



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS NÚMEROS DE FIBONACCI POR
TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS EN
GRÁFICAS ARISTA-COLOREADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

NATALIA MARTÍNEZ DE LA VIÑA

DIRECTORA DE TESIS:

M. EN C. LOIRET ALEJANDRÍA DOSAL TRUJILLO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del Jurado

1. Datos del alumno

Apellido paterno: Martínez
Apellido materno: de la Viña
Nombre(s): Natalia
Teléfono: 55 54 06 06
Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemáticas
Número de cuenta: 30050121-4

2. Datos del tutor

Grado: M. en C.
Nombre(s): Loiret Alejandría
Apellido paterno: Dosal
Apellido materno: Trujillo

3. Datos del Sinodal 1

Grado: Dra.
Nombre(s): Hortensia
Apellido paterno: Galeana
Apellido materno: Sánchez

4. Datos del Sinodal 2

Grado: Dr.
Nombre(s): Ilán Abraham
Apellido paterno: Goldfeder
Apellido materno: Ortiz

5. Datos del Sinodal 3

Grado: Dra.
Nombre(s): Eugenia
Apellido paterno: O'Reilly
Apellido materno: Regueiro

6. Datos del Sinodal 4

Grado: Dra.
Nombre(s): Mucuy-Kak del Carmen
Apellido paterno: Guevara
Apellido materno: Aguirre

7. Datos del trabajo escrito

Título: Los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas en gráficas arista-coloreadas
Número de páginas: 86
Año: 2018

ÍNDICE GENERAL

Introducción	iv
1. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE GRÁFICAS	1
1.1. ¿Qué es una gráfica?	1
1.2. Subgráficas e Isomorfismo	4
1.2.1. Subgráficas	4
1.2.2. Isomorfismo entre gráficas	6
1.2.3. Operaciones en gráficas	9
1.3. Conexidad	10
1.3.1. Caminos, paseos, trayectorias y ciclos	10
1.3.2. Conexidad	12
1.3.3. Distancia en gráficas	15
1.4. Tipos de gráficas	16
1.4.1. Operaciones entre gráficas	20
1.5. Árboles	24
1.5.1. Vértices de corte, puentes y bloques	24
1.5.2. Árboles y bosques	27
2. INDEPENDENCIA Y COLORACIÓN	31
2.1. Conjuntos independientes y cubiertas	31
2.1.1. Apareamientos en gráficas bipartitas	35
2.2. Clanes y Conjuntos Dominantes	38
2.3. Coloración	41
2.3.1. Coloración por vértices	41
2.3.2. Coloración por aristas	44
2.3.3. Coloración y gráfica de líneas	46
3. EL NÚMERO DE FIBONACCI DE UNA GRÁFICA	48
3.1. Los índices de Hosoya y Merrifield-Simmons	52
3.2. El número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas	52
3.2.1. Los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de P_n y C_n	53
3.2.2. Los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas en gráficas arista-coloreadas	62
3.3. Cotas en el número de Fibonacci de las gráficas arista-coloreadas	65
Conclusiones	78
Bibliografía	80

INTRODUCCIÓN

La historia de las matemáticas es tan antigua como la historia de la humanidad, pero este no es el caso de la teoría de gráficas, una rama de las matemáticas discretas a la cual le podemos asignar una fecha y lugar de nacimiento. Se considera que su estudio comenzó en el año de 1736 con la publicación del resultado que Leonhard Euler encontró al problema de los puentes de Königsberg. Éste lo plantearon los habitantes de la ciudad, situada en lo que es ahora Rusia, quienes se preguntaban si existía un paseo por la ciudad, de tal forma que se recorriera cada uno de sus siete puentes una sola vez y terminando en el punto de partida.

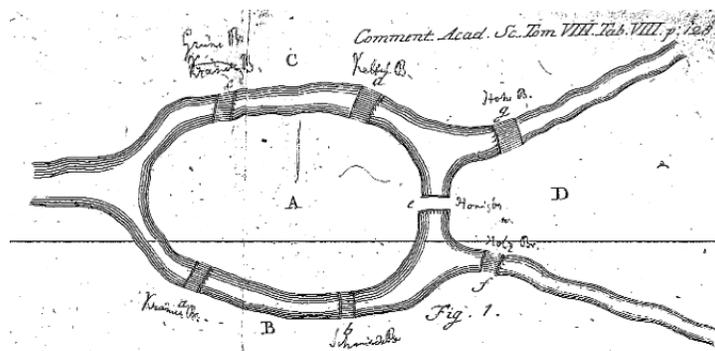


Figura 1: Esquema de Euler para la solución del problema sobre los Puentes de Königsberg.

Otro problema de suma importancia y al que en algunas instancias se atribuye el acelerado desarrollo de la teoría de gráficas en los últimos 150 años, se conoce como el *problema de los 4 colores* que durante mucho tiempo permaneció como una conjetura pues no se logró probar hasta el último cuarto del siglo XX. El planteamiento de este problema se hizo por primera vez en 1852 en una carta que Augustus De Morgan le envía a William Rowan Hamilton, explicando una observación que uno de sus estudiantes hizo: para colorear un mapa de tal manera que a países colindantes se les asigne distinto color son suficientes 4 colores. Fue Tait quien en 1880 propone una solución de la —hasta ese momento— *conjetura de los 4 colores*. En su artículo, Tait da una prueba falaz, pero una equivalencia válida del *problema de los 4 colores*, utilizando coloración por aristas en lugar de coloración por vértices[1].

En esta tesis se estudian los números de Fibonacci de las gráficas, concepto introducido por Prodinger y Tichy en 1982 [7], y en particular una generalización: los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas, definidos por I. y A. Włoch en 2007 [12]. Este concepto involucra

por un lado gráficas coloreadas por aristas y por otro los conjuntos independientes de los vértices de una gráfica.

En el capítulo 1 se desarrollan las nociones básicas necesarias para el estudio de la teoría de gráficas. Se definen isomorfismo y conexidad, y operaciones entre gráficas. También se estudian algunas familias de gráficas importantes, en particular la familia de los árboles, definidos como gráficas conexas y acíclicas.

En el capítulo 2 se estudian independencia y coloración, conceptos fundamentales para el estudio de los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas. Además se definen clanes, apareamientos y cubiertas, conceptos ligados al estudio de los conjuntos independientes. En este capítulo también se revisa coloración por vértices y aristas, en particular coloraciones propias y el número e índice cromático de una gráfica coloreada.

En el capítulo 3 se introduce el concepto de número de Fibonacci de las gráficas y número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas, se revisan propiedades y se encuentran cotas superiores e inferiores. Finalmente, se demuestra un resultado nuevo, que consiste de una cota para el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas.

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE GRÁFICAS

1.1 ¿QUÉ ES UNA GRÁFICA?

Formalmente, una gráfica G es un par de conjuntos V y E , con V un conjunto finito de elementos llamados *vértices*, también llamados *nodos*. Los elementos del conjunto E se conocen como *aristas* y cada arista es un par no ordenado de vértices, de tal forma que si $e \in E(G)$, entonces $e = uv$ para algunos $u, v \in V(G)$ ¹. A u y v se les conoce como los *extremos* de la arista e . Así $G = (V, E)$.

Si los extremos de una arista son iguales, la arista es un *lazo*. Si dos aristas tienen sus extremos en el mismo par de vértices, las llamamos *multiaristas* o *aristas paralelas*. A una gráfica que contiene multiaristas se le conoce como *multigráfica*, si contiene multiaristas y lazos se le conoce como *pseudográfica*. Por otro lado, una gráfica que no contiene aristas múltiples ni lazos se conoce como *gráfica simple*. Este trabajo se va a ocupar únicamente del estudio de gráficas simples.

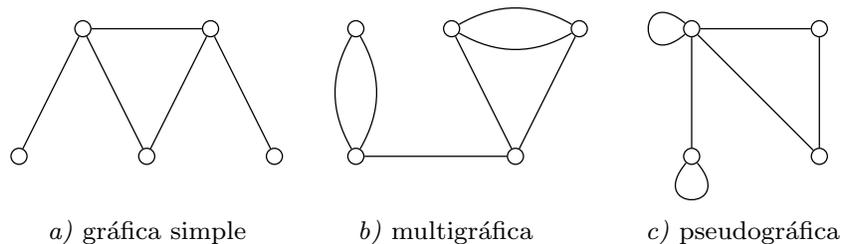


Figura 2: Distintos tipos de gráficas

Al número de vértices de una gráfica G , se le llama el *orden* de G , y al número de aristas se le conoce como su *tamaño*. Se utiliza n y m respectivamente. Así:

$$|V(G)| = n \quad \text{y} \quad |E(G)| = m.$$

¹ Utilizamos la notación $V(G)$ y $E(G)$ para indicar que el conjunto es el asociado a la gráfica G esto es $G = (V, E)$.

Si m es igual a cero entonces el conjunto de aristas es vacío y se dice que la gráfica G es *trivial*. Si G es tal que $V(G) = \emptyset$, entonces decimos que G es *vacía*.

Si e es la arista uv , se dice que e *incide* en u y en v . Si dos aristas inciden en el mismo vértice se dice que son *adyacentes*, de la misma forma si dos vértices son extremos de la misma arista, son *adyacentes* o *vecinos* y se escribe $u \text{ ady}_G v$. Se conoce como *vecindad* de v , al conjunto de vértices adyacentes a v y se escribe $N_G(v)$ ². Es decir, $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. Además le llamamos *vecindad cerrada* del vértice v al conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

Al número de aristas que inciden en un vértice se le conoce como el *grado* de v y se escribe $d(v)$. De la misma forma, $d(v)$ es el número de vértices adyacentes a v . Notemos que como G es una gráfica simple, entonces $d(v) = |N(v)|$.

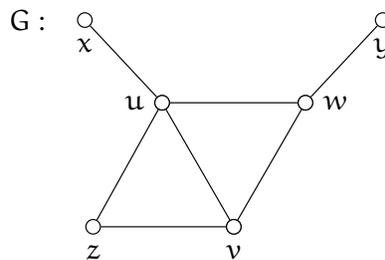


Figura 3: Una gráfica simple G de orden $n = 6$ y tamaño $m = 7$

Teorema 1.1 (Primer Teorema de la Teoría de Gráficas) *La suma de los grados de todos los vértices de una gráfica es igual a dos veces su tamaño.*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Demostración Cada arista tiene dos extremos, es por eso que al sumar el grado de todos los vértices se cuenta dos veces cada arista, una por cada uno de sus extremos. \square

Una consecuencia del teorema 1.1 es el siguiente corolario.

Corolario 1.2 *Toda gráfica tiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración Sea G una gráfica simple, sean V_I el subconjunto que contiene a todos los vértices de V de grado impar y V_P el subconjunto de vértices de grado par³. Entonces,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in V_I} d(v) + \sum_{v \in V_P} d(v)$$

² El subíndice G se omite cuando se sobreentiende a qué gráfica pertenece v .

³ $V_I \cup V_P = V(G)$ y $V_I \cap V_P = \emptyset$.

además,

$$\sum_{v \in V_p} d(v) = 2k,$$

con k un entero no negativo, pues la suma de números pares siempre es par. Y por el teorema 1.1, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$. Así,

$$2m = \sum_{v \in V_I} d(v) + 2k$$

$$\sum_{v \in V_I} d(v) = 2(m - k).$$

Por lo tanto $\sum_{v \in V_I} d(v)$ es par y como es suma de enteros impares, hay necesariamente un número par de sumandos. Por lo que V_I es par. \square

A un vértice con grado cero se le llama vértice *aislado* y a un vértice con grado 1 se le llama vértice *terminal*. El grado *mínimo* (*máximo*) de una gráfica G es el mínimo (*máximo*) de los grados de todos los vértices de G y se denota como $\delta(G)$ ($\Delta(G)$). Dada una gráfica simple G el grado de un vértice puede ser a lo más $n - 1$. Así, tenemos la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1, \text{ para todo } v \in V(G).$$

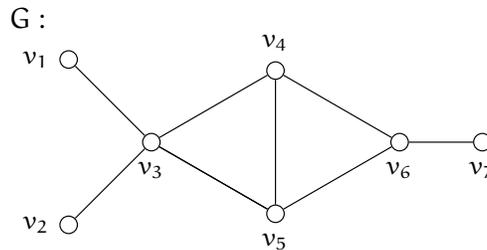


Figura 4: Una gráfica G de orden $n = 7$ y tamaño $m = 7$, con $\delta(G) = 1$ y $\Delta(G) = 4$

En la gráfica de la figura 4, v_3 es el vértice de grado máximo con $d(v_3) = 4$, así $\Delta(G) = 4$, mientras que los vértices v_1, v_2 y v_7 tienen grado mínimo pues son terminales, así $\delta(G) = 1$.

Teorema 1.3 Una gráfica simple y no trivial tiene al menos dos vértices con el mismo grado.

Demostración Sea G una gráfica de orden n tal que todos sus vértices tienen grados distintos. Para cualquier vértice v se cumple que

$$0 \leq d(v) \leq n - 1,$$

⁴ Donde m es el tamaño de la gráfica G .

por lo que los grados de los vértices de G deben ser los del conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ de n elementos. Entonces, existen vértices u y v tales que $d(u) = 0$ y $d(v) = n-1$; es decir, G contiene simultáneamente un vértice aislado y un vértice adyacente a todos los demás, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe G tal que los grados de todos sus vértices sean distintos. \square

1.2 SUBGRÁFICAS E ISOMORFISMO

1.2.1 Subgráficas

Una *subgráfica* H de una gráfica G , $H \subseteq G$, es aquella que se obtiene al ‘borrar’ vértices y/o aristas de la gráfica G . Formalmente:

Definición H es subgráfica de G si H es una gráfica y los conjuntos de vértices y aristas de H están contenidos en los de G ;

$$H \subseteq G \quad \text{si} \quad V(H) \subseteq V(G) \quad \text{y} \quad E(H) \subseteq E(G).$$

Además, si H es subgráfica de G también se dice que G es *supergráfica* de H .

Observación Sea G una gráfica cualquiera, entonces G es subgráfica de sí misma.

De esta forma, se dice que H es una *subgráfica propia* de G cuando $V(H) \subsetneq V(G)$ o $E(H) \subsetneq E(G)$, es decir H no es igual a G .

H es una *subgráfica generadora* de G cuando $V(H) = V(G)$ ⁵. Se dice que H es una *gráfica inducida* por un conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, siempre que para cada par de vértices $u, v \in V(H)$, si $uv \in E(G)$, entonces $uv \in E(H)$. Es decir, H es la subgráfica que contiene todas las aristas que aparecen en la gráfica original, siempre que sus extremos estén en el conjunto $S = V(H)$, y en este caso escribimos $H = G\langle S \rangle$.

H es una gráfica inducida por $A \subseteq E(G)$ un conjunto de aristas, si $A = E(H)$ y $V(G)$ es el conjunto de extremos de los elementos de A . Análogamente, escribimos $H = G\langle A \rangle$.

⁵ H y G tienen el mismo orden

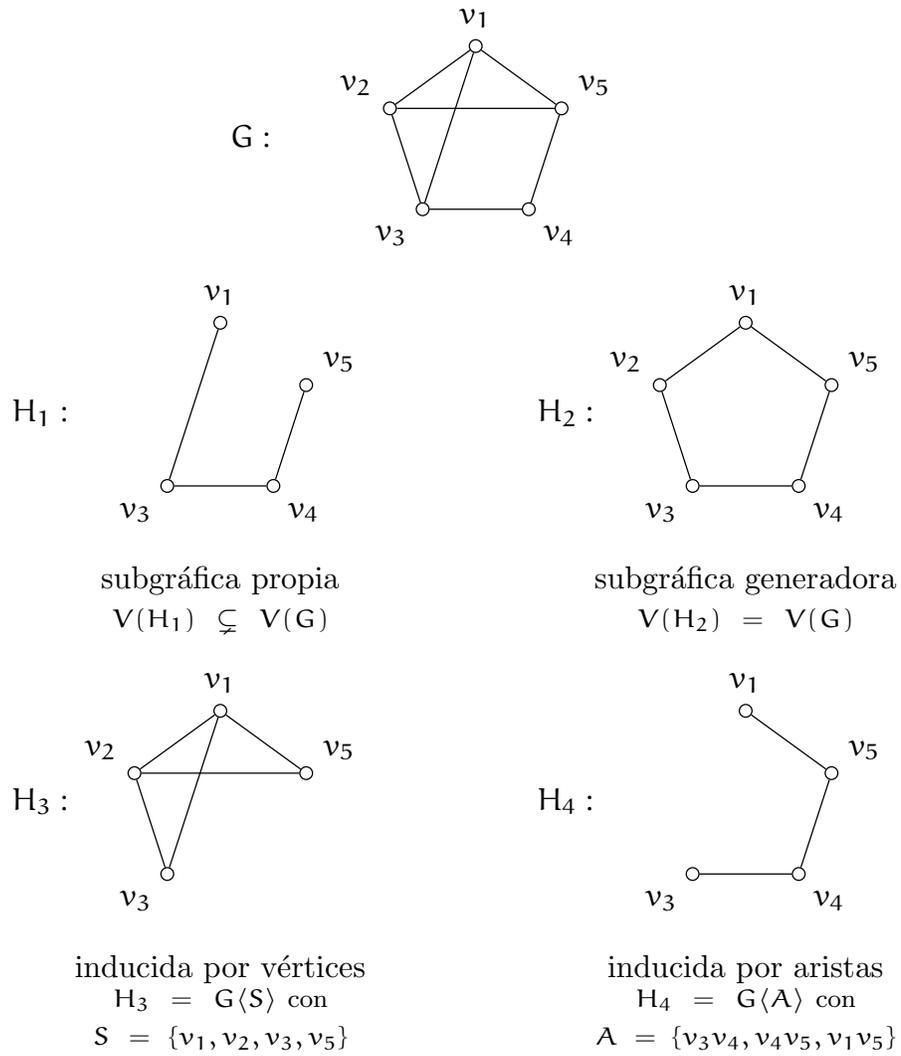


Figura 5: La gráfica G y ejemplos de los distintos tipos de subgráficas

1.2.2 Isomorfismo entre gráficas

Definición R es una *relación de equivalencia* sobre un conjunto X si:

- es reflexiva: para toda $x \in X$, $(x, x) \in R$,
- es simétrica: si para toda $x, y \in X$ si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$ y
- es transitiva: si para toda $x, y, z \in X$ tal que $(x, y), (y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$.

Se dice que dos gráficas son *isomorfas* si entre sus conjuntos de vértices existe una correspondencia uno a uno que preserve adyacencias y no adyacencias entre vértices. Este concepto captura la noción de que, aunque dos gráficas estén representadas de distinta forma, pueden tener la misma estructura. Intuitivamente, lo que se busca con la biyección es que se conserven las reglas de incidencia. Formalmente:

Definición (Isomorfismo) Sean G y H dos gráficas, si existe una función biyectiva

$$\phi: V(G) \rightarrow V(H)$$

tal que $u \text{ ady}_G v$ si y solo si $\phi(u) \text{ ady}_H \phi(v)$, entonces decimos que G y H son *isomorfas* y se escribe $G \simeq H$.

De la definición se derivan las siguientes consecuencias:

Teorema 1.4 Si dos gráficas G y H son isomorfas, entonces:

- (i) G y H tienen el mismo orden,
- (ii) vértices correspondientes bajo el isomorfismo tienen el mismo grado y
- (iii) G y H tienen el mismo tamaño.

Demostración Sean G y H dos gráficas isomorfas, y sea $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ una biyección entre sus conjuntos de vértices.

- (i) Por ser ϕ una función biyectiva, su dominio y su imagen tienen la misma cardinalidad, *i. e.* $|V(G)| = |V(H)|$, por lo tanto G y H tienen el mismo orden.
- (ii) Sea v un vértice cualquiera de G , con grado $d_G(v) = k$ y sea $N_G(v) = \{v_1, \dots, v_k\}$ la vecindad de v en G . Por ser ϕ una biyección, sabemos que preserva vértices adyacentes y

no adyacentes, así $\phi(v)$ es adyacente a $\phi(v_1), \dots, \phi(v_k)$. De la misma forma, y por ser ϕ una biyección, para todo $u_i \in N_H(\phi(v))$, $\phi^{-1}(u_i)$ es adyacente a v en G . Por lo tanto, $d_G(v) = d_H(\phi(v))$ para todo vértice $v \in G$.

(iii) Se demostró anteriormente que la suma de los grados de los vértices de una gráfica es igual al doble de su tamaño y, utilizando el inciso anterior, tenemos:

$$2|V(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{\phi(v) \in V(H)} d(\phi(v)) = 2|V(H)|.$$

Por lo tanto G y H tienen el mismo tamaño. □

Estas consecuencias permiten mostrar fácilmente que dos gráficas son no isomorfas, pero cabe destacar que éstas son condiciones necesarias para el isomorfismo, pero no son condiciones suficientes.

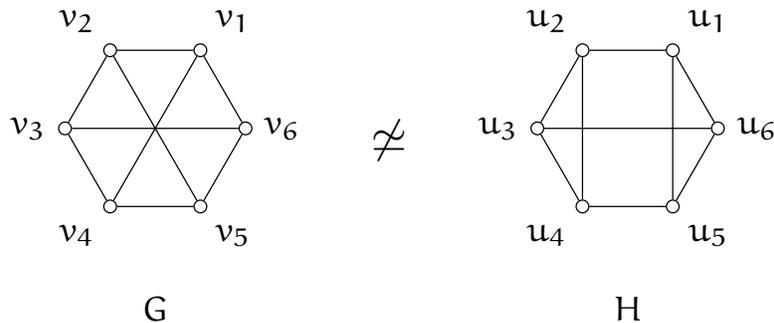


Figura 6: Dos gráficas con el mismo orden, tamaño y grados de los vértices que no son isomorfas.

Para probar que dos gráficas son isomorfas, basta⁶ con encontrar la función ϕ que cumpla con las condiciones de la definición. Si dos gráficas son no isomorfas, se escribe $G \not\cong H$.

Las gráficas G y H de la figura 6 no son isomorfas pues, a pesar de tener el mismo orden, tamaño y grados de los vértices, si nos fijamos en el vértice $u_1 \in V(H)$, éste es adyacente a dos vértices que, a su vez son adyacentes entre ellos. Esto no ocurre con ningún vértice de G , por lo que podemos asegurar que $G \not\cong H$.

Las tres gráficas de la figura 7 son isomorfas, con el isomorfismo dado por $\phi(u_i) = v_i$ y $\psi(v_i) = w_i$.

⁶ Aún no se sabe si existe un procedimiento eficiente para decidir si dos gráficas son isomorfas.

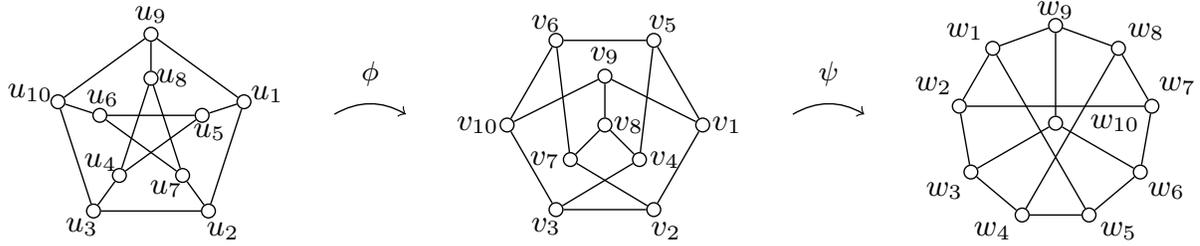


Figura 7: Tres representaciones de la gráfica de Petersen

Observación El isomorfismo, junto con la composición de funciones es una relación de equivalencia, pues, si G_1, G_2 y G_3 son tres gráficas, tenemos:

- $G_1 \simeq G_1$, con el isomorfismo dado por la identidad, $\phi(v) = v, v \in V(G)$.
- Si $G_1 \simeq G_2$ entonces $G_2 \simeq G_1$, pues si $\phi: G_1 \rightarrow G_2$, entonces $\phi^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$.
- Si $G_1 \simeq G_2$ y $G_2 \simeq G_3$ entonces $G_1 \simeq G_3$, pues si $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ y $\psi: G_2 \rightarrow G_3$, entonces $\psi \circ \phi: G_1 \rightarrow G_3$ es un isomorfismo.

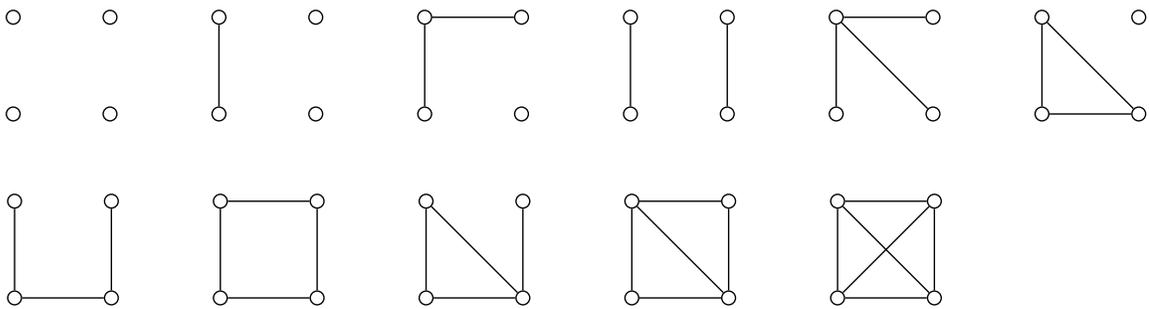


Figura 8: Todas las gráficas no isomorfas de orden 4

1.2.3 Operaciones en gráficas

Dada una gráfica G , se pueden obtener nuevas gráficas a partir de ésta al agregar o quitar vértices o aristas.

- $G - S$: si borramos de la gráfica G el subconjunto propio $S \subsetneq V(G)$ obtenemos la subgráfica inducida de G , por los vértices que no están en S . A esta gráfica la denotamos como $G - S$.

$G - v$ es la gráfica obtenida al eliminar el vértice $v \in V(G)$ y todas sus aristas incidentes. $G - v$ es también la gráfica inducida por el conjunto $V(G) - \{v\}$.

- $G - A$: similarmente, eliminar un conjunto de aristas $A \subset E(G)$, equivale a construir la gráfica inducida $G \langle E(G) - A \rangle$, y la denotamos por $G - A$. Cuando $A = \{e\}$ para alguna $e \in E(G)$, simplemente escribimos $G - e$.

- $G + uv$: si $u, v \in V(G)$ y $uv \notin E(G)$, la gráfica $G + uv$ se obtiene de G al añadir la arista uv , con $u, v \in V(G)$.

