



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Interacción Radiación-Materia:
Un Análisis de Dos Niveles

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Nicolás Díaz Naufal

TUTOR

Dr. Eduardo Nahmad Achar





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno

Díaz
Naufal
Nicolás
55 29 17 20 53
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
309522506

2. Datos del Tutor

Dr.
Eduardo
Nahmad
Achar

3. Datos del Sinodal 1

Dr.
Octavio Héctor
Castaños
Garza

4. Datos del Sinodal 2

Dr.
Salvador Víctor
Godoy
Salas

5. Datos del Sinodal 3

Dr.
Pablo
Barberis
Blostein

6. Datos del Sinodal 4

Dra.
Andrea
Valdés
Hernández

7. Datos del Trabajo Escrito

Interacción Radiación-Materia: Un Análisis de Dos Niveles
165 p
2018

*A Mamá Villa y a Toto,
que nunca me dejan solo.*

Agradecimientos

Enfrentar estos agradecimientos es confrontar la conclusión de toda una etapa de mi vida. Significa recuperar todo el proceso que me llevó hasta este punto y, sobre todo, darme cuenta que lo caminé acompañado de la mejor manera.

Inicio con mi familia, porque son quienes más viven el desgastante día a día conmigo y cuya presencia ha sido indiscutible e incondicional.

A ti mamá, gracias, porque tu invaluable cariño me ha permitido nunca sentirme solo. Porque con tus consejos y compañía sé que puedo contrarrestar todo temor e inseguridad. Porque gracias a ti puedo decir que estoy satisfecho.

A ti papá, gracias, porque representas toda mi admiración y cariño. Gracias por las inagotables discusiones y consejos; por tu cariño y tus regaños; por las rascadas de espalda tempraneras, y por hacerme ver que el gusto y el esfuerzo lo logran todo.

A ti Inés, gracias, porque en el mar de incertidumbre siempre eres tú la que apacigua la marea. Porque saberte cerca me da la fortaleza para seguir adelante.

Por todo el conocimiento y todas las enseñanzas, agradezco a mi asesor, el Dr. Eduardo Nahmad Achar. Eduardo, gracias por la confianza y la dedicación; por las visitas programadas y por las que no; por tu capacidad para calmar todas mis preocupaciones, y por ser quien me animó a seguir en la investigación. Pero, sobre todo, por ser un ejemplo como Físico y como persona.

A quienes conforman el jurado de esta tesis: Dr. Octavio Héctor Castaños Garza, Dr. Salvador Víctor Godoy Salas, Dra. Andrea Valdés Hernández, Dr. Eduardo Nahmad Achar y Dr. Pablo Barberis Blostein, muchas gracias por la revisión de mi trabajo, y por sus comentarios y correcciones que fueron fundamentales en la elaboración de este trabajo. Gracias a todos ustedes puedo sentirme contento y satisfecho de concluir este proceso.

Finalmente, porque sin ustedes nada de esto sería posible, les agradezco a mis amigos.

A ti, Dalia, por alentarme en esos momentos en donde yo jugaba en mi contra. Gracias, porque tu apoyo y cariño me permitieron salir adelante.

A Fer, porque más de veinte años no han sido suficientes para demostrarte cuánto te quiero.

A Juli, porque cada día contigo me confirma que quiero tenerte siempre cerca.

A Eduardo, porque no conozco amor más sincero y maravilloso.

A Dannie, Kevin, Daniel, Romi y Huguette, porque este logro es por su cariño y presencia.

Y a todos mis amigos que hacen que todo tenga sentido.

Índice

1	Introducción	1
2	Interacción Átomo-Campo; Teoría Semiclásica	5
2.1	Hamiltoniano de Interacción Átomo-Campo	6
2.1.1	Invariancia Local de Norma y Norma de Coulomb	7
2.1.2	Aproximación Dipolar y Hamiltoniano $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$	11
2.2	Interacción de un Átomo con un Campo Clásico	13
2.3	Interacción de un Átomo de Dos Niveles con un Campo Clásico	18
2.4	Matriz de Densidad para un Átomo de Dos Niveles	27
2.4.1	Ecuaciones de Movimiento de la Matriz de Densidad	31
2.4.2	Átomo de Dos Niveles	31
3	Teoría Cuántica de la Radiación	35
3.1	Cuantización del Campo Electromagnético de un Modo	36
3.1.1	Estado de Fock o de Número	41
3.1.2	Operadores de Cuadratura	47
3.2	Cuantización del Campo Electromagnético de Multi-modos	49
3.3	Estados Coherentes	59
4	Interacción Átomo-Campo; Teoría Cuántica: El modelo de Jaynes-Cummings	70
4.1	Hamiltoniano de Interacción Átomo-Campo	71
4.1.1	Sistema Desacoplado	76
4.1.2	Sistema Acoplado	79
4.2	Dinámica del Modelo de Jaynes-Cummings	84
4.2.1	Caso Resonante	85

4.2.2	Caso No Resonante	94
4.3	Discusión sobre las Soluciones	104
4.3.1	Consideraciones Generales	105
4.3.2	Caso Resonante	106
4.3.3	Caso no Resonante	107
5	El Modelo de Dicke: Una Generalización de N Átomos de Jaynes-Cummings	112
5.1	El Hamiltoniano de Dicke en la Aproximación de Onda Rotante	113
5.1.1	Estados de Dicke y operadores atómicos	115
5.2	Eigenestructura	119
5.2.1	Modelo de Dicke de Dos Átomos	119
5.2.2	$N > 2$ Átomos de Dicke	125
5.3	Análisis Termodinámico	133
5.3.1	Transición de Fase para T finita	133
5.3.2	El término \mathbf{A}^2	142
6	Conclusiones	148

Lista de Figuras

1	Simple modelo de la interacción de un átomo de dos niveles y un modo del campo electromagnético. El átomo está compuesto por dos estados: $ g\rangle$, el estado base, y $ e\rangle$, el estado excitado, cuyas energías son $E_g \equiv \hbar\omega_g$ y $E_e \equiv \hbar\omega_e$, respectivamente. Por otro lado, el campo se encuentra confinado, dentro de una cavidad unidimensional, por paredes conductoras ideales.	19
2	Diagrama del campo electromagnético confinado en una cavidad a lo largo del eje z y limitado por paredes conductoras ideales.	37
3	Distribución de la probabilidad de encontrar n fotones en el campo de un estado coherente.	65
4	Distribución de fase de los estados coherentes con $\theta = 0$ para distintos valores del número promedio de fotones.	66
5	Aproximación de onda rotante. A mano izquierda la absorción de un fotón provoca la excitación del átomo (arriba) y la desexcitación de éste genera la emisión de un fotón (abajo). Del lado derecho se observa el proceso contrarrotante, aquéllos que son descartados en dicha aproximación.	75
6	Esquema de los niveles <i>desnudos</i> $E_{e,n}$ y $E_{g,n+1}$ del sistema desacoplado. A cada par de niveles de energía le corresponden dos eigenestados, los cuales forman el subespacio bidimensional de Hilbert $\Xi(n)$. El estado base $ g, 0\rangle$ es independiente de los otros.	80

7	Esquema de los estados vestidos $E_{\pm n}$ del sistema acoplado, los cuales se comparan con los del sistema desacoplado.	82
8	En resonancia, $\Delta = 0$, la degeneración aumenta por el acoplamiento, y la separación entre los niveles se vuelve $(\Delta E)_n = \hbar\Omega_n$	82
9	Representación del modelo de Jaynes-Cummings en el espacio átomo-campo. Los estados $ \psi_{\text{átomo}}, \psi_{\text{campo}}\rangle$ de dicho espacio están ubicados en las esquinas de los cubos. El plano inferior representa el estado base atómico, $ g\rangle$, y el superior el estado excitado, $ e\rangle$. Por otro lado, las esquinas, de los planos inferior y superior, reflejan el número de fotones presentes en el estado base o excitado, respectivamente. Los vectores muestran los procesos que son posibles en el modelo de JC, dado que éste sólo permite el intercambio de un solo cuanto de excitación.	92
10	Inversión atómica utilizando QUANTUMOPTICS con el campo inicialmente en un estado coherente y el átomo excitado.	103
11	Inversión atómica analítica con el campo inicialmente en un estado coherente con un número promedio de fotones $\bar{n} = 2$ y el átomo excitado.	104
12	Diagrama de los niveles de energía del Hamiltoniano de Dicke en resonancia. Los niveles de energía se muestran en función del número de excitación η y para el caso de dos átomos ($N = 2$).	124
13	Inversión atómica comparativa, para el caso de un átomo (Jaynes Cummings) y dos átomos (modelo de Dicke).	125
14	Ilustración de los niveles de energía del Hamiltoniano de Dicke en resonancia para distinto número de átomos N y valores de excitación η	132

15	Aparte de la solución trivial $\vartheta = 0$, la ecuación (5.3.11) tiene solución única cuando $\beta > \beta_c$	139
16	Diagrama de fase correspondiente al modelo de Dicke en la RWA a temperatura finita.	141

1 Introducción

Uno de los principales objetivos de la electrodinámica cuántica, *QED* por sus siglas en inglés, es el estudio de la interacción entre radiación y materia. Al interactuar, ambas forman un sistema acoplado, cuyo estudio ha sido fundamental en la óptica y mecánica cuántica. Desde 1940, debido al trabajo realizado por Edward Purcell [1] sobre la emisión espontánea en átomos acoplados a cavidades resonantes, los avances teóricos y experimentales en el área de la electrodinámica cuántica de cavidades ha tenido un notorio auge. Por otro lado, una de las principales dificultades prácticas que afronta la mecánica cuántica al considerar problemas de muchos cuerpos es la computación. Para lograr describir un sistema de N átomos de dos niveles son necesarios 2^N elementos de la base, provocando que su implementación sea mucho más compleja. Uno de los principales objetivos del presente trabajo es el análisis de la interacción entre radiación y materia. Por lo tanto, a lo largo del texto se pretende describir esta interacción, partiendo desde la teoría cuántica de radiación, para posteriormente analizar la interacción entre un sistema atómico de N átomos idénticos de dos niveles y un campo electromagnético de un modo, es decir, el modelo de Dicke [2].

