Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA INTERNA DE UN TOPOS

T E S I S

que presenta:

Carlos Alejandro Hernández Gómez

para obtener el título de:

Matemático

Director de tesis:

M. en C. Luis Jesús Turcio Cuevas

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2018

Índice general

Agradecimientos

Cada mente es un universo (o un topos). Es por esto que quiero agradecer a las partes fundamentales que conforman a mi universo. [Johnstone, 2014]

En primer lugar, agradezco a mi familia, que son esos objetos potencia que me impulsan a seguir adelante cada vez que me siento derrotado. A mis padres, Francisco y Sandra, que me brindan una pertenencia de amor y de apoyo que sin lugar a dudas es universal y mis hermanos Kiko y Sandy, que además son mis mejores amigos, por tantas memorias y recuerdos de alegría que se factorizan a través de cada cosa que hago y que quiero compartir con ellos.

Agradezco a todos mis maestros, tanto de la escuela, como fuera de ella, que conforman a mi clasificador de subobjetos, que me han enseñado a distinguir lo que está bien de lo que está mal y a reconocer a la verdad. Quiero agradecer particularmente a Luis Turcio, Hugo Rincón, Melisa Gutiérrez, César Guevara, Edgar Hernández, Gabriela Araujo y Maria Emilia Caballero que no sólo me han enseñado a ser un buen matemático, también me enseñan a ser una buena persona. Han hecho mucho más por mi de lo que sus obligaciones como académicos les exigen y me honran con su amistad.

Por supuesto, quiero agradecer también a todos mis amigos que son esos productos fibrados que siempre han logrado una conmutatividad entre diversión y apoyo, risas y aprendizaje. A todos mis amigos de "La Office", al "MegaTeam" y a mis amigos de la Facultad de Ciencias en general, que siempre hicieron que los días de trabajo estuvieran llenos de alegría.

Agradezco especialmente a mi novia, Diana. Que cuando las cosas eran confusas, ella fue ese objeto terminal que le dio sentido a todo.

Introducción

Contexto Histórico

No cabe duda que fue el matemático estadounidense F. William Lawvere quien inició un programa entero de pensamiento sobre la lógica y los fundamentos de las matemáticas en general bajo un contexto categórico. En su tesis de doctorado [Lawvere, 1963], defendida en la universidad de Columbia bajo la supervisión de Eilenberg en 1963, Lawvere dio una generalización para las teorías algebraicas inspirado en la generalización que Grothendieck había dado para la teoría de gavillas sobre espacios topológicos.

En su trabajo, Lawvere define a una *teoría algebraica* como una categoría (pequeña) $\mathcal{A}$ con objetos $\{A^0, A^1, A^2, \dots, A^n, \dots\}$ donde A^n es el producto de A^1 consigo misma n veces. Y donde un morfismo arbitrario $\eta : A^n \to A^1$ es considerado como una *operación n-aria*.

La motivación de esta definición es muy clara cuando aparece la definición de una *álgebra de tipo* $\mathcal{A}$, también llamada una $\mathcal{A}$-*álgebra*, que es simplemente un funtor que preserva productos finitos de la teoría algebaica $\mathcal{A}$ a la categoría de conjuntos, $F : \mathcal{A} \to \boldsymbol{Con}$. Así, $F(A)$ es un conjunto y $F(A^n)$ es $F(A) \times \cdots \times F(A)$ n-veces. Una operación $\eta : A^n \to A$ se vuelve una operación estándar en el sentido de la teoría de conjuntos $F(\eta) : F(A) \times \cdots \times F(A) \to F(A)$.

Una $\mathcal{A}$-álgebra es un funtor, también llamado un *modelo* de la teoría $\mathcal{A}$, y un morfismo entre dos $\mathcal{A}$-álgebras es una transformación natural entre ellos.

En particular, la teoría de grupos puede ser clasificada por una teoría algebraica $\mathcal{A}$, en donde cada grupo es un funtor; además, un morfismo entre dos grupos F y G, es una transformación natural $\tau : F \to G$; la conmutatividad dada por la naturalidad de τ da exactamente la preservación de la operación binaria y del neutro de esa operación.

$$\begin{tikzcd}
F(A^2) \arrow[r, "*_F"] \arrow[d, "\tau\times\tau"'] & F(A) \arrow[d, "\tau"'] & 1 \arrow[l, "e_F"'] \arrow[d, "Id"] \\
G(A^2) & G(A) \arrow[l, "*_G"] \arrow[r, "e_G"'] & 1.
\end{tikzcd}$$

Lawvere denotó a la categoría de los modelos de $\mathcal{A}$, con transformaciones naturales como morfismos, como $\boldsymbol{Con}^{(\mathcal{A})}$

En su trabajo, Lawvere también da una axiomatización para la categoría de conjuntos en términos puramente categóricos y prueba que cualquier categoría que cumpla esos axiomas es equivalente a ***Con***. Sin embargo, el estudio de la categoría de conjuntos desde este punto de vista axiomático no tuvo mucha atención; en 1977, en el volumen 10 de *Topos Theory*, Johnstone opinó que la axiomatización de Lawvere era demasiado especializada y que era muy "rígida" como para tener estructura interna. No obstante, no le tomó mucho tiempo a Lawvere y a otros (incluido Johnstone) ver cómo la lógica podría y quizás debería ser desarrollada en un marco categórico.

En 1966, Lawvere publicó en el *Journal of Symbolic Logic* su trabajo "Functorial semantics of elementary theories" [Lawvere, 1966]. En él, Lawvere extendió su noción de categorías algebraicas a teorías de primer orden en general. A cada teoría de primer orden con igualdad le corresponde una categoría con ciertas propiedades a la que Lawvere llama *teoría elemental*.

Dentro de la definición de *teoría elemental* ya se involucraba a un objeto distinguido B que jugaba un papel parecido al del clasificador de subobjetos, el cual aparecerá más adelante en este trabajo. Además, ésta fue la primera vez en la que el cuantificador existencial fue presentado como un funtor adjunto. Por último, en este trabajo, se da un boceto de una prueba categórica del teorema de completud, que equivale a la existencia de ciertos funtores adjuntos.

Para finales de los años sesentas y principios de los setentas, el siguiente "diccionario" se había elaborado:

Lógica	*Teoría de Categorías*
Teoría (con varios tipos)	Categoría
Tipo	Objeto (de una categoría)
Fórmula (con tipos)	Subobjeto
Término (con tipos)	Morfismo
Interpretación	Funtor
Modelo conjuntista	Funtor sobre ***Con***
Homomorfismo	Transformación natural

En 1969, Lawvere y Myles Tierney desarrollaron una correcta axiomatización para definir a un *topos elemental*. La motivación de Lawvere venía de la mecánica de medios continuos, como él mismo ha aclarado. Mientras que la motivación de Tierney venía de la teoría de gavillas.

En 1970, en su artículo "Quantifiers and sheaves" [Lawvere, 1970], se publicó por primera vez la axiomatización con la que se definió el concepto de *topos elemental*; la cual no sólo es una generalización significativa de la noción introducida por Grothendieck a partir de categorías de gavillas, sino que también le brinda al concepto cierta autonomía al quitarle la dependencia de la teoría de conjuntos.

Un topos tiene una parte geométrica y una parte lógica muy importantes, sin embargo, Lawvere reconoce que lo que generalmente es llamado "lógica matemática" podría ser visto como una rama de la geometría algebraica.

En su primera axiomatización, a un topos elemental se le pedía tener límites finitos, colímites finitos, objetos exponenciales y un clasificador de subobjetos.

Como los axiomas de topos (plural de topos) tienen una forma muy conjuntista, los primeros trabajos al respecto se centraron en clarificar la relación entre topos y la teoría de conjuntos. J. C. Cole y W. Mitchell exploraron las categorías de conjuntos y los modelos de la teoría de conjuntos independientemente entre 1972 y 1973 en [Cole, 1973] y [Mitchell, 1972]. Como veremos, Mitchell introdujo un método que luego tuvo un impacto directo en el desarrollo de la lógica categórica.

Fue en abril de 1973, mientras estaba en Montreal, cuando Jean Bénabou mostró que en algunos casos es más conveniente usar métodos lógicos para probar propiedades categóricas de ciertas categorías, incluyendo a los topos, introduciendo a la llamada *lógica interna* [Bénabou, 1973].

Poco después, en [Osius, 1975], una interpretación semántica a la lógica interna dada por Bénabou hizo su aparición bajo el nombre de "semántica de Kipke-Joyal" en honor a Saul Kripke y André Joyal, con la cual se hizo más explícita esta conveniencia del uso de la lógica. En la semántica de Kripke-Joyal se usa el concepto de forcing de manera análoga a como se había hecho en la teoría de conjuntos.

A partir de estos conceptos que estaban tomando cada vez más fuerza, se definió la lógica de primer orden en un topos como una interpretación de un cierto lenguaje con un estilo funtorial parecido al que originalmente había definido Lawvere, pero tomando como base al concepto de la lógica interna para poder fijar ciertas características de interés.

Grothendieck había ya formulado el concepto de *morfismo geométrico* en [Grothendieck, 1957], que son (para nuestros intereses) morfismos entre topos usados para relacionarlos. El concepto original de morfismo geométrico asigna a una función continua entre espacios topológicos a un par adjunto de funtores entre sus categorías de gavillas respectivas. Luego, Grothendieck generalizó este concepto al definir los morfismos entre sus topologías más generales, que preservan la geometría entre ellas.

La definición más general de topos elemental requirió naturalmente una definición más general de morfismo geométrico. En general, un morfismo entre dos topos elementales $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ consta de un par de funtores $f_* : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ y $f^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, donde f^* preserva límites finitos y es adjunto izquierdo de f_*.

La primera aparición del concepto de *topos clasificante* se atribuye usualmente a Monique Hakim en los sesentas, pero su trabajo fue publicado sólo hasta 1972 [Hakim, 1972]. El topos clasificante de alguna estructura E es, a grandes rasgos, un topos $\mathcal{B}(E)$ tal que para cualquier otro topos $\mathcal{E}$ (cocompleto), hay una equivalencia entre los morfismos geométricos de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}(E)$ y los modelos de la estructura E en el topos $\mathcal{E}$.

Aunque el concepto de topos clasificante fue empleado en varias ocasiones dentro y fuera del contexto de la lógica, fue hasta mediados de los setentas cuando Joyal y Gonzalo E. Reyes mostraron que toda teoría de primer orden $\mathbb{T}$ "coherente" tiene topos clasificante $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, que además es un topos coherente (en el sentido definido por Grothendieck) [Joyal and Reyes, 1976].

Además introdujeron el concepto de un modelo *genérico* G de la teoría $\mathbb{T}$, en el sentido de que todo $\mathbb{T}$-modelo en un topos $\mathcal{E}$ es isomorfo a un modelo p^*G

para un único morfismo geométrico $p : \mathcal{E} \to \mathcal{B}(\mathbb{T})$.

El concepto de la *lógica geométrica* fue mencionado por Lawvere en su conferencia de 1973 y en la versión publicada de la misma [Lawvere, 1975]. En una palabra, una *fórmula geométrica* es una fórmula que se preserva bajo morfismos geométricos. Poco después esta definición se pudo caracterizar en términos lógicos como una fórmula coherente, es decir, del tipo $\forall x(\phi \to \psi)$ donde ϕ y ψ sólo usan conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$ y cuantificador existencial $\exists$ como conectivos lógicos, pero con la adición de que las disyunciones infinitarias $\bigvee_{i\in I} \varphi_i$ también están permitidas para las fórmulas geométricas. Una teoría $\mathbb{T}$ es geométrica si sólo contiene fórmulas geométricas.

Joyal, Reyes y Michael Makkai fueron capaces de generalizar muchos de sus resultados al caso de las teorías geométricas. Sin duda el resultado más importante es el que afirma que toda teoría geométrica tiene topos clasificante y modelo genérico. Más aún, todo topos $\mathcal{E}$ es el topos clasificante de alguna teoría geométrica, o sea que para cualquier topos $\mathcal{E}$ existe una teoría geométrica $\mathbb{T}_{\mathcal{E}}$ tal que $\mathcal{E} \cong \mathcal{B}(\mathbb{T}_{\mathcal{E}})$.

Gracias a la adición del teorema de Pierre Deligne, se obtuvo un resultado inesperado: en una teoría coherente $\mathbb{T}$, cualquier fórmula coherente que pueda ser probada para modelos estándar en la teoría de conjuntos, es verdadera también en todo $\mathbb{T}$-modelo de cualquier topos.

El teorema de Deligne afirma que todo topos coherente $\mathcal{E}$ puede ser de alguna manera caracterizado por sus puntos, es decir, morfismos geométricos $p : \boldsymbol{Con} \to \mathcal{E}$ con dominio el topos de conjuntos. Este resultado, junto con el hecho de que el topos clasificante de una teoría coherente es un topos coherente, hace posible generalizar la completud que hay en la lógica conjuntista.

(El lector interesado podrá encontrar un contexto histórico más amplio y más detallado en [Marquis and Reyes, 2012].)

Introducción a la Tesis

El objetivo de esta tesis es el de definir lo que es un topos, desarrollar algunos de los conceptos básicos sobre su estructura y su lógica interna y mostrar algunas de las relaciones más importantes que hay entre la teoría de topos y la lógica.

Suponemos que el lector está familiarizado con el concepto de categoría, de límite y colímite, de funtor, de par de funtores adjuntos y de transformación natural. Por supuesto que suponemos que el lector conoce los resultados básicos sobre estos conceptos (como por ejemplo el lema de Yoneda).

Todo lo que el lector necesita lo puede encontrar en los primeros capítulos de [Mac Lane, 1998]. Además de esto, usaremos el concepto de mónada para probar un teorema en el capítulo uno y usaremos algunos resultados sobre colímites filtrantes en la última sección del capítulo tres.

En el primer capítulo, iniciamos con la definición de "*topos elemental*" (o simplemente "*topos*"); puede que la definición no haga clara inmediatamente la razón de por qué definir algo así, pero conforme vayamos desarrollando resultados sobre su estructura, es esperado que se note la similitud que hay entre un topos y la teoría de conjuntos, pero sobre todo su relación con la lógica.

Al final del capítulo uno vemos cómo se puede aprovechar la estructura de álgebra de Heyting de los subobjetos de un objeto X en un topos para dar una interpretación de fórmulas lógicas con el llamado "*lenguaje de Mitchell-Bénabou*", luego daremos una útil interpretación de este lenguaje a través de la "*semántica de Kripke-Joyal*" y concluiremos con un ejemplo de cómo se pueden constuir los objetos exponenciales en un topos usando la misma fórmula que los define en la teoría de conjuntos.

En el capítulo dos introducimos la noción de *categoría de gavillas* sobre una *topología de Grothendieck* y probamos que es de hecho un topos; un topos así es llamado un *topos de Grothendiek*. Este concepto es muy importante históricamente pues los topos de Grothendieck dieron pie a la definición general de topos elemental. Además de que gracias a ellos podremos construir una gran cantidad de ejemplos que son relevantes para las matemáticas en general, esta noción será muy útil más adelante para la construcción del *topos clasificante* de una teoría geométrica, que resulta ser un topos de Grothendieck.

En el capítulo tres motivamos a las definiciones de "*morfismo geomético*" y de "*morfismo entre sitios*" a partir de las funciones continuas entre dos espacios topológicos. Luego introducimos los conceptos de topología subcanónica y topología canónia, los cuales son casos particulares de topologías de Grothendieck con algunas propiedades que nos resultarán de mucha importancia ya que el topos clasificante de una teoría geométrica es un topos de Grothendieck con topología subcanónica.

Las últimas dos secciones del capítulo tres están dedicadas casi exclusivamente a comprender y probar el *teorema de Deligne*, el cual afirma que un topos coherente tiene sufientes puntos. Es importante para nosotros este teorema, pues en el último capítulo haremos una construcción del topos clasificante de una teoría coherente como un topos coherente, gracias a esto, usando el teorema de Deligne probaremos una versión del teorema de correctud para fórmulas coherentes.

Iniciamos el capítulo cuatro definiendo una ligera generalización de la lógica de primer orden (en la que tenemos múltiples tipos), definimos lo que es una estructura de ese lenguaje en un topos arbitrario y vemos cómo podemos interpretar las fórmulas de primer orden en cualquier estructura. Al final vemos cómo, a partir de una estructura M en un topos $\mathcal{E}$ y un funtor entre topos $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ que preserva productos finitos, podemos obtener una estructura fM en $\mathcal{F}$.

Luego definimos lo que es una *fórmula geométrica* y una *fórmula coherente*, y luego definimos lo que es una *teoría geométrica* y una *teoría coherente*. La importancia de las teorías geométricas y coherentes radica en que si M es un modelo de una teoría geométrica o coherente T y f^* es el funtor imagen inversa de un morfismo geométrico entonces la esturcura f^*M también es modelo de la teoría T.

En la última sección del capítulo cuatro definimos a la *categoría de objetos definibles* sobre un modelo M. Además, dotamos a esta categoría con una topología de Grothendieck. La motivación para definir a esta categoría con su topología es que será de mucha ayuda para construir al topos clasificante de una teoría geométrica o coherente en el siguiente capítulo.

En el capítulo cinco definimos lo que es el *topos clasificante de una teoría* y luego procedemos a definir al sitio sintáctico de una teoría T. Este sitio tiene una construcción similar a la de la categoría de objetos definibles, pero en este caso tomamos en cuanta a todos los topos. Aunque la construcción que hacemos aquí está basada en la que aparece en [Mac Lane and Moerdijk, 1992], nosotros hacemos una definición diferente para el sitio sintáctico de una teoría geométrica y el de una teoría coherente.

En la segunda sección probamos que el topos de gavillas sobre el sitio sintáctico de una teoría geométrica o coherente es un topos clasificante de esa teoría. Luego, en la última sección, definimos lo que es un *modelo universal* de una teoría y mostramos que el topos clasificante de una teoría siempre tiene un modelo universal de la teoría que clasifica. Además, para el caso de un topos clasificante como el que construimos en la sección anterior, damos explícitamente al modelo universal.

Finalmente notamos que el topos clasificante de una teoría coherente (como el que construimos nosotros) es un topos coherente, gracias a esto, usando el teorema de Deligne, llegamos a un resultado bastante importante: en una teoría coherente T, una fórmula coherente es verdadera en todo modelo de T en cualquier topos si y sólo si es verdadera en todo modelo de T de la teoría de conjuntos.

El último capítulo muestra una pequeña compilación de ejemplos de topos clasifiantes de diferentes teorías.

Capítulo 1

Un Topos y Su Estructura

En este capítulo, definimos lo que es un "*topos elemental*" (o simplemente "*topos*") y probamos varios resultados importantes sobre su estructura, en particular probamos que un topos es cartesiano cerrado y que los subobjetos de un objeto X forman un álgebra de Hayting con su orden natural.

Al final del capítulo vemos cómo se puede aprovechar la estructura de álgebra de Heyting de los subobjetos de un objeto cualquiera para dar una interpretación de fórmulas lógicas con el llamado "*lenguaje de Mitchell-Bénabou*", luego daremos una útil interpretación de este lenguaje a través de la "*semántica de Kripke-Joyal*" y concluiremos con un ejemplo de cómo se pueden constuir los objetos exponenciales en un topos usando la misma fórmula que los define en la teoría de conjuntos.

1.1. Definición de Topos

Definición 1.1. Un topos es una categoría $\mathcal{E}$ localmente pequeña que cumple los siguientes axiomas:

1. $\mathcal{E}$ tiene todos los productos fibrados.

2. $\mathcal{E}$ tiene objeto terminal 1.

3. Existe un objeto Ω (llamado el *clasificador de subobjetos*) en $\mathcal{E}$ y un monomorfismo $verdad : 1 \rightarrowtail \Omega$ de forma que para cada monomorfismo $m : S \rightarrowtail B$ existe una única flecha $\phi : B \rightarrowtail \Omega$ en $\mathcal{E}$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, tail, "verdad"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

En este caso escribimos ϕ =car S o ϕ =car m, y llamamos a ϕ el mapeo característico de m (a veces llamado el mapeo clasificador de m).

4. Para cada objeto B existe un objeto PB y un morfismo $\epsilon_B : B \times PB \to \Omega$ tal que para cada morfismo $f : B \times A \to \Omega$ hay un único morfismo $g : A \to PB$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "g"'] & B \times A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "1\times g"'] & \Omega \arrow[d, equal] \\ PB & B \times PB \arrow[r, "\epsilon_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Note que hay una biyección

$$Hom_{\mathcal{E}}(B \times A, \Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(A, PB) \tag{1.1}$$

dada por la correspondencia $f \mapsto g$ y la inversa dada explícitamente como

$$g \mapsto f = \epsilon_B(1 \times g)$$

llamamos a g la *P-transpuesta* de f y $f = \widehat{g}$ la *P-transpuesta* de g.

Ejemplo 1.2. El ejemplo más sencillo de un topos es la categoría de los conjuntos $\boldsymbol{Con}$ (sobre la cual está inspirada la definición de topos). Un objeto terminal en $\boldsymbol{Con}$ es un conjunto unitario $\{*\}$ y el clasificador de subobjetos es $2 = \{0, 1\}$ con morfismo (función) $verdad : \{*\} \rightarrowtail \{0, 1\}$ tal que $verdad(*) = 1$. (Esto se puede comprobar fácilmente usando la biyección canónica que hay entre $P(X)$ y 2^X para todo conjunto X.)

Para cada conjunto B, el objeto PB es su potencia $P(B)$ y el morfismo $\epsilon_B : B \times PB \to \{0, 1\}$ es tal que, para todo $X \in B$ y $Y \in P(B)$, $\epsilon_B(X, Y) = 1$ si y sólo si $X \in Y$

Ejemplo 1.3. Otro ejemplo sencillo de definir es el topos de pregavillas sobre una categoría $\boldsymbol{C}$: Dada una categoría $\boldsymbol{C}$, la categoría $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$, cuyos objetos son los funtores contravariantes de $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{Con}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales que hay entre ellos, es llamada la *categoría de pregavillas sobre* $\boldsymbol{C}$. Esta categoría es un topos.

El topos de pregavillas más sencillo de visualizar es aquel en el que $\boldsymbol{C}$ es una categoría discreta. Es fácil comprobar que en este caso el objeto terminal es "$\boldsymbol{C}$ copias" de $\{*\}$, el clasificador de subobjetos es "$\boldsymbol{C}$ copias" de $\{1, 0\}$, etcétera. (¡En este topos hay "$2^{\boldsymbol{C}}$" valores de verdad!).

Ejemplo 1.4. Otro ejemplo útil es el de el topos de gavillas sobre un sitio $(\boldsymbol{C}, J)$ (que es una subcategoría de la categoría de pregavillas sobre $\boldsymbol{C}$). En el capítulo 2 definiremos exactamente lo que es un sitio y una categoría de gavillas y probaremos que en efecto es un topos.

Aunque se puede probar que un topos de gavillas es equivalente a un topos de pregavillas, la estructura que le da el sitio del que proviene es muy útil.

Ahora veamos que de la asignación de objetos $B \mapsto PB$ podemos definir a un único funtor $P : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ gracias a la propiedad que se le pide en el punto 4 de la definición 1.1.

Dado un morfismo $h : B \to C$, podemos definir un morfismo $Ph : PC \to PB$ como la P-*transpuesta* del morfismo $\epsilon_C \circ (h \times 1) : B \times PC \to \Omega$, de manera que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
PC \arrow[d, dashed, "Ph"'] & B \times PC \arrow[r, "h\times 1"] \arrow[d, dashed, "1\times Ph"'] & C \times PC \arrow[d, "\epsilon_C"] \\
PB & B \times PB \arrow[r, "\epsilon_B"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

De esta forma, si tenemos el par de morfismos

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

entonces $P(hg)$ es la P-*transpuesta* de $\epsilon_C(hg \times 1)$, pero si consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \times PC \arrow[r, "g\times 1"] \arrow[d, "1\times Ph"'] & B \times PC \arrow[r, "h\times 1"] \arrow[d, "1\times Ph"'] & C \times PC \arrow[dd, "\epsilon_C"] \\
A \times PB \arrow[r, "g\times 1"'] \arrow[d, "1\times Pg"'] & B \times PB \arrow[dr, "\epsilon_B"'] & \\
A \times PA \arrow[rr, "\epsilon_A"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo por la definición de Ph y de Pg, y el hecho de que

$$(h \times 1)(g \times 1) = (hg \times 1) \text{ y } (1 \times Pg)(1 \times Ph) = (1 \times PgPh),$$

obtenemos que $PhPg$ es P-*transpuesta* de $\epsilon_C(hg \times 1)$ de donde, por la unicidad de la P-*transpuesta*, se tiene que $P(hg) = PgPh$. Así, $P : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definido de esta forma es un funtor contravariante.

Un morfismo $X \to B$ puede ser considerado como un tipo de "elemento" de B, más en específico, diremos que es un *elemento (generalizado)* definido sobre X. Los elementos definidos sobre el objeto terminal $1 \to B$ son llamados *elementos globales*.

Por otro lado, una flecha $B \to \Omega$ puede ser considerada como un *predicado* para B, o una *propiedad* de elementos generalizados de B. Por ejemplo, el predicado "verdad de B" es

$$\text{verdad}_B : B \xrightarrow{!_B} 1 \xrightarrow{verdad} \Omega,$$

donde $!_B$ es el único morfismo que hay de B al objeto terminal 1.

Dado $S \rightarrowtail B$ un subobjeto de B y φ_S su mapeo característico, por el producto fibrado de la definición del clasificador de subobjetos Ω, uno tiene que un objeto generalizado $X \xrightarrow{x} B$ "pertenece a S" (se factoriza a través de $S \rightarrowtail B$) si $\varphi_S(x) = \text{verdad}_X$, donde $\varphi_S(x)$ es simplemente $\varphi_S \circ x$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "!_X"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\
& B \arrow[r, "\varphi_S"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Intuitivamente, el mapeo caractrístico de S es el predicado de B que es verdadero exactamente en aquellos elementos generalizados de B que pertenecen a S. Además, por la unicidad de φ_S, tenemos que cualesquiera dos predicados de B son iguales si y sólo si son verdaderos para los mismos elementos (generalizados) de B. (Este es un principio de extensionalidad.)

Para cada objeto B del topos, tenemos que $B \cong B \times 1$ por lo que el isomorfismo (1.1) se puede escribir como

$$Hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(B \times 1, \Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(1, PB).$$

Además, si $m : S \rightarrowtail B$ y $m' : S' \rightarrowtail B$ son dos subobjetos de B, decimos que son *isomorfos* (como subobjetos de B) si existe un isomorfismo $f : S \to S'$ tal que $m' \circ f = m$. Note que en este caso, S y S' tienen al mismo mapeo característico.

Así, podemos definir al conjunto de subobjetos de B en $\mathcal{E}$ de la siguiente manera:

Definición 1.5. $Sub_{\mathcal{E}}B$ es la familia de subobjetos de B en $\mathcal{E}$ (salvo isomorfismo) y por lo anterior:

$$Sub_{\mathcal{E}}B \cong Hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(1, PB).$$

Además, se le puede definir un orden parcial a $Sub_{\mathcal{E}}B$: si $m : S \rightarrowtail B$ y $m' : S' \rightarrowtail B$ son subobjetos de de B, entonces decimos que $S \leqslant S'$ si existe un morfismo $f : S \to S'$ tal que $m' \circ f = m$. Note que en este caso f es un monomorfismo, por lo que en efecto S es también subobjeto de S'.

Un subobjeto de B tiene las correspondientes tres descripciones:

$$m : S \rightarrowtail B, \qquad \phi : B \to \Omega, \qquad s : 1 \to PB,$$

como una clase de equivalencia de monomorfismos hacia B, como un predicado de B, y como un elemento global del objeto potencia PB (que se definió en el punto 4 de la definición 11). Cuando m, ϕ, y s corresponden de esta manera, escribimos

$$S = \{b \mid \phi(b)\}, \qquad \phi = \text{car } S = \chi_S, \qquad s = \ulcorner \phi \urcorner,$$

y llamamos a S la *extensión* del predicado ϕ, a ϕ la *función característica* de S y a s el *nombre* de ϕ (o de S).

Explícitamente, el nombre de ϕ se calcula usando la propiedad universal de la potencia PB como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, dashed, "\ulcorner\phi\urcorner"'] & B\times 1 \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, dashed, "1\times\ulcorner\phi\urcorner"'] & B \arrow[d, "\phi"] \\ PB & B\times PB \arrow[r, "\epsilon_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Lema 1.6. *1) En un topos, todo monomorfismo es un igualador.*
2) Un morfismo es isomorfismo si y sólo si es mono y epi.

Demostración. De la definición de clasificador de subobjetos tenemos que un monomorfismo $m : S \rightarrowtail B$ es el igualador de su característica χ_m y de $verdad_B$ pues $verdad_B \circ f = verdad_X$ para toda flecha $f : X \to B$.

Ahora, si un monomorfismo e es igualador de dos flechas f y g y además es epi, entonces $fe = ge$ por lo que $f = g$ pero un igualador de f y f es necesariamente un isomorfismo por lo que e lo es.

□

Aunque en algunos textos la condición de que un topos tenga colímites finitos aparece como un axioma, los axiomas de topos presentados aquí son suficientes para probar que tiene todos los colímites finitos.

Para probar esto usamos el concepto de mónadas que puede ser encontrado en [Mac Lane, 1998] en las páginas 133 a 151.

Probemos que el funtor potencia P es "su propio" adjunto izquierdo y por lo tanto define una mónada.

Teorema 1.7. *El funtor $P : \mathcal{E}^{op} \to \mathcal{E}$ tiene como adjunto izquierdo a $P^{op} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{op}$.*

Demostración. El funtor P^{op} es "el mismo" funtor contravariante P pero es considerado actuando sobre $\mathcal{E}$ y no sobre $\mathcal{E}^{op}$. Usando el isomorfismo canónico que nos da la conmutatividad del producto $A\times B \cong B\times A$ tenemos los siguientes isomorfismos naturales:

$$Hom_{\mathcal{E}}(A, PB) \cong Hom_{\mathcal{E}}(B \times A, \Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega)$$

$$\cong Hom_{\mathcal{E}}(B, PA) \cong Hom_{\mathcal{E}^{op}}(P^{op}A, B).$$

□

Aplicamos el teorema de Beck para probar que P es monádico. Uno puede probar que P es un funtor fiel, por lo tanto refleja monomorfismos y epimorfismos, pero como en un topos un morfismo es iso si y sólo si es mono y epi, entonces P refleja isomorfismos. Además, $\mathcal{E}^{op}$ tiene coigualadores de pares reflexivos pues son simplemente igualadores de $\mathcal{E}$. Usando la condición de Beck-Chevalley uno puede probar además que P preserva coigualadores de pares reflexivos. Por lo tanto P es monádico en virtud del teorema de Beck.

Corolario 1.8. *Un topos $\mathcal{E}$ tiene todos los colímites finitos.*

Demostración. Sea $T = PP^{op}$ la mónada definida en $\mathcal{E}$ por el funtor potencia y $\mathcal{E}^T$ la categoría de T-álgebras correspondiente, el funtor que olvida $\mathcal{E}^T \to \mathcal{E}$ crea límites. Si J es cualquier categoría finita, entonces $\mathcal{E}$ tiene todos los J^{op}-límites, por lo tanto $\mathcal{E}^T$ también tiene todos los J^{op}-límites. Pero, como P es monádico, $\mathcal{E}^{op}$ es equivalente a $\mathcal{E}^T$, y equivalencias de categorías preservan todos los límites finitos. Por lo tanto $\mathcal{E}^{op}$ tiene todos los J^{op}-límites, así $\mathcal{E}$ tiene todos los J-colímites.

□

En teoría de conjuntos, cualquier función puede descomponerse como una función suprayectiva seguida de un encaje. Como ahora tenemos colímites, podemos probar que esta factorización se da en cualquier topos: todo morfismo se factoriza como un epi seguido por un mono.

Al mono m le llamamos *imagen* de f si f se factoriza a través de m, digamos como $f = me$ para algún e, y si, siempre que f se factoriza a través de un mono h, también m lo hace.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B & \Longrightarrow & Im(f) \arrow[rr, tail, "m"] \arrow[dr, tail] & & B. \\ & C \arrow[ur, tail, "h"'] & & & & C \arrow[ur, tail, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Esto dice en efecto que m es el menor subobjeto del codominio de f a través del cual f se puede factorizar.

Proposición 1.9. *En un topos, todo morfismo $f : A \to B$ tiene una imagen $m : Im(f) \rightarrowtail B$ y se factoriza como $f = me$ con e epimorfismo.*

Demostración. Dado $f : A \to B$, construimos el diagrama por pasos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & B \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & C \\ & Im(f) \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

Primero tomamos el par cokernel x, y de f; este par puede ser construido como el coproducto fibrado de f con f. Sea m, con dominio $Im(f)$, el igualador de este par x, y, entonces $xm = ym$ y m es monomorfismo. Además, como $x \circ f = y \circ f$ entonces f se factoriza a treavés del igualador m como $f = me$ para alguna flecha e como en el diagrama de arriba.

Usando las propiedades de esta construcción es fácil ver que si f se factoriza a través de un mono h, entonces m también lo hace. Por lo que m es en efecto imagen de f. Además f es epi si y sólo si m es iso. De donde, repitiendo esta construcción para e, es inmediato que e debe ser un epimorfismo. □

Proposición 1.10. *Para cada objeto A en un topos, la colección parcialmente ordenada $Sub(A)$ es un álgebra de Heyting.*

Demostración. Dados dos subobjetos $S \rightarrowtail A$ y $T \rightarrowtail A$ podemos formar la intersección como su mayor cota inferior en $Sub(A)$ simplemente tomando su producto fibrado. Además, del coproducto de S y T tenemos una flecha dada por su propiedad universal $S+T \xrightarrow{s+t} A$ que no necesariamente es un mono. La unión de S y T, será entonces la imagen de $s+t$.

$$
\begin{tikzcd}
S \cap T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\
S \arrow[r] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S+T \arrow[dr] & & T \arrow[ll] \arrow[dd] \\
& S \cup T \arrow[dr] & \\
S \arrow[uu] \arrow[rr] & & A
\end{tikzcd}
$$

Esta retícula tiene cero $0 \rightarrowtail A$ y uno $A \xrightarrow{1_A} A$. Además, si dos subobjetos de A son disjuntos (es decir, si $S \cap T \cong 0$), entonces su coproducto coincide con su unión: $S+T \cong S \cup T$, de donde si $m_i : S_i \rightarrowtail A$ con $i \in I$ es una familia de subobjetos de A disjunta por pares entonces su coproducto $\amalg S_i$ existe y el morfismo inducido $m : \amalg S_i \to A$ es de nuevo mono y por lo tanto representa al supremo de los subobjetos S_i. Dados T y T' subobjetos de A, construimos al subobjeto implicación $T \Rightarrow T'$ como el supremo de los subobjetos S de A tales que $S \cap T \leqslant T'$ y el seudo-complemento $\neg T$ es el subobjeto $(T \Rightarrow 0)$.

□

Como tenemos un isomorfismo natural $Sub(A) \cong Hom_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ para cada objeto A de $\mathcal{E}$ y $Hom_{\mathcal{E}}(A,\Omega) \times Hom_{\mathcal{E}}(A,\Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(A, \Omega \times \Omega)$, podemos definir a un morfismo $\bigcap_A$:

$$
\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{E}}(A, \Omega \times \Omega) \arrow[r, dashed, "\bigcap_A"] \arrow[d, equal, "\cong"] & Hom_{\mathcal{E}}(A, \Omega) \arrow[dd, equal, "\cong"] \\
Hom_{\mathcal{E}}(A,\Omega) \times Hom_{\mathcal{E}}(A,\Omega) \arrow[d, equal, "\cong"] & \\
Sub(A) \times Sub(A) \arrow[r, "\bigcap"] & Sub(A)
\end{tikzcd}
$$

Además $\bigcap_A$ es natural en A. Así, usando el lema de Yoneda, esta última operación debe entonces estar inducida via composición por un único morfismo: $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$. De manera análoga se definen

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\vee} \Omega,$$

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$$

$$\text{y} \quad \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$$

a partir de la unión, la implicación y el seudo-complemento respectivamente.

Un morfismo $A \xrightarrow{k} B$ en $\mathcal{E}$, induce un morfismo k^{-1} entre las álgebras de Heyting $Sub(B)$ y $Sub(A)$ dado por el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
k^{-1}(S) \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, dashed, "k^{-1}(s)"'] & S \arrow[d, tail, "s"] \\
A \arrow[r, "k"'] & B
\end{tikzcd}$$

Además podemos definir un morfismo $\exists_k$ de $Sub(A)$ a $Sub(B)$ a partir de la imagen:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail, "s"'] & Im(ks) \arrow[d, tail, dashed, "\exists_k(s)"] \\
A \arrow[r, "k"'] & B.
\end{tikzcd}$$

De esta forma, tenemos dos funtores

$$k^{-1} : Sub(B) \to Sub(A) \quad \text{y} \quad \exists_k : Sub(A) \to Sub(B);$$

uno puede comprobar que $\exists_k$ es adjunto izquierdo de k^{-1}. Además, k^{-1} tiene un adjunto derecho al que llamaremos $\forall_k : Sub(A) \to Sub(B)$.

A partir de lo anterior podemos definir a los morfismos

$$\exists_k : PA \to PB \;\; \text{y} \;\; \forall_k : PA \to PB$$

gracias a los isomorfismos

$$Hom_{\mathcal{E}}(X, PA) \cong Hom_{\mathcal{E}}(A \times X, \Omega) \cong Sub(A \times X)$$

$$\begin{tikzcd}
Sub(A \times X) \arrow[r, shift left, "\exists_{(k\times 1)}"] \arrow[r, shift right, "\forall_{(k\times 1)}"'] \arrow[d, equal, "\cong"] & Sub(B \times X) \arrow[d, equal, "\cong"] \\
Hom_{\mathcal{E}}(X, PA) \arrow[r, shift left, "(\exists_k)_X"] \arrow[r, shift right, "(\forall_k)_X"'] & Hom_{\mathcal{E}}(X, PB).
\end{tikzcd}$$

Usando nuevamente el lema de Yoneda, tenemos que $(\exists_k)_X$ y $(\forall_k)_X$ deben estar inducidos de manera única por morfismos

$$\begin{tikzcd}
PA \arrow[r, shift left, "\exists_k"] \arrow[r, shift right, "\forall_k"'] & PB
\end{tikzcd}$$

Así $\exists_k$ es adjunto izquierdo interno de Pk y $\forall_k$ es su adjunto derecho interno. (Pk se puede definir de forma análoga a partir de

$$(k \times 1)^{-1} : Sub(B \times X) \to Sub(A \times X)$$

¡Y obtenemos la misma Pk que como la habíamos definido antes!)

1.2. Lógica Interna de un Topos

A continuación definiremos un lenguaje con el que podremos dar fórmulas lógicas como las que se usan en la teoría de conjuntos, esto nos permitirá construir subobjetos y enunciar axiomas. Además daremos una interpretación semántica de estas fórmulas.

Definición 1.11. Presentamos ahora el *lenguaje de Mitchell-Bénabou* para un topos $\mathcal{E}$ dado.

Definimos las expresiones de este lenguaje recursivamente empezando por las variables. Para cada objeto X habrán variables $x, x', \ldots$ del tipo X; cada una de estas variables se interpretará como la identidad $x : X \xrightarrow{1_X} X$. Más en general, un término σ del tipo X involucrará en su construcción ciertas variables $y, z, w, \ldots$, tal vez algunas de ellas repetidas. Listamos las variables por orden de aparición y, z, w dejando de lado las que se repiten; si los tipos de las variables respectivos son Y, Z, W, entonces el producto $Y \times Z \times W$ en $\mathcal{E}$ es llamado la *fuente* (o el *dominio de definición*) del término σ, mientras que la interpretación de σ será un morfismo

$$\sigma : Y \times Z \times W \to X$$

de $\mathcal{E}$. (En el evento de que σ contenga, digamos, dos diferentes variables y, y' de el mismo tipo Y, su fuente involucrará un producto binario correspondiente $Y \times Y$.) Para simplificar, nuestra notación no distinguirá entre un término σ (que es un objeto linguístico) y su interpretación (que es un morfismo en el topos $\mathcal{E}$).

Aquí están las cláusulas inductivas que simultáneamente definen los términos del lenguaje y su interpretación:

1. Cada variable x de tipo X es un término de tipo X; su interpretación es la identidad $x = 1_X : X \to X$

2. Un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{E}$ y un término $\sigma : U \to X$ de tipo X juntos forman un término $f \circ \sigma$ de tipo Y, con su obvia interpretación como la composición
$$f \circ \sigma : U \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y.$$

3. A partir de dos términos σ y τ de tipos X y Y, interpretados por $\sigma : U \to X$ y $\tau : V \to Y$ obtenemos un término (σ, τ) de tipo $X \times Y$; su interpretación es
$$(\sigma p, \tau q) : U \times V \to X \times Y$$
donde p y q son las proyecciones evidentes $p : U \times V \to U$ y $q : U \times V \to V$.

4. De dos términos $\sigma : U \to X$ y $\tau : V \to X$ de el mismo tipo X podemos obtener al término $\sigma = \tau$ de tipo Ω, interpretado por
$$(\sigma = \tau) : U \times V \xrightarrow{(\sigma p, \tau q)} X \times X \xrightarrow{\delta_X} \Omega,$$
donde $(\sigma p, \tau q)$ es como en el caso previo, mientras que δ_X es el mapeo característico de la diagonal $\Delta = (1_X, 1_X) : X \rightarrowtail X \times X$.

5. Si tenemos términos $\sigma : U \to X$ y $\tau : V \to PX$ de tipos X y PX respectivamente, definimos al término $\sigma \in \tau$ de tipo Ω interpretado como

$$\sigma \in \tau : U \times V \xrightarrow{(\sigma p, \tau q)} X \times PX \xrightarrow{\in_X} \Omega.$$

Los términos de tipo Ω también son llamados *fórmulas* del lenguaje. A las fórmulas les podemos aplicar los conectivos usuales de la lógica $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$, así como los cuantificadores, para obtener términos compuestos también de tipo Ω. Dadas dos fórmulas $\phi : U \to \Omega$ y $\psi : V \to \Omega$, definimos a las fórmulas

$$\phi \wedge \psi : U \times V \xrightarrow{(\phi p, \psi q)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega,$$

$$\phi \vee \psi : U \times V \xrightarrow{(\phi p, \psi q)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\vee} \Omega,$$

$$\phi \Rightarrow \psi : U \times V \xrightarrow{(\phi p, \psi q)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega,$$

$$\neg\phi : U \xrightarrow{\phi} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega,$$

Ahora interpretamos a los cuantificadores: supongamos que $\phi(x, y)$ es una fórmula con una variable libre x del tipo X y otras $y, \ldots$ que juntas tienen una fuente $X \times Y \in \mathcal{E}$ como arriba. Entonces $\phi(x, y)$ es interpretada por una flecha $X \times Y \to \Omega$ de $\mathcal{E}$. Se pretende obtener de la anterior flecha una fórmula $\forall x\phi(x, y)$ que ya no contenga a x como variable libre, es decir, debe ser interpretada por un morfismo $Y \to \Omega$. Esto se puede hacer como sigue:

A partir del isomorfismo de la definición de la potencia de un objeto,

$$Hom_{\mathcal{E}}(X \times Y, \Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(Y, PX),$$

obtenemos de $\phi(x, y) : X \times Y \to \Omega$ al morfismo $\lambda x\phi(x, y) : Y \to PX$. Considérese ahora al mapeo único $p : X \to 1$, al morfismo inducido $P(p) : P1 \to PX$ y a sus adjuntos

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[r, shift left=6, "\exists_p"] \arrow[r, shift right=6, "\forall_p"'] & P1 = \Omega. \arrow[l, "P(p)"'] \end{tikzcd}$$

Definimos entonces a $\forall x\phi(x, y)$ y a $\exists x\phi(x, y)$ como

$$\forall x\phi(x, y) : Y \xrightarrow{\lambda x\phi(x,y)} PX \xrightarrow{\forall_p} \Omega$$

$$\exists x\phi(x, y) : Y \xrightarrow{\lambda x\phi(x,y)} PX \xrightarrow{\exists_p} \Omega.$$

De forma usual, tomaremos la convención de hacer explícito el tipo de la variable cuantificada siempre que se requiera y escribiremos $\forall x \in X\phi(x, y)$ y $\exists x \in X\phi(x, y)$ para $\forall x\phi(x, y)$ y $\exists x\phi(x, y)$. Aquí lea $x \in X$ como "x del tipo X".

