



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Valuación de opciones exóticas vía
Montecarlo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Isaías Manuel Ramírez Bañales

TUTOR

Fernando Baltazar Larios





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi madre por su incesante apoyo y por mostrarme que una gran profesora puede cambiar la vida de muchas personas; por enseñarme a siempre luchar por lo que creo correcto, por escuchar mis avances de tesis por amor, no porque los entendiera, y por enseñarme a vivir.

A Rubí por ser parte fundamental de este trabajo al darme las primeras correcciones, ayudarme a realizar todo el proceso de trámites, motivarme durante toda la travesía y por nunca dejar de maravillarme y hacerme feliz.

A Brandon y Jorge por su claridad, las desveladas, las risas y las lágrimas.

Al Dr. Baltazar por su guía para este trabajo, por ser mi primer profesor de probabilidad y por su gran paciencia.

A todos mis sinodales por sus comentarios acerca de esta tesis ya que con ellos la calidad del trabajo mejoró cuantiosamente.

A todos mis amigos y familiares quienes me han apoyado de maneras muy diversas y me han hecho ser quien soy.

Índice general

1. Conceptos Básicos De Finanzas	1
1.1. Activos financieros e interés	1
1.1.1. Activos Financieros	1
1.1.2. Tasa de Interés	2
1.2. Portafolios	3
1.2.1. Portafolios Autofinanciables	4
1.2.2. Portafolios Replicantes	4
1.2.3. Completez de mercados	4
1.3. Arbitraje	5
1.4. Opciones	10
1.4.1. Resultados básicos	11
1.5. Modelo de Cox-Ross-Rubinstein	12
1.5.1. Desarrollo	13
1.5.2. Caso límite	16
1.5.3. Ejemplo de CRR	19
1.6. Modelo de Markowitz	20
1.6.1. Planteamiento	21
1.6.2. Portafolio más conservador	23
1.6.3. Con un activo libre de riesgo	25
1.6.4. Portafolios bajo la medida libre de riesgo	26
1.6.5. Ejemplo	27
2. Algunos derivados exóticos	31
2.1. Opciones Asiáticas	31
2.1.1. Desigualdades con opciones asiáticas	32
2.1.2. Valuación de opciones asiáticas	36
2.1.2.1. Fórmula cerrada de asiáticas geométricas	36

2.1.2.2.	Valuación de Montecarlo para opciones asiáticas	38
2.2.	Opciones Lookback	38
2.2.1.	Encontrando una fórmula explícita para $B(u, T)$	39
2.2.2.	Valuación de opciones lookback	51
2.2.2.1.	Fórmulas cerradas de lookback	51
2.2.2.2.	Valuación de Montecarlo para las opciones Lookback	54
2.2.2.3.	Valuación de Montecarlo para opciones lookback	62
2.3.	Opciones de barrera	62
2.3.1.	Valuación de opciones de barrera	63
2.3.1.1.	Formula cerrada de opciones de barrera	63
2.3.1.2.	Valuación de Montecarlo para opciones de barrera	67
3.	Entropía	69
3.1.	Introducción	69
3.2.	Entropía de Shannon	71
3.2.1.	Ejemplos:	72
3.3.	Divergencia de Kullback-Leibler	76
3.3.1.	Ejemplo	78
4.	Entropía en las finanzas	81
4.1.	Algunos ejemplos	81
4.1.1.	Medida para el riesgo	81
4.1.2.	Selección de portafolios	82
4.1.3.	Comportamiento de Índices	83
4.2.	Medida libre de riesgo	84
4.3.	Modelos con un enfoque basado en entropía	87
4.3.1.	Modelo de Cox Ross Rubinstein con entropía de Shannon	87
4.3.2.	Montecarlo Ponderado	93
5.	Conclusiones	101
Apéndice A.	Códigos en Julia	103
A.1.	Conceptos Básicos De Finanzas	103
A.1.1.	Ejemplo de CRR	103

A.1.2. Ejemplo de Markowitz	104
A.2. Algunos derivados exóticos	106
A.2.1. Montecarlo para la valuación de opciones asiáticas . . .	106
A.2.2. Montecarlo para la valuación de opciones asiáticas en paralelo	107
A.2.3. Montecarlo para la valuación de opciones lookback . .	110
A.2.4. Montecarlo para la valuación de opciones de barrera . .	114
A.3. Entropía	117
A.3.1. Ejemplo de divergencia de Kullback-Leibler	117
A.4. Modelos con un enfoque basado en entropía	119
A.4.1. Modelo de Cox Ross Rubinstein con entropía de Shannon	119
A.4.2. Montecarlo Ponderado	120
Apéndice B. Propiedades Básicas de Esperanza Condicional	127
Apéndice C. Una Demostración Pertinente	131

Introducción

Esta tesis está dirigida a aquellos lectores que tengan interés en el área de finanzas y quieran profundizar en los temas de entropía y valuación de derivados exóticos. A lo largo de este trabajo se aborda la valuación de dichos derivados debido a la importancia que la flexibilidad de éstos tienen en el mercado de contratos a la medida al ajustarse a las necesidades y deseos del consumidor. Con esto en mente se presenta el desarrollo que da sustento a las valuaciones tanto de manera teórica como computacional.

Debido al interés en la simulación de derivados, en este trabajo se hace énfasis en que el lector cuente con una fuente de consulta de las simulaciones usadas. Todo el desarrollo computacional se hizo con el lenguaje de programación Julia versión 0.4.3, el cual tiene una sintaxis parecida a la de R, aunado a su gran velocidad de procesamiento y facilidad de implementación de algoritmos resultó en la herramienta perfecta.

En el *Capítulo 1* se formalizan los conceptos financieros necesarios para este trabajo, permitiendo así poder expresar los problemas desde una perspectiva rigurosa. Además se da la construcción del modelo de Cox-Ross-Rubinstein (CRR), para que el lector pueda comprender la idea básica de la valuación de un derivado a tiempo discreto, y se demuestra la convergencia del modelo CRR al modelo de Black-Scholes. Esto último resulta de particular interés ya que se muestra la convergencia de un modelo discreto a uno continuo, que debido a la precisión finita de un sistema computacional es a lo que podemos aspirar para realizar valuaciones. Por último se describe el modelo de Markowitz de selección de portafolios para que el alumno termine de familiarizarse con la idea de *activo libre de riesgo* y *medida libre de riesgo*.

El tema que ocupa al *Capítulo 2* es la valuación de derivados exóticos de

tipo europeo; aquí se desarrollan los modelos teóricos para calcular el precio de algunos derivados, obteniendo formulas explícitas y en caso de que no sea posible obtener una formula se describirá el problema que imposibilita su obtención.

El *Capítulo 3* plantea el concepto de entropía, el cuál permite desarrollar modelos más refinados para la valuación de derivados, en este capítulo se profundiza en resultados básicos de entropía tanto en entropía de Shannon, como en la divergencia de Kullback-Leibler.

Durante el *Capítulo 4* se demuestran resultados de entropía en finanzas, de los cuáles destacan las condiciones para una medida única libre de riesgo en mercados no completos, un modelo de simulación de Montecarlo ponderado basado en entropía; logrando así aterrizar las ideas de entropía en finanzas generando modelos útiles para la valuación de las opciones.

Cada una de los derivados exóticos estudiados será valuado por simulación Montecarlo, consiguiendo una forma de obtener los precios que se centra en la habilidad de programación del lector y no solamente en sus conocimientos en procesos estocásticos; además que se podrá dar solución a aquellos derivados que no tengan fórmula explícita.

En los apéndices se encuentran algunas notas de demostraciones y los códigos en Julia utilizados durante la elaboración de la tesis.

Capítulo 1

Conceptos Básicos De Finanzas

Con el objetivo de que esta tesis sea autocontenida y el de formalizar los conceptos usados durante el texto, este capítulo se enfoca en el desarrollo de las ideas esenciales del ámbito financiero que trabajaremos, así como en algunos resultados importantes y ejemplos que permitirán al lector comprender y familiarizarse con las ideas.

1.1. Activos financieros e interés

1.1.1. Activos Financieros

Entenderemos por *activo financiero* un contrato que brinda un derecho económico a quien lo posee, generando además una obligación por parte de quien lo expide de cumplir dicho contrato. Un activo muy usual son los bonos, los cuales brindan al emisor la posibilidad de capitalizarse el día de hoy a cambio de una promesa de pago a futuro a los inversionistas, si además el bono da un rédito económico durante la vigencia del contrato diremos que genera *dividendos*.

Otros ejemplos de instrumentos financieros son:

- Acciones
- Divisas
- Opciones

- Swaps

Definición 1 (Precio de un activo). *En un espacio de probabilidad filtrado¹ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$; el precio del activo i es un proceso estocástico*

$$S^i : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

adaptado² a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$,

donde el conjunto I puede ser de la forma:

$$\{0, 1\}, \{0, 1, \dots, T\}, [0, T],$$

con T pudiendo tomar valores reales extendidos.

Denotaremos al precio del activo i al tiempo t como S_t^i .

1.1.2. Tasa de Interés

Una tasa de interés (r) representa la ganancia (o pérdida) que un activo financiero brinda tras un periodo determinado de tiempo, expresado como porcentaje de la inversión realizada.

Definición 2 (Tasa de interés). *Sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$; la tasa de interés r es un proceso estocástico*

$$r : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}.$$

predecible³ respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$.

Resaltamos por su importancia la denominada *tasa libre de riesgo*, es la ganancia obtenida tras invertir en un activo financiero que no tiene riesgo de impago.

Cuando se habla de interés simple hablamos de los intereses generados por la inversión que no se acumulan para invertir en los siguientes periodos; por otra parte el interés compuesto refiere a cuando los intereses generados

¹Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ es una colección de σ -álgebras tales que $\mathcal{F}_t \leq \mathcal{F}_{t+1}$

²Si X es un proceso estocástico tal que $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para todo t en I , es adaptado

³Si X es un proceso estocástico tal que $X(t)$ es \mathcal{F}_{t-1} -medible para todo t en I , es predecible

se adhieren al capital y se reinvierten. En el caso del interés compuesto si r es una tasa que genera ganancias cada periodo $r^{(n)}$ una tasa nominal a n periodos y r^* una tasa que paga de forma continua se debe cumplir:

$$(1 + r)^t = \left(1 + \frac{r^{(n)}}{n}\right)^{tn} = e^{r^*t};$$

de esta manera visualizamos una forma de trasladar el dinero a través del tiempo.

Entenderemos por *valor presente* el valor del capital al tiempo 0.

Ejemplo 1. Si invertimos \$10 a una tasa anual libre de riesgo de 0.05 % al final de un periodo (en este caso un año) tendremos $10(1 + r) = 10.05$ pesos y al cabo de 5 años tendríamos 12.7628.

1.2. Portafolios

De manera intuitiva entendemos por *portafolio financiero* al conjunto de activos entre los cuales está repartida la inversión de un agente del mercado a través del tiempo. De manera formal debemos decir que el portafolio financiero en un espacio de n activos es un proceso estocástico de la forma:

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)),$$

donde cada $w_i(t)$ es un proceso estocástico que representa la cantidad de unidades del activo i al tiempo t .

Para referirnos al precio del j -ésimo activo al tiempo t usaremos la notación

$$S_t^j.$$

en el mundo de las finanzas se acostumbra decir que cuando $w_i(t)$ es negativo que *se está corto* mientras que en la situación opuesta *está largo*.

Denotaremos el valor presente del portafolio de la siguiente manera:

$$T(w(0)) = \sum_j w_j S_0^j,$$

notemos que el valor presente del portafolio es la suma de los valores presentes de los precios de cada activo multiplicado por la cantidad que se tiene de ellos.

1.2.1. Portafolios Autofinanciables

Los portafolios autofinanciables son aquellos en los que el cambio en el valor del portafolio depende solamente del cambio de los precios en los activos y no de sus cantidades.

Diremos que un portafolio es autofinanciable si para toda k :

$$\Delta T(w(1)) = T(w(k+1)) - T(w(k)) = \sum_{i=1}^n w_i(T+1)(S_{k+1}^i - S_k^i),$$

o de forma equivalente

$$\Delta T(w(1)) = \sum_{i=1}^n (w_i(T+1) - w_i(T))S_{k+1}^i = 0.$$

1.2.2. Portafolios Replicantes

También conocidos como coberturas son aquellos portafolios capaces de igualar un reclamo contingente por medio de distintos activos del mercado.

Sea $X = f(S_T)$ un reclamo contingente con fecha de maduración T . Decimos que X es replicable si existe un portafolio autofinanciable tal que $T(w(t)) = X$; con esto tenemos que el portafolio replica todos los valores que toma X .

1.2.3. Completez de mercados

Si en un mercado financiero cualquier reclamo contingente es replicable, el mercado es completo.

Es difícil tener esta propiedad en la práctica, por lo cual aún siendo un supuesto en muchos modelos teóricos, el principal conflicto con la falta de completez es que provoca que la medida libre de riesgo de la cuál hablamos en la siguiente sección no sea única. Así que cuando se quieren valorar los activos financieros se tienen una infinidad de resultados correctos, lo que no resulta satisfactorio. Una de las formas de abordar esta situación es haciendo uso del concepto de entropía en que profundizaremos en el Capítulo 3 (*Entropía*).

1.3. Arbitraje

En los mercados financieros se pueden tomar distintas estrategias con el fin de mejorar los rendimientos y reducir los riesgos; llevando esta idea al extremo, ¿somos capaces de no arriesgar y aún así obtener una ganancia? esto dependerá de las condiciones del mercado.

Un caso en el que esto es posible es el siguiente:

Dos casas de divisas⁴ ofertan, cada una, distintos precios cambiarios entre el euro (EUR) y el dólar americano(USD):

	U.S.A.	Italia
Precio	1 EUR=1.1884 USD	1 EUR=1.1255USD

Una sencilla idea es vender un euro en U.S.A. teniendo así 1.1844 dólares que si luego vendemos en Italia obtendremos ¡ 1.0558862 Euros!. Con la facilidad de transacciones en línea no resulta una idea descabellada.

La única forma de mejorar esta transacción es que nunca hubiéramos hecho una inversión por ese euro; podríamos haber pedido el dinero prestado y siempre y cuando la tasa fuera menor al 5.58 % ganaríamos dinero sin arriesgarnos; a este tipo de estrategias se les denomina *arbitraje*.

En este punto esperamos que el lector comience a tener una idea intuitiva de qué es el arbitraje. Aún así es necesario que lo definamos de manera formal para poder estudiar la idea correctamente.

Definición 3 (Arbitraje). *Existe arbitraje si hay un portafolio que cumpla:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T(w(0)) = 0) &= 1, \\ \mathbb{P}(T(w(1)) > 0) &= 1\end{aligned}$$

Entonces para que no existan oportunidades de arbitraje se tiene las condiciones:

⁴Información consultada en las páginas de Bank of America y Banca d'Italia 3 de sept 2015 0:41

$T(w(1))$ puede tomar valores positivos o negativos para todo w_j y

$$\mathbb{P}[T(w(1)) > 0] > 0,$$

$$\mathbb{P}[T(w(1)) < 0] > 0$$

Un caso menos intuitivo es cuando no existen arbitrajes.

Para esto se debe considerar una medida libre de riesgo a la cual denotaremos \mathbb{Q} , que cumple:

$$E_{\mathbb{Q}}[S_1^j] = (1 + r)S_0^j,$$

y que es equivalente⁵ a la medida \mathbb{P} del mercado.

Para ejemplificar lo anterior, si tenemos un préstamo a tasa r y compramos una cantidad w_j del activo j para toda j , entonces visto de forma matricial tenemos :

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} S_0 = \begin{pmatrix} S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^n \end{pmatrix} S_1 = \begin{pmatrix} S_1^1 \\ \vdots \\ S_1^n \end{pmatrix}.$$

El precio del portafolio al tiempo 1 será:

$$T(w(1)) = \sum_j w_j (S_1^j - (1 + r)S_0^j),$$

con generadora de momentos:

$$M(w) = E(e^{T(w(1))}).$$

Ahora enunciaremos el *Teorema Fundamental de la Valuación de Activos*, principal pilar de este trabajo al dar una condición necesaria y suficiente para que no existan arbitrajes en el mercado.

Teorema 1. *No hay oportunidades de arbitraje si y solo si existe \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} tal que $E_{\mathbb{Q}}[S_1^j] = (1 + r)S_0^j$.*

⁵Dos medidas son equivalentes si para cualquier conjunto A en la σ -álgebra sucede: $\mathbb{Q}(A) = 0$ Si y solo si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Demostración. Tomemos primero como hipótesis que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^j] = (1+r)S_0^j$. Entonces por la linealidad de la esperanza tenemos:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^j - (1+r)S_0^j] = 0,$$

entonces:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[w_j(S_1^j - (1+r)S_0^j)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[T(w(1))] = 0.$$

La última igualdad se da en dos casos:

- i) Si $T(w(1))$ es la función constante cero, esto no permite oportunidades de arbitraje porque no se logra recuperar el capital invertido.
- ii) Que $T(w(1))$ pueda tomar valores positivos y negativos; en este caso tampoco hay arbitraje ya que hay riesgo de tener pérdidas

Nuestra hipótesis ahora es que no existen oportunidades de arbitraje. Para evitar un exceso de notación, a menos que se especifique, la esperanza se tomará respecto a la medida \mathbb{P} .

Por lo cuál:

$$\begin{aligned} M(w) &= \mathbb{E}(e^{T(w(1))}) \\ &= \mathbb{E}[\exp(\sum_j w_j(S_1^j - (1+r)S_0^j))] \\ &= \mathbb{E}[\prod_j e^{w_j(S_1^j - (1+r)S_0^j)}]. \end{aligned}$$

Analizaremos qué pasa si cualquier w tiende a infinito. Sin pérdida de generalidad analizamos para j^* :

$$\begin{aligned} M(w) &\geq \mathbb{E}[\prod_j e^{w_j(S_1^j - (1+r)S_0^j)} \mathbb{1}_{\{S_1^{j^*} - (1+r)S_0^{j^*} > \epsilon\}}], \\ &= \mathbb{E}[\prod_j e^{w_j \epsilon} \mathbb{1}_{\{S_1^{j^*} - (1+r)S_0^{j^*} > \epsilon\}}] \\ &= C e^{w_{j^*} \epsilon} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_1^{j^*} - (1+r)S_0^{j^*} > \epsilon\}}] \\ &= C e^{w_{j^*} \epsilon} \mathbb{P}[S_1^{j^*} - (1+r)S_0^{j^*} > \epsilon], \end{aligned}$$

de lo anterior obtenemos la desigualdad

$$\mathbb{E}[\exp(\sum_j w_j (S_1^j - (1+r)S_0^j))] \geq C e^{w_{j^*} \epsilon} \mathbb{P}[S_1^{j^*} - (1+r)S_0^{j^*} > \epsilon],$$

que nos da una cota inferior para la generadora de momentos.

Por hipótesis sabemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_1^{j^*} - (1+r)S_0^{j^*} > \epsilon] &> 0 \text{ para una } \epsilon > 0 \\ \text{y } \mathbb{P}[S_1^{j^*} - (1+r)S_0^{j^*} < \epsilon] &> 0 \text{ si } \epsilon < 0, \end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\lim_{\pm w_{j^*} \rightarrow \infty} M(w) \rightarrow \infty \text{ y } M(0) = 1,$$

y al ser una función convexa y continua podemos asegurar que el mínimo existe. El siguiente paso es encontrarla. Así que derivamos $M(w)$ e igualamos a cero:

$$\frac{\partial M(w)}{\partial w_{j^*}} = \mathbb{E}[(S_1^j - (1+r)S_0^j) e^{T(w(1))}] = 0.$$

Entonces:

$$\mathbb{E}[S_1^j e^{T(w(1))}] = (1+r)S_0^j \mathbb{E}[e^{T(w(1))}],$$

por lo tanto

$$S_0^j = \frac{\mathbb{E}[S_1^j e^{T(w(1))}]}{(1+r)\mathbb{E}[e^{T(w(1))}]}.$$

Por lo anterior definimos a la medida \mathbb{Q} como:

$$\mathbb{Q}(A) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A e^{w'S_1}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{w'S_1}]}.$$

Y la derivada de Radon-Nikodym correspondiente es:

$$\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \mathbb{P}} = \frac{e^{w'S_1}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{w'S_1}]}.$$

Por construcción tenemos que $\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^j]}{1+r} = S_0^j$ donde se observa que el valor esperado de S_1^j bajo la medida \mathbb{Q} libre de riesgo del activo traído a valor presente coincide con el valor presente del activo. \square

En caso de tener más de un periodo queremos que la esperanza condicionada a la información de los precios hasta ese momento descontada con la tasa r sea igual al valor presente. Un *numerario* es el valor de un activo libre de riesgo en el tiempo. Cuando tenemos la tasa libre de riesgo r , el precio del numerario B al tiempo t es:

$$B_t = \prod_{i=0}^{t-1} (1 + r_i).$$

La demostración para el caso de múltiples periodos es similar a como se hizo en el Teorema (1), la condición de suficiencia queda idéntica debido a la linealidad de la esperanza condicional y al hecho de que S_t es \mathcal{F}_t medible.

Si tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{1+r_t} S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = S_t,$$

implica

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{1+r_t} S(t+1) - S_t \mid \mathcal{F}_t\right) = 0,$$

eso sucede si la variable toma valores positivos o que es idénticamente cero.

Para la condición necesaria obtenemos, a partir de la hipótesis de no arbitraje, una medida para conjuntos A en \mathcal{F}_t . Esto se hace de forma análoga a la usada en la construcción para un periodo; obteniendo:

$$\mathbb{Q}(A) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A e^{w' S_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{w' S_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t]}.$$

Algo que cabe destacar es que $\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}$ es una martingala respecto a la filtración \mathcal{F}_t , esto debido a que el numerario B_t es medible al tiempo t , porque la tasa se anuncia a inicio de periodo. Entonces puede salir de la esperanza y

tenemos como resultado:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_{t+1}}S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{B_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{1+r_t}S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{B_t}S_t.$$

Podemos afirmar:

$$\frac{S_t}{B_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_T}S_T \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Lo cuál es consecuencia de la propiedad de torre de esperanza condicional:

$$\begin{aligned} \frac{S_t}{B_t} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_{t+1}}S_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_{t+2}}S_{t+2} \mid \mathcal{F}_{t+1}\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_{t+2}}S_{t+2} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_{t+3}}S_{t+3} \mid \mathcal{F}_{t+2}\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_{t+3}}S_{t+3} \mid \mathcal{F}_t\right) = \dots = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{B_T}S_T \mid \mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

De esta manera observamos que el valor a tiempo t corresponde con el valor a tiempo T descontado T-t periodos.

1.4. Opciones

Las opciones son un tipo de instrumento financiero de los llamados productos derivados, que se caracterizan porque su precio depende de uno o varios activos denominados *subyacentes*; le dan al poseedor del instrumento el derecho de comprar o vender una cantidad acordada del subyacente a un precio prefijado, llamado *precio strike*, dentro de un periodo temporal pactado.

Debido a su planteamiento resulta un problema complejo su correcta valuación. Uno de los modelos más notables es el modelo propuesto por Fischer Black⁶ y Myron Scholes⁷, ya que en 1973 presentaron el primer modelo sa-

⁶(1938-1995), egresado de Harvard, laboró al final de su vida en Goldman Sachs, tras haber sido profesor del MIT.

⁷(1942-), economista, profesor emérito de Stanford, ganador del nobel de economía en 1997.

tisfactorio para la valuación de opciones.

Un call es una opción que da derecho a comprar, mientras que un put brinda el derecho de vender. Debido a que existen una gran cantidad de tipos de opciones mencionamos las que se estudiarán a lo largo de esta tesis.

- *Call europeo*: Es aquella opción que solamente se puede ejercer en su fecha de vencimiento (T) dándole al poseedor el derecho de comprar o vender cierta cantidad de un activo (S) a un precio fijado (k). El *payoff* de un call europeo es $C^E = \max[S_T - k, 0]$, mientras que el *payoff* de un put europeo es $C^E = \max[k - S_T, 0]$.
- *Opción americana*: A diferencia de las opciones europeas en ésta se puede ejercer la opción durante cualquier instante entre el tiempo cero y la fecha de vencimiento, permitiendo al poseedor comprar o vender cierta cantidad del activo (S) a un precio previamente acordado (k).
- *Opción asiática*: Este es un tipo de opción denominada exótica debido a que el cálculo para su *payoff* no depende del precio de S , es también conocida como opción de valor medio. Teniendo un precio strike (k) el *payoff* del call será $C^A = \max[A(T) - k, 0]$ donde la función $A(T)$ es el promedio de precios en un lapso de tiempo.

1.4.1. Resultados básicos

Paridad Put-Call

Lema 1. Sean un put y un call (europeos) con la misma fecha de vencimiento y mismo precio strike. Se cumple:

$$C_t - P_t = S_0 - ke^{-rt}.$$

Demostración. Intentando realizar arbitraje, si compramos un put al tiempo t , vendemos un call y compramos S el costo del portafolio sería $P_t - C_t + S_t$, que resulta ser positivo (ya que S es mucho mayor que P_t y C_t) por lo cual para financiarnos debemos pedir un préstamo a tasa r .

Debido a cómo diseñamos nuestro portafolio su valor siempre es positivo y más aún, es k .

$$P_t - C_t + S_t = k$$

Debido a que esta cifra no es aleatoria, para que no existiera arbitraje debería coincidir con el valor de invertirla a tasa r , es decir:

$$k = e^{r(T-t)}(P_t - C_t + S_t),$$

que si despejamos obtenemos:

$$C_t - P_t = S_0 - ke^{-rt}.$$

□

Pese a que la opción americana intuitivamente resulta más costosa debido al costo de oportunidad que tiene poder ejercer en cualquier instante, en el caso particular del call americano cuando el subyacente no genera dividendos resulta que el momento óptimo para ejercer coincide con el de un call europeo.

Teorema 2. *El momento óptimo de ejercer un call americano (que no genera dividendos) es la fecha de vencimiento.*

Demostración. Sea τ un tiempo de paro⁸. Si la opción americana se ejerciera en τ el payoff sería $\max[S_\tau - k, 0]$, debido a que la función máximo es convexa y que el proceso de descuentos es una martingala podemos usar la desigualdad de Jensen para esperanza condicional⁹ podemos afirmar:

$$\mathbb{E}[S_\tau - k]_+ \leq \mathbb{E}[S_T - k]_+$$

lo cuál nos indica que el mejor momento para ejercer un call americano es cuando $\tau = T$.

□

1.5. Modelo de Cox-Ross-Rubinstein

Un modelo simplificado para la valuación de opciones americanas y europeas a tiempo discreto es el propuesto por Cox¹⁰, Ross¹¹ y Rubinstein¹²

⁸Sea $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ una variable aleatoria, decimos que τ es tiempo de paro respecto a la filtración $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ si $\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) = n\}$ es elemento de \mathcal{F}_n para toda n en \mathbb{N}

⁹Ver apéndice.

¹⁰John Cox (1942-) es economista, actualmente profesor del MIT y sus investigaciones recientes se enfocan en políticas de inversión optimas para empresas e instituciones.

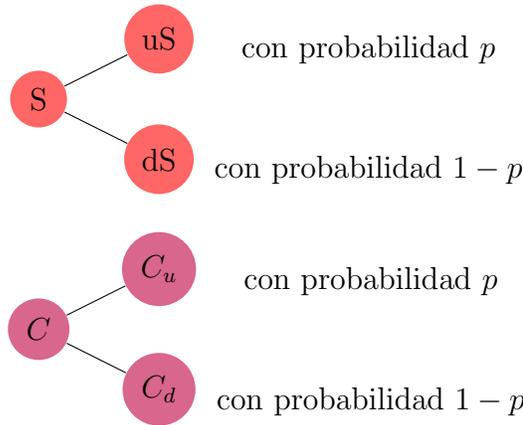
¹¹Stephen Ross (1944-) es economista, actualmente profesor del MIT actualmente sus investigaciones se centran en el Teorema de recuperación.

