z' & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_2 - j_3 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ M'' & -M' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''}, \tag{A.42}
 \end{aligned}$$

es el conmutador de un generador de partículas con el conjugado de un par.

### Generador de antipartículas con un par

A partir del siguiente conmutador

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \right] & = \mathbf{b}_k^\dagger \left[ \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{d}_l^\dagger \right] + \left[ \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{b}_k^\dagger \right] \mathbf{d}_l^\dagger = \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger \\
 & = \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \left( (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i}} \delta_{il} - \mathbf{d}_i \mathbf{d}_l^\dagger \right) \mathbf{d}_j^\dagger \\
 & = -(-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i}} \delta_{il} \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_j^\dagger, \tag{A.43}
 \end{aligned}$$

se tiene que el conmutador de un generador de antipartículas con un par también tiene un único término, por lo que ahora calculamos

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \left[ \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^\dagger, \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \right] \\
 & = -\delta_{1_1 1_4} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma' \mu' \rangle_1 (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1}} \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^\dagger \\
 & = -\delta_{1_1 1_4} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 & \quad \times \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''}. \tag{A.44}
 \end{aligned}$$

De nuevo, el coeficiente entre llaves resulta idéntico al que aparece en la ecuación (A.33), por lo que podemos usar directamente el resultado obtenido para dicho término, con lo cual el conmutador de un generador de antipartículas con un par resulta

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = -\delta_{j_1 j_4} \delta_{k_1 k_4} \delta_{Y_1 Y_4} \delta_{T_1 T_4} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c \mu_c \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c', \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c \mu_c'' \rangle_\rho U \left[ \Gamma_c' (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho \right] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_2 - T_3 - T_z''} \hat{T}'' \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T_z'' & -T_z' & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_2 - j_3 - M''} \hat{L}'' \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ M'' & -M' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} .
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

### A.2.3. Generador de antipartículas con un par conjugado

A partir del siguiente conmutador

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{d}_k \mathbf{b}_l \right] & = \mathbf{d}_k \left[ \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{b}_l \right] + \left[ \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{d}_k \right] \mathbf{b}_l = \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{d}_k \mathbf{b}_l - \mathbf{d}_k \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{b}_l \\
 & = \mathbf{d}_i \left( (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_k}} \delta_{jk} - \mathbf{d}_k \mathbf{d}_j^\dagger \right) \mathbf{b}_l - \mathbf{d}_k \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{b}_l \\
 & = (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_k}} \delta_{jk} \mathbf{d}_i \mathbf{b}_l ,
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

y reescribiendo de nuevo por conveniencia  $(-1)^{\phi_{\bar{\mu}_k}} = -(-1)^{\phi_{\mu_j}}$ , calculamos al conmutador de un generador de antipartículas con un par conjugado como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{1_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \left[ \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \mathbf{d}_{1_2 \bar{\mu}_2}^\dagger, \mathbf{d}_{1_3 \mu_3} \mathbf{b}_{1_4 \bar{\mu}_4} \right] \\
 & = -\delta_{1_2 1_3} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} (-1)^{\phi_{\mu_2}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_2 \mu_2, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 & \quad \times \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{1_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} .
 \end{aligned} \tag{A.47}$$

Con la forma en que reescribimos a la fase ahora es fácil identificar al término entre llaves con aquél que aparece en la ecuación (A.30), por lo que el conmutador de un generador de antipartículas con un par conjugado resulta ser

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= -\delta_{j_2 j_3} \delta_{k_2 k_3} \delta_{Y_2 Y_3} \delta_{T_2 T_3} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c \mu_c \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c, \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c \mu_c \rangle_\rho U [\Gamma_c (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c' 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_1 + T_4 - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ -T_z' & T_z'' & -T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1 + j_4 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{pmatrix} \right\} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma''} .
 \end{aligned} \tag{A.48}$$

### A.3. Conmutador de dos generadores

#### A.3.1. Generadores de partículas

Primero se calcula de forma general al siguiente conmutador

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_l \right] &= (-1)^{\phi_{\mu_j} + \phi_{\mu_l}} \left( \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^l - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^l \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j \right) \\
 &= (-1)^{\phi_{\mu_j} + \phi_{\mu_l}} \left( \mathbf{b}_i^\dagger (\delta_{kj} - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^j) \mathbf{b}^l - \mathbf{b}_k^\dagger (\delta_{il} - \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^l) \mathbf{b}^j \right) \\
 &= (-1)^{\phi_{\mu_j}} \delta_{kj} \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^l - (-1)^{\phi_{\mu_l}} \delta_{il} \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^j .
 \end{aligned} \tag{A.49}$$

De este modo, el conmutador de 2 generadores de partículas es dado por

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \left[ \mathbf{b}_{1_1 \mu_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}, \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4} \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \\
 & \times \left( (-1)^{\phi_{\mu_2}} \delta_{1_2 1_3} \delta_{\mu_2 \mu_3} \mathbf{b}_{1_1 \mu_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4} - (-1)^{\phi_{\mu_1}} \delta_{\bar{1}_1 \bar{1}_4} \delta_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_4} \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2} \right) .
 \end{aligned} \tag{A.50}$$

Una vez más evaluamos término por término. El primer término es

$$\begin{aligned}
 & \delta_{1_2 1_3} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_2 \mu_2, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 (-1)^{\phi_{\mu_2}} \mathbf{b}_{1_1 \mu_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4} \\
 = & \delta_{1_2 1_3} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_4} (-1)^{\phi_{\mu_2}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_2 \mu_2, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 & \times \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} . \tag{A.51}
 \end{aligned}$$

Observamos que el término entre llaves es exactamente el mismo que se calculó previamente para simplificar la ecuación (A.30) y posteriormente reapareció en el conmutador de un generador con un par, por lo que la ecuación (A.51) se reescribe como

$$\begin{aligned}
 & \delta_{j_2 j_3} \delta_{k_2 k_3} \delta_{Y_2 Y_3} \delta_{T_2 T_3} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c \mu_c \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c, \Gamma_c' \mu_c' | \Gamma_c'' \mu_c'' \rangle_\rho U [\Gamma_c (10) \Gamma_c' (01); (10) 1 1 \Gamma_c'' 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T'''} (-1)^{T_1 + T_4 - T_z''} \hat{T}'' \hat{T}''' \hat{T}'''' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ -T'_z & T''_z & -T_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{Bmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1 + j_4 - M''} \hat{L}'' \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix} \right\} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} . \tag{A.52}
 \end{aligned}$$

El segundo término de la ecuación (A.50) está dado por

$$\begin{aligned}
 & -\delta_{1_1 1_4} \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma' \mu' \rangle_1 (-1)^{\phi_{\mu_1}} \mathbf{b}_{1_3 \mu_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2} \\
 = & -\delta_{1_1 1_4} \sum_{\Gamma'' \mu''} \left\{ \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} (-1)^{\phi_{\mu_1}} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_1 \bar{\mu}_1 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma'' \mu'' \rangle_1 \right\} \\
 & \times \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} , \tag{A.53}
 \end{aligned}$$

que resulta ser el mismo término que ya habíamos calculado para simplificar la ecuación (A.33) salvo por que la fase en esta ocasión no es barrada, pues proviene de bajar los índices de operadores de partículas. La fase barrada y la no barrada coinciden en su parte tanto de sabor como de color, por lo que la única diferencia es un factor de  $(-1)$  proveniente del cambio  $m \rightarrow -m$  de la parte  $SU(2)$ , que se cancela con el signo que precede a (A.53), por lo que

finalmente, el conmutador de 2 generadores de partículas es

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{1_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{1_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \\
 & \quad \delta_{j_2 j_3} \delta_{k_2 k_3} \delta_{Y_2 Y_3} \delta_{T_2 T_3} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c \mu_c \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c, \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c \mu_c \rangle_\rho U [\Gamma_c (10) \Gamma_c (01); (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_1 + T_4 - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ -T'_z & T''_z & -T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1 + j_4 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{pmatrix} \right\} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{1_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \\
 & \quad + \delta_{j_1 j_4} \delta_{k_1 k_4} \delta_{Y_1 Y_4} \delta_{T_1 T_4} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma'_c \mu'_c \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma'_c)}{3}} \langle \Gamma'_c \mu'_c, \Gamma'_c \mu'_c | \Gamma'_c \mu'_c \rangle_\rho U [\Gamma'_c (10) \Gamma'_c (01); (10) 1 1 \Gamma'_c 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_2 - T_3 - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T''_z & -T'_z & -T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_2 - j_3 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ M'' & -M' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \right\} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{1_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} .
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

### A.3.2. Generadores de antipartículas

En esta ocasión calculamos al conmutador de dos generadores de antipartículas. Se debe tener cuidado con la forma de subir y bajar índices dada por la ecuación (1.22), pues los operadores de antipartícula transforman con la fase barrada, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{d}_i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{d}_k \mathbf{d}_l^\dagger \right] &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i} + \phi_{\bar{\mu}_k}} \left( \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{d}^k \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{d}^k \mathbf{d}_l^\dagger \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger \right) \\
 &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i} + \phi_{\bar{\mu}_k}} \left( \mathbf{d}^i (\delta_{jk} - \mathbf{d}^k \mathbf{d}_j^\dagger) \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{d}^k (\delta_{il} - \mathbf{d}^i \mathbf{d}_l^\dagger) \mathbf{d}_j^\dagger \right) \\
 &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_k}} \delta_{jk} \mathbf{d}_i \mathbf{d}_l^\dagger - (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_i}} \delta_{il} \mathbf{d}_k \mathbf{d}_j^\dagger .
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

De este modo, el conmutador de 2 generadores de antipartículas es dado por

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \left[ \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^\dagger, \mathbf{d}_{1_3 \mu_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger \right] \\
 &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \langle 1_3 \mu_3, \bar{1}_4 \bar{\mu}_4 | \Gamma' \mu' \rangle_1 \\
 & \times \left( (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_2}} \delta_{\bar{1}_2 \bar{1}_3} \delta_{\bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3} \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4 \bar{\mu}_4}^\dagger - (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1}} \delta_{\bar{1}_1 \bar{1}_4} \delta_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_4} \mathbf{d}_{1_3 \mu_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^\dagger \right). \quad (\text{A.56})
 \end{aligned}$$

Observamos que la ecuación anterior tiene la misma forma que la ecuación (A.50) y difieren únicamente por las fases barradas (que introducen un factor global de -1) y cambiando  $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{d}^\dagger$ , de manera que es directo calcular que el conmutador de dos generadores de antipartículas es

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \\
 & -\delta_{j_2 j_3} \delta_{k_2 k_3} \delta_{Y_2 Y_3} \delta_{T_2 T_3} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c, \Gamma_c' \mu_c' | \Gamma_c'' \mu_c'' \rangle_\rho U [\Gamma_c (10) \Gamma_c' (01); (10) 1 1 \Gamma_c' 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_1 + T_4 - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ -T_z' & T_z'' & -T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_4 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_1 + j_4 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{pmatrix} \right\} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \\
 & -\delta_{j_1 j_4} \delta_{k_1 k_4} \delta_{Y_1 Y_4} \delta_{T_1 T_4} \\
 & \times \left\{ \sum_{\Gamma_c'' \mu_c'' \rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c')}{3}} \langle \Gamma_c' \mu_c', \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c'' \mu_c'' \rangle_\rho U [\Gamma_c' (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{T'' T_z''} (-1)^{T_2 - T_3 - T_z''} \hat{T} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T_z'' & -T_z' & -T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{L'' M''} (-1)^{j_2 - j_3 - M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ M'' & -M' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \right\} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''}. \quad (\text{A.57})
 \end{aligned}$$

## A.4. El Álgebra de la Interacción

Observamos que todos los conmutadores calculados a lo largo del presente Apéndice son funcionalmente iguales. Es por ello que bastará con introducir la siguiente notación para abreviar los resultados encontrados

$$\begin{aligned}
 & A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) = \\
 & \left\{ \sum_{\rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma_c)}{3}} \langle \Gamma_c \mu_c, \Gamma_c \mu'_c | \Gamma_c \mu''_c \rangle_{\rho} U [\Gamma_c (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ (-1)^{T_1+T_3-T_z''} \hat{L} \hat{T}' \hat{T}'' \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ -T'_z & T''_z & -T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T' & T'' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ (-1)^{j_1+j_3-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ -M' & M'' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L'' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \right\}, \tag{A.58}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) = \\
 & \times \left\{ \sum_{\rho} \sqrt{\frac{\dim(\Gamma'_c)}{3}} \langle \Gamma'_c \mu'_c, \Gamma_c \mu_c | \Gamma_c \mu''_c \rangle_{\rho} U [\Gamma'_c (10) \Gamma_c'' (01); (10) 1 1 \Gamma_c 1 \rho] \right\} \\
 & \times \left\{ (-1)^{T_2-T_3-T_z''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T''_z & -T'_z & -T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'' & T' & T \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \times \left\{ (-1)^{j_2-j_3-M''} \hat{L} \hat{L}' \hat{L}'' \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ M'' & -M' & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'' & L' & L \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \right\}. \tag{A.59}
 \end{aligned}$$

Con ello es posible enlistar el álgebra de los operadores de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} + B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right) \\
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( -A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} - B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right) \\
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} - B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right) \\
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \sum_{\Gamma'' \mu''} A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \\
 & \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \sum_{\Gamma'' \mu''} B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \\
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = - \sum_{\Gamma'' \mu''} B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \\
 & \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = - \sum_{\Gamma'' \mu''} A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''}. \quad (\text{A.60})
 \end{aligned}$$

En la ecuación (A.60) se ha vuelto a condensar la notación para incluir tanto las partes  $SU(3)$  de sabor y color como la parte  $SU(2)$  de espín.

Para aplicar el método RPA debemos calcular los elementos de matriz  $\langle \tilde{0} | \gamma^{b'a'} [H, \gamma_{ab}^\dagger] | \tilde{0} \rangle$  y  $\langle \tilde{0} | [H, \gamma_{ab}^\dagger] \gamma_{a'b'}^\dagger | \tilde{0} \rangle$  por lo que es conveniente calcular a partir de (A.60) a los conmutadores de los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con un par  $\gamma^\dagger$  y su conjugado, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] - \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} + B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right), \quad (\text{A.61})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] - \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 &= \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} + B_{\mu\mu'\mu''}^{\Gamma\Gamma'\Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right), \quad (\text{A.62})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] + \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu \mu' \mu''}^{\Gamma \Gamma' \Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} - B_{\mu \mu' \mu''}^{\Gamma \Gamma' \Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right), \quad (\text{A.63})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] + \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( -A_{\mu' \mu \mu''}^{\Gamma' \Gamma \Gamma''} (1_3 1_4 1_2) \delta_{1_4 1_1} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} + B_{\mu' \mu \mu''}^{\Gamma' \Gamma \Gamma''} (1_3 1_4 1_1) \delta_{1_3 1_2} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right). \quad (\text{A.64})
 \end{aligned}$$

Finalmente, para aplicar otros métodos de muchos cuerpos más allá de la RPA podría resultar útil calcular los conmutadores de los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con los generadores de partículas y antipartículas

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] - \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu \mu' \mu''}^{\Gamma \Gamma' \Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} + B_{\mu \mu' \mu''}^{\Gamma \Gamma' \Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right), \quad (\text{A.65})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] - \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu \mu' \mu''}^{\Gamma \Gamma' \Gamma''} (1_1 1_2 1_4) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} + B_{\mu \mu' \mu''}^{\Gamma \Gamma' \Gamma''} (1_1 1_2 1_3) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right), \quad (\text{A.66})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] + \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( -A_{\mu' \mu \mu''}^{\Gamma' \Gamma \Gamma''} (1_3 1_4 1_2) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} - B_{\mu' \mu \mu''}^{\Gamma' \Gamma \Gamma''} (1_3 1_4 1_1) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right), \quad (\text{A.67})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu}^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] = \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] + \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_\mu^\Gamma, \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu'}^{\Gamma'} \right] \\
 & = \sum_{\Gamma'' \mu''} \left( A_{\mu' \mu \mu''}^{\Gamma' \Gamma \Gamma''} (1_3 1_4 1_2) \delta_{1_1 1_4} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu''}^{\Gamma''} + B_{\mu' \mu \mu''}^{\Gamma' \Gamma \Gamma''} (1_3 1_4 1_1) \delta_{1_2 1_3} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\mu''}^{\Gamma''} \right). \quad (\text{A.68})
 \end{aligned}$$

# Apéndice B

## Matrices de adelanto y retraso

Como se mencionó en el Capítulo 3, en el presente modelo se ha hecho la elección de utilizar los métodos de muchos cuerpos TDA y RPA para encontrar al espectro de energía de los estados mesónicos correspondiente al Hamiltoniano efectivo de la ecuación (2.22), en donde la interacción era originalmente proporcional a la siguiente combinación de operadores

$$\mathbf{H}_{coul} \propto \left( [\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0 + [\mathcal{A}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0 + [\mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0 + [\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0 \right). \quad (\text{B.1})$$

A lo largo del presente apéndice se calculará a las matrices de adelanto y retraso necesarias para aplicar los antes mencionados métodos de TDA y RPA. Se demostrará además por qué las interacciones del tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$  y  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$  no contribuyen al espectro a este nivel de aproximación.

### B.1. Valor esperado de $\gamma^{b'a'}[H, \gamma_{ab}^\dagger]$

Tanto en el método TDA presentado en la Sección 3.1, como para el método RPA de la Sección 3.2, se define a la llamada *matriz de adelanto* como el valor de expectación sobre el vacío del operador  $[\gamma^{b'a'}, [H, \gamma_{ab}^\dagger]]$ . Es por eso que a lo largo de la Sección B.1 calculamos equivalentemente el valor de expectación  $\langle 0 | \gamma^{b'a'} [H, \gamma_{ab}^\dagger] | 0 \rangle$ .