Si $\phi(x, y)$ es una fórmula con variables libres x, y, escribimos $\{(x, y) \mid \phi(x, y)\}$ o $\{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x, y)\}$ para denotar al subobjeto de $X \times Y$ clasificado por la interpretación de $\phi(x,y)$; esto significa que este subobjeto es la esquina del producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \{(x,y) \mid \phi(x,y)\} \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\ X \times Y \arrow[r, "\phi(x,y)"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Con esta convensión, podemos escribir las expresiones usuales tales como $\{x \in X \mid \phi(x)\}$ para denotar subobjetos de un objeto dado X, como si el objeto del topos $\mathcal{E}$ tuviera elementos x (aunque en general no los tiene). $\{x \mid \phi(x)\}$ es una notación para la "extensión" de la fórmula $\phi(x)$ en el topos $\mathcal{E}$.

La interpretación de los cuantificadores $\forall x$ y $\exists x$ pueden alternativamente describirse como sigue. Sea $\pi : X \times Y \to Y$ la proyección, consideremos los adjuntos (externos) de $\pi^{-1} : Sub(Y) \to Sub(X \times Y)$:

$$\forall_\pi : Sub(X \times Y) \to Sub(Y), \quad \exists_\pi : Sub(X \times Y) \to Sub(Y)$$

Entonces, del subobjeto $\{(x,y)|\phi(x,y)\} \in Sub(X \times Y)$ obtenemos subobjetos

$$\forall_\pi\big(\{(x,y) \mid \phi(x,y)\}\big) \text{ y } \exists_\pi\big(\{(x,y) \mid \phi(x,y)\}\big)$$

elementos de $Sub(Y)$. Se sigue de las definiciones que estos son precisamente los subobjetos de Y correspondientes a las fórmulas $\forall x\phi(x,y)$ y $\exists x\phi(x,y)$ respectivamente.

A continuación, describimos la verdad (más modestamente, usualmente diremos "validez").

Definición 1.12. Decimos que $\phi(x,y)$, una fórmula del lenguaje interno de un topos $\mathcal{E}$, es *univesalmente válida* en $\mathcal{E}$ si su interpretación $\phi(x,y) : X \times Y \to \Omega$ se factoriza a través de $verdad : 1 \to \Omega$. Note que esto pasará si y sólo si el subobjeto

$$\{(x,y) \mid \phi(x,y)\} \rightarrowtail X \times Y$$

es un isomorfismo, es decir, es de hecho el mayor subobjeto $X \times Y$ mismo.

Si ϕ es una fórmula sin variables libres, entonces su interpretación es un morfismo del producto vacío 1 en Ω. Entonces ϕ será válida si y sólo si $\phi : 1 \to \Omega$ coincide con el morfismo $verdad : 1 \to \Omega$. En este caso decimos también que ϕ *se da* en $\mathcal{E}$ o que ϕ es *verdadera* en $\mathcal{E}$.

Asimismo, la fórmula $\phi(x,y)$ con variables libres x, y de tipos X y Y es universalmente válida en $\mathcal{E}$ si y sólo si la fórmula universalmente cuantificada $\forall x \forall y \phi(x,y)$, cuya fuente es 1, es válida en $\mathcal{E}$.

Note además que si $\phi(x)$ es una fórmula de la forma $\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$, entonces $\phi(x)$ es verdadera si y sólo si

$$\{x \mid \varphi(x)\} \leqslant \{x \mid \psi(x)\}$$

como subobjetos de X, dado que en toda álgebra de Heyting $\mathcal{H}$, cualesqueira dos elementos a y b cumplen que $a \leqslant b$ si y sólo si $a \Rightarrow b$ es el supremo del álgebra.

Del hecho de que $Hom_{\mathcal{E}}(B \times A, \Omega) \cong Hom_{\mathcal{E}}(A, PB)$, tenemos que $PB \cong \Omega^B$. Usando el lenguaje recién definido, se puede construir a cualquier objeto exponencial C^B dados dos objetos de un topos C y B.

En teoría de conjuntos, C^B es el conjunto de funciones de B a C, es decir, es el subconjunto de los f de $B \times C$ tal que para cada $b \in B$ existe un único $c \in C$ tal que $(b, c) \in f$, esto lo podríamos escribir como

$$C^B = \{f \in P(C \times B) \mid \big(\forall b \in B, \exists c \in C\big((b, c) \in f\big)\big) \wedge$$
$$\big(\forall b \in B, \forall c \in C, \forall c' \in C\big(((b, c) \in f \wedge (b, c') \in f) \rightarrow (c = c')\big)\big)\}.$$

Es posible hacer una construcción de los exponenciales tomando esta definición conjuntista y traduciéndola a su interpretación en $\mathcal{E}$ como en la definición de la lógica interna. Luego habría que probar que este subobjeto de $P(B \times C)$ cumple la propiedad de los exponenciales:

$$\mathcal{E}(A \times B, C) \cong \mathcal{E}(A, B^C).$$

El anterior procedimiento se podría llevar a cabo usando las definiciones dadas, sin embargo es conveniente desarrollar primero una notación para la semántica apropiada de un topos $\mathcal{E}$: la llamada semántica de Kripke-Joyal.

Definición 1.13. Sean $\phi(x)$ una fórmula con una variable libre x de tipo X y $\alpha : U \rightarrow X$ un elemento generalizado (con imagen $Im(\alpha)$ en $Sub(X)$), decimos que U *forza a* $\phi(\alpha)$ si y sólo si $Im(\alpha) \leqslant \{x \mid \phi(x)\}$. En este caso, escribimos

$$U \Vdash \phi(\alpha).$$

En otras palabras, $U \Vdash \phi(\alpha)$ si y sólo si α se factoriza a través de $\{x \mid \phi(x)\}$, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \{x, \mid \phi(x)\} \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\
U \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\alpha"'] & X \arrow[r, "\phi(x)"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

Para fórmulas tales como $\phi(x, y)$ o $\phi(x, y, z)$ con variables libres adicionales, definimos el *forcing* de manera similar. Para elementos generalizados $\alpha : U \rightarrow X$ y $\beta : U \rightarrow Y$, decimos que U *forza a* $\phi(\alpha, \beta)$ (es decir, U forza a $\phi(x, y)$ donde x, y son interpretadas por α y β), en notación $U \Vdash \phi(\alpha, \beta)$, si y sólo si el morfismo $(\alpha, \beta) : U \rightarrow X \times Y$ se factoriza a través de $\{(x, y) \mid \phi(x, y)\} \rightarrowtail X \times Y$.

En el caso extremo en el que la fórmula ϕ no tiene variables libres, entonces para cada objeto U de $\mathcal{E}$ uno tiene que $U \Vdash \phi$ si y sólo si el único morfismo $U \rightarrow 1$ se factoriza a través del subobjeto $\{\bullet \mid \phi\} \rightarrowtail 1$ clasificado por $\phi : 1 \rightarrow \Omega$ (en efecto, al no tener variables libres, la fuente de la fórmula ϕ es el producto vacío 1, por lo que su interpretación es un morfismo $\phi : 1 \rightarrow \Omega$). En particular, esto significa que para una fórmula ϕ sin variables libres

$$1 \Vdash \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \phi = verdad : 1 \rightarrow \Omega$$

Asimismo, considere al siguiente ejemplo donde la fórmula $(x = x')$ está interpretada por la delta de Kronecker $\delta_X : X \times X \to \Omega$ que es la función característica de la diagonal $\Delta : X \rightarrowtail X \times X$ por lo que si $\alpha : U \to X$ y $\beta : U \to X$ son elementos generalizados de X, entonces $U \Vdash (\alpha = \beta)$ si existe $f : U \to X$ tal que

$$\Delta \circ f = (\alpha, \beta) : U \to X \times X$$

pero entonces al componer con las proyecciones, como $\Delta = (Id_X, Id_X)$ tenemos que

$$f = \pi_1 \Delta f = \pi_1(\alpha, \beta) = \alpha$$

$$\text{y} \quad f = \pi_2 \Delta f = \pi_2(\alpha, \beta) = \beta$$

por lo que $U \Vdash (\alpha = \beta)$ si de hecho el morfismo α es igual al morfismo β.

Las siguientes dos propiedades de la relación de forcing se siguen de la definición:

Monotonía: Si $U \Vdash \phi(\alpha)$, entonces, para cualquier morfismo $f : U' \to U$ en E, también se tiene $U' \Vdash \phi(\alpha \circ f)$.

Caracter local: Si $f : U' \to U$ es un epimorfismo y $U' \Vdash \phi(\alpha \circ f)$, entonces también $U \Vdash \phi(\alpha)$.

El comportamiento de la relación de forcing $\Vdash$ con respecto a los conectivos lógicos y a los cuantificadores es resumido en el siguiente teorema. (Por conveniencia, el teorema está formulado en términos de fórmula con una sola variable libre x de tipo X pero es sencillo generalizar a fórmulas con más variables libres.)

Teorema 1.14. *Sean $\phi(x)$ y $\psi(x)$ dos fórmulas con una variable libre x de tipo X y $\alpha : U \to X$ un elemento generalizado de X, entonces*

1. *$U \Vdash \phi(\alpha) \wedge \psi(\alpha)$ si y sólo si $U \Vdash \phi(\alpha)$ y $U \Vdash \psi(\alpha)$;*

2. *$U \Vdash \phi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ si y sólo si existen flechas $p : V \to U$ y $q : W \to U$ tales que el morfismo definido por su coproducto $p + q : V + W \twoheadrightarrow U$ es epi, y se dan ambos $V \Vdash \phi(\alpha p)$ y $W \Vdash \psi(\alpha q)$;*

3. *$U \Vdash \big(\phi(\alpha) \Rightarrow \psi(\alpha)\big)$ si y sólo si para cada objeto V y para cada morfismo $p : V \to U$ siempre que $V \Vdash \phi(\alpha p)$ se tiene también que $V \Vdash \psi(\alpha p)$;*

4. *$U \Vdash \neg\phi(\alpha)$ si y sólo si para cada morfismo $p : V \to U$, si $V \Vdash \phi(\alpha p)$ entonces $V \cong 0$.*

   Para los cuantificadores, consideremos una fórmula $\phi(x, y)$ con una variable libre adicional "y" de tipo Y.

5. *$U \Vdash \exists y \phi(\alpha, y)$ si y sólo si existe un epimorfismo $p : V \twoheadrightarrow U$ y un elemento generalizado $\beta : V \to Y$ tal que $V \Vdash \phi(\alpha p, \beta)$;*

6. *$U \Vdash \forall y \phi(\alpha, y)$ si y sólo si para todo morfismo $p : V \to U$ y todo elemento generalizado $\beta : V \to Y$, uno tiene que $V \Vdash \phi(\alpha p, \beta)$.*

   Para el cuantificador universal, se tiene también

7. *$U \Vdash \forall y \phi(\alpha, y)$ si y sólo si $U \times Y \Vdash \phi(\alpha\pi_1, \pi_2)$ donde $\pi_1 : U \times Y \to U$ y $\pi_2 : U \times Y \to Y$ son las proyecciones.*

   Esta última cláusula fortalece a 6, por esta razón, π_2 puede ser llamado un "elemento genérico" de tipo Y.

   Antes se dijo que una fórmula $\phi(x, y)$ es universalmente válida si y sólo si la interpretación
$$\forall x \forall y \phi(x, y) : 1 \to \Omega$$
   es el morfismo verdad $: 1 \to \Omega$. En efecto, de 6 podemos concluir

8. *$\phi(x, y)$ es universalmente válida si y sólo si $1 \Vdash \forall x \forall y \phi(x, y)$.*

   Note que la cláusula 2 incorpora la regla intuicionista para la disyunción.

Demostración. Para *1*, Si las fórmulas $\phi(x) : X \to \Omega$ y $\psi(x) \to \Omega$ clasifican a $\{x \mid \phi(x)\} \rightarrowtail X$ y a $\{x \mid \psi(x)\} \rightarrowtail X$ respectivamente, entonces por la definición de $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ tenemos que su ínfimo
$$\{x \mid \phi(x)\} \bigcap \{x \mid \psi(x)\} \rightarrowtail X$$
está clasificado por $\wedge \circ (\phi(x), \psi(x))$ que por definición es $\phi(x) \wedge \psi(x)$. En otras palabras, tenemos el producto fibrado
$$\begin{tikzcd}
\{x \mid \phi(x) \wedge \psi(x)\} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \{x \mid \phi(x)\} \arrow[d, tail] \\
\{x \mid \psi(x)\} \arrow[r, tail] & X,
\end{tikzcd}$$
por lo que $\alpha : U \to X$ se factoriza a través de $\phi(x) \wedge \psi(x)$ si y sólo si lo hace a través de las esquinas del producto fibrado $\phi(x)$ y $\psi(x)$.

Para *2*, recordemos que $\phi(x) \vee \psi(x)$ clasifica al supremo de $\{x \mid \phi(x)\}$ y $\{x \mid \psi(x)\}$ entonces, por definición tenemos
$$\{x \mid \phi(x)\} + \{x \mid \psi(x)\} \twoheadrightarrow \{x \mid \phi(x) \vee \psi(x)\} \rightarrowtail X.$$

Supongamos que $p : V \to U$ y $q : W \to U$ son de tal forma que αp y αq se factorizan a través de $\phi(x)$ y $\psi(x)$ respectivamente y que $p + q : V + W \to U$ es un epimorfismo. Entonces, $\alpha(p + q) = (\alpha p + \alpha q)$ se factoriza a través de $\phi(x) + \psi(x)$ y por lo tanto a través de $\phi(x) \vee \psi(x)$, es decir
$$V + W \Vdash \big(\phi(\alpha(p + q)) \vee \psi(\alpha(p + q))\big),$$
luego, usando la propiedad del caracter local de la relación de forcing, como $p + q$ es epi, tenemos que $U \Vdash \big(\phi(\alpha) \vee \psi(\alpha)\big)$.

El regreso se sigue inmediatamente de la propiedad de monotonía de la relación de forcing.

Para *3*, primero supongamos que $U \Vdash \phi(\alpha) \Rightarrow \psi(\alpha)$ y tomemos a $p : V \to U$ tal que αp se factoriza a través de $\{x \mid \phi(x)\}$. Como también se factoriza a través de $\{x \mid \phi(x) \Rightarrow \psi(x)\}$ (pues α lo hace) y por la definición de la implicación $(b \Rightarrow c) \wedge b \leqslant c$, se sigue que αp también se factoriza a través de $\{x \mid \psi(x)\}$.

Conversamente, sea M la imagen de $\alpha : U \to X$, consideremos al producto fibrado de $\{x \mid \phi(x)\} \rightarrowtail X$ a lo largo de α como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "p"'] & M \cap \{x \mid \phi(x)\} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \{x \mid \phi(x)\} \arrow[d, tail] \\
U \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & M \arrow[r, tail] & X.
\end{tikzcd}$$

Esto determina un objeto V y un morfismo $p : V \to U$ tal que $V \Vdash \phi(\alpha p)$. Por hipótesis $V \Vdash \psi(\alpha p)$, pero por el diagrama, la imagen de αp es $M \cap \{x|\phi(x)\}$ por lo que, por definición de forcing y de imagen

$$M \cap \{x \mid \phi(x)\} \leqslant \{x \mid \psi(x)\}.$$

Pero por definición de la implicación, obtenemos que $M \leqslant \{x \mid \phi(x) \Rightarrow \psi(x)\}$ por lo que, al ser M imagen de α y por definición de forcing, tenemos que $U \Vdash \phi(\alpha) \Rightarrow \psi(\alpha)$.

Para *4*, como $\neg\phi(x)$ es $\phi(x) \Rightarrow 0$ por definición, entonces por el inciso anterior, $U \Vdash \neg\phi(x)$ si y sólo si para cada $V \xrightarrow{p} U$, si $V \Vdash \phi(\alpha p)$ entonces $V \Vdash 0(\alpha p)$ pero esto último pasa si y sólo si $V \cong 0$ pues implicaría que $Im(\alpha p) \leqslant 0$ pero el único subobjeto del objeto inicial 0 es él mismo, por lo que $Im(\alpha p) = 0$ y así $V \cong 0$.

Para *5* tenemos, de la definición de $\exists_p$, al cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\{(x,y) \mid \phi(x,y)\} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & X \times Y \arrow[d, "\pi_1"] \\
\{x \mid \exists y \phi(x,y)\} \arrow[r, tail] & X.
\end{tikzcd}$$

Supongamos primero que $\alpha : U \to X$ es tal que $U \Vdash \exists y \phi(\alpha, y)$; esto significa que α se factoriza a través de $\{x \mid \exists y \phi(x,y)\}$ consideremos entonces al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dashed] \arrow[d, two heads, "p"'] & \{(x,y) \mid \phi(x,y)\} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & X \times Y \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & Y \\
U \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & \{x \mid \exists y \phi(x,y)\} \arrow[r, tail] & X &
\end{tikzcd}$$

donde V es el producto fibrado. Como el producto fibrado preserva epimorfismos en un topos, entonces $p : V \to U$ es epi. La composición de las flechas de arriba con π_2 nos dan un objeto generalizado $\beta : V \to Y$, mientras que al componerlas con π_1 obtenemos αp, juntas proveen la factorización de $(\alpha p, \beta)$ a través de $\{(x,y) \mid \phi(x,y)\}$ de donde, por la definición de forcing, obtenemos $V \Vdash \phi(\alpha p, \beta)$.

Conversamente, supongamos que tenemos un epi $p : V \to U$ y un objeto generalizado $\beta : V \to Y$ tales que $V \Vdash \phi(\alpha p, \beta)$ es decir, $(\alpha p, \beta)$ se factoriza a través de $\{(x,y) \mid \phi(x,y)\}$ con lo que la imagen de αp está contenida en la imagen de

$$\{(x,y) \mid \phi(x,y)\} \rightarrowtail X \times Y \xrightarrow{\pi_1} X$$

pero por el diagrama anterior (correspondiente a la definición de $\exists_p$) esta imagen es

$$\{x \mid \exists y \phi(x,y)\} \rightarrowtail X.$$

Además como p es epimorfismo, la imagen de α está contenida en la imagen de αp de donde $Im(\alpha) \leqslant \{x \mid \exists y \phi(x,y)\}$ es decir, $U \Vdash \exists y \phi(\alpha, y)$.

Finalmente, para *6* y *7* notemos que los lados derechos de ambos puntos son equivalentes. Claramente el lado derecho de *6* implica al de *7* al ser un caso particular. Conversamente, si $U \times Y \Vdash \phi(\alpha\pi_1, \pi_2)$, es decir, que $\alpha \times 1 : U \times Y \to X \times Y$ se factoriza a través de $\{(x,y) \mid \phi(x,y)\}$. Entonces, para cada $p : V \to U$ y $\beta : V \to Y$, tenemos que $(\alpha p, \beta) = (\alpha \times 1) \circ (p, \beta)$; de donde $(\alpha p, \beta)$ se factoriza a través de $\{(x,y) \mid \phi(x,y)\}$ pues $(\alpha \times 1)$ lo hace.

Es suficiente entonces probar la equivalencia de *7*. Por definición

$$\{x, \mid \forall \phi(x,y)\} = \forall_\pi \{(x,y) \mid \phi(x,y)\},$$

donde π es la proyección y

$$\forall_\pi : Sub(X \times Y) \to Sub(X)$$

es el adjunto derecho de hacer producto fibrado a lo largo de π. Por esta adjunción, uno tiene que para cualquier subobjeto $A \rightarrowtail X$ que $A \leqslant \{x \mid \forall y \phi(x,y)\}$ si y sólo si $A \times Y \leqslant \{(x,y) \mid \phi(x,y)\}$. Para cualquier elemento generalizado $\alpha : U \to X$ con imagen $Im(\alpha)$, el producto $\alpha \times 1_Y$ es el producto fibrado de α a lo largo de $\pi : X \times Y \to X$ y el producto fibrado en un topos preserva epis y monos. Entonces la imagen de $\alpha \times 1_Y$ es $Im(\alpha) \times Y$, mientras que por la definición de forcing

$$U \Vdash \forall y \phi(\alpha, y) \quad \text{si y sólo si} \quad Im(\alpha) \leqslant \{x \mid \forall y \phi(x,y)\}$$

y, por la adjunción anterior, si y sólo si

$$Im(\alpha) \times Y \leqslant \{(x,y) \mid \phi(x,y)\} \quad \text{si y sólo si} \quad U \times Y \Vdash \phi(\alpha\pi_1, \pi_2)$$

Esto prueba *7* lo cual concluye la demostración del teorema.

□

Antes de concluir con esta sección, veamos como ejemplo del uso del lenguaje de Mitchell-Bénabou y la semántica de Kripke-Joyal la demostración de que todo topos $\mathcal{E}$ siempre tiene exponenciales, y por lo tanto, es una categoría cartesiana cerrada.

Teorema 1.15. *Todo topos tiene exponenciales*

Demostración. Para construir al objeto exponencial C^B, consideremos a la fórmula con fuente la potencia $\phi(f) : P(B \times C) \to \Omega$ definida como

$$\big(\forall b \exists c \big((b, c) \in f\big)\big) \wedge \big(\forall b \forall c \forall c' \big(\big((b, c) \in f \wedge (b, c') \in f\big) \Rightarrow (c = c')\big)\big)$$

donde b es una variable de tipo B y tanto c como c' son variables de tipo C.

Esta fórmula genera a un subobjeto $\{\ f \ \mid\ \phi(f)\ \}$ de $P(B \times C)$ al que llamaremos C^B. Para ver que este objeto es realmente el objeto exponencial en $\mathcal{E}$, basta probar que tenemos una biyección natural

$$Hom_{\mathcal{E}}(A \times B, C) \cong \mathcal{E}(A, C^B)$$

para todo objeto A de $\mathcal{E}$.

Se tiene, para comenzar, que cualquier morfismo $A \to C^B$ está dado por uno $\alpha : A \to P(B \times C)$ tal que $A \Vdash \phi(\alpha)$. Según la primera cláusula del teorema anterior, esto pasará si y sólo si

$$A \Vdash \forall b \exists c \big((b, c) \in \alpha\big) \quad \text{y}$$

$$A \Vdash \forall b \forall c \forall c' \Big(\big((b, c) \in f \wedge (b, c') \in f\big) \Rightarrow (c = c')\Big).$$

Utilizando ahora las cláusulas *5* y *7*, estas últimas son equivalentes a

1. Existe un epimorfismo $p : V \twoheadrightarrow A \times B$ y un objeto generalizado $\beta : V \to C$ tales que
$$V \Vdash \big((\pi_2 p, \beta) \in \alpha \pi_1 p\big)$$
y
2. $A \times B \times C \times C \Vdash \Big(\big((\pi_2, \pi_3) \in \alpha\pi_1 \wedge (\pi_2, \pi_4) \in \alpha\pi_1\big) \Rightarrow (\pi_3 = \pi_4)\Big).$

Más explícitamente, usando la cláusula *3*, estas condiciones se traducen como

1. Existen $p : V \twoheadrightarrow A \times B$ y $\beta : V \to C$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "{(\pi_2 p,\ \beta,\ \alpha\pi_1 p)}"'] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\ B \times C \times P(B \times C) \arrow[r, "\in_{B \times C}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$
y
2. Si $q : W \to A \times B \times C \times C$ es un morfismo que hace conmutar a ambos cuadrados
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, shift right, "{(\pi_2 q,\ \pi_3 q,\ \alpha\pi_1 q)}"'] \arrow[d, shift left, "{(\pi_2 q,\ \pi_4 q,\ \alpha\pi_1 q)}"] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\ B \times C \times P(B \times C) \arrow[r, "\in_{B \times C}"'] & \Omega, \end{tikzcd}$$
entonces $\pi_3 q = \pi_4 q$.

Supongamos primero que tenemos un morfismo $f : A \times B \to C$, tenemos entonces al subobjeto $(\pi_2, f, \pi_1) : A \times B \rightarrowtail B \times C \times A$, que es un monomorfismo al incluir a las proyecciones. Consideremos entonces a la característica de este subobjeto $\psi : A \times B \times C \to \Omega$ y luego a su P-transpuesta $\alpha : A \to P(B \times C)$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "verdad"] & \Omega \arrow[r, equal] & \Omega \\
A \times B \arrow[u] \arrow[r, tail, "{(\pi_2,f,\pi_1)}"'] & B \times C \times A \arrow[u, "\psi"'] \arrow[r, "{(\pi_1,\pi_2,\alpha)}"'] & B \times C \times P(B \times C). \arrow[u, "\in_{B\times C}"']
\end{tikzcd}$$

Basta probar que $\alpha : A \to P(B \times C)$ cumple con las anteriores condiciones, *1* y *2* de antes para así factorizarla a través del morfismo $A \to C^B$ buscado.

En efecto, para *1* consideremos a $V = A \times B$, a p como el morfismo identidad $Id : A \times B \twoheadrightarrow A \times B$ y a β como $f : A \times B \to C$. Podemos notar que el morfismo $(\pi_2 p, \beta, \alpha\pi_1 p)$ es entonces

$$(\pi_2, f, \alpha\pi_1) = (\pi_1, \pi_2, \alpha) \circ (\pi_2, f, \pi_1),$$

que, por el diagrama anterior, al componérsele con $\epsilon_{B\times C}$ hace conmutar al diagrama de la propiedad *1*.

Por otro lado, para *2*, supongamos que tenemos a un morfismo $q : W \to A \times B \times C \times C$ que hace conmutar los cuadrados de la condición *2*. Note como antes que

$$(\pi_2 q, \pi_i q, \alpha\pi_1 q) = (\pi_1, \pi_2, \alpha) \circ (\pi_2 q, \pi_i q, \pi_1 q)$$

para $i \in \{3, 4\}$. Pero $\epsilon_{B\times C} \circ (\pi_1, \pi_2, \alpha) = \psi : B \times C \times A \to \Omega$ por la definición de α. Se tienen a los cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, shift right, "{(\pi_2 q,\ \pi_3 q,\ \pi_1 q)}"'] \arrow[d, shift left, "{(\pi_2 q,\ \pi_4 q,\ \pi_1 q)}"] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\
B \times C \times A \arrow[r, "\psi"'] & \Omega,
\end{tikzcd}$$

pero como ψ es la característica de $(\pi_2, f, \pi_1) : A \times B \rightarrowtail A \times B \times C$, por el producto fibrado con el que definimos a ψ, tenemos dos morfismos $g_1, g_2 : W \to A \times B$ tales que

$$(\pi_2, f, \pi_1) \circ g_1 = (\pi_2 q, \pi_3 q, \pi_1 q)$$

$$\text{y} \quad (\pi_2, f, \pi_1) \circ g_2 = (\pi_2 q, \pi_4 q, \pi_1 q)$$

por lo tanto $g_1\pi_1 = \pi_1 q = g_2\pi_1$ y $g_1\pi_2 = \pi_2 q = g_2\pi_2$, es decir g_1 y g_2 coinciden en ambas proyecciones, por lo que deben ser iguales. En particular, $\pi_3 q = f g_1 = f g_2 = \pi_4 q$ como se requería.

Como $\alpha : A \to P(B \times C)$ cumple ambas condiciones, entonces se factoriza a través de un morfismo $A \to C^B$.

Conversamente, sea un morfismo $A \to C^B$. Por definición, este debe estar inducido por un objeto generalizado $\alpha : A \to P(B \times C)$ que cumple las condiciones *1* y *2* de antes. Definimos entonces al morfismo

$$\psi : B \times C \times A \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2, \alpha)} B \times C \times P(B \times C) \xrightarrow{\in_{B\times C}} \Omega$$

ψ define a un subobjeto de $B \times C \times A$ con el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, tail, "s"'] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\ B \times C \times A \arrow[r, "\psi"'] & \Omega, \end{tikzcd}$$

Para que esta construcción se ajuste a lo que hicimos anteriormente, nos gustaría probar que

$$S \xrightarrow{s} B \times C \times A \xrightarrow{(\pi_3, \pi_1)} A \times B$$

es un isomorfismo.

Para esto, tenemos que, por la condición *1*, existe un epimorfismo $p : V \twoheadrightarrow A \times B$ y un objeto generalizado $\beta : V \to C$ tal que

$$(\pi_2 p, \beta, \pi_1 p) : V \to B \times C \times A$$

se factoriza a través de $s : S \rightarrowtail B \times C \times A$ por ser el producto fibrado anterior. Pero entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed] \arrow[d, two heads, "p"'] \arrow[dr, "(\pi_2 p, \beta, \pi_1 p)"] & S \arrow[d, tail, "s"] \\ A \times B & B \times C \times A, \arrow[l, "(\pi_3, \pi_1)"] \end{tikzcd}$$

de donde $V \to S \xrightarrow{(\pi_3,\pi_1)\circ s} B \times C \times A$ es igual a $p : V \twoheadrightarrow A \times B$ que es un epimorfismo, por lo tanto $S \xrightarrow{(\pi_3,\pi_1)\circ s} B \times C \times A$ es un epimorfismo.

Para probar que también es un monomorfismo, sean dos morfismos $g_1, g_2 : W \to S$ tales que $(\pi_3, \pi_1) \circ s \circ g_1 = (\pi_3, \pi_1) \circ s \circ g_2$ se pretende probar que $g_1 = g_2$. consideremos al morfismo $q : W \to A \times B \times C \times C$ definido como

$$(\pi_3 s g_2, \pi_1 s g_2, \pi_2 s g_1, \pi_2 s g_2) : W \to A \times B \times C \times C$$

que es igual a

$$(\pi_3 s g_1, \pi_1 s g_1, \pi_2 s g_1, \pi_2 s g_2) : W \to A \times B \times C \times C.$$

De aquí que $(\pi_2 q, \pi_3 q, \pi_1 q) = s \circ g_1$ y $(\pi_2 q, \pi_4 q, \pi_1 q) = s \circ g_2$, por lo que q hace conmutar a ambos cuadrados de la condición *2*. Pero como α hace verdadera a esta condición (por hipótesis), entonces concluimos que $\pi_3 q = \pi_4 q$ pero esto es $\pi_2 s g_1 = \pi_2 s g_2$, de aquí que sg_1 coincide con sg_2 en todas las proyecciones por lo que necesariamente $sg_1 = sg_2$ pero como s es un monomorfismo, concluimos que $g_1 = g_2$. En efecto $(\pi_3, \pi_1) \circ s$ es mono.

Tenemos entonces que $(\pi_3, \pi_1) \circ s : S \to A \times B$ es mono y epi, pero en un topos esto es equivalente a que sea un isomorfismo, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S = A \times B$. En este caso, por la construcción del isomorfismo, tendremos que

$$s = (\pi_2, \pi_C \circ s, \pi_1) : A \times B \to B \times C \times A$$

el cual resulta en el morfismo requerido $f = \pi_C \circ s : A \times B \to C$.

Debe ser claro por la construcción de estas asignaciones que son inversas y naturales. Esto nos da nuestro isomorfismo natural $\mathcal{E}(A \times B, C) \cong \mathcal{E}(A, B^C)$ con lo que concluimos la demostración.

$\square$

Dado que tenemos objetos exponenciales, podemos definir ahora un morfismo que representará a la evaluación $f(\alpha)$ de un objeto $\alpha : U \to X$ bajo un objeto generalizado $f : V \to Y^X$. Tenemos que $\mathcal{E}(Y^X, Y^X) \cong \mathcal{E}(Y^X \times X, Y)$ por lo que de la identidad $Y^X \to Y^X$, obtenemos un morfismo $e_{Y^X} : Y^X \times X \to Y$ al que llamamos la *evaluación* de Y^X.

Agregamos entonces a nuestra definición del lenguaje de Mitchell-Bénabou al término $f(\alpha)$ definido como

$$f(\alpha) : V \times U \xrightarrow{(f,\alpha)} Y^X \times X \xrightarrow{e_{Y^X}} Y$$

donde $\alpha : U \to X$ es un término de tipo X y $f : V \to Y^X$ es un objeto generalizado de Y^X.

Capítulo 2

Topología y Topos de Grothendieck

En este capítulo definimos lo que es una *topología de Grothendieck* sobre una categoría pequeña y definimos a la *categoría de gavillas* sobre un *sitio* y probamos que es de hecho un topos; un topos así es llamado un *topos de Grothendiek*.

Este concepto es muy importante historicamente pues los topos de Grothendieck dieron pie a la definición general de topos elemental. Además de que gracias a ellos podremos construir una gran cantidad de ejemplos que son relevantes para las matemáticas en general, esta noción será muy útil más adelante para la construcción del *topos clasificante* de una teoría geométrica, que resulta ser un topos de Grothendieck.

Además, abordaremos el concepto de *base para una topología de Grothendieck*, el cual es muy útil para construir una topología; además daremos algunos ejemplos.

2.1. Topologías de Grothendieck

Definición 2.1. Una *criba* R sobre un objeto U de una categoría $\boldsymbol{C}$ localmente pequeña es un subfuntor de el funtor de Yoneda

$$\boldsymbol{y}(U) = Hom_{\boldsymbol{C}}(\ \_\ , U) : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Con}.$$

En otras palabras, $R(V)$ es un conjunto de morfismos $V \to U$ para todo objeto $V \in \boldsymbol{C}$ y R es cerrado hacia abajo, es decir, si $f : V' \to V$ es un morfismo de $\boldsymbol{C}$ y $g : V \to U$ está en $R(V)$, entonces $g \circ f : V' \to U$ está en $R(V')$

Definición 2.2. Una *topología de Grothendieck* J sobre una categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ es una asignación que a cada U de $\boldsymbol{C}$ le asigna un conjunto $J(U)$ de cribas sobre U, llamadas las "cribas cubrientes" de J, tales que:

1. La *criba máxima* $\boldsymbol{y}(U) = t_U$ es elemento de $J(U)$.

2. *(Axioma de estabilidad)* Si R es una criba de $J(U)$ y $f : V \to U$ es un morfismo de $\boldsymbol{C}$, entonces el *producto fibrado* de R a lo largo de f, definido puntualmente como

$$f^*R(W) = \{g : W \to V \mid f \circ g \in R(W)\}$$

   es una criba de $J(V)$.

3. *(Axioma de transitividad)* Si R es una criba de $J(U)$ y S es una criba sobre U tal que $f^*S \in J(V)$ para todo objeto V de $\boldsymbol{C}$ y todo morfismo $f : V \to U$ de $R(V)$, entonces, de hecho S es una criba de $J(U)$.

Normalmente, para abreviar, se denota a una criba simplemente como la colección de todos los morfismos que la conforman, por ejemplo la criba máxima de un objeto U es $t_U = \{f \mid$ el codominio de f es $U\}$. Así mismo, dada una criba R sobre el objeto U, se denota $R = \{f : V \to U \mid V \in \boldsymbol{C}$ y $f \in R(V)\}$.

Si $S \in J(U)$, cualquier criba R sobre U mayor que S (es decir, si $S \subseteq R$) también pertenece a $J(U)$. En efecto, sea $h : V \to U$ con $h \in S$, entonces $Id_V \in h^*(S)$, por lo que $h^*(S)$ es la criba máxima sobre V. Como $h^*(S) \subseteq h^*(R)$, $h^*(R)$ debe también ser la criba máxima sobre V, de donde $h^*(R) \in J(V)$. Debido a que lo anterior ocurra para toda $h \in S$, se sigue del axioma de transitividad que $R \in J(U)$.

Con esta observación, el axioma de transitividad tiene la siguiente consecuencia:

3'. Si $S \in J(U)$ y para cada $f : D_f \to U$ (donde D_f simplemente denota al dominio de f) en S hay una criba $R_f \in J(D_f)$, entonces la criba formada por todas las composiciones $f \circ g$, con $f \in S$ y $g \in R_f$, está en $J(U)$.

Se le llama *sitio* la pareja $(\boldsymbol{C}, J)$ formada por una categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ y una topología de Grothendieck J sobre $\boldsymbol{C}$. Si $S \in J(U)$, uno dice que S es una *criba cubriente*, o que S *cubre* a U (o, en caso de ambigüedad, que S J-*cubre* a U).

También decimos que una criba S sobre U *cubre a una flecha* $f : D_f \to U$ si $f^*(S)$ cubre a D_f. (Por lo que S cubre a U si y sólo si cubre a la flecha identidad de U.) En este lenguaje, los axiomas de topología de Grothendieck pueden ser formulados como sigue (*en forma de flechas*):

1a. Si S es una criba sobre U y $f \in S$, entonces S cubre a f.

2a. *(Axioma de estabilidad)* Si S cubre a una flecha $f : V \to U$, entonces también cubre a la composición $f \circ g$, para cualquier flecha $g : V' \to V$.

3a. *(Axioma de transitividad)* Si S cubre a una flecha $f : V \to U$, y R es una criba sobre U que cubre a todas las flechas de S, entonces R cubre a f.

Las condiciones originales para topologías de Grothendieck se siguen fácilmente de estas *condiciones para flechas*, al considerar al morfismo identidad de U. Conversamente, uno directamente deriva las condiciones posteriores de las originales. Por ejemplo, para $3a$, supongamos que S cubre a la flecha $f : V \to U$, y que R cubre a todas las flechas en S. Por definición, esto significa que $f^*(S) \in J(V)$ y que $h^*(R) \in J(D_h)$ para toda $h \in S$. Entonces, para cada flecha $g : V' \to V$ en $f^*(S)$, tenemos que $f \circ g \in S$ y por lo tanto $g^*(f^*(R)) = (f \circ g)^*(R) \in J(V')$. Lo anterior ocurre para cualquier g, por lo que el axioma de transitividad original 3 implica que $f^*(R) \in J(D)$; es decir, R cubre a f.

Note que se sigue de los axiomas que cualesquiera dos cubiertas tienen un refinamiento común; de hecho, tenemos que

4. Si $R, S \in J(U)$, entonces $R \cap S \in J(U)$;

o en forma de flechas:

4a. Si ambas R y S cubren a $g : V \to U$, entonces $R \cap S$ cubre a g.

En efecto, si $f : V \to U$ es cualquier elemento de R, entonces $f^*(R \cap S) = f^*(S)$, pues $g \in f^*(R \cap S)$ si $f \circ g \in R \cap S$, pero $f \circ g$ siempre está en R, por lo que basta con que esté en S; además, por estabilidad tenemos que $f^*(R \cap S) = f^*(S) \in J(V)$. Por lo que, por transitividad, $R \cap S \in J(U)$. Esto prueba 4; $4a$ se prueba con igual facilidad.

Un espacio topológico con la noción usual de cubierta provee un ejemplo de sitio: El conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{O}(X)$ de subconjuntos abiertos de X puede ser visto como una categoría de la manera usual (con exactamente una flecha $V \to U$ si y sólo si $V \subseteq U$), de forma que una criba sobre U es simplemente una familia S de subconjuntos abiertos de U con la propiedad de que si $V' \subseteq V$ y $V \in S$, entonces $V' \in S$. Para definir a las cubiertas, tenemos que una flecha $f : W \to U$ es sólo un subconjunto abierto $W \subseteq U$, por lo que la criba S sobre U cubre a la flecha f si y sólo si W queda cubierto por los conjuntos abiertos en S. Esto motiva la "forma de flechas" de los axiomas para una topología de Grothendieck.

En el caso de un espacio topológico ordinario, usualmente se describe a una cubierta abierta de U como una familia $\{U_i \mid i \in I\}$ de subconjuntos abiertos de U con unión $\bigcup_{i \in I} U_i = U$; tal familia no es necesariamente una criba, pero sí genera a una: la colección de aquellos $V \subseteq U$ abiertos con $V \subseteq U_i$ para algún $i \in I$.

Será conveniente definir esta manera de generar una criba cubriente en el contexto más general de una categoría arbitraria con productos fibrados, en términos de la llamada *base* para una topología de Grothendieck.

Definición 2.3. Una *base* (para una topología de Grothendieck) sobre una categoría $\boldsymbol{C}$ con productos fibrados es una función K que asigna a cada objeto U una colección $K(U)$ consistente de familias de morfismos con codominio U (no necesariamente cribas), tal que

1'. Si $f : U' \to U$ es un isomorfismo, entonces el unitario $\{f : U' \to U\}$ es elemento de $K(U)$.

2'. Si $\{f_i : U_i \to U \mid i \in I\} \in K(U)$ y $g : V \to U$ es un morfismo de $\boldsymbol{C}$, entonces la familia de los productos fibrados de las f_i largo de g: $\{\pi_2^i : U_i \times_U V \to V \mid i \in I\}$ está en $K(V)$.

3'. Si $\{f_i : U_i \to U \mid i \in I\} \in K(U)$, y para cada $i \in I$ uno tiene una familia $\{g_{ij} : V_{ij} \to U_i \mid j \in J_i\} \in K(U_i)$, entonces la familia de composiciones $\{f_i \circ g_{ij} : V_{ij} \to U \mid i \in I, j \in J_i\}$ pertenece a $K(U)$.

La condición $2'$ es llamada de nuevo *axioma de estabilidad*, y $3'$ *axioma de transitividad*. El par $(\boldsymbol{C}, K)$ es también llamado *sitio* y los elementos R del conjunto $K(U)$ son llamadas *familias cubrientes* o *cubiertas* de U para este sitio.

Si K es una base sobre $\boldsymbol{C}$, entonces K *genera* a una topología J por

$$J(U) = \{S \mid S \text{ es una criba sobre } U \text{ y existe } R \in K(U) \text{ tal que } R \subseteq S\}$$

es decir, una criba es una J-cubierta si y sólo si contiene a una K-cubierta.

Esta definición en efecto genera una topología de Grothendieck J a partir de una base K:

La propiedad 1 se cumple, pues como para todo objeto U, $\{Id_U : U \to U\} \in K(U)$ por ser un isomorfismo y $\{Id_U\} \subseteq t_U$ la criba total, entonces $t_U \in J(U)$.

Para el axioma de estabilidad, consideremos a una criba $S \in J(U)$ y a un morfismo cualquiera $g : V \to U$, elegimos a cualquier $R \subseteq S$ con $R \in K(C)$ y sea $T \in K(V)$ la K-cubierta de V obtenida, como en $2'$, al hacerle producto fibrado a las flechas de K a lo largo de g; esto es, T consiste de todos los morfismos h que se acomodan en un diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
V \times_U U' \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & U' \arrow[d, "f"] \\
V \arrow[r, "g"] & U
\end{tikzcd}$$

para alguna flecha $f \in R$. Entonces $T \subseteq g^*(S)$, por lo que $g^*(S) \in J(V)$ según la definición.

Para el axioma de transitividad, consideremos a $R \in J(U)$ y a S una criba sobre U tal que para todo morfismo $f : D_f \to U$ de R, $f^*(S) \in J(D_f)$. Sean $\{f_i : U_i \to U \mid i \in I\} \subseteq R$ y $\{g_{ij} : V_{ij} \to U_i \mid j \in J_i\} \subseteq f_i^*(S)$ K-cubiertas que existen por la definición de J, entonces tenemos que $\{f_i \circ g_{ij} : V_{ij} \to U \mid i \in I, j \in J_i\} \subseteq S$. Debido a $3'$, la anterior es una K-cubierta de U, por lo que $S \in J(U)$.

Dada una cubierta R de $U \in \boldsymbol{C}$ en una base K, existe una criba "canónica" generada por R, definida como el conjunto de morfismos de $\boldsymbol{C}$ que se factorizan a través de algúna flecha de R:

$$(R) = \{W \xrightarrow{h} D_f \xrightarrow{f} U \mid f \in R\}.$$

2.2. Gavillas

Ahora introducimos la definición de gavilla sobre un sitio $(\boldsymbol{C}, J)$, concepto que será muy útil para la construcción de diversos topos de nuestro interés.

Definición 2.4. Una *gavilla* sobre un sitio $(\boldsymbol{C}, J)$ es un funtor $F : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Con}$ tal que para todo objeto U de $\boldsymbol{C}$ y para toda criba R de $J(U)$, toda transformación natural $R \to F$ tiene una única extensión a una transformasión natural

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{y}(U) \arrow[r, dashed] & F \\ R \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

de $\boldsymbol{y}(U)$ a F. Denotamos por $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ a la categoría cuyos objetos son todas las gavillas sobre el sitio $(\boldsymbol{C}, J)$ y cuyos morfismos son todas las transformaciones naturales que existen entre ellas.