¹²Mark Rubinstein es actualmente profesor de Berkeley, actualmente sus investigaciones se desarrollan en la historia de la teoría de inversiones.

en 1979 que plantea que el subyacente en cada intervalo de tiempo puede subir o bajar de precio con probabilidad p y $1 - p$. Estas probabilidades p denotan la perspectiva ante el riesgo del agente. Pese a que parece un modelo demasiado sencillo obtiene resultados satisfactorios.

1.5.1. Desarrollo

El precio de una acción y de un call europeo durante un periodo pueden comportarse:



donde $u > 1$, $d < 1$, $C_u = (uS - k)^+$ y $C_d = (dS - k)^+$.

Consideremos la tasa r libre de riesgo; si un inversionista deseara realizar un portafolio con y unidades de S y x unidades de un activo libre de riesgo con la intención de aprovechar una oportunidad de arbitraje debería cumplirse:

$$\begin{aligned} x + yS &= 0 \text{ Costo inicial de } 0, \\ x(1 + r) + yuS &\geq 0, \\ x(1 + r) + ydS &\geq 0 \text{ Ganancia segura.} \end{aligned}$$

Entonces para que no exista arbitraje debe cumplirse

$$d < (1 + r) < u.$$

por lo cual podemos plantear a $(1+r)$ como una combinación convexa de d y u , es decir:

$$(1+r) = qu + (1-q)d.$$

Despejando para encontrar el valor de q tenemos:

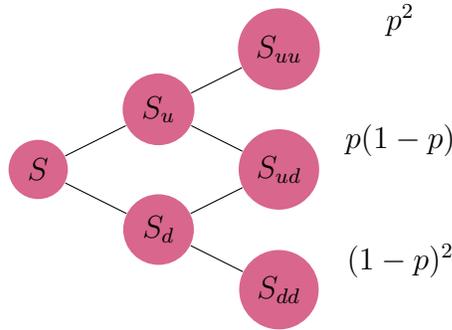
$$q = \frac{1+r-d}{u-d} \quad 1-q = \frac{u-1+r}{u-d}.$$

Al q estar en $[0, 1]$ podemos interpretarla como la medida \mathbb{Q} libre de riesgo, ya que:

$$\frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_1) = \frac{1}{1+r} (quS_0 + (1-q)dS_0) = S_0 \quad (1.1)$$

además pudimos encontrar un único portafolio replicante, lo que nos dice que tenemos bajo este modelo completitud del mercado.

El siguiente punto será ver qué pasa con más periodos, por ejemplo para $T = 2$:



Y si seguimos con el mismo razonamiento obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r} (qu^2S + (1-q)udS) &= uS \\ \frac{1}{1+r} ((1-q)d^2S + qudS) &= dS, \end{aligned}$$

por lo cual el valor del call es:

$$C = (q^2C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2C_{dd}) \frac{1}{(1+r)^2}.$$

En general para n periodos resulta:

$$C = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} q^j (1-q)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - k] \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Si consideramos a el mínimo número de periodos hacia arriba que deben ocurrir hasta que el payoff sea positivo entonces a es el entero no negativo más pequeño que satisface:

$$u^a d^{n-a} S > k \quad (1.2)$$

$$\text{entonces } a \geq \frac{\log \frac{k}{Sd^n}}{\log \frac{u}{d}} \quad (1.3)$$

por lo tanto:

$$C = \sum_{j=a}^n \left(\frac{n!}{(n-j)!j!} q^j (1-q)^{n-j} u^j d^{n-j} S - k \right) \frac{1}{(1+r)^n}. \quad (1.4)$$

O escribiéndolo en dos partes:

$$C = S \sum_{j=a}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} q^j (1-q)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{(1+r)^n} - k(1+r)^{-n} \sum_{j=a}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} q^j (1-q)^{n-j}. \quad (1.5)$$

Notemos que $q' = \frac{u}{1+r}q$ está también en $[0, 1]$ basta notar que $q \leq \frac{1+r}{u}$, por lo cual podemos escribir (1.5) en términos de los complementos de la función de distribución de una binomial, que denotaremos como ϕ :

$$C = S\phi[a; n, q'] - kr^{-n}\phi[a; n, q]. \quad (1.6)$$

Hemos conseguido encontrar la fórmula propuesta en el modeo CRR, con el cual podemos valorar un call europeo teniendo T, u, r, d, S, k . Uno de los puntos más importantes es que las probabilidades p no aparecen en la valuación, lo cual se puede interpretar como que el valor de la opción no depende de las actitudes al riesgo que tenga cada consumidor por la acción.

En caso de que fuera una opción americana se debe considerar al valorar el nodo al tiempo anterior el máximo entre el nodo valuado conforme al procedimiento ya visto y el de ejercer el derecho en ese nodo de acuerdo con la trayectoria correspondiente.

1.5.2. Caso límite

Debido a que el mercado no tiene sólo un movimiento por periodo se plantea hacer particiones del periodo cada vez más finas con el objetivo de que haya movimientos de forma continua. Supongamos que Δt es cada cuanto tiempo la acción cambia de precio, si T es el tiempo hasta el vencimiento y n el número de particiones se tiene:

$$\Delta t = \frac{T}{n}.$$

Es claro que si n tiende a infinito entonces Δt tiende a 0.

Vamos a tomar una tasa que genere rendimientos cada Δt -ésimo de tiempo y la denotaremos por R . Tenemos que $R = e^{r*\frac{T}{n}}$.

Nos enfocaremos en demostrar que la fórmula de Black y Scholes es un caso límite del modelo CRR, así que consideraremos que las trayectorias de las acciones son continuas.

La fórmula de Black-Scholes es:

$$C = S_t \Phi(d_1) - ke^{-rT} \Phi(d_2), \tag{1.7}$$

$$d_1 = \frac{\log S_t K + (r + \frac{1}{2}\sigma^2 T)}{\sigma \sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T},$$

$\Phi(d_i)$ es la función de distribución de una Normal(0,1) evaluada en d_i .

Recordemos que el precio sube con probabilidad q y baja con probabilidad $1 - q$. Como hemos considerado que $S_n = u^j d^{n-j} S_0$ con j en $\{0, 1, \dots, n\}$ los rendimientos estan dados por:

$$\log \frac{S_n}{S_0} = j \log(u) + (n - j) \log(d) = j \log\left(\frac{u}{d}\right) + n \log(d).$$

Debido a que j es el número aleatorio de movimientos hacia arriba tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\log \frac{S_n}{S_0}\right) &= \log\left(\frac{u}{d}\right)\mathbb{E}[j] + n \log(d), \\ \text{Var}\left(\log \frac{S_n}{S_0}\right) &= \log^2\left(\frac{u}{d}\right)\text{Var}[j].\end{aligned}$$

Debido a que j es una Bernoulli(p) sabemos su esperanza y varianza, por lo cuál sustituyendo:

$$\mathbb{E}\left(\log \frac{S_n}{S_0}\right) = n\left(p \log\left(\frac{u}{d}\right) + \log(d)\right) = \hat{\mu}n, \quad (1.8)$$

$$\text{Var}\left(\log \frac{S_n}{S_0}\right) = q(1 - q) \log^2\left(\frac{u}{d}\right)n = \hat{\sigma}^2n. \quad (1.9)$$

Puesto que no llegaríamos a una conclusión razonable si $\hat{\mu}n$ o $\hat{\sigma}^2n$ convergieran a 0 o a ∞ cuando n tendiera a infinito, debemos hacer un ajuste a u, d y q para que $\hat{\mu}n \rightarrow \mu n$ y $\hat{\sigma}^2n \rightarrow \sigma^2n$.

Elegimos:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}}, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

Sustituyendo en (1.8):

$$\begin{aligned}\hat{\mu}n = n\left(p \log\left(\frac{u}{d}\right) + \log(d)\right) &= n\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \log\left(e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) + \log\left(e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)\right] \\ &= n\left[\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \mu\frac{T}{n} - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right] \\ &= \mu T \quad \text{para toda } n.\end{aligned}$$

y para (1.9) tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2n = q(1 - q) \log^2\left(\frac{u}{d}\right)n &= n\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)4\sigma^2\frac{T}{n}\right] \\ &= n\left(\sigma^2\frac{T}{n} - \mu^2\frac{T^2}{n^2}\right) \\ &= \left(\sigma^2 - \mu^2\frac{T}{n}\right)T\end{aligned}$$

Con lo que comprobamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}n = \mu T \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\sigma}^2 n = \sigma^2 T.$$

Además por (1.3) podemos afirmar:

$$a - 1 = \frac{\log \frac{k}{S_n d^n}}{\log \frac{u}{d}} - \epsilon. \quad (1.10)$$

Por la ecuación (1.10) podemos reescribir la suma del segundo término de la expresión (1.6) de la siguiente forma¹³:

$$\begin{aligned} \phi(a; n, q) &= \mathbb{P}[X_n \geq a] \\ &= 1 - \mathbb{P}[X_n < a] \\ &= 1 - \mathbb{P}[X_n \leq a - 1] \\ &= 1 - \mathbb{P}\left[\frac{X_n - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \leq \frac{a - 1 - nq}{\sqrt{nq(1-q)}}\right], \end{aligned} \quad (1.11)$$

y debido al Teorema del límite central sabemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Observemos que en el modelo CRR ocurre

$$q = \frac{R - d}{u - d}.$$

Analizamos su límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R - d}{u - d} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r\frac{T}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-r\frac{T}{n^2}e^{r\frac{T}{n}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{tn}^{-\frac{3}{2}}e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}n^{-\frac{3}{2}}e^{\sigma\sqrt{T/n}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{tn}^{-\frac{3}{2}}e^{-\sigma\sqrt{T/n}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

¹³ X_n se distribuye $bin(n, q)$

Ya que el límite de q existe analizamos el límite para $\frac{a-1-nq}{\sqrt{nq(1-q)}}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1-nq}{\sqrt{nq(1-q)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log \frac{k}{Sd^n}}{\log \frac{u}{d}} - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log \frac{k}{S} + n\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{K}{S} + n\sigma(1-2q)\sqrt{T/n}}{2\sigma\sqrt{q(1-q)}(t)}, \end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma(1-2q)\sqrt{T/n} = -(R - \frac{1}{2}\sigma^2)T.$$

Por lo tanto :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1-nq}{\sqrt{nq(1-q)}} = \frac{\log \frac{K}{S} - (R - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

lo que significa que $\phi(a; n, p) \rightarrow \Phi(d_2)$.

La comprobación de la convergencia de la suma del primer término se realiza con el mismo procedimiento que utilizamos.

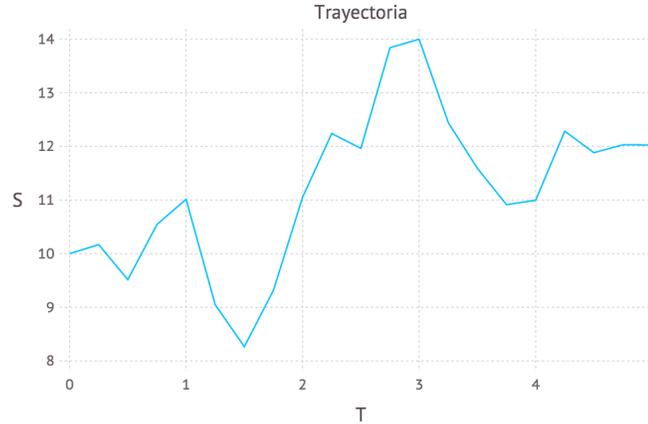
Con lo que queda demostrado que el modelo de Black-Scholes es un caso límite del modelo CRR.

1.5.3. Ejemplo de CRR

Evaluamos un call europeo con las siguientes características:

$$\begin{array}{ll} T = 5 & n = 20 \\ S = 10 & K = 10 \\ \sigma = 0.1415 & R = 1.06 \end{array}$$

$$C^E = 2.774$$



El código puede ser consultado en el apéndice A.1.1.

1.6. Modelo de Markowitz

El siguiente problema que vamos a abordar se presenta cuando tenemos un conjunto de acciones y deseamos invertir nuestro capital de la mejor manera posible; para esto vamos a tomar en consideración dos aspectos: cuánto esperamos ganar y qué tanto riesgo conlleva ganarlo. Una idea intuitiva cuando tenemos dos formas distintas de invertir nuestro dinero, ambas con el mismo valor esperado, es la de elegir la que menor riesgo represente, no hay nada que como inversionistas nos atraiga a aumentar nuestro riesgo sin mejorar nuestra ganancia. Es importante recordar que nuestro capital es finito y por ende, debemos cuidar que la suma de proporciones asignadas a cada acción no rebase el 100 % de nuestro capital.

Este modelo fue presentado por Markowitz¹⁴ [Markowitz, 1959], donde se plantea por primera vez una forma de elegir portafolios eficientes considerando la aleatoriedad de los activos, el supuesto más importante de este modelo es que el inversionista sólo se interesa en el rendimiento esperado y su varianza, dejando de lado cualquier otra característica.

¹⁴Harry Markowitz (24/08/1927-), precursor de la teoría de selección de portafolios, premio nobel de economía en 1990.

1.6.1. Planteamiento

Considerando n acciones distintas, tenemos las matrices:

$$w_{n \times 1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \Sigma_{n \times n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \mu_{n \times 1} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

w_i es la fracción del capital que asignamos a la acción i , tenemos la matriz de rendimientos R donde interviene la parte aleatoria, la matriz μ donde $\mu_i = \mathbb{E}(R_i)$ y adicionalmente, consideramos la matriz de varianzas y covarianzas donde la $cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$, esta matriz es simétrica y la denotamos como Σ ; una de las limitantes del modelo es que será necesario que Σ tenga inversa.

La esperanza del portafolio es

$$\mathbb{E}\left(\sum_i w_i * R_i\right) = \sum_i w_i * \mu_i$$

y la varianza es

$$var(w'R) = w'\Sigma w$$

donde A' lo usaremos para denotar la matriz transpuesta de A y A^{-1} para denotar la inversa de A .

Debemos tener presente que:

$$\frac{\partial}{\partial w} w'\Sigma w = 2\Sigma w \text{ y } \frac{\partial}{\partial w} \mu'w = \mu'$$

Vamos a minimizar $\frac{1}{2}$ de la varianza para que los cálculos resulten más simples y fáciles de interpretar.

Ya que en este problema tenemos una función que queremos minimizar sujeta a restricciones utilizaremos multiplicadores de Lagrange para resolver el problema, queremos

$$\begin{aligned} \min. & \quad \frac{1}{2}w'\Sigma w \\ \text{s. a} & \quad w'\mathbf{1} = 1 \\ & \quad w'\mu = \eta \end{aligned}$$

donde $\mathbf{1}_{n \times 1}$ es un vector donde todas sus entradas son unos y a esto nos devolverá las w que den como resultado el valor esperado η y tengan la menor varianza. Notemos que nunca pusimos como restricción $w_i \geq 0$, esto debido a que podemos realizar ventas en corto con la intención de mejorar nuestros rendimientos.

Así que abordando el problema de minimización tenemos:

$$\begin{aligned} \min \Lambda &= \frac{1}{2}w'\Sigma w - \lambda_1(w'\mathbf{1} - 1) - \lambda_2(w'\mu - \eta) \\ \frac{\partial}{\partial w_i}\Lambda &= \Sigma w_i - \lambda_1\mathbf{1} - \lambda_2\mu, \end{aligned}$$

despejando podemos encontrar el valor de w_i ,

$$\Sigma w = \lambda_1\mathbf{1} + \lambda_2\mu,$$

entonces

$$w = \lambda_1\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2\Sigma^{-1}\mu.$$

Considerando las derivadas respecto a λ_1 y λ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\Lambda &= -w'\mathbf{1} = 1, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\Lambda &= -w'\mu = \eta, \end{aligned}$$

y sustituyendo w_i en las derivadas tenemos un sistema de dos ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} w'\mathbf{1} &= \lambda_1\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2\mu'\Sigma^{-1}\mathbf{1} = 1 \\ w'\mu &= \lambda_1\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu + \lambda_2\mu'\Sigma^{-1}\mu = \eta \end{aligned} \right\}.$$

para resolver este sistema usaremos las matrices:

$$M_{n \times 2} = (\mathbf{1}, \mu)$$

donde $\mathbf{1}$ es el vector de unos y μ la matriz de valores esperados y la matriz:

$$A_{2 \times 2} = (M' \Sigma^{-1} M)^{-1};$$

Analicemos a A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}' \\ \mu' \end{pmatrix} \Sigma^{-1} (\mathbf{1}, \mu) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \\ \mu' \Sigma^{-1} \end{pmatrix} (\mathbf{1}, \mu) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu \\ \mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1} & \mu' \Sigma^{-1} \mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces

$$A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \end{pmatrix}$$

donde:

$$w = \Sigma^{-1} M A \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \end{pmatrix}$$

y el valor de la varianza es:

$$w' \Sigma w = (\mathbf{1}, \eta) A \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \end{pmatrix} = \sigma^2 = A_{11} + 2A_{12}\eta + A_{22}\eta^2.$$

Hay que resaltar que A es simétrica por lo que tenemos $2A_{12}\eta$. En términos de σ^2 y η tenemos la ecuación de una hipérbola, que llamaremos *frontera eficiente*. Sobre esta curva se encuentran los portafolios eficientes, se puede elegir cualquier combinación que no esté sobre la curva, pero tendrán mismo rendimiento y mayor varianza que alguno que sí lo esté.

1.6.2. Portafolio más conservador

Un portafolio que siempre resulta interesante es el más conservador. Este lo podemos obtener de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(A_{11} + 2A_{12}\eta + A_{22}\eta^2) = 0,$$

por ser una hipérbola podemos asegurar que el punto que obtendremos es el mínimo:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(A_{11} + 2A_{12}\eta + A_{22}\eta^2) = 2A_{12} + 2A_{22}\eta = 0.$$

Entonces:

$$\eta_g = -\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}};$$

el subíndice g denotará que hablamos del portafolio más conservador.

Habrá también que fijarnos en σ_g^2 y sustituyendo sabiendo el valor de η encontramos que:

$$\sigma_g^2 = A_{22}\left(-\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^2 + 2A_{12}\left(-\frac{A_{12}}{A_{22}}\right) + A_{11} = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} = \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}},$$

notemos que:

$$\sigma^2 = \sigma_g^2 + (\eta - \eta_g)^2. \quad (1.12)$$

Por último para el portafolio de varianza mínima podemos calcular:

$$w_g = \frac{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}.$$

La importancia de este portafolio radica en que por la forma de la curva eficiente hay dos valores con la misma volatilidad dentro de la curva, uno con un retorno menor al portafolio de riesgo mínimo y otro con uno mayor.

Usaremos los conceptos de portafolios *dominados* y *dominantes*. Los portafolios dominantes son aquellos que se encuentran en la frontera eficiente con rendimiento igual o mayor que el portafolio de riesgo mínimo y los dominados son todos los portafolios restantes.

Una forma de ver cómo interactúan los portafolios es viendo la covarianza entre los portafolios eficientes respecto al portafolio $w_g R$:

$$\begin{aligned}
\text{cov}([1, \eta]AM\Sigma^{-1}R, w'_gR) &= [1, \eta]AM'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}\mathbf{1} \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \\
&= [1, \eta]A \begin{pmatrix} \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\ \mu\Sigma^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \\
&= (1, \eta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} = \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}},
\end{aligned}$$

que resulta ser una constante que no depende de η . Notemos que debido a como construimos la matriz A ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\ \mu\Sigma^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

es la primer columna de su inversa así que al multiplicarlos obtenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.6.3. Con un activo libre de riesgo

Lo próximo será ver cómo se interactúa con un activo libre de riesgo (r); si aplicamos $\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}$ sobre la ecuación ((1.12)) encontramos que la pendiente es:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = \frac{\sigma}{A_{22}(\eta - \eta_g)}.$$

Vamos a tomar como variable el rendimiento del activo libre de riesgo, bastará encontrar la intersección con el eje η considerando que la varianza es 0 para este activo, tenemos:

$$\frac{\eta_p - r}{\sigma_p} = \frac{\sigma}{A_{22}(\eta - \eta_g)},$$

lo que implica:

$$r = \eta_p + \frac{\sigma^2}{A_{22}(\eta - \eta_g)},$$

y entonces:

$$r = -\frac{A_{11} + A_{12}\eta_p}{A_{12} + A_{22}\eta_p}.$$

Notemos que también se cumple:

$$\eta_p = -\frac{A_{11} + A_{12}r}{A_{12} + A_{22}r}.$$

Entonces dado el rendimiento del activo libre de riesgo podemos observar cambios en la frontera eficiente, ahora será la combinación lineal entre el portafolio tangente y el activo libre de riesgo, es decir:

$$\beta r + (1 - \beta)w'_p R.$$

Nuestra nueva frontera eficiente estará dada por la ecuación:

$$\eta = r + \frac{\eta_m - r}{\sigma_m^2} \sigma^2.$$

Concluimos escribiendo explícitamente los dos datos que nos interesan:

$$\mathbb{E}[\beta r + (1 - \beta)w'_p R] = \beta r + (1 - \beta)\eta_m \text{ y } \text{var}[\beta r + (1 - \beta)w'_p R] = (1 - \beta)\sigma^2.$$

1.6.4. Portafolios bajo la medida libre de riesgo

Si consideramos la medida \mathbb{Q} y definimos el portafolio al tiempo t :

$$\Pi(t) = \sum w'(t)R(t). \quad (1.13)$$

Se cumple :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sum w_i(t+1)R(t+1) | \mathcal{F}_t] &= \sum w_i(t)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[R(t+1) | \mathcal{F}_t] \\ &= \sum_i w_i(t)\frac{B(t+1)}{B(t)}R(t) = \frac{B(t+1)}{B(t)}\Pi(t). \end{aligned}$$

Volvemos a atacar el problema de la varianza (esta vez condicionada) sujeta al rendimiento:

$$\begin{aligned} \min. \quad & \text{var}_{\mathbb{Q}}[\Pi(t+1) | \mathcal{F}_t] \\ \text{s. a} \quad & \sum_i w_i(t)R(t) = c(t). \end{aligned}$$

Se hace nuevamente utilizando el método de multiplicadores de Lagrange:

$$\min. \Lambda = \text{var}_{\mathbb{Q}}[\Pi(t+1) | \mathcal{F}_t] - \lambda \left(\sum_i w_i(t) R_i(t) - c(t) \right),$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = - \sum_i w_i(t) S_i(t) + c(t) = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 2 \Sigma_t w - \lambda S_i(t) \quad \text{entonces} \quad w = \lambda \Sigma^{-1} S(t).$$

Se sigue que

$$\lambda = \frac{c(t)}{S'(t) \Sigma_t^{-1} S(t)},$$

y por lo tanto:

$$w = \frac{c(t)}{S'(t) \Sigma_t^{-1} S(t)} \Sigma_t^{-1} S(t),$$

de lo que resulta que:

$$\text{var}_{\mathbb{Q}}[\Pi(t+1) | \mathcal{F}_t] = w'(t) \Sigma^{-1} w(t) = \frac{c^2(t)}{S'(t) \Sigma_t^{-1} S(t)}.$$

1.6.5. Ejemplo

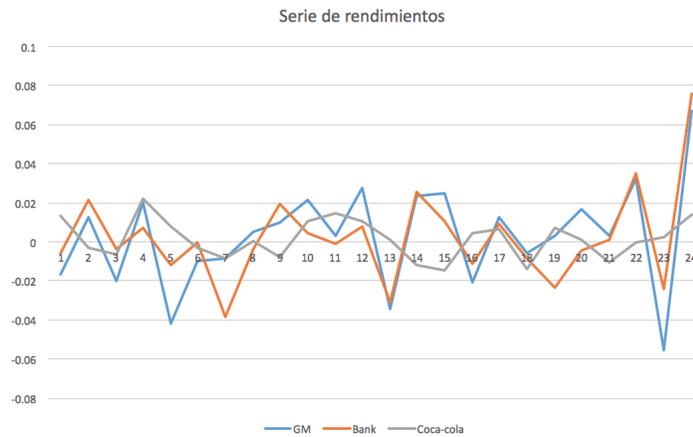
Vamos a realizar un ejemplo.

Usaremos la información de los precios históricos de General Motors, Bank of America y Coca-Cola ¹⁵ usaremos los rendimientos a tiempo continuo, es decir $R(t) = \log\left(\frac{V(t)}{V(t-1)}\right)$, el rendimiento es igual al logaritmo del cociente de los valores de la acción.

Tomaremos los siguientes rendimientos históricos:

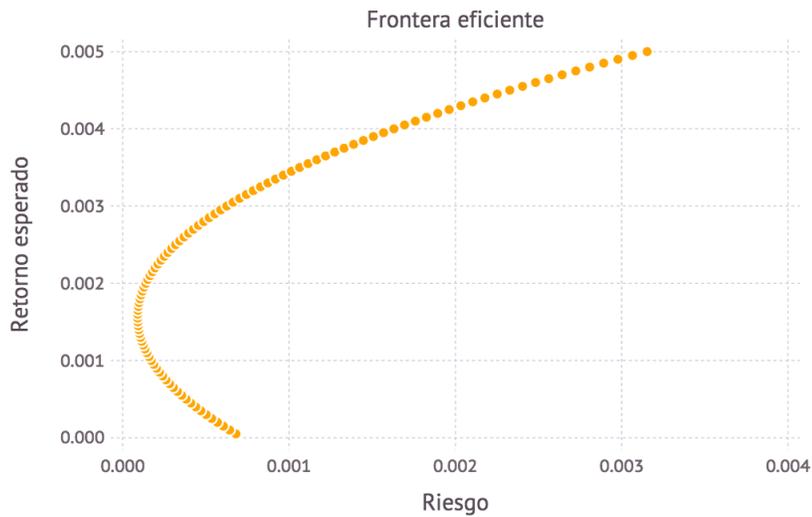
¹⁵Precios diarios a la apertura consultados en Yahoo finanzas hasta el 28 de septiembre de 2015.

GM	Bank	Coca-cola
-0.016926605	-0.005683628	0.013009966
0.012838048	0.021643111	-0.002766279
-0.020195907	-0.003853569	-0.006508208
0.019855944	0.00707626	0.022200734
-0.041610263	-0.011553402	0.008196767
-0.010056857	-0.000637959	-0.002825249
-0.008677541	-0.038165469	-0.008173711
0.005454851	-0.003676413	0.000254471
0.010024336	0.019142233	-0.007857143
0.021682814	0.004373703	0.01066005
0.003326716	-0.001251565	0.014392384
0.02770444	0.007532992	0.010670238
-0.034015738	-0.031019918	0.00078529
0.023451694	0.02536486	-0.011973152
0.024709527	0.010708764	-0.014384964
-0.020633401	-0.011335134	0.004601235
0.012673539	0.009437	0.006168048
-0.005842945	-0.008183867	-0.014079306
0.003089071	-0.023545078	0.006886904
0.016987755	-0.004277428	0.001024353
0.002801122	0.001220317	-0.010703517
0.032065411	0.035418366	-0.000506842
-0.055628559	-0.024368653	0.002282816
0.067282078	0.075628658	0.014064903

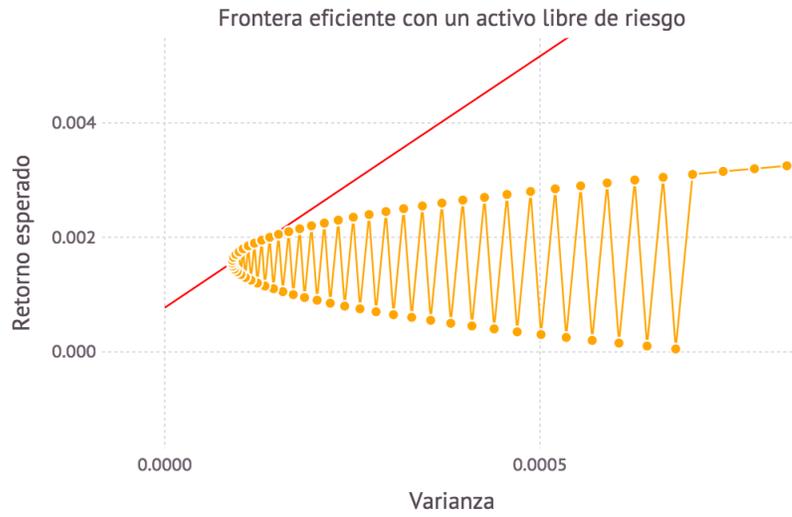


$$\mu = \begin{pmatrix} 0.00293 \\ 0.00208 \\ 0.00148 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 0.000706 & 0.0005 & 2.968e^{-5} \\ 0.0005 & 0.00055 & 2.613e^{-5} \\ 2.968e^{-5} & 2.613e^{-5} & 9.882e^{-5} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0.000721 & -0.404 \\ -0.404 & 258.972 \end{pmatrix}.$$

Con esos datos podemos obtener la frontera eficiente:



Nuestro portafolio de varianza mínima es: $(0.0015608, 8.99e^{-5})$. Agregaremos el activo libre de riesgo tomando la tangente al punto con rendimiento esperado de .002 y obtenemos que $r=0.00077$.



