UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA CONJETURA DE PAYAN-LABORDE-XUONG

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

EFREN OCTAVIO MONROY LARA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018

1.Datos del alumno
Monroy
Lara
Efren Octavio
017393954104
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
Número de cuenta: 410081354

2. Datos del tutor
Dr.
Juan José
Montellano
Ballesteros

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Mika
Olsen

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Diego Antonio
González
Moreno

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Eugenia
O'Reilly
Regueiro

6. Datos del sinodal 4
Dr.
César
Hernández
Cruz

7. Datos del trabajo escrito.
Sobre la conjetura de Payan-Laborde-Xuong.
Número de páginas 55
Año 2018

a Tisbe, a Rebeca

Agradecimientos

No necesariamente muchas veces en mi vida les he hecho saber a las personas importantes, lo agradecido que estoy con ellos.

Agradezco a mi madre por su apoyo tan peculiar que solo ella ha sabido darme a lo largo de mi vida, al preocuparse por mis estudios y mi bienestar.

A mi padre, que a su manera me ha apoyado para los retos y metas que me he puesto.

A mis hermanos Esteban y Noemi que siempre estuvieron para apoyarme y aconsejarme en mis decisiones.

A Juancho por ser una persona de la cual aprendí demasiadas cosas y en especial por ser tan paciente conmigo, además de siempre recibirme con una sonrisa todas las veces que fui a verlo.

A mis cuñados José y Mayra, que en el tiempo que llevo conociendo me han dado una perspectiva distinta de la vida a la que conocía.

A mis amigos, la familia que se ha ido añadiendo a través del tiempo Alejandra, Miguel, Diego, Tona y Lui, con los cuales he tenido diversas vivencias, que en las buenas y en las malas hemos sabido conservar la amistad.

Mientras Realizaba mi tesis muchas personas me ayudaron, algunas sin saberlo, ya que al leer algunas tesis me sirvieron de inspiración para poder realizar la mía.

Finalmente quiero darle las gracias a mis sinodales por el tiempo invertido en la revisión de esta tesis y sus correcciones que fueron de gran ayuda.

Índice general

1 Introducción.

En este trabajo se estudian algunos de los avances sobre la conjetura de Laborde-Payan-Xuong, la cual afirma la existencia de un conjunto independiente de vértices S dentro de una digráfica D, tal que para toda trayectoria T de longitud máxima en D, la intersección con S es no vacía, $S \cap V(T) \neq \emptyset$. Para esto nos basaremos en distintos artículos publicados en revistas, con arbitraje internacional, que estudian la conjetura. Se desarrollarán de una manera extendida algunas de las demostraciones presentes en dichos artículos para una mejor comprensión y claridad. En el primer capítulo de esta tesis, haremos una pequeña introducción de los conceptos necesarios para el desarrollo del presente trabajo, basándonos en [BM08] y [Har69] .

En el segundo capítulo analizaremos dos artículos; el primero “Independent sets which meet all longest paths” [GSRM96], en el cual la Dra. Hortensia Galeana Sánchez y el Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, nos presentan algunas digráficas con ciertas propiedades que hacen que cumplan la conjetura, por ejemplo, que tengan núcleo, o que tengan cierta estructura. El segundo “Independent transversals of longest paths in locally semicomplete and locally transitive digraphs”[GSGMB09], escrito por la Dra. Hortensia Galeana Sánchez, el Dr. Ricardo Gómez y el Dr. Juan José Montellano Ballesteros, en el cual se estudia la conjetura en digráficas localmente semicompletas y digráficas localmente transitivas.

En el tercer capítulo se abordarán las demostraciones de un teorema en [GSGMB09] que nos dice que si la longitud de la trayectoria de longitud máxima es a lo más 4 la conjetura se cumple.

En el cuarto capítulo nos centraremos en probar dos teoremas enunciados en [GSGMB10], en los cuales se muestran algunas relaciones entre el grado mínimo y el cuello de una digráfica, y el conjunto de transversales a las trayectorias de longitud máxima en dicha digráfica.

2 Definiciones Básicas

2.1. Gráficas, Gráficas orientadas y Digráficas.

2.1.1. Gráficas.

Aquí presentaremos los principales conceptos de Teoría de gráficas que serán necesarios para el mejor entendimiento de este trabajo.

Una **gráfica** G es un par ordenado $G = (V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito a cuyos elementos llamaremos vértices y el conjunto finito $A(G)$ cuyos elementos son pares no ordenados de $V(G)$ que reciben el nombre de aristas, las que denotaremos como $\{u, v\}$ (la arista que hay entre los vértices u y v).

Dada una gráfica G diremos que es una **gráfica simple** si en $A(G)$ todos los pares no ordenados son distintos y cada par esta formado por vértices distintos, es decir, si no tiene aristas dobles ni lazos (ver Figura 2.1.1).

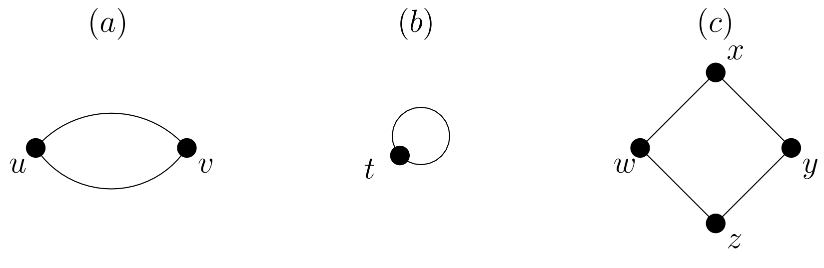

Figura 2.1.1: Se muestran gráficas que ejemplifican: (a)Arista doble entre u y v, (b) Un lazo en el vértice t, (c) Una gráfica simple.

Sean G y H gráficas, llamaremos a H **subgráfica** de G, que denotaremos como $H \subseteq G$, si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Dados $u, v \in V(G)$, diremos que u es **adyacente** a (**vecino** de) v en G, si $\{u, v\} \in A(G)$. Al conjunto de vecinos de un vértice $x \in V(G)$, se denominará **vecindad** de x en G y la denotaremos por $N_G(x)$ (el subíndice G puede ser omitido cuando es claro en donde esta definida la vecindad de x). Al cardinal $|N_G(x)|$ se le llamará valencia o **grado** de x en G y lo denotaremos como $\delta_G(x)$, el subíndice G puede ser omitido cuando es claro de que gráfica se habla. A los vértices de grado 0 les llamaremos **vértices aislados.** Dados $\Delta(G) = max\{\delta(x)|x \in V(G)\}$ **y** $\delta(G) = min\{\delta(x)|x \in V(G)\}$ representarán el **máximo y mínimo grado** de G respectivamente, se observa que $\Delta(G) \geq \delta(G)$. Dada una subgráfica H de G donde para todo $u, v \in V(H)$ tal que $\{u, v\} \in A(G)$ entonces $\{u, v\} \in A(H)$, diremos que H es una **subgráfica inducida** por el conjunto $V(H)$ en G, y la denotaremos por $G[V(H)]$. Dado $S \subseteq V(G)$, $N_G(S) = \{x \in \{V(G) \setminus S\}|\{x, y\} \in A(G)$ para alguna $y \in S\}$ es el conjunto al que llamaremos vecindad del conjunto S en G (ver Figura 2.1.2). En adelante $G - S$ denotará a la subgráfica inducida por el conjunto $\{V(G) \setminus S\}$ en G.

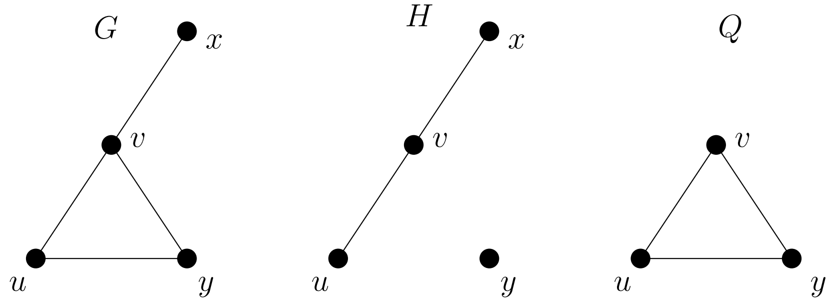

Figura 2.1.2: Observemos que G es una gráfica donde u y v son vecinos pero x e y no lo son. Además $N_G(v) = \{u, x, y\}$ así $\delta_G(v) = 3$. Dada H una subgráfica de G se observa que no es subgráfica inducida, ya que $(v, y), (u, y) \in A(G)$ pero $(v, y), (u, y) \notin A(H)$. El conjunto $\{u, v, y\}$ induce a la subgráfica Q en G, donde $\Delta(Q) = 2 = \delta(Q)$. Para $S = \{u, y\} \subseteq V(G)$, $N_G(S) = \{v\}$.

Un **camino** en una gráfica G es una sucesión finita $P = (v_0, \ldots, v_k)$ de vértices de $V(G)$, donde v_i es adyacente a v_{i+1} para toda $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. A un camino $T = (v_0, \ldots, v_k)$ le llamaremos **trayectoria** o v_0v_k-trayectoria cuando todos sus vértices son distintos. Dados dos caminos $P = (x_0, \ldots, x_r)$ y $Q = (y_0, \ldots, y_s)$ con $x_r = y_0$, denotaremos a $P \bullet Q = (x_0, \ldots, x_r = y_0, \ldots, y_s)$ a la **concatenación** de los dos caminos. Un **ciclo** es un camino en donde todos los vértices son distintos salvo el primero y el último, y no se repiten aristas. La **longitud de una trayectoria** $P =$

$(v_0, \ldots, v_k)$ será $|V(P)| - 1 = k$ y la denotaremos $\ell(P)$, y la **longitud de un ciclo** $\gamma = (v_0, \ldots, v_k)$ la definiremos como $\ell(\gamma) = |V(\gamma)| = k + 1$ (en estas definiciones consideramos que la indexación comienza en 0). Dada una gráfica G, $\lambda(G)$ denotará la longitud máxima de una trayectoria en G, esto es $\lambda(G) = max\{\ell(T)|T$ es una trayectoria en $G\}$. La **distancia entre dos vértices** $x, y \in V(G)$ en una gráfica G es la mínima longitud de todas las xy-trayectorias en G y la denotaremos por $d_G(x, y)$ (el subíndice G se puede omitir si es claro de qué gráfica se esta hablando), es decir, $d_G(x, y) = min\{\ell(P)|P$ es una xy-trayectoria$\}$. Con esta definición de distancia es claro que la distancia de un vértice a si mismo es 0. Si entre dos vértices x e y de G no existen xy-trayectorias, entonces diremos que $d(x, y) = \infty$. Sea $S = \{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq V(G)$, la distancia de S a un vértice $x \in V(G)$ esta dada por $d(S, x) = min\{d(y, x)|y \in S\}$. El **cuello de una gráfica** G es la longitud mínima de los ciclos en G, el cual denotaremos por $C(G)$ (ver Figura 2.1.3).

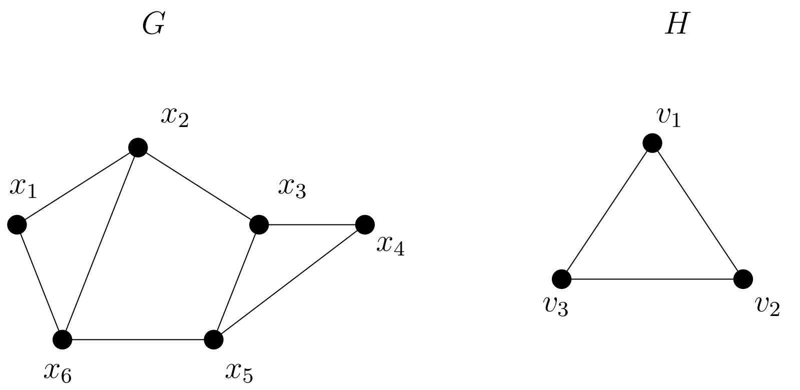

Figura 2.1.3: Observemos que G es una gráfica tal que $C(G) = 3$, además es hamiltoniana ya que $\gamma = (x_1, x_2, \ldots, x_6, x_1)$ es un ciclo hamiltoniano y una trayectoria de longitud máxima en G es $P = (x_1, x_2, \ldots x_6)$, donde $\ell(P) = 5$. $H = K_3$ la gráfica completa de 3 vértices, en donde $P = (v_1, v_2 v_3 v_2, v_1, v_3)$ es un camino que no es ciclo ni trayectoria, y $\{v_3\}$ es un conjunto independiente de vértices.

Una **gráfica completa** G es una gráfica simple donde todo par de vértices en $V(G)$ es adyacente, es decir, para todo $x, y \in V(G)$ se tiene que $\{x, y\} \in A(G)$, o para todo $x \in V(G)$, $\delta(G) = |V(G)| - 1 = \Delta(G)$. A la gráfica completa de n vértices la denotaremos por K_n. Diremos que $\gamma = (x_0, \ldots, x_k)$ es un **ciclo hamiltoniano** si y solo si para todo $v \in V(G)$, $v \in V(\gamma)$. A una gráfica G que contenga un ciclo hamiltoniano la llamaremos **gráfica hamiltoniana.** Dado $S \subseteq V(G)$, diremos que S es un **conjunto independiente de vértices** si para todo par de vértices $x, y \in S$ se tiene que $\{x, y\} \notin A(G)$. La gráfica G es una **gráfica conexa** si para todo por de vértices $x, y \in V(G)$ existe una xy-trayectoria (ver Figura 2.1.3).

2.1.2. Digráficas y gráficas orientadas

En esta sección se retomarán muchas de las definiciones anteriores, considerando que cada arista tendrá un inicio (cola de la flecha) y un fin (punta de la flecha), es decir los pares en el conjunto de aristas (o flechas) ahora serán ordenados, y la arista (o flecha) que va de un vértice x a un vértice y la denotaremos por $\overrightarrow{xy}$ o por (x, y).

Una **digráfica** es un par ordenado $D = (V(D), A(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito de vértices y el conjunto finito $A(D)$ cuyos elementos son pares ordenados de $V(D)$ que reciben el nombre de flechas, por ejemplo, dados $v, u \in V(D)$ denotaremos como (u, v) a la flecha que va de u a v, es decir, tiene cola (inicio) en u y punta (fin) en v. Una **gráfica orientada** D es una gráfica simple que a toda arista se le da una dirección unívoca, es decir si, $(u, v) \in A(D)$ entonces $(v, u) \notin A(D)$. Si existe una flecha $(y, x) \in A(D)$, llamaremos a el vértice y **invecino** del vértice x en D, y al vértice x el **exvecino** de y en D. La **invecindad** de un vértice x que denotaremos por $N^-(x)$, es el conjunto formado por los invecinos de x en D. La **exvecindad** de un vértice y que denotaremos por $N^+(y)$, es el conjunto formado únicamente por exvecinos de y en D. El **ingrado** de un vértice x se denotará por $\delta^-(x)$ que es igual al número de vértices que contiene $N^-(x)$, es decir, $\delta^-(x) = |N^-(x)|$. Análogamente el **exgrado** de un vértice y se denotará por $\delta^+(y)$ que es el cardinal del conjunto $N^+(y)$, $\delta^+(y) = |N^+(y)|$. Para las definiciones de ciclo, camino y trayectoria dirigidos solo pediremos que las flechas vayan en el sentido de secuencia en la que se escribe el ciclo, camino o trayectoria (la concatenación de trayectorias dirigidas se define con trayectorias con la misma dirección). Diremos que G es la gráfica subyacente de una digráfica D, si $V(G) = V(D)$ y si $(x, y) \in A(D)$ o $(y, x) \in A(D)$ entonces $\{x, y\} \in A(G)$. Una **digráfica** D es **conexa** si su gráfica subyacente es conexa. Una **digráfica** D es **acíclica** si no contiene ciclos dirigidos.

