



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Medidas de dependencia y dependencia  
extrema no positiva utilizando cópulas;  
aplicación a datos financieros.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Daniel Román Álvarez

TUTOR

Yuri Salazar Flores



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular a la Facultad de Ciencias, por brindarme la oportunidad de aprender de esta hermosa ciencia y de concluir mis estudios de licenciatura.

A mis padres Luz María y Cándido, por todo el amor, comprensión, apoyo, educación y valores que hoy me traen hasta aquí. Son parte fundamental de mi vida y de mi formación tanto de persona como de profesional.

A mis hermanos, por estar ahí conmigo y compartir tanto. A mi hermano Abraham, por siempre ayudarme, cuidar de mi, enseñarme la existencia de la ciencia y el tema de esta tesis, por encaminarme y ser mi mejor amigo desde que tengo memoria. A mi hermana Sarahi por ser mi amiga, la persona con quien crecí y más he hablado.

A mi tutor Yuri, por su paciencia, apoyo, oportunidades que me brindó y en especial por compartirme sus conocimientos sobre la materia que valoró inmensamente.

A mis amigos, por la comprensión que me han proporcionado desde que nos conocimos, han sido muy importantes en mi formación como persona. A Chava, Paquito, Rodrigo y Julio, por las experiencias vividas y los conocimientos compartidos. A mi amiga Ka, con la que forme el mejor equipo posible, que estuvo

conmigo estudiando, disfrutando y viviendo la gran experiencia que es la facultad. A mi amiga Jana, por su apoyo y que hizo emocionante y divertida la etapa final de la elaboración de esta tesis.

A mis sinodales José María, Adán, Laura y Daniel, por su tiempo, consejos y observaciones para mejorar esta tesis, los cuales me permitieron aprender más. También a la doctora Ana Meda que me inculcó la pasión por la probabilidad.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IA104216 Percolación de último pasaje y colas en tándem. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca que recibí.

# Prólogo

Esta tesis profesional presentada por Daniel Román Álvarez tiene como objetivo utilizar la teoría de cópulas para la estimación de medidas de dependencia extrema no positiva utilizando un modelo D trivariado de cópulas en viña. Para su total comprensión es necesario tener conocimiento de teoría de probabilidad así como nociones fundamentales de análisis matemático y álgebra lineal.

La tesis cuenta con una introducción, cinco capítulos y un apéndice. En la introducción se abrirá un panorama de la teoría de cópulas y de dependencia extrema. En el primer capítulo se harán las definiciones formales de los conceptos que se utilizarán y se demostrarán los principales teoremas y resultados de teoría de cópulas.

En el segundo capítulo se definirá lo que es una medida de dependencia y lo que es la dependencia no positiva y demostrará la relación que existe entre medidas de dependencia y dependencia extrema con las cópulas. En el tercer capítulo se presentarán las familias paramétricas más utilizadas así como los modelos en D-viña para el caso trivariado y mostrando en cada caso algunas de sus propiedades y las expresiones de sus medidas de dependencia.

En el cuarto capítulo se aplicarán todos los resultados anteriores para el ajuste del mejor modelo en el caso de 3 series financieras con dependencia no positiva. Finalmente en el último capítulo se hace una conclusión de forma general sobre el trabajo.



# Índice general

	<b>2</b>
<b>1. Teoría de cópulas</b>	<b>4</b>
1.1. Definiciones preliminares . . . . .	4
1.1.1. Cópulas . . . . .	4
1.1.2. Función inversa generalizada . . . . .	6
1.2. Teorema de Sklar . . . . .	7
1.2.1. Cópulas Asociadas . . . . .	11
1.2.2. Teorema de Sklar para funciones de supervivencia . . . . .	12
1.2.3. Teorema de Sklar para funciones de probabilidad LU y UL . . . . .	13
1.3. Límites Fréchet-Hoeffding . . . . .	14
1.4. Dependencia . . . . .	14
1.5. Transformaciones Monótonas . . . . .	17
1.5.1. Transformaciones crecientes . . . . .	17
1.5.2. Transformaciones decrecientes . . . . .	18
1.5.3. Transformaciones combinadas . . . . .	19
<b>2. Medidas de dependencia y concordancia</b>	<b>20</b>
2.1. Tau de Kendall . . . . .	24
2.2. Rho de Spearman . . . . .	24
2.3. Dependencia extrema . . . . .	25
2.4. Función de dependencia extrema . . . . .	28
<b>3. Modelos paramétricos</b>	<b>34</b>
3.1. Cópulas elípticas . . . . .	34
3.1.1. Cópula Gaussiana y t-student . . . . .	37
3.2. Familias Arquimedianas . . . . .	43
3.2.1. Cópula Gumbel . . . . .	45
3.2.2. Cópula Clayton . . . . .	47
3.2.3. Cópula Frank . . . . .	49
3.3. Cópulas en viña modelo D . . . . .	52

---

<b>4. Aplicación a datos financieros</b>	<b>56</b>
4.1. Datos . . . . .	56
4.2. Análisis descriptivo . . . . .	58
4.3. Aplicación del modelo ARMA con innovaciones GARCH . . . . .	60
4.4. Aplicación; cópulas en D-viña . . . . .	68
4.4.1. Cópulas bivariadas . . . . .	68
4.4.2. Cópulas en viña . . . . .	74
<b>5. Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>Apéndices</b>	<b>84</b>
<b>A. Demostraciones</b>	<b>85</b>
A.1. Teoría de cópulas . . . . .	85
A.2. Medidas de dependencia . . . . .	102
A.3. Modelos paramétricos . . . . .	113
<b>B. Bondad de ajuste</b>	<b>119</b>
B.1. Cópulas bivariadas . . . . .	119
B.2. Cópula en viña . . . . .	131





# Introducción

En el estudio de muchos fenómenos, tanto naturales como sociales, se encuentran algunos regidos completamente por la aleatoriedad, para el correcto estudio de estos fenómenos la humanidad desarrolló la ciencia de la probabilidad. Esta ciencia tiene, entre muchos otros objetos de estudio, el analizar cual es la relación que existe entre dos o más fenómenos, por ejemplo en el clima, se quiere saber que tanto y como afecta la humedad, la altura y la presión en la posibilidad de que llueva, o en el ámbito financiero el alza en algún activo cuanto y como afecta la de otro.

La definición de dependencia aún está en construcción y en la actualidad se desarrollan técnicas y medidas adecuadas para cada fenómeno. La forma más utilizada para medir la dependencia es con coeficientes, estos coeficientes son medidas escalares que intentan concentrar la información del comportamiento de las variables aleatorias para que, dentro de una escala, se tenga idea de si “hay” o “no hay” dependencia.

Otra medida utilizada son los coeficientes de dependencia extrema los cuales son, al igual que el caso anterior, un número que intenta concentrar la información del comportamiento de las variables aleatorias pero esta vez en los valores más alejados al comportamiento normal de las mismas. El coeficiente de dependencia extrema se generaliza, para poder saber como es la dependencia entre variables si las variables no tienen la misma velocidad para tomar estos valores, es decir si alguna de las variables tiende a tomar estos valores extremos de forma más frecuente o son más sensibles a los cambios drásticos.

La dependencia entre variables aleatorias es un tema complejo de estudiar y puede llegar a ser muy limitada si se toman los modelos preestablecidos para variables conjuntas, por esta razón se introdujo a la ciencia de la probabilidad una herramienta para poder estudiarla de forma más certera y con mayor libertad: la teoría de cópulas.

Esta herramienta permite el estudio de la dependencia entre dos o más

variables, partiendo del estudio individual de cada una, lo que abre un catálogo de modelos de dependencia, ya que la cópula toma el rol de “conexión” (de ahí su nombre) entre variables y permite modificarlas sin alterar los supuestos individuales. Por su naturaleza, las cópulas, tienen una relación directa con las medidas de dependencia y dependencia extrema, y por lo tanto permiten que la estimación de estos coeficientes sea más sencilla con el uso de la cópula y con un mejor ajuste a la estructura de dependencia.

En la actualidad la estimación de dependencia y dependencia extrema no es sólo el conocer como se relacionan dos variables, sino también como se relacionan un número mayor de variables, para resolver este problema se introdujo un nuevo modelo de cópulas: las cópulas en viña.

Las cópulas en viña son mezclas de cópulas bivariadas para a partir de estas poder encontrar un modelo que represente la dependencia entre todas las posibles variables, ya que al hacer esto se evita la estimación de parámetros extra, porque en caso de querer estimar una cópula de cuatro variables sería necesario estimar la dependencia 2-2, después hacer la corrección 3-3 para finalmente hacer la corrección que hay entre las 4 y con las cópulas en viña basta con encontrar las cópulas 2-2 para poder modelar la estructura de dependencia entre las variables.

La aportación de este trabajo es que aplicará medidas de dependencia extrema no positiva (Salazar, 2016), utilizando el modelo D de cópulas en viña (Joe, 1997) para elegir un modelo para tres series financieras que se acople mejor a la dependencia de los datos.

# Capítulo 1

## Teoría de cópulas

En este primer capítulo se dan las definiciones más importantes y los teoremas principales haciendo énfasis en sus aplicaciones.

### 1.1. Definiciones preliminares

#### 1.1.1. Cópulas

A continuación se definen las propiedades y las funciones que son necesarias para entender completamente el tema de estudio primordial que son las cópulas.

**Definición 1.1.** Sea  $F$  una función con dominio  $S_1 \times S_2 \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ , donde  $\overline{\mathbb{R}}$  son los reales extendidos y codominio  $R$  con  $a_1$  el elemento mínimo de  $S_1$  y  $a_2$  el elemento mínimo de  $S_2$ . Si  $F$  cumple la siguiente igualdad para todo  $(x, y) \in S_1 \times S_2$ , Si  $a_1 \in S_1$  y  $a_2 \in S_2$

$$F(x, a_2) = 0 = F(a_1, y)$$

entonces se dice que  $F$  es una función anclada (grounded).

Se define el volumen de una función, para utilizarla en demostraciones posteriores.

**Definición 1.2.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}/\{\infty\}$  y  $H$  una función real bivariada con dominio  $S_1 \times S_2$ . Sea  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  un rectángulo con todos sus vértices en el dominio de  $H$  entonces el  $H$ -volumen de  $B$  está dado por:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1)$$

Si  $H$  para cualquier  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  en el  $\text{Dom}H$   $V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \geq 0$  se dice que es 2-creciente.

**Definición 1.3.** (Nelsen, 2006) Una subcópula bi-dimensional es una función  $C'$  con las siguientes propiedades:

1.  $\text{Dom } C' = S_1 \times S_2$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son subconjuntos de  $\mathbf{I}$ ,  $I = [0, 1]$ , y contienen a los elementos 0 y 1
2.  $C'$  es anclada y 2-creciente
3. Para toda  $u_1 \in S_1$  y  $u_2 \in S_2$

$$C(u_1, 1) = u_1 \text{ y } C(1, u_2) = u_2$$

notando que si para toda  $(u_1, u_2)$  en  $\text{Dom } C'$   $0 \leq C'(u_1, u_2) \leq 1$ , el rango de  $C'$  denotado por  $\text{Ran } C'$  es también un subconjunto de  $\mathbf{I}$ .

La definición de d-cópula es similar (Nelsen, 2006) y será utilizada más adelante.

**Definición 1.4.** (Nelsen, 2006) Una cópula bi-dimensional es una subcópula cuyo dominio es  $\mathbf{I}^2$ . Una definición equivalente es que una cópula cumple con las siguientes propiedades:

1. Para toda  $u_1, u_2$  en  $[0, 1]$

$$C(u_1, 0) = 0 = C(0, u_2)$$

y

$$C(u_1, 1) = u_1 \quad \text{y} \quad C(1, u_2) = u_2;$$

2. Para todo  $u_1, u_2, v_1$  y  $v_2$  en  $[0, 1]$  tal que  $u_1 \leq v_1$  y  $u_2 \leq v_2$ ,

$$C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

La cópula en la práctica es una función de distribución con marginales uniformes.

### 1.1.2. Función inversa generalizada

**Definición 1.5.**  $T(x)$  es una función en  $\overline{\mathbb{R}}$  no decreciente si satisface:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow T(x_1) \leq T(x_2) \quad \forall x_1, x_2$$

**Definición 1.6.** La inversa generalizada  $T^{\leftarrow}$  es la función  $T^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : T(x) \geq y\}$ . Por convención  $\inf\{\emptyset\} = \infty$

**Proposición 1.1.** *Propiedades de la inversa generalizada.*

Sea  $T$  una función no decreciente y  $T^{\leftarrow}$  la inversa generalizada.

- i)  $T^{\leftarrow}$  es no decreciente y continua por la izquierda
- ii)  $T$  es continua  $\iff T^{\leftarrow}$  es estrictamente creciente

Una suposición adicional es  $T^{\leftarrow}(y) < \infty$

- iii) Si  $T$  es continua por la derecha;  $T(x) \geq y \iff T^{\leftarrow}(y) \leq x$
- iv)  $T^{\leftarrow} \circ T(x) \leq x$
- v)  $T \circ T^{\leftarrow}(y) \geq y$
- vi) Si  $T$  es estrictamente creciente  $\Rightarrow T^{\leftarrow} \circ T(x) = x$
- vii) Si  $T$  es continua  $\Rightarrow T \circ T^{\leftarrow}(y) = y$

#### Demostración en el apéndice A.1

**Proposición 1.2.** Si  $X$  es una variable aleatoria con función de distribución  $F$ , entonces:

$$\mathbb{P}(F^{\leftarrow} \circ F(X) = X) = 1$$

**Lema 1.1.** Si  $X$  es una variable aleatoria y  $T$  es una función no decreciente entonces:

- $\{X \leq x\} \subset \{T(X) \leq T(x)\}$  y  $\mathbb{P}[T(X) \leq T(x)] = \mathbb{P}[X \leq x] + \mathbb{P}[T(X) = T(x), X > x]$ .
- Si  $F$  es una función de distribución de una variable aleatoria  $X$  entonces  $\mathbb{P}[F(X) \leq F(x)] = \mathbb{P}[X \leq x] + \mathbb{P}[T(X) = T(x), X > x]$

#### Demostración en el apéndice A.1

## 1.2. Teorema de Sklar

El teorema de Sklar es la parte fundamental en la teoría de cópulas, y de esta tesis, ya que permite asegurar que hay una cópula correspondiente para toda función de distribución y a su vez permite observar que la cópula es la función mediante la cual se relacionan las variables.

El teorema se demuestra para el caso de dos variables, partiendo de los siguientes lemas los cuales sirven para poder ligar una función de distribución bivariada con una subcópula.

**Lema 1.2.** *Sea  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$  y  $F$  una función 2-creciente con dominio  $S_1 \times S_2$ . Sean  $x_1, x_2 \in S_1$  con  $x_1 \leq x_2$  y  $y_1, y_2 \in S_2$  con  $y_1 \leq y_2$ . Entonces la función  $t \rightarrow F(t, y_2) - F(t, y_1)$  es no decreciente en  $S_1$  y la función  $t \rightarrow F(x_2, t) - F(x_1, t)$  es no decreciente en  $S_2$ .*

### Demostración en el apéndice A.1

**Lema 1.3.** *Sea  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$  y  $F$  una función anclada y 2-creciente con dominio  $S_1 \times S_2$ . Entonces  $F$  es no decreciente en cada entrada.*

### Demostración en el apéndice A.1

Ahora se supone que  $S_1$  tiene un elemento mayor  $a$  y  $S_2$  tiene un elemento mayor  $b$ . Se dice que una función  $F$  de  $S_1$  y  $S_2$  a  $\mathbb{R}$  tiene marginales, y las marginales de  $F$  son las funciones  $F_1$  y  $F_2$  y están dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Dom}F_1 &= S_1, \text{ y } F_1 = F(x, b) \text{ para toda } x \text{ en } S_1 \\ \text{Dom}F_2 &= S_2, \text{ y } F_2 = F(a, y) \text{ para toda } y \text{ en } S_2 \end{aligned}$$

**Lema 1.4.** *Sea  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$  y  $F$  una función anclada 2-creciente con dominio  $S_1 \times S_2$  con marginales  $F_1, F_2$ . Sea  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  dos puntos cualquiera en  $S_1 \times S_2$  entonces:*

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq |F_1(x_2) - F_1(x_1)| + |F_2(y_2) - F_2(y_1)|$$

### Demostración en el apéndice A.1

Es importante notar que este lema también puede ser visto como una propiedad de las cópulas y es utilizada más adelante.

**Teorema 1.1.** *Sea  $C'$  una subcópula entonces para toda  $(u_1, v_1), (u_2, v_1)$  en  $\text{Dom } C'$*

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$$

por lo tanto  $C'$  es uniformemente continua en su dominio.

La demostración de este teorema es directa por el lema anterior y nos permitirá extender el dominio de la subcópula.

**Lema 1.5.** *Sea  $F$  una función de distribución conjunta con marginales  $F_1$  y  $F_2$  entonces existe una única subcópula  $C'$  tal que*

1.  $Dom C' = Ran F_1 \times Ran F_2$
2. Para toda  $(x, y)$  en  $\bar{\mathbb{R}}$ ,  $F(x, y) = C'(F_1(x), F_2(y))$

### Demostración en el apéndice A.1

El lema muestra que una función de distribución siempre tiene asociada una única subcópula, lo único restante para el teorema de Sklar es extender el dominio de  $Ran F_1 \times Ran F_2$  a  $\mathbf{I}^2$  para obtener la cópula de la función de donde proviene la subcópula.

**Lema 1.6.** *Sea  $C'$  una subcópula. Entonces existe una cópula  $C$  tal que  $C(u_1, u_2) = C'(u_1, u_2)$  para toda  $(u_1, u_2)$  en  $Dom C'$ . Esto es que cualquier subcópula puede ser extendida a una cópula. Esta extensión generalmente no es única.*

### Demostración en el apéndice A.1

La subcópula y la cópula asociada a un par de variables son la misma en el  $Ran F_1 \times Ran F_2$  y esta observación es importante en el teorema de Sklar.

Los siguientes resultados son utilizados para la demostración del teorema de Sklar para funciones de supervivencia continuas y para las funciones de probabilidad continuas LU (Lower-Upper) y UL (Upper-Lower).

**Proposición 1.3.** *Si  $U \sim Unif(0, 1)$  es una v.a. uniforme entonces  $P(F^{\leftarrow}(U) \leq x) = F(x)$ .*

1. *Transformación del cuantil. Si  $U \sim Unif(0, 1)$  es una v.a. con función de distribución uniforme estándar entonces  $\mathbb{P}[F^{\leftarrow}(U) \leq x] = F(x)$ .*
2. *Transformación de probabilidad. Si  $X$  es una v.a. con función de distribución  $F$ , donde  $F$  es continua, entonces  $F(X) \sim Unif(0, 1)$ .*



### Demostración en el apéndice A.1

Esta proposición liga de forma muy intuitiva las marginales uniformes de una cópula con las distribuciones marginales de la función de distribución, así como permite llevar a cabo simulaciones y ver de forma gráfica su estructura.

**Observación 1.1.** *Sea  $U$  una variable aleatoria uniforme y sea  $F$  su función de distribución. Entonces  $1 - U \stackrel{d}{=} U$ , es decir,  $1-U$  y  $U$  tienen la misma función de distribución.*

### Demostración en el apéndice A.1

Este resultado es necesario para el teorema de Sklar para funciones de supervivencia y de probabilidad UL y LU, al conectar las transformaciones decrecientes con distribuciones uniformes.

**Teorema 1.2** (SKLAR,1959). *Sea  $F(x_1, x_2)$  una función de distribución conjunta bivariada con marginales  $F_1, F_2$  entonces existe una cópula  $C$  tal que para todo  $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$*

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (1.1)$$

*Si  $F_1$  y  $F_2$  son continuas, la cópula es única. En cualquier otro caso  $C$  está determinada de forma única sólo en  $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2$ .*

*Conversamente si  $C$  es una cópula y  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de distribución univariadas entonces la función  $F$  definida en la ecuación (1.1) es un función de distribución conjunta con marginales  $F_1$  y  $F_2$ .*

### Demostración en el apéndice A.1

El teorema más importante donde se aprecia con claridad la estructura de la cópula como función de dependencia entre las marginales de una función de distribución. De este teorema se deduce que la estructura de dependencia se separa de las marginales. La demostración para el caso multivariado es análoga sólo con lemas más generales equivalentes a los aquí mostrados.

**Teorema 1.3.** *Sea  $F(x_1, x_2, \dots, x_d)$  una función de distribución conjunta del vector  $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  con marginales  $F_1, F_2, \dots, F_d$  entonces existe una  $d$ -cópula  $C$  tal que para todo  $x_1, x_2, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}}$*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) \quad (1.2)$$

Si  $F_1, F_2, \dots, F_d$  son continuas, la  $d$ -cópula es única. En cualquier otro caso  $C$  está determinada de forma única sólo en  $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_d$ .

Conversamente si  $C$  es una  $d$ -cópula y  $F_1, F_2, \dots, F_d$  son funciones de distribución univariadas entonces la función  $F$  definida en la ecuación (1.2) es un función de distribución conjunta con marginales  $F_1, F_2, \dots, F_d$ .

**Corolario 1.1.** Sea  $F$  una función de distribución conjunta bivariada con marginales continuas  $F_1$  y  $F_2$  y sea  $C$  la única cópula asociada a  $F$ . Entonces para cualquier  $(u_1, u_2) \in \mathbf{I}^2$

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2)) \quad (1.3)$$

### Demostración en el apéndice A.1

En el corolario del teorema de Sklar para marginales continuas se puede apreciar la relación entre las inversas generalizadas de las marginales y la cópula, este corolario es muy usado cuando se conocen las inversas de las marginales, lo que permite conocer la cópula a partir de sólo evaluar en la función de distribución conjunta.

Se muestran las propiedades inmediatas de las cópulas tales como su función de densidad y la conexión con la función de densidad y condicional de  $F$ .

**Corolario 1.2.** Función de densidad de una cópula. Sea  $U_1$  y  $U_2$  variables aleatorias uniformes  $(0,1)$  con  $C$  su cópula correspondiente entonces la función de densidad es:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

y  $\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$  existe para casi toda  $(u_1, u_2) \in \mathbf{I}$  con respecto a la medida de Lebesgue.

**Observación 1.2.** Sea  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias con funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$  y funciones de densidad  $f_1$  y  $f_2$  y una cópula conocida  $C$  entonces la función de densidad conjunta  $f$  es:

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2) \quad (1.4)$$

### Demostración en el apéndice A.1

**Proposición 1.4.** *Distribución condicional.* Sea  $U_1$  y  $U_2$  con una cópula conocida  $C$  y  $U_1 = u_1$  entonces la función de distribución para  $U_2$  dado  $U_1 = u_1$  es:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$$

### Demostración en el apéndice A.1

**Corolario 1.3.** *Función de densidad conjunta.* Sea  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias con funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$  y funciones de densidad marginales  $f_1$  y  $f_2$  y una cópula conocida  $C$  entonces la función de distribución para  $X_1$  dado  $X_2 = x_2$  es:

$$f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)$$

### Demostración en el apéndice A.1

#### 1.2.1. Cópulas Asociadas

Como se mencionó la cópula no está restringida sólo a funciones de distribución, para mostrar esto se hace la asociación entre la cópula correspondiente a la función de distribución  $C$  y las funciones de supervivencia y de probabilidad LU y UL (Lower-Upper y Upper-Lower).

Sea  $F$  la función de distribución del vector  $(X_1, X_2)$ . Se definen las siguientes funciones: la función de supervivencia ( $\bar{F}$ ), la función de probabilidad conjunta UL ( $F_{UL}$ ) y la función de probabilidad conjunta LU ( $F_{LU}$ ) correspondiente al vector aleatorio de  $(X_1, X_2)$ , como:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] \\ \bar{F}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}[X_1 > x_1, X_2 > x_2] \\ F_{LU}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, X_2 > x_2] \\ F_{UL}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}[X_1 > x_1, X_2 \leq x_2] \end{aligned}$$

Así como una función de distribución tiene funciones asociadas, la cópula  $C$  también tiene cópulas asociadas. Las cuales se definen a partir de sus marginales y se muestra cual es su expresión en términos de la cópula  $C$ .

**Observación 1.3.** *Cópula de supervivencia.* Si  $C$  es la función de distribución de  $(U_1, U_2)$  v.a.  $Unif(0, 1)$ , y  $\widehat{C}$  es la función de distribución correspondiente a  $(1 - U_1, 1 - U_2)$  entonces:

$$\widehat{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2)$$

**Demostración en el apéndice A.1**

**Observación 1.4.** Si  $C$  es la función de distribución de  $(U_1, U_2)$  v.a.i.  $Unif(0, 1)$  y  $C_{LU}$  la función de distribución correspondiente al vector  $(U_1, 1 - U_2)$  entonces:

$$C_{LU}(u_1, u_2) = u_1 - C(u_1, 1 - u_2)$$

**Demostración en el apéndice A.1**

**Observación 1.5.** Si  $C$  es la función de distribución de  $(U_1, U_2)$  v.a.i.  $Unif(0, 1)$  y  $C_{UL}$  la función de distribución correspondiente al vector  $(1 - U_1, U_2)$  entonces:

$$C_{UL}(u_1, u_2) = u_2 - C(1 - u_1, u_2)$$

**Demostración en el apéndice A.1**

Estos resultados permiten escribir las funciones de probabilidad asociadas a la cópula  $C$ , correspondiente a la función de distribución  $F$ , en términos de esta. Falta mostrar que las funciones  $\widehat{C}$ ,  $C_{LU}$  y  $C_{UL}$  son cópulas.

### 1.2.2. Teorema de Sklar para funciones de supervivencia

En esta sección se demuestra el teorema de Sklar para funciones de supervivencia  $\overline{F}$ . La demostración se hace para el caso continuo.

**Teorema 1.4** (Sklar para funciones de supervivencia). *Sea  $\overline{F}(x_1, x_2)$  una función bivariada tal que  $\overline{F}(x_1, x_2) = \mathbb{P}[X_1 > x_1, X_2 > x_2]$  donde las funciones de supervivencia para  $X_1, X_2$  variables aleatorias continuas son  $\overline{F}_1, \overline{F}_2$  respectivamente entonces existe una cópula  $C$  para  $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$*

$$\overline{F}(x_1, x_2) = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2))$$

*Conversamente si  $\widehat{C}$  es una cópula y  $\overline{F}_1$  y  $\overline{F}_2$  son funciones de supervivencia univariadas entonces la función  $F$  definida en el teorema de Sklar para funciones de supervivencia es un función de supervivencia con marginales  $\overline{F}_1$  y  $\overline{F}_2$ .*

### Demostración en el apéndice A.1

El teorema nos permite ampliar las cópulas a las funciones de supervivencia con marginales continuas y como se vió en la sección anterior esta cópula es la asociada a la cópula  $C$ .

### 1.2.3. Teorema de Sklar para funciones de probabilidad LU y UL

En esta sección se presenta el teorema de Sklar para funciones LU, y y se termina de mostrar la relación que existe entre las funciones asociadas a  $F$  y las cópulas asociadas  $C$ . La demostración del teorema se hace para el caso continuo.

**Teorema 1.5** (SKLAR para LU). *Sea  $F_{LU}(x_1, x_2)$  una función de probabilidad conjunta bivariada con marginales continuas  $F_1, \overline{F}_2$  entonces existe una cópula  $C$  para  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*

$$F_{LU}(x_1, x_2) = C_{LU}(F_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)) \quad (1.5)$$

*Si  $F_1$  y  $\overline{F}_2$  son continuas, la cópula es única. En cualquier otro caso  $C$  está determinada de forma única sólo sobre  $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}\overline{F}_2$ .*

*Conversamente si  $C$  es una cópula y  $F_1$  es una función de distribución univariada y  $\overline{F}_2$  una función de supervivencia continua entonces la función de probabilidad conjunta  $F$  definida en el teorema de Sklar para LU es un función de probabilidad conjunta con marginales  $F_1$  y  $\overline{F}_2$ .*

### Demostración en el apéndice A.1

Con este teorema se amplían las cópulas a las funciones de probabilidad LU y UL, ambas demostraciones son análogas. De la misma manera que  $\widehat{C}$  es la cópula asociada a  $\overline{F}$ . Se puede deducir que  $\widehat{C}_{LU} = C_{UL}$  ya que  $\overline{F}_{LU} = F_{UL}$ . Concluyendo que las funciones asociadas a  $F$  tienen una estructura de dependencia que puede ser descrita por  $C$ .

### 1.3. Límites Fréchet-Hoeffding

Es importante conocer los límites de las cópulas bivariadas ya que se pueden definir como un “límite en la dependencia” y a la vez acotan los valores para las cópulas. Estos se muestran a continuación.

**Teorema 1.6.** (*Límites de Fréchet-Hoeffding*) Considera la cópula  $C(\mathbf{u}) = C(u_1, u_2)$ ; entonces:

$$\max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min\{u_1, u_2\} \quad \forall (u_1, u_2) \in \mathbf{I}^2$$

#### Demostración en el apéndice A.1

Estos límites son cotas naturales para cualquier cópula y en este caso (bivariado) ambos límites corresponden a una cópula de dependencia perfecta (monotónica y contramonotónica). Los límites se pueden extender a una d-cópula para cualquier  $d \geq 3$ , en el caso multivariado el límite superior todavía es una cópula pero el límite inferior ya no lo es.

### 1.4. Dependencia

Como se mencionó en los límites de Fréchet-Hoeffding existen dos tipos de dependencia perfecta, estos son la dependencia monotónica y contramonotónica y se definen de la siguiente forma.

**Definición 1.7.** *Dependencia monotónica.* Las variables aleatorias  $X_1, X_2$  se dice que tienen dependencia monotónica si su cópula corresponde al límite superior de Fréchet -Hoeffding  $C(u_1, u_2) = M(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$

Esta cópula representa la dependencia entre dos variables aleatorias en donde una es una función no decreciente de la otra.

**Definición 1.8.** *Dependencia contramonotónica.* Las variables aleatorias  $X_1, X_2$  se dice que tienen dependencia contramonotónica si su cópula corresponde al límite inferior de Fréchet -Hoeffding  $C(u_1, u_2) = W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$

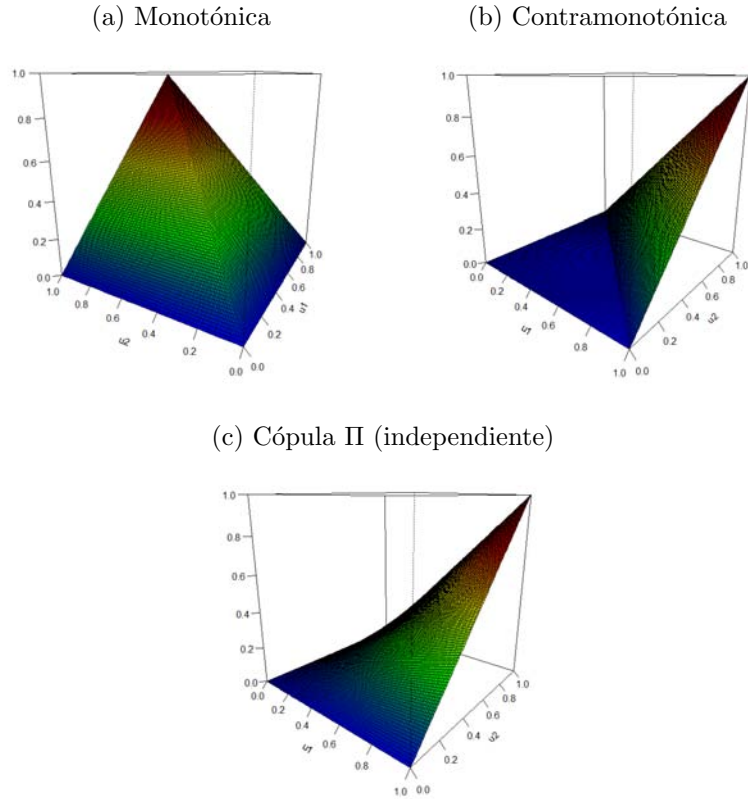
Esta cópula representa la dependencia entre dos variables aleatorias en donde una es una función decreciente de la otra.

Otra cópula bivariada importante es la cópula  $\Pi$  que corresponde a dos variables aleatorias independientes ( $X_1, X_2$ ).

$$C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) = \Pi(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2$$

La forma gráfica que tienen estas tres cópulas bivariadas es la siguiente:

Figura 1.1: Dependencia perfecta e independencia



En estos ejemplos se ilustran las cópulas asociadas a la dependencia monotónica y contramonotónica (límites de Fréchet-Hoeffding).

**Ejemplo 1.1.** (*Dependencia Contramonotónica*) Sea  $X$  una v.a. con función de distribución  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  continua. Encontrar la cópula correspondiente al vector aleatorio  $(X, -X)$ .

$$\begin{aligned}
 F_{X,-X}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X \leq x_1, -X \leq x_2) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq x_1, X \geq -x_2) \\
 &= \mathbb{P}(-x_2 \leq X \leq x_1) \\
 &= F_X(x_1) - F_X(-x_2)
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de la función se tiene que hacer por casos:

$$F_{X,-X}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } -x_2 \geq x_1 \\ F_X(x_1) - F_X(-x_2) & \text{si } -x_2 \leq x_1 \end{cases}$$

Para obtener la cópula asociada se necesita tener la inversa de  $F_{-X}(x_1)$  :

$$F_{-X}^{\leftarrow}(x) = -F_X^{\leftarrow}(1 - x_1)$$

Por el corolario ( 1.1) se tiene que la cópula se puede expresar como en la ecuación ( 1.3) de la siguiente forma:

$$C(x_1, x_2) = F_{X,-X}(F_X^{\leftarrow}(x_1), F_{-X}^{\leftarrow}(x_2))$$

Comenzando por el caso  $x_1 \geq -x_2$

$$\begin{aligned} F_{X,-X}(F_X^{\leftarrow}(x_1), F_{-X}^{\leftarrow}(x_2)) &= F_X(F_X^{\leftarrow}(x_1)) - F_X(-F_{-X}^{\leftarrow}(x_2)) \\ &= x_1 - F_X(F_X^{\leftarrow}(1 - x_2)) \\ &= x_1 + x_2 - 1 \end{aligned}$$

Para obtener los límites se hacen las siguientes desigualdades evaluando  $x = F_X^{\leftarrow}(u_1)$  y  $y = F_{-X}^{\leftarrow}(u_2)$  con  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} x &\leq -y \\ F_X(x) &\leq F_X(-y) \\ F_X(F_X^{\leftarrow}(u_1)) &\leq F_X(-F_{-X}^{\leftarrow}(u_2)) \\ u_1 &\leq F_X(F_X^{\leftarrow}(1 - u_2)) \\ u_1 &\leq 1 - u_2 \\ u_1 + u_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

El caso  $x \geq -y$  es análogo. Entonces se obtiene la cópula:

$$C_{X,-X}(u_1, u_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_1 + u_2 \leq 1 \\ u_1 + u_2 - 1 & \text{si } u_1 + u_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$C_{X,-X}(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$$

**Ejemplo 1.2** (Dependencia Monotónica). *Sea  $X$  una v.a. con función de distribución  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ . Encontrar la cópula asociada al vector aleatorio  $(X, X)$ .*



$$\begin{aligned}
F_{X,X}(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x, X \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x, X \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X \leq \min(x, y)) \\
&= F_X(\min(x, y)) \\
&= \min(F_X(x), F_X(y))
\end{aligned}$$

Por el corolario ( 1.1) se tiene que la cópula se puede expresar como en la ecuación ( 1.3) se obtiene la distribución conjunta evaluada en  $x = F_X^{\leftarrow}(u_1)$  y  $y = F_X^{\leftarrow}(u_2)$  con  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
F_{X,X}(F_X^{\leftarrow}(u_1), F_X^{\leftarrow}(u_2)) &= \min(F_X(F_X^{\leftarrow}(u_1)), F_X(F_X^{\leftarrow}(u_2))) \\
&= \min(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

Entonces se obtiene la cópula:

$$C_{X,X}(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$$

## 1.5. Transformaciones Monótonas

### 1.5.1. Transformaciones crecientes

Otro punto importante relacionado con las cópulas asociadas son las cópulas resultantes de transformaciones monótonas, ya que si se le aplica estas transformaciones a las variables aleatorias con cópula correspondiente  $C$  se obtienen las cópulas asociadas.