El código puede ser consultado en el apéndice A.1.2.

Capítulo 2

Algunos derivados exóticos

En este capítulo abordaremos los derivados exóticos, que son aquellos que tienen una característica más rebuscada para el cálculo del payoff que las que aparecen en una opción europea o americana tradicional. Por ejemplo pueden ser opciones cuyo payoff depende de una función de los precios del subyacente ya sea por el promedio, el máximo o pueden depender de que el subyacente esté dentro de bandas de precios. Por razones como éstas su valuación no puede expresarse de manera analítica por lo que son necesarios métodos computacionales para poder valuarlos. En este capítulo abordaremos algunos métodos de valuación y resultados teóricos importantes para este tipo de opciones.

2.1. Opciones Asiáticas

Como ya veíamos en la Sección 1.4 (*Opciones*), el payoff de una opción asiática no depende solamente del precio del subyacente al tiempo de vencimiento, si no que se considera una función que promedia los valores del activo. Debido a esto las opciones asiáticas también son conocidas como opciones de valor medio (*average value options*).

Los dos tipos de opciones asiáticas usuales son: la que considera la media aritmética, a la cual denotaremos como Aa , y la que toma la media geométrica a la que llamaremos Ag . Teóricamente estas variantes pueden ser expresados en términos continuos pero para fines computacionales usaremos su expresión discretizada.

Los payoffs para los calls se definen:

Para el caso continuo:	Para el caso discreto:
$Aa = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - k\right)^+$	$Aa = \left(\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m S_{\frac{iT}{m}} - K\right)^+$
$Ag = \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt} - k\right)^+$	$Ag = \left(e^{\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \log(S_{\frac{iT}{m}})} - k\right)^+$

El afán de escribir $e^{\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \log(S_{\frac{iT}{m}})}$ en lugar de $\left(\prod_{i=0}^m S_{\frac{iT}{m}}\right)^{\frac{1}{m+1}}$ es para evitar desbordamientos computacionales, ya que para m 's no muy grandes $\prod_{i=0}^m S_{\frac{iT}{m}} = \infty$ (para la computadora) lo cual nos daría resultados como ∞ , $-\infty$ o Nan.

2.1.1. Desigualdades con opciones asiáticas

Es útil tener una desigualdad que nos permita relacionar los precios de ambas opciones asiáticas. Ésta es:

$$C^{Ag} \leq C^{Aa}. \quad (2.1)$$

Este resultado es evidente debido a la desigualdad entre media geométrica y aritmética, y es fácil de demostrar usando la desigualdad de Jensen.

De manera intuitiva podríamos pensar que un call europeo resulta más costoso que un call asiático¹, ya que al tomar el promedio en las opciones asiáticas se reduce de manera importante el riesgo. Junto con la ecuación (2.1) se tiene el siguiente resultado:

$$C^{Aa} \leq C^E, \quad (2.2)$$

Demostración. Definimos:

$$\alpha_i = \frac{S_{\frac{iT}{m}}}{S_{\frac{(i-1)T}{m}}} \quad \text{con } i \text{ en } \{1, 2, \dots, m\} \quad (2.3)$$

$$\alpha_0 = S_0. \quad (2.4)$$

¹Mientras se mantenga mismo precio strike, fecha de vencimiento y mismo subyacente

Y las α_i cumplen:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(\frac{T}{m})+\sigma(B_{\frac{iT}{m}}-B_{\frac{(i-1)T}{m}})}, \\ \mathbb{E}(\alpha_i) &= e^{\frac{rT}{m}} \geq 1,\end{aligned}$$

con lo que tenemos que son v.a.i.i.d., además:

$$\prod_{i=0}^l \alpha_i = S_{\frac{lT}{m}}.$$

Con esto podemos reescribir la ecuación (2.2) de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \prod_{j=0}^l \alpha_j - k\right)^+\right) \leq \mathbb{E}\left(\left(\prod_{j=0}^m \alpha_j - k\right)^+\right). \quad (2.5)$$

Si dividimos (2.5) entre α_0 se mantiene la desigualdad y tenemos para el lado izquierdo:

$$\frac{1}{\alpha_0} \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \prod_{j=0}^l \alpha_j - k\right)^+\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}Q - k'\right)^+\right),$$

donde $Q = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \prod_{j=1}^l \alpha_j$ y $k' = \frac{k}{\alpha_0}$, además se cumple $\mathbb{E}(Q) \geq 1$. Denotaremos por k'_0 al valor más pequeño tal que $\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}Q - k' \geq 0$. Es decir, $k'_0 = \frac{k'(m+1)}{m}$.

Notemos que $k'_0 \geq k'$ si y solo si $k'_0 \geq 1$, lo que nos hace tener que analizar el problema en dos partes.

i) Si $k'_0 \geq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}Q - k'\right)^+\right) \\
&= \int_{k'_0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}Q - k'\right) d\mathbb{Q} \\
&\leq \int_{k'_0}^{\infty} (Q - k') d\mathbb{Q} \quad \text{Esto debido a que por hipótesis } Q \geq k'_0 \geq 1 \\
&\leq \int_k^{\infty} (Q - k') d\mathbb{Q} = \mathbb{E}((Q - k')^+) \quad \text{Ya que por hipótesis } k'_0 \geq 1,
\end{aligned}$$

y sigue siendo una función no negativa sobre la región de integración.

El caso en el que $k'_0 < 1$ se verifica de manera análoga que:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}Q - k'\right)^+\right) \leq \mathbb{E}\left((Q - k')^+\right);$$

por lo cual para demostrar (2.2) solo necesitamos ver que se cumple:

$$\mathbb{E}((Q - k')^+) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \prod_{j=1}^l \alpha_j - k'\right)^+\right) \leq \mathbb{E}\left(\left(\prod_{i=1}^m \alpha_i - k'\right)^+\right).$$

Este resultado lo verificaremos por inducción.

Para $m = 1$, se cumple

$$\mathbb{E}((\alpha_1 - k')^+) \leq \mathbb{E}((\alpha_1 - k')^+),$$

Suponemos válido para $m = n$

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n}{n} - k'\right)^+\right) \leq \mathbb{E}((\alpha_1\dots\alpha_n - k')^+).$$

Para $m = n + 1$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}\left(\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}}{n+1} - k'\right)^+\right) \\
 = & \mathbb{E}\left(\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n}{n+1} + \frac{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}}{n+1} - k'\right)^+\right) \\
 = & \mathbb{E}\left(\left(\frac{n}{n+1} \frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}}{n+1} - \frac{nk'}{n+1} - \frac{k'}{n+1}\right)^+\right) \\
 = & \mathbb{E}\left(\left(\frac{n}{n+1} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n}{n} - k'\right) + \frac{1}{n+1} (\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1} - k')\right)^+\right) \\
 \leq & \mathbb{E}\left(\left(\frac{n}{n+1} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n}{n} - k'\right)\right)^+ + \left(\frac{1}{n+1} (\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1} - k')\right)^+\right) \\
 = & \frac{n}{n+1} \mathbb{E}\left(\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n}{n} - k'\right)^+\right) + \frac{1}{n+1} \mathbb{E}\left(\left(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1} - k'\right)^+\right)
 \end{aligned}$$

Usando la hipótesis de inducción tenemos:

$$\leq \frac{n}{n+1} \mathbb{E}\left(\left(\alpha_1\dots\alpha_n - k'\right)^+\right) + \frac{1}{n+1} \mathbb{E}\left(\left(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1} - k'\right)^+\right)$$

Debido a que α_i son lognormales de media mayor o igual que uno:

$$\begin{aligned}
 & \leq \frac{n}{n+1} \mathbb{E}\left(\left(\alpha_1\dots\alpha_{n+1} - k'\right)^+\right) + \frac{1}{n+1} \mathbb{E}\left(\left(\alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1} - k'\right)^+\right) \\
 & = \mathbb{E}\left(\left(\alpha_1\dots\alpha_{n+1} - k'\right)^+\right)
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\dots\alpha_n\alpha_{n+1}}{n+1} - k'\right)^+\right) \leq \mathbb{E}\left(\left(\alpha_1\dots\alpha_{n+1} - k'\right)^+\right),$$

por lo que:

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \prod_{j=1}^l \alpha_j - k'\right)^+\right) \leq \mathbb{E}\left(\left(\prod_{i=1}^m \alpha_i - k'\right)^+\right),$$

y se sigue que:

$$C^{Aa} \leq C^E$$

□

Esta desigualdad muestra por qué las opciones asiáticas se han popularizado: cubren más el riesgo de las pérdidas.

2.1.2. Valuación de opciones asiáticas

Basándonos en el modelo Black-Scholes, las Ag van a tener una fórmula explícita para poder calcularlas, debido a que si X y Y son v.a.i.i.d. que se distribuyen lognormal(μ, σ^2) entonces XY se distribuye lognormal($2\mu, 2\sigma^2$). Sin embargo para las Aa tenemos el problema de que $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ no tiene una densidad explícita. En [Cobb et al.,] se han estudiado aproximaciones para su función de densidad, como la aproximación de Fenton-Wilkinson en la que se sugiere utilizar una lognormal donde:

$$\mathbb{E}(Z) = ne^{(\mu+n\sigma^2)} \text{ y } Var(Z) = nVar(X_i).$$

Este tipo de complicaciones para la valuación de las opciones Aa sugieren el uso del método Montecarlo, ya que no hay una fórmula explícita y la implementación del algoritmo para su valuación es bastante sencilla.

2.1.2.1. Fórmula cerrada de asiáticas geométricas

Nos basaremos en la demostración de [Zhang, 2009] el cuál es un excelente texto acerca de opciones asiáticas. En el modelo de Black-Scholes el payoff de un CAg es:

$$CAg = e^{-rT} \mathbb{E} \left(\left(\prod_{i=0}^m S_{\frac{iT}{m}} \right)^{\frac{1}{m+1}} - k \right)^+.$$

Podemos continuar usando la notación de la ecuación (2.3) y escribir el producto de la siguiente manera:

$$\prod_{i=0}^m S_{\frac{iT}{m}} = \prod_{i=0}^m (\alpha_m)^{m-i+1}.$$

Con esto tenemos:

$$\log \frac{\left(\prod_{i=0}^m S_{\frac{iT}{m}} \right)^{\frac{1}{m+1}}}{S_0} = \frac{1}{m+1} \log \frac{\left(\prod_{i=0}^m S_{\frac{iT}{m}} \right)}{S_0^{m+1}} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m+1} \log \left(\prod_{i=1}^m (\alpha_m)^{m-i+1} \right) \\
 &= \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m (m-i+1) \log(\alpha_m) \\
 &= \frac{1}{m+1} \left((1+2+\dots+m) \left(r - \frac{\sigma^2 T}{2m} \right) + \sigma \sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m i X_i \right) \\
 &= \frac{r - \frac{\sigma^2}{2} T}{2} + \frac{\sigma \sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m i X_i}{m+1},
 \end{aligned}$$

donde las X_i son v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. Podemos reescribir $\frac{\sigma \sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m i X_i}{m+1}$ de la siguiente manera:

$$\frac{\sigma \sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^m i X_i}{m+1} = \sigma \sqrt{\frac{(2m+1)T}{6(m+1)}} Z,$$

donde Z se distribuye $\mathcal{N}(0, 1)$.

Con esto podemos reescribir la ecuación (2.6) como:

$$\log \frac{(\prod_{i=0}^m S_{iT})^{\frac{1}{m+1}}}{S_0} = \left(\rho - \frac{\sigma_z^2}{2} \right) T + \sigma_z \sqrt{T} Z, \quad (2.7)$$

con

$$\sigma_z = \sigma \sqrt{\frac{(2m+1)T}{6(m+1)}} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{r - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma_z^2}{2}.$$

Con la ecuación (2.7) podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 CAg &= e^{-rT} \mathbb{E} \left(\left(\prod_{i=0}^m S_{iT} \right)^{\frac{1}{m+1}} - k \right)^+ \\
 &= e^{(\rho-r)T} e^{-\rho T} \mathbb{E} \left((S_0 e^{(\rho - \frac{\sigma_z^2}{2})T + \sigma_z \sqrt{T} Z} - k)^+ \right) \\
 &= e^{(\rho-r)T} C^E,
 \end{aligned}$$

donde C^E es el valor de un call europeo con tasa ρ y volatilidad σ_z .

2.1.2.2. Valuación de Montecarlo para opciones asiáticas

Vamos a evaluar un Call Europeo, un asiático aritmético y un asiático geométrico con base al método Montecarlo, todos con las siguientes características:

$$\begin{array}{ll} T = 5 & dt = 1/2^6 \\ S = 10 & K = 10 \\ \sigma = 0.1415 & R = 1.06. \end{array}$$

Obtuvimos los valores:

Ag	Aa	E
0.960372	0.982163	2.04686

lo cuál se esperaba por las desigualdades teóricas anteriores obtenidas.

El código puede ser consultado en el apéndice A.2.1 y A.2.2.

Se adjunta en la misma sección cómo se realiza utilizando programación en paralelo.

2.2. Opciones Lookback

Las opciones lookback se distinguen porque el payoff se calcula a partir del valor mínimo o máximo que haya tomado el subyacente hasta su fecha de vencimiento (T). Existen dos variaciones importantes respecto a la forma de calcular el payoff:

- Lookback de precio strike fijo (*FiSL*): el precio strike se fija al inicio del contrato (es decir cuando $t = 0$)
- Lookback de precio strike flotante (*FLSL*): el precio strike será el valor del subyacente al momento del vencimiento (es decir $K = S(T)$).

Para las opciones *FiSL* y *FLSL* se resume en la siguiente tabla el cálculo de sus payoffs:

	FiSL	FISL
C	$(\max[L, \max_{0 \leq t \leq T} S(t)] - k)^+$	$(S(T) - \min[L, \min_{0 \leq t \leq T} S(t)])^+$
P	$(k - \min[L, \min_{0 \leq t \leq T} S(t)])^+$	$(\max[L, \max_{0 \leq t \leq T} S(t)] - S(T))^+$

La demostración del precio teórico de la opción se fundamenta en encontrar una expresión cerrada para la función $B(u, T)$, la cuál definimos como la transformada de Laplace de la parte positiva de la diferencia entre el máximo de un browniano y una constante $u \in \mathbb{R}^+$.

Para facilitar la notación definimos:

$$M(t) = \max_{0 \leq t \leq T} B_t, \tag{2.8}$$

$$D(t) = (M(t) - u)^+, \tag{2.9}$$

donde X_t es el valor de un movimiento browniano con deriva μ y volatilidad σ al tiempo t y $u \in \mathbb{R}^+$.

2.2.1. Encontrando una fórmula explicita para $B(u, T)$

Entonces la función que nos interesa encontrar es:

$$B(u, T) = \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t) \right] \tag{2.10}$$

Si δ es positiva puede ser interpretada como la fuerza de interés, sin embargo la demostración no nos pide esa restricción por lo cual sigue siendo valida para $\delta \leq 0$.

Para encontrar el valor de $B(u, T)$, utilizaremos la linealidad de la esperanza y las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes para poder reescribirla de la siguiente manera.

$$B(u, T) = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[D(t)] dt \tag{2.11}$$

Siguiendo la idea de (2.11) lo primero que nos ocupa es encontrar $\mathbb{E}[D(t)]$, para esto vamos a tener en cuenta dos ideas principales. La primera es que

si \mathbb{X} es una v.a. positiva entonces

$$\mathbb{E}[\mathbb{X}] = \int_0^{\infty} S(x)dx,$$

donde $S(x) := 1 - F(x)$, es conocida como la función de supervivencia asociada a F . La segunda idea consiste en saber que la función de distribución y de densidad al tiempo t de la primera vez que un movimiento Browniano toca un valor x es:

$$\begin{aligned} G_x(t) &= \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ g_x(t, \mu) &= \frac{x}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} t^{-3/2} e^{-\frac{(\mu t - x)^2}{2\sigma^2 t}}. \end{aligned}$$

La demostración de este hecho, puede ser consultada en [Gerber and Shiu, 2003] en el apéndice A15. [Gerber and Shiu, 2003] es el artículo en el que ésta sección se basa, aquí se ahonda en las demostraciones referentes a $B(u, T)$.

Finalmente estamos en condiciones para encontrar $\mathbb{E}[D(t)]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D(t)] &= \mathbb{E}[(M(t) - u)^+] \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}[(M(t) - u)^+ \geq y] dy \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}[(M(t) - u) \geq y] dy \\ &= \int_u^{\infty} \mathbb{P}[M(t) \geq x] dx \\ &= \int_u^{\infty} G_x(t) dx \\ &= \int_u^{\infty} \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se debe a que $\{M(t) \geq x\}$ es equivalente a $\{T_x \leq t\}$, así que nuestro problema se resume a calcular:

$$\int_u^{\infty} \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx. \quad (2.12)$$

Resolvamos los casos cuando $\mu = 0$ y $\mu \neq 0$ por separado.
 Caso $\mu = 0$.

Tenemos:

$$\int_u^\infty 2\Phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)dx = 2\left(x\Phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Big|_u^\infty - \int_u^\infty \frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)dx\right),$$

esto integrando por cambio de variable, haciendo $u = \Phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)$ y $dv = dx$.

Entonces

$$\begin{aligned} 2\left(x\Phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Big|_u^\infty - \int_u^\infty \frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)dx\right) &= 2\left(x\Phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Big|_u^\infty - \sigma\sqrt{t} \int_{-\infty}^{-\frac{u}{\sigma\sqrt{t}}} v\phi(v)dv\right) \\ &= 2\left(x\Phi\left(\frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Big|_u^\infty + \sigma\sqrt{t}\phi(v)\Big|_{-\infty}^{-\frac{u}{\sigma\sqrt{t}}}\right) \\ &= 2\left(-u\Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right). \end{aligned}$$

Concluimos:

$$\int_u^\infty G_x(t)dx = 2\left(-u\Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right) \quad (2.13)$$

La primera igualdad hace un cambio de variable $v = \frac{-x}{\sigma\sqrt{t}}$, para la segunda se hace un cambio de variable $v = y^2$ y para la tercera igualdad solamente se evalúa.

Caso $\mu \neq 0$.

La integral en este caso es bastante larga y sumamente minuciosa, sin embargo tiene una solución explícita. Debemos tener presente la siguiente propiedad:

$$e^{2ab}\phi(a+b) = \phi(a-b). \quad (2.14)$$

En particular:

$$e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}}\phi\left(\frac{-u-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \phi\left(\frac{-u+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (2.15)$$

Ocurre que:

$$\int_u^\infty \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx$$

$$u = \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$du = \left(\frac{2\mu}{\sigma^2}\right) e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx$$

$$v = x$$

$$dv = dx$$

$$\begin{aligned} & \int_u^\infty \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx \\ &= \left(x\Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + xe^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right)\Big|_0^\infty \\ &- \left[-\int_u^\infty \frac{2x}{\sigma\sqrt{t}} \phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx + \int_u^\infty \left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right) e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx\right]. \end{aligned}$$

Para continuar resolveremos la segunda integral que aparece en la expresión anterior. Mediante integración por partes tenemos:

$$u = \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$du = \phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{-1}{\sigma\sqrt{t}} dx$$

$$v = \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \left[\frac{2\mu x}{\sigma^2} - 1\right]$$

$$dv = \left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right) e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} dx$$

$$\begin{aligned} & \int_u^\infty \left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right) e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx \\ &= \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \left[\frac{2\mu x}{\sigma^2} - 1\right]\Big|_0^\infty + \int_u^\infty \frac{\sigma^2}{2\mu} \left[\frac{2\mu x}{\sigma^2} - 1\right] \phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} dx \\ &= \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \left[\frac{2\mu x}{\sigma^2} - 1\right]\Big|_0^\infty + \int_u^\infty \phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{x}{\sigma\sqrt{t}} dx - \int_u^\infty \phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{\sigma}{2\mu\sqrt{t}} dx. \end{aligned}$$

Así podemos volver a la integral que nos atañe:

$$\begin{aligned}
 & \int_u^\infty \Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx \\
 &= \left(x\Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + xe^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) \Big|_0^\infty \\
 &- \left[- \int_u^\infty \frac{2x}{\sigma\sqrt{t}} \phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx + \int_u^\infty \left(\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right) e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx \right] \\
 &= \left(x\Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + xe^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) \Big|_0^\infty \\
 &- \left[- \frac{2}{\sigma\sqrt{t}} \int_u^\infty x\phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx + \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \left[\frac{2\mu x}{\sigma^2} - 1 \right] \Big|_0^\infty \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_u^\infty x\phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx - \int_u^\infty \phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{\sigma}{2\mu\sqrt{t}} dx \right].
 \end{aligned}$$

Factorizando y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned}
 &= \left(x\Phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \int_u^\infty x\phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx \\
 &+ \frac{\sigma}{2\mu\sqrt{t}} \int_u^\infty \phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx.
 \end{aligned}$$

Procedemos a resolver la primera integral del renglón anterior.

$$\int_u^\infty \phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \frac{x}{\sigma\sqrt{t}} dx = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \exp\left(-\frac{\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2}{2}\right) \frac{dx}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Haciendo $y = \frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}$ tenemos $dy = -\frac{dx}{\sigma\sqrt{t}}$ y $x = \mu t - y\sigma\sqrt{t}$ tenemos:

$$-\mu t \int_{\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}}^\infty \phi(y) dy - \sigma\sqrt{t} \phi(y) \Big|_{\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}}^\infty = \left[-\mu t \Phi(y) dy - \sigma\sqrt{t} \phi(y) \right] \Big|_{\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}}^\infty.$$

Por último la segunda integral corresponde a:

$$\frac{\sigma}{2\mu\sqrt{t}} \int_u^\infty \phi\left(\frac{-x + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx = -\frac{\sigma^2}{2\mu} \Phi(y) \Big|_{\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}}^\infty.$$

Regresando a la integral original (2.12):

$$\begin{aligned}
&= \left(x\Phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \mu t \Phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma^2}{2\mu} \Phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) \Big|_u^\infty \\
&= \left(\left((x-\mu t - \frac{\sigma^2}{2\mu}) \Phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) \right) \Big|_u^\infty \\
&= \left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu} - u \right) \Phi\left(\frac{-u+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu u}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-u-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-u+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
\int_u^\infty G_x(t) dx &= \left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu} - u \right) \Phi\left(\frac{-u+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu u}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-u-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-u+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos formas explícitas para $\mathbb{E}(D(t))$, (2.13) y (2.16), podemos seguir con la idea planteada en (2.11), lo cuál nos presenta como reto calcular:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(D(t)). \tag{2.17}$$

Notemos que primero integramos respecto a x y ahora vamos a derivar respecto a t . El proceso para encontrar (2.17) no es particularmente complicado, pero debido a la cantidad de veces que aparece t termina siendo una derivada extensa.

Para facilitar las cuentas será importante tener presente:

$$\frac{d}{dt} \frac{-u \pm \mu t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{u \pm \mu t}{2\sigma t^{3/2}}. \tag{2.18}$$

Veamos el caso de (2.13):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} 2 \left(-u \Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \sigma\sqrt{t}\phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) &= 2 \left[\frac{u^2}{2\sigma t^{3/2}} \phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{u^2}{2\sigma t^{3/2}} \phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}}\right) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Ahora veamos lo que pasa con (2.16) es decir cuando $m \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu} - u \right) \Phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{\frac{2\mu u}{\sigma^2}} \Phi \left(\frac{-u - \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \sigma \sqrt{t} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] \\
 = & \left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu} - u \right) \frac{u + \mu t}{2\sigma t^{3/2}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \mu \Phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\
 & - \frac{\sigma^2}{2\mu} \frac{u - \mu t}{2\sigma t^{3/2}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\
 & + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) - \left(\mu t - u \right) \frac{u + \mu t}{2\sigma t^{3/2}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right),
 \end{aligned}$$

se escribió cada renglón correspondiendo a la derivada de cada sumando de (2.16), para ser lo más amigable posible con el lector. Eliminando términos y agrupando:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(D(t)) = \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(\frac{u + \mu t}{2\sigma t^{3/2}} - \frac{u - \mu t}{2\sigma t^{3/2}} \right) + \mu \Phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right),$$

de donde se obtiene

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(D(t)) = \mu \Phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right). \quad (2.20)$$

Con los resultados de (2.19) y (2.20) podemos concluir que para todo μ se sigue:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(D(t)) = \mu \Phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right). \quad (2.21)$$

Ahora solo queda resolver una integral para obtener el resultado de (2.11)

$$\begin{aligned}
 B(u, T) &= \int_0^T e^{-\delta t} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[D(t)] dt \\
 &= \int_0^T e^{-\delta t} \left[\mu \Phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \phi \left(\frac{-u + \mu t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \right] dt, \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Para calcular la integral en (2.22) vamos a mencionar un par de propiedades que nos serán útiles.

La primera observación y quizá la más importante es:

$$\frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + \mu \xi - \delta = 0. \quad (2.23)$$

Lo cual equivale a afirmar que:

$$e^{-\delta t + \xi X_t}, \quad (2.24)$$

es una martingala.

Verifiquemos que (2.24) es una martingala si se cumple (2.23). Afirmar que (2.24) es una martingala² significa:

$$\mathbb{E}(e^{-\delta t + \xi X_t} | \mathcal{F}_s) = e^{-\delta s + \xi X_s}.$$

Partiendo de lado izquierdo de la igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\delta t + \xi X_t} | \mathcal{F}_s) &= e^{-\delta t} \mathbb{E}(e^{\xi(X_t - X_s) + \xi X_s} | \mathcal{F}_s) \\ &= e^{-\delta t + \xi X_s} \mathbb{E}(e^{\xi(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s) \\ &= e^{-\delta t + \xi X_s} \mathbb{E}(e^{\xi(X_t - X_s)}) \end{aligned}$$

Ya que X_s es \mathcal{F}_s medible y $X_t - X_s$ es independiente de \mathcal{F}_s , notemos que:

$$e^{\xi(X_t - X_s)} \sim \text{Lognormal}(\xi\mu(t-s), \xi^2\sigma^2(t-s)),$$

por lo tanto:

$$\mathbb{E}(e^{\xi(X_t - X_s)}) = e^{\xi\mu(t-s) + \frac{\xi^2\sigma^2(t-s)}{2}},$$

así tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\delta t + \xi X_t} | \mathcal{F}_s) &= e^{-\delta t + \xi X_s} e^{\xi\mu(t-s) + \frac{\xi^2\sigma^2(t-s)}{2}} \\ &= e^{\xi X_s} e^{\xi\mu(t-s) + \frac{\xi^2\sigma^2(t-s)}{2} - \delta t + \delta s - \delta s} \\ &= e^{-\delta s + \xi X_s}, \end{aligned}$$

del segundo al tercer renglón utilizamos (2.23).