Para una criba R de $J(U)$ y $F : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Con}$ un funtor, una transformación natural $\gamma : R \to F$ le asigna a cada objeto V un morfismo $\gamma_V : R(V) \to F(V)$. Si para cada morfismo $f : V \to U$ de $R(V)$, denotamos como x_f a $\gamma_V(f) \in F(V)$ entonces, por la naturalidad de γ, si $g : W \to V$ es otro morfismo de $\boldsymbol{C}$ tendremos que $Fg(x_f) = x_{f\circ g}$.

Así, γ induce una familia

$$\{x_f \mid V \in \boldsymbol{C},\ x_f \in F(V),\ f \in R(V)\}$$

tal que $Fg(x_f) = x_{f\circ g}$ para cada morfismo $g : W \to V$ y cada $f : V \to U$ de $R(V)$. A una familia que cumpla con la propiedad anterior le llamamos *familia compatible*.

Análogamente, cada familia compatible $\{x_f \mid V \in \boldsymbol{C}, x_f \in F(V), f \in R(V)\}$ define una transformación natural $\gamma : R \to F$ tal que $\gamma_V(f) = x_f$.

El hecho de que $\gamma : R \to F$ se extienda a una transformación $\boldsymbol{y}(U) \to F$ es equivalente a que exista una familia compatible

$$\{x_f \mid V \in \boldsymbol{C},\ x_f \in F(V),\ f \in \boldsymbol{y}(V)\}$$

que extienda a la familia dada por γ. Como $Id : U \to U$ está en $\boldsymbol{y}(U)$, tendremos un objeto $x_{Id} \in F(U)$ tal que para cada $f : V \to U$, $x_f = x_{Id\circ f} = Ff(x_{Id})$.

Este objeto x_{Id} caracteriza completamente a la familia compatible $\{x_f \mid V \in \boldsymbol{C}, x_f \in F(V), f \in \boldsymbol{y}(V)\}$, por lo que la familia dada por γ se extenderá a una dada por una transformación $\boldsymbol{y}(U) \to F$ si y sólo si existe un objeto $x \in F(U)$ tal que para cada $V \in \boldsymbol{C}$ y cada $f \in R(V)$ $Ff(x) = x_f$. A un objeto así le llamamos una *amalgamación* de la familia compatible.

Tenemos entonces la siguiente caracterización:

Definición 2.5. Un funtor $F : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Con}$ es una *gavilla* sobre el sitio $(\boldsymbol{C}, J)$ si y sólo si para toda criba R de $J(U)$, toda familia compatible

$$\{x_f \mid V \in \boldsymbol{C},\ x_f \in F(V),\ f \in R(V)\}$$

tiene una única amalgamación.

Ahora, sea K una base para la topología J sobre una categoría $\boldsymbol{C}$ con productos fibrados. Las gavillas para J pueden ser descritas puramente en términos de la base K como sigue. Si $R = \{f_i : U_i \to U \mid i \in I\}$ es una K-cubierta de un objeto U, una familia de elementos $x_i \in F(U_i)$ $(i \in I)$ es llamada una familia compatible para R si

$$F\pi_{ij}^1(x_i) = F\pi_{ij}^2(x_j), \text{ para todo } i, j \in I$$

donde π_{ij}^1 y π_{ij}^2 son las proyecciones del producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
U_i \times_U U_j \arrow[r, "\pi_{ij}^1"] \arrow[d, "\pi_{ij}^2"'] & U_i \arrow[d, "f_j"] \\
U_j \arrow[r, "f_j"'] & U.
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Una amalgamación para $\{x_i | i \in I\}$ es un elemento $x \in F(U)$ tal que $Ff_i(x) = x_i$ para toda $i \in I$.

Proposición 2.6. *Sea F una pregavilla sobre $\boldsymbol{C}$ (un funtor $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ contravariante), entonces F es una gavilla para J (la topología generada por K) si y sólo si para toda familia cubriente $\{f_i : U_i \to U \mid i \in I\}$ en la base K, cualquier familia compatible $\{x_i\}_{i \in I}$ tiene una única amalgamación.*

Demostración. Primero supongamos que F es una gavilla para J. Sean $R = \{f_i : U_i \to U \mid i \in I\} \in K(U)$ una cubierta en la base K y $\{x_i \mid i \in I\}$ una familia compatible para la cubierta R. consideremos a la criba

$$S = (R) = \{g : V \to U \mid g = V \xrightarrow{h} U_i \xrightarrow{f_i} U \text{ para alguna } i \in I \text{ y una flecha } h\ \}$$

generada por R y definamos a la familia compatible $\{y_g \mid g \in S\}$ dada por

$$y_g = Fh(x_i)$$

donde h es cualquier morfismo tal que $g = f_i \circ h$. Esto no depende de la elección de i ni de h, pues si $f_i \circ h = g = f_j \circ k$, entonces usando la propiedad universal del producto fibrado tenemos un morfismo $l : V \to U_i \times_U U_J$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed, "l"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
& U_i \times_U U_j \arrow[r, "\pi_{ij}^1"] \arrow[d, "\pi_{ij}^2"'] & U_i \arrow[d, "f_i"] \\
& U_j \arrow[r, "f_j"'] & U.
\end{tikzcd}$$

Por lo que

$$Fh(x_i) = Fl(F\pi_{ij}^1(x_i)) = Fl(F\pi_{ij}^2(x_j)) = Fk(x_j)$$

(la igualdad de enmedio se da porque $\{x_i\}_{i\in I}$ es una familia compatible para R). Así, existe una única amalgamación $y \in F(U)$ con $Fg(y) = y_g$ para toda $g \in (R)$ pues F es una gavilla para J. En particular, como $R \subseteq (R)$,

$$Ff_i(y) = y_{f_i} = FId(x_i) = x_i,$$

entonces y es también una amalgamación para $\{x_i\}_{i\in I}$. Más aún, una amalgamación para $\{x_i\}_{i\in I}$ es única, pues si y' es otro elemento de $F(U)$ tal que $Ff_i(y') = x_i$, entonces para cualquier $g \in (R)$, digamos $g = f_i \circ h$, tenemos que

$$Fg(y') = Fh(Ff_i(y')) = Fh(x_i) = y_g,$$

así y' es también una amalgamación para la cubierta (R) y por lo tanto $y = y'$.

Supongamos ahora que cada familia compatible para cada K-cubierta tiene una única amalgamación. Sea $S \in J(U)$ una cubierta de U, entonces hay una $R \in K(U)$ contenida en S, y sea $\{y_g \mid g \in S\}$ una familia compatible para S. Claramente la subfamilia $\{y_f \mid f \in R\}$ es una familia compatible para R (en el sentido de familia compatible para una base), entonces hay una única $y \in F(U)$ con $Ff(y) = y_f$ para toda $f \in R$. Queda probar que $Fg(y) = y_g$ para toda $g \in S$. Para esto, tomemos a $g \in S$ y consideremos para $f \in R$ todos los productos fibrados

$$\begin{tikzcd} V \times_U U' \arrow[r, "\rho_{f,g}"] \arrow[d, "\pi_{f,g}"'] & U' \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "g"'] & U. \end{tikzcd}$$

Entonces $R' = \{\pi_{f,g} \mid f \in R\} \in K(V)$ por el axioma de estabilidad para bases, y además para cualquier $f \in R$,

$$\begin{aligned} F\pi_{f,g}(Fg(y)) &= F\rho_{f,g}(Ff(y)) && \text{(por el cuadrado)} \\ &= F\rho_{f,g}(y_f) && \text{(pues } f \in R) \\ &= y_{f\circ\rho_{f,g}} && \text{(pues } \{y_g \mid g \in S\} \text{ es compatible)} \\ &= y_{g\circ\pi_{f,g}} && \text{(por el cuadrado)} \\ &= F\pi_{f,g}(y_g) \end{aligned}$$

Ahora, si $f'' : U'' \to U$ también está en R, si consideramos al producto fibrado de $\pi_{f,g}$ a lo largo de $\pi_{f'',g}$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\pi^1"] \arrow[d, "\pi^2"'] & V \times_U U' \arrow[d, "\pi_{f,g}"] \\ V \times_U U'' \arrow[r, "\pi_{f'',g}"'] & V \end{tikzcd}$$

tenemos que $F\pi^1\big(F\pi_{f,g}(Fg(y))\big) = F\pi^2\big(F\pi_{f'',g}(Fg(y))\big)$ por la conmutatividad del cuadrado, de donde $\{F\pi_{f,g}(Fg(y)) \mid f \in R\}$ es una familia compatible para R', por lo que tiene una única amalgamación. Tanto $Fg(y)$ como y_g son amalgamaciones para esta familia, por lo que $Fg(y) = y_g$, lo que completa la prueba.

$\square$

El corolario siguiente es una reformulación de la proposición anterior.

Corolario 2.7. *Una pregavilla F sobre $\boldsymbol{C}$ es una gavilla sobre J si y sólo si para cualquier cubierta $\{f_i : U_i \to U \mid i \in I\} \in K(U)$ en la base, el diagrama*

$$F(U) \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)$$

es un igualador. Aquí $e(x) = \{Ff_i(x)\}_i$, y $p_1(\{x_i\})_{i,j} = F\pi^1_{ij}(x_i)$, mientras que $p_2(\{x_i\})_{i,j} = F\pi^2_{ij}(x_j)$, donde π^1_{ij} y π^2_{ij} son las proyecciones del producto fibrado correspondiente como en 2.1.

2.3. Topos de Grothendieck

A continuación probamos que la categoría de gavillas sobre un sitio es un topos. A un topos equivalente a una categoría de gavillas sobre un sitio se le llama *topos de Grothendieck*.

Teorema 2.8. *La categoría $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ de gavillas sobre un sitio $(\boldsymbol{C}, J)$ es un topos.*

Demostración. Dado un sitio arbitrario $(\boldsymbol{C}, J)$, probamos que $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ cumple los cuatro axiomas de un topos:

$Sh(\boldsymbol{C}, J)$ tiene todos los productos fibrados pues, dadas dos transformaciones naturales $f : G \to H$ y $f' : G' \to H$, con G, G' y H gavillas, podemos calcular su producto fibrado $G \times_H G'$ puntualmente, es decir, para cada objeto C de $\boldsymbol{C}$, $G \times_H G'(C) = G(C) \times_{H(C)} G'(C)$ donde $G(C) \times_{H(C)} G'(C)$ es el producto fibrado en conjuntos dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(C) \times_{H(C)} G'(C) \arrow[r, dashed, "g_C"] \arrow[d, dashed, "g'_C"'] & G(C) \arrow[d, "f_C"] \\
G'(C) \arrow[r, "f'_C"'] & H(C).
\end{tikzcd}$$

Las transformaciones naturales $g : G \times_H G' \to G$ y $g' : G \times_H G' \to G'$ se calculan también puntualmente como en cada producto fibrado y por lo mismo cumplen la propiedad universal deseada. Además, $G \times_H G'$ es una gavilla, pues si tenemos una transformación natural $r : R \to G \times_H G'$ con $R \in J(U)$, entonces

$gr : R \to G$ y $g'r : R \to G'$ son transformaciones naturales tales que $fgr = f'g'r$. Al ser G, G' y H gavillas, existen factorizaciones

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{y}(U) \arrow[r, dashed] & G \\ R \arrow[u, hook] \arrow[ur, "gr"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{y}(U) \arrow[r, dashed] & G' \\ R \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g'r"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{y}(U) \arrow[r, dashed] & H \\ R \arrow[u, hook] \arrow[ur, "fgr=f'g'r"'] \end{tikzcd}$$

las cuales se factorizan, por la propiedad universal del producto fibrado, a una $\boldsymbol{y}(U) \to G \times_H G'$ que hace la definición de gavilla.

De igual manera, calculamos al objeto terminal de manera puntual como:

$$1_{Sh(\boldsymbol{C},J)}(C) = \{*\}$$

para todo objeto C de $\boldsymbol{C}$, donde $\{*\}$ es el objeto terminal en conjuntos. En morfismos, $1_{Sh(\boldsymbol{C},J)}$ manda a cualquier flecha a la única función que hay de $\{*\}$ en si mismo. Claramente este es un objeto terminal y además, si R es una criba de $J(U)$, entonces existe una única transformación natural $!_R : R \to 1_{Sh(\boldsymbol{C},J)}$ y una única $!_{\boldsymbol{y}(U)} : \boldsymbol{y}(U) \to 1_{Sh(\boldsymbol{C},J)}$ por lo que el triángulo

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{y}(U) \arrow[r, "!_{\boldsymbol{y}(U)}"] & 1_{Sh(\boldsymbol{C},J)} \\ R \arrow[u, hook] \arrow[ur, "!_R"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo y así $1_{Sh(\boldsymbol{C},J)}$ es una gavilla.

Note que, de manera análoga, $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ tiene cualquier límite pequeño y cualquier colímite pequeño, calculados puntualmente. (Con "pequeño", aquí nos referimos a que está indexado sobre conjuntos.)

Definición 2.9. Decimos que S, una criba en $\boldsymbol{C}$ sobre un objeto V, es *J-cerrada* si para cualquier morfismo $f : W \to V$, tenemos que $f^*S \in J(W)$ implica que $f \in S(W)$.

Definimos ahora al clasificador de subobjetos como el funtor $\Omega_J : \boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Con}$ tal que

$$\Omega_J(V) = \{R \mid R \text{ es una criba } J\text{-cerrada sobre } V\} \text{ (para cada objeto } V \text{ en } \boldsymbol{C}),$$

$$\Omega_J f = f^* \text{ (para cada morfismo } f \text{ de } \boldsymbol{C}),$$

donde f^* denota al operador producto fibrado de cribas en $\boldsymbol{C}$ a lo largo de f.

Ω_J definido así es una gavilla: Si R está en $J(U)$ y

$$\{x_f \mid x_f \in \Omega_J(V),\ f \in R(V),\ V \in \boldsymbol{C}\}$$

es una familia compatible, tendremos que para cada $f \in R(V)$ y $g : W \to V$, $x_{f \circ g} = \Omega_J g(x_f) = g^* x_f$.

Definimos primero una $x \in \Omega_J(U)$ tal que

$$x = \{g \circ h : D_h \to U \mid h \in x_g,\ g \in R\}.$$

Esta criba x no tiene por qué ser cerrada, pero afirmamos que su cerradura $\overline{x}$ definida como

$$\overline{x} = \{f : D_f \to U \mid f^*x \in J(D_f)\}$$

es la amalgamación que buscamos. (Note que $x \subseteq \overline{x}$, pues si $f \in x$, entonces $f^*x = t_U \in J(U)$.)

La cerradura de una criba es la menor criba cerrada que la contiene. Además, $f^*x = x_f$ por la definición de f^*, de esta forma,

$$\begin{aligned} f^*\overline{x} &= \{g : D_g \to V \mid f \circ g \in \overline{x}\} \\ &= \{g : D_g \to V \mid (f \circ g)^*x \in J(D_g)\} \\ &= \{g : D_g \to V \mid g^*(f^*x) \in J(D_g)\} \\ &= \overline{f^*x} = \overline{x_f} \end{aligned}$$

Pero $\overline{x_f} = x_f$, por hipótesis sobre la cerradura de x_f, por lo que $\overline{x} \in \Omega(U)$ es en efecto una amalgamación.

Supongamos que $x, y \in \Omega_J(U)$ son dos amalgamaciones. Entonces, para toda $f \in R$, $f^*x = f^*y$ por lo que $x \cap R = y \cap R$, pues si $g \in x \cap R$, entonces $g^*(x \cap R) = t_U$, pero $g^*(x \cap R) = g^*x \cap g^*R = g^*y \cap g^*R = g^*(y \cap R)$, por lo que $g^*(y \cap R) = t_U$, y así $g \in y \cap R$.

Sea $f \in x$, entonces $f^*x \in J(D_f)$ y $f^*R \in J(D_f)$, pues R es una criba de $J(U)$, por lo que $f^*(x \cap R) \in J(D_f)$. Como $x \cap R = y \cap R \subseteq y$, entonces $f^*y \in J(D_f)$ y como y es cerrada, tenemos que $f \in y$. De esta forma, $x \subseteq y$ Analogamente, $y \subseteq x$ por lo que necesariamente $x = y$.

Así tenemos que Ω_J es efectivamente una gavilla.

Definimos ahora la flecha $1 \xrightarrow{verdad} \Omega_J$ tal que $verdad_U(*) = t_U$ es la criba máxima, que es cerrada. Veamos ahora que Ω_J con esta $1 \xrightarrow{verdad} \Omega_J$ es clasificador de subobjetos en la categoría $Sh(\boldsymbol{C}, J)$.

Sea F una gavilla y $A \subseteq F$ una subgavilla. Proponemos a la "transformación natural característica" $\chi : F \to \Omega_J$ de A, definida como

$$\chi_U(x) = \{f : D_f \to U \mid Ff(x) \in A(D_f)\}$$

donde $x \in F(U)$. Note que si $g : V \to U$ está en $\boldsymbol{C}$, tenemos que para toda $f : D_f \to V$

$$\begin{aligned} f \in \chi_V(Fg(x)) &\iff Ff \circ Fg(x) \in A(D_f) \\ &\iff F(gf)(x) \in A(D_f) \\ &\iff g \circ f \in \chi_U(x) \\ &\iff f \in g^*(\chi_U(x)) \end{aligned}$$

Por lo que χ es realmente una transformación natural. Verificamos ahora que el cuadrado en $Sh(\boldsymbol{C}, J)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!_A"] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, "verdad"] \\ F \arrow[r, "\chi"'] & \Omega_J \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Como los límites en gavillas son calculados puntualmente en conjuntos, este cuadrado es un producto fibrado cuando para toda $U \in \boldsymbol{C}$ y toda $x \in F(U)$, $x \in A(U)$ si y sólo si $\chi_U(x) = verdad_u(*) = t_U$.

Esto es así por la definición de χ, ya que $Id_U \in \chi_U(x)$ si y sólo si $x \in A(U)$ y $Id_U \in \chi_U(x)$ si y sólo si $\chi_U(x) = t_U$. Además, por la naturalidad de χ, para cualquier flecha $f : V \to U$ de $\boldsymbol{C}$, $f \in \chi_U(x)$ si y sólo si $Id_V \in f^*(\chi_U(x)) = \chi_V(Ff(x))$, si y sólo si $Ff(x) \in A(V)$. Por lo que χ es única.

Por último, sólo falta ver que cada objeto de $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ tiene un objeto potencia.

Probaremos más generalmente que si F es una gavilla y P es una pregavilla (cualquier funtor $P : \boldsymbol{C}^{OP} \to \boldsymbol{Con}$), entonces existe un objeto exponencial F^P que es también una gavilla. De esta forma, el objeto potencia de F es Ω^F.

Sea F una gavilla, considere al funtor $F^P : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ tal que para cada objeto $U \in \boldsymbol{C}$

$$F^P(U) = \{\tau : \boldsymbol{y}(U) \times P \to F \mid \tau \text{ es una transformación natural}\}.$$

Así, τ asigna a cualquier morfismo $g : V \to U$ y cualquier elemento $x \in P(V)$ un elemento $\tau(g, x) \in F(V)$. La naturalidad de τ afirma que para cualquier $h : W \to V$ de $\boldsymbol{C}$

$$\tau(g \circ h, Ph(x)) = Fh(\tau(g, x)).$$

Definimos, para cualquier flecha $f : V \to U$ a $F^P f$ tal que

$$F^P f(\tau)(g', x) = \tau(f \circ g', x),$$

para toda $\tau \in F^P(U)$, toda $g' : W \to V$ y toda $x \in P(W)$.

F^P es una gavilla: Sean $U \in \boldsymbol{C}$, $R \in J(U)$ y $R \to F^P$ una transformación natural, veamos primero que en caso de tener una amalgamación, esta es única.

Supongamos que τ y σ son transformaciones naturales tales que $F^P f(\tau) = F^P f(\sigma)$ para toda $f \in R$. Esto significa, por lo anterior, que $\tau(f \circ g', x) = \sigma(f \circ g', x)$ para toda g' y x como antes; en particular, si tomamos $g' = Id_{D_f}$, tenemos

$$\tau(f, x) = \sigma(f, x)$$

para toda f en R y toda $x \in P(D_f)$. Ahora, sea $k : V \to U$, para cada $g' \in k^* R$ (es decir, $k \circ g' \in R$) tenemos que

$$\begin{aligned} Fg'(\tau(k, x)) &= \tau(k \circ g', Pg'(x)) && \text{(naturalidad de } \tau) \\ &= \sigma(k \circ g', Pg'(x)) && \text{(pues } k \circ g' \in R) \\ &= Fg'(\sigma(k, x)) && \text{(naturalidad de } \sigma]. \end{aligned}$$

De esta forma, como k^*R está en $J(V)$ y F tiene amalgamaciones únicas por ser gavilla, se sigue que $\tau(k,x) = \sigma(k,x)$. Como k y x fueron arbitrarias, concluimos que $\tau = \sigma$. De esta forma, en caso de existir una amalgamación para alguna familia compatible, esta debe ser única.

Falta sólo probar que en efecto existe una amalgamación. Supongamos que R es una criba de $J(U)$ y que para cada morfismo $f : D_f \to U$ en R tenemos una transformación natural $\tau_f : \boldsymbol{y}(D_f) \times P \to F$ y supongamos que estas τ_f forman una familia compatible, es decir, $\tau_{f\circ g} = F^P g(\tau_f)$ para cada morfismo $g : V \to D_f$. Así, por definición de $F^P g(\tau_f)$, tenemos que

$$\tau_{f\circ g}(h,x) = F^P g(\tau_f)(h,x) = \tau_f(g\circ h, x)$$

para toda $h : W \to V$ y toda $x \in P(W)$.

Definamos primero una $\tau' : \boldsymbol{y}(U) \times P \to F^*$ (donde para cada $V \in \boldsymbol{C}$, $F^*(V)$ es el conjunto de las familias compatibles de F para cribas de $J(V)$). Para cada $k : V \to U$ y cada elemento $x \in P(V)$

$$\tau'(k,x) = \{\tau_{k\circ h}(Id, Ph(x)) \mid h \in k^*R\}.$$

Este conjunto es una familia compatible de F para la criba k^*R, pues si $h \in k^*R$, y m es cualquier morfismo tal que la composición $h \circ m$ está definida; entonces

$$\begin{aligned} Fm(\tau_{k\circ h}(Id, Ph(x))) &= \tau_{k\circ h}(m, Pm(Ph(x))) \\ &= \tau_{k\circ(h\circ m)}(Id, P(h\circ m)(x)). \end{aligned}$$

Luego, al ser F una gavilla, esta familia compatible $\tau'(k,x)$ tiene una única amalgamación en F. Definimos a $\tau : \boldsymbol{y}(U) \times P \to F$ tal que $\tau(k,x)$ es la amalgamación en F de la familia compatible $\tau'(k,x)$.

Por definición tenemos que si f está en R, entonces

$$F^P f(\tau)(k,x) = \tau(f\circ k, x),$$

la amalgamación en F de $\tau'(f\circ k, x)$. Pero $\tau_f(k,x)$ es también una amalgamación para la familia $\tau'(f\circ k,x)$, pues si $h \in k^*R$, entonces

$$Fh(\tau_f(k,x)) = \tau_f(k\circ h, Ph(x)) = \tau_{f\circ k\circ h}(Id, Ph(x)).$$

Debido a que esta amalgamación es única para F, se tiene que

$$F^P f(\tau)(k,x) = \tau_f(k,x)$$

para toda k y x, de donde $F^P f(\tau) = \tau_f$, así tenemos que τ es la amalgamación buscada.

Esto concluye la prueba de que $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ es un topos.

□

Dado de que una categoría de gavillas sobre una topología de Grothendieck es un topos, podemos obtener una buena cantidad ejemplos.

Ejemplo 2.10. Dada una categoría $\boldsymbol{C}$, la *topología indiscreta* I es aquella en la que, para todo $C \in \boldsymbol{C}$, $I(C) = \{t_C\}$ donde $t_C = \boldsymbol{y}(C)$ es la criba total. En el sitio $(\boldsymbol{C}, I)$, cualquier pregavilla (elemento de $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$) es también gavilla, por lo que $Sh(C, I) = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$. De aquí que cualquier categoría de pregavillas es un topos de Grothendieck.

En particular, como $\boldsymbol{Con} \cong \boldsymbol{Con}^{1^{OP}}$, entonces $\boldsymbol{Con}$ es un topos de Grothendieck.

Ejemplo 2.11. Otro ejemplo importante es el de la categoría de gavillas sobre un espacio topológico X. Por lo general una gavilla sobre un espacio topológico X se define como una pregavilla $F \in \boldsymbol{Con}^{\mathcal{O}(X)}$ tal que para todo subconjunto abierto U de X y toda cubierta abierta $\{U_i \mid i \in I\}$ de U, el diagrama

$$F(U) \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} F(U_i) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I} F(U_i \bigcap U_j)$$

es un igualador. Donde e es el producto de los morfismos restricción $F(U_i \subseteq U)$, mientras que p_1 y p_2 son respectivamente los productos de los dos conjuntos de restricciones $F(U_i \cap U_j \subseteq U_i)$ y $F(U_i \cap U_j \subseteq U_j)$.

Este es un caso particular de gavillas sobre un sitio, donde la topología de Grothendieck J para la categoría con productos fibrados $\mathcal{O}(X)$ es la generada por la base K tal que $K(U)$ es la familia de cubiertas de U en el sentido tradicional $\{U_i \subseteq U \mid \bigcup_i U_i = U\}$. Por el corolario 2.7 de la sección anterior, la descripción que acabamos de dar sobre gavillas sobre un espacio topológico X son justamente las gavillas sobre el sitio $(\mathcal{O}(X), J)$.

De aquí que la categoría de gavillas sobre un espacio topológico $Sh(X)$ en el sentido tradicional es un topos de Grothendieck.

Es conveniente notar que, dado un espacio topológico X, existe una correspondencia entre los subobjetos del objeto terminal 1 de $Sh(X)$ y los subconjuntos abiertos de X:

Teorema 2.12. *Si X es un espacio topológico, entonces existe una equivalencia de categorías*

$$\mathcal{O}(X) \cong Sub(1_{Sh(X)})$$

, donde $Sub(1_{Sh(X)})$ es visto como la categoría inducida por su orden parcial.

Demostración. Dado que los límites se calculan puntualmente, tenemos que $1(U) = \{*\}$ para cada $U \in \mathcal{O}(X)$. Luego, un subobjeto $S \rightarrowtail 1$ está compuesto por monomorfismos $S(U) \rightarrowtail \{*\}$, por lo que para cada abierto U de X, $S(U) \cong \{*\}$ o $S(U)$ es vacío.

Además, como S es un funtor contravariente de $\mathcal{O}(X)$ a $\boldsymbol{Con}$, si $V \subseteq U$ son abiertos de X, entonces existe una función $S(U) \to S(V)$, por lo que si $S(U) \cong \{*\}$ y $V \subseteq U$, entonces también $S(V) \cong \{*\}$. Así, tenemos que el conjunto $\{U \in \mathcal{O}(X) | S(U) \cong \{*\}\}$ es una criba cubriente para su unión, digamos U_S. Como S es una gavilla, si consideramos a la familia consistente de los únicos elementos de cada $S(U)$ de esta criba, entonces trivialmente es una familia compatible, por lo que necesariamente debe existir un elemento en $S(U_S)$ (su amalgamación), entonces $S(U)$ tiene un elemento si y sólo si $U \subseteq U_S$, por lo que $S \cong \boldsymbol{y}(U_S)$.

De la misma forma, si U es un subconjunto abierto de X, entonces $\boldsymbol{y}(U)$ es un subobjeto del objeto terminal $1_{Sh(X)}$. Es claro que $V \subseteq U$ si y sólo si $\boldsymbol{y}(V) \leqslant \boldsymbol{y}(U)$, de donde tenemos la equivalencia

$$\mathcal{O}(X) \cong Sub(1_{Sh(X)}).$$

$\square$

Capítulo 3

Morfismos Geométricos

En este capítulo definimos lo que es un *morfismo geomético*. Esta definición está motivada por el comportamiento de funciones continuas entre dos espacios topológicos y cómo pueden extenderse naturalmente a funtores entre sus topos de gavillas.

En la segunda sección introducimos los conceptos de topología subcanónica y topología canónia, los cuales son casos particulares de topologías de Grothendieck con algunas propiedades que nos resultarán de mucha importancia ya que el topos clasificante de una teoría geométrica es un topos de Grothendieck con topología subcanónica.

Luego, en la tercera sección definimos lo que es un *punto* de un topos, definimos lo que es un *funtor continuo* de un sitio a un topos y probamos que hay una equivalencia natural entre los funtores continuos y exactos izquierdos de un sitio a un topos cocompleto $\mathcal{E}$ y los morfismos geométricos de $\mathcal{E}$ al topos de gavillas del sitio.

Las últimas sección está dedicadas exclusivamente a probar el *teorema de Deligne*, el cual afirma que un topos coherente tiene *sufientes puntos*. Es importante para nosotros este teorema, pues en el último capítulo haremos una construcción del topos clasificante de una teoría coherente como un topos coherente, gracias a esto, usando el teorema de Deligne probaremos una versión del teorema de correctud para fórmulas coherentes.

3.1. Morfismos Geométricos y Entre Sitios

Para X y Y dos espacios topológicos, una función continua $f : X \to Y$ induce un funtor $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ entre sus categorías de abiertos, donde para todo subconjunto abierto V de Y, $f^{-1}V$ es la imagen inversa de V bajo f. Este funtor tiene la particularidad de que si $\{V_i \mid i \in I\}$ es una cubierta de V, entonces $\{f^{-1}V_i \mid i \in I\}$ es una cubierta de $f^{-1}V$, además f^{-1} preserva todos los límites. f^{-1} será un ejemplo del concepto, definido más adelante, de morfismo entre sitios. Asimismo, se puede definir al "funtor imagen directa"

$f_* : Sh(X) \to Sh(Y)$ tal que para toda gavilla F sobre X, $f_*F(V) = F(f^{-1}V)$.

Si F es gavilla, entonces f_*F también lo es, pues si $\{x_i \mid i \in I\}$ es una familia compatible de f_*F para la cubierta $\{V_i \mid i \in I\}$ de V, entonces también es una familia compatible de F para la cubierta $\{f^{-1}V_i \mid i \in I\}$ de $f^{-1}V$, por lo que existe en $F(f^{-1}V)$ una única amalgamación x para la familia para F, pero esta x es también la única amalgamación de $f_*F(V)$ para la familia para f_*F.

Luego, f_* también preserva todos los límites, pues estos son calculados puntualmente y f^{-1} los preserva. Por lo tanto, por el teorema del funtor adjunto, f_* tiene adjunto izquierdo. Explicitamente, el adjunto izquierdo es la extensión de Kan $Lan_{f^{-1}}$ a lo largo de f^{-1}.

A este adjunto izquierdo lo denotamos como $f^* : Sh(Y) \to Sh(X)$. Este funtor preserva todos los límites finitos, pues f^{-1} lo hace.

Supongamos por un momento que Y es un espacio de Hausdorff y que tenemos una pareja de funtores adjuntos

$$Sh(X) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\leftrightarrows}} Sh(Y)$$

con $f^* \dashv f_*$ y tal que f^* preserva límites finitos. Uno puede reconstruir a la función continua $f : X \to Y$ como sigue.

Escribimos 1_X y 1_Y para denotar a los objetos terminales de las categoría $Sh(X)$ y $Sh(Y)$ respectivamente. Note que como f^* preserva límites finitos, en particular preserva al objeto terminal y a los monomorfismos, por lo que cada subobjeto $U_Y \rightarrowtail 1_Y$ es llevado por f^* a un subobjeto $U_X \rightarrowtail 1_X$. Pero los subobjetos de 1_X y de 1_Y se corresponden con los subconjuntos abiertos de X y de Y respectivamente, como se vio en el teorema 2.12 de la sección anterior.

Esto lleva a una asignación $f^* : Obj(\mathcal{O}(Y)) \to Obj(\mathcal{O}(X))$ que manda abiertos de Y a abiertos de X. Por suposición, f^* preserva límites finitos y colímites arbitrarios, por lo que en este caso preserva intersecciones finitas y uniones arbitrarias de abiertos.

(Aunque este ya es morfismo entre sitios, no necesariamente viene de una función continua si Y es cualquier espacio topológico.)

Ahora podemos definir a la función $\overline{f} : X \to Y$ donde $\overline{f}(x) = y$ si y sólo si para todo $V \in \mathcal{O}(Y)$, si $y \in V$, entonces $x \in f^*(V)$. $\overline{f}$ está bien definida:

Para cada x existe al menos una y con esta propiedad pues de no haberla, para cada $y \in Y$ existiría un abierto V_y con $y \in V_y$ y tal que x no está en $f^*(V_y)$, por lo tanto x no está en $\bigcup\{f^*(V_y) \mid y \in Y\}$, pero

$$\begin{aligned}
&\bigcup \{f^*(V_y) \mid y \in Y\} \\
=&f^*\big(\bigcup \{V_y \mid y \in Y\}\big) && (f^* \text{ preserva uniones arbitrarias}) \\
=&f^*(Y) \\
=&X.
\end{aligned}$$

Por lo que x no está en X, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, a lo más puede existir una y que cumpla la propiedad. De haber dos $y_1 \neq y_2$ con esta propiedad, al ser Y Hausdorff, existen dos abiertos

V_{y_1} y V_{y_2} que tienen como elementos a y_1 y a y_2 respectivamente, pero con intersección vacía. Tenemos entonces que $x \in f^*(V_{y_1}) \bigcap f^*(V_{y_2})$

$$\begin{aligned}
&f^*(V_{y_1}) \bigcap f^*(V_{y_2}) \\
=&f^*\big(V_{y_1} \bigcap V_{y_2}\big) && (f^* \text{ preserva intersecciones finitas}) \\
=&f^*(\varnothing) \\
=&\varnothing.
\end{aligned}$$

Por lo que x pertenece al conjunto vacío, lo que es una contradicción.

Así nuestra función $\overline{f} : X \to Y$ está bien definida, además $\overline{f}^{-1}(V) = f^*(V)$ para todo abierto V de Y. En particular, $\overline{f}$ es una función continua.

Para probar que $\overline{f}$ es la función continua que buscamos, recordemos que la asignación $f^* : Obj(\mathcal{O}(Y)) \to Obj(\mathcal{O}(X))$ manda a un subconjunto abierto V de Y a uno U de X tal que $\boldsymbol{y}(U) \cong f^*(\boldsymbol{y}(V))$, como se vio en el capítulo anterior. Por lo que $\boldsymbol{y}\big(\overline{f}^{-1}(V)\big) \cong f^*\big(\boldsymbol{y}(V)\big)$. De esta forma, dada una gavilla $F \in Sh(X)$ y V un abierto de Y, usando el lema de Yoneda tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{f}_*(F)(V) &= F\big(\overline{f}^{-1}(V)\big) \\
&\cong Hom_{Sh(X)}\big(\boldsymbol{y}\big(\overline{f}^{-1}(V)\big), F\big) \\
&\cong Hom_{Sh(X)}\big(f^*\big(\boldsymbol{y}(V)\big), F\big) \\
&\cong Hom_{Sh(Y)}\big(\boldsymbol{y}(V), f_*(F)\big) \\
&\cong f_*(F)(V)
\end{aligned}$$

Esta equivalencia entre funciones continuas f y parejas de funtores adjuntos $f^* \dashv f_*$, con f^* preservando límites finitos, lleva a definir los morfismos entre topos que "preservan la geometría".

Definición 3.1. Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son dos topos, entonces un *morfismo geométrico* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ es una pareja de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, shift right, "f_*"'] & \mathcal{F} \arrow[l, shift right, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

donde $f^* \dashv f_*$ y f^* preserva límites finitos.

A f^* se le llama el *funtor imagen inversa* y a f_* el *funtor imagen directa.*

Definimos a $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ como la categoría cuyos elementos son los morfismos geométricos de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$. Si f y g son morfismos geométricos de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{F}$, entonces una flecha $\tau : f \to g$ es una transformación natural entre sus funtores imagen inversa $\tau : f^* \to g^*$.

Tenemos a continuación la definición de morfismos entre sitios (con límites finitos), que generaliza a los morfismos para espacios topológicos vistos antes.

Definición 3.2. Si $(\boldsymbol{C}, J)$ y $(\boldsymbol{D}, K)$ son dos sitios donde $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ tienen todos los límites finitos, entonces un funtor $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ es un *morfismo entre sitios* si y sólo si:

1. f es exacto izquierdo (preserva todos los límites finitos).
2. f preserva familias cubrientes, es decir, si $\{p_i : U_i \to U \mid i \in I\}$ es una cubierta de U en J, entonces la criba generada por la familia $\{f(p_i) : f(U_i) \to f(U) \mid i \in I\}$ es una cubierta de $f(U)$ en K.

Incluso si a $\boldsymbol{C}$ y a $\boldsymbol{D}$ les faltan límites finitos, el concepto de que f sea un funtor exacto izquierdo aún puede tener sentido, sin embargo puede no ser el correcto. En vez de eso se usa el concepto más fuerte de un *funtor plano* para definir morfismos entre sitios más en general. Un funtor plano puede ser pensado como un funtor que preserva todos los límites finitos, incluso los que no están ahí aún.

Si $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ tienen todos los límites finitos, entonces los funtores planos entre $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son exactamente los exactos izquierdos. Como en este texto sólo trabajaremos con sitios con límites finitos, nos conformaremos con esta definición de morfismos entre sitios.

De forma análoga al caso de los espacios topológicos, un morfismo entre sitios $f : (\boldsymbol{C}, J) \to (\boldsymbol{D}, K)$ genera un morfismo geométrico

$$Sh(\boldsymbol{D}, K) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\leftrightarrows}} Sh(\boldsymbol{C}, J).$$

Donde el funtor imagen directa se calcula por la composición con f, como $f_*(F)(V) = F(f(V))$. El funtor imagen inversa se calcula con la extensión de Kan a lo largo de f, $f^* = Lan_f$.

A diferencia del caso para espacios topológicos, un morfismo geométrico $f : Sh(\boldsymbol{D}, K) \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$ no necesariamente viene de un morfismo entre sitios. Sin embargo, si $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son categorías pequeñas, entonces un morfismo geométrico

$$Sh(\boldsymbol{D}, K) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\leftrightarrows}} Sh(\boldsymbol{C}, J)$$

es inducido por un morfismo entre sitios $f : (\boldsymbol{C}, J) \to (\boldsymbol{D}, K)$ si el funtor imagen inversa f^* respeta los encajes de Yoneda, es decir existe un funtor $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\boldsymbol{y_C}"'] & \boldsymbol{D} \arrow[d, "\boldsymbol{y_D}"] \\
Sh(\boldsymbol{C}, J) \arrow[r, "f^*"'] & Sh(\boldsymbol{D}, K).
\end{tikzcd}$$

En este caso, se puede probar que F es un morfismo de sitios y así $F = f$ es el morfismo entre sitios buscado.

En realidad, no es necesario que la categoría $\boldsymbol{D}$ sea pequeña; basta con que el sitio $(\boldsymbol{D}, K)$ tenga un sub-sitio denso pequeño, es decir, una subcategoría pequeña $i : \boldsymbol{E} \rightarrowtail \boldsymbol{D}$ con topología $K_{\boldsymbol{E}} = K \cap \boldsymbol{E}$ tal que el morfismo geométrico inducido $i : Sh(\boldsymbol{D}, K) \to Sh(\boldsymbol{E}, K_{\boldsymbol{E}})$ es una equivalencia de categorías es decir, que i_* y i^* lo son.

La prueba se puede encontrar en la proposición 11.14 de [Shulman, 2012].

3.2. Topologías Subcanónicas y Canónicas

Definición 3.3. Una topología de Grothendieck J sobre una categoría $\boldsymbol{C}$ es llamada *subcanónica* si todas las pregavillas representables $\boldsymbol{y}(U) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$ son gavillas sobre el sitio $(\boldsymbol{C}, J)$.

Por supuesto, un *sitio subcanónico* es aquel que tiene una topología subcanónica.

Note que si $(\boldsymbol{C}, J)$ es un sitio subcanónico, entonces para cada $U \in \boldsymbol{C}$, el funtor $\boldsymbol{y}(U) = Hom_{\boldsymbol{C}}(\_\, , U)$ es una gavilla. Por lo que si R es una J-cubierta de U' y $\{h_f \mid f \in R\}$ es una familia compatible para $\boldsymbol{y}(U)$, entonces para toda $f : V \to U'$ de R y $g : V' \to V$ tenemos que $h_f \circ g = h_{f \circ g}$. De aquí que existe una única amalgamación, que es un morfismo $h : U' \to U$ tal que $h \circ f = h_f$ para todo $f \in R$.

Si K es la base para una topología subcanónica J sobre $\boldsymbol{C}$ y $R = \{f_i : U_i \to U \mid i \in I\}$ es una K-cubierta de U, consideremos a los productos fibrados para cada pareja $i, j \in I$

$$\begin{tikzcd} P_{i,j} \arrow[r] \arrow[d] & U_i \arrow[d, "f_i"] \\ U_j \arrow[r, "f_j"'] & U. \end{tikzcd}$$

Una familia de morfismos $\{h_i : U_i \to U' \mid i \in I\}$ es una familia R-compatible del funtor $\boldsymbol{y}(U)$ si y sólo si para cada $i, j \in I$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P_{i,j} \arrow[r] \arrow[d] & U_i \arrow[d, "h_i"] \\ U_j \arrow[r, "h_j"'] & U' \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Tenemos entonces que la topología J será subcanónica si y sólo si para cada familia compatible $\{h_i : U_i \to U' \mid i \in I\}$ en este sentido, existe un único morfismo $h : U' \to U$ tal que $h \circ h_i = f_i$ para toda $i \in I$.

Definición 3.4. La *topología canónica* sobre una categoría $\boldsymbol{C}$ es la mayor topología de Grothendieck subcanónica sobre $\boldsymbol{C}$.

Más explícitamente, una criba R es una cubierta para la topología canónica si y sólo si todo funtor representable $\boldsymbol{y}(U)$ es una gavilla para todo producto fibrado de R.

Tales cribas son llamadas *universalmente efectivo-epimórficas*.

Note que si $(\boldsymbol{C}, J)$ es un sitio subcanónico, entonces el funtor de Yoneda $\boldsymbol{y} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ se correstringe a la categoría de gavillas $\boldsymbol{y} : \boldsymbol{C} \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$.

Definición 3.5. En cualquier categoría $\boldsymbol{C}$, una familia de morfismos

$$\{s_i : A_i \to B \mid i \in I\}$$

con codominio común es llamada *(conjuntamente) epimórfica* si para cualquier par de morfismos $g, h : B \to C$ con $g \neq h$, existe una $i \in I$ tal que $g \circ s_i \neq h \circ s_i$.

Si el coproducto $\coprod_{i \in I} A_i$ existe en $\boldsymbol{C}$, esto es equivalente a decir que el morfismo $\amalg s_i : \coprod A_i \to B$ es epimorfismo.

Dada una familia de flechas $\{s_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ con un codominio común B en un topos $\mathcal{E}$, una propiedad deseable de esta familia sería la construcción de una flecha $f : B \to E$ a partir de una familia "compatible" de morfismos $f_i : A_i \to E$ tal que $f \circ s_i = f_i$ para cada i. Cuando esto es posible de manera única, uno dice que la familia dada $\{s_i\}_{i \in I}$ es *efectiva* o *efectivo-epimórfica*.

En otras palabras, si $A_i \times_B A_j$ es el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
A_i \times_B A_j \arrow[r] \arrow[d] & A_j \arrow[d, "s_j"] \\
A_i \arrow[r, "s_i"'] & B
\end{tikzcd}$$

para cada i, j, las s_i forman una familia efectiva cuando, para toda familia *compatible* $\{f_i : A_i \to E \mid i \in I\}$; es decir, que hace conmutar al cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A_i \times_B A_j \arrow[r] \arrow[d] & A_j \arrow[d, "f_j"] \\
A_i \arrow[r, "f_i"'] & E
\end{tikzcd}$$

para cada par f_i, f_j; existe una única $f : B \to E$ tal que $f \circ s_i = f_i$ para $i \in I$.