**Proposición 1.5.** *Sea  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias continuas con una cópula asociada  $C_{X_1, X_2}$ . Y sean  $T_1$  y  $T_2$  funciones estrictamente crecientes en  $\text{Ran}X_1$  y  $\text{Ran}X_2$  respectivamente, entonces  $C_{T_1(X_1), T_2(X_2)} = C_{X_1, X_2}$ . Así  $C_{X_1, X_2}$  es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de  $X_1$  y  $X_2$ .*

#### Demostración en el apéndice A.1

Se concluye que las cópulas son invariantes cuando se aplican transformaciones crecientes a las variables aleatorias, en el siguiente ejemplo se muestra este hecho.

**Ejemplo 1.3** (Transformación creciente). *Sea  $X$  una v.a. con función de distribución  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ . Encontrar la cópula asociada al vector aleatorio  $(X, 2X)$ .*

$$\begin{aligned}
 F_{X,2X}(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x, 2X \leq y) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq x, X \leq \frac{y}{2}) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq \min(x, \frac{y}{2})) \\
 &= F_X(\min(x, \frac{y}{2})) \\
 &= \min(F_X(x), F_X(\frac{y}{2}))
 \end{aligned}$$

Por el corolario ( 1.1) se sabe que la cópula se puede expresar como en la ecuación ( 1.3)

La función inversa de  $F_X^{\leftarrow}(x)$  es tal que:

$$F_{2X}^{\leftarrow}(x) = 2F_X^{\leftarrow}(x)$$

se obtiene la distribución conjunta evaluada en  $x = F_X^{\leftarrow}(u_1)$  y  $y = F_{2X}^{\leftarrow}(u_2)$  con  $u_1, u_2 \in [0, 1]$

$$F_{X,X}(F_X^{\leftarrow}(u_1), F_X^{\leftarrow}(u_2)) = \min(F_X(F_X^{\leftarrow}(u_1)), F_X(\frac{F_{2X}^{\leftarrow}(u_2)}{2}))$$

$$\begin{aligned}
 F_{X,X}(F_X^{\leftarrow}(u_1), F_X^{\leftarrow}(u_2)) &= \min(F_X(F_X^{\leftarrow}(u_1)), F_X(\frac{2F_X^{\leftarrow}(u_2)}{2})) \\
 &= \min(u_1, u_2)
 \end{aligned}$$

Entonces se obtiene la cópula:

$$C_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$$

### 1.5.2. Transformaciones decrecientes

Cuando se le aplican transformaciones decrecientes a las variables no se mantiene la misma cópula pero si una cópula asociada, la de supervivencia.

**Proposición 1.6.** *Sea  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias continuas con una cópula asociada  $C_{X_1, X_2}$ . Y sean  $T_1$  y  $T_2$  funciones decrecientes en  $\text{Ran}X_1$  y  $\text{Ran}X_2$  respectivamente, entonces  $C_{T_1(X_1), T_2(X_2)} = \widehat{C}_{X_1, X_2}$ . Así  $\widehat{C}_{X_1, X_2}$  se convierte en la cópula de supervivencia para transformaciones estrictamente decrecientes continuas de  $X_1$  y  $X_2$ .*

### Demostración en el apéndice A.1

Se concluye que la cópula del vector aleatorio al que se le aplican las transformaciones decrecientes es la cópula de supervivencia asociada a la cópula  $C$  del vector original.

### 1.5.3. Transformaciones combinadas

**Proposición 1.7.** *Sea  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias continuas con una cópula asociada  $C_{X_1, X_2}$ . Y sean  $T_1$  una función creciente y  $T_2$  una función decrecientes en  $\text{Ran}X_1$  y  $\text{Ran}X_2$  respectivamente, entonces  $C_{T_1(X_1), T_2(X_2)} = C_{LU, (X_1, X_2)}$ . Así  $C_{LU, (X_1, X_2)}$  se convierte en la cópula LU para una transformación creciente en  $X_1$  y una transformación decreciente continua en  $X_2$ .*

### Demostración en el apéndice A.1

Se concluye que la cópula del vector aleatorio al que se le aplica una transformación creciente en la primera variable y una transformación decreciente en la segunda variable es la cópula LU asociada a la cópula  $C$  del vector original. Por otro lado una transformación decreciente en la primera variable y una transformación creciente en la segunda variable es la cópula LU asociada a la cópula  $C$ .

A lo largo de este capítulo se demostraron los principales teoremas de teoría de cópulas, y se definieron las cópulas asociadas, ahora una vez que se tiene la cópula de un vector aleatorio, el como puede esta medir la dependencia entre variables se aborda en el siguiente capítulo.

# Capítulo 2

## Medidas de dependencia y concordancia

La dependencia entre variables aleatorias es uno de los principales objetos de estudio de la teoría de probabilidad ya que se busca conocer la relación existente entre fenómenos, para este fin se han creado herramientas probabilísticas que definen y catalogan las relaciones para que se puedan hacer conclusiones de su interacción. Una de las principales definiciones que surgió y se sigue construyendo es la de medida de dependencia.

En su conjunto las medidas de dependencia tienen como objetivo el medir de una manera definida si dos variables aleatorias están relacionadas, con los extremos de independencia y dependencia perfecta (monotónica o contra-monotónica). A continuación se escriben las propiedades mínimas deseables para que una medida sea considerada de dependencia.

**Definición 2.1.** *Una medida numérica  $\delta$  de asociación entre dos variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$  cuya cópula es  $C$  es una medida de la dependencia si satisface las siguientes propiedades (se denota como  $\delta_{X,Y}$ ):*

1.  $\delta$  Está definida para todo par de variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$ ;
2.  $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$ ;
3.  $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$ ;
4.  $\delta_{X,Y} = 0$  si y sólo si  $X, Y$  son independientes.
5.  $\delta_{X,Y} = 1$  si y sólo si  $X$  o  $Y$  es una función estrictamente monótona de la otra;
6. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son funciones estrictamente monótonas en  $\text{Ran}X$  y  $\text{Ran}Y$ , respectivamente, entonces  $\delta_{X,Y} = \delta_{\alpha(X),\beta(Y)}$

7. Si  $\{(X_n, Y_n)\}$  es una secuencia de variables aleatorias continuas con cópulas asociadas  $C_n$ , y  $C_n$  converge puntualmente a  $C$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{(X_n, Y_n)} = \delta_{C_n} = \delta_C$$

En la siguiente sección se definen las medidas de concordancia y dependencia lineal, las cuales no cumplen algunos de estos supuestos. El punto 3, en efecto no se cumple para las medidas que se muestran ya que para dependencia contramonotónica  $\delta_{X,Y} = -1$  pero, es importante este punto porque restringe que la medida de dependencia sea acotada. El punto 4 es importante ya que permite que una medida de dependencia caracterice la independencia y mida la dependencia de las variables. El punto 6 asegura que la medida de dependencia es invariante ante cambios de escala (de la misma forma que lo son las cópulas) (Erdely, 2003) y el punto 7 no lo cumple la correlación lineal.

Otra definición importante y que se analiza más a fondo con ayuda de las cópulas asociadas LU y UL es la dependencia positiva y no positiva.

**Definición 2.2.** (Lehmann, 1966) Sea  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias.  $X$  y  $Y$  tienen dependencia de cuadrante positiva si para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \geq \mathbb{P}[X \leq x]\mathbb{P}[Y \leq y]$$

o de forma equivalente:

$$\mathbb{P}[X > x, Y > y] \geq \mathbb{P}[X > x]\mathbb{P}[Y > y]$$

y dependencia de cuadrante negativa si:

$$\mathbb{P}[X \leq x, Y > y] \geq \mathbb{P}[X \leq x]\mathbb{P}[Y > y]$$

$$\mathbb{P}[X > x, Y \leq y] \geq \mathbb{P}[X > x]\mathbb{P}[Y \leq y]$$

Una forma de interpretar la definición es a partir de las cópulas asociadas, se dice que tienen dependencia positiva si la cópula  $C$  o la cópula de supervivencia son mayores a la cópula  $\Pi$  (que denota independencia entre las variables), y por lo tanto se le llama dependencia no positiva a la dependencia donde las cópulas LU o UL son mayores a la cópula  $\Pi$ .

Esta definición se puede extender a un caso multivariado. Se dice que tres variables aleatorias  $X, Y$  y  $Z$  tienen dependencia de octante positiva si:

$$\mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y, Z \leq z] \geq \mathbb{P}[X \leq x]\mathbb{P}[Y \leq y]\mathbb{P}[Z \leq z]$$

o

$$\mathbb{P}[X > x, Y > y, Z > z] \geq \mathbb{P}[X > x]\mathbb{P}[Y > y]\mathbb{P}[Z > z]$$

y dependencia de octante no positiva si (sólo se colocan dos casos de los seis posibles):

$$\mathbb{P}[X > x, Y \leq y, Z \leq z] \geq \mathbb{P}[X > x]\mathbb{P}[Y \leq y]\mathbb{P}[Z \leq z]$$

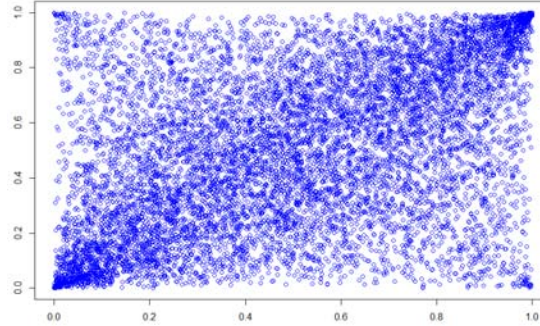
o

$$\mathbb{P}[X > x, Y > y, Z \leq z] \geq \mathbb{P}[X > x]\mathbb{P}[Y > y]\mathbb{P}[Z \leq z]$$

...

cabe destacar que la relación entre las variables puede ser positiva y no positiva simultáneamente.

Figura 2.1: Dependencia positiva y no positiva



La medida de dependencia más utilizada es la correlación lineal o correlación de Pearson la cual se define a continuación.

**Definición 2.3.** *Correlación lineal.* Sea  $X_1, X_2$  variables aleatorias.

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])]}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}}$$

La medida de correlación lineal tiene inconvenientes, algunos de estos son que depende tanto de la distribución conjunta como de las marginales (lo que nos daría distintos coeficientes para la misma cópula), la forma en que describe la dependencia entre las variables es de forma lineal y no es invariante ante transformaciones crecientes, como las utilizadas en series financieras.

Un ejemplo de estos problemas es el siguiente

**Ejemplo 2.1.** Sea  $\ln(X_1) \sim \text{Norm}(0, 1)$ ,  $\ln(X_2) \sim \text{Norm}(0, \alpha)$  con  $1 \neq \alpha$

Se tiene que  $X_1$  y  $X_2$  no son del mismo tipo i.e.  $X_1 = aX_2 + b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  por lo que el coeficiente de correlación  $\rho_{max} < 1$  del mismo modo  $X_1$  y  $-X_2$

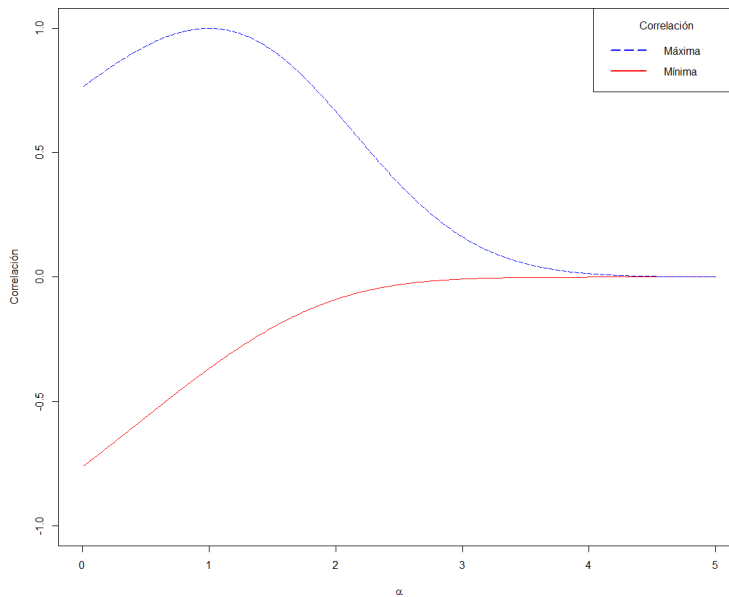
no son del mismo tipo y  $\rho_{min} > -1$ .

Sea  $Z \sim \text{Norm}(0,1)$  entonces si  $X_1$  y  $X_2$  fueran del mismo tipo deben cumplir  $(X_1, X_2) = (e^Z, e^{\alpha Z})$  y  $\rho_{max} = \rho(e^Z, e^{\alpha Z})$  y por el mismo argumento  $\rho_{min} = \rho(e^Z, e^{-\alpha Z})$ .

Calculando analíticamente.

$$\rho_{max} = \frac{e^{\alpha} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\alpha}-1)}} \qquad \rho_{min} = \frac{e^{-\alpha} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{-\alpha}-1)}}$$

Figura 2.2: Correlación lognormal



Este ejemplo muestra como la correlación entre dos vectores con dependencia monótonica o contramonótonica pueden tener coeficientes de correlación de Pearson muy bajos. Lo que nos permite decir que coeficientes bajos en la correlación de Pearson no implica dependencia débil entre las variables.

Existen otras medidas de dependencia que no tienen estas desventajas, las dos más utilizadas son las medidas de concordancia (o medidas por rangos) Tau de Kendall y Rho de Spearman. Estas medidas no tienen las desventajas mencionadas de la correlación lineal, ya que son invariantes ante transformaciones no decrecientes, la dependencia medida no sólo es de forma lineal y

que dependen únicamente de la cópula correspondiente a las variables. A continuación se muestra como se definen.

## 2.1. Tau de Kendall

**Definición 2.4.**  $\tau$  de Kendall, la versión aplicada a una población se define como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia.

$$\tau = \tau_{X,Y} = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

**Teorema 2.1.** Sean  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$  vectores independientes de variables aleatorias continuas, con función de distribución conjunta  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente, con marginales en común  $F$  para  $X_1$  y  $X_2$  y  $G$  para  $Y_1$  y  $Y_2$ . Sean  $C_1$  y  $C_2$  las cópulas de  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$  respectivamente con  $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$  y  $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ . Sea  $Q$  como se denotan las diferencias entre las probabilidades de concordancia y discordancia de  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$  i.e.

$$Q = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Entonces

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

### Demostración en el apéndice A.2

Esta medida de concordancia tiene una expresión definida para cada cópula en particular y por lo tanto su estimación es sencilla cuando se conoce la cópula asociada a las variables aleatorias.

## 2.2. Rho de Spearman

**Definición 2.5.**  $\rho$  de Spearman. Sean  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  y  $(X_3, Y_3)$  tres vectores independientes con función de distribución conjunta  $H$  y marginales  $F$  y  $G$  respectivamente. La versión aplicada a una población de la  $\rho$  de Spearman se define como la proporción de la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia de los vectores aleatorios  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_3)$  los cuales tienen las mismas marginales pero la distribución del primero es  $H$  y la distribución de  $(X_2, Y_3)$  es  $F(x)G(y)$  o se puede ver como  $\Pi$  ya que hay independencia.



$$\rho_{X,Y} = 3(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0])$$

**Teorema 2.2.** *Sea  $X$  y  $Y$  variables aleatorias continuas con la cópula  $C$ . Entonces la versión popular de la  $\rho$  de Spearman de  $X$  y  $Y$  está dada por:*

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= \rho_C = 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \int_{\mathbf{I}^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_{\mathbf{I}^2} C(u, v) dudv - 3 \end{aligned}$$

### Demostración en el apéndice A.2

De este teorema se obtiene la siguiente igualdad, ya que se sabe que  $C$  es la función de distribución del vector  $(F(X), G(Y))$  y por la proposición (1.3) se sabe que  $F(X), G(Y) \sim Unif(0, 1)$

$$\begin{aligned} 12 \iint_{\mathbf{I}^2} uv dC(u, v) - 3 &= 12\mathbb{E}[uv] - 3 \\ &= \frac{\mathbb{E}[uv] - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} \\ &= \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}} \\ &= \frac{Cov(F(X), G(Y))}{\sqrt{Var(F(X))}\sqrt{Var(G(Y))}} \\ &= \rho(F(X), G(Y)) \end{aligned}$$

## 2.3. Dependencia extrema

La dependencia puede tornarse inusual en las colas de las distribuciones (los cuantiles extremos ya sean superiores o inferiores); por esta razón existen medidas de dependencia que intentan determinar esta dependencia extrema entre las variables.

**Definición 2.6.** *Sea  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias con funciones de distribución  $F_1(x_1)$  y  $F_2(x_2)$ . El coeficiente de dependencia extrema superior [Upper] ( $\lambda_U$ ) es el límite (si existe) de la probabilidad condicional:*

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{\leftarrow}(t) \mid X_1 > F_1^{\leftarrow}(t)]$$

De la misma forma se define el coeficiente de dependencia extrema inferior [Lower]: ( $\lambda_L$ ).

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(t) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(t)]$$

y los coeficientes de dependencia extrema no positivas son los siguientes:

$$\lambda_{LU} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{\leftarrow}(1-t) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(t)]$$

$$\lambda_{UL} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(t) \mid X_1 > F_1^{\leftarrow}(1-t)]$$

Si algún  $\lambda > 0$  se dice que hay dependencia extrema. Por otro lado si  $\lambda_L = \lambda_U = \lambda_{LU} = \lambda_{UL} = 0$  se dice que  $X_1, X_2$  son asintóticamente independientes.

**Teorema 2.3.** (Nelsen 2006) Sea  $X_1, X_2$  variables aleatorias con  $F_1(x_1)$  y  $F_2(x_2)$  sus funciones de distribución respectivas y  $\lambda_U, \lambda_L, \lambda_{LU}$  y  $\lambda_{UL}$  los coeficientes de dependencia. Sea  $C$  la cópula de  $X_1$  y  $X_2$ . Si existen los límites entonces:

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t} \\ \lambda_U &= 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - C(1-t, 1-t)}{t} \\ \lambda_{LU} &= 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, 1-t)}{t} \\ \lambda_{UL} &= 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(1-t, t)}{t} \end{aligned}$$

### Demostración en el apéndice A.2

Estos coeficientes de dependencia pueden escribirse en términos de las cópulas asociadas simplemente sustituyendo la cópula  $C$  en términos de las cópulas  $\widehat{C}, C_{LU}, C_{UL}$  como se muestra a continuación:

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + t - 1 + C(1-t, 1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(t, t)}{t}$$

$$\lambda_{LU} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - C(t, 1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{LU}(t, t)}{t}$$

$$\lambda_{UL} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - C(1-t, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{UL}(t, t)}{t}$$

Esta forma de poder expresar a los coeficientes de dependencia extrema permite ligar la dependencia extrema con las cópulas asociadas a  $C$ . Otra forma en que se pueden calcular los coeficientes de dependencia extrema si  $C$  es diferenciable es en términos de sus derivadas. En ese caso las expresiones para  $\lambda_L$  y  $\lambda_U$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(t, t)}{\partial t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \frac{dt}{dt} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(t, t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial \widehat{C}(t, t)}{\partial t} \\ &= 2 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(1-t, 1-t)}{\partial t} \\ &= 2 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial 1-t}{\partial t} + \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \frac{\partial 1-t}{\partial t} \\ &= 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \\ &= 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\partial C(t, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Estás expresiones son análogas en el caso de  $\lambda_{UL}$  y  $\lambda_{LU}$ .

## 2.4. Función de dependencia extrema

En la parte del coeficiente de dependencia extrema se analizó el caso de lo que ocurría si ambas variables aleatorias se acercaban a sus extremos a la misma velocidad (en la diagonal de la cópula) pero esto se puede generalizar. ¿Qué ocurre cuando una variable tiende más rápido a sus valores extremos? la respuesta a esta pregunta se puede responder con una función que se define de la siguiente forma.

**Definición 2.7.** Sea  $F$  una función de distribución conjunta y continua, con su cópula correspondiente  $C$ . Si el siguiente límite existe para todo  $w_1, w_2 \in [0, \infty)^2$ :

$$\Lambda_L(w_1, w_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(tw_1, tw_2)}{t}$$

entonces la función  $\Lambda_U : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada la función de dependencia extrema inferior asociada a  $F$ . De la misma forma la función de dependencia extrema superior asociada a  $F$  es definida por.

$$\Lambda_U(w_1, w_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(tw_1, tw_2)}{t}$$

si el límite existe.

Para el caso trivariado la función de dependencia extrema inferior de una función de distribución trivariada  $F$  con cópula asociada  $C$  es:

$$\Lambda_L(w_1, w_2, w_3) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(tw_1, tw_2, tw_3)}{t}$$

Se puede reescribir la función de de dependencia extrema inferior correspondiente a  $F$  como:

$$\begin{aligned}
\Lambda_L(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(tw_1, tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(tw_1, tw_2)}{\partial t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial w_1 t}{\partial t} + \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \frac{\partial w_2 t}{\partial t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} + w_2 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(w_2 t) \mid X_1 = F_1^{\leftarrow}(w_1 t)] \\
&\quad + w_2 \mathbb{P}[X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(w_1 t) \mid X_2 = F_2^{\leftarrow}(w_2 t)] \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Y se puede reescribir la función de dependencia extrema superior correspondiente a F como:

$$\begin{aligned}
\Lambda_U(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(tw_1, tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial (w_1 t + w_2 t - 1 + C(1 - tw_1, 1 - tw_2))}{\partial t} \\
&= w_1 + w_2 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(1 - tw_1, 1 - tw_2)}{\partial t} \\
&= w_1 + w_2 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(1 - tw_1, 1 - tw_2)}{\partial t} \\
&= w_1 + w_2 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial (1 - w_1 t)}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \frac{\partial (1 - w_2 t)}{\partial t} \\
&= w_1 + w_2 + \lim_{t \rightarrow 0^+} -w_1 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\
&\quad - w_2 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \tag{2.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w_1 + w_2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(1 - w_2 t) \mid X_1 = F_1^{\leftarrow}(1 - w_1 t)] \\
&\quad - \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \mathbb{P}[X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(1 - w_1 t) \mid X_2 = F_2^{\leftarrow}(1 - w_2 t)] \tag{2.6} \\
&= w_1 \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \geq F_2^{\leftarrow}(1 - w_2 t) \mid X_1 = F_1^{\leftarrow}(1 - w_1 t)] \\
&\quad - w_2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_1 \geq F_1^{\leftarrow}(1 - w_1 t) \mid X_2 = F_2^{\leftarrow}(1 - w_2 t)]
\end{aligned}$$

Y por la proposición (1.4) las igualdades (2.4) y (2.6) son ciertas. Al igual que los coeficientes de dependencia extrema LU y UL existen las funciones

de dependencia extrema LU y UL y son definidas como:

$$\Lambda_{LU}(w_1, w_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{LU}(tw_1, tw_2)}{t}$$

$$\Lambda_{UL}(w_1, w_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{UL}(tw_1, tw_2)}{t}$$

La función de dependencia extrema inferior y superior tienen una relación con la función de distribución conjunta  $F$  con marginales  $F_1, F_2$  y la cópula correspondiente  $C$  y se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Lambda_L(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(tw_1, tw_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[U_1 \leq tw_1, U_2 \leq tw_2]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq tw_1, F_2(X_2) \leq tw_2]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(tw_1), X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(tw_2)]}{t} \end{aligned}$$

Para la función de dependencia extrema superior la relación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\Lambda_U(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(tw_1, tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tw_1 + tw_2 - 1 + C(1 - tw_1, 1 - tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \frac{tw_1 + tw_2 - 1 + C(1 - tw_1, 1 - tw_2)}{tw_2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \frac{tw_1 + tw_2 + \mathbb{P}[U_1 \leq 1 - tw_1, U_2 \leq 1 - tw_2] - 1}{\mathbb{P}[U_2 \leq w_2 t]} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \left[ \frac{\mathbb{P}[U_1 \leq tw_1] + \mathbb{P}[U_2 \leq tw_2]}{\mathbb{P}[U_2 \leq tw_2]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq 1 - tw_1, F_2(X_2) \leq 1 - tw_2] - 1}{\mathbb{P}[U_2 \leq tw_2]} \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \frac{tw_1 + tw_2 + \mathbb{P}[U_1 \leq 1 - tw_1, U_2 \leq 1 - tw_2] - 1}{\mathbb{P}[U_2 \leq w_2 t]} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \left[ \frac{\mathbb{P}[U_1 \leq tw_1] + \mathbb{P}[U_2 \leq tw_2]}{\mathbb{P}[1 - U_2 \leq tw_2]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq 1 - tw_1, F_2(X_2) \leq 1 - tw_2] - 1}{\mathbb{P}[1 - U_2 \leq tw_2]} \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \frac{\mathbb{P}[F_1(X_1) > 1 - tw_1, F_2(X_2) > 1 - tw_2]}{\mathbb{P}[F_2(X_2) > 1 - tw_2]} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \frac{\mathbb{P}[F_1(X_1) > 1 - tw_1, F_2(X_2) > 1 - tw_2]}{tw_2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[X_1 > F_1^{\leftarrow}(1 - tw_1), X_2 > F_2^{\leftarrow}(1 - tw_2)]}{t}
\end{aligned}$$

Los coeficientes de correlación se pueden escribir en términos de la función de de dependencia extrema superior, inferior, LU y UL respectivamente si son evaluadas en (1,1).

$$\begin{aligned}
\Lambda_L(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(u_1, u_2)}{t} \\
&= \lambda_L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_U(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(u_1, u_2)}{t} \\ &= \lambda_U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{LU}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{LU}(u_1, u_2)}{t} \\ &= \lambda_{LU}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{UL}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{UL}(u_1, u_2)}{t} \\ &= \lambda_{UL}\end{aligned}$$

Estás funciones de dependencia extrema no positiva tienen una propiedad muy útil en el caso de las cópulas Arquimedianas la cual se muestra en la sección de cópulas Arquimedianas.

Las principales propiedades de  $\Lambda$  son las siguientes:

**Teorema 2.4.** (Schmidt y Stadtmüller, 2005) Si las funciones límite  $\Lambda_U(w_1, w_2)$  y  $\Lambda_L(w_1, w_2)$ , para  $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  existen, tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $\Lambda_U(w_1, 0) = \Lambda_L(0, w_2) = \Lambda_L(w_1, 0) = \Lambda_U(0, w_2) = 0$  para toda  $w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , y  $\Lambda_U(w_1, \infty) = \Lambda_L(w_1, \infty) = w_1$  y  $\Lambda_U(\infty, w_2) = \Lambda_L(\infty, w_2) = w_2$  para toda  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}_+$
- (ii) (**Homogeneidad**)  $\Lambda_U(hw_1, hw_2) = h\Lambda_U(w_1, w_2)$  y  $\Lambda_L(hw_1, hw_2) = h\Lambda_L(w_1, w_2)$  para toda  $h > 0$  y  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}_+$
- (iii)  $\Lambda_U(w_1, w_2)$  y  $\Lambda_L(w_1, w_2)$  son no decrecientes y Lipschitz continuas.
- (iv)  $\Lambda_U(w_1, w_2)$  y  $\Lambda_L(w_1, w_2)$  son no 0 en todas partes si no desaparece en un sólo punto  $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2$ . Por lo tanto  $\Lambda_U(w_1, w_2) = 0$  ( $\Lambda_L(w_1, w_2) = 0$ ) para toda  $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2$  en el caso de independencia extrema superior (inferior).
- (v) (**Uniformidad**) los límites para  $\Lambda_U(w_1, w_2)$  y  $\Lambda_L(w_1, w_2)$  son uniformes para  $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2$



### Demostración en el apéndice A.2

Las siguientes propiedades las tiene la función de dependencia extrema inferior sin embargo existen las propiedades análogas para la función de dependencia extrema superior.

**Teorema 2.5.** (Schmidt y Stadtmüller, 2005) Si existe la función  $\Lambda(w_1, w_2)$ ,  $(w'_1, w'_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$  la función de dependencia extrema inferior entonces para toda  $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$  tal que  $w_1 < w'_1, w_2 < w'_2$  tiene las siguientes propiedades.

- (i) (**Límites Fréchet-Hoeffding**)  $0 \leq \Lambda(w_1, w_2) \leq \min\{w_1, w_2\}$
- (ii) Para  $a, b > 0$ :  $\min\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2) \leq \Lambda(aw_1, bw_2) \leq \max\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2)$
- (iii) (**2-creciente**)  $\Lambda(w'_1, w'_2) - \Lambda(w'_1, w_2) - \Lambda(w_1, w'_2) + \Lambda(w_1, w_2) \geq 0$
- (iv) (**monotonía estricta**) Para  $\Lambda \not\equiv 0$ :  $\Lambda(w_1, w_2) < \Lambda(w'_1, w'_2)$  si  $w_1 < w'_1$  y  $w_2 < w'_2$
- (v) Si  $\Lambda$  existe para  $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^2$  con  $w_1^2 + w_2^2 = 1$  entonces existe en todas partes sobre  $\overline{\mathbb{R}}_+^2$

### Demostración en el apéndice A.2

La dependencia extrema entre las variables no se puede describir de forma completa sólo con un coeficiente por lo que la función de dependencia extrema nos da un vistazo mucho más profundo de cómo es la dependencia.

Con el estudio de las medidas de dependencia y de dependencia extrema y teoría de cópulas, se obtuvieron expresiones en términos de la cópula de las variables aleatorias, lo que permite una estimación sencilla con ayuda de las familias paramétricas y las cópulas empíricas, como se ve en los capítulos siguientes.

# Capítulo 3

## Modelos paramétricos

Al igual que en las funciones de distribución conjunta, existen modelos paramétricos de cópulas que facilitan el ajuste de un modelo de dependencia siempre que se tenga información de la naturaleza de los datos, ya que cada una de las familias cuenta con propiedades útiles y formas específicas para la dependencia extrema. En este capítulo se estudian dos familias paramétricas y el modelo D de las cópulas en viñas.

### 3.1. Cópulas elípticas

Una familia de cópulas muy utilizada es la familia de Cópulas elípticas, las cuales provienen de la estructura de dependencia de las funciones de distribución elípticas, tales como la distribución normal y t-student. Para poder entender estas cópulas primeramente se debe definir que es una distribución elíptica.

**Definición 3.1.** *El vector  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  tiene una distribución elíptica bivariada denotada como  $\mathbf{X} \sim El(\mu, \Sigma, \psi)$ , si para todo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  la función característica tiene la forma:*

$$\varphi(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = \exp(i\mathbf{x}'\mu)\psi\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}\right)$$

*Con  $\mu$  un vector,  $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  una matriz simétrica definida positiva y  $\psi$  una función llamada el generador característico.*

**Definición 3.2.** *Sea  $\mathbf{X} \sim El(\mu, \Sigma, \psi)$  si su densidad existe esta se escribe de la siguiente forma:*

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{K}{\sqrt{|\Sigma|}} g \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{\leftarrow} (\mathbf{x} - \mu) \right]$$

para alguna función  $g$  llamada generador de densidad. La condición

$$\int_0^{\infty} g(x) dx < \infty$$

garantiza que  $g$  sea un generador de densidad bivariado. La constante que normaliza  $K$  se puede expresar como:

$$K = \frac{1}{(2\pi)} \left[ \int_0^{\infty} g(x) dx \right]^{\leftarrow}$$

Las cópulas elípticas al ser la estructura de dependencia de funciones de distribución elípticas tienen propiedades de estas, las cuales son muy utilizadas, como la simetría.

**Definición 3.3.** Sean  $X_1, X_2$  variables aleatorias y  $x_1, x_2$  un punto sobre  $\mathbb{R}^2$ . Se dice que  $(X_1, X_2)$  son radialmente simétricos sobre  $x_1, x_2$  si la distribución conjunta  $(X - a, Y - b) \stackrel{d}{=} (a - X, b - Y)$ .

*Y se dice que  $(X_1, X_2)$  son conjuntamente simétricas sobre  $x_1, x_2$  si la distribución conjunta  $(X - a, Y - b) \stackrel{d}{=} (a - X, b - Y) \stackrel{d}{=} (a - X, Y - b) \stackrel{d}{=} (X - a, b - Y)$*

**Observación 3.1.** Sea  $F$  una función de distribución conjunta elíptica bivariada estandarizada (i.e. tiene media 0 y con matriz de correlaciones  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ ) con función de densidad  $f_{\rho}$  entonces:

$$f_{\rho}(x_1, x_2) = f_{\rho}(-x_1, -x_2) = f_{-\rho}(-x_1, x_2) = f_{-\rho}(x_1, -x_2)$$

### Demostración en el apéndice A.3

La simetría nos permite poder hacer una relación entre las cópulas asociadas y las respectivas medidas de dependencia.