Dada una digráfica D, diremos que es **semicompleta** si su gráfica subyacente es una gráfica completa (ver Figura 2.1.4), y la llamaremos **digráfica completa** si para cualquier par de vértices $x, y \in V(D)$ se tiene que $(x, y) \in A(D)$ y $(y, x) \in A(D)$ y a la digráfica completa de n vértices la denotaremos por K_n^*. Sean D una digráfica y un vértice $v \in V(D)$, diremos que v es un **punto transitivo** si para cualesquiera dos vértices distintos $x, y \in V(D) \setminus \{v\}$ tal que $(x, v), (v, y) \in A(D)$ se tiene

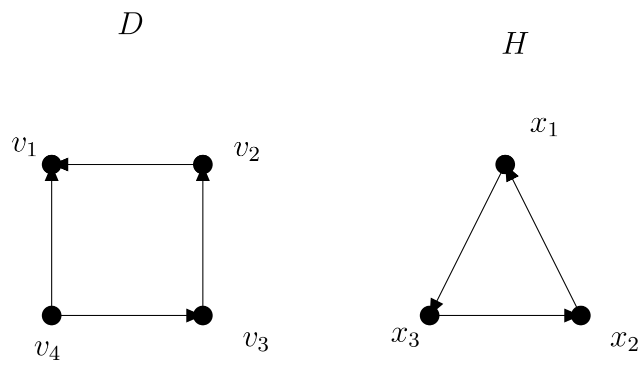

Figura 2.1.4: D es una digráfica acíclica y es una gráfica orientada, $N_D^+(v_1) = \{\emptyset\}$ y $N_D^-(v_1) = \{v_{2,}v_4\}$ por lo que $\delta^+(v_1) = 0$ y $\delta^+(v_1) = 2$. Observemos que H es una digráfica cíclica semicompleta, con $\delta^+(H) = 1 = \delta^-(H)$.

que $(x, y) \in A(D)$. Una digráfica es **transitiva** si todo vértice $v \in V(D)$ es un punto transitivo. Llamaremos a una digráfica **localmente in-semicompleta** (ex-semicompleta) si para todo vértice $v \in V(D)$ se cumple que $D[N^-(v)]$ $(D[N^+(v)])$ es una digráfica semicompleta.

2.2. Núcleos y soluciones.

Dada una digráfica D y $S \subseteq V(D)$ diremos que S es un **conjunto absorbente** si para todo vértice $x \in V(D) - S$, existe un vértice $y \in S$ tal que $(x, y) \in A(D)$. Un subconjunto $R \subseteq V(D)$ diremos que es **absorbente a distancia** k si para todo vértice $y \in V(D) - R$ se tiene que $d(y, R) \leq k$.Un **conjunto** S es **dominante** si para todo vértice en $x \in V(D) - S$, $x \in N^+(S)$. Diremos que un conjunto S **domina a distancia** k, si para todo vértice $y \in V(D) - S$, tenemos que $d(S, y) \leq k$. Un conjunto $N \subseteq V(D)$ es un **núcleo** si es absorbente e independiente. Un conjunto $Q \subseteq V(D)$ será **seminúcleo** si es independiente y es absorbente a distancia 2. Llamaremos **solución** a un conjunto $S \subseteq V(D)$, si es un conjunto dominante e independiente. Un conjunto R es **semisolución**, si es dominante a distancia 2 e independiente (ver Figura 2.2.1).

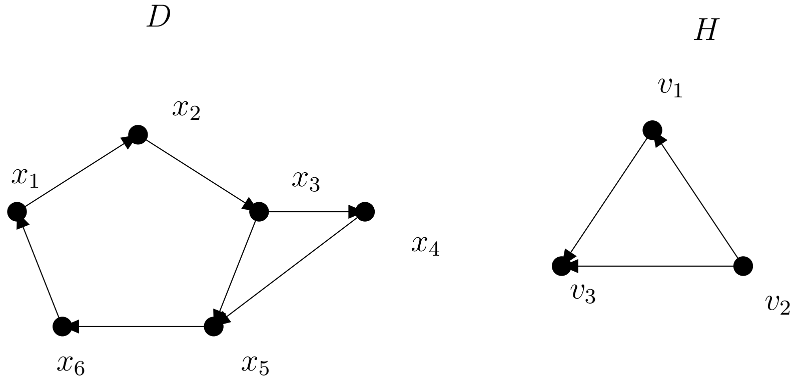

Figura 2.2.1: $C(D) = 5$, el conjunto $N = \{x_2, x_4, x_6\} \subseteq V(D)$ es absorbente dominante e independiente, es decir N es núcleo y solución de D. El conjunto $Q = \{x_5, x_1\} \subseteq V(D)$ es absorbente a distancia 2 e independiente esto es Q es seminúcleo de D, el conjunto $R = \{x_2, x_6\} \subseteq V(D)$es dominante a distancia 2 e independiente, es decir, R es semisolución.

2.3. Algunos resultados basicos.

Lema 2.3.1. *Sean $D = (V(D), A(D))$ una digráfica y $P = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D, entonces $N^-(x_0),\ N^+(x_k) \subseteq V(P)$.*

Demostración. Supongamos que existe $v \in V(D) \smallsetminus V(P)$ talque $v \in N^-(x_0)$ o $v \in N^+(x_k)$, entonces $\overrightarrow{vx_0} \bullet P$ o $P \bullet \overrightarrow{x_k v}$ serían trayectorias de longitud $k+1$ que es una contradicción porque la longitud máxima es k. $\square$

Lema 2.3.2. *Sea D una digráfica y para $x \in V(D)$ se tiene que $\delta^+(x) \geq 1$ entonces existe un ciclo en D.*

Demostración. Sea $T = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima, sabemos que $\delta^+(x_k) \geq 1$ entonces $N^+(x_k) \neq \emptyset$. Como T es de longitud máxima $N^+(x_k) \subseteq T$ (de no ser así existiría $v \in V(D) - V(T)$ tal que $T' = T \bullet (xv)$ sería una trayectoria de longitud mayor a T) entonces existe $x_i \in V(T) - \{x_k\}$ tal que $x_i \in N^+(x_k)$, así $(x_i, \ldots, x_k, x_i)$ es un ciclo en D. $\square$

Lema 2.3.3. *Sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica acíclica, entonces existe $S \subseteq V(D)$ tal que para cualquier $P = (x_0, \ldots, x_k)$ trayectoria de longitud máxima $V(P) \cap S \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea S el conjunto de los vértices de exvalencia cero en D el cual sabemos que es distinto del vacío por el Lema 2.3.2 y es independiente por definición. Dada cualquier trayectoria de longitud máxima $P = (v_0, \ldots, v_k)$, por ser D aciclíca y por el Lema 2.3.1, vemos que $\delta^+(v_k) = 0$. Por lo tanto $v_k \in S$. Así, $V(P) \cap S \neq \emptyset$ y el resultado se sigue. $\square$

Lema 2.3.4. *Sean A, B, C, D enteros positivos. Si $A + B \geq C + D$ entonces $A \geq C$ o $B \geq D$.*

Demostración. Supongamos que $A < C$ y $B < D$, entonces

$$A + B < C + B$$

y sabemos que $B < D$ asi

$$C + B < C + D$$

entonces, sumando ambas desigualdades, obtenemos que

$$A + B < C + D$$

$\square$

Lema 2.3.5. *Sea D una digráfica conexa. Si D es hamiltoniana, entonces cualquier subconjunto de vértices de D intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima.*

Demostración. Dado que D es hamiltoniana, existe un ciclo γ que contiene a todo vértice $x \in V(D)$, es decir, $\ell(\gamma) = |V(D)|$. Así toda trayectoria T de longitud máxima en D tiene longitud $|V(D)| - 1$ y $V(T) = V(D)$. De lo anterior se sigue que cualquier subconjunto de vértices de D intersecta a toda trayectoria de longitud máxima. $\square$

Lema 2.3.6. *Sean D una digráfica conexa, T una trayectoria de longitud máxima en D y supongamos que $D[V(T)]$ es hamiltoniana. Entonces D es hamiltoniana.*

Demostración. Sea $T = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima tal que $D[V(T)]$ es hamiltoniana, y supongamos que D no es hamiltoniana. Entonces $V(D) \setminus V(T) \neq \emptyset$, y por hipótesis sabemos que D es conexa, así existen $x_i \in V(T)$ (notación i modulo $k + 1$) y $z \in V(D) \setminus V(T)$ tal que x_i es adyacente a z en D. Si $(x_i, z) \in A(D)$ entonces

$$(x_{i+1}, \ldots, x_k, x_0, \ldots, x_i, z)$$

es una trayectoria de longitud $k+1$ en D lo cual es una contradicción. Si $(z, x_i) \in A(D)$ entonces

$$(z, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k, x_0, \ldots, x_{i-1})$$

es una trayectoria de longitud $k+1$ lo cual contradice que T sea de longitud máxima. Por lo tanto, D es hamiltoniana. □

Proposición 2.3.1. *Sea D una digráfica acíclica y finita, entonces existe $N \subseteq V(G)$ tal que N es núcleo de D.*

Demostración. Por hipótesis sabemos que D es acíclica, por lo cual existe $v \in V(D)$ tal que $\delta_D^+(v) = 0$. Sea

$$Y_0 = \{x \in V(D) | \delta_D^+(x) = 0\} \subseteq V(D),$$

observemos que Y_0 es un conjunto independiente por como lo definimos y $D - \{Y_0 \cup N^-(Y_0)\} = D_1$ es una subgráfica de D acíclica, así existe $y \in V(D_1)$ tal que $\delta_{D_1}^+(y) = 0$, por lo cual podemos construir un subconjunto

$$Y_1 = \{x \in V(D_1) | \delta_{D_1}^+(x) = 0\}$$

en $V(D_1)$, que es un conjunto independiente por construcción, $D_1 - \{Y_1 \cup N^-(Y_1)\} = D_2$ y $Y_0 \cup Y_1$ es un conjunto independiente por como los construimos (ya que cualquier vértice $x \in Y_1$ no puede ser absorbido por algún vértice Y_0 por como fue construida D_1). Así podemos seguir este procedimiento hasta terminar conteniendo a todos los vértices de D en algún $\{Y_i \cup N^-(Y_i)\}$ en el paso k, por ser D finita. Sabemos que $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} Y_i = N$ es un conjunto independiente por construcción. Ahora sea $v \in D$ tal que $v \in D - N$, por como se construyó N tenemos que $v \in N^-(Y_i)$, por lo cual N es un conjunto independiente y absorbente, por lo tanto N es un núcleo de D. □

Proposición 2.3.2. *Sea D una digráfica finita, entonces existe $Q \subseteq V(D)$ tal que Q es seminúcleo en D.*

Demostración. Primero daremos un orden cualquiera en $V(D)$, esto es $V(D) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.Con base en el orden que dimos construiremos las siguientes dos gráficas: D_1 donde $V(D_1) = V(D)$, $A(D_1) = \{(x_i, x_j) \in A(D) | i < j\}$ y D_2 con $V(D_2) = V(D)$, $A(D) = \{(x_i, x_j) \in A(D) | j < i)\}$. Es claro que $A(D_1) \subseteq A(D)$ y $A(D_2) \subseteq A(D)$. Observemos que D_1 es una digráfica acíclica, entonces por la Proposición 2.3.1 existe $N \subseteq V(D)$ tal que N es núcleo de D_1. Sea H la subgráfica inducida por N en D_2, H es una digráfica acíclica por la Proposición 2.3.1, H tiene un núcleo que llamaremos Q.

Ahora, sabemos que $Q \subseteq V(D)$ y es un conjunto independiente en D por como se obtuvo. Sea $v \in V(D) - Q$ entonces $v \in N - Q$ o $v \in V(D) - N$.

Caso 1. $v \in N - Q$.

Entonces existe $y \in Q$ tal que $(x, y) \in A(H) \subseteq A(D)$ por ser Q núcleo de H, es decir $d(v, Q) = 1$.

Caso 2. $v \in V(D) - N$.

Entonces existe $z \in N$ tal que $(v, z) \in A(D_1) \subseteq A(D)$ por ser N núcleo de D_1, así $z \in Q$ o $z \in N - Q$.

Caso I. Si $z \in Q$ tenemos que $d(v, Q) = 1$.

Caso II. Si $z \in N - Q$, por el caso 1 tenemos que existe $y \in Q$ tal que $(z, y) \in A(D)$, entonces (v, z, y) es una trayectoria en D, así $d(v, Q) = 2$.

Entonces $d(v, Q) \leq 2$, es decir, Q es absorbente a distancia 2. Por lo tanto Q es un cuasinúcleo en D.

□

Las proposiciones anteriores se pueden reformular en términos de soluciones y cuasisoluciones respectivamente.

2.4. La conjetura de Laborde-Payan-Xuong

Tras la introdución de las definiciones necesarias, ahora podemos enunciar la conjetura de Laborde-Payan-Xuong.

Conjetura 2.4.1. *Sea D una digráfica. Entonces existe $S \subseteq V(D)$ tal que para toda trayectoria T de longitud máxima en D se cumple que $V(T) \cap S \neq \emptyset$.*

3 Subgráficas inducidas, núcleos y mas

En este capítulo veremos varios de los resultados que aparecen en los artículos [GSRM96],[GSGMB09]. Estos resultados muestran algunas propiedades que pueden cumplir las digráficas y que son suficientes para asegurar la veracidad de la conjetura que nos dice: Sea D una digráfica. Entonces existe $S \subseteq V(D)$ tal que para toda trayectoria T de longitud máxima en D se cumple que $V(T) \cap S \neq \emptyset$, en dichas digráficas.

3.1. Subgráficas inducidas.

Teorema 3.1.1. *Sea A un subconjunto de vértices de D el cual contiene a todo vértice final v de una trayectoria de longitud máxima en D y a todo vértice $u \in N^+(v)$. Si la subdigráfica $D[A]$ tiene núcleo S, entonces S es un conjunto independiente que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima.*

Demostración. Sea $P = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D. Observemos que para todo $u \in N^+(x_k)$ tenemos que $u \in V(P)$ por el Lema2.3.1. Así $N^+(x_k) \subseteq V(P)$.

Ahora supongamos que existe una trayectoria de longitud máxima Q tal que $Q \cap S = \emptyset$ con vértice terminal z. Dado que Q es de longitud máxima $z \in A$, así existe $y \in S$ tal que $(z, y) \in A(D)$ por ser S núcleo de $D[A]$, pero $y \in N^+(z) \subseteq V(Q)$ lo cual contradice que $Q \cap S = \emptyset$. Así S es un conjunto independiente que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima. $\square$

En el siguiente teorema, dada una digráfica D, cuando decimos que una trayectoria $M = (x_0, \ldots, x_k)$ es no aumentable en D, queremos decir que no existe una trayectoria $T = (y_0, \ldots, y_n)$ contenida en $D - M$ tal que $(x_k, y_0) \in A(D)$, o $(y_n, x_0) \in A(D)$, o $(x_i, y_0), (y_k, x_{i+1}) \in A(D)$ para alguna $0 \leq i \leq k-1$.

Teorema 3.1.2. *Sean P una digráfica con vértices a, b, c, d y flechas $(a, b), (c, b), (c, d)$ y Q una digráfica con vértices a, b, c, d y arcos $(a, b), (c, b), (c, d), (b, d)$ (ver Figura 3.1.1). Si D es una digráfica sin flechas simétricas y sin subgráficas inducidas isomorfas a P o Q entonces cualquier conjunto maximal independiente intersecta a cualquier trayectoria no aumentable.*

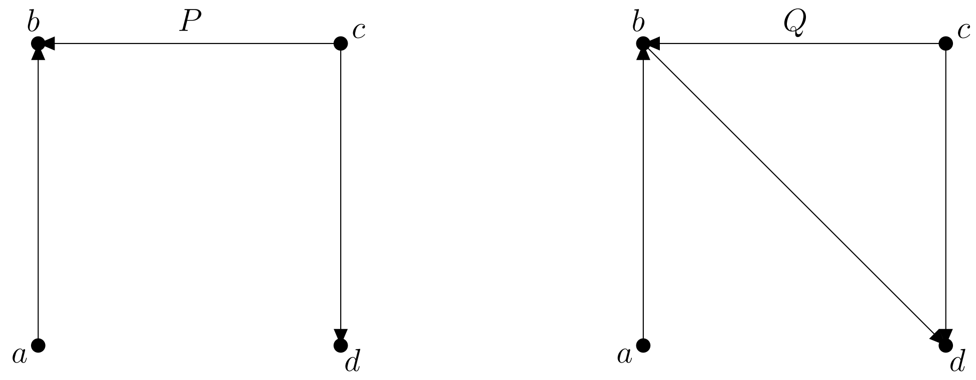

Figura 3.1.1: Graficas P y Q del Teorema 3.1.2.