Los arreglos experimentales en la óptica cuántica están compuestos principalmente de láseres, cavidades y átomos. Convencionalmente uno o varios átomos se sostienen dentro de la cavidad y son iluminados por el láser, para controlar el estado de los átomos de acuerdo a la configuración elegida del experimento. El acoplamiento entre el sistema atómico y el campo electromagnético tiene varias complicaciones, en cuanto a que introduce pérdidas irreversibles, las cuales son contrarrestadas con la introducción de la cavidad. Ésta tiene como objetivo proveer un fuerte campo eléctrico para que logre

interactuar coherentemente con los átomos y un único modo para que éstos se acoplen. A su vez, el láser es el encargado de lograr que todos los átomos se encuentren en su estado excitado. De esta forma, bajo esta configuración, la evolución queda descrita por una dinámica coherente del estado del sistema; los fotones son absorbidos, emitidos y reabsorbidos coherentemente por los átomos varias veces antes de salir de la cavidad.

Esta tesis se encuentra inspirada en el importante trabajo de Dicke [2], en donde se estudia a una colección de N átomos. Inicialmente se creyó que al despreciar la interacción directa entre los átomos (dipolo-dipolo) éstos actuarían de manera independiente y consecuentemente tendrían una emisión de radiación con un máximo proporcional al número de átomos N . Sin embargo, Dicke observó que el campo juega un papel de mediador en las interacciones interatómicas, provocando la acción colectiva de los átomos, fenómeno semejante a la acción de un oscilador armónico acoplado que puede o no balancearse en fase. Este comportamiento ocasiona la aparición de una explosiva emisión de radiación, cuya intensidad es proporcional a N^2 . A este fenómeno se le conoce como la *superradiancia* de Dicke. En su trabajo, Dicke, no consideró la presencia de una cavidad, sino la de una intensa fuente de radiación coherente y la de una nube de átomos de dos niveles. Experimentalmente, la presencia de una cavidad impide la pérdida irreversible de la energía en los átomos, la cual se escapa a los varios modos del campo electromagnético. La interacción descrita por Dicke se puede modelar mediante el Hamiltoniano que lleva su nombre, el cual, al despreciar sus términos contrarrotantes, se le conoce como el Hamiltoniano de Tavis-Cummings, cuya solución exacta fue calculada en 1968 [3]. Por otro lado, el análisis del Hamiltoniano de Tavis-Cummings, para un solo átomo, fue estudiado por E. T. Jaynes y F. W. Cummings [4].

La intención de este trabajo es estudiar la teoría que describe la interacción entre radiación y materia. En el Capítulo 2 se presenta la teoría semiclásica de la interacción átomo-campo. En este capítulo la interacción se analiza considerando al sistema atómico como el sistema cuántico y al campo como un sistema descrito clásicamente. El estudio que se elabora se centra en la interacción de un sistema atómico de dos niveles con un campo eléctrico clásico. Para lograrlo se construye el término de interacción, proveniente del principio de norma. Así, a partir de la construcción del Hamiltoniano, se estudian las transiciones al sumergir el átomo en dicho campo clásico, análisis que conduce a la ley de oro de Fermi. Posteriormente, el Capítulo 3 presenta una introducción a la teoría cuántica de la radiación, donde se presenta brevemente el formalismo matemático necesario para el subsecuente tratamiento. En dicho capítulo se estudia la cuantización del campo electromagnético y se introducen los estados coherentes, los cuales permiten una interpretación cuántica de mínima incertidumbre y facilitan el estudio al ser similares a un estado clásico del oscilador armónico simple. El Capítulo 4 estudia la interacción puramente cuántica entre un átomo de dos niveles y un modo del campo electromagnético confinado en una cavidad, es decir, el problema de Jaynes-Cummings. La dinámica de la interacción queda descrita por el comportamiento oscilatorio de las poblaciones y la superposición de estados. Además, el tratamiento cuántico de la interacción nos conduce al fenómeno de *colapso y resurgimiento*, el cual proviene de las características cuánticas del campo. Finalmente, en el Capítulo 5, se lleva a cabo una generalización a N átomos interactuando con un modo del campo electromagnético. En pocas palabras, dicho capítulo se centra en el modelo de Dicke, por lo cual se inicia con una descripción del problema y la introducción de los operadores atómicos colectivos que desencadenan la

presentación de los estados de Dicke. Con lo anterior, se efectúa el estudio del espectro de energía y se realiza un análisis en el límite termodinámico siguiendo el desarrollo de Wang y Hioe [5], el cual también incluye una breve introducción sobre la importancia e influencia del término diamagnético en el Hamiltoniano del problema.

2 Interacción Átomo-Campo; Teoría Semiclásica

Iniciaremos el análisis de la interacción entre radiación y materia mediante su estudio semiclásico, donde el campo electromagnético será tratado clásicamente en contraste con el sistema atómico, el cual consistirá de un sistema meramente cuántico. Para lograr nuestro cometido, debemos encontrar el término de acoplamiento indicado entre radiación y materia. Para esto nos guiaremos del principio de norma de H. Weyl, quien en 1918 introdujo el *principio de invariancia de norma* para lograr una unificación de la teoría de gravitación y de electricidad. Sin embargo, él mismo en 1928 reconoció que dicha invariancia de norma conduce a mostrar el acoplamiento entre materia y electricidad.

De esta forma, nuestro estudio se centrará en uno de los problemas más comunes en el estudio de la interacción átomo-campo: el acoplamiento entre un sistema atómico de dos niveles y un campo electromagnético de un modo. Describir al átomo como un sistema de dos niveles es válido siempre y cuando dichos niveles atómico se encuentren en, o en cercana, resonancia con la frecuencia del campo, mientras que el resto se encuentren en alta *desintonía*. Realizando algunas aproximaciones, es posible reducir este problema lo suficiente como para obtener una resolución exacta, cuyo análisis logra proporcionar características esenciales del problema de interacción átomo-campo.

En el transcurso de este capítulo se analizará el problema de interacción semiclásicamente de un sistema atómico de dos niveles interactuando con un modo del campo. Esto se realizará considerando al átomo como un sistema cuántico y tratando al campo clásicamente. Posteriormente, en el siguiente capítulo, se introducirá la teoría cuántica de la radiación, que nos

proporcionará las herramientas esenciales para un estudio completamente cuántico.

Un sistema de espines $\frac{1}{2}$ es matemáticamente análogo al atómico de dos niveles bajo la *aproximación dipolar*. Esta aproximación, que implica considerar la longitud de onda del campo electromagnético mucho mayor que el tamaño atómico, nos permite lograr una equivalencia formal entre la interacción semiclásica átomo-campo y la de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ con un campo magnético temporalmente dependiente. La analogía entre ambos problemas radica en las oscilaciones de Rabi. El sistema de espín $\frac{1}{2}$ sufre oscilaciones de Rabi entre los estados de espín- \uparrow y espín- \downarrow bajo la acción de un campo magnético oscilante. Por otro lado, el sistema atómico de dos niveles sufre oscilaciones ópticas de Rabi bajo la acción del campo electromagnético. En el caso atómico, las oscilaciones pueden estar amortiguadas si existe decaimiento alguno.

Este problema nos permite hacer una posterior generalización al incrementar el número de sistemas atómicos involucrados en la interacción con un campo electromagnético. Esta generalización se retomará más adelante con un enfoque enteramente cuántico, introduciendo así los modelos de Dicke y de Tavis-Cummings.

2.1 Hamiltoniano de Interacción Átomo-Campo

Un electrón de carga e y masa m interactuando con un campo electromagnético externo se puede describir por el Hamiltoniano de *mínimo-acoplamiento* [6]

$$H = \frac{1}{2m}[\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + eU(\mathbf{r}, t) + V(r), \quad (2.1.1)$$

donde \mathbf{p} es el operador canónico de momento, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $U(\mathbf{r}, t)$ son el potencial vectorial y escalar, respectivamente, y $V(r)$ es un potencial electrostático, normalmente el potencial atómico de acoplamiento. Primero derivaremos el Hamiltoniano anterior suponiendo invariancia de norma. Después lo reduciremos a una expresión más sencilla que nos permita abordar la interacción de un sistema atómico de dos niveles con un campo de radiación.

2.1.1 Invariancia Local de Norma y Norma de Coulomb

Partiremos de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (2.1.5)$$

donde ρ y \mathbf{j} denotan la carga y corriente, respectivamente, y se tienen las siguientes relaciones

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Las ecuaciones (2.1.2-2.1.5) relacionan los vectores eléctrico y magnético del campo, \mathbf{E} y \mathbf{H} , respectivamente, con los vectores de desplazamiento (\mathbf{D}) y de inducción (\mathbf{B}). Por otro lado, ϵ_0 y μ_0 representan la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del espacio libre, respectivamente, y $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

De las ecuaciones de Maxwell podemos definir lo siguiente

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.1.7)$$

donde el potencial vectorial, \mathbf{A} , y el potencial escalar, Φ , garantizan que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} satisfagan las ecuaciones (2.1.2) y (2.1.3). Además, con lo anterior, es posible expresar (2.1.4) y (2.1.5) como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.1.9)$$

Si ahora sustituimos las ecuaciones (2.1.6) y (2.1.7) en (2.1.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Utilizando la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

escribimos (2.1.10) como

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right] - \mu_0 \mathbf{j}. \quad (2.1.11)$$

Por otro lado, es posible expresar (2.1.8) como

$$-\nabla \cdot (\nabla \Phi) - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.1.12)$$

mediante la ecuación (2.1.6).

Posteriormente se analizará cómo la elección de una condición de norma apropiada nos permitirá eliminar el acoplamiento entre las ecuaciones (2.1.11) y (2.1.12).

Continuamos recordando que la dinámica de un electrón libre está descrita por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi, \quad (2.1.13)$$

tal que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$$

nos proporciona la densidad de probabilidad de encontrar al electrón en la posición \mathbf{r} a un tiempo t . Vemos que si $\psi(\mathbf{r}, t)$ es solución de (2.1.13), entonces

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\chi} \quad (2.1.14)$$

también lo será, donde χ es una fase arbitraria constante. Además, la densidad de probabilidad $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ será la misma sin importar la elección de χ . De esto podemos deducir que elegir la fase global de la función de onda es totalmente arbitrario y que, consecuentemente, dos funciones de onda que difieran sólo por un factor de fase constante, representarán el mismo estado físico. La transformación (2.1.14) es independiente de la posición y del tiempo. Todos los puntos en el espacio-tiempo serán tratados de igual manera, por lo que a esta transformación se le conoce como *transformación global de norma*.

Sin embargo, la situación cambia si la fase también tiene una dependencia local, es decir,

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t)e^{i\chi(\mathbf{r}, t)}. \quad (2.1.15)$$

La densidad de probabilidad, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, no se ve afectada por esta nueva dependencia local, pero la ecuación de Schrödinger (2.1.13) ya no se satisface. En contraste con el caso anterior, a esta transformación se le conoce como *transformación local de norma*.