**Observación 3.2.** Sea  $F$  una función de distribución elíptica univariada estandarizada con función de densidad  $f$ , entonces esta se puede escribir de la siguiente forma:  $f_X(x) = \frac{K}{\sqrt{\sigma^2}} g\left(\frac{x^2}{2(\sigma^2)}\right)$

Este resultado nos permite llegar a un resultado similar al resultado (3.1) pero para funciones univariadas la cual es que para toda  $x$ .

$$f(x) = f(-x)$$

Y establecer la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X \leq x] &= \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-x}^{\infty} f(x)dx = \mathbb{P}[X > -x] \\ F(x) &= 1 - F(-x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ya que en el caso de las funciones elípticas la función de distribución es continua la relación de simetría respecto a ínfimos es la siguiente:

$$\inf\{x : F(x) \geq u\} = -\sup\{x : 1 - F(-x) \geq u\} = -\sup\{x : F(-x) \leq 1 - u\}$$

esto se puede ver como:

$$-\inf\{x : F(-x) \geq 1 - u\} \tag{3.2}$$

**Observación 3.3.** Sea  $F$  un función de distribución elíptica univariada y  $U \sim Unif(0, 1)$ , entonces  $F(U) = -F^{\leftarrow}(1 - U)$

### Demostración en el apéndice A.3

Sea  $F$  una función de distribución elíptica bivariada, con función de densidad  $f$ , con marginales elípticas  $F_1$  y  $F_2$  y con  $C$  su cópula correspondiente. Por el corolario (1.1) del teorema de Sklar se obtiene:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{F_1^{\leftarrow}(u_1)} \int_{-\infty}^{F_2^{\leftarrow}(u_2)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\tag{3.4}$$

Sea  $\widehat{C}$  la cópula de supervivencia asociada entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}
\widehat{C}(u_1, u_2) &= \mathbb{P}[1 - U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2] \\
&= \mathbb{P}[U_1 \geq 1 - u_1, U_2 \geq 1 - u_2] \\
&= \int_{F_1^{\leftarrow}(1-u_1)}^{\infty} \int_{F_2^{\leftarrow}(1-u_2)}^{\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{F_1^{\leftarrow}(1-u_1)}^{\infty} \int_{F_2^{\leftarrow}(1-u_2)}^{\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{-F_1^{\leftarrow}(u_1)}^{\infty} \int_{-F_2^{\leftarrow}(u_2)}^{\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{F_1^{\leftarrow}(u_1)}^{\infty} \int_{F_2^{\leftarrow}(u_2)}^{\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{3.6} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

la igualdad ( 3.5) surge del resultado ( 3.3) y la igualdad (3.6) es cierta por los resultados ( 3.1) y (3.2). Con estas dos cópulas obtenidas se observa:

$$\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= \int_{-\infty}^{F_1^{\leftarrow}(u_1)} \int_{-\infty}^{F_2^{\leftarrow}(u_2)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \widehat{C}(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

notando que la cópula y la cópula de supervivencia para las funciones de distribución elípticas son la misma, por esto se llega a la conclusión de que las cópulas elípticas son simétricas.

Esta relación para las cópulas elípticas bivariadas es la siguiente:

$$C_\rho(u_1, u_2) = \widehat{C}_\rho(u_1, u_2) = C_{LU, -\rho}(u_1, u_2) = C_{UL, -\rho}(u_1, u_2)$$

Los cópulas elípticas más importantes son la cópula Gaussiana y la cópula t-student las cuales se analizan a continuación.

### 3.1.1. Cópula Gaussiana y t-student

Estas dos cópulas son conocidas como cópulas implícitas ya que no tienen una forma cerrada sencilla por lo que no se pueden expresar de forma

explícita para casos particulares además son muy utilizadas en la práctica.

La cópula gaussiana se define de la siguiente forma, sea  $Y \sim N_2(\mu, \Sigma)$  donde  $N_2$  denota una función normal bivariada. La cópula asociada a  $Y$  se dice que es una cópula gaussiana, al aplicar la transformación para estandarizar las marginales, se aplican transformaciones estrictamente crecientes por lo que la cópula resultante es la misma para el vector  $X \sim N_2(\mathbf{0}, P)$  donde  $P = \rho(\Sigma)$  es la matriz de correlación de  $Y$  y por (1.1) se tiene

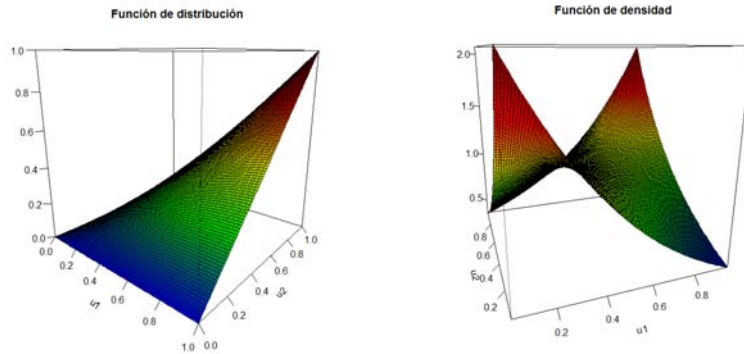
$$C_P^{Ga}(u_1, u_2) = \Phi_P(\phi^{\leftarrow}(u_1), \phi^{\leftarrow}(u_2))$$

La forma de esta cópula estaría dada por la expresión (3.3) y sería:

$$\int_{-\infty}^{\phi^{\leftarrow}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{\leftarrow}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} d\mathbf{x}$$

Esta expresión no es sencilla de calcular por lo que su simulación y ajuste se hacen directamente de la expresión dada por el corolario (1.1). Gráficamente tiene la siguiente forma:

Figura 3.1: Gráficas de la cópula Gaussiana con parámetro  $\rho = .5$

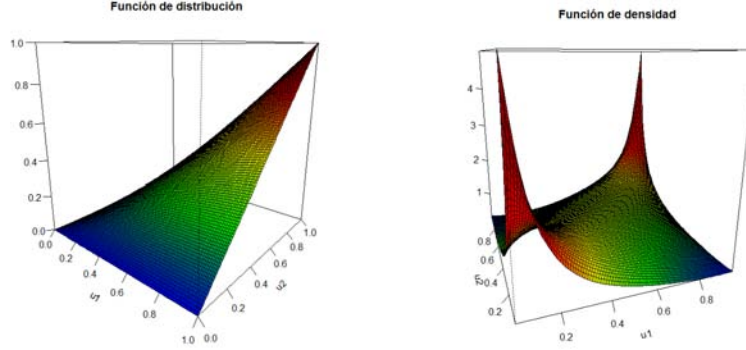


De la misma forma la cópula t-student al ser elíptica toma la forma

$$C_{v,P}^t(u_1, u_2) = \mathbf{t}_{v,P}(t_v^{\leftarrow}(u_1), t_v^{\leftarrow}(u_2))$$

donde  $\mathbf{t}_{v,P}$  es la función de distribución conjunta del vector  $X \sim t_2(v, \mathbf{0}, P)$  donde  $P$  es la matriz de correlaciones y  $v$  son los grados de libertad.

Gráficamente tiene la siguiente forma:

Figura 3.2: Gráficas de la cópula t-student con parámetros  $P = .5$  y  $v = 5$ 

Para el cálculo de los coeficientes de dependencia extrema para ambas funciones se calculan primero las funciones de dependencia extrema las cuales son las siguiente:

Sea  $(X_1, X_2) = (\phi^{\leftarrow}(U_1), \phi^{\leftarrow}(U_2))$  con  $U_1, U_2 \sim Unif(0, 1)$  tal que  $(X_1, X_2)$  tienen una distribución normal bivariada con marginales estandarizadas y correlación  $\rho$ , se desarrolla la función de dependencia  $\lambda_L$  dada por la expresión ( 2.4)

$$\begin{aligned}
 \Lambda_L(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \mathbb{P}[U_1 \leq w_1 t | U_2 = w_2 t] + w_1 \mathbb{P}[U_2 \leq w_2 t | U_1 = w_1 t] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \mathbb{P}[\phi(X_1) \leq w_1 t | \phi(X_2) = w_2 t] \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \mathbb{P}[\phi(X_2) \leq w_2 t | \phi(X_1) = w_1 t] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \mathbb{P}[X_1 \leq \phi^{\leftarrow}(w_1 t) | X_2 = \phi^{\leftarrow}(w_2 t)] \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \mathbb{P}[X_2 \leq \phi^{\leftarrow}(w_2 t) | X_1 = \phi^{\leftarrow}(w_1 t)]
 \end{aligned}$$

Se utiliza el hecho que  $(X_1 | X_2 = x) \sim N(\rho x, 1 - \rho^2)$  y que la cópula Gaussiana es diferenciable. Entonces desarrollando la expresión anterior, si se le llama  $A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_1 \leq \phi^{\leftarrow}(w_1 t) | X_2 = \phi^{\leftarrow}(w_2 t)]$  se tiene:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_1 \leq \phi^{\leftarrow}(w_1 t) | X_2 = \phi^{\leftarrow}(w_2 t)] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}\left[\frac{X_1 - \rho \phi^{\leftarrow}(w_1 t)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \leq \frac{\phi^{\leftarrow}(w_2 t) - \rho \phi^{\leftarrow}(w_1 t)}{\sqrt{1 - \rho^2}} | X_2 = \phi^{\leftarrow}(w_2 t)\right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi\left(\frac{\phi^{\leftarrow}(w_2 t) - \rho \phi^{\leftarrow}(w_1 t)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi\left(\phi^{\leftarrow}(w_1 t) \frac{\frac{\phi^{\leftarrow}(w_2 t)}{\phi^{\leftarrow}(w_1 t)} - \rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)
\end{aligned}$$

ya que en el límite  $\frac{\phi^{\leftarrow}(w_2 t)}{\phi^{\leftarrow}(w_1 t)} = 1$  al ser  $\phi^{\leftarrow}$  de variación lenta se obtienen la función

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi\left(\phi^{\leftarrow}(w_1 t) \frac{\sqrt{1 - \rho}}{\sqrt{1 + \rho}}\right)$$

cuando  $t \rightarrow 0^+$  se obtiene (abusando de la notación)  $\phi\left(-\infty \frac{1 - \rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) = 0$  por lo tanto  $\Lambda_L(w_1, w_2) = w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 = 0$  para todo  $(w_1, w_2) \in [0, \infty)^2$  en particular (1,1) con lo que  $\lambda_L = 0$  y dado que es una cópula elíptica (que son simétricas) se obtiene que  $\lambda_{U, \rho} = \lambda_{LU, -\rho} = \lambda_{UL, -\rho} = 0$  esto motiva a decir que la cópula Gaussiana es asintóticamente independiente en valores extremos. La siguiente gráfica es una simulación que ilustra este hecho.

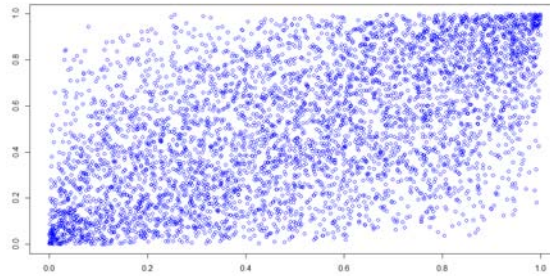


Figura 3.3: cópula Gaussiana  $\rho = .8$

Para el caso de los coeficientes de dependencia extrema en la cópula t-student debido a que es diferenciable se procede de forma muy similar que en el caso de la cópula Gaussiana.



Sea  $(X_1, X_2) = (t_v^{\leftarrow}(U_1), t_v^{\leftarrow}(U_2))$  con  $U_1, U_2 \sim Unif(0, 1)$  tal que  $(X_1, X_2) \sim \mathbf{t}_2(v, 0, P)$  es una distribución t-student bivariada con marginales t-student con  $v$  grados de libertad y matriz de correlaciones  $P$  con el elemento  $\rho$  fuera de la diagonal, se desarrolla el coeficiente de dependencia  $\Lambda_L$  y  $\Lambda_U$  de esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Lambda_L(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \mathbb{P}[U_1 \leq w_1 t | U_2 = w_2 t] + w_1 \mathbb{P}[U_2 \leq w_2 t | U_1 = w_1 t] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \mathbb{P}[t_v(X_1) \leq w_1 t | t_v(X_2) = w_2 t] \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \mathbb{P}[t_v(X_2) \leq w_2 t | t_v(X_1) = w_1 t] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 \mathbb{P}[X_1 \leq t_v^{\leftarrow}(w_1 t) | X_2 = t_v^{\leftarrow}(w_2 t)] \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \mathbb{P}[X_2 \leq t_v^{\leftarrow}(w_2 t) | X_1 = t_v^{\leftarrow}(w_1 t)]
\end{aligned}$$

Se utiliza el hecho que  $X_1$  condicionado a  $X_2 = x$  y cumple que

$$\left(\frac{v+1}{v+x^2}\right) \frac{X_1 | 2-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{v+1}$$

Y utilizando la notación  $A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_1 \leq t_v^{\leftarrow}(w_1 t) | X_2 = t_v^{\leftarrow}(w_2 t)]$  se tiene:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P} \left[ \left( \frac{v+1}{v + (t_v^{\leftarrow}(w_2 t))^2} \right)^{1/2} \frac{X_1 - \rho t_v^{\leftarrow}(w_2 t)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right. \\
&\quad \left. \leq \frac{v+1}{v + (t_v^{\leftarrow}(w_2 t))^2} \frac{t_v^{\leftarrow}(w_1 t) - \rho t_v^{\leftarrow}(w_2 t)}{\sqrt{1-\rho^2}} \middle| X_2 = t_v^{\leftarrow}(w_2 t) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} t_{v+1} \left( \left( \frac{v+1}{v + t_v^{\leftarrow}(w_2 t)^2} \right)^{1/2} \frac{t_v^{\leftarrow}(w_1 t) - \rho t_v^{\leftarrow}(w_2 t)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} t_{v+1} \left( \left( \frac{v+1}{\frac{v}{t_v^{\leftarrow}(w_2 t)^2} + 1} \right)^{1/2} \frac{\frac{t_v^{\leftarrow}(w_1 t)}{t_v^{\leftarrow}(w_2 t)} - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)
\end{aligned}$$

Se sabe que para valores pequeños de  $t$  (ya que se aproxima a 0) la función cuantil es negativa y tomando en cuenta el hecho que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t_v^{\leftarrow}(w_1 t)}{t_v^{\leftarrow}(w_2 t)} = \frac{w_2^{\frac{1}{v}}}{w_1}$ .

Por lo tanto cuando  $t \rightarrow 0^+$  se obtiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_1 \leq t_v^{\leftarrow}(w_1 t) | X_2 = t_v^{\leftarrow}(w_2 t)] &= t_{v+1}\left(-\sqrt{\frac{v+1}{0+1}} \frac{\frac{w_2^{\frac{1}{v}} - \rho}{w_1} - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ &= t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{\frac{w_2^{\frac{1}{v}} - \rho}{w_1} - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{aligned}$$

Por lo que la función de dependencia extrema positiva es

$$\Lambda_U(w_1, w_2) = w_2 t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{\frac{w_2^{\frac{1}{v}} - \rho}{w_1} - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + w_1 t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{\frac{w_1^{\frac{1}{v}} - \rho}{w_2} - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

Ya que es una cópula elíptica es simétrica y la función de dependencia extrema para la cópula de supervivencia asociada es la misma por lo tanto

$\Lambda_U = \Lambda_L = w_2 t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{\frac{w_2^{\frac{1}{v}} - \rho}{w_1} - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + w_1 t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{\frac{w_1^{\frac{1}{v}} - \rho}{w_2} - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$ . Y para el caso de las funciones de  $\Lambda_{UL}$  y  $\Lambda_{LU}$  se tienen que es

$$\Lambda_{LU} = \Lambda_{UL} = w_2 t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{\frac{w_2^{\frac{1}{v}} + \rho}{w_1} + \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + w_1 t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{\frac{w_1^{\frac{1}{v}} + \rho}{w_2} + \rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

Para obtener los coeficientes de dependencia extrema para cada caso es suficiente con evaluar estas funciones en el (1,1) lo que da como resultado

$$\begin{aligned} \lambda_L = \lambda_U &= 2t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ \lambda_{LU} = \lambda_{UL} &= 2t_{v+1}\left(-\sqrt{v+1} \frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{aligned}$$

Estos coeficientes se estiman más adelante en el caso práctico. La siguiente gráfica es una simulación que ilustra esta cópula.

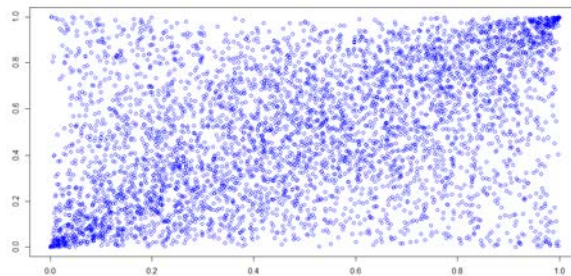


Figura 3.4: cópula t-student  $\rho = .5$  y  $v=2.5$

Cabe señalar que en caso de que las marginales t-student no tengan los mismos grados de libertad aunque seguira siendo una cópula t-student, ya que por el teorema de Sklar las marginales son separadas de la función de dependencia, las funciones de dependencia extrema no serían simétricas.

## 3.2. Familias Arquimedianas

### Cópulas Arquimedianas

Un tipo de cópulas paramétricas son las cópulas Arquimedianas, estas cópulas son definidas a partir de su construcción la cual debe ser por una función generadora la cual se define a continuación.

**Definición 3.4** (Función generadora). *Sea  $\varphi$  una función continua y estrictamente decreciente de  $\mathbf{I}$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\varphi(1) = 0$ . La pseudo-inversa de  $\varphi$  es la función  $\varphi^{[-1]}$  con  $\text{Dom}\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$  y el  $\text{Ran}\varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$  dada por:*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{\leftarrow}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

nótese que  $\varphi^{[-1]}$  es una función continua no creciente sobre  $[0, \infty]$  y estrictamente decreciente sobre  $[0, \varphi^{[-1]}(0)]$  además  $\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) = t$  sobre  $\mathbf{I}$  y

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$\varphi$  es llamado un generador estricto cuando  $\varphi(0) = \infty$ . Se debe notar que si  $\varphi$  es un generador estricto entonces  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{\leftarrow}$ . A partir de esta función se demuestra bajo que condiciones las funciones de la forma  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$  son cópula.

**Lema 3.1.** *Sea  $\varphi$  una función continua y estrictamente decreciente de  $\mathbf{I}$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\varphi(1) = 0$  y sea  $\varphi^{[-1]}$  su pseudo-inversa (definida anteriormente). Sea  $C$  una función definida de  $\mathbf{I}^2$  a  $\mathbf{I}$  dada por:*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (3.7)$$

entonces  $C$  satisface ([1]) de la definición ( 1.4) de cópula .

### Demostración en el apéndice A.3

Con el siguiente lema se obtienen las condiciones suficientes y necesarias para que  $C$  sea 2-creciente.

**Lema 3.2.** *Sea  $\varphi, \varphi^{[-1]}$  y  $C$  tal que satisface las hipótesis del lema anterior entonces  $C$  de la forma (3.7) es 2-creciente si y sólo si para toda  $v$  en  $\mathbf{I}$  para toda  $u_1 \leq u_2$ ,*

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1 \quad (3.8)$$

### Demostración en el apéndice A.3

Con estos lemas se tienen lo suficiente para demostrar el teorema de las cópulas Arquimedianas.

**Definición 3.5.** *Una función real  $f$  definida en un intervalo se llama función convexa si está definida sobre un conjunto convexo  $A$  y para cualesquiera dos puntos  $x, y \in A$  y para cada  $t \in [0, 1]$  se cumple que:*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

**Teorema 3.1.** *Sea  $\varphi$  una función continua y estrictamente decreciente de  $\mathbf{I}$  a  $[0, \infty]$  tal que  $\varphi(1) = 0$  y sea  $\varphi^{[-1]}$  su pseudo-inversa.  $C$  una función definida de  $\mathbf{I}^2$  a  $\mathbf{I}$  dada por  $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$  es una cópula si y sólo si  $\varphi$  es una función convexa.*

### Demostración en el apéndice A.3

Las cópulas de la forma  $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$  son llamadas cópulas Arquimedianas. Este tipo de cópulas paramétricas tienen familias entre ellas las cópulas Gumbel, Clayton y Frank las cuales son utilizadas para modelar datos financieros y calcular sus funciones y coeficientes de dependencia extrema, las cuales se analizan en la siguiente sección. Una propiedad importante de las cópulas Arquimedianas es la siguiente

**Proposición 3.1.** *Sea  $C$  una cópula Arquimediana con  $\varphi$  estricto y diferenciable. Entonces si la función de dependencia extrema correspondiente  $\Lambda_{LU}$  o  $\Lambda_{UL}$  existe es igual a 0.*

### Demostración en el apéndice A.3

Esta propiedad es importante ya que las siguientes cópulas tienen familia generadora estricta y diferenciable por lo tanto su  $\Lambda_{LU} = \Lambda_{UL} \equiv 0$ . A continuación se estudian tres de las cópulas Arquimedianas más utilizadas.

### 3.2.1. Cópula Gumbel

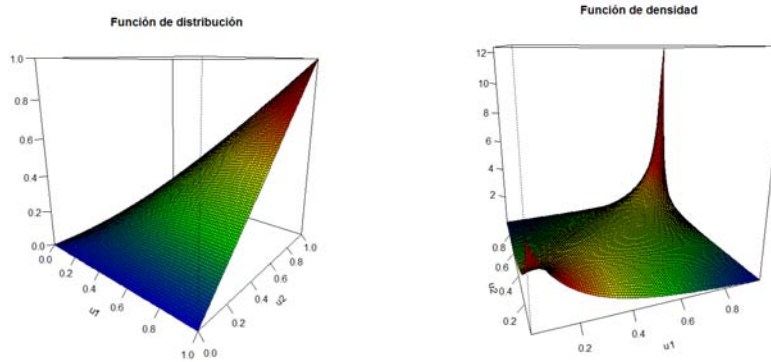
La cópula bivariada Gumbel:

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp\{-((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta)^{1/\theta}\}$$

con  $u_1, u_2 \in [0, 1]$  y  $1 \leq \theta < \infty$

Por lo tanto se puede deducir que su familia generadora es  $\varphi_\theta(t) = (-\ln(t))^\theta$  y gráficamente tiene la siguiente forma:

Figura 3.5: Gráficas de la cópula Gumbel con parámetro  $\theta = 2$



Es conocida como una cópula de dependencia extrema superior, para  $\theta = 1$  representa la cópula de independencia y cuando  $\theta \rightarrow \infty$  es la cópula monotónica por lo que se dice que interpola entre estas dos cópulas.

Para obtener el coeficiente de dependencia de extrema superior para la cópula Gumbel se calcula la función de dependencia extrema superior y debido a que es diferenciable se puede escribir de la forma (2.3):

$$\Lambda_U = w_1 + w_2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} + w_2 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2}$$

se obtiene la parcial de C respecto a  $u_1$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= \frac{\exp\{-((- \ln(u_1))^\theta + (- \ln(u_2))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\}}{\partial u_1} \\
 &= \exp\{-((- \ln(u_1))^\theta + (- \ln(u_2))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\} \\
 &\quad \cdot \left(\frac{-1}{\theta}((- \ln(u_1))^\theta + (- \ln(u_2))^\theta)^{\theta-1} \cdot \theta \frac{(- \ln(u_1))^{\theta-1}}{-u_1}\right) \\
 &= C(u_1, u_2) \frac{1}{u_1} \left[1 + \left(\frac{\ln(u_2)}{\ln(u_1)}\right)^\theta\right]^{\frac{1-\theta}{\theta}}
 \end{aligned}$$

Se sabe que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - w_2 t)}{\ln(1 - w_1 t)} = \frac{w_2}{w_1}$  y evaluando en límite se obtiene :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= C(1, 1) \cdot 1 \cdot \left[1 + \frac{w_2^\theta}{w_1}\right]^{\frac{1-\theta}{\theta}} \\
 &= (w_1^\theta + w_2^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} w_1^{\theta-1}
 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_U &= w_1 + w_2 - (w_1 \cdot (w_1^\theta + w_2^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} w_1^{\theta-1} + w_2 \cdot (w_1^\theta + w_2^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1} w_2^{\theta-1}) \\
 &= w_1 + w_2 - ((w_1^\theta + w_2^\theta) \cdot (w_1^\theta + w_2^\theta)^{\frac{1}{\theta}-1}) \\
 &= w_1 + w_2 - (w_1^\theta + w_2^\theta)^{\frac{1}{\theta}}
 \end{aligned}$$

Por otra parte para el caso de  $\lambda_L$  se evalúa en  $C(t,t)$  directamente, la expresión obtenida es :

$$\begin{aligned}
 C(t, t) &= \exp\{-((- \ln(t))^\theta + (- \ln(t))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\} \\
 &= \exp\{-((- 2 \ln(t))^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\} \\
 &= t^{2^{\frac{1}{\theta}}}
 \end{aligned}$$

evaluando en el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{2^{\frac{1}{\theta}}} = 0$$

lo que dice que  $\lambda_L = 0$  por el teorema (2.4) la propiedad (iv) se tiene que  $\Lambda_L \equiv 0$ .

Y por el teorema (3.1) se sabe que las funciones  $\Lambda_{LU} = \Lambda_{UL} = 0$  entonces los coeficientes  $\lambda_{LU} = \lambda_{UL} = 0$  y sólo tiene coeficiente de dependencia extrema superior. La siguiente gráfica es una simulación de la cópula Gumbel.

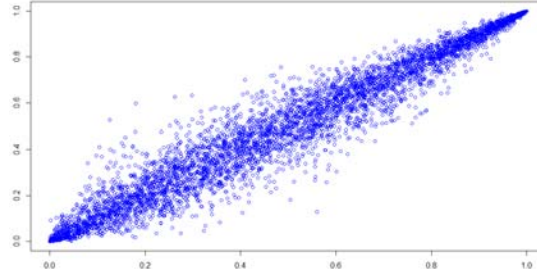


Figura 3.6: cópula Gumbel  $\theta = 7$

### 3.2.2. Cópula Clayton

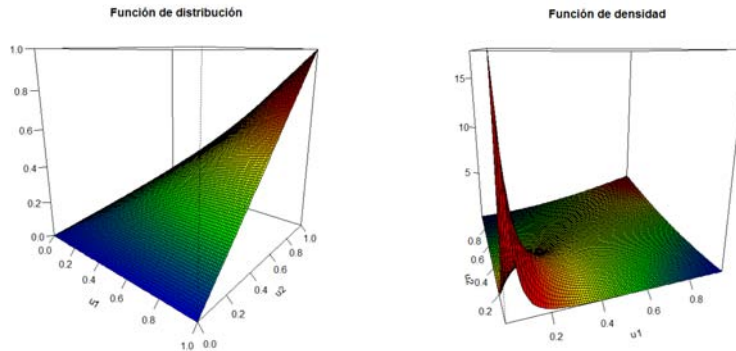
La cópula bivariada Clayton es la siguiente:

$$C_{\theta}(u_1, u_2) = \max\{(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\}$$

con  $u_1, u_2 \in [0, 1]$  y  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$

Por lo tanto se puede deducir que su familia generadora es  $\varphi_{\theta}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$  y gráficamente tiene la siguiente forma:

Figura 3.7: Gráficas de la cópula Clayton con parámetro  $\theta = 2$



Es conocida como una cópula de dependencia extrema inferior y cuando  $\theta = -1$  es la cópula contramonotónica, con  $\theta \rightarrow 0$  es la cópula independiente y con  $\theta \rightarrow \infty$  es la cópula monotónica.

Para obtener el coeficiente de dependencia extrema inferior de la cópula Clayton se calcula la función de dependencia extrema inferior :

$$\Lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w_1 t, w_2 t)}{t}$$

sustituyendo directamente se obtiene:

$$\begin{aligned} \Lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w_1 t, w_2 t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \max\{((w_1 t)^{-\theta} + (w_2 t)^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \max\{((w_1)^{-\theta} + (w_2)^{-\theta} - t^\theta)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\} \\ &= \max\{((w_1)^{-\theta} + (w_2)^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}, 0\} \\ &= ((w_1)^{-\theta} + (w_2)^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

para obtener  $\Lambda_U$  se calcula la derivada de C respecto a  $u_1$  y se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= \frac{-1}{\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1-\theta}{\theta}} (-\theta u_1^{-\theta-1}) \\ &= (1 + \frac{u_2}{u_1})^{-\theta} - u_1^\theta)^{-\frac{1-\theta}{\theta}} \end{aligned}$$

de esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} \Lambda_U &= w_1 + w_2 + \lim_{t \rightarrow 0^-} -w_1 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} - w_2 \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \\ &= w_1 + w_2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 (1 + (\frac{1-w_2 t}{1-w_1 t})^{-\theta} - (1-w_1 t)^\theta)^{-\frac{1-\theta}{\theta}} \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow 0^+} w_2 (1 + (\frac{1-w_1 t}{1-w_2 t})^{-\theta} - (1-w_2 t)^\theta)^{-\frac{1-\theta}{\theta}} \\ &= w_1 + w_2 - (w_1 (1 + (1)^{-\theta} - 1^\theta)^{-\frac{1-\theta}{\theta}} + w_2 (1 + (1)^{-\theta} - 1^\theta)^{-\frac{1-\theta}{\theta}}) \\ &= w_1 + w_2 - (w_1 (1)^{-\frac{1-\theta}{\theta}} + w_2 (1)^{-\frac{1-\theta}{\theta}}) \\ &= w_1 + w_2 - (w_1 + w_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$



Y por el teorema (3.1) se tiene que las funciones  $\Lambda_{LU} = \Lambda_{UL} = 0$  entonces los coeficientes  $\lambda_{LU} = \lambda_{UL} = 0$  y al contrario que la cópula Gumbel sólo tiene coeficiente de dependencia extrema inferior. La siguiente gráfica es una simulación de la cópula Clayton.

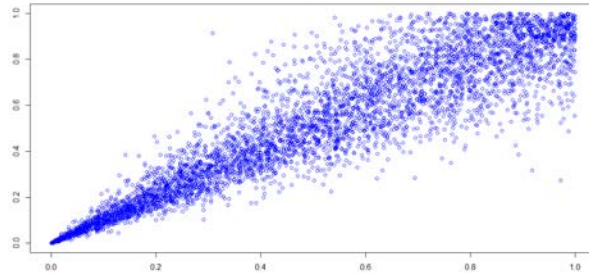


Figura 3.8: cópula Clayton  $\theta = 7$

### 3.2.3. Cópula Frank

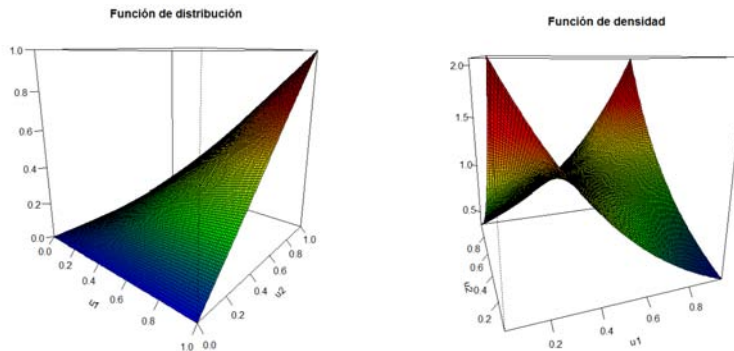
La cópula bivariada Frank :

$$C_{\theta}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(\exp(-u_1\theta) - 1)(\exp(-u_2\theta) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right)$$

con  $u_1, u_2 \in [0, 1]$  y  $\theta \in \mathbb{R}$

Por lo tanto se puede deducir que su familia generadora es  $\varphi_{\theta}(t) = -\ln \left( \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)$  y gráficamente tiene la siguiente forma:

Figura 3.9: Gráficas de la cópula Frank con parámetro  $\theta = 2$



Esta cópula concentra las probabilidades en la dependencia superior y en la dependencia inferior pero no en valores extremos. Se calculan las funciones

de dependencia.

Se desarrollan las expresiones (2.3) y (2.5). Se comienza calculando las parciales.

La parcial respecto a  $u_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= \frac{\partial -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(\exp(-u_1\theta)-1)(\exp(-u_2\theta)-1)}{\exp(-\theta)-1} \right)}{\partial u_1} \\
&= -\frac{1}{\theta} \frac{\frac{(\exp(-u_2\theta)-1)}{\exp(-\theta)-1} (-\theta \exp(-u_1\theta))}{1 + \frac{(\exp(-u_1\theta)-1)(\exp(-u_2\theta)-1)}{\exp(-\theta)-1}} \\
&= \frac{\frac{(\exp(-u_2\theta)-1)}{\exp(-\theta)-1} \exp(-u_1\theta)}{\frac{\exp(-\theta)-1 + (\exp(-u_1\theta)-1)(\exp(-u_2\theta)-1)}{\exp(-\theta)-1}} \\
&= \frac{(\exp(-u_2\theta)-1) \exp(-u_1\theta)}{\exp(-\theta)-1 + (\exp(-u_1\theta)-1)(\exp(-u_2\theta)-1)} \\
&= \frac{(\exp(-u_2\theta)-1) \exp(-u_1\theta)}{\exp(-\theta) + (\exp(-u_1\theta - u_2\theta) - \exp(-u_2\theta) - \exp(-u_1\theta))} \\
&= \frac{(\exp(-u_2\theta)-1) \exp(-u_1\theta)}{\exp(-\theta) + \exp(-u_1\theta - u_2\theta) - \exp(-u_2\theta) - \exp(-u_1\theta)}
\end{aligned}$$

De la misma manera:

$$\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} = \frac{(\exp(-u_1\theta) - 1) \exp(-u_2\theta)}{\exp(-\theta) + \exp(-u_2\theta - u_1\theta) - \exp(-u_1\theta) - \exp(-u_2\theta)}$$

Por tanto se tiene:

$$\begin{aligned}
\Lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \frac{\partial t}{\partial t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \frac{(\exp(-w_2t\theta) - 1) \exp(-w_1t\theta)}{\exp(-\theta) + \exp(-w_1t\theta - w_2t\theta) - \exp(-w_1t\theta) - \exp(-w_2t\theta)} \\
&\quad + w_2 \frac{(\exp(-w_1t\theta) - 1) \exp(-w_2t\theta)}{\exp(-\theta) + \exp(-w_1t\theta - w_2t\theta) - \exp(-w_1t\theta) - \exp(-w_2t\theta)} \\
&= w_1 \frac{(1-1) \cdot 1}{\exp(-\theta) - 1} + w_2 \frac{(1-1) \cdot 1}{\exp(-\theta) - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\Lambda_U &= w_1 + w_2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(1 - u_1, 1 - u_2)}{\partial u_1} \frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial C(1 - u_1, 1 - u_2)}{\partial u_2} \frac{\partial t}{\partial t} \\
&= w_1 + w_2 - w_1 \frac{(exp(-\theta) - 1)exp(-\theta)}{exp(-\theta) + exp(-\theta - w_2\theta) - exp(-\theta) - exp(-\theta)} \\
&\quad - w_2 \frac{(exp(-\theta) - 1)exp(-\theta)}{exp(-\theta) + exp(-\theta - \theta) - exp(-\theta) - exp(-\theta)} \\
&= w_1 + w_2 - w_1 \frac{(exp(-2\theta) - exp(-\theta))}{exp(-\theta - \theta) - exp(-\theta)} - w_2 \frac{(exp(-2\theta) - exp(-\theta))}{exp(-\theta - \theta) - exp(-\theta)} \\
&= w_1 + w_2 - (w_1 + w_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y por el teorema (3.1) se concluyó que las funciones  $\Lambda_{LU} = \Lambda_{UL} = 0$  entonces todas las funciones de dependencia extrema son idénticamente 0, por lo tanto todos los coeficientes de dependencia extrema son 0. La siguiente gráfica es una simulación de la cópula Frank.