Denotaremos por ξ_i con $i \in \{1, 2\}$ a las raíces de (2.23) las cuales tienen las siguientes propiedades

$$\xi_1 + \xi_2 = -\frac{2\mu}{\sigma^2} \quad (2.25)$$

$$\xi_1 \xi_2 = -\frac{2\delta}{\sigma^2} \quad (2.26)$$

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 = \frac{4\mu}{\sigma^4} + \frac{8\delta}{\sigma^2}, \quad (2.27)$$

²Tomaremos \mathcal{F}_t como la filtración natural al tiempo t asociada al proceso $\{X_t : t \geq 0\}$, y $s < t$

Estas propiedades se pueden verificar directamente. De forma similar y gracias a (2.14) ocurre que:

$$\begin{aligned} e^{-\xi_2 u} \phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{(\xi_2 - \xi_1)\sigma\sqrt{t}}{2}\right) &= e^{\frac{\xi_1 \xi_2 \sigma^2 t}{2}} \phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{(\xi_1 + \xi_2)\sigma\sqrt{t}}{2}\right) \\ &= e^{-\delta t} \phi\left(\frac{-u + \mu t}{2\sigma\sqrt{t}}\right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2u - \xi_1 \sigma^2 t}{2\sigma\sqrt{t}}, \\ b &= \frac{-\xi_2 \sigma^2 t}{2\sigma\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

con un argumento similar se puede probar que

$$e^{-\xi_1 u} \phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{(\xi_1 - \xi_2)\sigma\sqrt{t}}{2}\right) = e^{-\delta t} \phi\left(\frac{-u + \mu t}{2\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Lo importante de (2.28) es que hemos encontrado una manera de quitar T del exponente, lo cuál facilitará la integral, ya que no tendremos un producto de funciones que dependen de la variable de integración.

La última clave que necesitamos para realizar la integral es una forma muy particular de escribir $\frac{\sigma}{\sqrt{t}}$:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{t}} = -\frac{\mu}{\delta} \left(\frac{u}{2\sigma} t^{-3/2} + \frac{\mu}{2\sigma} t^{-1/2} \right) - \frac{\sigma(\xi_1 + \xi_2)u}{4\delta} t^{-3/2} + \frac{\sigma^3(\xi_1 - \xi_2)^2 t^{-1/2}}{8\delta}, \quad (2.29)$$

para verificarla sólo es necesaria álgebra básica y paciencia.

Para calcular (2.22) notemos que si $\delta = 0$ el problema es trivial y su solución es:

$$B(u, T) = \mathbb{E}(D(t)).$$

Analicemos ahora el caso $\delta \neq 0$:

$$\begin{aligned} B(u, T) &= \int_0^T e^{-\delta t} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[D(t)] dt \\ &= \int_0^T e^{-\delta t} \left[\mu \Phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right] dt \end{aligned}$$

Haciendo integración por partes para el primer sumando:

$$\begin{aligned} w &= \Phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) & v &= -\frac{1}{\delta}e^{-\delta t} \\ dw &= \phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\left(\frac{u + \mu t}{2\sigma t^{3/2}}\right) & dv &= e^{-\delta t}, \end{aligned}$$

podemos reescribir:

$$\begin{aligned} B(u, T) &= -\frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{-u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \int_0^T e^{-\delta t}\phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\left(\frac{u + \mu t}{2\sigma t^{3/2}}\right)\left(\frac{\mu}{\delta}\right)dt \\ &+ \int_0^T e^{-\delta t}\frac{\sigma}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)dt. \end{aligned}$$

Usando (2.29) tenemos:

$$\begin{aligned} B(u, T) &= -\frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{-u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &- \int_0^T e^{-\delta t}\phi\left(\frac{-u + \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\left(\frac{\sigma(\xi_1 + \xi_2)u}{4\delta}t^{-3/2} - \frac{\sigma^3(\xi_1 - \xi_2)^2t^{-1/2}}{8\delta}\right)dt. \end{aligned}$$

Con ayuda de (2.28) podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} B(u, T) &= -\frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{-u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &- \int_0^T \frac{1}{2}\left(e^{-\xi_2 u}\phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{(\xi_2 - \xi_1)\sigma\sqrt{t}}{2}\right) + e^{-\xi_1 u}\phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{(\xi_1 - \xi_2)\sigma\sqrt{t}}{2}\right)\right) \\ &\quad \left(\frac{\sigma(\xi_1 + \xi_2)u}{4\delta}t^{-3/2} - \frac{\sigma^3(\xi_1 - \xi_2)^2t^{-1/2}}{8\delta}\right)dt. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Tengamos presente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{(\xi_2 - \xi_1)\sigma\sqrt{t}}{2}\right) = \frac{u}{2\sigma t^{3/2}} + \frac{(\xi_2 - \xi_1)\sigma}{4\sqrt{t}}, \tag{2.31}$$

además también podemos reescribir:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma(\xi_1 + \xi_2)u}{4\delta}t^{-3/2} - \frac{\sigma^3(\xi_1 - \xi_2)^2t^{-1/2}}{8\delta} = \frac{\sigma^2}{2\delta} \left(\frac{(\xi_1 + \xi_2)u}{2\sigma}t^{-3/2} - \frac{\sigma(\xi_1 - \xi_2)^2t^{-1/2}}{4} \right) \\ & = \frac{\sigma^2\xi_1}{2\delta} \left(\frac{u}{2\sigma}t^{-3/2} + \frac{\sigma(\xi_2 - \xi_1)^2t^{-1/2}}{4} \right) + \frac{\sigma^2\xi_2}{2\delta} \left(\frac{u}{2\sigma}t^{-3/2} + \frac{\sigma(\xi_1 - \xi_2)^2t^{-1/2}}{4} \right) \end{aligned}$$

Así que desarrollando el producto de (2.30) y usando (2.31) y (2.32) tenemos:

$$\begin{aligned} B(u, T) &= -\frac{\mu}{\delta}e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{-u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2\xi_1}{\delta}e^{-\xi_2 u}\Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\xi_2 - \xi_1)\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2\xi_2}{\delta}e^{-\xi_1 u}\Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(\xi_1 - \xi_2)\sigma\sqrt{T}}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

y finalmente contamos con la fórmula explícita para $B(u, T)$. Ahora podemos enfrentar el problema que realmente nos interesa que es valuar las opciones Lookback. Éstas estarán expresadas en la función $B(u, T)$; en [Gerber and Shiu, 2003] recomiendan que se utilice $B(u, \mu, \delta)$ en vez de $B(u, T)$ ya que T es un tiempo fijo y son de particular interés casos específicos para μ y δ de los cuales hablaremos más adelante.

Antes de la siguiente sección es importante que se aprecie que también es posible reescribir $B(u, \mu, \delta)$ de la siguiente manera:

$$B(u, \mu, \delta) = \int_u^\infty \int_0^T e^{-\delta t} g_x(t, \mu) dt dx, \quad (2.33)$$

de donde para facilitar las cuentas volveremos a usar (2.14) ahora con:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\mu t - x}{\sqrt{2\sigma^2 t}} + \frac{\beta\sigma^2 t}{2\sqrt{2\sigma^2 t}} \\ b &= -\frac{\beta\sigma^2 t}{2\sqrt{2\sigma^2 t}}, \end{aligned}$$

para obtener la siguiente igualdad:

$$e^{\beta x} g_x(t, \mu) = e^{(\beta\mu + \beta^2\sigma^2/2)t} g_x(t, \mu + \beta\sigma^2). \quad (2.34)$$

Esta expresión nos resultará útil para el cambio en la deriva sin afectar a x ni a t , y cambiando δ podemos seguir utilizando (2.32).

Dos casos que resultarán útiles para nuestro propósito son cuando $\mu = -\delta + \frac{\sigma^2}{2}$ y $\mu = \delta - \frac{\sigma^2}{2}$. Para el primer caso tenemos :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{2\delta}{\sigma} \\ \xi_2 &= -1,\end{aligned}$$

mientras que para el segundo son las mismas expresiones con signos opuestos. Definimos las siguientes variables:

$$\begin{aligned}d_1(u, \delta) &= \frac{-u + \mu T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{-u + (-\delta + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2(u, \delta) &= \frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(-1 - 2\delta/\sigma^2)\sigma\sqrt{T}}{2} = d_1(u, \delta) - \sigma\sqrt{T} \\ d_3(u, \delta) &= \frac{-u}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(1 + 2\delta/\sigma^2)\sigma\sqrt{T}}{2} = d_1(u, \delta) + \frac{2\delta\sqrt{T}}{\sigma}.\end{aligned}$$

Podemos entonces escribir:

$$\begin{aligned}B(u, -\delta + \frac{\sigma^2}{2}, \delta) &= e^{-\delta T} \Phi(d_1(u, \delta)) - e^u \Phi(d_2(u, \delta)) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2\delta} [e^{-\delta T} \Phi(d_1(u, \delta)) - e^{-2\delta u/\sigma^2} \Phi(d_3(u, \delta))]\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}B(u, \delta - \frac{\sigma^2}{2}, \delta) &= -e^{-\delta T} \Phi(-d_1(-u, \delta)) + e^{-u} \Phi(-d_2(-u, \delta)) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2\delta} [-e^{-\delta T} \Phi(-d_1(-u, \delta)) + e^{2\delta u/\sigma^2} \Phi(-d_3(-u, \delta))].\end{aligned}\tag{2.36}$$

Los resultados que encontramos en la parte anterior harán que resulte fácil poder valuar las opciones lookback. Necesitamos expresar

$$C(u, \mu) = \mathbb{E}[(e^{M(t)} - e^u)^+],\tag{2.37}$$

$$P(u, \mu) = \mathbb{E}[(e^{-u} - e^{-M(t)})^+],\tag{2.38}$$

en términos de $B(u, \mu, \delta)$. Denotar (2.37) y (2.38) con esas letras no es fortuito; (2.37) servirá para evaluar el Call y (2.38) servirá para el put.

Reescribamos (2.37):

$$\begin{aligned} C(u, \mu) &= \int_0^\infty \mathbb{P}[(e^{M(t)} - e^u)^+ \geq y] dy \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}[e^{M(t)} - e^u \geq y] dy \\ &= \int_u^\infty \mathbb{P}[e^{M(t)} - e^u \geq e^x - e^u] e^x dx. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $y = e^x - e^u$:

$$\begin{aligned} C(u, \mu) &= \int_u^\infty \mathbb{P}[M(t) \geq x] e^x dx \\ &= \int_u^\infty G(t) e^x dx \\ &= \int_u^\infty \int_0^t g_x(t, \mu) e^x dt dx \\ &= \int_u^\infty \int_0^t g_x(t, \mu + \sigma^2) e^{t(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} dt dx \\ &= B\left(u, \mu + \sigma^2, -\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Del segundo al tercer renglón consideramos (2.33), para el siguiente usamos (2.34) y para el último observamos el cambio en μ y en δ para usar (2.33). La ecuación (2.38) se deduce de manera similar y se llega a la expresión:

$$P(u, \mu) = B\left(u, \mu - \sigma^2, \mu - \frac{\sigma^2}{2}\right). \tag{2.40}$$

2.2.2. Valuación de opciones lookback

2.2.2.1. Fórmulas cerradas de lookback

Con todas las herramientas que tenemos resulta sencillo encontrar el valor de una opción lookback. Comenzaremos encontrando el valor para un Call

FiSL, cuyo payoff ya mencionamos que es:

$$(\max[L, \max_{0 \leq t \leq T} S(t)] - k)^+.$$

El valor de L puede interpretarse como el máximo de la acción antes del inicio del contrato (es decir $t < 0$), por lo cual tendremos que fijarnos en dos casos, uno cuando $L \geq k$ y el otro $L < k$.

Para el caso $L < k$ nuestro problema se resume a encontrar la esperanza para:

$$\left(\max_{0 \leq t \leq T} S(t) - k \right)^+ = S(0) \left(e^{M(T)} - \frac{K}{S(0)} \right)^+,$$

lo que por (2.39) ya no presenta ningún reto. Tenemos por (2.39):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(S(0) \left(e^{M(T)} - \frac{K}{S(0)} \right)^+ \right) &= S(0) C \left(\log \left(\frac{K}{S(0)} \right), \mu \right) \\ &= S(0) B \left(\log \left(\frac{K}{S(0)} \right), \mu + \sigma^2, -\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Por último por Black-Scholes podemos reescribir la deriva a partir de una tasa r libre de riesgo, una tasa de dividendos, y la volatilidad de la siguiente manera:

$$\mu = r - \xi - \frac{\sigma^2}{2},$$

sustituyendo en (2.41) y trayendo a valor presente con la tasa libre de riesgo tenemos:

$$\begin{aligned} C^{FiSL} &= e^{-rT} S(0) B \left(\log \left(\frac{K}{S(0)} \right), r - \xi + \frac{\sigma^2}{2}, -r + \xi \right) \\ &= S(0) e^{-\xi T} \Phi(d_{1,k}) - k e^{-rT} \Phi(d_{2,k}) \\ &\quad + \frac{S(0) \sigma^2}{2(r - \xi)} \left\{ e^{-\xi T} \Phi(d_{1,k}) - \left(\frac{k}{S(0)} \right)^{2(r - \xi)/\sigma^2} e^{-rT} \Phi(d_{3,k}) \right\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde para j en $\{1, 2, 3\}$ $d_{j,k} = d_j(\log(\frac{K}{S(0)}), -r + \xi)$.

En el artículo [Gerber and Shiu, 2003] se remarca que en (2.42) se observa cómo los primeros dos términos constituyen la valuación de un call Europeo

con la fórmula de Black-Scholes y el tercer término corresponde al costo extra que se debe pagar por ejercer en el precio máximo.

Aún nos falta el caso en el que $k < L$, pero por suerte esto no nos da mayores complicaciones ya que podemos reescribir el payoff de la siguiente manera:

$$(\max[L, \max_{0 \leq t \leq T} S(t)] - k)^+ = L - k + (S(0)e^{M(t)} - L)^+$$

y siguiendo el procedimiento realizado anteriormente llegamos a :

$$\begin{aligned} C^{FiSL} &= e^{-rT} (L - k + S(0)B(\log(\frac{L}{S(0)}), r - \xi + \frac{\sigma^2}{2}, -r + \xi)) \\ &= S(0)e^{-\xi T} \Phi(d_{1,L}) - ke^{-rT} + Le^{-rT} \Phi(-d_{2,L}) \\ &+ \frac{S(0)\sigma^2}{2(r - \xi)} \left\{ e^{-\xi T} \Phi(d_{1,L}) - \left(\frac{L}{S(0)}\right)^{2(r-\xi)/\sigma^2} e^{-rT} \Phi(d_{3,L}) \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

con que concluimos la valuación de C^{FiSL} .

Se observa un parecido importante entre el payoff de un Call FiSL y el payoff del Put FiSL. Recordemos que el payoff del Put FiSL es:

$$(\max[L, \max_{0 \leq t \leq T} S(t)] - S(T))^+,$$

así que bastará cambiar el valor a tiempo 0 de k por el valor a tiempo 0 del payoff de $S(T)$ que es $S(0)e^{-\xi T}$ en (2.43). Esto nos lleva a la siguiente fórmula:

$$P^{FiSL} = Le^{rT} \Phi(-d_{2,L}) - S(0)e^{-\xi T} \Phi(-d_{1,L}) + \frac{S(0)\sigma^2}{2(r - \xi)} \left\{ e^{-\xi T} \Phi(d_{1,L}) - \left(\frac{L}{S(0)}\right)^{2(r-\xi)/\sigma^2} e^{-rT} \Phi(d_{3,L}) \right\}. \quad (2.44)$$

Para obtener el precio del Put FiSL, se obtiene de manera análoga a como se obtuvo el valor del Call FiSL, sólo que hay que tener presente que el proceso $\{-X(t)\}$ es también un Browniano con misma σ y con deriva $-\mu$ y definir ahora $M(t)$ para $-X(t)$.

Se obtienen las siguientes fórmulas:

Para $k \leq L$

$$P^{FiSL} = ke^{-rT}\Phi(-d_{2,k}) - S(0)e^{-\xi T}\Phi(-d_{1,k}) + \frac{S(0)\sigma^2}{2(r-\xi)} \left\{ \frac{k}{S(0)} e^{2(r-\xi)T/\sigma^2} e^{-rT}\Phi(-d_{3,k}) - e^{-\xi T}\Phi(-d_{1,k}) \right\}. \quad (2.45)$$

Para $k > L$

$$P^{FiSL} = ke^{-rT} - Le^{-rT}\Phi(-d_{2,L}) - S(0)e^{-\xi T}\Phi(-d_{1,L}) + \frac{S(0)\sigma^2}{2(r-\xi)} \left\{ \frac{L}{S(0)} e^{2(r-\xi)T/\sigma^2} e^{-rT}\Phi(-d_{3,L}) - e^{-\xi T}\Phi(-d_{1,L}) \right\} \quad (2.46)$$

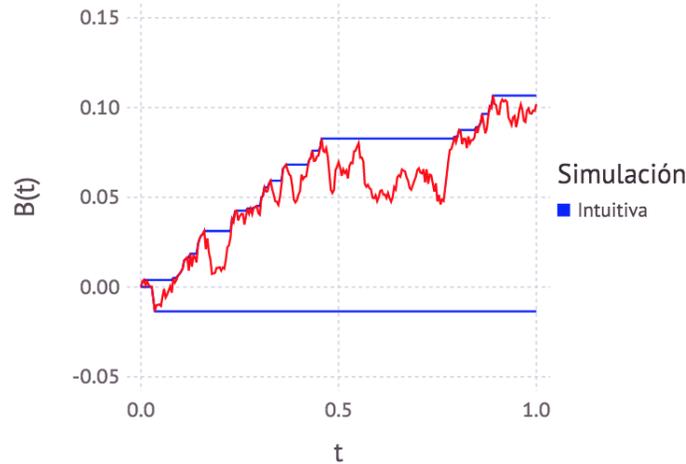
Por último para el precio del Call FISL se tiene la expresión:

$$C^{FiSL} = S(0)e^{-\xi T}\Phi(d_{1,L}) - Le^{-rT}\Phi(d_{2,L}) + \frac{S(0)\sigma^2}{2(r-\xi)} \left\{ \frac{L}{S(0)} e^{2(r-\xi)T/\sigma^2} e^{-rT}\Phi(-d_{3,L}) - e^{-\xi T}\Phi(-d_{1,L}) \right\} \quad (2.47)$$

Las demostraciones de estas últimas pueden ser consultadas con todo detalle en [Gerber and Shiu, 2003].

2.2.2.2. Valuación de Montecarlo para las opciones Lookback

Para poder simular una opción lookback es necesario conocer el valor máximo (o mínimo) que toma un movimiento browniano; así que a partir de la simulación que realizamos del movimiento browniano para la valuación de una opción asiática, la idea natural que surge es la de tomar el máximo de la simulación como estimación para el máximo (o mínimo) del Browniano. Mostramos a continuación una trayectoria simulada:



Si bien parece ser una buena estimación, si tomamos esa idea puede que el máximo real sea mayor que el visto entre dos de nuestras observaciones, es decir podríamos estar subestimando el máximo (o en el caso dual sobrestimando el mínimo).

Para mejorar nuestra simulación del $M(t)$ utilizaremos la información de la trayectoria que somos ya capaces de simular, por lo que necesitamos encontrar:

$$\mathbb{P}(M(t) > a \mid B(t) \in dx), \quad (2.48)$$

de esta manera estamos reduciendo la entropía³ y conseguimos una mejor estimación.

No debemos olvidar en ningún momento que nuestro objetivo es la implementación computacional. La idea que motiva a seguir este camino es la existencia de distribuciones condicionadas con las cuales aportamos información y por el método de simulación de inversión⁴ obtener los valores simulados de las variables que nos interesan. En caso de que la distribución no tenga inversa nos valdremos de algoritmos computacionales para encontrar los valores.

Para poder calcular (2.48) computaremos primero:

³En el siguiente capítulo definiremos este concepto.

⁴Conocido en inglés como Inverse Transform Method.

$$\mathbb{P}(M(t) \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a), \quad (2.49)$$

se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B(t) \geq a) &= \mathbb{P}(B(t) \geq a, M(t) \geq a) + \mathbb{P}(B(t) \geq a, M(t) < a) \\ &= \mathbb{P}(B(t) \geq a, M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(t) \geq a \mid M(t) \geq a)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(T_a + (t - T_a)) - a \geq 0 \mid T_a \leq t)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(t) \geq 0 \mid T_a \leq t)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(M(t) \geq a) \end{aligned}$$

$$\text{por lo tanto } \mathbb{P}(M(t) \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a).$$

Del cuarto al quinto renglón, utilizamos la propiedad de Markov fuerte de un movimiento browniano.

Para encontrar (2.48) requerimos la distribución conjunta del máximo y el browniano. Consideremos $a \geq 0$ y $y \geq 0$, la demostración se realiza con un argumento similar a la del máximo.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B(t) > a + y) &= \mathbb{P}(B(t) > a + y, M(t) \geq a) + \mathbb{P}(B(t) > a + y, M(t) \leq a) \\ &= \mathbb{P}(B(t) > a + y \mid M(t) \geq a)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(T_a + (t - T_a)) - a > y \mid M(t) \geq a)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(T_a + (t - T_a)) - a < -y \mid M(t) \geq a)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(T_a + (t - T_a)) - a < -y \mid M(t) \geq a)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(t) - a < -y \mid M(t) \geq a)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(t) < a - y \mid M(t) \geq a)\mathbb{P}(M(t) \geq a) \\ &= \mathbb{P}(B(t) < a - y, M(t) \geq a). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(B(t) < a - y, M(t) \geq a) = \mathbb{P}(B(t) > a + y). \quad (2.50)$$

Para la distribución del mínimo (m_t) ocurre:

$$\mathbb{P}(m(t) \leq a) = \mathbb{P}(\max_{0 < s < t} (-B(t)) \geq -a) = 2\mathbb{P}(B(t) \leq a),$$

y para la conjunta del mínimo y el browniano tenemos:

$$\mathbb{P}(B(t) \geq a - y, m(t) \leq a) = \mathbb{P}(B(t) \leq a + y). \quad (2.51)$$

La idea planteada en (2.48) nos permite refinar nuestra simulación del máximo, esta idea se puede usar también para mejorar la simulación del mínimo usando

$$\mathbb{P}(m(t) \leq y \mid B(t) \in da). \quad (2.52)$$

Si en vez de usar la simulación de $m(t)$ refinada como idea separada la usamos para agregar información a $M(t)$, podremos obtener una simulación del máximo condicionada al estado de la trayectoria y su mínimo.

Para obtener (2.52) nos hace falta encontrar la densidad conjunta de (2.52). Notemos que el denominador no resulta ser un problema ya que $B(t)$ tiene distribución $N(0, t)$.

Para la densidad conjunta tenemos:

$$P(m(t) \leq a, B(t) \geq x) = \mathbb{P}(B(t) \leq 2a - x) \sim N(0, t),$$

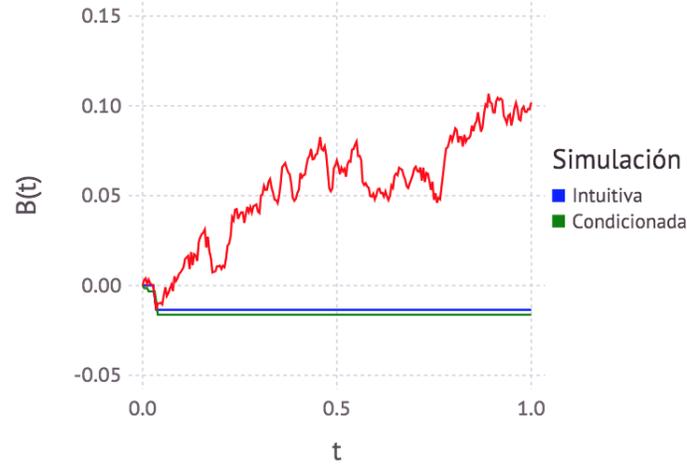
$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{2a-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du &= \frac{d}{dx} \frac{-1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2a-x)^2}{2t}} * 2 \\ f_{m,B}(a, x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2a-x)^2}{2t}} * \frac{2(2a-x)}{t}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Tras hacer el cociente entre $f_{B,m}(x, a)$ y $f_B(x)$ e integrar concluimos

$$F_{m|B=x}(y) = e^{\frac{2y(x-y)}{t}}, \quad (2.54)$$

$$F_{m|B=x}^{-1}(u) = \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{t \log(u)}{2}}. \quad (2.55)$$

De esta manera nuestra simulación para el mínimo es más refinada y se muestra en la siguiente gráfica:



Con esto hemos logrado compensar un poco nuestro problema de estimación para el mínimo. Ahora contamos con el valor (simulado) de $B(t)$ y $m(t)$ así que para mejorar nuestra estimación del máximo podemos agregar información de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(M(t) < b \mid a = m(t), B(t) = c).$$

Así logramos tener una valuación más precisa y que utiliza toda la información de la que disponemos. Podríamos calcular el máximo y el mínimo simultáneamente usando solo la información del browniano, sin embargo esto da una variabilidad para el máximo mayor o igual que la que se tiene si condicionamos al mínimo y al browniano; el resultado que nos permite hacer esta afirmación es (3.9). Debemos recalcar que computacionalmente es más tardado condicionar a ambas cosas que a una, de esta manera estamos eligiendo ser más precisos en vez de más rápidos. La forma de medir la variabilidad se verá en el siguiente capítulo.

Lo siguiente que haremos es encontrar una expresión cerrada para :

$$\mathbb{P}(a < m(t) \leq M(t) < b, B(t) \in J) \quad (2.56)$$

done $a < 0 < b, c = b - a$ y J es un boreliano en $[a, b]$.

Denotaremos por τ_x al último t en el que $B(t) = x$, sea $A = \{\tau_a < \tau_b\}$ y $C = \{\tau_b \leq \tau_a\} = \Omega - A$. Para $t > 0$ fijo definimos $A^* = \{\tau_a \leq t\}$ y $C^* = \{\tau_b \leq t\}$, también para x, y en \mathbb{R} , $r_y(x)$ es la reflexión de x sobre y , de forma más clara $r_y x = 2y - x$. Si H es un boreliano contenido en $(-\infty, \infty)$ definimos $r_y H$ como la reflexión de todos los elementos de H sobre y . Por último definimos $\mathbf{H} = \{\omega \text{ tal que } \omega \text{ está en } \Omega \text{ y } B(t, \omega) \text{ está en } H\}$.