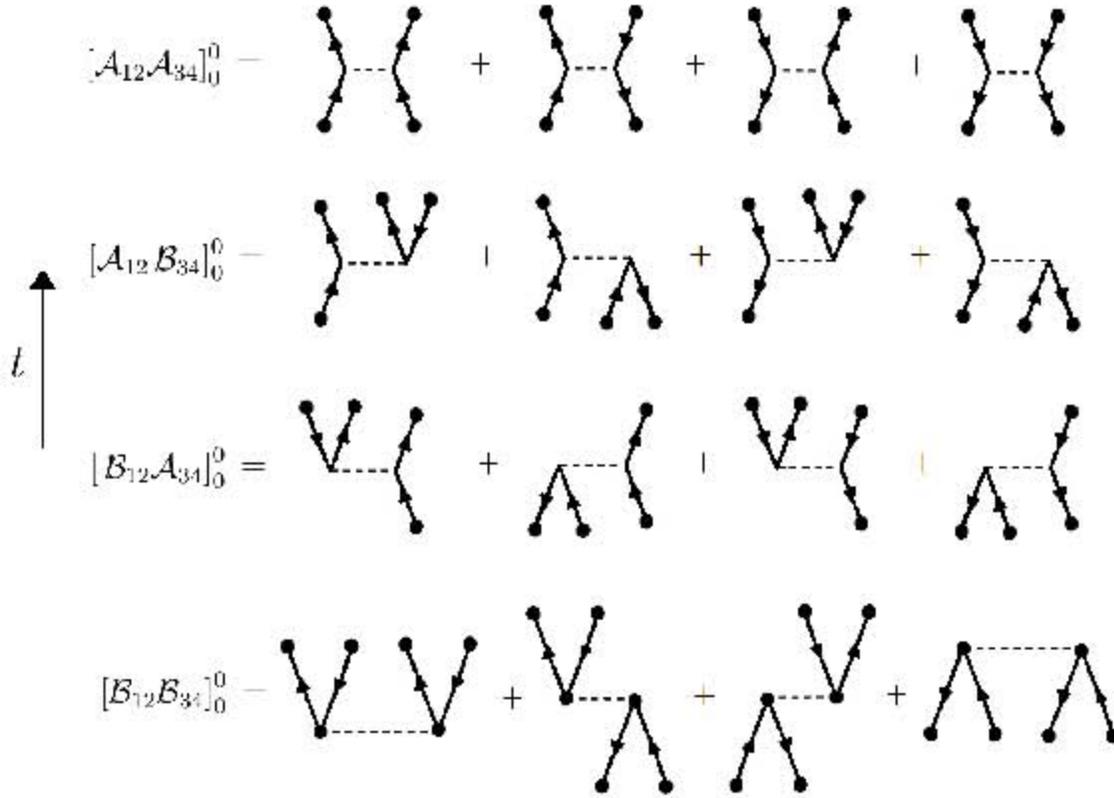


Figura B.1: Diferentes tipos de diagrama involucrados en el Hamiltoniano efectivo de interacción de la ecuación (2.22). Sólo los diagramas de dispersión  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$  y de creación y aniquilación de pares  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$  contribuyen a nivel TDA y RPA.

Por conveniencia calculamos primero la parte correspondiente al Hamiltoniano de propagación libre en la Subsección B.1.1, para posteriormente calcular la contribución del Hamiltoniano de interacción en la Subsección B.1.2.

### B.1.1. Valor esperado de $\gamma^{b'a'} [K, \gamma_{ab}^\dagger]$

Buscamos calcular el valor de expectación  $\langle 0 | \gamma_{\mu'}^{b'a'; \Gamma'} [K, \gamma_{ab; \Gamma\mu}^\dagger] | 0 \rangle$  donde  $K$  es el Hamiltoniano cinético dado por la ecuación (2.12), es decir,

$$\langle 0 | \gamma_{\mu'}^{a'b'; \Gamma'} [K, \gamma_{ab; \mu}^\dagger] | 0 \rangle = \sum_{kj} \epsilon_{kjYT} \langle 0 | \gamma_{\mu'}^{a'b'; \Gamma'} [\mathbf{b}_{kj}^\dagger \mathbf{b}^{kj} - \mathbf{d}_{kj} \mathbf{d}^{\dagger kj}, \gamma_{ab; \Gamma\mu}^\dagger] | 0 \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Utilizando la definición del par  $\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger$  dado por la ecuación (3.2) se obtienen dos conmutadores de la forma

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j, \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \right] &= \left[ \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j, \mathbf{b}_k^\dagger \right] \mathbf{d}_l^\dagger + \mathbf{b}_k^\dagger \left[ \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j, \mathbf{d}_l^\dagger \right] = \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j \mathbf{d}_l^\dagger \\
 &= \mathbf{b}_i^\dagger \left( \delta_{jk} - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}^j \right) \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{b}^j \mathbf{d}_l^\dagger \\
 &= \delta_{jk} \mathbf{b}_i^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \\
 \left[ \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \right] &= \mathbf{b}_k^\dagger \left[ \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{d}_l^\dagger \right] + \left[ \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger, \mathbf{b}_k^\dagger \right] \mathbf{d}_l^\dagger = \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger \\
 &= \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}^i \mathbf{d}_j^\dagger \mathbf{d}_l^\dagger - \mathbf{b}_k^\dagger \left( \delta_{il} - \mathbf{d}^i \mathbf{d}_l^\dagger \right) \mathbf{d}_j^\dagger \\
 &= -\delta_{il} \mathbf{b}_k^\dagger \mathbf{d}_j^\dagger .
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Utilizando las reglas de ortogonalidad entre los coeficientes CG involucrados en los acoplamientos que definen a los pares, es directo calcular que la contribución del Hamiltoniano de propagación libre a la matriz adelanto resulta ser

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{K}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \sum_{kj} \epsilon_{kjYT} \delta_{k_a'k_a} \delta_{k_b'k_b} \delta_{j_a'j_a} \delta_{j_b'j_b} \delta_{Y_a'Y_a} \delta_{Y_b'Y_b} \delta_{T_a'T_a} \delta_{T_b'T_b} \delta_{L'L} \delta_{M'M} \\
 &\quad \times (\delta_{k_a k} \delta_{j_a j} \delta_{Y_a Y} \delta_{T_a T} + \delta_{k_b k} \delta_{j_b j} \delta_{Y_b Y} \delta_{T_b T}) .
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

### B.1.2. Valor esperado de $\gamma^{b'a'}[V, \gamma_{ab}^\dagger]$

Como ya mencionamos con anterioridad, el potencial se separa en cuatro tipos de interacción, por lo cual el valor esperado  $\gamma^{b'a'}[V, \gamma_{ab}^\dagger]$  tiene cuatro términos que analizamos a continuación.

Sin embargo, resultará conveniente observar primero que algunos términos se eliminan tras considerar que los generadores de la interacción están en la representación de color  $\Gamma_c = (11)$ ,

pues ello hace posible relacionar a los acoplamientos  $[\mathbf{d}\mathbf{d}^\dagger]$  y  $[\mathbf{d}^\dagger\mathbf{d}]$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_\mu^\Gamma &= \sum_{\mu_1 \mu_2} \langle 1_1 \mu_1, \bar{1}_2 \bar{\mu}_2 | \Gamma \mu \rangle_1 \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^\dagger \\
 &= \sum_{m_1 m_2 c_1 c_2 f_1 f_2} \langle (01) \bar{f}_2, (10) f_1 | (\lambda_f \lambda_f) F \rangle_1 \langle (01) \bar{c}_2, (10) c_1 | (11) C \rangle_1 \\
 &\quad \times (-1)^{j_1 + j_2 - L} \langle j_2 - m_2, j_1 m_1 | LM \rangle (-1) \mathbf{d}_{\bar{1}_2 \bar{\mu}_2}^\dagger \mathbf{d}_{1_1 \mu_1} \\
 &= (-1)^{\phi_{12\Gamma} + 1} \left[ \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \mathbf{d}_{1_1} \right]_\mu^\Gamma, \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

donde la posible delta del anticonmutador se elimina por las reglas de ortogonalidad de los CG en dicho subespacio SU(3) de color, donde  $\delta_{1_1 \bar{1}_2} \propto \langle (10) c_1, (01) \bar{c}_2 | (00) 0 \rangle_1$  implica que  $\sum \langle (10) c_1, (01) \bar{c}_2 | (11) C \rangle_1 \delta_{1_1 \bar{1}_2} \propto \delta_{(00)(11)} = 0$ . De este modo, en el caso de generadores con (11) de color y usando la definición del operador  $\mathcal{A}$  de la ecuación (2.21) se tiene que

$$\mathcal{A}|0\rangle = 0 \quad , \quad \langle 0|\mathcal{A} = 0. \tag{B.6}$$

- ) Interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{34}]_0^0$

El conmutador a calcular está dado por

$$\begin{aligned}
 \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ [\mathcal{A}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{A}_{34}^{\Gamma_0}]_0^0, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \right\rangle &= \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \mathcal{A}_{12; \mu_0}^{\Gamma_0} \mathcal{A}_{34; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left( \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathcal{A}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] + \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \mathcal{A}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0} \right) \right\rangle. \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

Observamos que el segundo sumando de la ecuación (B.7) se elimina de acuerdo a la ecuación (B.6) al hacer actuar a  $\mathcal{A}$  directamente sobre el vacío, por lo que la interacción se divide en cuatro términos, correspondientes a los cuatro diagramas de dispersión de la Figura B.1:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \left[ \mathcal{A}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{A}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \lambda_1 \pi_1 k_1}^{j_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \lambda_2 \pi_2 k_2}^{j_2} \right) \left( \alpha_{\tau(N_3 l_3) \lambda_3 \pi_3 k_3}^{j_3} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_4 l_4) \lambda_4 \pi_4 k_4}^{j_4} \right) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_3 \lambda_4} \\
 & \times \left\{ \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right\rangle - \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right\rangle \right. \\
 & \left. - \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right\rangle + \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right\rangle \right\}. \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

•) Interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12} \mathcal{B}_{34}]_0^0$

Como ya se ha mencionado con anterioridad, la interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12} \mathcal{B}_{34}]_0^0$  no contribuye (en particular) a nivel TDA, por lo cual no será necesario calcular explícitamente su aportación a la matriz adelanto, sino que bastará con argumentar el porqué esta se anula.

Comencemos por notar que el valor esperado del conmutador en cuestión es de la forma

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \left[ \mathcal{A}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 \sim & \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathcal{B}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] + \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \mathcal{B}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0} \right\rangle. \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

De acuerdo a la ecuación (B.6), el primer sumando de la ecuación anterior puede ser reescrito de la forma

$$\left\langle \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \right] \left[ \mathcal{B}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle, \tag{B.10}$$

donde la ecuación (A.62) dice que  $[\mathcal{A}, \gamma] \sim \gamma$  mientras que la ecuación (A.63) indica que  $[\mathcal{B}, \gamma^\dagger] \sim [b^\dagger b] + [d d^\dagger]$ , de modo que

$$\left\langle \left[ \mathcal{A}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \right] \left[ \mathcal{B}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \sim \langle \gamma([b^\dagger b] + [d d^\dagger]) \rangle = 0, \tag{B.11}$$

pues el exceso de operadores de creación anula al valor esperado respecto al vacío.

Para mostrar que el segundo sumando de la ecuación (B.9) también se anula, bastará con hacer la observación de que  $\mathcal{B}|0\rangle = \gamma^\dagger|0\rangle$ . Además, de acuerdo a la ecuación (A.61) se tiene que

el conmutador de un generador con el operador de creación de un par, resultará proporcional a un nuevo par, *i.e.*,  $[\mathcal{A}, \gamma^\dagger] \sim \gamma^\dagger$ , de modo que dicho término es de la forma  $\langle \gamma^\dagger \gamma^\dagger \rangle$ , el cual tiene un exceso de operadores de creación de un par, por lo que finalmente

$$\langle 0 | \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \left[ \mathcal{A}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0 \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] | 0 \rangle = 0 . \quad (\text{B.12})$$

•) Interacción tipo  $[\mathcal{B}_{12} \mathcal{A}_{34}]_0^0$

A pesar de que la interacción  $[\mathcal{B}_{12} \mathcal{A}_{34}]_0^0$  es la adjunta del operador  $[\mathcal{A}_{12} \mathcal{B}_{34}]_0^0$ , es posible mostrar explícitamente que su contribución a la matriz adelanto también resulta nula. Para ello observamos que

$$\begin{aligned} & \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \left[ \mathcal{B}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{A}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ & \sim \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathcal{A}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] + \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \mathcal{A}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0} \right\rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Una vez más el segundo sumando se elimina al hacer actuar a  $\mathcal{A}$  directamente sobre el vacío, mientras que, por ser  $\mathcal{B}$  de la forma  $\mathcal{B} \sim (\gamma^\dagger + \gamma)$ ; el primer término en (B.13) es de la forma  $\langle \gamma(\gamma^\dagger + \gamma)\gamma^\dagger \rangle$ , por lo que presenta un exceso de operadores de creación o de aniquilación respectivamente. Luego,

$$\langle 0 | \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \left[ \mathcal{B}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{A}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] | 0 \rangle = 0 . \quad (\text{B.14})$$

•) Interacción tipo  $[\mathcal{B}_{12} \mathcal{B}_{34}]_0^0$

En este caso, el conmutador a calcular es

$$\begin{aligned} & \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \left[ \mathcal{B}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \right\rangle = \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \mathcal{B}_{12; \mu_0}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ & = \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left( \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathcal{B}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] + \left[ \mathcal{B}_{1_1 \bar{1}_2; \mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \mathcal{B}_{1_3 \bar{1}_4; \bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0} \right) \right\rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Como ya se mencionó antes, se tiene esquemáticamente que  $\mathcal{B} \sim (\gamma^\dagger + \gamma)$ , por lo que la primera simplificación posible a la ecuación (B.15) se obtiene notando que el término de creación de un par dentro de la definición de  $\mathcal{B}$  conmuta con el operador externo de creación

de un par. A partir de lo anterior y usando la definición de la ecuación (2.21) se tiene que esta interacción también se divide en cuatro términos, correspondientes a los cuatro diagramas de creación y aniquilación de pares en la Figura B.1:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \left[ \mathcal{B}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \lambda_1 \pi_1 k_1}^{j_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \lambda_2 \pi_2 k_2}^{j_2} \right) \left( \alpha_{\tau(N_3 l_3) \lambda_3 \pi_3 k_3}^{j_3} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_4 l_4) \lambda_4 \pi_4 k_4}^{j_4} \right) \\
 & \times \left\{ \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle - \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \right. \\
 & \left. - \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0} \right\rangle + \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0} \right\rangle \right\}. \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

En la ecuación anterior resulta más evidente que el primer y último sumando no contribuyen a la matriz adelante pues de (A.60) se tiene que  $[\gamma, \gamma^\dagger] \sim [b^\dagger b] + [d d^\dagger]$  por lo que dichos términos tendrán un exceso de operadores de aniquilación

En adelante calcularemos los valores esperados no nulos involucrados en las ecuaciones (B.8) y (B.16). Para ello utilizaremos la notación condensada de la ecuación (3.3) para manipular al mismo tiempo a los subespacios de color, sabor y espín en tanto que sea posible, para posteriormente hacer las reducciones necesarias subespacio por subespacio.

El primer sumando de la ecuación (B.8) es de la forma

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 3, \bar{4} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \\
 & \quad \times \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \left[ \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle, \tag{B.17}
 \end{aligned}$$

donde

$$\langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \left[ \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle = (-1)^{\phi_{\mu_4}} \delta_a^4 \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger | 0 \rangle = (-1)^{\phi_{\mu_2} + \phi_{\mu_4}} \delta_1^{a'} \delta_3^2 \delta_a^4 \delta_b^{b'} \tag{B.18}$$

por lo cual es posible reescribir a los coeficientes CG en acuerdo a las deltas de la siguiente

manera:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{\bar{1}_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{b}_{\bar{1}_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ &= \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu_2} + \phi_{\mu_4}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b} | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle a', \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 2, \bar{a} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^{a'} \delta_3^2 \delta_a^4 \delta_b^{b'}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Observamos que el coeficiente  $\langle 2, \bar{a} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle$  implica que podemos utilizar la definición de la fase dada en (3.4) para reescribir  $(-1)^{\phi_{\mu_2} + \phi_{\mu_4}} = -(-1)^{\phi_{\mu_2} + \phi_{\bar{\mu}_a}} = -(-1)^{\phi_{\bar{\mu}_0} + \phi_{2a\Gamma_0}}$  tal que  $(-1)^{\phi_{\bar{\mu}_0} + \phi_{\mu_0}} = 1$ .

Además, para manipular a los coeficientes C-G utilizamos la propiedades de la ecuación (A.2), con lo cual

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{\bar{1}_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{b}_{\bar{1}_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ &= -\frac{(-1)^{\phi_{2a\Gamma_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} \langle a', \bar{b} | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \frac{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}}{\sqrt{\dim(a)}} (-1)^{\phi_{\mu_2} + \phi_{\Gamma_0 2a}} \langle \Gamma_0, 2 | a \rangle \\ & \quad \times \frac{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}}{\sqrt{\dim(a')}} (-1)^{\phi_{\mu_2} + \phi_{\Gamma_0 2a'}} \langle \Gamma_0, 2 | a \rangle \delta_1^{a'} \delta_3^2 \delta_a^4 \delta_b^{b'} \\ &= -\frac{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}}{\dim(a)} (-1)^{\phi_{2a\Gamma_0}} \delta_1^{a'} \delta_3^2 \delta_a^4 \delta_a^{a'} \delta_b^{b'} \sum_{\mu_a \mu_b} \langle a, \bar{b} | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \\ &= -\frac{\sqrt{2L_0+1}}{2j_a+1} \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{3} (-1)^{j_1+j_2-L_0} \delta_{j_1}^{j_4} \delta_{j_3}^{j_2} \delta_{j_a}^{j_{a'}} \delta_{j_b}^{j_{b'}} \delta_{j_1}^{j_a} \delta_{k_1}^{k_4} \delta_{k_3}^{k_2} \delta_{k_b}^{k_{b'}} \delta_{k_1}^{k_a} \\ & \quad \times \delta_{\pi_1}^{\pi_4} \delta_{\pi_3}^{\pi_2} \delta_{\pi_b}^{\pi_{b'}} \delta_{\pi_1}^{\pi_a} \delta_{T_1}^{T_4} \delta_{T_3}^{T_2} \delta_{T_a}^{T_{a'}} \delta_{T_b}^{T_{b'}} \delta_{T_1}^{T_a} \delta_{Y_1}^{Y_4} \delta_{Y_3}^{Y_2} \delta_{Y_b}^{Y_{b'}} \delta_{Y_1}^{Y_a} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

El segundo sumando de la ecuación (B.8) es de la forma

$$\begin{aligned} & -\sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{\bar{1}_1}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{\bar{1}_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ &= -\sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 3, \bar{4} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \\ & \quad \times \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \left[ \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_4^\dagger, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

donde podemos utilizar a la propiedad de la ecuación (B.5) para reescribir

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \left[ \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_4^\dagger, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle = -\langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \left[ \mathbf{d}_4^\dagger \mathbf{d}_3, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle \\ &= -(-1)^{\phi_{\bar{\mu}_b}} \delta_b^3 \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_4^\dagger | 0 \rangle = -(-1)^{\phi_{\mu_a} + \phi_{\bar{\mu}_b}} \delta_1^{a'} \delta_a^2 \delta_b^3 \delta_4^{b'}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

donde el CG  $\langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle$  nos permite reescribir a la fase  $(-1)^{\phi_{\mu_a} + \phi_{\bar{\mu}_b}} = (-1)^{\phi_{ab\Gamma} + \phi_\mu}$ .