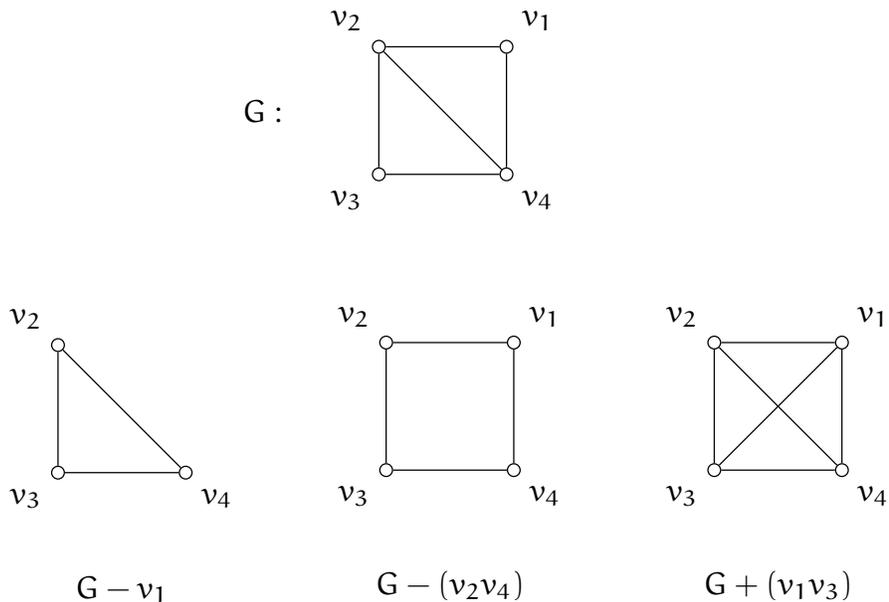


Figura 9: Ejemplos de las operaciones $G - v$, $G - e$ y $G + e$

1.3 CONEXIDAD

1.3.1 Caminos, paseos, trayectorias y ciclos

Definición Un *camino* \mathcal{W} en una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas, finita y no vacía, construida de tal forma que para $1 \leq i \leq k$ los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i , así $\mathcal{W} = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$.

Debido a que en una gráfica simple una arista está determinada (sin ambigüedad) por sus extremos, de ahora en adelante podemos omitir la aristas de la sucesión y simplemente escribimos $\mathcal{W} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$.

Se dice que \mathcal{W} es una camino de v_0 a v_k o un v_0v_k -camino y se conoce como vértice inicial de \mathcal{W} a v_0 , vértice final a v_k y vértices interiores a los vértices restantes v_1, \dots, v_{k-1} . La *longitud* del camino \mathcal{W} , $\ell(\mathcal{W})$, es el entero k , el número de aristas (no necesariamente distintas) contenidas en la sucesión. Así, un camino trivial es un camino de longitud cero, compuesto por un solo vértice.

Si todas las aristas de una camino \mathcal{W} son distintas, vamos a decir que es un *paseo* \mathcal{T} , si además no se repite ningún vértice, vamos a decir que es una *trayectoria* \mathcal{P} . De esta manera, una trayectoria es un paseo pero no todo paseo es una trayectoria. Decimos que dos trayectorias son internamente disjuntas si solo tienen en común sus vértices inicial y final.

Definición Si $\mathcal{W}_1 = (v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, v_p)$ y $\mathcal{W}_2 = (u_0, u_1, \dots, u_{q-1}, u_q)$ son dos caminos tales que $v_p = u_0$, la *concatenación* de \mathcal{W}_1 y \mathcal{W}_2 es el camino $\mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2 = (v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, v_p = u_0, u_1, \dots, u_{q-1}, u_q)$. De la misma forma, la concatenación de k caminos $\mathcal{W}_1 \dots \mathcal{W}_k$, tales que para toda \mathcal{W}_i con $1 \leq i \leq k-1$, su vértice final es igual al vértice inicial de \mathcal{W}_{i+1} , se define inductivamente como la concatenación de \mathcal{W}_k y la concatenación de $\mathcal{W}_1 \dots \mathcal{W}_{k-1}$, *i. e.* $(\dots ((\mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2) \cdot \mathcal{W}_3) \dots) \cdot \mathcal{W}_k$. De aquí que $\ell(\mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{W}_k) = \ell(\mathcal{W}_1) + \ell(\mathcal{W}_2) + \dots + \ell(\mathcal{W}_k)$.

Si $\mathcal{W} = (x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$ es un xy -camino y $u = x_i, v = x_j$ para alguna $i \neq j$, entonces $\mathcal{W}' = (u, \mathcal{W}, v)$, es el camino $(u = x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = v)$. Así podemos concatenar subcaminos, y usamos la notación $\mathcal{W}'_1 \cdot \mathcal{W}'_2 = (u, \mathcal{W}_1, v) \cup (v, \mathcal{W}_2, w)$.

Si $\mathcal{W} = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ es un uv -camino, entonces denotamos como $\mathcal{W}^{-1} = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, x_0)$ al vu -camino que se obtiene al recorrer \mathcal{W} en sentido opuesto.

Un camino que empieza y termina en el mismo vértice decimos que es un camino *cerrado*. Si además es no trivial y no repite vértices interiores decimos que es un *ciclo*. A un ciclo de longitud k se le conoce como k -*ciclo*.

Observación *Todo ciclo tiene longitud al menos tres.*

Observación *La concatenación de dos trayectorias distintas e internamente ajenas forma un ciclo.*

Teorema 1.5 *En una gráfica simple G , todo uv -camino contiene una uv -trayectoria.*

Demostración Procederemos por inducción sobre la longitud del camino. Sea G una gráfica simple y $\mathcal{C} = (u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$ un uv -camino contenido en G .

Si $\ell(\mathcal{C}) = 1$, entonces $\mathcal{C} = (u, v)$, *i. e.* \mathcal{C} es la arista uv , por lo que \mathcal{C} no repite ningún vértice, entonces por definición \mathcal{C} es una uv trayectoria.

Ahora, supongamos que el teorema es válido para todos los caminos de longitud estrictamente menor que k , falta demostrar que si $\ell(\mathcal{C}) = k$, entonces \mathcal{C} contiene una uv -trayectoria.

Sea \mathcal{C} un uv -camino de longitud k . Si \mathcal{C} no repite vértices, \mathcal{C} es por definición una trayectoria. Si, por otro lado, x se repite en \mathcal{C} , *i. e.* para alguna $i < j$ en la sucesión $v_i = v_j$, entonces $\mathcal{C} = (u = v_0, v_1, \dots, x = v_i, \dots, x = v_j, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$. Sea \mathcal{C}' el camino $\mathcal{C}' = (u = v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$, entonces $\ell(\mathcal{C}') < \ell(\mathcal{C})$ y por hipótesis de inducción, \mathcal{C}' contiene una uv -trayectoria y como $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, \mathcal{C} contiene una uv -trayectoria. \square

Teorema 1.6 *Todo camino cerrado de logitud impar contiene un ciclo de longitud impar.*

Demostración Procederemos por inducción sobre la longitud del camino cerrado. Sea $\mathcal{W} = (u = v_0, v_1, \dots, v_{2k}, v_{2k+1} = u)$ un camino cerrado de longitud impar que empieza y termina en el vértice u , con $\ell(\mathcal{W}) = 2k + 1$.

Si $k = 1$, entonces $\ell(\mathcal{W}) = 3$. Sea $\mathcal{W} = (v_0, v_1, v_2, v_3 = v_0)$ el camino cerrado, entonces v_0v_1, v_1v_2 y $v_2v_0 \in E(G)$. Esto ocurre si y solo si $v_0 \neq v_1, v_1 \neq v_2$ y $v_2 \neq v_0$. Así, \mathcal{W} es un camino cerrado que no repite vértices interiores, *i. e.* \mathcal{W} es un ciclo de longitud impar.

Ahora, supongamos que todo camino cerrado \mathcal{W} , tal que $\ell(\mathcal{W}) = 2s + 1$ con $1 \leq s < k$, contiene un ciclo de longitud impar.

Sea \mathcal{W} tal que $\ell(\mathcal{W}) = 2k + 1$, si \mathcal{W} repite solamente el primer y último vértice, \mathcal{W} es un ciclo y se cumple el teorema. Si \mathcal{W} no es un ciclo, entonces repite al menos un vértice intermedio. Sea x el primer vértice de la sucesión que se repite, tal que $\mathcal{W} = (u = v_0, v_1, \dots, v_i = x, \dots, v_j = x, \dots, v_{2k}, v_{2k+1} = u)$ con $i < j$. Notemos que el camino cerrado \mathcal{W} está formado por dos caminos cerrados de menor longitud, $\mathcal{W}' = (u = v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_{2k}, v_{2k+1} =$

u) y $W'' = (x = v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j = x)$. Si $\ell(W')$ es impar, necesariamente W' o W'' es de longitud impar. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\ell(W')$ es impar entonces por hipótesis de inducción contiene un ciclo de longitud impar \mathcal{C} . Y puesto que $\mathcal{C} \subseteq W' \subseteq W$, el teorema queda demostrado. \square

1.3.2 Conexidad

Definición Se dice que dos vértices u y v de G están *conectados* si existe un uv -camino (una uv -trayectoria) en G . Si todo par de vértices en G están conectados, esto es, si existe un uv -camino (una uv -trayectoria) para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ decimos que G es *conexa*.

Así, si para algún par de vértices en G , no existe un uv -camino, u y v no están conectados y la gráfica G es *inconexa*.

Teorema 1.7 La relación ‘estar conectados’ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de vértices de G .

Demostración Sea G una gráfica conexa y $u, v, w \in V(G)$, entonces:

- (i) $\mathcal{C} = (u)$ es un uu -camino en G , por lo tanto la relación es reflexiva.
- (ii) Sea \mathcal{C} un uv -camino entre cualesquiera dos vértices, entonces \mathcal{C}^{-1} es un vu -camino en G , por lo tanto la relación es simétrica.
- (iii) Si \mathcal{C}_1 es un uv -camino y \mathcal{C}_2 es un vw -camino, entonces $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2$ es un uw -camino en G y por lo tanto la relación es transitiva. \square

Una subgráfica H de G es una *componente conexa* de G si H es máxima por contención con la propiedad de ser conexa. Observemos que las componentes conexas de G son las subgráficas inducidas por los elementos de la partición ⁷ dada por la relación de equivalencia ‘estar conectados’.

Denotamos por $c(G)$ al número de componentes conexas de G , así $c(G) = 1$ si y solo si G es conexa.

⁷ Una partición debe cumplir:
 i) $\cup_{i=1}^k V_i = V(G), i \in \{1, \dots, k\}$
 ii) $V_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ y
 iii) $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Toda componente conexa es no vacía y cualesquiera dos componentes conexas son ajenas. Toda gráfica se puede ver como la unión de sus componentes conexas.

Teorema 1.8 *Toda gráfica contiene una trayectoria de longitud al menos $\delta(G) = \delta$ y si $\delta \geq 2$ entonces contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$.*

Demostración Sea G una gráfica con $\delta(G) = \delta$, y sea $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ una trayectoria de longitud máxima en G . Como $d(x_k) \geq \delta$, entonces los elementos de $N(x_k)$ son elementos de la trayectoria \mathcal{P} , pues de lo contrario \mathcal{P} no sería máxima. Así, tenemos que $k \geq d(x_k) \geq \delta$.

Ahora, supongamos que $\delta \geq 2$ y sea $x_i \in N(x_k)$ tal que i es mínimo en la sucesión, así $N(x_k) \subseteq \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}\}$, y puesto que $x_k x_i \in E(G)$ entonces $\gamma = (x_i, \mathcal{P}, x_k) \cdot (x_k, x_i)$ es un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$. \square

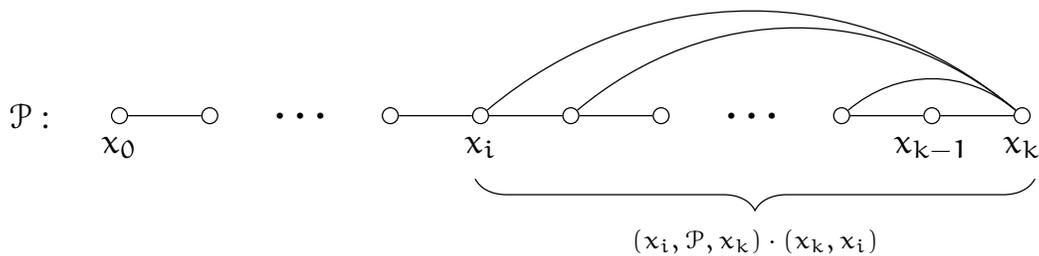


Figura 10: \mathcal{P} contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$

Teorema 1.9 (Caracterizaciones de las gráficas conexas)

- (i) G es una gráfica conexa si y solo si contiene un camino que pasa por todos sus vértices.
- (ii) Una gráfica no trivial G es conexa si y solo si para toda partición de $V(G)$ en dos conjuntos U y W existe una UW -arista.
- (iii) Una gráfica G de orden $n \geq 3$ es conexa si y solo si existen $u, v \in V(G)$ tal que $G - u$ y $G - v$ son conexas.

Demostración

- (i) Sea G una gráfica conexa y sea \mathcal{W} un camino que pase por el mayor número de vértices de G , veamos que $V(\mathcal{W}) = V(G)$. Supongamos que $V(\mathcal{W}) \neq V(G)$, entonces existe al menos un vértice v , tal que $v \in V(G) \setminus V(\mathcal{W})$, pero como G es conexa, hay al menos un vx -camino en G , \mathcal{W}' con v el vértice terminal de \mathcal{W} . Así, $\mathcal{W} \cdot \mathcal{W}'$ es un camino en G que contiene más vértices de $V(G)$ que \mathcal{W} . Por lo tanto fue falso suponer que $V(\mathcal{W}) \neq V(G)$.

Ahora, sea $W = (x_0, \dots, x_k)$ un camino en G tal que $V(W) = V(G)$ y sean u y v dos vértices cualesquiera en $V(G)$, entonces existen $i, j \in \{0, \dots, k\}$, $i \neq j$ tales que $u = x_i$ y $v = x_j$. Así, $W' = (x_i, W, x_j)$ es un uv -camino en G y por lo tanto, G es conexa.

- (ii) Supongamos que G es una gráfica conexa, no trivial y sea $\{U, W\}$ una partición cualquiera de $V(G)$. Como U y W son no vacíos, sean $u \in U$, $v \in W$. Ya que G es conexa, entonces existe al menos un camino entre cualesquiera dos vértices de G , en particular entre u y v . Sea $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = v)$ un uv -camino en G y sea x_i el primer vértice de la trayectoria que pertenece al conjunto W de la partición, entonces x_{i-1} pertenece a U y la arista $x_{i-1}x_i$ tiene un extremo en cada elemento de la partición.

Ahora, para probar el regreso, supongamos que G no es conexa, y procedamos por contradicción. Si G no es conexa, entonces tiene al menos dos componentes conexas. Sean G_1, \dots, G_k las componentes conexas de G . Si nos fijamos en $V = \{U, W\}$ una partición de los vértices de G , tal que $U = V(G_1)$ y $W = V(G) \setminus V(G_1)$, por hipótesis, existe una UW -arista, lo cual implica que hay dos vértices adyacentes en distintas componentes conexas, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si para toda bipartición de G existe una arista con cada extremo en un conjunto distinto de la partición, entonces G es conexa.

- (iii) Sea G una gráfica conexa, de orden $n \geq 3$. Sea \mathcal{P} una trayectoria de longitud máxima en G , y sean u y v los vértices inicial y final de \mathcal{P} , respectivamente. Sea z el vértice adyacente a v en \mathcal{P} . La trayectoria $\mathcal{P}' = (u, \mathcal{P}, z)$ es una uz -trayectoria que no pasa por v . Así, podemos asegurar que \mathcal{P}' está contenida en una componente conexa de $G - v$. Supongamos que $G - v$ es inconexa, entonces existe un vértice $w \in N(v)$ que no pertenece a la misma componente conexa que \mathcal{P} , entonces $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cdot (v, w)$ es una trayectoria en G , lo cual contradice la hipótesis que \mathcal{P} es de longitud máxima. Análogamente ocurre para u , por lo tanto $G - u$ y $G - v$ son gráficas conexas.

Ahora sean $u, v \in V(G)$, tales que $G - u$ y $G - v$ son conexas. Basta demostrar que en G hay un uv -camino. Como $n \geq 3$, existe un vértice w en $V(G) \setminus \{u, v\}$ y como $G - v$ es conexa, existe P_1 una uw -trayectoria en $G - v$, análogamente ocurre que en $G - u$ existe P_2 una wv -trayectoria. Así, $P_1 \cdot P_2$ es un uv -camino en G y por lo tanto G es conexa. \square

Esta caracterización nos permite probar el siguiente teorema, el cual relaciona orden y tamaño de una gráfica conexa.

Teorema 1.10

Si G es una gráfica conexa con orden n y tamaño m , entonces $m \geq n - 1$.

Demostración (por inducción sobre el orden de G) Sea G una gráfica conexa, de orden n , si $n = 1$ entonces G no tiene aristas y si $n = 2$ entonces G tiene una arista, en ambos casos, se

cumple el teorema. Ahora supongamos que toda gráfica conexa de orden n y tamaño m , cumple que $m \geq n - 1$. Falta demostrar que si G tiene orden $n + 1 \geq 3$, entonces tiene tamaño $m \geq n$. Por el teorema 1.9, inciso (iii), si G es conexa, existe $u \in G$ tal que $G - u$ es conexa. Por hipótesis de inducción, $|E(G - u)| \geq n - 1$ y como $|E(G)| = |E(G - u)| + d(u) \geq (n - 1) + 1 = n$, entonces $|E(G)| \geq n$ y queda demostrado el teorema. \square

1.3.3 Distancia en gráficas

Definición Sea X un conjunto de puntos, una *función de distancia* en X es una función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ que es simétrica y satisface que $d(x, x) = 0$ para toda $x \in X$. Decimos que la distancia es una *métrica*, si además se cumplen que $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$ y la desigualdad del triángulo, *i. e.:*

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ para toda } x, y, z \in X.$$

Sabemos que si G es una gráfica conexa, entonces existe al menos una uv -trayectoria en G , para cualesquiera $u, v \in V(G)$. La longitud de estas trayectorias nos puede dar una noción de qué tan lejos o qué tan cerca están dos vértices en una gráfica, así podemos definir:

Definición Sean u, v vértices en una gráfica G , la *distancia* en G entre u y v se define como:

$$d_G(u, v) = \text{mín} \{ \ell(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ es una } uv\text{-trayectoria en } G \}.$$

Si \mathcal{P} es una uv -trayectoria tal que $\ell(\mathcal{P}) = d_G(u, v)$, decimos que \mathcal{P} es una uv -geodésica en G .

Así, la distancia entre cualesquiera dos vértices de una gráfica conexa está bien definida.

Teorema 1.11 *La distancia entre los vértices de una gráfica, $d(u, v): V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ es una métrica.*

Demostración Sean $u, v, w \in V(G)$, con G una gráfica conexa, entonces:

- (i) $d(u, u) = 0$ y $d(u, v) > 0$ si $u \neq v$,
pues la trayectoria trivial que consta únicamente del vértice u tiene longitud cero pues no contiene aristas y va de u a u . Además si $u \neq v$ entonces están conectados por al menos una arista por lo que

$$d(u, v) > 0.$$

- (ii) $d(u, v) = d(v, u)$,
sea \mathcal{P} una uv -geodésica, entonces \mathcal{P}^{-1} es una vu -geodésica, pues de lo contrario existiría

una vu -trayectoria, \mathcal{P}' , tal que $\ell(\mathcal{P}') < \ell(\mathcal{P})$, lo cual contradice la elección de \mathcal{P} . Por lo tanto,

$$d(u, v) = \ell(\mathcal{P}) = \ell(\mathcal{P}') = d(v, u).$$

- (iii) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para toda $u, v, w \in V(G)$, sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 una uv -geodésica y una vw -geodésica, respectivamente. Entonces $\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$ es un uw -camino que por el teorema 1.5 contiene una uw -trayectoria \mathcal{P} . Por lo tanto,

$$d(u, w) \leq \ell(\mathcal{P}) \leq \ell(\mathcal{P}_1) + \ell(\mathcal{P}_2) = d(u, v) + d(v, w).$$

Por (i), (ii) y (iii) queda demostrado el teorema. \square

Un espacio métrico es un par (X, d) tal que d es una métrica en X . El espacio métrico $(G, d(u, v))$ es un espacio discreto, pues $V(G)$ es un conjunto finito y con imagen en los números naturales pues $d(u, v) \geq 0$ y $\ell(\mathcal{P})$ es siempre un entero.

Observación Por convención, si no existe una uv -trayectoria en G , i. e. G es inconexa y decimos que $d_G(u, v) = \infty$ ⁸.

1.4 TIPOS DE GRÁFICAS

La *trayectoria* de orden n , P_n , es la gráfica que consta solamente de los vértices y aristas de una trayectoria de longitud $n - 1$. A la gráfica que es, en sí misma, un ciclo de orden $n \geq 3$ la denotamos por C_n y tiene tamaño n .

El *complemento* \overline{G} de una gráfica G es la gráfica que tiene el mismo conjunto de vértices $V(\overline{G}) = V(G)$ y en la que dos vértices son adyacentes en \overline{G} si y solo si no son adyacentes en G . Si el tamaño de G es m , entonces $E(\overline{G}) = \binom{n}{2} - m$.

Un caso especial son las gráficas *autocomplementarias*, para las cuales \overline{G} y G son isomorfas.

Teorema 1.12 Si G es una gráfica autocomplementaria de orden n , entonces $n \equiv 0 \pmod{4}$ o $n \equiv 1 \pmod{4}$.

⁸ Estrictamente, no podemos decir que la distancia entre vértices junto con las gráficas inconexas forman un espacio métrico, pues $\infty \notin \mathbb{R}_+$. Si distinguimos una métrica infinita de una finita, como una función con contradominio en $\mathbb{R}_+ \cup \infty$, entonces podemos incluir a las gráficas inconexas y ver a $(G, d(u, v))$ como un espacio métrico donde las componentes conexas de la gráfica son subespacios finitos separados uno de otro por distancias infinitas.

Demostración Sea G una gráfica autocomplementaria, *i. e.* $G \simeq \overline{G}$. Notemos que si $|V(G)| = 1$ el resultado es evidente y además no existen gráficas autocomplementarias de orden 2. Así, podemos suponer que $|V(G)| \geq 3$. Por ser isomorfas, G y \overline{G} tienen el mismo orden n y tamaño m . Además, $|E(G)| + |E(\overline{G})| = \binom{n}{2}$, el máximo número de aristas que puede tener una gráfica simple con n vértices. Así, $m = \frac{n(n-1)}{4}$. Es claro que el número de aristas debe ser un entero por lo que $n(n-1)$ debe ser divisible entre 4 y al ser n y $n-1$ consecutivos, son primos relativos. Por lo tanto tenemos que $n \equiv 0 \pmod{4}$ o $n \equiv 1 \pmod{4}$. \square

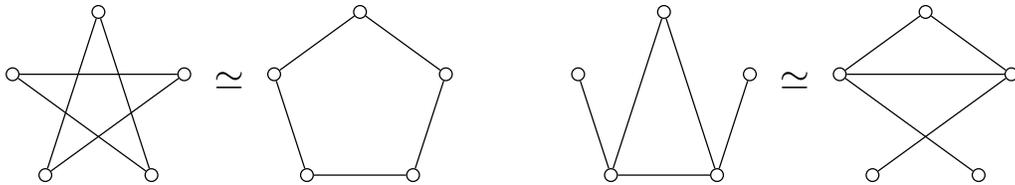


Figura 11: Gráficas autocomplementarias con $n = 5$

La *gráfica de líneas* de G , $L(G)$, es la gráfica cuyos vértices corresponden a las aristas de G . Dos vértices son adyacentes en $L(G)$ si y solo si las aristas correspondientes en G inciden en el mismo vértice. Esta gráfica representa las adyacencias entre las aristas de la gráfica original G .

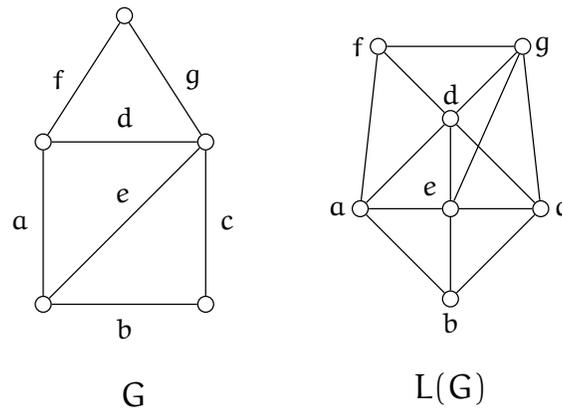


Figura 12: La gráfica G y su gráfica de líneas $L(G)$

Es importante mencionar que no toda gráfica es gráfica de líneas de alguna gráfica.

La gráfica H de la figura 13, es ejemplo de una gráfica que no es gráfica de líneas de ninguna gráfica, pues como vemos en H' , la arista v_3 incide en v_4 pero no incide en v_2 ni en v_1 , como v_4 solo tiene dos extremos, esta configuración no es posible.

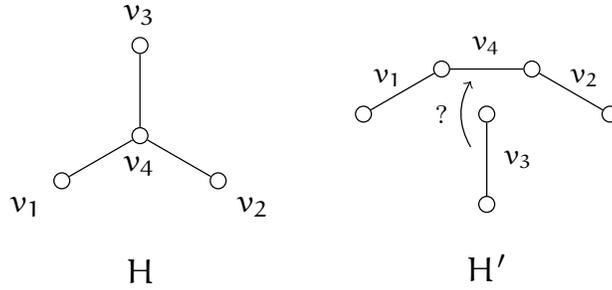


Figura 13: La gráfica H no es gráfica de líneas de ninguna gráfica

Una gráfica es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Se dice que G es k-regular si todos sus vértices tienen grado k.

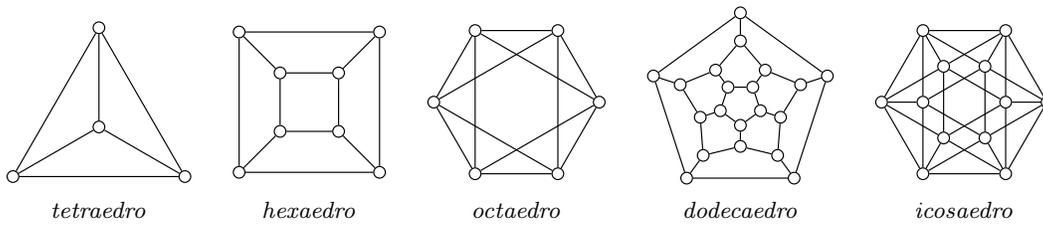


Figura 14: Los cinco sólidos platónicos son gráficas regulares

Una gráfica *completa* es tal que todos sus vértices son adyacentes entre sí. Usualmente, se denota K_n a la gráfica completa de orden n. Toda gráfica completa es $(n - 1)$ -regular y tiene tamaño $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

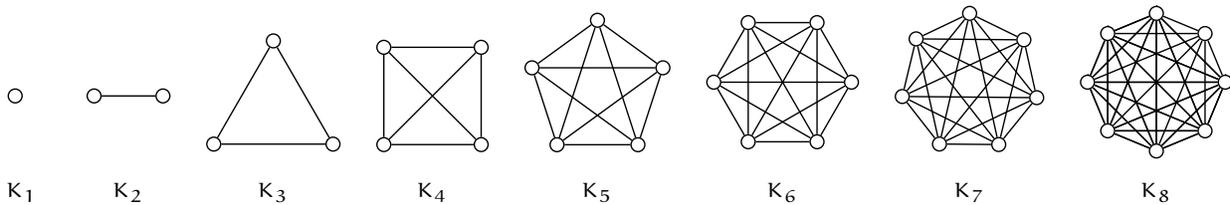


Figura 15: Gráficas completas de orden $n \leq 8$

La gráfica trivial $\overline{K_n}$ es la gráfica de orden n y tamaño $m = 0$, i. e. $E(G) = \emptyset$.