Demostración. Sean S un conjunto independiente maximal y $M = (x_0, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k)$ una trayectoria no aumentable que no intersecta a S. Denotaremos $m(x, S)$ al número de arcos de x al conjunto S, es decir, $m(x, S) = |\{N^+(x) \cap S\}|$. De la maximalidad del conjunto S y de como se define a la digráfica D en el enunciado, se sigue que para todo $v \in V(D - S)$ existe $y \in S$ tal que $(v, y) \in A(D)$ o $(y, v) \in A(D)$ pero no ambas. Por ser M una trayectoria no aumentable se sigue que $N^+(x_k) \subseteq M$ y $N^-(x_0) \subseteq M$. De lo anterior vemos que

$$m(S, x_0) = 0, m(x_k, S) = 0, m(x_0, S) \neq 0, m(S, x_k) \neq 0.$$

Sean c el último vértice $x_i \in M$ tal que $m(S, x_i) = 0$ (observemos que $i \in \{0, k-1\}$ ya que $m(S, x_0) = 0, m(S, x_k) \neq 0$) y $b = x_{i+1}$ el vértice siguiente a c en M. Entonces por ser S independiente maximal, $m(c, S) \neq 0$ y además $m(S, b) \neq 0$ y $(c, b) \in A(D)$. Entonces existen $d \in \{N^+(c) \cap S\}$ y $a \in \{N^-(b) \cap S\}$, es decir $(c, d), (a, b) \in A(D)$. Ahora, supongamos que $(d, b) \in A(D)$ y $(c, a) \in A(D)$ entonces existen trayectorias $T_1 = (d) \subseteq V(D) - M$ y $T_2 = (a)$ tal que

$$(x_0, \ldots, c, d, b, \ldots, x_k)$$

y

$$(x_0, \ldots, c, a, b, \ldots, x_k)$$

que son trayectorias en D, lo que es una contradicción ya que M es una trayectoria no aumentable, así $(d, b) \notin A(D)$ y $(c, a) \notin A(D)$. Si $a = d$ entonces

$$(x_0, \ldots, c, a = d, b, \ldots, x_k)$$

es una trayectoria en D, lo cual es una contradicción, así $a \neq d$. Observemos que a no es adyacente a d por ser S es un conjunto independiente. Entonces, la subgráfica inducida por $\{a, b, c, d\}$ es isomorfa a P o a Q. Una contradicción, con lo cual se prueba el enunciado. □

Ahora, para una gráfica H, denotaremos por $I(H)$ al conjunto de vértices iniciales de trayectorias de longitud máxima en H, y por $T(H)$ el conjunto de vértices finales de trayectorias de longitud máxima en H.

Diremos que un vértice x cumple la propiedad $P(H)$, si para toda arista $(y, x) \in H[I(H)]$ la subgráfica inducida por $I(H)$ la cual no tiene aristas simétricas, al menos cumple una de las siguientes condiciones:

1. Cualquier trayectoria de longitud máxima en H que inicie en el vértice y contiene a x;

2. Cualquier trayectoria de longitud máxima en H que contenga a x, y no inicie en x, también contiene y.

Para el desarrollo de este capítulo necesitamos el siguiente Lema del cual omitimos su demostración.

Lema 3.1.1. *[LHP82] Si cada subdigráfica H en D tiene un vértice en $I(H)$ tal que satisface la propiedad $P(H)$, entonces $I(D)$ contiene un conjunto independiente S tal que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima en D.*

Teorema 3.1.3. *Si en una digráfica D cualquier ciclo sin aristas simétricas tiene un vértice con ingrado o ex-grado a lo mas uno, entonces $I(D)$ contiene un conjunto independiente S tal que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima en D.*

Demostración. Observemos que por el Lema 3.1.1 para probar el resultado, basta probar que cualquier subgráfica $H \subseteq D$ satisface la condición de tener un vértice $x \in I(H)$ con la propiedad $P(H)$, para una digráfica D con las condiciones del enunciado del teorema.

Supongamos que ningún vértice $x \in I(D)$ cumple la propiedad $P(D)$, es decir, dado $x \in I(D)$ entonces existe $y \in I(D)$ tal que (y, x) no es una arista simétrica en D e y es el vértice inicial de una trayectoria de longitud máxima en D que no contiene a x; y existe una trayectoria de longitud máxima que no inicia en x y contiene a x pero no contiene a y. Pero esto sucede para cualquier vértice en $I(D)$, así para y existe $z \in I(D)$ tal que (z, y) no es arista simétrica en D, z es vértice inicial de una trayectoria de longitud máxima en D que no contiene a y; y existe una trayectoria de longitud máxima que no inicia en y y contiene a y pero no contiene a z. Sabemos que $V(D)$ es un conjunto finito así $I(D)$ es también finito, por lo cual en algún momento tendremos que todo elemento en $I(D)$ ha sido considerado en el proceso anterior y que para todo $v \in I(D)$ $\delta^-(v) \geq 1$ de lo cual se sigue que existe un ciclo dirigido

$$\overrightarrow{C_r} = (x_0, \ldots, x_r, x_0) \subseteq I(D)$$

tal que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$ se tiene que:

1. Existe una trayectoria de longitud máxima que inicia en x_i que no contiene a x_{i+1} (notación modulo $r + 1$) y
2. Existe una trayectoria de longitud máxima que no inicia en x_i, tal que contiene a x_i pero no contiene x_{i-1} (notación modulo $r + 1$).

Sabemos que para $i \in \{0, \ldots, r\}$ $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ y $(x_{i-1}, x_i) \in A(D)$; de 1 se sigue que existe $w \in V(D)$ tal que $(x_i, w) \in A(D)$ con $w \neq x_{i+1}$ y de 2 se sigue que existe $v \in V(D)$ tal que $(v, x_i) \in A(D)$ con $v \neq x_{i-1}$ así $\delta^+(x_i) \geq 2$ y $\delta^-(x_i) \geq 2$ para todo $x_i \in \overrightarrow{C_r}$ pero esto es una contradicción con la hipótesis del teorema. Entonces cualquier subgráfica $H \subseteq D$ satisface la condición de tener un vértice $x \in I(H)$ con la propiedad $P(H)$. Por lo tanto $I(D)$ contiene un conjunto independiente S que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima en D. $\square$

Ahora probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4. *Sea D una digráfica tal que cualquier ciclo dirigido sin aristas simétricas tiene un vértice x que satisface que: $D[N^-(x)] \cong K^*_{\delta^-(x)}$ o $D[N^+(x)] \cong K^*_{\delta^+(x)}$. Entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq I(D)$ tal que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima.*

Demostración. Probaremos que toda digráfica que cumpla las propiedades en el enunciado, tiene un vértice $x \in I(G)$ que cumple la propiedad $P(G)$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que ningún vértice $x \in I(D)$ cumple la propiedad $P(D)$, es decir, dado $x \in I(D)$ existe $y \in I(D)$ tal que (y, x) no es un arista simétrica en D e y es el vértice inicial de una trayectoria de longitud máxima en D que no contiene a x; y existe una trayectoria de longitud máxima que no inicia en x y contiene a x pero no contiene a y. Siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba del Teorema 3.1.3 obtenemos que existe un ciclo dirigido

$$\overrightarrow{C_{r+1}} = (x_0, \ldots, x_r, x_0)$$

tal que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$ se tiene que:

1. Existe una trayectoria de longitud máxima que inicia en x_i que no contiene a x_{i+1} (notación módulo $r + 1$) y
2. Existe una trayectoria de longitud máxima que no inicia en x_i, tal que contiene a x_i pero no contiene x_{i-1} (notación módulo $r + 1$).

   Ahora analizaremos los siguientes casos posibles:

Caso 1. Existe un vértice $x_k \in \overrightarrow{C_{r+1}}$ con $D[N^-(x)] \cong K^*_{\delta^-(x)}$. Por 2 sabemos que existe

$$\alpha = (z_0, z_1, \ldots, z_p)$$

una trayectoria de longitud máxima en D tal que $x_k = z_j$ para alguna $j \in \{0, \ldots, p\}$ y que no contiene a x_{k-1}. Por lo cual se tiene que $\{(z_{j-1}, x_k), (x_{k-1}, x_k)\} \subseteq A(D)$, entonces $\{(z_{j-1}, x_{k-1}), (x_{k-1}, z_{j-1})\} \subseteq A(D)$ y

$$\alpha' = (z_0, \ldots, z_{j-1}, x_{k-1}, x_k = z_j, z_{j+1}, \ldots, z_p)$$

es una trayectoria en D de longitud mayor a la de α, lo cual es una contradicción a que α es de longitud máxima.

Caso 2. Existe un vértice $x_k \in \overrightarrow{C_{r+1}}$ tal que $D[N^+(x)] \cong K^*_{\delta^+(x)}$. Por 1, sabemos que existe $\beta = (y_0 = x_k, y_1, \ldots, y_q)$ una trayectoria de longitud máxima en D que empieza en x_k y no contiene a x_{k+1}. De esto se sigue que $\{(y_1, x_{k+1}), (x_{k+1}, y_1)\} \subseteq A(D)$ así

$$\beta' = (y_0 = x_k, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_q)$$

es una trayectoria de longitud mayor a la de β, lo cual contradice que β sea de longitud máxima.

□

3.2. Núcleos

Teorema 3.2.1. *Sea $C \subseteq (V(D) - T(D))$. Si $D - C$ tiene un núcleo S entonces S intersecta a todas las trayectorias de longitud máxima*

Demostración. Supongamos que existe una trayectoria de longitud máxima $P = (x_0, \ldots, x_k)$ contenida en $(D - C)$ tal que $V(P) \cap S = \emptyset$. Entonces se sigue que $x_k \in [(V(D) - C) \cap (V(D) - S)]$ y ya que S es núcleo en $D - C$ entonces existe $y \in S$ tal que $(x_k, y) \in A(D)$. Así $P' = P \bullet (x_k, y)$ es una trayectoria de longitud mayor a P, lo que contradice que P sea de longitud máxima. Por lo tanto $V(P) \cap S \neq \emptyset$ para toda P trayectoria de longitud máxima en D, de lo cual se sigue el resultado. □

Teorema 3.2.2. *Sea $C \subseteq \{(V(D) - T(D)) \cup \{x \in V(D) | D[N^-(x)] \cong K_{\delta^-(x)}\}\}$. Si $D - C$ tiene núcleo entonces existe un conjunto independiente $S \subseteq V(D)$ tal que S intersecta a toda trayectoria de longitud máxima.*

Demostración. Sea $C' = C \cap \{x \in V(D) | D[N^-(x)] \cong K_{\delta^-(x)}\}$. Observemos que si $C' = \emptyset$ entonces estaríamos en el caso del Teorema 3.2.1. Supongamos que $C' \neq \emptyset$ y sea N el núcleo de $D - C$. Sabemos que N es un conjunto independiente y supongamos que existe $P = (x_0, \ldots, x_k)$ trayectoria de longitud máxima en D tal que $V(P) \cap N = \emptyset$. Ahora analizaremos los siguientes dos casos posibles de donde puede estar x_k.

Caso 1. $x_k \in V(D - C)$.

Por la suposición tenemos que $x_k \in \{(V(D - C) \cap (V(D) - N)\}$ y ya que N es núcleo en $D - C$, se sigue que existe $y \in N$ tal que $(x_k, y) \in A(D)$, y así $P' = P \bullet (x_k, y)$ es una trayectoria mas larga que P en D lo cual es una contradicción.

Caso 2. $x_k \in C$.

Observemos que al ser x_k vértice terminal de una trayectoria de longitud máxima, solo puede estar en C si esta en el conjunto

$$\{x \in V(D)|D[N^-(x) \cong K_{\delta^-(x)}\},$$

de lo cual se sigue que $x_k \in C'$. Ahora probaremos que $N \cup \{x_k\}$ es un conjunto independiente. Lo haremos por contradicción, Supongamos que $N \cup \{x_k\}$ es un conjunto dependiente, es decir, existe $y \in N$ tal que $\{(x_k, y), (y, x_k)\} \cap A(D) \neq \emptyset$. Por el caso anterior tenemos que $(x_k, y) \notin A(D)$, así $(y, x_k) \in A(D)$. Así $\{x_{k-1}, y\} \subseteq N^-(x_k)$ lo cual por hipótesis implica que $\{(x_{k-1}, y), (y, x_{k-1})\} \subseteq A(D)$, de aquí se sigue que $P' = (x_0, \ldots, x_{k-1}, y, x_k)$ es una trayectoria en D de longitud mayor a P lo cual es una contracción. Entonces podemos construir un conjunto S independiente que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima D que cumpla con las hipótesis del teorema , es decir, existe S tal que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima D.

□

3.3. Digráficas localmente semicompletas, núcleos y cuasinúcleos.

Para la prueba del Teorema 3.3.1 necesitaremos el siguiente Lema.

Lema 3.3.1. *Sea D una digráfica. Supongamos que existe $B \subset V(D)$ tal que $D - B$ posee núcleo. Sean N un núcleo en $D - B$ y $T = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D. Si $V(T) \cap N = \emptyset$, entonces $x_k \in B$.*

Demostración. Probaremos el lema por contradicción. Supongamos que $x_k \notin B$, es decir, $x_k \in V(D) - B$ entonces, por ser N núcleo de $D - B$, existe $z \in N$ tal que $(x_k, z) \in A(D)$, y como $V(T) \cap N = \emptyset$, $z \neq x_i$ para toda $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Así

$$(x_0, \ldots, x_k, z)$$

es una trayectoria en D lo cual contradice que T sea de longitud máxima. $\square$

Teorema 3.3.1. *Sea D una digráfica fuertemente conexa. Supongamos que existe $B \subset V(D)$ tal que*

1. *$D - B$ posee un núcleo.*
2. *Para cualquier $x \in B$ y $v \in N^+(x)$ se tiene que $D[N^-(v)]$ es una digráfica semicompleta.*

Entonces cualquier núcleo de $D - B$ intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima en D.