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{1_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \frac{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu'_s} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_\mu} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle a', \bar{a} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b, \bar{b}' | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^{a'} \delta_a^2 \delta_b^3 \delta_4^{b'}. \quad (\text{B.23})
 \end{aligned}$$

En esta ocasión será necesario simplificar explícitamente a la ecuación anterior un subespacio a la vez. Para la parte  $SU(2)$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu'_s} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_\mu} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle a', \bar{a} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b, \bar{b}' | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^{a'} \delta_a^2 \delta_b^3 \delta_4^{b'} \Big|_{SU(2)} \\
 &= \frac{(-1)^{j_a + j_b - L}}{\sqrt{2L_0 + 1}} \sum_{m'_s} \hat{L}' \hat{L} (\hat{L}_0)^2 \delta_{j_1}^{j_{a'}} \delta_{j_a}^{j_2} \delta_{j_b}^{j_3} \delta_{j_4}^{j_{b'}} \\
 & \times (-1)^{j_{a'} - j_{b'} - M'} (-1)^{j_a - j_b - M_0} (-1)^{j_{a'} - j_a - M_0} (-1)^{j_b - j_{b'} - M_0} (-1)^{L - M} (-1)^{L_0 - M_0} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_{a'} & j_{b'} & L' \\ m_{a'} & -m_{b'} & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & L \\ m_a & -m_b & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{a'} & j_a & L_0 \\ m_{a'} & -m_a & -M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & j_{b'} & L_0 \\ m_b & -m_{b'} & M_0 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{j_a + j_b - L} \hat{L}' \hat{L} \hat{L}_0 \sum_{m'_s} \sum_{L''} (\hat{L}'')^2 \delta_{j_1}^{j_{a'}} \delta_{j_a}^{j_2} \delta_{j_b}^{j_3} \delta_{j_4}^{j_{b'}} \\
 & \times (-1)^{j_{a'} + j_a - L_0 + j_{b'} + j_b + L'' - m_{a'} - m_b - M' - M} (-1)^{L - M} (-1)^{L_0 - M_0} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_{a'} & j_{b'} & L' \\ m_{a'} & -m_{b'} & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & L \\ m_a & -m_b & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{b'} & j_{a'} & L'' \\ -m_{b'} & m_{a'} & -M'' \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_a & j_b & L'' \\ -m_a & m_{b'} & M'' \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_{a'} & j_a & L_0 \\ j_b & j_{b'} & L'' \end{matrix} \right\} \\
 &= \hat{L}' \hat{L} \hat{L}_0 \sum_{m'_s} \sum_{L''} (\hat{L}'')^2 (-1)^{j_a + j_b - L''} (-1)^{M' - M} \delta_{j_1}^{j_{a'}} \delta_{j_a}^{j_2} \delta_{j_b}^{j_3} \delta_{j_4}^{j_{b'}} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_{a'} & j_{b'} & L' \\ m_{a'} & -m_{b'} & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{a'} & j_{b'} & L'' \\ m_{a'} & -m_{b'} & -M'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & L \\ m_a & -m_b & -M \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_a & j_b & L'' \\ m_a & -m_{b'} & -M'' \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_{a'} & j_a & L_0 \\ j_b & j_{b'} & L'' \end{matrix} \right\} \\
 &= (-1)^{j_a + j_b - L} \hat{L}_0 \left\{ \begin{matrix} j_{a'} & j_a & L_0 \\ j_b & j_{b'} & L \end{matrix} \right\} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_{j_1}^{j_{a'}} \delta_{j_a}^{j_2} \delta_{j_b}^{j_3} \delta_{j_4}^{j_{b'}}. \quad (\text{B.24})
 \end{aligned}$$

Por lo que usando la identidad

$$\begin{Bmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{b+d+e}}{\hat{b}\hat{e}} \delta_{bc} \delta_{ef} , \quad (\text{B.25})$$

es inmediato obtener que para la parte  $SU(2)$  de sabor

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{\phi_{ab}\Gamma}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle a', \bar{a} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b, \bar{b}' | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^{a'} \delta_a^2 \delta_b^3 \delta_4^{b'} \delta_a^{a'} \delta_b^{b'} \Big|_{SU_f(2)} \\ &= (-1)^{T_a + T_b - T} \begin{Bmatrix} T_{a'} & T_a & 0 \\ T_b & T_{b'} & T \end{Bmatrix} \delta_{T'}^{T'} \delta_{T_z'}^{T_z'} \delta_{T_1}^{T_{a'}} \delta_{T_a}^{T_2} \delta_{T_b}^{T_3} \delta_{T_4}^{T_{b'}} \\ &= \frac{1}{3} \delta_{T'}^{T'} \delta_{T_z'}^{T_z'} \delta_{T_1}^{T_{a'}} \delta_{T_a}^{T_2} \delta_{T_b}^{T_3} \delta_{T_4}^{T_{b'}} \delta_{T_a}^{T_{a'}} \delta_{T_b}^{T_{b'}} . \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Para la parte  $SU(3)$  de color recordamos que  $\Gamma_0 = (11)$  y  $\Gamma = \Gamma' = (00)$ , por lo que

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{\phi_{ab}\Gamma}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle a', \bar{a} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b, \bar{b}' | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^{a'} \delta_a^2 \delta_b^3 \delta_4^{b'} \Big|_{SU(3)} \\ &= \sum_{c's} \frac{(-1)^{\phi_C}}{\sqrt{8}} \langle (10)c_{a'}, (01)\bar{c}_{b'} | (00)0 \rangle \langle (10)c_a, (01)\bar{c}_b | (00)0 \rangle \\ & \quad \times \langle (10)c_{a'}, (01)\bar{c}_a | (11)C \rangle \langle (10)c_b, (01)\bar{c}_{b'} | (11)\bar{C} \rangle \\ &= \sum_{c's} \frac{(-1)^{\chi_C}}{\sqrt{8}} \frac{(-1)^{\chi_{c_{a'}}}}{\sqrt{3}} \delta_{c_{a'} c_{b'}} \frac{(-1)^{\chi_{c_a}}}{\sqrt{3}} \delta_{c_a c_b} \langle (10)c_{a'}, (01)\bar{c}_a | (11)C \rangle \langle (10)c_b, (01)\bar{c}_{b'} | (11)\bar{C} \rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{c_{a'} c_a C} \frac{1}{\sqrt{8}} \langle (10)c_{a'}, (01)\bar{c}_a | (11)C \rangle \langle (10)c_a, (01)\bar{c}_{a'} | (11)\bar{C} \rangle = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_C \delta_{CC} \\ &= \frac{\sqrt{8}}{3} . \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Como  $1_1 = \dots = 1_4 = 1_a = 1_b = (10)$  entonces todas las deltas sobre  $SU(3)$  se han eliminado en la expresión anterior por ser redundantes.

Juntando a las ecuaciones (B.24), (B.26) y (B.27) en la ecuación (B.23) y reacomodando las deltas se tiene que

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{b}_{1_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ &= \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{3} \hat{L}_0 (-1)^{j_a + j_b - L} \begin{Bmatrix} j_{a'} & j_a & L_0 \\ j_b & j_{b'} & L \end{Bmatrix} \delta_{j_1}^{j_{a'}} \delta_{j_a}^{j_2} \delta_{j_b}^{j_3} \delta_{j_4}^{j_{b'}} \delta_{k_1}^{k_{a'}} \delta_{k_a}^{k_2} \delta_{k_b}^{k_3} \delta_{k_4}^{k_{b'}} \\ & \quad \times \delta_{\pi_1}^{\pi_{a'}} \delta_{\pi_a}^{\pi_2} \delta_{\pi_b}^{\pi_3} \delta_{\pi_4}^{\pi_{b'}} \delta_{T_1}^{T_2} \delta_{T_3}^{T_4} \delta_{T_a}^{T_1} \delta_{T_b}^{T_3} \delta_{T_a}^{T_{a'}} \delta_{T_b}^{T_{b'}} \delta_{Y_1}^{Y_{a'}} \delta_{Y_a}^{Y_2} \delta_{Y_b}^{Y_3} \delta_{Y_4}^{Y_{b'}} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'} . \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

El tercer sumando de la ecuación (B.8) es

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 3, \bar{4} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \\
 & \quad \times \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2^\dagger \left[ \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle, \tag{B.29}
 \end{aligned}$$

donde

$$\langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2^\dagger \left[ \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle = -(-1)^{\phi_{\mu_4}} \delta_a^4 \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{d}_2^\dagger \mathbf{d}_1 \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger | 0 \rangle = -(-1)^{\phi_{\mu_1} + \phi_{\mu_4}} \delta_b^1 \delta_2^{b'} \delta_3^{a'} \delta_a^4. \tag{B.30}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \frac{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle b, \bar{b}' | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle a', \bar{a} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_b^1 \delta_2^{b'} \delta_3^{a'} \delta_a^4. \tag{B.31}
 \end{aligned}$$

El tercer término de (B.8) se puede calcular de la misma manera que el segundo término, haciendo los intercambios  $1 \leftrightarrow 3$  y  $2 \leftrightarrow 4$ , con lo cual

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{b}_{\bar{1}_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{3} \hat{L}_0 (-1)^{j_a + j_b - L} \begin{Bmatrix} j_{a'} & j_a & L_0 \\ j_b & j_{b'} & L \end{Bmatrix} \delta_{j_3}^{j_{a'}} \delta_{j_a}^{j_4} \delta_{j_b}^{j_1} \delta_{j_2}^{j_{b'}} \delta_{k_1}^{k_2} \delta_{k_3}^{k_4} \delta_{k_b}^{k_1} \delta_{k_a}^{k_3} \\
 & \quad \times \delta_{\pi_1}^{\pi_2} \delta_{\pi_3}^{\pi_4} \delta_{\pi_b}^{\pi_a} \delta_{\pi_a}^{\pi_3} \delta_{T_1}^{T_2} \delta_{T_3}^{T_4} \delta_{T_b}^{T_1} \delta_{T_a}^{T_3} \delta_{T_a}^{T_{a'}} \delta_{T_b}^{T_{b'}} \delta_{Y_1}^{Y_2} \delta_{Y_3}^{Y_4} \delta_{Y_b}^{Y_1} \delta_{Y_a}^{Y_3} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'}. \tag{B.32}
 \end{aligned}$$

Aún cuando es menos evidente, la hermiticidad del hamiltoniano nos indica que el cuarto término de (B.8) debe ser equivalente al primero bajo el intercambio de índices  $(12) \leftrightarrow (34)$  y  $(a'b') \leftrightarrow (ab)$ . Efectivamente, haciendo el cálculo con cuidado se obtiene que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{d}_{\bar{1}_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\
 &= \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu_1} + \phi_{\mu_3}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a, \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{b}' | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b, \bar{1} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^4 \delta_2^{b'} \delta_3^b \delta_a^{a'} \\
 & \quad = -\frac{\sqrt{2L_0+1}}{2j_a+1} \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{3} (-1)^{j_1 + j_2 - L_0} \delta_{j_1}^{j_4} \delta_{j_3}^{j_2} \delta_{j_a}^{j_{a'}} \delta_{j_b}^{j_{b'}} \delta_{j_2}^{j_b} \delta_{k_1}^{k_4} \delta_{k_2}^{k_{b'}} \delta_{k_3}^{k_b} \delta_{k_a}^{k_{a'}} \\
 & \quad \times \delta_{\pi_1}^{\pi_4} \delta_{\pi_2}^{\pi_b'} \delta_{\pi_3}^{\pi_b} \delta_{\pi_a}^{\pi_{a'}} \delta_{T_1}^{T_4} \delta_{T_3}^{T_2} \delta_{T_a}^{T_{a'}} \delta_{T_b}^{T_{b'}} \delta_{T_2}^{T_b} \delta_{Y_1}^{Y_4} \delta_{Y_2}^{Y_{b'}} \delta_{Y_3}^{Y_b} \delta_{Y_a}^{Y_{a'}} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'}. \tag{B.33}
 \end{aligned}$$

Por último, evaluamos los términos de la interacción tipo  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$  mostrados en la ecuación (B.16). Se tiene que el segundo sumando en dicha ecuación es

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{1_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ &= \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 3, \bar{4} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \\ & \quad \times \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{d}_2^\dagger \left[ \mathbf{d}_3 \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

donde el valor esperado de los operadores sobre el vacío es

$$\langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{d}_2^\dagger \left[ \mathbf{d}_3 \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] | 0 \rangle = (-1)^{\phi_{\mu_4}} \delta_a^4 \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_1^\dagger \mathbf{d}_2^\dagger \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_b^\dagger | 0 \rangle = (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_3} + \phi_{\mu_4}} \delta_1^{a'} \delta_2^{b'} \delta_b^3 \delta_a^4. \quad (\text{B.35})$$

Simplificando la fase mediante el uso del C-G  $\langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle$  se tiene que  $(-1)^{\phi_{\bar{\mu}_3} + \phi_{\mu_4}} = (-1)^{\phi_{\mu_a} + \phi_{\bar{\mu}_b}} = (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{ab\Gamma}}$ . De este modo resulta que dicho término es

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \mathbf{b}_{1_1}^\dagger \mathbf{d}_{1_2}^\dagger \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{1_4} \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right\rangle \\ &= \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle a', \bar{b}' | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle a, \bar{b} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^{a'} \delta_2^{b'} \delta_b^3 \delta_a^4 \\ & \quad = \frac{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \delta_1^{a'} \delta_2^{b'} \delta_b^3 \delta_a^4 \delta_{\Gamma'}^{\Gamma_0} \delta_{\mu'}^{\mu_0} \delta_{\Gamma_0}^{\Gamma_0} \delta_{\mu_0}^{\mu_0}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Observamos que en el subespacio  $SU(3)$  de color se tiene que  $\delta_{\Gamma_0}^{\Gamma_0} = \delta_{(11)}^{(00)} = 0$  por lo que dicho término no contribuirá a la matriz de adelanto. Sin embargo, si se utilizara una interacción escalar en color, entonces sí deberá ser tomado en cuenta. Una posible interacción sin color puede ser la electrodébil o bien, el proceso de 3 gluones acoplados a color total cero. Este último es responsable de los procesos de mezcla de sabor (ver Figura 5.1).

Por otro lado, el tercer sumando de la ecuación (B.16) sí resultará tener una contribución no nula a la matriz adelanto. Observamos que

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{1_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{1_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0} \right\rangle \\ &= - \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 3, \bar{4} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \\ & \quad \times \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \left[ \mathbf{d}_1 \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{d}_4^\dagger | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

En esta ocasión el valor esperado sobre el vacío involucra 3 términos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \left[ \mathbf{d}_1 \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{d}_4^\dagger | 0 \rangle &= (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1} + \phi_{\mu_2}} \delta_a^2 \delta_b^1 \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{d}_4^\dagger | 0 \rangle \\ &- (-1)^{\phi_{\mu_2}} \delta_a^2 \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_b^\dagger \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{d}_4^\dagger | 0 \rangle - (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1}} \delta_b^1 \langle 0 | \mathbf{d}^{\bar{b}'} \mathbf{b}^{a'} \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{b}_3^\dagger \mathbf{d}_4^\dagger | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

El primer sumando se eliminará tras notar la similitud con el caso anterior, donde la combinación de  $\delta_a^2 \delta_b^1$  con el CG  $\langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle$  hace que dicho término sea proporcional a  $\delta_{\Gamma_0}^\Gamma = \delta_{(11)}^{(00)} = 0$  para una interacción que no sea escalar en color. De este modo, se tiene que

$$\begin{aligned} &- \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle \gamma^{a'b'; \Gamma' \mu'} \left[ \left[ \mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2} \right]_{\mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \right] \left[ \mathbf{b}_{1_3}^\dagger \mathbf{d}_{\bar{1}_4}^\dagger \right]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0} \right\rangle \\ &= \sum_{\mu' s} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 3, \bar{4} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \\ &\quad \times (-1)^{\phi_{\bar{\mu}_1} + \phi_{\mu_2}} \left( \delta_4^1 \delta_a^2 \delta_3^1 \delta_b' + \delta_b^1 \delta_3^2 \delta_4^1 \delta_a' \right) \\ &= \sum_{\mu' s} \frac{(-1)^{\phi_{12\Gamma_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle 1, \bar{a} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle a', \bar{1} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_4^1 \delta_a^2 \delta_3^1 \delta_b' \\ &\quad + \sum_{\mu' s} \frac{(-1)^{\phi_{12\Gamma_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle b, \bar{2} | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle 2, \bar{b}' | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_b^1 \delta_3^2 \delta_4^1 \delta_a' \\ &= \frac{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}}{\dim(a)} (-1)^{\phi_{1a\Gamma_0}} \delta_4^1 \delta_a^2 \delta_3^1 \delta_a' \delta_b' \delta_\Gamma^\Gamma \delta_\mu^{\mu'} + \frac{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}}{\dim(b)} (-1)^{\phi_{b2\Gamma_0}} \delta_b^1 \delta_3^2 \delta_4^1 \delta_a' \delta_b' \delta_\Gamma^\Gamma \delta_\mu^{\mu'} \\ &= \frac{\hat{L}_0}{\hat{j}_a^2} \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{3} (-1)^{j_1 + j_a - L_0} \delta_{j_1}^{j_4} \delta_{j_a}^{j_2} \delta_{j_3}^{j_{a'}} \delta_{j_a}^{j_{a'}} \delta_{j_b}^{j_{b'}} \delta_{k_1}^{k_4} \delta_{k_a}^{k_2} \delta_{k_3}^{k_{a'}} \delta_{k_b}^{k_{b'}} \\ &\quad \times \delta_{\pi_1}^{\pi_4} \delta_{\pi_a}^{\pi_2} \delta_{\pi_3}^{\pi_{a'}} \delta_{\pi_b}^{\pi_{b'}} \delta_{T_1}^{T_4} \delta_{T_a}^{T_2} \delta_{T_3}^{T_{a'}} \delta_{T_a}^{T_{a'}} \delta_{T_b}^{T_{b'}} \delta_{Y_1}^{Y_4} \delta_{Y_2}^{Y_{b'}} \delta_{Y_3}^{Y_b} \delta_{Y_b}^{Y_{b'}} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'} \\ &\quad + \frac{\hat{L}_0}{\hat{j}_b^2} \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{3} (-1)^{j_2 + j_b - L_0} \delta_{j_b}^{j_1} \delta_{j_3}^{j_2} \delta_{j_4}^{j_{b'}} \delta_{j_a}^{j_{a'}} \delta_{j_b}^{j_{b'}} \delta_{k_b}^{k_1} \delta_{k_3}^{k_2} \delta_{k_4}^{k_{b'}} \delta_{k_a}^{k_{a'}} \\ &\quad \times \delta_{\pi_b}^{\pi_1} \delta_{\pi_3}^{\pi_2} \delta_{\pi_4}^{\pi_{b'}} \delta_{\pi_a}^{\pi_{a'}} \delta_{T_b}^{T_1} \delta_{T_3}^{T_2} \delta_{T_4}^{T_{b'}} \delta_{T_a}^{T_{a'}} \delta_{T_b}^{T_{b'}} \delta_{Y_b}^{Y_1} \delta_{Y_3}^{Y_2} \delta_{Y_4}^{Y_{b'}} \delta_{Y_a}^{Y_{a'}} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'} . \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Juntando las contribuciones de la energía cinética de la ec. (B.4); de la interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12} \mathcal{A}_{34}]_0^0$  (ecuaciones (B.20), (B.28), (B.32) y (B.33) ); y la interacción entre pares  $[\mathcal{B}_{12} \mathcal{B}_{34}]_0^0$  de la ec. (B.39); e insertándolas en la definición de nuestro Hamiltoniano efectivo de la ecuación