Antes de demostrar (2.60) requeriremos la demostración de los siguientes lemas:

$$\text{Si } H \text{ está contenido en } (-\infty, a] \text{ entonces } \mathbb{P}(C \cap \mathbf{H}) = \mathbb{P}(r_b \mathbf{H}) - \mathbb{P}(A \cap r_b \mathbf{H}) \quad (2.57)$$

$$\text{Si } H \text{ está contenido en } [b, \infty) \text{ entonces } \mathbb{P}(A \cap \mathbf{H}) = \mathbb{P}(r_a \mathbf{H}) - \mathbb{P}(C \cap r_a \mathbf{H}) \quad (2.58)$$

Demostraremos solamente (2.57), (2.58) se hace de manera análoga. No es difícil observar que \mathbf{H} está contenido en A^* entonces $C \cap \mathbf{H}$ está contenido en C^* . Más aún $r_b H$ está contenido en $[b, \infty)$ por lo cual tenemos que $r_b(\mathbf{H})$ está contenido en B^* . Usando el principio de reflexión tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C \cap \mathbf{H}) &= \mathbb{P}(C \cap r_b \mathbf{H}) \\ &= \mathbb{P}((\Omega - A) \cap r_b \mathbf{H}) \\ &= \mathbb{P}(r_b \mathbf{H}) - \mathbb{P}(A \cap r_b \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Con esto podemos demostrar ya (2.60); notemos que la probabilidad que nos interesa es:

$$\mathbb{P}(J) - \mathbb{P}(A \cap A^* \cap J) - \mathbb{P}(C \cap C^* \cap J). \quad (2.59)$$

Notemos que $A \cap A^*$ equivale a decir que $B(t)$ tocó primero a a antes de t y luego a b , mientras que $C \cap C^*$ denota que $B(t)$ tocó a b antes de t y luego a a .

Para $\mathbb{P}(A \cap A^* \cap J)$ tenemos:

$$\mathbb{P}(A \cap A^* \cap J) = \mathbb{P}(A \cap A^* \cap r_a J),$$

esto se debe al principio de reflexión. Tengamos en cuenta que $r_a J$ está en el intervalo $(-\infty, a]$, entonces $r_a J$ está contenido en A^* y usando (2.57) y

(2.58) de manera alternada tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap A^* \cap r_a J) &= \mathbb{P}(A \cap r_a J) \\
&= \mathbb{P}(r_a J) - \mathbb{P}(C \cap r_a J) \\
&= \mathbb{P}(r_a J) - \mathbb{P}(r_b r_a J) + \mathbb{P}(r_a r_b r_a J) - \dots
\end{aligned}$$

la cuál es una serie absolutamente convergente. Es fácil de notar ya que cada reflexión se aleja del origen. Además tenemos:

$$\begin{aligned}
(r_a r_b)^n(x) &= x - 2nc \\
(r_b r_a)^n(x) &= x + 2nc,
\end{aligned}$$

lo que nos permite escribir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B(t) \in (r_b r_a)^n J) &= \mathbb{P}(B(t) - 2nc \in J) \\
&= \int_J \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y+2nc)^2}{2t}} dy.
\end{aligned}$$

Haciendo el mismo razonamiento para el tercer término de (2.59), y escribiendo todo junto tenemos:

$$\mathbb{P}(a < m(t) \leq M(t) < b, B(t) \in J) = \int_J \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y+2nc)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y-2a+2nc)^2}{2t}} \right] dy. \quad (2.60)$$

Ahora derivamos respecto de y y respecto de $-a$, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(m(t) \in a, M(t) < b, B(t) \in dy) \quad (2.61) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2(n+1)}{t} (y-2a+2nc) e^{-\frac{(y-2a+2nc)^2}{2t}} - \frac{2n}{t} (y+2nc) e^{-\frac{(y+2nc)^2}{2t}} \right] dy,
\end{aligned}$$

con esto podemos encontrar la función que nos interesa:

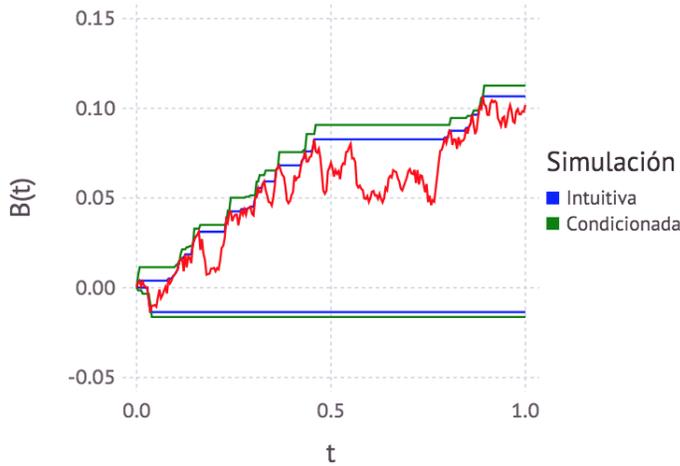
$$\mathbb{P}(M(t) < b \mid m(t) = a, B(t) = y) = \frac{\mathbb{P}(m(t) = a, M(t) < b, B(t) = y)}{\mathbb{P}(m(t) = a, B(t) = y)}.$$

Recordemos que el denominador fue escrito en la ecuación (2.53), por lo que basta hacer una división para llegar a la expresión que buscamos, esto es:

$$\mathbb{P}(M(t) < b \mid m(t) = a, B(t) = y) \tag{2.62}$$

$$= e^{\frac{(2a-y)^2}{2t}} \frac{t}{y-2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(n+1)}{t} (y-2a+2nc) e^{-\frac{(y-2a+2nc)^2}{2t}} - \frac{n}{t} (y+2nc) e^{-\frac{(y+2nc)^2}{2t}} \right] dy.$$

La expresión anterior nos permite calcular el máximo con menor incertidumbre. Debido al problema que implica encontrar la inversa de (2.2.2.2) usaremos un método numérico para encontrar el valor que resuelve la inversa y así poder utilizar el método de inversión. Si simulamos el máximo con la información con la que ya contamos obtenemos:



La forma propuesta para simular el máximo, el mínimo y el browniano de manera conjunta será útil no sólo para este tipo de opciones. En la siguiente sección estudiaremos opciones de una barrera donde estos resultados serán útiles; cabe mencionar que las opciones parisinas o las de barrera doble, explotan más este algoritmo.

2.2.2.3. Valuación de Montecarlo para opciones lookback

Vamos a valorar un Call FiSL y un Put FiSL, con base en el método Montecarlo, todos con las siguientes características:

$$\begin{array}{ll} T = 5 & dt = 1/2^6 \\ S = 10 & K = 10 \\ \sigma = 0.1415 & R = 1.06 \end{array}$$

C_{FiSL}	P_{FiSL}
2.888354	0.849295

Notemos que el valor del C_{FiSL} es más alto que el precio del Call europeo que calculamos en la sección anterior, también es importante ver que la gran diferencia entre los precios del C_{FiSL} y P_{FiSL} se debe a la importante reducción del riesgo que implica fijar el precio strike.

La simulación requiere bastante tiempo debido a que se buscan numéricamente las raíces para el máximo, en el artículo [Becker, 2010] se presenta una modificación del algoritmo para reducir los tiempos de respuesta.

El código puede ser consultado en el apéndice A.2.3.

2.3. Opciones de barrera

El nombre de estas opciones⁵ se debe a que utilizan una “barrera” para acotar el payoff; en este tipo de opciones se requiere un valor constante B que al ser alcanzado define si la opción se puede ejercer o no. Existen dos variaciones respecto a la forma de calcular el payoff:

- Opción de barrera Up-and-out su payoff es similar a una opción europea sin embargo se pagará solamente si la acción no supera una constante B .

⁵En inglés estas opciones son llamadas barrier options.

- Opción de barrera Up-and-in similar a la anterior, salvo que esta se pagará si la barrera se rebasa.

Existen también opciones Down-and-in y Down-and-out, cuyas definiciones son análogas.

El cálculo del payoff para el call se resume en la siguiente tabla:

<i>BUO</i>	<i>BUI</i>
$(S(t) - k)^+ \mathbb{1}_{M(t) < B}$	$(S(t) - k)^+ \mathbb{1}_{M(t) > B}$

Es importante resaltar que la suma de un call *BUO* y un call *BUI* es un call europeo, por lo que, nos basta valorar alguno de los dos ya que tenemos una expresión para el europeo.

2.3.1. Valuación de opciones de barrera

2.3.1.1. Formula cerrada de opciones de barrera

En la sección anterior el principio de reflexión y las distribuciones para el máximo y el mínimo utilizaron como argumento la simetría del movimiento browniano, sin embargo la dinámica de una acción puede no ser simétrica si la deriva es distinta de cero, por consiguiente requerimos un Teorema que nos permita hacer un cambio de medida para trabajar con un movimiento browniano sin deriva, esto se consigue con el Teorema de Girsanov.

Recordemos que $B(t) \sim N(0, t)$ y si consideramos $B(t) + \lambda t$ resulta fácil demostrar que se distribuye $N(\lambda T, T)$. [Martínez, 2008] plantea el siguiente problema que en sus palabras ‘contiene toda la esencia del Teorema de Girsanov’.

Se quiere determinar $\psi(B(t))$ que cumpla:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B(t) + \lambda t)\psi(B(t))] &= 0 \\ \mathbb{E}[(B(t) + \lambda t)^2\psi(B(t))] &= t \end{aligned}$$

donde se puede verificar que el resultado es: $\psi(B(t)) = e^{-\lambda B(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$; el lector puede encontrar una demostración rigurosa del Teorema de Girsanov

en [Davis, 2006] pg. 9.

Para encontrar el precio de un call Up-and-out vamos a denotar a \mathbb{P}_ν como la medida de probabilidad de un movimiento browniano con deriva ν .

Tenemos por el Teorema de Girsanov que si $\{X(t)\}$ denota al movimiento browniano con deriva ν , es decir $X(t) = \nu t + B(t)$, el siguiente cambio de medida nos permite trabajar con un movimiento browniano sin deriva

$$\frac{d\mathbb{P}_\nu}{d\mathbb{P}_0} = e^{\nu X(t) - \frac{1}{2}\nu^2 t}.$$

Así que para una función f tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_{\{M(t) < y\}} f(X(t))] &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{M(t) < y\}} f(X(t)) \frac{d\mathbb{P}_\nu}{d\mathbb{P}_0}] \\ &= \mathbb{E}_0[\mathbb{1}_{\{M(t) < y\}} f(X(t)) e^{\nu X(t) - \frac{1}{2}\nu^2 t}] \\ &= \int_{-\infty}^y f(x) e^{\nu X(t) - \frac{1}{2}\nu^2 t} \left(\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \phi\left(\frac{x-2y}{\sqrt{t}}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{2t} + \nu x - \frac{\nu^2 t}{2} &= -\frac{(x - \nu t)^2}{2t}, \\ -\frac{(x-2y)^2}{2t} + \nu x - \frac{\nu^2 t}{2} &= -\frac{(x-2y-\nu t)^2}{2t} + 2y\nu. \end{aligned}$$

Así que podemos reescribir (2.63) de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^y f(x) \left(\phi\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - \phi\left(\frac{x - 2y - \nu t}{\sqrt{t}}\right) e^{2y\nu} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx.$$

De lo cuál obtenemos:

$$F_\nu(y, x) = \mathbb{P}_\nu(M(t) < y, X(t) < x) = \Phi\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 2y - \nu t}{\sqrt{t}}\right) e^{2y\nu}. \tag{2.64}$$

Antes de continuar tengamos presente que para que la opción esté “in the money”, $X(t)$ debe estar entre:

$$a_1 = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{K}{S_0} \right), \quad a_2 = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{B}{S_0} \right).$$

Podemos reescribir el proceso bajo la medida neutral al riesgo del precio de la siguiente manera:

$$S(t) = S(0)e^{\sigma X(t)},$$

donde $X(t)$ es el movimiento Browniano con deriva ν como ya lo definimos y $\nu = \frac{1}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)$, de esta manera preservamos (4.9).

Así que para valuar el call nos basta resolver:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu(e^{-rt}[S(t) - k]^+ \mathbb{1}_{\{M(t) < B\}}) &= e^{-rt} \int_{a_1}^{a_2} (S(0)e^{\sigma x} - K) \frac{\partial F_\nu(y, x)}{\partial x} dx \\ &= e^{-rt} \int_{a_1}^{a_2} (S(0)e^{\sigma x} - K) \left(\phi\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - \phi\left(\frac{x - 2y - \nu t}{\sqrt{t}}\right) e^{2y\nu} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx. \end{aligned}$$

Hay que resolver dos integrales, la primera:

$$e^{-rt} \int_{a_1}^{a_2} (S(0)e^{\sigma x} - K) \left(\phi\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx,$$

que se puede reescribir:

$$e^{-rt} \int_{a_1}^{a_2} S(0)e^{\sigma x} \left(\phi\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx - e^{-rt} \int_{a_1}^{a_2} K \left(\phi\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx,$$

si para el lado izquierdo completamos el cuadrado tenemos:

$$e^{-rt} S(0) e^{\sigma t(\sigma + 2\nu)/2} \int_{a_1}^{a_2} \phi\left(\frac{x - \sigma t - \nu t}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx - K e^{-rt} \int_{a_1}^{a_2} \phi\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} dx,$$

haciendo cambios de variables en ambas integrales obtenemos:

$$e^{-rt}S(0)e^{\sigma t(\sigma+2\nu)/2} \int_{\frac{a_1-\sigma t-t\nu}{\sqrt{t}}}^{\frac{a_2-\sigma t-t\nu}{\sqrt{t}}} \phi(u)du - Ke^{-rt} \int_{\frac{a_1-t\nu}{\sqrt{t}}}^{\frac{a_2-t\nu}{\sqrt{t}}} \phi(w)dw. \quad (2.65)$$

La segunda ecuación se resuelve de manera análoga salvo que se obtiene:

$$-e^{-rt}S(0)e^{\sigma(\sigma t+2\nu t+4yt)/2} \int_{\frac{a_1-\sigma t-t\nu-2y}{\sqrt{t}}}^{\frac{a_2-\sigma t-t\nu-2y}{\sqrt{t}}} \phi(u)du + Ke^{-rt+2y\nu} \int_{\frac{a_1-2y-t\nu}{\sqrt{t}}}^{\frac{a_2-2y-t\nu}{\sqrt{t}}} \phi(w)dw. \quad (2.66)$$

La suma de (2.65) y (2.66) se puede reescribir:

$$\begin{aligned} & S(0)(\Phi(d_1) - \Phi(x_1) + \frac{B}{S(0)}^{2\lambda} (\Phi(-y) - \Phi(-y_1))) \\ & + ke^{-rt}(-\Phi(d_2) + \Phi(x_1 - \sigma\sqrt{t}) - \frac{B}{S(0)}^{2\lambda-2} (\Phi(-y + \sigma\sqrt{t}) - \Phi(-y_1 + \sigma\sqrt{t}))), \end{aligned} \quad (2.67)$$

que es la formula para el call up-and-out donde d_1 y d_2 son los parámetros usuales en el modelo europeo y el resto se definen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\log(\frac{S(0)}{B})}{\sigma\sqrt{t}} + \lambda\sigma\sqrt{t}, \\ y_1 &= \frac{\log(\frac{B}{S(0)})}{\sigma\sqrt{t}} + \lambda\sigma\sqrt{t}, \\ y &= \frac{\log(\frac{B^2}{KS(0)})}{\sigma\sqrt{t}} + \lambda\sigma\sqrt{t}, \\ \lambda &= \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Las fórmulas para el resto de las opciones de barrera pueden ser consultadas en [Hull, 2006] y una forma general que engloba los cuatro casos puede ser leída en [Clewlow Lee, 1994], donde se demuestran a detalle.

2.3.1.2. Valuación de Montecarlo para opciones de barrera

Vamos a evaluar un call up-and-out, con base en el método Montecarlo, con las siguientes características:

$$\begin{array}{ll} T = 5 & dt = 1/2^6 \\ S = 10 & K = 10 \\ \sigma = 0.1415 & R = 1.06 \\ B = 11.75 & \end{array}$$

C_{uao}
0.0639006

Para la valuación de las opciones de barrera nos valdremos de los resultados obtenidos para las opciones lookback. Debemos tener presente que un call up-and-out puede resultar con un precio casi cero si la barrera B está muy próxima al valor esperado de $S(T)$ y si B es bastante grande coincide con el precio de un call europeo clásico.

Algo muy importante para valuar este tipo de opciones es que a mayor refinamiento en la partición del tiempo se obtendrán estimación mejores del máximo; si se utilizan particiones demasiado burdas se tendrá una sobreestimación exagerada del máximo lo que hará que la acción valga cero en demasiados casos.

El código puede ser consultado en el apéndice A.2.4.

Capítulo 3

Entropía

En este capítulo nos centraremos en el concepto de entropía de variables aleatorias y sus propiedades principales. La entropía es una herramienta que nos permite tener una forma de cuantificar qué tan aleatoria es una variable aleatoria. Este capítulo funciona como introducción para más adelante desarrollar modelos que tomen en cuenta este concepto.

Se demuestran resultados que han sido citados en capítulos anteriores que ayudarán a entender mejor algunos conceptos.

3.1. Introducción

El concepto de entropía surge en física, en el área de termodinámica. Es por esto que hablaremos de las leyes de la termodinámica para empezar a comprender qué significa la entropía.

La primera ley habla sobre la conservación de energía, incluyendo la idea de calor. Si definimos U como la energía del sistema, Q el calor aportado y W el trabajo realizado por el sistema tenemos entonces la relación:

$$\Delta U = Q - W ,$$

que puede interpretarse como: “La variación de energía en el sistema se debe a la diferencia entre el calor y el trabajo con los que el sistema interactúa con el medio”.

La segunda ley se resume de forma excelente en palabras de Clausius¹: “No hay ninguna transformación cuyo único efecto sea transferir calor de un foco frío a otro caliente”. Con esta afirmación se da una dirección a los procesos termodinámicos, restringiendo los eventos de la primera ley, ya que no sólo deben conservar la energía sino mantener un orden natural.

La tercera ley dice que cerca del cero absoluto las propiedades del cuerpo que dependen de la temperatura son independientes de ésta.

Clausius definió una función para el cambio en la entropía (dS) en sistemas reversibles² basándose en el calor transferido (dQ) y la temperatura absoluta del sistema (T):

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Algo que debemos resaltar es que esto no nos da una definición de lo que es entropía, sólo habla de los cambios en ella, debido a que para el interés clásico era sólo importante el cambio y no la entropía como tal.

El primero en dar una definición concreta de la entropía (S) fue Boltzmann³ dentro del ámbito de la mecánica estadística:

$$S = k \log(W).$$

Donde k es la constante de Boltzmann⁴ y W es el número de todas las posibles fases del sistema (microestados), siendo la entropía una medida de la aleatoriedad.

El estado usual de la naturaleza suele ser el más aleatorio, por ejemplo: es poco creíble que las partículas de un gas se ordenen en filas, ya que generalmente las partículas están en constante movimiento chocando entre ellas,

¹Rudolf Julius Emanuel Clausius (2/01/1822–24/08/1888) es uno de los principales fundadores de la termodinámica. En su artículo “*Über die bewegende Kraft der Wärme*” (1850) plasma las primeras dos leyes de esta área de estudio.

²Los procesos reversibles son ideales. Son aquellos que tras ir de un estado inicial a uno final son capaces de retomar sus propiedades originales.

³Ludwig Eduard Boltzmann (20/02/1844–5/09/1906) es conocido como el padre de la mecánica estadística

⁴ $k \approx 1.38064852(79) * 10^{-23} \frac{J}{K}$

provocando así que su ubicación sea totalmente aleatoria.

3.2. Entropía de Shannon

Al ser la entropía una medida de la aleatoriedad, no resulta sorprendente que sea de interés en ramas ajenas a la física. Con esta idea Shannon⁵ aplica el concepto de entropía en teoría de la información⁶.

La entropía de Shannon ($H(X)$) para una variable aleatoria X discreta está definida como:

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log(p(x)) = \mathbb{E}(-\log(p(x))). \quad (3.1)$$

mientras que para una variable aleatoria continua es

$$H(X) = - \int_{\Omega} f(x) \log(f(x)) dx = \mathbb{E}(-\log(f(x))). \quad (3.2)$$

Podemos apreciar en esta expresión que la función logaritmo tiene una pendiente mayor conforme se acerca a cero, por lo cual será más sensible a cambios en valores pequeños. Además al tomar $-\log(p(x))$ estamos haciendo que para valores muy pequeños de $p(x)$ nos aproximemos a infinito, de esta manera los eventos poco probables son los que aportan mayor información para la entropía.

Debido al problema que nos generan en la definición los eventos de probabilidad cero, tomaremos la convención de que $\infty * 0 = 0$, Así los eventos de probabilidad cero y los eventos seguros no aportarán cambios en la entropía.

Al medir nos gustaría que $H(X)$ fuera mayor o igual que 0, lo cual es claro debido a que $p(x) \geq 0$ y $-\log(p(x)) \geq 0$ entonces $-\sum \log(p(x))p(x) \geq 0$; donde el cero ocurrirá solo si existe un evento seguro.

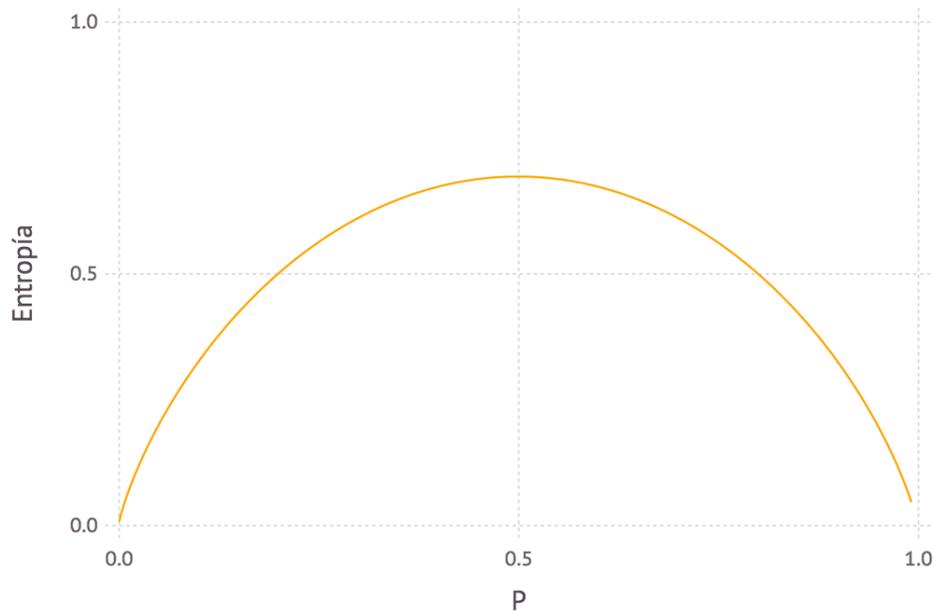
⁵Claude Elwood Shannon (30/04/1916–24/02/2001), en 1948 publica “*A mathematical theory of communication*” siendo el primer pilar de la Teoría de la comunicación.

⁶define la información como el grado de libertad de la fuente de información para elegir entre los elementos de un idioma a fin de componer un mensaje determinado

3.2.1. Ejemplos:

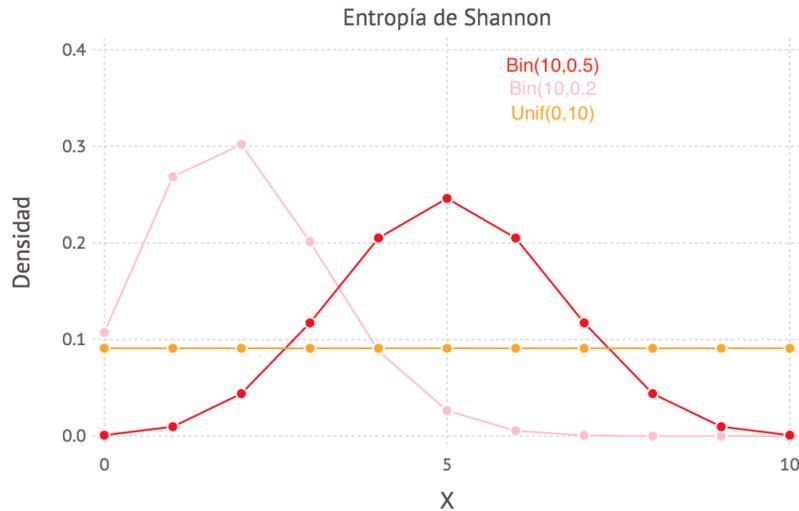
El caso de una variable aleatoria X que se distribuye Bernoulli(1) da como resultado: $H(X) = -1 * \log(1) - 0 * \log(0) = 0$, lo cual era de esperarse debido a que cada vez que arrojemos una moneda al aire caerá la misma cara con probabilidad 1; este escenario resulta muy poco aleatorio. Si agregamos azar (por ejemplo usando una moneda justa), ahora X se distribuye Bernoulli(0.5) dando como resultado $H(X) = 0.693$.

Graficamos la función $H(X)$ para una Bernoulli(p), haciendo variar p . Encontramos que el máximo está en $p = 1/2$, lo que se ve a continuación:



En la siguiente gráfica podemos observar la función de densidad de tres variables aleatorias X, Y y Z las cuáles se distribuyen $\text{Unif}(0,10)$, $\text{Binomial}(10,0.5)$ y $\text{Binomial}(10,0.2)$ respectivamente. Con ayuda de la figura podemos ver que la variable aleatoria Z tiene una cola muy ligera a la derecha, lo que provoca que la probabilidad acumulada hasta el 5 sea de 0.994 esto hace que la mitad del dominio sea poco probable, así que esperamos de forma intuitiva que la entropía de Z será menor que la de Y , debido a que esta última tiene colas

más pesadas. Al analizar X podemos ver que todos los valores son igualmente probables, creando un escenario más homogéneo.



Distribución	Entropía
Binomial(10,0.2)	1.622
Binomial(10,0.5)	1.876
Unif(0,10)	2.398

Lo cuál coincide con lo que esperábamos.

Ya que la entropía es nuestra forma de medir la aleatoriedad del sistema, queremos maximizarla para poder encontrar el sistema más aleatorio.

Analicemos el caso de la entropía de una variable aleatoria uniforme en n puntos

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log(p(x)) = - \sum_x \frac{1}{n} \log\left(p\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \log(n),$$

esto sucedería si de todas las posibles opciones no tuviéramos preferencia por ninguna. Esto aparenta ser un escenario sumamente azaroso.

Tomemos una variable aleatoria X con soporte en $\{1, 2, \dots, n\}$ y veamos qué sucede si maximizamos $H(X)$. Para saber cuál es la distribución que nos daría la máxima entropía:

$$\text{Max } \Lambda = - \sum_x p(x) \log(p(x)) - \lambda \left(\sum_x p(x) - 1 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p(x)} \Lambda = -(\log(p(x)) + 1) - \lambda = 0$$

Entonces $p(x) = e^{-(\lambda+1)}$, notemos que ya $p(x)$ no depende de x

y por la restricción $\sum p(x) = 1 = ne^{-(\lambda+1)}$

por lo tanto $p(x) = \frac{1}{n}$.

Lo cual confirma nuestra intuición. Sobre n puntos la entropía se maximiza con la distribución uniforme si restringimos a medidas de probabilidad, también notemos que la entropía aumentará conforme aumenten el número de puntos pues logaritmo es una función creciente.

Si en vez de limitar nuestra restricción a que solamente $p(x)$ sea de probabilidad, ahora también agregamos restricciones para que coincida en media y varianza obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{máx } \Lambda = & - \sum_x p(x) \log(p(x)) - \lambda_1 \left(\sum_x p(x) - 1 \right) - \lambda_2 \left(\sum_x p(x)x - \mu \right) \\ & - \lambda_3 \left(\sum_x x^2 p(x) - \mu^2 - \sigma^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial p(x)} \Lambda = -(\log(p(x)) + 1) - \lambda_1 - x\lambda_2 - x^2\lambda_3 = 0$$

Lo que resulta en:

$$p(x) = e^{-(1+\lambda_1+x\lambda_2+x^2\lambda_3)}.$$

Lo cual resultará en algo similar a la distribución normal, cuando reduzcamos la distancia entre los puntos y aumentemos la cantidad de éstos, debido al polinomio de segundo grado en el exponente.