Asimismo, es posible notar que el campo eléctrico y magnético son invariantes bajo las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar}{e} \nabla \chi(\mathbf{r}, t), \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{e} \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Ahora, para conseguir que se cumpla (2.1.13), la ecuación de Schrödinger debe modificarse añadiéndose algunos términos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla - i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t) \right\} \psi, \quad (2.1.16)$$

De esta forma, la ecuación (2.1.16), que es la transformación de (2.1.13) con el requisito de invariancia local de norma, tiene la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

donde H es el Hamiltoniano de mínimo-acoplamiento (2.1.1). La ecuación de Schrödinger (2.1.16) describe la interacción de un electrón con un campo electromagnético. El electrón queda descrito por la función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, mientras que el campo por los potenciales vectorial, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, y escalar, $\Phi(\mathbf{r}, t)$. Es importante notar que los potenciales \mathbf{A} y Φ provienen del desarrollo matemático al considerar la invariancia de norma.

Norma de Coulomb

La *norma de Coulomb* está definida por la restricción

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.1.17)$$

la cual provoca que (2.1.12) se reduzca a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Sin embargo, la condición (2.1.17) no desacopla la ecuación (2.1.11). Para lograrlo, de ahora en adelante, cuantizaremos el campo de radiación en ausencia de cargas y corrientes, es decir, $\rho \equiv 0$ y $\mathbf{j} \equiv 0$. Con la anterior suposición, logramos obtener la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi \equiv 0$ y

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1.18)$$

lo cual nos permite una descripción del campo de radiación únicamente en términos del potencial vectorial \mathbf{A} .

2.1.2 Aproximación Dipolar y Hamiltoniano $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$

Analizaremos ahora el problema de un electrón bajo la acción de una fuerza central (núcleo) localizada en \mathbf{r}_0 . El Hamiltoniano (2.1.1) para la interacción entre un átomo y un campo de radiación puede reducirse a una forma más sencilla utilizando la *aproximación dipolar*. En ésta, el átomo está totalmente sumergido en una onda plana del campo electromagnético descrita por el potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t)$. Así, el potencial vectorial puede ser escrito mediante dicha aproximación, considerando que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$, como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})} \\ &= \mathbf{A}(t) e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)(1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots)} \\ &\simeq \mathbf{A}(t) e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0)}. \end{aligned}$$

La ecuación de Schrödinger, usando la aproximación dipolar, está dada por la ecuación (2.1.16) con $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)$, es decir,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla - i\frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)]^2 + e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(r) \right\} \psi, \quad (2.1.19)$$

donde, además, se sumó el potencial de ligadura $V(r)$, el cual proviene del potencial electrostático que une al electrón con el núcleo.

Procedemos ahora a simplificar la ecuación (2.1.19) al definir una nueva función de onda

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]} \phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.1.20)$$

Sustituyendo (2.1.20) en la ecuación (2.1.19) vemos que ¹

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla - i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)]^2 + V(r) \right\} e^{[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]} \phi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]} \phi, \\ \text{M.I} \Rightarrow & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla^2 - i\frac{2e}{\hbar}\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{e^2}{\hbar^2}\mathbf{A}^2] + V(r) \right\} e^{[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]} \phi, \\ \text{M.D} \Rightarrow & i\hbar \left(\frac{ie}{\hbar}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{A}} \right) \phi + \dot{\phi} e^{[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]}, \end{aligned}$$

donde se utilizó que

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})] &= \frac{\hbar}{i}\nabla \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})] = \frac{\hbar}{i}[\psi(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla\psi(\mathbf{r})] \\ &= [\mathbf{A} \cdot \frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\mathbf{r})] \\ &\Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

Despreciando el término \mathbf{A}^2 , que usualmente es muy pequeño², la ecuación anterior se reduce a la expresión

$$\begin{aligned} \left[\frac{p^2}{2m} + V(r) \right] e^{[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]} \phi &= \left([-e\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{A}}] \phi + i\hbar\dot{\phi} \right) e^{[\frac{ie}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}]} \\ \Rightarrow H_0\phi &= (e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})\phi + i\hbar\dot{\phi} \\ \therefore i\hbar\dot{\phi}(\mathbf{r}, t) &= \left[H_0 - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \right] \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.21) \end{aligned}$$

donde

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

¹Las abreviaciones M.I y M.D refieren a los términos de la *Mano Izquierda* y *Mano Derecha*, respectivamente.

²La discusión sobre este término la detendremos hasta el Capítulo 5.

Para llegar al resultado de (2.1.21) se utilizó que $p \rightarrow -i\hbar\nabla$ y $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$. De este resultado también es posible notar que el Hamiltoniano total está compuesto por dos términos que denotaremos, a partir de ahora, el Hamiltoniano no perturbado y el de interacción, H_0 y H_I , respectivamente, con

$$H_I = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (2.1.22)$$

y donde $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ denota al dipolo eléctrico. Así,

$$H = H_0 + H_I. \quad (2.1.23)$$

El Hamiltoniano de interacción H_I está dado en términos del campo independiente de norma \mathbf{E} . Utilizaremos esta expresión a partir de ahora en el análisis de la interacción átomo-campo. Es importante notar que el término de interacción (2.1.22) se obtuvo aplicando la transformación de norma $\chi(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) \cdot \mathbf{r}$ al Hamiltoniano en (2.1.19), descrita en (2.1.20).

2.2 Interacción de un Átomo con un Campo Clásico

Hasta el momento no hemos aclarado la naturaleza del campo. El análisis previo es válido tanto para campos clásicos como cuánticos. Sin embargo, parte fundamental de este trabajo es estudiar las diferencias en la dinámica de interacción, cuando el campo es tratado diferente. Por el momento nos detendremos en el estudio de la interacción cuando el campo es considerado clásico.

Asumiremos ahora que el campo tiene la forma $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$, donde ω es la frecuencia del campo de radiación, el cual supondremos se acciona abruptamente en $t = 0$. Asumiremos también que el estado inicial del átomo es $|i\rangle$, de tal forma que $H_0|i\rangle = E_i|i\rangle$. Tomamos ahora una expansión de la

función de onda, para tiempo $t > 0$, en términos del conjunto completo de estados atómicos desacoplados $|k\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k C_k(t) e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle,$$

donde las amplitudes satisfacen la condición de normalización $\sum_k |C_k(t)|^2 = 1$. Sustituyendo esta función de onda en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) |\psi(t)\rangle,$$

con $\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t)$, donde $\hat{\mathbf{d}} = e\hat{\mathbf{r}}$. De esto obtenemos

$$i\hbar \sum_k \left(\dot{C}_k e^{-iE_k t/\hbar} - i \frac{E_k}{\hbar} e^{-iE_k t/\hbar} C_k \right) |k\rangle = H_0 \sum_k C_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle + H_I \sum_k C_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle$$

y multiplicando por la izquierda por $\langle l|e^{iE_l t/\hbar}$

$$\begin{aligned} & \sum_k \left(\dot{C}_k e^{i(E_l - E_k)t/\hbar} - i \frac{E_k}{\hbar} e^{i(E_l - E_k)t/\hbar} C_k \right) \langle l|k\rangle \\ &= \sum_k -\frac{i}{\hbar} \left(E_k e^{i(E_l - E_k)t/\hbar} C_k \langle l|k\rangle + C_k e^{i(E_l - E_k)t/\hbar} \langle l|H_I|k\rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \dot{C}_k e^{i(E_l - E_k)t/\hbar} \langle l|k\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k e^{i(E_l - E_k)t/\hbar} \langle l|H_I|k\rangle \\ \Rightarrow \dot{C}_l &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k e^{i\omega_{lk}t} \langle l|H_I|k\rangle, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde $\omega_{lk} = \frac{E_l - E_k}{\hbar}$ son las frecuencias de transición entre los niveles atómicos l y k . Si suponemos que inicialmente sólo el estado $|i\rangle$ estará poblado, entonces $C_i(0) = 1$. Conforme el tiempo avance el estado inicial perderá población, mientras que en un estado $|f\rangle$, inicialmente deshabitado, aumentará. Esto implica que la amplitud $C_f(t)$ incrementará. La probabilidad de

transición atómica del estado $|i\rangle$ al estado $|f\rangle$ está dada por

$$P_{i \rightarrow f} = |C_f(t)|^2$$

como se verá a continuación.

Al suponer que $|\langle f | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 | i \rangle|$ es pequeño podemos utilizar una teoría de perturbación dependiente del tiempo. Escribimos el Hamiltoniano de interacción como λH_I , donde $\lambda \in [0, 1]$. Expandemos la amplitud de probabilidad para, digamos, el estado $|l\rangle$ en series de potencias

$$C_l(t) = \lambda^0 C_l^{(0)}(t) + \lambda^1 C_l^{(1)}(t) + \lambda^2 C_l^{(2)}(t) + \dots$$

Sustituyendo la expansión anterior en (2.2.1) e igualando mismas potencias de λ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{C}_l^{(0)} &= 0 \\ \dot{C}_l^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k^{(0)} H_{lk}^{(I)} e^{i\omega_{lk}t} \\ \dot{C}_l^{(2)} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k^{(1)} H_{lk}^{(I)} e^{i\omega_{lk}t} \\ &\vdots \\ \dot{C}_l^{(n)} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k^{(n-1)} H_{lk}^{(I)} e^{i\omega_{lk}t}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

con $H_{lk}^{(I)}(t) \equiv \langle l | H^{(I)} | k \rangle$ y donde el superíndice denota el término de interacción.