Una gráfica *bipartita* es aquella para la que existe una partición de sus vértices en dos conjuntos, X y Y tal que ningún par de vértices en el mismo conjunto sean adyacentes, *i. e.* si $xy \in E(G)$ con G bipartita, $x \in X$ y $y \in Y$. Si en una gráfica todo par de vértices en distintas partes son adyacentes, decimos que es una gráfica *bipartita completa* y la denotamos con $K_{s,t}$; donde $s = |X|$ y $t = |Y|$.

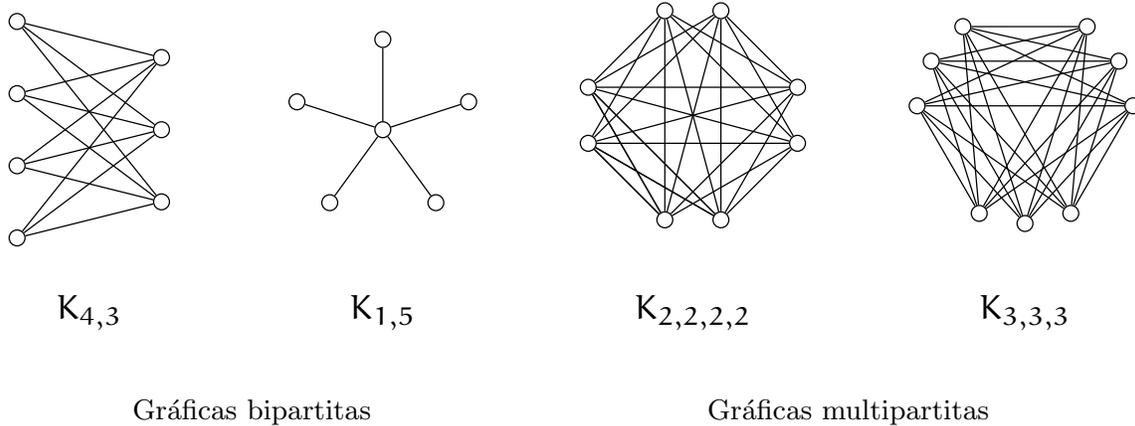


Figura 16: Gráficas k -partitas completas

En general, una gráfica k -partita es tal que existe una partición de sus vértices en k conjuntos tal que los vértices en un mismo conjunto de la partición no son adyacentes. Si todo vértice de G es adyacente a todos los vértices de los otros conjuntos de la partición, decimos que la gráfica es k -partita completa y la denotamos por K_{r_1, r_2, \dots, r_k} , donde r_i es el orden de cada conjunto de la partición.

Teorema 1.13 (Caracterización de gráficas bipartitas) *G es una gráfica bipartita si y solo si no tiene ciclos de longitud impar.*

Demostración Primero supongamos que G es una gráfica bipartita, entonces existe una bipartición de sus vértices $V(G) = \{X, Y\}$ tal que para toda $xy \in E(G)$, $x \in X$ y $y \in Y$. Sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$, $k \geq 3$, un k -ciclo en G y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v_1 \in X$. Como G es bipartita si $v_1 \in X$, entonces $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$ y así sucesivamente. En general, podemos decir que $v_i \in X$, siempre que i sea un entero impar, con $1 \leq i \leq k$ y $v_j \in Y$, cuando j es un entero par, $2 \leq j \leq k$. Como $v_1 \in X$, entonces $v_k \in Y$ y k es un número par, por lo tanto, $\ell(\mathcal{C})$ es par. Podemos concluir que si G es bipartita entonces no contiene ciclos de longitud impar. Así, si G contiene ciclos, estos son de longitud par.

Para el regreso, sea G una gráfica no trivial que no contiene ciclos de longitud impar. Si G es vacía entonces es bipartita. Si G no es vacía, supongamos que es conexa, pues si no lo fuera, basta con demostrar el resultado para cada componente no trivial de G . Sea $u \in V(G)$ un vértice

cualquiera. Construimos una bipartición de $V(G) = \{X, Y\}$, de tal manera que $v \in X$ si $d(u, v)$ es un número par y $w \in Y$ si $d(u, w)$ es impar. Así, tenemos que

$$X = \{v \in V(G) \mid d(u, v) = 2k \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}, \text{ y}$$

$$Y = \{w \in V(G) \mid d(u, w) = 2k + 1 \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Veamos que $\{X, Y\}$ es efectivamente, una bipartición de $V(G)$. Como $d(u, u) = 0$, entonces $u \in X$, además como G es conexa no trivial, entonces $N(u) \subseteq Y$ y $N(u) \neq \emptyset$. Así, $X \neq \emptyset \neq Y$ y como para toda $u \in V(G)$, $d(u, v)$ es par o impar, entonces $X \cap Y = \emptyset$ y $X \cup Y = V(G)$. Falta ver que para toda arista $uv \in E(G)$, $u \in X$ y $v \in Y$. Supongamos que existe $x_1 x_2 \in E(G)$, tal que $x_1, x_2 \in X$, entonces $d(u, x_1)$ y $d(u, x_2)$ son ambas pares. Sean \mathcal{P}_1 una $u x_1$ -trayectoria y \mathcal{P}_2 una $u x_2$ -trayectoria, tales que $\ell(\mathcal{P}_1) = d(u, x_1)$ y $\ell(\mathcal{P}_2) = d(u, x_2)$. Entonces $\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$ junto con la arista $x_1 x_2$ es un camino cerrado de longitud impar en G , y por el teorema 1.6 contiene un ciclo de longitud impar, lo cual es una contradicción. Análogamente, si $x_1, x_2 \in Y$, $d(u, x_1)$, $d(u, x_2)$ son ambas impar y $\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$ junto con la arista $x_1 x_2$ es un camino cerrado de longitud impar en G . Por lo tanto, fue falso suponer que existe $x_1 x_2 \in E(G)$ con x_1, x_2 en el mismo conjunto de la partición. Así, tenemos que X, Y es una bipartición de $V(G)$ tal que para toda $xy \in E(G)$, $x \in X$ y $y \in Y$, y por lo tanto G es una gráfica bipartita. \square

1.4.1 Operaciones entre gráficas

También se pueden realizar operaciones entre gráficas. A continuación vamos a definir algunas.

· $G_1 \cup G_2$

La *unión* de dos gráficas ajenas en vértices G_1 y G_2 , es la gráfica $G_1 \cup G_2$, con conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2)$ y conjunto de aristas $E(G_1) \cup E(G_2)$.

De manera más general, si G_1, \dots, G_k son gráficas ajenas dos a dos, podemos definir la unión $\bigcup_{i=1}^k G_i$, como la gráfica con conjunto de vértices $\bigcup_{i=1}^k V(G_i)$ y conjunto de aristas $\bigcup_{i=1}^k E(G_i)$. Así cualquier gráfica se puede ver como la unión de sus componentes conexas.

· $G_1 + G_2$

La *suma* de dos gráficas ajenas $G_1 + G_2$, está definida como la gráfica que tiene como conjunto de vértices a $V(G_1) \cup V(G_2)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$.

Al sumar la gráfica trivial K_1 con un ciclo de longitud n , C_n se obtiene un tipo especial de gráfica conocido como rueda W_n . Otro tipo de gráficas que se pueden obtener a partir de la suma de dos gráficas ajenas, son las bipartitas completas, pues en general $\overline{K}_s + \overline{K}_t = K_{s,t}$

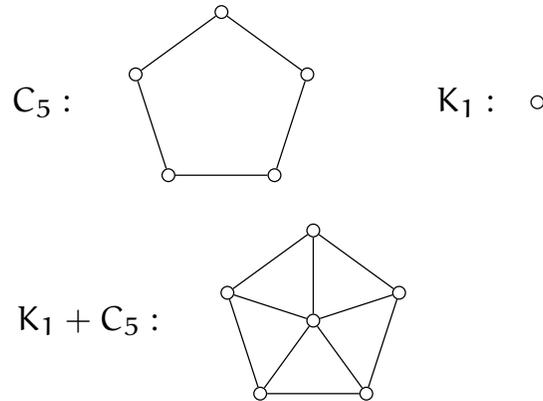


Figura 17: $K_1 + C_5 = W_5$

La suma y la unión son operaciones conmutativas, *i. e.* $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$ y $G_1 + G_2 = G_2 + G_1$, esto es consecuencia directa de la conmutatividad de la unión.

· $G_1 \square G_2$

El *producto cartesiano* de dos gráficas ajenas G_1 y G_2 es la gráfica $G_1 \square G_2$ con conjunto de vértices $V(G_1) \times V(G_2)$, definido como todos los pares ordenados que se pueden formar a partir de dos conjuntos: $\{(x, y) \mid x \in V(G_1) \text{ y } y \in V(G_2)\}$. Cuyo conjunto de aristas $E(G_1 \square G_2)$, está formado por el conjunto $\{(x, y)(w, z) \mid xw \in E(G_1) \text{ y } y = z \vee yz \in E(G_2) \text{ y } x = w\}$.

La notación $G_1 \times G_2$ también se utiliza para identificar esta operación.

El producto cartesiano de dos trayectorias $T_n \square T_m$ es la retícula $m \times n$.

· $G_1 \dot{\times} G_2$

El *producto fuerte* de dos gráficas ajenas G_1 y G_2 , también conocido como *producto directo*, *producto cardinal* o *producto de Kronecker*, entre otros, e introducido por Russell y Whitehead en 'Principia Mathematica'[2], tiene como resultado la gráfica $G_1 \dot{\times} G_2$ con conjunto de vértices $V(G_1) \times V(G_2)$ y conjunto de aristas $E(G_1 \dot{\times} G_2) = \{(x, y)(z, w) \mid xz \in E(G_1) \text{ y } yw \in E(G_2)\}$. Intuitivamente, dos vértices son adyacentes en la gráfica resultante siempre que las primeras y las segundas entradas de cada vértice sean adyacentes en sus respectivas gráficas.

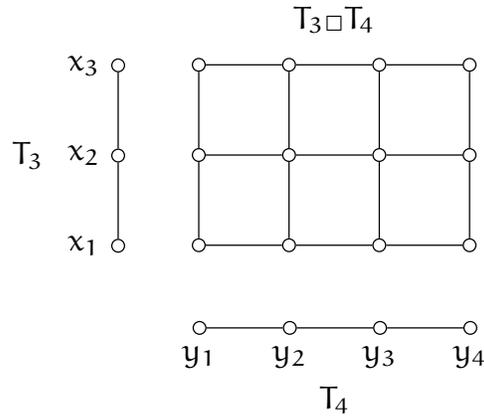


Figura 18: La retícula $T_3 \square T_4$

· $G[H]$

Dadas dos gráficas ajenas G y H , la *composición* de G con H , es la gráfica $G[H]$, con conjunto de vértices $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ y dos vértices son adyacentes en $G[H]$ si la primera entrada de cada vértice es adyacente en G o la segunda entrada es adyacente en H y la primera entrada es la misma, esto es, $E(G[H]) = \{(x,y)(z,w) \mid xz \in E(G) \text{ o } yw \in E(H) \text{ y } x = y\}$. Visto de otra manera, lo que estamos haciendo es formar una gráfica con copias H_v de H , por cada vértice $v \in G$, tales que los vértices de H_v serán adyacentes a todos los vértices de H_u si $vu \in E(G)$.

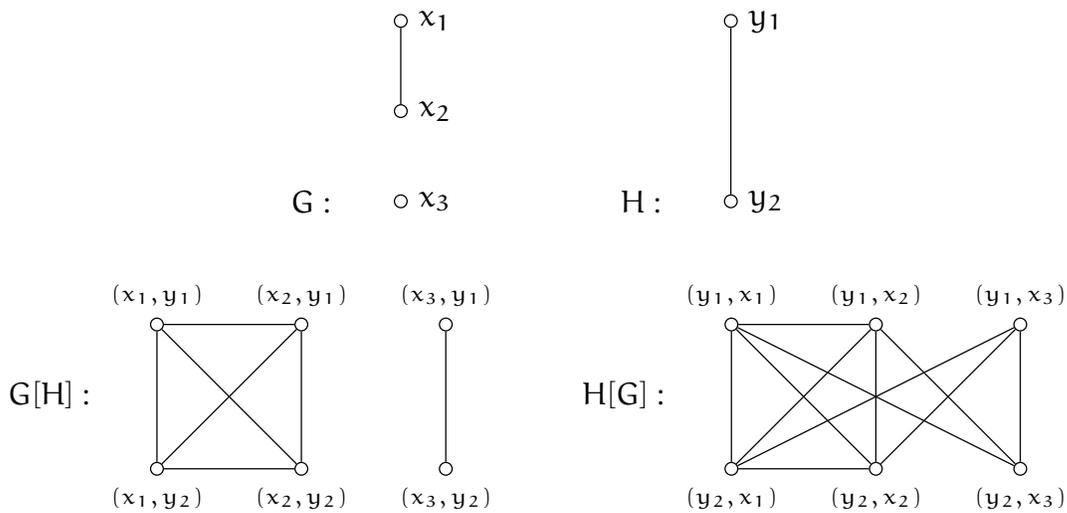


Figura 19: Ejemplo: $G[H]$ y $H[G]$

Como se puede ver en la figura 19, la composición no es conmutativa pues $G[H] \neq H[G]$.

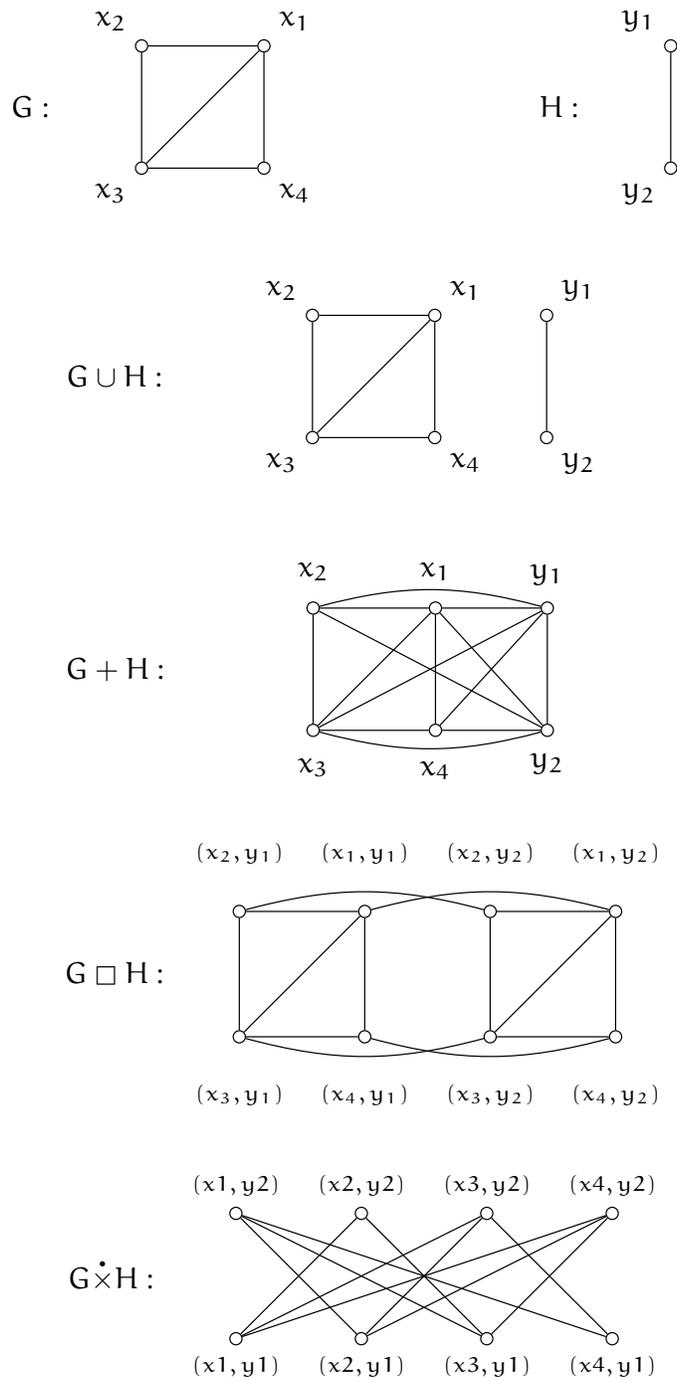


Figura 20: Ejemplos de operaciones entre gráficas

1.5 ÁRBOLES

1.5.1 Vértices de corte, puentes y bloques

Definición Un vértice v de una gráfica conexa G es un *vértice de corte*, si $G - v$ es inconexa. En general, si G es una gráfica cualquiera, v es un vértice de corte si $c(G - v) > c(G)$.

Usando esta definición, podemos enunciar el inciso (iii) del teorema 1.9 de la siguiente manera:

Teorema 1.14 *Toda gráfica conexa, no trivial contiene al menos 2 vértices que no son de corte.*

Por ejemplo, una trayectoria \mathcal{P} contiene exactamente dos vértices que no son de corte.

Teorema 1.15 (Caracterización de los vértices de corte) *Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$, entonces v es de corte si y solo si existen u, w diferentes de v tales que v pertenece a toda uw -trayectoria en G .*

Demostración Supongamos sin pérdida de generalidad que G es una gráfica conexa, de orden $n \geq 3$ y sea v un vértice de corte de G . Por definición de vértice de corte, $G - v$ es inconexa, entonces tiene al menos dos componentes conexas. Sean $u, w \in G - v$ dos vértices tales que pertencen a distintas componentes de $G - v$, *i. e.* no existe una uw -trayectoria en $G - v$. Como G es conexa, existe al menos una uw -trayectoria en G , esto implica que v pertenece a toda uw -trayectoria en G .

Ahora supongamos que G es conexa con $u, w \neq v$ tal que v pertenece a toda uw -trayectoria en G , falta demostrar que v es un vértice de corte de G . Sea \mathcal{P} una uw -trayectoria cualquiera en G , por hipótesis $v \in V(\mathcal{P})$. Esto implica que $G - v$ es inconexa, si no lo fuera entonces existe una uw -trayectoria en G que no pasa por v , lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, v es un vértice de corte de G . \square

No toda gráfica tiene, necesariamente, algún vértice de corte, así podemos definir:

Definición Una gráfica no trivial que no contiene vértices de corte se dice es una gráfica *no-separable*.

Algunas familias de gráficas que no contienen vértices de corte son los ciclos \mathcal{C}_n , $n \geq 3$ y las gráficas completas no triviales K_n , $n \neq 1$. Esto es inmediato del teorema 1.15, pues en el caso de los ciclos, si tomamos cualesquiera dos vértices siempre existen dos trayectorias internamente

ajenas entre ellos. En el caso de las completas, como cualesquiera dos vértices son adyacentes, la arista que los une, es una trayectoria que no contiene ningún otro vértice.

Podemos caracterizar a las gráficas no-separables de la siguiente manera.

Teorema 1.16 (Caracterización de las gráficas no-separables) *Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$. G es no-separable, si y solo si todo par de vértices de G están en un ciclo común.*

Demostración Procederemos por inducción sobre $d(u, v)$. Sea G una gráfica no-separable con $n \geq 3$ y u, v dos vértices cualesquiera en G . Si $d(u, v) = 1$, entonces $uv \in E(G)$ y como G es no-separable, no contiene vértices de corte, por lo que $G - u$ y $G - v$ son conexas. Como el orden de G es al menos 3, sabemos que existe $w \in V(G) - \{u, v\}$. Sean \mathcal{P}_1 una wv -trayectoria en $G - u$ y \mathcal{P}_2 una wu -trayectoria en $G - v$. Entonces, el wu -camino $\mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$ contiene una wu -trayectoria \mathcal{P} que no pasa por la arista uv , entonces $\mathcal{P} \cdot (u, v)$ es un ciclo donde están u y v .

Ahora, supongamos que cualquier par de vértices a distancia j , con $1 \leq j < k$, están en un ciclo común y sean u, v tales que $d(u, v) = k$. Sea $\mathcal{P} = (u = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$ una uv -geodésica y sea $w = v_{k-1}$, el vértice inmediato anterior a v en \mathcal{P} . Como $d(u, w) < k$, por hipótesis de inducción, u y w están en un ciclo común \mathcal{C} . Además, como G es no-separable, en $G - w$ existe \mathcal{P}' una uv -trayectoria que no pasa por w . Entonces tenemos dos casos, si \mathcal{P}' comparte exactamente el vértice u , con el ciclo \mathcal{C} (figura 21, caso 1), entonces u, v están en el ciclo común $(u, \mathcal{C}, w) \cdot (w, v) \cdot (v, \mathcal{P}'^{-1}, u)$. Si \mathcal{P}' tiene al menos un vértice interno en común con \mathcal{C} (figura 21, caso 2), sea x el último vértice de \mathcal{P}' que está en \mathcal{C} y sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 , las uw -trayectorias internamente ajenas tales que $\mathcal{C} = \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que x está en \mathcal{P}_1 , así u, v están en el ciclo común formado por $(u, \mathcal{P}_2, w) \cdot (w, v) \cdot (v, \mathcal{P}', x) \cdot (x, \mathcal{P}_1^{-1}, u)$. Por lo tanto, si G es no-separable, cualesquiera par de vértices están en un ciclo común.

Para el regreso, notemos que si todo par de vértices están en un ciclo común entonces G es conexa, además por teorema 1.15 no tiene vértices de corte, ya que entre cualesquiera dos vértices siempre hay dos trayectorias internamente ajenas. Por lo tanto, G es no-separable. \square

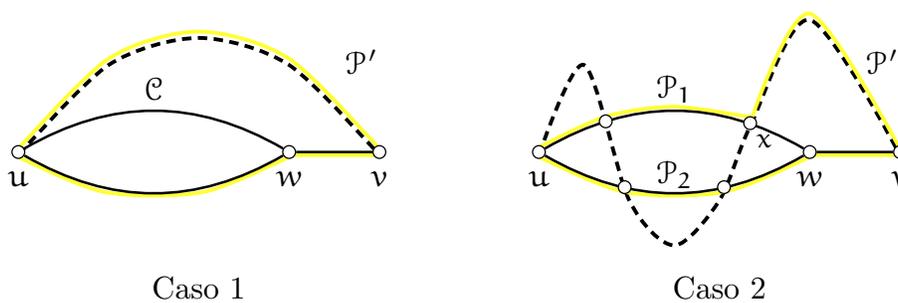


Figura 21: Ciclo común de la gráfica G en que están los vértices u y v

Sea G una gráfica conexa y no trivial. Un *bloque* B es una subgráfica de G no-separable, máxima por contención en los vértices y en las aristas. Una gráfica no-separable tiene solo un bloque, la misma gráfica, por lo que a veces denominamos a las gráficas no-separables como bloques. A un bloque de G , que contiene exactamente un vértice de corte le llamamos *bloque terminal*.

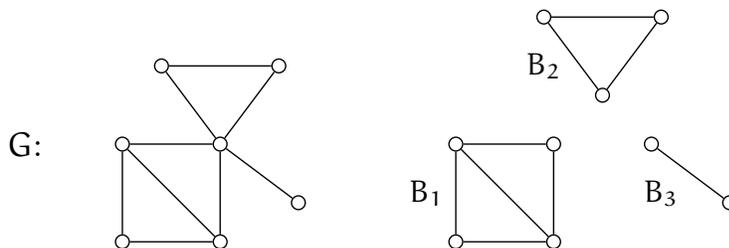


Figura 22: La gráfica G y sus bloques

De la misma manera que ocurre con los vértices de corte, hay aristas que al quitarlas «desconectan una gráfica».

Definición Una arista e , de una gráfica conexa G es un *puente* o *arista de corte*, si $G - e$ es inconexa. En general, si G es una gráfica cualquiera, e es un puente si $c(G - e) > c(G)$.

Observación Si e es un puente en una gráfica conexa G , entonces $G - e$ tiene exactamente dos componentes conexas, pues toda arista tiene exactamente dos extremos.

Teorema 1.17 (Caracterización de las aristas de corte) Sea G una gráfica conexa, entonces una arista $e \in E(G)$ es de corte si y solo si e no pertenece a ningún ciclo de G .

Demostración Sea G conexa y sea $e = uv \in E(G)$ un puente de G . Como e es de corte, sus extremos u, v están en distintas componentes de $G - e$. Esto implica que en $G - e$ no existe una uv -trayectoria, y en G , la arista e es la única uv -trayectoria, por lo que e no pertenece a ningún ciclo de G .

Ahora, supongamos que $e = uv$ no es un puente de G . Esto implica que existe \mathcal{P} una uv -trayectoria en $G - e$. \mathcal{P} junto con la arista $uv = e$ forman un ciclo en G que pasa por e . Por lo tanto, si e no pertenece a ningún ciclo de G entonces es una arista de corte. \square

El siguiente teorema nos permite establecer una relación entre los vértices de corte y puentes que tiene una gráfica.

Teorema 1.18 Si G es una gráfica conexa, de orden $n \geq 3$ y tiene aristas de corte, entonces también contiene vértices de corte.

Demostración Sea e un puente en una gráfica conexa G con extremos u y v . Como el orden de G es $n \geq 3$, alguno de los extremos de e tiene un vecino distinto al otro extremo. Sin pérdida de

generalidad, sea u , el extremo de e tal que $w \neq v$ está en la vecindad de u . Entonces $G - u$ es una gráfica inconexa, pues al eliminar u , eliminamos todas sus aristas incidentes, en particular e . Por ser e un puente, $G - e$ es inconexa, entonces no existe una wv -trayectoria en $G - u$. Por lo tanto u es un vértice de corte en G . \square

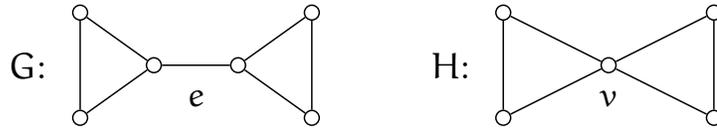


Figura 23: En G , e es una arista de corte y en H , v es un vértice de corte

La gráfica H de la figura 23 es un ejemplo de que el regreso del teorema 1.18 no necesariamente se cumple.

Observación K_2 es la única gráfica conexa que no contiene vértices de corte, pero sí contiene un puente.

1.5.2 Árboles y bosques

Definición Un *árbol* es una gráfica conexa y acíclica, i. e. ninguno de los vértices de la gráfica están en un ciclo. En general, si G es acíclica, decimos que G es un *bosque*.

Algunos tipos de gráficas que son árboles, son por ejemplo, las trayectorias P_n y las estrellas $K_{1,n-1}$. A los vértices terminales de los árboles les llamamos *hojas*, así, $K_{1,n-1}$ tiene $n - 1$ hojas y P_n tiene 2.