Demostración. Primero observemos que dada cualquier trayectoria de longitud máxima $T = (x_0, \ldots, x_k)$ en D, tenemos que $N^+(x_k) \subset V(T)$ y como D es fuertemente conexa, $N^+(x_k) \neq \emptyset$. Escojamos entonces una trayectoria T de longitud máxima tal que $i_0 = min\{i|(x_k, x_i) \in A(D)\}$ es minimal entre todas las trayectorias de longitud máxima en D. Ahora procederemos por contradicción y supondremos que D no es hamiltoniana. De esto se sigue, por el Lema 2.3.6, que $D[V(T)]$ no es hamiltoniana y así $i_0 > 0$ (ya que de lo contrario $D[V(T)]$ sería hamiltoniana). Como $x_{i_0} \in N^+(x_k)$ se tiene que $D[N^-(x_{i_0})]$ es semicompleta, es decir, $(x_{i_0-1}, x_k) \in A(D)$ o $(x_k, x_{i_0-1}) \in A(D)$, de la minimalidad de i_0 se sigue que $(x_k, x_{i_0-1}) \notin A(D)$, entonces la trayectoria

$$T_1 = (x_0, \ldots, x_{i_0-1}, x_k, x_{i_0}, \ldots x_{k-1})$$

es una trayectoria de longitud máxima con $V(T) = V(T_1)$ y $x_{k-1} \in T(D)$, así $(x_{i_0-1}, x_{k-1}) \in A(D)$. Ahora procedamos por inducción. Supongamos $j \geq 1$ tal que $j \leq n - i_0 - 1$ (esto por que en el conjunto $\{x_{i_0+1}, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}\}$ hay $k - 1 - (i_0 + 1) + 1 = k - i_0 - 1$ vértices y así evitamos que se repita alguna trayectoria ya que D es finita) y $x_{k-j-1} \in T(D)$, $(x_{i_0}, x_{k-j}) \in A(D)$ además tenemos la trayectoria de longitud máxima (ver Figura 3.3.1)

$$T_{j+1} = (x_0, \ldots x_{i_0-1}, x_{k-j}, \ldots, x_k, x_{i_0}, \ldots, x_{k-j-1}).$$

Sabemos que $V(T) = V(T_{j+1})$, entonces $x_{k-j-1} \in T(D)$. Como $x_{k-j} \in N^+(x_{k-j-1})$ se sigue que $D[N^-(x_{k-j})]$ es semicompleta. Ahora ya que $x_{k-j-1}, x_{i_0-1} \in N^-(x_{k-j})$, x_{k-j-1} y x_{i_0-1} son adyacentes en D, pero $(x_{k-j-1}, x_{i_0-1}) \notin A(D)$ ya que i_0 es minimal. De lo anterior se sigue que $(x_{i_0-1}, x_{k-j-1}) \in$

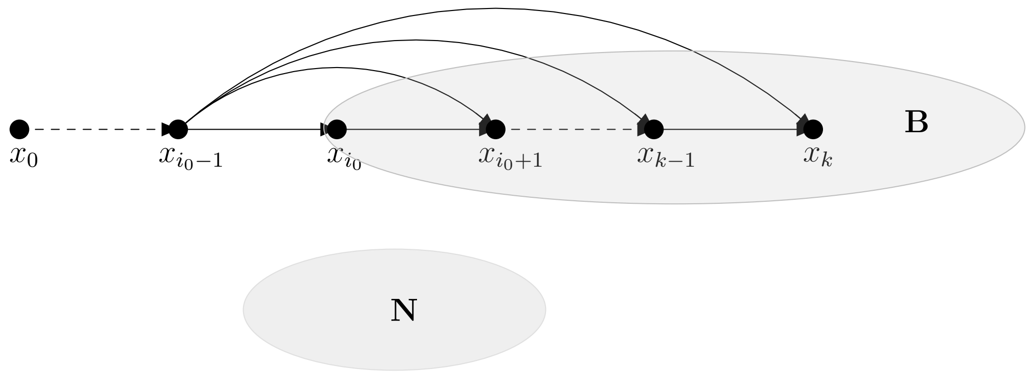

Figura 3.3.1:

$A(D)$ y que

$$T_{j+2} = (x_0, \ldots, x_{i_0-1}, x_{k-j}, \ldots, x_n, x_{i_0}, \ldots, x_{k-j-1})$$

es una trayectoria de longitud máxima en D. De lo anterior se sigue que $N^+(x_m) \cap (V(D) \setminus V(T)) = \emptyset$ para toda $m \in \{i_0, \ldots, k\}$ y que $N^+(x_m) \cap \{x_0, \ldots, x_{i_0-1}\} = \emptyset$, contradiciendo que D es fuertemente conexa. Por lo tanto el resultado se sigue. $\square$

Ahora veamos que sucede al intercambiar el ingrado y el exgrado en el Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.2. *Sea D una digráfica fuertemente conexa. Supongamos que existe $B \subset V(D)$ tal que*

1. *$D - B$ posee un núcleo.*

2. *Para cualquier $x \in B$ y $v \in N^-(x)$, se tiene que $D[N^+(v)]$ es una digráfica semicompleta.*

Entonces cualquier núcleo de $D - B$ intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima en D.

Demostración. Para esta prueba procederemos por reducción al absurdo. Sea $N \subset \{V(D) \setminus B\}$ un núcleo en $D - B$. Supongamos que existe una trayectoria de longitud máxima $T = (x_0, \ldots, x_k)$ en D tal que $V(T) \cap N = \emptyset$. Si existiera $y \in B$ y $z \in N$ tal que $(y, z) \in A(D)$, entonces podemos construir $B' = B - \{y\}$ tal que N es núcleo en $D - B'$ y para todo $x \in B'$ y $v \in N^-(x)$, $D[N^+(v)]$ es semicompleta y $V(T) \cap N = \emptyset$. Supondremos que B minimal en el sentido que no existen flechas que inicien en B y terminen en N.

Sabemos que $V(T) \cap N = \emptyset$ y que T es una trayectoria de longitud máxima, así por el Lema 3.3.1 $x_k \in B$. Sea $j = max\{i | x_i \in B\}$ y supongamos que $V(T) \cap (V(D) \setminus B) \neq \emptyset$. Así existe $z \in N$ tal que $(x_j, z) \in A(D)$ ya que N es núcleo de $D - B$. Por la hipótesis 2 del enunciado del teorema, z y x_{j+1} (tiene sentido hablar de $j+1$ ya que $j \leq k-1$) son adyacentes ya que son exvecinos de x_j y $D[N^+(x_j)]$ es semicompleta ya que $x_{j+1} \in B$ por como escogimos j. Ya que $x_{j+1} \in B$ y $z \in N$, $(x_{j+1}, z) \notin A(D)$ entonces $(z, x_{j+1}) \in A(D)$, pero así

$$(x_0, \ldots, x_j, z, x_{j+1}, \ldots, x_k)$$

sería una trayectoria de longitud $k+1$ en D, lo cual contradice que T sea trayectoria de longitud máxima.

Ahora supongamos que $V(T) \cap (V(D) \setminus B) = \emptyset$, es decir, supongamos que $V(T) \subset B$. Como D es fuertemente conexa, existe j, con $0 \leq j \leq k$, tal que $N^+(x_j) \nsubseteq V(T)$ y $x_j \in V(T)$. Sean j maximal con la propiedad $N^+(x_j) \nsubseteq V(T)$ y $z \in (N^+(x_j) - V(T))$. Si $j = k$, tendríamos que

$$(x_0, \ldots, x_k, z)$$

sería una trayectoria en D de longitud $k+1$, contradiciendo que T sea de longitud máxima en D. Así $j < k$. Ya que $x_j \in N^-(x_{j+1})$ y $x_{j+1} \in B$, de la hipótesis 2 del enunciado del teorema se sigue que $D[N^+(x_j)]$ es semicompleta. Entonces z y x_{j+1} son adyacentes en D. Sabemos que $(x_{j+1}, z) \notin A(D)$ porque escogimos a j maximal. Ahora veamos que pasa si $(z, x_{j+1}) \in A(D)$, entonces

$$(x_0, \ldots, x_j, z, x_{j+1}, \ldots, x_k)$$

sería una trayectoria en D de longitud $k+1$, lo cual contradice que T sea de longitud máxima. Por lo tanto llegamos al resultado deseado. □

Teorema 3.3.3. *Sea D una digráfica. Supongamos que para todo vértice $x \in T(D)$ y $z \in N^+(x)$, se tiene que $D[N^-(z)]$ es semicompleta. Entonces cualquier trayectoria de longitud máxima intersecta a cualquier cuasinúcleo Q.*

Demostración. Sea $Q \subset V(D)$ un cuasinúcleo. Supongamos que existe $T = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D tal que $V(T) \cap Q = \emptyset$. Así existe $u \in Q$ tal que $(x_k, u) \in A(D)$ o existe $w \in N^-(Q)$ tal que (x_k, w, u) es una trayectoria en D. Si $(x_k, u) \in A(D)$, entonces

$$(x_0, \ldots, x_k, u)$$

es una trayectoria en D de longitud $k+1$, contradiciendo que T es de longitud máxima en D. Así tenemos que $N^-(x_k) \subset V(T)$. Escojamos una trayectoria T de longitud máxima tal que $i_0 = min\{i|(x_k, x_i) \in A(D)\}$ es minimal entre todas las trayectorias de longitud máxima en D que no intersectan a Q. Procediendo como en el Teorema 3.3.1 llegamos a contradecir la conexidad fuerte de D, con lo cual obtenemos el resultado. □

3.4. Digráficas localmente transitivas, cuasinúcleos y cuasisoluciones.

Teorema 3.4.1. *Sea D una digráfica. Supongamos que para cada vértice $x \in T(D)$, si $v \in N^+(x)$ entonces v es un punto transitivo. Entonces cualquier cuasinúcleo de D intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima en D.*

Demostración. Supongamos que existe un cuasinúcleo $Q \subset V(D)$ y una trayectoria de longitud máxima $T = (x_0, \ldots, x_k)$ tal que $V(T) \cap Q = \emptyset$. Ya que Q es un cuasinúcleo y $x_k \notin Q$, se sigue que existe $u \in Q$ tal que sucede alguno de las siguientes casos: $(x_k, u) \in A(D)$ o existe $z \in N^-(Q)$ tal que (x_k, z, u) es una trayectoria en D. Si $(x_k, u) \in A(D)$, entonces $(x_0, \ldots x_k, u)$ sería una trayectoria en D de longitud $k+1$ lo cual contradice que T es trayectoria de longitud máxima. Ahora si existe $z \in N^-(Q)$ tal que (x_k, z, u) es una trayectoria en D, observemos que $z = x_i$ para alguna $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ ya que T es de longitud máxima. Por hipótesis x_i es transitivo por estar en $N^+(x_k)$, así $(x_k, u) \in A(D)$ (ver Figura 3.4.1), lo cual nos lleva también a una contradicción.

□

De manera análoga podemos probar el siguiente resultado relativo a cuasisoluciones

Teorema 3.4.2. *Sea D una digráfica. Supongamos que para cada vértice $x \in I(D)$ si $v \in N^-(x)$, entonces v es un punto transitivo. Entonces cualquier cuasisolución de D intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima en D.*

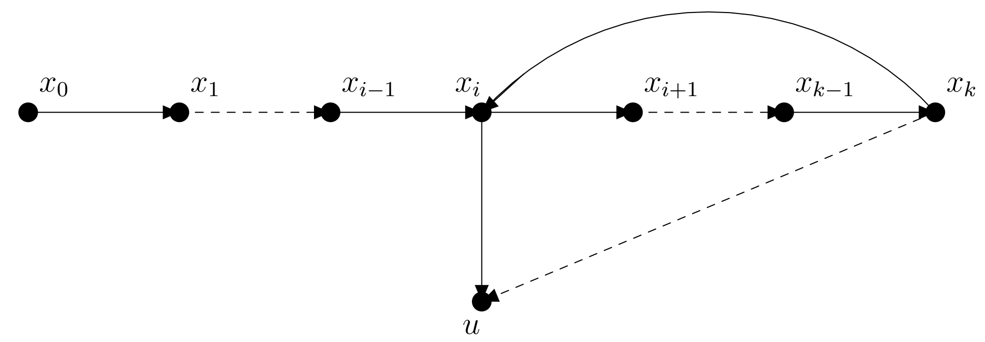

Figura 3.4.1: Existencia de $u \in Q$ tal que $(x_k, u) \in A(D)$.

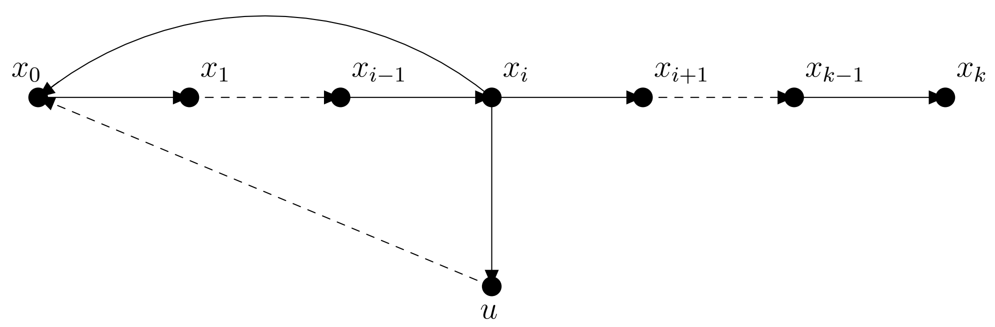

Figura 3.4.2: Existencia de un vértice $u \in S$ tal que $(u, x_0) \in A(D)$, en la prueba del resultado de cuasisolución.

4 La conjetura es cierta para trayectorias de longitud “corta”

En esta capítulo vemos un resultado, que aparece [GSGMB09], y que prueba la conjetura para cuando las trayectorias máximas tienen longitud a lo más 4. Para esto primero probaremos el siguiente lema.

Lema 4.0.1. *Sean D una gráfica orientada y $k \geq 1$ la longitud de la trayectoria mas larga en D. Sea $B \subseteq T(D)$ un conjunto independiente que intersecta al máximo número de trayectorias de longitud máxima en D (es decir que B es maximal con la propiedad de intersectar trayectorias de longitud máxima). Supongamos $P = (p_0, \ldots, p_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D tal que $V(P) \cap B = \emptyset$. Entonces existen un vértice $x \in B$ y trayectorias de longitud máxima $Q = (q_0, \ldots, q_k)$ y $T = (t_0, \ldots, t_k)$ tal que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$(x, p_k) \in A(D)$.*
2. *$q_k = x$.*
3. *$t_s = x$ para alguna $s \in \{0, \ldots, k-1\}$ y $p_k \notin V(T)$.*
4. *$p_k = q_r$ para alguna $r \in \{1, \ldots, k-2\}$.*
5. *$q_{r+1} = p_n$ para alguna $n \in \{1, \ldots, k-2\}$.*
6. *$t_{s+1} = q_m$ para alguna $m \in \{1, \ldots, k-2\}$.*

Demostración. Sean D, B y P como en el enunciado del lema. Si $B' = B \cup p_k$ es un conjunto independiente , entonces B' intersecta mas trayectorias de longitud máxima en D que B, lo que es una contradicción por como se escogió B. Así se sigue que B' no es independiente y por lo cual p_k es adyacente al menos a un vértice en B. Si $(p_k, z) \in A(D)$ para alguna $z \in B$ entonces

$$(p_0, \ldots p_k, z)$$

sería una trayectoria de longitud $k+1$ en D , lo que es una contradicción a que P es una trayectoria de longitud máxima. Por lo cual $B_{p_k} = \{z \in B | (z, p_k) \in A(D)\} \neq \emptyset$. Ahora supongamos que para todo $z \in B_{p_k}$ y para toda trayectoria de longitud máxima T en D, tal que contenga a z contiene a p_k, es decir $z, p_k \in V(T)$. Así tenemos que $(B \setminus B_{p_k}) \cup \{p_k\}$ es un conjunto independiente, que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima que intersecta B y además intersecta a P, lo cual contradice que B sea el conjunto que intersecta mas trayectorias de longitud máxima. Entonces existe $x \in B_{p_k}$ y una trayectoria de longitud máxima T en D tal que $x \in V(T)$ y $p_k \notin V(T)$. Observemos que T no puede terminar en x ya que

$$(t_0, \ldots, t_k = x, p_k)$$

sería una trayectoria en D de longitud $k+1$, lo cual es una contradicción. Así existe $s \in \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $t_s = x$. Ahora , dado que $x \in B \subseteq T(D)$, existe Q una trayectoria de longitud máxima en D con $q_k = x$. Hasta aquí hemos demostrado las condiciones $1, 2$ y 3 del lema.