Debido al Teorema de límite central es recurrente el uso de la distribución normal, debido a que aproxima bien a la suma de variables aleatorias, por lo

cual daremos de forma explícita su entropía:

Sea X v.a. que se distribuye $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} * \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \log(2\pi e\sigma^2)
 \end{aligned}$$

La primera integral da 1 debido a que la distribución normal es de probabilidad y la segunda da σ^2 ya que es la varianza.

Algo interesante de la expresión a la que llegamos para la entropía de la normal es que no depende de μ sino solamente de la varianza, por lo cual es invariante ante translaciones. Esto no es sorprendente, pues la aleatoriedad no depende de la media.

Por la forma en que se definió $H(X)$ podemos afirmar que si X y Y son iguales casi seguramente entonces se cumple que $H(X) = H(Y)$. Otros conceptos importantes son los relacionados a cuando hay más de una variable aleatoria, es decir cuando queremos hablar de la entropía de un vector aleatorio. Definimos la entropía conjunta y la condicional como:

$$H(X, Y) = - \sum_x \sum_y p(x, y) \log(p(x, y)), \quad (3.4)$$

$$H(X | Y) = - \sum_y p(y) \sum_x p(x | y = y) \log(p(x | y = y)). \quad (3.5)$$

De las definiciones anteriores se puede verificar lo que se conoce como regla de la cadena para la entropía:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y | X), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
H(Y | X) &= \sum_x p(x) H(Y | X) = - \sum_x p(x) \sum_y p(y | x = x) \log(p(y | x = x)) \\
&= - \sum_x p(x) \sum_y p(y | x = x) \log\left(\frac{p(y, x)}{p(x)}\right) \\
&= - \sum_x \sum_y p(y, x) (\log(p(y, x)) - \log(p(x))) \\
&= H(X, Y) - H(X) \\
&\quad \text{Por lo tanto } H(X, Y) = H(X) + H(Y | X)
\end{aligned}$$

Otra idea que surge de manera intuitiva acerca de la entropía es que el aportar información debe reducir el valor de la entropía es decir :

$$H(X) \geq H(X | Y), \quad (3.7)$$

lo cual se demostrará más adelante.

3.3. Divergencia de Kullback-Leibler

La entropía de Shannon nos da una forma de medir qué tan aleatoria es una medida, por desgracia esto no sirve para comparar medidas. Este problema surge debido a que los mercados no siempre son completos, por lo que debemos encontrar la medida martingala más similar a lo que observamos. Este problema se puede abordar usando la divergencia de Kullback-Leibler, propuesta por Solomon Kullback⁷ y Richard Leibler⁸ que nos permite medir “distancias”⁹ entre dos medidas.

Esta se define como:

$$D(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) = \int_{\Omega} \log\left(\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)}\right) d\mathbb{Q} \quad (3.8)$$

En caso de que \mathbb{Q} sea absolutamente continua respecto a \mathbb{P} y debido a que son medidas de probabilidad por lo cual son σ -finitas se cumplen las

⁷(1907 – 1994) Criptoanalista y Matemático.

⁸(18/03/1914-25/10/2003) Criptoanalista y Matemático.

⁹No cumple las propiedades de métrica, por ejemplo no es simétrica por lo cual entrecomillamos la palabra distancia.

condiciones para el Teorema de Radon–Nikodym; si eso pasa podemos escribir la divergencia de la siguiente manera:

$$D(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\log(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})) = \int \log(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}) d\mathbb{Q} = \int \log(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}) \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P}.$$

Notemos que si \mathbb{Q} no es absolutamente continua respecto a \mathbb{P} la divergencia de Kullback–Leibler es infinita.

De nuevo, como en la entropía de Shannon, si queremos medir deseamos que la divergencia de Kullback–Leibler sea mayor o igual a cero; esta desigualdad es conocida como la desigualdad de Gibbs.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(-\log(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{P}})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\log(\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}})) = \int (\log(\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}})) \mathbb{Q} dx \leq \log(\int \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} dx) = \log(1) = 0$$

por lo tanto $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\log(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{P}})) \geq 0$; la desigualdad es resultado de aplicar la desigualdad de Jensen. Es claro que si $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ la divergencia de Kullback–Leibler vale 0, entonces podemos pensar en que tenemos ya una forma de medir qué tan diferentes son las medidas.

También veamos que si tenemos un espacio de n puntos y \mathbb{P} se distribuye uniforme tenemos una cota para $D(\mathbb{Q}, \mathbb{P})$ dada por la entropía de la uniforme: $D(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) = \sum \log(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{P}}) \mathbb{Q} = \sum \mathbb{Q} \log(\mathbb{Q}) - \log(\frac{1}{n}) \sum \mathbb{Q} = \log(n) - H(\mathbb{Q})$.

Una relación interesante es que si \mathbb{Q} es la medida real entonces \mathbb{P} resulta ser la verosimilitud:

$$D(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) = \sum \log(\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{P}}) \mathbb{Q} = \sum \mathbb{Q} \log(\mathbb{Q}) - \sum \mathbb{Q} \log(\mathbb{P})$$

El primer término de la resta es una constante para la elección de \mathbb{P} . Fijandonos en el segundo término y por la ley de los grandes números tenemos:

$$\sum \mathbb{Q} \log(\mathbb{P}) = \frac{1}{n} \sum \log(\mathbb{P}) \text{ lo cual es la verosimilitud.}$$

Con lo que hemos visto hasta el momento somos capaces de resolver el problema de la entropía de Shannon que mencionamos en (3.7), sobre aportar

información a la variable.

Analicemos que pasa con $H(X) + H(Y) - H(X, Y)$

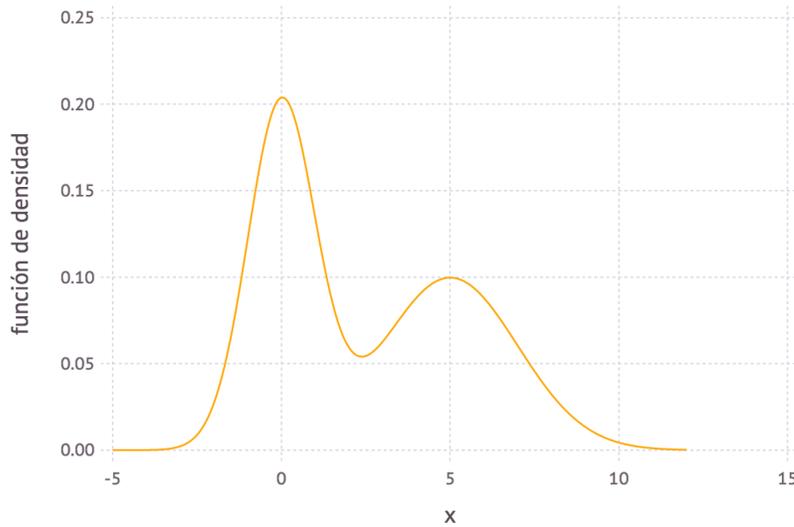
$$\begin{aligned}
& H(X) + H(Y) - H(X, Y) = \\
&= - \int_x f(x) \log(f(x)) dx - \int_y f(y) \log(f(y)) dy + \int_x \int_y f(x, y) \log(f(x, y)) dy dx \\
&= - \int_x \int_y f(x, y) \log(f(x)) dy dx - \int_x \int_y f(x, y) \log(f(y)) dy dx \\
&\quad + \int_x \int_y f(x, y) \log(f(x, y)) dy dx \\
&= \int_x \int_y f(x, y) (\log(f(x, y)) - \log(f(x)f(y))) dy dx \\
&= \int_x \int_y f(x, y) \left(\log \left(\frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \right) \right) dy dx \\
&= \int_x \int_y f(x, y) \left(\log \left(\frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \right) \right) dy dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Esto se debe a que la divergencia de Kullback Leibler es mayor igual que cero entonces $H(x) + H(y) \geq H(x, y) = H(x) + H(y | x)$
Por lo tanto :

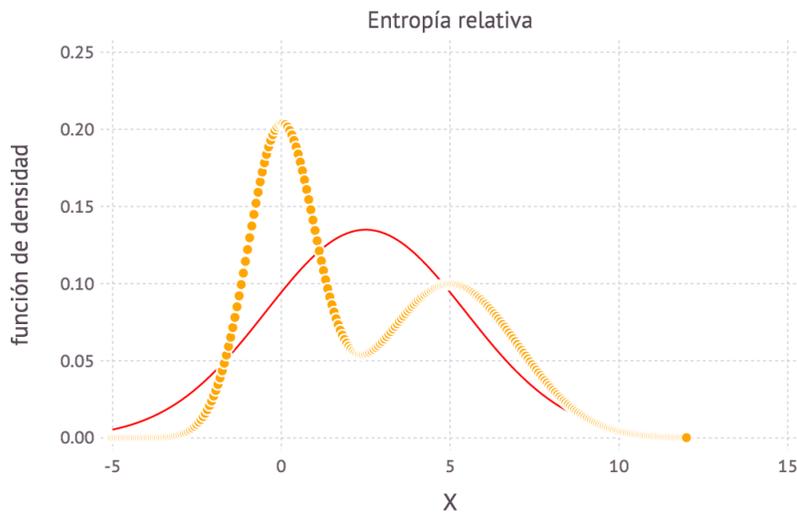
$$H(y) \geq H(y | x). \quad (3.9)$$

3.3.1. Ejemplo

Veamos cómo es la distribución normal que minimiza la mezcla de normales $\mathcal{N}(0, 1) + \mathcal{N}(5, 2)$, cuya gráfica es:



De esta manera la normal que minimiza la entropía de Kulback Leibler es aquella que tiene una media y varianza similar a la mezcla. Dando así una $\mathcal{N}(\mu \approx 2.49, \sigma^2 \approx 2.95)$, con una entropía relativa $D(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) \approx 27.559$. Gracficándolas juntas se ven de la siguiente manera:



El código puede ser consultado en el apéndice A.3.1.

Capítulo 4

Entropía en las finanzas

Con el objetivo de que el lector aplique los conceptos del capítulo anterior ahora se presentan aplicaciones en finanzas y se da un Teorema que da pauta para la elección de una medida libre de riesgo para un mercado incompleto. Se verán variaciones de modelos populares que toman en cuenta el concepto de entropía y que refinan las estimaciones del valor de derivados.

4.1. Algunos ejemplos

4.1.1. Medida para el riesgo

Es usual en estadística usar la media y la varianza para conocer a grandes rasgos el comportamiento de una distribución, pero esta práctica puede resultar en grandes errores cuando se habla de distribuciones no simétricas; es por esto que en [Philippatos and Wilson, 1972] se recomienda el uso de más momentos o en otros casos otra medida de incertidumbre. La entropía es una excelente alternativa, inclusive puede ser calculada en términos de la varianza si es que se conoce una distribución a posteriori, este hecho se resaltó cuando calculamos la entropía de la distribución normal, la cual quedaba en términos de la varianza, siendo una relación uno a uno.

Podemos definir la entropía de un portafolio de n valores como la entropía conjunta de los retornos. Es decir:

$$H_p = H(R_1, R_2, \dots, R_n) = H(R_1) + H(R_2 | R_1) + \dots + H(R_n | R_{n-1}, \dots, R_1).$$

Aquí estamos usando la regla de la cadena de la entropía $n - 1$ veces. Esta expresión resulta complicada de computar por lo que es habitual usar el modelo de un solo índice de Sharpe (1963) para facilitar su manejo. Tomando un conjunto de activos correlacionados con un índice de mercado (I) podemos expresar la entropía conjunta:

$$H_p = H(R_1, R_2, \dots, R_n, R_I) = H(R_I) + w_1 H(R_1 | R_I) + \dots + w_n H(R_n | R_I),$$

donde w_i es la fracción del capital asignado al activo i . Debido a que $H(R_I)$ no varía de portafolio a portafolio se ocupa como medida para el riesgo:

$$H(\text{Portafolio} | R_I) = \sum_i^n X_i H(R_i | R_I),$$

con lo que nos bastaría minimizar esta función para así minimizar también el riesgo.

4.1.2. Selección de portafolios

El modelo de media-varianza (MVM) de Markowitz, es pionero en la selección de portafolios eficientes, por desgracia implícitamente tiene la idea de que los retornos sigan una distribución normal, por lo que autores como [Usta and Kantar, 2011] optan por modelos con múltiples funciones objetivo, para así poder tomar en cuenta mayor número de aspectos.

Destaca el modelo media-varianza-sesgo (MVSM) debido a que se anexa el sesgo para la estimación; resulta de gran interés para los inversores un sesgo positivo, ya que de esta manera se disminuye el riesgo de grandes pérdidas.

Existe también el modelo media-varianza-asimetría-entropía (MVSEM) el cual plantea resolver el problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \min w'Vw \\
& \max w'S(w \otimes w) \\
& \text{Max } -w \log(w) \\
& \text{s.a } w'M = \eta, x'1 = 1,
\end{aligned}$$

Donde S se refiere a la matriz de cosesgo.

El modelo MVSEM se resuelve usando escalarización, restringiendo a $\sum \lambda_i = 1$, dependiendo de cómo se elijan las λ_i se tendrán distintas configuraciones de pesos para los portafolios. Resulta claro que MVM y MVSM son casos particulares.

$$\begin{aligned}
& \min w'Vw - w'S(w \otimes w) + w \log(w) \\
& \text{s.a } w'M = \eta, x'1 = 1.
\end{aligned}$$

El propósito de maximizar la entropía en este modelo es diversificar de la mejor manera el portafolio.

4.1.3. Comportamiento de Índices

En [Bariviera et al., 2015] se expone un análisis acerca de la tasa LIBOR, usando el criterio de máxima entropía. En su artículo plantea el problema de identificar si los banqueros declaran de forma honesta la tasa para lo que utiliza inicialmente como hipótesis nula que la tasa LIBOR tiene un comportamiento con distribución uniforme o distribución de Benford. Al considerar la tasa LIBOR desde 1987 a 2008 no se rechaza la hipótesis nula pero si se considera el periodo pre-crisis hipotecaria la hipótesis nula es rechazada, por lo que en el artículo se plantea que hay un cambio determinista en la tasa por lo que es posible que los banqueros estuvieran declarando a su conveniencia la tasa. En ese artículo se propone un modelo de series de tiempo en el que se minimiza la entropía relativa, con lo que se consiguen excelentes predicciones del comportamiento de la tasa.

4.2. Medida libre de riesgo

De todas las aplicaciones de la entropía la que nos es de primordial interés es la que nos permite dar una medida libre de riesgo aun dentro de mercados incompletos¹. En el Teorema (1) vimos que no había oportunidades de arbitraje si existía una medida libre de riesgo, pero cuando tenemos mercados incompletos esta medida no es única, por lo que buscaremos aquella que minimice la entropía relativa. Debemos demostrar que la medida martingala libre de riesgo² \mathbb{Q} es única y analizaremos si es similar a la que se había propuesto en la demostración del Teorema (1). Vamos a mantener la hipótesis de no arbitraje; ya demostramos que si no hay arbitraje existe una medida martingala libre de riesgo.

Un supuesto que se había omitido es que el mercado debe ser no redundante, esto quiere decir que no existe un vector w tal que:

$$\mathbb{P}[w'S_1 = 0] = 1,$$

donde S_1 es el vector de precios de los activos al tiempo 1. De forma equivalente se puede ver de la manera siguiente:

$$w'S_1 = 0 \text{ para todo } i \text{ con } p(x) > 0.$$

Vamos a definir el conjunto \mathcal{M} de todas las medidas martingalas equivalentes y $\widehat{\mathcal{M}}$ como el de todas las medidas absolutamente continuas, ambos conjuntos respecto a \mathbb{P} .

Teorema 3. *Un mercado libre de arbitraje posee una única medida martingala de entropía mínima.*

La demostración del teorema se hará limitando a medidas con soporte finito fijo.

Demostración. Tomamos $\widehat{\mathcal{M}}$ y consideremos el problema:

$$\min_{\mathbb{Q} \in \widehat{\mathcal{M}}} \sum_x \mathbb{Q}(x) \log \left(\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right)$$

¹Un mercado es incompleto cuando los bienes suministrados no corresponden a la demanda.

²También conocida como medida martingala de entropía mínima libre de riesgo.

por la hipótesis de no arbitraje tenemos que tanto \mathcal{M} como $\widehat{\mathcal{M}}$ son no vacíos, además $\widehat{\mathcal{M}}$ es un conjunto cerrado y acotado³, y $\sum_x \mathbb{Q}(x) \log \left(\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right)$ es continua en $\widehat{\mathcal{M}}$ y convexa en $[0, 1]$, por lo tanto tiene un mínimo y es único al cual denotaremos como $\widehat{\mathbb{Q}}$. Ahora tenemos que verificar que $\widehat{\mathbb{Q}}$ pertenece a \mathcal{M} , para esto tomaremos la medida que sabemos que existe por la hipótesis de no arbitraje y la denominaremos \mathbb{Q}^e , y tomaremos la combinación lineal:

$$\mathbb{Q}^k = k\mathbb{Q}^e + (1 - k)\widehat{\mathbb{Q}};$$

de esta manera tenemos una nueva medida en $\widehat{\mathcal{M}}$, de la cual se desprende que la derivada de la entropía es:

$$\frac{d}{dk} D(\mathbb{Q}^k, \mathbb{P}) = \sum_x (\mathbb{Q}^e(x) - \widehat{\mathbb{Q}}(x)) \log \left(\frac{\mathbb{Q}^k(x)}{\mathbb{P}(x)} \right).$$

Notemos que $\widehat{\mathbb{Q}}$ era el mínimo y que $\mathbb{Q}^0 = \widehat{\mathbb{Q}}$, así que si la derivada anterior la igualamos a 0, obtendremos una desigualdad muy importante:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dk} D(\mathbb{Q}^k, \mathbb{P}) \right|_0 &= \sum_x (\mathbb{Q}^e(x) - \widehat{\mathbb{Q}}(x)) \log \left(\frac{\widehat{\mathbb{Q}}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right) \\ &= \sum_x \mathbb{Q}^e(x) \log \left(\frac{\widehat{\mathbb{Q}}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right) - D(\widehat{\mathbb{Q}}, \mathbb{P}) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto} \quad D(\widehat{\mathbb{Q}}, \mathbb{P}) \leq \sum_x \mathbb{Q}^e(x) \log \left(\frac{\widehat{\mathbb{Q}}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right)$$

Por último, si $\widehat{\mathbb{Q}}$ no fuera equivalente a \mathbb{P} tendríamos que la entropía relativa es menor que un número negativo ($-\infty$), lo cual demostramos que no es posible por la desigualdad de Gibbs.

Por lo tanto $\widehat{\mathbb{Q}}$ existe y es única. \square

Ahora abordaremos el problema de minimización. Debido a que todas las \mathbb{Q} en \mathcal{M} son de probabilidad la suma sobre todas las x es uno para cada \mathbb{Q} .

³Consultar apéndice

Así que queremos resolver el problema:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}} \sum_x \mathbb{Q}(x) \left(\log \left(\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right) - 1 \right) \\ \text{Sujeto a} \quad & \sum_x \mathbb{Q}(x) S_1^i(x) - e^r S_0^i = 0 \text{ para toda } i, \end{aligned}$$

para esto usaremos nuevamente el método de multiplicadores de Lagrange.

$$\Lambda = \sum_x \mathbb{Q}(x) \left(\log \left(\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right) - 1 \right) - \sum_i \lambda_i \left(\sum_x \mathbb{Q}(x) S_1^i(x) - e^r S_0^i \right),$$

sus derivadas son:

$$\frac{d\Lambda}{d\mathbb{Q}(x)} = \log \left(\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)} \right) - \sum_i \lambda_i S_1^i(x) \quad (4.1)$$

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda_i} = \sum_x \mathbb{Q}(x) S_1^i(x) - e^r S_0^i, \quad (4.2)$$

De la ecuación (4.1) obtenemos:

$$\mathbb{Q}(x) = \mathbb{P}(x) e^{\sum_i \lambda_i S_1^i(x)}, \quad (4.3)$$

que al sustituirla en (4.2) resulta

$$\sum_x \mathbb{P}(x) e^{\sum_i \lambda_i S_1^i(x)} S_1^i(x) = e^r S_0^i. \quad (4.4)$$

Suponiendo que el vector λ no es único tenemos que existen al menos dos vectores λ^1 y λ^2 soluciones. De lo anterior se tiene:

$$e^{\sum_i \lambda_i^1 S_1^i(x)} = e^{\sum_i \lambda_i^2 S_1^i(x)}.$$

Lo que implica que:

$$\sum (\lambda_i^1 - \lambda_i^2) S_1^i = 0 \text{ para todo } i \text{ con } p(x) > 0,$$

lo cual contradice la hipótesis de no redundancia, así que tenemos que el vector λ es único.

Si tomamos (4.4) y nos fijamos en el activo libre de riesgo ⁴, llegamos a:

$$e^{\lambda_0 e^r} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{\sum_i \lambda_i S_1^i(x)}) = 1. \quad (4.5)$$

Entonces podemos reescribir (4.3) como:

$$\mathbb{Q}(x) = \mathbb{P}(x) \frac{e^{\sum_i \lambda_i S_1^i(x)}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{\sum_i \lambda_i S_1^i(x)})}; \quad (4.6)$$

lo que resulta igual a lo que propusimos en el Teorema (1). Se puede interpretar a la medida libre de riesgo \mathbb{Q} como una transformada de Esscher de la medida \mathbb{P} .

4.3. Modelos con un enfoque basado en entropía

4.3.1. Modelo de Cox Ross Rubinstein con entropía de Shannon

Basado en [Yinghua and Xingsi, 2013] se dará un nuevo enfoque al modelo CRR, basado en la entropía de Shannon, lo que nos permitirá dar una mejor estimación de las opciones.

Un supuesto que no se apega a la realidad es pedir que se cumpla $u*d = 1$, esto de primera mano nos permite resolver de manera simplificada el modelo, pero puede generar graves problemas en la estimación, y debido a que la entropía nos ayuda a mejorar el modelo ese supuesto ya no se tomará en cuenta.

Vamos a tener que determinar nuevamente los parámetros del modelo; debido a que según nuestro modelo el precio solo puede subir (u) o bajar (d) con probabilidad p y $1 - p$ respectivamente, será de gran utilidad tener presente la gráfica (3.2.1) en la que mostramos que para una variable aleatoria que se distribuye Bernoulli la entropía se maximiza cuando $p = \frac{1}{2}$.

⁴Por convención se acostumbra que sea $i = 0$.

4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía **Entropía en las finanzas**

Volvemos a considerar que cada periodo entre el cambio en el precio dura Δt .

Por la ecuación (1.1) tenemos que se cumple:

$$e^{r^* \Delta t} = qu + (1 - q)d, \quad (4.7)$$

lo que nos da una restricción a partir del primer momento.

Agregaremos una restricción considerando la varianza de S , y vamos a suponer que el proceso de precios del activo cumple la ecuación diferencial estocástica de Black y Scholes, que es:

$$dS_t = S_t \mu dt + \sigma S_t dB_t, \quad (4.8)$$

y tiene por solución;

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}. \quad (4.9)$$

Esto resulta en un comportamiento lognormal de los incrementos, así que podemos afirmar:

$$Var(S_{\Delta t}) = S^2 e^{2r \Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1), \quad (4.10)$$

pero por la construcción del modelo de CRR tenemos:

$$Var(S_{\Delta t}) = \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) + \mathbb{E}(S_{\Delta t})^2, \quad (4.11)$$

y si igualamos la ecuación (4.10) con (4.11) tenemos:

$$\begin{aligned} S^2 e^{2r \Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) &= \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) + \mathbb{E}(S_{\Delta t})^2 \\ &= qS^2 u^2 + (1 - q)S^2 d^2 - S^2 (qu + (1 - q)d)^2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Entonces:

$$e^{2r \Delta t + \sigma^2 \Delta t} = qu^2 + (1 - q)d^2. \quad (4.13)$$

Con las ecuaciones (4.13), (4.7) y las restricciones para u , d y q tenemos

Entropía en las finanzas 4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía

que maximizar la entropía, es decir que queremos:

$$\begin{aligned}
 & \max. \quad -q \log(q) - (1 - q) \log(1 - q) \\
 & \text{s.a } qu + (1 - q)d = e^{r\Delta t} \\
 & \quad \quad qu^2 + (1 - q)d^2 = e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} \\
 & \quad \quad u > 1 \\
 & \quad \quad 0 < d \leq 1 \\
 & \quad \quad 0 \leq q \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

De las ecuaciones (4.13), (4.7) si dejamos a u y d en términos de q se obtiene:

$$\begin{aligned}
 u &= e^{r\Delta t} + \sqrt{\frac{1 - q}{q}(e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} - e^{2r\Delta t})} & u &= e^{r\Delta t} - \sqrt{\frac{1 - q}{q}(e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} - e^{2r\Delta t})}, \\
 & & \text{ó} & \\
 d &= e^{r\Delta t} - \sqrt{\frac{q}{1 - q}(e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} - e^{2r\Delta t})} & d &= e^{r\Delta t} + \sqrt{\frac{q}{1 - q}(e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} - e^{2r\Delta t})}.
 \end{aligned}$$

Debido a que d debe ser menor que uno, no es posible tomar el sistema de ecuaciones del lado derecho; ya que si suponemos que sucede:

$$d = e^{r\Delta t} + \sqrt{\frac{q}{1 - q}(e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} - e^{2r\Delta t})},$$

ocurre que:

$$\begin{aligned}
 d &= e^{r\Delta t} + \sqrt{\frac{q}{1 - q}(e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} - e^{2r\Delta t})} \\
 &= qu + (1 - q)d + \sqrt{\frac{q}{1 - q}(qu^2 + (1 - q)d^2 - q^2u^2 - 2qud(1 - q) - d^2 + 2qd^2 - d^2q^2)} \\
 &= qu + (1 - q)d + \sqrt{u^2q^2 - 2q^2ud + d^2q^2} \\
 &= u(q + 1) + d(1 - 2q) > 1.
 \end{aligned}$$

4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía **Entropía en las finanzas**

Por lo que debemos considerar:

$$\begin{aligned} u &= e^{r\Delta t} + \sqrt{\frac{1-q}{q}(e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})} \\ d &= e^{r\Delta t} - \sqrt{\frac{q}{1-q}(e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})}. \end{aligned}$$

Al sustituir en (4.14) resulta en:

$$\begin{aligned} \max. & \quad -q \log(q) - (1-q) \log(1-q) \\ \text{s.a} & \quad e^{r\Delta t} + \sqrt{\frac{1-q}{q}(e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})} > 1 \\ & \quad 0 < e^{r\Delta t} - \sqrt{\frac{q}{1-q}(e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})} \leq 1 \\ & \quad 0 \leq q \leq 1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Si analizamos la segunda restricción:

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} - \sqrt{\frac{q}{1-q}(e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})} &\leq 1 \\ \sqrt{\frac{q}{1-q}(e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})} &\geq -(1 - e^{r\Delta t}) \\ 0 < (e^{r\Delta t} - 1)^2 &\leq \frac{q}{1-q}(e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t}) \\ \frac{(e^{r\Delta t} - 1)^2}{e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - 2e^{r\Delta t} + 1} &\leq q \end{aligned}$$

obtenemos una cota inferior para q . Con un análisis similar para la otra restricción podemos encontrar una cota superior para q que nos permite reescribir nuestro problema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \max. & \quad -q \log(q) - (1-q) \log(1-q) \\ \text{s.a} & \quad \frac{(e^{r\Delta t} - 1)^2}{e^{2r\Delta t+\sigma^2\Delta t} - 2e^{r\Delta t} + 1} \leq q < e^{-\sigma^2\Delta t} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Con esto y, debido a que q alcanza su máximo en $\frac{1}{2}$, vamos a considerar tres casos:

Entropía en las finanzas 4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía

1) Si sucede:

$$\frac{(e^{r\Delta t} - 1)^2}{e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} - 2e^{r\Delta t} + 1} < e^{-\sigma^2\Delta t} < \frac{1}{2},$$

tomamos:

$$q = e^{-\sigma^2\Delta t},$$

lo que determina:

$$u = e^{r\Delta t + \sigma^2\Delta t},$$

$$d = 0.$$

2) Si sucede:

$$\frac{(e^{r\Delta t} - 1)^2}{e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} - 2e^{r\Delta t} + 1} < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad e^{-\sigma^2\Delta t} > \frac{1}{2},$$

tomamos:

$$q = \frac{1}{2},$$

lo que determina:

$$u = e^{r\Delta t} + \sqrt{(e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})},$$

$$d = e^{r\Delta t} - \sqrt{(e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} - e^{2r\Delta t})}.$$

3) Si sucede:

$$\frac{1}{2} < \frac{(e^{r\Delta t} - 1)^2}{e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} - 2e^{r\Delta t} + 1} < e^{-\sigma^2\Delta t},$$

tomamos:

$$q = \frac{(e^{r\Delta t} - 1)^2}{e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} - 2e^{r\Delta t} + 1},$$

lo que determina:

$$u = \frac{e^{2r\Delta t + \sigma^2\Delta t} - e^{r\Delta t}}{e^{r\Delta t} - 1},$$

$$d = 1.$$

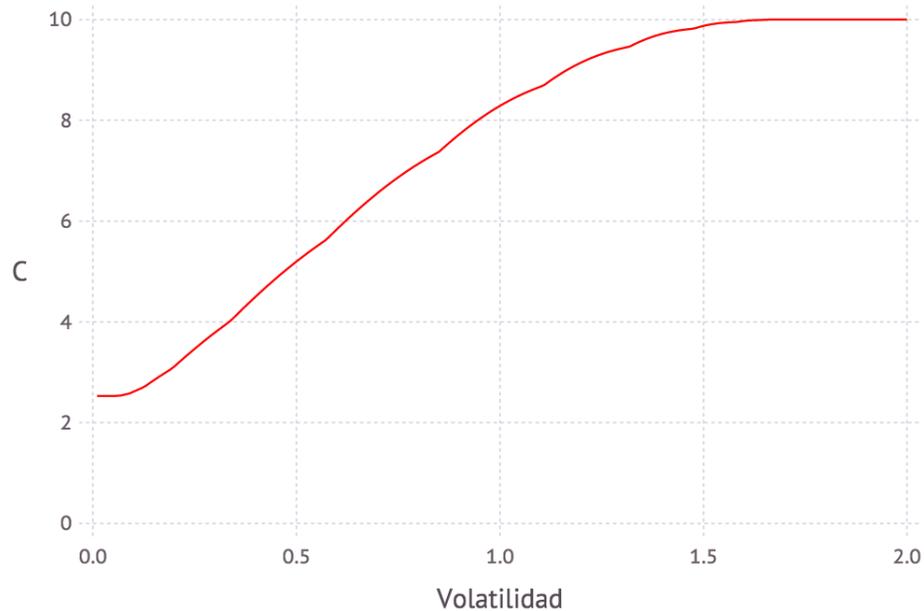
Ejemplo de CRR con entropía de Shannon

Evaluamos un call europeo con las siguientes características:

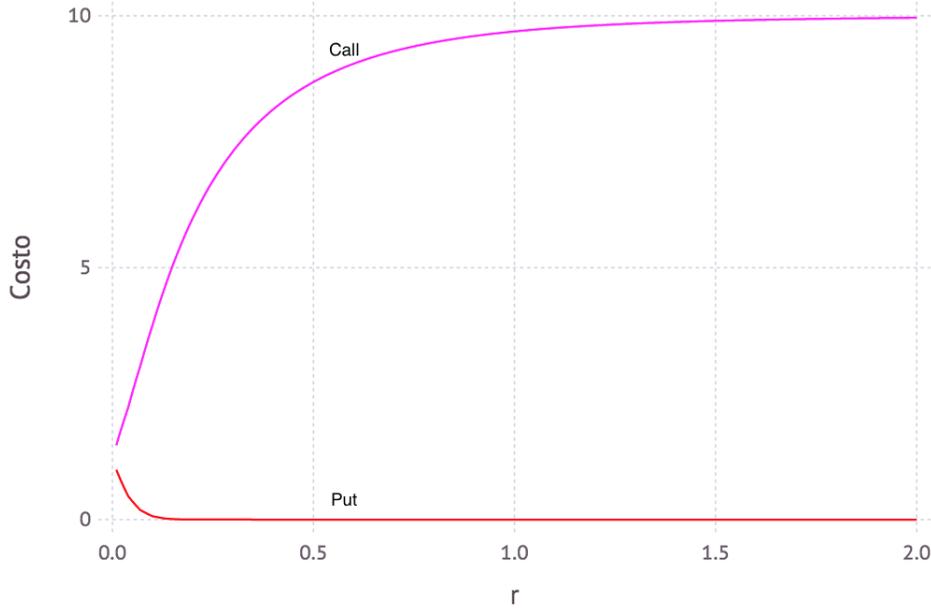
$$\begin{array}{ll} T = 5 & n = 20 \\ S = 10 & K = 10 \\ \sigma = 0.1415 & R = 1.06 \end{array}$$

$$C^E = 2.797$$

Este nuevo modelo tiene el comportamiento que esperaríamos respecto a cambios en la volatilidad:



También observamos las relaciones entre los precios de un Call y un Put respecto a incrementos a la tasa de interés:



El código puede ser consultado en el apéndice A.4.1.

4.3.2. Montecarlo Ponderado

Una simulación de Montecarlo usual da una probabilidad uniforme a cada uno de los resultados, es decir si ν es el numero de valores h_i simulados, se tendrá que el valor C deseado es:

$$C = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} h_i.$$

A nosotros nos interesa realizar una simulación Montecarlo ponderada, lo que significa que en vez de tomar las probabilidades de manera uniforme vamos a tener una probabilidad p_i para cada h_i . Esto significa que ahora el valor deseado es:

$$C = \sum_{i=1}^{\nu} p_i h_i;$$

4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía **Entropía en las finanzas**

esta pequeña diferencia es la que nos va a permitir tener mejores valuaciones.

Vamos a dar las probabilidades para cada valor con base a la información de la que disponemos. Ocuparemos la divergencia de Kullback-Leibler, la cuál se expresa en la ecuación (3.8). Consideraremos el valor de la n -ésima opción como C_n , con n en $\{1, \dots, N\}$ y a la matriz $G_{\nu, N}$, donde cada g_{ij} corresponde al valor presente de la j -ésima opción sobre la i -ésima trayectoria simulada.

Para el modelo vamos a considerar una distribución a priori que será la distribución uniforme que es a partir de la cual queremos minimizar la “distancia”, es decir:

$$D(\mathbb{P}, U) = \log \nu + \sum_{i=1}^{\nu} p_i \log(p_i). \quad (4.17)$$

Para preservar la propiedad de martingala vamos a minimizar $D(\mathbb{P}, U)$ sujeto a que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g_{ij}) = C_j$. De manera formal:

$$\min_{\lambda} \max_p \left\{ \sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{ij} - C_j \right) - D(\mathbb{P}, U) \right\}. \quad (4.18)$$

Con un argumento similar al que dimos en la ecuación (3.3) podemos expresar:

$$p_i = \frac{1}{Z(\lambda)} e^{\sum_{j=1}^N g_{ij} \lambda_j}, \quad (4.19)$$

donde la función $Z(\lambda)$ es un factor de normalización que se define como:

$$Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} e^{\sum_{j=1}^N g_{ij} \lambda_j}.$$

Si sustituimos (4.19) en (4.18) tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\lambda} \left(-\log \nu - \sum_{i=1}^{\nu} p_i \log p_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{i,j} - C_j \right) \right) \\
 = & \min_{\lambda} \left(- \sum_{i=1}^{\nu} p_i (-\log(Z(\lambda))) + \sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{i,j} + \sum_{j=1}^N \lambda_j \sum_{i=1}^{\nu} p_i g_{i,j} - \sum_{j=1}^N \lambda_j C_j \right) \\
 = & \min_{\lambda} \left(\log(Z(\lambda)) - \sum_{j=1}^N \lambda_j C_j \right) = \min_{\lambda} (W(\lambda))
 \end{aligned}$$

Y además:

$$\frac{\partial W(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{Z(\lambda)} \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda_j} - C_j = 0$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(g_j) = C_j$$

lo que muestra que los puntos críticos para $W(\lambda)$ siguen cumpliendo la propiedad de martingala; es fácil mostrar que $W(\lambda)$ es convexa por lo cual aquellos puntos críticos encontrados serán mínimos. Este modelo se expone de manera detallada en [Avellaneda et al., 2001].

Ejemplo de Valuación de Montecarlo Ponderado

Para este ejemplo usaremos la matriz *Opcionreal* la cuál tiene el precio strike, el costo del activo y si es Call o Put.

	<i>K</i>	<i>Costo</i>	<i>Tipo</i>
	10	2.05	<i>C</i>
	8.2	3.392	<i>C</i>
Opcionreal:=	13.01	0.272	<i>P</i>
	15	1.7	<i>P</i>
	20	5.424	<i>P</i>

Evaluamos un call europeo con las siguientes características:

4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía **Entropía en las finanzas**

$$\begin{array}{ll} T = 5 & dt = 1/2^6 \\ S = 10 & K = 10 \\ \sigma = 0.1415 & R = 1.06 \end{array}$$

$$C^E = 2.069$$

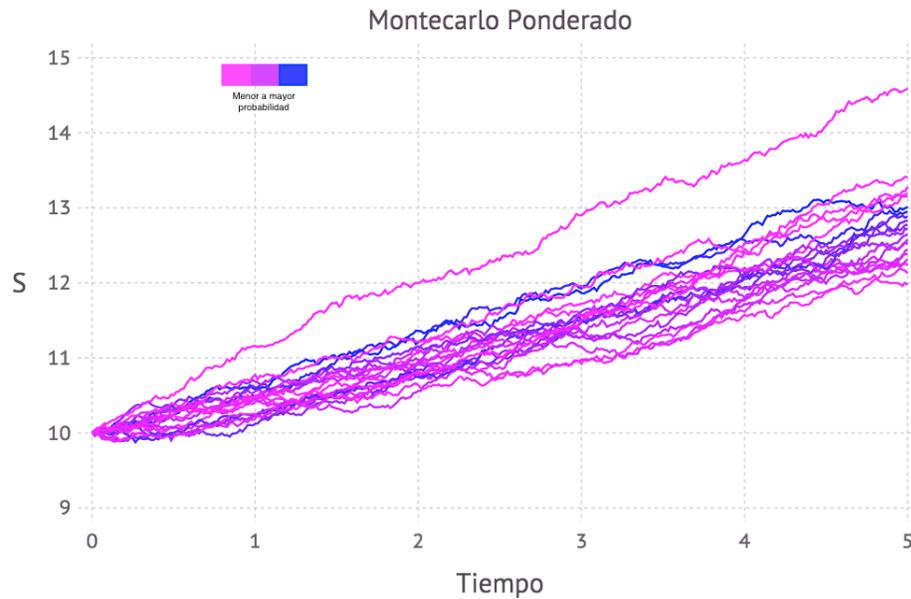
Para la optimización de la función objetivo se ocupó el método l-bfgs dando como valor inicial el vector de ceros, lo que hizo que el algoritmo requiriera nueve iteraciones. Dio como resultado:

$$\lambda = (238.115, 71.783, -38.821, 505.925, -161.140),$$

que evaluando en la función W nos da:

$$W(\lambda) = 2.667684.$$

En la siguiente gráfica podemos ver distintas trayectorias que cambian de color dependiendo de qué tanta probabilidad tienen de ocurrir según el método.



Diferencias entre métodos			
<i>CRR</i>	<i>CRR – Shannon</i>	<i>Montecarlo</i>	<i>MCponderado</i>
2.774	2.797	2.048	2.069

Notemos que el método de Montecarlo ponderado es el único que toma en cuenta los precios de activos en el mercado lo que da una clara ventaja respecto a los modelos desarrollados hasta el momento, ya que es una estimación más real.

Como última observación resaltemos el hecho de que este método permite considerar opciones cuyo valor esté determinado solamente por la trayectoria, por lo que en el código se agregó la posibilidad de introducir opciones asiáticas.

El código puede ser consultado en el apéndice A.4.2.

Resumen de resultados

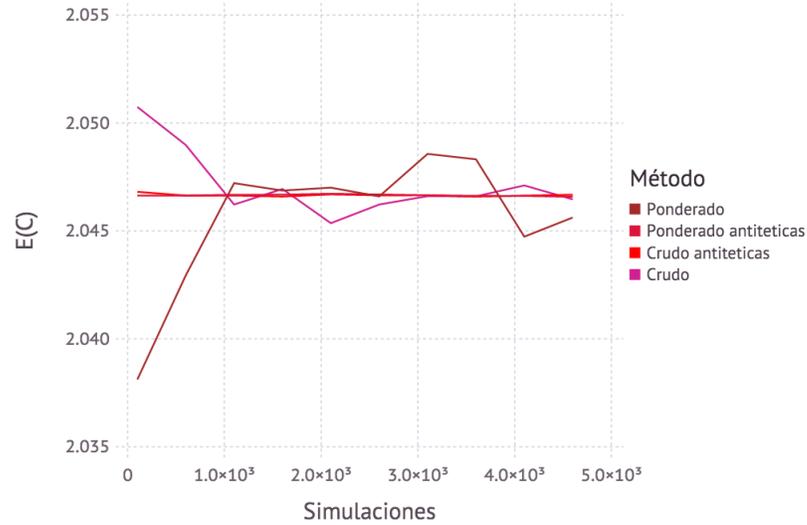
En concepto resulta interesante el método de Montecarlo ponderado. Nos preguntemos ahora cuánto tiempo requiere una computadora para realizar el algoritmo⁵, además de cuán grande resulta su varianza o qué tamaño de muestra mínimo resulta necesario. Para realizar este análisis, hacemos muestras, donde cada muestra consta de cincuenta simulaciones y se presentan los resultados promedio.

En esta sección también analizaremos qué pasa cuando se consideran variables antitéticas.

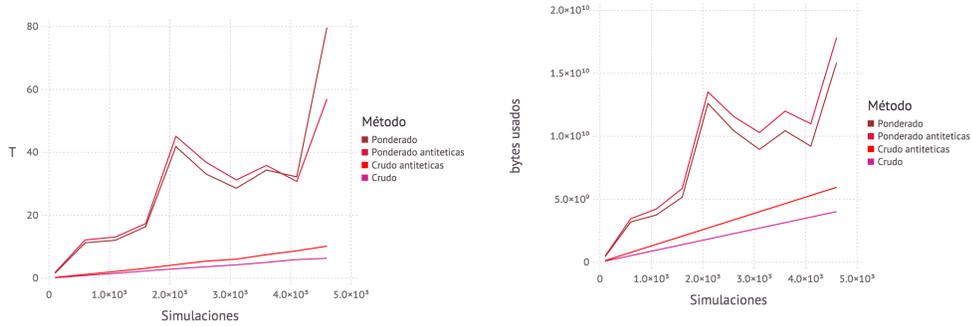
La siguiente gráfica nos permite apreciar como la estimación del valor esperado del Call oscila cerca del 2.048 tanto en el montecarlo ponderado como en el crudo. Esta cercanía no necesariamente ocurre en todos los casos, pero en este ejemplo hemos tomado la matriz G con precios muy similares a los teóricos lo que genera que el valor estimado sea similar en ambos métodos.

⁵Los resultados presentados fueron obtenidos usando una MacBook Pro con un procesador Intel Core i5 a 2.7 GHz.

4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía **Entropía en las finanzas**

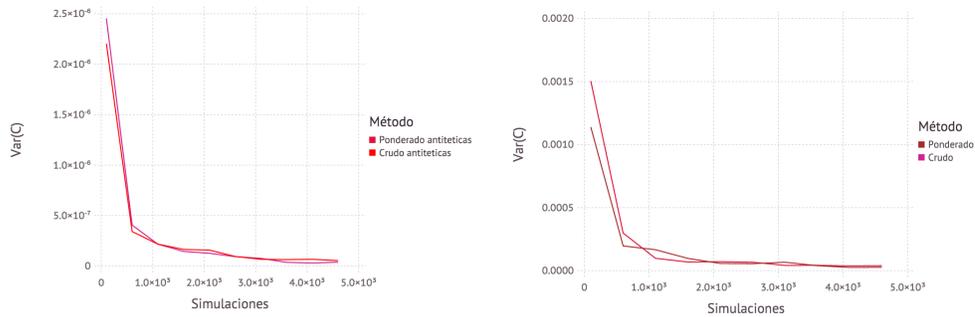


Por otra parte el tiempo requerido para la ejecución difiere considerablemente entre un Montecarlo ponderado y uno crudo, principalmente debido al tiempo que requiere el programa para encontrar el mínimo sobre el vector λ . Para este ejemplo siempre se tomó como valor inicial $\vec{0}$. Debido a que se guardan las trayectorias, la cantidad de bytes crece rápidamente, sin embargo pueden ser de utilidad para estimar valores fuera de la matriz *Opcionreal*.



Por último, la varianza parece estabilizarse a partir de una muestra de tamaño 1000. Se obtuvieron reacciones sumamente satisfactorias al considerar trayectorias antitéticas por lo que se realizaron dos gráficas, una para métodos con antitéticas y otro sin ellas(para que pueda ser apreciable el orden y el comportamiento).

Entropía en las finanzas 4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía



Con lo anterior expuesto resulta que el método de Montecarlo ponderado es una excelente herramienta que mejora nuestra estimación del precio correcto y que además de mantener los supuestos para el proceso del precio, logra ser sensible a las condiciones del mercado e intenta conservar la propiedad de martingala.

4.3 Modelos con un enfoque basado en entropía **Entropía en las finanzas**

Capítulo 5

Conclusiones

Esta tesis presentó resultados para la valuación de opciones exóticas europeas tanto desde la perspectiva teórica como vía simulación de Montecarlo. Para la simulación de Montecarlo se describió un modelo que toma en cuenta la entropía relativa con el fin de agregar precios de mercado y alejarnos de la ponderación uniforme que suele tener este tipo de simulación, obteniendo con esto una distribución de las corridas más realista. Se presentaron diferentes códigos para abordar con distintas herramientas las valuaciones, donde resalta la programación en paralelo para la valuación de las opciones asiáticas, así como el uso de trayectorias antitéticas para la reducción de varianza dentro del Montecarlo ponderado. Con esto se obtuvieron herramientas eficaces para que el lector pueda valorar opciones exóticas.

El lector interesado en ahondar en opciones de este tipo, y dando seguimiento a lo visto en el Capítulo 3, puede consultar [Pelsser, 2000] donde se analizan las opciones de doble barrera utilizando la transformada de Laplace, método que se usó para la valuación de opciones lookback dentro de esta tesis. También se presentó en la tesis cómo realizar ambas barreras para la simulación. Otra manera de continuar con las opciones de barrera, son las opciones parisinas, donde el payoff se hace cero después de que se haya superado la barrera durante un periodo preacordado de tiempo; [Haber et al., 1999] es un artículo donde se exponen las opciones parisinas.

Por último, en el artículo [Ewald et al., 2013] se da una equivalencia entre opciones australianas¹ y opciones asiáticas, lo que permite continuar el estudio de estas últimas, que cuentan con un precio menor que las opciones europeas análogas.

¹El payoff de las opciones australianas depende del cociente del promedio aritmético del subyacente con su precio al tiempo de vencimiento.

Apéndice A

Códigos en Julia

A.1. Conceptos Básicos De Finanzas

A.1.1. Ejemplo de CRR

```
t=5 #Tiempo de duracion
n=20 #Numero de particiones
S=10 #Precio del subyacente
k=11.5 #Precio strike
sigma=.1415 #Volatilidad
R=1+0.06 #Interes anual
```

```
function Call(R,S,sigma,k,t,n)
#Esta funcion devuelve el valor de un call europeo
    c=ones(n+1)
    cp=ones(n)
    s=ones(n+1)
    u=e^(sigma*sqrt(t/n))
    d=1/u
    r=e^(t/n*log(R))
    p=(r-d)/(u-d)
#Hasta aqui hemos inicializado las variables
    for (i in 1:n+1)
        c[i]=max(0,u^(n-(i-1))*d^(i-1)*S-k)
```

```

    #Vemos los valores del final del arbol
end
while (n>=1)
    for i in 1:n
        cp[i]=(p*c[i]+(1-p)*c[i+1])*(1/r) #Retrocedemos un periodo
    end
    c=ones(n)
    c=cp
    n=n-1
    cp=ones(n)
    #Remplazamos para que nuestro arbol termine un periodo antes
end

    return c
end

```

Call(R,S, sigma , k , t , n)

A.1.2. Ejemplo de Markowitz

```
using Gadfly
```

```

Acciones=readcsv("/Users/Isaias/Documents/Ciencias/Tesis/Acciones1.c
#Abrimos el archivo que contiene los rendimientos historicos
Varianzas=zeros(size(Acciones[1])[2],size(Acciones[1])[2])
Medias=zeros(size(Acciones[1])[2],1)
Unos=ones(size(Acciones[1])[2],1)
for(i in 1:size(Acciones[1])[2])
    for(j in 1:size(Acciones[1])[2])

        Varianzas[i,j]=cov(Acciones[1][1:size(Acciones[1])[1],i],

        Acciones[1][1:size(Acciones[1])[1],j])

    end
    Medias[i,1]=mean(Acciones[1][1:size(Acciones[1])[1],i])
end
M=[Unos;Medias]

```

```

M=reshape(M, size(Acciones [1])[2], 2)
A=inv(*(transpose(M),*(inv(Varianzas),M)))
#Hasta aqui hemos inicializado los valores de acuerdo al modelo

function Markowitz(k)
    #Esta funcion devuelve los porcentajes que debemos tener de cada accion
    eta=k
    Restriccion=[1;eta]
    lambdas=*(A, Restriccion)
    W=*(*(inv(Varianzas),M), lambdas)
    Varianzaportafolio=*(*(transpose(W),Varianzas),W)[1]
    Coordenadas=(Varianzaportafolio, eta, W)
end

#Graficamos la frontera eficiente

tamaño=100
X=ones(tamaño)
Y=ones(tamaño)
Z=ones(tamaño)
W=ones(tamaño)

for(k in 1:tamaño)
    X[k]=Markowitz(k/tamaño ^ 2/2)[1][1]
    Y[k]=Markowitz(k/tamaño ^ 2/2)[2][1]
end
Curvaeficiente=plot(x = X, y = Y, Theme(default_color=color("orange")),

    Guide.xlabel("Riesgo"),

    Guide.ylabel("Valor esperado"),Guide.title("Frontera eficiente"))

Riesgomin=Markowitz(*(*(transpose(Unos),inv(Varianzas)),

```

```

Medias)/*(*(transpose(Unos),inv(Varianzas)),Unos))

#Graficamos la frontera eficiente con un activo libre de riesgo
r=0.002
interseccion=-(A[1,1]+A[1,2]*r)/(A[1,2]+A[2,2]*r)
W=interseccion+[0:1/tamano^2:0.003]*

((r-interseccion)/Markowitz(r)[1][1])

plot(layer(x=X, y=Y, Geom.point,Geom.line ,
Theme(default_color=color("orange"))),layer(x=[0:1/tamano^2:0.001] ,
Geom.line ,Theme(default_color=color("red"))),
Guide.xlabel("Varianza"),
Guide.ylabel("Retorno esperado"),
Guide.title("Frontera eficiente con un activo libre de riesgo"))

```

A.2. Algunos derivados exóticos

A.2.1. Montecarlo para la valuación de opciones asiáticas

```

using Distributions
function montecarlo(numsim, inicio , final ,
    dt ,S0 ,k ,s2 ,R, tipo , antitetica)
C=ones(numsim)
tamano=length(inicio:dt:final)
dw=ones(tamano)
mu=log(R)
dw[1]=0
if(antitetica==0)
for(l in 1:numsim)
S=trayectoria(inicio , final ,dt ,S0 ,s2 ,R)

```

```

C[l]=valorpresente(S,k,tipo)
#Estas funciones fueron
#presentadas en montecarloponderado
    end
    end

if(antitetica==1)
for(l in 1:2:numsim)
S=trayectoriaantiteticas(inicio , final , dt , S0 , s2 , R)
    C[l]=valorpresente(S[1:end,1],k,tipo)
    C[l+1]=valorpresente(S[1:end,2],k,tipo)
    end
    end
mean(C)
end

```

```

numsim=10000
k=10
S0=10
R=1.06
final=5
inicio=0
dt=1/2^6
s2=0.1415^2
tipo="C"
antitetica=1
montecarlo(numsim, inicio , final , dt , S0 , k , s2 , R , "CAa" , 1)

```

A.2.2. Montecarlo para la valuación de opciones asiáticas en paralelo

#Para poder trabajar en paralelo es necesario activar mas nucleos ,
#ya que por defecto Julia trabaja con uno, la manera en que podemos
#ganar mas tiempo es haciendolo desde consola , bastara abrir la consola
#y agregar el comando:
#/[Applications/Julia-0.4.3.app/Contents/Resources/julia/bin/julia](#) -p 2

```
#Notemos que estamos apuntando al .bin de julia y el -p 2 indica que
#se trabajara a dos nucleos.
```

```
@everywhere using Distributions
#El comando everywhere le indica a Julia que
#la funcion se puede usar en todos los nucleos
```

```
@everywhere function trayectoria(inicio, final, dt, S0, s2, R)
#Se generan trayectorias
tamano=length(inicio:dt:final)
dw=ones(tamano)
S=ones(tamano)
mu=log(R)
dw[1]=0
for (i in 2:tamano)
    dw[i]=rand(Normal(0, dt))
end
tiempo=0
for(t in 1:tamano)
S[t]=S0*exp((mu-s2/2)*tiempo+sqrt(s2)*cumsum(dw)[t])
    tiempo=tiempo+dt
end
S
end
```

```
@everywhere function trayectoriaantiteticas(inicio, final, dt, S0, s2, R)
#Se generan trayectorias
tamano=length(inicio:dt:final)
dw=ones(tamano)
S=ones(tamano, 2)
mu=log(R)
dw[1]=0
for (i in 2:tamano)
    dw[i]=rand(Normal(0, dt))
end
tiempo=0
for(t in 1:tamano)
S[t, 1]=S0*exp((mu-s2/2)*tiempo+sqrt(s2)*cumsum(dw)[t])
```

```

S[t,2]=S0*exp((mu-s2/2)*tiempo+sqrt(s2)*cumsum(-dw)[t])
    tiempo=tiempo+dt
end
S
end

@everywhere function valorpresente(S,k,tip,R,final)
    #Se trae a valor presente segun sea el activo
    if(tipo=="C")
        vp=max((S[size(S)[1]]-k),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="P")
        vp=max((k-S[size(S)[1]]),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="CAa")
        vp=max((mean(S)-k),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="PAa")
        vp=max((k-mean(S)),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="CAg")
        vp=max((e^((1/size(S)[1])*sum(log(S)))-k),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="PAg")
        vp=max((k-e^((1/size(S)[1])*sum(log(S))))),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    vp
end

@everywhere function montecarlo(numsim,inicio,
    final,dt,S0,k,s2,R,tip,antitetica)
C=ones(numsim)
tamaño=length(inicio:dt:final)
dw=ones(tamaño)
mu=log(R)
dw[1]=0
if(antitetica==0)