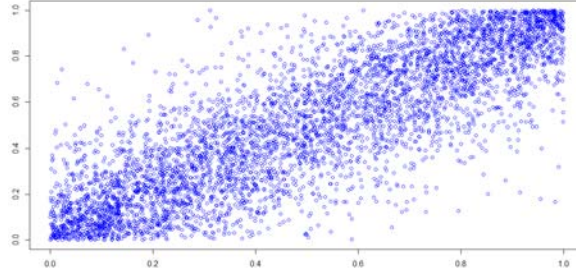
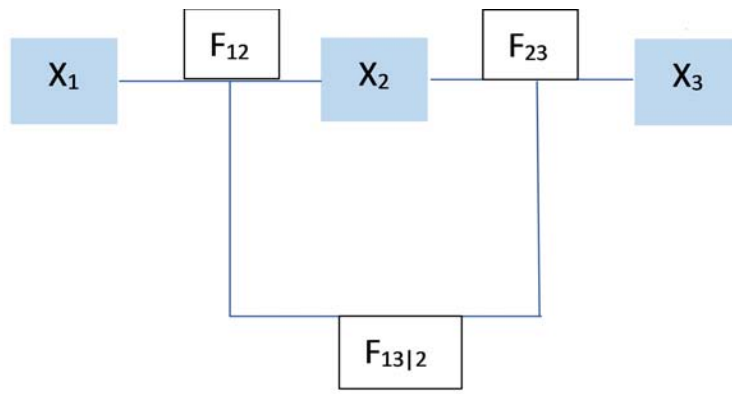


Figura 3.10: cópula Frank  $\theta = 7$

### 3.3. Cópulas en viña modelo D

Hasta este punto sólo se ha abordado el caso bivariado pero por el teorema (1.3) se tiene que las cópulas son una estructura de dependencia para vectores aleatorios de dimensión  $d$ . Para el caso de tres variables (el caso que se aborda es el de D-viña) tiene la siguiente estructura de mezcla entre funciones de distribución condicionales.

Figura 3.11: D-cópula trivariada



Sean  $X_1, X_2, X_3$  variables aleatorias con  $C_{ij}$  la cópula correspondiente al vector  $(X_i, X_j)$ ,  $F_{i|j}$  la función de distribución condicional del vector  $(X_i|X_j)$ .

$$F(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{x_2} C_{13}(F_{1|2}(x_1|y_2), F_{3|2}(x_3|y_2))F_2(dy_2) \quad (3.9)$$

En caso de existir la función de densidad para el caso trivariado esta se puede escribir de la siguiente manera con  $f$  función de densidad del vector  $(X_1, X_2, X_3)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_{1,3|2}(F(x_1|x_2), F(x_3|x_2))c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2))c_{2,3}(F_2(x_2), F_3(x_3))f(x_1)f(x_2)f(x_3) \quad (3.10)$$

Para el caso de 4 variables añadiendo la notación  $F_{ij}$  a la función de distribución conjunta de las variables  $X_i, X_j$  y  $F_{k|ij}$  de la función de distribución de  $X_k|X_i, X_j$ , la estructura es de la siguiente forma:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} C_{14}(F_{1|23}(x_1|y_2, y_3), F_{4|23}(x_4|y_2, y_3)) F_{23}(dy_2, dy_3) \quad (3.11)$$

$$= C(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3), F_4(x_4)) \quad (3.12)$$

Es importante para la estimación el poder obtener la función de distribución condicionada respecto algunas variables en términos de la cópulas condicionadas, esto se expresa de forma general para un vector  $\mathbf{v}$  de  $n$  variables de la siguiente forma:

$$h(x|\mathbf{v}, \theta) = F(x|\mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x,v_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j}))}{\partial F(v_j|\mathbf{v}_{-j})}$$

Con  $\mathbf{v}_{-j}$  que denota el vector de dimensión  $(n - 1)$  sin la variable  $v_j$ . De la misma manera se puede construir la cópula de supervivencia asociada a  $\bar{F}$  como:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{x_2}^{\infty} \hat{C}_{13}(\bar{F}_{1|2}(x_1|y_2), \bar{F}_{3|2}(x_3|y_2)) F_2(dy_2) \\ &= \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), \bar{F}_3(x_3)) \end{aligned}$$

**Observación 3.4.** Sea  $C$  la cópula trivariada del vector aleatorio  $(U_1, U_2, U_3)$  y  $C_{ij}$  la cópula correspondiente al vector  $(U_i, U_j)$  entonces la cópula correspondiente al vector  $(1 - U_1, 1 - U_2, 1 - U_3)$  (cópula de supervivencia trivariada) es:

$$\begin{aligned} \hat{C}(u_1, u_2, u_3) &= \mathbb{P}[1 - U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2, 1 - U_3 \leq u_3] \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + C_{12}(1 - u_1, 1 - u_2) \\ &\quad + C_{13}(1 - u_1, 1 - u_3) + C_{23}(1 - u_2, 1 - u_3) \\ &\quad - 2 - C(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3) \end{aligned}$$

### Demostración en el apéndice A.3

Con el resultado ( 3.4) se puede escribir la cópula de supervivencia asociada a  $C$  una cópula trivariada como mezclas de cópulas.

Otra forma de expresar la cópula trivariada, si  $C$  es diferenciable, en términos de las derivadas parciales es:

$$\begin{aligned}
 C(u_1, u_2, u_3) &= \int_{-\infty}^{u_2} C_{13}(C_{1|2}(u_1|v_2), C_{3|2}(u_3|v_2))(dv_2) \\
 &= \int_{-\infty}^{u_2} C_{13}\left(\frac{\partial C_{12}}{\partial v_2}(u_1, v_2), \frac{\partial C_{23}}{\partial v_2}(u_3, v_2)\right)(dv_2)
 \end{aligned}$$

**Definición 3.6.** La función de dependencia extrema condicional  $\Lambda_{i|jk}(u_i|v_j, v_k)$  se define como:

$$\Lambda_{i|jk}(u_i|v_j, v_k) = \lim_{t \rightarrow 0} C(u_i t | v_j t, v_k t)$$

Esta función se puede expresar en términos de las derivadas parciales de la función de dependencia extrema de la siguiente forma (se escribe el caso para el segundo nivel).

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{i|jk}(u_i|v_j, v_k) &= \lim_{t \rightarrow 0} C(u_i t | v_j t, v_k t) \\
 &= \frac{\frac{\partial^2 \Lambda_{ijk}}{\partial w_j \partial w_k}(u_i, v_j, v_k)}{\frac{\partial^2 \Lambda_{ijk}}{\partial w_j \partial w_k}(v_j, v_k)}
 \end{aligned}$$

El caso para el primer nivel puede deducirse y quedaría de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{i|j}(u_i|v_j) &= \lim_{t \rightarrow 0} C(u_i t | v_j t) \\
 &= \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial w_j}(u_i, v_j)
 \end{aligned}$$

Con esta expresión se puede escribir la función de dependencia extrema para una cópula en viña trivariada, para esto se tiene que hacer el cambio de variable  $v_j = \frac{u_j}{t}$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{123}(w_1, w_2, w_3) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C_{123}(w_1 t, w_2 t, w_3 t)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{w_2} C_{13}(C_{1|2}(w_1 t|v_2), C_{3|2}(w_3 t|v_2))(dv_2) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{w_2} t^{\leftarrow} C_{13}(C_{1|2}(w_1 t|v_2), C_{3|2}(w_3 t|v_2))(dv_2) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{w_2} t^{\leftarrow} C_{13}(C_{1|2}(w_1 t|u_2 t), C_{3|2}(w_3 t|u_2 t))(du_2 t) \\
&= \int_{-\infty}^{w_2} C_{13}(\Lambda_{1|2}(w_1|u_2), \Lambda_{3|2}(w_3|u_2))(du_2)
\end{aligned}$$

Es posible obtener una ecuación recursiva para la función de dependencia extrema condicionada, para niveles anteriores,  $\Lambda_{i|jk}$  al ser el nivel más bajo de la cópula en viña es necesario escribirla. Estos modelos de mezclas de cópulas son muy útiles para la estimación de funciones de dependencia extrema por su característica recursiva y a la simplicidad de su estimación. Generalizando la función de dependencia para los tipos de dependencia no positiva se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{D_1, D_2, D_3}(w_1, w_2, w_3) &= \\
&\int_{-\infty}^{w_2} C_{D_1, D_3}(\Lambda_{D_1|D_2}(w_1|u_2), \Lambda_{D_3|D_2}(w_3|u_2))(du_2)
\end{aligned}$$

donde  $D_i$  denota a la marginal  $i$  sea esta la función de distribución o de supervivencia (L o U).

# Capítulo 4

## Aplicación a datos financieros

La aplicación de teoría de cópulas a datos financieros requiere que se analice de manera marginal los datos para posteriormente poder ajustar una cópula apropiada. Para este fin se deben estudiar los datos financieros que son ocupados y el modelo de una serie de tiempo que mejor ajusta a cada uno.

### 4.1. Datos

El ajuste y estimación de cópulas a datos financieros se han visto incrementados en los últimos años, para calcular medidas de riesgo (VaR y Expected shortfall) y medidas de dependencia extrema (no positiva). Es importante conocer la dependencia que existen entre los activos financieros, ya que estos pueden estar relacionados y es importante saber qué puede pasar en escenarios de estrés o al ocurrir eventos que afecten de manera extrema el comportamiento de los activos para poder tomar precauciones. El análisis se hizo con índices. Un índice es una medida del valor de una sección del mercado de valores. Se calcula a partir de los precios de las poblaciones seleccionadas (comúnmente un promedio ponderado). Es una herramienta utilizada para describir el mercado y comparar el rendimiento de la sección del mercado seleccionada y el mercado en general. Otro término importante es el tendencia el cual se define como el movimiento suave y regular de la serie. Los tres índices que se ocuparon son:

I) Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)

El IPC es el principal índice bursátil de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), aglutina las 37 empresas con mayor liquidez en este mercado.

La recomposición del índice tiene una metodología que origina y expone la propia BMV, y que puede cambiar cada trimestre o año dependiendo



de lo que la junta y dirección de la BMV considere refleje mejor el valor de su muestra accionaria del mercado de valores en México.

A partir del índice de precios y cotizaciones, se pueden hacer evaluaciones del comportamiento del mercado y establecer estrategias financieras entorno al mercado Mexicano.

## II) Standard & Poor's 500 (S&P500)

El índice se basa en la capitalización bursátil de 500 grandes empresas que poseen acciones que cotizan en las bolsas NYSE o NASDAQ. Los componentes del índice S&P500 y su ponderación son determinados por S&P Dow Jones. Se diferencia de otros índices de mercados financieros de Estados Unidos, tales como el Dow Jones Industrial Average o el índice Nasdaq Composite, en la diversidad de los rubros que lo conforman y en su metodología de ponderación.

Es uno de los índices bursátiles más importantes de Estados Unidos. El S&P500 se considera el índice más representativo de la situación real del mercado.

## III) y Chicago Board Options Exchange Volatility Index (CBOE VIX)

Para entender mejor este índice es necesario definir la volatilidad en términos financieros. La volatilidad se puede entender como una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo en un horizonte temporal específico. Se usa comúnmente para cuantificar el riesgo del instrumento. La volatilidad ayuda a conocer el estado de los inversores, es decir, el sentimiento tanto de niveles de complacencia o confianza como los de miedo y pánico. Si se toma en cuenta esto se puede notar con facilidad que si la volatilidad de un índice tiende a la alza entonces la confianza en dicho índice tiende a la baja por lo que los rendimientos entre ambos tendrían un comportamiento contrario.

Una vez definido en términos financieros lo que es la volatilidad, se puede definir el CBOE VIX por la propia CBOE como una medida clave de las expectativas del mercado de la volatilidad a corto plazo transmitida por los precios de las opciones del índice de acciones S&P 500. Además que desde su introducción en 1993, el índice VIX ha sido considerado por muchos como el primer barómetro mundial del sentimiento de los inversionistas y la volatilidad del mercado.

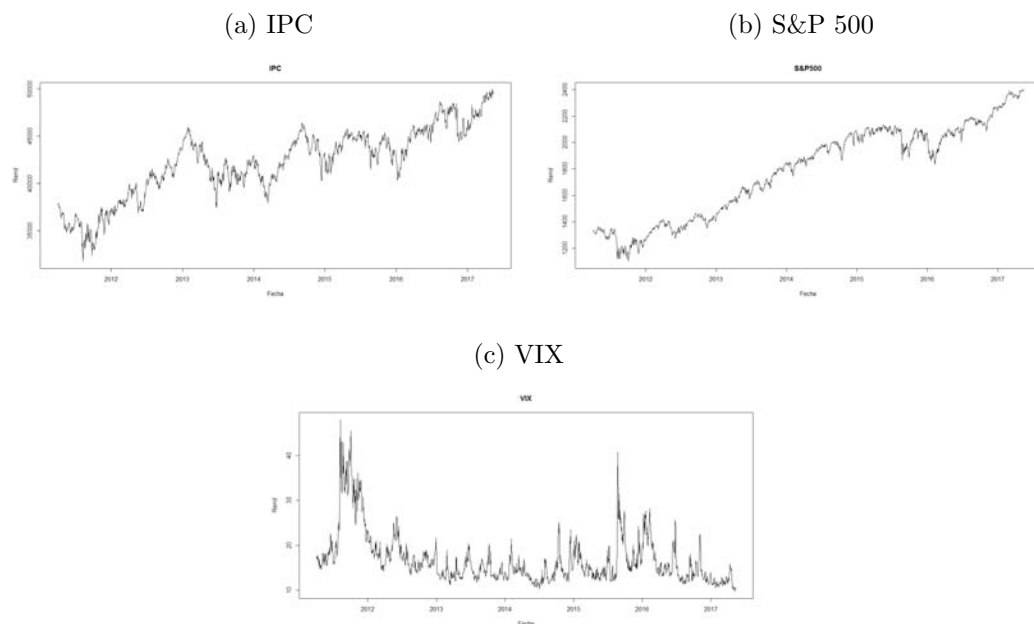
Los 3 índices que se ocuparon son importantes ya que reflejan grandes partes del mercado, se puede notar la gran dependencia que podría existir entre el IPC y el S&P500 de la misma forma que la dependencia negativa entre el VIX y S&P500 (la cual se deduce por la definición del VIX).

Cada serie fue tratada de forma marginal y a partir de las marginales se aplicó teoría de cópulas. Es importante señalar que los rendimientos que se referirán en adelante son el valor de cierre del índice. Los datos fueron obtenidos en la página de internet <https://finance.yahoo.com/>, los datos son correspondientes a las fechas de entre 01\abril\2011 y el 15\mayo\2017.

## 4.2. Análisis descriptivo

Comenzando con el análisis descriptivo marginal se graficaron los rendimientos.

Figura 4.1: Gráficas de Índices



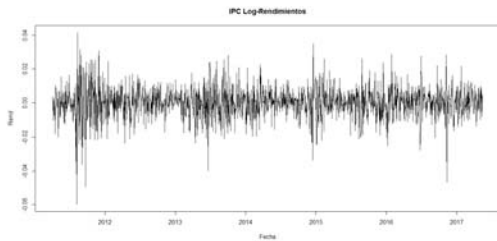
La gráfica de los rendimientos de IPC muestra una tendencia muy variable y gran volatilidad, a diferencia de los otros dos índices donde el S&P 500 muestra una tendencia a la alza muy notable y una volatilidad no tan alta, por el contrario el VIX muestra una ligera tendencia a la baja con una volatilidad considerable.

Se ve en las gráficas tienen relaciones muy claras, negativa entre el S&P 500 y VIX, positiva entre el IPC y S&P 500. Se utilizaron los rendimientos logarítmicos (i.e para la serie  $\{S_t\}_{t=0,1,\dots,n}$  tal que  $X_t = \log(\frac{S_t}{S_{t-1}})$ ,  $t = 0, 1, \dots, n$ ) para poder hacer diferencias de rendimientos en el tiempo.

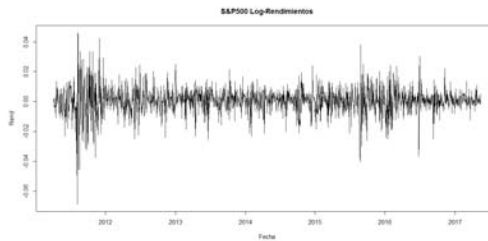
Las gráficas de los log-rendimientos son las siguientes.

Figura 4.2: Gráficas de Índices

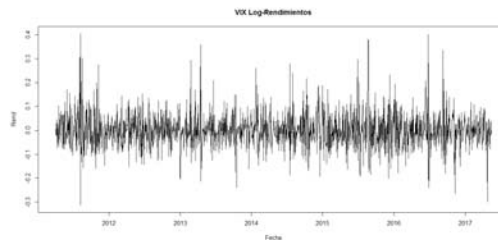
(a) IPC Log-rendimientos



(b) S&P 500 Log-rendimientos



(c) VIX Log-rendimientos



Se hizo la comparación entre la serie de log-rendimientos y los rendimientos normales para las series de los índices con la prueba Aumentada de Dickey-Fuller, determinando la existencia o no de raíces unitarias en el componente autoregresiva (Dickey & Said, 1984), para saber si los procesos eran estacionarios y la estimación de mínimos cuadrados es adecuada.

	Rendimiento	Log-rendimientos
IPC	0.08	0.01 >
VIX	0.01 >	0.01 >
S&P500	0.25	0.01 >

Se concluyó que las series de los log-rendimientos son estacionarias y la estimación de los parámetros del modelo ARMA por mínimos cuadrados será adecuada.

	IPC	VIX	S&P 500
Min.	-0.0417	-0.4055	-0.0463
1st Qu.	-0.0056	-0.0378	-0.0050
Mediana	-0.0003	0.0035	-0.0004
Media	-0.0002	0.0003	-0.0004
3rd Qu.	0.0049	0.0424	0.0036
Max.	0.0598	0.3141	0.0690
Coef. Asim.	0.3158	-0.6627	0.4835
Curtosis	6.0012	6.5297	8.1586

Con estas gráficas se puede observar la volatilidad tan alta que tienen las tres series, ya que tal como se esperaba, los cambios más grandes de las series están en grupos de grandes cambios, así como también se observa el hecho estilizado de que las series son leptocúrticas.

### 4.3. Aplicación del modelo ARMA con innovaciones GARCH

**Definición 4.1.** *Una modelo de serie de tiempo para datos observados  $\{x_t\}$  es una especificación de un proceso estocástico a tiempo discreto definido en un espacio de probabilidad*

Una serie de tiempo financiera es una serie de tiempo donde las variables aleatorias son los rendimientos, en este caso en particular se tomaron los valores del cierre en los días donde se realizó algún contrato con el activo financiero.

Los hechos estilizados de series de tiempo financieras son observaciones empíricas e inferencias que parecen aplicarse en la mayoría de las series financieras diarias en los factores de riesgo, como los Log-rendimientos sobre índices, acciones, tarifas, etc. Una versión de estos hechos es la siguiente. (McNeil, A.; Frey, R; Embrechts, P., 2005)

- 1 Los rendimientos de una serie no son i.i.d. lo que nos quiere decir que una observación de una serie de tiempo financiera depende de las observaciones de la misma serie en el pasado, a esto se le denomina autocorrelación (correlación serial).
- 2 Las series de tiempo de rendimientos absolutos o al cuadrado tienen una correlación serial muy alta.
- 3 La esperanza condicionada de rendimiento es cercana a 0

- 4 La volatilidad parece variar con el tiempo. Este hecho es uno de los más importantes ya que se tiene que tomar en cuenta para la elección del modelo de la serie.
- 5 Las series de tiempo son leptocúrticas o de colas pesadas. Este hecho nos dice que la serie puede tener rendimientos extremos o por el contrario la mayoría de sus datos tiene rendimientos muy cercanos a la media.
- 6 Los rendimientos extremos aparecen en grupos. Esto es que cambios extremos en los rendimientos de un activo son seguidos de cambios extremos no necesariamente con el mismo signo.

Estos 6 hechos van a tomarse en cuenta en el momento en que se apliquen modelos de series de tiempo que son explicados más adelante.

Función de media

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X_t], \quad t \in \mathbb{Z}$$

Función de autocovarianza

$$\gamma(t, s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))], \quad t, s \in \mathbb{Z}$$

**Definición 4.2.** Una serie de tiempo  $\{X_t\}$  es estrictamente estacionaria si

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})$$

para toda  $t_1, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$

Otra definición importante con la que se trabajara es la de débilmente estacionaria

**Definición 4.3.** Una serie de tiempo  $\{X_t\}$  es débilmente estacionaria si los dos primeros momentos existen y satisfacen

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu \quad t \in \mathbb{Z} \\ \gamma(t, s) &= \gamma(t+k, s+k), \quad t, s, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Una función que se ocupa mucho en la práctica es la de autocovarianzas que se define a continuación:

**Definición 4.4.** La función de autocorrelación (ACF)  $\varrho(h)$  de un proceso débilmente estacionario  $\{X_t\}$  es

$$\varrho(h) = \varrho(X_h, X_0) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

con  $\gamma(h) = \gamma(h, 0)$

Esta función es muy importante para el análisis de residuales al momento de elegir un modelo con medias móviles. Aunque para poder elegir un modelo autoregresivo es necesario analizar otro tipo de correlaciones, las cuales son dadas por la función de autocorrelación parcial.

Para poder definir esta función es necesario mencionar que para una serie de tiempo estacionaria con media 0;  $X_t^{t-1}$  denota la regresión.

$$X_t^{t-1} = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_{t-1} X_1$$

**Definición 4.5.** La función de autocorrelación parcial (PACF)  $\phi_{hh}$  de un proceso débilmente estacionario  $\{X_t\}$  para  $h = 1, 2, \dots$  está dada por:

$$\phi_{11} = \text{corr}(X_1, X_0)$$

y

$$\phi_{hh} = \text{corr}(X_h - X_h^{h-1}, X_0 - X_0^{h-1}), \text{ para } h \geq 2$$

Por estacionariedad PACF,  $\phi_{hh}$ , es la correlación entre  $X_t, X_{t-h}$  con la dependencia lineal del vector  $\{X_{t-1}, \dots, X_{t-(h-1)}\}$  removida. Esta función nos sirve para poder elegir el mejor modelo autoregresivo, tomando en cuenta las correlaciones de las variables removiendo el efecto que podría provocar las variables intermedias.

**Definición 4.6.** Ruido blanco ( $WN(\mu, \alpha^2)$ ). El proceso  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es un ruido blanco si es débilmente estacionario con función de autocorrelación

$$\varrho(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } h = 0 \\ 0, & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

con  $\mu$  la media y  $\alpha^2$  la varianza del proceso.

Un ruido blanco se dice que es un ruido blanco estricto (SNW) si las variables aleatorias que lo componen son i.i.d. y tienen varianza finita.

**Definición 4.7.** Diferencia de martingalas. La serie de tiempo  $\{X_t\}$  es conocida como una secuencia de diferencia de martingalas con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  si  $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ ,  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible y

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Entonces la esperanza no condicionada también es 0

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = 0$$

Además si  $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$  para toda  $t$ , entonces la función de autocovarianza satisface

$$\begin{aligned} \gamma(t, s) = \gamma(X_t, X_s) = \\ \begin{cases} \mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t X_s | \mathcal{F}_{s-1}]] = \mathbb{E}[X_t \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_{s-1}]] = 0, & \text{si } t < s \\ \mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t X_s | \mathcal{F}_{t-1}]] = \mathbb{E}[X_s \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = 0, & \text{si } t > s \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces una secuencia de diferencia de martingalas con varianza finita tiene media 0 y covarianza 0. Si la varianza es constante para toda  $t$ , entonces es un ruido blanco. Esta parte de las series de tiempo es importante ya que por definición los procesos débilmente estacionarios ARCH y GARCH son ruido blanco.

**Definición 4.8.** *Proceso ARMA(p,q) (Autoregressive moving average). El proceso  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  es llamado un proceso ARMA (p,q) con media cero si  $\{X_t\}$  es un procesos débilmente estacionario y si para toda  $t$ ,*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} \quad (4.1)$$

donde  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ . Se dice que  $\{X_t\}$  es un proceso ARMA (p,q) con media  $\mu$  si el proceso  $\{X_t - \mu\}$  es un proceso ARMA (p,q)

Las dos principales propiedades de los procesos ARMA es que sean causales e invertibles. Para poder escribir mejor estas propiedades se hace simbólicamente a la ecuación (4.1) como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

donde  $\phi$  y  $\theta$  son un polinomios de grado  $p$  y  $q$  respectivamente, y  $B$  es el operador de retroceso definido

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \phi_1 z + \dots + \phi_p z^p \\ \theta(z) &= 1 - \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q \\ B^j X_t &= X_{t-j} \end{aligned}$$

**Definición 4.9.** *Un proceso ARMA (p,q) definido por las ecuaciones  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$  se dice que es causal si existe una secuencia de constantes  $\{\psi_j\}$  tal que  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  y*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

La condición de que un proceso ARMA se causal nos la oportunidad de poder obtener la serie de ACF

**Definición 4.10.** Un proceso ARMA  $(p, q)$  definido por las ecuaciones  $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$  se dice que es invertible si existe una secuencia de constantes  $\{\pi_j\}$  tal que  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  y

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \dots$$

Los siguientes modelos son modelos para poder medir volatilidad, ya que son modelos autorregresivos condicionalmente heterocedásticos su función es poder modelar con mayor precisión las series de tiempo cuya varianza es variable con respecto al tiempo, tal como son las series de tiempo financieras.

**Definición 4.11.** Sea  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un SNW(0, 1). El proceso  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es un proceso ARCH  $(p)$  (Autoregressive conditional heteroskedasticity) si es estrictamente estacionario y satisface que para toda  $t \in \mathbb{Z}$  y para algún proceso estrictamente positivo  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , independiente de  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , las siguientes ecuaciones:

$$X_t = \sigma_t Z_t \tag{4.2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \tag{4.3}$$

donde  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$

Donde  $p$  son los tiempos de retraso de los que depende el modelo autorregresivo.

Sea  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\})$  la representación de la historia del proceso sobre el tiempo  $t$  tal que  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es la filtración natural. Por la construcción (4.3) se tiene que  $\sigma_t$  es medible respecto a  $\mathcal{F}_{t-1}$  si además  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$  nos permite calcular.

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\sigma_t Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sigma_t \mathbb{E}[Z_t] = 0$$

por lo tanto el proceso ARCH tiene la propiedad de diferencia de martingalas con respecto a la filtración natural. Si el proceso es débilmente estacionario entonces es un ruido blanco. Esta propiedad es muy importante y es utilizada en el futuro ahora se define un proceso derivado del ARCH que se utiliza en la práctica.



**Definición 4.12.** Sea  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un SNW(0, 1). El proceso  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  es un proceso GARCH( $p, q$ ) (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) si es estrictamente estacionario y si satisface que para toda  $t \in \mathbb{Z}$  y para algún proceso estrictamente positivo  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , independiente de  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , las siguientes ecuaciones:

$$X_t = \sigma_t Z_t \quad (4.4)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.5)$$

donde  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , y  $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, q$

El proceso general del proceso ARCH es el proceso GARCH en el sentido que al cuadrado de la volatilidad  $\sigma_t^2$  se le permite depender del cuadrado de las volatilidades previas así como valores del proceso previos.

Un proceso importante con el que se trabaja es el modelo ARMA para poder ajustar de forma marginal las series de tiempo financieras como se definió el modelo ARMA tiene asociado un ruido blanco, este ruido blanco puede modelarse con una serie de tiempo. Si la varianza no es constante en el tiempo, como sugiere el hecho estilizado 4, se ocupa un modelo GARCH como ruido blanco. Este proceso ARMA con innovaciones GARCH se define a continuación:

**Definición 4.13.** Sea  $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  un SNW(0, 1). El proceso  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  se dice que es un proceso ARMA( $p_1, q_1$ ) con innovaciones GARCH( $p_2, q_2$ ) si es débilmente estacionario y si satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_t &= \mu_t + \sigma_t Z_t \\ \mu_t &= \mu + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i (X_{t-i} - \mu)^2 + \sum_{j=1}^{q_1} \theta_j (X_{t-j} - \mu_{t-j})^2 \\ \sigma^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i (X_{t-i} - \mu_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

donde  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p_2$ , y  $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, q_2$  y  $\sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j < 1$

La forma en que el ARMA se define es consistente con la primer definición porque se necesita que el modelo GARCH sea débilmente estacionario. Por

otra parte para asegurar su invertibilidad y causalidad es necesario que los siguientes polinomios  $\bar{\phi}(Z) = 1 - \phi_1 Z - \dots - \phi_{p1} Z^{p1}$  y  $\bar{\theta}(Z) = 1 + \theta_1 Z + \dots + \theta_{q1} Z^{q1}$  no tengan raíces en común y no estén dentro del círculo unitario ya que estas dos propiedades nos permiten estimar las funciones ACF y PACF del proceso ARMA.

A las series IPC, S&P 500 Y VIX se les ajustó un modelo ARMA con innovaciones GARCH con la finalidad de obtener una muestra (los residuales) que no tenga la dependencia serial de la serie original de los log-rendimientos, para que se pueda usar una estimación por máxima verosimilitud. Para el ajuste de series de tiempo se utilizó el lenguaje de programación R y las paqueterías “tseries” y “rugarch”.

Los ARMA-GARCH ajustados para cada una de las series fue el siguiente: al IPC se le ajustó un ARMA(2,1)-GARCH(2,1) con innovaciones Gaussianas; al VIX se le ajustó un ARMA(1,1)-GARCH(1,1) con innovaciones t-student; y al S&P 500 se le ajustó un ARMA(2,2)-GARCH(2,2) con innovaciones Gaussianas ya que fue suficiente para remover las autocorrelaciones. Las gráficas del ACF y PACF son las siguientes.

Figura 4.3: Gráficas de ACF

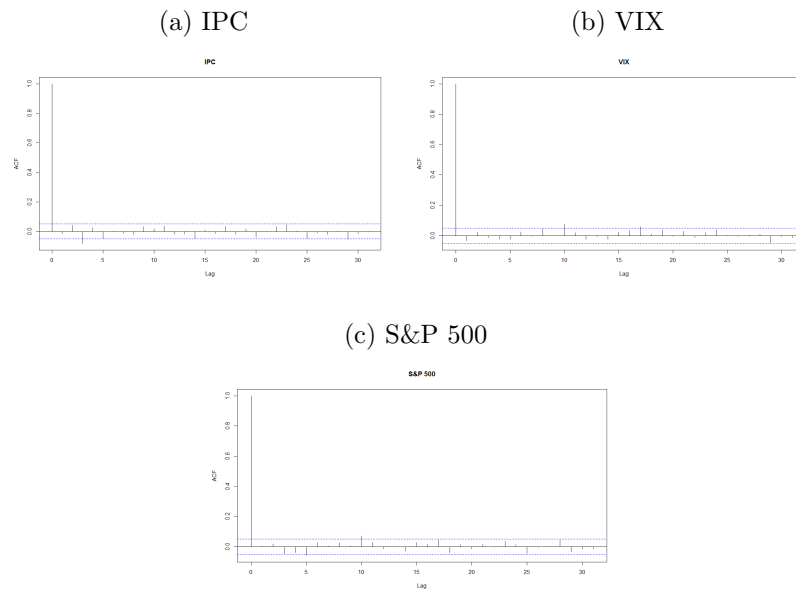
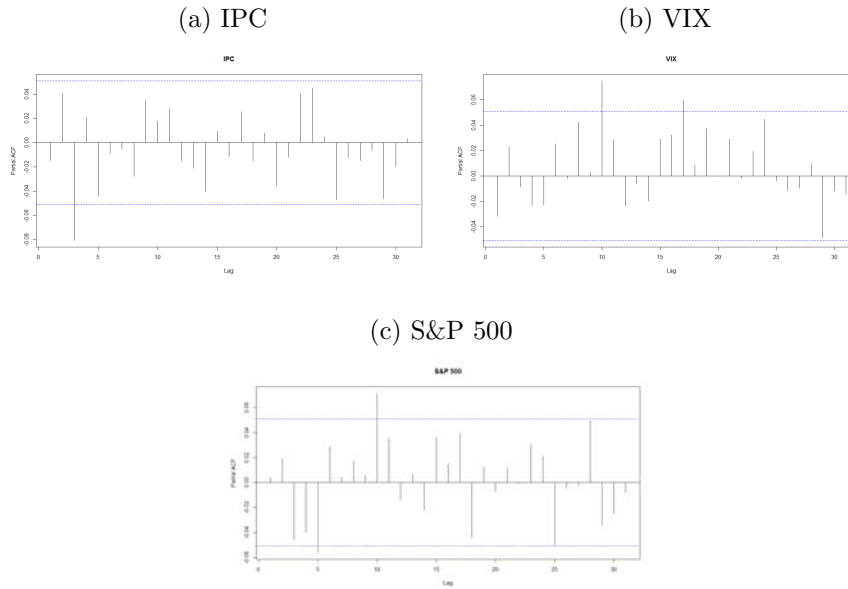


Figura 4.4: Gráficas de PACF



Comparando ambas muestras obtenidas, la primera a partir de los log-rendimientos y la segunda de los residuales obtenidos del ajuste del ARMA GARCH se aplica la prueba de Ljung-Box (Ljung & Box, 1978) para correlación serial y se obtienen los siguientes resultados.