Para lograr una teoría de perturbación en este proceso es fundamental considerar que el campo de radiación es tan pequeño que el cambio poblacional de los estados atómicos es diminuto. Esto significa que si $C_i(0) = 1$, $C_f(0) = 0$, para $(f \neq i)$, entonces para $t > 0$ una buena aproximación es $C_i(0) \approx 1$, $C_f(0) \ll 1$, para $(f \neq i)$. A primer orden, el único término que

sobrevive la suma en la sección derecha de la igualdad es para $k = i$ lo que nos lleva a

$$\dot{C}_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} H_{fi}^{(I)}(t) e^{i\omega_{fi}t} C_i^{(0)}(t)$$

o

$$C_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{fi}^{(I)}(t') e^{i\omega_{fi}t'} C_i^{(0)}(t'). \quad (2.2.3)$$

Sustituyendo este término en la ecuación de segundo orden en (2.2.2), obtenemos

$$\begin{aligned} C_f^{(2)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_l \int_0^t dt' H_{fl}^{(I)}(t') e^{i\omega_{fl}t'} C_i^{(1)}(t') \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_l \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' H_{fl}^{(I)}(t') e^{i\omega_{fl}t'} \\ &\quad \times H_{li}^{(I)}(t'') e^{i\omega_{li}t''} C_i^{(0)}(t''). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

La ecuación (2.2.3) nos da la amplitud de una transición entre los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$, mientras que (2.2.4) la de una transición del estado $|i\rangle$ a los estados $\{|l\rangle\}$ y posteriormente a $|f\rangle$. La probabilidad de transición total del estado $|i\rangle$ al $|f\rangle$ está dada por

$$P_{i \rightarrow f} = |C_f^{(0)}(t) + C_f^{(1)}(t) + C_f^{(2)}(t) + \dots|^2.$$

Sin embargo, el operador de momento sólo cuenta con elementos de matriz entre los estados de paridad opuesta, por lo que la corrección a primer orden de la amplitud para el estado inicial se anula, es decir,

$$C_i^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{ii}^{(I)}(t') C_i^{(0)}(t') = 0,$$

porque $H_{ii}^{(I)}(t') = 0$. Por lo tanto, a primer orden, $C_i(t) = C_i^{(0)}(t) = 1$ de tal forma que

$$C_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{fi}^{(I)}(t') e^{i\omega_{fi}t'}.$$

Con $H^{(I)} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t)$ y expandiendo el coseno en términos exponenciales la integral anterior se traduce en

$$C_f^{(1)}(t) = \frac{1}{2\hbar} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi} \times \left(\frac{e^{i(\omega + \omega_{fi})t} - 1}{(\omega + \omega_{fi})} - \frac{e^{i(\omega - \omega_{fi})t} - 1}{(\omega - \omega_{fi})} \right),$$

donde $(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi} = \langle f | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 | i \rangle$. Si la frecuencia de la radiación ω se encuentra cercana a estar en resonancia con la frecuencia de transición ω_{fi} , entonces el segundo término domina. Por ello despreciamos el primer término llamado *contrarrotante*, haciendo así la *aproximación de onda rotante* (RWA, por sus siglas en inglés). En consecuencia, la probabilidad de transición a primer orden es

$$P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t) = |C_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{|(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi}|^2 \sin^2(\frac{\Delta t}{2})}{\hbar^2 \Delta^2}.$$

Denotamos en esta última ecuación al *parámetro de desintonía* como $\Delta = \omega - \omega_{fi}$. Si $\Delta \neq 0$, entonces

$$(P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t))_{\text{máx}} = \frac{|(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi}|^2}{4\hbar^2} \frac{1}{\Delta^2},$$

y si $\Delta = 0$, es decir, en el caso resonante,

$$(P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t))_{\text{máx}} = \frac{|(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi}|^2}{4\hbar^2} t^2. \quad (2.2.5)$$

Para que la expansión de perturbación sea válida requerimos que $(P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t))_{\text{máx}} \ll 1$. Para el caso resonante esto implica que la ecuación (2.2.5) es válida sólo para tiempo cortos.

Para calcular el área bajo la curva de la probabilidad de transición $P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t)$ notamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{\Delta^2} d(\Delta) = \frac{\pi}{2} t.$$

En el límite cuando $\Delta \approx 0$ y $t \gg 2\pi/\omega_{fi}$, el integrando de la función anterior se puede aproximar por una delta de Dirac:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{\Delta^2} = \frac{\pi}{2} t \delta(\Delta).$$

En este caso la probabilidad de transición es

$$P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t) = \frac{\pi}{2} \frac{|(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega - \omega_{fi}) t.$$

En la realidad tendremos una gran cantidad de estados finales $|f\rangle$ accesibles desde el estado inicial. Además, el campo no será monocromático ocasionando que, para obtener la probabilidad de transición total, será necesario integrar sobre todas las frecuencias. Sea $[f]$ el conjunto que representa a los estados finales accesibles. Definimos la *razón de la probabilidad de transición* como

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t)}{t}.$$

Entonces $W_{i \rightarrow f}$ para un campo monocromático estará dada por

$$W_{i \rightarrow [f]} = \frac{\pi}{2} \sum_{[f]} \frac{|(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega - \omega_{fi}), \quad (2.2.6)$$

expresión conocida como la *regla de oro de Fermi*.

2.3 Interacción de un Átomo de Dos Niveles con un Campo Clásico

La teoría de perturbación, que utilizamos anteriormente, supone que la población atómica inicial prácticamente no cambia, es decir, la amplitud de probabilidad de encontrar al átomo en cualquier otro estado es pequeña. Sin embargo, un campo láser fuerte, cuya frecuencia se encuentre en cercana resonancia con un par de niveles atómicos (de paridad opuesta), causará que la población se transfiera al estado que se encuentre en cercana resonancia con el campo, pero a ningún otro. A este problema se le conoce como el *modelo de Rabi*.

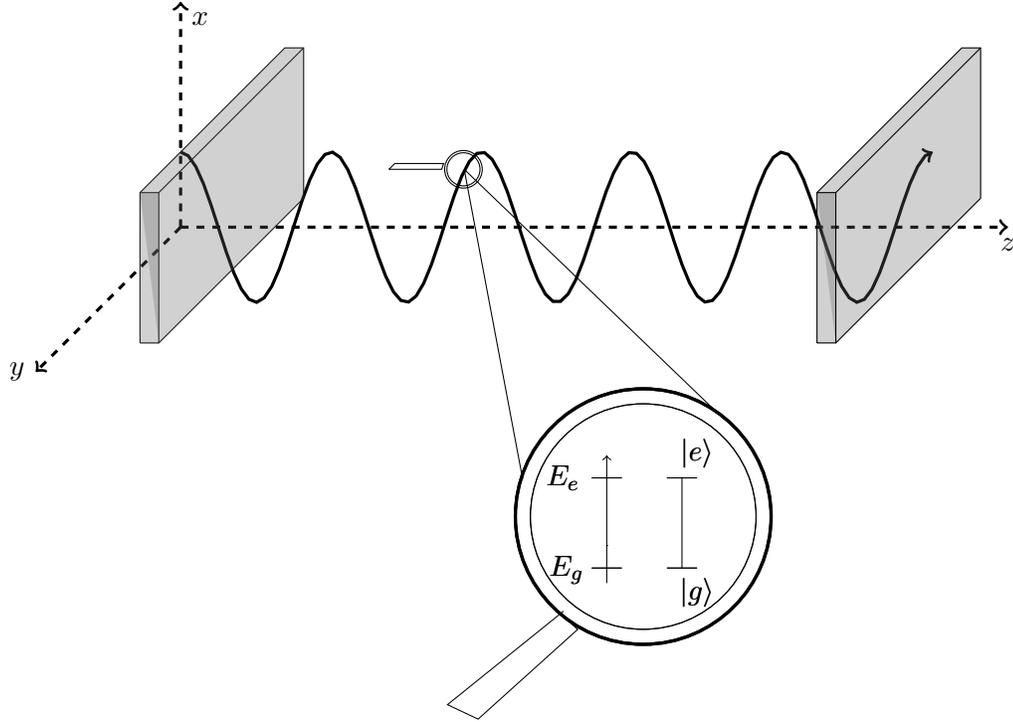


Figura 1: Simple modelo de la interacción de un átomo de dos niveles y un modo del campo electromagnético. El átomo está compuesto por dos estados: $|g\rangle$, el estado base, y $|e\rangle$, el estado excitado, cuyas energías son $E_g \equiv \hbar\omega_g$ y $E_e \equiv \hbar\omega_e$, respectivamente. Por otro lado, el campo se encuentra confinado, dentro de una cavidad unidimensional, por paredes conductoras ideales.

Consideremos la interacción entre un átomo de dos niveles y un campo de radiación de un modo, cuya frecuencia es ω , como se muestra en la Figura 1. Sean $|g\rangle$ el estado base (*ground state*) y $|e\rangle$ el excitado (*excited state*) de un átomo. Lo anterior implica que ambos son eigenestados del Hamiltoniano no perturbado \hat{H}_0 , es decir,

$$\hat{H}_0|g\rangle = \hbar\omega_g|g\rangle = E_g|g\rangle$$

y

$$\hat{H}_0|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle = E_e|e\rangle.$$

La función de onda de este sistema atómico puede ser expresada como una superposición de las eigenfunciones

$$|\psi(t)\rangle = C_g(t)e^{-i(E_g t)/\hbar}|g\rangle + C_e(t)e^{-i(E_e t)/\hbar}|e\rangle,$$

donde $C_g(t)$ y $C_e(t)$ son las amplitudes de probabilidad de encontrar al átomo en el estado $|g\rangle$ o $|e\rangle$, respectivamente. A partir de la función de onda anterior escribimos la ecuación de Schrödinger como

$$|\dot{\psi}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (2.3.1)$$

con \hat{H} dado por (2.1.23).

Si ahora utilizamos la relación de completitud $|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e| = \mathbf{1}$ podemos expresar el Hamiltoniano no perturbado \hat{H}_0 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \left(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|\right) H_0 \left(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|\right) \\ &= \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| = E_g|g\rangle\langle g| + E_e|e\rangle\langle e|. \end{aligned}$$

Con la representación vectorial

$$\begin{aligned} |e\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \langle e| &\equiv (1, 0) \\ |g\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \langle g| &\equiv (0, 1) \end{aligned}$$

el Hamiltoniano no perturbado o *Hamiltoniano atómico* tiene la representación matricial

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_e & 0 \\ 0 & E_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E_e + E_g) + \frac{1}{2}(E_e - E_g) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(E_g + E_e) + \frac{1}{2}(E_g - E_e) \end{pmatrix},$$

o

$$\hat{H}_0 = E \mathbf{I} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde $E = \frac{1}{2}(E_e + E_g)$ y $\omega_0 \equiv \omega_e - \omega_g$ denota la frecuencia de transición.