Lema 3.6. *En un topos $\mathcal{E}$ cualquier familia epimórfica finita es efectiva. Además, si $\mathcal{E}$ tiene coproductos pequeños, entonces cualquier familia epimórfica pequeña es efectiva.*

Demostración. $\mathcal{E}$ siempre tiene colímites finitos; supongamos que $\mathcal{E}$ tiene colímites de tamaño I. Entonces, por definición, las flechas s_i de una familia epimórfica de tamaño I definen un epimorfismo $s : \coprod_{i \in I} A_i \to B$ en $\mathcal{E}$. Como el producto fibrado conmuta con coproductos, primero sobre j y luego sobre i, en un topos, el par kernel de este epimorfismo s es $\coprod_i \coprod_j (A_i \times_B A_j)$, con los dos mapeos resultantes hacia $\coprod A_i$ como en el diagrama

$$\coprod_{i \in I} \coprod_{j \in I} (A_i \times_B A_j) \rightrightarrows \coprod_i A_i \overset{s}{\twoheadrightarrow} B.$$

Pero en cualquier topos, un epimorfismo es el coigualador de su par kernel, entonces s es el coigualador. Las flechas dadas f_i como antes generan un morfismo $g : \coprod A_i \to E$ sobre el coproducto y la conmutatividad del cuadrado que las hace una familia compatible para cada i y j muestra que esta flecha g iguala a las flechas paralelas de $\coprod_i \coprod_j (A_i \times_B A_j)$ a $\coprod_i A_i$. Por lo tanto, g se factoriza como $g = f \circ s$ para un único morfismo $f : B \to E$. Al componer esta igualdad con las inclusiones del coproducto $A_i \rightarrowtail \coprod A_i$ obtenemos la identidad $f \circ s_i = f_i$.

□

3.3. Puntos

Definición 3.7. Si $\mathcal{E}$ es un topos, un *punto* de $\mathcal{E}$ es un morfismo geométrico $p : \boldsymbol{Con} \to \mathcal{E}$.

Si K es una clase de puntos de $\mathcal{E}$, decimos que K es *suficiente* si la familia de funtores imagen inversa $\{p^* \mid p \in K\}$ es *conservativa*, es decir, si para cualquier morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{E}$ y para cualquier $p \in K$, $p^*(f)$ es isomorfismo, entonces f es necesariamente isomorfismo.

Decimos que $\mathcal{E}$ *tiene suficientes puntos* si la clase de todos los puntos de $\mathcal{E}$ es suficiente.

El siguiente resultado nos permite caracterizar a los puntos sobre un topos de Grothendieck en términos de su sitio de definición. De cualquier manera, es más conveniente dar este resultado en una forma general que caracteriza a todos los morfismos geométricos de un topos cocompleto $\mathcal{E}$ (es decir, con colímites pequeños arbitrarios) a un topos de Grothendieck $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ (en particular, $\mathcal{E}$ puede ser un topos de Grothendieck, pues todo topos de Grothendieck es cocompleto).

Para esto, primero necesitamos una definición más:

Definición 3.8. Si $(\boldsymbol{C}, J)$ es un sitio, decimos que un funtor $\boldsymbol{C} \to \mathcal{E}$ es *continuo* (o *J-continuo*) si mapea cribas J-cubrientes en $\boldsymbol{C}$ a familias epimórficas en $\mathcal{E}$.

Note que si $(\boldsymbol{C}, J)$ es subcanónico, entonces $\boldsymbol{y} : \boldsymbol{C} \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$ es un funtor continuo.

Teorema 3.9. *Sean $\mathcal{E}$ un topos cocompleto, $(\boldsymbol{C}, J)$ un sitio tal que $\boldsymbol{C}$ tiene todos los límites finitos y $\phi : Sh(\boldsymbol{C}, J) \to \mathcal{E}$ un funtor. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) ϕ es la imagen inversa de un morfismo geométrico $\mathcal{E} \to Sh(C, J)$.

(ii) ϕ es exacto izquierdo y preserva colímites pequeños.

(iii) Existe un funtor exacto izquierdo y continuo $P : \boldsymbol{C} \to \mathcal{E}$, tal que ϕ es (isomorfo a) la extensión de Kan izquierda de P a lo largo de $l : \boldsymbol{C} \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$.

Más aún, el funtor P en (iii) está determinado, salvo isomorfismo, por ϕ.

Probaremos un caso particular de este teorema que nos será útil después: el caso en el que $(\boldsymbol{C}, J)$ es un sitio subcanónico. En este caso, el funtor $l : \boldsymbol{C} \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$ es simplemente el funtor de Yoneda.

Para esto ocupamos el siguiente lema:

Lema 3.10. *Cualquier objeto de $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ puede ser expresado como el colímite de un diagrama cuyos vértices son funtores representables (de la forma $\boldsymbol{y}(U)$ para algún $U \in \boldsymbol{C}$).*

Demostración. Sea X un objeto de $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ y sea $(\boldsymbol{y} \downarrow X)$ la *categoría coma* cuyos objetos son las parejas (U, α) donde U es un objeto de $\boldsymbol{C}$ y $\alpha : \boldsymbol{y}(U) \to X$ un morfismo de $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ y cuyos morfismos son triángulos conmutativos

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{y}(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \boldsymbol{y}(V) \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

en $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$.

Entonces hay un funtor "olvidadizo" $(\boldsymbol{y} \downarrow X) \to \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ dado por $(U, \alpha) \mapsto \boldsymbol{y}(U)$; el colímite de este diagrama es X.

□

En el caso de que $(\boldsymbol{C}, J)$ es un sitio subcanónico, tenemos que cada gavilla de $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ está dada por el mismo colímite restringido. Además, $\boldsymbol{y} : \boldsymbol{C} \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$ es fiel y pleno.

Ahora probamos el teorema.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ es trivial.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sea P la composición $\boldsymbol{C} \xrightarrow{\boldsymbol{y}} Sh(\boldsymbol{C}, J) \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}$. Entonces P es ciertamente exacta izquierda al serlo $\boldsymbol{y}$ y ϕ; además es continua pues $\boldsymbol{y}$ lo es y ϕ preserva colímites y epimorfismos. Si X es un objeto de $Sh(\boldsymbol{C}, J)$, entonces

$$X \cong \varinjlim_{(\boldsymbol{y} \downarrow X)} \boldsymbol{y}(U)$$

en $Sh(\boldsymbol{C}, J)$, como se mencionó en el lema anterior. Aplicando ϕ, como preserva colimites, tenemos

$$\phi(X) \cong \varinjlim_{(\boldsymbol{y} \downarrow X)} P(U),$$

que es precisamente la fórmula que define a la extensión de Kan.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Si ϕ es la extensión de Kan izquierda de P a lo largo de $\boldsymbol{y} : \boldsymbol{C} \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$, entonces el adjunto derecho de ϕ es $P_* : \mathcal{E} \to Sh(\boldsymbol{C}, J)$. Donde si

A es un objeto de $\mathcal{E}$, entonces $P_*(A) = \boldsymbol{y}(A) \circ P = Hom_{\mathcal{E}}(P(\_), A)$. De esta forma, usando el lema de Yoneda, si X es un elemento de $sh(\boldsymbol{C}, J)$,

$$\begin{aligned}
Hom_{Sh(\boldsymbol{C},J)}(X, P_*(A)) &= Hom_{Sh(\boldsymbol{C},J)}\big(\varinjlim_{(\boldsymbol{y}\downarrow X)} \boldsymbol{y}(U), P_*(A)\big) \\
&\cong \varinjlim_{(\boldsymbol{y}\downarrow X)} \big(Hom_{Sh(\boldsymbol{C},J)}\big(\boldsymbol{y}(U), P_*(A)\big)\big) \\
&\cong \varinjlim_{(\boldsymbol{y}\downarrow X)} \big(P_*(A)(U)\big) \\
&= \varinjlim_{(\boldsymbol{y}\downarrow X)} \big(Hom_{\mathcal{E}}(P(U), A)\big) \\
&\cong Hom_{\mathcal{E}}\big(\varinjlim_{(\boldsymbol{y}\downarrow X)} P(U), A\big) \\
&\cong Hom_{\mathcal{E}}(\phi(X), A).
\end{aligned}$$

Como $(\boldsymbol{C}, J)$ es subcanónica, cada gavilla es colímite de funtores de la forma $\boldsymbol{y}(U)$ que se corresponde con ϕ por su definición como la extensión de Kan. Además, ϕ preserva colímites finitos, pues P lo hace. Por lo que ϕ es el funtor imagen inversa de este morfismo geométrico.

Para establecer la unicidad de P, debemos probar que un morfismo $P : \boldsymbol{C} \to \mathcal{E}$ continuo y exacto izquierdo es isomorfo a la restricción de su extensión de Kan izquierda a lo largo de $\boldsymbol{y}$, es decir, que el mapeo conónico

$$P(U) \longrightarrow \varinjlim_{(\boldsymbol{y}\downarrow \boldsymbol{y}(U))} P(V)$$

es un isomorfismo. Pero esto es trivial, pues el encaje de Yoneda es fiel y pleno.

$\square$

Corolario 3.11. *Un corolario importante de este teorema es que*

$$\underline{Hom}(\mathcal{E}, Sh(\boldsymbol{C}, J)) \cong \underline{ConLex}(\boldsymbol{C}, \mathcal{E})$$

donde $\underline{ConLex}$ *se refiere a la categoría cuyos objetos son los funtores exactos izquierdos y continuos de* $\boldsymbol{C}$ *a* $\mathcal{E}$ *y cuyos morfismos son todas las transformaciones naturales entre ellos.*

Demostración. Esta es una equivalencia de categorías natural en $\mathcal{E}$, pues si $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ es un morfismo geométrico, entonces

$$\underline{\mathrm{Hom}}(f, Sh(\boldsymbol{C}, J)) : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, Sh(\boldsymbol{C}, J)) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, Sh(\boldsymbol{C}, J))$$

manda al morfismo geométrico α a $\alpha \circ f$ que tiene como imagen directa a $\alpha_* \circ f_*$ y como imagen inversa a $f^* \circ \alpha^*$, mientras que

$$\underline{\mathrm{ConLex}}(C, f) : \underline{\mathrm{ConLex}}(\boldsymbol{C}, \mathcal{E}) \to \underline{\mathrm{ConLex}}(\boldsymbol{C}, \mathcal{F})$$

manda al funtor exacto izquierdo y continuo P a $f^* \circ P$. Así, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, Sh(\boldsymbol{C}, J)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\underline{\mathrm{Hom}}(f, Sh(\boldsymbol{C}, J))"'] & \underline{\mathrm{ConLex}}(\boldsymbol{C}, \mathcal{E}) \arrow[d, "\underline{\mathrm{ConLex}}(\boldsymbol{C}, f)"] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, Sh(\boldsymbol{C}, J)) \arrow[r, "\cong"'] & \underline{\mathrm{ConLex}}(\boldsymbol{C}, \mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo; por ambos caminos, un morfismo geométrico α va a dar al funtor continuo y exacto izquierdo $f^* \circ \alpha^* \circ \boldsymbol{y}$.

□

Este resultado será muy útil en el último capítulo para la construcción del topos clasificante de una teoría geométrica.

Supongamos ahora que $\gamma : F \to \boldsymbol{C}^{OP}$ es un diagrama filtrante, entonces el funtor

$$\varinjlim_{F} \big(Hom_C(\gamma(U), \;\_\;) \big) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$$

es un funtor exacto izquierdo. Por el teorema anterior, este funtor corresponde a un punto $\boldsymbol{Con} \to \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$. Es esto lo que motiva a la siguiente definición:

Definición 3.12. Un *pseudo-punto* de $\boldsymbol{C}$ es un sistema filtrante inverso de objetos de $\boldsymbol{C}$, es decir, una categoría filtrante (pequeña) I y un funtor $I \to \boldsymbol{C}^{OP}$; $i \mapsto U_i$.

Si $P = \{U_i \mid i \in I\}$ es un pseudo-punto de $\boldsymbol{C}$, usaremos también a la letra P para denotar al funtor exacto izquierdo $\varinjlim_I \big(Hom_C(U_i, \;\_\;) \big) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Con}$.

Proposición 3.13. *Sean $(\boldsymbol{C}, J)$ un sitio tal que $\boldsymbol{C}$ tiene límites finitos y $P = \{U_i \mid i \in I\}$ un pseudo-punto de $\boldsymbol{C}$. Entonces el punto del topos de pregavillas $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ determinado por P, se factoriza a través de la inclusión de las gavillas $Sh(\boldsymbol{C}, J) \rightarrowtail \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ si y sólo si para cada objeto V de $\boldsymbol{C}$, cada criba $R \in J(V)$, y cada $U_i \to V$ en $\boldsymbol{C}$ con $i \in I$, existe una flecha $k \to i$ en I tal que $U_k \to U_i \to V$ está en R.*

Demostración. La condición dada es simplemente el hecho de que el funtor $\varinjlim_I \big(Hom_C(U_i, \;\_\;) \big)$ manda a R a una familia epimórfica en $\boldsymbol{Con}$, entonces es un funtor continuo y exacto izquierdo; por lo que este resultado es inmediato del teorema 3.9.

□

Un pseudo-punto que satisface esta condición es llamado un *pseudo-punto del sitio* $(\boldsymbol{C}, J)$.

Definición 3.14. Un *topos coherente* es un topos de Grothendieck $Sh(\boldsymbol{C}, J)$ tal que $\boldsymbol{C}$ tiene límites finitos y la topología J está generada por una base en la cual cada familia cubriente es finita.

Un sitio $(\boldsymbol{C}, J)$ que cumple estas hipótesis es llamado un *sitio de tipo finito*.

3.4. El Teorema de Deligne

En esta sección probamos el importante teorema de P. Deligne que afirma que todo *topos coherente* tiene suficientes puntos. Si $(\boldsymbol{C}, J)$ es un sitio de tipo finito, podemos considerar a la clase de pseudo-puntos de $\boldsymbol{C}$ que está definida sobre conjuntos filtrantes y asignarle un orden parcial.

Si $P = \{U_i \,|\, i \in I\}$ y $Q = \{V_k \,|\, k \in K\}$ son dos pseudo-puntos, decimos que Q es un *refinamiento* de P si hay un monomorfismo que preserva el orden $I \rightarrowtail K$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, tail] & \boldsymbol{C}^{OP} \\ K \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Queremos probar que un pseudo-punto de $\boldsymbol{C}$ tiene un refinamiento "adecuado" que es de hecho un pseudo-punto de $(\boldsymbol{C}, J)$. Por conveniencia, si $P = \{U_i \,|\, i \in I\}$ es un pseudo-punto de $\boldsymbol{C}$, usaremos la letra P también para denotar al funtor imagen inversa

$$\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}} \longrightarrow \boldsymbol{Con}; \quad X \longmapsto \varinjlim_{I}(X(U_i))$$

del punto que este define.

Lema 3.15. *Sean $P = \{U_i \mid i \in I\}$ un pseudo-punto de $\boldsymbol{C}$, X una J-gavilla sobre $\boldsymbol{C}$ y x, y dos elementos distintos de $P(X)$.*

Sean $\{V_j \to V \mid j = 1, \ldots, n\}$ una familia J-cubriente finita en C, y v un elemento de $P(\boldsymbol{y}(V))$.

Entonces existe un refinamiento de Q de P tal que

(a) Las imágenes de x, y bajo el mapeo natural $P(X) \to Q(X)$ son distintas.

(b) La imagen de v bajo $P(\boldsymbol{y}(V)) \to Q(\boldsymbol{y}(V))$ es elemeto de

$$\bigcup_{j=1}^{n} Im\big(Q(\boldsymbol{y}(V_j)) \to Q(\boldsymbol{y}(V))\big).$$

Demostración. Por definición, $P(\boldsymbol{y}(V)) = \varinjlim_I(Hom_{\boldsymbol{C}}(U_i, V))$, por lo que v viene de un morfismo $U_{i_0} \xrightarrow{v} V$ para algún $i_0 \in I$. Para cada $i \geqslant i_0$ y cada j, si consideramos al producto fibado

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[rr] \arrow[d] & & V_j \arrow[d] \\ U_i \arrow[r] & U_{i_0} \arrow[r, "v"'] & V; \end{tikzcd}$$

entonces la familia $\{U_{ij} \to U_i \mid j = 1, \dots, n\}$ es una J-cubierta, y además $X(U_i) \to \prod_{j=1}^{n} X(U_{ij})$ es monomorfismo. Pero los colímites filtrantes preservan productos finitos y monomorfismos, entonces

$$P(X) = \varinjlim_{I} X(U_i) \cong \varinjlim_{(i_0/I)} X(U_i) \rightarrowtail \prod_{j=1}^{n} \big(\varinjlim_{(i_0/I)} X(U_{ij}) \big)$$

es un monomorfismo. (Donde (i_0/I) denota al suborden de I generado por $\{i \in I \mid i \geqslant i_0\}$.)

En particular, podemos encontrar una k tal que x, y tienen distintas imágenes en $\varinjlim_{(i_0/I)} X(U_{ik})$. Ahora, sea $K = I \times \{0\} \bigcup (i_0/I) \times \{1\}$ con el orden del producto (es decir, $(i,j) \leqslant (i',j')$ si y sólo si $i \leqslant i'$ y $j \leqslant j'$); entonces K es un orden filtrante, y podemos definir a un pseudo-punto Q con los índices de K por la asignación

$$(i,0) \longmapsto U_i; \quad (i,1) \longmapsto U_{ik}.$$

Para cualquier pregavilla Y sobre $\boldsymbol{C}$, tenemos que $Q(Y) = \varinjlim_{(i_0/I)} Y(U_{ik})$; entonces el pseudo-punto Q tiene las propiedades requeridas.

□

Lema 3.16. *Sean P, X y x, y como en el lema anterior. Entonces existe un refinamiento Q de P tal que*

(a) Las imágenes de x, y bajo el mapeo natural $P(X) \to Q(X)$ son distintas.

(b) Para cada objeto V de $\boldsymbol{C}$, cada criba J-cubriente R sobre V y cada $v \in P(\boldsymbol{y}(V))$, la imagen de v bajo $P(\boldsymbol{y}(V)) \to Q(\boldsymbol{y}(V))$ está en la imagen de $Q(R) \rightarrowtail Q(\boldsymbol{y}(V))$.

Demostración. consideremos a Z el conjunto de todas las ternas (V, R, v) donde V es un objeto de $\boldsymbol{C}$, R es una criba J-cubriente finitamente generada sobre V y $v \in P(\boldsymbol{y}(V))$. Eligiendo un buen orden de Z, podemos indexar a sus miembros con algún ordinal α. Ahora hacemos recursión transfinita para definir a una sucesión de pseudo-puntos $\{Q_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$, como sigue:

$Q_0 = P$.

Si $\beta = \gamma + 1$, entonces Q_β es obtenido desde Q_γ aplicando el lema anterior a una familia generadora finita $\{V_{\gamma j} \to V_\gamma \mid j = 1, \dots, n_\gamma\}$ para la criba R_γ, y a la imagen de v_γ en $Q_\gamma(V_\gamma)$.

Si β es un ordinal límite, entonces Q_β es el único refinamiento común de los pseudo-puntos $\{Q_\gamma \mid \gamma < \beta\}$, cuyo conjunto parcialmente ordenado filtrante subyaciente es el colímite de aquellos subyacientes a los Q_γ.

Entonces es fácil ver que las imágenes de x, y en $Q_\beta(X)$ son distintas para cada β, y si $\gamma \leqslant \beta$ entonces la imagen de v_γ en $Q_\beta(\boldsymbol{y}(V_\gamma))$ está en la imagen de $Q_\beta(R_\gamma)$. Por lo tanto, $Q = Q_\alpha$ es el refinamiento requerido de P. □

El pseudo-punto Q construido en este lema no necesariamente es un punto de $(\boldsymbol{C}, J)$, pues no todo elemento de $Q(\boldsymbol{y}(V))$ está necesariamente en la imagen de $P(\boldsymbol{y}(V)) \to Q(\boldsymbol{y}(V))$. De cualquier manera, podemos rectificar esto haciendo una recursióm más de longitud ω como sigue:

Lema 3.17. *Sean P, X y x, y como en el lema anterior. Entonces existe un pseudo-punto Q de $(\boldsymbol{C}, J)$ que es un refinamiento de P tal que las imágenes de x, y bajo $P(X) \to Q(X)$ son distintas.*

Demostración. Definamos a la secuencia de pseudo-puntos P_n haciendo $P_0 = P$, y definiendo P_{n+1} como el refinamiento de P_n construido en el lema anterior. Definimos a Q como el colímite de los P_n; tenemos que $Q(Y) = \varinjlim P_n(Y)$ para cualquier pregavilla Y sobre $\boldsymbol{C}$. Entonces, x, y tienen imágenes distintas en $Q(X)$; y si $R \to \boldsymbol{y}(V)$ es una criba J-cubriente, entonces cada elemento de $Q(\boldsymbol{y}(V))$ viene de un elemento de $P_n(\boldsymbol{y}(V))$ para algún n, y entonces de algún elemento de $P_{n+1}(R)$. Por lo tanto tenemos que Q es un pseudo-punto de $(\boldsymbol{C}, J)$. $\square$

Teorema 3.18. **(Teorema de Deligne)** *Un topos coherente tiene suficientes puntos.*

Demostración. Sea $\mathcal{E} = Sh(\boldsymbol{C}, J)$ un topos coherente con $(\boldsymbol{C}, J)$ su sitio de tipo finito. Es suficiente mostrar que, dadas un par de flechas paralelas $f, g : Y \to X$ en $\mathcal{E}$ con $f \neq g$, podemos encontrar un punto q de $\mathcal{E}$ con $q^*(f) \neq q^*(g)$. Pero podemos ciertamente encontrar un objeto U de $\boldsymbol{C}$ y $y \in Y$ con $f_U(y) \neq g_U(y)$; ahora aplicamos el lema anterior a este par de elementos distintos de $X(U)$, tomando a P como el pseudo-punto de $\boldsymbol{C}$ definido por el sistema filtrante trivial (U). Entonces obtenemos un pseudo-punto Q de $(\boldsymbol{C}, J)$ y por lo tanto un punto q de $\mathcal{E}$, tal que la imagen de y en $q^*(Y)$ tiene distintas imágenes bajo $q^*(f)$ y $q^*(g)$. $\square$

Si un topos $\mathcal{E}$ tiene suficientes puntos, entonces tenemos también que toda flecha $f : Y \to X$ de $\mathcal{E}$, es monomorfismo siempre que para todo punto p, $p^*(f)$ lo es. Para probar la anterior afirmación, sean g y h son dos flechas tales que $f \circ g = f \circ h$, se tiene que para todo punto p, $p^*(f) \circ p^*(g) = p^*(f) \circ p^*(h)$, pero si $p^*(f)$ es mono tendremos que $p^*(g) = p^*(h)$, si esto es así para cada punto p, como $\mathcal{E}$ tiene suficientes puntos, entonces $g = h$. Por lo que f es monomorfismo.

Análogamente, f es epimorfismo si $p^*(f)$ lo es para todo punto p. Luego, f es isomorfismo (al ser equivalente a ser mono y epi en un topos) si $p^*(f)$ es isomorfismo para todo punto p del topos.

Es importante destacar también que en un topos con suficientes puntos, para cualesquiera dos subobjetos A y B de un objeto X del topos, tenemos que $A \leqslant B$ si para todo punto p del topos $p^*(A) \leqslant p^*(B)$:

Si $p^*(A) \leqslant p^*(B)$ entonces el monomorfismo $p^*(B) \rightarrowtail p^*(A) \vee p^*(B)$ es de hecho un isomorfismo, pero como p^* preserva colímites, tenemos que $p^*(A) \vee p^*(B) \cong p^*(A \vee B)$. Luego, $p^*(B) \rightarrowtail p^*(A \vee B)$ es un isomorfismo para cada punto p del topos, por lo que $B \rightarrowtail A \vee B$ es un isomorfismo y de aquí que $A \leqslant B$.

Capítulo 4

Lógica de Primer Orden

En este capítulo tomamos una ligera generalización de la lógica de primer orden (en la que tenemos múltiples tipos) y definimos lo que es una *estructura* en un topos, definimos lo que es un *modelo* de una teoría en un lenguaje dado y vemos cómo podemos interpretar las fórmulas de primer orden en cualquier estructura.

Al final de la primera sección vemos cómo, a partir de una estructura M en un topos $\mathcal{E}$ y un funtor entre topos $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ que preserva productos finitos, podemos obtener una estructura fM en $\mathcal{F}$.

En la segunda sección definimos lo que es una *fórmula geométrica* y una *fórmula coherente*, y luego definimos lo que es una *teoría geométrica* y una *teoría coherente*. La importancia de las teorías geométricas y coherentes radica en que si M es un modelo de una teoría geométrica o coherente T y f^* es el funtor imagen inversa de un morfismo geométrico entonces la esturcura f^*M también es modelo de la teoría T.

En la última sección definimos a la *categoría de objetos definibles* sobre un modelo M. Además, dotamos a esta categoría con una topología de Grothendieck. La motivación para definir a esta categoría con su topología es que será de mucha ayuda para construir al topos clasificante de una teoría geométrica o coherente en el siguiente capítulo.

4.1. Modelos en Topos

Un lenguaje de primer orden L, para nosotros constará de una colección de "tipos" (de variables) $X, Y, \dots$, una colección de símbolos de relación $R, S, \dots$ y de símbolos de función $f, g, \dots$, y posiblemente algunas constantes $c, d, \dots$.

Cada relación está dada junto con los tipos de sus argumentos. Por ejemplo $R = R(x, y)$ puede ser una relación binaria que toma un argumento x del tipo X en su primera entrada y uno y del tipo Y en la segunda, en este caso escribimos "$R \subseteq X \times Y$". (Note que esto es puramente notación ya que R no es realmente subconjunto de algún producto entre X y Y; X, Y y R son sólo símbolos del lenguaje.) Similarmente, cada símbolo de función tiene los tipos de sus argumentos y un tipo de salida. Escribimos como notación

$$f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$$

si f toma n argumentos de tipos $X_1, \ldots, X_n$ respectivamente y da un valor del tipo Y. También cada símbolo de constante tiene su tipo específico. Escribimos $c \in X$ o $c : 1 \to X$ para indicar que el símbolo de constante c es del tipo X. También asumimos que para cada tipo X, el lenguaje tiene una cantidad infinita de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (o $x, y, z, \ldots$) de ese tipo y a veces escribimos "$x \in X$" para indicar que x es una variable del tipo X.

Note que esta es una generalización de un lenguaje de primer orden usual, en el que sólo hay un tipo. Más sobre el lenguaje de primer orden usual se puede encontrar, por ejemplo, en [Enderton, 2001].

Con un lenguaje L de primer orden, uno puede construir términos y fórmulas de la manera usual:

Términos (del tipo X):

- Cada variable o símbolo de constante del tipo X es un término del tipo X.
- Supongamos que $t_1, \ldots, t_n$ son símbolos de tipos $X_1, \ldots, X_n$ respectivamente y que $f : X_1, \ldots, X_n \to X$ es un símbolo de función, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término del tipo X.

Fórmulas Atómicas:

- Si $R \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ es un símbolo de relación de n argumentos de tipos $X_1, \ldots, X_n$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos de los tipos $X_1, \ldots, X_n$ respectivamente, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.
- Si t y t' son dos términos del mismo tipo Y entonces $t = t'$ es una fórmula atómica también.
- Los símbolos $\top$ y $\perp$ son también fórmulas atómicas (las fórmulas idénticamente verdadero y falso, respectivamente).

De tales fórmulas atómicas uno puede construir fórmulas más complicadas usando los conectivos $\wedge, \vee, \to, \neg$ y cuantificadores de cualquier tipo ($\forall x \in X, \exists x \in X$). De la manera estandar, ocurrencias de las variables gobernadas por algún cuantificador se dice que están *acotadas*, en caso contrario se les llama *libres*.

Definición 4.1. Dado un lenguaje L y un topos $\mathcal{E}$, una *L-estructura* o *L-interpretación* M es una función que a cada tipo X le asigna un objeto del topos $X^M \in \mathcal{E}$; a cada símbolo de relación $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ le asigna un subobjeto R^M del objeto $X_1^M \times \cdots \times X_n^M \in \mathcal{E}$; a cada símbolo de función $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ le asigna un morfismo $f^M : X_1^M \times \cdots \times X_n^M \to Y^M \in \mathcal{E}$; y a cada símbolo de constante $c \in X$ le asigna un morfismo $c^M : 1 \to X^M \in \mathcal{E}$.

Dada una interpretación M, uno puede definir la interpretación de un término t de tipo Y, cuyas variables se encuentran entre los tipos $X_1, \ldots, X_n$ como un morfismo $t^M : X_1^M, \ldots, X_n^M \to Y^M$ de $\mathcal{E}$ como sigue:

1. si $t = x_i$ (una variable), entonces el morfismo t^M es la proyección
$$t^M : X_1^M \times \cdots \times X_n^M \xrightarrow{\pi_i} X_i^M;$$
2. si $t = c$ (un símbolo de constante del tipo Y), entonces t^M es la composición de los morfismos
$$t^M : X_1^M \times \cdots \times X_n^M \to 1 \xrightarrow{c^M} Y^M;$$
3. si $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ entonces t^M es la composición
$$t^M : X_1^M \times \cdots \times X_n^M \xrightarrow{(t_1^M, \ldots, t_m^M)} Y_1^M \times \cdots \times Y_m^M \xrightarrow{f^M} Y^M.$$

Para el caso de una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con variables libres entre las enlistadas, definimos a su interpretación bajo la estructura M como un subobjeto
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M \subseteq X_1^M \times \times X_n^M$$
en $\mathcal{E}$ de la siguiente manera:

1. Si φ es $(t = t')$ entonces $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid t = t'\}^M$ es el igualador de los morfismos t^M y t'^M:
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid t = t'\}^M \rightarrowtail X_1^M \times \cdots \times X_n^M \rightrightarrows Y^M.$$
2. Si φ es $R(t_1, \ldots, t_k)$ para algún símbolo de relación $R \subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_k$ y términos t_i de tipo Y_i (cada uno con variables libres con tipos entre $X_1, \ldots, X_n$), entonces el subobjeto $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid R(t_1, \ldots, t_n)\}^M$ es el producto fibrado de el subobjeto R^M a lo largo de $(t_1^M, \ldots, t_n^M)$:
$$\begin{tikzcd}
\{(x_1, \ldots, x_n) \mid R(t_1, \ldots, t_n)\}^M \arrow[r] \arrow[d, tail] & R^M \arrow[d, tail] \\
X_1^M \times \cdots \times X_n^M \arrow[r, "(t_1^M, \ldots, t_n^M)"'] & Y_1^M \times \cdots \times Y_k^M.
\end{tikzcd}$$
3. Para terminar con las fórmulas atómicas,
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \top\}^M = X_1^M \times \cdots \times X_n^M$$
y
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bot\}^M = 0 \text{ (el objeto cero de } \mathcal{E}).$$

Los conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ son interpretados usando las operaciones correspondientes en el álgebra de Heyting de subobjetos; por ejemplo, para $\wedge$ definimos:

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi \wedge \psi\}^M = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^M \wedge \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \psi\}^M.$$

Finalmente, para los cuantificadores, tenemos que para cualquier flecha $\alpha : E' \to E$ en un topos $\mathcal{E}$, la "imagen inversa" $\alpha^{-1} : Sub(E) \to Sub(E')$ tiene adjuntos izquierdo y derecho $\exists_\alpha$ y $\forall_\alpha : Sub(E') \to Sub(E)$. Podemos interpretar a los cuantificadores del lenguaje L usando estas adjunciones:

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \forall x\varphi(x_1,\ldots,x_n,x)\}^M = \forall_\pi\big(\{(x_1,\ldots,x_n,x) \mid \varphi(x_1,\ldots,x_n,x)\}^M\big),$$

donde $\pi : X_1^M \times \cdots \times X_n^M \times X^M \to X_1^M \times \cdots \times X_n^M$ es la proyección; y similarmente para el cuantificador existencial:

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \exists x\varphi(x_1,\ldots,x_n,x)\}^M = \exists_\pi\big(\{(x_1,\ldots,x_n,x) \mid \varphi(x_1,\ldots,x_n,x)\}^M\big).$$

Como antes, decimos que una fórmula ϕ es *válida* en M (en el topos $\mathcal{E}$) si $\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^M$ es el subobjeto máximo $X_1^M \times \cdots \times X_n^M$ mismo, para cada secuencia $x_1,\ldots,x_n$ que contenga a las variables libres de φ.

Note que esta noción generaliza también al lenguaje de Mitchell-Bénabou (1.11), y por lo tanto lo que se probó sobre la semántica de Kripke-Joyal (1.14) y su noción de forcing sigue aplicando en este contexto.

Dada una teoría T (un conjunto de fórmulas) en un lenguaje L, un *modelo* de T (o un T-*modelo*) en un topos $\mathcal{E}$ es una interpretación M de este lenguaje en $\mathcal{E}$ tal que todas las fórmulas de T son válidas en M.

Definición 4.2. Dadas dos interpretaciones M y M' del lenguaje L en un topos $\mathcal{E}$, un *homomorfismo* $H : M \to M'$ es una colección de morfismos $H_X : X^M \to X^{M'}$ en $\mathcal{E}$, una por cada tipo X de L, que respeta las interpretaciones de los símbolos de relación, de función y de constante:

1. Para cada símbolo de relación $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ existe una factorización

$$\begin{tikzcd} R^M \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & R^{M'} \arrow[d, tail] \\ X_1^M \times \cdots \times X_n^M \arrow[r, "H_{X_1}\times\cdots\times H_{X_n}"'] & X_1^{M'} \times \cdots \times X_n^{M'}. \end{tikzcd}$$

2. Para cada símbolo de función $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_1^M \times \cdots \times X_n^M \arrow[r, "H_{X_1}\times\cdots\times H_{X_n}"] \arrow[d, "f^M"'] & X_1^{M'} \times \cdots \times X_n^{M'} \arrow[d, "f^{M'}"] \\ Y^M \arrow[r, "H_Y"'] & Y^{M'}. \end{tikzcd}$$

3. Para cada símbolo de constante $c \in X$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "c^M"'] & 1 \arrow[d, "c^{M'}"] \\ X^M \arrow[r, "H_X"'] & X^{M'}. \end{tikzcd}$$

Lo anterior da la pauta para la definición de una categoría de todas las interpretaciones de L en $\mathcal{E}$ con homomorfismos de interpretaciones por flechas. Para cada teoría T en el lenguaje L, definimos a la subcategoría plena de la categoría de interpretaciones: la categoría $\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E})$ de T-modelos en $\mathcal{E}$.

Dado un funtor exacto-izquierdo (que preserva límites finitos) entre dos topos $F : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ y una interpretación M del lenguaje L en $\mathcal{E}$, podemos definir una interpretación FM en $\mathcal{F}$, definida en tipos como

$$X^{FM} = F(X^M)$$

para cada tipo X de L.

Si $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ es un símbolo de relación de L, como F preserva productos y monomorfismos, podemos definir a R^{FM} como

$$R^{FM} = F(R^M) \subseteq X_1^{FM} \times \cdots \times X_n^{FM}$$

ya que $F(X_1^M \times \cdots \times X_n^M) = F(X_1^M) \times \cdots \times F(X_n^M)$.

Lo mismo podemos hacer con los símbolos de función y de constante:

$$f^{FM} = F(f^M) : X_1^{FM} \times \cdots \times X_n^{FM} \to Y^{FM}$$

y

$$c^{FM} = F(c^M) : 1 \to X^{FM}$$

pues $F(1_{\mathcal{E}}) = 1_{\mathcal{F}}$.

Además, F se puede llevar a un funtor de las L-interpretaciones en $\mathcal{E}$ a las L-interpretaciones en $\mathcal{F}$ como $(FH)_X : X^{FM} \xrightarrow{F(H_X)} X^{FM'}$. No obstante, dada una teoría T, este funtor no necesariamente se restringe a un funtor

$$F : \underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}) \to \underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{F});$$

no hay razón por la cual los axiomas válidos en una L-estructura M en $\mathcal{E}$ deban serlo también en la L-estructura FM en $\mathcal{F}$.

En la sección siguiente veremos un caso interesante en el que el funtor F preserva la validez de ciertas fórmulas.

4.2. Teorías Coherentes y Geométricas

Dado un funtor exacto-izquierdo $F : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ y una L-interpretación M en $\mathcal{E}$, ya sabemos que existe una L-interpretación FM en $\mathcal{F}$. Además, dada una fórmula φ tenemos al subobjeto $\{(x_1,\ldots,x_n)|\varphi\}^M$ en $\mathcal{E}$ y a $\{(x_1,\ldots,x_n)|\varphi\}^{FM}$ en $\mathcal{F}$, pero no necesariamente

$$F\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^M\big) = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^{FM}.$$

En esta sección veremos un tipo particular de fórmulas, llamadas *fórmulas geométricas*, que son preservadas es este sentido por la imagen inversa de cualquier morfismo geométrico.

Definición 4.3. En un lenguaje de primer orden L, una fórmula φ es llamada *coherente* si se puede obtener a partir de fórmulas atómicas por conjunción $\wedge$, disjunción $\vee$ y cuantificador existencial $\exists x$.

Además, una fórmula así es llamada *geométrica*, si permitimos también el uso de la disyunción $\bigvee_{j\in J}\varphi_j$ de una cantidad arbitraria de fórmulas sobre un conjunto J; la interpretación de una fórmula así es

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \textstyle\bigvee_{j\in J}\varphi_j\}^M = \displaystyle\bigvee_{j\in J}\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi_j\}^M \rightarrowtail X_1^M \times \cdots \times X_n^M$$

la cual tiene sentido, pues las álgebras de Heyting definidas por los subobjetos en un topos $\mathcal{E}$ tienen supremos arbitrarios (pequeños).

En general, al usar una disyunción arbitraria, una fórmula podría tener un producto infinito de definición. El problema con esto es que un funtor tendría que preservar productos infinitos para poder preservar estas fórmulas, además, no todo topos tiene todos los productos infinitos. Es por esto que en nuestra definición de disyunción arbitraria pedimos que el conjunto de variables libres de las fórmulas $\{\varphi_j \mid j \in J\}$ estén entre las de una sucesión finita $(x_1,\ldots,x_n)$. Por lo que, sin pérdida de generalidad, cada φ_j es de la forma $\varphi_j(x_1,\ldots,x_n)$.

Más precisamente, la colección de fórmulas geométricas es la menor colección de fórmulas tal que

1. Las fórmulas atómicas $R(t_1,\ldots,t_n)$, $t = t'$, $\top$ y $\bot$ son todas fórmulas geométricas.

2. Si φ y ψ son fórmulas geométricas, entonces también lo son $\varphi\wedge\psi$ y $\varphi\vee\psi$.

3. Si φ es una fórmula geométrica, entonces también lo es $\exists x\varphi$ donde x es una variable del tipo X para algún tipo X de L.

4. Si $\{\varphi_j \mid j \in J\}$ es un conjunto de fórmulas geométricas con variables libres entre las de una sucesión finita $(x_1,\ldots,x_n)$, entonces $\bigvee_{j\in J}\varphi_j$ es una fórmula geométrica.

Las fórmulas construidas sólo con los primeros tres puntos son exactamente las *fórmulas coherentes*. Las fórmulas coherentes son en particular fórmulas geométricas.

Teorema 4.4. *Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos topos, M una L-estructura en $\mathcal{E}$ y $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ un morfismo geométrico, si f^*M es la interpretación inducida por el funtor imagen inversa $f^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ y φ es una fórmula geométrica, entonces*

$$f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M\big) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^{f^*M}.$$

Análogamente, este resultado es cierto si φ es una fórmula coherente.

Demostración. Primero veamos que si t es un término de tipo Y con variables libres entre los tipos $X_1, \ldots, X_n$, entonces

$$f^*(t^M) = t^{f^*M} : X_1^{f^*M} \times \cdots \times X_n^{f^*M} \to Y^{f^*M}$$

para esto procedemos por inducción sobre la formación de términos:

1. Si $t = x_i$, entonces $t^M = \pi_i$ la proyección, pero como f^* preserva productos (por definición de morfismo geométrico), entonces preserva también las proyecciones, por lo que $f^*(t^M) = t^{f^*M}$.

2. Si $t = c$ un símbolo de constante de tipo Y entonces $t^M = ! \circ c^M$ en donde $! : X_1^{f^*M} \times \cdots \times X_n^{f^*M} \to 1$ es la única flecha; como f^* es un funtor, abre composiciones, por lo que $f^*(t^M) = f^*(! \circ c^M) = f^*(!) \circ f^*(c^M)$. Como por definición $c^{f^*M} = f^*(c^M)$ y f^* preserva al objeto terminal 1, entonces $f^*(!)$ es la única flecha correspondiente por lo que $f^*(t^M) = t^{f^*M}$.

3. Si suponemos que $f^*(t_i^M) = t_i^{f^*M}$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y tenemos que $t = g(t_1, \ldots, t_m)$, entonces por definición $t^M = g^M \circ (t_1^M, \ldots, t_m^M)$, como f^* abre composiciones, tenemos que

$$f^*(t^M) = f^*\big(g^M \circ (t_1^M, \ldots, t_m^M)\big) = f^*(g^M) \circ f^*(t_1^M, \ldots, t_m^M).$$

   Por definición $g^{f^*M} = f^*(g^M)$ y f^* preserva productos, entonces

$$f^*(t_1^M, \ldots, t_m^M) = \big(f^*(t_1^M), \ldots, f^*(t_m^M)\big) = (t_1^{f^*M}, \ldots, t_m^{f^*M})$$

   por lo que $f^*(t^M) = t^{f^*M}$.

Esto termina la prueba por inducción, de donde concluimos que $f^*(t^M) = t^{f^*M}$ para todo término t de L. Ahora procedemos a probar (también por inducción) que si φ es una fórmula geométrica, entonces

$$f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M\big) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^{f^*M}$$

primero veamos que es cierto para fórmulas atómicas:

1. Si φ es $(t = t')$, entonces $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M$ es el igualador de t^M y t'^M. Como f^* preserva igualadores, entonces $f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M\big)$ es el igualador de $f^*(t^M) = t^{f^*M}$ y $f^*(t'^M) = t'^{f^*M}$, por lo que es exactamente $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^{f^*M}$.

2. Si φ es $R(t_1, \ldots, t_m)$, entonces $\{(x_1, \ldots, x_n) | \varphi\}^M$ es el producto fibrado de R^M a lo largo de $(t_1^M, \ldots, t_m^M)$. Como f^* preserva productos fibrados, entonces $f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) | \varphi\}^M\big)$ es el producto fibrado de $f^*(R^M) = R^{f^*M}$ a lo largo de $f^*(t_1^M, \ldots, t_m^M) = (t_1^{f^*M}, \ldots, t_m^{f^*M})$, o sea, es exactamente $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^{f^*M}$.

3. Finalmente, como f^* preserva al objeto inicial 0 y a los productos, entonces

$$\begin{aligned} f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bot\}^M\big) &= f^*(0_{\mathcal{E}}) \\ &= 0_{\mathcal{F}} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \bot\}^{f^*M} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \top\}^M\big) &= f^*(X_1^M \times \cdots \times X_n^M) \\ &= X_1^{f^*M} \times \cdots \times X_n^{f^*M} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \top\}^{f^*M}. \end{aligned}$$

De aquí que el teorema se cumple para fórmulas atómicas. Para seguir con la inducción, supongamos que φ y ψ son dos fórmulas tales que

$$f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M\big) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^{f^*M}$$

y

$$f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^M\big) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^{f^*M}.$$

Como $A \wedge B \rightarrowtail C$ es el producto fibrado de $A \rightarrowtail C$ y $B \rightarrowtail C$ y f^* preserva los productos fibrados, entonces

$$\begin{aligned} &f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi \wedge \psi\}^M\big) \\ =&f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M \wedge \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^M\big) \\ =&f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M\big) \wedge f^*\big(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^M\big) \\ =&\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^{f^*M} \wedge \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^{f^*M} \\ =&\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi \wedge \psi\}^{f^*M} \end{aligned}$$

Además, como f^* preserva límites finitos y colímites, entonces preserva la imagen directa de un morfismo, que se puede construir como el igualador de las flechas obtenidas del coproducto fibrado de la flecha con ella misma. Como $A \vee B \rightarrowtail C$ es la imagen directa del coproducto $A + B \to C$ y f^* también preserva los coproductos binarios, entonces f^* preserva también los supremos binarios, de donde

$$\begin{aligned}
&f^*\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi \vee \psi\}^M\big)\\
=&f^*\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^M \vee \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \psi\}^M\big)\\
=&f^*\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^M\big) \vee f^*\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \psi\}^M\big)\\
=&\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^{f^*M} \vee \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \psi\}^{f^*M}\\
=&\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi \vee \psi\}^{f^*M}
\end{aligned}$$

Ahora, si $\alpha : C \to C'$ es un morfismo en $\mathcal{E}$, $\exists_\alpha(A) \rightarrowtail C'$ es la imagen directa de $A \rightarrowtail C \xrightarrow{\alpha} C'$ y como f^* preserva las imágenes directas, entonces $f^*\big(\exists_\alpha(A)\big) \rightarrowtail f^*(C')$ es la imagen directa de $f^*(A) \rightarrowtail f^*(C) \xrightarrow{f^*\alpha} f^*(C')$, es decir, $f^*\big(\exists_\alpha(A)\big) = \exists_{f^*\alpha}\big(f^*(A)\big)$. Como f^* preserva productos y por lo tanto las proyecciones, tenemos:

$$\begin{aligned}
&f^*\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \exists x\varphi\}^M\big)\\
=&f^*\big(\exists_\pi\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^M\big)\big)\\
=&\exists_{f^*\pi}\big(f^*\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^M\big)\big)\\
=&\exists_\pi\big(\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi\}^{f^*M}\big)\\
=&\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \exists x\varphi\}^{f^*M}
\end{aligned}$$

Esto concluye la inducción para fórmulas coherentes.