	Residuales	Log-rendimiento
IPC	0.56	0.039
VIX	0.21	0.002
S&P500	0.87	0.02
	No hay correlación lineal	Hay correlación lineal

Tabla 4.1: P-valores prueba de Ljung-Box

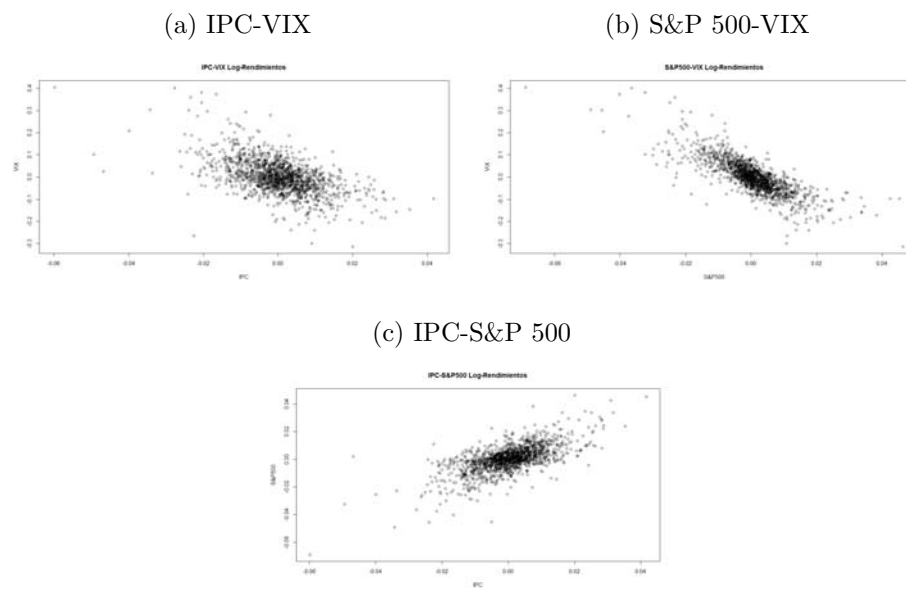
La gráfica de ACF y PACF para cada caso muestra poca correlación lineal. Los residuales a los cuales se aplicó la prueba de Ljung-Box resultaron no tener correlación serial por lo tanto se consideran una muestra independiente e idénticamente distribuida de la cópula y a partir de estas se hizo el ajuste de las cópulas bivariadas y la cópula en viña más óptima.

## 4.4. Aplicación; cópulas en D-viña

### 4.4.1. Cópulas bivariadas

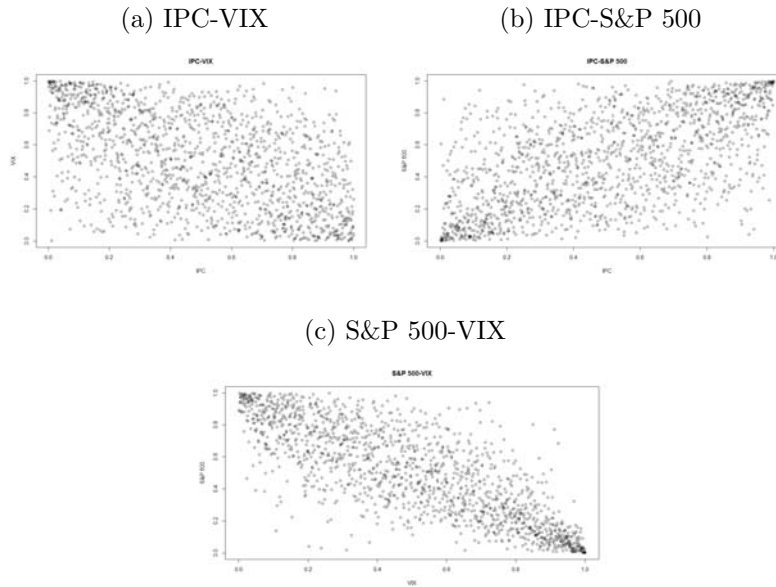
Una vez obtenida la muestra marginal de cada uno de los índices, se obtiene la cópula bivariada para cada una de las tres combinaciones, las cuales son: VIX-S&P 500 , VIX-IPC y S&P 500-IPC. Los diagramas de dispersión de una respecto a la otra son los siguientes.

Figura 4.5: Gráficas de Log-rendimientos 1-1



A partir de la muestra obtenida de los residuales se crea su función de distribución empírica y se le aplica esta a la muestra para obtener marginales uniformes por (1.3) y poder estimar los parámetros de las cópulas así como las cópulas empíricas. Los diagramas de dispersión para los pares de datos son.

Figura 4.6: Gráficas de dispersión (marginales uniformes)



Se le ajustaron las siguientes cópulas bivariadas: Gaussiana, t-student, Frank, Clayton, Clayton supervivencia, Clayton LU, Clayton UL, Gumbel, Gumbel supervivencia, Gumbel LU y Gumbel UL (dependió de la naturaleza de los datos, ya que si la dependencia era negativa las cópulas ajustadas fueron UL y LU). Las prueba de bondad de ajuste Vuong y Clarke ayudaron a decidir cuál fue la cópula más apropiada para los datos y se calcularon las medidas de dependencia y coeficientes de dependencia extrema paramétricas. Para este fin se utilizó lenguaje de programación R y la paquetería “CDVine”.

Para la estimación de los parámetros de la cópula por máxima verosimilitud y para la estimación de los coeficientes de dependencia extrema no paramétrica por el método propuesto por Frahm (Frahm et al., 2006) es necesario definir la cópula empírica.

**Definición 4.14.** (Deheuvels, 1979) *Cópula empírica.*

Sea  $\mathbf{X} = \{x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{dk}\}_{k=1}^N$  una muestra de tamaño  $N$  de una función de distribución  $d$ -variada continua. La cópula empírica es la función  $C_N$  definida:

$$C_N\left(\frac{i_1}{N}, \frac{i_2}{N}, \dots, \frac{i_d}{N}\right) = \frac{\text{número de pares}(x_1, x_2, \dots, x_d) \text{ en la muestra con } \{X_1 \leq x_1^{i_1}, X_2 \leq x_2^{i_2}, \dots, X_d \leq x_d^{i_d}\}}{N}$$

donde  $x_1^i, x_2^j$  denotan los estadísticos de orden con  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_d \leq N$  obtenidos de la muestra.

notasé que la cópula empíria es una subópula. La cópula empíria se puede definir a partir de las funciones de marginales empíricas de la función de distribución. Se muestra el caso bivariado.

Sea  $F_{N,1}, F_{N,2}$  funciones de distribución empíricas de las funciones  $F_1, F_2$  respectivamente. Para cada vector  $i = 1, \dots, N$  no observable de  $\mathbf{U} = (F_1(X_{1,i}), F_2(X_{2,i}))$  tiene un estimador empírico:

$$\hat{\mathbf{U}}_i = (\hat{U}_{1,i}, \hat{U}_{2,i}) = \left( \frac{N}{N+1} F_{N,1}(X_{1,i}), \frac{N}{N+1} F_{N,2}(X_{2,i}) \right)$$

con estas funciones se puede escribir la cópula empírica como:

$$C_N(u_1, u_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}(\hat{U}_{1,i} \leq u_1, \hat{U}_{2,i} \leq u_2)$$

donde  $\mathbf{1}$  denota la función indicadora.

El estimador por máxima verosimilitud puede ser por inferencia de funciones marginales (Joe, 1997) o por máxima verosimilitud (Genest et al., 1995) ambas partiendo del hecho que existen la función de densidad para  $C$ , la primera maximiza las funciones de las parciales y después la conjunta el caso bivariado es el siguiente:

$$L_j(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n \ln(f_j(X_{j,i}|\alpha_j)) \quad j = 1, 2$$

$$L(\theta, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n \ln(f(\mathbf{X}_i|\alpha_1, \alpha_2, \theta))$$

y por máxima pseudo-verosimilitud la función que se maximiza es

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln(c_\theta(\hat{U}_{1,i}, \hat{U}_{2,i}))$$

Otro estimador es por el método de Cramer von mises, el cual es considerado eficiente por su fácil estimación y potencia. El cual es un estimador para  $\theta$  cuando toma un valor real, basado en la distancia  $L_2$ , se busca la  $\theta$  que minimice la siguiente función en el caso de una cópula bivariada:

$$\begin{aligned} S_n &= N \int_{[0,1]^2} [C_N(u_1, u_2) - C_{\theta,N}(u_1, u_2)]^2 dC_N(u_1, u_2) \\ &= \sum_{i=1}^n [C_N(\hat{U}_{1,i}, \hat{U}_{2,i}) - C_{\theta,N}(\hat{U}_{1,i}, \hat{U}_{2,i})]^2 \end{aligned}$$

Las pruebas de bondad de ajuste que se realizaron son las pruebas de Vuong (Vuong, 1989) y Clarke (Clarke, 2007) la primera es a partir de  $v$ , que es definida a continuación, para dos modelos con función de densidad  $c_1$  y  $c_2$ :

$$m_i = \ln(c_1(\hat{U}_{1,i}, \hat{U}_{2,i} | \hat{\theta}_1)) - \ln(c_2(\hat{U}_{1,i}, \hat{U}_{2,i} | \hat{\theta}_2))$$

y  $v$  es la suma estandarizada de las log-verosimilitudes

$$v = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}}$$

$v$  es asintóticamente normal por lo tanto se prefiere la cópula del modelo 1 a la del modelo 2 con un nivel  $\alpha$  de confianza si

$$v > \phi^{\leftarrow}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

de manera similar se prefiere el modelo 2 si  $v < -\phi^{\leftarrow}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  y si  $|v| \leq \phi^{\leftarrow}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  no se puede llegar a ninguna conclusión, no se puede rechazar la hipótesis nula ( $H_0 : \mathbb{E}(m_i) = 0 \forall i = 1, \dots, N$ ). La prueba de Clarke parte de la misma estadística pero con la hipótesis nula

$$H_0 : \mathbb{P}[m_i > 0] = .5 \forall i = 1, \dots, N$$

La intuición detrás de esta hipótesis nula es que bajo la equivalencia estadística de ambos modelos las observaciones de forma individual se distribuyen uniformemente alrededor de cero. La prueba estadística

$$B = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{0, \infty\}}(m_i)$$

es asintóticamente distribuida binomial con parámetros  $N$  y  $p=.5$ . Con base en esto se dice que el modelo 1 es estadísticamente equivalente al modelo 2 si  $B$  no es significativamente diferente a la esperanza de  $B$ .

Ambas pruebas pueden ser corregidas para el número de parámetros de los modelos ya sea usando AIC (Akaike, 1973) ó en el caso de dos parámetros BIC (Schwarz, 1978), utilizando la prueba propuesta por Belgorodski (Belgorodoski, 2010) estas pruebas son utilizadas para seleccionar el mejor modelo de cópulas.

Los tres estimadores no paramétricos, aunque son escritos para el caso  $\lambda_U$  es fácil hacer el extenderlos para el caso de  $\lambda_L$ ,  $\lambda_{LU}$  y  $\lambda_{UL}$ , son:

El estimador logarítmico introducido por Coles et al. (Coles et al. , 1999)

$$\hat{\lambda}_U^{LOG} = 2 - \frac{\ln(C_N(\frac{N-k}{N}, \frac{N-k}{N}))}{\ln(\frac{N-k}{N})} \text{ con } 0 < k < N$$

El estimador SEC introducido como un caso especial en Joe et al. (Joe et al. , 1992)

$$\hat{\lambda}_U^{SEC} = 2 - \frac{1-(C_N(\frac{N-k}{N}, \frac{N-k}{N}))}{1-\frac{N-k}{N}} \text{ con } 0 < k \leq N$$

El tercer estimador es propuesto por Capéreaa et al. (Capéreaa et al. , 1997)

$$\hat{\lambda}_U^{CFG} = 2 - \exp\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln\left\{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\hat{U}_{1,i}}\right)\ln\left(\frac{1}{\hat{U}_{2,i}}\right)} / \ln\left(\frac{1}{\max\{\hat{U}_{1,i}, \hat{U}_{2,i}\}^2}\right)\right\}\right\}$$

Este estimador tiene el supuesto que los datos provienen de una distribución de valores extremos, por lo tanto si se quisiera estimar este estimador en una cópula con dependencia no positiva el estimador no converge.

Para la estimación de estos se ocupó el algoritmo propuesto y explicado en Frahm et al. (Frahm et al., 2006) el cual consiste en crear una nueva serie de coeficientes de dependencia extrema, definida como el promedio de  $2b+1$  elementos consecutivos  $\bar{\lambda}_i = \frac{1}{2b+1} \sum_{j=0}^{2b} \lambda_{i-b+j}$  con  $b = \lfloor .005n \rfloor$  y como segundo paso se crea un intervalo  $m = \lfloor \sqrt{n-2b} \rfloor$  y se definen vectores  $p_k = (\bar{\lambda}_k, \dots, \bar{\lambda}_{k+m-1})$ , con  $k = 1, \dots, n - 2b - m + 1$  y la elección de la  $k$  para el primer  $p_k$  que cumple la siguiente condición

$$\sum_{i=k+1}^{k+m-1} |\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_k| \leq 2\sigma$$

donde  $\sigma$  representa la desviación estándar de  $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{n-2b}$  y el estimador de dependencia extrema no paramétrico sería el siguiente:

$$\lambda(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_{k+i-1}$$

Los detalles de bondad de ajuste hechos para las 3 cópulas bivariadas se encuentran en el apéndice B.1.



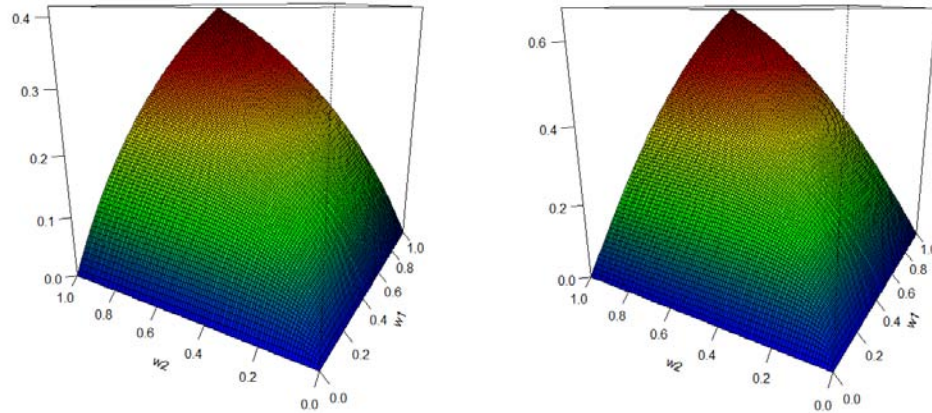
Para la elección de la mejor cópula para cada par de datos es necesario notar como es el tipo de dependencia en cada una y tomar en cuenta los resultados de las pruebas de bondad de ajuste. Otro factor importante para elegir la mejor cópula son los resultados de sus coeficientes de dependencia extrema tanto paramétricos como no paramétricos ya que como se vio en las secciones de cópulas elípticas y cópulas Arquimedianas cada una tiene una dependencia extrema muy específica. Tomando esto en cuenta un punto que se tomó para la elección de la cópula Gumbel sobre la cópula Clayton, es que la cópula Clayton tiene una dependencia extrema que se puede decir, mayor que la cópula Gumbel, pero sacrifica totalmente la dependencia en la cola opuesta, por lo que su ajuste no es tan idóneo.

Considerando esto se concluye que la cópula que mejor modela la estructura de dependencia entre IPC-VIX es la cópula Gumbel UL, ya que es la que modela mejor la dependencia asimétrica no positiva que tienen. La cópula que mejor modela la estructura de dependencia entre VIX-S&P 500 es la cópula Gumbel LU, ya que es la que modela mejor la dependencia asimétrica no positiva que tienen además de ser la cópula con máxima verosimilitud. Y para el último par de variables se obtuvo que la cópula que mejor modela la estructura de dependencia entre IPC-S&P 500 es la cópula t-student, ya que es la que modela mejor la dependencia simétrica positiva que tienen, siendo la mejor en todas las pruebas de bondad de ajuste que se aplicaron.

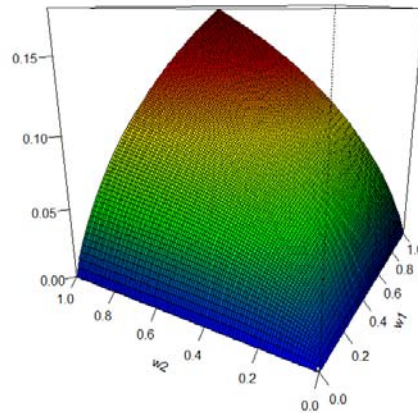
La función de dependencia extrema para las mejores cópulas en cada caso y tomando en cuenta que la cópula Gumbel sólo cuenta con un tipo de dependencia extrema y para la t-student es simétrica (LU respecto a UL), las funciones de dependencia extrema paramétrica tienen las siguientes gráficas.

Figura 4.7: Gráfica de la función de dependencia extrema

(a) Función de dependencia extrema LU Gumbel UL IPC-VIX  
 (b) Función de dependencia extrema UL Gumbel LU VIX-S&P 500



(c) Función de dependencia extrema LU-UL t-student IPC-S&P 500



La función de dependencia extrema por el teorema (2.4) la propiedad (ii) es suficiente con estimarla para el intervalo  $(0, 1)^2$  para mostrar el panorama general de la función, mostrando que la cópula t-student tiende a tener mayor dependencia extrema cuando uno de los activos toma estos valores con mayor velocidad.

#### 4.4.2. Cópulas en viña

Una vez obtenidas las muestras marginales con independencia serial de cada una de las series con las que se trabajó se procede a estimar las cópulas

bivariadas y la cópula en viña que mejor ajuste a los datos.

De la ecuación de cópulas en viñas (3.9) la densidad se puede escribir de la forma (3.10). Es necesario poder estimar la función de distribución condicional, en términos de una cópula bivariada usando las relaciones de arboles previos esta es:

$$h(x|\mathbf{v}, \theta) = F(x|\mathbf{v}) = \frac{\partial C_{x,v_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(x|\mathbf{v}_{-j}), F(v_j|\mathbf{v}_{-j}))}{\partial F(v_j|\mathbf{v}_{-j})}$$

Para la estimación de los parámetros del modelo D por máxima log-verosimilitud se utilizó la siguiente expresión

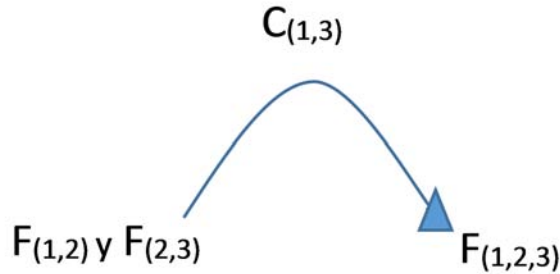
$$l_D(\theta_D|\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=1}^{d-j} \log[c_{j,j+k|j+1:j+k-1}(F_{k|k+1:k+j-1}, F_{j+k|k+1:k+j-1}|\theta_{\mathbf{D},j,k})] \quad (4.6)$$

donde  $F_{k|j_1:j_m} := F(\hat{U}_{k,i}|\hat{U}_{j_1,i}, \hat{U}_{j_2,i}, \dots, \hat{U}_{j_m,i})$  y  $\theta_{\mathbf{D},j,k} := \theta_{\mathbf{D},j,j+k|j+1:j+k-1}$ .

Las pruebas de bondad de ajuste son las mismas que en el caso bivariado, Vuong(Vuong, 1989) y Clarke (Clarke, 2007).

Se ocupó el siguiente diagrama para cópulas de 2 niveles.

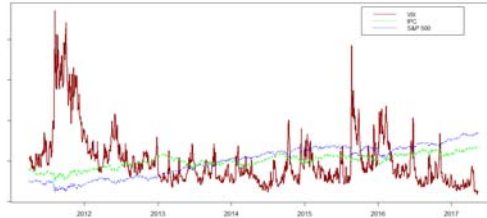
Figura 4.8: Diagrama cópula en viña 2 niveles



Donde  $F_{(1,2)}$  denota la función de distribución de los datos IPC-VIX,  $F_{(2,3)}$  denota la función de distribución de los datos VIX-S&P 500 y  $C_{(1,3)}$  la cópula entre los datos IPC-S&P 500. Por lo que se puede decir que el primer nivel fueron las cópulas entre IPC-VIX y VIX-S&P 500, y el segundo nivel la cópula entre IPC-S&P 500.

Las tres series centradas son las siguientes.

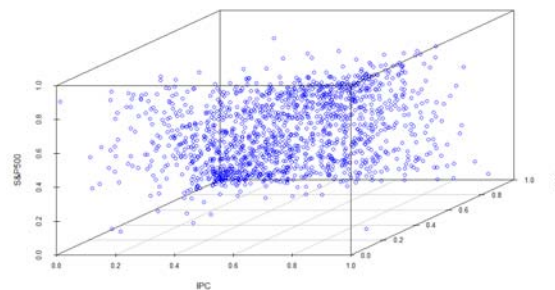
Figura 4.9: IPC-VIX-S&P 500



En esta gráfica se puede apreciar, la volatilidad del VIX y que hay una dependencia negativa entre el VIX y las otras dos series, siendo congruente con los resultados de las cópulas bivariadas.

El diagrama de dispersión trivariado es el siguiente.

Figura 4.10: Diagrama de dispersión



Por la naturaleza de las cópulas en viñas y ya que fueron ajustadas las cópulas bivariadas para cada par de datos, se seleccionaron dos cópulas para la cópula IPC-VIX estas fueron las cópulas t-student y Gumbel UL; para la cópula VIX-S&P 500 se seleccionaron las cópulas t-student Clayton UL y Gumbel LU; y para la cópula IPC-S&P 500 se seleccionaron las cópulas t-student y Gaussiana.

Los detalles de bondad de ajuste hechos para la cópula en viña se encuentran en el apéndice B.2. Es importante subrayar que generalmente el orden en el que se colocan las cópulas en cada nivel modifica el modelo de dependencia y eso afecta tanto en su función de dependencia extrema como

en las demás pruebas de bondad de ajuste.

Tomando en cuenta la bondad de ajuste para este orden de cópulas bivariadas, la cópula en viña que mejor modeló la dependencia y dependencia extrema de las tres variables resultó ser una cópula t-student en el segundo nivel y para el primer nivel una cópula Gumbel LU y una cópula Gumbel UL (12), por lo tanto sólo existe una función de dependencia extrema la LUL (Lower-Upper-Lower) la cual es  $\Lambda_{LUL}$  que tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\Lambda_{LUL,123}(w_1, w_2, w_3) &= \int_{-\infty}^{w_2} C_{13}(\Lambda_{LU,1|2}(w_1|u_2), \Lambda_{UL,3|2}(w_3|u_2)) du_2 \\ &= \int_{-\infty}^{w_2} C_{v,\rho}^t(1 - (1/\theta)[w_1^\theta + u_2^{\theta-1}(\theta u_2^{\theta-1}), \\ &\quad 1 - (1/\theta)[w_3^\theta + u_2^{\theta-1}(\theta u_2^{\theta-1})]) du_2 \\ &= \int_{-\infty}^{w_2} C_{28.7,.41}^t(1 - (.662)[w_1^{1.51} + u_2^{1.51}]^{-.338}(1.51u_2^{.51}), \\ &\quad 1 - (.412)[w_3^{2.44} + u_2^{2.44}]^{-.59}(2.44u_2^{1.44})) du_2\end{aligned}$$

De esta expresión analítica, aproximando por métodos numéricos obtenemos el coeficiente de dependencia extrema  $\lambda_{LUL}$ :

$$\Lambda_{LUL}(1, 1, 1) = \lambda_{LUL} = 0.362$$

con error absoluto menor a 6.8e-05.

Esto significa que las tres series financieras tiene una dependencia extrema considerable, esta es no positiva y de la forma LUL (cuando el IPC Y S&P 500 tienen valores bajos y el VIX valores altos) lo que es congruente con los valores obtenidos en el análisis bivariado. Esta información permite crear modelos que tomen en cuenta que la dependencia extrema entre las variables es asimétrica y estimar mejores medidas de riesgo o portafolios de inversión.

En la cópula trivariada, resultaron ser las mismas cópulas bivariadas en cada nivel, por lo que la estimación y las pruebas de bondad de ajuste para

el caso del modelo D trivariado es congruente y muy cercano a las estimación que se obtuvo en el caso bivariado por máxima verosimilitud reafirmando la elección del modelo.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Las cópulas son una herramienta útil e importante para el estudio de dependencia para modelar la estructura de dependencia y dependencia extrema sea esta positiva o no positiva para cualquier número de variables. La versatilidad de las cópulas fue ocupada y desarrollada en el presente trabajo.

En el primer capítulo se demostraron los elementos esenciales para el teorema de Sklar, siendo este el más importante. Este teorema permite relacionar una función de probabilidad con una cópula, no necesariamente de forma única, a partir de sus marginales lo que nos da una idea de la importancia de calcular de forma certera y correcta la distribución marginal de los datos a los que se les vaya a aplicar esta herramienta.

De igual forma se abordaron las transformaciones monótonas de las variables aleatorias las cuales abren un catálogo aún más amplio sobre la interpretación de las cópulas, ya que como se mostró estas transformaciones de variables aleatorias nos llevan a las cópulas asociadas, siendo que éstas modelan la dependencia entre las variables pero no necesariamente respecto a la función de distribución.

Las medidas de dependencia como se definió en el capítulo 2 es cuestionable, ya que las medidas de concordancia  $\tau$  de Kendall y  $\rho$  de Spearman así como la medida de correlación de Pearson no cumplen algunas propiedades sugeridas, pero llegan a capturar información importante de cómo es su dependencia, por lo tanto aún quedan elementos que mejorar en esta definición. No obstante las medidas de concordancia, también conocidas como medidas por rangos, nos dan una idea de cómo es la relación entre las variables, ya que ambas tienen un desarrollo suficientemente robusto para dar una noción de la dependencia entre las variables.



Por su parte las medidas de dependencia extrema tanto paramétricas como no paramétricas son de gran ayuda cuando nos interesa obtener información sobre cómo es la dependencia entre variables en valores extremos, tales como los que se requieren para estimar medidas de riesgo, ya que aunque la dependencia de las variables se comporte de cierta forma cuando esta es cercana a sus medias, en sus valores extremos esto puede cambiar y la decisión de elegir uno u otro modelo de dependencia afecta de manera importante la dependencia extrema.

Las funciones de dependencia extrema son una forma de generalizar lo que dice el coeficiente de dependencia extrema ya que cuando las marginales tienden a sus extremos a la misma velocidad, puede que se comporten de una forma y fuera de esta diagonal el comportamiento conjunto sea distinto (como en el caso del VIX por su volatilidad). Por esta razón la función de dependencia extrema da información más general sobre la relación de las variables.

Los modelos paramétricos utilizados en la tesis, que se explican en el capítulo 3, tienen distintas características de dependencia y dependencia extrema muy particulares y se mostraron diferentes aspectos de cada uno para posteriormente utilizarlos para escoger la mejor cópula. En el caso de las cópulas elípticas la simetría en sus funciones de dependencia extrema es útil para utilizarla en casos donde hay dependencia simétrica, por su parte las cópulas Arquimedianas son una interpolación entre cópulas elementales con una dependencia extrema específica (superior o inferior) y a la vez permiten ser reajustadas para las cópulas asociadas (el caso de las cópulas Arquimedianas de supervivencia, UL y LU) donde dan libertad de elegir una cópula con dependencia extrema aún cuando sea no positiva.

El modelo de cópulas en viña, en este caso en particular D trivariado, resultó ser congruente con los modelos bivariados, facilitando la estimación de los parámetros necesarios para su ajuste. La mezcla de funciones de distribución es útil para poder generar funciones más generales (como las distribuciones hiperbólicas generalizadas) y también lo es la mezcla de cópulas generando cópulas multivariadas, sin la necesidad de hacer la corrección por cada combinación de parámetros, además de tener propiedades respecto a su función de dependencia extrema que facilitan su estimación numérica e interpretación. El gran inconveniente que tiene este modelo de cópulas es que el orden en el que se colocan las cópulas modifican la dependencia.

Por otro lado la asimetría de los datos en general es un problema, ya que tanto los modelos ARMA con innovaciones GARCH como los modelos pa-

ramétricos son muy exigentes con este tipo de supuestos. Las cópulas elípticas modelan datos que tengan comportamiento simétrico y los modelos de cópulas Arquimedianas con dependencia extrema que se trabajaron modelaban datos con sólo un tipo de dependencia extrema suponiendo que las demás eran 0. Lo que es un error si no se tienen las consideraciones necesarias. Otro supuesto fuerte que en muchas ocasiones es difícil que se cumpla es el de continuidad, en particular al momento de asumir la unicidad de la cópula ajustada y en el caso del teorema de Sklar para funciones de supervivencia y funciones LU Y UL, ya que sólo fueron demostrados para el caso continuo. Estos supuestos serán tratados con mayor atención y la forma de corregirlos en un futuro trabajo.



# Apéndices

# Apéndice A

## Demostraciones

En este apéndice están las demostraciones de los teoremas, proposiciones, lemas, corolarios y resultados enunciados en el cuerpo de la tesis.

### A.1. Teoría de cópulas

**Demostración de la proposición 1.1** Sea  $T$  una función no decreciente y  $T^{\leftarrow}$  la inversa generalizada i.e. la función  $T^{\leftarrow}(y) = \inf\{x : T(x) \geq y\}$

1) Sea  $T$  con  $y_1 < y_2$  entonces

$$\begin{aligned} T^{\leftarrow}(y_1) &= \inf\{x : T(x) \geq y_1\} = x_1 \\ T^{\leftarrow}(y_2) &= \inf\{x : T(x) \geq y_2\} = x_2 \end{aligned}$$

Ya que  $T$  es no decreciente el conjunto  $X_1 = \{x : T(x) \geq y_1\} \supseteq X_2 = \{x : T(x) \geq y_2\}$  si  $T(x) \geq y_2 \Rightarrow T(x) \geq y_1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \inf X_1 &\leq \inf X_2 \\ x_1 &\leq x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $T^{\leftarrow}$  es no decreciente.

$T^{\leftarrow}$  es continua por la izquierda en  $y_0$  si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } y \in (y_0 - \delta, y_0) \Rightarrow |T^{\leftarrow}(y_0) - T^{\leftarrow}(y)| < \epsilon$$

Se supone que  $T^{\leftarrow}$  es discontinua por la izquierda en  $y_0$  entonces:  
 $\exists \epsilon_0 > 0$  tal que  $\forall \delta > 0$   $T^{\leftarrow}(y_0) - T^{\leftarrow}(y_0 - \delta) > \epsilon_0$

Sea  $x_0$  un punto en  $(T^{\leftarrow}(y_0) - \epsilon_0, T^{\leftarrow}(y_0))$  entonces  $T^{\leftarrow}(y_0 - \delta) < T^{\leftarrow}(y_0) - \epsilon_0 < x_0 < T^{\leftarrow}(y_0)$   
 por la desigualdad dado que  $T^{\leftarrow}(y_0)$  es el ínfimo de las  $x$  tal que  $T(x)$  es mayor a  $y_0$ :

$$T(x_0) < y_0$$

De la otra desigualdad se tiene:

$$T(x_0) \geq y_0 - \delta$$

Entonces se tiene  $y_0 - \delta \leq T(x_0) < y_0 \forall \delta !$

Por tanto  $T^{\leftarrow}$  es continua por la izquierda.

II)  $T$  continua  $\Leftrightarrow T^{\leftarrow}$  es estrictamente creciente :

$\Rightarrow$

Sea  $T$  continua.

Se supone que  $T^{\leftarrow}$  no es estrictamente creciente entonces existe al menos un  $y_0$  tal que  $0 < y_1 - y_0$  y  $T^{\leftarrow}(y_0) \geq T^{\leftarrow}(y_1)$ :

Por el inciso anterior se tiene que  $T^{\leftarrow}$  es no decreciente entonces  $T^{\leftarrow}(y_0) = T^{\leftarrow}(y_1) = x_0$  debido a que  $T$  es continua.

Se sabe que  $y_0 = y_1 - \epsilon$

Por definición de continuidad en  $x_0$   $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $|x_0 - x| < \delta$   
 $\Rightarrow |T(x_0) - T(x)| < \epsilon$

$T$  continua en particular es continua en  $x_0$  se toma  $\epsilon = y_1 - y_0$  y  $T$  es no decreciente entonces  $T(x_0) - T(x_0 - \delta) < \epsilon$  por definición de  $T^{\leftarrow}$  se tiene

$$\begin{aligned}
y_1 - T(x_0 - \delta) &\leq T(x_0) - T(x_0 - \delta) < \epsilon \\
y_1 - T(x_0 - \delta) &< \epsilon \\
y_1 - \epsilon &< T(x_0 - \delta) \\
y_0 &< T(x_0 - \delta)!
\end{aligned}$$

ya que entonces  $x_0$  no sería el ínfimo para  $y_0$  por lo tanto  $T$  es continua.

⇐

Sea  $T^{\leftarrow}$  estrictamente creciente con  $y_1 = y_2 + \delta$ .

se supone a  $T$  discontinua en  $x_0$  ya que  $T$  es no decreciente entonces  $A = (T(x_0) - \epsilon, T(x_0))$  no está en el rango de  $T$ .

Sea  $y_1, y_2 \in A$  con  $y_1 < y_2$

$$\inf\{x : T(x) \geq y_1\} = \inf\{x : T(x) \geq y_2\}$$

$$T^{\leftarrow}(y_1) = T^{\leftarrow}(y_2)!$$

Por tanto  $T$  es continua.

III) Si  $T$  es continua por la derecha,  $T(x) \geq y \Leftrightarrow T^{\leftarrow}(y) \leq x$

⇒ Sea  $T$  continua por la derecha, con  $T(x_0) \geq y$  entonces se sabe que  $T(x_0) \geq y$  entonces  $x_0$  es parte del conjunto  $X : \{x : T(x) \geq y\}$  por lo tanto

$$\begin{aligned}
x_0 &\geq \inf\{x : T(x) \geq y\} \\
&\geq T^{\leftarrow}(y)
\end{aligned}$$

⇐ Sea  $T$  continua por la derecha y  $T^{\leftarrow}(y) \leq x$ .