Comúnmente el término de energía constante se desprecia, porque no desempeña un papel dinámico. De forma que, usualmente, se escribe

$$\hat{H}_{\text{átomo}} \equiv \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z, \quad (2.3.2)$$

con $\hat{\sigma}_z$ la matriz de Pauli

$$\hat{\sigma}_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3.3)$$

Previo al desarrollo del Hamiltoniano de interacción, nos detendremos en la expresión del operador dipolar \mathbf{er} . Como los eigenestados de una función de onda $\psi_j(\vec{r})$ tienen paridad bien definida, los elementos de la diagonal desaparecen, es decir,

$$\langle j | \hat{r} | j \rangle = \int d^3r |\psi_j(\vec{r})|^2 \vec{r} = 0.$$

Como $|\psi_j(\vec{r})|^2$ es una función simétrica y \vec{r} una antisimétrica, el integrando es antisimétrico. Por lo tanto, los elementos fuera de la diagonal se expresan como

$$\begin{aligned} e \langle e | \hat{r} | g \rangle &= e \int d^3r \psi_e^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_g(\vec{r}) \equiv \vec{\wp} \\ e \langle g | \hat{r} | e \rangle &= e \int d^3r \psi_g^*(\vec{r}) \vec{r} \psi_e(\vec{r}) \equiv \vec{\wp}^* \end{aligned}$$

y de esta manera el operador dipolar toma la forma

$$e\hat{\mathbf{r}} = \vec{\wp}|e\rangle\langle g| + \vec{\wp}^*|g\rangle\langle e|.$$

Notamos que este operador describe transiciones del estado base al excitado y viceversa. Lo anterior puede ser visto al aplicarle este operador a los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$:

$$\begin{aligned} e\hat{\mathbf{r}}|g\rangle &= \vec{\wp}|e\rangle\langle g|g\rangle + \vec{\wp}^*|g\rangle\langle e|g\rangle = \vec{\wp}|e\rangle, \\ e\hat{\mathbf{r}}|e\rangle &= \vec{\wp}|e\rangle\langle g|e\rangle + \vec{\wp}^*|g\rangle\langle e|e\rangle = \vec{\wp}^*|g\rangle. \end{aligned}$$

De la acción del operador dipolar sobre el par de estados, notamos que

$$\hat{\sigma}^\dagger \equiv |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

excita al átomo y actúa como un operador de creación.

En contraste, tenemos que

$$\hat{\sigma} \equiv |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

desexcita al átomo y por lo tanto actúa como un operador de aniquilación.

En términos de $\hat{\sigma}$ y $\hat{\sigma}^\dagger$, el operador dipolar puede escribirse como

$$e\hat{\mathbf{r}} = \vec{\wp}\hat{\sigma}^\dagger + \vec{\wp}^*\hat{\sigma}.$$

Ahora sí, podemos desarrollar el término correspondiente al Hamiltoniano de interacción

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= e\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(t) = e\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \\ &= \left(\vec{\wp}^*|g\rangle\langle e| + \vec{\wp}|e\rangle\langle g| \right) \mathbf{E}_0 \cos(\omega t), \end{aligned}$$

donde ahora $\wp = e \langle e | \hat{r} | g \rangle$ es el elemento de matriz del momento dipolar eléctrico.

Ahora, volvemos a la ecuación de movimiento de las amplitudes C_g y C_e que se obtienen a partir de los resultados anteriores y de la ecuación de Schrödinger (2.3.1)

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{H}_I] (C_g(t) e^{-i(E_g t)/\hbar} |g\rangle + C_e(t) e^{-i(E_e t)/\hbar} |e\rangle) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left([C_g e^{-i(E_g t)/\hbar} E_g |g\rangle + C_e e^{i(E_e t)/\hbar} E_e |e\rangle] \right) \\ &\quad -\frac{i}{\hbar} \left([C_g e^{-i(E_g t)/\hbar} \wp \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) |e\rangle + C_e e^{-i(E_e t)/\hbar} \wp^* \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) |g\rangle] \right), \end{aligned}$$

con

$$|\dot{\psi}\rangle = e^{-i(E_g t)/\hbar} \left(\dot{C}_g - \frac{i}{\hbar} C_g E_g \right) |g\rangle + e^{-i(E_e t)/\hbar} \left(\dot{C}_e - \frac{i}{\hbar} C_e E_e \right) |e\rangle.$$

Simplificando la igualdad anterior obtenemos las ecuaciones para C_g y C_e acopladas.

$$\begin{aligned} \dot{C}_g &= -\frac{i}{\hbar} \wp \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} C_e, \\ \dot{C}_e &= -\frac{i}{\hbar} \wp^* \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} C_g, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

donde $\omega_0 = \frac{E_e - E_g}{\hbar}$.

Como condición inicial tomaremos que la población inicialmente se encuentra en el estado base, por lo que $C_g(0) = 1$ y $C_e(0) = 0$. Expandemos $\cos(\omega t)$ de las ecuaciones (2.3.4) en exponenciales y, manteniendo sólo aquellos términos que oscilan con frecuencia $\omega_0 - \omega$, logramos

$$\dot{C}_g = -\frac{i}{2\hbar} \wp \mathbf{E}_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} C_e \quad (2.3.5)$$

$$\dot{C}_e = -\frac{i}{2\hbar} \wp^* \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega_0 - \omega)t} C_g. \quad (2.3.6)$$

Despreciar los términos que oscilan como $\omega_0 + \omega$ constituye la aproximación de onda rotante (RWA). Ahora eliminamos el término C_g y obtenemos una ecuación para C_e :

$$\ddot{C}_e + i(\omega_0 - \omega)\dot{C}_e + \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0}{2\hbar}\right)^2 C_e = 0.$$

Para resolver esta ecuación diferencial proponemos una solución de la forma

$$C_e(t) = e^{i\lambda t},$$

la que nos conduce a las dos raíces

$$\begin{aligned}\lambda_{\pm} &= \frac{1}{2} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \frac{\wp^2 \mathbf{E}_0^2}{\hbar^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta \pm \Omega),\end{aligned}$$

donde $\Delta = \omega_0 - \omega$ es la frecuencia de amortiguamiento para la transición atómica y el campo láser. Así, la solución es de la forma

$$C_e(t) = A_+ e^{i\lambda_+ t} + A_- e^{i\lambda_- t}$$

y de las condiciones iniciales obtenemos

$$\begin{aligned}C_e(t) &= A[e^{i\lambda_+ t} - e^{i\lambda_- t}] \\ &= A e^{i\Delta t/2} \left[e^{it\frac{\Omega}{2}} - e^{-it\frac{\Omega}{2}} \right] \\ &= 2iA e^{i\Delta t/2} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right).\end{aligned}$$

Al diferenciar la expresión anterior llegamos a

$$\dot{C}_e(t) = 2iA e^{i\Delta t/2} \left[\frac{i\Delta}{2} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + \frac{\Omega}{2} \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right].$$

Procedemos comparando la expresión previa al tiempo inicial, $\dot{C}_e(0)$, con la ecuación (2.3.6), igualmente en $t = 0$. De lo anterior y de la consideración

de encontrar al átomo inicialmente en el estado base, logramos determinar el valor de la constante A :

$$A_{\pm} = \mp \frac{\wp \mathbf{E}_0}{2\hbar \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0}{\hbar}\right)^2}}.$$

Con los resultados anteriores llegamos finalmente a las expresiones siguientes

$$C_e(t) = i \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0}{\Omega \hbar} \right) e^{i\Delta t/2} \sin \left(\frac{\Omega t}{2} \right) \quad (2.3.7)$$

$$C_g(t) = e^{i\Delta t/2} \left(\cos \left(\frac{\Omega t}{2} \right) - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin \left(\frac{\Omega t}{2} \right) \right), \quad (2.3.8)$$

con

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\Delta^2 + \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0}{\hbar} \right)^2} \\ &= \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}, \end{aligned}$$

donde Ω_R es la llamada *frecuencia de Rabi*. El subíndice de la frecuencia anterior hace referencia a Rabi, quien en 1937 consideró el problema de un magneto dipolar de espín- $\frac{1}{2}$ que sufre precesiones en un campo magnético. Asimismo, Rabi calculó las probabilidades de la inversión de una partícula de espín- $\frac{1}{2}$, que incide en un aparato Stern-Gerlach, entre los estados \uparrow y \downarrow , debida a la acción de un campo magnético. Ahora analizaremos la inversión atómica de un átomo de dos niveles, donde éste sufre igualmente una inversión de Rabi entre los estados superior e inferior bajo la aplicación de un campo electromagnético.

De las ecuaciones (2.3.7) y (2.3.8), es posible verificar que

$$\begin{aligned} |C_e|^2 + |C_g|^2 &= \cos^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) \left[\left(\frac{\wp \mathbf{E}_0}{\Omega \hbar} \right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\Omega} \right)^2 \right] \\ &= \cos^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) = 1, \end{aligned}$$

lo cual hace referencia a la conservación de la probabilidad, dado que el átomo sólo puede encontrarse en el estado $|e\rangle$ o $|g\rangle$.

Así, la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado $|e\rangle$ es

$$P_e(t) = |C_e(t)|^2 = \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0}{\Omega \hbar} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right).$$

En el caso resonante, $\Delta = 0$, tenemos

$$P_e(t) = \sin^2 \left(\frac{\Omega_R t}{2} \right),$$

donde además es posible notar que al tiempo $t = \pi \hbar / \wp \mathbf{E}_0$ toda la población se habrá transferido al estado excitado.

Frecuentemente se hace énfasis en la cantidad denominada *inversión atómica* $W(t)$ definida por la diferencia poblacional entre los dos estados:

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t).$$

Ésta, a partir de las ecuaciones (2.3.7) y (2.3.8), tiene la expresión

$$W(t) = 2 \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\Delta}{\Omega} \right)^2 \right] \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right), \quad (2.3.9)$$

que, para el caso resonante, se expresa como

$$\begin{aligned} W(t) &= \sin^2 \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0 t}{2 \hbar} \right) - \cos^2 \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0 t}{2 \hbar} \right) \\ &= -\cos \left(\frac{\wp \mathbf{E}_0 t}{\hbar} \right). \end{aligned}$$

De lo anterior es posible observar que, en el caso resonante, la frecuencia de inversión atómica es la frecuencia de Rabi, $\Omega_R = \frac{\wp \mathbf{E}_0}{\hbar}$. Nuevamente al tiempo $t = \pi \hbar / \wp \mathbf{E}_0$ toda la población se habrá transferido al estado excitado, lo que implica que $W(\pi \hbar / \wp \mathbf{E}_0) = 1$. A estas transferencias de poblaciones se les conoce como pulsos. Pero, al tiempo $t = \pi \hbar / 2 \wp \mathbf{E}_0$, la inversión

atómica se anula, reflejando así que la población se encuentra repartida coherentemente entre los dos estados

$$\begin{aligned} C_e \left(\frac{\pi \hbar}{2\varphi \mathbf{E}_0} \right) &= \frac{i}{\sqrt{2}}, \\ C_g \left(\frac{\pi \hbar}{2\varphi \mathbf{E}_0} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\left| \psi \left(\frac{\pi \hbar}{2\varphi \mathbf{E}_0} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle). \quad (2.3.10)$$

A la transferencia poblacional del estado base al estado dado por la ecuación (2.3.10) se le conoce como pulso $\pi/2$.