Para fórmulas geométricas, falta el caso de disyunciones infinitas; pero como f^* tiene adjunto derecho, entonces preserva todos los colímites pequeños. En particular, preserva al coproducto arbitrario

$$\coprod_{j\in J}\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varphi_j\}^M \to X_1^M \times \cdots \times X_n^M,$$

luego, preserva a la imagen directa de este morfismo, por lo que

$$\begin{aligned}
&f^*\big(\{(x_i)_{i\in I} \mid \textstyle\bigvee_{j\in J}\varphi_j\}^M\big)\\
=&f^*\big(\textstyle\bigvee_{j\in J}\{(x_i)_{i\in I} \mid \varphi_j\}^M\big)\\
=&\textstyle\bigvee_{j\in J} f^*\big(\{(x_i)_{i\in I} \mid \varphi_j\}^M\big)\\
=&\textstyle\bigvee_{j\in J}\{(x_i)_{i\in I} \mid \varphi_j\}^{f^*M}\\
=&\{(x_i)_{i\in I} \mid \textstyle\bigvee_{j\in J}\varphi_j\}^{f^*M}
\end{aligned}$$

□

Definición 4.5. Se dice que una teoría T en un lenguaje L es una *teoría coherente* o una *teoría geométrica* si todos sus axiomas son de la forma

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\big(\varphi(x_1,\ldots,x_n) \to \psi(x_1,\ldots,x_n)\big) \tag{4.1}$$

donde φ y ψ son fórmulas coherentes o geométricas respectivamente con variables libres entre las enlistadas $x_1,\ldots,x_n$.

Corolario 4.6. *Para una teoría geométrica (o coherente) T, cada morfismo geométrico $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ induce un funtor $f^* : \underline{Mod}(T, \mathcal{E}) \to \underline{Mod}(T, \mathcal{F})$.*

Demostración. Supongamos que M es una L-estructura en el topos $\mathcal{E}$ tal que todos los axiomas de T son válidos en M. Tenemos que probar que los axiomas de T son de nuevo válidos en la L-estructura f^*M en $\mathcal{F}$. Cada uno de los axiomas de T son de la forma 4.1 y una fórmula de esa forma es válida en M si y sólo si

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M \leqslant \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^M$$

como subobjetos de $X_1^M \times \cdots \times X_n^M$ (donde X_i es el tipo de la variable x_i). Como f^* preserva inclusiones de subobjetos, tenemos que

$$f^*(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^M) \leqslant f^*(\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^M)$$

y como φ y ψ son fórmulas geométricas, tenemos que

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \varphi\}^{f^*M} \leqslant \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \psi\}^{f^*M}.$$

Entonces $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi \to \psi)$ es válida en f^*M. Esto es cierto para cada axioma de T, por lo que f^*M es modelo de T en $\mathcal{F}$ siempre que M lo es en $\mathcal{E}$.
$\square$

4.3. La Categoría de Objetos Definibles

Por objetos "definibles" deseamos referirnos a los de la forma $\{x \mid \varphi(x)\}^M$ para alguna fórmula geométrica (o coherente) φ.

Preliminarmente, dado un morfismo $s : A \to B$ en un topos (o simplemente en una categoría con límites finitos), definimos a la *gráfica* de s como la flecha

$$(1, s) : A \rightarrowtail A \times B$$

salvo isomorfismo, es decir, si $\alpha : S \xrightarrow{\cong} A$ es un isomorfismo y $s' = s \circ \alpha$, entonces

$$Graph(s) : S \xrightarrow{(\alpha, s')} A \times B. \tag{4.2}$$

En efecto, $(1, s)$ y (α, s') son isomorfos como subobjetos de $A \times B$.

Bajo esta correspondencia entre flechas $s : A \to B$ y gráficas $S \rightarrowtail A \times B$, la composición de flechas puede ser expresada como un producto fibrado. Explicitamente, si $S \xrightarrow{(\alpha, s')} A \times B$ es gráfica de $s : A \to B$ y $T \xrightarrow{(\beta, t')} B \times C$ es gráfica de $t : B \to C$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S \times_B T \arrow[r, "s''"] \arrow[d, "\beta'"'] & T \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "\beta"] & C \\
S \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[ur, "t"'] & \\
A \arrow[ur, "s"'] & &
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

donde el cuadrado es el producto fibrado. Como β es un isomorfismo, entonces β' lo es, además $t' \circ s'' = t \circ s \circ \alpha \circ \beta'$, por lo que $Graph(t \circ s) = (\alpha \circ \beta', t' \circ s'')$.

A partir de este momento, para ahorrar notación, escribiremos a veces X para referirnos a una lista finita de tipos de un lenguaje $X_1, \ldots, X_n$ o $X_1 \times \cdots \times X_n$ y escribiremos x, para denotar a $(x_1, \ldots, x_n)$. Además, para cada tal $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, escribiremos X^M para representar al objeto $X_1^M \times \cdots \times X_n^M$ de $\mathcal{E}$.

Definición 4.7. Dado un lenguaje L y una L-interpretación M en un topos $\mathcal{E}$, definimos a la categoría $\mathbf{Def}(M)$ de los objetos definibles de M en la que los objetos son parejas (A, X) donde X es una lista de tipos del lenguaje L, mientras que A es un subobjeto $A \rightarrowtail X^M$ (es decir, es una clase de equivalencia de monomorfismos) para el cual existe una *fórmula geométrica* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (denotada también como $\varphi(x)$) con variables libres entre $x_1, \ldots, x_n$, tal que

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}^M.$$

A un subobjeto $A \rightarrowtail X^M$ así se le llama un *subobjeto definible de* X^M.

Note que pueden existir varias fórmulas diferentes que definen al mismo subobjeto $A \rightarrowtail X$. Por ejemplo, si $\varphi(x)$ define a A, entonces también lo define la fórmula $\varphi(x')$ obtenida por $\varphi(x)$ al reemplazar las variables $x_1, \ldots, x_n$ por variables distintas pero de los mismos tipos respectivos $x'_1, \ldots, x'_n$.

En tal caso, decimos que $\varphi(x')$ es una *variable alfabética* de $\varphi(x)$.

Ahora definimos a los morfismos en $\mathbf{Def}(M)$ usando el concepto de gráfica de un morfismo introducido anteriormente. Si (A, X) y (B, Y) son dos objetos de $\mathbf{Def}(M)$ (donde $Y = Y_1, \ldots, Y_m$ es otra lista de tipos del lenguaje L), entonces un morfismo definible

$$(s, X, Y) : (A, X) \to (B, Y)$$

(o simplemente $s : (A, X) \to (B, Y)$) es un morfismo $s : A \to B$ de $\mathcal{E}$ tal que su gráfica $S \subseteq A \times B$, vista como subobjeto de $X^M \times Y^M$ es un subobjeto definible. Es decir, existe una fórmula geométrica $\sigma(x, y) = \sigma(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ tal que

$$S = \{(x, y) \mid \sigma(x, y)\}^M$$

es una igualdad de subobjetos de $X^M \times Y^M$.

Para definir la composición en $\mathbf{Def}(M)$, veamos que si dos morfismos en $\mathcal{E}$ son definibles y se pueden componer, entonces su composición es definible también:

Supongamos que $(A, X), (B, Y)$ y (C, Z) son tres objetos de $\mathbf{Def}(M)$ definidos por las fórmulas geométricas $\varphi(x), \psi(y)$ y $\chi(z)$ respectivamente y

$$(s, X, Y) : (A, X) \to (B, Y) \qquad \text{y} \qquad (t, Y, Z) : (B, Y) \to (C, Z)$$

son dos morfismos definibles (es decir, con gráficas definibles) por las fórmulas geométricas $\sigma(x, y)$ y $\tau(y, z)$ respectivamente, entonces su composición es la flecha

$$(t \circ s, X, Z) : (A, X) \to (C, Z),$$

dada por la composición en $\mathcal{E}$ de $s : A \to B$ y $t : B \to C$, cuya gráfica está definida como subobjeto de $X^M \times Z^M$ por la fórmula

$$\exists y\big(\sigma(x,y) \wedge \tau(y,z)\big), \tag{4.4}$$

la cual es de nuevo una fórmula geométrica al serlo $\sigma(x,y)$ y $\tau(y,z)$ (o coherente si σ y τ son coherentes).

Para probar lo anterior, consideremos a

$$S = \{(x,y) \mid \sigma(x,y)\}^M \subseteq A \times B \subseteq X^M \times Y^M$$

la gráfica de s y a

$$T = \{(y,z) \mid \tau(y,z)\}^M$$

la gráfica de t. Definimos también al subobjeto

$$R = \{(x,y,z) \mid \sigma(x,y) \wedge \tau(y,z)\}$$

de $A \times B \times C \subseteq X^M \times Y^M \times Z^M$. Por definición,

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y,z) \mid \sigma(x,y)\}^M \wedge \{(x,y,z) \mid \tau(y,z)\}^M \\ &= (S \times Z^M) \wedge (X^M \times T), \end{aligned}$$

como en el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X^M \times T \arrow[d, tail] \\ S \times Z^M \arrow[r, tail] & X^M \times Y^M \times Z^M. \end{tikzcd}$$

Este producto fibrado se puede reescribir por etapas combinando las descripciones de S y de T en el diagrama

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A \times T \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X^M \times T \arrow[d, tail] \\ S \times C \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A \times B \times C \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & X^M \times B \times C \arrow[d, tail] \\ S \times Z^M \arrow[r, tail] & A \times B \times Z^M \arrow[r, tail] & X^M \times Y^M \times Z^M. \end{tikzcd}$$

Donde el vértice de arriba a la izquierda R' está definido como el producto fibrado de esa parte, mientras que los otros tres cuadrados son trivialmente productos fibrados. De esta forma el cuadrado exterior es también un producto fibrado, por lo que es isomorfo al producto fibrado R de antes, así tenemos que R también cabe en el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A \times T \arrow[d, tail, "1\times(\beta,t')"] \\
S \times C \arrow[r, tail, "(\alpha,s')\times 1"'] & A \times B \times C
\end{tikzcd}$$

donde α y β son los isomorfismos correspondientes, $s' = s \circ \alpha$ y $t' = t \circ \beta$ igual que en 4.2. De este diagrama podemos obtener otro producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A \times T \arrow[r] \arrow[d, tail, "1\times(\beta,t')"] & T \arrow[d, tail, "(\beta,t')"] \\
S \times C \arrow[r, tail, "(\alpha,s')\times 1"'] \arrow[d] & A \times B \times C \arrow[r] \arrow[d] & B \times C \arrow[d, "\pi_1"] \\
S \arrow[r, tail, "(\alpha,s')"'] & A \times B \arrow[r, "\pi_2"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Claramente cada rectángulo es un producto fibrado por lo que el rectángulo exterior también lo es. Además, la composición de las flechas de la derecha es β, mientras que la composición de las de abajo da s', por lo que R es el producto fibrado $S \times_B T$ que es exactamente la gráfica de $t \circ s$, según lo que vimos en 4.3. El subobjeto

$$R'' = \{(x,z) \mid \exists y\big(\sigma(x,y) \wedge \tau(y,z)\big)\} \subseteq A \times C$$

es la imagen directa de $R \subseteq A \times B \times C$ bajo la proyección $A \times B \times C \to A \times C$, pero la como $R \to A \times C$ es la gráfica de $t \circ s$, en particular ya es un monomorfismo, por lo que $R'' \cong R$.

Esto prueba que la fórmula

$$\exists y\big(\sigma(x,y) \wedge \tau(y,z)\big)$$

en efecto define a la gráfica de $t \circ s$.

Para concluir que $\mathbf{Def}(M)$ es una categoría bien definida, falta sólo probar que si (A, X) es un objeto en $\mathbf{Def}(M)$, entonces la identidad $1_A : A \to A$ en $\mathcal{E}$ es definible en M con una fórmula geométrica (que en particular es coherente).

Supongamos que A está definida por la fórmula $\varphi(x)$, veamos que la gráfica de la identidad Δ_A es

$$\{(x,x') \mid \varphi(x) \wedge \varphi(x') \wedge x_1 = x'_1 \wedge \cdots \wedge x_n = x'_n\}^M \subseteq X^M \times X^M$$

donde $x'_1, \ldots, x'_n$ son nuevas variables de los mismos tipos que $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente. Para esto, tenemos que por definición, este subobjeto es

$$\{(x,x') \mid \varphi(x)\} \wedge \{(x,x') \mid \varphi(x')\} \wedge \{(x,x') \mid x = x'\},$$

que es igual a $A \times X \wedge X \times A \wedge \Delta_X = \Delta_A$, por lo que

$$1_{(A,X)} = (1_A, X, X) : (A, X) \to (A, X)$$

es la identidad de (A, X) en $\mathbf{Def}(M)$.

Así concluimos que $\mathbf{Def}(M)$ es una categoría bien definida.

Definición 4.8. $\mathbf{Def}(M)$ es la categoría de objetos y morfismos definibles en el modelo M por fórmulas geométricas, análogamente definimos a $\mathbf{Def}^*(M)$ como la categoría de objetos y morfismos definibles por fórmulas coherentes.

Los siguientes resultados y definiciones aplican tanto para $\mathbf{Def}(M)$ como para $\mathbf{Def}^*(M)$ y las pruebas son idénticas, pero escribiremos sólo $\mathbf{Def}(M)$ para simplificar la notación.

Podemos definir ahora al funtor "olvidadizo" $\mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$. Un objeto (A, X) de $\mathbf{Def}(M)$ es una clase de equivalencia de monomorfismos, por lo que elejimos a un monomorfismo particular de cada clase de equivalencia y tomamos al objeto elejido A como el valor de (A, X) bajo este funtor. Este "funtor que olvida" es claramente fiel.

Probamos a continuación que $\mathbf{Def}(M)$ tiene todos los límites finitos y que el funtor que olvida los preserva.

Lema 4.9. *Para toda L-estructura M en un topos $\mathcal{E}$, la categoría $\mathbf{Def}(M)$ (de objetos y morfismos definibles por fórmulas geométricas) tiene objeto terminal y este es preservado por el funtor que olvida.*

Demostración. Sea X la lista vacía de tipos, es decir $X = X_1, \ldots, X_n$ donde $n = 0$, entonces X^M es un producto vacío en $\mathcal{E}$ por lo que $X^M = 1_{\mathcal{E}}$, el objeto terminal del topos. consideremos entonces al par $(1_{\mathcal{E}}, X)$ el cual es un objeto de $\mathbf{Def}(M)$ pues

$$1_{\mathcal{E}} = \{ \cdot \mid \top \}^M.$$

Más aún, si (B, Y) es un objeto de $\mathbf{Def}(M)$, entonces existe una única flecha $B \to 1_{\mathcal{E}}$ en $\mathcal{E}$ y este morfismo es definible (la gráfica de este morfismo es el mísmo objeto B de nuevo). Se sigue que, para la secuencia vacía X, la pareja $(1_{\mathcal{E}}, X)$ es un objeto terminal de $\mathbf{Def}(M)$. Además, al aplicarle el funtor que olvida, obtenemos al objeto terminal de $\mathcal{E}$. □

Lema 4.10. *Para cada L-estructura M, la categoría $\mathbf{Def}(M)$ tiene a todos los productos fibrados y estos son preservados por el funtor que olvida $\mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$.*

Demostración. Sean $(A, X), (B, Y)$ y (C, Z) objetos de $\mathbf{Def}(M)$ con monomorfismos

$$i : A \rightarrowtail X^M, \qquad j : B \rightarrowtail Y^M \quad \text{y} \quad k : C \rightarrowtail Z^M$$

y sean

$$(A, X) \xrightarrow{s} (C, Z) \xleftarrow{t} (B, Y)$$

morfismos de $\mathbf{Def}(M)$ definidos por $\sigma(x,z)$ y $\tau(y,z)$ respectivamente. Afirmamos que el producto fibrado buscado puede ser construido como

$$\begin{tikzcd}
(A \times_C B, (X,Y)) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & (B,Y) \arrow[d, "t"] \\
(A,X) \arrow[r, "s"'] & (C,Z),
\end{tikzcd}$$

donde $A \times_C B$ es el producto fibrado de $s : A \to C$ y $t : B \to C$ en $\mathcal{E}$ visto como subobjeto de $X^M \times Y^M$ como en

$$A \times_C B \rightarrowtail A \times B \rightarrowtail X^M \times Y^M.$$

Este resultado, una vez probado, muestra que el funtor que olvida preserva productos fibrados.

Primero veamos que $A \times_C B$ y las proyecciones son definibles por fórmulas geométricas. Consideremos primero al subobjeto definible R de $X^M \times Y^M$ dado por

$$R = \{(x,y) \mid \exists z\big(\sigma(x,z) \wedge \tau(y,z)\big)\}^M.$$

Probemos la igualdad $R = A \times_C B$. Primero, como $\sigma(x,z)$ define la gráfica de s, digamos sin pérdida de generalidad

$$A \xrightarrow{(1,s)} A \times C \rightarrowtail X^M \times Z^M$$

entonces $\{(x,y,z) \mid \sigma(x,z)\}^M$ es el subobjeto

$$A \times Y^M \xrightarrow{(i,k)(1,s)\times 1} X^M \times Z^M \times Y^M \cong X^M \times Y^M \times Z^M$$

y similarmente $\{(x,y,z) \mid \tau(y,z)\}^M$ es el subobjeto

$$X^M \times B \xrightarrow{1\times(j,k)(1,t)} X^M \times Y^M \times Z^M.$$

Luego el objeto $P = \{(x,y,z) \mid \sigma(x,z) \wedge \tau(y,z)\}^M$ se obtiene por el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "{(p,v)}"] \arrow[d, "{(u,q)}"'] & X^M \times B \arrow[d, "{(1\times j, kt\pi_2)}"] \\
A \times Y^M \arrow[r, "{(i\times 1, ks\pi_1)}"'] & X^M \times Y^M \times Z^M.
\end{tikzcd}$$

(En este diagrama (p,v) y (u,q) simplemente denotan a las proyecciones del producto fibrado P.) Note que la proyección de $P \to X^M \times Y^M \times Z^M$ en los primeros dos factores es

$$(p,q) : P \to X^M \times Y^M$$

por lo que el subobjeto definido antes, R, es exactamente la imagen directa de este morfismo (p, q). Igual que antes, extendemos el producto fibrado anterior a uno

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "{(p,v)}"] \arrow[d, "{(u,q)}"'] & X^M \times B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "{(j,k)(1,t)}"] \\
A \times Y^M \arrow[r] \arrow[d] & X^M \times Y^M \times Z^M \arrow[r] \arrow[d] & Y^M \times Z^M \arrow[d] \\
A \arrow[r, "{(i,k)(1,s)}"'] & X^M \times Z^M \arrow[r] & Z^M
\end{tikzcd}$$

con las proyecciones correspondientes. Como cada rectángulo es un producto fibrado, entonces el rectángulo exterior lo es, por lo que tenemos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "v"] \arrow[dd, "u"'] & & B \arrow[dd, "kt"] \arrow[dl, dashed, "t"'] \\
& C \arrow[dr, tail, "k"] & \\
A \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[rr, "ks"'] & & Z^M.
\end{tikzcd}$$

Y así esl cuadrado más pequeño con vértices P, A, B y C hace un producto fibrado también, de esta forma $P = A \times_C B$ con proyecciones u y v.

Por el cuadrado de la definición original de P tenemos que $p = iu$ y $q = jv$ por lo que

$$(p, q) : P \xrightarrow{(u,v)} A \times B \xrightarrow{(i,j)} X^M \times Y^M.$$

Además, (i, j) es mono al ser una pareja de monos y por la propiedad del producto fibrado, la pareja (u, v) también es un mono, de donde (p, q) es mono y por lo tanto, al ser R su imagen directa, $P = R$ como subobjetos de $X^M \times Y^M$, así $R = A \times_C B$ como se quería.

Falta aún probar que las proyecciones $\pi_1 : A \times_C B \to A$ y $\pi_2 : A \times_C B \to B$ son definibles. Para π_1, hay que probar que la gráfica

$$A \times_C B \xrightarrow{(1,\pi_1)} (A \times_C B) \times A \xrightarrow{(i \times j) \times i} (X^M \times Y^M) \times X^M$$

es un objeto definible. Para esto, consideremos al diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r, tail, "{(1,\pi_1)}"] \arrow[d, tail, "i \times j"'] & (A \times_C B) \times A \arrow[d, tail, "(i \times j) \times i"] \\
X^M \times Y^M \arrow[r, tail, "{(1,\pi_1)}"'] & (X^M \times Y^M) \times X^M
\end{tikzcd}$$

que es un producto fibrado. De esta forma, el subobjeto que buscamos está dado por el ínfimo de los dos subobjetos de las esquinas de abajo a la izquierda y de arriba a la derecha. Cada uno de estos objetos es definible, respectivamente como

$$\{(x, y, x') \mid x = x'\} \quad \text{y} \quad \{(x, y, x') \mid \exists z\big(\sigma(x, z) \wedge \tau(y, z)\big) \wedge \varphi(x')\},$$

así que el subobjeto buscado está definido por la conjunción de estas dos fórmulas. El caso para π_2 es idéntico. Así tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A \times_C B, (X, Y)) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & (B, Y) \arrow[d, "t"] \\
(A, X) \arrow[r, "s"'] & (C, Z),
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado conmutativo de $\mathbf{Def}(M)$.

Para completar la prueba del lema, finalmente mostramos que este cuadrado tiene la propiedad universal requerida para ser producto fibrado de $\mathbf{Def}(M)$. Para esto, consideremos otro objeto (E, W) de $\mathbf{Def}(M)$, donde $W = W_1, \ldots, W_k$ es una lista de tipos del lenguaje mientras que $l : E \rightarrowtail W^M$ es un subobjeto definible. Sean $f : (E, W) \to (A, X)$ y $g : (E, W) \to (B, Y)$ morfismos en $\mathbf{Def}(M)$ tales que $s \circ f = t \circ g$ ahí. En particular $s \circ f = t \circ g : E \to C$ como flechas de $\mathcal{E}$, de forma que la propiedad universal del producto fibrado en $\mathcal{E}$ da una única flecha (f, g) como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "(f,g)"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "t"] \\
& A \arrow[r, "s"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Queremos probar que la flecha (f, g) así construida representa a una flecha $(E, W) \to \big((A \times_C B), (X, Y)\big)$ en $\mathbf{Def}(M)$; esto es que la gráfica

$$E \xrightarrow{((f,g),1)} (A \times_C B) \times E \xrightarrow{i \times j \times l} X^M \times Y^M \times W^M$$

es un subobjeto definible. Como las flechas dadas $f : E \to A$ y $g : E \to B$ tienen gráficas definibles, existen fórmulas $\phi(x, w)$ y $\psi(y, w)$ con las que se dan las igualdades

$$\big(E \xrightarrow{(f,1)} A \times E \xrightarrow{i \times l} X^M \times W^M\big) = \{(x, w) \mid \phi(x, w)\}^M,$$

$$\big(E \xrightarrow{(g,1)} B \times E \xrightarrow{j \times l} Y^M \times W^M\big) = \{(y, w) \mid \psi(y, w)\}^M,$$

como subobjetos de $X^M \times W^M$ y $Y^M \times W^M$ respectivamente.

Afirmamos que

$$\{(x, y, w) \mid \phi(x, w) \wedge \psi(y, w)\}^M$$

es la gráfica de (f, g). En efecto, cada uno de los rectángulos siguientes son productos fibrados en $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, "{(g,1)}"] \arrow[d, tail, "{(f,1)}"'] & B \times E \arrow[r, tail, "j\times 1"] \arrow[d, tail, "{(f\pi_2,\pi_1,\pi_2)}"] & Y^M \times E \arrow[d, tail, "{(f\pi_2,\pi_1,\pi_2)}"] \\
A \times E \arrow[r, tail, "{(\pi_1,g\pi_2,\pi_2)}"'] \arrow[d, tail, "i\times 1"'] & A \times B \times E \arrow[r, tail, "1\times j\times 1"'] \arrow[d, tail, "i\times 1\times 1"] & A \times Y^M \times E \arrow[d, tail, "i\times 1\times l"] \\
X^M \times E \arrow[r, tail, "{(\pi_1,g\pi_2,\pi_2)}"'] & X^M \times B \times E \arrow[r, tail, "1\times j\times l"'] & X^M \times Y^M \times W^M.
\end{tikzcd}$$

Pero la composición de las flechas de abajo es el subobjeto definido por

$$\{(x, y, w) \mid \psi(y, w)\}^M$$

y la composición de la derecha es el subobjeto

$$\{(x, y, w) \mid \phi(x, w)\}^M.$$

Su conjunción es entonces el producto fibrado $E \rightarrowtail X^M \times Y^M \times W^M$ dado por el cuadrado exterior en el diagrama anterior que es exactamente el subobjeto que queríamos, por lo tanto es un subobjeto definible. Esto concluye la prueba del lema.

□

Por los lemas 4.9 y 4.10, las categorías $\mathbf{Def}(M)$ y $\mathbf{Def}^*(M)$ heredan de $\mathcal{E}$ todos los límites finitos, y sus funtores que olvidan $\mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$ y $\mathbf{Def}^*(M) \to \mathcal{E}$ los preservan.

$\mathbf{Def}(M)$ y $\mathbf{Def}^*(M)$ heredan también de $\mathcal{E}$ (la base de) una topología de Grothendieck. Por la naturaleza infinitaria de las fórmulas geométricas, haremos definiciones distintas para las topologías de $\mathbf{Def}(M)$ y de $\mathbf{Def}^*(M)$:

Definición 4.11. En un topos cocompleto $\mathcal{E}$, hay una base en la que cada familia epimórfica es una cubierta. De esta forma, si M es una T-teoría sobre un topos cocompleto $\mathcal{E}$, una familia pequeña de morfismos

$$\{s_i : (A_i, X^i) \to (B, Y) \mid i \in I\}$$

es una *cubierta* del objeto (B, Y) de $\mathbf{Def}(M)$ cuando esta familia da una familia epimórfica de $\mathcal{E}$ bajo el funtor que olvida; esto es, cuando el mapeo inducido $\coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\coprod s_i} B$ es un epimorfismo en $\mathcal{E}$.

Se sigue inmediatamente que estas familias forman una base para una topología de Grothendieck sobre $\mathbf{Def}(M)$.

Definición 4.12. Para la topología de $\mathbf{Def}^*(M)$ no es necesario que $\mathcal{E}$ sea cocompleto; una *cubierta* en $\mathbf{Def}^*(M)$ es una familia *finita*

$$\{s_i : (A_i, X^i) \to (B, Y) \mid i = 1, \ldots, m\}$$

tal que, bajo el funtor que olvida, da una familia epimórfica finita de $\mathcal{E}$.

Uno puede hacer esta definición más explícita como sigue:

Supongamos para el objeto (B, Y) de $\mathbf{Def}(M)$ que el subobjeto $B \subseteq Y^M$ está definido por alguna fórmula geométrica $\psi(y) = \psi(y_1, \ldots, y_k)$, mientras que cada subobjeto $A_i \subseteq (X^i)^M$ está definido por la fórmula $\varphi_i(x^i) = \varphi_i(x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i)$, para $i \in I$; más aún, supongamos que la gráfica S_i de el morfismo dado s_i está definida por la fórmula $\sigma_i(x^i, y)$.

Entonces la condición de que la familia $\{s_i : (A_i, X^i) \to (B, Y) \mid i \in I\}$ forme una cubierta en $\mathbf{Def}(M)$ es también "definible" por una fórmula geométrica. Esto esta escrito en el siguiente lema.

Lema 4.13. *Si $\mathcal{E}$ es un topos cocompleto, entonces una familia $\{s_i : (A_i, X^i) \to (B, Y) \mid i \in I\}$ de flechas definibles es una cubierta de (B, Y) para la topología heredada sobre* ***Def***(M) *si y sólo si la fórmula*

$$\forall y\big(\psi(y) \to \big(\textstyle\bigvee_{i \in I} \exists x^i \sigma_i(x^i, y)\big)\big) \tag{4.5}$$

es verdadera en el modelo M del topos $\mathcal{E}$.

Análogamente, si $\mathcal{E}$ es un topos cualquiera, entonces la familia

$$\{s_i : (A_i, X^i) \to (B, Y) \mid i = 1, \ldots, m\}$$

de ***Def***$^*(M)$ *es una cubierta de (B, Y) si y sólo si la fórmula*

$$\forall y\big(\psi(y) \to \big(\exists x^1 \sigma_1(x^1, y) \vee \cdots \vee \exists x^m \sigma_m(x^m, y)\big)\big)$$

es verdadera en M.

Aquí las enumeraciones de las sucesiones de tipos X^i y de variables x^i están hechas con superíndices; $X^i = X_1^i, \ldots, X_{n_i}^i$ y $x^i = x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i$ donde cada x_j^i es una variable del tipo X_j^i.

Demostración. Probaremos el lema para $\mathbf{Def}(M)$; la parte de $\mathbf{Def}^*(M)$ es idéntica si tomamos a I finito.

La fórmula 4.5 es verdadera en M si y sólo si el subobjeto

$$B = \{y \mid \psi(y)\}^M \subseteq Y^M = Y_1^M \times \cdots \times Y_k^M$$

está contenido en el subobjeto

$$S = \{y \mid \big(\textstyle\bigvee_{i \in I} \exists x^i \sigma_i(x^i, y)\big)\}^M.$$

Como para cada $i \in I$, la gráfica S_i de s_i está definida por

$$\{(x^i, y) \mid \sigma_i(x^i, y)\}^M \subseteq (X^1 \times Y)^M,$$

sabemos que al aplicar el cuantificador existencial

$$\{y \mid \exists x^i \sigma_i(x^i, y)\}^M \subseteq Y^M$$

es la imagen de la gráfica $S_i \subseteq A_i \times B$ bajo la proyección $\pi_2 : A_i \times B \to B$.

Pero el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, tail] \arrow[d, "\pi_1"', "\cong"] & A_i \times B \arrow[d, "\pi_2"] \\ A_i \arrow[r, "s_i"'] & B \end{tikzcd}$$

muestra que esta imagen es exactamente la imagen del morfismo $s_i : A_i \to B$.

Por lo tanto, por la interpretación que definimos para la disyunción, el subobjeto S es exactamente el supremo de las imágenes de las flechas s_i.

$$S = \bigvee_{i\in I} Im(s_i) \subseteq B.$$

Pero este supremo S puede también darse como la imagen de la flecha

$$\coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\coprod s_i} B$$

inducida en el coproducto por los mapeos s_i. Ahora, esta flecha es epi si y sólo si su imagen S contiene a todo B; esto es, si y sólo si la fórmula geométrica

$$\forall y\big(\psi(y) \to \big(\bigvee_{i\in I} \exists x^i \sigma_i(x^i, y)\big)\big)$$

es verdadera en el modelo M.

$\square$

En el lema siguiente probaremos que estas topologías de Grothendieck sobre $\mathbf{Def}(M)$ y sobre $\mathbf{Def}^*(M)$ son subcanónicas en el sentido de la definición 3.3 del capítulo anterior; es decir, que para todo objeto (E, Z) de $\mathbf{Def}(M)$, la pregavilla representable $\boldsymbol{y}(E, Z) = Hom_{\mathbf{Def}(M)}(\_\,, (E, Z))$ es una gavilla para esta topología.

Para esto, recordemos que una familia de morfismos $\{s_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ de $\mathcal{E}$ es llamada *efectiva* si para toda familia $\{f_i : A_i \to E \mid i \in I\}$ compatible; es decir, que hace conmutar al cuadrado

$$\begin{tikzcd} A_i \times_B A_j \arrow[r] \arrow[d] & A_j \arrow[d, "f_j"] \\ A_i \arrow[r, "f_i"'] & E \end{tikzcd}$$

(donde $A_i \times_B A_j$ es el producto fibrado de s_j con s_i) para cada par f_i, f_j; existe una única $f : B \to E$ con $f \circ s_i = f_i$ para cada $i \in I$.

Recordemos que en el lema 3.6 del capítulo anterior probamos que en un topos $\mathcal{E}$, cualquier familia epimórfica finita es efectiva (en este sentido), y que si $\mathcal{E}$ es cocompleto entonces cualquier familia epimórfica es efectiva.

Lema 4.14. *Las topologías de Grothendieck sobre **Def**(M) y sobre **Def**$*$ (M) son subcanónicas.*

Nuevamente haremos la prueba sólo para $\mathbf{Def}(M)$ suponiendo que M es un modelo en un topos $\mathcal{E}$ cocompleto.

El caso para $\mathbf{Def}^*(M)$ es idéntico si consideramos a $\mathcal{E}$ como un topos cualquiera y a I como un conjunto finito.

Demostración. Supongamos que (E, Z) es un objeto de $\mathbf{Def}(M)$; donde, como antes, $Z = Z_1, \ldots Z_n$ es una secuencia de tipos mientras que $E \subseteq Z^M$ es un subobjeto definible por una fórmula geométrica, digamos $Z = \{z \mid \chi(z)\}^M$.

Para mostrar que $Hom(\_\,,(E, Z))$ es una gavilla, debemos considerar a una familia cubriente

$$\{s_i : (A_i, X^i) \to (B, Y) \mid i \in I\},$$

y mostrar que una familia compatible de flechas $f_i : (A_i, X^i) \to (E, Z)$ determina a un único morfismo $f : (B, Y) \to (E, Z)$ en $\mathbf{Def}(M)$ con $f \circ s_i = f_i$. Aplicando el funtor que olvida $\mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$, la familia cubriente de las s_i llevan a una familia epimórfica $\{s_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ en $\mathcal{E}$ que es por lo tanto una familia efectiva; además, las flechas f_i llevan a una familia complatible en $\mathcal{E}$. Entonces, hay una única flecha $f : B \to E$ en $\mathcal{E}$ tal que $f \circ s_i = f_i$ para toda $i \in I$.

Sólo queda verificar que esta f se puede ver como un morfismo $(B, Y) \to (E, Z)$ en $\mathbf{Def}(M)$; en otras palabras, que la gráfica de f es un subobjeto definible de $Y^M \times Z^M$. Para esto, supongamos que s_i, A_i y B están definidos respectivamente por las fórmulas geométricas

$$\sigma_i(x^i, y), \qquad \varphi_i(x^i), \qquad \psi(y)$$

como antes, y supongamos que f_i está definida por alguna fórmula $\tau_i(x^i, z)$ para cada $i \in I$.

Afirmamos entonces que la única flecha f está definida por la siguiente fórmula con variables libres entre las de y, z:

$$\bigvee_{i \in I} \exists x^i \big(\sigma_i(x^i, y) \wedge \tau_i(x^i, z)\big).$$

En efecto, para cada índice $i \in I$, consideremos al producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
S_i \times_{A_i} F_i \arrow[r] \arrow[d] & F_i \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\cong"] & E \\
S_i \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, dashed] & A_i \arrow[ur, dashed, "f_i"'] \arrow[dl, dashed, "s_i"] & \\
B & &
\end{tikzcd}$$

de las gráfias S_i y F_i de los morfismos s_i y f_i. Por la definición del cuantificador existencial, el subobjeto

$$\{(y, z) \mid \exists x^i \big(\sigma_i(x^i, y) \wedge \tau_1(x^i, z)\big)\}^M \subseteq B \times E$$

es la imagen de $S_i \times_{A_i} F_i \to B \times E$. Pero en el cuadrado producto fibrado del diagrama anterior, todas las flechas son isomorfismos pues F_i y S_i son gráficas. Así, la imagen anterior es lo mismo que la imagen de $(s_i, f_i) : A_i \to B \times E$, como se sugiere en los triángulos exteriores del diagrama. Más aún, para cada índice i, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "s_i"] \arrow[dr, "(s_i,f_i)"'] & B \arrow[d, tail, "(1,f)"] \\ & B \times E \end{tikzcd}$$

conmuta, porque $f \circ s_i = f_i$. Esto muestra que

$$Im(s_i, f_i) \subseteq Graph(f) = \big((1, f) : B \rightarrowtail B \times E\big).$$

Como $\coprod A_i \xrightarrow{\coprod s_i} B$ es un epimorfismo, se sigue que

$$\bigvee_{i \in I} Im(s_i, f_i) = Graph(f).$$

Esto significa que la fórmula

$$\bigvee_{i \in I} \exists x^i \big(\sigma_i(x^i, y) \wedge \tau_i(x^i, z)\big)$$

que define al supremo de las imágenes $Im(s_i, f_i)$, también define a (la gráfica de) f, como se quería.

$\square$

La diferencia entre las topologías definidas para $\mathbf{Def}(M)$ y $\mathbf{Def}^*(M)$ es que las familias cubrientes de $\mathbf{Def}^*(M)$ están conformadas por familias finitas, lo cual hace que su topos de gavillas sea coherente.

Aunque pudimos haber definido a la topología para $\mathbf{Def}(M)$ también sólo con familias finitas, veremos en la sección siguiente que agregar a las familias infinitas es imprescindible para la construcción del *topos clasificante*.

Capítulo 5

Topos Clasificante

En este capítulo definimos lo que es el *topos clasificante de una teoría* y luego procedemos a definir al sitio sintáctico de una teoría T. Este sitio tiene una construcción similar a la de la categoría de objetos definibles del capítulo anterior, pero en este caso tomamos en cuanta a todos los topos. Aunque la construcción que hacemos aquí está basada en la que aparece en [Mac Lane and Moerdijk, 1992], nosotros hacemos continuamos haciendo una distinción para nuestra definición del sitio sintáctico de una teoría geométrica y la de una teoría coherente.

En la segunda sección probamos que el topos de gavillas sobre el sitio sintáctico de una teoría geométrica o coherente es un topos clasificante de esa teoría.

Luego, en la última sección, definimos lo que es un *modelo universal* de una teoría y mostramos que el topos clasificante de una teoría siempre tiene un modelo universal de la teoría que clasifica. Además, para el caso de un topos clasificante como el que construimos en la sección anterior, damos explícitamente al modelo universal.

Finalmente notamos que el topos clasificante de una teoría coherente (como el que construimos nosotros) es un topos coherente, gracias a esto, usando el teorema de Deligne, llegamos a un resultado bastante importante: en una teoría coherente T, una fórmula coherente es verdadera en todo modelo de T en cualquier topos si y sólo si es verdadera en todo modelo de T de la teoría de conjuntos.

Definición 5.1. El *topos clasificante* de una teoría T es un topos $\boldsymbol{S}(T)$ tal que para todo topos cocompleto $\mathcal{E}$, existe una equivalencia de categorías

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \boldsymbol{S}(T)) \cong \underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}),$$

entre la categoría de los morfismos geométricos de $\mathcal{E}$ a $\boldsymbol{S}(T)$ y la categoría de los modelos de T en el topos $\mathcal{E}$, que es natural en $\mathcal{E}$.

Uno se podría preguntar si para cualquier lenguaje de primer orden L, todas las teorías tienen topos clasificante, o por el contrario, si existe alguna una teoría con topos clasificante. En esta sección probaremos que toda *teoría geométrica* tiene topos clasificante haciendo su construcción como un topos de Grothendieck a partir de una categoría "sintáctica" $\mathbf{B}(T)$ equipada con una topología de Grothendieck $J(T)$.

5.1. Sitios Sintácticos

Definición 5.2. Sea L un lenguaje de primer orden y T una teoría cualquiera, definimos a la *categoría sintáctica (geométrica) de* T, $\mathbf{B}(T)$, cuyos objetos están dados por una lista de tipos $X_1, \ldots, X_n$ y una clase de equivalencia

$$[\varphi(x_1, \ldots, x_n)]$$

donde $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula geométrica con variables libres entre x_1, $\ldots, x_n$ de tipos $X_1, \ldots, X_n$ respectivamente.

Dos fórmulas $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi'(x'_1, \ldots, x'_n)$ son equivalentes si las variables $x'_1, \ldots, x'_n$ y $x_1, \ldots, x_n$ son de los mismos tipos respectivos $X_1, \ldots, X_n$ y para todo topos cocompleto $\mathcal{E}$ y todo modelo M de la teoría T en $\mathcal{E}$ se tiene que

$$\{x \mid \varphi(x)\}^M = \{x' \mid \varphi'(x')\}^M$$

como subobjetos de $X_1^M \times \cdots \times X_n^M$ en $\mathcal{E}$. Denotamos a tal objeto de $\mathbf{B}(T)$ como $[\varphi, X]$.

Para definir a los morfismos de $\mathbf{B}(T)$, supongamos que $[\varphi, X]$ y $[\psi, Y]$ son dos objetos de $\mathbf{B}(T)$. Debemos asumir que todas las variables de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ son distintas a las de $\psi(y_1, \ldots, y_m)$. Podemos asumir esto sin pérdida de generalidad, pues de ser así, siempre podemos sustituir a $\varphi(x)$ por una variante alfabética $\varphi(x')$ apropiada. Ahora, los morfismos $[\varphi, X] \to [\psi, Y]$ son de nuevo clases de equivalencia $[\sigma; X, Y]$ de ciertas *fórmulas geométricas* $\sigma(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ con variables libres entre x_i de tipos X_i y y_j de tipos Y_j. Una fórmula $\sigma(x, y)$ así representa a una flecha

$$[\sigma; X, Y] : [\varphi, X] \to [\psi, Y]$$

si para todo topos cocompleto $\mathcal{E}$ y todo modelo M de T, el subobjeto

$$\{(x, y) \mid \sigma(x, y)\}^M \subseteq X^M \times Y^M$$

es la gráfica de un morfismo $\{x \mid \varphi(x)\}^M \to \{y \mid \psi(y)\}^M$ (en particular, este objeto $\{(x, y) \mid \sigma(x, y)\}^M$ está contenido en el subobjeto producto $\{x \mid \varphi(x)\}^M \times \{y \mid \psi(y)\}^M$ de $X^M \times Y^M$).

Más aún, dos fórmulas así son equivalentes si para todo modelo M de la teoría T en un topos cocompleto $\mathcal{E}$, ambas fórmulas definen a la gráfica de la misma flecha $\{x \mid \varphi(x)\}^M \to \{y \mid \psi(y)\}^M$.

Para ver que esta definición provee objetos y morfismos de una categoría $\mathbf{B}(T)$ hay que definir la composición y mostrar que tiene identidades.

Para la composición, consideremos dos morfismos

$$[\sigma; X, Y] : [\varphi, X] \to [\psi, Y], \quad [\tau; Y, Z] : [\psi', Y] \to [\chi, Z]$$

donde $[\psi(y), Y] = [\psi'(y'), Y]$, es decir, en todo modelo de T, las fórmulas $\psi(y)$ y $\psi'(y')$ definen al mismo subobjeto. Para definir la composición, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\psi(y)$ y $\psi'(y')$ son de hecho idénticas.

Si σ define a la flecha $s : \{x \mid \varphi(x)\}^M \to \{y \mid \psi(y)\}^M$ y τ define a la flecha $t : \{y \mid \psi(y)\} \to \{z \mid \chi(z)\}$ en algún modelo de T, entonces nos gustaría que la flecha $[\tau, Y, Z] \circ [\sigma, X, Y]$ definiera en ese mismo modelo a la flecha $t \circ s$.

La flecha composición $[\varphi, X] \to [\chi, Z]$ la podemos definir entonces por la fórmula

$$\exists y \big(\sigma(x, y) \wedge \tau(y, z)\big).$$

Esta fórmula es idéntica a la 4.4 del capítulo anterior, donde vimos que en cualquier estructura M, esta fórmula define a la composición; en particular para cada modelo de T.