(2.23) se tiene que la matriz adelanto está dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{ab\Gamma\mu}^{a'b'\Gamma'\mu'} &= \langle 0 | \left[ \gamma^{a'b';\Gamma'\mu'}, \left[ H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right] | 0 \rangle \\
 &= \sum_{k,j,\pi,Y,T} \epsilon_{k,j,\pi,Y,T} \delta_{\pi_a'\pi_a} \delta_{\pi_b'\pi_b} \delta_{k_a'k_a} \delta_{k_b'k_b} \delta_{j_a'j_a} \delta_{j_b'j_b} \delta_{Y_{f_a'}Y_{f_a}} \delta_{Y_{f_b'}Y_{f_b}} \delta_{T_{f_a'}T_{f_a}} \delta_{T_{f_b'}T_{f_b}} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\
 &\quad \times \left( \delta_{kk_a} \delta_{jj_a} \delta_{T_f T_{f_a}} \delta_{\pi\pi_a} + \delta_{kk_b} \delta_{jj_b} \delta_{T_f T_{f_a}} \delta_{\pi\pi_b} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{L_0} \sum_{\{k_i j_i \pi_i Y_i T_i\}} \frac{\sqrt{8L_0}}{3} \{T_{f_a} T_{f_b} T\} \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \delta_{T_{f_a'} T_{f_a}} \delta_{T_{f_b'} T_{f_b}} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{Y_{f_a'} Y_{f_a}} \delta_{Y_{f_b'} Y_{f_b}} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\
 &\quad \times \left\{ E(3)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} (-1)^{j_1+j_4-L} \begin{Bmatrix} L_0 & j_3 & j_4 \\ L & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} \delta_{j_1 j_b} \delta_{j_2 j_b'} \delta_{j_3 j_a'} \delta_{j_4 j_a} \right. \\
 &\quad \times \delta_{k_1 k_b} \delta_{k_2 k_b'} \delta_{k_3 k_a'} \delta_{k_4 k_a} \delta_{\pi_1 \pi_b} \delta_{\pi_2 \pi_b'} \delta_{\pi_3 \pi_a'} \delta_{\pi_4 \pi_a} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \\
 &\quad + E(2)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} (-1)^{j_2+j_3-L} \begin{Bmatrix} L_0 & j_4 & j_3 \\ L & j_2 & j_1 \end{Bmatrix} \delta_{j_1 j_a'} \delta_{j_2 j_a} \delta_{j_3 j_b} \delta_{j_4 j_b'} \\
 &\quad \times \delta_{k_1 k_a'} \delta_{k_2 k_a} \delta_{k_3 k_b} \delta_{k_4 k_b'} \delta_{\pi_1 \pi_a'} \delta_{\pi_2 \pi_a} \delta_{\pi_3 \pi_b} \delta_{\pi_4 \pi_b'} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \\
 &\quad + E(4)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} (-1)^{j_1+j_2-L_0} \frac{1}{(\hat{j}_3)^2} \{L_0 j_1 j_2\} \{L j_a j_b\} \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_b'} \delta_{j_3 j_b} \delta_{j_a' j_a} \delta_{j_b' j_b} \\
 &\quad \times \delta_{k_1 k_4} \delta_{k_2 k_b'} \delta_{k_3 k_b} \delta_{k_a' k_a} \delta_{\pi_1 \pi_4} \delta_{\pi_2 \pi_b'} \delta_{\pi_3 \pi_b} \delta_{\pi_a' \pi_a} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \\
 &\quad + E(1)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} (-1)^{j_1+j_2-L_0} \frac{1}{(\hat{j}_1)^2} \{L_0 j_1 j_2\} \{L j_a j_b\} \delta_{j_1 j_a'} \delta_{j_2 j_3} \delta_{j_4 j_a} \delta_{j_a' j_a} \delta_{j_b' j_b} \\
 &\quad \left. \times \delta_{k_1 k_a'} \delta_{k_2 k_3} \delta_{k_4 k_a} \delta_{k_b' k_b} \delta_{\pi_1 \pi_a'} \delta_{\pi_2 \pi_3} \delta_{\pi_4 \pi_a} \delta_{\pi_b' \pi_b} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{L_0} \sum_{\{k_i j_i \pi_i Y_i T_i\}} G(3)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \frac{\sqrt{8L_0}}{3} \{T_{f_a} T_{f_b} T\} \\
 &\quad \times \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \delta_{T_{f_1} T_{f_3}} \delta_{T_{f_a'} T_{f_a}} \delta_{T_{f_b'} T_{f_b}} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_3}} \delta_{Y_{f_a'} Y_{f_a}} \delta_{Y_{f_b'} Y_{f_b}} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\
 &\quad \times \left\{ (-1)^{j_1+j_3-L_0} \frac{1}{(\hat{j}_3)^2} \{L_0 j_1 j_2\} \{L j_a j_b\} \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_a} \delta_{j_3 j_a'} \delta_{j_a' j_a} \delta_{j_b' j_b} \right. \\
 &\quad \times \delta_{k_1 k_4} \delta_{k_2 k_a} \delta_{k_3 k_a'} \delta_{k_b' k_b} \delta_{\pi_1 \pi_4} \delta_{\pi_2 \pi_a} \delta_{\pi_3 \pi_a'} \delta_{\pi_b' \pi_b} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \\
 &\quad + (-1)^{j_2+j_4-L_0} \frac{1}{(\hat{j}_1)^2} \{L_0 j_2 j_1\} \{L j_a j_b\} \delta_{j_1 j_b} \delta_{j_2 j_3} \delta_{j_4 j_b'} \delta_{j_a' j_a} \delta_{j_b' j_b} \\
 &\quad \left. \times \delta_{k_1 k_b} \delta_{k_2 k_3} \delta_{k_4 k_b'} \delta_{k_a k_a'} \delta_{\pi_1 \pi_b} \delta_{\pi_2 \pi_3} \delta_{\pi_4 \pi_b'} \delta_{\pi_a \pi_a'} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{B.40}$$

donde se utilizó la notación histórica

$$\begin{aligned}
 E(1)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, +\frac{1}{2}} \\
 E(2)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, -\frac{1}{2}} \\
 E(3)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, +\frac{1}{2}} \\
 E(4)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, -\frac{1}{2}} \\
 G(1)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, -\frac{1}{2}} \\
 G(2)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, +\frac{1}{2}} \\
 G(3)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, -\frac{1}{2}} \\
 G(4)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} &= \sum_{\{\lambda_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \delta_{\lambda_1, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, +\frac{1}{2}} .
 \end{aligned} \tag{B.41}$$

Los elementos de interacción están dados por

$$\begin{aligned}
 &V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\{N_i l_i\}} V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \sum_{\tau \tau'} \delta_{\pi_1, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau + l_1}} \delta_{\pi_2, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau + l_2}} \delta_{\pi_3, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau' + l_3}} \delta_{\pi_4, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau' + l_4}} \\
 &\quad \times \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \lambda_1 \pi_1 k_1}^{j_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \lambda_2 \pi_2 k_2}^{j_2} \right) \left( \alpha_{\tau'(N_3 l_3) \lambda_3 \pi_3 k_3}^{j_3} \right)^* \left( \alpha_{\tau'(N_4 l_4) \lambda_4 \pi_4 k_4}^{j_4} \right) ,
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

donde a su vez los coeficientes del potencial  $V_{\{N_i l_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0}$  están dados por la ecuación (2.18) y su expresión analítica para el potencial de Cornell es deducida en el Apéndice C.

## B.2. Valor esperado de $\left[ H, \gamma_{ab}^\dagger \right] \gamma_{a'b'}^\dagger$

Para aplicar el método de RPA presentado en la Sección 3.2 se necesita determinar a la matriz *retraso*, cuyos coeficientes están dados por

$$\mathbb{B}_{ij} = -\langle 0 | \left[ \gamma_i^\dagger, \left[ H, \gamma_j^\dagger \right] \right] | 0 \rangle = \langle 0 | \left[ H, \gamma_j^\dagger \right] \gamma_i^\dagger | 0 \rangle . \tag{B.43}$$

Es claro que  $\mathbb{B}_{ij} \neq 0$  sólo cuando  $[H, \gamma_i^\dagger] \sim \gamma_i$ . Observamos que el Hamiltoniano cinético es básicamente una combinación de operadores de número, por lo cual  $[K, \gamma_i^\dagger] \sim \gamma_i^\dagger$  y como era de esperar, no contribuye a la matriz *retraso*.

Calculamos entonces el valor de expectación del Hamiltoniano de interacción en sus distintos términos. De la hermiticidad del *retraso* será de esperarse que sólo las interacciones tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$  y tipo  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$  sean distintos de cero, ya que dichas interacciones son las únicas que poseen la propiedad de simetría de intercambio de índices  $(12) \leftrightarrow (34)$ .

- ) Interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$

Esquemáticamente podemos observar que el valor esperado sobre el vacío del *retraso* para la interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$  es de la forma

$$\langle 0 | [\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}, \gamma^\dagger] \gamma^\dagger | 0 \rangle \sim \langle 0 | (\mathcal{A}_{12} [\mathcal{A}_{34}, \gamma^\dagger] + [\mathcal{A}_{12}, \gamma^\dagger] \mathcal{A}_{34}) \gamma^\dagger | 0 \rangle . \quad (\text{B.44})$$

De acuerdo a la ecuación (B.6) el primer término se elimina para interacciones (11) de color, mientras que de la ecuación (A.61) tenemos que  $[\mathcal{A}, \gamma^\dagger] \sim \gamma^\dagger$  por lo que es segundo término es de la forma  $\langle 0 | [\mathcal{A}, \gamma^\dagger]^2 | 0 \rangle \sim \langle 0 | (\gamma^\dagger)^2 | 0 \rangle = 0$ . De esta manera, la interacción  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$  no contribuye al *retraso*.

- ) Interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$

A la interacción tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$  también la evaluamos de forma esquemática, observando que el *retraso* en este caso es de la forma

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\mathcal{A}_{12}\mathcal{B}_{34}, \gamma^\dagger] \gamma^\dagger | 0 \rangle &\sim \langle 0 | (\mathcal{A}_{12} [\mathcal{B}_{34}, \gamma^\dagger] + [\mathcal{A}_{12}, \gamma^\dagger] \mathcal{B}_{34}) \gamma^\dagger | 0 \rangle \\ &\sim \langle 0 | \gamma^\dagger (\gamma^\dagger + \gamma) \gamma^\dagger | 0 \rangle = 0 , \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

donde una vez más el primer término se elimina al hacer actuar a  $\mathcal{A}$  directamente sobre el vacío, mientras que para el segundo término se usó que de su definición,  $\mathcal{B} \sim \gamma^\dagger + \gamma$ .

- ) Interacción tipo  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$

En el caso de la interacción tipo  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$  también basta con mostrar esquemáticamente que la matriz de *retraso* es de la forma

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_{34}, \gamma^\dagger] \gamma^\dagger | 0 \rangle &\sim \langle 0 | (\mathcal{B}_{12} [\mathcal{A}_{34}, \gamma^\dagger] + [\mathcal{B}_{12}, \gamma^\dagger] \mathcal{A}_{34}) \gamma^\dagger | 0 \rangle \\ &\sim \langle 0 | (\gamma^\dagger + \gamma) \gamma^\dagger \gamma^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | (n_b + n_d) \gamma^\dagger | 0 \rangle = 0 , \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

donde una vez más se usó que  $[\mathcal{A}, \gamma^\dagger] \sim \gamma^\dagger$ , y que de la ecuación (A.63) el conmutador de  $\mathcal{B}$  con un par es una combinación de generadores  $[\mathcal{B}, \gamma^\dagger] \sim [b^\dagger b] + [dd^\dagger]$ .

Podemos observar que la matriz de *retraso* es hermítica por construcción, por lo que pudo haber sido de esperar que las interacciones tipo  $[\mathcal{A}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$  y tipo  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_{34}]_0^0$  no contribuyeran por no mantener la simetría de intercambio de índices  $(12) \leftrightarrow (34)$ .

- Interacción tipo  $[\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{34}]_0^0$

Como ningún otro término contribuye a la matriz de *retraso* tenemos que

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \left[ H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \langle 0 | \left[ \left[ \mathcal{B}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

donde el valor esperado de los operadores sobre el vacío es

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[ \left[ \mathcal{B}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} \right\rangle \\ &= \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\{ \left\langle \mathcal{B}_{12;\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ \mathcal{B}_{34;\bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} \right\rangle + \left\langle \left[ \mathcal{B}_{12;\mu_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \mathcal{B}_{34;\bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0} \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Observamos que el segundo término de (B.48) se anula al hacer actuar al conmutador de  $\mathcal{B}$  con un par directamente sobre el vacío, ya que de (A.63) tenemos que  $\langle 0 | [\mathcal{B}, \gamma^\dagger] \sim \langle 0 | ([b^\dagger b] + [d d^\dagger]) = 0$ .

Para simplificar al primer término en (B.48), basta considerar que sólo la parte  $[d_1 b_2]_{\mu_0}^{\Gamma_0}$  del operador  $\mathcal{B}_{12;\mu_0}^{\Gamma_0}$  sobrevive al hacerle actuar directamente sobre el vacío, por lo que utilizando la definición del operador  $\mathcal{B}$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[ \left[ \mathcal{B}_{12}^{\Gamma_0} \mathcal{B}_{34}^{\bar{\Gamma}_0} \right]_0^0, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left( \alpha_{\tau(N_1 l_1) \lambda_1 \pi_1 k_1}^{j_1} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_2 l_2) \lambda_2 \pi_2 k_2}^{j_2} \right) \left( \alpha_{\tau(N_3 l_3) \lambda_3 \pi_3 k_3}^{j_3} \right)^* \left( \alpha_{\tau(N_4 l_4) \lambda_4 \pi_4 k_4}^{j_4} \right) \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_3 \lambda_4} \\ & \times \left\{ \left\langle [d_{1_1} b_{1_2}]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ [d_{1_3} b_{1_4}]_{\bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} \right\rangle - \left\langle [d_{1_1} b_{1_2}]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ [b_{1_3} d_{1_4}^\dagger]_{\bar{\mu}_0}^{\bar{\Gamma}_0}, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

El segundo término de la ecuación anterior tampoco tendrá contribución al retraso ya que

contiene un exceso de operados de creación, por lo que el único término no nulo resulta ser

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle [\mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2}]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ [\mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4}]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab; \Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma_{a'b' \Gamma'\mu'}^\dagger \right\rangle \\
 &= \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma'\mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma\mu \rangle \langle 1, \bar{2} | \Gamma_0\mu_0 \rangle \langle 3, \bar{4} | \bar{\Gamma}_0\bar{\mu}_0 \rangle \\
 & \quad \times \langle 0 | \mathbf{d}_1 \mathbf{b}_2 \left[ \mathbf{d}_3 \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] \mathbf{b}^{\dagger a'} \mathbf{d}^{\dagger b'} | 0 \rangle . \tag{B.50}
 \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | \mathbf{d}_1 \mathbf{b}_2 \left[ \mathbf{d}_3 \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_a^\dagger \mathbf{d}_b^\dagger \right] \mathbf{b}^{\dagger a'} \mathbf{d}^{\dagger b'} | 0 \rangle \\
 &= (-1)^{\phi_{\mu_a} + \phi_{\bar{\mu}_b}} \left( \delta_b^1 \delta_2^{a'} \delta_3^{b'} \delta_a^4 + \delta_1^{b'} \delta_a^2 \delta_b^3 \delta_4^{a'} - \delta_1^{b'} \delta_2^{a'} \delta_b^3 \delta_a^4 - \delta_b^1 \delta_a^2 \delta_3^{b'} \delta_4^{a'} \right) . \tag{B.51}
 \end{aligned}$$

De la misma manera como ocurrió para algunos términos de la matriz adelante, los últimos dos términos de la ecuación anterior se anulan para una interacción en la representación (11) de color, es decir, tras notar que  $\langle a, \bar{b} | \Gamma\mu \rangle \delta_b^3 \delta_a^4$  y  $\langle a, \bar{b} | \Gamma\mu \rangle \delta_b^1 \delta_a^2$  son proporcionales en su subespacio de color a  $\delta_{(00)}^{(11)} = 0$ .

Reescribiendo a la fase  $(-1)^{\phi_{\mu_a} + \phi_{\bar{\mu}_b}} = (-1)^{\phi_{ab\Gamma} + \phi_\mu}$  se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu_0} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \left\langle [\mathbf{d}_{1_1} \mathbf{b}_{\bar{1}_2}]_{\mu_0}^{\Gamma_0} \left[ [\mathbf{d}_{1_3} \mathbf{b}_{\bar{1}_4}]_{\bar{\mu}_0}^{\Gamma_0}, \gamma_{ab; \Gamma\mu}^\dagger \right] \gamma_{a'b' \Gamma'\mu'}^\dagger \right\rangle \\
 &= \frac{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_\mu}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma'\mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma\mu \rangle \langle b, \bar{a}' | \Gamma_0\mu_0 \rangle \langle b', \bar{a} | \bar{\Gamma}_0\bar{\mu}_0 \rangle \delta_b^1 \delta_2^{a'} \delta_3^{b'} \delta_a^4 \\
 &+ \frac{(-1)^{\phi_{ab\Gamma}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_\mu}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma'\mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma\mu \rangle \langle b', \bar{a} | \Gamma_0\mu_0 \rangle \langle b, \bar{a}' | \bar{\Gamma}_0\bar{\mu}_0 \rangle \delta_1^{b'} \delta_a^2 \delta_b^3 \delta_4^{a'} . \tag{B.52}
 \end{aligned}$$

Resulta necesario simplificar explícitamente a la ecuación anterior un subespacio a la vez.