Teorema 1.19 *Todo árbol no trivial, contiene al menos 2 hojas.*

Demostración Sea $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ una trayectoria de longitud máxima en un árbol T , no trivial. Como T es no trivial, $\ell(T) \geq 1$ y $v_0 \neq v_k$. Veamos que v_0 y v_k son hojas de T . Como \mathcal{P} es máxima, la vecindad de v debe estar contenida en $V(\mathcal{P})$. Sabemos que v_1 está en la vecindad de v_0 , además v_1 es el único vértice en $N(v_0)$ pues de lo contrario $x = v_i \in V(\mathcal{P})$ formaría un ciclo $\mathcal{C} = (v_0, \mathcal{P}, v_i) \cdot (v_i, v_0)$ en T lo cual es una contradicción, pues T es un árbol. Por lo tanto v_0 es una hoja de T . Análogamente se prueba que v_k también es una hoja de T . \square

Teorema 1.20 *Si v es una hoja de un árbol T , entonces $T - v$ es un árbol.*

Demostración Sea v una hoja en un árbol T , por definición, $d(v) = 1$. Como T es acíclica, cualquier subgráfica de T es, a su vez, acíclica, en particular $T - v$. Además $T - v$ es conexa, pues si suponemos que no lo es, entonces v es un vértice de corte, y $T - v$ tiene al menos dos componentes conexas T_1 y T_2 , esto implica que existen $u \in T_1$, $w \in T_2$ tal que $u, w \in N(v)$ lo cual es una contradicción pues $d(v) = 1$. Por lo tanto, $T - v$ es una gráfica conexa y acíclica. \square

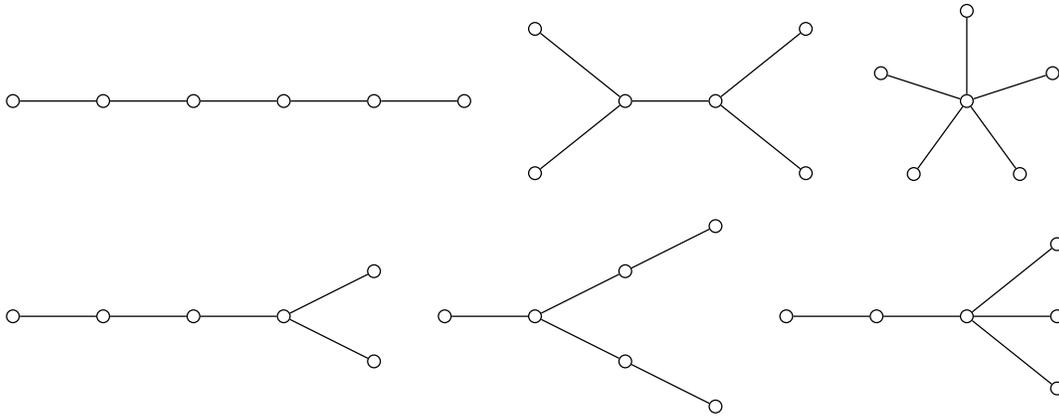


Figura 24: Todos los árboles no isomorfos de orden 6

Teorema 1.21 Si T es un árbol de orden n y tamaño m , entonces $m = n - 1$.

Demostración Procederemos por inducción sobre el orden de T . T es un árbol, entonces sabemos que es una gráfica acíclica y conexa. Si $n = 1$, entonces $T \simeq K_1$ y $m = 0$, por lo tanto $m = n - 1$. Ahora, supongamos que para $n > 1$ se cumple que $m = n - 1$ y sea T un árbol de orden $n + 1$. Por el teorema 1.19, sabemos que T tiene al menos dos hojas. Sea v , uno de estos vértices en T , entonces $d(v) = 1$. Por hipótesis de inducción, $T - v$ tiene tamaño $n - 1$, pues su orden es n . Como $d(v) = 1$, entonces el tamaño de T es $m = |E(T - v)| + d(v) = (n - 1) + 1 = n$. Por lo tanto si T es un árbol de orden n entonces tiene tamaño $n - 1$. \square

Corolario 1.22 Un bosque de orden n con k componentes conexas, tiene tamaño $n - k$.

Demostración Sea G un bosque de orden n con k componentes conexas. Si $k = 1$, entonces G es un árbol, pues G es conexa y acíclica, y por el teorema 1.21, $m = n - 1$. Si $k > 1$, sean G_1, G_2, \dots, G_k las componentes conexas de G . Como las componentes son una partición de los vértices de G , $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V(G_i)$ y si n_i es el orden de cada componente, como cada componente es una gráfica conexa y acíclica, el tamaño de G es $m = \sum_{i=1}^k n_i - 1 = n - k$. Por lo tanto un bosque de orden n con k componentes conexas tiene $n - k$ aristas. \square

Teorema 1.23 (Caracterización de los Árboles) Si T es una gráfica de orden n , son equivalentes:

- (i) T es un árbol,
- (ii) T es acíclica y tiene tamaño $m = n - 1$,
- (iii) T es conexa y tiene tamaño $m = n - 1$,
- (iv) T es conexa y todas sus aristas son puentes,

(v) cualesquiera dos vértices de T están conectados por una única trayectoria y

(vi) T es acíclica y $T + e$ tiene exactamente un ciclo, para $e = uv$ con $u, v \in V(T)$ tal que $uv \notin E(T)$.

Demostración

(i) \Rightarrow (ii) Sea T un árbol, *i. e.* T es una gráfica conexa y acíclica, además por teorema 1.21, si T es un árbol de orden n , entonces tiene tamaño $m = n - 1$, con lo cual queda demostrado el resultado.

(ii) \Rightarrow (iii) Sea T acíclica de orden n y tamaño $m = n - 1$, veamos que T es conexa. Sean T_1, T_2, \dots, T_k las componentes conexas de T , por el corolario 1.22 sabemos que T tiene tamaño $n - k$, pero por hipótesis, T tiene tamaño $n - 1$, lo cual implica que $k = 1$. Así, T consta de una única componente conexa, es decir, es una gráfica conexa. Por lo tanto, si T es acíclica y tiene tamaño $m = n - 1$, entonces es conexa.

(iii) \Rightarrow (iv) Sea T conexa de orden n y tamaño $m = n - 1$, falta ver que todas sus aristas son puentes. Supongamos, por el contrario que T es conexa pero $c(T - e) = c(T)$ para alguna $e \in E(T)$. Entonces la gráfica $T - e$ es una gráfica conexa con orden n y tamaño $n - 2$, lo cual es una contradicción, pues por el teorema 1.10, si T es conexa, su tamaño debe ser $m \geq n - 1$. Entonces es falso suponer que $T - e$ es conexa, entonces toda arista $e \in E(T)$ es un puente.

(iv) \Rightarrow (v) Sea T conexa con $c(T - e) > c(T)$ para toda arista $e \in E(T)$, veamos que existe una única uv -trayectoria entre cualesquiera $u, v \in V(T)$. Supongamos, por el contrario, que existen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dos uv -trayectorias diferentes en T . Sea x el primer vértice de \mathcal{P}_1 , después de u , que aparece en \mathcal{P}_2 (puede ser que $x = v$). Entonces $\mathcal{C} = (u, \mathcal{P}_1, x) \cdot (x, \mathcal{P}_2^{-1}, u)$ es un ciclo en T y para toda $e \in E(\mathcal{C})$, $T - e$ es conexa. Por el teorema 1.17, ninguna de las aristas de \mathcal{C} es un puente, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, si T es conexa y todas sus aristas son puentes entonces cualesquiera dos vértices de T están conectados por una única trayectoria.

(v) \Rightarrow (vi) Sea T una gráfica, tal que existe una única trayectoria entre cualesquiera $u, v \in V(T)$ y veamos que entonces T es acíclica y $T + e$ tiene exactamente un ciclo. T es acíclica, pues de existir $\mathcal{C} = (u = v_0, v_1, \dots, v_k = u)$ en T , existirían al menos dos uv_i -trayectorias en T : $\mathcal{P}_1 = (u, \mathcal{C}, v_i)$ y $\mathcal{P}_2 = (u, \mathcal{C}^{-1}, v_i)$, con $i \in \{1, \dots, k - 1\}$. Como T es acíclica, al agregar cualquier arista $e = xy$ a T , se obtiene un ciclo, ya que por hipótesis ya existía una trayectoria entre ellos. Ahora veamos que este ciclo es único, para lo cual supongamos por el contrario, que no lo es, *i. e.* $T + e$ contiene dos o más ciclos. Sin pérdida de generalidad, sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 los ciclos en $T + e$, como T es acíclica, $e \in E(\mathcal{C}_1)$ y $e \in E(\mathcal{C}_2)$, además en T existen dos trayectorias distintas por los dos ciclos, entre los

extremos de e , sin pasar por e , lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, si en T existe una única trayectoria entre cualquier par de vértices, entonces T es acíclica y $T + e$ tiene exactamente un ciclo.

(vi) \Rightarrow (i) Sea T una gráfica acíclica, tal que $T + e$ tiene exactamente un ciclo, por demostrar que T es un árbol. Por hipótesis, T es acíclica, falta ver que es conexa. Supongamos que T es inconexa, y sean $x, y \in V(T)$ dos vértices que pertenecen a distintas componentes de T , esto implica que $T + xy$ tiene un ciclo que contiene a xy , entonces en T hay una xy -trayectoria, lo cual es una contradicción, por lo que fue falso suponer que T es inconexa. Entonces T es conexa y acíclica, por lo tanto T es un árbol. \square

De la caracterización de los árboles, es clara la particularidad de esta familia de gráficas, pues por un lado al quitar cualquier arista la gráfica se desconecta, y por otro, al agregar una arista cualquiera, aparece exactamente un ciclo. En este sentido podemos decir que un árbol es una gráfica conexa de tamaño mínimo y al mismo tiempo una gráfica acíclica de tamaño máximo, respecto de su orden. De aquí que digamos que un árbol es una gráfica crítica.

Definición Un *árbol generador* de una gráfica G es una subgráfica generadora de G que es un árbol.

Usando esta definición podemos obtener otro resultado respecto a las gráficas conexas:

Teorema 1.24 *Toda gráfica conexa tiene un árbol generador.*

Demostración Procederemos por inducción sobre el tamaño de la gráfica. Sea G una gráfica conexa de orden n y tamaño m . Como G es conexa, el tamaño de G está acotado de manera que $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$. Si $m = n - 1$ entonces por el teorema 1.21, G es un árbol, por lo tanto G es ella misma un árbol generador. Ahora supongamos que si el tamaño de G es k con $n - 1 \leq k < \binom{n}{2}$, entonces G tiene un árbol generador. Y sea G una gráfica conexa de orden n y tamaño $k + 1$, con $n - 1 < k + 1 \leq \binom{n}{2}$. Como G es conexa y $k > n - 1$, podemos garantizar que existe $e \in E(G)$ tal que e no es puente. Así $G - e$ es una gráfica conexa que además tiene tamaño k por lo que, por hipótesis de inducción, contiene un árbol generador. Sea T el árbol generador de $G - e$, como $G - e$ es una subgráfica generadora de G , entonces T es a su vez subgráfica generadora de G . Así, T es árbol generador de G y por lo tanto toda gráfica conexa tiene un árbol generador. \square

INDEPENDENCIA Y COLORACIÓN

Podemos seleccionar subconjuntos de vértices o aristas de una gráfica, de manera que cumplan ciertas características. En este capítulo vamos a revisar distintos tipos de subconjuntos de vértices y aristas que están relacionados de distintas formas.

2.1 CONJUNTOS INDEPENDIENTES Y CUBIERTAS

Definición Un conjunto de vértices S es *independiente*¹ si no existe un par de vértices en S que sean adyacentes en G .

Por ejemplo, en una gráfica bipartita cada conjunto de la bipartición es independiente, pues por definición sus vértices son no adyacentes, dos a dos.

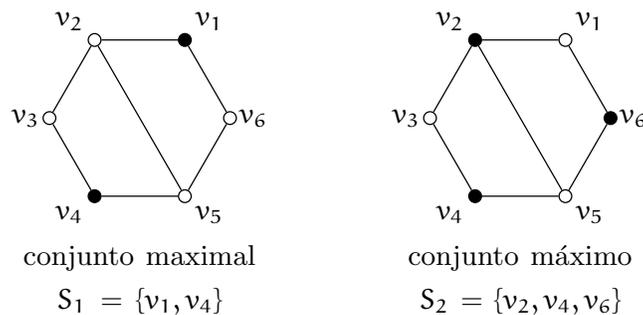


Figura 25: Conjuntos independientes máximos y maximales

Un conjunto independiente S es *máximo* si no existe otro conjunto independiente $S' \subseteq V(G)$ tal que $|S'| > |S|$. A la cardinalidad de un conjunto independiente máximo se le conoce como el *número de independencia* de G y lo denotamos por $\alpha(G)$.

¹ A los conjuntos independientes también se les conoce como conjuntos estables.

Por otro lado, S es un conjunto independiente *maximal* si no es subconjunto propio de cualquier otro conjunto independiente de G .

Observación *Todo conjunto independiente máximo es maximal pero no todo conjunto maximal es máximo.*

En la figura 25, S_1 es un conjunto independiente maximal en G , pues no existe otro conjunto independiente de mayor cardinalidad que contenga a v_1 y v_4 . Pero S_1 no es máximo, pues $|S_2| > |S_1|$. Por otro lado, S_2 es máximo pues no existe un conjunto independiente de cardinalidad mayor a $|S_2|$, así $\alpha(G) = 3$.

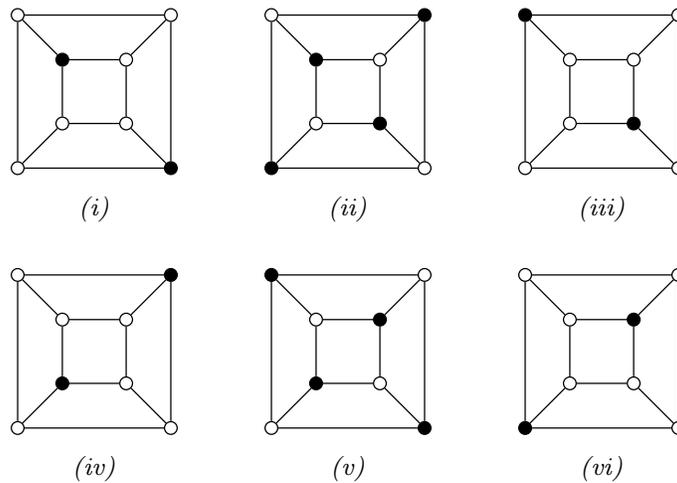


Figura 26: Conjuntos independientes maximales del cubo, (ii) y (iv) son máximos

Definición Un *apareamiento* es un conjunto de aristas de una gráfica G tal que son no adyacentes por pares, *i. e.* no existe un par de aristas en el conjunto que incidan en un mismo vértice. El *número de apareamiento* de una gráfica es la cardinalidad del apareamiento máximo y se denota por $\alpha'(G)$.

Esta definición es equivalente a la definición de un conjunto independiente pero considerando aristas en lugar de vértices, por esta razón a los apareamientos también se les conoce como *conjuntos independientes por aristas*.

Así, si $M = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ es un apareamiento en G donde $e_i = u_i v_i$ para $1 \leq i \leq k$, decimos que M «aparea» los vértices u_1, \dots, u_k con los vértices v_1, \dots, v_k y en particular, u_i está apareado con v_i por M .

Si M es un apareamiento con la propiedad de que todo vértice de G es incidente con alguna arista de M , entonces decimos que M es un *apareamiento perfecto*.

Observación Si una gráfica G de orden n tiene un apareamiento perfecto M , entonces el orden de G es par y la gráfica inducida por M , $G\langle M \rangle$ es una subgráfica 1-regular generadora de G .

Definición Una *cubierta por vértices* es un conjunto de vértices de una gráfica G , tal que cada arista $e \in E(G)$ incide en al menos un vértice del conjunto. El número de cubierta por vértices de una gráfica es la cardinalidad de una cubierta por vértices mínima y se denota por $\beta(G)$.

Teorema 2.1 Un conjunto de vértices es una cubierta si y solo si su complemento es un conjunto independiente.

Demostración Sea S una cubierta por vértices de G , entonces toda $e \in E(G)$ tiene al menos un extremo en S . Sea $e = xy$ una arista cualquiera de G , si S es una cubierta de G , entonces tenemos dos casos, que ambos extremos de e estén en S o solo uno esté. Esto implica que en $V(G) \setminus S$ podemos tener a lo más un único extremo de e , por lo tanto $V(G) \setminus S$, el complemento de S en G es un conjunto independiente de vértices. Ahora sea S un conjunto independiente de G entonces si $e \in E(G)$, e tiene a lo más un extremo en S , *i. e.* toda arista de G tiene un extremo en S o ambos extremos en $V(G) \setminus S$. Por lo tanto, si S es un conjunto independiente de vértices, su complemento es una cubierta. \square

Definición Una *cubierta por aristas* es un conjunto de aristas de una gráfica G , tal que cada vértice $v \in V(G)$ incide en al menos una arista del conjunto. El número de cubierta por aristas de una gráfica es la cardinalidad de una cubierta por aristas mínima y se denota por $\beta'(G)$.

En resumen:

Cuadro 1: Conjuntos independientes máximos y cubiertas mínimas[3]

$\alpha(G)$: número de independencia por vértices	máximo número de vértices en G no adyacentes dos a dos
$\alpha'(G)$: número de independencia por aristas	máximo número de aristas en G no adyacentes dos a dos
$\beta(G)$: número de cubierta por vértices	número mínimo de vértices que cubren las aristas de G
$\beta'(G)$: número de cubierta por aristas	número mínimo de aristas que cubren los vértices de G

Los números de independencia y cubierta son, además, propiedades *invariantes* de las gráficas, pues se conservan bajo isomorfismos.

Un resultado que nos permite relacionar los números de independencia y de cubierta con el orden de una gráfica es el siguiente teorema.

Teorema 2.2 (Gallai, 1959) Si G es una gráfica de orden n sin vértices aislados, entonces:

$$\alpha(G) + \beta(G) = n \quad (\text{i})$$

$$\text{y}$$

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n. \quad (\text{ii})$$

Demostración

- (i) Sean S un conjunto independiente de vértices de G , tal que $|S| = \alpha(G)$ y S^* una cubierta por vértices de G tal que $|S^*| = \beta(G)$. Como S es máximo, por el teorema 2.1 el conjunto $V(G) \setminus S$ es una cubierta por vértices de G , tal que

$$|V(G) \setminus S| = n - \alpha(G).$$

Así, tenemos que $\beta(G) \leq n - \alpha(G)$, entonces $\beta(G) + \alpha(G) \leq n$.

Por otro lado, como S^* es mínima, por el teorema 2.1 el conjunto $V(G) \setminus S^*$ es un conjunto independiente de vértices de G , tal que

$$|V(G) \setminus S^*| = n - \beta(G).$$

Entonces, $\alpha(G) \geq n - \beta(G)$, y $\alpha(G) + \beta(G) \geq n$. Por lo tanto se cumple que $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

- (ii) Sea M un apareamiento máximo de las aristas de G , entonces $|M| = \alpha'(G)$, así M cubre $2\alpha'(G)$ vértices en G . Los vértices restantes se pueden cubrir con a lo mas $n - 2\alpha'(G)$ aristas que no están en M . Entonces,

$$\beta'(G) \leq \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G) = n - \alpha'(G).$$

Por lo que $\beta'(G) + \alpha'(G) \leq n$.

Por otro lado, sea \overline{M} una cubierta por aristas tal que $|\overline{M}| = \beta'(G)$. Como \overline{M} es mínima, las componentes conexas de $G \setminus \overline{M}$ son árboles (de lo contrario podríamos obtener una cubierta con menos elementos que \overline{M} al eliminar cualquier arista que esté en un ciclo). Sea M^* el apareamiento de G que se obtiene al elegir una arista de cada componente conexa de $G \setminus \overline{M}$ (si cada arista pertenece a una componente conexa diferente podemos asegurar que son no adyacentes). Entonces $\alpha'(G) \geq |M^*| = k$ y como $G \setminus \overline{M}$ es un bosque con k componentes conexas, entonces $\beta'(G) = |\overline{M}| = n - k$. Así, tenemos que:

$$\alpha'(G) + \beta'(G) \geq |M^*| + |\overline{M}| = k + (n - k) = n.$$

Esto es $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq n$ y como ya teníamos que $\beta'(G) + \alpha'(G) \leq n$, podemos concluir que si G tiene orden n y no tiene vértices aislados $\alpha'(G) + \beta'(G) = n$. \square

Corolario 2.3 Si G es una gráfica sin vértices aislados, entonces:

$$\beta(G) \geq \alpha'(G) \quad (i)$$

$$\begin{array}{c} y \\ \beta'(G) \geq \alpha(G). \end{array} \quad (ii)$$

Demostración Sean S una cubierta por vértices mínima y M un apareamiento máximo de G , i. e. $|S| = \beta(G)$ y $|M| = \alpha'(G)$. Como M es un apareamiento, sus aristas son independientes, y cualquier cubierta por vértices de la gráfica debe contener al menos uno de los extremos de cada arista. Así, tenemos que S contiene al menos un vértice por cada arista de M , por lo tanto $\beta(G) \geq \alpha'(G)$. Además, por el teorema 2.2:

$$n - \alpha(G) = \beta(G) \geq \alpha'(G) = n - \beta'(G).$$

Por lo tanto, $\beta'(G) \geq \alpha(G)$. □

2.1.1 Apareamientos en gráficas bipartitas

En el caso de las gráficas bipartitas, Philip Hall (1935) [3] encontró una condición necesaria y suficiente para aparear los vértices del conjunto de la bipartición de menor cardinalidad con un subconjunto del otro conjunto de la bipartición. A continuación la demostración de este resultado.

Teorema 2.4 (Teorema de Hall) Sea G una gráfica bipartita, con X, Y los conjuntos de la bipartición tales que $|X| \leq |Y|$. Entonces G tiene un apareamiento de los vértices de X con un subconjunto de Y si y solo si para todo subconjunto $S \subseteq X$, se cumple que $|N(S)| \geq |S|$.

Demostración La condición de Hall es necesaria, pues si suponemos que existe un apareamiento M que cubre a X , x es extremo de algún vértice en M , entonces por ser G bipartita, existen al menos $|X|$ vértices en Y , adyacentes con los vértices de X . Así, sea $S \subseteq X$ y veamos que se cumple la condición de Hall. Por hipótesis, existe M un apareamiento que cubre a X y en particular a S . Sea $S' = \{y \in Y \mid xy \in M \text{ y } x \in S\}$ entonces, por ser M un apareamiento, $S' \subseteq N(S)$. Por lo tanto, $|S| = |S'| \leq |N(S)|$. Por lo que se cumple la condición de Hall en G para el conjunto X .

Vamos a probar que la condición de Hall es suficiente por inducción fuerte sobre la cardinalidad del conjunto X de la bipartición.

Sea $|X| = 1$ y supongamos se cumple la condición de Hall. Sea $v \in X$, como $1 = |X| \leq |N(X)|$, entonces $Y \neq \emptyset$, i. e. existe al menos un vértice $y \in Y$ tal que $xy \in E(G)$. $M = \{xy\}$ es un apareamiento de los vértices de X con un subconjunto de los vértices de Y .

² Decimos que el conjunto cumple con la *condición de Hall*.

Sea $k \geq 2$, y supongamos que toda gráfica bipartita con $1 \leq |X| < k$ que cumple la condición de Hall, tiene un apareamiento de los vértices de X con un subconjunto de Y .

Ahora, sea G una gráfica bipartita con $k = |X| \leq |Y|$ y tal que para todo $S \subseteq X$, se cumple que $|N(S)| \geq |S|$, por demostrar que G tiene un apareamiento de los vértices de X con un subconjunto de Y . Tenemos dos casos:

Caso 1. Todo subconjunto propio de X , cumple que $|N(S)| > |S|$.

Sea $x \in X$, por hipótesis $|N(x)| > 1$. Sea $w \in N(x)$, y sea H la subgráfica bipartita inducida de G con bipartición $\{X \setminus \{x\}, Y \setminus \{w\}\}$. Entonces, para todo subconjunto $S^* \subseteq X \setminus \{x\}$, $|N_H(S^*)| \geq |S^*|$, pues como $|N_G(S^*)| > |S^*|$ en G y para obtener H se eliminó exactamente un vértice de cada conjunto de la bipartición, entonces, a lo más, se reduce en 1 la cardinalidad de la vecindad de S^* en H . Entonces, por hipótesis de inducción, la subgráfica H , tiene un apareamiento M^* que cubre a $X \setminus \{x\}$ y $M = M^* \cup \{xw\}$ es un apareamiento en G que cubre a X .

Caso 2. Existe un subconjunto propio de X , $X' \subsetneq X$ tal que $|X'| = |N(X')|$.

Sea F la subgráfica bipartita inducida de G por los conjuntos X' y $N(X')$. Como en G , X satisface la condición de Hall, en F todo subconjunto S' de X' también cumple que $|S'| \leq |N(S')|$, pues $N(S') \subseteq N(X)$. Así, por hipótesis de inducción, la subgráfica F tiene un apareamiento M' que cubre a X' .

Ahora, sea H la subgráfica inducida de G con bipartición $\{X \setminus X', Y \setminus N(X')\}$. Sea S un subconjunto de $X \setminus X'$ y notemos que $N_H(S) = N(S) \cap (Y \setminus N(X'))$. Por demostrar que $|S| \leq |N_H(S)|$, *i. e.* H cumple la condición de Hall. Por hipótesis $|N(X' \cup S)| \geq |X' \cup S|$ (i), pues $X' \cup S$ es subconjunto de X en G . Como $N(X' \cup S) = N(X') \cup S$ y $N(X') \cap N_H(S) = \emptyset$, entonces $|N(X' \cup S)| = |N(X') \cup N_H(S)| = |N(X')| + |N_H(S)|$ y por (i), $|N(X')| + |N_H(S)| \geq |X' \cup S| = |X'| + |S|$. Como $|N(X')| = |X'|$, tenemos que $|N_H(S)| \geq |S|$. Entonces la condición de Hall se satisface en la subgráfica H y existe M'' un apareamiento de los vértices de $X \setminus X'$ con un subconjunto de $Y \setminus N(X')$. Por lo tanto, $M' \cup M''$ es un apareamiento de los vértices de X con un subconjunto de Y en G . \square

En la figura 27, la gráfica G_1 no satisface la condición de Hall, pues si $S = \{y_1, y_3, y_4\}$, $N(S) = \{x_1, x_3\}$, por lo que $|N(S)| < |S|$. Un apareamiento de la gráfica G_2 está dado por $\{x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1, x_4y_4\}$, que es además un apareamiento perfecto, por lo que todo subconjunto de cada conjunto de la bipartición, debe cumplir con la condición de Hall. El siguiente corolario nos da una condición suficiente para que una gráfica bipartita tenga un apareamiento perfecto.

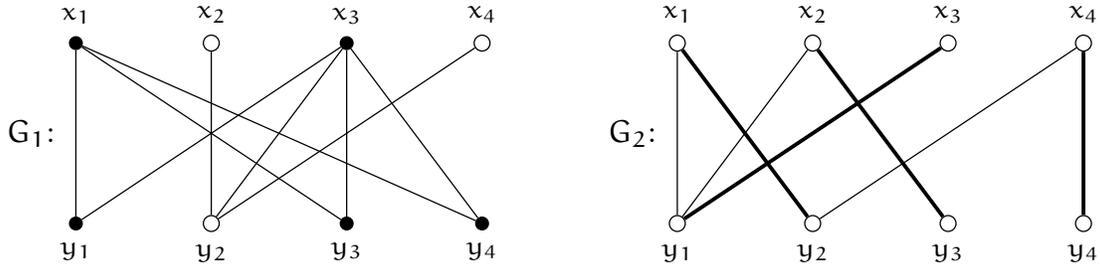


Figura 27

Corolario 2.5 *Toda gráfica bipartita r -regular tiene un apareamiento perfecto.*

Demostración Sea G una gráfica bipartita r -regular con bipartición $\{X, Y\}$. Como G es bipartita, $\sum_{x \in X} d(x) = m = \sum_{y \in Y} d(y)$, con m el tamaño de G . Además, G es r -regular, $|X| \cdot r = m = |Y| \cdot r$, por lo que $|X| = |Y|$. De este modo, cualquier apareamiento que cubra a X es perfecto. Basta ver que G cumple la condición de Hall en X . Sea $S \subseteq X$, entonces el número de aristas que inciden en S es: $|S| \cdot r$ y por otro lado, el número de aristas que inciden en $N(S)$ es $|N(S)| \cdot r$. Como en $N(S)$ inciden al menos todas las aristas que tienen un extremo en S , pues $S \subseteq N(N(S))$, entonces:

$$r \cdot |S| \leq r \cdot |N(S)|$$

por lo que

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Así, G cumple la condición de Hall y contiene un apareamiento que cubre a X . Por lo tanto, G tiene un apareamiento perfecto. \square

Teorema 2.6 (Teorema de König) *Si G es una gráfica bipartita, entonces:*

$$\alpha'(G) = \beta(G).$$

Demostración Por el corolario 2.3 sabemos que $\beta(G) \geq \alpha'(G)$, pues cada vértice en una cubierta mínima debe contener al menos un extremo de cada arista en un apareamiento máximo. Así, basta con demostrar que $\alpha'(G) \geq \beta(G)$.