Luego, observemos que para toda trayectoria de longitud máxima $Q = (q_0, \ldots, q_k)$ en D, si para alguna $z \in V(D)$ se tiene que $(q_k, z) \in A(D)$, entonces $z \in V(Q)$ (por ser Q de longitud máxima), es decir $z = q_s$ para alguna $s \in \{0, \ldots, k\}$. Como D es una gráfica orientada simple, D no tiene lazos, así $z \neq q_k$; y ya que $(q_{k-1}, q_k) \in A(D)$ y D es una gráfica orientada se sigue que $z \neq q_{k-1}$. Ahora, si $z = q_0$, se tiene que

$$(z = q_0, q_1, \ldots, q_k, z)$$

es un ciclo hamiltoniano en $V(Q)$, así el Lema 2.3.6 nos implica que D es hamiltoniana, lo que es una contradicción a suponer que $V(P) \cap B = \emptyset$. Así para toda $z \in N^+(q_k)$, se tiene que $z = q_r$ para alguna $r \in \{1, \ldots, k-2\}$. Sabemos que $x = q_k$ y que $p_k \in N^+(x)$ entonces $p_k = q_r$ para alguna $r \in \{1, \ldots, k-2\}$, por lo cual la condición 4 se cumple. Y como que P es una trayectoria de longitud máxima $N^+(p_k) \subseteq V(P)$, de lo cual se sigue que $q_{r+1} = p_n$ para alguna $n \in \{1, \ldots, k-2\}$ (esto último por que D es una gráfica orientada y simple), así 5 se cumple. Ya que $t_s = x$ y D es una gráfica orientada y simple entonces $t_{s+1} = q_m$ para alguna $m \in \{1, \ldots, k-2\}$, siendo así la condición 6 verdadera. Por lo tanto el resultado se sigue. □

Teorema 4.0.3. *Sea D una gráfica orientada. Si la longitud de la trayectoria de longitud máxima en D es a lo mas 4, entonces existe un conjunto independiente $B \subseteq T(D)$ que intersecta a toda trayectoria de longitud máxima.*

Demostración. Para la prueba de este teorema procederemos a realizar el caso en que $k = 4$, ya que para los casos de $k = 1, 2, 3$ usa argumentos análogos al los que presentaremos a continuación. Así procedamos con $k = 4$.

Sea $B \subset T(D)$ un conjunto independiente que intersecta el máximo número de trayectorias de longitud máxima en D. Supongamos que existe una trayectoria de longitud máxima P en D tal que $V(P) \cap B = \emptyset$. Sea x, Q y T como en el Lema 4.0.1 de modo que suceden las siguientes condiciones:

1. $(x, p_4) \in A(D)$.
2. $q_4 = x$.
3. $t_s = x$ para alguna $s \in \{0, 1, 2, 3\}$ y $p_4 \notin V(T)$.
4. $p_4 = q_r$ para alguna $r \in \{1, 2\}$.
5. $q_{r+1} = p_n$ para alguna $n \in \{1, 2\}$.
6. $t_{s+1} = q_m$ para alguna $m \in \{1, 2\}$.

Así de la condición 4 se siguen los siguientes dos casos:

Caso 1. $p_4 = q_1$.

De la condición 6, tenemos que $t_{s+1} = q_m$ para alguna $m \in \{1, 2\}$. Por la condición 3, $q_1 \notin V(T)$ ya que $q_1 = p_4$, así se sigue que $t_{s+1} = q_2$. De las condiciones 1 y 3 se tiene que $(t_s, p_4) = (x, p_4) \in A(D)$ y $p_4 \notin V(T)$; y ya que $(p_4, t_{s+1}) = (q_1, q_2)$ entonces $(p_4, t_{s+1}) \in A(D)$, y así

$$(t_0, \ldots, t_s, t_{s+1}, \ldots, t_4)$$

es una trayectoria de longitud 5, lo cual contradice que la longitud máxima de una trayectoria en D sea 4.

Caso 2. $p_4 = q_2$.

De la condición 5 se sigue que $q_3 = p_n$ para alguna $n \in \{1, 2\}$; Por la condición 6 se tiene que $t_{s+1} = q_m$ para alguna $m \in \{1, 2\}$. Sabemos que $p_4 = q_2$ así de la condición 3 se sigue que $q_2 \notin V(T)$, por lo cual $t_{s+1} = q_1$.

Afirmamos que $t_{s+1} \in V(P)$. Supongamos que $t_{s+1} \notin V(P)$, entonces se tiene que

$$(p_0, \ldots p_n = q_3, q_4 = t_s, t_{s+1} = q_1, q_2 = p_4)$$

es una trayectoria en D de longitud al menos 4, lo que implica que $n = 1$. Entonces $(p_2, \ldots, p_4 = q_2, q_3 = p_1, q_4 = t_s, t_{s+1})$ es una trayectoria en D de longitud 5 (ver Figura 4.0.1), lo que contradice que la longitud máxima de una trayectoria en D es 4. Por lo tanto la afirmación se cumple.

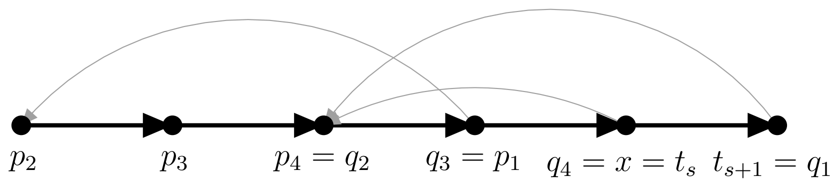

Figura 4.0.1: El ejemplo de suponer que $t_{s+1} \notin V(P)$ (solo se muestra la parte de interés del dibujo para mejor entendimiento).

De lo anterior se sigue que $q_1 = t_{s+1} = p_r$ para alguna $r \in \{0, \ldots, 4\}$. Por la condición 3 tenemos que $p_4 \notin V(T)$, así $t_{s+1} \neq p_4$. Si $t_{s+1} = p_0$, entonces

$$(q_4 = t_s, t_{s+1} = p_0, \ldots, p_4)$$

sería una trayectoria en D de longitud 5, lo que es una contradicción. Como $p_4 = q_2$ y por la condición 4 se tiene que $r = 2$, entonces $p_n = q_3$ (por la condición 5). Además sabemos que $(q_3, q_4) \in A(D)$, $t_s = x = q_4$ (se sigue de las condiciones 2 y 3) y que D es una gráfica orientada, por lo cual $(t_s, p_n) = (q_4, q_3) \notin A(D)$ entonces $t_{s+1} \neq p_n$ (por que $(t_s, t_{s+1}) \in A(D)$). Ahora, si $t_{s+1} = p_{n+1}$, se sigue que

$$(p_0, \ldots, p_n = q_3, q_4 = t_s, t_{s+1} = p_{n+1}, \ldots, p_4)$$

sería una trayectoria de longitud 5, lo que contradice que la longitud máxima de toda trayectoria en D es 4. Por lo tanto $t_{s+1} \in \{\{p_1, p_2, p_3\} \setminus \{p_n, p_{n+1}\}\}$ y $p_n = q_3$. Así solo se permiten los siguientes dos subcasos provenientes de los valores de n en la condición 5. Si $n = 1$ se tiene que $t_{s+1} \in \{\{p_1, p_2, p_3\} \setminus \{p_1, p_2\}\} = \{p_3\}$ y $q_3 = p_1$. Si $n = 2$ entonces

$t_{s+1} \in \{\{p_1, p_2, p_3\} \setminus \{p_2, p_3\}\} = \{p_1\}$ y $q_3 = p_2$.

Caso I. $q_3 = p_1$ y $t_{s+1} = p_3$.

Sabemos que $p_4 \notin V(T)$ por la condición 3, así

$$(t_0, \ldots, t_s, t_{s+1} = p_3, p_4)$$

es una trayectoria en D, por lo cual $s \leq 2$. T es una trayectoria de longitud máxima por hipótesis, así la longitud de T es 4, de esto se sigue que existe $z \in V(D)$ tal que $z = t_{s+2}$. La trayectoria $\alpha = (q_4 = x, p_4 = q_2, q_3 = p_1, p_2, p_3 = t_{s+1}) \subseteq D$ tiene longitud 4, entonces $t_{s+2} \in \{q_4, q_2, q_3, p_2\}$ por ser α de longitud máxima y D una gráfica simple. Sabemos que $0 \leq s \leq 2$, de lo cual se sigue que $2 \leq s + 2 \leq 4$ así $t_{s+2} \neq t_s$ y $t_s = q_4$ (esto por las condiciones 2 y 3) entonces $t_{s+2} \neq q_4$. Ahora, $q_2 = p_4$ por hipótesis, y por la condición 3 se sigue que $q_2 \notin V(T)$ entonces $t_{s+2} \neq q_2$. Afirmamos $t_{s+2} \neq p_2$ ya que $(p_2, t_{s+1}) = (p_2, p_3) \in A(D)$ y D es una gráfica orientada (es decir $(p_3, p_2) \notin A(D)$). Por lo tanto $t_{s+2} = q_3 = p_1$. Dado que $p_4 \notin V(T)$, se sigue que

$$(t_0, \ldots, t_s, t_{s+1} = p_3, p_4 = q_2, q_3 = t_{s+2}, \ldots t_4)$$

es una trayectoria de longitud 5, lo que es una contradicción.

Caso II. $q_3 = p_2$ y $t_{s+1} = p_1$.

De la condiciones 3, 6 y de la hipótesis $q_2 = p_4$ se tiene que $t_{s+1} = q_1$. Luego, $(t_0, \ldots t_s, t_{s+1} = q_1, q_2)$ es una trayectoria en D por que $q_2 \notin V(T)$ y así $s \leq 2$. T es una trayectoria de longitud máxima por hipótesis, así la longitud de T es 4, de esto se sigue que existe $z \in V(D)$ tal que $z = t_{s+2}$, entonces $(p_3, p_4 = q_2, q_3, q_4 = t_s, t_{s+1})$ es una trayectoria en D de longitud máxima y D es una gráfica simple, de lo cual se sigue que $t_{s+2} \in \{p_3, p_4, q_3, q_4\}$. Sabemos que $0 \leq s \leq 2$, de lo cual se sigue que $2 \leq s + 2 \leq 4$ así $t_{s+2} \neq t_s$ y $t_s = q_4$ (esto por las condiciones 2 y 3) entonces $t_{s+2} \neq q_4$. Además $t_{s+2} \neq p_4$ ya que $p_4 \notin V(T)$, y $t_{s+2} \neq q_3$, de lo contrario $(t_0, \ldots, t_s, t_{s+1} = q_1, q_2 = p_4, q_3 = t_{s+2}, \ldots, t_4)$ sería una trayectoria en D de longitud 5, lo que es una contradicción. Así $t_{s+2} = p_3$, pero

$$(p_0, p_1 = t_{s+1}, t_{s+2} = p_3, p_4 = q_2, q_3 = p_2, q_4 = t_s)$$

es una trayectoria en D de longitud 5, lo que contradice a que la longitud máxima de una trayectoria en D es 4.

De aqui se sigue el resultado. $\square$

5 Cuello, grado mínimo y transversales de trayectorias de longitud máxima

En este capítulo nos centraremos en probar los siguientes dos teoremas, que aparecen en [GSGMB10].

Teorema 5.0.4. *Sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica con $\delta(D) \geq 2$ y sea k la longitud de la trayectoria de longitud máxima en D con $k \geq 5$. Si*

$$k \leq max\left\{\frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4, C(D) + 2\delta(D) - 6\right\}$$

entonces cualquier conjunto independiente maximal intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima.

Teorema 5.0.5. *Sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica con $\delta(D) \geq 2$ y $C(D) \geq 3$; y sea $k \geq 1$ la longitud de la trayectoria de longitud máxima en D. Si*

$$k \leq 2\delta(D) + 1,$$

entonces cualquier conjunto independiente maximal intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima.

Para esto necesitaremos de algunos lemas, definiciones y observaciones que enunciamos a continuación. Primero notemos que por el Lema 2.3.3 es claro que las gráficas cíclicas son las de interés para este capítulo. Si $\delta(D) \geq 2$, dada una trayectoria de longitud máxima $P(x_0, \ldots x_k)$ denotaremos al primer y a los dos últimos subíndices de los vértices de $N^-(x_0)$ en P de la siguiente manera:

$$m_{0,P}^{-} = min\{i|x_i \in N^{-}(x_0)\}$$

$$M_{0,P}^{-} = max\{i|x_i \in N^{-}(x_0)\}$$

$$\widehat{M}_{0,P}^{-} = max\{i < M_{0,P}^{-}|x_i \in N^{-}(x_0)\}$$

y también denotaremos al último y a los primeros dos subíndices de vértices de $N^{+}(x_k)$ en P, como sigue

$$M_{k,P}^{+} = max\{i|x_i \in N^{+}(x_k)\}$$

$$m_{k,P}^{+} = min\{i|x_i \in N^{+}(x_k)\}$$

$$\widehat{m}_{k,P}^{+} = min\{i > m_{k,P}^{+}|x_i \in N^{+}(x_k)\}$$

(podremos omitir el subíndice P si la trayectoria es clara en el contexto). Observemos que si solo

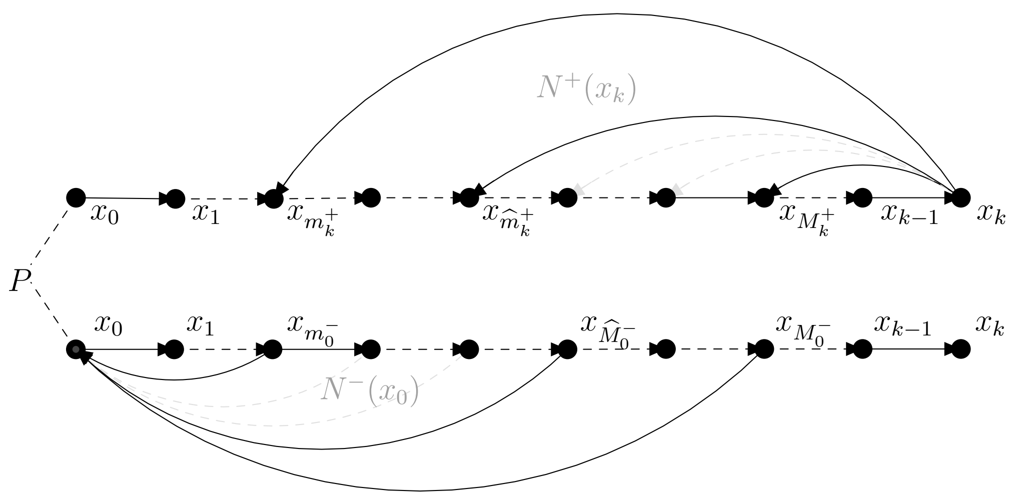

Figura 5.0.1: Distinguimos los elementos de $N^{-}(x_0)$ y $N^{+}(x_k)$.

sabemos que $\delta(D) \geq 1$, entonces $\widehat{M}_{0,P}^{-}$ y $\widehat{m}_{k,P}^{+}$ serán definidas solo sí $d^{-}(x_0) \geq 2$ y $d^{+}(x_k) \geq 2$ respectivamente.