Así mismo, la identidad $[\varphi, X] \xrightarrow{1} [\varphi, X]$ está representada por la fórmula

$$\varphi(x) \wedge \varphi(x') \wedge (x_1 = x_1') \wedge \cdots \wedge (x_n = x_n').$$

De aquí que $\mathbf{B}(T)$ es una categoría bien definida.

Definición 5.3. De manera análoga se define a la categoría sintáctica coherente $\mathbf{B}^*(T)$ de una teoría coherente, donde los objetos y morfismos están definidos sólo por fórmulas coherentes; además, las clases de equivalencia en $\mathbf{B}^*(T)$ están hechas para T-modelos de *cualquier* topos $\mathcal{E}$, no necesariamente cocompleto.

Igual que antes, las siguientes definiciones y resultados aplican tanto para $\mathbf{B}(T)$ como para $\mathbf{B}^*(T)$, a menos que se diga lo contrario. Note que para el caso coherente, en donde dice "topos cocompleto" debería decir "topos cualquiera".

Se sigue inmediatamente de lo discutido en el capítulo anterior, que para un modelo específico M de la teoría T en un topos cocompleto $\mathcal{E}$, existe un funtor

$$F_M : \mathbf{B}(T) \to \mathbf{Def}(M)$$

definido en objetos como

$$F_M\big([\varphi, X]\big) = \big(\{x \mid \varphi(x)\}^M, X\big)$$

mientras que para las flechas, un morfismo $[\sigma; X, Y] : [\varphi, X] \to [\psi, Y]$ define a la gráfica $\{(x, y) \mid \sigma(x, y)\}^M$ de una flecha $s : \{x \mid \varphi(x)\}^M \to \{y \mid \psi(y)\}^M$ en $\mathcal{E}$; nosotros definimos a $F_M\big([\sigma; X, Y]\big)$ como la clase de este morfismo $(s; X, Y)$.

F_M definido así es un funtor; es decir, preserva identidades y abre composiciones, lo cual es claro por las definiciones de las identidades y las composiciones en $\mathbf{B}(T)$ y en $\mathbf{Def}(M)$.

Note que la colección de funtores F_M para todos los modelos M de T en cualquier topos es conjuntamente inyectiva, en el sentido de que $[\varphi, X] = [\varphi', X']$

si y sólo si para todo modelo M de T en cualquier topos, $F_M\big([\varphi, X]\big) = F_M\big([\varphi', X']\big)$.

Lo mismo aplica para los morfismos de $\mathbf{B}(T)$, entonces los funtores F_M de todos los modelos M de T son conjuntamente fieles.

Lema 5.4. *La categoría sintáctica $\boldsymbol{B}(T)$ tiene todos los límites finitos y para cada modelo M de T en un topos cocompleto $\mathcal{E}$, el funtor correspondiente*

$$F_M : \boldsymbol{B}(T) \to \boldsymbol{Def}(M)$$

es exacto izquierdo.

Demostración. La construcción de los límites en $\mathbf{B}(T)$ es la misma que la que hicimos en los lemas 4.9 y 4.10 para la categoría $\mathbf{Def}(M)$ de los objetos definibles dado un modelo M.

El objeto terminal está dado por la fórmula idénticamente verdad $\top$ que no tiene variables libres. En efecto, en cualquier modelo M de T en $\mathcal{E}$, $\{\cdot \mid \top\}^M$ es el objeto terminal $1_{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$. Y para cualquier otro objeto $[\varphi, X]$, la gráfica de la única flecha $\{x \mid \varphi(x)\}^M \to 1 = \{\cdot \mid \top\}^M$ en $\mathcal{E}$ está definida por la misma fórmula $\varphi(x)$, entonces $[\varphi(x), X]$ es también la única flecha $[\varphi, X] : [\varphi, X] \to [\top]$ en $\mathbf{B}(T)$.

Para los productos fibrados, dadas flechas

$$[\sigma; X, Z] : [\varphi, X] \to [\chi, Z] \leftarrow [\psi, Y] : [\tau; Y, Z]$$

en $\mathbf{B}(T)$, su producto fibrado es el objeto en $\mathbf{B}(T)$ representado por la fórmula $\varphi(x) \wedge \psi(y) \wedge \exists z\big(\sigma(x,z) \wedge \tau(y,z)\big)$ y las proyecciones claramente están representadas por las mimas fórmulas que representaban a las proyecciones π_1 y π_2 en la construcción del producto fibrado en $\mathbf{Def}(M)$ en el lema 4.10.

Finalmente, es evidente por las descripciones de los límites de $\mathbf{B}(T)$ y su correspondencia con las descripciones de los límites de $\mathbf{Def}(M)$ dadas en el capítulo anterior que cada funtor $F_M : \mathbf{B}(T) \to \mathbf{Def}(M)$ preserva todos los límites finitos.

□

Definición 5.5. Definimos a las bases para las topologías de Grothendieck $J(T)$ y $J^*(T)$, de las categorías sintácticas $\mathbf{B}(T)$ y $\mathbf{B}^*(T)$ respectivamente como sigue:

Una familia pequeña $\{s_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ de morfismos en $\mathbf{B}(T)$ es una *cubierta en* $J(T)$ cuando, para cualquier modelo M de la teoría T en cualquier topos cocompleto $\mathcal{E}$, el funtor correspondiente $F_M : \mathbf{B}(T) \to \mathbf{Def}(M)$ manda a esta familia a una cubierta en $\mathbf{Def}(M)$ como la descrita en 4.11 en el capítulo anterior; equivalentemente, cuando el funtor $\mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$ obtenido al componer al funtor F_M con el funtor que olvida $\mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$ manda a esta familia a una familia epimórfica en el topos $\mathcal{E}$.

Una familia finita $\{s_i : A_i \to B\}_{i=1}^n$ de morfismos en $\mathbf{B}^*(T)$ es una *cubierta en* $J^*(T)$ cuando, para cualquier modelo M de la teoría T en cualquier topos $\mathcal{E}$, el funtor $F_M^* : \mathbf{B}^*(T) \to \mathbf{Def}^*(M)$ manda a esta familia a una cubierta en $\mathbf{Def}^*(M)$ como la descrita después en la definición 4.11; o, lo que es lo mismo, cuando el funtor $\mathbf{B}^*(T) \to \mathcal{E}$ obtenido al componer al funtor F_M con el funtor que olvida $\mathbf{Def}^*(M) \to \mathcal{E}$ manda a esta familia a una familia epimórfica finita en el topos $\mathcal{E}$.

Observamos que esta es en efecto una base para una topología de Grothendieck sobre $\mathbf{B}(T)$:

La transitividad se da, pues la composición de familias epimórficas es de nuevo una familia epimórfica, mientras que el axioma de estabilidad se da porque el funtor $\mathbf{B}(T) \xrightarrow{F_M} \mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$ es exacto izquierdo al ser composición de funtores exactos izquierdos, además, el producto fibrado de familias epimórficas es de nuevo una familia epimórfica en $\mathcal{E}$ (pues el producto fibrado preserva epimorfismos y coproductos en un topos).

Supongamos que para cada $i \in I$, las flechas $s_i : A_i \to B$ en $\mathbf{B}(T)$ están representadas por las fórmulas $\sigma(x^i, y)$, que las A_i están representadas por $\varphi_i(x^i)$ y que $\psi(y)$ representa a B; por lo que se vio para el caso de $\mathbf{Def}(M)$ en el lema 4.13, la familia $\{s_i : A_i \to B\}_{i \in I}$ es una cubierta en la base de la topología de Grothendieck $J(T)$ sobre $\mathbf{B}(T)$ si y sólo si para todo modelo M de la teoría T en cualquier topos cocompleto $\mathcal{E}$, la fórmula

$$\forall y\big(\psi(y) \to \big(\textstyle\bigvee_{i \in I} \exists x^i \sigma_i(x^i, y)\big)\big)$$

es válida.

El siguiente lema es inmediato de la definición de cubiertas en $\mathbf{Def}(M)$ y en $\mathbf{B}(T)$.

Lema 5.6. *Para todo modelo M de la teoría T en cualquier topos cocompleto $\mathcal{E}$, el funtor correspondiente $F_M : \boldsymbol{B}(T) \to \boldsymbol{Def}(M)$ preserva cubiertas.*

Una familia es cubierta en $\mathbf{B}(T)$ si y sólo si al mandarla por F_M es cubierta para $\mathbf{Def}(M)$ para todo modelo M de la teoría T en un topos $\mathcal{E}$.

El funtor que olvida $\mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$ es exacto izquierdo y manda cubiertas a familias epimórficas, de donde obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.7. *El funtor dado por la composición $\boldsymbol{B}(T) \xrightarrow{F_M} \boldsymbol{Def}(M) \to \mathcal{E}$ es un funtor exacto izquierdo y continuo.*

Más aún, de forma análoga al lema 4.14 para la topología de $\mathbf{Def}(M)$, tenemos:

Lema 5.8. *La topología de Grothendieck $J(T)$ sobre la categoría sintáctica $B(T)$ es subcanónica.*

Demostración. Consideremos a una familia cubriente

$$[\sigma_i; X^i, Y] : [\varphi_i, X^i] \to [\psi, Y], \qquad i \in I$$

como antes, y a los productos fibrados para cada pareja i, j

$$\begin{tikzcd} P_{i,j} \arrow[r] \arrow[d] & {[\varphi_i, X^i]} \arrow[d, "{[\sigma_i; X^i, Y]}"] \\ {[\varphi_j, X^j]} \arrow[r, "{[\sigma_j; X^j, Y]}"'] & {[\psi, Y].} \end{tikzcd}$$

Supongamos que

$$[\tau_i; X^i, Y] : [\varphi_i, X^i] \to [\chi, Z], \quad i \in I$$

es una familia de morfismos de $\mathbf{B}(T)$ compatibles, en el sentido de que para cada pareja i, j el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P_{i,j} \arrow[r] \arrow[d] & {[\varphi_i, X^i]} \arrow[d, "{[\tau_i; X^i, Y]}"] \\ {[\varphi_j, X^j]} \arrow[r, "{[\tau_j; X^j, Y]}"'] & {[\chi, Z]} \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Tenemos que probar que existe un único morfismo $[\rho; Y, Z] : [\psi, Y] \to [\chi, Z]$ en $\mathbf{B}(T)$ tal que $[\rho] \circ [\sigma_i] = [\tau_i]$ para cada $i \in I$.

Consideremos a cualquier modelo M de T en algún topos cocompleto $\mathcal{E}$.

Tenemos por definición que el funtor $F_M : \mathbf{B}(T) \to \mathbf{Def}(M)$, manda a la cubierta a una familia cubriente

$$s_i : \{x^i \mid \varphi(x^i)\}^M \to \{y \mid \psi(y)\}^M \qquad i \in I$$

en $\mathbf{Def}(M)$ donde hemos escrito s_i para denotar a la flecha (cuya gráfica esta) definida por la fórmula σ_i. Más aún, el funtor $F_M : \mathbf{B}(T) \to \mathbf{Def}(M)$ manda a la familia compatible de morfismos $[\tau_i]$ a una familia en $\mathbf{Def}(M)$

$$t_i : \{x^i \mid \varphi(x^i)\}^M \to \{z \mid \chi(z)\}^M \qquad i \in I$$

que de nuevo es compatible.

Así, por lo visto en el lema 4.14 del capítulo anterior, existe un único morfismo en $\mathbf{Def}(M)$ (o en $\mathcal{E}$),

$$r : \{y \mid \psi(y)\}^M \to \{z \mid \chi(z)\}^M,$$

tal que $r \circ s_i = t_i$ para cada $i \in I$ y esta flecha está definida por la fórmula vista ahí. Esta fórmula no depende del modelo M, por lo que si definimos a $\rho(y, z)$ como esta fórmula, se sigue que $[\rho; Y, Z] : [\psi, Y] \to [\chi, Z]$ es la flecha única de $\mathbf{B}(T)$ deseada tal que $[\rho] \circ [\sigma_i] = [\tau_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

□

Finalmente, concluimos esta sección con una observación concerniente a la construcción de la categoría $\mathbf{B}(T)$.

Estrictamente, basandose en los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, la construcción de $\mathbf{B}(T)$ no produce a una categoría pequeña, porque hace referencia a *todos* los modelos en *todos* los topos cocompletos.

Esto se puede arreglar de muchas maneras.

Por ejemplo, en vez de considerar a *todos* los modelos M de *todo* topos cocompleto $\mathcal{E}$, podemos restringir nuestra consideración a sólo aquellos topos definidos en la teoría de conjuntos de Zermelo Fraenkel por fórmulas con sólo parámetros conjuntistas, no parámetros que sean clases. La clase de topos $\mathcal{E}$ indicada contiene a todos los topos de Grothendieck, pues estos están definidos en términos de sus sitios, los cuales pueden ser considerados como parámetros conjuntistas. Esta colección también contiene a cualquier otro topos que ocurre en la práctica matemática ordinaria.

Otro acercamiento para resolver los problemas de fundamentación es el de trabajar en una teoría de conjuntos con un suministro adecuado de "universos". Luego nuestro $\mathbf{B}(T)$ existe en un universo superior.

Para la categoría $\mathbf{B}^*(T)$, la relación de equivalencia usada en fórmulas para definir objetos y flechas, puede de hecho ser descrita considerando sólo los modelos de la teoría T en $\boldsymbol{Con}$. Esto será probado más adelante, sin embargo, la prueba de este teorema ocupa la construcción de $\mathbf{B}^*(T)$ más liberal que dimos primero.

Hay un acercamiento más constructivo: axiomatizar la noción de "verdad" en todos los T-modelos en todos los topos. De hecho, uno puede especificar explícitamente al estilo de Gentzen reglas de derivación [Gentzen, 1964], iniciando con cuándo una fórmula de la forma $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ como las de antes es demostrable en una teoría geométrica T. Uno entonces construye una categoría $\mathbf{B}_G(T)$ como $\mathbf{B}(T)$, pero con la relación de equivalencia usada para definir objetos y flechas formulada en términos de su demostrabilidad. Entonces "demostrable" reemplaza a "verdadero en todos los modelos en todos los topos (cocompletos)". Un teorema de "correctud" (demostrable implica verdadero en cada modelo) entonces dará resultados para $\mathbf{B}_G(T)$ similares a los del teorema de la siguiente sección.

5.2. El Topos Clasificante de una Teoría

Sea T cualquier teoría geométrica en un lenguaje L, en esta sección construiremos al topos clasificante para T-modelos. La construcción usará a la categoría $\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E})$ de los T-modelos en un topos cocompleto $\mathcal{E}$ y la construcción de la sección anterior de la categoría sintáctica $\mathbf{B}(T)$ equipada con su topología de Grothendieck $J(T)$. Escribimos $\boldsymbol{S}(T) = Sh\big(\mathbf{B}(T), J(T)\big)$ para denotar al topos de gavillas sobre $\mathbf{B}(T)$ con respecto a esta topología.

Escribimos $\boldsymbol{S}^*(T)$ para denotar al topos $Sh(\mathbf{B}^*(T), J^*(T))$ si T es una teoría coherente. Aunque las teorías coherentes son en particular teorías geométricas, el hecho de que $\boldsymbol{S}^*(T)$ sea coherente será muy útil después.

Teorema 5.9. *Para todo lenguaje de primer orden L y toda* teoría geométrica *T, el topos $\boldsymbol{S}(T)$ es un topos clasificante para los modelos de la teoría T.*

Es decir, para cualquier topos cocompleto $\mathcal{E}$, existe una equivalencia de categorías

$$\underline{Hom}(\mathcal{E}, \mathbf{S}(T)) \cong \underline{Mod}(T, \mathcal{E}),$$

natural en $\mathcal{E}$.

Además, si T es una teoría coherente*, entonces $\boldsymbol{S}^*(T)$ es un topos clasificante para los modelos de la teoría T.*

Haremos la prueba para $\boldsymbol{S}(T)$ con T una teoría geométrica y $\mathcal{E}$ un topos cocompleto. La prueba para $\boldsymbol{S}^*(T)$ es completamente análoga suponiendo que J es finito.

Demostración. La prueba de este teorema usará varios de los resultados vistos en el capítulo de morfismos geométricos.

Como $\mathbf{B}(T)$ es una categoría con límites finitos (5.4), los morfismos geométricos $f : \mathcal{E} \to \boldsymbol{S}(T)$ corresponden a funtores continuos y exactos izquierdos $A : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$. Sea $\underline{\mathrm{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{E})$ la categoría de funtores continuos y exactos izquierdos, el teorema anterior puede ser reformulado como sigue:

Para todo topos cocompleto $\mathcal{E}$, hay una equivalencia de categorías

$$\underline{\mathrm{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{E}) \cong \underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}),$$

natural en $\mathcal{E}$.

Daremos una prueba de esto haciendo una construcción explícita de un T-modelo M_A en $\mathcal{E}$ a partir de un funtor continuo y exacto izquierdo $A : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$, e inversamente, construiremos un funtor $A_M : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$ a partir de cualquier T-modelo M en $\mathcal{E}$.

Para la construcción de A_M a partir de un T-modelo M, usamos a la categoría $\mathbf{Def}(M)$ de objetos y morfismos definibles en $\mathcal{E}$, al funtor canónico $F_M : \mathbf{B}(T) \to \mathbf{Def}(M)$ definido en la sección previa (5.3) y al funtor que olvida $\mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$. Escribimos

$$A = A_M : \mathbf{B}(T) \xrightarrow{F_M} \mathbf{Def}(M) \to \mathcal{E}$$

para denotar a la composición de estos dos funtores. Por el corolario 5.7 de la sección anterior, A_M es un funtor continuo y exacto izquierdo.

Por esta definición, para cualquier objeto $[\varphi, X]$ de la categoría sintáctica $\mathbf{B}(T)$, representado por la fórmula $\varphi(x)$, tenemos que

$$A_M([\varphi, X]) = \{x \mid \varphi(x)\}^M.$$

Sea $H : M \to M'$ un homomorfismo entre dos modelos M y M' de T en $\mathcal{E}$. Por inducción sobre la construcción de la fórmula geométrica $\varphi(x)$ se puede probar que $H_X : X^M \to X^{M'}$ se restringe a un mapeo $\{x \mid \varphi(x)\}^M \xrightarrow{H_{\varphi(x)}}$

$\{x \mid \varphi(x)\}^{M'}$, como en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\{x \mid \varphi(x)\}^{M} \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed, "H_{\varphi(x)}"'] & X_1^M \times \cdots \times X_n^M = X^M \arrow[d, "H_X"] \\
\{x \mid \varphi(x)\}^{M'} \arrow[r, tail] & X_1^{M'} \times \cdots \times X_n^{M'} = X^{M'}
\end{tikzcd}$$

(Por ejemplo, si $\varphi(x) = R(x)$ donde R es un símbolo de relación, tenemos que $\{x \mid \varphi(x)\}^{M'}$ es el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\{x \mid \varphi(x)\}^{M'} \arrow[r, "i^{M'}"] \arrow[d] & X_1^{M'} \times \cdots \times X_n^{M'} = X^{M'} \arrow[d, "R^{M'}"] \\
1 \arrow[r, "verdad"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Pero como H es morfismo de modelos, tenemos que $R^{M'} H_X i^M = R^M i^M$ que a su vez es igual a

$$\{x \mid \varphi(x)\}^M \to 1 \xrightarrow{verdad} \Omega$$

por su definición como producto fibrado. De donde existe una única flecha

$$H_{\varphi(x)} : \{x \mid \varphi(x)\}^M \to \{x \mid \varphi(x)\}^{M'}$$

que hace conmutar al diagrama.)

Las flechas $H_{\varphi(x)}$, presentes en cada fórmula geométrica $\varphi(x)$, constituyen una transformación natural $A_M \to A_{M'}$ entre funtores de $\underline{\text{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{E})$. Así, la asignación $M \mapsto A_M$ es un funtor

$$\underline{\text{Mod}}(T, \mathcal{E}) \to \underline{\text{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{E}).$$

Esto da un lado de la equivalencia de categorías deseada.

En la otra dirección, debemos asociar a cada funtor continuo y exacto izquierdo $A : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$ un modelo adecuado $M = M_A$ de la teoría T en el topos cocompleto $\mathcal{E}$.

Para cada tipo X_i del lenguaje L, usamos la fórmula $x_i = x_i$, para alguna variable x_i de ese tipo, para definir al objeto de $\mathcal{E}$

$$X_i^{M_A} = A\big([x_i = x_i, X_i]\big).$$

Para cada símbolo de relación $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ del lenguaje L, hay una fórmula $R(x_1, \ldots, x_n)$ o bien $R(x)$, y por lo tanto un objeto $[R(x), X]$ en $\mathbf{B}(T)$; para el objeto correspondiente de $\mathcal{E}$ definimos

$$R^{M_A} = A\big([R(x), X]\big).$$

Como notación, para una secuencia de variables $x = x_1, \dots, x_n$, vamos a escribir $x = x$ como una abreviación de la conjunción $(x_1 = x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = x_n)$. Note que en la categoría sintáctica, la fórmula $[x = x, X]$ (igual a $[(x_1 = x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = x_n), X_1, \dots, X_n]$) es el producto de los objetos $[x_i = x_i, X_i]$ (como se sigue de la descripción de los limites en $\mathbf{B}(T)$ dada en la sección anterior 5.4); es decir,

$$\begin{aligned} [x = x, X] &= [(x_1 = x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = x_n), X] \\ &\cong [x_1 = x_1, X_1] \times \cdots \times [x_n = x_n, X_n] \end{aligned}$$

Luego, por la exactitud izquierda del funtor A, tenemos que

$$\begin{aligned} X^{M_A} &= X_1^{M_A} \times \cdots \times X_n^{M_A} \\ &= A\big([x_1 = x_1, X_1]\big) \times \cdots \times A\big([x_n = x_n, X_n]\big) \\ &\cong A\big([x = x, X]\big). \end{aligned}$$

En $\mathbf{B}(T)$ tenemos al monomorfismo canónico

$$[\sigma; X, X] : [R(x), X] \rightarrowtail [x = x, X]$$

definido por $\sigma(x, x') = R(x) \wedge (x_1 = x'_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = x'_n)$. Así, con lo anterior y la exactitud izquierda de A obtenemos al monomorfismo

$$R^{M_A} \rightarrowtail X_1^{M_A} \times \cdots \times X_n^{M_A} = X^{M_A}.$$

Finalmente, si $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ es un símbolo de función del lenguaje L, entonces en cualquier modelo M, la gráfica del morfismo correspondiente $f^M : X_1^M \times \cdots \times X_n^M \to Y^M$ está definida por la fórmula "$f(x_1, \dots, x_n) = y$", la cual abreviamos como "$f(x) = y$". Entonces en $\mathbf{B}(T)$ hay una flecha

$$[f(x) = y] : \big([x_1 = x_1, X_1] \times \cdots \times [x_n = x_n, X_n]\big) \cong [x = x, X] \to [y = y, Y].$$

Definimos a f^{M_A} en $\mathcal{E}$ como la imagen de esta flecha bajo el funtor A:

$$f^{M_A} = A\big([f(x) = y]\big) : X_1^{M_A} \times \cdots \times X_n^{M_A} \to Y^{M_A}.$$

Esta definición también incluye al caso de las constantes de L, las cuales pueden ser consideradas como símbolos de función sin argumentos. Esto completa la definición de la L-interpretación M_A en el topos $\mathcal{E}$.

Esta definición es funtorial en A, pues de tener una transformación natural $\alpha : A \to A'$, entonces el morfismo $H : M_A \to M_{A'}$ será simplemente

$$H_X = \alpha_{[x=x,X]} : A\big([x = x, X]\big) \to A'\big([x = x, X]\big).$$

El siguiente lema implica que esta M_A es de hecho un modelo de la teoría geométrica T.

Lema 5.10. *Sea M_A un modelo en el topos cocompleto $\mathcal{E}$ asociado a un funtor continuo y exacto izquierdo $A : \boldsymbol{B}(T) \to \mathcal{E}$. Para cualquier fórmula geométrica $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, con variables libres entre las de $x = x_1, \ldots, x_n$ de los tipos respectivos $X = X_1, \ldots, X_n$, hay un isomorfismo natural*

$$\{x \mid \varphi(x)\}^{M_A} \cong A\big([\varphi(x), X]\big)$$

de subobjetos de $X_1^{M_A} \times \cdots \times X_n^{M_A}$.

Demostración. La prueba es por inducción sobre la construcción de la fórmula geométrica φ, usando tanto la exactitud izquierda como la continuidad del funtor A.

Primero, como A preserva productos, para cada secuencia $x = x_1, \ldots, x_n$, tenemos que $A\big([x = x, X]\big) \cong X_1^{M_A} \times \cdots \times X_n^{M_A}$, como se vio antes.

Ahora, si $t(x_1, \ldots, x_n)$ es un término del lenguaje L de tipo Y, con variables libres entre $x_1, \ldots, x_n$ de tipos $X_1, \ldots, X_n$, entonces para cualquier modelo M de cualquier topos $\mathcal{E}$, la gráfica de la flecha

$$t^M : X_1^M \times \cdots \times X_n^M \to Y^M$$

está definida por la fórmula $t(x_1, \ldots, x_n) = y$, o $t(x) = y$. Por lo que esta fórmula define a un morfismo $[t(x) = y] : [x = x, X] \to [y = y, Y]$ en $\mathbf{B}(T)$. Probemos por inducción sobre la formación de términos la igualdad de las flechas

$$A([t(x) = y]) = t^{M_A} : X_1^{M_A} \times \cdots \times X_n^{M_A} \to Y^{M_A}.$$

Si t es el término $f(x_1, \ldots, x_n)$, esto se da por la definición de M_A. En el caso general, supongamos que $t(x)$ es el término $f\big(t_1(x), \ldots, t_m(x)\big)$ de tipo Y, donde $t_1(x), \ldots, t_m(x)$ son términos de tipos $Z_1, \ldots, Z_m$ respectivamente tales que $t_i^{M_A} = A\big([t_i(x) = z_i]\big)$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Por definición, para toda estructura M, la flecha $t^M : X^M \to Y^M$ está dada por la composición

$$t^M : X^M \xrightarrow{(t_1^M, \ldots, t_m^M)} Z_1^M \times \cdots \times Z_m^M \xrightarrow{f^M} Y^M,$$

además, el morfismo $X^M \xrightarrow{(t_1^M, \ldots, t_m^M)} Z_1^M \times \cdots \times Z_m^M$ tiene gráfica definida por la fórmula $(t_1(x) = z_1) \wedge \cdots \wedge (t_n(x) = z_m)$ por lo que tenemos la composición

$$[t(x) = y] = [(t_1(x) = z_1) \wedge \cdots \wedge (t_n(x) = z_m)] \circ [f(z_1, \ldots, z_m) = y]$$

además, como A es exacto izquierdo, tenemos que

$$A\big([(t_1(x) = z_1) \wedge \cdots \wedge (t_n(x) = z_m)]\big) = \big(A([t_1(x) = z_1]), \ldots, A([t_m(x) = z_m])\big)$$

pero entonces, como A abre composiciones y por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned}
&A([t(x) = y])\\
=&A\big([(t_1(x) = z_1) \wedge \cdots \wedge (t_n(x) = z_m)]\big) \circ A\big([f(z_1, \dots, z_m) = y]\big)\\
=&\big(A([t_1(x) = z_1]), \dots, A([t_m(x) = z_m])\big) \circ A\big([f(z_1, \dots, z_m) = y]\big)\\
=&\big(t_1^{M_A}, \dots, t_m^{M_A}\big) \circ f^{M_A}\\
=&\big(f(t_1(x), \dots, t_m(x))\big)^{M_A}\\
=&t^{M_A}
\end{aligned}$$

Por lo que en efecto $A([t(x) = y]) = t^{M_A}$ para todo término t.

A continuación procedemos por inducción sobre la formación de la fórmula geométrica φ, empezando por el caso cuando φ es una fórmula atómica de la forma $R\big(t_1(x), \dots, t_m(x)\big)$ para términos $t_1, \dots, t_m$ y un símbolo de relación R. En todo modelo M, el objeto $\{x \mid R\big(t_1(x), \dots, t_m(x)\big)\}$ está definido como el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
\{x \mid R(t_1(x), \dots, t_m(x))\}^M \arrow[r] \arrow[d, tail] & \{y \mid R(y)\} \arrow[d, tail] \\
X^M \arrow[r, "(t_1^M, \dots, t_m^M)"'] & Y^M
\end{tikzcd}$$

por lo que en $\mathbf{B}(T)$ tenemos un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
{[R(t_1(x), \dots, t_m(x)), X]} \arrow[r] \arrow[d, tail] & {[R(y), Y]} \arrow[d, tail] \\
{[x = x, X]} \arrow[r, "{[t_1(x) = y_1 \wedge \cdots \wedge t_m(x) = y_m]}"'] & {[y = y, Y].}
\end{tikzcd}$$

Como el funtor $A : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$ es exacto izquierdo, preserva los productos fibrados en $\mathcal{E}$. Pero por la definición del modelo M_A, tenemos que $A\big([x = x]\big) = X^{M_A}$ y $A\big([y = y]\big) = Y^{M_A}$, mientras que $A\big([R(y)]\big) = R^{M_A} = \{y \mid R(y)\}^{M_A}$.

Así que al comparar los dos productos fibrados anteriores en el caso particular en el que $M = M_A$ obtenemos que

$$A\big([R(t_1(x), \dots, t_m(x)), X]\big) = \{x \mid R(t_1(x), \dots, t_m(x))\}^{M_A}.$$

Otros tipos de fórmulas atómicas, $\top$ ("verdadero"), $\bot$ ("falso") y las igualdades $t(x) = t'(x')$ entre términos, son tratados de forma similar.

Supongamos ahora que el lema se cumple para las fórmulas $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ con variables libres entre $x_1, \dots, x_n$ de los tipos $X_1, \dots, X_n$. Deseamos mostrar que el lema se da también para la fórmula $\varphi(x) \wedge \psi(x)$. Primero tenemos que para todo modelo M de cualquier topos $\mathcal{F}$, la definición de conjunción da un producto fibrado en ese topos $\mathcal{F}$ de la forma

$$\begin{tikzcd}
\{x \mid \varphi(x) \wedge \psi(x)\}^M \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \{x \mid \varphi(x)\}^M \arrow[d, tail] \\
\{x \mid \psi(x)\}^M \arrow[r, tail] & \{x \mid x = x\}^M = \big(X_1^M \times \cdots \times X_n^M\big).
\end{tikzcd}$$

Se sigue de la construcción de límites en $\mathbf{B}(T)$ que el siguiente cuadrado similar es también un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
{[\varphi(x) \wedge \psi(x), X]} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & {[\varphi(x), X]} \arrow[d, tail] \\
{[\psi(x), X]} \arrow[r, tail] & {[x = x, X].}
\end{tikzcd}$$

Como $A : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$ es exacto izquierdo, obtenemos un producto fibrado en $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd}
A\big([\varphi(x) \wedge \psi(x), X]\big) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A\big([\varphi(x), X]\big) \arrow[d, tail] \\
A\big([\psi(x), X]\big) \arrow[r, tail] & A\big([x = x, X]\big).
\end{tikzcd}$$

Pero por definición de M_A tenemos que $A\big([x = x, X]\big) = X_1^{M_A} \times \cdots \times X_n^{M_A}$, mientras que por hipótesis de inducción existen isomorfismos $A\big([\psi(x), X]\big) \cong \{x \mid \psi(x)\}^{M_A}$ y $A\big([\varphi(x), X]\big) \cong \{x \mid \varphi(x)\}^{M_A}$. Así, comparando los productos fibrados anteriores con el caso particular en el que $M = M_A$, obtenemos que

$$A\big([\varphi \wedge \psi(x), X]\big) \cong \{x \mid \varphi \wedge \psi(x)\}^{M_A},$$

por lo que el lema se da para $\varphi \wedge \psi$.

Supongamos ahora que el lema se cumple para las fórmulas de $\{\varphi_j(x) | j \in J\}$ y probemos que se da también para su disyunción $\bigvee_{j \in J} \varphi_j$. Veamos primero que la familia de flechas

$$[\varphi_j, X] \rightarrowtail [\textstyle\bigvee_{j \in J} \varphi, X]$$

forman una cubierta para la topología $J(T)$ de $\mathbf{B}(T)$ que definimos antes.

Por la definición de $J(T)$, queremos probar que para todo T-modelo M en un topos cocompleto $\mathcal{E}$ la familia de morfismos

$$\{x \mid \varphi_j(x)\}^M \rightarrowtail \{x \mid \textstyle\bigvee_{j \in J} \varphi_j(x)\}^M$$

forma una familia epimórfica.

Pero por definición, $\{x \mid \bigvee_{j \in J} \varphi_j(x)\}^M$ es la imagen directa del morfismo $\coprod_{j \in J} \{x \mid \varphi_j(x)\}^M \to X^M$ por lo que

$$\coprod_{j \in J} \{x \mid \varphi_j(x)\}^M \to \{x \mid \textstyle\bigvee_{j \in J} \varphi_j(x)\}^M$$

es un epimorfismo, y como $\{x \mid \varphi_j(x)\}^M \rightarrowtail \{x \mid \bigvee_{j\in J} \varphi_j(x)\}^M$ son las componentes de este epi, entonces juntas forman una familia epimórfica, de manera que tenemos la cubierta que queríamos de $J(T)$.

Como $A : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$ es un funtor continuo para cubiertas de $J(T)$, se sigue que la familia $A\big([\varphi_j, X]\big)$ forma una cubierta de $A\big([\bigvee_{j\in J}\varphi_j, X]\big)$ y al ser subobjetos de $A\big([\bigvee_{j\in J}\varphi_j(x), X]\big)$, se tiene que

$$\bigvee_{j\in J} A\big([\varphi_j, X]\big) = A\big([\bigvee_{j\in J}\varphi_j(x), X]\big).$$

Pero por hipótesis de inducción, $A\big([\varphi_j, X]\big) = \{x|\varphi_j(x)\}^{M_A}$ para cada $j \in J$, mientras que por definición de la interpretación de la disyunción,

$$\{x \mid \bigvee_{j\in J} \varphi_j(x)\}^{M_A} = \bigvee_{j\in J}\{x \mid \varphi(x)\}^{M_A}.$$

Así, $A\big([\bigvee_{j\in J}\varphi_j, X]\big) = \{x|\bigvee_{j\in J}\varphi_j(x)\}^{M_A}$, y el lema se da para la disyunción $\bigvee_{j\in J}\varphi_j(x)$.

Finalmente, para el caso de un cuantificador existencial, supongamos que el lema se da para la fórmula $\varphi(x,y)$; es fácil ver que la proyección $[\varphi(x,y), X, Y] \to [\exists y\varphi(x,y), X]$ en $\mathbf{B}(T)$ es una flecha cubriente, pues en cada modelo M de cualquier topos $\mathcal{F}$, el subobjeto $\{x \mid \exists y\varphi(x,y)\}^M$ es la imagen directa de la flecha dada por la composición en $\mathcal{F}$

$$\{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}^M \rightarrowtail X^M \times Y^M \xrightarrow{\pi_2} Y^M.$$

Como A preserva composiciones, monomorfismos y cubiertas (en particular preserva epimorfismos), tenemos que

$$\{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}^{M_A} \cong A([\varphi, X, Y]) \twoheadrightarrow A([\exists y\varphi, X]) \rightarrowtail A([y = y, Y]) = Y^{M_A}$$

es una factorización epi-mono de la composición anterior para el caso en el que $M = M_A$, por lo que $A([\exists y\varphi, X])$ es isomorfo a la imagen directa de esa flecha, es decir $A([\exists y\varphi, X]) \cong \{x \mid \exists y\varphi(x,y)\}^{M_A}$ como subobjetos de Y^{M_A}, por lo que el lema se cumple también para $\exists y\varphi(x,y)$.

Como cada fórmula geométrica se construye a partir de fórmulas atómicas usando conjunciones, disyunciones (tal vez infinitas) y cuantificador existencial, se tiene que $A([\varphi, X]) \cong \{x \mid \varphi(x)\}^{M_A}$ para toda fórmula geométrica φ, por lo que el lema queda demostrado.

□

Lema 5.11. *Para toda teoría geométrica T y cualquier funtor continuo y exacto izquierdo $A : \boldsymbol{B}(T) \to \mathcal{E}$, la L-interpretación asociada M_A en $\mathcal{E}$ es un modelo de T.*

Demostración. En una teoría geométrica T, cada axioma tiene la forma

$$\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big),$$

donde φ y ψ son fórmulas geométricas. En cada modelo M de T tenemos la inclusión $\{x|\varphi(x)\}^M \subseteq \{x|\psi(x)\}^M$, y por lo tanto una inclusión correspondiente

$$[\varphi, X] \rightarrowtail [\psi, X]$$

por la definición de la categoría sintáctica $\mathbf{B}(T)$. El funtor exacto izquierdo A manda estos monomorfismos a una inclusión de subobjetos

$$A\big([\varphi, X]\big) \leqslant A\big([\psi, X]\big)$$

del objeto $A\big([x = x, X]\big) = X^{M_A}$. Por el lema anterior, esto significa que

$$\{x \mid \varphi(x)\}^{M_A} \leqslant \{x \mid \psi(x)\}^{M_A}.$$

De aquí que el axioma $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ de T es válido en el modelo M_A.
□

Lema 5.12. *Las construcciones, $M \mapsto A_M$ de un funtor continuo y exacto izquierdo $A_M : \boldsymbol{B}(T) \to \mathcal{E}$ desde un T-modelo M en $\mathcal{E}$, y $A \mapsto M_A$ de un modelo M_A a partir de un funtor exacto izquierdo y continuo $A : \boldsymbol{B}(T) \to \mathcal{E}$, son mutuamente inversas salvo isomorfismo natural.*

Demostración. Para un lado, empecemos con un modelo M de la teoría T en un topos $\mathcal{E}$. Tenemos entonces al funtor asociado $A = A_M : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$, definido como antes, y a un nuevo modelo M_A asociado a este funtor A. Para cada tipo X del lenguaje L, sea x una variable del tipo X,

$$\begin{aligned} X^{M_A} &= A_M\big([x = x, X]\big) && \text{(por definición de } M_A\text{)}\\ &\cong \{x \mid x = x\}^M && \text{(por definición de } A_M\text{)}\\ &\cong X^M. \end{aligned}$$

Similarmente, para símbolos de relación $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ del lenguaje,

$$\begin{aligned} R^{M_A} &= A_M\big([R(x), X]\big) && \text{(por definición de } M_A\text{)}\\ &\cong \{x \mid R(x)\}^M && \text{(por definición de } A_M\text{)}\\ &\cong R^M. \end{aligned}$$

Finalmente, si $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ es un símbolo de función,

$$\begin{aligned} Graph(f^{M_A}) &= \{(x, y) \mid f(x) = y\}^{M_A}\\ &= A_M\big([f(x) = y, X, Y]\big) && \text{(por definición de } M_A\text{)}\\ &\cong \{(x, y) \mid f(x) = y\}^M && \text{(por definición de } A_M\text{)}\\ &\cong Graph(f^M). \end{aligned}$$

Esto prueba que el modelo M_A es isomorfo al anterior M.

Para el otro lado, comencemos con un funtor exacto izquierdo y continuo $A : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}$ para obtener primero un modelo $M = M_A$ en $\mathcal{E}$ y luego un nuevo funtor A_M. Para un objeto $[\varphi(x), X]$ de $\mathbf{B}(T)$,

$$\begin{aligned} A_M([\varphi(x), X]) &= \{x \mid \varphi(x)\}^{M_A} && \text{(por definición de } M_A\text{)} \\ &\cong A([\varphi(x), X]) && \text{(por el Lema 5.10).} \end{aligned}$$

Este isomorfismo es natural, por lo que tenemos un isomorfismo de los funtores $A \cong A_M$.

□

La construcción $M \mapsto A_M$ de un funtor a partir de un modelo es funtorial y la construcción inversa $A \mapsto M_A$ de un modelo desde un funtor también es funtorial. Entonces se tiene que estas dos construcciones establecen una equivalencia de categorías

$$\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}) \cong \underline{\mathrm{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{E}),$$

como se quería. Para completar la prueba del teorema, es suficiente observar que una de las construcciones es natural en $\mathcal{E}$ y la naturalidad de la otra se sigue por el isomorfismo. Consideremos por ejemplo la construcción del funtor A_M desde un T-modelo M en el topos $\mathcal{E}$. La naturalidad requiere, para cualquier morfismo geométrico $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ entre topos, que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "g^*"'] & \underline{\mathrm{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{E}) \arrow[d, "g^* \circ \_"] \\ \underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{F}) \arrow[r, "\cong"'] & \underline{\mathrm{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

conmute salvo isomorfismo natural. Pero para cualquier modelo M de T en $\mathcal{E}$ y para cualquier fórmula geométrica $\varphi(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} g^*\big(A_M\big([\varphi, X]\big)\big) &\cong g^*\big(\{x \mid \varphi(x)\}^M\big) && \text{(por definición de } A_M\text{)} \\ &\cong \{x \mid \varphi(x)\}^{g^*M} && \text{(Teorema 4.4)} \\ &\cong A_{g^*M}\big([\varphi, X]\big), \end{aligned}$$

la última por definición del funtor A_{g^*M} a partir del modelo g^*M. Por lo que $g^* \circ A_M \cong A_{g^*M}$ de donde el cuadrado anterior conmuta salvo isomorfismo.

Con esto queda probado el teorema.

□

5.3. Modelos Universales

En la sección previa demostramos que para una teoría geométrica arbitraria T, el topos $\boldsymbol{S}(T) = Sh(\mathbf{B}(T), J(T))$ de gavillas sobre la categoría sintáctica $\mathbf{B}(T)$ es un topos clasificante de T-modelos y que para una teoría coherente, el topos coherente $\boldsymbol{S}^*(T)$ es un topos clasificante para T-modelos.

Por lo tanto, para cualquier topos cocompleto $\mathcal{E}$, hay una equivalencia de categorías

$$\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \boldsymbol{S}(T))$$

natural en $\mathcal{E}$ entre la categoría de los T-modelos en $\mathcal{E}$ y la categoría de los morfismos geométricos $\mathcal{E} \to \mathbf{B}(T)$.

Y más aún, probamos que para un topos $\mathcal{E}$ cualquiera, hay una equivalencia

$$\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \boldsymbol{S}^*(T))$$

natural en $\mathcal{E}$.

Definición 5.13. Dado un topos clasificante $\boldsymbol{S}(T)$ de una teoría T en algún lenguaje L, llamamos *modelo universal de* T a la L-interpretación de $\boldsymbol{S}(T)$ correspondiente al morfismo geométrico identidad $1 : \boldsymbol{S}(T) \to \boldsymbol{S}(T)$ bajo la equivalencia de categorías

$$\underline{\mathrm{Mod}}(T, \boldsymbol{S}(T)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\boldsymbol{S}(T), \boldsymbol{S}(T)).$$

Denotamos a este modelo como U_T.

Este modelo U_T en $\boldsymbol{S}(T)$ es universal en el sentido de que cualquier otro T-modelo en cualquier topos (cocompleto) $\mathcal{E}$ es la imagen inversa de este modelo (salvo isomorfismo) bajo algún morfismo geométrico.

En efecto, por la naturalidad de la equivalencia de categorías tenemos que todo morfismo geométrico $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ da un diagrama de categorías y funtores

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{F}) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "f^*"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \boldsymbol{S}(T)) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Hom}}(f, \boldsymbol{S}(T))"] \\
\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \boldsymbol{S}(T))
\end{tikzcd}$$

que conmuta salvo isomorfismo.

Cualquier modelo M de T en $\mathcal{E}$ corresponde a un morfismo geométrico $c_M : \mathcal{E} \to \boldsymbol{S}(T)$, por lo que podemos considerar el diagrama anterior en el caso particular en el que $\mathcal{F} = \boldsymbol{S}(T)$ y $f = c_M$

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Mod}}(T, \boldsymbol{S}(T)) \arrow[d, "c_M^*"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(\boldsymbol{S}(T), \boldsymbol{S}(T)) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\underline{\mathrm{Hom}}(c_M, \boldsymbol{S}(T))"] \\
\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}) & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \boldsymbol{S}(T)). \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Por arriba y por la izquierda, la identidad $1 : \boldsymbol{S}(T) \to \boldsymbol{S}(T)$ va a dar a $c_M^*(U_T)$ mientras que por la derecha y abajo obtenemos a M, de forma que $M \cong c_M^*(U_T)$ como T-modelos de $\mathcal{E}$.

Esto muestra que, salvo isomorfismo, el T-modelo arbitrario M es la imagen inversa del modelo universal U_T a lo largo de un morfismo geométrico adecuado, especificamente, el morfismo $c_M : \mathcal{E} \to \boldsymbol{S}(T)$.