2.4 Matriz de Densidad para un Átomo de Dos Niveles

A un sistema físico al que le corresponde una función de onda $|\psi(t)\rangle$ se le puede extraer información sobre una variable física calculando el valor esperado del correspondiente operador, digamos \hat{O} ,

$$\langle \hat{O} \rangle_{QM} = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle.$$

Frecuentemente desconocemos la función de onda $|\psi\rangle$ de nuestro sistema o, peor aún, el sistema está compuesto por una mezcla de subsistemas descritos por funciones de onda $|\psi_i\rangle$, pero es posible que sepamos la probabilidad P_i de encontrarlo en un estado $|\psi_i\rangle$. En estos casos, es necesario calcular

$$\langle \hat{O} \rangle_{QM} = Tr(\hat{O}\hat{\rho}), \quad (2.4.1)$$

donde a $\hat{\rho}$ se le conoce como el *operador de densidad* y se define como

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Para construir este resultado y obtener mayor generalidad expresamos al estado $|\psi_i\rangle$ en términos de una base arbitraria ortonormal $|n\rangle$,

$$|\psi_i\rangle = \sum_n a_{in} |n\rangle, \quad (2.4.2)$$

donde los coeficientes a_{in} están dados por $a_{in} = \langle n|\psi_i\rangle$.

Sea \hat{O} un operador arbitrario, cuyo valor esperado en el subensamble $|\psi_i\rangle$ es \hat{O}_i . El valor promedio de \hat{O} sobre todo el ensamble está dado por

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \sum_i P_i \hat{O}_i = \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle = \sum_i \sum_{m,n} P_i \langle n | a_{in}^* \hat{O} a_{im} | m \rangle \\ &= \sum_i \sum_{m,n} P_i a_{in}^* a_{im} \langle n | \hat{O} | m \rangle. \end{aligned}$$

Ahora reescribimos los coeficientes de la expresión anterior como

$$\begin{aligned} \sum_i P_i a_{in}^* a_{im} &= \sum_i P_i \langle m | \psi_i \rangle \langle \psi_i | n \rangle = \langle m | \left[\sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right] | n \rangle \\ &= \langle m | \hat{\rho} | n \rangle = \rho_{mn}, \end{aligned}$$

donde $\hat{\rho}$ está dada por (2.4.2). Sustituimos lo anterior para calcular $\langle \hat{O} \rangle$ y obtenemos

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_{n,m} \rho_{mn} O_{nm} = \sum_m (\hat{\rho} \hat{O})_{mm},$$

esto es,

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{O}),$$

que es la ecuación (2.4.1) que deseábamos obtener.

Es inmediato notar que

$$Tr(\hat{O} \hat{\rho}) = Tr(\hat{\rho} \hat{O}).$$

En el caso particular en el cual $P_i = \delta_{ip}$ tenemos

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i \delta_{ip} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = |p\rangle \langle p|,$$

que es la definición de un *estado puro*. De la conservación de probabilidad se sigue que $Tr(\hat{\rho}) = 1$.

Por otro lado, se conoce como *estado mixto* a una colección de estados puros $|\psi_i\rangle$, con probabilidad p_i , donde $p_i \in [0, 1]$ y $\sum_i p_i = 1$. Ahora, nos detendremos para probar importantes características del operador de densidad, es decir, demostraremos que $\hat{\rho}$ es un operador positivo y que un estado mixto es aquél que cumple con $Tr(\hat{\rho}^2) < 1$.

Partimos escribiendo a $\hat{\rho}$ en su descomposición espectral

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i|,$$

donde $\{|u_i\rangle\}$ es una base ortonormal. Además, sabemos que $Tr(\hat{\rho}) = 1$ por la conservación de probabilidad. Si suponemos que $|\varphi\rangle$ es un estado arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle &= \sum_i \lambda_i \langle \varphi | u_i \rangle \langle u_i | \varphi \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i |\langle \varphi | u_i \rangle|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

con lo que demostramos la condición de positividad.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}) = 1 &= Tr \left(\sum_i \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i| \right) \\ &= \sum_j \langle u_j | \left(\sum_i \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i| \right) |u_j\rangle \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \langle u_j | u_i \rangle \langle u_i | u_j \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\sum_i \lambda_i = 1$, que es cierto si un eigenvalor del operador de densidad satisface $\lambda_i < 1$. Esto implica que $\sum_i \lambda_i^2 < 1$, dado que si $\lambda_i < 1$, entonces $\lambda_i^2 < \lambda_i$.

Ahora consideramos el cuadrado del operador de densidad y escribimos

$$\begin{aligned}
 Tr(\hat{\rho}^2) &= \sum_i \langle u_i | \left(\sum_j \lambda_j |u_j\rangle \langle u_j| \right) \left(\sum_k \lambda_k |u_k\rangle \langle u_k| \right) |u_i\rangle \\
 &= \sum_{i,j,k} \lambda_j \lambda_k \langle u_i | u_j \rangle \langle u_j | u_k \rangle \langle u_k | u_i \rangle \\
 &= \sum_i \lambda_i \lambda_i \\
 &= \sum_i \lambda_i^2 < 1 \\
 \therefore \quad Tr(\hat{\rho}^2) &< 1.
 \end{aligned}$$

Del resultado anterior es posible observar los casos siguientes

$$\text{Estado Puro} \iff Tr(\hat{\rho}^2) = 1,$$

$$\text{Estado Mixto} \iff Tr(\hat{\rho}^2) < 1.$$

La introducción del operador de densidad también nos permite calcular la entropía de un sistema cuántico. Para un sistema cuántico utilizamos $\hat{\rho}$ para expresar la *entropía de Von Neumann*, la cual está dada por

$$S(\hat{\rho}) = -Tr(\hat{\rho} \log \hat{\rho}).$$

La *entropía relativa de Von Neumann* de los estados $\hat{\rho}$ y $\hat{\sigma}$ es

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) = Tr(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) - Tr(\hat{\rho} \log \hat{\sigma}),$$

de la cual es posible notar que

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) = 0 \iff \hat{\rho} = \hat{\sigma}.$$

Además, en términos de los eigenvalores λ_i del operador de densidad $\hat{\rho}$, es factible escribir la entropía de Von Neumann como

$$S(\hat{\rho}) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i.$$

2.4.1 Ecuaciones de Movimiento de la Matriz de Densidad

La ecuación de movimiento de la matriz de densidad la podemos obtener recordando la ecuación de Schrödinger,

$$|\dot{\psi}_i\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi_i\rangle.$$

Derivando la matriz de densidad de un estado $|\psi\rangle$ respecto del tiempo obtenemos

$$\dot{\rho} = \sum_i P_i (|\dot{\psi}_i\rangle \langle \psi_i| + |\psi_i\rangle \langle \dot{\psi}_i|),$$

donde P_i es independiente del tiempo. Reemplazamos $|\dot{\psi}_i\rangle$ y a su conjugado mediante la ecuación de Schrödinger y llegamos a

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]. \quad (2.4.3)$$

A la ecuación (2.4.3) se le conoce como *la ecuación de Liouville* o de *Von Neumann de movimiento* para la matriz de densidad. Como la descripción más general de un sistema es mediante la matriz de densidad, la ecuación de Liouville es consecuentemente más poderosa que la de Schrödinger, porque también nos da información estadística del ensamble.

2.4.2 Átomo de Dos Niveles

Consideremos ahora el sistema atómico de dos niveles donde nuestro estado está expresado como una combinación lineal de los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, es decir,

$|\psi\rangle = C_g(t)|g\rangle + C_e(t)|e\rangle$. Esto implica que el operador de matriz de densidad se escribirá como

$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = [C_g(t)|g\rangle + C_e(t)|e\rangle][C_g(t)^*\langle g| + C_e(t)^*\langle e|] \\ &= |C_e|^2|e\rangle\langle e| + C_e C_g^*|e\rangle\langle g| + C_g C_e^*|g\rangle\langle e| + |C_g|^2|g\rangle\langle g|.\end{aligned}$$

De esta expresión tomamos los elementos de matriz:

$$\begin{aligned}\rho_{ee} &= \langle e|\hat{\rho}|e\rangle = |C_e|^2, \\ \rho_{eg} &= \langle e|\hat{\rho}|g\rangle = C_e C_g^*, \\ \rho_{ge} &= \langle g|\hat{\rho}|e\rangle = \rho_{eg}^*, \\ \rho_{gg} &= \langle g|\hat{\rho}|g\rangle = |C_g|^2,\end{aligned}$$

y escribimos

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix}.$$

Notamos que los elementos de la diagonal de la matriz anterior representan las probabilidades atómicas de estar en el estado excitado, ρ_{ee} , o en el estado base, ρ_{gg} .

Para obtener las ecuaciones de movimiento de la matriz de densidad procedemos escribiendo los elementos de matriz del Hamiltoniano para el sistema atómico de dos niveles $|e\rangle$ y $|g\rangle$:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \begin{pmatrix} \langle e|\hat{H}|e\rangle & \langle e|\hat{H}|g\rangle \\ \langle g|\hat{H}|e\rangle & \langle g|\hat{H}|g\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e|\hat{H}_0|e\rangle & \langle e|\hat{H}_I|g\rangle \\ \langle g|\hat{H}_I|e\rangle & \langle g|\hat{H}_0|g\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hbar\omega_e & \mathbf{E}(t)\wp \\ \mathbf{E}(t)\wp^* & \hbar\omega_g \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$.