Sean dos enteros i, j tales que $0 \leq i \leq j \leq k$. Entonces sean

$$p_0[i,j] = |\{x_r \in N^{-}(x_0) | i \leq r \leq j\}|$$

y

$$p_k[i,j] = |\{x_r \in N^{+}(x_k) | i \leq r \leq j\}|.$$

Lema 5.0.2. *Sea D una digráfica con $\delta(D) \geq 2$ y sea $P = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D. Entonces $\widehat{M}_0^{-} - \widehat{m}_k^{+} \geq 2(C(D) + \delta(D) - 3) - k$.*

Demostración. Dado que $\delta(D) \geq 2$ podemos afirmar la existencia en D del ciclo

$$\gamma = (x_0, \ldots, x_{m_0^{-}-1}, x_{m_0^{-}}, x_0),$$

dado que $P = (x_0, \ldots, x_k)$ y, por como definimos a m_0^{-}, $\overrightarrow{x_{m_0^{-}} x_0} \in A(D)$. Nótese que la longitud de γ es $m_0^{-} + 1$ (pues empezamos en 0 la cuenta de los subíndices de los vértices). De lo anterior se sigue que $m_0^{-} + 1 \geq C(D)$ (por definición de cuello de una digráfica), es decir, $m_0^{-} \geq C(D) - 1$. Por otro lado sabemos que el número de vértices que hay entre $x_{m_0^{-}}$ y $x_{\widehat{M}_0^{-}}$ son al menos todos los invecinos de x_0 menos $x_{m_0^{-}}$ y $x_{\widehat{M}_0^{-}}$, es decir,

$$\widehat{M}_0^{-} - m_0^{-} \geq \delta(D) - 2,$$

entonces

$$\widehat{M}_0^{-} \geq m_0^{-} + \delta(D) - 2.$$

Por lo tanto

$$\widehat{M}_0^{-} \geq C(D) + \delta(D) - 3.$$

Ahora veamos que $\widehat{m}_k^{+} \leq k - (C(D) + \delta(D) - 3)$. Afirmamos que el ciclo $\gamma' = (x_{M_k^{+}}, \ldots, x_k, x_{M_k^{+}})$ esta en D, ésto por que $P = (x_0, \ldots, x_k)$ y $\overrightarrow{x_k x_{M_k^{+}}} \in A(D)$, y sabemos que la longitud de γ' es $k - M_k^{+} + 1$. Así $k - M_k^{+} + 1 \geq C(D)$ es decir, $M_k^{+} \leq k - (C(D) - 1)$. Por otra parte sabemos que el número de vértices entre $x_{\widehat{m}_k^+}$ y $x_{M_k^+}$ son al menos todos los exvecinos de x_k menos $x_{\widehat{m}_k^+}$ y $x_{M_k^+}$, esto es,

$$M_k^+ - \widehat{m}_k^+ \geq \delta(D) - 2,$$

así

$$-\widehat{m}_k^+ \geq \delta(D) - 2 - M_k^+ \geq \delta(D) - 2 - k + C(D) - 1$$

de lo cual se sigue que

$$\widehat{m}_k^+ \leq k - (C(D) + \delta(D) - 3).$$

Entonces

$$\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ \geq C(D) + \delta(D) - 3 - (k - (C(D) + \delta(D) - 3))$$

por lo tanto

$$\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ \geq 2(C(D) + \delta(D) - 3) - k.$$

□

En lo que sigue, sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica (no necesariamente con $\delta(D) \geq 2$), sea $P = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D y supongamos que existe un conjunto independiente maximal $I \subseteq V(D)$ tal que $V(P) \cap I = \emptyset$

Lema 5.0.3. *Supongamos que existen $s > r$ tal que $\overrightarrow{x_s x_0} \in A(D)$ y $\overrightarrow{x_k x_r} \in A(D)$. Entonces*

$$s - r \geq p_0[r, s-2] + p_k[r+2, s] + 1.$$

Demostración. Supongamos que para alguna i, con $r \leq i \leq s-2$, tenemos que $\overrightarrow{x_i x_0} \in A(D)$ y $\overrightarrow{x_k x_{i+2}} \in A(D)$. Entonces

$$P' = (x_{i+1}, \ldots, x_k, x_r, \ldots, x_i, x_0, \ldots, x_{r-1})$$

y

$$P'' = (x_{s+1}, \ldots, x_k, x_{i+2}, \ldots, x_s, x_0, \ldots, x_{i+1})$$

son ambas trayectorias de longitud máxima en D con $V(P') \cap I = V(P'') \cap I = \emptyset$ (ya que P' y P'' tienen los mismos vértices de P). Por lo cual existe $y \in I$ tal que $\overrightarrow{x_{i+1}y} \in A(D)$ o $\overrightarrow{yx_{i+1}} \in A(D)$ por ser I un conjunto independiente maximal, entonces $\overrightarrow{yx_{i+1}} \bullet P'$ o $P'' \bullet \overrightarrow{x_{i+1}y}$ son trayectorias de longitud $k+1$ en D, esto es una contradicción ya que k es la longitud máxima en D. Entonces para toda i, con $r \leq i \leq s-2$, tenemos que $\overrightarrow{x_ix_0} \notin A(D)$ o $\overrightarrow{x_kx_{i+2}} \notin A(D)$. Sea

$$A = \{x_{i+2} | x_i \in N^-(x_0) \,\&\, r \leq i \leq s-2\}$$

y

$$B = \{x_i \in N^+(x_k) | r+2 \leq i \leq s\}.$$

De lo anterior podemos concluir que $A \cap B = \emptyset$ (ya que al haber algún vértice en $A \cap B$, sería equivalente a que existiera x_i con $r \leq i \leq s-2$ tal que $\overrightarrow{x_ix_0}, \overrightarrow{x_kx_{i+2}} \in A(D)$).

Dado que A y B son subconjuntos ajenos contenidos en $\{x_{r+2}, \ldots, x_s\}$, se sigue que

$$|A| + |B| \leq s - r - 1$$

(ya que $|\{x_{r+2}, \ldots, x_s\}| = s - r - 1$). Observemos que $|A| = p_0[r, s-2]$ (pues $p_0[r, s-2]$ cuenta el número de vértices que hay en $N^-(x_0) \cap \{x_r, \ldots, x_{s-2}\}$) y $|B| = p_k[r+2, s]$(ya que $p_k[r+2, s]$ cuenta el número de vértices que hay en $N^+(x_0) \cap \{x_{r+2}, \ldots, x_s\}$) Entonces

$$s - r - 1 \geq p_0[r, s-2] + p_k[r+2, s].$$

Por lo tanto

$$s - r \geq p_0[r, s-2] + p_k[r+2, s] + 1.$$

□

Lema 5.0.4. *Si* $\delta(D) \geq 1$, *entonces* $M_0^- \leq k-2$ *y* $m_k^+ \geq 2$.

Demostración. Ya que I es maximal, entonces existe $y \in I$ tal que $\overrightarrow{yx_k} \in A(D)$ o $\overrightarrow{x_ky} \in A(D)$. Sabemos que P es de longitud máxima, entonces $\overrightarrow{x_ky} \notin A(D)$ (ya que $P \bullet \overrightarrow{x_ky}$ sería de longitud

$k+1$), así $\overrightarrow{yx_k} \in A(D)$. Primero supongamos que $\overrightarrow{x_k x_0} \in A(D)$. Así

$$(y, x_k, x_0, \ldots, x_{k-1})$$

sería una trayectoria de longitud $k+1$ pero esto es una contradicción. Ahora supongamos que $\overrightarrow{x_{k-1}x_0} \in A(D)$. Dado que $\delta(D) \geq 1$, existe $\overrightarrow{x_k x_r} \in A(D)$ para alguna $r \in \{0, \ldots, k-1\}$ (de lo contrario existiría una trayectoria de longitud mayor k). Por lo tanto

$$(y, x_k, x_r, \ldots, x_{k-1}, x_0, \ldots, x_{r-1})$$

es una trayectoria de longitud $k+1$ en D lo cual sería una contradicción. Así $\{x_k, x_{k-1}\} \cap N^-(x_0) = \emptyset$ y entonces $M_0^- \leq k-2$.

Ahora veamos que $m_k^+ \geq 2$. Por hipótesis I es maximal, así existe $y \in I$ tal que $\overrightarrow{yx_0} \in A(D)$ o $\overrightarrow{x_0 y} \in A(D)$, y sabemos que P es de longitud máxima en D, por lo cual $\overrightarrow{yx_0} \notin A(D)$, entonces $\overrightarrow{x_0 y} \in A(D)$.

Ahora supongamos que $\overrightarrow{x_k x_1} \in A(D)$. Por hipótesis $\delta(D) \geq 1$, por lo cual $\overrightarrow{x_r x_0} \in A(D)$ para algún x_r con $k \geq r \geq 1$ (si r estuviera fuera de ese rango existiría una trayectoria $\overrightarrow{x_r x_0} \bullet P$ de longitud $k+1$), pero

$$(x_{r+1}, \ldots, x_k, x_1, \ldots, x_r, x_0, y)$$

es una trayectoria de longitud $k+1$ lo cual es una contradicción. Así $\{x_0, x_1\} \cap N^+(x_k) = \emptyset$ y entonces $m_k^+ \geq 2$. $\square$

Lema 5.0.5. *Supongamos que $\delta(D) \geq 2$ y $k \leq C(D) + 2\delta(D) - 6$. Entonces $\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ \geq 2\delta(D) - 5$.*

Demostración. Por hipótesis $k \leq C(D) + 2\delta(D) - 6$ y $\delta(D) \geq 2$. Así $k < 2(C(D) + \delta(D) - 3)$ y por el Lema 5.0.2 $\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ \geq 2(C(D) + \delta(D) - 3) - k$. Entonces $\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ > 0$, es decir $\widehat{M}_0^- > \widehat{m}_k^+$ y por como definimos $\widehat{M}_0^-$ y $\widehat{m}_k^+$ tenemos que $\overrightarrow{x_{\widehat{M}_0^-} x_0}, \overrightarrow{x_k x_{\widehat{m}_k^+}} \in A(D)$. Así por el Lema 5.0.3 obtenemos que

$$\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ \geq p_o[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] + p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_0^-] + 1. \tag{5.0.1}$$

Consideraremos los siguientes dos casos.

Caso 1. $M_k^+ \leq \widehat{M}_0^-$.

Por definición, $N^+(x_k) \subseteq \{x_i | m_k^+ \leq i \leq M_k^+\}$, y si $M_k^+ \leq \widehat{M}_0^-$, entonces $p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, M_k^+] = p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_o^-]$. También podemos ver que

$$|N^+(x_k) - \{x_i | \widehat{m}_k^+ + 2 \leq i \leq M_k^+\}| \leq 3$$

y por lo cual

$$p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, M_k^+] = p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_0^-] \geq d^+(x_k) - 3 \geq \delta(D) - 3.$$

Ahora, por la Ecuación 5.0.1,

$$\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ \geq p_o[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] + \delta(D) - 2. \tag{5.0.2}$$

Caso I. $m_0^- \geq \widehat{m}_k^+$.

Vemos que

$$p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2] = p_0[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] \geq \delta(D) - 3$$

(pues los vértices con índices $M_0^-, \widehat{M}_0^-, \widehat{M}_0^- - 1$ serían, a lo mas, los únicos invecinos de x_0 con índice mayor que $\widehat{M}_0^- - 2$ y por lo cual no serían contados). Entonces, de la Ecuación 5.0.2 obtenemos que $\widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+ \geq 2\delta(D) - 5$.

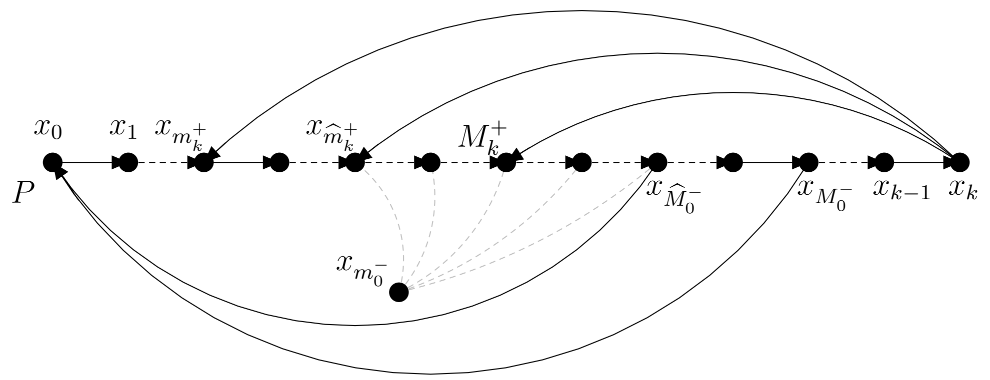

Figura 5.0.2: Localización de los distintos elementos de $N^+(x_k)$ y $N^-(x_0)$ en el *Caso I*

Caso II. $m_0^- < \widehat{m}_k^+$.

Veremos que este caso no es posible. Dado que $m_0^- < \widehat{m}_k^+$ podemos asegurar que $p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1] \geq 1$ (por que al menos contaríamos a $x_{m_0^-}$). Sabemos que $\widehat{m}_k^+ \geq C(D) + p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1] - 1$ (ya que $m_0^- \geq C(D) - 1$ y $p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1]$ cuenta el número de invecinos de x_0 entre m_0^- y $\widehat{m}_k^+ - 1$ donde hay a lo mas $\widehat{m}_k^+ - 1 - m_0^-$), por lo cual, sumando $\widehat{m}_k^+$ en Ecuación 5.0.2 de ambos lados, obtenemos:

$$\widehat{M}_0^- \geq C(D) + p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1] - 1 + p_0[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] + \delta(D) - 2.$$

Observemos que

$$\{m_0^-, \ldots, \widehat{m}_k^+ - 1\} \cup \{\widehat{m}_k^+, \ldots, \widehat{M}_0^- - 2\} = \{m_0^-, \ldots, \widehat{m}_k^+, \ldots, \widehat{M}_0^- - 2\}$$

y

$$\{m_0^-, \ldots, \widehat{m}_k^+ - 1\} \cap \{\widehat{m}_k^+, \ldots, \widehat{M}_0^- - 2\} = \emptyset.$$

Así

$$p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1] + p_0[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] = p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2]$$

entonces obtenemos que

$$\widehat{M}_0^- \geq C(D) + p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2] + \delta(D) - 3.$$

Como anteriormente, podemos observar que

$$p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2] \geq \delta(D) - 3$$

entonces

$$\widehat{M}_0^- \geq C(D) + 2\delta(D) - 6,$$

pero sabemos por el Lema 5.0.4 que $k - 2 \geq M_0^- > \widehat{M}_0^-$. Así $k - 2 > C(D) + 2\delta(D) - 6$ pero esto es una contradicción a la hipótesis $k \leq C(D) + 2\delta(D) - 6$ ya que esto implicaría que $k > C(D) + 2\delta(D) - 4 > C(D) + 2\delta(D) - 6 \geq k$.

Caso 2. $M_k^+ > \widehat{M}_0^-$.

Veremos que este caso no puede suceder. Consideremos las siguientes dos posibilidades.

Caso I. $m_0^- < \widehat{m}_k^+$.

Como anteriormente, en este caso se tiene

$$\widehat{m}_k^+ \geq C(D) + p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1] - 1.$$

Sabemos que $M_k^+ \leq k - (C(D) - 1)$, y como $M_k^+ > \widehat{M}_0^-$, se sigue que $\widehat{M}_0^- \leq k - (C(D) - 1 + p_k[\widehat{M}_0^- + 1, M_k^+])$. Así, sumando $\widehat{m}_k^+$en ambos lados de la Ecuación 5.0.1 obtenemos:

$$k - (C(D) - 1 + p_k[\widehat{M}_0^- + 1, M_k^+] \geq$$

$$C(D) + p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1] - 1 + p_o[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] + p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_0^-] + 1.$$

Como anteriormente observamos

$$p_0[m_0^-, \widehat{m}_k^+ - 1] + p_0[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] = p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2],$$

y así obtenemos:

$$k \geq C(D) + p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2] + p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_0] + C(D) - 1 + p_k[\widehat{M}_0^- + 1, M_k^+] =$$

$$2C(D) + p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2] + p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, M_k^+] - 1,$$

pero

$$p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^- - 2] \geq \delta(D) - 3$$

y

$$p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, M_k^+] \geq \delta(D) - 3,$$

entonces

$$k \geq 2C(D) + 2\delta(D) - 7$$

lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis $k \leq C(D) + 2\delta(D) - 6$ y como $C(D) \geq 2$ entonces $k \geq 2C(D) + 2\delta(D) - 7 > C(D) + 2\delta(D) - 6 \geq k$.

Caso II. $m_0^- \geq \widehat{m}_k^+$.

En este caso vemos que $p_0[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] = p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^-] \geq \delta(D) - 3$ como observamos anteriormente. Por otro lado como $M_k^+ > \widehat{M}_0^-$ sabemos que $p_k[\widehat{M}_0^-, M_k^+] \geq 1$ por que al menos contamos a $x_{\widehat{M}_0^-}$. Y entonces se sigue que $\widehat{M}_0^- \leq k - (C(D) + p_k[\widehat{M}_0^-, M_k^+] - 1)$. Ahora restando $\widehat{M}_0^-$ de ambos lados en Ecuación 5.0.1, obtenemos que:

$$-\widehat{m}_k^+ \geq p_o[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] + p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_0^-] + 1 - \widehat{M}_0^- \geq$$

$$p_o[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] + p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_0^-] - k + C(D) + p_k[\widehat{M}_0^-, M_k^+].$$

Sabemos que $p_0[\widehat{m}_k^+, \widehat{M}_0^- - 2] = p_0[m_0^-, \widehat{M}_0^-] \geq \delta(D) - 3$ y $p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, \widehat{M}_0^-] + p_k[\widehat{M}_0^-, M_k^+] = p_k[\widehat{m}_k^+ + 2, M_k^+] \geq \delta(D) - 3$, así obtenemos

$$-\widehat{m}_k^+ \geq C(D) + 2\delta(D) - 6 - k.$$

Entonces $k \geq C(D) + 2\delta(D) - 6 + \widehat{m}_k^+ \geq C(D) + 2\delta(D) - 4$ ya que $\widehat{m}_k^+ \geq 2$ por el Lema 5.0.4, pero esto es una contradicción pues por hipótesis $k \leq C(D) + 2\delta(D) - 6$ así $k \geq C(D) + 2\delta(D) - 4 > C(D) + 2\delta(D) - 6 \geq k$.