Sea G una gráfica bipartita con bipartición $\{X, Y\}$, sea K una cubierta por vértices mínima de las aristas de G y sean H_1 y H_2 dos subgráficas bipartitas inducidas de G con conjuntos de la bipartición $\{X \cap K, Y \setminus K\}$ y $\{X \setminus K, Y \cap K\}$.

Procederemos por contradicción. Supongamos que no existe un apareamiento en H_1 de todos los vértices de $K \cap X$ con un subconjunto de $Y \setminus K$, entonces por el teorema 2.4 (Hall), existe un subconjunto $S \subseteq K \cap X$ tal que $|N_{H_1}(S)| < |S|$.

Afirmamos que $K' = (K \setminus S) \cup N_{H_1}(S)$ es una cubierta por vértices de G . Sea $e \in E(G)$, entonces:

Caso 1. Si e tiene un extremo en $K \cap Y$, entonces e está cubierta por K' , pues $K \cap Y \subseteq K'$.

Caso 2. Si e no tiene extremos en $K \cap Y$, como K es una cubierta, e debe tener un extremo en $K \cap X$ y el otro en $Y \setminus K$, lo cual implica que $e \in E(H_1)$. Sea x el extremo de e que está en $K \cap X$, entonces tenemos dos casos, $x \in S$ o $x \notin S$:

- si $x \notin S$, entonces e está cubierta por algún vértice en $K \setminus S \subseteq K'$,
- si $x \in S$, entonces e es una arista en H_1 con un extremo en S y por lo tanto su otro extremo está en $N_{H_1}(S)$, entonces e está cubierta por K' , pues $N_{H_1}(S) \subseteq K'$.

Así, K' es una cubierta por vértices de las aristas de G , y supusimos que $|S| > |N(S)|$ por lo que:

$$|K'| = |K| - |S| + |N_{H_1}(S)| < |K|,$$

lo cual es una contradicción pues K es mínima. Entonces, H_1 tiene un apareamiento M_1 de todos los vértices de $K \cap X$ con un subconjunto de $Y \setminus K$. De forma análoga, podemos encontrar que H_2 tiene un apareamiento M_2 de todos los vértices de $K \cap Y$ con un subconjunto de $X \setminus K$. Como H_1 y H_2 son ajenos en vértices, $M = M_1 \cup M_2$ es un apareamiento de G , tal que:

$$\alpha'(G) \geq |M| = |K \cap X| + |K \cap Y| = |K| = \beta(G).$$

Por lo tanto, $\alpha'(G) \geq \beta(G)$ y junto con el corolario 2.3, esto implica que:

$$\alpha'(G) = \beta(G). \quad \square$$

2.2 CLANES Y CONJUNTOS DOMINANTES

Definición Un *clan* de una gráfica G , es una subgráfica completa maximal de G . El *número de clan* de una gráfica G es el orden de un clan máximo, y lo denotamos por $\omega(G)$.

Observación $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Si S es un conjunto independiente en G , para cualquier par $x, y \in S$, $xy \notin E(G)$, pero esto ocurre si y solo si $xy \in E(\overline{G})$. Y como $S \subseteq V(G) = V(\overline{G})$, S es un clan en \overline{G} . En particular, si S es un conjunto independiente máximo de G , es un clan máximo en \overline{G} .

Así, notemos que el concepto de clan es el dual de conjunto independiente, pues siempre que tengamos un conjunto independiente en una gráfica, éste será un clan en su complemento y viceversa. Por lo que son equivalentes: encontrar un conjunto independiente maximal en G y encontrar un clan maximal en \overline{G}

Definición Se dice que un vértice v *domina* a los vértices de su vecindad cerrada $N[v]$, *i. e.* domina a sus vecinos y a sí mismo. Un conjunto S de vértices de G es *dominante* si a todo vértice de G lo domina un vértice en S .

De manera que un conjunto S es dominante en G si todo vértice en $V(G) \setminus S$ es adyacente a un vértice en S . Además, decimos que S es un conjunto dominante minimal si no existe un subconjunto propio de S con la misma propiedad. El *número de dominación* de una gráfica, es la mínima cardinalidad de un conjunto dominante de G y se denota $\gamma(G)$.

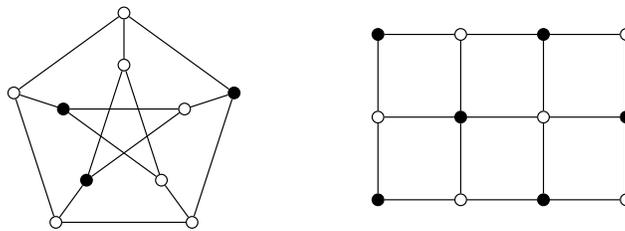


Figura 28: Conjuntos dominantes

En la figura 28 tenemos dos gráficas y sus conjuntos dominantes. En el caso de la gráfica de Petersen, basta con 3 vértices para dominar a los demás. Dada la retícula $T_3 \square T_4$ hacen falta 6 vértices.

Teorema 2.7 Si un conjunto independiente S es maximal entonces es dominante.

Demostración Sea S un conjunto independiente maximal de la gráfica G , *i. e.* $E(G[S]) = \emptyset$ y además, como S es maximal, para todo $v \in V(G) \setminus S$, $S \cup \{v\}$ no es independiente. Por lo que $vx \in E(G)$ para algún $v \in S$. Por lo tanto S es un conjunto dominante. \square

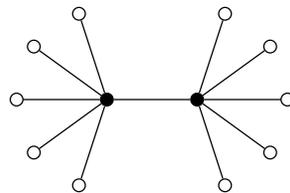
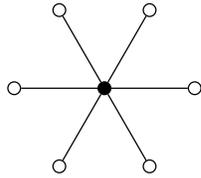


Figura 29: No todo conjunto dominante es independiente

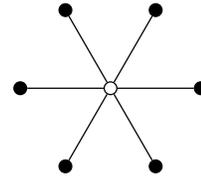
Notemos que no todo conjunto dominante es, necesariamente, un conjunto independiente. Por lo que además vamos a distinguir a los conjuntos dominantes independientes como aquellos que cumplen con las dos condiciones simultáneamente.

Corolario 2.8 [4] Para toda gráfica G , $\alpha(G) \geq \gamma(G)$.

Demostración Sea $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| = \alpha(G)$, entonces S es independiente maximal y por el teorema 2.7, S es además, un conjunto dominante. Sea $S^* \subseteq V(G)$ un conjunto dominante tal que $|S^*| = \gamma(G)$, entonces $|S| \geq |S^*| = \gamma(G)$. Por lo tanto, $\alpha(G) \geq \gamma(G)$. \square



Conjunto dominante mínimo
 $\gamma(K_{1,6}) = 1$



Conjunto independiente máximo
 $\alpha(K_{1,6}) = 6$

Figura 30: El número de independencia y dominancia de una estrella

Así, cualquier conjunto independiente maximal es dominante, pero no necesariamente minimal. En la figura 30, podemos ver dos conjuntos independientes maximales (dominantes), con cardinalidades muy diferentes. En general, el caso de las estrellas es un ejemplo de qué tan grande puede ser la diferencia en los tamaños de conjuntos independientes, en particular entre un conjunto dominante mínimo y un conjunto independiente máximo.

Cuadro 2: Números de independencia, apareamiento, cubierta, dominancia y clan en algunas familias de gráficas.

		P_n	C_n	K_n	$\overline{K_n}$	$K_{1,n}$	$K_{r,s}$
número de independencia:	$\alpha(G)$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	1	n	n	$\max\{r, s\}$
número de apareamiento:	$\alpha'(G)$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	0	1	$\min\{r, s\}$
número de cubierta por vértices:	$\beta(G)$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$n-1$	0	1	$\min\{r, s\}$
número de cubierta por aristas:	$\beta'(G)$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	n/a	n	$\max\{r, s\}$
número de dominación:	$\gamma(G)$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	1	n	1	$\min\{r, s\}$
número de clan:	$\omega(G)$	2	2, si $n \neq 3$ 3, si $n = 3$	n	1	2	2

2.3 COLORACIÓN

2.3.1 Coloración por vértices

Una *coloración por vértices* de una gráfica G es la asignación de un color³ a cada vértice de G , formalmente:

Definición Decimos que una k -coloración por vértices φ , es una función suprayectiva⁴

$$\varphi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}.$$

Una coloración es *propia* si φ es tal que vértices adyacentes tienen asignados colores diferentes.

Definición El *número cromático* de una gráfica, $\chi(G)$, es el mínimo valor k , tal que existe una k -coloración propia de G .

Así, si G tiene número cromático $\chi(G) = k$, entonces decimos que G es k -cromática.

Dada una coloración de la gráfica G , el conjunto de todos los vértices que tienen asignados un mismo color, i , es llamada la *clase cromática* del color i . De manera que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $V_i = \varphi^{-1}(i)$ es el conjunto de vértices de color i en G .

Como φ es una función que asigna un color a cada vértice, entonces $\{V_1, \dots, V_k\}$ es una partición de $V(G)$ y cada V_i es una clase cromática del color i .

Además, si φ es una coloración propia, entonces entre cualesquiera dos vértices de una misma clase cromática, no existe una arista entre ellos, por lo que toda coloración propia induce una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes.

Debido a la estrecha relación entre los dos conceptos, podemos caracterizar el número cromático de una gráfica utilizando el concepto de conjunto independiente mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.9 Para cualquier gráfica G tenemos:

$$\chi(G) = \min \{ |P| \mid P \text{ es una partición de } V(G) \text{ en conjuntos independientes} \}.$$

Demostración Sea G una gráfica k -cromática, *i. e.* $k = \chi(G)$ y sea φ una k -coloración propia de G . Sabemos que las k clases cromáticas de G generadas por φ son una partición P , de $V(G)$

³ En general, vamos a utilizar números enteros para representar los colores.

⁴ $f: X \rightarrow Y$ es suprayectiva si para toda $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$.

en conjuntos independientes. Además, la partición es mínima, pues de no serlo, existe otra partición P' tal que $|P'| < |P|$. Sean V_1, \dots, V_p los conjuntos de la partición P' , $p < k$ y sea φ' la función tal que $\varphi'(v) = i$, si $v \in V_i$, con $i \in \{1, \dots, p\}$. Es claro que φ' es una coloración propia, pues cualesquiera dos vértices con un mismo color, son no adyacentes. Así, φ' es una p -coloración propia de G con menos de k colores, lo cual contradice que $\chi(G) = k$. Por lo tanto, $\chi(G) \leq \min\{|P| \mid P \text{ es una partición de } V(G) \text{ en conjuntos independientes}\}$ (i).

Sea $k = |P|$, con P una partición $\{V_1, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ de cardinalidad mínima. Sea φ una coloración propia de los vértices de G , tal que $\varphi(v_i) = i$ para todo $v_i \in V_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces, k es el número cromático de G , pues de no serlo, existe $\varphi': V(G) \rightarrow \{1, \dots, p\}$ una p -coloración propia de G con $p < k$. Sea P' la partición generada por las clases cromáticas de φ' , entonces $|P'| < k = |P|$, lo cual es una contradicción. Así, $\min\{|P| \mid P \text{ es una partición de } V(G) \text{ en conjuntos independientes}\} \leq \chi(G)$ (ii).

Por (i) y (ii), el teorema queda demostrado. □

Teorema 2.10 *En toda coloración propia mínima, cualesquiera dos clases cromáticas son adyacentes.*

Demostración (por contradicción) Sea G una gráfica y φ una coloración propia mínima de G con clases cromáticas V_1, \dots, V_k , así, $\chi(G) = k$. Ahora, supongamos que bajo φ , existen V_i y V_j , con $i, j \in \{1, \dots, k\}$, dos clases cromáticas que no son adyacentes, *i. e.* para todo $v_i \in V_i, v_j \in V_j, v_i v_j \notin E(G)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i = 1$ y $j = k$, por lo que $P = \{V_1 \cup V_k, V_2, \dots, V_{k-1}\}$ es una partición en conjuntos independientes de $V(G)$ tal que $|P| < \chi(G)$ y por el teorema 2.9 esto es una contradicción. Por lo tanto, si φ es una coloración propia mínima, cualesquiera dos clases cromáticas son adyacentes. □

En una gráfica completa, los vértices son todos adyacentes dos a dos, por lo que notamos lo siguiente:

Observación $\chi(K_n) = n$.

Lema 2.11 *Si H es una subgráfica cualquiera de G , entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Demostración Sea $H \subseteq G$ y $\chi(G) = k$. Sea φ una k -coloración propia de G y φ' la coloración φ restringida a los vértices de H . Como $E(H) \subseteq E(G)$, sabemos que φ' es tal que vértices adyacentes tienen colores diferentes, además $\text{Im}(\varphi') \subseteq \{1, \dots, k\}$. Entonces, φ' es una coloración propia de H y por lo tanto $\chi(H) \leq k$. □

Teorema 2.12 *Sea G una gráfica de orden n , entonces:*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

Demostración Sea G una gráfica de orden n , con número de clan $\omega(G) = k$. Entonces G tiene como subgráfica a una completa de orden k , *i. e.* $K_k \subseteq G$, pero como todos los vértices de la subgráfica K_k son adyacentes dos a dos, se necesitan al menos k colores para que la coloración de K_k sea propia. Por lo tanto, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Ahora, veamos que $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$. Sea S un conjunto independiente de G tal que $|S| = \alpha(G)$. Como los vértices de S no son adyacentes, se les puede asignar a todos el mismo color y a los vértices restantes se le asigna a cada uno un color diferente. Así, tenemos una coloración propia de G con $1 + n - |S|$ colores. Por lo tanto, $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$. Así, si G es una gráfica de orden n ,

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1. \quad \square$$

Corolario 2.13 $\chi(G) = 1$ si y solo si $G \simeq \bar{K}_n$.

Demostración Primero supongamos que G es una gráfica tal que $\chi(G) = 1$. Entonces, ningún par de vértices en G pueden ser adyacentes, de lo contrario la coloración no sería propia. Por lo tanto, $G \simeq \bar{K}_n$.

Ahora, sea $G \simeq \bar{K}_n$. Como \bar{K}_n es vacía, es decir, no tiene aristas, entonces $\omega(G) = 1$. Además, es claro que $\alpha(\bar{K}_n) = n$, pues al no tener aristas todos sus vértices son independientes. Así, por el teorema 2.12:

$$\omega(\bar{K}_n) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(\bar{K}_n) + 1,$$

por lo tanto, $\chi(G) = 1$. □

Teorema 2.14 $\chi(G) = 2$ si y solo si G es una gráfica bipartita y no vacía.

Demostración Sea G una gráfica 2-cromática, y construyamos una bipartición de tal forma que V_1 sea el conjunto de todos los vértices a los cuales se les asignó el color 1 y V_2 el conjunto de los vértices del color 2. Como V_1 y V_2 son las clases cromáticas de los colores 1 y 2, respectivamente, $\{V_1, V_2\}$ es una bipartición de $V(G)$ en conjuntos independientes. Así, G es una gráfica bipartita.

Ahora, supongamos que G es bipartita, con $\{V_1, V_2\}$ la bipartición de sus vértices. Entonces podemos dar una 2-coloración, φ , de la gráfica G de la siguiente manera: $\varphi(V_1) = 1$ y $\varphi(V_2) = 2$. Así G es una gráfica 2-cromática. □

Corolario 2.15 Todo árbol T no trivial es 2-cromático.

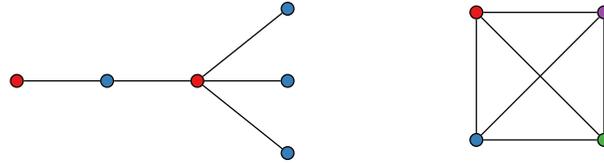


Figura 31: Coloración propia de un árbol y de K_4

2.3.2 Coloración por aristas

Si en lugar de vértices, coloreamos las aristas de una gráfica, surgen problemas interesantes, de los cuales, muchos permanecen como problemas abiertos.

Definición Una k -arista-coloración, φ , de una gráfica G es una función suprayectiva

$$\varphi: E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$$

que le asigna a cada arista e de G un color $\varphi(e) \in \{1, \dots, k\}$. Decimos que la coloración es *propia*, si φ es tal que ningún par de aristas adyacentes tienen el mismo color.⁵

Al mínimo número, k , de colores en una k -arista-coloración propia de G , le llamamos el *índice cromático* de G y lo denotamos por $\chi'(G)$. Así, si G tiene índice cromático $\chi'(G) = k$, entonces decimos que G es k -arista-cromática.

Observación *Cualquier k -arista-coloración propia, induce una partición de $E(G)$ en apareamientos.*

De manera análoga a lo que ocurre en una coloración por vértices, dada una coloración por aristas de la gráfica G , al conjunto de todas las aristas que tienen asignadas un mismo color, i , se le llama *clase cromática* del color i . Como ningún par de aristas en la misma clase cromática son adyacentes, cada clase cromática es un apareamiento distinto de la gráfica.

Teorema 2.16 *Si G es una gráfica de tamaño $m \geq 1$, entonces*

$$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}.$$

Demostración Sea G una gráfica k -arista-cromática y E_1, \dots, E_k las clases cromáticas de una k -coloración de G . Como cualquier par de aristas en E_i son no adyacentes, $|E_i| \leq \alpha'(G)$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces,

$$m = |E(G)| = \sum_{i=1}^k |E_i| \leq k \cdot \alpha'(G),$$

⁵ Algunos autores le llaman coloración impropia, si no se cumple la condición.

y por lo tanto $\chi'(G) = k \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$. □

Observación Para toda gráfica G ,

$$\Delta(G) \leq \chi'(G).$$

Si v es un vértice de grado máximo en una gráfica G , para obtener una coloración propia, a todas las aristas que inciden en v les corresponde a cada una un color diferente bajo la función. Así, en cualquier arista-coloración propia se necesitan al menos $\Delta(G)$ colores distintos. En el caso de las gráficas bipartitas, se da la igualdad.

Teorema 2.17 Si G es una gráfica bipartita, entonces $\chi'(G) = \Delta(G)$

Demostración Procederemos por inducción sobre m . Sea G una gráfica con tamaño $m = 1$, entonces basta un color para obtener una coloración propia de la gráfica, por lo tanto $\chi'(G) = 1 = \Delta(G)$.

Ahora supongamos que toda gráfica bipartita de tamaño $m - 1$ tiene índice cromático igual a su grado máximo, *i. e.* $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Sea G una gráfica de tamaño $m \geq 2$ y sea $e = uv$ una arista cualquiera de G . Por hipótesis de inducción, como $G - e$ tiene tamaño $m - 1$, entonces $\chi'(G - e) = \Delta(G - e)$. Sea φ la Δ -arista-coloración de $G - e$, entonces $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$. Si $\Delta(G - e) < \Delta(G)$, u o v son de grado máximo en $G - e$ y a la arista e se le asigna un nuevo color por lo que $\Delta(G) = \chi'(G) = \Delta + 1$. Por otro lado, si $\Delta(G - e) = \Delta(G)$ y ninguna de las aristas que inciden en u o en v tienen color i , entonces G tiene una Δ -arista-coloración mínima dada por φ extendida a e , con $\varphi(e) = i$. Entonces, sin pérdida de generalidad, supongamos que entre las aristas que inciden en u y v ya están representados los Δ colores. Como el grado de u en $G - e$ es a lo más $\Delta - 1$, existe al menos un color i disponible en u , que no está disponible en v . Análogamente, como el grado de v en $G - e$ es a lo más $\Delta - 1$, existe j un color disponible en v que no está disponible en u .

Sea $H_{i,j}$ la subgráfica de G inducida por las clases cromáticas E_i y E_j , entonces toda componente conexa de $H_{i,j}$ es una trayectoria o bien un ciclo par. Como en $G - e$ la Δ -arista-coloración es propia, en $H_{i,j}$ toda trayectoria alterna los colores i y j . Además, los vértices u y v tienen grado uno y están en distintas componentes, pues de existir una uv -trayectoria en $H_{i,j}$, sería de longitud par, pues empieza con una arista de color j y termina con una arista de color i , lo que implica que en G la uv -trayectoria junto con la arista e forman un ciclo de longitud impar, lo cual es una contradicción pues por hipótesis G es bipartita. Así, sea P la trayectoria de $H_{i,j}$ que empieza en u , entonces como u y v están en distintas componentes de $H_{i,j}$, podemos intercambiar los colores de P de tal forma que se obtiene una nueva coloración propia de G , tal que ninguna arista que incide en u , tiene color j . Así el color j queda disponible para la arista uv , y finalmente, obtenemos una Δ -arista-coloración de la gráfica G . Por lo tanto, $\chi'(G) = \Delta(G)$. □

Vadim G. Vizing [5] encontró una cota superior para el índice cromático de una gráfica:

Teorema 2.18 (Teorema de Vizing) *Para toda gráfica G no vacía,*

$$\chi'(G) \leq 1 + \Delta(G).$$

Este teorema, junto con la observación 13, nos permiten clasificar a todas las gráficas simples según su índice cromático en dos: llamaremos de *Clase 1* a las gráficas para las cuales $\chi'(G) = \Delta(G)$ y gráficas de *Clase 2* a aquellas para las que $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$. En el teorema 2.17 se probó que las gráficas bipartitas son de Clase 1.

El teorema de Vizing ha motivado la caracterización de estas dos clases de gráficas, es por esto que es considerado central en el estudio de las arista-coloraciones propias, su prueba se puede encontrar, por ejemplo, en [5].

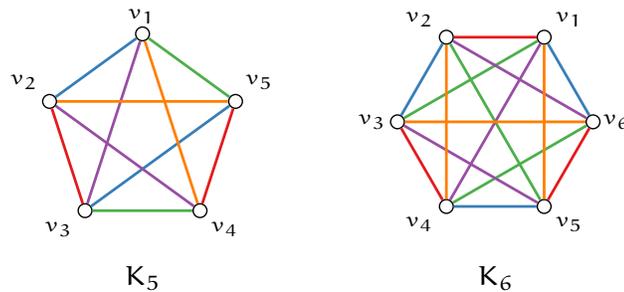


Figura 32: Dos gráficas 5-arista-cromáticas

En la figura 32 se muestran una coloración propia para K_5 y una para K_6 , ambas mínimas. Según el teorema de Vizing, K_5 es de clase 1, pues $\chi'(K_5) = \Delta(K_5) + 1$ y K_6 es de clase 2, pues $\chi'(K_6) = \Delta(K_6)$.

2.3.3 Coloración y gráfica de líneas

Toda coloración por aristas de G , es una coloración por vértices de su gráfica de líneas, $L(G)$. En particular, $\chi'(G) = \chi(L(G))$, por lo que el problema de encontrar una arista-coloración propia, se puede ver entonces como una restricción del problema de encontrar una coloración propia por vértices en la clase de las gráficas de líneas. Debido a que, como ya vimos, no toda gráfica es gráfica de líneas de otra gráfica, no ocurre al revés.

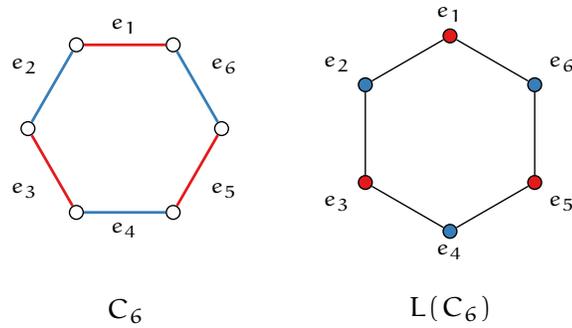


Figura 33: $\chi'(C_6) = \chi(L(C_6)) = 2$

Esta propiedad nos permite encontrar fácilmente los índices cromáticos de algunas familias de gráficas, dados los números cromáticos. Por ejemplo, en la figura 33, podemos ver una coloración propia de un ciclo y su gráfica de líneas, que resulta también ser un ciclo. En general, como $L(C_n) \simeq C_n$, entonces $\chi(C_n) = \chi'(C_n)$ y en el caso de las trayectorias, $L(P_n) \simeq P_{n-1}$ y $\chi(P_{n-1}) = 2 = \chi'(P_n)$ para $n \geq 3$.

Cuadro 3: Los números cromáticos por vértices y aristas de algunas familias de gráficas

	P_n	C_n	K_n	\overline{K}_n	$K_{1,n}$	$K_{r,s}$
$\chi(G)$	2	2, si n es par 3, si n es impar	n	1	2	2
$\chi'(G)$	2	2, si n es par 3, si n es impar	$n - 1$, si n es par n , si n es impar	0	n	$\Delta(G)$

EL NÚMERO DE FIBONACCI DE UNA GRÁFICA

Las sucesiones de Fibonacci y Lucas no obtuvieron su prominencia ni su nombre hasta que François Édouard Anatole Lucas (1842 - 1891), un matemático francés, las estudió durante la segunda mitad del siglo XIX[6].

Definición El n -ésimo *número de Fibonacci*, F_n , se define como

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

siempre que $n \geq 3$ y con $F_1 = F_2 = 1$.

Definición El n -ésimo *número de Lucas*, L_n , se define como

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

siempre que $n \geq 3$, con $L_1 = 1$ y $L_2 = 3$.

Las sucesiones de Fibonacci y Lucas están estrechamente relacionadas. De hecho, la sucesión de Lucas se puede obtener de la sucesión de Fibonacci de la siguiente manera:

Proposición $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

Demostración Procederemos por inducción fuerte sobre $n \geq 3$.

Si $n = 3$, $L_3 = L_1 + L_2 = 1 + 3 = F_2 + F_4$.

Si $n = 4$, $L_4 = L_2 + L_3 = 3 + 4 = 7$ y $F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$, por lo tanto $L_4 = F_3 + F_5$.

Ahora supongamos que para toda $3 \leq k < n$ se cumple que:

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1}.$$

Entonces, sea $n \geq 5$, si $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, por hipótesis de inducción tenemos que $L_n = (F_{n-2} + F_n) + (F_{n-3} + F_{n-1})$ y reordenando:

$$L_n = F_{n-3} + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \quad \square$$

Cuadro 4: Las sucesiones de Fibonacci y Lucas

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	35	56	...
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	73	120	...

Al estudio de los conjuntos independientes en las gráficas y su número de independencia, se suma un concepto introducido por Prodinger y Tichy en [7].

Definición Se conoce como *número de Fibonacci* de una gráfica G a la cardinalidad de la familia de todos los conjuntos independientes de una gráfica, y se denota por $\mathcal{F}(G)$.

Lema 3.2 Para toda gráfica G ,

$$\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G - v) + \mathcal{F}(G - N[v])$$

para cualquier $v \in V(G)$.

Demostración Sea $\mathcal{I}(G) = \{S \subseteq V(G) \mid S \text{ es un conjunto independiente}\}$, la familia de conjuntos independientes de G y sea $v \in V(G)$ un vértice fijo. Sean $\mathcal{I}_v(G)$ la familia de conjuntos independientes de $V(G)$ que contienen a v y sea $\mathcal{I}_{-v}(G) = \mathcal{I}(G) \setminus \mathcal{I}_v(G)$.