Ya que  $T$  es no decreciente y continua por la derecha en particular para  $x$  (i.e.  $\forall \epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $T(x+\delta) - T(x) < \epsilon$ ) lo que asegura que  $T^{\leftarrow}(y) = x_0$  entonces  $x$  está en el conjunto  $X : \{x : T(x) \geq y\}$  y por tanto  $y \leq T(x)$

$$\text{iv) } T^{\leftarrow} \circ T(x) \leq x$$

Sea  $X = \{x : T(x) \geq T(x_0)\}$  con  $x_0 \geq \inf X$  debido a que  $x_0$  es un elemento de  $X$

$$\begin{aligned} T^{\leftarrow} \circ T(x_0) &= \inf X \\ &\leq x_0 \end{aligned}$$

$$\text{v) } T \circ T^{\leftarrow}(y) \geq y$$

$$\begin{aligned} T \circ T^{\leftarrow}(y) &= T(T^{\leftarrow}(y)) \\ &= T(\inf\{x : T(x) \geq y\}) \\ &\geq y \end{aligned}$$

Ya que  $\inf\{x : T(x) \geq y\}$  es mayor que  $y$

$$\text{vi) si } T \text{ es estrictamente creciente } \Rightarrow T^{\leftarrow} \circ T(x) = x$$

Sea  $T$  estrictamente creciente y se sabe que  $T^{\leftarrow} \circ T(x) \leq x$  se supone que  $T^{\leftarrow} \circ T(x_0) < x_0$  esto implicaría que existe un  $x_1 < x_0$  tal que  $T(x_1) \geq T(x_0)$ ! entonces  $T$  no sería estrictamente creciente. Por lo tanto  $T^{\leftarrow} \circ T(x_0) = x_0$

$$\text{vii) si } T \text{ continua } \Rightarrow T \circ T^{\leftarrow}(y) = y$$

Sea  $T$  continua entonces  $T$  continua en  $x_0$  i.e.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |T(x_0) - T(x)| < \epsilon$ .

$$\begin{aligned} T \circ T^{\leftarrow}(y) &= T(T^{\leftarrow}(y)) \\ &= T(\inf\{x : T(x) \geq y\}) \\ &= T(x_0) \\ &\geq y \end{aligned}$$

se supone que  $\exists \epsilon$  tal que  $T(x_0) + \epsilon = y$  y debido a que  $T$  es continua en particular en  $x_0$  para  $\epsilon$  se tiene que  $0 < T(x_0) - T(x_0 - \delta) < \epsilon$  entonces  $y = T(x_0) - \epsilon < T(x_0 - \delta)$  !.

Ya que  $x_0$  no sería el  $\inf\{x : T(x) \geq y\}$  y por tanto  $T(x_0)$  no puede ser mayor a  $y$ , entonces



$$\begin{aligned} T \circ T^{\leftarrow}(y) &= T(T^{\leftarrow}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

□

**Demostración del lema 1.1** Sea  $T$  una función no decreciente y sea  $X$  una variable aleatoria entonces:

$$\begin{aligned} \{T(X) \leq T(x)\} &= \{T(X) \leq T(x), X \leq x\} \cup \{T(X) = T(x), X > x\} \\ &= \{T(X) \leq T(x)\} \cup \{T(X) = T(x), X > x\} \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Por (A.1) se tiene que  $\{X \leq x\} \subset \{T(X) \leq T(x)\}$  por otro lado se sabe que  $\{T(X) \leq T(x), X \leq x\} \cup \{T(X) = T(x), X > x\}$  son conjuntos disjuntos entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T(X) \leq T(x)] &= \mathbb{P}[T(X) \leq T(x), X \leq x] + \mathbb{P}[T(X) = T(x), X > x] \\ &= \mathbb{P}[T(X) \leq T(x)] + \mathbb{P}[T(X) = T(x), X > x] \end{aligned}$$

Si  $F$  es una función de distribución entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F(X) \leq F(x)] &= \mathbb{P}[F(X) \leq F(x), X \leq x] + \mathbb{P}[F(X) = F(x), X > x] \\ &= \mathbb{P}[F(X) \leq F(x)] + \mathbb{P}[F(X) = F(x), X > x] \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{P}[F(X) = F(x), X > x] = 0$  debido a que  $\mathbb{P}[F(X) = F(x)] = 0 \forall x$  por ser un conjunto de medida cero.

□

**Demostración del lema 1.2** Sea  $F$  una función 2-creciente con dominio en  $S_1 \times S_2$  con  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$  y  $x_1, x_2 \in S_1$  con  $x_1 \leq x_2$  y  $y_1, y_2 \in S_2$  con  $y_1 \leq y_2$ . Ya que  $F$  es 2-creciente por lo tanto usando la desigualdad del rectángulo se obtiene

$$\begin{aligned} F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) &\geq 0 \\ F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) &\geq F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1) \\ F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) &\geq F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1) \end{aligned}$$

de esto se concluye que si  $x_1, x_2 \in S_1$  con  $x_1 \leq x_2$  y  $y_1, y_2 \in S_2$  con  $y_1 \leq y_2$  entonces.

$$\begin{aligned} F(t, y_2) - F(t, y_1) &\text{ es no decreciente } \forall t \in S_1 \\ F(x_2, t) - F(x_1, t) &\text{ es no decreciente } \forall t \in S_2 \end{aligned}$$

□

**Demostración del lema 1.3** Sea  $F$  una función 2-creciente y anclada con dominio en  $S_1 \times S_2$  con  $S_1$  y  $S_2$  dos conjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$  con  $a_1$  el elemento mínimo de  $S_1$  y  $a_2$  el elemento mínimo de  $S_2$ . Usando el lema (1.2) se tiene que la función  $H(t) = F(t, y_2) - F(t, y_1)$  es no decreciente  $\forall t \in S_1$  y  $G(t) = F(x_2, t) - F(x_1, t)$  es no decreciente  $\forall t \in S_2$  si se sustituye  $x_1 = a_1$  y  $y_1 = a_2$  se obtiene:

$$\begin{aligned} F(t, y_2) - F(t, a_1) &= F(t, y_2) \\ F(x_2, t) - F(a_2, t) &= F(x_2, t) \end{aligned}$$

por lo tanto  $F$  es no decreciente en cada entrada. □

**Demostración del lema 1.4** Por la desigualdad del triángulo se tiene

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq |F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2)| + |F(x_1, y_2) - F(x_2, y_2)| \quad (\text{A.2})$$

Ahora con  $x_1 \leq x_2$ , se sabe que  $F$  es función anclada y 2-creciente con marginales  $F_1$  y  $F_2$  por lo que los lemas (1.2) y (1.3) son válidos. De estos lemas se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 \leq F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) &\leq \lim_{y_2 \rightarrow \infty} F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) \\ &\leq F_1(x_2) - F_1(x_1) \end{aligned}$$

la desigualdad para el caso  $x_2 \leq x_1$  es análoga. Y para el caso de  $F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1) \leq F_2(y_2) - F_2(y_1)$  se procede de forma similar que el caso  $F_1$  usando estas desigualdades y la desigualdad (A.2) se tiene:

$$\begin{aligned} |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| &\leq |F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2)| + |F(x_1, y_2) - F(x_2, y_2)| \\ &\leq |F_1(x_2) - F_1(x_1)| + |F_2(y_2) - F_2(y_1)| \end{aligned}$$

□

**Demostración del lema 1.5** Sea  $F$  una función de distribución conjunta con marginales  $F_1$  y  $F_2$ . Se sabe que  $F$  al ser función de distribución cumple las hipótesis del lema (1.4) con  $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{R}}$  entonces para cualquier par de puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  en  $\overline{\mathbb{R}^2}$  se obtiene:

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| = |F_1(x_2) - F_1(x_1)| + |F_2(y_2) - F_2(y_1)|$$

Se deduce que si  $F_1(x_1) = F_1(x_2)$  y  $F_2(y_1) = F_2(y_2)$  entonces  $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$  así el conjunto de pares ordenados

$$C' := \{((F_1(x), F_2(y)), F(x, y)) | x, y \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

define una función bivariada  $C'$  cuyo dominio es  $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2$ .

Falta mostrar que  $C'$  es una subcópula.

1. Se sabe que  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de distribución entonces el  $\text{Ran}F_1$  y  $\text{Ran}F_2$  son subconjuntos de  $\mathbf{I}$  y contienen al 0 y 1
2. Se tiene que  $\min\{\text{Ran}F_1\}$  es 0 de igual forma de  $F_2$  entonces para toda  $u_1$  en  $\text{Ran}F_1$  se obtiene

$$C'(0, u_2) = C'(F_1(0), F_2(x_2)) = F(0, x_2) = 0$$

ya que  $F$  es anclada, para el caso de  $F_2$  es análogo. Por otro lado para todo  $(u, v)$  en  $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2$  existe un  $(x, y)$  tal que  $(u, v) = (F_1(x), F_2(y))$ , sea  $(u_1, v_1)$  y  $(u_2, v_2)$  en  $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2$  se obtiene:

$$\begin{aligned} C'(u_1, v_1) - C'(u_1, v_2) - C'(u_2, v_1) + C'(u_2, v_2) \\ &= C'(F_1(x_1), F_2(y_1)) - C'(F_1(x_1), F_2(y_2)) \\ &\quad - C'(F_1(x_2), F_2(y_1)) + C'(F_1(x_2), F_2(y_2)) \\ &= F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) \\ &\quad - F(x_1, y_2) + F(x_2, y_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto es 2-creciente

3. Para cada  $u$  en  $\text{Ran}F_1$ , existe una  $x$  tal que  $F_1(x) = u$  entonces

$$C'(u, 1) = C(F_1(x), F_2(\infty)) = F(x, \infty) = F_1(x) = u$$

para  $F_2$  es análogo

de esta forma se obtiene  $C'$  una subcópula. □

**Demostración del lema 1.6** Sea  $C'$  una subcópula con  $\text{Dom}C' = S_1 \times S_2$  por el teorema ( 1.1) y por el hecho que  $C'$  es no decreciente en cada entrada

y uniformemente continua en el dominio, se puede extender  $C'$  a  $C''$  con dominio  $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$  donde  $\overline{S}_1$  y  $\overline{S}_2$  son las clausuras (i.e. que al conjunto se le agregan sus puntos de acumulación) de los conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente. Claramente  $C''$  es todavía una subcópula. El siguiente paso es extender  $C''$  a una función  $C$  con dominio  $\mathbf{I}^2$ . Sea  $(a,b)$  cualquier punto en  $\mathbf{I}^2$ , sea  $a_1$  y  $a_2$ , respectivamente los elementos mínimo y máximo del conjunto  $\overline{S}_1$  que cumplan  $a_1 \leq a \leq a_2$  y  $b_1$  y  $b_2$ , respectivamente los elementos mínimo y máximo del conjunto  $\overline{S}_2$  que cumplan  $b_1 \leq b \leq b_2$ . Se debe notar que si  $a$  está en  $\overline{S}_1$ , entonces  $a_1 = a = a_2$ , de igual forma si  $b$  está en  $\overline{S}_2$ . Se define

$$\lambda_1 = \begin{cases} (a - a_1)/(a_2 - a_1) & \text{si } a_1 < a < a_2 \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2 \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} (b - b_1)/(b_2 - b_1) & \text{si } b_1 < b < b_2 \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2 \end{cases}$$

y se define a  $C$  en términos de una interpolación bilineal.

$$C(a, b) = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C''(a_1, b_2) + \lambda_1(1 - \mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C''(a_2, b_2) \quad (\text{A.3})$$

es bilineal ya que  $\lambda_1$  es lineal en  $a$  y  $\mu_1$  es lineal en  $b$ .

Se obtiene que  $\text{Dom}C$  es  $\mathbf{I}$  y que  $C(a,b)=C''(a,b)$  para cualquier  $(a, b)$  en  $\text{Dom}C''$ . Falta mostrar que  $C$  es una cópula. Ya que  $\overline{S}_1$  y  $\overline{S}_2$  tienen como elemento el 0 y el 1,  $C(a, 0) = (1 - \lambda_1)C''(a_1, 0) + (1 - \lambda_1)C''(a_1, 0) + \lambda_1C''(a_2, 0) + \lambda_1C''(a_2, 0) = 0$  y  $C(a, 1) = (1 - \lambda_1)C''(a_1, 1) + (1 - \lambda_1)C''(a_1, 1) + \lambda_1C''(a_2, 1) + \lambda_1C''(a_2, 1) = a$  por lo tanto cumple (1) de la definición (1.4). Para mostrar que  $C$  satisface también (2) es necesario tomar  $(c,d)$  otro punto en  $\mathbf{I}^2$  tal que  $c \geq a$  y  $d \geq b$  y  $c_1, c_2, d_1, d_2, \lambda_2, \mu_2$ , están relacionados con  $(c,d)$  de la misma forma que  $a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_1, \mu_1$ , con  $(a,b)$ , si se evalúa el rectángulo

$$V_C[a, b] \times [c, d] = C(a, c) - C(a, b) - C(c, d) + C(b, d)$$

existen varios casos, se hacen los dos casos extremos ya que los otros casos son análogos a los dos que se muestran. El primer caso está formado cuando no existe un punto en  $\overline{S}_1$  entre  $a$  y  $c$  y no existe un punto en  $\overline{S}_2$  entre  $b$  y  $d$ . De esta forma  $a_1 = c_1$ ,  $a_2 = c_2$ ,  $b_1 = d_1$  y  $b_2 = d_2$  sustituyendo (A.3) se obtiene:

$$V_C[a, b] \times [c, d] = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_C[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$$

en este caso como se definió  $c \geq a$  y  $d \geq b$  se sabe que  $\lambda_2 \geq \lambda_1$  y  $\mu_2 \geq \mu_1$  y ya que  $a_1, a_2, b_1, b_2$  están en el dominio de  $C'$  se sabe  $V_C[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \geq 0$  por lo tanto  $V_C[a, b] \times [c, d] \geq 0$

El otro caso extremo es cuando existe un punto mínimo en  $\bar{S}_1$  entre  $a$  y  $c$  y existe un punto mínimo en  $\bar{S}_2$  entre  $b$  y  $d$ . De esta forma  $a < a_2 \leq c_1 < c$  y  $b < b_2 \leq d_1 < d$ , sustituyendo (A.3) en los correspondientes términos  $C(a, c)$ ,  $C(c, d)$  y  $C(c, b)$  se obtiene

$$\begin{aligned} V_C[a, b] \times [c, d] = & (1 - \lambda_1)(\mu_2)V_C[a_2, c_1] \times [d_1, d_2] + \lambda_2\mu_2V_C[a_1, a_2] \times [b_2, d_1] \\ & + V_C[a_2, c_1] \times [b_2, d_1] + \lambda_2V_C[c_1, c_2] \times [b_2, d_1] \\ & + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)V_C[a_1, a_2] \times [b_2, b_1] \\ & + (1 - \mu_1)V_C[a_2, c_1] \times [b_1, b_2] \\ & + \lambda_2(1 - \mu_1)V_C[c_1, c_2] \times [b_1, b_1] \end{aligned}$$

Es la suma de 9 elementos mayores que 0 y todos los coeficientes son mayores que 0 de la misma forma que  $V_C$  para todos los puntos es mayor de 0. Las demás combinaciones se hacen de forma análoga.

Con esto se tiene que  $C$  es 2-creciente y cumple la definición de cópula.  $\square$

**Demostración de la proposición 1.3** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $u \in (0, 1)$ . Para 1 se ocupa el hecho que proposición (1.1)(iii):

$$F(x) \geq u \Leftrightarrow F^{\leftarrow}(u) \leq x$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F^{\leftarrow}(U) \leq x] &= \mathbb{P}[U \leq F(x)] \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Ya que  $U \sim Unif(0, 1)$  y  $\mathbb{F}[U \leq u] = u$

Para la segunda

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F(X) \leq u] &= \mathbb{P}[F^{\leftarrow}(F(X)) \leq F^{\leftarrow}(u)] \\ &= \mathbb{P}[X \leq F^{\leftarrow}(u)] \\ &= F(F^{\leftarrow}(u)) \\ &= u \end{aligned}$$

Por tanto se puede concluir que  $F(X) \sim Unif(0, 1)$ .  $\square$

**Demostración de la observación 1.1**  Sea  $U$  una variable aleatoria uniforme estándar.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[1 - U \leq u] &= \mathbb{P}[U > 1 - u] \\ &= 1 - \mathbb{P}[U \leq 1 - u] \\ &= 1 - (1 - u) \\ &= u \\ &= \mathbb{P}[U \leq u] \end{aligned}$$

Es la función de distribución asociada a  $1-U$  y se nota  $1 - U \stackrel{d}{=} U$

Esto debido a que se sabe que si  $U \sim Unif$  entonces  $1 - U \sim Unif$  □

**Demostración del teorema 1.2**  Por el lema ( 1.5) se sabe que  $F$  induce a una subcópula única y en el caso que  $F_1$  y  $F_2$  sean continuas implica que  $DomC' = RanF_1 \times RanF_2 = \mathbf{I}^2$  por lo que la subcópula es una cópula. En otro caso por el lema ( 1.6) esta subcópula induce a su vez una cópula.

Para la conversión sea  $C$  una cópula correspondiente al vector  $(U_1, U_2)$  y que  $F_1$  y  $F_2$  son funciones de distribución univariadas. Se construye un vector de variables aleatorias  $U_1$  y  $U_2$  con función de distribución conjunta  $C$ , se toma  $X := (F_1^{\leftarrow}(U_1), F_2^{\leftarrow}(U_2))$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] &= \mathbb{P}[F_1^{\leftarrow}(U_1) \leq x_1, F_2^{\leftarrow}(U_2) \leq x_2] \\ &= \mathbb{P}[U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2)] \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned}$$

□

**Demostración del corolario 1.1**  Sea  $F$  la función de distribución conjunta de  $(X_1, X_2)$  con marginales  $F_1$  y  $F_2$  con cópula asociada  $C$  entonces y  $x_1 = F_1^{\leftarrow}(u_1)$  y  $x_2 = F_2^{\leftarrow}(u_2)$  entonces:

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) &= C(F_1(F_1^{\leftarrow}(u_1)), F_2(F_2^{\leftarrow}(u_2))) \\ &= F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2)) \end{aligned}$$

Por tanto se tiene  $C(u_1, u_2) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2))$

□

**Demostración de la observación 1.2**  Por como se define la función de densidad y el teorema ( 1.2) (Sklar) se obtiene:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\
&= \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial x_1 \partial x_2} \\
&= c(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_1(x_1) f_2(x_2)
\end{aligned}$$

□

**Demostración de la proposición 1.4** Sea  $C$  la función de distribución y asumiendo regularidad suficiente se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(U_2 \leq u_2, U_1 \in (u_1 - \delta, u_1 + \delta])}{\mathbb{P}(U_1 \in (u_1 - \delta, u_1 + \delta])} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ -\frac{\mathbb{P}(U_2 \leq u_2, U_1 \leq u_1 - \delta)}{\mathbb{P}(u_1 - \delta \leq U_1 \leq u_1 + \delta)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbb{P}(U_2 \leq u_2, U_1 \leq u_1 + \delta)}{\mathbb{P}(u_1 - \delta \leq U_1 \leq u_1 + \delta)} \right] \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \delta, u_2) - C(u_1 - \delta, u_2)}{2\delta} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \delta, u_2) - C(u_1, u_2)}{\delta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{C(u_1, u_2) - C(u_1 - \delta, u_2)}{\delta} \right] \\
&= \frac{1}{2} 2 \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

□

**Demostración del corolario 1.3** Sea  $X_1$  y  $X_2$  variables aleatorias con funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$  y funciones de densidad  $f_1$  y  $f_2$  y una cópula conocida  $C$

$$f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}$$

por el resultado ( 1.2) sustiyendo la ecuación (1.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} f_{x_1|x_2}(x_1|x_2) &= \frac{c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2)}{f_2(x_2)} \\ &= c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1) \end{aligned}$$

□

**Demostración de la observación 1.3** Sea  $C$  la función de distribución de  $(U_1, U_2)$  v.a.i. Unif(0,1) y  $\widehat{C}$  la cópula de  $(1 - U_1, 1 - U_2)$ :

Se ocupará el hecho que:

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cup B]$$

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap B^c]$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u_1, u_2) &= \mathbb{P}[1 - U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2] \\ &= \mathbb{P}[U_1 > 1 - u_1, U_2 > 1 - u_2] \\ &= \mathbb{P}[U_1 > 1 - u_1] + \mathbb{P}[U_2 > 1 - u_2] - (1 - \mathbb{P}[U_1 \leq 1 - u_1, U_2 \leq 1 - u_2]) \\ &= u_1 + u_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - u_2) \end{aligned}$$

□

**Demostración de la observación 1.4** Sea  $C$  la función de distribución de  $(U_1, U_2)$  v.a.i. Unif(0,1) y  $C_{LU}$  la cópula de  $(U_1, 1 - U_2)$ :

$$\begin{aligned} C_{LU}(u_1, u_2) &= \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2] \\ &= \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 > 1 - u_2] \\ &= \mathbb{P}[U_1 \leq u_1] - \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq 1 - u_2] \\ &= u_1 - C(u_1, 1 - u_2) \end{aligned}$$

□

**Demostración de la observación 1.5** Sea  $C$  la función de distribución de  $(U_1, U_2)$  v.a.i. Unif(0,1) y  $C_{UL}$  la cópula de  $(1 - U_1, U_2)$ :



$$\begin{aligned}
C_{UL}(u_1, u_2) &= \mathbb{P}[1 - U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2] \\
&= \mathbb{P}[U_1 > 1 - u_1, U_2 \leq u_2] \\
&= \mathbb{P}[U_2 \leq u_2] - \mathbb{P}[U_1 \leq 1 - u_1, U_2 \leq u_2] \\
&= u_2 - C(1 - u_1, u_2)
\end{aligned}$$

□

**Demostración del teorema 1.4** Sea  $\bar{F}(x_1, x_2)$  una función de supervivencia bivariada

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1 > x_1, X_2 > x_2] &= \mathbb{P}[F_1(X_1) > F_1(x_1), F_2(X_2) > F_2(x_2)] \\
&= \mathbb{P}[1 - F_1(X_1) \leq 1 - F_1(x_1), 1 - F_2(X_2) \leq 1 - F_2(x_2)] \\
&= \mathbb{P}[\bar{F}_1(X_1) \leq 1 - F_1(x_1), \bar{F}_2(X_2) \leq 1 - F_2(x_2)] \\
&= \mathbb{P}[\bar{F}_1(X_1) \leq \bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(X_2) \leq \bar{F}_2(x_2)]
\end{aligned}$$

Por la observación (1.1) se tiene que  $\bar{F}_1(X_1)$  y  $\bar{F}_2(X_2) \sim Unif(0, 1)$ . Falta mostrar que  $\mathbb{P}[\bar{F}_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2]$  es una función que cumple con la definición de cópula.

$\mathbb{P}[\bar{F}_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2]$  Es cópula si

1. Si  $u_1 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\bar{F}_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] &= \mathbb{P}[\bar{F}_1(X_1) \leq 1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] \\
&= \mathbb{P}(\bar{F}_2(X_2) \leq u_2) \\
&= \mathbb{P}(U_2 \leq u_2) \\
&= u_2
\end{aligned}$$

Si  $u_1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\bar{F}_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] &= \mathbb{P}(\bar{F}_1(X_1) \leq 0, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2) \\
&= \mathbb{P}[U_1 \leq 0, U_2 \leq u_2] \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Sea  $u_1, u_2, v_1$  y  $v_2$  tal que  $u_1 \leq v_1$  y  $u_2 \leq v_2$  con  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$   
 Se tiene que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[\overline{F}_1(X_1) \leq u_1, \overline{F}_2(X_2) \leq u_2] - \mathbb{P}[\overline{F}_1(X_1) \leq v_1, \overline{F}_2(X_2) \leq u_2] \\ & - \mathbb{P}[\overline{F}_1(X_1) \leq u_1, \overline{F}_2(X_2) \leq v_2] + \mathbb{P}[\overline{F}_1(X_1) \leq v_1, \overline{F}_2(X_2) \leq v_2] \\ & = \mathbb{P}[(u_1 \leq U_1 \leq v_1) \cap (u_2 \leq U_2 \leq v_2)] \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo que cumple la definición de cópula. Se tiene que  $\mathbb{P}[\overline{F}_1(X_1) \leq u_1, \overline{F}_2(X_2) \leq u_2]$  es una cópula de la forma

$$\mathbb{P}[\overline{F}_1(X_1) \leq \overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(X_2) \leq \overline{F}_2(x_2)] = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2))$$

Por tanto  $\overline{F}(x_1, x_2) = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2))$

Para la conversión sea  $\widehat{C}$  una cópula correspondiente al vector  $(U_1, U_2)$  y que  $\overline{F}_1$  y  $\overline{F}_2$  son funciones de supervivencia univariantes continuas. Se construye un vector de variables aleatorias  $U_1$  y  $U_2$  con función de distribución conjunta  $\widehat{C}$ , se toma  $X := (\overline{F}_1^{\leftarrow}(U_1), \overline{F}_2^{\leftarrow}(U_2))$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 > x_1, X_2 > x_2] &= \mathbb{P}[\overline{F}_1^{\leftarrow}(U_1) > x_1, \overline{F}_2^{\leftarrow}(U_2) > x_2] \\ &= \mathbb{P}[U_1 \leq \overline{F}_1(x_1), U_2 \leq \overline{F}_2(x_2)] \\ &= \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)) \end{aligned}$$

□

**Demostración del teorema 1.5** Sea  $F$  una función de probabilidad conjunta con marginales  $F_1$  función de distribución y  $\overline{F}_2$  función de supervivencia de  $X_1$  y  $X_2$

$$\begin{aligned} F_{LU}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, X_2 > x_2] \\ &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) > F_2(x_2)] \\ &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), 1 - F_2(X_2) \leq 1 - F_2(x_2)] \\ &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \overline{F}_2(X_2) \leq \overline{F}_2(x_2)] \end{aligned}$$

Por la observación (1.1) se tiene que  $F_1(X_1), \bar{F}_2(X_2) \sim Unif(0, 1)$ . Falta mostrar que  $\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2]$  es una función de probabilidad conjunta que cumple con la definición de cópula.

$\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2]$  Es cópula si

1. Si  $u_1 \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq 1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] \\ &= \mathbb{P}(\bar{F}_2(X_2) \leq u_2) \\ &= \mathbb{P}[U_2 \leq u_2] \\ &= u_2 \end{aligned}$$

Si  $u_1 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] &= \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq 0, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2) \\ &= \mathbb{P}[U_1 \leq 0, U_2 \leq u_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Sea  $u_1, u_2, v_1$  Y  $v_2$  tal que  $u_1 \leq v_1$  y  $u_2 \leq v_2$  con  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$   
Se tiene que :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] - \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq v_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2] \\ &\quad - \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq v_2] + \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq v_1, \bar{F}_2(X_2) \leq v_2] \\ &= \mathbb{P}[(u_1 \leq U_1 \leq v_1) \cap (u_2 \leq U_2 \leq v_2)] \geq 0 \end{aligned}$$

Se tiene que  $\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq u_1, \bar{F}_2(X_2) \leq u_2]$  cumple con la definición de cópula de esta forma

$$\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \bar{F}_2(X_2) \leq \bar{F}_2(x_2)] = C(F_1(x_1), \bar{F}_2(x_2))$$

Por tanto  $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), \bar{F}_2(x_2))$

Para la conversión sea  $C_{LU}$  una cópula del vector  $(U_1, U_2)$  y que  $F_1$  una función de distribución univariante continua y  $\bar{F}_2$  una función de supervivencia univariante continua. Se construye un vector de variables aleatorias  $U_1$  y  $U_2$

con función de distribución conjunta  $C_{LU}$ , se toma  $X := (F_1^{\leftarrow}(U_1), \overline{F}_2^{\leftarrow}(U_2))$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, X_2 > x_2] &= \mathbb{P}[F_1^{\leftarrow}(U_1) \leq x_1, \overline{F}_2^{\leftarrow}(U_2) > x_2] \\ &= \mathbb{P}[U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq \overline{F}_2(x_2)] \\ &= \widehat{C}_{LU}(F_1(x_1), \overline{F}_2(x_2)) \end{aligned}$$

□

**Demostración del teorema 1.6** Sea  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  un punto arbitrario en el DomC ahora  $C(u_1, u_2) \leq C(u_1, 1) = u_1$  y  $C(u_1, u_2) \leq C(1, u_2) = u_2$  por lo tanto se tiene  $C(u_1, u_2) \leq \min\{u, v\}$ .

Por otro lado C cumple la propiedad del rectángulo

(i.e.  $C(u_1, u_2) = V_C([u_1, 1] \times [u_2, 1]) \geq 0$ ) implica que  $C(u_1, u_2) \geq C(u_1, 1) + C(1, u_2) - C(1, 1) = u_1 + u_2 - 1$  por lo tanto  $C(u_1, u_2) \geq \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$ .

Juntando ambas desigualdades se llega a

$$\max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min\{u_1, u_2\}$$

□

**Demostración de la proposición 1.5** Sea  $F_1, F_2, G_1$  y  $G_2$  las funciones de distribución de las variables  $X_1, X_2, T(X_1)$  y  $T(X_2)$  respectivamente ya que se sabe que  $T_1$  y  $T_2$  son funciones crecientes de esta forma,  $G_1(x_1) = \mathbb{P}[T_1(X_1) \leq x_1] = \mathbb{P}[X_1 \leq T_1^{\leftarrow}(x_1)] = F_1(T_1^{\leftarrow}(x_1))$ , de la misma forma  $G_2(x_2) = F_2(T_2^{\leftarrow}(x_2))$ .