La parte  $SU(2)$  del primer término en (B.52) es

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^{\phi_{ab}\Gamma}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle b, \bar{a}' | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b', \bar{a} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_b^1 \delta_2^{a'} \delta_3^{b'} \delta_a^4 \Big|_{SU(2)} \\
 &= \frac{(-1)^{j_a + j_b - L}}{\sqrt{2L_0 + 1}} \sum_{m's} \hat{L}' \hat{L} (\hat{L}_0)^2 \delta_{j_b}^{j_1} \delta_{j_2}^{j_{a'}} \delta_{j_3}^{j_{b'}} \delta_{j_a}^{j_4} \\
 & \quad \times (-1)^{j_a - j_b - M} (-1)^{j_{a'} - j_{b'} - M'} (-1)^{j_{b'} - j_a + M_0} (-1)^{j_b - j_{a'} - M_0} (-1)^{L - M} (-1)^{L_0 - M_0} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_a & j_b & L \\ m_a & -m_b & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{a'} & j_{b'} & L' \\ -m_{a'} & m_{b'} & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{b'} & j_a & L_0 \\ m_{b'} & -m_a & M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_b & j_{a'} & L_0 \\ m_b & -m_{a'} & -M_0 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{j_a + j_b - L} \hat{L}' \hat{L} \hat{L}_0 \sum_{m's} \sum_{L''} (\hat{L}'')^2 \delta_{j_b}^{j_1} \delta_{j_2}^{j_{a'}} \delta_{j_3}^{j_{b'}} \delta_{j_a}^{j_4} \\
 & \quad \times (-1)^{j_{a'} + j_b - L_0 + j_{b'} + j_a + L'' - m_{b'} - m_b} (-1)^{L - M'} (-1)^{L_0 - M_0} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_a & j_b & L \\ m_a & -m_b & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{a'} & j_{b'} & L' \\ -m_{a'} & m_{b'} & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & L'' \\ -m_a & m_b & M'' \end{pmatrix} \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} j_{a'} & j_{b'} & L'' \\ -m_{a'} & m_{b'} & -M'' \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} j_b & j_{a'} & L_0 \\ j_{b'} & j_a & L'' \end{matrix} \right\} \\
 &= (-1)^{j_a + j_b + j_{a'} + j_{b'}} \hat{L}_0 \left\{ \begin{matrix} j_b & j_{a'} & L_0 \\ j_{b'} & j_a & L \end{matrix} \right\} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_{j_b}^{j_1} \delta_{j_2}^{j_{a'}} \delta_{j_3}^{j_{b'}} \delta_{j_a}^{j_4}, \tag{B.53}
 \end{aligned}$$

de donde una vez más es inmediato calcular para la parte  $SU(2)$  de sabor que

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^{\phi_{ab}\Gamma}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle b, \bar{a}' | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b', \bar{a} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_b^1 \delta_2^{a'} \delta_3^{b'} \delta_a^4 \Big|_{SU_f(2)} \\
 &= (-1)^{T_a + T_b + T_{a'} + T_{b'}} \left\{ \begin{matrix} T_b & T_{a'} & 0 \\ T_{b'} & T_a & T \end{matrix} \right\} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'} \delta_{T_b}^{T_1} \delta_{T_2}^{T_{a'}} \delta_{T_3}^{T_{b'}} \delta_{T_a}^{T_4} \\
 &= \frac{1}{3} (-1)^{T_{a'} + T_{b'} + T} \{T_{f_a} T_{f_b} T\} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'} \delta_{T_b}^{T_1} \delta_{T_3}^{T_a} \delta_{T_1}^{T_2} \delta_{T_4}^{T_3} \delta_{T_b}^{T_{a'}} \delta_{T_a}^{T_{b'}}. \tag{B.54}
 \end{aligned}$$

Para la parte  $SU(3)$  de color recordamos que  $\Gamma_0 = (11)$  y  $\Gamma = \Gamma' = (00)$ , por lo que

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^{\phi_{ab}\Gamma}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} (-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle b, \bar{a}' | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b', \bar{a} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_b^1 \delta_2^{a'} \delta_3^{b'} \delta_a^4 \Big|_{SU(3)} \\
 &= \sum_{c's} \frac{(-1)^{\phi_C}}{\sqrt{8}} \langle (10)c_{a'}, (01)\bar{c}_{b'} | (00)0 \rangle \langle (10)c_a, (01)\bar{c}_b | (00)0 \rangle \\
 & \quad \times \langle (10)c_b, (01)\bar{c}_{a'} | (11)C \rangle \langle (10)c_{b'}, (01)\bar{c}_a | (11)\bar{C} \rangle \\
 &= \sum_{c's} \frac{(-1)^{\chi_C}}{\sqrt{8}} \frac{(-1)^{\chi_{c_{a'}}}}{\sqrt{3}} \delta_{c_{a'}c_{b'}} \frac{(-1)^{\chi_{c_a}}}{\sqrt{3}} \delta_{c_a c_b} \langle (10)c_b, (01)\bar{c}_{a'} | (11)C \rangle \langle (10)c_{b'}, (01)\bar{c}_a | (11)\bar{C} \rangle \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{c_{a'}c_a C} \frac{1}{\sqrt{8}} \langle (10)c_a, (01)\bar{c}_{a'} | (11)C \rangle \langle (10)c_{a'}, (01)\bar{c}_a | (11)\bar{C} \rangle = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_C \delta_{CC} \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{3} . \tag{B.55}
 \end{aligned}$$

Juntando las ecuaciones (B.53), (B.54) y (B.55) se tiene que el primer término de la ecuación (B.52) es

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^{\phi_{ab}\Gamma}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \sum_{\mu's} \frac{(-1)^{\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu}}}{\sqrt{\dim(\Gamma_0)}} \langle a', \bar{b}' | \Gamma' \mu' \rangle \langle a, \bar{b} | \Gamma \mu \rangle \langle b, \bar{a}' | \Gamma_0 \mu_0 \rangle \langle b', \bar{a} | \bar{\Gamma}_0 \bar{\mu}_0 \rangle \delta_b^1 \delta_2^{a'} \delta_3^{b'} \delta_a^4 \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{1}{3} \hat{L}_0 (-1)^{j_a + j_b + j_{a'} + j_{b'}} \begin{Bmatrix} j_b & j_{a'} & L_0 \\ j_{b'} & j_a & L \end{Bmatrix} \delta_{j_b}^{j_1} \delta_{j_2}^{j_{a'}} \delta_{j_3}^{j_{b'}} \delta_{j_a}^{j_4} \delta_{k_b}^{k_1} \delta_{k_2}^{k_{a'}} \delta_{k_3}^{k_{b'}} \delta_{k_a}^{k_4} \delta_{\pi_b}^{\pi_1} \delta_{\pi_2}^{\pi_{a'}} \delta_{\pi_3}^{\pi_{b'}} \delta_{\pi_a}^{\pi_4} \\
 & \quad \times (-1)^{T_{a'} + T_{b'} + T} \{T_{f_a} T_{f_b} T\} \delta_{T_b}^{T_1} \delta_{T_3}^{T_a} \delta_{T_1}^{T_2} \delta_{T_4}^{T_3} \delta_{T_b}^{T_{a'}} \delta_{T_a}^{T_{b'}} \delta_{Y_b}^{Y_1} \delta_{Y_2}^{Y_{a'}} \delta_{Y_3}^{Y_{b'}} \delta_{Y_a}^{Y_4} \delta_L^{L'} \delta_M^{M'} \delta_T^{T'} \delta_{T_z}^{T_z'} . \tag{B.56}
 \end{aligned}$$

Observamos que el segundo término de la ecuación (B.52) es el mismo que el primer término haciendo el intercambio de índices  $1 \leftrightarrow 3$  y  $2 \leftrightarrow 4$ , por lo que poniendo todo junto se tiene finalmente que

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{B}_{ab\Gamma\mu}^{a'b'\Gamma'\mu'} = -\langle 0 | \left[ \gamma^{\dagger a'b'; \Gamma'\mu'}, \left[ H, \gamma_{ab; \Gamma\mu}^{\dagger} \right] \right] | 0 \rangle \\
 &= \sum_{L_0} \sum_{\{k_i j_i \pi_i Y_i T_i\}} V_{\{\lambda_i \pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \frac{\sqrt{8} \hat{L}_0}{6} \{T_{f_a} T_{f_b} T\} \\
 & \quad \times \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \delta_{T_{f_a} T_{f_b}} \delta_{T_{f_a} T_{f_b'}} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{Y_{f_a} Y_{f_b}} \delta_{Y_{f_a} Y_{f_b'}} \delta_{\Gamma' \Gamma} \delta_{\mu' \mu} \\
 & \quad \times (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + T_{f_1} + T_{f_3} + T} \begin{Bmatrix} L_0 & j_3 & j_4 \\ L & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} \delta_{\lambda_1, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_2, +\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_3, -\frac{1}{2}} \delta_{\lambda_4, +\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left\{ \delta_{k_1 k_b} \delta_{k_2 k_{a'}} \delta_{k_3 k_{b'}} \delta_{k_4 k_a} \delta_{j_1 j_b} \delta_{j_2 j_{a'}} \delta_{j_3 j_{b'}} \delta_{j_4 j_a} \delta_{\pi_1 \pi_b} \delta_{\pi_2 \pi_{a'}} \delta_{\pi_3 \pi_{b'}} \delta_{\pi_4 \pi_a} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_b}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_a}} \delta_{T_{f_1} T_{f_b}} \delta_{T_{f_3} T_{f_a}} \right. \\
 & \quad \left. + \delta_{k_1 k_{b'}} \delta_{k_2 k_a} \delta_{k_3 k_b} \delta_{k_4 k_{a'}} \delta_{j_1 j_{b'}} \delta_{j_2 j_a} \delta_{j_3 j_b} \delta_{j_4 j_{a'}} \delta_{\pi_1 \pi_{b'}} \delta_{\pi_2 \pi_a} \delta_{\pi_3 \pi_b} \delta_{\pi_4 \pi_{a'}} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_a}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_b}} \delta_{T_{f_1} T_{f_a}} \delta_{T_{f_3} T_{f_b}} \right\} , \tag{B.57}
 \end{aligned}$$

que a su vez se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}_{ab\Gamma\mu}^{a'b'\Gamma'\mu'} &= -\langle 0 | \left[ \gamma^{\dagger a'b';\Gamma'\mu'}, \left[ H, \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger \right] \right] | 0 \rangle \\
 &= \sum_{L_0} \sum_{\{k_i j_i \pi_i Y_i T_i\}} G(4)_{\{\pi_i k_i j_i Y_i T_i\}}^{L_0} \frac{\sqrt{8} \bar{L}_0}{6} \{T_{f_a} T_{f_b} T\} \\
 &\quad \times \delta_{T_{f_1} T_{f_2}} \delta_{T_{f_3} T_{f_4}} \delta_{T_{f'_a} T_{f_b}} \delta_{T_{f_a} T_{f'_b}} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_2}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_4}} \delta_{Y_{f'_a} Y_{f_b}} \delta_{Y_{f_a} Y_{f'_b}} \delta_{\Gamma'\Gamma} \delta_{\mu'\mu} \\
 &\quad \times (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4+T_{f_1}+T_{f_3}+T} \begin{Bmatrix} L_0 & j_3 & j_4 \\ L & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} \\
 &\quad \times \left\{ \delta_{k_1 k_b} \delta_{k_2 k_{a'}} \delta_{k_3 k_b} \delta_{k_4 k_a} \delta_{j_1 j_b} \delta_{j_2 j_{a'}} \delta_{j_3 j_b} \delta_{j_4 j_a} \delta_{\pi_1 \pi_b} \delta_{\pi_2 \pi_{a'}} \delta_{\pi_3 \pi_b} \delta_{\pi_4 \pi_a} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_b}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_a}} \delta_{T_{f_1} T_{f_b}} \delta_{T_{f_3} T_{f_a}} \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{k_1 k_{b'}} \delta_{k_2 k_a} \delta_{k_3 k_b} \delta_{k_4 k_{a'}} \delta_{j_1 j_{b'}} \delta_{j_2 j_a} \delta_{j_3 j_b} \delta_{j_4 j_{a'}} \delta_{\pi_1 \pi_{b'}} \delta_{\pi_2 \pi_a} \delta_{\pi_3 \pi_b} \delta_{\pi_4 \pi_{a'}} \delta_{Y_{f_1} Y_{f_a}} \delta_{Y_{f_3} Y_{f_b}} \delta_{T_{f_1} T_{f_a}} \delta_{T_{f_3} T_{f_b}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{B.58}$$

Notamos que la matriz de *retraso* resulta ser simétrica ante el intercambio de índices (12)  $\leftrightarrow$  (34), lo cual refleja la condición de hermiticidad que debe satisfacer por construcción.

# Apéndice C

## El Hamiltoniano de Interacción

El potencial de interacción derivado del operador de Faddeev-Popov es bastante complicado pero incluye a los gluones en el formalismo de la Teoría Cuántica de Campos, y con ellos el fenómeno de confinamiento. Una posibilidad es reemplazar al término de Faddeev-Popov por un potencial estático efectivo que dependa únicamente de las posiciones de cada una de las densidades de carga interactuantes.

$$\langle \mathbf{x} | \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\nabla \cdot \mathcal{D}} | \mathbf{y} \rangle \longrightarrow V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = \frac{-\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \beta |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\text{C.1})$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas tal como fue discutido en el Capítulo 2.

A diferencia del caso en que se utiliza un desarrollo en ondas planas, el rango finito se impone a las funciones de onda usando la base de oscilador armónico, con lo cual no es necesario cortar al potencial a ninguna escala.

De acuerdo a la ecuación (2.1) se tiene que el Hamiltoniano de interacción entre quarks es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} &= \int d^3x d^3y \rho^a(\mathbf{x}) V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rho^{a'}(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3x d^3y \sum_C \Psi^\dagger(\mathbf{x}) T_C \Psi(\mathbf{x}) V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \Psi^\dagger(\mathbf{y}) T^C \Psi(\mathbf{y}) , \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

donde hemos a su vez utilizado la expresión (2.2) para la densidad de carga de color *restringida únicamente* al sector de quarks ( $q$ ). Comenzamos por sustituir la expansión para los campos

en la base acoplada a momento angular total

$$\Psi_{cf}(r, \Omega) = \sum_{Nl m \sigma} \sum_{j m_j} \langle l m_l, \frac{1}{2} \sigma | j m_j \rangle R_{Nl}(r) Y_{lm}(\Omega) \begin{pmatrix} \chi_{\sigma} b_{\frac{1}{2}(Nl) j m_j c f}^{\dagger} \\ \chi_{\sigma} b_{-\frac{1}{2}(Nl) j m_j c f}^{\dagger} \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

Con ello, es posible reescribir al Hamiltoniano de interacción de la ecuación (C.2) como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} &= -\frac{1}{2} g^2 \int d^3 x d^3 y \sum_C \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) T_C \psi(\mathbf{r}) V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \psi^{\dagger}(\mathbf{r}') T^C \psi(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{1}{2} g^2 \sum_C \sum_{N_i l_i m_i \sigma_i \tau_i m_{j_i} j_i c_i f_i} \int r^2 r'^2 dr dr' d\hat{r} d\hat{r}' \mathbf{b}_{\tau_1(N_1 l_1) j_1 m_{j_1} c_1 f_1}^{\dagger} \mathbf{b}^{\tau_2(N_2 l_2) j_2 m_{j_2} c_2 f_2} \\ &\times \mathbf{b}_{\tau_3(N_3 l_3) j_3 m_{j_3} c_3 f_3}^{\dagger} \mathbf{b}^{\tau_4(N_4 l_4) j_4 m_{j_4} c_4 f_4} [T_C]_{c_2}^{c_1} [T^C]_{c_4}^{c_3} V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \\ &\times R_{N_1 l_1}^*(x) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{x}) R_{N_2 l_2}(x) Y_{l_2 m_2}(\hat{x}) \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \\ &\times R_{N_3 l_3}^*(y) Y_{l_3 m_3}^*(\hat{y}) R_{N_4 l_4}(y) Y_{l_4 m_4}(\hat{y}) \langle l_3 m_3, \frac{1}{2} \sigma_3 | j_3 \lambda_3 \rangle \langle l_4 m_4, \frac{1}{2} \sigma_4 | j_4 \lambda_4 \rangle \\ &\times \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} . \end{aligned} \quad (C.4)$$

Los generadores  $SU(3)$  de color  $T_C$  y  $T^C$  de la ecuación (C.4) pueden escribirse en términos de coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  [25], a partir de los elementos de matriz  $(T_C)_{c_2}^{c_1} = \langle (1, 0)_{c_1} | T_C | (1, 0)_{c_2} \rangle$  y aplicando el teorema de Wigner-Eckart, con lo cual se obtiene

$$(T_C)_{c_2}^{c_1} = (-1)^{x_{c_2}+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (1, 0)_{c_1}, (0, 1)_{\bar{c}_2} | (1, 1)_{C_1} \rangle . \quad (C.5)$$

De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{Coulomb}^{q-q} &= -\frac{1}{2} g^2 \sum_C \sum_{\tau_i N_i l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i f_i c_i} (-1)^{x_C} \delta_{\tau_1 \tau_2} \delta_{\tau_3 \tau_4} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\ &\times \left[ \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_2 | j_2 \lambda_2 \rangle \frac{(-1)^{x_{c_2}+1}}{\sqrt{2}} \langle (10)_{c_1}, (01)_{\bar{c}_2} | (11)_{C_1} \rangle \right] \\ &\times \left[ \langle l_3 m_3, \frac{1}{2} \sigma_3 | j_3 \lambda_3 \rangle \langle l_4 m_4, \frac{1}{2} \sigma_4 | j_4 \lambda_4 \rangle \frac{(-1)^{x_{c_4}+1}}{\sqrt{2}} \langle (10)_{c_3}, (01)_{\bar{c}_4} | (11)_{\bar{C}_1} \rangle \right] \\ &\times \int d^3 x d^3 y \psi_{N_1 l_1 m_1}^*(\mathbf{x}) \psi_{N_2 l_2 m_2}(\mathbf{x}) V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \psi_{N_3 l_3 m_3}^*(\mathbf{y}) \psi_{N_4 l_4 m_4}(\mathbf{y}) \\ &\times \mathbf{b}_{\tau_1(N_1 l_1) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^{\dagger} \mathbf{b}^{\tau_2(N_2 l_2) j_2 \lambda_2 c_2 f_2} \mathbf{b}_{\tau_3(N_3 l_3) j_3 \lambda_3 c_3 f_3}^{\dagger} \mathbf{b}^{\tau_4(N_4 l_4) j_4 \lambda_4 c_4 f_4} \end{aligned} \quad (C.6)$$

En la ecuación (C.6), la presencia de  $\delta_{\tau_1 \tau_2} \delta_{\tau_3 \tau_4}$ ,  $\delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_3 \sigma_4}$  y  $\delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4}$  vienen directamente de la estructura de la densidad de carga de color la cual no contiene ninguna dependencia en pseudoespín, espín ni sabor, respectivamente.

Primero nos concentraremos en resolver la integral sobre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$ . Acoplando las funciones que son complejas conjugadas entre sí y de la misma manera a las que no son conjugadas, se obtiene que

$$\begin{aligned} & \sum_{J'M'_J JM_J} \langle l_1 m_1, l_3 m_3 | J' M'_J \rangle \langle l_2 m_2, l_4 m_4 | J M_J \rangle \\ & \times \int d^3 x d^3 y [\Psi_{N_1 l_1}^*(\mathbf{x}) \otimes \Psi_{N_3 l_3}^*(\mathbf{y})]_{M'_J}^{J'} V(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) [\Psi_{N_2 l_2}(\mathbf{x}) \otimes \Psi_{N_4 l_4}(\mathbf{y})]_{M_J}^J . \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Usando las transformaciones de Talmi-Moshinsky [32, 33] para reacomodar la integral en la ecuación (C.7), resulta que

$$\begin{aligned} & \sum_{N'_r l'_r, N_r l_r; N'_R L'_R, N_R L_R} (N'_r l'_r, N'_R L'_R, J' | N_1 l_1, N_3 l_3, J') (N_r l_r, N_R L_R, J | N_2 l_2, N_4 l_4, J) \\ & \times \int d^3 r d^3 R [\Psi_{N'_R L'_R}^*(\mathbf{R}) \otimes \Psi_{N'_r l'_r}^*(\mathbf{r})]_{M'_J}^{J'} V(\sqrt{2}r) [\Psi_{N_R L_R}(\mathbf{R}) \otimes \Psi_{N_r l_r}(\mathbf{r})]_{M_J}^J , \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

donde  $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$  se relaciona con la coordenada de CM y  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  a la posición relativa. Debido a que en la última ecuación, el potencial es independiente de  $\mathbf{R}$ , la dependencia sobre dicha coordenada se puede integrar fácilmente. Con ello, la integral en la ecuación (C.8) resulta ser

$$\begin{aligned} & \sum_{M'_R, M'_r, m'_r} \langle L'_R M'_R, l'_r m'_r | J' M'_J \rangle \langle L_R M_R, l_r m_r | J M_J \rangle \\ & \int d^3 R \Psi_{N'_R L'_R M'_R}^*(\mathbf{R}) \Psi_{N_R L_R M_R}(\mathbf{R}) \int d^3 r \Psi_{N'_r l'_r m'_r}^*(\mathbf{r}) V(\sqrt{2}r) \Psi_{N_r l_r m_r}(\mathbf{r}) \\ & = \delta_{N'_R N_R} \delta_{L'_R L_R} \sum_{M_R, m'_r, m_r} \langle L'_R M'_R, l'_r m'_r | J' M'_J \rangle \langle L_R M_R, l_r m_r | J M_J \rangle \\ & \int d^3 r \Psi_{N'_r l'_r m'_r}^*(\mathbf{r}) V(\sqrt{2}r) \Psi_{N_r l_r m_r}(\mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Debido a que el potencial  $V$  es un escalar, se tiene como restricción adicional que  $l'_r = l_r$  y  $m'_r = m_r$ . La integral en sí tampoco depende de  $m_r$ . Luego, es posible reemplazar a  $m_r$  por su proyección de máximo peso  $l_r$ . Con esto, la suma sobre  $(M_R, m'_r, m_r)$  junto con los dos coeficientes de Clebsch-Gordan se convierten en una suma sobre  $(M_R, m_r)$ , lo cual a su vez representa una regla de ortogonalidad que deriva en las deltas de Kronecker  $\delta_{J' J} \delta_{M'_J M_J}$ .