□

5.1. Demostración de los teoremas.

Teorema 4.1.1 *Sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica con $\delta(D) \geq 2$ y sea k la longitud de la trayectoria de longitud máxima en D con $k \geq 5$. Si*

$$k \leq max\left\{\frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4, C(D) + 2\delta(D) - 6\right\}$$

entonces cualquier conjunto independiente maximal intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima.

Demostración. Por hipótesis tenemos que

$$k \leq max\left\{\frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4, C(D) + 2\delta(D) - 6\right\}.$$

Afirmamos que esto implica que

$$k < 2C(D) + 2\delta(D) - 6.$$

En efecto, sí $\frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4 \leq C(D) + 2\delta(D) - 6$ entonces $k \leq C(D) + 2\delta(D) - 6 < 2C(D) + 2\delta(D) - 6$ (ya que $\delta(D) \geq 2$ implica que $C(D) > 0$); en otro caso tenemos que $k \leq \frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4 < 2C(D) + 2\delta(D) - 6$ (ya que $\frac{C(D)}{2} + \delta(D) > 2$). Así del Lema 5.0.2 se sigue que para cualquier $P = (x_0, \ldots, x_k)$ trayectoria de longitud máxima en D, tenemos que $\widehat{M}^-_{0,P} > \widehat{m}^+_{k,P}$. Sea $\mathcal{I} \subseteq V(D)$ un conjunto independiente maximal y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las P trayectorias de longitud máxima en D tales que $V(P) \cap \mathcal{I} = \emptyset$. Veamos que llegaremos a una contradicción suponiendo que$\mathcal{F}$ es no vacio.

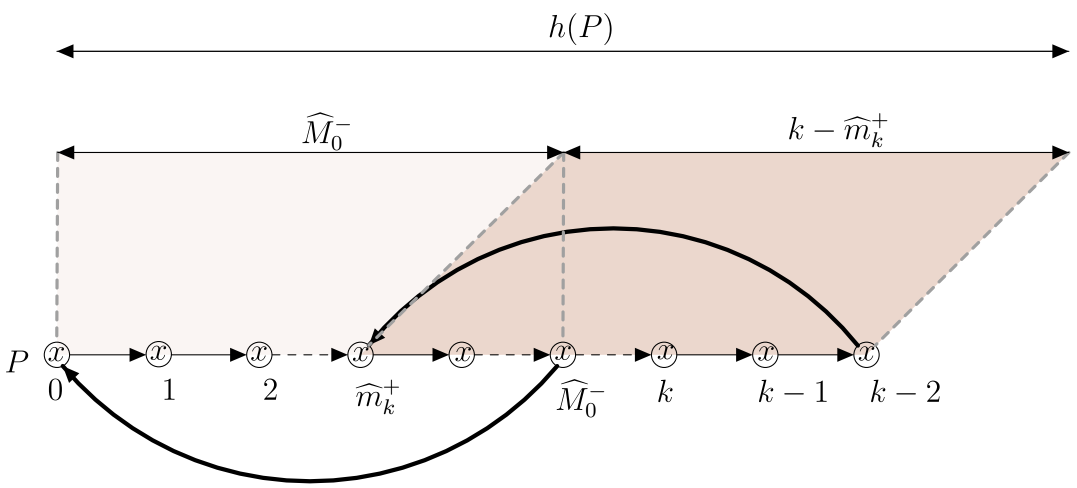

Figura 5.1.1: Tomemos $P \in \mathcal{F}$ tal que el valor de $h(P)$ es mínimo.

Para cada $P \in \mathcal{F}$, definimos $h(P) = \widehat{M}^-_{0,P} + k - \widehat{m}^+_{k.P}$. Tomemos P tal que $h(P) = min\{h(Q) | Q \in \mathcal{F}\}$(ver

Figura 5.1.1).

Sean $s = \widehat{M}^-_{0,P}$, $r = \widehat{m}^+_{k,P}$, $M^-_{0,P} = s + n$ con $n \geq 1$ y $m^+_{k,P} = r - m$ con $m \geq 1$. Sabemos que $s > r$, asi podemos observar que

$$P' = (x_{s+1}, \dots, x_{s+n}, \dots, x_k, \dots, x_s, x_0, \dots, x_{r-m}, \dots, x_{r-1}) = (y_0, \dots, y_k)$$

es una trayectoria de longitud máxima en D tal que $V(P') \cap \mathcal{I} = \emptyset$. Por lo cual $P' \in \mathcal{F}$ y $h(P') \geq h(P)$. Notemos que $y_0 = x_{s+1}$, $y_{k-s-1} = x_k$, $y_{k-s} = x_r$, $y_{k-r} = x_s$, $y_{k-r+1} = x_0$ y $y_k = x_{r-1}$. Sean $p = k-m+1$ y $q = n - 1$ de modo que $y_p = x_{r-m}$ y $y_q = x_{s+n}$ (ver Figura 5.1.2)

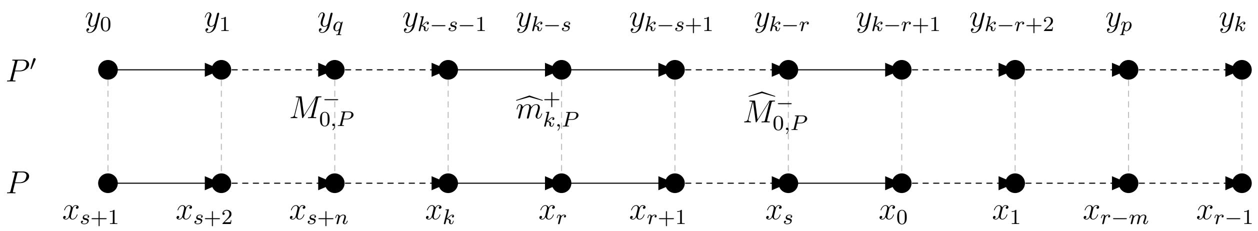

Figura 5.1.2: Correspondencia de los indices de P con P'

Sabemos que $M^-_{0.P'} \geq \widehat{M}_{0,P'} + 1$ y $m^+_{k,P'} \geq \widehat{m}^+_{k,P'} + 1$, así $M^-_{0.P'} + k - m^+_{k,P'} \geq h(P') + 2$ y como $h(P') \geq h(P)$, se sigue que

$$M^-_{0,P'} + k - m^+_{k,P'} \geq \widehat{M}_{0,P} + k - \widehat{m}^+_{k.P} + 2$$

Por la Observacion 2.3.4 vemos que $M^-_{0,P'} \geq k - \widehat{m}^+_{k.P} + 1$ o $k - m^+_{k,P'} \geq \widehat{M}_{0,P} + 1$.

Caso 1. $M^-_{0,P'} \geq k - \widehat{m}^+_{k.P} + 1 = k - r + 1$.

Sea $M^-_{0,P'} = k - r + l$ con $l \geq 1$ y consideremos las siguientes trayectorias que son sub-

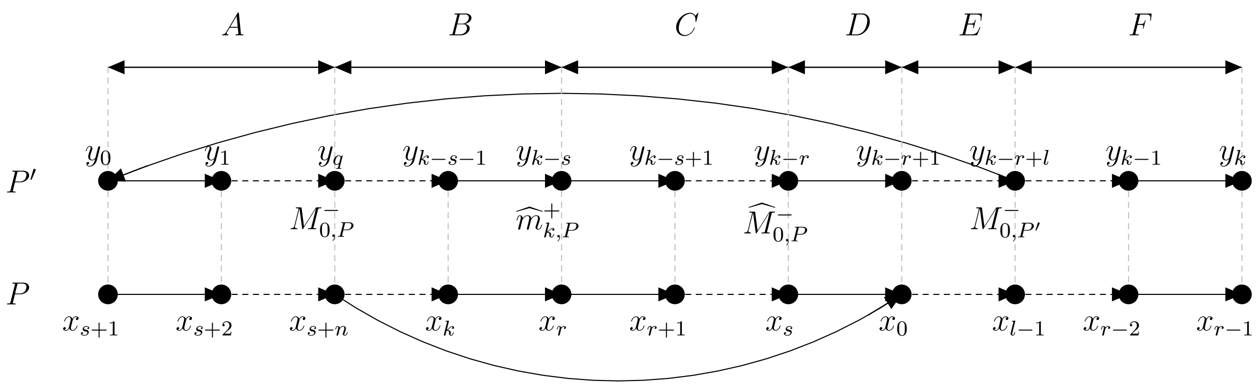

Figura 5.1.3: Partición de P' en el *Caso* 1.

trayectorias de P' disjuntas en aristas (ver Figura 5.1.3):

$$A = (y_0, \dots, y_q) \quad B = (y_q, \dots, y_{k-s}) \quad C = (y_{k-s}, \dots, y_{k-r})$$

$$D = (y_{k-r}, \dots, y_{k-r+1}) \quad E = (y_{k-r+1}, \dots, y_{k-r+l}) \quad F = (y_{k-r+l}, \dots, y_k)$$

Primero observemos que $A \bullet \overrightarrow{y_q y_{k-r+1}} \bullet E \bullet \overrightarrow{y_{k-r+l} y_0}$ es un ciclo dirigido, entonces

$$\ell(A) + \ell(E) + 2 \geq C(D). \tag{5.1.1}$$

Además, ya que $B = (y_q, \dots, y_{k-s}) = (x_{s+n}, \dots, x_k, x_r)$, se sigue que $\ell(B) = k+1-s-n = k+1-M^-_{0,P}$, que por el Lema 5.0.4, implica que $\ell(B) \geq 3$ (pues $-M^-_{0,P} \geq -k+2$). Por otro lado, $\ell(F) = k-(k-r+l) = k - M^-_{0,P'}$ y nuevamente por el Lema 5.0.4 $\ell(F) \geq 2$ (ya que $-M^-_{0,P'} \geq -k+2$). Así

$$\ell(B) + \ell(D) + \ell(F) \geq 6 \tag{5.1.2}$$

pues $\ell(D) = 1$. Por otro lado,

$$\ell(A) + \ell(B) + \ell(C) = k - r \text{ y } \ell(C) + \ell(D) + \ell(E) + \ell(F) = s. \tag{5.1.3}$$

Por la Ecuación 5.1.1 y la Ecuación 5.1.3 podemos ver que

$$2\ell(A) + \ell(B) + 2\ell(C) + \ell(D) + 2\ell(E) + \ell(F) + 2 \geq C(D) + k - r + s$$

y como $\ell(A) + \ell(B) + \ell(C) + \ell(D) + \ell(E) + \ell(F) = k$,

$$2k - \ell(B) - \ell(D) - \ell(F) + 2 \geq C(D) + k - r + s$$

así

$$k \geq C(D) + \ell(B) + \ell(D) + \ell(F) + s - r - 2$$

y por la Ecuación 5.1.2 obtenemos que

$$k \geq C(D) + 6 + s - r - 2 = C(D) + 4 + \widehat{M}_{0,P}^{-} - \widehat{m}_{k,P}^{+}.$$

Por lo tanto, por el Lema 5.0.2 tenemos que

$$k \geq C(D) + 4 + 2(C(D) + \delta(D) - 3) - k$$

y en consecuencia

$$2k \geq 3C(D) + 2\delta(D) - 2.$$

Es decir

$$k \geq \frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 1 > \frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4,$$

y como $k \leq max\left\{\frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4, C(D) + 2\delta(D) - 6\right\}$, se sigue que $k \leq C(D) + 2\delta(D) - 6$. Entonces del Lema 5.0.5 obtenemos que

$$\widehat{M}_{0,P}^{-} - \widehat{m}_{k,P}^{+} \geq 2\delta(D) - 5$$

pero sabemos que

$$k \geq C(D) + 4 + \widehat{M}_0^- - \widehat{m}_k^+$$

así

$$k \geq C(D) + 4 + 2\delta(D) - 5 = C(D) + 2\delta(D) - 1$$

pero eso es una contradicción (pues $C(D) + 2\delta(D) - 1 > C(D) + 2\delta(D) - 6$).

Caso 2. $K - m_{k,P'}^+ \geq \widehat{M}_{0,P}^- + 1 = s + 1$.

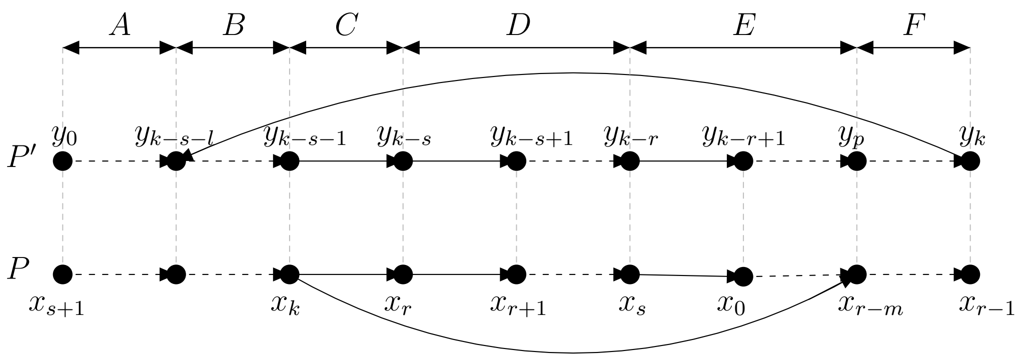

Figura 5.1.4: Partición de P' en el caso 2.

Sea $m_{k,P'}^+ = k - s - l$ con $l \geq 1$ y consideremos las siguientes subtrayectorias P' disjuntas en aristas (ver Figura 5.1.4)

$$A = (y_0, \ldots, y_{k-s-l}) \quad B = (y_{k-s-l}, \ldots, y_{k-s-1}) \quad C = (y_{k-s-l}, \ldots, y_{k-s})$$

$$D = (y_{k-s}, y_{k-r}) \quad E = (y_{k-r}, \ldots, y_p) \quad F = (y_p, \ldots, y_k)$$

Observemos que $F \bullet \overrightarrow{y_k y_{k-s+l}} \bullet B \bullet \overrightarrow{y_{k-s-1} y_p}$ es un ciclo, así

$$\ell(B) + \ell(F) + 2 \geq C(D). \tag{5.1.4}$$

Además, ya que $E = (y_{k-r}, \ldots, y_p) = (x_s, x_0 \ldots, x_{r-m})$ se sigue que $\ell(E) = r - m + 1 = m^+_{k,P} + 1$, y utilizando el Lema 5.0.4, tenemos que $\ell(E) \geq 3$ (pues $m^+_{k,P} \geq 2$). Por otro lado, por el Lema 5.0.4, $\ell(A) = k - s - l = m^+_{k,P'} \geq 2$ así

$$\ell(A) + \ell(C) + \ell(E) \geq 6 \tag{5.1.5}$$

ya que $\ell(C) = 1$. Por otro lado,

$$\ell(D) + \ell(E) + \ell(F) = s \text{ y } \ell(A) + \ell(B) + \ell(C) + \ell(D) = k - r. \tag{5.1.6}$$

Por la Ecuación 5.1.4 y la Ecuación 5.1.6 observamos que

$$\ell(A) + 2\ell(B) + \ell(C) + 2\ell(D) + \ell(E) + 2\ell(F) + 2 \geq C(D) + k - r + s$$

y como $\ell(A) + \ell(B) + \ell(C) + \ell(D) + \ell(E) + \ell(F) = k$ obtenemos

$$2k - \ell(A) - \ell(C) - \ell(E) + 2 \geq C(D) + k + s - r$$

y entonces

$$k \geq C(D) + \ell(A) + \ell(C) + \ell(E) + s - r - 2$$

y por la Ecuación 5.1.5 obtenemos que

$$k \geq C(D) + 6 + s - r - 2 = C(D) + 4 + \widehat{M}^-_{0,P} - \widehat{m}^+_{k,P}.$$

Por lo tanto, por el Lema 5.0.2 tenemos que

$$k \geq C(D) + 4 + 2(C(D) + \delta(D) - 3) - k$$

y en consecuencia

$$2k \geq 3C(D) + 2\delta(D) - 2,$$

es decir

$$k \geq \frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 1 > \frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4.$$

Como $k \leq max\left\{\frac{3C(D)}{2} + \delta(D) - 4, C(D) + 2\delta(D) - 6\right\}$, se sigue que $k \leq C(D)+2\delta(D)-6$. Entonces del Lema 5.0.5 obtenemos que

$$\widehat{M}_{0,P}^{-} - \widehat{m}_{k,P}^{+} \geq 2\delta(D) - 5$$

pero sabemos que

$$k \geq C(D) + 4 + \widehat{M}_{0}^{-} - \widehat{m}_{k}^{+}$$

así

$$k \geq C(D) + 4 + 2\delta(D) - 5 = C(D) + 2\delta(D) - 1$$

pero eso es una contradicción (pues $C(D) + 2\delta(D) - 1 > C(D) + 2\delta(D) - 6$).