Veamos que $\mathcal{I}_v(G)$ y $\mathcal{I}_{-v}(G)$ son una partición de $\mathcal{I}(G)$. Por definición $\mathcal{I}(G) = \mathcal{I}_v(G) \cup (\mathcal{I}(G) \setminus \mathcal{I}_v(G))$ y $\mathcal{I}_v(G) \cap (\mathcal{I}(G) \setminus \mathcal{I}_v(G)) = \emptyset$. Además, $\{v\} \in \mathcal{I}_v(G)$ y $\emptyset \in \mathcal{I}_{-v}(G)$ por lo que son no vacíos. Como $\{\mathcal{I}_v(G), \mathcal{I}_{-v}(G)\}$ son un partición de $\mathcal{I}(G)$, entonces $|\mathcal{I}(G)| = |\mathcal{I}_v(G)| + |\mathcal{I}_{-v}(G)|$.

Sabemos que $|\mathcal{I}(G)| = \mathcal{F}(G)$ y como v es un vértice fijo, $|\mathcal{I}_{-v}(G)| = \mathcal{F}(G - v)$ pues la familia de conjuntos independientes de G que no contienen al vértice v es igual a la familia de conjuntos independientes de la gráfica $G - v$. Falta ver que $|\mathcal{I}_v(G)| = \mathcal{F}(G - N[v])$. Sea $S \in \mathcal{I}_v(G)$, como $v \in S$ entonces $y \notin S$ para toda $y \in N(v)$. Así, la familia de conjuntos independientes en G que contienen a v son aquellos que no contienen a los vecinos de v , *i. e.* $\mathcal{I}_v(G) = \{S \in \mathcal{I}(G) \mid v \in S, \text{ para toda } y \in N[v]\}$. Más aún, si $\mathcal{I}' = \{S' \cup \{v\} \mid S' \subseteq V(G - N[v]) \text{ es independiente}\}$, entonces $\mathcal{I}_v(G) = \mathcal{I}'$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G - v) + \mathcal{F}(G - N[v])$. □

La demostración del siguiente teorema es un ejemplo de cómo se puede utilizar el lema 3.2 para encontrar el número de Fibonacci de una familia de gráficas:

Teorema 3.3 El número de Fibonacci de $K_{1,n-1}$, la estrella de orden n , es:

$$\mathcal{F}(K_{1,n-1}) = 2^{n-1} + 1.$$

Demostración Sea $K_{1,n-1}$ una estrella de orden n y sea $v \in V(K_{1,n-1})$ tal que $d(v) = n - 1$. Por el lema 3.2 sabemos que $\mathcal{F}(K_{1,n-1}) = \mathcal{F}(K_{1,n-1} - v) + \mathcal{F}(K_{1,n-1} - N[v])$. Observemos que $N[v] = V(K_{1,n-1})$, pues v es adyacente a todos los otros vértices en $K_{1,n-1}$, por lo que $K_{1,n-1} - N[v] = (\emptyset, \emptyset)$, la gráfica vacía, por lo que tiene un único conjunto independiente, el conjunto vacío. Además, como para todo vértice $x \in V(K_{1,n-1}) \setminus \{v\}$, $d(x) = 1$, al quitar al vértice v quedan desconectados, por lo que $K_{1,n-1} - v \simeq \bar{K}_{n-1}$ y sus conjuntos independientes son todos los subconjuntos de $V(\bar{K}_{n-1})$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(K_{1,n-1}) = \mathcal{F}(K_{1,n-1} - v) + \mathcal{F}(K_{1,n-1} - N[v]) = 2^{n-1} + 1 \quad \square$$

Se les conoce como números de Fibonacci, debido al siguiente resultado [7]:

Teorema 3.4 (Los números de Fibonacci de P_n y C_n)

$$\mathcal{F}(P_n) = F_{n+2} \quad (i)$$

y

$$\mathcal{F}(C_n) = L_n, \text{ con } n \geq 3. \quad (ii)$$

Demostración

- (i) Procederemos por inducción fuerte sobre el orden de P_n . Si $n = 1$, P_1 es la gráfica que consta de un único vértice. Si $V(P_1) = \{x\}$, entonces $\mathcal{I}(P_1) = \{\emptyset, \{x\}\}$ y $|\mathcal{I}(P_1)| = 2 = F_3$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(P_1) = F_3$.

Si $n = 2$, $P_2 \simeq K_2$. Si $V(P_2) = \{x, y\}$, entonces $\mathcal{I}(P_2) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}\}$ y $|\mathcal{I}(P_2)| = 3 = F_4$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(P_2) = F_4$.

Sea $n \geq 3$ y supongamos que para cualquier $1 \leq k < n$, $\mathcal{F}(P_k) = F_{k+2}$ y veamos que $\mathcal{F}(P_n) = F_{n+2}$.

Sea $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$, como P_n es una trayectoria y v_n es vértice terminal, entonces $N(v_n) = v_{n-1}$. Así, tenemos que $P_n - v_n \simeq P_{n-1}$ y $P_n - N[v_n] \simeq P_{n-2}$. Por hipótesis de inducción, $\mathcal{F}(P_{n-1}) = F_{n+1}$ y $\mathcal{F}(P_{n-2}) = F_n$. Entonces por lema 3.2 tenemos que $\mathcal{F}(P_n) = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Por lo tanto $\mathcal{F}(P_n) = F_{n+2}$.

- (ii) Sea C_n con $n \geq 3$, entonces tenemos dos casos:

Caso 1. Si $n = 3$, entonces $\mathcal{I}(C_3) = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$, pues $C_3 \simeq K_3$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(C_3) = 4 = L_3$.

Caso 2. Si $n > 3$, sea $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces $N[v_n] = \{v_{n-1}, v_n, v_1\}$. Así, tenemos que $C_n - v_n \simeq P_{n-1}$ y $C_n - N[v_n] \simeq P_{n-3}$. Por el inciso anterior, sabe-

mos que $\mathcal{F}(P_{n-1}) = F_{n+1}$ y $\mathcal{F}(P_{n-3}) = F_{n-1}$. Entonces por lema 3.2 tenemos que $\mathcal{F}(C_n) = F_{n+1} + F_{n-1}$ y por la proposición 3.1 $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$.

Por lo tanto $\mathcal{F}(C_n) = L_n$ para toda $n \geq 3$. □

En las figuras 34 y 35 están representadas las familias de conjuntos independientes de P_4 y C_4 , donde cada vértice de color negro pertenece a un conjunto independiente.

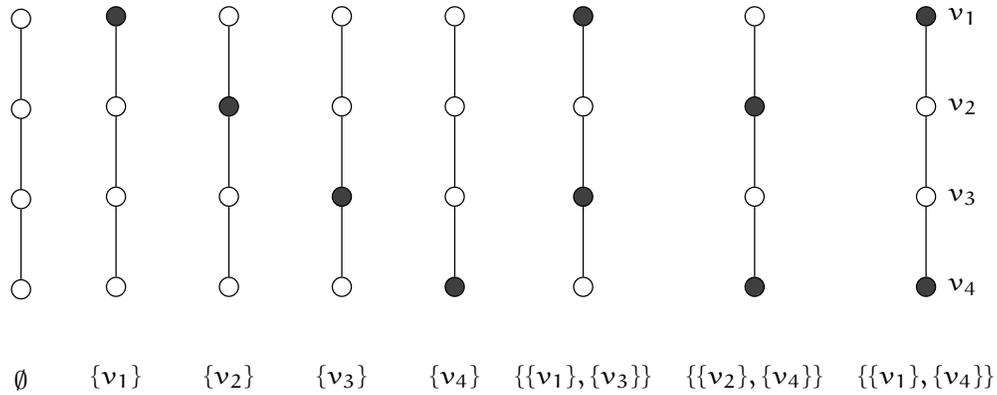


Figura 34: Familia de conjuntos independientes de P_4

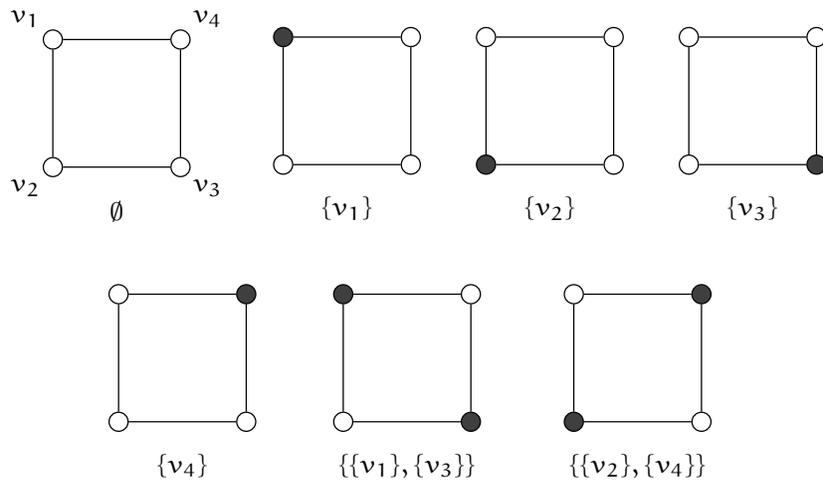


Figura 35: Familia de conjuntos independientes de C_4

3.1 LOS ÍNDICES DE HOSOYA Y MERRIFIELD-SIMMONS

Merrifield y Simmons [8] introdujeron en 1989, de manera independiente el concepto de número de Fibonacci de una gráfica, en el contexto de la química combinatoria. Una gráfica molecular es una gráfica simple, tal que los vértices corresponden a los átomos y las aristas a los enlaces de una molécula dada, de manera que el estudio de las propiedades de estas gráficas contribuye a la comprensión de fenómenos químicos en las moléculas.

El índice de Hosoya de una gráfica G es el número total de apareamientos en G y se denota por $Z(G)$. Este concepto fue introducido por Hosoya [9] en 1971 y tiene un papel muy importante en el estudio de la relación entre la estructura molecular y las propiedades físicas y químicas de ciertos hidrocarburos, por ejemplo, hay una alta correlación entre el índice de Hosoya y el punto de ebullición de los alcanos [10].

Así, los índices de Hosoya y Merrifield-Simmons permiten asignar un valor numérico a la información contenida en las características estructurales de compuestos químicos. Para obtener más información sobre el tema, se puede consultar [11], además de las fuentes ya citadas en esta sección.

3.2 EL NÚMERO DE FIBONACCI POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS

Dada una gráfica G , arista-coloreada, decimos que $S \subseteq V(G)$ es un *conjunto independiente por trayectorias monocromáticas* de G , si entre cualesquiera dos vértices $x, y \in S$ no existe una trayectoria monocromática en G . Para abreviar, en ocasiones haremos referencia a un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas como conjunto *tm*-independiente.

A la cardinalidad del conjunto máximo independiente por trayectorias monocromáticas la denotamos por $\alpha_{tm}(G)$ y le llamamos *número de independencia por trayectorias monocromáticas de G* .

A la familia de conjuntos de vértices independientes por trayectorias monocromáticas de una gráfica arista-coloreada G , la denotaremos por $\mathcal{J}_{tm}(G)$.

Definición Llamaremos *número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas* al número de conjuntos independientes por trayectorias monocromáticas de una gráfica arista-coloreada G y lo denotaremos por $\mathcal{F}_{tm}(G)$. Es decir, $\mathcal{F}_{tm}(G) = |\mathcal{J}_{tm}(G)|$.

Afirmación 1 Si G tiene orden n , entonces $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq n + 1$.

Demostración De la misma forma que ocurre con los conjuntos independientes usuales, para cualquier gráfica G , siempre serán conjuntos independientes por trayectorias monocromáticas el conjunto vacío y los conjuntos unitarios $\{v\}$, con $v \in V(G)$. Por lo tanto, si G es una gráfica de orden n y con una arista-coloración cualquiera, entonces $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq n + 1$. \square

Al número total de conjuntos tm -independientes con k elementos los vamos a denotar por $\mathcal{F}_{tm(k)}(G)$. Si un conjunto contiene k elementos lo llamaremos k -conjunto. Así, el argumento en la demostración de la afirmación 1 se puede expresar de la siguiente forma: si G tiene orden n , $\mathcal{F}_{tm(0)}(G) = 1$ y $\mathcal{F}_{tm(1)}(G) = n$. Y entonces, es claro que:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(G).$$

Esta notación fue introducida por I. Włoch y A. Włoch en [12] con el objetivo de calcular el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de las trayectorias y los ciclos arista-coloreados.

Equivalentemente, en [13] se definió el polinomio de Fibonacci de una gráfica G , denotado por $I(G; x)$, como:

$$I(G; x) = \sum_{k=0}^n b_k(G) x^k.$$

Donde, $b_k(G)$ es el número de k -conjuntos independientes de G . Es claro que $\mathcal{F}(G) = \sum_{k=0}^n b_k(G)$.

3.2.1 Los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de P_n y C_n

Consideremos φ una arista-coloración de P_n . Dado que P_n se puede ver como una concatenación de subtrayectorias monocromáticas, elegidas mediante la coloración φ , sea $\eta = (H_i)_{i \in \{1, \dots, t\}}$ la sucesión de subtrayectorias monocromáticas de P_n , y $n_i \geq 1$, la longitud de H_i , con $i = 1, \dots, t$ y tal que $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ si y solo si $|j - i| = 1$. Entonces para la gráfica P_n utilizamos la notación $P_n^{n_1, \dots, n_t}$, donde n_1 es la longitud de la trayectoria monocromática que contiene al vértice inicial, v_1 , de P_n y n_t la longitud de la trayectoria monocromática que contiene al vértice final, v_n , de P_n . Es decir, $P_n^{n_1, \dots, n_t}$ describe dicha concatenación, en términos de las longitudes de las H_i .

Así, la trayectoria $P_{n-p}^{n_1, \dots, n_j}$, $j \leq t$, se refiere a la subgráfica de P_n inducida por $\{v_1, \dots, v_{n-p}\}$, la cual es isomorfa a $P_n^{n_1, \dots, n_t} - \{v_{n-p+1}, \dots, v_{n-1}, v_n\}$. Si $i = 1$, para toda $i = 1, \dots, t$, entonces escribimos P_n , en vez de $P_n^{1, 1, \dots, 1}$.

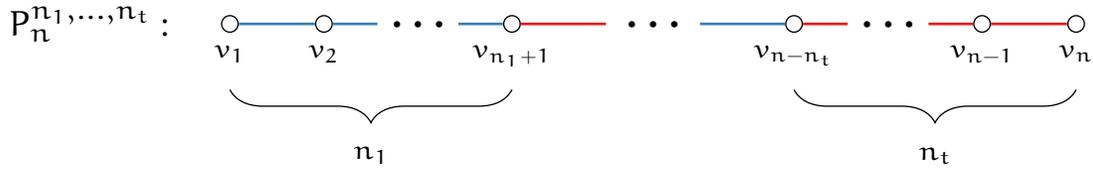


Figura 36: $P_n = P_n^{n_1, \dots, n_t}$

Con esta nueva notación podemos calcular una fórmula recurrente para el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de tamaño k de una trayectoria.

Teorema 3.5 Sea φ una arista-coloración de P_n , tal que $P_n = P_n^{n_1, \dots, n_t}$, con orden $n \geq 2$, y sean $k \geq 0, t \geq 1$. Entonces:

$$\mathcal{F}_{tm(0)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = 1, \quad (\text{i})$$

$$\mathcal{F}_{tm(1)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = n, \quad (\text{ii})$$

si $k \geq 2$ y $t = 1$, entonces:

$$\mathcal{F}_{tm(k)}(P_n^{n_1}) = 0 \quad (\text{iii})$$

y para $k \geq 2$ y $t \geq 2$, tenemos la fórmula:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) &= \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) \\ &+ n_t \cdot \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}}). \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

Demostración Sea φ una arista-coloración de P_n , tal que $P_n = P_n^{n_1, \dots, n_t}$, de orden $n \geq 2$.

(i) y (ii) Sea $k \leq 1$.

Por la afirmación 1, sabemos que serán siempre conjuntos independientes por trayectorias monocromáticas el vacío, \emptyset , y los conjuntos unitarios $\{v\}$, con $v \in V(G)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_{tm(0)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = 1$ y $\mathcal{F}_{tm(1)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = n$.

Ahora sea $k \geq 2$.

(iii) Si $t = 1$:

$P_n = P_n^{n_1}$, i. e. φ es una coloración monocromática de P_n por lo que todo conjunto tm -independiente tiene a lo más un vértice, así, para toda $k \geq 2$, $\mathcal{F}_{tm(k)}(P_n^{n_1}) = 0$.

(iv) Si, por otro lado, $t \geq 2$:

φ asigna al menos dos colores distintos a los vértices de la trayectoria. Sea S un conjunto tm -independiente de $P_n^{n_1, \dots, n_t}$ tal que $|S| = k$, $S \subseteq V(P_n^{n_1, \dots, n_t})$. Sabemos que n_t es la longitud de H_t , la subtrayectoria monocromática que contiene a v_n , el vértice terminal de P_n .

Como S es tm -independiente, entonces S contiene a lo más un vértice de cada H_i , $i = 1, \dots, t$. En particular, contiene a lo más un vértice de $H_t = P_n\langle\{v_{n-n_t}, \dots, v_n\}\rangle$. Así, tenemos dos casos:

Caso 1. $v_{n-i} \notin S$, para toda $i = 0, 1, \dots, n_t - 1$.

Sea \mathcal{S}_1 la familia de k -conjuntos tm -independientes S tales que $v_{n-i} \notin S$ para toda $i = 0, 1, \dots, n_t - 1$. Entonces, por definición de $P_n^{n_1, \dots, n_t}$, S es un k -conjunto tm -independiente arbitrario de la gráfica $P_n^{n_1, \dots, n_t} - \{v_{n-i} \mid i = 0, 1, \dots, n_t - 1\}$, la cual es isomorfa a $P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}$. Por lo tanto,

$$|\mathcal{S}_1| = \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}).$$

Caso 2. $v_{n-i} \in S$, para alguna $0 \leq i \leq n_t - 1$.

Sea \mathcal{S}_2 la familia de k -conjuntos tm -independientes S , tales que para alguna $i = 0, 1, \dots, n_t - 1$, $v_{n-i} \in S$. Como $v_{n-i} \in S$, los vértices restantes de la subtrayectoria monocromática H_t no están en S . En otras palabras, $v_{n-j} \notin S$, para toda $j \in \{0, 1, \dots, n_t\} \setminus \{i\}$. Entonces $S = S^* \cup \{v_{n-i}\}$, donde S^* es un $k-1$ -conjunto tm -independiente arbitrario de la gráfica $P_n^{n_1, \dots, n_t} - \{v_{n-i} \mid i = 0, 1, \dots, n_t\}$, la cual es isomorfa a $P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}}$. Por lo que se tienen $\mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}})$ k -conjuntos tm -independientes que contienen a v_{n-i} . Como por hipótesis, $0 \leq i \leq n_t - 1$, entonces podemos elegir el vértice v_{n-i} de n_t maneras. Así,

$$|\mathcal{S}_2| = n_t \cdot \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}}).$$

Por lo tanto, si $t \geq 2$ y $k \geq 2$, para $\mathcal{F}_{tm(k)}(P_n^{n_1, \dots, n_t})$ tenemos la fórmula de recurrencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) &= \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) \\ &\quad + n_t \cdot \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}}). \end{aligned} \quad \square$$

El siguiente teorema nos dice cómo calcular el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de una trayectoria, no en términos de k -conjuntos, sino de manera general.

Teorema 3.6 Sea φ una arista-coloración de P_n , tal que $P_n = P_n^{n_1, \dots, n_t}$, con orden $n \geq 2$, y sean $k \geq 0, t \geq 1$. Entonces:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1}) = n + 1,$$

y para $t \geq 2$, se satisface:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = \mathcal{F}_{tm}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) + n_t \cdot \mathcal{F}_{tm}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}).$$

Demostración Sabemos que de la definición de $\mathcal{F}_{tm}(G)$, para cualquier gráfica G y $k \geq 0$, se sigue que:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}). \quad (a)$$

Ahora, si $t = 1$, entonces $P_n^{n_1}$ es monocromática y $k \in \{0, 1\}$, entonces por el teorema 3.5, incisos (i), (ii) y (iii) tenemos que:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1}) = \mathcal{F}_{tm(0)}(P_n^{n_1}) + \mathcal{F}_{tm(1)}(P_n^{n_1}) = n + 1.$$

Si $t \geq 2$, aplicando el teorema 3.5 en (a), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) &= \mathcal{F}_{tm(0)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) + \mathcal{F}_{tm(1)}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) \\ &\quad + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) + n_t \cdot \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}) \\ &= 1 + n + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) \\ &\quad + n_t \cdot \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}). \end{aligned} \quad (*)$$

Como $k \geq 2$, haciendo $r = k - 1$, tenemos que:

$$\sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}) = \sum_{r \geq 1} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}). \quad (**)$$

Así, si sumamos $n_t - n_t$ a (*) y aplicamos (**), tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) &= 1 + n + (n_t - n_t) \\ &\quad + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) + n_t \cdot \sum_{r \geq 1} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}). \end{aligned}$$

Como $1 = \mathcal{F}_{tm(0)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}})$ y $n - n_t = \mathcal{F}_{tm(1)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}})$, entonces :

$$1 + (n - n_t) + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}).$$

Además:

$$1 + \sum_{r \geq 1} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) = \sum_{r \geq 0} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}).$$

Por lo que:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) + n_t \cdot \sum_{r \geq 0} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}).$$

Y por (a), finalmente podemos afirmar que:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n^{n_1, \dots, n_t}) = \mathcal{F}_{tm}(P_{n-n_t}^{n_1, \dots, n_{t-1}}) + n_t \cdot \mathcal{F}_{tm}(P_{n-n_t-1}^{n_1, \dots, n_{t-1}-1}). \quad \square$$

Como ya vimos, en el caso gráficas con arista-coloraciones propias, las trayectorias monocromáticas tienen longitud a lo más uno, por lo que es equivalente encontrar el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de una gráfica con una arista-coloración propia y su número de Fibonacci usual. Así, el teorema 3.4 (i) se obtiene como un corolario de los teoremas 3.5 y 3.6:

Corolario 3.7 *Sea φ una arista-coloración propia de P_n , $n \geq 1$, entonces:*

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n) = F_{n+2}.$$

Demostración Procederemos por inducción fuerte sobre la longitud de la trayectoria.

Sea φ una coloración propia de P_n , si $n = 1$:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_1) = \mathcal{F}_{tm(0)}(P_1) + \mathcal{F}_{tm(1)}(P_1) = 1 + 1 = 2 = F_3.$$

Si $n = 2$, entonces $t = 1$, *i. e.* P_n es monocromática y para $k \geq 2$ tenemos que $\mathcal{F}_{tm(k)}(P_n) = 0$, así:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_2) = \mathcal{F}_{tm(0)}(P_2) + \mathcal{F}_{tm(1)}(P_2) = 1 + 2 = 3 = F_4.$$

Ahora, supongamos que, para toda arista-coloración propia de P_k , $\mathcal{F}_{tm}(P_k) = F_{k+2}$ para toda $k < n$, entonces si $n \geq 3$, como la coloración es propia, $n_i = 1$ para toda $i = 0, 1, \dots, t$ y por el teorema 3.6:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n) = \mathcal{F}_{tm}(P_{n-1}) + 1 \cdot \mathcal{F}_{tm}(P_{n-2}).$$

Por hipótesis de inducción $\mathcal{F}_{tm}(P_{n-1}) = F_{n+1}$ y $\mathcal{F}_{tm}(P_{n-2}) = F_n$. Por lo tanto:

$$\mathcal{F}_{tm}(P_n) = F_{n+1} + F_n. \quad \square$$

De manera similar a como se definió para P_n , sea φ una arista-coloración de el ciclo de orden n , C_n , y $\eta = (H_i)_{i \in \{1, \dots, t\}}$ la sucesión de trayectorias monocromáticas de C_n de longitud n_i , con $n_i \geq 1$, $i = 1, \dots, t$ tal que $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ si y solo si $j = i + 1$ o $i = 1$ y $j = t$. Entonces para el ciclo C_n utilizamos la notación $C_n^{n_1, \dots, n_t}$.

Teorema 3.8 *Sea φ una arista-coloración de C_n , tal que $C_n = C_n^{n_1, \dots, n_t}$, con orden $n \geq 3$, y sean $k \geq 0, t \geq 1$. Entonces:*

$$\mathcal{F}_{tm(0)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) = 1, \quad (i)$$

$$\mathcal{F}_{tm(1)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) = n, \quad (ii)$$

si $k \geq 2$ y $t = 1$, entonces:

$$\mathcal{F}_{tm(k)}(C_n^{n_1}) = 0 \quad (iii)$$

y para $k \geq 2$ y $t \geq 2$, tenemos la fórmula:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm(k)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) &= \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) \\ &\quad + \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_1-n_t-1}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}). \end{aligned} \quad (iv)$$

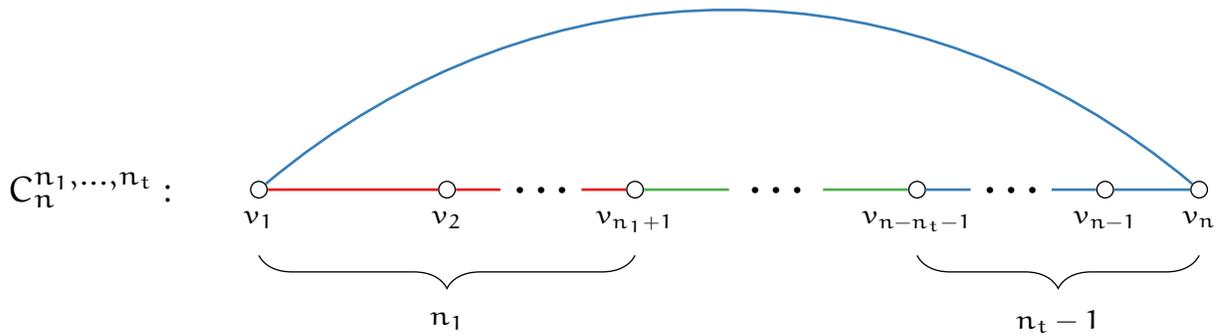


Figura 37: $C_n = C_n^{n_1, \dots, n_t}$

Demostración La prueba de (i), (ii) y (iii) es análoga a la del teorema 3.5. Sean $k \geq 2$, $t \geq 2$ y S un k -conjunto tm -independiente de $C_n^{n_1, \dots, n_t}$, $S \subseteq V(C_n^{n_1, \dots, n_t})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $V(H_1) \cap V(H_t) = \{v_1\}$, entonces tenemos dos casos:

Caso 1. $v_1 \notin S$.

Sea \mathcal{S}_1 la familia de k -conjuntos tm -independientes S tales que $v_1 \notin S$. Entonces, S' es un k -conjunto tm -independiente arbitrario de la gráfica $C_n^{n_1, \dots, n_t} - \{v_1\}$, la cual es isomorfa a $P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}$. Por lo tanto,

$$|\mathcal{S}_1| = \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}).$$

Caso 2. $v_1 \in S$.