```

```

for(l in 1:numsim)
S=trayectoria(inicio , final , dt , S0 , s2 , R)
C[l]=valorpresente(S,k,tipo , R, final)
end
end

if(antitetica==1)
for(l in 1:2:numsim)
S=trayectoriaantiteticas(inicio , final , dt , S0 , s2 , R)
C[l]=valorpresente(S[1:end,1],k,tipo , R, final)
C[l+1]=valorpresente(S[1:end,2],k,tipo , R, final)
end

end
mean(C)
end

```

```

function montecarloparalelo(numsim, inicio , final , dt , S0 , k
, s2 , R, tipo , antitetica , ncores::Int=CPU_CORES)
#@parallel indica que el ciclo se hara en paralelo
#el (+) indica que cada vez que acabe el for el resultado se suma
#notemos que realizamos la misma cantidad de simulaciones
#pero distribuidas de manera proporcional respecto al numero de
#nucleos
resfinal = @parallel (+) for i=1:ncores
montecarlo(int(numsim/ncores), inicio , final , dt , S0 , k , s2 , R, tipo)
end

resfinal / ncores # average value
end

```

A.2.3. Montecarlo para la valuación de opciones look-back

```

using Distributions
using Optim

```

```

using Gadfly

function Maxcond(b)
#Esta funcion sera usada para encontrar la inversa
#del maximo condicionado al minimo y al browniano
d=0
extremos=10000
c=b-a
for(k in -extremos:extremos)
s=sigma*(k+1)/final*(z-2a+2k*c)*exp((- (z-2a+2k*c)^2)/(2*final))-
k/final*(z+2k*c)*exp((- (z+2k*(c))^2/(2*final)))
d=d+s
end
min(max((e^(((2a-z^2)^2)/(2*final)))*(final/(z-2*a))*d,0),1)
end

#Esta funcion cuantifica la distancia
#del maxcond con el fin de minimizarla
#con un metodo de Newton
g(1)=abs(rand()-Maxcond(1))

z=0
a=0
#Esta funcion regresa la terna que necesitamos
function BMaxMin(Bt,sigma,final,dt)
inicio=0
tamanio=length(Bt)
minimos=ones(tamanio)
maximos=ones(tamanio)
minimosmal=ones(tamanio)
maximosmal=ones(tamanio)
minimos[1]=0
maximos[1]=0
minimosmal[1]=0
maximosmal[1]=0

```

```

for(i in 2:tamano)

    mintemp=sigma*dt*(Bt[i]/2-sqrt(Bt[i]^2/4-
    dt*i*log(rand())/2))+Bt[i-1]
    if Bt[i]<minimosmal[i-1]
        minimosmal[i]=Bt[i]
    else Bt[i]>=minimosmal[i-1]
        minimosmal[i]=minimosmal[i-1]
    end
    if mintemp<minimos[i-1]
        minimos[i]=min(mintemp,minimosmal[i])
    else mintemp>=minimos[i-1]
        minimos[i]=min(minimos[i-1],minimosmal[i])
    end
    if Bt[i]>maximosmal[i-1]
        maximosmal[i]=Bt[i]
    else Bt[i]<=maximosmal[i-1]
        maximosmal[i]=maximosmal[i-1]
    end
    z=Bt[i]
    a=minimos[i]
    binicial=z/2+sqrt(z^2/4-log(1-rand())/2)
    maxtemp=dt*optimize(g,0,2+binicial).minimum+Bt[i-1]
    if maxtemp>maximos[i-1]
        maximos[i]=max(maxtemp,maximosmal[i])
    else maxtemp<=maximos[i-1]
        maximos[i]=max(maximos[i-1],maximosmal[i])
    end
end
return (Bt,maximos,minimos)
end

inicio=0
sigma=s2=0.1415
dt=1/2^6
final=5
R=1.06

```

```

S0=10
k=10
mu=log(R)
tamaño=length(inicio:dt:final)
dw=ones(tamaño)
dw[1]=0
numsim=10000
CFiSL=ones(numsim)
CFISL=ones(numsim)

for(i in 1:numsim)
    for(j in 2:tamaño)
        dw[j]=rand(Normal(0,sigma*dt))
    end
    Bt=cumsum(dw)
    conjunta=BMaxMin(Bt,sigma,final,dt)
    CFiSL[i]=max(S0*exp((mu-sigma^2/2)*final+
sqrt(sigma^2)*conjunta[2][size(conjunta[1])[1]]) -
S0*exp((mu-sigma^2/2)*final+sqrt(sigma^2)*
conjunta[1][size(conjunta[1])[1]]),0)*e^(-log(R)*final)
    CFISL[i]=max(S0*exp((mu-sigma^2/2)*final+
sqrt(sigma^2)*conjunta[2][size(conjunta[1])[1]]) - k,0)*
e^(-log(R)*final)
    println(i)
end
mean(CFiSL)
mean(CFISL)

#plot(layer(x=inicio:dt:final,y=Bt,Geom.line,Theme(default_color=color("RED"))
#    layer(x=inicio:dt:final,y=minimos,Geom.line,Theme(default_color=color("RED"))
#    layer(x=inicio:dt:final,y=maximos,Geom.line,Theme(default_color=color("RED"))
#    layer(x=inicio:dt:final,y=minimosmal,Geom.line,Theme(default_color=color("RED"))
#    layer(x=inicio:dt:final,y=maximosmal,Geom.line,Theme(default_color=color("RED"))
#    Guide.xlabel("t"),Guide.ylabel("B(t)"),
#    Guide.manual_color_key("Simulación",["Intuitiva","Condicionada"],["RED","RED"])

```

A.2.4. Montecarlo para la valuación de opciones de barrera

```

using Distributions
using Optim
using Gadfly

#Se inicia el Browniano
function trayectoriaBt(inicio , final , dt , S0 , sigma , R)
#Se generan trayectorias
tamano=length(inicio : dt : final)
dw=ones(tamano)
dw[1]=0
for (i in 2:tamano)
    dw[i]=rand(Normal(0 , sigma*dt))
end
Bt=cumsum(dw)
end

function Maxcond(b)
d=0
extremos=10000
c=b-a
for(k in -extremos:extremos)
s=sqrt(sigma)*(k+1)/final*(z-2a+2k*c)*
exp((- (z-2a+2k*c)^2)/(2*final))-k/final*(z+2k*c)*
exp((- (z+2k*(c))^2/(2*final)))
d=d+s
end
min(max((e^(((2a-z^2)^2)/(2*final)))*(final/(z-2*a))*d,0),1)
end

function g(l)
    abs(rand()-Maxcond(l))
end

#Misma funcion que en el caso de las lookback

```

```

function BMaxMin(Bt, sigma, final, dt)
    inicio=0
    tamaño=length(Bt)
    minimos=ones(tamaño)
    maximos=ones(tamaño)
    minimosmal=ones(tamaño)
    maximosmal=ones(tamaño)
    minimos[1]=0
    maximos[1]=0
    minimosmal[1]=0
    maximosmal[1]=0
    z=0
    a=0

    for(i in 2:tamaño)

        mintemp=sqrt(sigma) dt *(Bt[i]/2 -
            sqrt(Bt[i]^2/4 - dt*i*log(rand())/2)) + Bt[i-1]
        if Bt[i] < minimosmal[i-1]
            minimosmal[i]=Bt[i]
        else Bt[i] >= minimosmal[i-1]
            minimosmal[i]=minimosmal[i-1]
        end
        if mintemp < minimos[i-1]
            minimos[i]=min(mintemp, minimosmal[i])
        else mintemp >= minimos[i-1]
            minimos[i]=min(minimos[i-1], minimosmal[i])
        end
        if Bt[i] > maximosmal[i-1]
            maximosmal[i]=Bt[i]
        else Bt[i] <= maximosmal[i-1]
            maximosmal[i]=maximosmal[i-1]
        end
        z=Bt[i]
        a=minimos[i]
        binicial=z/2+sqrt(z^2/4-log(1-rand())/2)
        maxtemp=dt*optimize(g,0,2+binicial).minimum+Bt[i-1]
        if maxtemp > maximos[i-1]

```

```

        maximos [ i ]=max(maxtemp, maximosmal [ i ])
    else maxtemp<=maximos [ i -1]
        maximos [ i ]=max(maximos [ i -1], maximosmal [ i ])
    end
end
return (Bt, maximos, minimos)
end

#inicializamos variables
sigma=0.1415
dt=1/2^6
final=3
inicio=0
R=1.06
S0=10
mu=log(R)
B=11.75
K=10
numsim=10000
VP=ones(numsim)
z=0
a=0

S=ones(length(conjunta[1]))
SM=ones(length(conjunta[1]))

#Devuelve el proceso de precios
function precios(conjunta)
    tiempo=0
    S=ones(length(conjunta[1]))
    SM=ones(length(conjunta[1]))
    Sm=ones(length(conjunta[1]))
    for(t in 1:length(conjunta[1]))
        S[t]=S0*exp((mu-sigma^2/2)*tiempo+sigma*conjunta[1][t])
        SM[t]=S0*exp((mu-sigma^2/2)*tiempo+sigma*conjunta[2][t])
    #El maximo de la accion
        tiempo=tiempo+dt
    end
end

```

```

end
return (S,SM)
end

function montecarlo(numsim, inicio , final , dt , S0 , sigma , R)
for (i in 1:numsim)
conjunta=BMaxMin(trayectoriaBt(inicio , final ,
dt , S0 , sigma , R) , sigma , final , dt)
VP[i]=ifelse(precios(conjunta)[2][end]<B,
(precios(conjunta)[1][end]-K)*exp(-R*final) , 0)
println(i)
end
mean(VP)
end

conjunta=0
numsim=10000
#En vp se guardan los valores a promediar
VP=ones(numsim)
montecarlo(numsim, inicio , final , dt , S0 , sigma , R)

```

A.3. Entropía

A.3.1. Ejemplo de divergencia de Kullback-Leibler

```

using Distributions
using Gadfly
using Optim

dominio=[-5:1/16:12]
p=(pdf(Normal(0,1),dominio)+pdf(Normal(5,2),dominio))/2
plot(x=dominio, y=p,Geom.line,Guide.ylabel("función de densidad"),
      Theme(default_color=color("orange")))
#Graficamos la mezcla

```

```

function KL(p,q)
kl=zeros(size(dominio,1))
for (i in 1:size(dominio,1))

    kl[i]=q[i]*log(q[i]/p[i])

end
sum(kl)
end
#Funcion para la entropia relativa

modelo=(1.3,1
        )#Modelo son los parametros de la binomial de media y varian
function dkl(modelo)
q=pdf(Normal(modelo[1],modelo[2]),dominio)
KL(q,p)
end
dkl(modelo)
#Definimos la divergencia respecto a una Normal

optimize(dkl,[1.5,1.5]) #Optimizamos

#Graficamos con el optimo
modelo=(2.498863377,2.956341269)
dkl(modelo)
q=pdf(Normal(modelo[1],modelo[2]),dominio)
plot(layer(x=dominio, y=p, Geom.point,Geom.line,
Theme(default_color=color("orange"))),
      layer(x=dominio, y=q, Geom.line,Theme(default_color=color("red")),
            Guide.xlabel("X"),Guide.ylabel("función de densidad"),
            Guide.title("Entropía relativa"))

```

A.4. Modelos con un enfoque basado en entropía

A.4.1. Modelo de Cox Ross Rubinstein con entropía de Shannon

```
function CallShannon(R,S,sigma,k,t,n) #Creamos la funcion
    c=ones(n+1)
    cp=ones(n)
    s=ones(n+1)
    r=e^(t/n*log(R)) #Inicializamos las variables

    if ((e^(t/n*log(R))-1)^2)/(1-2*e^(t/n*log(R))+
    e^(2*t/n*log(R)+sigma^2*t/n))<e^(-sigma^2*t/n)<1/2
        #Analizamos en que caso esta
        u=e^(t/n*log(R)+sigma^2*t/n)
        d=0
        p=e^(-sigma^2*t/n)

    elseif ((e^(t/n*log(R))-1)^2)/(1-2*e^(t/n*log(R))
    +e^(2*t/n*log(R)+sigma^2*t/n))<1/2<e^(-sigma^2*t/n)
        u=e^(t/n*log(R))+sqrt(e^(2*t/n*log(R)+sigma^2*t/n)
        -e^(2*t/n*log(R)))
        d=e^(t/n*log(R))-sqrt(e^(2*t/n*log(R)+sigma^2*t/n)
        -e^(2*t/n*log(R)))
        p=1/2

    elseif 1/2<((e^(t/n*log(R))-1)^2)/(1-2*e^(t/n*log(R))
    +e^(2*t/n*log(R)+sigma^2*t/n))<e^(-sigma^2*t/n)
        p=((e^(t/n*log(R))-1)^2)/(1-2*e^(t/n*log(R))
        +e^(2*t/n*log(R)+sigma^2*t/n))
        u=(e^(2*t/n*log(R)+sigma^2*t/n)
        -e^(t/n*log(R)))/(e^(t/n*log(R))-1)
        d=1
    else "Error"
    end
end
```

```

for (i in 1:n+1) #Traemos un periodo atras el arbol
    c[i]=max(0,u^(n-(i-1))*d^(i-1)*S-k)
end
while (n>=1)
    for i in 1:n
        cp[i]=(p*c[i]+(1-p)*c[i+1])*(1/r)
    end
    c=ones(n)
    c=cp
    n=n-1
    cp=ones(n)
end

return c
end

t=5
n=20
S=10
k=13
sigma=.1415
R=1+0.06
CallShannon(R,S,sigma,k,t,n)[1] #Evaluamos

```

A.4.2. Montecarlo Ponderado

```

using Distributions
using Optim

function trayectoria(inicio,final,dt,S0,s2,R)
#Se generan trayectorias
tamaño=length(inicio:dt:final)
dw=ones(tamaño)
S=ones(tamaño)
mu=log(R)
dw[1]=0
for (i in 2:tamaño)

```

```

    dw[i]=rand(Normal(0,dt))
end
tiempo=0
for(t in 1:tamano)
S[t]=S0*exp((mu-s2/2)*tiempo+sqrt(s2)*cumsum(dw)[t])
    tiempo=tiempo+dt
end
S
end

function trayectoriaantiteticas(inicio,final,dt,S0,s2,R)
#Se generan trayectorias
tamano=length(inicio:dt:final)
dw=ones(tamano)
S=ones(tamano,2)
mu=log(R)
dw[1]=0
for(i in 2:tamano)
    dw[i]=rand(Normal(0,dt))
end
tiempo=0
for(t in 1:tamano)
S[t,1]=S0*exp((mu-s2/2)*tiempo+sqrt(s2)*cumsum(dw)[t])
S[t,2]=S0*exp((mu-s2/2)*tiempo+sqrt(s2)*cumsum(-dw)[t])
    tiempo=tiempo+dt
end
S
end

function valorpresente(S,k,tipos)
#Se trae a valor presente segun sea el activo
if(tipos=="C")
    vp=max((S[size(S)[1]]-k),0)*e^(-log(R)*final)
end
if(tipos=="P")
    vp=max((k-S[size(S)[1]]),0)*e^(-log(R)*final)
end
if(tipos=="C^{Aa}")

```

```

        vp=max((mean(S)-k),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="PAa")
        vp=max((k-mean(S)),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="C^{Ag}")
        vp=max((e^((1/size(S)[1])*sum(log(S)))-k),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    if(tipo=="PAg")
        vp=max((k-e^((1/size(S)[1])*sum(log(S))))),0)*e^(-log(R)*final)
    end
    vp
end

function objetivo(lambdas)
#Funcion W
suma=0
restric=0
for(i in 1:size(G)[1])
    expon=0
    for(j in 1:size(G)[2])
        expon=G[i,j]*lambdas[j]+expon
    end
    suma=e^(expon)+suma #Construccion de la funcion Z
end
for(k in 1:size(Opcionreal)[1])
    restric=lambdas[k]*Opcionreal[k,2]+restric
end
log(suma)-restric #Se retorna el valor de W
end

function probasmontecarlo(lambdas)
#Devuelve las probabilidades para
#cada trayectoria
suma=0
restric=0
numerador=ones(numsim)

```

```

proba=ones(numsim)
for(i in 1:size(G)[1])
    expon=0
    for(j in 1:size(G)[2])
        expon=G[i,j]*lambdas[j]+expon
    end
    numerador[i]=expon
end
numerador=exp(numerador)
suma=sum(numerador)
for(i in 1:size(G)[1])
    proba[i]=numerador[i]/suma
end
proba
end

```

```

function montecarloponderado(Opcionreal,numsim,
                             inicio ,final ,dt ,S0 ,s2 ,R, antitetica)
    lambdass=zeros(size(Opcionreal)[1])
    G=ones(numsim*size(Opcionreal)[1])
    #matriz de valores presentes
    G=reshape(G, numsim, size(Opcionreal)[1])
    Tray=ones(size(inicio:dt:final)[1]*numsim)
    Tray=reshape(Tray, numsim, size(inicio:dt:final)[1])

    if(antitetica==0)
    #No considera trayectorias antiteticas
    for(i in 1:numsim)
        S=trayectoria(inicio ,final ,dt ,S0 ,s2 ,R)
        for(k in 1:size(inicio:dt:final)[1])
            Tray[i,k]=S[k]
        end
        #Se almacena la trayectoria
    for(j in 1:numeroopciones)

```

```

    G[i ,j]=valorpresente(S,Opcionreal[j ,1] ,Opcionreal[j ,3])
    end
    end
G
end

if(antitetica==1)
#Considera trayectorias antiteticas
for(i in 1:2:numsim)
    S=trayectoriaantiteticas(inicio ,final ,dt ,S0 ,s2 ,R)
    for(k in 1:size(inicio:dt:final)[1])
        Tray[i ,k]=S[k ,1]
        Tray[i+1,k]=S[k ,2]
    end
    #Se almacena la trayectoria
    for(j in 1:numeroopciones)
        G[i ,j]=valorpresente(S[1:end ,1] ,Opcionreal[j ,1] ,Opcionreal[j
        G[i+1,j]=valorpresente(S[1:end ,2] ,Opcionreal[j ,1] ,Opcionreal
    end
    end
G
    end

res=optimize(objetivo ,lambdass ,method=:l_bfgs)
#optimizacion usando l_bfgs
lambdas=res.minimum
#calculo de probabilidades con lambda optimo

#Valuacion de montecarloponderado
probas=probasmontecarlo(lambdas)
resultado=ones(numsim)
for(i in 1:numsim)
    resultado[i]=probas[i]*G[i ,1]
end
sum(resultado)
end

```

```
#Declaracion de variables
k=8.5
S0=10
R=1.06
final=5
inicio=0
dt=1/2^6
s2=0.1415^2
numerodeopciones=6
antitetica=1
Opcionreal=[10,8.2,13.01,15,20,8.5
             ,2.05,3.392,.272,1.7,5.424,2.5
             , "C" ,"C" ,"P" ,"P" ,"P" ,"CAg"]
Opcionreal=reshape(Opcionreal, numerodeopciones, 3)
#Strike, Precio, Tipo

numsim=1100
G=ones(numsim*size(Opcionreal)[1])
#matriz de valores presentes
G=reshape(G, numsim, size(Opcionreal)[1])

montecarloponderado(Opcionreal,numsim,inicio,final,dt,S0,s2,R,1)
```


Apéndice B

Propiedades Básicas de Esperanza Condicional

Sean X y Y variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\sigma(Y)$ la σ -álgebra generada por Y , \mathcal{G} una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} , D en \mathcal{G} y \mathcal{H} sub- σ -álgebra de \mathcal{G} .

Si c está en \mathbb{R} y $X = c$ entonces $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = c$

Demostración. Esto es consecuencia de que la función constante es medible respecto a cualquier σ -álgebra \square

Si $X \geq 0$ c.s. entonces $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \geq 0$ c.s.

Demostración. Debido a que $X \geq 0$ se cumple:

$$0 \leq \int_D X d\mathbb{P} = \int_D \mathbb{E}(X | \mathcal{G}) d\mathbb{P}$$

Y ya que $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ es \mathcal{G} -medible y su integral es mayor igual que cero para todo D significa que $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ es positiva c.s. \square

Si a y b están en \mathbb{R} entonces $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2 | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(aX_1 | \mathcal{G}) + \mathbb{E}(bX_2 | \mathcal{G})$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \int_D \mathbb{E}(aX_1 + bX_2 | \mathcal{G})d\mathbb{P} &= \int_D (aX_1 + bX_2)d\mathbb{P} \\
 &= a \int_D X_1d\mathbb{P} + b \int_D X_2d\mathbb{P} \\
 &= a \int_D \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G})d\mathbb{P} + b \int_D \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{G})d\mathbb{P} \\
 &= \int_D a\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(X_2 | \mathcal{G})d\mathbb{P}
 \end{aligned}$$

□

Si $X_1 \geq X_2$ entonces $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{G})$

Demostración. Consecuencia inmediata de las dos propiedades anteriores □

Si $X_1 \leq X_2 \leq X_3 \dots \leq X_n$ y $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$$

Demostración. Por la monotonía de la esperanza condicional sabemos que $\{\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G})\}_{n \in \mathbb{N}}$ es no decreciente, así que podemos usar el Teorema de la convergencia monótona. □

Si $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ y existe Y en $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $|X_n| \leq Y$ c.s. entonces:

$$\begin{aligned}
 X &\text{ Está en } L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\
 \text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) &= \mathbb{E}(X | \mathcal{G})
 \end{aligned}$$

Demostración. Para la demostración definimos U_n y V_n como:

$$U_n := \inf_{m \geq n} X_m \leq X_n \leq \sup_{m \geq n} X_m := V_n$$

Se cumple que:

$$-Y \leq U_n \leq U_{n+1} \leq X_n$$

Propiedades Básicas de Esperanza Condicional

Por lo cual por el Teorema de convergencia monótona podemos afirmar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(U_n + Y \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X + Y \mid \mathcal{G})$$

Debido a que $\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ es finita tenemos :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(U_n \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

De forma análoga obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(V_n \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

Lo que nos da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(V_n \mid \mathcal{G}) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(U_n \mid \mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G})$$

□

Si X está en $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa entonces:

$$g(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(g(X) \mid \mathcal{G})$$

Demostración. Ya que $g(x)$ es convexa se tiene que $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos secuencias tales que

$$g(x) = \sup_n \{a_n x + b_n\}$$

Así que para cada n se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X) \mid \mathcal{G}) &\geq \mathbb{E}(a_n X + b_n \mid \mathcal{G}) \\ &= a_n \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b_n \\ &= g(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) \end{aligned}$$

□

Propiedades Básicas de Esperanza Condicional

Se cumple:

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H})$$

Demostración. La primer igualdad es clara ya que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ es \mathcal{G} -medible, para verificar $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H})$, consideramos h en \mathcal{H} así que:

$$\int_h X d\mathbb{P} = \int_h \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_h \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) d\mathbb{P}$$

□

Apéndice C

Una Demostración Pertinente

Si \mathbb{P} es una medida de probabilidad y $\hat{\mu}$ el conjunto de todas las medidas absolutamente continuas respecto a \mathbb{P} , podemos afirmar que $\hat{\mu}$ es cerrado. Sea μ un punto de acumulación de $\hat{\mu}$ y sea $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de elementos en $\hat{\mu}$ que converge a μ . Por demostrar que μ está en $\hat{\mu}$

Demostración. Ya que \mathbb{P} es una medida de probabilidad y $\mu_i \ll \mathbb{P}$ existe la derivada de Radon-Nikodym que denotaremos $f_i = \frac{d\mu_i}{d\mathbb{P}}$

Por hipótesis:

$$\|\mu_n - \mu_m\| \rightarrow 0$$

que puede ser rescrito:

$$\int_A |f_n - f_m| d\mathbb{P}$$

lo que implica:

$$\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$$

entonces $\{f_n\}_n$ es de Cauchy en $L^1(\mathbb{P})$;
entonces existe f en $L^1(\mathbb{P})$ tal que:

$$\|f_n\|_1 \rightarrow f$$

donde $f = \frac{d\mu}{d\mathbb{P}}$.

Por lo tanto:

$$\mu_n(A) \rightarrow \mu(A).$$

Además:

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) = \int_{\Omega} f d\mathbb{P} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mathbb{P} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Y ya que todas las μ_n son no negativas μ también lo es. Por lo tanto μ está en $\hat{\mu}$

□

Bibliografía

- [Avellaneda et al., 2001] Avellaneda, M., Buff, R., Friedman, C., Grandchamp, N., Kruk, L., and Newman, J. (2001). Weighted monte carlo: a new technique for calibrating asset-pricing models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 4(01):91–119.
- [Bariviera et al., 2015] Bariviera, A. F., Martin, M., Plastino, A., and Vampa, V. (2015). Libor troubles: anomalous movements detection based on maximum entropy. *arXiv preprint arXiv:1508.04512*.
- [Becker, 2010] Becker, M. (2010). Exact simulation of final, minimal and maximal values of brownian motion and jump-diffusions with applications to option pricing. *Computational Management Science*, 7(1):1–17.
- [Clewlow Lee, 1994] Clewlow Lee, Llanos Javier, S. C. (1994). Pricing exotic options in a black-scholes world. *Encuentros multidisciplinares*.
- [Cobb et al.,] Cobb, B. R., Rumı, R., and Salmerón, A. Approximating the distribution of a sum of log-normal random variables.
- [Cox et al., 1979] Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3):229–263.
- [Davis, 2006] Davis, M. (2006). Mathematical option pricing.
- [Dhaene et al., 2015] Dhaene, J., Stassen, B., Devolder, P., and Vellekoop, M. (2015). The minimal entropy martingale measure in a market of traded financial and actuarial risks. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 282:111–133.

- [Ewald et al., 2013] Ewald, C.-O., Menkens, O., and Ting, S. H. M. (2013). Asian and australian options: A common perspective. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(5):1001–1018.
- [Freedman, 2012] Freedman, D. (2012). *Brownian motion and diffusion*. Springer Science & Business Media.
- [Gerber and Shiu, 2003] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. (2003). Pricing look-back options and dynamic guarantees. *North American Actuarial Journal*, 7(1):48–66.
- [Haber et al., 1999] Haber, R. J., Schönbucher, P. J., and Wilmott, P. (1999). Pricing parisian options. *The Journal of Derivatives*, 6(3):71–79.
- [Hull, 2006] Hull, J. C. (2006). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India.
- [Markowitz, 1959] Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, volume 16. Yale university press.
- [Martínez, 2008] Martínez, F. V. (2008). *Riesgos financieros y económicos/-Financial and Economical Risks: Productos Derivados Y Decisiones Economicas Bajo Incertidumbre*. Cengage Learning Editores.
- [McLeish,] McLeish, D. L. Monte carlo simulation & finance (2005).
- [Pelsser, 2000] Pelsser, A. (2000). Pricing double barrier options using laplace transforms. *Finance and Stochastics*, 4(1):95–104.
- [Philippatos and Wilson, 1972] Philippatos, G. C. and Wilson, C. J. (1972). Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 4(3):209–220.
- [Sánchez Peralta, 2010] Sánchez Peralta, A. (2010). *El Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (Teorema Fundamental de las Finanzas)*. Universidad Autónoma Metropolitana.
- [Tadeo, 1999] Tadeo, J. L. C. (1999). Física, teoría de la información y economía: tres lugares comunes para la entropía. *Encuentros multidisciplinares*, 1(3):2.

-
- [Usta and Kantar, 2011] Usta, I. and Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: a multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, 13(1):117–133.
- [Yinghua and Xingsi, 2013] Yinghua, L. and Xingsi, L. (2013). Entropy binomial tree model for option pricing. *Appl. Math*, 7(1):151–159.
- [Zhang, 2009] Zhang, H. (2009). Pricing asian options using monte carlo methods. *Uppsala University*.
- [Zhou et al., 2013] Zhou, R., Cai, R., and Tong, G. (2013). Applications of entropy in finance: A review. *Entropy*, 15(11):4909–4931.