Veamos más detalladamente la equivalecia de categorías

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \boldsymbol{S}(T)) \cong \underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E}).$$

Esta equivalencia, como se hizo en el capítulo anterior, está en dos partes; primero tenemos la equivalencia

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}, \boldsymbol{S}(T)) \cong \underline{\mathrm{ConLex}}(\mathbf{B}(T), \mathcal{E})$$

que, como se vio en el capítulo de morfismos geométricos, al ser la topología $J(T)$ subcanónica, mapea a un morfismo geométrico $f : \mathcal{E} \to \boldsymbol{S}(t)$ a la composición de su funtor imagen inversa f^* con el funtor de Yoneda $\boldsymbol{y} : \mathbf{B}(T) \to \boldsymbol{S}(T)$, obteniendo así el funtor continuo y exacto izquierdo

$$A = f^* \circ \boldsymbol{y} : \mathbf{B}(T) \to \mathcal{E}.$$

Luego al funtor continuo y exacto izquierdo A se le asigna un modelo M_A, elemento de $\underline{\mathrm{Mod}}(T, \mathcal{E})$.

Como se probó en el lema 5.10 de la sección anterior, para toda fórmula geométrica $\varphi(x)$, los subobjetos en el modelo M_A se relacionan con el funtor A por el isomorfismo natural

$$\{x \mid \varphi(x)\}^{M_A} \cong A\big([\varphi, X]\big).$$

Como un caso particular, el modelo universal U_T en $\boldsymbol{S}(T)$ corresponde inicialmente a la identidad $\boldsymbol{S}(T) \to \boldsymbol{S}(T)$ y luego, por la equivalencia entre morfismos geométricos y funtores continuos y exactos izquierdos, corresponde al funtor de Yoneda $\boldsymbol{y} : \mathbf{B}(T) \to \boldsymbol{S}(T)$. Por lo tanto, el modelo universal U_T tiene la propiedad

$$\{x \mid \varphi(x)\}^{U_T} \cong \boldsymbol{y}\big([\varphi, X]\big)$$

para toda fórmula geométrica $\varphi(x)$.

Teorema 5.14. *Sea T una teoría geométrica. Para cualesquiera dos fórmulas geométricas $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, la fórmula $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ es verdadera en el modelo universal U_T en el topos clasificante $\mathbf{S}(T)$ si y sólo si esta fórmula es verdadera en todo modelo M de T en todo topos cocompleto $\mathcal{E}$.*

En este sentido, el modelo U_T es un modelo mínimo de la teoría T.

Demostración. La parte del "si" en este teorema es clara.

Para la ida, supongamos que la fórmula $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ se da en U_T, entonces tenemos la inclusión $\{x \mid \varphi(x)\}^{U_T} \leqslant \{x \mid \psi(x)\}^{U_T}$ de subobjetos en el topos $\boldsymbol{S}(T)$. De esta forma, tenemos un morfismo (punteado en el diagrama) para el cual el siguiente triángulo conmuta

$$\begin{tikzcd}
\{x \mid \varphi(x)\}^{U_T} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, hook] & & \{x \mid \psi(x)\}^{U_T} \arrow[dl, hook'] \\
& X_1^{U_T} \times \cdots \times X_n^{U_T} &
\end{tikzcd}$$

Por lo que se vio anteriormente, todos los objetos en este diagrama se obtienen de objetos de $\mathbf{B}(T)$ bajo el funtor de Yoneda. Como la topología en $\mathbf{B}(T)$ es subcanónica, el funtor de Yoneda $\boldsymbol{y} : \mathbf{B}(T) \to \boldsymbol{S}(T)$ es fiel y pleno. Así tenemos que la flecha punteada en $\boldsymbol{S}(T)$ existe, como en el diagrama anterior, si y sólo si existe una flecha punteada que hace conmutar al siguiente diagrama en $\mathbf{B}(T)$

$$\begin{tikzcd}
{[\varphi(x), X]} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, hook] & & {[\psi(x), X]} \arrow[dl, hook'] \\
& {[x = x, X]} &
\end{tikzcd}$$

Pero para todo modelo M en el topos $\mathcal{E}$, el funtor $F_M : \mathbf{B}(T) \to \mathbf{Def}(M)$ manda al diagrama anterior a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\{x \mid \varphi(x)\}^{M} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, hook] & & \{x \mid \psi(x)\}^{M} \arrow[dl, hook'] \\
& X_1^{M} \times \cdots \times X_n^{M} &
\end{tikzcd}$$

de objetos y flechas definibles en $\mathcal{E}$. Por lo tanto $\{x \mid \varphi(x)\}^M \leqslant \{x \mid \psi(x)\}^M$ en $\mathcal{E}$ y así $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ se da en el modelo M de $\mathcal{E}$.

$\square$

Análogamente, el teorema anterior es cierto para el topos clasificante $\boldsymbol{S}^*(T)$ con su propio modelo universal U_T. Pero el resultado es más fuerte para una teoría coherente, pues no es necesario pedir que el topos $\mathcal{E}$ sea cocompleto en este caso.

Del hecho de que el topos clasificante $\boldsymbol{S}^*(T)$ es un topos coherente y usando el teorema de Deligne 3.18 del capítulo de morfismos geométricos, obtenemos un resultado bastante sorprendente:

Corolario 5.15. *Sea T una teoría coherente. Una fórmula $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$, con φ y ψ fórmulas coherentes, es verdadera en todos los modelos de T en cualquier topos si y sólo si se da en todos los modelos de T en el topos **Con**.*

Demostración. La parte del "sólo si" es clara.

Por el contrario, supongamos que la fórmula $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ se da en cualquier modelo M de T en $\boldsymbol{Con}$. Por el teorema anterior, basta con probar que es verdadera en el modelo universal U_T en el topos clasificante $\boldsymbol{S}^*(T)$.

Pero el sitio $(\mathbf{B}^*(T), J^*(T))$ para el topos $\boldsymbol{S}^*(T)$ está dado por una categoría $\mathbf{B}^*(T)$ con límites finitos y una topología de Grothendieck dada por familias cubrientes finitas; en otras palabras, este sitio es de tipo finito, por lo que el topos clasificante $\boldsymbol{S}^*(T)$ es un topos coherente.

Por el teorema de Deligne, $\boldsymbol{S}^*(T)$ tiene suficientes puntos.

Si consideramos a cualquier punto $p : \boldsymbol{Con} \to \boldsymbol{S}^*(T)$, entonces $M = p^*(U_T)$ es un modelo de la teoría T; luego, como $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ se da en todos los modelos de $\boldsymbol{Con}$, tenemos que $\{x \mid \varphi(x)\}^M \leqslant \{x \mid \psi(x)\}^M$.

Por la definición de M, esta inclusión de subobjetos puede equivalentemente ser escrita como
$$p^*\big(\{x \mid \varphi(x)\}^{U_T}\big) \leqslant p^*\big(\{x \mid \psi(x)\}^{U_T}\big).$$

Como esto se da para cualquier punto $p : \boldsymbol{Con} \to \boldsymbol{S}^*(T)$ y $\boldsymbol{S}^*(T)$ tiene suficientes puntos, concluimos que
$$\{x \mid \varphi(x)\}^{U_T} \leqslant \{x \mid \psi(x)\}^{U_T}.$$

Esto muestra que $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$ se da en el modelo universal U_T como queríamos, y por lo tanto en cualquier T-modelo de cualquier topos.

□

Este corolario es muy útil en la práctica. Por ejemplo, muchas propiedades de los anillos y módulos en álgebra homológica pueden ser expresadas de la forma $\forall x\big(\varphi(x) \to \psi(x)\big)$, donde φ y ψ son fórmulas coherentes en un lenguaje adecuado.

Entonces, para verificar si tales propiedades se dan en anillos, módulos, etcétera, en un topos, es suficiente con verificar si se dan en anillos o módulos "ordinarios", en el topos clásico $\boldsymbol{Con}$.

Es por esto que al teorema de Deligne se le relaciona con un teorema de correctud: si una proposición coherente es demostrable, entonces es verdadera en $\boldsymbol{Con}$, pero esto implica que es verdadera en todo topos.

Capítulo 6

Ejemplos

Ya hemos visto que para toda teoría geométrica existe un topos clasificante de esa teoría. Sin embargo, la construcción del sitio sintáctico puede ser muy complicada y no siempre se le puede relacionar con algo conocido, no obstante, existe una gran cantidad de ejemplos de topos clasificantes de varias teorías que se han construido usando otras ideas muy ingeniosas.

En este capítulo mostramos varios ejemplos de topos clasificantes que no necesariamente están construidos a partir del sitio sintáctico.

Aunque no todos los ejemplos tienen las pruebas completas de que el topos dado es en efecto el topos clasificante que queremos, se da una buena idea de por qué lo es.

Ejemplo 6.1. [Moerdijk, 1995] páginas 21 a 23.

Si G es un grupo entonces denotamos por $\mathbf{B}G$ a la categoría de los G-conjuntos por la derecha. Esta categoría tiene como ojetos a familias de funciones $\{f_g : X \to X \mid g \in G\}$ donde X es un conjunto y tales que $f_g \circ f_{g'} = f_{g'g}$ para cualesquiera $g, g' \in G$ y tal que $f_e = Id_X$. Un morfismo

$$\alpha : \{f_g : X \to X \mid g \in G\} \to \{h_g : Y \to Y \mid g \in G\}$$

en esta categoría es una función $\alpha : X \to Y$ tal que $\alpha \circ f_g = h_g \circ \alpha$ para todo $g \in G$.

Esta categoría se puede interpretar como una categoría de pregavillas si definimos a la categoría $\boldsymbol{G}$ con un sólo objeto $\bullet$ y morfismos $\{g : \bullet \to \bullet \mid g \in G\}$ donde la composición está definida por

$$g \circ g' = gg' : \bullet \to \bullet.$$

Claramente el neutro del grupo e es la identidad $Id_\bullet$.

Cada objeto de $\mathbf{B}G$ lo podemos ver como un funtor $\boldsymbol{G}^{OP} \to \boldsymbol{Con}$ y cada morfismo de $\mathbf{B}G$ lo podemos interpretar como una transformación natural.

Así tenemos que $\mathbf{B}G$ es un topos de Grothendieck para todo grupo G.

Si X es un espacio topológico, consideremos a $\underline{\mathrm{Hom}}(Sh(X), \mathbf{B}G)$. Si $f : Sh(X) \to \mathbf{B}G$ es un morfismo geométrico, consideremos a G como un G-conjunto actuando sobre él mismo con la multiplicación por la derecha. Entonces G es un elemento sobre $\mathbf{B}G$. Tenemos entonces que $f^*(G)$ es una gavilla sobre X $E : op(X) \to \boldsymbol{Con}$ suprayectiva, equipada con una G-acción continua por fibras

$$\alpha : G \times E \to E.$$

Una gavilla así es llamada un G-haz principal sobre X. Un morfismo de haces principales

$$\phi : (E, \alpha) \to (E', \alpha')$$

es una transformación natural $\phi : E \to E'$ que respeta a las acciónes de G.

Tenemos entonces que $\mathbf{B}G$ es el topos clasificante para los G-haces principales de cualquier espacio topológico X.

Ejemplo 6.2. [Moerdijk, 1995] páginas 24 a 26.

En general, si una categoría $\boldsymbol{C}$ tiene límites finitos, entonces un $\boldsymbol{C}$-haz principal sobre un espacio topológico X es un funtor exacto izquierdo $\boldsymbol{C} \to Sh(X)$.

Un funtor exacto izquierdo siempre es continuo en la topología de Grothendieck trivial, en la que $J(U) = \{t_U\}$, el unitario de la criba total, para cada $U \in \boldsymbol{C}$, ya que t_U tiene como elemento a la identidad de U, por lo que cualquier funtor F aplicado a t_U tendrá como elemento a la identidad de $F(U)$, por lo que será una familia epimórfica.

Así tenemos que la categoría de $\boldsymbol{C}$-haces principales sobre X es la categoría $\underline{\mathrm{ConLex}}(\boldsymbol{C}, Sh(X))$ que sabemos que es equivalente a la categoría

$$\underline{\mathrm{Hom}}(Sh(X), \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}})$$

(pues si J es la topología trivial, entonces $Sh(\boldsymbol{C}, J) = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$). Por lo que $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{OP}}$ es el topos clasificante para los $\boldsymbol{C}$-haces principales sobre cualquier espacio topológico X.

Ejemplo 6.3. [Moerdijk, 1995] páginas 37 a 42.

Definimos a la categoría Δ que tiene como objetos a los conjuntos $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que n es un entero no negativo, y como morfismos a las funciones $\alpha : [n] \to [m]$ crecientes ($\alpha(i) \leqslant \alpha(j)$ siempre que $i \leqslant j$).

El topos $\boldsymbol{Con}^{\Delta}$ (la categoría de pregavillas sobre Δ^{OP}) es el topos clasificante para órdenes lineales. Para ver esto, supongamos que $X : \Delta^{OP} \to \mathcal{E}$ es un funtor que preserva todos los límites finitos, entonces manda colímites finitos de Δ a límites finitos en $\mathcal{E}$; tenemos que $[n] = [m] \coprod_{[0]} [k]$ siempre que $n = m + k$, donde $[m] \coprod_{[0]} [k]$ es el coproducto fibrado de las flechas $\delta_n : [0] \to [n]$ y $\delta_0 : [0] \to [k]$ las funciones constantes n y 0 respectivamente. En particular,

$$[n] = [1] \coprod_{[0]} \cdots \coprod_{[0]} [1]$$

por lo que

$$X[n] = X[1] \times_{X[0]} \cdots \times_{X[0]} X[1].$$

Así X depende sólo de su valor en [0], [1], δ_0 y δ_1. Además, la familia $\{\delta_0, \delta_1\}$ de [0] a [1] forma una familia epimórfia en Δ por lo que

$$(X\delta_0, X\delta_1) : X[1] \rightarrowtail X[0] \times X[0]$$

es un monomorfismo. Se puede probar que $X[0]$ es un orden lineal con $\leqslant = (X\delta_0, X\delta_1) : X[1] \rightarrowtail X[0] \times X[0]$.

Ejemplo 6.4. [Joyal, 2008]

Andre Joyal mostró que $\boldsymbol{Con}^{\Delta^{OP}}$ es el topos clasificante para intervalos lineales.

Específicamente, un morfismo geométrico de $\boldsymbol{Con}$ a $\boldsymbol{Con}^{\Delta^{OP}}$ es un intervalo lineal en $\boldsymbol{Con}$, es decir un conjunto totalmente ordenado que distingue a un máximo y a un mínimo (distintos). En general, un intervalo lineal es un modelo de la teoría geométrica con un sólo tipo, una relación binaria $\leqslant$ y dos constantes 0 y 1 y con los axiomas de reflexividad, transitividad, antisimetría, dicotomía, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ y $(0 = 1 \to \bot)$.

Joyal llama a éstos "intervalos lineales *estrictos*"; al remover la hipótesis de que el máximo y el mínimo son distintos, uno llega a la noción más débil a la que él llama "intervalos lineales". Los intervalos lineales en este sentido son clasificados por el topos $\boldsymbol{Con}^{\Delta_a^{OP}}$, donde Δ_a (a veces llamada "Delta del algebrista" o la categoría siplicial argumentada) es como antes pero incluye también al vacío como objeto.

Ejemplo 6.5. [Moerdijk, 1995] II.3.

Una *categoría topológica* es una categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ tal que su conjunto de objetos $\boldsymbol{C}_0$ y su conjunto de morfismos $\boldsymbol{C}_1$ tienen estructura de espacio topológico. Además pedimos que las funciones tomar dominio y tomar codominio de $\boldsymbol{C}_1$ a $\boldsymbol{C}_0$, tomar identidad de $\boldsymbol{C}_0$ a $\boldsymbol{C}_1$ y componer de $\boldsymbol{C}_1 \times_{\boldsymbol{C}_0} \boldsymbol{C}_1$ a $\boldsymbol{C}_1$ sean todas continuas.

Una $\boldsymbol{C}$-gavilla sobre una categoría topológica $\boldsymbol{C}$ es un espacio étale (es decir, un homeomorfismo local) $p : S \to \boldsymbol{C}_0$ equipada con una acción continua derecha $\alpha : S \times_{\boldsymbol{C}_0} \boldsymbol{C}_1 \to S$ (denotamos $\alpha(x, f) = x \cdot f$). Esta acción está definida siempre que $p(x) = Cod(f)$ y debe cumplir

$$x \cdot Id_{p(x)} = x, \qquad p(x \cdot f) = Dom(f), \qquad x \cdot (f \circ g) = (x \cdot f) \cdot g. \tag{6.1}$$

Un morfismo entre $\boldsymbol{C}$-gavillas es una función continua $F : S \to S'$ que respeta a la acción: $F(x \cdot_S f) = F(x) \cdot_{S'} f$ para todo $x \in S$ y $f \in \boldsymbol{C}_1$. La categoría de $\boldsymbol{C}$ gavillas la denotamos como $\mathbf{B}\boldsymbol{C}$.

Moerdijk prueba que $\mathbf{B}\boldsymbol{C}$ es un topos. El topos $\mathbf{B}\boldsymbol{C}$ es llamado *topos clasificante de la categoría topológica* $\boldsymbol{C}$.

Ejemplo 6.6. [Moerdijk, 1995] II.4.

Una categoría topológica $\boldsymbol{C}$ es llamada D-étale si su mapeo dominio $Dom : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_0$ es un homeomorfismo local.

Si $\boldsymbol{C}$ es una categoría topológica D-étale entonces un $\boldsymbol{C}$-haz sobre un espacio X es un espacio étale $p : E \to X$ equipado con una $\boldsymbol{C}$-acción izquierda continua por fibras dada por mapeos

$$\pi : E \to \boldsymbol{C}_0, \qquad a : \boldsymbol{C}_1 \times_{\boldsymbol{C}_0} E \to E.$$

El mapeo a está definido en pares (g, e) donde $g \in \boldsymbol{C}_1$, $e \in E$ y $Dom(g) = \pi(e)$, nuevamente denotamos $a(g, e) = g \cdot e$. La acción izquierda debe cumplir igualdades análogas a las de (6.1).

Además, decimos que un $\boldsymbol{C}$-haz sobre X es *principal* si para cualquier punto $x \in X$, se cumplen las siguientes propiedades (Denotamos como E_x a la fibra de x bajo p)

1. E_x es no vacío,

2. si $y, z \in E_x$ entonces existe un $w \in E_x$ y flechas $\alpha : \pi(w) \to \pi(y)$ y $\beta : \pi(w) \to \pi(z)$ tales que $\alpha \cdot w = y$ y $\beta \cdot w = z$.

3. Para cualquier punto $y \in E_x$ y cualquier par de flechas $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}_1$ con $Dom(\alpha) = \pi(y) = Dom(\beta)$ y $\alpha \cdot y = \beta \cdot y$, existe un punto $w \in E_x$ y una flecha$\gamma : \pi(w) \to \pi(y)$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $\gamma \cdot w = y$ en E_x y $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma$ en $\boldsymbol{C}$.

Con la noción obvia de función continua que preserva la $\boldsymbol{C}$-acción, estos $\boldsymbol{C}$-haces principales forman una categoría $Prin(X, \boldsymbol{C})$.

El teorema 4.1 de [Moerdijk, 1995] afirma que

$$\underline{\mathrm{Hom}}(Sh(X), \mathbf{B}\boldsymbol{C}) \cong Prin(X, \boldsymbol{C})$$

siempre que $\boldsymbol{C}$ es D-étale. Es decir, que $\mathbf{B}\boldsymbol{C}$ es el topos clasificante para los $\boldsymbol{C}$-haces principales sobre cualquier espacio topológico X.

Ejemplo 6.7. [Mac Lane and Moerdijk, 1992] VIII.4.

El topos $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{ConFin}}$ (la categoría de pregavillas sobre $\boldsymbol{ConFin}^{OP}$, donde $\boldsymbol{ConFin}$ es la categoría de todos los conjuntos finitos) es el topos clasificante de objetos de cualquier topos $\mathcal{E}$: todo morfismo geométrico $f : \mathcal{E} \to \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{ConFin}}$ viene de un único funtor exacto izquierdo $F : \boldsymbol{ConFin}^{OP} \to \mathcal{E}$.

Este morfismo manda colímites finitos de $\boldsymbol{ConFin}$ a límites finitos de $\mathcal{E}$, como cada conjunto finito X es biyectable con el coproducto $\coprod_{x \in X} 1$, (donde 1 es el objeto terminal $\{\varnothing\}$) entonces

$$F(X) \cong \prod_{x \in X} F(1),$$

por lo que F sólo depende de su valor en 1, que es simplemente un objeto de $\mathcal{E}$.

Analogamente, dado un objeto $E \in \mathcal{E}$, podemos definir a un funtor $F_E : \boldsymbol{ConFin} \to \mathcal{E}$ exacto izquierdo tal que

$$F_E(X) = \prod_{x \in X} E.$$

El topos $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{ConFin}}$ es llamado "clasificador de objetos".

Similarmente, el topos $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{ConFin}_*}$ (donde $\boldsymbol{ConFin}_*$ es la categoría de los conjuntos finitos punteados (X, x_0) donde $x_0 \in X$ y con morfismos $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ funciones tales que $f(x_0) = y_0$) es el clasificador de los objetos punteados de cualquier topos $\mathcal{E}$.

Ejemplo 6.8. [Lawvere, 1963].

Una *teoría de Lawvere* o *teoría de productos finitos* es una categoría $\boldsymbol{C}(T)$ con productos finitos en la que todo objeto es isomorfo a productos $x^n = x \times \cdots \times x$ incluyendo a un objeto terminal $1 = x^0$.

En particular, la teoría de grupos de Lawvere es una categoría $\boldsymbol{C}(Grp)$ con un morfismo $m : x \times x \to x$ que describe a la multiplicación, un morfismo $e : 1 \to x$ que describe a la identidad del grupo y otro $I : x \to x$ que describe a la operación de tomar inversos, y que obedecen a los axiomas usuales de grupo.

Un funtor que preserva productos $F : \boldsymbol{C}(Gru) \to \mathcal{E}$ es precisamente un grupo en $\mathcal{E}$ (un modelo de la teoría de grupos). De aquí que la categoría $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}(Gru)}$ de pregavillas sobre $\boldsymbol{C}(Gru)$ es el topos clasificante de los grupos en un topos cualquiera.

Ejemplo 6.9.

En general, cualquier teoría de productos finitos $\boldsymbol{C}(T)$ tiene como topos clasificante (de modelos de esa teoría) a la categoría de pregavillas sobre $\boldsymbol{C}(T)$, aún cuando $\boldsymbol{C}(T)$ tiene varios tipos.

En particular la teoría de anillos y la teoría de R-módulos sobre un anillo tradicional R (en la que hay un morfismo $r : x \to x$ para cada r en R) tienen un topos clasificante así.

También las álgebras de Boole y de Heyting son clasificadas por un topos de esta forma.

Ejemplo 6.10. [Moerdijk, 1996]

Cuando uno juega a las cartas inglesas, la A tiene un valor tanto máximo como mínimo en el orden de las cartas de una misma figura. En este sentido, uno podría decir que las cartas de una misma figura tienen un orden que es de alguna manera *cíclico*. Esta idea se puede capturada para definir el concepto de *ciclo abstracto*.

Un ciclo abstracto C es una estructura

$$C = (P, S, \delta_0, \delta_1, 0, 1, *, \cup)$$

donde P y S son dos conjuntos, P es el conjunto de "puntos" del ciclco y S el conjunto de "segmentos", δ_0 y δ_1 son funciones que a cada segmento le asignan un punto respectivamente. Si $a \in S$, $\delta_0(a)$ es el punto inicial de a y $\delta_1(a)$ es el punto final de a. Si a y b son dos segmentos tales que $\delta_1(a) = \delta_0(b)$, entonces está definido el segmento $a \cup b$ que tiene como punto inicial a $\delta_0(a)$ y como punto final a $\delta_1(b)$; a $a \cup b$ lo podemos pensar como la concatenación de a con b.

Si x es un punto del ciclo, entonces tiene dos segmentos distinguidos 0_x y 1_x, ambos con punto inicial y punto final igual a x; a 0_x lo pensamos como el segmento que se queda fijo en x, por lo que al concatenarlo con cualquier otro segmento lo deja igual. A 1_x lo pensamos como el segmento que le da toda la vuelta al ciclo, empezando por x y terminando ahí mismo, de esta forma, para todo segmento a, tenemos al segmento a^* que tiene como punto final al punto inicial de a y viceversa, pero a^* recorre al ciclo por el otro lado, en el sentido de que $a \cup a^* = 1_{\delta_0(a)}$ y $a^* \cup a = 1_{\delta_1(a)}$. Además $0_x^* = 1_x$ y $a^{**} = a$.

Un morfismo $f : C \to C'$ entre ciclos consta de dos funciones $f_P : P \to P'$ y $f_S : S \to S'$ que conmutan con todas las operaciones $\delta_0, \delta_1, 0, 1, *$ y $\cup$.

El ejemplo más sencillo de un ciclo abstracto es el que tiene como puntos a un subconjunto de los puntos de la circunferencia $P \subseteq S^1$ y como segmentos a todos los intervalos cerrados y positivamente orientados con extremos en P. De hecho, se puede probar que cualquier ciclo a lo más numerable es isomorfo a cualquier ciclo así, donde $P \subseteq S^1$ tiene la misma cantidad de puntos.

Define a una categoría Λ con objetos $[0], [1], [2], \ldots$ y morfismos $(\sigma, u) : [n] \to [m]$ un par de funciones donde σ es una permutación cíclica de $\{0, \ldots, n\}$, mientras que $u : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, m\}$ es no decreciente. Para la composición aprovechamos el hecho de que si σ es como antes y $v : [k] \to [n]$ es una función creciente, entonces $\sigma \circ v$ se factoriza de manera única como $v' \circ \sigma'$ donde σ' es una permutacción cíclica de elementos de $[k]$ monótona en las fibras de v y $v' : [k] \to [n]$ es no decreciente. De esta manera, la composición de $(\tau, v) : [k] \to [n]$ con $(\sigma, u) : [n] \to [m]$ la definimos como

$$(\sigma' \circ \tau, u \circ v') : [k] \to [m].$$

Moerdijk probó que la categoría Λ^{OP} es equivalente a la categoría de ciclos abstractos finitos $[n]^*$ y que cualquier fórmula φ del lenguaje de los ciclos es cierta para todo ciclo abstracto si y sólo sí es cierta para todo ciclo abstracto finito. Luego usó estos hechos para demostrar que $\boldsymbol{Con}^{\Lambda^{OP}}$ es el topos clasificante para modelos de los axiomas de ciclos abstractos en cualquier topos.

A el topos de pregavillas sobre Λ se le conoce también como la "categoría de *conjuntos cíclicos*".

Ejemplo 6.11. [Mac Lane and Moerdijk, 1992] VIII.5.

En este ejemplo, por "anillo" nos referimos a anillo conmutativo con unidad.

Vimos antes que cualquier objeto anillo en un topos es equivalente a un funtor que respeta productos de la teoría de productos finitos $\boldsymbol{C}(Rng)$ sobre la teoría de anillos. Sin embargo, esta categoría no tiene todos los límites finitos, por lo que tiene sentido preguntarse cómo sería la categoría generada por $\boldsymbol{C}(Rng)$ y que tiene todos los límites finitos.

Como $\boldsymbol{C}(Rng)$ es la categoría cerrada bajo productos de un objeto anillo A, entonces buscamos a una categoría cerrada bajo límites finitos generada por un objeto anillo A. Resulta que una categoría con estas características es la categoría $\boldsymbol{Rng}_{fp}^{OP}$ donde $\boldsymbol{Rng}_{fp}$ es la categoría de los anillos finitamente presentados. El objeto anillo A de $\boldsymbol{Rng}_{fp}^{OP}$ que la genera bajo límites finitos es el anillo de polinomios ordinario $\mathbb{Z}[x]$.

Por lo tanto, $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{Rng}_{fg}}$ es topos clasificante de la teoría de anillos (conmutativos y con unidad), donde cada objeto anillo $A \in \mathcal{E}$ es isomorfo a $F(\mathbb{Z}[x])$ para un único funtor exato izquierdo $F : \boldsymbol{Rng}_{fg} \to \mathcal{E}$.

Ejemplo 6.12. [Mac Lane and Moerdijk, 1992] III.3 y VIII.6.

Consideremos nuevamente a la teoría de anillos conmutativos con unidad; si a los axiomas de esta teoría les agregamos las fórmulas

$$\big((0 = 1) \to \bot\big) \qquad \text{y} \qquad \big((x + y = 1) \to (\exists z(x \cdot z = 1) \vee \exists z(y \cdot z = 1))\big)$$

obtenemos a la llamada *teoría coherente de anillos locales*.

Denotamos por $\boldsymbol{Rng}_{fg}$ a la categoría de los anillos finitamente generados. Definimos al *sitio de Zariski* como el sitio $(\boldsymbol{Rng}_{fg}^{OP}, J)$ donde J es la topología de Grothendieck tal que para todo $A \in \boldsymbol{Rng}_{fg}$, una cocriba S sobre A está en $J(A)$ si y sólo si contiene a una familia finita $\{\xi_i : A \to A[s_i^{-1}] \mid i \in \{0, \ldots, n\}\}$ donde $\{s_0, \ldots, s_n\}$ es cualquier subconjunto de A que no está contenido en algún ideal propio de A, $A[s_i^{-1}]$ es la localización correspondiente y ξ_i es la inclución canónica en $\boldsymbol{Rng}_{fg}$ para cada i.

La teoría (coherente) de anillos locales tiene como topos clasificante al *topos de Zariski* $Sh(\boldsymbol{Rng}_{fg}^{OP}, J)$, que es la categoría de gavillas sobre el sitio de Zariski.

Ejemplo 6.13. [Caramello, 2009]

La teoría de los *dominios enteros* es la teoría obtenida a partir de la teoría de anillos conmutativos con unidad al agregarle los axiomas

$$\big((0 = 1) \to \bot\big) \qquad \text{y} \qquad \big((x \cdot y = 0) \to ((x = 0) \vee (y = 0))\big).$$

Consideremos de nuevo a la categoría $\boldsymbol{Rng}_{fg}^{OP}$, pero esta vez con una topología de Grothendieck K tal que una cocriba S sobre A está en $K(A)$ si y sólo si, o A es el anillo cero y S es la cocriba vacía, o bien S contiene a una familia finita no vacía $\{\pi_i : A \to A/\langle a_i \rangle \mid i \in \{0, \ldots, n\}\}$ donde $\{a_0, \ldots, a_n\}$ es un subconjunto de A tal que $a_0 \cdot \cdots \cdot a_n = 0$, $\langle a_i \rangle$ es el ideal generado por a_i y $\pi_i : A \to A/\langle a_i \rangle$ es la proyección canónica en $\boldsymbol{Rng}_{fg}$ para cada i.

La teoría de los dominios enteros tiene como topos clasifiante al topos de gavillas $Sh(\boldsymbol{Rng}_{fg}, K)$.

Ejemplo 6.14.

Un objeto estrictamente bipunteado en un topos $\mathcal{E}$ es una terna (X, p_X, q_X) donde X es un objeto de $\mathcal{E}$ y $p_X, q_X : 1_{\mathcal{E}} \to X$ son dos puntos de X en $\mathcal{E}$. Un morfismo entre dos objetos bipunteados $f : (X, p_X, q_X) \to (Y, p_Y, q_Y)$ es un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{E}$ tal que $f \circ p_X = p_Y$ y $f \circ q_X = q_Y$.

Definimos a la categoría $\boldsymbol{A}$ que tiene por objetos a los conjuntos estrictamente bipunteados $\overline{n} = (\{0, \ldots, n\}, 0, n)$ para todo entero $n \geqslant 1$ y como morfismos $f : \overline{n} \to \overline{m}$ a las funciones $f : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, m\}$ que preservan a los puntos respectivos: $f(0) = 0$ y $f(n) = m$.

Veamos que $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{A}}$, el topos de pregavillas sobre $\boldsymbol{A}^{OP}$ es el topos clasificante de los objetos bipunteados: Primero tenemos que $\overline{1}$ es objeto inicial de $\boldsymbol{A}$ por lo que es objeto terminal de $\boldsymbol{A}^{OP}$. Notemos además que el coproducto

$$\overline{n} \amalg \overline{m} = \overline{n+m-1}$$

pues si tomamos a las inclusiones $i_n : \overline{n} \to \overline{n+m-1}$ y $i_m : \overline{m} \to \overline{n+m-1}$ tales que $i_n(k)$ es igual a k si $0 \leqslant k \leqslant n-1$ e igual a $n+m-1$ si $k = n$ y $i_m(k)$ es igual a $(n-1)+k$ si $1 \leqslant k \leqslant m$ e igual a 0 si $k = 0$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{n+m-1} \arrow[dd, dashed, "\gamma"] & \\
\overline{n} \arrow[ur, tail, "i_n"] \arrow[dr, tail, "\alpha"'] & & \overline{m} \arrow[ul, tail, "i_m"'] \arrow[dl, tail, "\beta"] \\
 & \overline{p} &
\end{tikzcd}$$

entonces, si tenemos morfismos $\alpha : \overline{n} \to \overline{p}$ y $\beta : \overline{m} \to \overline{p}$ tendremos que existe una flecha única $\gamma : \overline{n+m-1} \to \overline{p}$, definida como $\gamma(k)$ igual a $\alpha(k)$ si $0 \leqslant k \leqslant n-1$ y $\beta\big(k-(n-1)\big)$ si $n \leqslant k \leqslant n+m-1$, tal que $\gamma \circ i_n = \alpha$ y $\gamma \circ i_m = \beta$.

En particular tenemos que para todo $n \geqslant 2$

$$\overline{n} = \coprod_{i=1}^{n-1} \overline{2}$$

por lo que la categoría $\boldsymbol{A}^{OP}$ está generada por $\overline{2}$.

Si $F : \boldsymbol{A}^{OP} \to \mathcal{E}$ es un funtor exacto izquierdo, entonces está caracterizado por su valor en $\overline{2}$, además, $F(\overline{1}) = 1_{\mathcal{E}}$ es el objeto terminal de $\mathcal{E}$. Como existen exactamente dos funciones $f_0 : \overline{2} \to \overline{1}$ y $f_1 : \overline{2} \to \overline{1}$ en $\boldsymbol{A}$, entonces $F(f_0) : F(\overline{1}) \to F(\overline{2})$ y $F(f_1) : F(\overline{1}) \to F(\overline{2})$ son dos morfismos de $1_{\mathcal{E}}$ a $F(\overline{2})$ en $\mathcal{E}$ por lo que el funtor F clasifica a un objeto estrictamente bipunteado $\big(F(\overline{2}), F(f_0), F(f_1)\big)$.

Así tenemos que $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{A}}$ es el topos clasificante de los objetos bipunteados de ccualquier topos $\mathcal{E}$.

Ejemplo 6.15.

Decimos que $\boldsymbol{C}$ es una *categoría extensiva* si tiene coproductos finitos y cumple que siempre que los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] & Z \arrow[l] \arrow[d] \\
A \arrow[r, "i_A"'] & A \amalg B & B \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

forman productos fibrados, entonces $X \to Y \leftarrow Z$ es un coproducto.

Como $\big(\coprod_{i\in I} A\big) \amalg A_{i_0} \cong \coprod_{i \in I \cup i_0} A_i$ entonces es fácil probar por inducción que si $\boldsymbol{C}$ es extensiva entonces, para todo coproducto finito $\coprod_{i=1}^{n}$, si para cada

i el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ A_i \arrow[r, "i_{A_i}"'] & \coprod A_i \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado tenemos que $\{f_i : X_i \to Y \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es coproducto.

Definimos sobre una categoría extensiva $\boldsymbol{C}$ a una topología de Grothendieck J_G a partir de una base K, donde $K(A)$ es la familia de todos los conjuntos finitos $\{A_i \to A \mid i \in I\}$ con la propiedad de que $\coprod A_i \to A$ es un isomorfismo.

K es en efecto base para una topología:

(1') se cumple pues cualquier isomorfismo $\{C \to A\}$ cumple la propiedad (el coproducto de un solo objeto es él mismo).

(2') se da pues si $g : Y \to A$ es cualquier morfismo y $\{i_{A_i} : A_i \to A \mid i \in I\}$ es una familia finita tal que $\coprod A_i \cong A$ y consideramos a los productos fibrados

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ A_i \arrow[r, "i_{A_i}"'] & A \cong \coprod A_i \end{tikzcd}$$

etonces $\{f_i : X_i \to Y \mid i \in I\}$ está en $K(Y)$, pues por la extensividad de $\boldsymbol{C}$ $Y \cong \coprod X_i$.

Finalmente, para (3'), tenemos que si $\{i_{A_i} : A_i \to A \mid i \in I\}$ es una familia tal que $\coprod A_i \cong A$ y $\{i_{B_{j_i}} : B_{j_i} \to A_i \mid i_j \in J_i\}$ es una familia tal que $\coprod B_{j_i} \cong A$ para cada $i \in I$, entonces la familia

$$\{i_{A_i} \circ i_{B_{j_i}} : B_{j_i} \to A \mid i_j \in J_i, i \in I\}$$

está en $K(A)$ pues

$$\coprod_{j_i \in J_i, i \in I} B_{j_i} = \coprod_{i \in I} \Big(\coprod_{j_i \in J_i} B_{j_i} \Big) \cong \coprod_{i \in I} A_i \cong A.$$

Si $\boldsymbol{C}$ es extensiva y J es su topología de Grothendieck dada de esta manera, entonces topos de gavillas $Sh(\boldsymbol{C}, J_G)$ es llamado el *topos de Gaeta* sobre $\boldsymbol{C}$ y se le denota como $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{C})$.

consideremos a K un campo algebraicamente cerrado y a $(\boldsymbol{K\text{-}Alg})_{fp}$ la categoría de K-álgebras finitamente presentadas. Lawvere probó en [Lawvere, 2003] que $(\boldsymbol{K\text{-}Alg})_{fp}^{OP}$ es extensiva. Podemos considerar entonces a su topos de Gaeta $\boldsymbol{G}\big((\boldsymbol{K\text{-}Alg})_{fp}^{OP}\big)$.

Veamos ahora que $F : (\boldsymbol{K\text{-}Alg})_{fp} \to \boldsymbol{Con}$ es una gavilla aquí si y sólo si F preserva productos finitos.

Para el regreso, supongamos que $\{f_i : A \to A_i \mid i \in I\}$ es una familia finita de $(\boldsymbol{K\text{-}Alg})_{fp}$ tal que $A \to \prod A_i$ es un isomorfismo. Sea $\{x_i \in F(A_i) \mid i \in I\}$ una familia compatible, entonces $(x_i)_{i\in I} \in \prod F(A_i) \cong F\big(\prod A_i\big) \cong F(A)$ es la única amalgamación para la familia.

Para la ida, supongamos que $F : (\boldsymbol{K\text{-}Alg})_{fp} \to \boldsymbol{Con}$ es una gavilla y que $\{\prod A_i \to A_i \mid i \in I\}$ es un producto finito, se puede probar que para cualquier elemento $(x_i)_{i\in I} \in \prod F(A_i)$, la familia $\{x_i \in F(A_i) \mid i \in I\}$ es una familia compatible, por lo que tiene una única amalgamación en $F(\prod A_i)$, por lo que existe una biyección entre $\prod F(A_i)$ y $F(\prod A_i)$. Así tenemos que F preserva productos finitos.

El topos de Gaeta $\boldsymbol{G}((\boldsymbol{K\text{-}Alg})_{fp}^{OP})$ es el topos clasificante para los objetos anillos conmutativos con exactamente dos idempotentes de cualquier topos.

Topos Clasificantes y el Axioma del Infinito

El axioma del infinito para un topos dice que este consta con un objeto números naturales. Resulta que para un topos elemental $\mathcal{E}$, es una condición necesaria y suficiente para que *te* cumpla con el axioma del infinito que exista un topos clasificante de objetos sobre $\mathcal{E}$. En esta sección bosquejaremos la prueba de este resultado, el cual se puede consultar más a fondo en [Blass, 1989].

Sea T la teoría geométrica con un sólo tipo, con un símbolo de constante o, un símbolo de función unitario s, sin más símbolos no lógicos y sin axiomas. Un T-modelo en cualquier topos es simplemente una estructura $\mathbb{A} = (A, o_{\mathbb{A}}, s_{\mathbb{A}})$ donde A es un objeto y $o_{\mathbb{A}} : 1 \to A$ y $s_{\mathbb{A}} : A \to A$ son morfismos del topos (omitiremos los subíndices en o y s en caso de no haber confusión).

Un homomorfismo de T-modelos es un morfismo entre los objetos subyacentes que conmuta con o y con s. Un objeto números naturales es simplemente un T-modelo inicial.

Definición 6.1. Un *T-modelo débilmente inicial (en un topos)* es un T-modelo con al menos un un homomorfismo a todo T-modelo.

Un T-modelo débilmente inicial será llamado *objeto números naturales débil.*

Lema 6.2. *Si un topos elemental $\mathcal{E}$ tiene un objeto números naturales débil, entonces tiene un objeto números naturales.*

Demostración. Sea $\mathbb{A} = (A, o, s)$ un objeto números naturales débil. Consideremos la siguiente fórmula $\phi(z)$ en el lenguaje de Mitchell-Bénabou:

$$\forall x \in P(A)[o \in_A x \wedge \forall y \in A(y \in_A x \to s(y) \in_A x) \to z \in_A x],$$

donde z es de tipo A. La fórmula "dice" que z pertenece a todo sub-T-modelo de $\mathbb{A}$. La interpretación $|\phi(z)|$ de esta fórmula es un morfismo $A \to \Omega$, el morfismo característico de un cierto subobjeto de A. Cálculos sencillos muestran que N es el universo de un sub-T-modelo mínimo $\mathcal{N} = (N, o_{\mathcal{N}}, s_{\mathcal{N}})$ de $\mathbb{A}$. Como $\mathbb{A}$ es un objeto números naturales débil, $\mathcal{N}$ también lo es. Para mostrar que $\mathcal{N}$ es el objeto números naturales buscado, supongamos que tenemos dos homomorfismos de $\mathcal{N}$ a otro T-modelo; si consideramos al igualador de estos dos morfismos, obtendremos a un sub-T-modelo de $\mathcal{N}$, que debe ser todo $\mathcal{N}$ por la minimalidad de $\mathcal{N}$, así ambos homomorfismos son iguales como se deseaba.

□

Proposición 6.3. *Si T tiene topos clasificante $\mathcal{F}$ sobre el topos $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}$ tiene un objeto números naturales.*

Demostración. Tenemos un T-modelo genérico $\mathcal{G} = (G, o, s)$ en $\mathcal{E}$ y un morfismo geométrico canónico $p : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$.

Sea $\mathbb{A}$ cualquier T-modelo en $\mathcal{E}$, entonces tenemos un morfismo geométrico $g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, un isomorfismo $i : g^*(\mathcal{G}) \to \mathbb{A}$ y un isomorfismo natural $\nu : Id \to g^*p^*$. Además, tenemos un homomorfismo $\epsilon_G : p^*p_*(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$ que, al aplicarlo con g^*, obtenemos el siguiente homomorfismo de T-modelos en $\mathcal{E}$:

$$p_*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\nu_{p_*(G)}} g^*p^*p_*(\mathcal{G}) \xrightarrow{g^*(\epsilon_G)} g^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{i} \mathbb{A}.$$

Como $\mathbb{A}$ fue un T-modelo arbitrario en $\mathcal{E}$, hemos probado que $p_*(\mathcal{G})$ es un objeto números naturales débil en $\mathcal{E}$. Por el lema anterior, $\mathcal{E}$ tiene un objeto números naturales.

□

Se probó en el capítulo 5 que toda teoría geométrica tiene topos clasificante sobre todo topos cocompleto; en particular, la teoría T definida aquí tiene un topos clasificante sobre todo topos cocompleto, por lo que todo topos cocompleto cumple con el axioma del infinito.

Además se puede probar que si un topos elemental tiene topos clasificante de objetos, entonces tiene un topos clasificante para T. Esta construcción es bien conocida y el lector interesado puede leer más sobre ella en [Blass, 1989].

Capítulo 7

Teorías de Primer Orden

En este escrito hemos probado que toda teoría geométrica (infinitaria) de primer orden tiene topos clasificante. Además hemos mostrado varios ejemplos en los que no necesariamente se hace explícita la teoría geométrica de una estructura, pero hemos sido capaces de encontrar topos clasificantes para estas estructuras.