Sea \mathcal{S}_2 la familia de k -conjuntos tm -independientes, S , tales que $v_1 \in S$. Como a lo más, un único vértice por cada trayectoria monocromática puede pertenecer al conjunto S , entonces $v_i \notin S$, para toda $v_i \in (V(H_1) \cup V(H_t)) \setminus \{v_1\} = \{v_2, v_3, \dots, v_{n_1+1}\} \cup \{v_{n-n_t+1}, \dots, v_n\}$. Entonces $S = S^* \cup \{v_1\}$, donde S^* es un $(k-1)$ -conjunto tm -independiente arbitrario de la gráfica $C_n^{n_1, \dots, n_t} - (V(H_1) \cup V(H_t))$, la cual es isomorfa con $P_{n-n_1-n_t-1}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}$.

Por lo tanto,

$$|\mathcal{S}_2| = \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_1-n_t-1}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}).$$

Como $\mathcal{F}_{tm(k)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) = |\mathcal{S}_1| + |\mathcal{S}_2|$, el teorema queda demostrado. \square

Otra vez, de manera similar, podemos generalizar este resultado para encontrar el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de un ciclo arista-coloreado.

Teorema 3.9 Sea φ una arista-coloración de C_n , tal que $C_n = C_n^{n_1, \dots, n_t}$, con orden $n \geq 3$, y sea $t \geq 1$. Entonces,

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1}) = n + 1,$$

y para $t \geq 2$, se satisface que:

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) = \mathcal{F}_{tm}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) + \mathcal{F}_{tm}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}).$$

Demostración Sabemos que de la definición de $\mathcal{F}_{tm}(G)$, se sigue que para cualquier gráfica G , en particular para un ciclo $C_n = C_n^{n_1, \dots, n_t}$ y para $k \geq 0$:

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}). \quad (b)$$

Si $t = 1$, entonces $C_n^{n_1}$ es monocromática y $k \in \{0, 1\}$, entonces por el teorema 3.8, incisos (i), (ii) y (iii), tenemos que:

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1}) = \mathcal{F}_{tm(0)}(C_n^{n_1}) + \mathcal{F}_{tm(1)}(C_n^{n_1}) = n + 1.$$

Ahora, si $t \geq 2$, por el inciso (iv) del teorema 3.8, para toda $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm(k)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) &= \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) \\ &\quad + \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 3.8 en (b):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) &= \mathcal{F}_{tm(0)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) + \mathcal{F}_{tm(1)}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) \\ &+ \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}) \\ &= 1 + n + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) \\ &\quad + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}). \quad (+) \end{aligned}$$

Como $k \geq 2$, haciendo $r = k - 1$, tenemos que:

$$\sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k-1)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}) = \sum_{r \geq 1} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}). \quad (++)$$

Así, si sumamos 1 - 1 a (+) y aplicando (++), tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) &= 1 + n + (1 - 1) + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) \\ &\quad + \sum_{r \geq 1} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}). \end{aligned}$$

Como $1 = \mathcal{F}_{tm(0)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1})$ y $n - 1 = \mathcal{F}_{tm(1)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1})$, entonces :

$$1 + (n - 1) + \sum_{k \geq 2} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}).$$

Además:

$$1 + \sum_{r \geq 1} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}) = \sum_{r \geq 0} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}).$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) &= \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) \\ &\quad + \sum_{r \geq 0} \mathcal{F}_{tm(r)}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}). \end{aligned}$$

Y, finalmente, por (b):

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n^{n_1, \dots, n_t}) = \mathcal{F}_{tm}(P_{n-1}^{n_1-1, n_2, \dots, n_{t-1}, n_t-1}) + \mathcal{F}_{tm}(P_{n-n_1-n_{t-1}}^{n_2-1, n_3, \dots, n_{t-2}, n_{t-1}-1}). \quad \square$$

Corolario 3.10 Sea φ una arista-coloración propia de un ciclo C_n con $n \geq 3$, entonces:

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n) = L_n.$$

Demostración Sea φ una coloración propia de C_n . Si $n = 3$, entonces $C_3 \simeq K_3$ y los únicos conjuntos tm -independientes son los unitarios y el vacío, por lo que $\mathcal{F}_{tm}(C_3) = 4 = L_3$.

Para $n \geq 4$, como φ es una arista-coloración propia, $n_i = 1$ para toda $i = 1, \dots, t$, y por el teorema 3.9:

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n) = \mathcal{F}_{tm}(P_{n-1}) + \mathcal{F}_{tm}(P_{n-3})$$

Como P_{n-1} y P_{n-3} están coloreadas propiamente, por el corolario 3.7 sabemos que $\mathcal{F}_{tm}(P_{n-1}) = F_{n+1}$ y $\mathcal{F}_{tm}(P_{n-3}) = F_{n-1}$, respectivamente. Además por la proposición 3.1 $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, por lo tanto:

$$\mathcal{F}_{tm}(C_n) = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \quad \square$$

3.2.2 Los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas en gráficas arista-coloreadas

A continuación una serie de resultados sobre los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas.

Afirmación 2 Para una cualquier arista-coloración de una gráfica G , se cumple que:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \leq \mathcal{F}(G).$$

Demostración Sea G una gráfica arista-coloreada. Notemos primero, que todo conjunto independiente por trayectorias monocromáticas es un conjunto independiente en el sentido usual. Sea $S \subseteq V(G)$ un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas de G , *i. e.* entre cualesquiera dos vértices, $x, y \in S$, no existe una xy -trayectoria monocromática. En particular, x y y son no-adyacentes, pues de existir una arista $e = xy$, esta sería una trayectoria monocromática de longitud 1. Así, tenemos que si $S \in \mathcal{I}_{tm}(G)$, entonces $S \in \mathcal{I}(G)$ y $\mathcal{I}_{tm}(G) \subseteq \mathcal{I}(G)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \leq \mathcal{F}(G). \quad \square$$

Observación Si la arista-coloración de G es propia, entonces $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}_{tm}(G)$.

Pues cualquier trayectoria monocromática en G es de longitud a lo más 1.

Afirmación 3 Si H es una subgráfica generadora de la gráfica arista-coloreada G , entonces:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \leq \mathcal{F}_{tm}(H).$$

Demostración Sea H una subgráfica generadora de G , entonces $V(H) = V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Sea $S \in \mathcal{J}_{tm}(G)$, como $V(H) = V(G)$, entonces S es también un subconjunto de vértices de H . Ahora veamos que S es independiente por trayectorias monocromáticas en H . Sean $x, y \in S$, como no existe una xy -trayectoria monocromática en G , y $E(H) \subseteq E(G)$, entonces no hay una xy -trayectoria monocromática en H . Así, para todo $S \in \mathcal{J}_{tm}(G)$, tenemos que $S \in \mathcal{J}_{tm}(H)$, entonces $\mathcal{J}_{tm}(G) \subseteq \mathcal{J}_{tm}(H)$. Y por lo tanto, $\mathcal{F}_{tm}(G) \leq \mathcal{F}_{tm}(H)$. \square

Si H es subgráfica de G pero no es generadora, no necesariamente se mantiene la desigualdad. Pues veremos que una consecuencia de la siguiente afirmación, es que si $c(G) > 1$ y consideramos como subgráfica a una de sus componentes conexas, G_i , tenemos que $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq \mathcal{F}_{tm}(G_i)$. Además, si H es una subgráfica inducida de G , entonces siempre ocurre que $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq \mathcal{F}_{tm}(H)$, pues todo conjunto tm -independiente en H es tm -independiente en G .

Lema 3.11 Sean G_1 y G_2 dos gráficas, ajenas en vértices, arista-coloreadas, entonces:

$$\mathcal{F}_{tm}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{F}_{tm}(G_1) \cdot \mathcal{F}_{tm}(G_2).$$

Demostración Sean G_1 y G_2 dos gráficas ajenas en vértices, arista-coloreadas, y sea $G = G_1 \cup G_2$. Veamos primero que si $S \in \mathcal{J}_{tm}(G)$, entonces $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \in \mathcal{J}_{tm}(G_1)$ y $S_2 \in \mathcal{J}_{tm}(G_2)$.

Sea $S \in \mathcal{J}_{tm}(G)$, entonces $S \subseteq V(G)$ y como $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $S \subseteq V(G_1) \cup V(G_2)$. Además, si $S_1 = S \cap V(G_1)$ y $S_2 = S \cap V(G_2)$, S_1 y S_2 son conjuntos tm -independientes de G_1 y G_2 , respectivamente, pues S es un conjunto tm -independiente y un subconjunto de un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas es, a su vez, independiente por trayectorias monocromáticas en la misma gráfica. Así, $\mathcal{J}_{tm}(G) \subseteq \{S_1 \cup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{J}_{tm}(G_1) \text{ y } S_2 \in \mathcal{J}_{tm}(G_2)\}$.

Ahora, sean $S_1 \in \mathcal{J}_{tm}(G_1)$ y $S_2 \in \mathcal{J}_{tm}(G_2)$, y veamos que $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{J}_{tm}(G)$. $S_1 \cup S_2 \subseteq V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$. Sean $x, y \in S_1 \cup S_2$, si $x, y \in S_1$ o $x, y \in S_2$, sabemos que no existe trayectoria monocromática entre ellos. Por otro lado, si $x \in S_1$ y $y \in S_2$, entonces no existe xy -trayectoria en $G_1 \cup G_2$ pues G_1 y G_2 son ajenas en vértices, y por tanto no existe trayectoria monocromática entre ellos. Entonces, $S_1 \cup S_2$ es un conjunto tm -independiente en $G = G_1 \cup G_2$. Así, $\{S_1 \cup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{J}_{tm}(G_1) \text{ y } S_2 \in \mathcal{J}_{tm}(G_2)\} \subseteq \mathcal{J}_{tm}(G)$. Por lo tanto, $\mathcal{J}_{tm}(G) = \{S_1 \cup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{J}_{tm}(G_1) \text{ y } S_2 \in \mathcal{J}_{tm}(G_2)\}$. Entonces, por cada $S_1 \in \mathcal{J}_{tm}(G_1)$, hay tantos conjuntos tm -independientes en $G_1 \cup G_2$ que contienen a S_1 como conjuntos tm -independientes tiene G_2 , i. e. $|\{S_1 \cup S_2 \mid S_1 \in \mathcal{J}_{tm}(G_1), S_2 \in \mathcal{J}_{tm}(G_2)\}| = |\mathcal{J}_{tm}(G_1)| \cdot |\mathcal{J}_{tm}(G_2)|$.

Por lo tanto:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{F}_{tm}(G_1) \cdot \mathcal{F}_{tm}(G_2). \quad \square$$

Las siguientes son consecuencias inmediatas de este resultado:

Teorema 3.12 *Sea G una gráfica arista-coloreada con componentes conexas G_1, \dots, G_k . Entonces:*

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = \prod_{i=1}^k \mathcal{F}_{tm}(G_i).$$

Demostración Procederemos por inducción sobre el número de componentes conexas de G .

Si $c(G) = 1$ el resultado es claro.

Si $c(G) = 2$, sean G_1 y G_2 las componentes conexas de G , entonces $G = G_1 \cup G_2$ y el resultado se sigue directamente del lema anterior.

Supongamos que si $c(G) = k - 1$, para alguna $k \geq 2$, entonces $\mathcal{F}_{tm}(G) = \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_{tm}(G_i)$.

Ahora sea G una gráfica con k componentes conexas. Si $H = \cup_{i=1}^{k-1} G_i$ y $G' = G_k$, entonces $G = G' \cup H$. Por hipótesis de inducción y como $c(H) = k - 1$, tenemos que $\mathcal{F}_{tm}(H) = \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_{tm}(G_i)$, además ya probamos que $\mathcal{F}_{tm}(G' \cup H) = \mathcal{F}_{tm}(G') \cdot \mathcal{F}_{tm}(H)$ y como $G = G' \cup H$, entonces:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{F}_{tm}(G_k) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_{tm}(G_i) = \prod_{i=1}^k \mathcal{F}_{tm}(G_i). \quad \square$$

Corolario 3.13 *Si $\mathcal{F}_{tm}(G)$ es un número primo entonces G es conexa.*

Demostración (por contrapositiva) Sea G una gráfica inconexa y sean G_1, \dots, G_k las componentes conexas de G . Por el teorema 3.12, $\mathcal{F}_{tm}(G) = \prod_{i=1}^k \mathcal{F}_{tm}(G_i)$, entonces si G_i es una componente conexa de G :

$$\mathcal{F}_{tm}(G_i) \mid \mathcal{F}_{tm}(G),$$

además, $\mathcal{F}_{tm}(G_i) \geq 2$, pues las componentes de G son no vacías. Por lo tanto si $\mathcal{F}_{tm}(G)$ es primo, entonces G es conexa. \square

Afirmación 4 *Sea G una gráfica arista-coloreada conexa de orden n . Entonces:*

$$n + 1 \leq \mathcal{F}_{tm}(G) \leq 2^{n-1} + 1,$$

$\mathcal{F}_{tm}(G) = n + 1$ si G es una gráfica monocromática de orden n o $G = K_n$ y $\mathcal{F}_{tm}(G) = 2^{n-1} + 1$ si $G = K_{1,n-1}$ tal que la coloración de G es propia.

Demostración Sea G una gráfica conexa, arista-coloreada de orden n . Por la afirmación 1 sabemos que $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq n + 1$. Si $G = K_n$, para cualquier arista-coloración de K_n se tiene que $\alpha_{tm}(G) = 1$. Por lo que $\mathcal{F}_{tm}(K_n) = n + 1$. Ahora, supongamos que G es no completa

y monocromática, entonces para todo par de vértices $u, v \in V(G)$, existe una uv -trayectoria monocromática, por lo que, de nueva cuenta, $\alpha_{tm} = 1$ y los conjuntos independientes son el vacío y todos los unitarios, por lo que $\mathcal{F}_{tm}(G) = n + 1$.

Si G es conexa, de orden n , para que tenga el mayor número de conjuntos tm -independientes, debe estar coloreada propiamente, así sucederá que $\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{F}(G)$. Entonces, basta ver qué pasa con los conjuntos independientes en una gráfica conexa. Para que tenga el mayor número de independientes siendo conexa, debe tener el mínimo número de aristas. Si G es una gráfica conexa de tamaño mínimo, entonces G es un árbol. Y los árboles de orden n con más conjuntos independientes, son aquellos que tienen más vértices terminales, *i. e.* las estrellas. Sea $G \simeq K_{1, n-1}$, si consideramos una coloración propia, tenemos que $\mathcal{F}_{tm}(K_{1, n-1}) = \mathcal{F}(K_{1, n-1}) = 2^{n-1} + 1$. \square

3.3 COTAS EN EL NÚMERO DE FIBONACCI DE LAS GRÁFICAS ARISTA-COLOREADAS

En esta sección se prueban y analizan los resultados obtenidos por I. Włoch [14].

Recordemos que el número de independencia por trayectorias monocromáticas de una gráfica G , es la cardinalidad de un conjunto tm -independiente máximo de G . Con este primer teorema encontramos una cota para el número de Fibonacci de una gráfica en términos de su número de independencia por trayectorias monocromáticas.

Teorema 3.14 *Dada una arista-coloración arbitraria de una gráfica G de orden n , con número de independencia por trayectorias monocromáticas $\alpha = \alpha_{tm}(G)$,*

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \geq 2^\alpha + n - \alpha.$$

$\mathcal{F}_{tm}(G) = 2^\alpha + n - \alpha$ si y solo si G se construye al unir cada vértice en $\overline{K_\alpha}$ con al menos un vértice en la gráfica arista-coloreada $G_{n-\alpha}$ de orden $n - \alpha$, y estas aristas coloreadas de tal forma que para cada $x, y \in V(G_{n-\alpha})$ y para cada $u, v \in V(\overline{K_\alpha})$:

- (i) existe una xy -trayectoria monocromática en G ,
- (ii) existe una xu -trayectoria monocromática en G y
- (iii) no existe uv -trayectoria monocromática en G .

Demostración Sea S un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas máximo de G . Como S es máximo, entonces $|S| = \alpha$. Sabemos que todo subconjunto de S es también independiente por trayectorias monocromáticas y que el número de subconjuntos de S son $2^{|S|}$. Además, hay $n - \alpha$ vértices de G que no están en S y por cada uno de estos vértices tenemos al menos un conjunto independiente, el conjunto unitario. Así:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \geq 2^{|S|} + n - \alpha.$$

Ahora, sea $\mathcal{F}_{tm}(G) = 2^\alpha + n - \alpha$, entonces cualquier conjunto tm -independiente es, o un subconjunto de S , con $|S| = \alpha$ o un conjunto unitario de un elemento de $V(G) \setminus S$. Esto implica que:

- (i) entre cualesquiera dos vértices x, y de $V(G) \setminus S$ existe una xy -trayectoria monocromática, pues de lo contrario x, y serían elementos de un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas de la gráfica G ,
- (ii) si $x \in V(G) \setminus S$ y $v \in S$, existen xv -trayectorias monocromáticas en G para cada par x, v pues de lo contrario S no sería máximo, y por último
- (iii) no existen uv -trayectorias monocromáticas entre los vértices de S , pues de lo contrario S no sería independiente por trayectorias monocromáticas.

Por tanto, los incisos (i), (ii) y (iii) implican la construcción de G .

Ahora, sea G una gráfica construida como en el enunciado del teorema.

Por el inciso (i), todo conjunto tm -independiente $S^* \subseteq V(G_{n-\alpha})$ es unitario, pues por construcción existen trayectorias monocromáticas entre cualesquiera $x, y \in G_{n-\alpha}$.

Además, por el inciso (ii), existen xu -trayectorias monocromáticas entre cada par de vértices $x \in V(G_{n-\alpha})$ y $u \in V(\overline{K}_\alpha)$, por lo que que no existe en G un conjunto tm -independiente S' , tal que $S' \cap V(\overline{K}_\alpha) \neq \emptyset$ y $S' \cap V(G_{n-\alpha}) \neq \emptyset$.

Finalmente, el conjunto $S = V(\overline{K}_\alpha)$ es un conjunto tm -independiente máximo, pues por el inciso (iii), no existen trayectorias monocromáticas entre sus vértices.

Así, como $|V(G_{n-\alpha})| = n - \alpha$ y S tiene $2^{|S|}$ subconjuntos tm -independientes, incluyendo S y \emptyset , tenemos que $\mathcal{F}_{tm}(G) = 2^{|S|} + n - \alpha$. \square

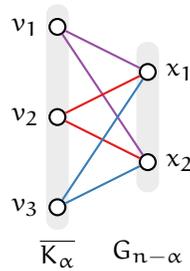


Figura 38: Un ejemplo de la construcción de la gráfica G de orden n para la cual $\mathcal{F}_{tm}(G) = 2^\alpha + n - \alpha$. En este caso $n = 5$ y $\alpha = 3$ con $\mathcal{F}_{tm}(G) = 10$.

Pedersen y Vestergard probaron el resultado correspondiente para el caso de conjuntos independientes en [15], lo cual es equivalente a considerar conjuntos independientes por trayectorias monocromáticas en gráficas arista-coloreadas en las que la coloración es propia. La prueba para la desigualdad es muy similar a la que utilizamos en el teorema anterior. En el caso de la igualdad la gráfica se construye al unir cada vértice de $\overline{K_\alpha}$ con cada uno de los vértices de $K_{n-\alpha}$.

Sea G una gráfica k -arista-coloreada y sea $\mathcal{Q} = \{Q_i\}_{i \in I}$ la familia de subgráficas monocromáticas conexas de G , máximas por contención, con $I = \{1, \dots, k\}$ la imagen de la k -arista-coloración. Y definimos la gráfica simple no coloreada $G(\mathcal{Q})$ como sigue: $V(G(\mathcal{Q})) = V(G)$, $E(G(\mathcal{Q})) = \{v_p v_q \mid v_p, v_q \in V(Q_i), i \in I\}$ y reemplazando aristas múltiples con una sola arista. Al color de la arista $e \in E(G)$ lo denotamos $c_G(e)$ y al color de la subgráfica monocromática $Q \subseteq G$ lo denotamos por $c_G(Q)$.

Afirmación 5 Cualquier par de vértices $u, v \in V(G(\mathcal{Q}))$ son no adyacentes, si y solo si no existe una uv -trayectoria monocromática en G .

Demostración Sea G una gráfica arista-coloreada, con $G(\mathcal{Q})$ como se definió previamente y sean $u, v \in V(G(\mathcal{Q}))$, tales que $uv \notin E(G(\mathcal{Q}))$, por definición de la gráfica $G(\mathcal{Q})$, esto ocurre si y solo si $u \in V(Q_i)$ y $v \in V(Q_j)$ con $i \neq j$. Y, a su vez, los vértices u y v pertenecen a distintas subgráficas monocromáticas conexas de G si y solo si no existe una uv -trayectoria monocromática en G , por lo que queda demostrada la afirmación. \square

En un artículo anterior [12], I. Włoch y A. Włoch demostraron lo siguiente:

Teorema 3.15 Para una arista-coloración arbitraria de una gráfica G ,

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{F}(G(\mathcal{Q})).$$

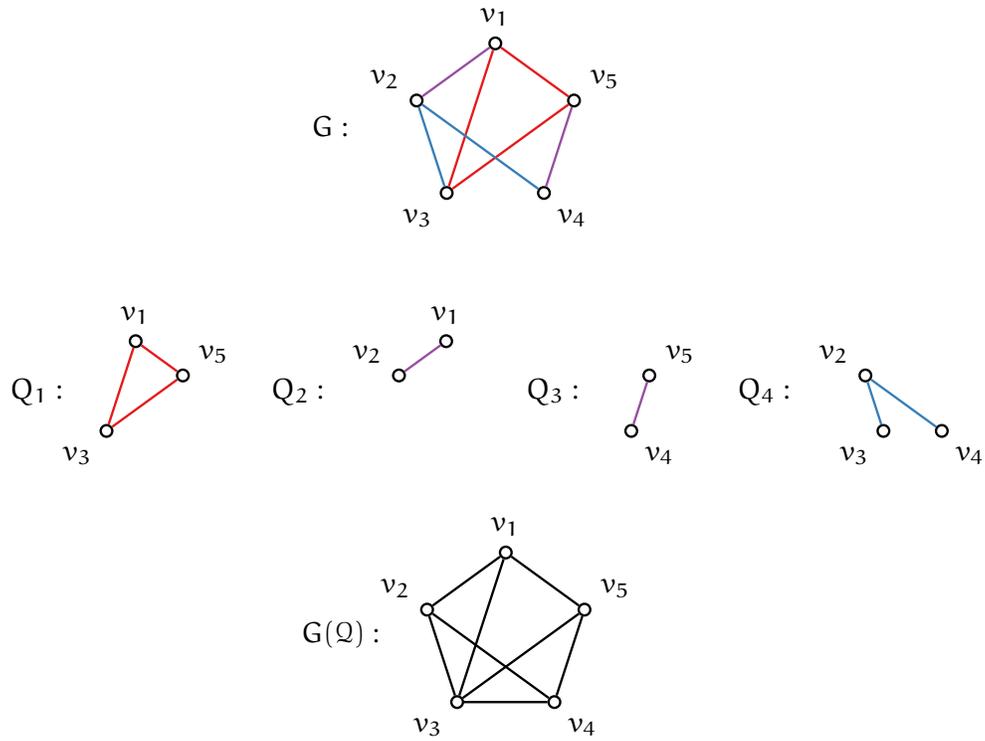


Figura 39: Un ejemplo de la construcción de la gráfica $G(Q)$

Demostración Sea $S \subseteq V(G)$ un conjunto tm -independiente de G y supongamos que S no es independiente en $G(\mathcal{Q})$. Como $V(G) = V(G(\mathcal{Q}))$, S es también un subconjunto de vértices de $G(\mathcal{Q})$. Si S no es independiente, entonces existen $v_p, v_q \in S$, tales que $v_p v_q \in E(G(\mathcal{Q}))$, pero por la definición de $G(\mathcal{Q})$, $v_p, v_q \in Q_i$ para alguna $i \in I$. Como Q_i es una subgráfica conexa monocromática de G , entonces existe al menos una $v_p v_q$ -trayectoria monocromática en Q_i y por lo tanto en G . Esto es, si S no es independiente en $G(\mathcal{Q})$ entonces S no es independiente por trayectorias monocromáticas en G , y como esto ocurre para cualquier conjunto $S \subseteq V(G)$ independiente por trayectorias monocromáticas de G podemos concluir que todo conjunto S independiente por trayectorias monocromáticas de G es también independiente en $G(\mathcal{Q})$ (i).

Ahora sea S^* un subconjunto independiente de los vértices de $G(\mathcal{Q})$ y supongamos que S^* no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en G . Como S^* no es independiente por trayectorias monocromáticas, existen $x, y \in S^*$ tales que existe una xy -trayectoria monocromática en G . A su vez, $x, y \in V(Q_i)$ y por definición de $G(\mathcal{Q})$, $xy \in E(G(\mathcal{Q}))$, lo cual implica que S^* no es independiente en $G(\mathcal{Q})$. De esta forma todo conjunto S^* independiente en $G(\mathcal{Q})$ es independiente por trayectorias monocromáticas en G (ii).

Por (i) y (ii) queda demostrado el teorema. □

Proposición Sea G una gráfica arista-coloreada y $x, y \in V(Q_i)$ para $i \in I$, tal que $xy \notin E(G)$. Entonces, $\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{F}_{tm}(G + xy)$ con $c_{G+xy}(xy) = c_G(Q_i)$.

Demostración Sean G y $G + xy$ dos gráficas arista-coloreadas, con $x, y \in V(Q_i)$, tales que $xy \notin E(G)$, y $c_{G+xy}(xy) = c_G(Q_i)$. Como $x, y \in V(Q_i)$, entonces $xy \in E(G(\mathcal{Q}))$ y como $c_{G+xy}(xy) = c_G(Q)$, entonces $xy \in E(G + xy(\mathcal{Q}))$. Así, $G(\mathcal{Q}) \simeq (G + xy(\mathcal{Q}))$ y por el teorema 3.15 tenemos que:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{F}(G(\mathcal{Q})) = \mathcal{F}(G + xy(\mathcal{Q})) = \mathcal{F}_{tm}(G + xy). \quad \square$$

Teorema 3.17 Sea G una gráfica arista-coloreada de orden n y sea $m(\overline{G(\mathcal{Q})})$ el tamaño de la gráfica $\overline{G(\mathcal{Q})}$. Entonces

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \geq 1 + n + m(\overline{G(\mathcal{Q})}).$$

La igualdad se da si y solo si $\alpha_{tm}(G) \leq 2$, i. e. K_3 no es subgráfica de $\overline{G(\mathcal{Q})}$.

Demostración Sabemos que cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G(\mathcal{Q}))$ son no adyacentes si y solo si no existe una uv -trayectoria monocromática en G . Entonces, $\{u, v\}$ es un conjunto tm -independiente si y solo si $uv \notin E(G(\mathcal{Q}))$, lo cual ocurre si y solo si $uv \in E(\overline{G(\mathcal{Q})})$. Así, $m(\overline{G(\mathcal{Q})})$ es el número de subconjuntos tm -independientes $S \subseteq V(G)$, tales que $|S| = 2$. Por lo tanto, si $\alpha_{tm}(G) > 1$, entonces $m(\overline{G(\mathcal{Q})}) \neq 0$ y $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq 1 + n + m(\overline{G(\mathcal{Q})})$.

Supongamos que $K_3 \subseteq \overline{G(\mathcal{Q})}$, esto ocurre si y solo si $G(\mathcal{Q})$ contiene un conjunto independiente, S , de cardinalidad 3, si y solo si S es un conjunto tm -independiente en G . Pero sabemos que $m(\overline{G(\mathcal{Q})}) = \{S \subseteq V(G), \text{ conjuntos } tm\text{-ind.} \mid |S| = 2\} \text{ y } |S| = 3$, por lo que $\mathcal{F}_{tm}(G) > 1 + n + m(\overline{G(\mathcal{Q})})$. Por lo tanto, si $\alpha_{tm}(G) \leq 2$, se da la igualdad. \square

Observación Si $S \subseteq V(G)$, entonces S es independiente en G si y solo si S es un clan en $\overline{G(\mathcal{Q})}$.