Juntando todas las consideraciones anteriores, la ecuación (C.7) se convierte en

$$\begin{aligned}
 & \sum_{JM_J; N'_r N_r l_r; N_R L_R} \langle l_1 m_1, l_3 m_3 | JM_J \rangle \langle l_2 m_2, l_4 m_4 | JM_J \rangle \\
 & \times (N'_r l_r, N_R L_R, J | N_1 l_1, N_3 l_3, J) (N_r l_r, N_R L_R, J | N_2 l_2, N_4 l_4, J) \\
 & \times \int d^3 r \Psi_{N'_r l_r l_r}^*(\mathbf{r}) V(\sqrt{2}r) \Psi_{N_r l_r l_r}(\mathbf{r}) .
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Con la ecuación (C.10), el Hamiltoniano en (C.6) adquiere la forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{\text{coul}} = & -\frac{1}{4} \sum_{N_i l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i} \sum_{JM_J N'_r N_r l_r N_R L_R} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + j_4 - \lambda_4} (-1)^{\chi_{f_2} + \chi_{f_4}} \\
 & \times \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_1 | j_2 \lambda_2 \rangle \langle l_3 m_3, \frac{1}{2} \sigma_3 | j_3 \lambda_3 \rangle \langle l_4 m_4, \frac{1}{2} \sigma_3 | j_4 \lambda_4 \rangle \\
 & \times \langle l_1 m_1, l_3 m_3 | JM_J \rangle \langle l_2 m_2, l_4 m_4 | JM_J \rangle \int d^3 r \Psi_{N'_r l_r l_r}^*(\mathbf{r}) V(\sqrt{2}r) \Psi_{N_r l_r l_r}(\mathbf{r}) \\
 & \times (N'_r l_r, N_R L_R, J | N_1 l_1, N_3 l_3, J) (N_r l_r, N_R L_R, J | N_2 l_2, N_4 l_4, J) \\
 & \times \left\{ \sum_C (-1)^{\chi_C} \sum_{c_i \tau_i f_i} (-1)^{\frac{1}{2} - \tau_2 + \frac{1}{2} - \tau_4} \delta_{\tau_1 \tau_2} \delta_{\tau_3 \tau_4} \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \right. \\
 & \times \langle (10) c_1, (01) \bar{c}_2 | (11) C \rangle_1 \langle (10) c_3, (01) \bar{c}_4 | (11) \bar{C} \rangle_1 \\
 & \left. \times \mathbf{b}_{\tau_1 (N_1 l_1) j_1 \lambda_1 c_1 f_1}^\dagger \mathbf{b}_{-\tau_2 (N_2 l_2) j_2 - \lambda_2 \bar{c}_2 \bar{f}_2} \mathbf{b}_{\tau_3 (N_3 l_3) j_3 \lambda_3 c_3 f_3}^\dagger \mathbf{b}_{-\tau_4 (N_4 l_4) j_4 - \lambda_4 \bar{c}_4 \bar{f}_4} \right\} ,
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

En la ecuación (C.11), la fase  $(-1)^{\chi_{c_2} + \chi_{c_4}}$  de la ecuación (C.6) se ha cancelado con la misma fase proveniente de bajar los índices de los operadores. La fase restante  $(-1)^{\chi_C}$  es proporcional al acoplamiento  $SU(3)$  a color cero, donde sólo hace falta el factor  $\sqrt{8}$  en el denominador. Por otro lado, la contracción sobre  $\tau_i$  (*i.e.*  $(-1)^{\frac{1}{2} - \tau_2} \delta_{\tau_1 \tau_2}$ ) y  $f_i$  (*i.e.*  $(-1)^{\chi_{f_2}} \delta_{f_1 f_2}$ ) representan un acoplamiento total a cero, donde sólo faltaría agregar el factor  $1/\sqrt{2}$  en el denominador para el primer caso y  $1/\sqrt{3}$  en el segundo. Corrigiendo por estos factores, se tiene que la expresión entre llaves de la ecuación (C.11) resulta ser

$$\begin{aligned}
 \left\{ \dots \right\} = & \sum_{LM_L} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + j_4 - \lambda_4} (\sqrt{2})^2 (\sqrt{3})^2 \sqrt{8} \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 | LM_L \rangle \langle j_3 \lambda_3, j_4 - \lambda_4 | L - M_L \rangle \\
 & \times \frac{(-1)^{L - M_L}}{\sqrt{2L + 1}} \left[ \left[ \mathbf{b}_{(N_1 l_1) j_1}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{(N_2 l_2) j_2} \right]^{0L(11)(00)} \otimes \left[ \mathbf{b}_{(N_3 l_3) j_3}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{(N_4 l_4) j_4} \right]^{0L(11)(00)} \right]_{0000}^{00(00)(00)} .
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

Los acoplamientos intermedios y el total están ordenados de la siguiente manera: pseudoespín, momento angular total, color y sabor.

Con lo anterior es posible reescribir al Hamiltoniano de Coulomb de la ecuación (Eq. (C.6)) como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{\text{coul}} &= -\frac{1}{2} \sum_{N_i l_i m_i j_i \lambda_i \sigma_i L M_L} \sum_{J M_J N'_r l_r N_R L_R} \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 (\sqrt{3})^2 \sqrt{8} (-1)^{j_2 - \lambda_2 + j_4 - \lambda_4} \frac{(-1)^{L - M_L}}{\sqrt{2L + 1}} \\
 &\times \langle l_1 m_1, \frac{1}{2} \sigma_1 \mid j_1 \lambda_1 \rangle \langle l_2 m_2, \frac{1}{2} \sigma_1 \mid j_2 \lambda_2 \rangle \langle j_1 \lambda_1, j_2 - \lambda_2 \mid L M_L \rangle \\
 &\times \langle l_3 m_3, \frac{1}{2} \sigma_3 \mid j_3 \lambda_3 \rangle \langle l_4 m_4, \frac{1}{2} \sigma_3 \mid j_4 \lambda_4 \rangle \langle j_3 \lambda_3, j_4 - \lambda_4 \mid L - M_L \rangle \\
 &\times \langle l_1 m_1, l_3 m_3 \mid J M_J \rangle \langle l_2 m_2, l_4 m_4 \mid J M_J \rangle \int d^3 r \Psi_{N'_r l_r l_r}^*(\mathbf{r}) V(\sqrt{2}r) \Psi_{N_r l_r l_r}(\mathbf{r}) \\
 &\times (N'_r l_r, N_R L_R, J \mid N_1 l_1, N_3 l_3, J) (N_r l_r, N_R L_R, J \mid N_2 l_2, N_4 l_4, J) \\
 &\times \left[ \left[ \mathbf{b}_{(N_1 l_1) j_1}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{(N_2 l_2) j_2} \right]^{0L(11)(00)} \otimes \left[ \mathbf{b}_{(N_3 l_3) j_3}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{(N_4 l_4) j_4} \right]^{0L(11)(00)} \right]_{0000}^{00(00)(00)}. \quad (\text{C.13})
 \end{aligned}$$

Usando las relaciones para las sumas sobre el producto de tres o cuatro coeficientes de Clebsch-Gordan [56], se llega a la expresión final para la interacción de Coulomb

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{\text{coul}} &= \\
 -\frac{1}{2} \sum_{N_i l_i j_i L} V_{\{N_i l_i j_i\}}^L &\left[ \left[ \mathbf{b}_{(N_1 l_1) j_1}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{(N_2 l_2) j_2} \right]^{0L(11)(00)} \otimes \left[ \mathbf{b}_{(N_3 l_3) j_3}^\dagger \otimes \mathbf{b}_{(N_4 l_4) j_4} \right]^{0L(11)(00)} \right]_{0000}^{00(00)(00)}, \quad (\text{C.14})
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 V_{\{N_i l_i j_i\}}^L &= \sum_{J N'_r l_r N_R L_R} 3\sqrt{8} \sqrt{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1)\sqrt{2L + 1}(2J + 1)} \\
 &\times (-1)^{L + j_2 + j_4 - J + 1} \left\{ \begin{matrix} l_1 & L & l_2 \\ j_2 & \frac{1}{2} & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_3 & L & l_4 \\ j_4 & \frac{1}{2} & j_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_2 & J & l_4 \\ l_3 & L & l_1 \end{matrix} \right\} \\
 &\times (N'_r l_r, N_R L_R, J \mid N_1 l_1, N_3 l_3, J) (N_r l_r, N_R L_R, J \mid N_2 l_2, N_4 l_4, J) \\
 &\times \int d^3 r \Psi_{N'_r l_r l_r}^*(\mathbf{r}) V(\sqrt{2}r) \Psi_{N_r l_r l_r}(\mathbf{r}). \quad (\text{C.15})
 \end{aligned}$$

Es posible observar que la integral que aparece en la ecuación (C.15) no depende del ángulo del vector  $\mathbf{r}$ , por lo que la integral sobre este simplemente resultará en una regla de ortogonalidad de los armónicos esféricos, es decir,

$$\int d^3r \Psi_{N'_r l_r l_r}^*(\mathbf{r}) V(\sqrt{2}r) \Psi_{N_r l_r l_r}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty r^2 dr R_{n'_r l_r}(r) V(\sqrt{2}r) R_{n_r l_r}(r) . \quad (\text{C.16})$$

Para un potencial del tipo  $r^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  se tiene que la integral sobre  $r$  de la ecuación anterior se denomina *integral de Talmi* y sus valores son analíticos. Por ejemplo, para la interacción lineal se tiene que las integrales involucradas en los coeficientes del potencial son de la forma

$$\int_0^\infty r^2 dr R_{n'_r l_r}(r) \beta \sqrt{2}r R_{n_r l_r}(r) = \sqrt{2} \beta \frac{\pi}{4} \left[ \frac{n'_r! n_r!}{\Gamma(n'_r + l_r + \frac{3}{2}) \Gamma(n_r + l_r + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{n'_r + n_r} \sum_{s=0}^{\min(n_r, n'_r)} \frac{(l_r + s + 1)!}{s! (n_r - s)! (n'_r - s)! \Gamma(s - n_r + \frac{3}{2}) \Gamma(s - n'_r + \frac{3}{2})} , \quad (\text{C.17})$$

mientras que las integrales para la parte Coulombiana de la interacción son de la forma

$$\int_0^\infty r^2 dr R_{n'_r l_r}(r) \frac{\alpha}{\sqrt{2}r} R_{n_r l_r}(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{n'_r! n_r!}{\Gamma(n'_r + l_r + \frac{3}{2}) \Gamma(n_r + l_r + \frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{\min(n_r, n'_r)} \frac{(l_r + s)! \Gamma(n_r - s + \frac{1}{2}) \Gamma(n'_r - s + \frac{1}{2})}{s! (n_r - s)! (n'_r - s)!} . \quad (\text{C.18})$$

# Apéndice D

## Remoción del Centro de Masa

Como ya fue mencionado en el Capítulo 1, la base de oscilador armónico no es una base relativista, es decir, no es invariante ante transformaciones del grupo de Lorentz. Sin embargo, es posible recuperar la invariancia Galileana al asegurar que los fonones construidos no contengan excitaciones del *centro de masa* (CM), por ser espúrias.

En el presente apéndice se evaluarán dos métodos distintos para remover las excitaciones del CM. La primera de ellas consiste en utilizar a las transformaciones *Talmi-Moshinsky* (TM) para restringir la definición de los fonones únicamente al subespacio sin quantas de oscilación en su CM. La segunda de ellas requiere una modificación a nivel de las ecuaciones de RPA que permite separar e identificar a los estados espúrios del espectro.

### D.1. Remoción con transformaciones Talmi-Moshinsky

Como se expuso en la Sección 1.2, la transformación  $\alpha$  realiza el cambio de base

$$(\tau Nl) \xrightarrow{\alpha} (\lambda \pi k) .$$

Sin embargo, para remover el CM utilizando transformaciones TM será necesario trabajar en el esquema donde  $(Nl)$  están bien definidos, por lo que resulta conveniente definir una base

$(\pi Nl)$  via los operadores

$$\tilde{q}_{\pi(Nl)jmcf}^\dagger = \sum_{\tau} \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} q_{\tau(Nl)jmcf}^\dagger, \quad (\text{D.1})$$

la cual se encuentra relacionada con la base  $(\lambda\pi k)$  definida en la ecuación 1.4 de la siguiente manera

$$\tilde{q}_{\pi(Nl)jmcf}^\dagger = \sum_{\lambda\tau k} \left( \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^j \right)^* Q_{\lambda\pi k jmcf}^\dagger \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}}. \quad (\text{D.2})$$

Cabe enfatizar que es importante remitir a todos nuestros operadores a la base  $(\lambda\pi k)$  pues es en tal base que el Hamiltoniano de propagación libre es diagonal. Esquemáticamente lo que estamos haciendo es descomponer a la transformación  $\alpha$  en dos transformaciones sucesivas

$$(\tau Nl) \xrightarrow{\alpha_{\tau \rightarrow \pi}} (\pi Nl) \xrightarrow{\alpha_{Nl \rightarrow \lambda k}} (\lambda\pi k),$$

de manera que podamos definir a los pares en el esquema  $(\pi Nl)$  para finalmente aplicar una transformación  $\alpha_{Nl \rightarrow \lambda k}$  que recupere la conexión con las excitaciones que sí podemos interpretar físicamente, es decir, en el esquema  $(\lambda\pi k)$ .

Es posible demostrar que los operadores  $\tilde{q}$  definidos en (D.2) satisfacen las reglas de anti-conmutación adecuadas

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{q}^{\pi'(N'l')j'm'c'f'}, \tilde{q}_{\pi(Nl)jmcf}^\dagger \right\} &= \sum_{\tau'\tau} \delta_{\pi',(-1)^{\frac{1}{2}-\tau'+l'}} \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} \left\{ q^{\tau'(N'l')j'm'c'f'}, q_{\tau(Nl)jmcf}^\dagger \right\} \\ &= \sum_{\tau} \delta_{\pi',(-1)^{\frac{1}{2}-\tau'+l'}} \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} \delta_{N'N} \delta_{l'l} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{c'c} \delta_{f'f} \\ &= \delta_{\pi'\pi} \delta_{N'N} \delta_{l'l} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{c'c} \delta_{f'f} \sum_{\tau} \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} \\ &= \delta_{\pi'\pi} \delta_{N'N} \delta_{l'l} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{c'c} \delta_{f'f}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

donde se usó que  $\sum_{\tau} \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} = 1$  pues una y sólo una de las deltas se enciende en cada posible valor de  $\tau$ .

Además, utilizando lo anterior juntos con la definición en (D.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} &\left\{ \tilde{q}^{\pi'(N'l')j'm'c'f'}, \tilde{q}_{\pi(Nl)jmcf}^\dagger \right\} \\ &= \sum_{\lambda k \tau' \tau} \left( \alpha_{\tau'(N'l')\lambda\pi k}^j \right) \left( \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^j \right)^* \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau'+l'}} \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} \delta_{\pi'\pi} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{c'c} \delta_{f'f} \\ &\stackrel{!}{=} \delta_{\pi'\pi} \delta_{N'N} \delta_{l'l} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{c'c} \delta_{f'f}, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

por lo que se obtiene la relación (que de otra manera sería poco evidente)

$$\sum_{\lambda k \tau' \tau} \left( \alpha_{\tau'(N'l')\lambda\pi k}^j \right) \left( \alpha_{\tau(Nl)\lambda\pi k}^j \right)^* \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau'+l'}} \delta_{\pi,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau+l}} = \delta_{N'N} \delta_{l'l} . \quad (\text{D.5})$$

### D.1.1. Definición del par sin excitaciones del centro de masa

Utilizando la ecuación (D.2) puedo definir a los estados

$$\begin{aligned} |\pi_a(N_a l_a \frac{1}{2}) j_a, \pi_b(N_b l_b \frac{1}{2}) j_b; JM_J \Gamma \mu\rangle &= \left[ \tilde{Q}_{\pi_a(N_a l_a) j_a}^\dagger \tilde{Q}_{\pi_b(N_b l_b) j_b} \right]_{MJ\mu}^{J\Gamma} |\tilde{0}\rangle \\ &= \sum_{\lambda_a \tau_a k_a} \sum_{\lambda_b \tau_b k_b} \left( \alpha_{\tau_a(N_a l_a) \lambda_a \pi_a k_a}^{j_a} \right)^* \left( \alpha_{\tau_b(N_b l_b) \lambda_b \pi_b k_b}^{j_b} \right) \delta_{\pi_a,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau_a+l_a}} \delta_{\pi_b,(-1)^{\frac{1}{2}-\tau_b+l_b}} \\ &\quad \times \left[ Q_{\lambda_a \pi_a k_a j_a}^\dagger Q_{\lambda_b \pi_b k_b j_b} \right]_{MJ\mu}^{J\Gamma} |\tilde{0}\rangle , \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

donde el vacío  $|\tilde{0}\rangle$  es aquél que es aniquilado por los operadores  $b$  y  $d$  de la ecuación (1.20).