Con los resultados anteriores construimos el conmutador $[\hat{H}, \hat{\rho}]$

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{\rho}] &= \begin{pmatrix} \rho_{ee}\hbar\omega_e + \mathbf{E}(t) \wp \rho_{ge} & \hbar\omega_e\rho_{eg} + \mathbf{E}(t) \wp \rho_{gg} \\ \hbar\omega_g\rho_{ge} + \mathbf{E}(t) \wp^* \rho_{ee} & \rho_{gg}\hbar\omega_g + \mathbf{E}(t) \wp^* \rho_{eg} \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} \rho_{ee}\hbar\omega_e + \mathbf{E}(t) \wp^* \rho_{eg} & \hbar\omega_g\rho_{eg} + \mathbf{E}(t) \wp \rho_{ee} \\ \hbar\omega_e\rho_{ge} + \mathbf{E}(t) \wp^* \rho_{gg} & \rho_{gg}\hbar\omega_g + \mathbf{E}(t) \wp \rho_{ge} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{E}(t) (\wp \rho_{ge} - \wp^* \rho_{eg}) & -\mathbf{E}(t)\wp(\rho_{ee} - \rho_{gg}) + \hbar\rho_{eg}(\omega_e - \omega_g) \\ \mathbf{E}(t)\wp^*(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - \hbar\rho_{ge}(\omega_e - \omega_g) & -\mathbf{E}(t)(\wp \rho_{ge} - \wp^* \rho_{eg}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de la matriz de densidad son

$$\dot{\rho}_{ee} = -\frac{i}{\hbar}\mathbf{E}(t) \left[\wp \rho_{ge} - \wp^* \rho_{eg} \right], \quad (2.4.4)$$

$$\dot{\rho}_{eg} = -\frac{i}{\hbar} \left[-\mathbf{E}(t)\wp(\rho_{ee} - \rho_{gg}) + \hbar\rho_{eg}(\omega_e - \omega_g) \right], \quad (2.4.5)$$

$$\dot{\rho}_{ge} = -\frac{i}{\hbar} \left[\mathbf{E}(t)\wp^*(\rho_{ee} - \rho_{gg}) - \hbar\rho_{ge}(\omega_e - \omega_g) \right], \quad (2.4.6)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = \frac{i}{\hbar}\mathbf{E}(t) \left[\wp \rho_{ge} - \wp^* \rho_{eg} \right]. \quad (2.4.7)$$

A lo largo de este capítulo hemos estudiado la interacción radiación-materia, enfocándonos en la interacción de un sistema atómico de dos niveles con un campo eléctrico clásico. Para lograr nuestro objetivo requerimos construir el término de interacción, el cual provino del principio de norma. Posteriormente, a partir de la construcción del Hamiltoniano, estudiamos las transiciones al sumergir el átomo en un campo clásico de la forma $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ y notamos que su estudio nos condujo a la famosa ley de oro de Fermi.

El estudio previo nos permitió restringir a que nuestro sistema atómico interactuara con un campo láser fuerte, cuya frecuencia estuviera en cercana resonancia con sólo un par de niveles atómicos. Esto nos llevó al estudio del modelo de Rabi. Además, para complementar el estudio, realizamos una

breve introducción a la matriz de densidad, enfocándonos en la del átomo de dos niveles. Finalmente logramos obtener las ecuaciones de movimiento de la matriz de densidad para nuestro sistema atómico.

En el siguiente capítulo se realizará el estudio cuántico de la radiación, donde cuantizaremos al campo electromagnético en términos de osciladores armónicos acoplados. Lo anterior nos capacitará para elaborar un análisis de la interacción puramente cuántico. Esto es, nos provera de dinámicas que contrastarán con lo observado en el caso semiclásico.

3 Teoría Cuántica de la Radiación

La noción actual de la luz es evidencia clara de todo el progreso científico hasta nuestros días. Esto se debe a que la luz se distingue por su ineludible protagonismo en la comprensión de nuestra naturaleza, tanto clásica como cuántica.

A pesar de los importantes avances en la óptica logrados por Newton, éste nunca compartió la opinión de considerar la luz como una onda. Maxwell, en cambio, fue quien logró la unificación de la electricidad y el magnetismo, la cual muestra el claro comportamiento ondulatorio de la luz. Así, el significativo papel de la luz, continuó estableciendo la frontera de la investigación científica.

A principios del siglo XX, Planck introdujo el concepto de *quantum*, dando inicio a la era de la mecánica cuántica. La introducción de este concepto fue necesaria para la comprensión del espectro de radiación del cuerpo negro, asociado a la catástrofe ultravioleta. Además, al extender las ideas de Planck, Einstein logró también explicar el efecto fotoeléctrico y, consecuentemente, introdujo el concepto de cuanto de luz.

Sin embargo, fue Dirac quien se encargó posteriormente de la unificación de los dos comportamientos de la luz: onda y partícula. El trabajo de Dirac permitió explicar los fenómenos de interferencia, así como el de la excitación de un átomo en el proceso de absorción de un fotón. Con la publicación de su artículo en 1927, Dirac se convirtió en pionero de la teoría cuántica de la radiación.

En el siguiente capítulo seguiremos el camino de Dirac, asociando a cada modo del campo de radiación un oscilador armónico simple cuantizado, dando pie a la idea de *cuantización* del campo electromagnético. El ejercicio

de cuantizar la radiación tiene consecuencias notables como fluctuaciones asociadas al punto cero de energía, y que son responsables de interesantes fenómenos de la óptica cuántica. Cabe destacar que no existe análogo clásico a dichas fluctuaciones.

El presente capítulo presentará el formalismo necesario para el tratamiento de la interacción entre un sistema atómico y un campo de radiación, desde un análisis puramente cuántico. Por consiguiente, este capítulo nos permitirá abordar en el Capítulo 4 el modelo de Jaynes-Cummings.

3.1 Cuantización del Campo Electromagnético de un Modo

El siguiente tratamiento iniciará considerando un campo de un modo confinado por paredes conductoras en una cavidad unidimensional. Posteriormente generalizaremos el modelo anterior al caso de multi-modos en el espacio libre.

Iniciamos con el caso más simple, pero de notable importancia, de un campo de radiación confinado en una cavidad unidimensional a lo largo del eje z y limitada por paredes conductoras ideales en $z = 0$ y $z = L$, tal como se muestra en la Figura 2.

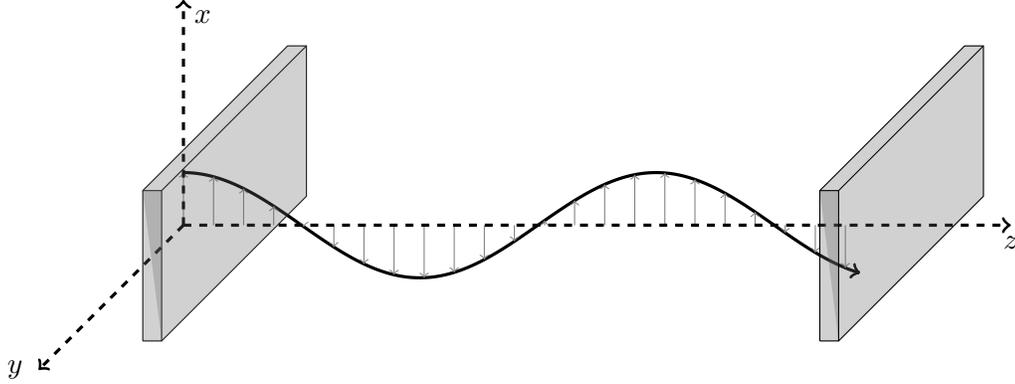


Figura 2: Diagrama del campo electromagnético confinado en una cavidad a lo largo del eje z y limitado por paredes conductoras ideales.

Para continuar con la cuantización del campo electromagnético en el espacio libre es pertinente recuperar las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.1.4)$$

Tomando el rotacional de la ecuación (3.1.2) y considerando las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.4) vemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Es decir, el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ satisface una ecuación de onda.

El campo eléctrico debe cumplir con las condiciones de frontera en el interior de la cavidad de longitud L , de modo que tomará la forma de una onda estacionaria. Reafirmando la suposición previa, estamos considerando la inexistencia de fuentes de radiación, es decir, no existen corrientes, cargas o dispositivos dieléctricos dentro de la cavidad. Asumimos, además, que el campo se encuentra polarizado linealmente en la dirección x , $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t)$, donde \mathbf{e}_x es un vector unitario de polarización.

Un modo del campo, que satisface las ecuaciones de Maxwell (3.1.1-3.1.4) y las condiciones de frontera, está dado por

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz) \quad (3.1.5)$$

donde ω es la frecuencia del modo y k es el número de onda relacionado con la frecuencia mediante $k = \omega c^{-1}$. Las condiciones de frontera, por su parte, establecen las frecuencias permitidas: $\omega_m = \frac{cm\pi}{L}$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Para facilitar la comprensión, tomaremos la frecuencia ω de la ecuación (3.1.5) como una de las permitidas e ignoraremos las restantes por el momento. La ecuación (3.1.5) también incluye el volumen de la cavidad, V , y $q(t)$ que es la amplitud normal del modo con unidades de longitud.

El campo magnético, a partir de las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.1), es $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y B_y(z, t)$, donde

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(kz), \quad (3.1.6)$$

y el Hamiltoniano clásico para un campo de un modo es

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dV [\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \int dV [\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t)]. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.6) en (3.1.7) obtenemos

$$H = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2). \quad (3.1.8)$$

De la ecuación (3.1.8) notamos que el Hamiltoniano de un campo de radiación de un modo es dinámicamente equivalente al de un oscilador armónico de masa unitaria. Esto es, como el campo magnético es proporcional a $\dot{q}(t) = p$ y el campo eléctrico proporcional a $q(t)$, ambos se comportan como las variables conjugadas del momento y de la posición de un oscilador armónico, respectivamente.

Ahora, como ya se identificaron las variables dinámicas canónicas, q y p , del problema clásico, es posible identificar \hat{q} y \hat{p} como sus operadores equivalentes. Estos operadores deben obedecer la relación de conmutación canónica

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0$$

Los campos eléctrico y magnético, en términos de los operadores \hat{q} y \hat{p} , se convierten en los siguientes operadores

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2} \hat{q}(t) \sin(kz) \\ \hat{B}_y(z, t) &= \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k}\right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0}\right)^{1/2} \hat{p}(t) \cos(kz), \end{aligned}$$

respectivamente. Consecuentemente, el Hamiltoniano en términos de los operadores es

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2)$$

Cabe destacar que los operadores \hat{q} y \hat{p} son hermitianos y, por ende, representan cantidades observables. Sin embargo, es conveniente seguir el rumbo tradicional e introducir los operadores no hermitianos (por ello, tampoco observables) de aniquilación (\hat{a}) y de creación (\hat{a}^\dagger):

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (3.1.9)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (3.1.10)$$

Mediante los operadores (3.1.9) y (3.1.10) reinterpretemos los operadores del campo eléctrico y magnético, los cuales son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= \mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz), \\ \hat{B}_y(z, t) &= -i\mathcal{B}_0(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{E}_0 = (\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V})^{1/2}$ y $\mathcal{B}_0 = (\frac{\mu_0}{k})(\frac{\hbar\omega^3}{\epsilon_0 V})^{1/2}$. Las comillas indican que no estamos siendo formalmente correctos, porque más tarde se mostrará que el promedio de estos campos, para un número definido de fotones, es cero. No obstante, éstos son medidas útiles de las fluctuaciones del campo cuantizado.