Corolario 3.18 Sea G una gráfica arista-coloreada de orden n y sea t el número de componentes en $\overline{G(\mathcal{Q})}$. Entonces $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq 2n + 1 - t$. La igualdad se da si y solo si $\overline{G(\mathcal{Q})}$ es un bosque.

Demostración Si $\overline{G(\mathcal{Q})}$ es conexa, entonces $t = 1$ y veamos que $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq 2n + 1 - 1 = 2n$. Por el teorema 3.17, sabemos que $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq n + 1 + m(\overline{G(\mathcal{Q})})$. Como $\overline{G(\mathcal{Q})}$ es conexa, entonces $m(\overline{G(\mathcal{Q})}) \geq n - 1$, por lo tanto $\mathcal{F}_{tm}(G) \geq n + 1 + n - 1 = 2n$.

Si $\overline{G(\mathcal{Q})}$ es inconexa, entonces $t > 1$ y similarmente, tenemos:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \geq n + 1 + m(\overline{G(\mathcal{Q})}) \geq n + 1 + n - t = 2n + 1 - t.$$

Si $\mathcal{F}_{tm}(G) = 2n + 1 - t$, entonces $m(\overline{G(\mathcal{Q})}) = n - t$, por lo que $\overline{G(\mathcal{Q})}$ es un bosque, que además sabemos no contiene ciclos, en particular, K_3 no es subgráfica de $\overline{G(\mathcal{Q})}$. \square

En [15] Pedersen y Vestergaard probaron los siguientes teoremas que se utilizarán más adelante para probar resultados adicionales relacionados con la gráfica $G(\mathcal{Q})$ y $\mathcal{F}_{tm}(G)$.

Definición Decimos que una gráfica G es *libre de garras* si $K_{1,3}$ no es subgráfica inducida de G .

Lema 3.19 Todo vértice terminal v , de una trayectoria inducida de longitud máxima, en una gráfica G conexa, no completa y libre de garras, cumple que $G - v$ y $G - N[v]$ son conexas.

Demostración Sea $P = (v_0, \dots, v_k)$ una trayectoria inducida máxima de G , entonces $k \geq 2$, pues por hipótesis G no es completa. Supongamos por contradicción que $G - v_k$ o $G - N[v_k]$ son no conexas.

Caso 1. Si $G - v_k$ es no conexa, entonces v_k es de corte en G , por lo que si G_1 y G_2 son dos componentes conexas de $G - v_k$ y, si suponemos sin pérdida de generalidad, que $v_0 \in V(G_1)$, entonces, v_i está en G_1 para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Por otro lado, existe $x \in V(G_2)$ tal que $xv_k \in E(G)$. Pero $P' = (v_0, \dots, v_k, x)$ es una trayectoria de longitud mayor que P . Además, es inducida, ya que $v_i x \notin E(G)$, para toda $i \in \{0, \dots, k-1\}$ pues v_i y x están en diferentes componentes conexas de $G - v_k$, lo cual contradice la elección de P' , por lo tanto $G - v_k$ es conexa.

Caso 2. Si $G - N[v_k]$ es no conexa, entonces v_0, \dots, v_{k-2} están en una misma componente conexa de $G - N[v_k]$ y existe al menos un vértice, w en una componente diferente de

ésta. Además como P es una trayectoria inducida, es decir, en G no existen aristas entre dichos vértices, más que las aristas de la trayectoria, se tiene que v_{k-1} es el único vértice de P , adyacente a v_k en G . Sean G_1 y G_2 las componentes de $G - N[v_k]$, que contienen a v_0, \dots, v_{k-2} , y a w , respectivamente. Veamos que $wv_{k-1} \notin E(G)$, pues si $wv_{k-1} \in E(G)$, entonces $G \langle \{v_{k-2}, v_{k-1}, v_k, w\} \rangle \simeq K_{1,3}$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis, G es libre de garras, por lo tanto $wv_{k-1} \notin E(G)$. Como G es conexa, existe un w' en alguna componente conexa distinta de G_1 y un $z \in N(v_k) \setminus \{v_{k-1}\}$ tales que $w'z \in E(G)$. Notemos que $zv_i \notin E(G)$ para toda $i \in \{0, \dots, k-2\}$, pues de lo contrario G no sería libre de garras. Consideremos los siguientes casos:

Caso 2.1. Si $v_{k-1}z \in E(G)$, entonces $v_0Pv_{k-1}zw'$ es una trayectoria inducida de longitud $\ell(P) + 1$, lo cual es una contradicción.

Caso 2.2. Si $v_{k-1}z \notin E(G)$ entonces v_0Pv_kzw' es una trayectoria inducida de longitud $\ell(P) + 2$, lo cual es de nueva cuenta, una contradicción.

Por lo tanto, $G - N[v_k]$ debe ser conexa.

Por los casos 1 y 2, podemos concluir que si v_k es el vértice terminal de P , entonces $G - v_k$ y $G - N[v_k]$ son conexas. \square

Teorema 3.20 *Si G es una gráfica conexa de orden n y libre de garras entonces $1 + n \leq \mathcal{F}(G) \leq F_{n+2}$. Además $\mathcal{F}(G) = n + 1$ si y solo si $G \simeq K_n$ y $\mathcal{F}(G) = F_{n+2}$ si y solo si $G \simeq P_n$.*

Demostración Sabemos que para cualquier gráfica G de orden n , $\mathcal{F}(G) \geq n + 1$, en particular si G es conexa y libre de garras.

Es claro que si $G \simeq K_n$, entonces $\mathcal{F}(G) = n + 1$. Ahora, supongamos que $\mathcal{F}(G) = n + 1$, esto implica que en G no hay conjuntos independientes de tamaño 2, por lo que cualesquiera dos vértices son adyacentes, y entonces $G \simeq K_n$.

Para demostrar que $\mathcal{F}(G) \leq F_{n+2}$, basta ver qué ocurre cuando G es no completa. Así, sea G una gráfica no completa, como G es conexa y libre de garras, por el lema 3.19 sabemos que G contiene un vértice v tal que $G - v$ y $G - N[v]$ son conexas, además $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G - v) + \mathcal{F}(G - N[v])$.

Procederemos por inducción sobre $n \geq 3$. Como G es conexa y no completa, si $n = 3$, entonces $G \simeq P_3$ y $\mathcal{F}(P_3) = F_5$. Ahora, supongamos que para toda G' conexa, libre de garras, de orden k , $3 \leq k < n$, se cumple que $\mathcal{F}(G') \leq F_{k+2}$. Sea G una gráfica conexa, libre de garras de orden n . Por la elección de v , $G - v$ y $G - N[v]$ son conexas y por ser subgráficas inducidas de G además, son libres de garras. El orden de $G - v$ es $n - 1$ por lo que $G - v$ cumple con la hipótesis de inducción, *i. e.* $\mathcal{F}(G - v) \leq F_{n+1}$. También $G - N[v]$ cumple con la hipótesis de inducción, pues $|V(G - N[v])| < n$, por lo que $\mathcal{F}(G - N[v]) \leq F_{t+2}$ para $t = |V(G - N[v])| \leq n - 2$. Como

$t \leq n - 2$, entonces $t + 2 \leq n$ y la sucesión de Fibonacci es creciente, por lo que $F_{t+2} \leq F_n$, entonces $\mathcal{F}(G - N[v]) \leq F_n$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G - v) + \mathcal{F}(G - N[v]) \leq F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$.

Falta probar que la cota superior se alcanza si y solo si $G \simeq P_n$ ¹. Sea G una gráfica conexa, de orden n y libre de garras, como en el teorema 3.4 se probó que $\mathcal{F}(P_n) = F_{n+2}$, basta con probar que si G cumple con las hipótesis del teorema y es tal que $\mathcal{F}(G) = F_{n+2}$, entonces $G \simeq P_n$.

Si $n = 1$, $G \simeq K_1$, que es una trayectoria de longitud cero.

Si $n = 2$, como G es conexa es K_2 , la trayectoria de longitud 1.

Sea $n \geq 3$, primero, probemos por contradicción que G es un árbol. Así, supongamos que γ es un ciclo de orden máximo en G .

- Si $V(\gamma) = V(G)$, entonces C_n es subgráfica generadora de G y por la afirmación 3 $\mathcal{F}(G) \leq \mathcal{F}(C_n) = L_n$. Por otro lado, por la proposición 3.1 $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ para toda $n \geq 2$. Así, tenemos que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = F_{n+1} + (F_{n-1} + F_{n-2})$, por lo que, $L_n < F_{n+2}$, que implica $\mathcal{F}(G) < F_{n+2}$, lo cual es una contradicción.
- Si $V(\gamma) \neq V(G)$, entonces $V(G) \setminus V(\gamma) \neq \emptyset$ y como G es conexa, existe un vértice $w \in V(G) \setminus V(\gamma)$ tal que $wu_i \in E(G)$ para algún $u_i \in V(\gamma)$. Como G es libre de garras, w es adyacente a alguno de los vecinos de u_i en γ , sin pérdida de generalidad, sea $wu_{i-1} \in E(G)$, entonces podemos construir un ciclo $\gamma' = (u_i\gamma, u_{i-1}, w, u_i)$ tal que $\ell(\gamma') > \ell(\gamma)$, lo cual es una contradicción pues supusimos que γ es un ciclo de orden máximo.

Por lo tanto, G es una gráfica conexa y acíclica, *i. e.* G es un árbol. Y como el único árbol de orden n , libre de garras es la trayectoria, P_n , el resultado se cumple. \square

Sea G una gráfica arista-coloreada y $v \in V(G)$. El *grado de cromaticidad* de v , $dc_G(v)$, se define como el número de colores utilizados para colorear las aristas incidentes con el vértice v en G . Dada una subgráfica H monocromática de G y $v \in V(H)$, decimos que v es vértice terminal de H si $dc_G(v) \geq 2$. Denotamos por $V_T(G)$ al conjunto de todos los vértices terminales de la gráfica G .

Observación Si la arista-coloración de una gráfica G es propia, entonces:

$$dc_G(v) = d_G(v).$$

Teorema 3.21 Sea G una gráfica conexa arista-coloreada de orden n tal que para todo $v \in V_T(G)$, $dc_G(v) = 2$. Entonces $\mathcal{F}_{tm}(G) \leq F_{n+2}$.

¹ Esta parte de la demostración es distinta de la presentada en [14]

Demostración Se demuestra primero la siguiente afirmación:

Afirmación 6 $G(\mathcal{Q})$ es una gráfica libre de garras.

Sea G como en el enunciado del teorema 3.21 y supongamos que $G(\mathcal{Q})$ contiene una subgráfica inducida $H \simeq K_{1,3}$. Y sea $V(H) = \{y, x_1, x_2, x_3\}$ con $d_H(y) = 3$, $V(H) \subseteq V(G(\mathcal{Q}))$. Entonces $y \in V_T(G)$ por la construcción de $G(\mathcal{Q})$, pues como $x_i x_j \notin E(G(\mathcal{Q}))$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$, en G x_i, x_j pertenecen a distintas subgráficas monocromáticas conexas. Así $c_G(x_1 y) \neq c_G(x_2 y) \neq c_G(x_3 y)$, lo cual implica que $dc_G(y) \geq 3$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis $dc_G(v) = 2$ para toda $v \in V_T(G)$, en particular para y . Por lo tanto $G(\mathcal{Q})$ es libre de garras.

Ahora, por el teorema 3.15, sabemos que $\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{F}(G(\mathcal{Q}))$, además como $G(\mathcal{Q})$ es libre de garras, por el teorema 3.20 se tiene que $\mathcal{F}_{tm}(G) \leq F_{n+2}$. \square

En [14] se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 6 Sea G una gráfica simple, arista-coloreada y $v \in V_T(G)$. Sea $\mathcal{Q}(v) = \{Q_i \mid i \in I\}$, la familia de todas las subgráficas monocromáticas que contienen a v y para cada $i, j \in I$, $Q_i \cap Q_j = \{v\}$ y $dc_G(v) = |I|$. Entonces

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \leq 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G - v) - \sum_{i \in I} |V(Q_i) \setminus \{v\}|.$$

$\mathcal{F}_{tm}(G) = 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G - v) - \sum_{i \in I} |V(Q_i) \setminus \{v\}|$ si y solo si para cada vértice en $\cup_{i \in I} Q_i$, diferente de v , existe una trayectoria monocromática a todo vértice de G .

Encontramos varios problemas con este teorema. En su demostración, la autora hace la siguiente afirmación:

Como $v \in V_T(G)$ y $dc_G(v) = |I|$, entonces $|\mathcal{J}_{tm,v}(G)| = \mathcal{F}_{tm}(G - v)$.

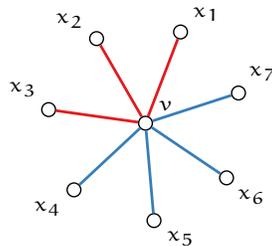


Figura 40: $\mathcal{J}_{tm,v}(G)$

En la figura 40 aparece una gráfica para la cual $|J_{tm-v}(G)| < \mathcal{F}_{tm}(G-v)$. Pues sabemos que:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_{tm(k)}(G).$$

Además, por ser G bicoreada, no existen conjuntos independientes de cardinalidad mayor que dos. Así:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{tm}(G) &= \mathcal{F}_{tm(0)}(G) + \mathcal{F}_{tm(1)}(G) + \mathcal{F}_{tm(2)}(G) \\ &= 1 + 8 + (3 \cdot 4) = 21 \end{aligned}$$

El único conjunto independiente que contiene a v es $\{v\}$, por lo que $|J_{tm-v}(G)| = 20$.

Por otro lado:

$$\mathcal{F}_{tm}(G-v) = \mathcal{F}_{tm}(\overline{K}_7) = 2^7.$$

Además se cumplen las hipótesis, pues $v \in V_T(G)$ y $dc_G(v) = 2$, y si Q_1 es la subgráfica monocromática color rojo y Q_2 es la subgráfica monocromática color azul, $V(Q_1) \cap V(Q_2) = \{v\}$. Por lo tanto:

$$20 = |J_{tm-v}(G)| < \mathcal{F}_{tm}(G-v) = 2^7.$$

En el teorema 6 en [14], se afirma que:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G-v) - \sum_{i \in I} |V(Q_i) \setminus \{v\}| \text{ si y solo si para cada vértice en } \cup_{i \in I} Q_i, \text{ diferente de } v, \text{ existe una trayectoria monocromática a todo vértice de } G.$$

Al encontrar problemas con la demostración presentada en el artículo y no lograr demostrar el resultado, encontramos una familia de contraejemplos que cumplen con las hipótesis, pero para las cuales, $\mathcal{F}_{tm}(G) < 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G-v) - \sum_{i \in I} |V(Q_i) \setminus \{v\}|$.

Construcción *La construcción de la familia de gráficas que funcionan como contraejemplo para esta afirmación es la siguiente.*

Sea $G = K_{n,m} + K_1$, con $n, m \geq 2$ y sea φ una arista-coloración de G tal que si X, Y es la bipartición de los vértices de $K_{n,m}$ y $v \in V(K_1)$, entonces:

- $\varphi(vx) = 1$, para toda $x \in X$,
- $\varphi(vy) = 2$, para toda $y \in Y$ y
- $\varphi(e) \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, de modo que $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$ para toda $e_1, e_2 \in K_{n,m}$.

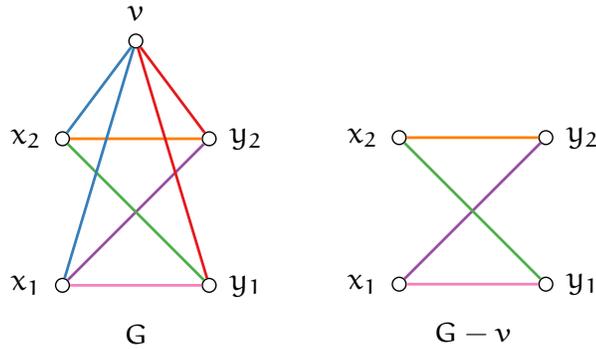


Figura 41: $\mathcal{F}_{tm}(G) \neq 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G - v) - \sum_{i \in I} |V(Q_i) \setminus \{v\}|$

En la figura 41 podemos ver la construcción de $K_{2,2} + v$. De manera que, tomamos una gráfica bipartita completa, le damos una arista-coloración propia y unimos sus vértices con un vértice adicional y coloreamos estas aristas de forma que todas las aristas entre v y un mismo conjunto de la bipartición tengan el mismo color, diferente a los colores utilizados en la coloración propia de la bipartita completa.

Afirmación 7 Sean $G = K_{n,m} + K_1$ y φ la coloración de G definida en la construcción 1, entonces:

- (i) $v \in V(K_1)$ es un vértice terminal de G , que cumple las hipótesis del teorema 6 en [14],
- (ii) para todo $u \in \cup_{Q_i \in \mathcal{Q}(v)} V(Q_i)$ y para todo $w \in V(G)$ existe una uw -trayectoria monocromática en G y
- (iii) $\mathcal{F}_{tm}(G) < 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G - v) - \sum_{i \in I} |V(Q_i) \setminus \{v\}|$.

Demostración Sean $u, w \in V(G)$, veamos primero, que en G hay una uw -trayectoria monocromática. Tenemos tres casos:

Caso 1. Si $v \in \{u, w\}$, entonces $uw \in E(G)$ por construcción de G y por lo tanto hay una trayectoria monocromática de u a w .

Caso 2. Si $u \in X$ y $w \in Y$, entonces $uw \in E(K_{n,m})$ y por tanto uw es una trayectoria en G de color $\varphi(uw)$.

Caso 3. Si $\{u, w\} \subseteq X$ o $\{u, w\} \subseteq Y$. Supongamos que $u, w \in X$, entonces (u, v, w) es una trayectoria monocromática de color 1. Análogamente, si $u, w \in Y$, entonces (u, v, w) es una trayectoria monocromática de color 2.

Así, si S es un conjunto tm -independiente de G , $|S| \leq 1$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = n + m + 2 = |V(G)| + 1.$$

Por otro lado, $\mathcal{F}_{tm}(G - v) = 2^n + 2^m - 1$, pues al quitar al vértice v y todas sus aristas, obtenemos $G - v \simeq K_{n,m}$ una gráfica bipartita completa con una coloración propia por lo que los conjuntos tm -independientes son todos los conjuntos independientes de $K_{n,m}$, que son todos los subconjuntos de cada conjunto de la bipartición y \emptyset se cuenta dos veces.

Por último, $\sum_{i \in I} |V(Q_i) \setminus \{v\}| = n + m$ pues $dc_G(v) = 2$ y los vértices de cada conjunto de la bipartición están en una subgráfica monocromática a la cual pertenece v .

Así, tenemos que:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) = n + m + 2 < 2 \cdot (2^n + 2^m - 1) - (n + m).$$

Como $n, m \geq 2$, entonces $n < 2^n - 1$ y $m < 2^m - 1$ entonces:

$$n + m < 2^n + 2^m - 2$$

que ocurre si y solo si

$$\begin{aligned} n + m + 2 &< 2^n + 2^m \\ 2 \cdot (n + m + 2) &< 2 \cdot (2^n + 2^m) \\ n + m + 2 &< 2 \cdot (2^n + 2^m) - (n + m + 2) \\ n + m + 2 &< 2 \cdot (2^n + 2^m - 1) - (n + m) \end{aligned}$$

De manera que la afirmación queda demostrada. \square

En la afirmación 7 demostramos que bajo las condiciones del teorema 6 [14], la cota no necesariamente se alcanza. Obtuvimos un resultado más general a la cota del teorema 6 en [14] con condiciones iniciales más débiles.

Teorema 3.22 Sea φ una k -arista-coloración de la gráfica G y $v \in V_T(G)$. Sea $\mathcal{Q}(v)$ la familia de subgráficas monocromáticas maximales Q_i que contienen a v , con $i \in I \subseteq \{1, \dots, k\}$, i. e. Q_i tiene color i . Entonces,

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \leq 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G - v) - |\cup_{Q_i \in \mathcal{Q}(v)} V(Q_i) \setminus \{v\}|.$$

Demostración Como todo conjunto tm -independiente S , tal que $v \notin S$ es tm -independiente en $G - v$, entonces:

$$|\mathcal{J}_{tm-v}(G)| \leq \mathcal{F}_{tm}(G - v).$$

Por otro lado, si $S \in \mathcal{J}_{tm_v}(G)$, entonces $S \setminus \{v\} \in \mathcal{J}_{tm-v}(G)$, por lo que:

$$|\mathcal{J}_{tm_v}(G)| \leq |\mathcal{J}_{tm-v}(G)|.$$

Además, para toda $w \in \cup_{Q_i \in \mathcal{Q}(v)} V(Q_i) \setminus \{v\}$, $\{w\} \in \mathcal{J}_{tm-v}(G)$ y por tanto $\{w\} \notin \mathcal{J}_{tm_v}(G)$.

Y como existe una biyección de $\mathcal{J}_{tm_v}(G)$ con un subconjunto de $\mathcal{J}_{tm-v}(G)$ ajeno a $\cup_{Q_i \in \mathcal{Q}_v} V(Q_i) \setminus \{v\}$ que a su vez está contenido en $\mathcal{J}_{tm-v}(G)$, de esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_{tm_v}(G)| + |\cup_{Q_i \in \mathcal{Q}_v} V(Q_i) \setminus \{v\}| &\leq |\mathcal{J}_{tm-v}(G)| \\ |\mathcal{J}_{tm_v}(G)| &\leq |\mathcal{J}_{tm-v}(G)| - |\cup_{Q_i \in \mathcal{Q}_v} V(Q_i) \setminus \{v\}| \end{aligned}$$

Sumando $|\mathcal{J}_{tm-v}(G)|$ en ambos términos obtenemos:

$$|\mathcal{J}_{tm_v}(G)| + |\mathcal{J}_{tm-v}(G)| \leq 2 \cdot |\mathcal{J}_{tm-v}(G)| - |\cup_{Q_i \in \mathcal{Q}_v} V(Q_i) \setminus \{v\}|$$

Como $\mathcal{J}_{tm_v}(G)$ y $\mathcal{J}_{tm-v}(G)$ constituyen una bipartición de la familia de conjuntos tm -independientes de G , entonces $\mathcal{F}_{tm}(G) = \mathcal{J}_{tm_v}(G) + \mathcal{J}_{tm-v}(G)$. Además ya vimos que $|\mathcal{J}_{tm-v}(G)| \leq \mathcal{F}_{tm}(G - v)$, por lo tanto:

$$\mathcal{F}_{tm}(G) \leq 2 \cdot \mathcal{F}_{tm}(G - v) - |\cup_{Q_i \in \mathcal{Q}_v} V(Q_i) \setminus \{v\}| \quad \square$$

CONCLUSIONES

En el desarrollo de esta tesis se estudiaron los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de las gráficas arista-coloreadas, que se define como el número de subconjuntos independientes por trayectorias monocromáticas de los vértices de una gráfica. Este concepto es una generalización del número de Fibonacci de las gráficas, introducida por I. y A. Włoch, originalmente propuesto por Tichy y Prodinger.

El número de Fibonacci de las gráficas toma su nombre del número de conjuntos independientes de las trayectorias, pues si el orden de una trayectoria es n , existen F_{n+2} subconjuntos independientes de sus vértices. Otro resultado interesante es que para un ciclo de orden n , su número de Fibonacci es L_n , un número de Lucas. En este sentido, demostramos una identidad para los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de las trayectorias y ciclos arista-coloreados, de la cual es consecuencia el resultado anterior al considerar coloraciones propias. De este modo, es importante señalar aquí que, en general, si consideramos una coloración propia de la gráfica, el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas coincide con el número de Fibonacci de una gráfica.

También se estudiaron las propiedades tanto de los números de Fibonacci de las gráficas, como de los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas. Pedersen y Vestergaard introdujeron una variedad de cotas para los números de Fibonacci de las gráficas, que luego Włoch generalizó para los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas. Una de estas cotas relaciona el número de Fibonacci de una gráfica con su número de independencia. También construimos una gráfica simple, no-coloreada a partir de una gráfica arista-coloreada de manera que se da la igualdad entre el número de Fibonacci de una y el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas de la otra y otros resultados que también involucran esta gráfica.

Un resultado fundamental en el estudio del número de Fibonacci de una gráfica, pues facilita calcular los números de Fibonacci de distintos tipos de gráficas, es la siguiente identidad:

$$\mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G - v) + \mathcal{F}(G - N[v])$$

Este resultado no se ha logrado generalizar para el Fibonacci por trayectorias monocromáticas. La dificultad radica en que la coloración considerada es arbitraria, así que solo podemos aspirar

a encontrar cotas y tratar de mejorarlas. Por esta razón, un camino interesante a seguir sería estudiar qué propiedades cumplen los números de Fibonacci por trayectorias monocromáticas, para coloraciones que cumplan ciertas condiciones y si, por ejemplo, este resultado se puede extender para distintos tipos de coloraciones.

Finalmente, encontramos complicaciones con el teorema 6 de [14], el cual daba una cota superior para el número de Fibonacci por trayectorias monocromáticas e incluso daba condiciones adicionales para las que la cota se alcanza. Probamos que esta identidad no se da para una familia de gráficas, a pesar de cumplir con las condiciones requeridas, por lo que la afirmación no es válida. Además, encontramos un nuevo resultado, pues se demostró que la cota en el enunciado del Teorema 6 funciona, con condiciones menos estrictas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Fiorini and Robin J. Wilson. *Edge-colourings of graphs*. Pitman, 1977.
- [2] A.N. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica*. Number v. 2 in Principia Mathematica. University Press, 1912.
- [3] Gary Chartrand, Linda Lesniak, and Ping Zhang. *Graphs & Digraphs*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, sixth edition, 2016.
- [4] Jonathan L. Gross. *Graph Theory and Its Applications*. Textbooks in Mathematics. Chapman and Hall, 2 edition, 2005.
- [5] Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press, 2008.
- [6] Keith Devlin. *The Man of Numbers*. Walker Books, 2012.
- [7] H. Prodinger and R.F. Tichy. Fibonacci numbers of graphs. *The Fibonacci Quarterly*, 20:16–21, 1982.
- [8] R. E. Merrifield and H. E. Simmons. *Topological Methods in Chemistry*. Wiley, 1989.
- [9] Haruo Hosoya. Topological index. a newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons. *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, 44:2332–2339, 1971.
- [10] Kexiang Xu, Jianxi Li, and Lingping Zhong. The hosoya indices and merrifield-simmons indices of graphs with connectivity at most k . *Applied Mathematics Letters*, 25:476–480, 2012.
- [11] Ivan Gutman and Oskar E. Polansky. *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*. Springer-Verlag, 1986.
- [12] A. Włoch and I. Włoch. Monochromatic fibonacci numbers of graphs. *Ars Combinatoria*, 81:49–55, 2007.

- [13] Cornelis Hoede and Xueliang Li. Clique polynomials and independent set polynomials of graphs. *Discrete Mathematics*, 125:219–228, 1994.
- [14] Iwona Włoch. Bounds of the number of imp-sets in edge-coloured graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 43(3):361–366, 2008.
- [15] A.S. Pedersen and P.D. Vestergaard. Bounds on the number of vertex independent sets in a graph. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 10(6):1575–1587, 2006.