Se debe notar que he definido a los operadores  $\tilde{q}$  en el esquema  $(ls)j$  y para poder utilizar las transformaciones TM será necesario transformar al esquema  $ls$ .

$$\begin{aligned} &|\pi_a(N_a l_a \frac{1}{2}) j_a, \pi_b(N_b l_b \frac{1}{2}) j_b; JM_J \Gamma \mu\rangle \\ &= \sum_{LS} \mathcal{U} \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{array} \right\} |\pi_a(N_a l_a \frac{1}{2}), \pi_b(N_b l_b \frac{1}{2}); (LS) JM_J \Gamma \mu\rangle . \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Podemos además utilizar la regla de completez sobre los coeficientes de Moshinsky para encontrar la relación que traduce al esquema de excitaciones relativas y de CM con la base  $(\lambda\pi k)$

$$\begin{aligned} &|\pi_a(N_a l_a \frac{1}{2}) j_a, \pi_b(N_b l_b \frac{1}{2}) j_b; JM_J \Gamma \mu\rangle \\ &= \sum_{LS} \sum_{N_r l_r N_R l_R} \mathcal{U} \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{array} \right\} (N_R l_R, N_r l_r; L | N_a l_a, N_b l_b; L) \\ &\quad \times |\pi_a \pi_b, N_R l_R N_r l_r; (LS) JM_J \Gamma \mu\rangle . \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Relacionando lo anterior con la ecuación (D.6) se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda_a \tau_a k_a} \sum_{\lambda_b \tau_b k_b} \left( \alpha_{\tau_a(N_a l_a) \lambda_a \pi_a k_a}^{j_a} \right)^* \left( \alpha_{\tau_b(N_b l_b) \lambda_b \pi_b k_b}^{j_b} \right) \delta_{\pi_a, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau_a + l_a}} \delta_{\pi_b, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau_b + l_b}} \\
 & \quad \times \left[ Q_{\lambda_a \pi_a k_a j_a}^\dagger Q_{\lambda_b \pi_b k_b j_b} \right]_{MJ\mu}^{J\Gamma} |\tilde{0}\rangle \\
 & = \sum_{LS} \sum_{N_r l_r N_R l_R} \mathcal{U} \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{array} \right\} (N_R l_R, N_r l_r; L | N_a l_a, N_b l_b; L) \\
 & \quad \times |\pi_a \pi_b, N_R l_R N_r l_r; (LS) J M_J \Gamma \mu\rangle, \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

de donde podemos despejar al estado  $|\pi_a \pi_b, N_R l_R N_r l_r; (LS) J M_J \Gamma \mu\rangle$  utilizando las reglas de ortogonalidad tanto del  $9j$  como de los coeficientes de Moshinsky, es decir, multiplicando y sumando ambos lados de la ecuación (D.9) por

$$\sum_{j_a j_b} \mathcal{U} \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L' & S' & J \end{array} \right\} \sum_{N_a l_a N_b l_b} (N'_R l'_R, N'_r l'_r; L' | N_a l_a, N_b l_b; L'). \tag{D.10}$$

Por lo que se obtiene que

$$\begin{aligned}
 & |\pi_a \pi_b, N_R l_R N_r l_r; (LS) J M_J \Gamma \mu\rangle \\
 & = \sum_{N_a l_a N_b l_b} (N_R l_R, N_r l_r; L | N_a l_a, N_b l_b; L) \sum_{j_a j_b} \mathcal{U} \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{array} \right\} \\
 & \quad \times \sum_{\lambda_a \tau_a k_a} \sum_{\lambda_b \tau_b k_b} \left( \alpha_{\tau_a(N_a l_a) \lambda_a \pi_a k_a}^{j_a} \right)^* \left( \alpha_{\tau_b(N_b l_b) \lambda_b \pi_b k_b}^{j_b} \right) \delta_{\pi_a, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau_a + l_a}} \delta_{\pi_b, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau_b + l_b}} \\
 & \quad \times \left[ Q_{\lambda_a \pi_a k_a j_a}^\dagger Q_{\lambda_b \pi_b k_b j_b} \right]_{MJ\mu}^{J\Gamma} |\tilde{0}\rangle. \tag{D.11}
 \end{aligned}$$

Podemos introducir a los coeficientes

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{\lambda_a \pi_a k_a j_a \lambda_b \pi_b k_b j_b} \\
 &= \sum_{\tau_a N_a l_a \tau_b N_b l_b} \mathcal{U} \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & \frac{1}{2} & j_a \\ l_b & \frac{1}{2} & j_b \\ L & S & J \end{array} \right\} (00, N_r l_r; L \mid N_a l_a, N_b l_b; L) \\
 & \times \left( \alpha_{\tau_a (N_a l_a) \lambda_a \pi_a k_a}^{j_a} \right)^* \left( \alpha_{\tau_b (N_b l_b) \lambda_b \pi_b k_b}^{j_b} \right) \delta_{\pi_a, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau_a + l_a}} \delta_{\pi_b, (-1)^{\frac{1}{2} - \tau_b + l_b}} . \quad (D.12)
 \end{aligned}$$

Por lo que finalmente los estados sin excitaciones del CM se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 & |\pi_a \pi_b, N_r l_r; (l_r S) J M_J \Gamma \mu\rangle \\
 &= \sum_{\lambda_a k_a j_a \lambda_b k_b j_b} \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{\lambda_a \pi_a k_a j_a \lambda_b \pi_b k_b j_b} \left[ Q_{\lambda_a \pi_a k_a j_a}^\dagger Q_{\lambda_b \pi_b k_b j_b} \right]_{M_J \mu}^{J\Gamma} |\tilde{0}\rangle \\
 &= \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{\frac{1}{2} \pi_a k_a j_a - \frac{1}{2} \pi_b k_b j_b} \left[ b_{\pi_a k_a j_a}^\dagger d_{\pi_b k_b j_b}^\dagger \right]_{M_J \mu}^{J\Gamma} |\tilde{0}\rangle \\
 &+ \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{-\frac{1}{2} \pi_a k_a j_a - \frac{1}{2} \pi_b k_b j_b} \left[ d_{\pi_a k_a j_a} d_{\pi_b k_b j_b}^\dagger \right]_{M_J \mu}^{J\Gamma} |\tilde{0}\rangle , \quad (D.13)
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que en el caso en que  $(N_R L_R) = (00)$  se tiene necesariamente que  $L = l_r$ .

En base a la construcción del estado de la ecuación (D.13) podemos restringirnos solamente a excitaciones de la forma  $[b^\dagger d^\dagger]$ , omitiendo los términos de dispersión de un quark y un antiquark como usualmente uno hace en las aproximaciones a nivel TDA y RPA, por lo que la propuesta es definir

$$\hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b N_r l_r S J M_J \Gamma \mu}^\dagger = \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{\frac{1}{2} \pi_a k_a j_a - \frac{1}{2} \pi_b k_b j_b} \left[ b_{\pi_a k_a j_a}^\dagger d_{\pi_b k_b j_b}^\dagger \right]_{M_J \mu}^{J\Gamma} . \quad (D.14)$$

Observamos que los coeficientes  $\mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{ab}$  son reales así que respecto a las viejas definiciones de lo pares se tiene que

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b N_r l_r S J M_J \Gamma \mu}^\dagger &= \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{\frac{1}{2} \pi_a k_a j_a - \frac{1}{2} \pi_b k_b j_b} \gamma_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^\dagger \\
 \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b N_r l_r S J M_J \Gamma \mu} &= \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{\frac{1}{2} \pi_a k_a j_a - \frac{1}{2} \pi_b k_b j_b} \gamma_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu} . \quad (D.15)
 \end{aligned}$$

Con lo anterior es inmediato calcular que

$$\langle \tilde{0} | [\hat{\gamma}^{\pi'_a \pi'_b N'_r l'_r S' J' \Gamma' M'_J \mu'}, \hat{\gamma}^{\pi_a \pi_b N_r l_r S J \Gamma M_J \mu}] | \tilde{0} \rangle = 0, \quad (\text{D.16})$$

mientras que para el tensor métrico se obtiene que

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{0} | \left[ \hat{\gamma}^{\pi'_a \pi'_b N'_r l'_r S' J' \Gamma' M'_J \mu'}, \hat{\gamma}^{\pi_a \pi_b N_r l_r S J \Gamma M_J \mu} \right] | \tilde{0} \rangle \\ &= \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{C}_{N'_r l'_r S' J}^{\frac{1}{2} \pi_a k_a j_a - \frac{1}{2} \pi_b k_b j_b} \mathcal{C}_{N_r l_r S J}^{\frac{1}{2} \pi_a k_a j_a - \frac{1}{2} \pi_b k_b j_b} \delta_{\pi'_a \pi_a} \delta_{\pi'_b \pi_b} \delta_{J' J} \delta_{M'_J M_J} \delta_{\Gamma' \Gamma} \delta_{\mu' \mu}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Es decir, la base de pares definida por la ecuación (D.15) no es ortonormal. Es por ello que resulta necesario llevar a cabo una ortonormalización de Gram-Schmidt sobre dicha base para cada bloque con  $\pi_a, \pi_b, J, \Gamma$  fijos. Cada uno de estos bloques tendrá tantos elementos de la base ortonormal original  $\{\gamma^{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}\}$  como posibles combinaciones de estados con  $k_a, j_a, k_b, j_b$  dados. Denotemos a dicho número como  $n$  y sea  $\kappa_j = 1, \dots, n$  el índice que corre sobre dichos estados.

Por otro lado, denotamos con  $m$  al número de estados posibles en la base  $\{\hat{\gamma}^{\pi_a \pi_b N_r l_r S J \Gamma M_J \mu}\}$  y sea  $\kappa_r = 1, \dots, m$  el índice que corre sobre todas las posibles combinaciones de  $N_r, l_r$  y  $S$ .

En general  $n < m$  pues para un corte fijo en el espacio de cuantas accesibles  $N_{max}$  se tendrá maximalmente  $N_{r_{max}} = N_{a_{max}} + N_{b_{max}} = 2N_{max}$  y habrá más estados descritos en el sistema de movimiento relativo que en la base ortogonal original. Luego, no todos los estados de la base son linealmente independientes, sino maximalmente  $n$  de ellos.

Por ejemplo, para  $N_{max} = 3$  y  $j = \frac{1}{2}$  fijo, sólo los dos estados orbitales más bajos  $s$  y  $p$  son posibles, tal que el índice  $k$  corre sobre los valores  $k = 1, 2$ , de modo que  $n = 4$  es la cardinalidad del conjunto  $\{k_a | k_a = 1, 2\} \times \{k_b | k_b = 1, 2\} \times \{j_a | j_a = \frac{1}{2}\} \times \{j_b | j_b = \frac{1}{2}\}$ .

El procedimiento necesario es entonces realizar una ortonormalización de Gram-Schmidt sobre un subespacio de dimensión  $n$  sobre el conjunto de vectores de movimiento relativo de dimensión  $m$ , cuyos componentes se encuentran referenciados a la base ortonormal original

mediante los  $n \times m$  coeficientes  $\mathcal{C}$ . Esto nos dará un nuevo conjunto de pares

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger &= \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{W}_{\kappa_r J}^{\pi_a k_a j_a \pi_b k_b j_b} \gamma_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^\dagger \\ \tilde{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu} &= \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{W}_{\kappa_r J}^{\pi_a k_a j_a \pi_b k_b j_b} \gamma_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu},\end{aligned}\quad (\text{D.18})$$

donde los coeficientes  $\mathcal{W}$  referencian a la base ortonormal original de acuerdo al algoritmo

$$\tilde{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger = \begin{cases} \frac{\hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b 1; J M_J \Gamma \mu}^\dagger}{\|\hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b 1; J M_J \Gamma \mu}^\dagger\|} & \text{si } \kappa_r = 1 \\ \frac{\hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger - \sum_{\kappa_l=1}^{\kappa_r-1} \langle \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_l J M_J \Gamma \mu}^\dagger | \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger \rangle \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_l J M_J \Gamma \mu}^\dagger}{\|\hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger - \sum_{\kappa_l=1}^{\kappa_r-1} \langle \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_l J M_J \Gamma \mu}^\dagger | \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger \rangle \hat{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_l J M_J \Gamma \mu}^\dagger\|} & \text{si } \kappa_r = 2, \dots, m \end{cases}, \quad (\text{D.19})$$

donde los traslapes entre estados se obtienen numéricamente referenciando siempre a la base ortonormal original como si se tratara de un producto interno canónico  $\langle v|u \rangle = v^T u$  sobre  $\mathbb{R}^n$  y norma  $\|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle}$ .

Los pares *tildados* de la ecuación (D.18) ya no tienen a los números cuánticos  $N_r$ ,  $l_r$  y  $S$  bien definidos, sino que son una mezcla de estados con  $N_R = 0$ , es decir, dentro del subespacio sin excitaciones de CM.

Notamos entonces que dados los viejos elementos de matriz de forward

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^{\pi_a k_a j_a', \pi_b k_b j_b'; J' M_J' \Gamma' \mu'} \\ = \langle \tilde{0} | \left[ \gamma_{\pi_a k_a j_a', \pi_b k_b j_b'; J' M_J' \Gamma' \mu'}, \left[ H, \gamma_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^\dagger \right] \right] | \tilde{0} \rangle,\end{aligned}\quad (\text{D.20})$$

tendremos ahora una nueva matriz  $\tilde{\mathbb{A}}$  definida por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{A}}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^{\pi_a' \pi_b' \kappa_r' J' M_J' \Gamma' \mu'} \\ = \langle \tilde{0} | \left[ \tilde{\gamma}_{\pi_a' \pi_b' \kappa_r' J' M_J' \Gamma' \mu'}, \left[ H, \tilde{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger \right] \right] | \tilde{0} \rangle \\ = \sum_{k_a' j_a' k_b' j_b'} \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{W}_{\kappa_r' J'}^{\pi_a' k_a' j_a' \pi_b' k_b' j_b'} \mathcal{W}_{\kappa_r J}^{\pi_a k_a j_a \pi_b k_b j_b} \mathbb{A}_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^{\pi_a' k_a' j_a', \pi_b' k_b' j_b'; J' M_J' \Gamma' \mu'}.\end{aligned}\quad (\text{D.21})$$

Análogamente, para la matriz backward se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{B}}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^{\pi_a' \pi_b' \kappa_r' J' M_J' \Gamma' \mu'} \\ = -\langle \tilde{0} | \left[ \tilde{\gamma}_{\pi_a' \pi_b' \kappa_r' J' M_J' \Gamma' \mu'}, \left[ H, \tilde{\gamma}_{\pi_a \pi_b \kappa_r J M_J \Gamma \mu}^\dagger \right] \right] | \tilde{0} \rangle \\ = \sum_{k_a' j_a' k_b' j_b'} \sum_{k_a j_a k_b j_b} \mathcal{W}_{\kappa_r' J'}^{\pi_a' k_a' j_a' \pi_b' k_b' j_b'} \mathcal{W}_{\kappa_r J}^{\pi_a k_a j_a \pi_b k_b j_b} \mathbb{B}_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^{\pi_a' k_a' j_a', \pi_b' k_b' j_b'; J' M_J' \Gamma' \mu'},\end{aligned}\quad (\text{D.22})$$

donde las matrices  $\mathbb{A}_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^{\pi'_a k'_a j'_a, \pi'_b k'_b j'_b; J' M'_J \Gamma' \mu'}$  y  $\mathbb{B}_{\pi_a k_a j_a, \pi_b k_b j_b; J M_J \Gamma \mu}^{\pi'_a k'_a j'_a, \pi'_b k'_b j'_b; J' M'_J \Gamma' \mu'}$  son las matrices de forward y backward que ya han sido calculadas en el Apéndice B.

El hecho de restringir los cálculos a un subespacio donde los fonones no presentan excitaciones de CM tiene la ventaja de reducir la dimensión de las matrices involucradas y por tanto requiere de menor poder de cómputo y se eliminan los estados redundantes que surgen por efectos de base. Además, se tiene la ventaja de haber recuperado un esquema  $(LS)J$  donde es sencillo definir una posible interacción espín-espín.

La principal desventaja del método es que se elimina la posibilidad de que el vacío de la RPA tenga una estructura de pares de fonones acoplados a excitación total de CM nula aunque cada uno de sus componentes contenga excitaciones de CM, es decir, se pierde la contribución de estados de la forma  $[\gamma_{N_r, N_R}^\dagger \gamma_{N_r, N_R}^\dagger]^{00}$ .

Es por lo anterior y por la simpleza de los cálculos involucrados, que se prefiere optar por la segunda opción, donde se retiene una base con estados espúrios, pero estos son separados tras modificar las ecuaciones de la RPA. Esta opción es descrita en la Sección D.2.

## D.2. Separación exacta de estados espúrios

El método mostrado en la presente Sección ha sido modificado de [40] para incluir la posibilidad de partículas con masas distintas como los componentes de los fonones utilizados en la construcción del método de RPA. Dicho método consiste en diagonalizar al Hamiltoniano en la base original que contiene estados espúrios, pero separando a estos de los modos *intrínsecos*.

En la Sección 3.2 se definió al fonón RPA como

$$\Gamma_{\alpha; \Gamma \mu}^\dagger = \sum_{ab} \left( X_{\alpha; ab \Gamma} \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger - Y_{\alpha; ab \Gamma} \gamma_{\bar{a}b; \Gamma \mu} \right), \quad (\text{D.23})$$

los cuales diagonalizan al Hamiltoniano que puede ser escrito de la siguiente manera

$$\mathcal{H} = \sum_{aba'b'} \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma \mu)(\Gamma \mu)} \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \gamma^{a'b'; \Gamma \mu} + \frac{1}{2} \sum_{aba'b'} \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma \mu)(\Gamma \mu)} \left( \gamma_{ab; \Gamma \mu}^\dagger \gamma^{\dagger \bar{a}'b'; \Gamma \mu} + \gamma_{\bar{a}'b'; \Gamma \mu} \gamma^{a\bar{b}; \Gamma \mu} \right). \quad (\text{D.24})$$

Cuantizando en el espacio de bosones RPA, los operadores de momento  $\mathcal{P}$  y de coordenada de CM  $\mathcal{R}$  están dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\Gamma\mu}^\dagger &= \sum_{ab} p_{ab} \left( \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger - \gamma_{\bar{a}b;\Gamma\mu} \right) \\ \mathcal{R}_{\Gamma\mu}^\dagger &= \frac{1}{\tilde{M}} \sum_{ab} m_{ab} r_{ab} \left( \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger + \gamma_{\bar{a}b;\Gamma\mu} \right),\end{aligned}\quad (\text{D.25})$$

donde los elementos de matriz  $p_{ab}$  y  $r_{ab}$  satisfacen que  $p_{ab}^* = -p_{ab}$  y  $r_{ab}^* = r_{ab}$  respectivamente. Además, se ha denotado por  $m_{ab}$  a la masa del par  $\gamma$ , es decir,  $m_{ab} = m_a + m_b$ .

A diferencia de la referencia [40], los operadores  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  tienen en este caso índices magnéticos y por ende se debe definir una regla de transformación, la cual es elegida de manera consistente con la forma en que transforman los pares  $\gamma, \gamma^\dagger$  al subir o bajar índices, es decir, definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\Gamma\mu} &= \left( \mathcal{P}_{\Gamma\mu}^\dagger \right)^\dagger & \mathcal{P}_{\bar{\Gamma}\bar{\mu}} &= (-1)^{\phi_\mu} \mathcal{P}^{\Gamma\mu} \\ \mathcal{R}^{\Gamma\mu} &= \left( \mathcal{R}_{\Gamma\mu}^\dagger \right)^\dagger & \mathcal{R}_{\bar{\Gamma}\bar{\mu}} &= (-1)^{\phi_\mu} \mathcal{R}^{\Gamma\mu}.\end{aligned}\quad (\text{D.26})$$

Con lo anterior es posible demostrar que  $\mathcal{P}_{\Gamma\mu}^\dagger = \mathcal{P}_{\bar{\Gamma}\bar{\mu}}$  y  $\mathcal{R}_{\Gamma\mu}^\dagger = \mathcal{R}_{\bar{\Gamma}\bar{\mu}}$ , por lo cual se omite el conjugado hermitiano  $\dagger$  en adelante.