Entonces para todo  $x_1, x_2 \in R$ .

$$\begin{aligned} C_{T_1(X_1), T_2(X_2)}(G_1(x_1), G_2(x_2)) &= \mathbb{P}[T_1(X_1) \leq x_1, T_2(X_2) \leq x_2] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \leq T_1^{\leftarrow}(x_1), X_2 \leq T_2^{\leftarrow}(x_2)] \\ &= C_{X_1, X_2}(F_1(T_1^{\leftarrow}(x_1)), F_2(T_2^{\leftarrow}(x_2))) \\ &= C_{X_1, X_2}(G_1(x_1), G_2(x_2)) \end{aligned}$$

□

**Demostración de la proposición 1.6** Sea  $F_1, F_2, G_1$  y  $G_2$  las funciones de distribución de las variables  $X_1, X_2, T(X_1)$  y  $T(X_2)$  respectivamente. Ya que se sabe que  $T_1$  y  $T_2$  son funciones decrecientes,  $G_1(x_1) = \mathbb{P}[T_1(X_1) \leq x_1] = \mathbb{P}[X_1 \geq T_1^{\leftarrow}(x_1)] = \overline{F}_1(T_1^{\leftarrow}(x_1))$ , de la misma forma  $G_2(x_2) = \overline{F}_2(T_2^{\leftarrow}(x_2))$ . Entonces para todo  $x_1, x_2 \in R$ .

$$\begin{aligned} C_{T_1(X_1), T_2(X_2)}(G_1(x_1), G_2(x_2)) &= \mathbb{P}[T_1(X_1) \leq x_1, T_2(X_2) \leq x_2] \\ &= \mathbb{P}[X_1 > T_1^{\leftarrow}(x_1), X_2 > T_2^{\leftarrow}(x_2)] \\ &= \widehat{C}_{X_1, X_2}(\overline{F}_1(T_1^{\leftarrow}(x_1)), \overline{F}_2(T_2^{\leftarrow}(x_2))) \\ &= \widehat{C}_{X_1, X_2}(G_1(x_1), G_2(x_2)) \end{aligned}$$

□

**Demostración de la proposición 1.7** Sea  $F_1, F_2, G_1$  y  $G_2$  las funciones de distribución de las variables  $X_1, X_2, T(X_1)$  y  $T(X_2)$  respectivamente. Ya que se sabe que  $T_1$  es una función creciente y  $T_2$  una función decreciente se obtiene

$$\begin{aligned} G_1(x_1) &= \mathbb{P}[T_1(X_1) \leq x_1] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \leq T_1^{\leftarrow}(x_1)] \\ &= F_1(T_1^{\leftarrow}(x_1)) \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} G_2(x_2) &= \mathbb{P}[T_2(X_1) \leq x_2] \\ &= \mathbb{P}[X_2 > T_2^{\leftarrow}(x_2)] \\ &= \overline{F}_2(T_2^{\leftarrow}(x_2)) \end{aligned}$$

entonces para todo  $x_1, x_2 \in R$ .

$$\begin{aligned} C_{T_1(X_1), T_2(X_2)}(G_1(x_1), G_2(x_2)) &= \mathbb{P}[T_1(X_1) \leq x_1, T_2(X_2) \leq x_2] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \leq T_1^{\leftarrow}(x_1), X_2 > T_2^{\leftarrow}(x_2)] \\ &= C_{LU(X_1, X_2)}(F_1(T_1^{\leftarrow}(x_1)), \overline{F}_2(T_2^{\leftarrow}(x_2))) \\ &= C_{LU(X_1, X_2)}(G_1(x_1), G_2(x_2)) \end{aligned}$$

□

## A.2. Medidas de dependencia

**Demostración del teorema 2.1** Debido a que las variables son continuas se puede decir que

$$\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 1 - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

$$\text{Entonces se tiene } Q = 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1$$

Se define  $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = \mathbb{P}[(X_1 > X_2), (Y_1 > Y_2)] + \mathbb{P}[(X_1 < X_2), (Y_1 < Y_2)]$  estas probabilidades pueden calcularse integrando una distribución respecto a la medida de probabilidad de la otra distribución  $C_1$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_1 > X_2), (Y_1 > Y_2)] &= \mathbb{P}[(X_2 < X_1), (Y_2 < Y_1)] \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbb{P}[(X_2 < x), (Y_2 < y)] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Ahora se usa la transformación  $F(x)=u$  y  $G(y)=v$

$$\mathbb{P}[(X_1 > X_2), (Y_1 > Y_2)] = \iint_{\mathbf{R}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

Similarmente se obtiene  $\mathbb{P}[(X_1 < X_2), (Y_1 < Y_2)]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_1 < X_2), (Y_1 < Y_2)] &= \mathbb{P}[(X_2 > X_1), (Y_2 > Y_1)] \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbb{P}[(X_2 > x), (Y_2 > y)] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbf{I}^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v) \end{aligned}$$

Se sabe que  $C_1$  es una función de distribución conjunta de  $(U, V)$  y que la medida  $C_1$  es de probabilidad por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{I}^2} 1 dC_1(u, v) &= 1 \\ - \iint_{\mathbf{I}^2} v dC_1(u, v) &= \mathbb{E}[V] = \frac{1}{2} \\ - \iint_{\mathbf{I}^2} u dC_1(u, v) &= \mathbb{E}[U] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{I}^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \end{aligned}$$

juntando nos queda:

$$\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

se concluye sustituyendo en Q:

$$\begin{aligned} Q &= 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 \\ &= 2[2 \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)] - 1 \\ &= 4 \iint_{\mathbf{I}^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \end{aligned}$$

□

**Demostración del teorema 2.2** Sea  $Q(C, \Pi) = (\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] + \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0])$

Debido a que las variables son continuas se puede decir que  $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] = 1 - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]$

Entonces se tiene  $Q = 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - 1$

se define  $\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] = \mathbb{P}[(X_1 < X_2), (Y_1 < Y_3)] + \mathbb{P}[(X_1 > X_2), (Y_1 > Y_3)]$  estas probabilidades pueden calcularse integrando una distribución respecto a la medida de probabilidad de la otra distribución, respecto a  $C$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_1 > X_2), (Y_1 > Y_3)] &= \mathbb{P}[(X_2 < X_1), (Y_3 < Y_1)] \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbb{P}[(X_2 < x), (Y_3 < y)] dC(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} F(x)G(y) dC(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Ahora se usa la transformación  $F(x)=u$  y  $G(y)=v$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_1 > X_2), (Y_1 > Y_3)] &= \iint_{\mathbf{R}^2} F(u)G(v) dC(u, v) \\ \mathbb{P}[(X_1 > X_2), (Y_1 > Y_3)] &= \iint_{\mathbf{R}^2} uv dC(u, v) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_1 < X_2), (Y_1 < Y_3)] &= \mathbb{P}[(X_2 > X_1), (Y_3 > Y_1)] \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbb{P}[(X_2 > x), (Y_3 > y)] dC(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} 1 - F(x) - G(y) + F(x)G(y) dC(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Ahora se usa la transformación  $F(x)=u$  y  $G(y)=v$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(X_1 < X_2), (Y_1 < Y_3)] &= \iint_{\mathbf{R}^2} 1 - F(u) - G(v) + F(u)G(v) dC(u, v) \\ \mathbb{P}[(X_1 < X_2), (Y_1 < Y_3)] &= \iint_{\mathbf{R}^2} 1 - u - v + uv dC(u, v) \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{I}^2} [1 - u - v + F(u)G(v)] dC(u, v) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{\mathbf{I}^2} F(u)G(v) dC(u, v) \\ &= \iint_{\mathbf{I}^2} F(u)G(v) dC(u, v) \\ &= \iint_{\mathbf{I}^2} uv dC(u, v) \end{aligned}$$

juntando nos queda:

$$\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] = 2 \iint_{\mathbf{I}^2} uv dC(u, v)$$

concluye sustituyendo en Q:

$$\begin{aligned} Q &= 3[2(2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]) - 1] \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} C(u, v) d\Pi(u, v) - 3 \\ &= 12 \iint_{\mathbf{I}^2} C(u, v) dudv - 3 \end{aligned}$$

□



**Demostración del teorema 2.3**

$$\begin{aligned}
\lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(t) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(t)] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[F_2(X_2) \leq t \mid F_1(X_1) \leq t] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[F_2(X_2) \leq t, F_1(X_1) \leq t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq t]} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}
\end{aligned}$$

Para  $\lambda_U$

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 > F_2(1-t) \mid X_1 > F_1^{\leftarrow}(1-t)] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[F_2(X_2) > 1-t \mid F_1(X_1) > 1-t] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[F_2(X_2) > 1-t, F_1(X_1) > 1-t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) > 1-t]} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \mathbb{P}[F_2(X_2) \leq 1-t] - \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq 1-t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) > 1-t]} \\
&\quad + \frac{\mathbb{P}[F_2(X_2) \leq 1-t, F_1(X_1) \leq 1-t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) > 1-t]} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - (t + t - C(1-t, 1-t))}{1 - (1-t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + t - 1 + C(1-t, 1-t)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} 2 + \frac{C(1-t, 1-t) - 1}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} 2 - \frac{1 - C(1-t, 1-t)}{t} \\
&= 2 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - C(1-t, 1-t)}{t}
\end{aligned}$$

y para los coeficientes de dependencia extrema no positiva.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{LU} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 > F_2^{\leftarrow}(1-t) \mid X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(t)] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[F_2(X_2) > 1-t \mid F_1(X_1) \leq t] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[F_2(X_2) > 1-t, F_1(X_1) \leq t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq t]} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq t] - \mathbb{P}[F_2(X_2) \leq 1-t, F_1(X_1) \leq t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) \leq t]} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - C(1-t, t)}{t} \\
 &= 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(1-t, t)}{t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{UL} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(t) \mid X_1 > F_1(1-t)] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[F_2(X_2) \leq t \mid F_1(X_1) > 1-t] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[F_2(X_2) \leq t, F_1(X_1) > 1-t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) > 1-t]} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[F_2(X_2) \leq t] - \mathbb{P}[F_2(X_2) \leq t, F_1(X_1) \leq 1-t]}{\mathbb{P}[F_1(X_1) > 1-t]} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - C(t, t)}{1 - (1-t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - C(t, 1-t)}{t} \\
 &= 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, 1-t)}{t}
 \end{aligned}$$

□

**Demostración del teorema 2.4** Sea  $\Lambda_L(w_1, w_2)$  y  $\Lambda_U(w_1, w_2)$  la función de dependencia extrema inferior y la función de dependencia extrema superior asociada a  $F$ .

- (i) Por la definición de función de dependencia de extrema (2.7) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Lambda_L(w_1, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(tw_1, 0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(0, tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(0, tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(tw_1, 0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{0}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esto por la definición ( 1.4)(1).

$$\begin{aligned}
\Lambda_L(w_1, \infty) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(tw_1, 1)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(tw_1, 1)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tw_1}{t} \\
&= w_1 \\
\Lambda_L(\infty, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(1, tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\widehat{C}(1, tw_2)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{tw_2}{t} \\
&= w_2
\end{aligned}$$

y esto por definición ( 1.4) (2).

(ii) Se hace la prueba para  $\Lambda_L$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_L(hw_1, hw_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(thw_1, thw_2)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(thw_1, thw_2)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{dC(tw_1, tw_2)}{du_1} \frac{dhw_1 t}{dt} + \frac{dC(tw_1, tw_2)}{du_2} \frac{dhw_2 t}{dt} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} hw_1 \frac{dC(tw_1, tw_2)}{du_1} + hw_2 \frac{dC(tw_1, tw_2)}{du_2} \\
 &= h \left( \lim_{t \rightarrow 0^+} w_1 \frac{dC(tw_1, tw_2)}{du_1} + w_2 \frac{dC(tw_1, tw_2)}{du_2} \right) \\
 &= h\Lambda_L(w_1, w_2)
 \end{aligned}$$

la demostración para  $\Lambda_U$  es análoga

(iii) Sea  $C$  la cópula correspondiente a  $\Lambda$ . Como el límite de funciones no decrecientes,  $\Lambda_L$  es no decreciente. Además para todo  $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \mathbb{R}_+^2$  usando el lema (1.4), ya que  $C$  es una función 2-creciente y anclada se obtiene.

$$\begin{aligned}
 |\Lambda_L(w_1, w_2) - \Lambda_L(w'_1, w'_2)| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} |C(tw_1, tw_2) - C(tw'_1, tw'_2)| \\
 &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} |tw_1 - tw'_1| + |tw_2 - tw'_2| \\
 &= |w_1 - w'_1| + |w_2 - w'_2| \\
 &\leq \left\| \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} \right\| \\
 &\leq K \left\| \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} \right\|_2
 \end{aligned}$$

Para  $K > 0$  por tanto se concluye que  $\Lambda$  es Lipschitz continua.

(iv) Primero se muestra la desigualdad suponiendo  $0 < a < b$

$$\min\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2) \leq \Lambda(aw_1, bw_2) \leq \max\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2)$$

reemplazando  $\tau = ta$

$$\begin{aligned}
\Lambda(aw_1, bw_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(atw_1, btw_2)}{t} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0^+} a \frac{C(\tau w_1, \frac{b}{a}\tau w_2)}{\tau} \\
&= a\Lambda(w_1, (b/a)w_2) \\
&\geq a\Lambda(w_1, w_2)
\end{aligned}$$

ya que por el teorema (2.4) (iii) es no decreciente.

La desigualdad inferior para  $0 < b < a$  es la misma. La desigualdad superior se hace de forma similar con  $0 < a < b$ .

$$\begin{aligned}
\Lambda(aw_1, bw_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(atw_1, btw_2)}{t} \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0^+} a \frac{C(\tau w_1, \frac{b}{a}\tau w_2)}{\tau} \\
&= a\Lambda(w_1, (b/a)w_2) \\
&\leq a\Lambda(w_1, w_2)
\end{aligned}$$

nótese que este resultado también implica homogeneidad.

Siguiendo, si  $\Lambda(x, y) > 0$  para alguna  $x, y$  entonces se tiene.

$$\Lambda(w_1, w_2) \geq \min\{w_1/x, w_2/y\}\Lambda(x, y) > 0$$

lo que termina la prueba.

- (v) se toma  $x_n \rightarrow w_1$  y  $y_n \rightarrow w_2$ ,  $t_n \rightarrow 0^+$ ,  $\tau_n = t_n \min\{x_n/w_1, y_n/w_2\}$  y  $\xi_n = t_n \max\{x_n/w_1, y_n/w_2\}$  se supone  $x_n/w_1 \leq y_n/w_2$ :

$$\begin{aligned}
\tau_n &\leq t_n y_n / w_2 \\
\xi_n &\geq t_n x_n / w_1
\end{aligned}$$

se sabe que  $C$  es 2-no decreciente entonces:

$$\begin{aligned}
C(\tau_n, \tau_n) &\leq C(x_n/w_1 t_n, y_n/w_2 t_n) \leq C(\xi_n, \xi_n) \\
C(w_1 \tau_n, w_2 \tau_n) &\leq C(x_n t_n, y_n t_n) \leq C(w_1 \xi_n, w_2 \xi_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{C(w_1\tau_n, w_2\tau_n)}{t_n} &\leq \frac{C(x_nt_n, y_nt_n)}{t_n} \leq \frac{C(w_1\xi_n, w_2\xi_n)}{t_n} \\ \frac{(x_n/w_1)C(w_1\tau_n, w_2\tau_n)}{x_n/w_1t_n} &\leq \frac{C(x_nt_n, y_nt_n)}{t_n} \leq \frac{(y_n/w_2)C(w_1\xi_n, w_2\xi_n)}{y_n/w_2t_n} \\ \frac{(x_n/w_1)C(w_1\tau_n, w_2\tau_n)}{\tau_n} &\leq \frac{C(x_nt_n, y_nt_n)}{t_n} \leq \frac{(y_n/w_2)C(w_1\xi_n, w_2\xi_n)}{\xi_n} \end{aligned}$$

la desigualdad para  $y_n/w_2 \leq x_n/w_1$  procede de la misma forma, generalizando para cualquiera de los dos casos se obtiene.

$$\begin{aligned} \min\{x_n/w_1, y_n/w_2\} \frac{C(w_1\tau_n, w_2\tau_n)}{\tau_n} &\leq \frac{C(x_nt_n, y_nt_n)}{t_n} \\ &\leq \max\{x_n/w_1, y_n/w_2\} \frac{C(w_1\xi_n, w_2\xi_n)}{\xi_n} \end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que  $\frac{C(x_nt_n, y_nt_n)}{t_n} \rightarrow \Lambda(w_1, w_2)$  cuando  $t_n \rightarrow 0^+$

□

**Demostración del teorema 2.5** Sea  $\Lambda(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$  la función de dependencia extrema inferior y correspondiente a  $F$ , entonces para toda  $(w_1, w_2), (w'_1, w'_2) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$  tal que  $w_1 < w'_1, w_2 < w'_2$ .

(i)

$$\begin{aligned} \Lambda(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(w_1t, w_2t)}{t} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\max\{w_1t + w_2t - 1, 0\}}{t} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Esto por los límites Fréchet-Hoeffding (1.6) ya que  $C(w_1t, w_2t)$  está acotada inferiormente por 0 y para el límite superior.

$$\begin{aligned}
\Lambda(w_1, w_2) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w_1 t, w_2 t)}{t} \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\min\{w_1 t, w_2 t\}}{t} \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \min\{w_1, w_2\}}{t} \\
&\leq \min\{w_1, w_2\}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$0 \leq \Lambda(w_1, w_2) \leq \min\{w_1, w_2\}$$

- (ii) Esto ya ha sido mostrado en la prueba del teorema (2.4)(iv)  
(iii) Se sabe que  $C$  es 2-no decreciente entonces cumple (1.4)(2).

$$C(w_1 t, w_2 t) - C(w_1 t, w'_2 t) - C(w'_1 t, w_2 t) + C(w'_1 t, w'_2 t) \geq 0$$

para  $t > 0$  se tiene que

$$\frac{C(w_1 t, w_2 t)}{t} - \frac{C(w_1 t, w'_2 t)}{t} - \frac{C(w'_1 t, w_2 t)}{t} + \frac{C(w'_1 t, w'_2 t)}{t} \geq 0$$

Ya que el límite cuando  $t \rightarrow 0^+$  mantiene la condición de  $t > 0$  y es el límite de funciones convergentes.

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{C(w_1 t, w_2 t)}{t} - \frac{C(w_1 t, w'_2 t)}{t} - \frac{C(w'_1 t, w_2 t)}{t} + \frac{C(w'_1 t, w'_2 t)}{t} \right)$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w_1 t, w_2 t)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w_1 t, w'_2 t)}{t} \\
&\quad - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w'_1 t, w_2 t)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w'_1 t, w'_2 t)}{t}
\end{aligned}$$

$$0 \leq \Lambda(w_1, w_2) - \Lambda(w_1, w'_2) - \Lambda(w'_1, w_2) + \Lambda(w'_1, w'_2)$$

- (iv) Se supone que existe un  $w_1 < w'_1$  y  $w_2 < w'_2$  tal que  $\Lambda(w_1, w_2) \geq \Lambda(w'_1, w'_2)$ , y que  $\Lambda$  es no decreciente por lo que sólo se puede tener la

igualdad, tomando  $a = (w'_1/w_1)$  y  $b = (w'_2/w_2)$  entonces

$$\Lambda(w_1, w_2) = \Lambda(w'_1, w'_2)$$

$$0 < \min\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2) \leq \Lambda(aw_1, bw_2) \leq \max\{a, b\}\Lambda(w'_1, w'_2)$$

$$0 < \min\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2) \leq \Lambda(w'_1, w'_2) \leq \max\{a, b\}\Lambda(w'_1, w'_2)$$

se tiene que  $1 < a, b$

$$0 < \min\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2) \leq \Lambda(w'_1, w'_2)! \quad (\text{A.4})$$

Pero se tenia que  $\Lambda(w_1, w_2) = \Lambda(w'_1, w'_2)$  lo que contradice la ecuación (A.4), ya que  $\Lambda(w_1, w_2) = \Lambda(w'_1, w'_2) < \min\{a, b\}\Lambda(w_1, w_2)$ . Por lo tanto es monótona estricta.

(v) Sea  $\Lambda$  que existe para  $w'_1, w'_2 \in \mathbb{R}_+^2$  con  $w_1'^2 + w_2'^2 = 1$  y  $\tau = (\sqrt{w_1'^2 + w_2'^2})t$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(w_1 t, w_2 t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \frac{C\left(\frac{\sqrt{w_1^2 + w_2^2} t w'_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \frac{\sqrt{w_1^2 + w_2^2} t w'_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}\right)}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2} t} \\ &= \left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right) \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{C\left(\frac{\tau w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \frac{\tau w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}\right)}{\tau} \end{aligned}$$

De esto y el hecho que  $\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \frac{w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}\right)$  es un vector normalizado para cualquier valor  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}_+^2$ , que el límite existe para la circunferencia unitaria y homogeneidad (2.4)(ii) se obtiene:

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right) \Lambda\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \frac{w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}\right) \\ &= \Lambda(w_1, w_2) \end{aligned}$$

□



### A.3. Modelos paramétricos

**Demostración de la observación 3.1** Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  y  $F$  una función de distribución conjunta elíptica bivariada estandarizada con matriz de correlaciones  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$  con  $|\Sigma| = 1 - \rho^2$  y función de densidad  $f$  por la definición ( 3.2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x},\rho}(x_1, x_2) &= \frac{K}{\sqrt{1 - \rho^2}} g \left[ \frac{1}{2}(x_1, x_2) \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{K}{\sqrt{1 - \rho^2}} g \left[ \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1 - \rho^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

De la misma forma se puede reescribir para el vector  $(-x_1, -x_2)$  con el siguiente resultado

$$f_{\mathbf{x},\rho}(-x_1, -x_2) = \frac{K}{\sqrt{1 - \rho^2}} g \left[ \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1 - \rho^2)} \right] \quad (\text{A.6})$$

Ahora si la matriz de correlaciones fuera la siguiente  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$  con  $|\Sigma| = 1 - \rho^2$ , para el vector  $(x_1, -x_2)$  y  $(-x_1, x_2)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x},-\rho}(x_1, -x_2) &= \frac{K}{\sqrt{1 - \rho^2}} g \left[ \frac{1}{2}(x_1, -x_2) \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{K}{\sqrt{1 - \rho^2}} g \left[ \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1 - \rho^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$f_{\mathbf{x},-\rho}(-x_1, x_2) = \frac{K}{\sqrt{1 - \rho^2}} g \left[ \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1 - \rho^2)} \right] \quad (\text{A.8})$$

por las igualdades ( A.5), ( A.6), ( A.7) y ( A.8) se tiene:

$$f_{\rho}(x_1, x_2) = f_{\rho}(-x_1, -x_2) = f_{-\rho}(-x_1, x_2) = f_{-\rho}(x_1, -x_2)$$

□

**Demostración de la observación 3.3**  Sea  $F$  una función de distribución elíptica

$$\begin{aligned} F^{\leftarrow}(U) &= \inf\{x : F(x) \geq U\} \\ &= -\inf\{x : F(-x) \geq 1 - U\} \\ &= -F^{\leftarrow}(1 - U) \end{aligned} \tag{A.9}$$

con (A.9) por la ecuación ( 3.2)

□

**Demostración del lema 3.7**  Sea  $u, v \in [0, 1]$  y  $C$  una función tal que  $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$  se tiene.

$$C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0 \text{ por la definición de } \varphi^{[-1]}$$

$$\text{y } C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$$

$$\text{por la simetría } C(0, v) = 0 \text{ y } C(1, v) = v$$

□

**Demostración del teorema 3.2**

$\Rightarrow$ ) Sea  $C$  2-creciente y se toma a  $v \in \mathbf{I}$  y  $u_1 \leq u_2$  entonces

$$\begin{aligned} C(u_1, v) - C(u_1, 1) + C(u_2, 1) - C(u_2, v) &\geq 0 \\ C(u_2, v) - C(u_1, v) &\leq C(u_2, 1) - C(u_1, 1) \\ C(u_2, v) - C(u_1, v) &\leq u_2 - u_1 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Sea  $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$  como  $C$  es continua dado que  $\varphi, \varphi^{[-1]}$  son continuas existe un  $t \in \mathbf{I}$  tal que  $C(t, v_2) = v_1$  o  $\varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1)$  entonces

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2))) + \varphi(t)) \\ &\quad - \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2))) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \\ 0 &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \end{aligned} \tag{A.10}$$

ya que por hipótesis (3.8) se cumple la desigualdad (A.10) y se obtiene que  $C$  es 2-creciente.  $\square$

### Demostración del teorema 3.1

$\Rightarrow$ ) Sea  $C$  una cópula de la forma (3.7) con  $u_1 \leq u_2$  se puede reescribir

$$\begin{aligned} C(u_2, v) - C(u_1, v) &\leq u_2 - u_1 \\ u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) &\leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

para  $u_1 \leq u_2$  se cambia  $a = \varphi(u_1)$ ,  $b = \varphi(u_2)$  y  $c = \varphi(v)$   
Entonces es equivalente a

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c)$$

donde  $a \leq b$  y  $c \geq 0$  se sabe que  $C$  al ser una cópula es 2-creciente satisface la desigualdad (3.8) y por lo tanto la desigualdad (A.11), tomando  $s, t$  en  $[0, \infty)$  tal que  $0 \leq s \leq t$  sea  $a = (s + t)/2$ ,  $b = s$  y  $c = (t - s)/2$ .

$$\begin{aligned} \varphi^{[-1]}(\frac{s+t}{2}) + \varphi^{[-1]}(s + \frac{t-s}{2}) &\leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(\frac{t+s}{2} + \frac{t-s}{2}) \\ \varphi^{[-1]}(\frac{s+t}{2}) + \varphi^{[-1]}(\frac{t+s}{2}) &\leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t) \\ 2\varphi^{[-1]}(\frac{s+t}{2}) &\leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t) \\ \varphi^{[-1]}(\frac{s+t}{2}) &\leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2} \end{aligned}$$

Ya que  $\varphi^{[-1]}$  es convexa en el punto medio y continua se concluye que  $\varphi$  es convexa.

$\Leftarrow$ ) Se tiene que  $\varphi$  es convexa por lo tanto  $\varphi^{[-1]}$  es convexa. Por el lema (3.1) se sabe que cumple la primer condición de la definición de cópula (1.4) para la segunda condición (que sea 2-creciente). Se toma  $a, b$  y  $c$  en  $\mathbf{I}$  tal que  $a \geq b$  y  $c \geq 0$  se usan las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \gamma &= (a - b)/(a - b + c) \\ a &= (1 - \gamma)b + \gamma(a + c) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$b + c = \gamma b + (1 - \gamma)(a + c) \quad (\text{A.13})$$

se sabe que  $\varphi^{[-1]}$  es convexa y  $\gamma \in [0, 1]$  por lo tanto se cumplen las desigualdades siguientes

$$\begin{aligned} \varphi^{[-1]}(\gamma(a + c) + (1 - \gamma)b) &\leq \gamma\varphi^{[-1]}(a + c) + (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(b) \\ \varphi^{[-1]}(a) &\leq \gamma\varphi^{[-1]}(a + c) + (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(b) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}\varphi^{[-1]}(\gamma(b) + (1 - \gamma)(a + c)) &\leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(a + c) \\ \varphi^{[-1]}(b + c) &\leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1 - \gamma)\varphi^{[-1]}(a + c)\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

sustituyendo las ecuaciones (A.12) y (A.13) se obtienen las desigualdades (A.14) y (A.15) respectivamente. Sumando ambas desigualdades se obtiene

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(a + c) + \varphi^{[-1]}(b) \quad (\text{A.16})$$

tomando en cuenta las siguientes igualdades para  $u_1 \leq u_2$  si se cambia  $a = \varphi(u_1)$ ,  $b = \varphi(u_2)$  y  $c = \varphi(v)$  la desigualdad (A.16) se convierte en

$$\begin{aligned}u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) &\leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)) \\ C(u_2, v) - C(u_1, v) &\leq u_2 - u_1\end{aligned}$$

por el lema (3.2) se sabe que esta desigualdad implica que la función  $C$  es 2-creciente. Con esto se obtiene que  $C$  cumple la definición de cópula.  $\square$

**Demostración de la proposición 3.1** Sea  $C$  una cópula Arquimediana con  $\varphi$  estricto y diferenciable

Sea  $G(t) = \frac{\varphi^{-1}(\varphi(t) + \varphi(1-t))}{t}$  por definición.

$$\begin{aligned}\lambda_{LU} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{LU}(t, t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - C(t, 1 - t)}{t} \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t)\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

las propiedades de  $\varphi$  estricto y diferenciable implican las siguientes para  $\varphi^{-1}$ :

- I)  $\varphi^{-1}$  es diferenciable
- II)  $\varphi^{-1}$  es estrictamente decreciente y convexa
- III)  $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(s) = 0$

Es importante mostrar el comportamiento de  $\varphi^{-1}$  con el límite  $\lim_{s \rightarrow \infty} (\varphi^{-1})'(s) = 0$ . Para probar esto se usa (II), por esta suposición  $(\varphi^{-1})'$  es negativa y creciente. Esto implica que  $\lim_{s \rightarrow \infty} (\varphi^{-1})'(s) = 0$  converge cuando  $s \rightarrow \infty$ , a  $c \leq 0$ .

Se supone que  $c < 0$  esto implica que  $(\varphi^{-1})$  cruza el eje x, lo que contradice las propiedades (II) y (III). Por tanto  $c = 0$  de esto se sigue  $\lim_{s \rightarrow \infty} (\varphi^{-1})'(s) = 0$ . Se puede reescribir:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} (\varphi^{-1})'(s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi^{-1}(x+y) - \varphi^{-1}(x)}{y} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Además  $\varphi$  es diferenciable, estrictamente decreciente y  $\varphi(1) = 0$ , por lo tanto se tiene.

$$-\infty < \varphi'(1) < 0 \quad (\text{A.19})$$

Si se reemplaza  $x(t) = \varphi(t)$  y  $y(t) = \varphi(1-t)$  la ecuación (A.18), se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi^{-1}(\varphi(t) + \varphi(1-t)) - \varphi^{-1}(\varphi(t))}{\varphi(1-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t\varphi^{-1}(\varphi(t) + \varphi(1-t))}{t} - \varphi^{-1}(\varphi(1-t))}{\varphi(1-t) - 0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tG(t) - t}{\varphi(1-t) - \varphi(1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(G(t) - 1)}{\varphi(1-t) - \varphi(1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (G(t) - 1) \frac{t}{\varphi(1-t) - \varphi(1)} \\ &= \frac{\lim_{t \rightarrow 0} (1 - G(t))}{\varphi'(1)} \end{aligned}$$

Por la ecuación (A.17) y la desigualdad (A.19) implica que  $\lambda_{LU} = 0$  y esto por el teorema (2.4) (iv) implica que  $\Lambda_{LU} \equiv 0$ .

□

**Demostración de la observación 3.4** Sea  $C$  la cópula trivariada del vector aleatorio  $(U_1, U_2, U_3)$  y  $C_{ij}$  la cópula correspondiente al vector  $(U_i, U_j)$ . Se

toma el vector aleatorio  $(1 - U_1, 1 - U_2, 1 - U_3)$  su función de distribución es

$$\begin{aligned}\widehat{C}(u_1, u_2, u_3) &= \mathbb{P}[1 - U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2, 1 - U_3 \leq u_3] \\ &= \mathbb{P}[U_1 \geq 1 - u_1, U_2 \geq 1 - u_2, U_3 \geq 1 - u_3]\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

se sabe que que  $\mathbb{P}[A^c \cap B^c \cap C^c] = \mathbb{P}[A \cup B \cup C]^c = 1 - \mathbb{P}[A \cup B \cup C] = 1 - [\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]]$  sustituyendo en (A.20) y llamando  $A = \mathbb{P}[U_1 \geq 1 - u_1, U_2 \geq 1 - u_2, U_3 \geq 1 - u_3]$  se obtiene:

$$\begin{aligned}A &= 1 - [1 - u_1 + 1 - u_2 + 1 - u_3 \\ &\quad - \mathbb{P}[U_1 \leq 1 - u_1, U_2 \leq 1 - u_2] - \mathbb{P}[U_1 \leq 1 - u_1, U_3 \leq 1 - u_3] \\ &\quad - \mathbb{P}[U_2 \leq 1 - u_2, U_3 \leq 1 - u_3] + \mathbb{P}[U_1 \leq 1 - u_1, U_2 \leq 1 - u_2, U_3 \leq 1 - u_3]] \\ &= u_1 + u_2 + u_3 + C_{12}(1 - u_1, 1 - u_2) + C_{13}(1 - u_1, 1 - u_3) \\ &\quad + C_{23}(1 - u_2, 1 - u_3) - 2 - C(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3)\end{aligned}$$

por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{C}(u_1, u_2, u_3) &= u_1 + u_2 + u_3 + C_{12}(1 - u_1, 1 - u_2) + C_{13}(1 - u_1, 1 - u_3) \\ &\quad + C_{23}(1 - u_2, 1 - u_3) - 2 - C(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3)\end{aligned}$$

□

# Apéndice B

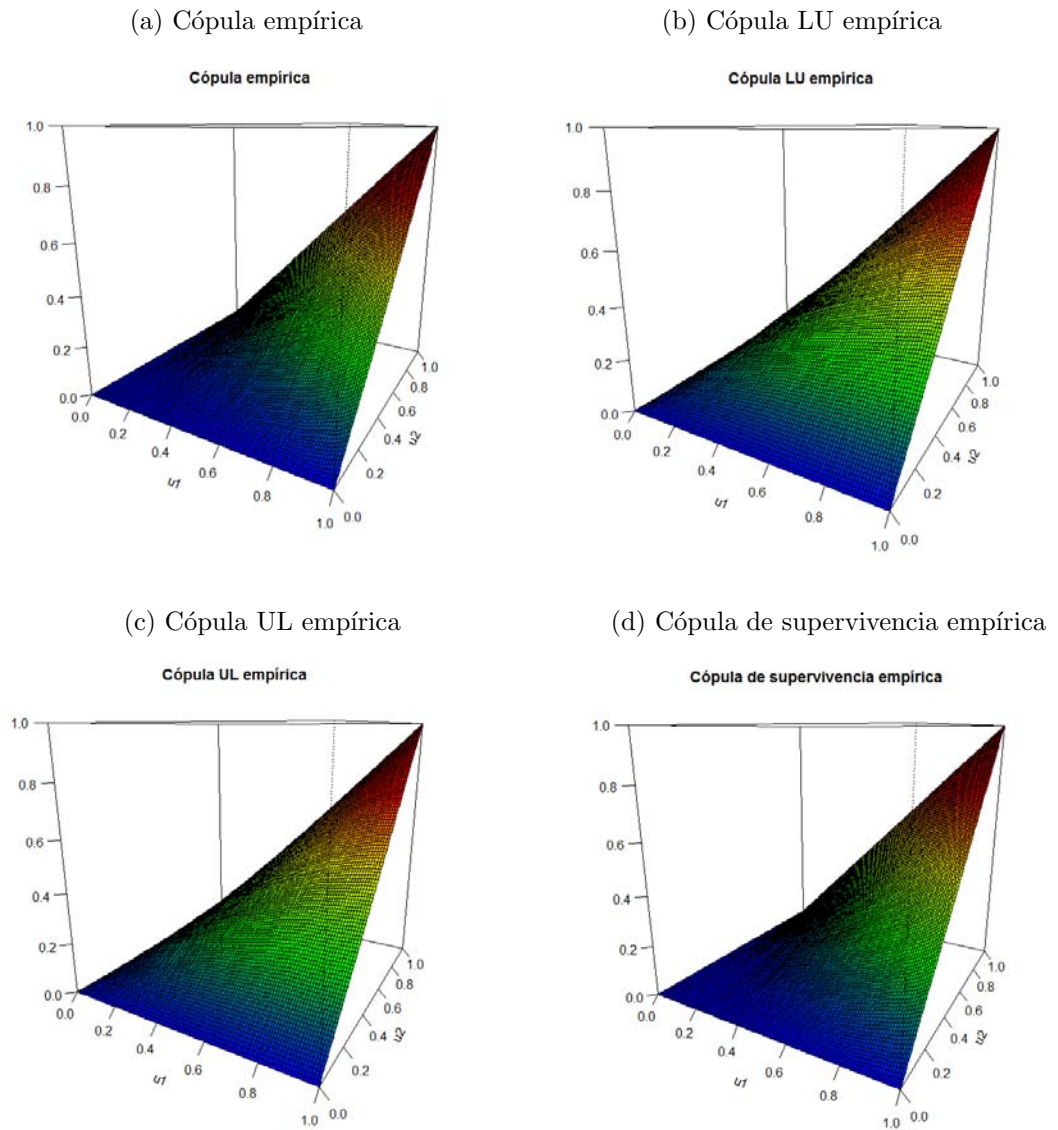
## Bondad de ajuste

### B.1. Cópulas bivariadas

En este apéndice se hacen las pruebas de bondad de ajuste necesarias para tener idea de cual es la mejor cópula para cada caso bivariado. Las pruebas y estimadores que se calculan son los expuestos en la sección de de aplicación a cópulas bivariadas.