Aunque no toda teoría de primer orden infinitaria tiene topos clasificante, existe una caracterización para la existencia de topos clasificante para la cual se le pide una "condición de tamaño" a la teoría. Se puede probar además que todo topos de Grothendieck surge como el topos clasificante de alguna teoría así.

Los temas aquí tratados están basados en el artículo "*Classifying toposes for first-order theories*" [Butz and Johnstone, 1998].

7.1. Introducción

Podríamos decir que dos teorías son equivalentes si tienen topos clasificantes equivalentes. Es bien sabido que todo topos de Grothendieck se puede ver como el topos clasificante de alguna teoría geométrica por lo que si una teoría de primer orden no es equivalente a alguna teoría geométrica, no podemos esperar que tenga un topos clasificante en el sentido usual.

Ya hemos visto que las fórmulas geométricas son específicamente aquellas que se preservan bajo morfismos geométricos, sin embargo podemos considerar específicamente a los morfismos geométricos cuyo funtor imagen inversa preserva fórmulas de primer orden (infinitarias) arbitrarias. A estos morfismos geométricos se les llama *morfismos geométricos abiertos* (Más sobre morfismos geométricos abiertos en [Johnstone, 1980] y [Joyal and Tierney, 1984]). Así que podríamos esperar que, para al menos algunas teorías $\mathbb{T}$ de primer orden de interés, es posible encontrar a un topos $\mathcal{B}^{po}(\mathbb{T})$ y una equivalencia natural

$$Ab(\mathcal{F}, \mathcal{B}^{po}(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{T} - \underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{F}),$$

donde el lado izquierdo denota a la subcategoría plena de $Top(\mathcal{F}, \mathcal{B}^{op}(\mathbb{T}))$ cuyos objetos son los morfismos geométricos abiertos. (Como una teoría geométrica también puede ser considerada una teoría de primer orden, llamaremos al topos clasificante usual de la teoría geométrica $\mathcal{B}^g(\mathbb{T})$, mientras que al de la teoría de primer orden en este sentido le llamaremos $\mathcal{B}^{po}(\mathbb{T})$.)

7.2. Mapeos abiertos a topos de gavillas

Sea $\mathcal{E}$ el topos de gavillas sobre un sitio (pequeño) $(\boldsymbol{C}, J)$. El teorema de Diaconescu afirma que hay una equivalencia entre la categoría $Top(\mathcal{F}, te)$ de morfismos geométricos de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{E}$ y la categoría de funtores planos y continuos $\boldsymbol{C} \to \mathcal{F}$. Nuestra meta en esta sección es caracterizar a aquellos funtores $\boldsymbol{C} \to \mathcal{F}$ los cuales se corresponden con morfismos geométricos abiertos.

Aunque nuestra definición principal de morfismos abiertos será que son precisamente aquellos morfismos geométricos $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ cuyos funtores imagen inversa preservan a la lógica de primer orden (infinitaria) completa, en esta sección será conveniente usar la caracterización de ellos en términos de la flecha $\overline{\tau} : \Omega_{\mathcal{E}} \to f_*\Omega_{\mathcal{F}}$ que es la transpuesta de el funtor característico τ del monomorfismo $f^*(\top_{\mathcal{E}})$. f es morfismo geométrico abierto si y sólo si $\overline{\tau}$ tiene un adjunto izquierdo interno $\lambda : f_*\Omega_{\mathcal{F}} \to \Omega_{\mathcal{E}}$ (ver el teorema 3.2 de [Johnstone, 1980] o la página 56 de [Joyal and Tierney, 1984]).

Denotamos como $\epsilon : \boldsymbol{C} \to \mathcal{E}$ a la composición del encaje de Yoneda $\boldsymbol{C} \to [\boldsymbol{C}^{op}, \boldsymbol{Con}]$ con el funtor gavilla asociada y como $F : \boldsymbol{C} \to \mathcal{F}$ al funtor plano y continuo que le corresponde al morfismo geométrico $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$.

Lema 7.1. *El morfismo geométrico f es abierto si y sólo si*

1. *Para cada objeto A en $\boldsymbol{C}$ y cada familia $\{S_i \mid i \in I\}$ de subobjetos de $\epsilon(A)$ tenemos $\bigwedge_{i\in I} \overline{\tau}_A(S_i) = \overline{\tau}_A(\bigwedge_{i\in I} S_i)$; y*

2. *para cada morfismo $\alpha : A \to B$ en $\boldsymbol{C}$ y cada subobjeto S de $\epsilon(A)$ tenemos $\forall_{F(\alpha)}\overline{\tau}_A(S) = \overline{\tau}_B\forall_{\epsilon(\alpha)}(S)$.*

Aquí, como usualmente, $\forall_{F(\alpha)}$ y $\forall_{\epsilon(\alpha)}$ denotan a los adjuntos derechos para $F(\alpha)^*$ y $\epsilon(\alpha)^*$ actuando sobre subobjetos.

Demostración. Como $Sub(\epsilon(A))$ y $Sub(F(A))$son retículas completas, la primera condición se da si y sólo si cada $\overline{\tau}_A$ tiene un adjunto izquierdo $\lambda_A : \Omega_{\mathcal{E}}(A) \to f_*\Omega_{\mathcal{F}}(A)$. Dada la existencia de estos adjuntos, la segunda condición es equivalente a la conmutatividad del diagrama de los adjuntos izquierdos

$$\begin{tikzcd}
Sub(F(B)) \arrow[r, "\lambda_B"] \arrow[d, "F(\alpha)^*"'] & Sub(\epsilon(B)) \arrow[d, "\epsilon(\alpha)^*"] \\
Sub(F(A)) \arrow[r, "\lambda_A"'] & Sub(\epsilon(A))
\end{tikzcd}$$

para toda $\alpha : A \to B$ en $\boldsymbol{C}$, es decir que λ_A forma un morfismo de gavillas $\lambda : \Omega_{\mathcal{E}} \to f_* \omega_{\mathcal{F}}$. Entonces estas dos condiciones juntas son equivalentes a que $\overline{\tau}$ tenga un adjunto izquierdo interno en $\mathcal{E}$, es decir que f es abierto.

$\square$

El lema anterior se puede reescribir usando la descripción de $\Omega_{\mathcal{E}}(A)$ como el conjunto de cribas cerradas sobre A:

Corolario 7.2. *El morfismo geométrico f es abierto si y sólo si*

1. *Para cada objeto A de $\boldsymbol{C}$ y cada familia $\{S_i \mid i \in I\}$ de cribas cerradas sobre A,*

   $$\bigvee_{i \in I} \bigwedge \{\exists_{F(\beta)} F(B) | \beta : B \to A \in S_i\} = \bigvee \{\exists_{F(\beta)} F(B) | \beta : B \to A \in \textstyle\bigcap_{i \in I} S_i\};$$

   y

2. *para cada $\alpha : A \to B$ en $\boldsymbol{C}$ y cada criba S sobre A,*

   $$\forall_{F(x)} \bigvee \{\exists_{F(\beta)} F(C) \,|\, \beta : C \to A \in S\} = \bigvee \{\exists_{F(\gamma)} F(C) \,|\, \gamma : D \to B \in \forall_\alpha S\}.$$

Aquí $\forall_\alpha S$ denota a la criba cerrada

$$\{\gamma : D \to B \mid (\forall \beta : D \to A)((\alpha\beta = \gamma) \Rightarrow (\beta \in S))\}.$$

El mapeo $\forall_\alpha : \Omega_{\mathcal{E}}(A) \to \Omega_{\mathcal{E}}(B)$ es el adjunto derecho de la acción α^* de α sobre cribas cerradas.

Concluimos esta sección con algunas observaciones más sobre la preservación de conectivos lógicos. Si $\{u_i : E_i \to E | i \in I\}$ es una familia epimórfica de mapeos es $\mathcal{E}$, tenemos un encaje de álgebras de Heyting

$$u^* : Sub(E) \hookrightarrow \prod_{i \in I} Sub(E_i).$$

Aplicando esto a la familia epimórfica $\{e : \epsilon(A) \to E \mid e \in E(A), A \in ob\boldsymbol{C}\}$ donde E es cualquier objeto de $\mathcal{E} = Gav(\boldsymbol{C}, J)$, y a la imagen de esta familia bajo f^* para algún morfismo geométrico $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, obtenemos un cuadrado conmutativo de álgebras de Heyting completas

$$\begin{tikzcd}
Sub(E) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod Sub(\epsilon(A)) \arrow[d] \\
Sub(f^*E)) \arrow[r, hook] & \prod Sub(F(A))
\end{tikzcd}$$

donde $F : \boldsymbol{C} \to \mathcal{F}$ es el funtor continuo plano correspondiente a f, y los mapeos verticales son inducidos por la acción de f^* sobre subobjetos.

Lema 7.3. *Sea $f : \mathcal{F} \to \mathcal{E} = Gav(\boldsymbol{C}, J)$ un morfismo geométrico. El funtor f^* preserva ínfimos de familias de subobjetos de cardinalidad menor que κ (respectivamente a todos los ínfimos, implicación, negación) si y sólo si lo hace sobre subobjetos de representables.*

Demostración. La dirección no trivial se sigue de la existencia del diagrama anterior para cada objeto E en $\mathcal{E}$.

□

Esto permite traducir propiedades de f a propiedades de F y vice versa, por ejemplo:

Corolario 7.4. *El morfismo geométrico f es* sub-abierto *(es decir, f^* preserva implicación) si y sólo si, para cada $A \in ob\boldsymbol{C}$ y cualesquiera dos cribas cerradas S_1, S_2 sobre A, la imagen del mapeo*

$$\coprod_{\{\alpha:B\to A \mid \alpha^* S_1=\alpha^* S_2\}} F(B) \to F(A)$$

es el subobjeto $f^*S_1 \Leftrightarrow f^*S_2$ de $F(A)$.

Demostración. Como $S_1 \Leftrightarrow S_2 = \{\alpha \mid \alpha^* S_1 = \alpha^* S_2\}$, la condición dice que f^* preserva $\Leftrightarrow$ sobre el nivel del sitio. Pero esto es equivalente a decir que f^* preserva implicación, porque en cualquier álgebra de Heyting $(h \Rightarrow h') = (h \Leftrightarrow (h \wedge h'))$.

□

7.3. Teorías de Primer Orden y Categorías Sintácticas

Dada una simbología (posiblemente) con múltiples tipos Σ, nuestro lenguaje formal será el lenguaje infinitario $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\Sigma)$ (al que abreviaremos $\mathscr{L}_\kappa$ cuando no haya peligro de confusión): esto es, permitimos la formación de conjunciones $\bigwedge_{i\in I} \phi_i$ y disyunciones $\bigvee_{j\in J} \psi_j$ infinitas de fórmulas en donde las cardinalidades de los conjuntos de índices I y J son menores que κ y donde el número total de variables libres en cualquier fórmula permanece finito. (Note que siempre permitimos a la conjunción vacía $\top$ y a la disyunción vacía $\bot$.)

Para nosotros κ siempre denota a un cardinal infinito regular; permitimos la posibilidad de $\kappa = \infty$, la "cardinalidad del universo" (es decir, que no ponemos restricción sobre el tamaño de las conjunciones y disyunciones). Sin embargo, la restricción de que haya sólo una cantidad finita de variables libres permanecerá en todo momento.

Decimos que una fórmula es *κ-geométrica* si se puede construir a partir de fórmulas atómicas a través de conjunciones finitas, disyunciones de cardinalidad menor que κ y cuantificaciones existenciales. (Si $\kappa = \infty$, simplemente decimos que la fórmula es *geométrica*; si $\kappa = \omega$ decimos que la fórmula es *coherente*.)

Un *axioma κ-geométrico* es una fórmula de la forma $\forall x(\phi \Rightarrow \psi)$ donde ϕ y ψ son fórmulas κ-geométricas y x es una sucesión de variables libres entre las que aparecen las de ϕ y ψ (a una sucesión así le llamamos *un contexto*, en este caso, para ϕ y ψ); Una *teoría κ-geométrica* es una especificada por un conjunto $\mathbb{T}$ de axiomas κ-geométricos.

Decimos que $\boldsymbol{C}$ es una *categoría κ-geométrica* cuando $\boldsymbol{C}$ es una categoría regular con uniones de familias arbitrarias de subobjetos de cardinalidad menor que κ y adicionalmente con estas uniones estables bajo producto fibrado.

Por *categoría κ-Heyting* nos referimos a una categoría $\boldsymbol{C}$ regular con uniones e intersecciones de familias de subobjetos de cardinalidad menor que κ y tal que la operación de hacer producto fibrado a subobjetos de B a lo largo de un morfismo fijo $f : A \to B$ de $\boldsymbol{C}$ tiene adjunto derecho $\forall_f$. Se sigue que las uniones, así como las intersecciones, son estables bajo producto fibrado; también es fácil ver que en una categoría así tiene una operación de implicación haciendo a cada retícula de subobjetos un álgebra de Heyting, y esa implicación es también estable bajo productos fibrados.

Una interpretación M de un tipo Σ en una categoría $\boldsymbol{C}$ se puede completar a una interpretación de todas las fórmulas de κ-geométricas o a todas las fórmulas de $\mathscr{L}_\kappa$ si $\boldsymbol{C}$ es una categoría κ-geométrica o κ-Heyting respectivamente.

Dadas dos interpretaciones M y N sobre una categoría $\boldsymbol{C}$, tenemos que un morfismo $f : M \to C$ es una colección de morfismos $f_A : MA \to NA$ en $\boldsymbol{C}$ para cada tipo A de Σ. Dado esto, para cada fórmula con contexto $\phi(x)$ (con interpretación en $\boldsymbol{C}$) tenemos al diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[\phi(x)]_M} \arrow[d, tail] & & {[\phi(x)]_N} \arrow[d, tail] \\
MX) \arrow[rr, "f_X"'] & & NX
\end{tikzcd}$$

donde f_X es el producto de los morfismos f_{X_i}. En nuestra definición usual, f es un homomorfismo si el cuadrado anterior se puede completar a un cuadrado conmutativo, es decir, si $[\phi(x)]_M \leqslant f_X^*[\phi(x)]_N$ para toda fórmulas atómica ϕ. Sabemos además que basta con que esta condición se cumpla en fórmulas atómicas para que se cumpla para toda fórmula geométrica.

Una condición más fuerte, comúnmente conocida como *encaje* de Σ- estructuras, es pedir que $[\phi(x)]_M = f_X^*[\phi(x)]_N$ para toda fórmula atómica ϕ, es decir, pedir que el diagrama anterior se pueda completar a un producto fibrado. Es fácil probar que esta propiedad se extiende a cualquier fórmula sin ϕ sin cuantificadores, pero puede fallar para una fórmula que involucre cuantificadores.

Un morfismo f es llamado *encaje elemental* si el diagrama anterior se puede completar a un producto fibrado para toda fórmula $\phi(x)$ de $\mathscr{L}_\omega$; usamos el término *encaje κ-elemental* si el diagrama es un producto fibrado para toda fórmula $\phi(x)$ de $\mathscr{L}_\kappa$.

Decimos también que un morfismo $f : M \to N$ es un *morfismo κ-elemental* de Σ-estructuras si tenemos que $[\phi(x)]_M \leqslant f_X^*[\phi(x)]_N$ para toda fórmula $\phi(x)$

en $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\Sigma)$.

Escribimos $\Sigma - Str(\boldsymbol{C})_\kappa$ para denotar a la categoría de las Σ-estructuras en $\boldsymbol{C}$ y morfismos κ-elementales entre ellas; y si $\mathbb{T}$ es una teoría en $\mathscr{L}_\kappa$, llamamos $\mathbb{T} - \underline{\mathrm{Mod}}(\boldsymbol{C})_\kappa$ a la subcategoría llena de $\Sigma - Str(\boldsymbol{C})_\kappa$ cuyos objetos son $\mathbb{T}$-modelos.

Si $\mathbb{T}$ es una teoría de primer orden en $\mathscr{L}_\kappa$, definimos a la categoría sintáctica de primer orden $\mathbf{Sin}_\kappa^{po}(\mathbb{T})$ exactamente como en el caso geométrico que se hizo en la sección 5.1, pero admitiendo fórmulas arbitrarias de $\mathscr{L}_\kappa$ en la definición tanto de objetos como de morfismos de la categoría.

Igual que como se probó en la sección 5.3, tenemos un $\mathbb{T}$-modelo genérico $U_\mathbb{T}$ en $\mathbf{Sin}_\kappa^{po}(\mathbb{T})$:

Proposición 7.5. *La categoría $\boldsymbol{Sin}_\kappa^{po}(\mathbb{T})$ es una categoría κ-Heyting (pequeña si $\kappa < \infty$) y contiene a un $\mathbb{T}$-modelo $U_\mathbb{T}$ que es universal entre los $\mathbb{T}$-modelos en categorías κ-Heyting en el sentido de que, para cada categoría κ-Heyting $\boldsymbol{C}$, el funtor*

$$\kappa{-}Heyt(\boldsymbol{Sin}_\kappa^{po}(\mathbb{T}), \boldsymbol{C}) \to \mathbb{T}{-}\underline{Mod}(\boldsymbol{C})_\kappa$$

que manda a un funtor κ-Heyting $F : \boldsymbol{Sin}_\kappa^{po}(\mathbb{T}) \to \boldsymbol{C}$ al $\mathbb{T}$-modelo $F(U_\mathbb{T})$, es una equivalencia de categorías.

7.4. Sitios sintácticos y el teorema de completud

Si $\boldsymbol{C}$ es una categoría κ-geométrica (por ejemplo la categoría sintáctica de una teoría κ-geométrica), podemos equiparla con la *topología de Grothendieck κ-cubriente* J_κ: una criba R sobre un objeto A de $\boldsymbol{C}$ pertenece a J_κ si y sólo si contiene a una familia de morfismos $(\alpha_i : B_i \to A \mid i \in I)$ de cardinalidad menor a κ tal que la unión de las imágenes de los $\alpha_i's$ es todo A. Esta categoría es subcanónica (es decir, todos los funtores representables $\boldsymbol{C}^{op} \to \boldsymbol{Con}$ son gavillas), más aún, un funtor $F : \boldsymbol{C} \to \mathcal{E}$ donde $\mathcal{E}$ es un topos es plano y J_κ-continuo si y sólo si preserva límites finitos, imágenes y uniones de familias de subobjetos de cardinalidad menor que κ.

De lo anterior obtenemos inmediatamente una prueba estándar de la existencia de topos clasificantes de teorías κ-geométricas:

Teorema 7.6. *Dada una κ-teoría geométrica $\mathbb{T}$, si definimos a $\boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$ como el topos $Gav(\boldsymbol{Sin}_\kappa^g(\mathbb{T}), J_\kappa)$, entonces hay una equivalencia de categorías*

$$\mathbb{T}{-}\underline{Mod}(\mathcal{F})_\kappa \to Geo(\mathcal{F}, \boldsymbol{B}(\mathbb{T}))$$

para todo topos $\mathcal{F}$.

Vale la pena notar que la elección de κ no es crucial en lo anterior siempre y cuando κ sea suficientemente grande para que los axiomas de $\mathbb{T}$ se puedan expresar en $\mathscr{L}_\kappa$. Si $\kappa < \lambda$, todo objeto de $\mathbf{Sin}_\lambda^g(\mathbb{T})$ es la unión de una familia de subobjetos de cardinalidad menor que λ, todos los cuales pertenecen a $\mathbf{Sin}_\kappa^g(\mathbb{T})$. Entonces es fácil verificar la inclusión

$$(\mathbf{Sin}_\kappa^g(\mathbb{T}), J_\kappa) \to (\mathbf{Sin}_\lambda^g(\mathbb{T}), J_\lambda).$$

Ahora queremos ver cómo se comporta la topología J_κ con respecto a una categoría κ-sintáctica pero de primer orden; como J_κ es subcanónico tenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.7. *Si $\boldsymbol{C}$ es una categoría κ-Heyting pequeña, entonces el encaje de Yoneda $\boldsymbol{C} \to Gav(\boldsymbol{C}, J_\kappa)$ es un funtor κ-Heyting.*

Gracias a este resultado podemos obtener el siguiente teorema de completud:

Corolario 7.8. *Sea $\mathbb{T}$ una teoría arbitraria en $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\Sigma)$ entonces existe un topos de Grothendieck con un modelo de $\mathbb{T}$ conservativo, es decir, uno que satisface sólo aquellas proposiciones de $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\Sigma)$ que son demostrables en $\mathbb{T}$; más aún, este topos puede ser tomado local sobre $\boldsymbol{Con}$. En particular, cualquier proposición de $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\Sigma)$ que se satisface en todos los $\mathbb{T}$-modelos en topos locales es demostrable en $\mathbb{T}$.*

Demostración. Aplicando la proposición 7.7 a la categoría sintáctica $\mathbf{Sin}_\kappa^{po}(\mathbb{T})$. Hemos visto que el modelo universal de $\mathbb{T}$ en esta categoría es conservativo, y como el encaje de Yoneda es fiel y pleno, refleja isomorfismos; entonces $y(U_\mathbb{T})$ es también un modelo conservativo de $\mathbb{T}$.

Para obtener a este modelo en un topos local basta con aplicar el resultado que dice que para todo topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ existe un morfismo abierto suryectivo $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ con $\mathcal{F}$ local.

□

Como el teorema de completud se da para todo $\kappa < \infty$, se sigue fácilmente una versión débil para el caso $\kappa = \infty$:

Corolario 7.9. *Si $\mathbb{T}$ es una teoría de primer orden y σ es cualquier enunciado de $\mathscr{L}_\infty$ satisfecho en todo modelo de $\mathbb{T}$ en topos locales, entonces σ es demostrable en $\mathbb{T}$.*

Demostración. Dados $\mathbb{T}$ y σ, claramente existe un $\kappa < \infty$ tal que $\mathbb{T} \cup \{\sigma\} \subset \mathscr{L}_\kappa$. Entonces el resultado se sigue del teorema de completud anterior.

□

Existen ejemplos que muestran que una versión fuerte del corolario anterior falla. En particular para $\mathbb{T}$ la teoría vacía, no puede existir un modelo $\mathscr{L}_\infty$-conservativo de $\mathbb{T}$, pues tendría a una clase propia de subobjetos de 1.

7.5. La teoría de primer orden de un topos

Es posible probar que todo topos de Grothendieck es topos clasificante de alguna teoría infinitaria de primer orden:

Proposición 7.10. *Para todo topos de Grothendieck $\mathcal{E}$, existe una teoría de primer orden infinitaria $\mathbb{T}$ tal que tenemos una equivalencia natural*

$$Ab(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \simeq \mathbb{T}\text{−}\underline{Mod}(\mathcal{F})$$

para todo topos de Grothendieck $\mathcal{F}$.

Para hacer esto, consideremos al caso cuando $\mathcal{E}$ está dado como el topos clasificante de una teoría (geométrica) $\mathbb{T}$, es decir cuando el sitio $(\boldsymbol{C}, J)$ está dado de la forma $(\mathbf{Sin}^g_\kappa(\mathbb{T}), J_\kappa)$. En este caso, sería conveniente expresar a la teoría de primer orden, digamos $\overline{\mathbb{T}}$, correspondiente a $\mathcal{E}$ con el mismo lenguaje que $\mathbb{T}$. En particular, esperaríamos que si $\overline{\mathbb{T}}$ contuviera a *todas* las proposiciones de primer orden que se satisfacen en el modelo genérico $G_{\mathbb{T}}$ de $\mathcal{E}$, entonces podríamos obtener a una teoría adecuada para clasificar a todos los morfismos geométricos abiertos sobre $\mathcal{E}$.

Por supuesto que esta $\mathbb{T}$ sería una clase propia y por lo tanto no sería una teoría. No obstante, es claramente suficiente tomar a un cardinal λ que estrictamente supere a los tamaños de todas las retículas de subobjetos $Sub(G_{\mathbb{T}}(X))$, para X una sucesión finita de tipos de Σ, y luego tomamos a $\overline{\mathbb{T}}$ como todas las proposiciones de $\mathscr{L}_\lambda$ que se satisfacen en $G_{\mathbb{T}}$. Note que basta con que λ sea estrictamente mayor que el cardinal κ requerido para expresar a $\mathbb{T}$ como teoría de $\mathscr{L}_\kappa$.

Lema 7.11. *Para la teoría de primer orden $\overline{\mathbb{T}}$ que se acaba de describir, toda fórmula de primer orden $\phi(x)$ es equivalente a una fórmula geométrica $\psi(x)$ en el sentido de que $\forall x(\psi \Leftrightarrow \phi)$ es demostrable en $\overline{\mathbb{T}}$.*

Demostración. La interpretación de $\phi(x)$ en el modelo genérico $G_{\mathbb{T}}$ será algún subobjeto de $G_{\mathbb{T}}(X)$, donde X es el tipo de x, pero todo subobjeto así ocurre como la interpretación de alguna fórmula geométrica $\psi(x)$. Entonces la fórmula $\forall x(\phi \Leftrightarrow \psi)$ es verdadera en $G_{\mathbb{T}}$ y por definición es demostrable en $\overline{\mathbb{T}}$

□

Diremos que una teoría está *geométricamente saturada* si tiene la proposición descrita en el lema anterior. Es fácil ver que si una teoría $\mathbb{T}$ está geométricamente saturada entonces cualquier homomorfismo de $\mathbb{T}$-modelos es automáticamente ∞-elemental.

Proposición 7.12. *Sea $\mathbb{T}$ una teoría geométrica y $\mathcal{F}$ cualquier topos, tenemos que*

$$Ab(\mathcal{F}, \boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})) \simeq \overline{\mathbb{T}}-\underline{Mod}(\mathcal{F}) = \overline{\mathbb{T}}-\underline{Mod}(\mathcal{F})_\infty,$$

donde $\overline{\mathbb{T}}$ es la teoría de primer orden plena del $\mathbb{T}$-modelo genérico en $\boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$.

Demostración. Este resultado se sigue del hecho de que un $\overline{\mathbb{T}}$-modelo en $\mathcal{F}$ es en particular un $\mathbb{T}$-modelo por lo que viene de un morfismo geométrico $\mathcal{F} \to \boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$, sin embargo, como este morfismo debe preservar también a todas las fórmulas de primer orden demostrables en $\mathbb{T}$, se tiene que este morfismo debe ser abierto; el converso es inmediato.

□

Podemos notar que, además de ser geométricamente saturada, la teoría $\overline{\mathbb{T}}$ es una extensión *geométricamente conservativa* de $\mathbb{T}$, es decir, cualquier proposición geométrica demostrable en $\overline{\mathbb{T}}$ es también demostrable en $\mathbb{T}$, ya que $G_{\mathbb{T}}$ es un modelo (geométricamente) conservativo de $\mathbb{T}$.

Es posible probar que las dos condiciones anteriores son suficientes para caracterizar a la teoría de primer orden $\overline{\mathbb{T}}$ de entre las extensiones de $\mathbb{T}$. Más aún, si $\overline{\mathbb{T}}$ tiene las dos propiedades de ser *"geométricamente saturada"* y *"geométricamente conservativa"* entonces $\mathbb{T}$ es máxima entre las extensiones geométricamente conservativas de $\mathbb{T}$.

Veamos ahora qué se puede decir sobre un topos de Grothendieck que está dado de la forma $Gav(\mathbf{Sin}^{po}_{\kappa}(\mathbb{T}), J_{\kappa})$ para alguna teoría de primer orden $\mathbb{T}$ en $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\Sigma)$:

Proposición 7.13. *Sea $\mathbb{T}$ una teoría en $\mathscr{L}_{\kappa\omega}(\Sigma)$. Existen un cardinal λ mayor que κ y una teoría $\overline{\mathbb{T}}$ en $\mathscr{L}_{\lambda\omega}(\Sigma)$ tales que tenemos una equivalencia natural*

$$Ab(\mathcal{F}, Gav(\boldsymbol{Sin}^{po}_{\kappa}(\mathbb{T}), J_{\kappa})) \simeq \overline{\mathbb{T}}\text{--}\underline{Mod}(\mathcal{F})_{\infty}$$

para cualquier topos $\mathcal{F}$. Más aún, $\overline{\mathbb{T}}$ es una extensión $\mathscr{L}_{\kappa}$-conservativa de $\mathbb{T}$ y tiene la propiedad de que toda fórmula en $\mathscr{L}_{\infty\omega}(\Sigma)$ es $\overline{\mathbb{T}}$-demostrablemente equivalente a una disyunción de fórmulas de $\mathscr{L}_{\kappa\omega}$.

Corolario 7.14. *Sea $\mathbb{T}$ una teoría de primer orden. Si, para algún un cardinal κ tal que $\mathbb{T}$ es expresable en $\mathscr{L}_{\kappa}$, la teoría $\overline{\mathbb{T}}$ de la proposición anterior es equivalente a $\mathbb{T}$, entonces $\mathbb{T}$ tiene topos clasificante en el sentido definido en la introducción.*

Demostración. Si $\overline{\mathbb{T}}$ es equivalente a $\mathbb{T}$, entonces todo $\mathbb{T}$-modelo es clasificado por un morfismo geométrico abierto sobre $Gav(\mathbf{Sin}^{po}_{\kappa}(\mathbb{T}), J_{\kappa})$ (como en la proposición anterior intercambiando $\overline{\mathbb{T}}$ por $\mathbb{T}$); también lo mencionado al final de la proposición anterior muestra que todo morfismo κ-elemental de $\mathbb{T}$-modelos es ∞-elemental. Así que podemos tomar a $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})$ como $Gav(\mathbf{Sin}^{po}_{\kappa}(\mathbb{T}), J_{\kappa})$

□

El criterio provisto en el corolario anterior para la existencia de $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})$ no es muy práctico ya que en general es muy difícil determinar a los axiomas de $\overline{\mathbb{T}}$ sin considerar que además habría que probar que son demostrables a partir de los axiomas de $\mathbb{T}$. Es por esto que en la siguiente sección estudiaremos a un criterio (pequeñez local) que por lo menos tiene la apariencia de ser más manejable, y el cual incidentalmente nos permite probar que el converso del corolario anterior es también verdadero.

7.6. Teorías localmente pequeñas

Definición 7.15. Sea $\mathbb{T}$ una teoría infinitaria de primer orden sobre una simbología Σ. Decimos que $\mathbb{T}$ es *localmente pequeña* en un contexto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ si existe un conjunto S_x de fórmulas en el contexto x, tal que para toda $\mathscr{L}_{\infty}$ fórmula en este contexto es $\mathbb{T}$-demostrablemente equivalente a un miembro de S_x.

Decimos que $\mathbb{T}$ es *localmente pequeña* si es localmente pequeña en todo contexto de Σ.

Note que $\mathbb{T}$ es localmente pequeña si y sólo si existe un cardinal κ tal que toda $\mathscr{L}_\infty$ fórmula (con contexto sobre Σ) es $\mathbb{T}$-demostrablemente equivalente a una $\mathscr{L}_\kappa$ fórmula. Note también que cualquier teoría $\overline{\mathbb{T}}$ geométricamente saturada. Inversamente tenemos:

Lema 7.16. *Sea $\mathbb{T}$ una teoría localmente pequeña sobre una simbología Σ. Entonces existe una simbología Σ' que extiende a Σ y una teoría geométricamente saturada $\mathbb{T}'$ sobre Σ' tal que $\mathbb{T}'$ es* 'Morita-equivalente' *a $\mathbb{T}$ en el sentido de que para todo topos $\mathcal{F}$ tenemos una equivalencia*

$$\mathbb{T}-\underline{Mod}(\mathcal{F})_\infty \simeq \mathbb{T}'-\underline{Mod}(\mathcal{F})_\infty,$$

y estas equivalencias son naturales con respecto a morfismos geométricos abiertos.

Demostración. Para esta prueba usamos (una versión de) una técnica conocida por los teoristas de modelos como 'Morleyzación': extendemos al lenguaje Σ agregando, para cada contexto x y cada miembro $\phi(x)$ de S_x, un símbolo de relación $R_\phi \rightarrowtail X$ (Donde X es el tipo de x). Para los axiomas de $\mathbb{T}'$, tomamos a aquellos de $\mathbb{T}$ junto con a los enunciados de la forma

$$\forall x(R_\phi(x) \Leftrightarrow \phi(x)).$$

Una inducción directa prueba que cada fórmula sobre Σ' es $\mathbb{T}'$-demostrablemente equivalente a una sobre Σ, y por lo tanto a una fórmula atómica sobre Σ', entonces $\mathbb{T}'$ es geométricamente saturada.

Por otro lado, dado un $\mathbb{T}$-modelo M en un topos $\mathcal{F}$, existe una única manera de interpretar a los símbolos primitivos adicionales de Σ', lo cual hace a M un $\mathbb{T}'$-modelo, y similares observaciones aplican a morfismos ∞-elementales entre tales modelos; así tenemos a la equivalencia requerida $\mathbb{T}-\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{F})_\infty \simeq \mathbb{T}'-\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{F})_\infty$ □

Ahora estamos listos para nuestro teorema principal:

Teorema 7.17. *Para una teoría infinitaria $\mathbb{T}$ de primer orden, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathbb{T}$ es localmente pequeña.*
2. *$\mathbb{T}$ es Morita-equivalente a una teoría geométricamente saturada.*
3. *$\mathbb{T}$ tiene un topos clasificante de primer orden; es decir, existe un topos $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})$ con un $\mathbb{T}$-modelo $G_\mathbb{T}$ tal que, para todo topos $\mathcal{F}$, el funtor*

   $$Ab(\mathcal{F}, \boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})) \to \mathbb{T}-\underline{Mod}(\mathcal{F})_\infty$$

   que manda a un morfismo geométrico abierto f al $\mathbb{T}$-modelo $f^*(G_\mathbb{T})$ es una equivalencia de categorías.

Demostración. (*1* $\Rightarrow$ *2*) es el lema 7.16.

(*2* $\Rightarrow$ *3*): Es claro que, si dos teorías son Morita-equivalentes en el sentido del lema 7.16, entonces una tiene topos clasificante si y sólo si la otra lo tiene, así que podemos asumir que $\mathbb{T}$ misma es geométricamente saturada. Pero para una teoría geométricamente saturada $\mathbb{T}$, el funtor inclusión $\mathbf{Sin}^g_\infty(\mathbb{T}^g) \to \mathbf{Sin}^{po}_\infty(\mathbb{T})$ es una equivalencia, donde $\mathbb{T}^g$ denota a la parte geométrica de $\mathbb{T}$, es decir, el conjunto de todos los axiomas geométricos (estrictamente, de todos los axiomas κ-geométricos para un κ suficientemente grande) demostrables en $\mathbb{T}$. En particular, para tal κ, la inclusión $\mathbf{Sin}^{po}_\kappa(\mathbb{T}) \to \mathbf{Sin}^{po}_\lambda(\mathbb{T})$ es una equivalencia para toda $\lambda \leqslant \kappa$ (ya que ambas categorías son equivalentes a $\mathbf{Sin}^g_\kappa(\mathbb{T}^g)$); luego $\mathbf{Sin}^{po}_\infty(\mathbb{T}) \simeq \mathbf{Sin}^{po}_\kappa(\mathbb{T}) \simeq \mathbf{Sin}^g_\kappa(\mathbb{T}^g)$ luego

$$\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T}) = Gav(\mathbf{Sin}^{po}_\kappa(\mathbb{T}), J_\kappa)$$

es el topos clasificante buscado.

(*3* $\Rightarrow$ *1*): Supongamos que $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})$ existe. Se sigue de la versión de completud para $\mathscr{L}_\infty$ del corolario 7.9 que el $\mathbb{T}$-modelo genérico $G_\mathbb{T}$ de $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})$ debe ser $\mathscr{L}_\infty$-conservativo. Luego la retícula de clases de equivalencia $\mathbb{T}$-demostrables de fórmulas con contexto x se mapea inyectivamente a la retícula de subobjetos de $G_\mathbb{T}(X)$ donde X es el tipo de x; por lo tanto es un conjunto.

$\square$

Una prueba de la equivalencia entre *1* y *3* hubiera sido posible, pero el desvío a través de las teorías geométricamente saturadas nos permite inducir el siguiente corolario:

Corolario 7.18. *Para toda teoría geométrica $\mathbb{T}$, existe (salvo equivalencia) exactamente una extensión geométricamente conservativa de $\mathbb{T}$ la cual es geométricamente saturada, a saber la teoría de primer orden plena del modelo genérico en $\boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$.*

Demostración. Ya vimos antes que la teoría plena de primer orden $\overline{\mathbb{T}}$ del $\mathbb{T}$-modelo genérico tiene estas dos propiedades. Inversamente, supongamos que $\mathbb{T}'$ es una extensión de $\mathbb{T}$ con estas propiedades. Entonces $\mathbb{T}'$ es localmente pequeña y por lo tanto tiene topos clasificante $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T}')$, por la prueba del teorema anterior tenemos de hecho que $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T}') \simeq \boldsymbol{B}^g(\mathbb{T}'^g)$ y esta equivalencia identifica al modelo genérico de $\mathbb{T}'$ con el modelo genérico de $\mathbb{T}'^g$. Pero $\mathbb{T}'^g$ es equivalente a $\mathbb{T}$ por ser $\mathbb{T}'$ geométricamente conservativo; así que todas las proposiciones en $\overline{\mathbb{T}}$ deben ser demostrables en $\mathbb{T}'$ y al revés.

$\square$

7.7. Ejemplos y aplicaciones

Ejemplo 7.1. Si $\mathbb{T}$ es una teoría proposicional (esto es, si la simbología Σ no tiene tipos; en este caso las únicas proposiciones son los símbolos primitivos y el único contexto es el vacío), la categoría sintáctica $\mathbf{Sin}^{po}_\infty(\mathbb{T})$ es simplemente el álgebra de Heyting completa generada por las proposiciones primitivas, módulo el filtro generado por las proposiciones en $\mathbb{T}$. Puesto que esta álgebra es pequeña, el topos $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})$ es simplemente el topos de gavillas sobre ella (para su topología canónica).

Ejemplo 7.2. Si consideramos a la teoría vacía sobre un generador proposicional p como una teoría geométrica, entonces su topos clasificante $\boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$ es el topos de Sierpinski $[2, \boldsymbol{Con}]$, o equivalentemente el topos de gavillas sobre el espacio de Sierpinski $\mathbb{S} = \{0, 1\}$ con sólo un punto abierto. Es fácil ver que la teoría de primer orden plena de este topos está axiomatizada únicamente por la proposición $\neg\neg p$.

Ejemplo 7.3. Sea $\mathbb{T}$ una teoría geométrica cuyo topos clasificante $\boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$ es booleano. Como todo morfismo geométrico a un topos booleano es abierto, se sigue que $\boldsymbol{B}^{po}(\mathbb{T})$ existe y coincide con $\boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$. Inversamente, si $\mathbb{T}$ es equivalente a su extensión geométricamente saturada $\overline{\mathbb{T}}$, entonces todo morfismo geométrico a $\boldsymbol{B}^g(\mathbb{T})$ es abierto y por lo tanto este último es necesariamente booleano.

Ejemplo 7.4. El hecho de que el álgebra de Heyting libre sobre dos generadores sea una clase propia nos permite mostrar que la 'la mayoría' de las teorías familiares no son localmente pequeñas.

Dada una teoría $\mathbb{T}$ y un contexto x, decimos que dos fórmulas $\phi(x)$ y $\psi(x)$ forman a un *par libre* si, dado cualquier topos $\mathcal{E}$ y cualesquiera dos subobjetos U, V del objeto terminal de $\mathcal{E}$, podemos encontrar a un $\mathbb{T}$-modelo M en $\mathcal{E}$, junto con una asignación de elementos $c_i : 1 \to MX_i$ para las variables x_i en x, tales que las interpretaciones $[\phi(c)]_M$ y $[\psi(c)]_M$ son U y V respectivamente.

Si $\mathbb{T}$ tiene un par libre de fórmulas en algún contexto x entonces no puede ser localmente pequeña en ese contexto ya que si tomamos a $\mathcal{E} = Gav(H_\kappa)$ donde H_κ es un álgebra de Heyting completa con dos generadores de cardinalidad al menos κ y tomando a U y V como los dos generadores de H_κ, tenemos que de combinaciones proposicionales de el par libre de fórmulas obtenemos por lo menos κ fórmulas no equivalentes en el contexto x.

Bibliografía

[Blass, 1989] Blass, A. (1989). Classifying topoi and the axiom of infinity. *Algebra Universalis*, 26:341–345.

[Borceux, 1994] Borceux, F. (1994). *Handbook of Categorical Algebra,* volumen 3. Cambridge University Press.

[Butz and Johnstone, 1998] Butz, C. and Johnstone, P. (1998). Classifying toposes for first-order theories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 91:33–58.

[Bénabou, 1973] Bénabou, J. (1973). Structures syntaxiques. *Notas escritas por R. Ouellet.*

[Caramello, 2009] Caramello, O. (2009). *The duality between Grothendieck toposes and geometric theories.* Ph.D. thesis. University of Cambridge.

[Cole, 1973] Cole, J.C. (1973). Categories of sets and models of set theory. *The Proceedings of the Bertrand Russell Memorial Conference (Uldum 1971),* páginas 351-399.

[Enderton, 2001] Enderton, O.B. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic.* Harcourt/Academic Press.

[Gentzen, 1964] Gentzen, G. (1964). Investigations into logical deduction. *American Philosophical Quarterly*, 1(4):288–306.

[Grothendieck, 1957] Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J*, 2(9):119–221.

[Hakim, 1972] Hakim, M. (1972). Topos annelés et schémas relatifs. *volumen 64 de Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer Verlag, Berlin.*

[Johnstone, 1980] Johnstone, P. (1980). Open maps of toposes. *Manuscripta Math*, 3:217–247.

[Johnstone, 2002] Johnstone, P. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium.* Oxford University Press.

[Johnstone, 2014] Johnstone, P. (2014). *Topos Theory.* Dover Publications.

[Johnstone, 1977] Johnstone, P.T. (1977). Topos theory. *London Mathematical Society Monographs. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]*, Volumen 10.

[Joyal, 2008] Joyal, A. (2008). The theory of quasi-categories and its applications. *Conferencias en CRM Barcelona.*

[Joyal and Reyes, 1976] Joyal, A. and Reyes, G. (1976). *Forcing and generic models in categorical logic.* Preprint.

[Joyal and Tierney, 1984] Joyal, A. and Tierney, M. (1984). An extension for the galois theory of grothendieck. *American Mathematical Society*, 309.

[Lawvere, 1963] Lawvere, F.W. (1963). *Functorial Semantics of Algebraic Theories.* Ph.d. Columbia.

[Lawvere, 1966] Lawvere, F.W. (1966). Functorial semantics of elementary theories. *Journal of Symbolic Logic*, 31:294–295.

[Lawvere, 1970] Lawvere, F.W. (1970). Quantifiers and sheaves. *Actes du congrès international des mathématiciens,* páginas 329-334.

[Lawvere, 1975] Lawvere, F.W. (1975). Introduction. *Model Theory and Topoi. Springer-Verlag, Berlin*, 445:3–14.

[Lawvere, 2003] Lawvere, F.W. (2003). Posting to the mailing list categories@mta.ca. *Grothendieck's 1973 Buffalo Colloquium.*

[Mac Lane, 1998] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician.* Springer, segunda edición.

[Mac Lane and Moerdijk, 1992] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic.* Universitext. Springer.

[Makkai and Reyes, 1977] Makkai, M. and Reyes, G. (1977). *First Order Categorical Logic.* LNM. Springer.

[Marquis and Reyes, 2012] Marquis, J.-P. and Reyes, G.E. (2012). The history of categorical logic: 1963–1977. *Handbook of the History of Logic: Sets and Extensions in the Twentieth Century*, 6.

[Mitchell, 1972] Mitchell, W. (1972). Boolean topoi and the theory of sets. *Boolean topoi and the theory of sets*, 2:261–274.

[Moerdijk, 1995] Moerdijk, I. (1995). *Classifying Spaces and Classifying Topos.* Lecture Notes in Mathematics. Springer.

[Moerdijk, 1996] Moerdijk, I. (1996). Cyclic sets as a classifying topos. *Utrecht.*

[Osius, 1975] Osius, G. (1975). Logical and set theoretical tools in elementary topoi. *Model Theory and Topoi, volumen 445 de Lecture Notes in Mathematics*, page 297–346.

[Shulman, 2012] Shulman, M. (2012). Exact completions and small sheaves. *Theory and Applications of Categories*, 27(7):97–173.