Una vez aclarada la notación de índices, es posible determinar a la *Masa total efectiva*  $\tilde{M}$  del fonón  $\Gamma$  que aparece en la ecuación (D.25) imponiendo la relación de conmutación canónica  $[\mathcal{R}_{\Gamma'\mu'}, \mathcal{P}^{\Gamma\mu}] = i\delta_{\Gamma'}^\Gamma \delta_{\mu'}^\mu$  (en unidades naturales), con lo cual resulta ser

$$\tilde{M} = -2i \sum_{ab} m_{ab} r_{ab} p_{ab} . \quad (\text{D.27})$$

En caso de que las energías de una partícula sean autoconsistentes y se tenga un espacio de partícula-agujero completo (no truncado) se tendrá que  $\tilde{M} = M = \sum_{ab} m_{ab}$  es la masa total *real* de los fonones y no será necesario ningún procedimiento extra para recuperar la simetría traslacional de los estados RPA.

Sin embargo, en el caso general, el hecho de que  $[\gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{P}] \neq 0$  y  $[\gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{R}] \neq 0$  muestra que el conjunto de bosones  $\Gamma$  contiene mezclas de movimiento de CM. Es por ello

que se desea transformar a la base de bosones a un nuevo conjunto  $\{\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \gamma^{ab;\Gamma\mu}\} \longrightarrow \{\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{G}_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{G}^{ab;\Gamma\mu}\}$ , que consiste en haber separado explícitamente a los modos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  de los bosones intrínsecos  $\mathcal{G}^\dagger$  y  $\mathcal{G}$ , satisfaciendo estos últimos las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu}, \mathcal{G}_{ab;\Gamma\mu}^\dagger] &= \delta_{a'a}\delta_{b'b} \\ [\mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu}, \mathcal{G}_{ab;\Gamma\mu}] &= 0 \\ [\mathcal{G}_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{P}] &= [\mathcal{G}^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{P}] = 0 \\ [\mathcal{G}_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{R}] &= [\mathcal{G}^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{R}] = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Para garantizar lo anterior será necesario llevar a cabo un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt -cuyos detalles no se muestran en el presente documento pero que puede ser consultado en [40]-, con lo cual se obtiene que

$$\begin{aligned} \gamma^{ab;\Gamma\mu} &= -i [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}] \mathcal{R}^{\Gamma\mu} + i [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}] \mathcal{P}^{\Gamma\mu} \\ &+ \sum_{a'b'} \left\{ [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger] \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu} - [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu}] \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \right\} \\ \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger &= -i [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{P}^{\Gamma\mu}] \mathcal{R}_{\Gamma\mu} + i [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{R}^{\Gamma\mu}] \mathcal{P}_{\Gamma\mu} \\ &+ \sum_{a'b'} \left\{ [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger] \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu} - [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu}] \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \right\} , \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

donde, a partir de (D.25) y de la relación de conmutación para las  $\gamma$ 's, se tiene que

$$\begin{aligned} [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}] &= [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{P}^{\Gamma\mu}] = p_{ab} \\ [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}] &= - [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{R}^{\Gamma\mu}] = \frac{1}{\tilde{M}} m_{ab} r_{ab} , \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

de modo que sustituyendo en (D.29) se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma^{ab;\Gamma\mu} &= -ip_{ab} \mathcal{R}^{\Gamma\mu} + \frac{i}{\tilde{M}} m_{ab} r_{ab} \mathcal{P}^{\Gamma\mu} + \sum_{a'b'} \left\{ [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger] \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu} - [\gamma^{ab;\Gamma\mu}, \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu}] \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \right\} \\ \gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger &= -ip_{ab} \mathcal{R}_{\Gamma\mu} - \frac{i}{\tilde{M}} m_{ab} r_{ab} \mathcal{P}_{\Gamma\mu} + \sum_{a'b'} \left\{ [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger] \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu} - [\gamma_{ab;\Gamma\mu}^\dagger, \mathcal{G}^{a'b';\Gamma\mu}] \mathcal{G}_{a'b';\Gamma\mu}^\dagger \right\} . \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

A su vez, se puede sustituir a la ecuación (D.31) en el Hamiltoniano de la ecuación (D.24) obteniendo así que  $\mathcal{H}$  es, en términos de los nuevos bosones, de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \alpha_0 \mathcal{R}^{\Gamma\mu} \mathcal{R}_{\Gamma\mu} + \beta_0 \mathcal{P}^{\Gamma\mu} \mathcal{P}_{\Gamma\mu} + \mathcal{R}_{\Gamma\mu} \sum_{ab} \alpha_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} + \mathcal{G}^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu} \right) \\ & + i \mathcal{P}_{\Gamma\mu} \sum_{ab} \beta_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} - \mathcal{G}^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu} \right) + \mathcal{H}_{int} (\mathcal{G}, \mathcal{G}^\dagger) . \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Los términos en (D.32) que son cuadráticos en  $\mathcal{P}$  y en  $\mathcal{R}$  corresponden a oscilaciones espurias del CM, mientras que los términos lineales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  generan acoplamiento espúrios entre los modos intrínsecos y el movimiento de CM. Dichos términos de acoplamiento deben ser descartados y los modos verdaderamente intrínsecos deben obtenerse únicamente diagonalizando a  $\mathcal{H}_{int}$ .

Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , así como el Hamiltoniano  $\mathcal{H}_{int}$  se pueden obtener directamente de realizar la sustitución de (D.31) en la expresión para  $\mathcal{H}$ . Sin embargo, dicho proceder puede resultar tedioso y es por ello que en [40] se propone la siguiente manera de determinarlos:

A partir de (D.32) y usando que de acuerdo a la ecuación (D.30) los operadores  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^\dagger$  conmutan con  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$ , se puede calcular que

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}] &= \alpha_0 \left( \mathcal{R}^{\Gamma\mu} [\mathcal{R}_{\Gamma\mu}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}] + [\mathcal{R}^{\Gamma\mu}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}] \mathcal{R}_{\Gamma\mu} \right) + [\mathcal{R}_{\Gamma\mu}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}] \sum_{ab} \alpha_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} + \mathcal{G}^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu} \right) \\ [\mathcal{H}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}] &= \beta_0 \left( \mathcal{P}^{\Gamma\mu} [\mathcal{P}_{\Gamma\mu}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}] + [\mathcal{P}^{\Gamma\mu}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}] \mathcal{P}_{\Gamma\mu} \right) + i [\mathcal{P}_{\Gamma\mu}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}] \sum_{ab} \beta_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} - \mathcal{G}^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu} \right) . \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Utilizando la relación canónica de conmutación se tiene entonces que

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}] &= 2i\alpha_0 \mathcal{R}_{\Gamma\mu} + i \sum_{ab} \alpha_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} + \mathcal{G}_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \right) \\ [\mathcal{H}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}] &= -2i\beta_0 \mathcal{P}_{\Gamma\mu} + \sum_{ab} \beta_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} - \mathcal{G}_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \right) , \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

con lo cual resulta inmediato obtener a  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  como

$$\begin{aligned} [[\mathcal{H}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}], \mathcal{P}^{\Gamma\mu}] &= -2\alpha_0 \\ [[\mathcal{H}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}], \mathcal{R}^{\Gamma\mu}] &= -2\beta_0 , \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

por lo cual es posible despejar al acoplamiento espúrio de la ecuación (D.34) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\mathcal{R}} &\equiv \mathcal{R}_{\Gamma\mu} \sum_{ab} \alpha_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} + \mathcal{G}^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu} \right) \\
 &= -i\mathcal{R}_{\Gamma\mu} \left( [\mathcal{H}, \mathcal{P}^{\Gamma\mu}] + i [[\mathcal{H}, \mathcal{P}_{\Gamma\mu}], \mathcal{P}^{\Gamma\mu}] \mathcal{R}^{\Gamma\mu} \right) \\
 \mathcal{H}_{\mathcal{P}} &\equiv i\mathcal{P}_{\Gamma\mu} \sum_{ab} \beta_{ab} \left( \mathcal{G}^{a\bar{b};\Gamma\mu} - \mathcal{G}^{\dagger a\bar{b};\Gamma\mu} \right) \\
 &= i\mathcal{P}_{\Gamma\mu} \left( [\mathcal{H}, \mathcal{R}^{\Gamma\mu}] - i [[\mathcal{H}, \mathcal{R}_{\Gamma\mu}], \mathcal{R}^{\Gamma\mu}] \mathcal{P}^{\Gamma\mu} \right) .
 \end{aligned} \tag{D.36}$$

Por ende, uno puede determinar a los acoplamientos espúrios sin la necesidad de construir explícitamente a los bosones  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}^\dagger$ . De hecho, uno puede evaluar a dichos acoplamientos en términos de la base original de bosones  $\gamma$  y  $\gamma^\dagger$  como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\mathcal{R}} &= \frac{1}{2} \sum_{aba'b'} \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(R)} \left\{ \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{a'\bar{b}';\Gamma\mu} + \frac{1}{2} \sum_{aba'b'} \left( \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{\dagger a'\bar{b}';\Gamma\mu} + \gamma_{a'\bar{b}';\Gamma\mu} \gamma^{a\bar{b};\Gamma\mu} \right) \right\} \\
 \mathcal{H}_{\mathcal{P}} &= \frac{1}{2} \sum_{aba'b'} \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(P)} \left\{ \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{a'\bar{b}';\Gamma\mu} - \frac{1}{2} \sum_{aba'b'} \left( \gamma_{a\bar{b};\Gamma\mu}^\dagger \gamma^{\dagger a'\bar{b}';\Gamma\mu} + \gamma_{a'\bar{b}';\Gamma\mu} \gamma^{a\bar{b};\Gamma\mu} \right) \right\} ,
 \end{aligned} \tag{D.37}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(R)} &= \frac{4\alpha_0}{\tilde{M}^2} [m_{ab}r_{ab}(\tilde{r}_{a'b'} - m_{a'b'}r_{a'b'}) + (\tilde{r}_{ab} - m_{ab}r_{ab})m_{a'b'}r_{a'b'}] \\
 \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(P)} &= -4\beta_0 [p_{ab}(\tilde{p}_{a'b'} - p_{a'b'}) + (\tilde{p}_{ab} - p_{ab})p_{a'b'}] ,
 \end{aligned} \tag{D.38}$$

mientras que los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= - \sum_{aba'b'} p_{ab} \left( \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} + \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} \right) p_{a'b'} \\
 \alpha_0 &= \frac{1}{\tilde{M}^2} \sum_{aba'b'} m_{ab}r_{ab} \left( \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} - \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} \right) m_{a'b'}r_{a'b'} \\
 \tilde{r}_{ab} &= \frac{\tilde{M}}{2i\alpha_0} \sum_{a'b'} \left( \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} + \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} \right) p_{a'b'} \\
 \tilde{p}_{ab} &= \frac{i}{2\beta_0\tilde{M}} \sum_{a'b'} \left( \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} - \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} \right) m_{a'b'}r_{a'b'} \\
 \tilde{M} &= -2i \sum_{ab} m_{ab}r_{ab}p_{ab} .
 \end{aligned} \tag{D.39}$$

De este modo es posible remover del Hamiltoniano en (D.24) a los acoplamientos espúrios dados por la ecuación (D.37). Todo ello en términos de la base original de bosones. Es decir,

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{\mathcal{R}} - \mathcal{H}_{\mathcal{P}} . \quad (\text{D.40})$$

A nivel de las ecuaciones de RPA usuales, esto es equivalente a resolver el mismo sistema pero modificando a las matrices forward y backward como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{A}}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} &= \mathbb{A}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} - \frac{1}{2} \left( \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(R)} + \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(P)} \right) \\ \tilde{\mathbb{B}}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} &= \mathbb{B}_{(ab)(a'b')}^{(\Gamma\mu)(\Gamma\mu)} - \frac{1}{2} \left( \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(R)} - \mathcal{Z}_{(ab)(a'b')}^{(P)} \right) . \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

A su vez, dicha modificación es equivalente en términos del Hamiltoniano (D.32) escrito como función de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$ , al Hamiltoniano

$$\mathcal{H}' = \alpha_0 \mathcal{R}^{\Gamma\mu} \mathcal{R}_{\Gamma\mu} + \beta_0 \mathcal{P}^{\Gamma\mu} \mathcal{P}_{\Gamma\mu} + \mathcal{H}_{int} (\mathcal{G}, \mathcal{G}^\dagger) . \quad (\text{D.42})$$

Es decir, aún no se ha removido el término espúrio correspondiente a la oscilación del CM dada por  $\alpha_0 \mathcal{R}^2 + \beta_0 \mathcal{P}^2$ . Sin embargo, dicho modo aparece a una energía finita y se separa de manera exacta del resto del espectro con la energía

$$E_{CM} = 2\sqrt{\alpha_0\beta_0} . \quad (\text{D.43})$$

En general las soluciones obtenidas mediante el proceso mostrado en el presente Apéndice son positivas. En el caso de que  $\alpha_0 \leq 0$  ó  $\beta_0 \leq 0$  uno puede agregar un término  $\lambda(\alpha_0 \mathcal{R}^2 + \beta_0 \mathcal{P}^2)$  al Hamiltoniano.

En el caso particular del presente modelo, la energía del estado puramente de CM  $E_0$  resulta ser del orden de 3 GeV, por lo que está muy por encima de los estados mesónicos presentados en el Capítulo 5.

# Bibliografía

- [1] C. E. Carlson, T. H. Hansson y C. Peterson, Phys. Rev. D, **27**, 1556, (1983).
- [2] A. Dobado, J. R. Peláez, Phys. Rev. D **56**, 3057 (1997).
- [3] T. DeGrand and C. DeTar, *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*, World Scientific (2006).
- [4] W. Bietenholz *et al.*, Phys. Rev. D **84**, 054509 (2011).
- [5] W. Bietenholz, Int. J. Mod. Phys. E **25**, 1642008 (2016).
- [6] J. J. Dudek, Phys. Rev. D **84**, 074023 (2011).
- [7] J. J. Dudek *et al.*, Phys. Rev. D **83**, 111502 (2011).
- [8] C. D. Roberts and A. G. Williams, Prog. Part. Nucl Phys., **33**, 477 (1994).
- [9] R. Alkofer and L. von Smekal, Phys. Rep. **353**, 281465 (2001).
- [10] A. Bashir, Chang lei, *et al.*, Commun. Theor. Phys. **58**, 1 (2012).
- [11] T. Yépez-Martínez, *Un modelo motivado de la Cromodinámica Cuántica a bajas energías para los niveles orbitales S y P*, Tesis de Doctorado, PCF-UNAM (2011).
- [12] A. Amor, *QCD a bajas energías, usando métodos de muchos cuerpos*, Tesis de Licenciatura, FC-UNAM (2011).
- [13] T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, Phys. Rev. C **81**, 045204 (2010).

- [14] A. Amor-Quiroz, T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, *et al.*, Int. Jour. Mod. Phys. E, **26** No. 12 (2017) 1750082.
- [15] P. O. Hess, A. P. Szczepaniak, Phys. Rev. C **73**, 025201 (2006 ).
- [16] T. Yépez-Martínez, P. O. Hess, *et al.*, J. Phys. Conf. Ser., **322**, 012016 (2011).
- [17] T. Yépez-Martínez, A. Amor, P. O. Hess, *et al.*, Int. J. Mod. Phys. E **20**, 192 (2011).
- [18] O. Civitarese, P. O. Hess, Int. Jour. Mod. Phys. E **15**, 1233, (2006).
- [19] O. Civitarese, P. O. Hess, A. Amor, Int. J. Mod. Phys. E **22** 9 (2013).
- [20] F. J. Llanes-Estrada, S. R. Cotanch, Phys. Rev. Lett. **84**, 6 (2000).
- [21] F. J. Llanes-Estrada and S. R. Cotanch, Nucl. Phys. A **697**, 303 (2002).
- [22] P. Bicudo, M. Cardoso, F. J. Llanes-Estrada *et al.*, Phys. Rev. D **94**, 054006 (2016).
- [23] G. P. Kamuntavičius, Journal of Mathematical Physics, **55**, 042103 (2014).
- [24] A. Duncan, *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory*, Oxford University Press (2012).
- [25] J. Escher y J. P. Draayer, J. of Math. Phys. **39** (1998) 5123.
- [26] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson, Phys. Rev. D **65**, 025012 (2001).
- [27] N. Isgur; *Quark confinement and the hadron spectrum III*, World Scientific (2000).
- [28] A. P. Szczepaniak and E. S. Swanson, Phys. Rev. D **55**, 1578 (1997).
- [29] J. R. Finger and J. E. Mandula, Nucl. Phys. B **199**, 168 (1982).
- [30] S. L. Adler, A. C. Davis, Nucl. Phys. B **244**, 469 (1984).
- [31] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Publishers (1996).

- [32] G.P. Kamuntavicius, R.K. Kalinauskas, *et al.*, Nucl. Phys. A **695** (2001).
- [33] M. Moshinsky, Nucl. Phys. **13** (1959) 104.
- [34] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer (1980).
- [35] D. Bohm, D. Pines, Phys. Rev. **92**, 609, (1953).
- [36] J. Suhonen, *From Nucleons to Nucleus, Concepts of Microscopic Nuclear Theory*, Springer (1965).
- [37] David J. Rowe, *Nuclear Collective Motion, Models and Theory*, World Scientific Publishing (1970).
- [38] P. Papakonstantinou 2007 EPL **78** 12001 (2007).
- [39] D. J. Thouless, Nucl. Phys. **22**, 78 (1961).
- [40] J. Meyer-ter-Vehn, Z. Physik. A **289**, 319, (1979).
- [41] P.M. Chesler, A. Vuorinen, JHEP, **11**, 037, (2006).
- [42] P.M. Chesler, A. Gynther, A. Vuorinen, JHEP, **09**, 003, (2009).
- [43] J. Mayer, K. Khairy, J. Howard, Am. J. Phys. **78** (2010).
- [44] A.V. Manohar, C.T. Sachrajda, R.M. Barnett, PDG (2016).
- [45] MINUIT Function Minimization and Error Analysis; CERN Program Library entry D506, Geneva (1994).
- [46] Particle Data Group (C. Patrignani *et al.*), Chin. Phys. C **40**, 100001 (2016).
- [47] P. Ball, J.M. Frere y M. Tytgat, Phys. Lett. B **365** 367 (1996).
- [48] A. De Rújula, H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).

- [49] S. Stone y L. Zhang, Phys. Rev. Lett. **111**, 062001 (2013).
- [50] G. Eichmann, C. S. Fischer, W. Heupel Phys. Lett. B **753**, 282 (2016).
- [51] P. Wang, S. R. Cotanch and I. J. General, Eur. Phys. J. C **55**, 409 (2008).
- [52] F. J. Llanes-Estrada, S. R. Cotanch, A. P. Szczepaniak and E. S. Swanson, Phys. Rev. C **70**, 035202 (2004).
- [53] C. Barbieri, D Van Neck y W. H. Dickhoff, Phys. Rev. A **76**, 052503 (2007).
- [54] W. Xie, L.Q. Mo, P. Wang and S. R. Cotanch, Phys. Lett. B **725**, 148 (2013).
- [55] T. Yépez-Martínez, O. Civitarese and P. O. Hess, Eur. Phys. J. A 54: 22 (2018).
- [56] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev y V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of angular momentum*, World Scientific (1988).