Se empezó por la estimación de las 4 cópulas empíricas asociadas para los tres pares de datos, las gráficas son las siguientes:

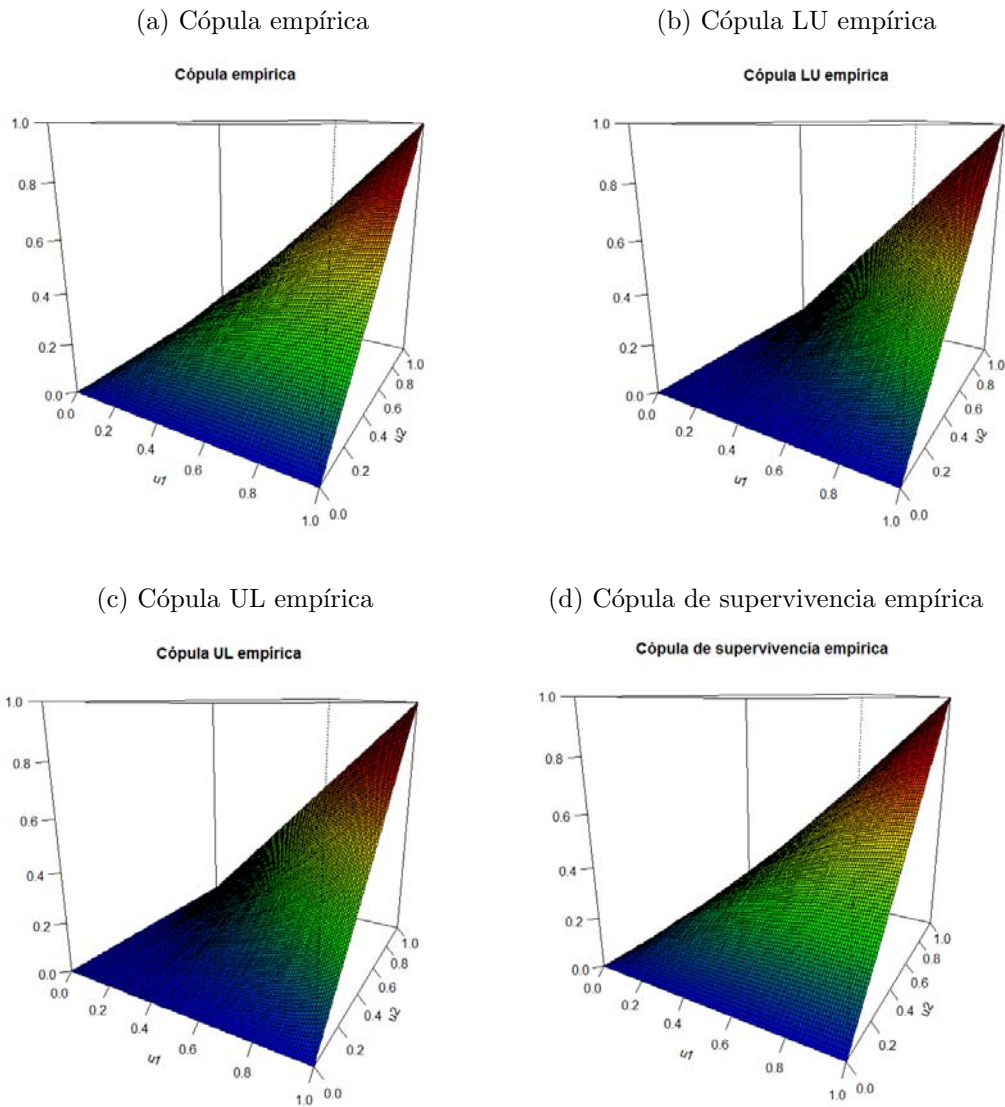
Figura B.1: Gráficas de Cópulas empíricas asociadas IPC-VIX



Estas son las cópulas empíricas para los datos IPC-VIX y se puede notar una gran similitud entre las gráficas LU y UL así como las cópulas de supervivencia y la cópula C. Las dos primeras tienen una relación más parecida a la cópula monótona y las dos restantes una cópula que oscila entre la cópula  $\Pi$  y la contramonótona que modela independencia entre variables, esto nos da la idea que la dependencia entre el IPC-VIX es no positiva ya que las cópulas asociadas LU y UL muestran una posible dependencia monótona y por otro lado la cópula C y la de supervivencia muestran independencia en la dependencia positiva superior e inferior.

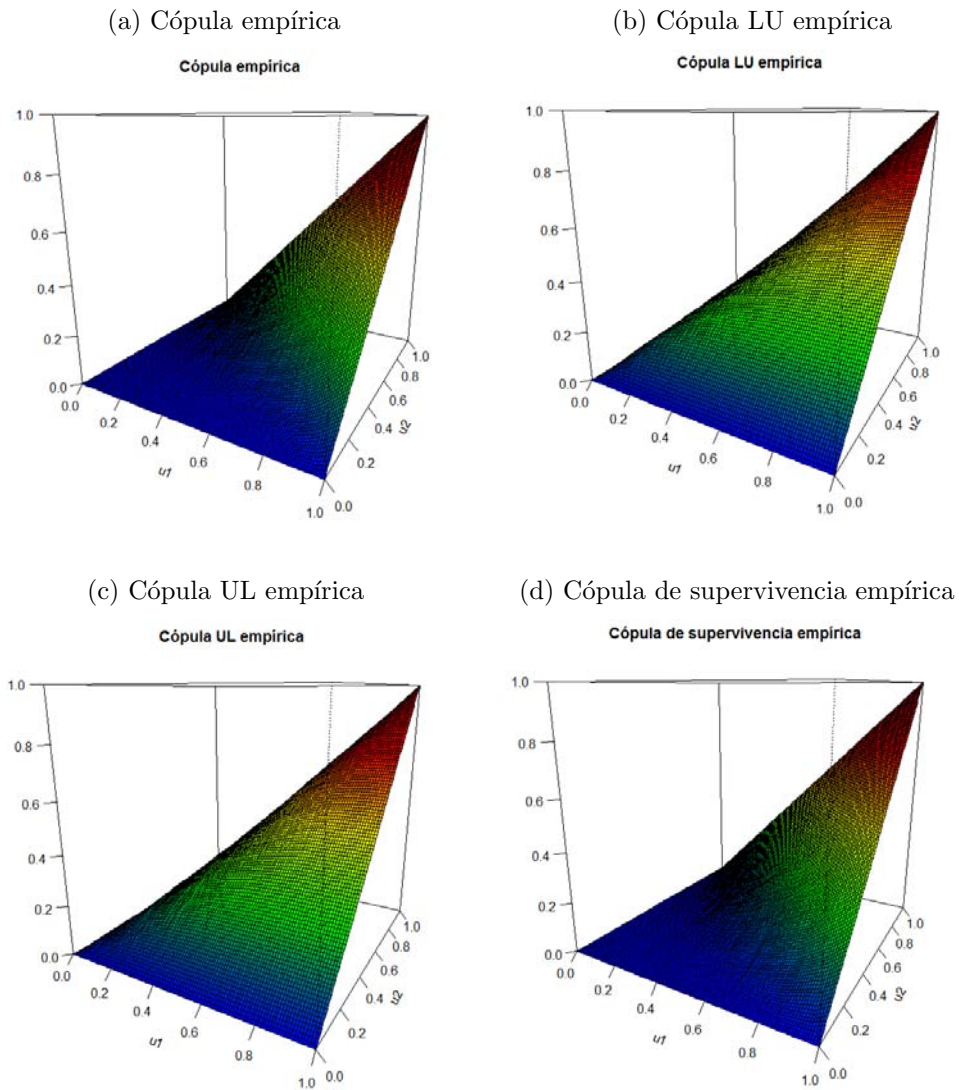


Figura B.2: Gráficas de Cópulas empíricas asociadas IPC-S&amp;P 500



Estas son las cópulas empíricas para los datos IPC-S&P 500, al igual que en la cópula anterior y se puede notar una gran similitud entre las gráficas LU y UL así como las cópulas de supervivencia y la cópula C. Las dos primeras tienen una relación cópula que oscila entre la cópula  $\Pi$  y la contramonotónica y las dos restantes a la cópula monotónica, siguiendo el mismo razonamiento que en la cópula anterior nos da la idea que la dependencia entre el IPC-VIX es positiva ya que las cópulas asociadas superior e inferior muestran una posible dependencia monotónica y por otro lado las cópulas UL y LU muestran independencia.

Figura B.3: Gráficas de Cópulas empíricas asociadas S&P 500-VIX



Estas son las cópulas empíricas para los datos VIX-S&P 500 y son muy similares a las cópulas asociadas a los datos IPC-VIX, se encuentran las mismas similitudes entre las gráficas LU y UL así como las cópulas de supervivencia y la cópula C. Con las mismas relaciones (LU y UL parecidas a la cópula monótonica y la cópula C y de supervivencia oscilan entre la cópula  $\Pi$  y la contramonótonica). Por lo que la interpretación sobre la dependencia entre el VIX-S&P 500 es no positiva.

Una vez con esta información se procedió a estimar los coeficientes de dependencia extrema no paramétricos que se explicaron anteriormente y se calcularon para las cuatro cópulas asociadas los resultados que se obtienen

son los siguientes resultados y gráficas.

Para las cópulas empíricas estimadas de los datos IPC-VIX se obtienen las siguientes estimaciones de los coeficientes de dependencia extrema no paramétricos.

	$\lambda^{LOG}$	$\lambda^{SEC}$	$\lambda^{CFG}$
Inferior	0.068	0.021	-
Superior	0.00	0.00	-
LU	0.335	0.341	0.808
UL	0.145	0.150	0.793

Tabla B.1: Dependencia extrema no paramétrica IPC-VIX

Para estos datos se puede apreciar una dependencia no positiva en los tres estimadores, también se puede apreciar que la dependencia extrema aunque es no positiva no es simétrica ya que la estimación de los coeficientes son mayores para la dependencia LU (cuando IPC tiene valores bajos y VIX valores altos).

Para las cópulas empíricas estimadas de los datos VIX-S&P 500 se obtienen las siguientes estimaciones de los coeficientes de dependencia extrema no paramétricos.

	$\lambda^{LOG}$	$\lambda^{SEC}$	$\lambda^{CFG}$
Inferior	0.046	0.000	-
Superior	0.000	0.000	-
LU	0.379	0.366	0.660
UL	0.687	0.586	0.676

Tabla B.2: Dependencia extrema no paramétrica VIX-S&P 500

Se puede observar, igual que en los datos anteriores, una dependencia no positiva en los tres estimadores aunque es considerablemente mayor a la obtenida entre el IPC-VIX, también se puede apreciar que la dependencia extrema aunque es no positiva no es simétrica ya que la estimación de los coeficientes son mayores para la dependencia UL (aunque la dependencia ahora es UL se aprecia una dependencia mayor cuando el VIX tiene valores altos y S&P 500 valores bajos).

Para las cópulas empíricas estimadas de los datos IPC-S&P 500 se obtienen las siguientes estimaciones de los coeficientes de dependencia extrema no paramétricos.

	$\lambda^{LOG}$	$\lambda^{SEC}$	$\lambda^{CFG}$
Inferior	0.424	0.392	0.752
Superior	0.414	0.439	0.496
LU	0.007	0.018	-
UL	0.007	0.018	-

Tabla B.3: Dependencia extrema no paramétrica IPC-S&P 500

Se observa una dependencia positiva, de forma contraria que en los datos anteriores, en los tres estimadores, también se puede apreciar que la dependencia extrema aunque es positiva se puede decir que es simétrica ya que la estimación de los coeficientes son relativamente iguales para la dependencia superior y la inferior (por lo tanto se espera que la dependencia extrema sea igual, ya sea que tomen valores bajos o altos). Una vez con estos datos se hizo la estimación de los parámetros para cada cópula y los resultados fueron los siguientes.

Para la cópula entre IPC Y VIX se obtuvieron los parámetros para las cópulas Gaussiana, t-student, Frank, Clayton LU, Clayton UL, Gumbel LU y Gumbel UL (las cuales son las cópulas asociadas respectivas).

Cópula	Parámetro 1	Parámetro 2
Gaussiana	-0.527	-
t-student	-0.532	21.324
Frank	-3.619	-
Clayton UL	0.632	-
<b>Gumbel UL</b>	1.506	-
Clayton LU	0.823	-
Gumbel LU	1.451	-

Tabla B.4: Parámetros IPC-VIX

Las pruebas de bondad de ajuste, log-verosimilitud con ajuste BIC.

Cópula	Log-verosimilitud
Gaussiana	247.616
t-student	251.510
Frank	227.230
Clayton UL	144.881
<b>Gumbel UL</b>	246.946
Clayton LU	220.082
Gumbel LU	194.226

Tabla B.5: Log-verosimilitud IPC-VIX

y las pruebas de Vuong y Clarke , con cada tipo de cópula.

Cópula	Vuong	Clarke
Gaussiana	4	-2
t-student	4	3
Frank	0	6
Clayton UL	-2	-6
<b>Gumbel UL</b>	-3	3
Clayton LU	-6	-4
Gumbel LU	3	0

Tabla B.6: Prueba de Vuong y Clarke IPC-VIX

Con éstas pruebas se podría decir que sólo tres cópulas ajustan de manera correcta la dependencia entre las variables, la cópula Gaussiana, la cópula t-student y la cópula Gumbel UL, por lo que se espera una dependencia extrema LU.

Para la cópula entre VIX y S&P 500 se obtuvieron los parámetros de las cópulas Gaussiana, t-student, Frank, Clayton LU, Clayton UL, Gumbel LU y Gumbel UL.

Cópula	Parámetro 1	Parámetro 2
Gaussiana	-0.804	-
t-student	-0.816	8.543
Frank	-8.339	-
Clayton UL	2.220	-
Gumbel UL	2.260	-
Clayton LU	1.603	-
<b>Gumbel LU</b>	2.462	-

Tabla B.7: Parámetros VIX-S&amp;P 500

Las pruebas de bondad de ajuste, log-verosimilitud con ajuste BIC y las pruebas de Vuong y Clarke, para cada tipo de cópula fueron los siguientes.

Cópula	Log-verosimilitud
Gaussiana	781.692
t-student	810.233
Frank	769.065
Clayton UL	707.677
Gumbel UL	681.436
Clayton LU	498.186
<b>Gumbel LU</b>	810.834

Tabla B.8: Log-verosimilitud VIX-S&amp;P 500

Cópula	Vuong	Clarke
Gaussiana	3	2
t-student	4	5
Frank	2	5
Clayton UL	-6	-4
Gumbel UL	3	-1
Clayton LU	-3	-6
<b>Gumbel LU</b>	-3	-1

Tabla B.9: Prueba de Vuong y Clarke VIX-S&amp;P 500

Con estas pruebas hay diferencia, ya que por máxima verosimilitud las cópulas elegidas serían la cópula t-student y la cópula Gumbel LU, y por las pruebas de Vuong y Clarke serían la cópula Gaussiana y la cópula t-student.

Para la cópula entre IPC Y S&P 500 se obtuvieron los parámetros de las cópulas Gaussiana, t-student, Frank, Clayton, Clayton supervivencia, Gumbel y Gumbel supervivencia.

Cópula	Parámetro 1	Parámetro 2
Gaussiana	0.636	-
<b>t-student</b>	0.637	8.492
Clayton	1.103	-
Gumbel	1.678	-
Frank	4.680	-
Clayton supervivencia	0.989	-
Gumbel supervivencia	1.727	-

Tabla B.10: Parámetros IPC-S&P 500

Las pruebas de bondad de ajuste, log-verosimilitud con ajuste BIC y las pruebas de Vuong y Clarke, para cada tipo de cópula fueron los siguientes.

Cópula	Log-verosimilitud
Gaussiana	393.013
<b>t-student</b>	401.365
Clayton	315.441
Gumbel	354.689
Frank	343.634
Clayton supervivencia	283.830
Gumbel supervivencia	382.143

Tabla B.11: Log-verosimilitud IPC-S&P 500

Cópula	Vuong	Clarke
Gaussiana	4	1
<b>t-student</b>	4	5
Clayton	-3	-4
Gumbel	-1	-2
Frank	-2	4
Clayton supervivencia	-5	-6
Gumbel supervivencia	3	2

Tabla B.12: Prueba de Vuong y Clarke IPC-S&P 500

Con las tres pruebas se llega a que las mejores cópulas serían la cópula t-student y la cópula Gaussiana, ya que como se vio anteriormente se puede esperar una dependencia simétrica.

Una vez obtenidos los parámetros de las cópulas se obtienen las medidas de dependencia, los resultados de la rho de Spearman es la misma para todas las cópulas por el teorema ( 2.2)

Para las cópulas estimadas de los datos IPC-VIX se obtienen las siguientes estimaciones de las medidas de dependencia Rho de Spearman y Tau de Kendall y debido a la naturaleza de los datos, se espera una relación no lineal y con outliers por lo que la medida de concordancia de Kendall, es la que tiene más certeza.

$$\rho_{spearman} = -0.5126$$

Cópula	$\tau$
Gaussiana	-0.354
t-student	-0.357
Frank	-0.359
Clayton UL	-0.240
<b>Gumbel UL</b>	-0.336
Clayton LU	-0.292
Gumbel LU	-0.311

Tabla B.13:  $\tau$  de Kendall IPC-VIX

Obteniendo un coeficiente de dependencia no positiva considerable aunque no necesariamente muy importante.

Para las cópulas estimadas de los datos VIX- S&P 500 se obtienen las siguientes estimaciones de las medidas de dependencia Rho de Spearman y Tau de Kendall.

$$\rho_{spearman} = -0.805$$



Cópula	$\tau$
Gaussiana	-0.595
t-student	-0.608
Frank	-0.615
Clayton UL	-0.526
Gumbel UL	-0.557
Clayton LU	-0.445
<b>Gumbel LU</b>	-0.594

Tabla B.14:  $\tau$  de Kendall VIX-S&P 500

Obteniendo un coeficiente de dependencia no positiva alto, lo que se esperaba ya que el VIX se construye a partir del S&P 500.

Para las cópulas estimadas de los datos IPC-S&P 500 se obtienen las siguientes estimaciones de las medidas de dependencia Rho de Spearman y Tau de Kendall.

$$\rho_{spearman} = 0.604$$

Cópula	$\tau$
Gaussiana	0.439
<b>t-student</b>	0.440
Clayton	0.355
Gumbel	0.404
Frank	0.436
Clayton supervivencia	0.331
Gumbel supervivencia	0.421

Tabla B.15:  $\tau$  de Kendall IPC-S&P 500

Obteniendo un coeficiente de dependencia positiva considerable, lo que tiene sentido ya que el IPC es el índice más ilustrativo de la economía mexicana y el S&P 500 es de los más importantes de la economía estadounidense. Otra medida importante que se estimó a partir de los parámetros obtenidos fueron las medidas de dependencia extrema.

Para las cópulas estimadas de los datos IPC-VIX se obtienen las siguientes estimaciones de las medidas de dependencia extrema. Debido a la naturaleza de los datos, las cópulas estimadas tienen  $\lambda_U = \lambda_L \equiv 0$  por lo que se omitió el resultado en la siguiente tabla.

Cópula	UL	LU
t-student	0.016	0.016
Clayton UL	0.334	0.000
<b>Gumbel UL</b>	0.000	0.415
Clayton LU	0.000	0.431
Gumbel LU	0.388	0.000

Tabla B.16: Coeficientes de dependencia extrema IPC-VIX

La tabla de los coeficientes de dependencia extrema paramétricos, tienen algunas resultados peculiares, una de ellas es el coeficiente LU y UL tan pequeño para la cópula t-student, esto se puede deber a la poca simetría que se observa en los datos y a que t-student tiene coeficientes simétricos, también se observa que la dependencia LU es mayor que la dependencia UL.

Para las cópulas estimadas de los datos VIX-S&P 500 se obtienen las siguientes estimaciones de las medidas de dependencia extrema. Debido a la naturaleza de los datos, las cópulas estimadas tienen  $\lambda_U = \lambda_L \equiv 0$  por lo que se omitió el resultado en la siguiente tabla.

Cópula	UL	LU
t-student	0.350	0.350
Clayton UL	0.732	0.000
Gumbel UL	0.000	0.641
Clayton LU	0.000	0.649
<b>Gumbel LU</b>	0.675	0.000

Tabla B.17: Coeficientes de dependencia extrema VIX-S&P 500

La tabla de los coeficientes de dependencia extrema paramétricos son no positivos como en el caso anterior pero con valores mucho más altos, incluso para la cópula t-student aunque sigue infravalorándolos porque no se tiene una simetría, los coeficientes para la dependencia UL es mayor tal como se esperaba por los coeficientes no paramétricos y las cópulas que mejor ajustaban.

Para las cópulas estimadas de los datos IPC-S&P 500 se obtienen las siguientes estimaciones de las medidas de dependencia extrema. Debido a la naturaleza de los datos, las cópulas estimadas tienen  $\lambda_{LU} = \lambda_{UL} \equiv 0$  por lo que se omitió el resultado en la siguiente tabla.

Cópula	Inferior	Superior
<b>t-student</b>	0.179	0.179
Clayton	0.533	0.000
Gumbel	0.000	0.488
Clayton supervivencia	0.000	0.496
Gumbel supervivencia	0.506	0.000

Tabla B.18: Coeficientes de dependencia extrema IPC-S&amp;P 500

La tabla de los coeficientes de dependencia extrema paramétricos son positivos a diferencia de los casos anteriores, en el estimador no paramétrica muestra que los datos tiene simetría, por lo tanto los coeficientes para la dependencia t-student modela mejor esa característica, aunque se infravaloren los coeficientes.

## B.2. Cópula en viña

Los coeficientes de dependencia extrema no paramétricos para la cópula trivariada fueron los siguientes.

	$\lambda^{LOG}$	$\lambda^{SEC}$
Inferior	0.080	0.000
Superior	0.040	0.000
LLU	0.065	0.000
LUL	0.278	0.270
ULL	0.054	0.000
ULU	0.138	0.132
LUU	0.029	0.018
UUL	0.022	0.018

Tabla B.19: Coeficientes de dependencia extrema no paramétricos IPC-VIX-S&amp;P 500

De forma muy similar que en el caso bivariado se nota una dependencia no positiva y que no hay simetría en la dependencia extrema, siendo que esta es mayor para valores bajos de IPC y S&P 500 y valores altos para VIX, que es congruente con los resultados obtenidos en las cópulas bivariadas.

En la siguiente tabla se muestran los parámetros obtenidos en cada una de las estimaciones para las cópulas en viña.

Segundo nivel	Primer nivel		No. <sup>1</sup>
$C_{1,3}$	$C_{1,2}$	$C_{2,3}$	
Gaussiana $\rho = 0.42$	t-student $\rho = -0.535$ y $v = 21.32$	t-student $\rho = -0.815$ y $v = 8.54$	1
Gaussiana $\rho = 0.37$	t-student $\rho = -0.50$ y $v = 14.6$	Clayton UL $\theta = 2.19$	2
Gaussiana $\rho = 0.39$	t-student $\rho = -0.53$ y $v = 21.6$	Gumbel LU $\theta = 2.45$	3
Gaussiana $\rho = 0.41$	Gumbel UL $\theta = 1.50$	t-student $\rho = -0.81$ y $v = 8.44$	4
Gaussiana $\rho = 0.41$	Gumbel UL $\theta = 1.47$	Clayton UL $\theta = 2.17$	5
Gaussiana $\rho = 0.412$	Gumbel UL $\theta = 1.50$	Gumbel LU $\theta = 2.43$	6
t-student $\rho = 0.414$ y $v = 19.96$	t-student $\rho = -0.53$ y $v = 20.3$	t-student $\rho = -0.81$ y $v = 9.1$	7
t-student $\rho = 0.36$ y $v = 30$	t-student $\rho = -0.50$ y $v = 21.6$	Clayton UL $\theta = 2.18$	8
t-student $\rho = 0.39$ y $v = 30$	t-student $\rho = -0.50$ y $v = 21.3$	Gumbel LU $\theta = 2.45$	9
t-student $\rho = 0.4$ y $v = 18.25$	Gumbel UL $\theta = 1.50$	t-student $\rho = -0.81$ y $v = 8.54$	10
t-student $\rho = 0.40$ y $v = 30$	Gumbel UL $\theta = 1.47$	Clayton UL $\theta = 2.17$	11
<b>t-student</b> $\rho = 0.41$ y $v = 28.73$	<b>Gumbel UL</b> $\theta = 1.51$	<b>Gumbel LU</b> $\theta = 2.44$	12

Tabla B.20: Parámetros estimados IPC-VIX-S&P 500

Los parámetros estimados para la cópula en viña es muy parecidos al caso bivariado, pero con diferencias por el método de estimación ya que es trivariado.

Tal como se esperaba los parámetros son ligeramente diferentes entre niveles de cópula dependiendo de las cópula que se ajusta en cada nivel. Estos ligeros cambios en los parámetros sin embargo pueden llegar a ser significativos al hacer el cálculo de las medidas de dependencia extrema.

Posteriormente se hicieron las pruebas de bondad de ajuste y la prueba

<sup>1</sup>Se ocupará esta numeración para referirse a cada cópula en viña

de logverosimilitud, las tablas resultantes de la prueba de Vuong y Clarke se encuentran en el apéndice A. Los resultados obtenidos por máxima logverosimilitud fueron resumidos en la siguiente tabla.

	Log-Verosimilitud
1	1209.733
2	1061.193
3	1189.658
4	1197.122
5	1088.533
6	1199.782
7	1213.089
8	1060.572
9	1190.737
10	1200.999
11	1089.327
<b>12</b>	1201.956

Tabla B.21: Logverosimilitud IPC-VIX-S&P 500

Esta prueba nos arroja resultados importantes mostrando que si sólo se toma en cuenta esto la mejor cópula sería la 7 seguida de la 12, ambas con coeficientes de dependencia extrema y descartando algunas cópulas tales como la cópula 2, 5, 8 y 11.

Los coeficientes para la medida de concordancia  $\tau$  de Kendall fueron los siguientes para cada una de las cópulas bivariadas que conforman la cópula en viña.

Cópula	$\tau$		
	$C_{1,3}$	$C_{1,2}$	$C_{2,3}$
1	0.276	-0.359	-0.607
2	0.236	-0.339	-0.523
3	0.257	-0.358	-0.593
4	0.269	-0.335	-0.605
5	0.269	-0.320	-0.520
6	0.271	-0.336	-0.591
7	0.272	-0.361	-0.608
8	0.233	-0.340	-0.522
9	0.256	-0.357	-0.593
10	0.265	-0.336	-0.606
11	0.265	-0.323	-0.520
<b>12</b>	0.268	-0.340	-0.591

Tabla B.22:  $\tau$  de Kendall para cada cópula bivariada IPC-VIX-S&P 500

Con unos coeficientes bastante parecidos entre niveles de cópulas, se puede entender que la elección de la cópula en viña no afecta la dependencia entre pares de variables, pero sí de manera importante a la dependencia extrema.

Las pruebas de bondad de ajuste para escoger el mejor modelo de cópulas paramétricas para el caso bivariado y multivariado fueron las pruebas mostradas en la página 71 (las pruebas de Vuong y Clarke). Aunque es importante tomar en cuenta los resultados de estas pruebas no es la única referencia a tomar en cuenta al momento de elegir el mejor modelo paramétrico, como se observa en la tabla (B.23) prácticamente 8 modelos son considerados igual de buenos, lo que no es concluyente, además de tener resultados diferentes a la tabla (B.24) y a la prueba de logverosimilitud.

Las pruebas de Vuong y Clarke con la corrección de Schwarz, para las doce cópulas ajustadas para el modelo D de viñas dieron como resultado las siguientes tablas.

Tabla B.23: Prueba de Vuong

Cóp.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Punt.
1	v p-val.		4.20 0.00	0.82 0.41	1.07 0.29	3.40 0.00	0.13 0.90	0.11 0.91	4.30 0.00	0.94 0.35	1.00 0.32	3.49 0.00	0.21 0.84	4
2	v p-val	-4.20 0.00		-8.11 0.00	-4.11 0.00	-4.08 0.00	-7.56 0.00	-4.17 0.00	2.13 0.03	-8.02 0.00	-4.03 0.00	-3.84 0.00	-7.46 0.00	-10
3	v p-val	-0.82 0.41	8.11 0.00		-0.38 0.70	6.22 0.00	-1.73 0.08	-0.79 0.43	8.27 0.00	1.48 0.14	-0.38 0.71	6.44 0.00	-1.56 0.12	4
4	v p-val	-1.07 0.29	4.11 0.00	0.38 0.70		3.42 0.00	-0.38 0.71	-1.00 0.32	4.20 0.00	0.51 0.61	-0.08 0.94	3.51 0.00	-0.29 0.77	4
5	v p-val	-3.40 0.00	4.08 0.00	-6.22 0.00	-3.42 0.00		-7.26 0.00	-3.36 0.00	4.31 0.00	-6.07 0.00	-3.34 0.00	1.46 0.14	-7.06 0.00	-6
6	v p-val	-0.13 0.90	7.56 0.00	1.73 0.08	0.38 0.71	7.26 0.00		-0.11 0.91	7.62 0.00	1.96 0.05	0.34 0.73	7.39 0.00	0.74 0.46	4
7	v p-val	-0.11 0.91	4.17 0.00	0.79 0.43	1.00 0.32	3.36 0.00	0.11 0.91		4.28 0.00	0.92 0.36	1.04 0.30	3.47 0.00	0.19 0.85	4
8	v p-val	-4.30 0.00	-2.13 0.03	-8.27 0.00	-4.20 0.00	-4.31 0.00	-7.62 0.00	-4.28 0.00		-8.27 0.00	-4.13 0.00	-4.29 0.00	-7.59 0.0	-10
9	v p-val	-0.94 0.35	8.02 0.00	-1.48 0.14	-0.51 0.61	6.07 0.00	-1.96 0.05	-0.92 0.36	8.27 0.00		-0.50 0.61	6.36 0.00	-1.89 0.06	4
10	v p-val	-1.00 0.32	4.03 0.00	0.38 0.71	0.08 0.94	3.34 0.00	-0.34 0.73	-1.04 0.30	4.13 0.00	0.50 0.61		3.44 0.00	-0.27 0.79	4
11	v p-val	-3.49 0.00	3.84 0.00	-6.44 0.00	-3.51 0.00	-1.46 0.14	-7.39 0.00	-3.47 0.00	4.29 0.00	-6.36 0.00	-3.44 0.00		-7.29 0.00	-6
12	v p-val	-0.21 0.84	7.46 0.00	1.56 0.12	0.29 0.77	7.06 0.00	-0.74 0.46	-0.19 0.85	7.59 0.00	1.89 0.06	0.27 0.79	7.29 0.00		4

Tabla B.24: Prueba de Clarke

Cóp.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Punt.
1	B p-val		942 0.00	801 0.00	787 0.02	928 0.00	771 0.14	656 0.00	949 0.00	803 0.00	737 0.82	934 0.00	775 0.09	5
2	B p-val	542 0.00		439 0.00	530 0.00	583 0.00	437 0.00	554 0.00	913 0.00	467 0.00	530 0.00	563 0.00	440 0.00	-9
3	B p-val	683 0.00	1045 0.00		679 0.00	980 0.00	671 0.00	686 0.00	1064 0.00	717 0.20	656 0.00	985 0.00	647 0.00	-2
4	B p-val	697 0.02	954 0.00	805 0.00		922 0.00	768 0.19	659 0.00	963 0.00	797 0.00	687 0.00	935 0.00	766 0.22	4
5	B p-val	556 0.00	901 0.00	504 0.00	562 0.00		452 0.00	551 0.00	941 0.00	514 0.00	562 0.00	721 0.29	463 0.00	-6
6	B p-val	713 0.14	1047 0.00	813 0.00	716 0.19	1032 0.00		715 0.17	1036 0.00	790 0.01	705 0.06	1051 0.00	695 0.02	5
7	B p-val	828 0.00	930 0.00	798 0.00	825 0.00	933 0.00	769 0.17		936 0.00	813 0.00	776 0.08	933 0.00	777 0.07	8
8	B p-val	535 0.00	571 0.00	420 0.00	521 0.00	543 0.00	448 0.00	548 0.00		444 0.00	527 0.00	537 0.00	447 0.00	-11
9	B p-valor	681 0.00	1017 0.00	767 0.20	687 0.00	970 0.00	694 0.01	671 0.00	1040 0.00		674 0.00	979 0.00	650 0.00	-1
10	B p-val	747 0.82	954 0.00	828 0.00	797 0.00	922 0.00	779 0.06	708 0.08	957 0.00	810 0.00		920 0.00	777 0.07	7
11	B p-val	550 0.00	921 0.00	499 0.00	549 0.00	763 0.29	433 0.00	551 0.00	947 0.00	505 0.00	564 0.00		451 0.00	-6
12	B p-val	709 0.09	1044 0.00	837 0.00	718 0.22	1021 0.00	789 0.02	707 0.07	1037 0.00	834 0.00	707 0.07	1033 0.00		6





## Bibliografía

- [1] AAS, K. et al., (2009) *Pair-Copula Constructions of Multiple Dependence.*, Insurance: Mathematics and Economics, 44, pp. 182-198.
- [2] BELGORODSKI, N., (2010) *Selecting pair-copula families for regular vines with application to the multivariate analysis of European stock market index.*, Diploma thesis, Technische Universitaet Muenchen.
- [3] BRECHMANN E. y SCHEPSMEIER, U., (2013) *Modeling Dependence with C and D-Vine Copulas: The R Package CDVine* , Journal of Statistical Software, 52.
- [4] BROCKWELL, P. y A. DAVIS, (1991) *Time Series: Theory and Methods*, Springer Series in Statistics, segunda edición.
- [5] CLARKE, K. et al., (2007) *A Simple Distribution-Free Test for Nonnested Model Selection.*, Political Analysis, 15, pp. 347-363.
- [6] CYRIL, C. y G. DOMINIQUE, (2005) *Empirical Estimation of Tail Dependence Using Copulas. Application to Asian Markets.*, Quantitative Finance, Taylor & Francis (Routledge), 5, pp. 489 - 501.
- [7] EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F. y A. MCNEIL, (2001) *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management.*, Department of Mathematics, ETHZ.
- [8] EMBRECHTS, P.;FREY, R. y A. MCNEIL, (2005) *Quantitative Risk Management «Concepts, Techniques and Tools»* , pp. 184-199.
- [9] FRAHM, G. et al., (2005) , *Estimating the tail dependence coefficient.*, Insurance: Mathematics and Economics 37, pp. 80-100.
- [10] FRANCO, C. y J. ZOKOIAN, (2010) *GARCH Models «Structure, Statistical Inference and Financial Applications »* , Wiley , United Kingdom, pp. 91-156.

- 
- [11] GENEST, C.; HUANG, W. y J. DUFOUR , (2013) *A regularized goodness-of-fit test for copulas* , Journal de la Société Française de Statistique, 154 , pp. 64-77.
- [12] JOE, H., (1997) *Multivariate models and dependence concepts* , primera edición , Canada, pp. 85-128.
- [13] JOE, H.; LI, H. y A. NIKOLOULOPOULOS, (2009) *Tail Dependence Functions and Vine Copulas*, Journal of Multivariate Analysis 101, pp. 252-270.
- [14] LANDSMAN Z.M. y A. VALDEZ, (2013) *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions*, North American Actuarial Journal 7, número 4, pp. 55-71.
- [15] NELSEN, R., (2006) *An Introduction to Copulas*, second edition, Springer ,United States of America, Portland.
- [16] SCHMIDT, R. y U. STADMÜLLER, (2005) *Non-parametric Estimation of Tail Dependence*, Scandinavian Journal of Statistics, 33, pp. 313-331.
- [17] SCHMIDT, T., (2006) *Coping with copulas*, Department of Mathematics, University of Leipzig, pp. 3-20.
- [18] SALAZAR, Y., (2016) *General Multivariate Dependence Using Associated Copulas*, REVSTAT- Statistical Journal, 14, número 1, pp. 3-26.
- [19] SHUMWAY, R. y S. STOFFER, (2006) *Time Series Analysis and its Application with R Examples*, Springer, segunda edición.
- [20] SKLAR, A., (1959) *Fonctions de Répartition á n Dimensions et Leurs Marges*, Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris, pp. 229-231.
- [21] VUONG, Q., (1989) *Ratio tests for model selection and non-nested hypotheses.*, Econometrica, 57, número 2, pp. 307-333.