□

Observación 5.1.1. La suposición $\delta(D) \geq 2$ en el teorema anterior se puede debilitar pidiendo la condición de mínima valencia 2 para los vértices iniciales y terminales de las trayectorias de longitud máxima (invalencia al menos dos para vétices terminales y exvalencia al menos dos para vértices terminales).

Teorema 4.1.2 *Sea $D = (V(D), A(D))$ una digráfica con $\delta(D) \geq 2$ y $C(D) \geq 3$; y sea $k \geq 1$ la longitud de la trayectoria de longitud máxima en D. Si*

$$k \leq 2\delta(D) + 1,$$

entonces cualquier conjunto independiente maximal intersecta a cualquier trayectoria de longitud máxima.

Demostración. Sea $P = (x_0, \ldots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en D y supongamos que existe un conjunto independiente maximal $\mathcal{I}$ que no intersecta a P, es decir, $\mathcal{I} \cap V(P) = \emptyset$. Analizaremos los siguientes dos casos.

Caso 1. No existe una $j \leq k$ tal que $x_j \in N^-(x_0)$ y $x_{j+1} \in N^+(x_k)$.

Por el Lema 5.0.4 sabemos que $M_0^- \leq k - 2$ y $m_k^+ \geq 2$, de esto se sigue que:

$$N^-(x_0) \subseteq \{x_0, \ldots, x_{k-2}\}$$

y

$$N^+(x_k) \subseteq \{x_2, \ldots, x_{k-2}\}.$$

Sea $A = \{x_{i+1} | x_i \in N^-(x_0)\} \subseteq \{x_3, \ldots, x_{k-1}\}$. Por hipótesis sabemos que no hay $j \leq k$ tal que $x_j \in N^-(x_0)$ y $x_{j+1} \in N^+(x_k)$, por lo cual $A \cap N^+(x_k) = \emptyset$, y observemos que

$$\{\{A \setminus \{x_{k-1}\}\} \cup \{N^+(x_0) \setminus \{x_2\}\}\} \subseteq \{x_3, \ldots, x_{k-2}\}$$

entonces

$$|A \setminus \{x_{k-1}\}| + |N^+(x_k) \setminus \{x_2\}| \leq k - 4.$$

Por otro lado

$$|N^+(x_k) \setminus \{x_2\}| = |N^+(x_k)| - |N^+(x_k) \cap \{x_2\}| \geq \delta(D) - |N^+(x_k) \cap \{x_2\}|$$

y

$$|A \setminus \{x_{k-1}\}| = |A| - |N^-(x_0) \cap \{x_{k-2}\}| = d^-(x_0) - |N^-(x_0) \cap \{x_{k-2}\}| \geq \delta(D) - |N^-(x_0) \cap \{x_{k-2}\}|$$

de esto se sigue que

$$k - 4 \geq 2\delta(D) - |N^-(x_0) \cap \{x_{k-2}\}| - |N^+(x_k) \cap \{x_2\}| \geq 2\delta(D) - 2$$

así

$$k \geq 2\delta(D) + 2$$

lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $k \leq 2\delta(D) + 1$

Caso 2. Existe una $j \leq k$ tal que $x_j \in N^-(x_0)$ y $x_{j+1} \in N^+(x_k)$.

Sabemos que existe $z \in \mathcal{I}$ tal que $\overrightarrow{zx_0} \in A(D)$ o $\overrightarrow{x_0z} \in A(D)$ por que $\mathcal{I}$ es independiente maximal. Como P es trayectoria de longitud máxima, $\overrightarrow{x_0z} \in A(D)$. De la misma manera podemos observar que existe $z' \in A(D)$ tal que $\overrightarrow{z'x_k} \in A(D)$.

Sea $P_0 = (y_0, \ldots, y_t)$ una trayectoria en D tal que $V(P) \cap V(P_0) = y_0 = x_0$ y con t máxima, es decir P_0 es la trayectoria internamente ajena con P mas grande que hay y sabemos que $t \geq 1$ ya que $\overrightarrow{x_0 z} \in A(D)$. De la misma manera, sea $P_k = (w_0, \ldots, w_q)$ una trayectoria en D tal que $V(P) \cap V(P_k) = x_k = w_q$ y con q máxima ($q \geq 1$ pues $\overrightarrow{x_0 z} \in A(D)$) .

Afirmación 5.1.1. $N^+(y_t) \cap \{x_0, \ldots, x_t\} = \emptyset$ y $N^-(w_0) \cap \{x_{k-q}, \ldots, x_k\} = \emptyset$.

Observemos que si existe $x_j \in N^+(y_t) \cap \{x_0, \ldots, x_t\}$ con $j \leq t$,

$$P' = P_0 \bullet (x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k)$$

sería una trayectoria en D pero

$$\ell(P') = \ell(P_0) + 1 + \ell((x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k))$$

$$= t + 1 + k - j \geq t + 1 + k - t = k + 1$$

pero esto es una contradicción ya que k es la longitud máxima en D. Ahora si existiera $x_j \in N^-(w_0) \cap \{x_{k-q}, \ldots, x_k\}$ con $j \geq k - q$, entonces $P' = (x_0, \ldots, x_j) \bullet P_k$ sería una trayectoria en D pero

$$\ell(P') = \ell((x_0, \ldots, x_j)) + 1 + \ell(P_k) = j + 1 + q \geq k - q + 1 + q = k + 1$$

lo cual es una contradicción. Así queda probada la afirmación.

Ahora, sean $r = min\{i | x_i \in N^-(x_0)$ y $x_{i+1} \in N^+(x_k)\}$ y $s = max\{i | x_i \in N^-(x_0)$ y $x_{i+1} \in N^+(x_k)\}$ (r y s no necesariamente son distintas).

Afirmación 5.1.2. $N^+(y_t) \cap \{x_{r+1}, \ldots, x_k\} = \emptyset$ y $N^-(w_0) \cap \{x_0, \ldots, x_s\} = \emptyset$.

Supongamos que existe $x_j \in N^-(y_t) \cap \{x_{r+1}, \ldots, x_k\}$, por lo cual la trayectoria

$$P' = (x_1, \ldots, x_r, x_0 = y_0, \ldots, y_t, x_j, \ldots, x_k, x_{r+1}, \ldots, x_{j-1})$$

estaría en D y

$$\ell(P') = \ell(x_1, \ldots, x_r) + 1 + \ell(y_0, \ldots, y_t) + 1 + \ell(x_j, \ldots, x_k) + 1 + \ell(x_{r+1}, \ldots, x_{j-1})$$

$$= r - 1 + 1 + t + 1 + k - j + 1 + j - 1 - r - 1 = k + t \geq k + 1$$

lo cual es una contradicción (en el caso de $j = r + 1$ en P' no se toma en cuenta la parte de $(x_{r+1}, \ldots, x_{j-1})$ por que P' dejaría de ser trayectoria en D). Ahora supongamos que $x_j \in N^-(w_0) \cap \{x_0, \ldots, x_s\}$, así la trayectoria

$$P' = (x_{j+1}, \ldots, x_s, x_0, \ldots, x_j, w_0, \ldots, w_q = x_k, x_{s+1}, \ldots, x_{k-1})$$

estaría en D pero

$$\ell(P') = \ell(x_{j+1}, \ldots, x_s) + 1 + \ell(x_0, \ldots, x_j) + 1 + \ell(w_0, \ldots, w_q) + 1 + \ell(x_{s+1}, \ldots, x_{k-1})$$

$$= s - j - 1 + 1 + j + 1 + q + 1 + k - 1 - s - 1 = k + q \geq k + 1$$

lo cual es una contradicción.

Afirmación 5.1.3. $max\{t, q\} \leq \delta(D)$.

Sea $P' = (x_1, \ldots, x_{M^-_{0,P}}, x_0 = y_0, \ldots, y_t)$. Sabemos que

$$\ell(P') = \ell(x_1, \ldots, x_{M^-_{0,P}}) + 1 + \ell(y_0, \ldots, y_t) \leq k$$

y

$$M^-_{0,P} \geq C(D) + \delta(D) - 2 \geq \delta(D) - 1$$

ya que por hipótesis $C(D) \geq 3$, de esto se sigue que

$$2\delta(D) + 1 \geq k \geq t + M^-_{0,P} \geq C(D) + \delta(D) - 2 + t \geq \delta(D) + 1 + t$$

así

$$\delta(D) \geq t.$$

Por otro lado, sea $P' = (w_0, \ldots, w_q = x_k, x_{m^+_{k,P}}, \ldots, x_{k-1})$. Sabemos que

$$\ell(P') = \ell(P_k) + 1 + \ell(x_{m^+_{k,P}}, \ldots, x_{k-1}) \leq k$$

y

$$m^+_{k,P} \leq k - (C(D) + \delta(D) - 2) \leq k - (\delta(D) + 1)$$

esto último por que $C(D) \geq 3$. De esto se sigue que

$$2\delta(D) + 1 \geq k \geq q + 1 + k - 1 - m^+_{k,P} \geq q + k - k + \delta(D) + 1$$

así

$$\delta(D) \geq q$$

por lo tanto $\delta(D) \geq max\{t, q\}$.

Afirmación 5.1.4. $|V(P) \cap N^+(y_t)| \geq min\{\delta(D), \delta(D) - t + 2\} \geq 2$ y $|V(P) \cap N^-(w_0)| \geq min\{\delta(D), \delta(D) - q + 2\} \geq 2$.

Dado que t es máximo, se sigue que

$$N^+(y_t) \subseteq V(P) \cup V(P_0)$$

y sabemos que $x_0 = y_0, y_{t-1}, y_t \notin N^+(y_t)$ ya que si $x_0 \in N^+(y_t)$ la trayectoria $P' = (y_1, \ldots, y_t) \bullet P$ sería una trayectoria en D con longitud mayor a k lo cual es una contradicción y si $y_{t-1}, y_t \in N^+(y_t)$, $C(D) < 3$ pero eso contradice la hipótesis de $C(D) \geq 3$. Así $|N^+(y_t) \cap V(P_0)| \leq t - 2$. De la Afirmación 5.1.3 tenemos que $\delta(D) - t \geq 0$, de lo cual se sigue que $\delta(D) - t + 2 \geq 2$, y entonces

$$|N^+(y_t) \cap V(P)| = |(N^+(y_t) \setminus (N^+(y_t) \cap V(P_0))| \geq$$

$$|N^+(y_t)| - |N^+(y_t) \cap V(P_0)| \geq \begin{cases} \delta(D) - t + 2 & \text{si } t \geq 2 \\ \delta(D) & \text{si } t = 1 \end{cases} \geq min\{\delta(D), \delta(D) - t + 2\} \geq 2.$$

Como q es máximo, entonces $N^-(w_0) \subseteq V(P_0) \cup V(P)$ y vemos que $x_k = w_q, w_0, w_1 \notin N^-(w_0)$, de lo contrario si $x_k \in N^-(w_0)$, $P' = (x_0, \dots, x_k, w_0, \dots w_{q-1})$ sería una trayectoria en D, o si $w_0, w_1 \in N^-(w_0)$ se seguiría que $C(D) < 3$, lo cual es una contradicción a $C(D) \geq 3$. Así $|N^-(w_0) \cap V(p_0)| \leq q-2$. De la Afirmación 5.1.3 se sigue que $\delta(D) - q \geq 0$, así $\delta(D) - q + 2 \geq 2$, luego

$$|N^-(w_0) \cap V(P)| = |N^-(w_0) \setminus (N^-(w_0) \cap V(P_0))| \geq$$

$$|N^-(w_0)| - |N^-(w_0) \cap V(P_0)| \geq \begin{cases} \delta(D) - q + 2 & \text{si } t \geq 2 \\ \delta(D) & \text{si } t = 1 \end{cases} \geq min\{\delta(D), \delta(D) - q + 2\} \geq 2.$$

De esta forma, la Afirmación 5.1.4 queda demostrada.

De la Afirmación 5.1.1 y la Afirmación 5.1.2 podemos observar que

$$V(P) \cap N^+(y_t) \subseteq \{x_{t+1}, \dots, x_r\}$$

y que

$$V(P) \cap N^-(w_0) \subseteq \{x_{s+1}, \dots, x_{k-q-1}\},$$

es decir,

$$|V(P) \cap N^+(y_t)| \leq r + 1 - (t + 1) = r - t$$

y

$$|V(P) \cap N^-(w_0)| \leq k - q - 1 + 1 - (s + 1) = k - q - (s + 1),$$

así de lo anterior y la Afirmación 5.1.4 tenemos que $r - t \geq min\{\delta(D), \delta(D) - t + 2\}$ y $k - q - (s + 1) \geq min\{\delta(D), \delta(D) - q + 2\}$, es decir,

$$r \geq min\{\delta(D), \delta(D) - t + 2\} + t$$

y

$$k \geq min\{\delta(D), \delta(D) - q + 2\} + q + s + 1.$$

Además sabemos que $s \geq r$ así se sigue que

$$k \geq min\{\delta(D), \delta(D) - q + 2\} + q + s + 1 \geq$$

$$min\{\delta(D), \delta(D) - q + 2\} + q + 1 + min\{\delta(D), \delta(D) - t + 2\} + t.$$

Observemos que

$$min\{\delta(D), \delta(D) - q + 2\} + q + 1 \geq min\{\delta(D) + q + 1, \delta(D) + 3\} \geq \delta(D) + 2,$$

luego

$$min\{\delta(D), \delta(D) - t + 2\} + t \geq min\{\delta(D) + t, \delta(D) + 2\} \geq \delta(D) + 1$$

y así

$$k \geq \delta(D) + 3$$

lo cual es una contradicción ya que $k \leq \delta(D) + 1$

□

Bibliografía

[BM08] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory.* Springer, 2008.

[GSGMB09] H. Galeana-Sánchez, R. Gómez, and J. J Montellano-Ballesteros. Independent transversals of longest paths in locally semicomplete and locally transitive digraphs. *Discussiones Mathematicae. Graph Theory*, (29):469–480, 12 2009.

[GSGMB10] H. Galeana-Sánchez, R. Gómez, and J. J Montellano-Ballesteros. Girth, minimum degree and transversals of longest paths. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 7(1):61–72, 2010.

[GSRM96] H. Galeana-Sánchez and H.A. Rincón-Mejía. Independent sets which meet all longest paths. *Discrete Mathematics*, 152(1):141–145, 12 1996.

[Har69] F. Harary. *Graph Theory.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[LHP82] J. M. Laborde, N. H. Huang, and C. Payan. Independent sets and longest directed paths in digraphs. *Third Czechoslovak Symp. on Graph Theory*, pages 173–177, 1982.