Las relaciones de conmutación de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger provienen directamente de las relaciones entre \hat{q} y \hat{p} :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.1.11)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0. \quad (3.1.12)$$

Como resultado de estas relaciones de conmutación, el operador Hamiltoniano puede ser reescrito en la forma

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$$

Hasta el momento no se ha mencionado detalle alguno sobre la dependencia temporal de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Para ello, nos referiremos a la ecuación de Heisenberg,

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}], \quad (3.1.13)$$

en donde \hat{O} es un operador arbitrario que no depende del tiempo.

La expresión correspondiente al operador de aniquilación, según la ecuación (3.1.13), es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}] = \frac{i}{\hbar} \left[\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \\ &= i\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &= -i\omega[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \\ &= -i\omega \hat{a}, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}. \quad (3.1.14)$$

Tomando simplemente el conjugado hermitiano de (3.1.14) llegamos a la correspondiente expresión del operador de creación en términos del tiempo:

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}.$$

Es importante destacar que al operador $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, cuya relevancia se mostrará más adelante, se le conoce como el *operador de número*, el cual se denotará como \hat{n} .

3.1.1 Estado de Fock o de Número

Continuamos considerando un campo de un modo con frecuencia ω , y operadores de creación y aniquilación, \hat{a}^\dagger y \hat{a} , respectivamente. Sea $|n\rangle$ un

eigenestado de energía del campo, cuyo eigenvalor de energía llamaremos E_n , tal que

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (3.1.15)$$

Procedemos ahora a aplicarle a la ecuación de eigenvalores (3.1.15) el operador \hat{a}^\dagger por la izquierda. Con lo anterior generamos una nueva ecuación de eigenvalores

$$\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right)|n\rangle = E_n\hat{a}^\dagger|n\rangle.$$

Utilizando las relaciones de conmutación (3.1.11 - 3.1.12) podemos reescribir lo anterior como

$$\begin{aligned} \hbar\omega\left[(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right]|n\rangle &= \hbar\omega\left[(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\right]|n\rangle \\ &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger|n\rangle - \hbar\omega\hat{a}^\dagger|n\rangle, \end{aligned}$$

de donde

$$\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^\dagger|n\rangle. \quad (3.1.16)$$

La ecuación (3.1.16) corresponde a la ecuación de eigenvalores del eigenestado $\hat{a}^\dagger|n\rangle$, cuyo eigenvalor de energía es $E_n + \hbar\omega$. Del tratamiento previo debe ser notable la razón por la cual al operador \hat{a}^\dagger se le conoce como el operador de creación: crea un *quanto* de energía $\hbar\omega$. Es posible también interpretarlo como la creación de un *fotón* de energía $\hbar\omega$.

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega \quad (3.1.17)$$

Análogamente, aplicando el operador \hat{a} por la izquierda a la ecuación (3.1.15) y utilizando las mismas relaciones de conmutación, obtenemos

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle. \quad (3.1.18)$$

Con la ecuación (3.1.18) vemos por qué se le denomina a \hat{a} el operador de aniquilación. Además, la ecuación anterior nos indica que el estado

$$|n-1\rangle = \frac{\hat{a}}{c_n}|n\rangle \quad (3.1.19)$$

es también un eigenestado de energía, cuyo eigenvalor está reducido, es decir,

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega.$$

La constante de normalización c_n en la ecuación (3.1.19) se determinará a partir de la condición de normalización

$$\langle n-1|n-1\rangle = 1.$$

Sin embargo, si repetimos el proceso de aniquilación n veces al estado $|n\rangle$, como en la ecuación (3.1.18), descenderemos la escalera energética de escalones $\hbar\omega$ hasta obtener la ecuación

$$\hat{H}\hat{a}|0\rangle = (E_0 - \hbar\omega)\hat{a}|0\rangle, \quad (3.1.20)$$

donde E_0 es la energía del estado base. Pero, la energía del oscilador armónico debe permanecer siempre no negativa, lo que nos obliga a establecer un eigenvalor de energía mínimo $E_0 \geq 0$, cuyo eigenestado es $|0\rangle$. Como no es posible tener energías por debajo de E_0 , entonces lo anterior nos obliga a concluir que la ecuación (3.1.20) debe ser equivalente a cero o, de otra forma, que

$$\hat{a}|0\rangle = 0,$$

definiendo así el estado de vacío del campo.

Al eigenestado $|0\rangle$ se le conoce como el estado vacío. Del estudio previo, llegamos a que el problema de eigenvalores del estado base es

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle = E_0|0\rangle.$$

Así, recuperando la ecuación (3.1.17), concluimos que

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, estamos en condiciones de determinar la constante de normalización c_n mencionada en (3.1.19).

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = \frac{1}{|c_n|^2} \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \frac{n}{|c_n|^2} \langle n | n \rangle = \frac{n}{|c_n|^2} = 1$$

Si consideramos la fase de dicha constante de normalización como nula, entonces $c_n = \sqrt{n}$. En consecuencia, la ecuación (3.1.19) se convierte en

$$\hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle.$$

Análogamente, para el operador de creación, se tiene que

$$\hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle.$$

Retomamos ahora el problema de eigenvalores para el operador de número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Sea $| n \rangle$ un estado de n excitaciones, entonces

$$\begin{aligned} \hat{n} | n \rangle &= \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \\ &= \hat{a}^\dagger \sqrt{n} | n-1 \rangle \\ &= \sqrt{n} \sqrt{(n-1)+1} | n \rangle \\ &= n | n \rangle. \end{aligned}$$

Esto confirma que los estados de número son eigenfunciones del operador de número \hat{n} con eigenvalor n .

La acción repetida de las últimas dos ecuaciones nos arroja el siguiente resultado

$$| n \rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle. \quad (3.1.21)$$

A los eigenestados $|n\rangle$ se les conoce como *estados de Fock* o *estados de número fotónico*. Como \hat{H} y \hat{n} son operadores hermitianos, entonces los estados de Fock son ortogonales, es decir, $\langle n'|n\rangle = \delta_{nn'}$ y, además, forman un conjunto completo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1.$$

Lo anterior reitera que los eigenvalores de energía son discretos, en contraste con la teoría electromagnética clásica, donde la energía puede tener cualquier valor.

En términos matriciales, los elementos de matriz de los operadores de creación y aniquilación que prevalecen son

$$\begin{aligned}\langle n-1|\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}\langle n-1|n-1\rangle = \sqrt{n}, \\ \langle n+1|\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\langle n+1|n+1\rangle = \sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

A pesar de contar con energías bien definidas, los estados de número $|n\rangle$ no poseen campos eléctricos bien definidos, dado que el valor de expectación del campo es

$$\langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle = \mathcal{E}_0 \sin(kz)[\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle] = 0, \quad (3.1.22)$$

es decir, el campo medio es cero.

No obstante, el valor esperado del cuadrado del campo, que contribuye a la densidad de energía, no es cero:

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{E}_x^2(z,t)|n\rangle &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz)[\langle n|(\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle] \\ &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz)\langle n|(\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1|n\rangle \\ &= 2\mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz)(n + \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Incluso, del resultado anterior, encontramos que, para el estado de vacío $|0\rangle$, se tiene

$$\langle 0|\hat{E}_x^2(z, t)|0\rangle = \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz).$$

Las fluctuaciones en el campo eléctrico están caracterizadas por la varianza

$$(\Delta\hat{E}_x(z, t))^2 = \left\langle \hat{E}_x^2(z, t) \right\rangle - \langle \hat{E}_x(z, t) \rangle^2,$$

o, similarmente, por la desviación estándar $\Delta\hat{E}_x = \sqrt{(\Delta\hat{E}_x(z, t))^2}$, la cual, en ocasiones, se le denota como la incertidumbre del campo. En el caso particular de los estados de Fock $|n\rangle$ tenemos

$$\Delta\hat{E}_x = \sqrt{2}\mathcal{E}_0 \sin(kz) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1/2}.$$

Centrándonos en esta última expresión, notamos que, incluso cuando $n = 0$, el campo presenta fluctuaciones, a las cuales se les conoce como *fluctuaciones del vacío*. Por el momento, podemos considerar a los estados de número $|n\rangle$ como la representación de un campo con n fotones. Asimismo, es posible notar que el operador de número \hat{n} no conmuta con el campo eléctrico:

$$\begin{aligned} [\hat{n}, \hat{E}_x] &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) [\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \hat{a}^\dagger \hat{a}] \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) [(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger) \hat{a} + \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a})] \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(kz) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \end{aligned}$$

Además, si dos operadores \hat{A} y \hat{B} cumplen con $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$, entonces también satisfacen $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle|$. Consecuentemente, \hat{n} y \hat{E}_x , son cantidades complementarias y respetan la desigualdad

$$\Delta \hat{n} \Delta \hat{E}_x \geq \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 |\sin(kz)| |\langle \hat{a}^\dagger - \hat{a} \rangle|.$$

Para un estado $|n\rangle$, la mano derecha de la ecuación anterior se anula, pero también lo hace $\Delta n = 0$. De conocerse precisamente el campo, entonces el número de fotones quedaría incierto. En la física clásica, la amplitud y la fase de un campo pueden ser simultáneamente definidas; en la física cuántica no³.

3.1.2 Operadores de Cuadratura

Si incluimos explícitamente la dependencia temporal del operador del campo eléctrico tendríamos

$$\hat{E}_x = \mathcal{E}_0(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \sin(kz).$$

Introducimos ahora los operadores de cuadratura

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.1.23)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3.1.24)$$

Escribiendo el operador del campo eléctrico en términos de éstos logramos

$$\hat{E}_x(t) = 2\mathcal{E}_0 \sin(kz)[\hat{X}_1 \cos(\omega t) + \hat{X}_2 \sin(\omega t)].$$

Con esta sustitución es notorio que \hat{X}_1 y \hat{X}_2 están asociados a las amplitudes del campo, las cuales se encuentran desfasadas por $\frac{\pi}{2}$ y, por lo tanto, están en cuadratura. Asimismo, los operadores de cuadratura, (3.1.23) y (3.1.24), son esencialmente los operadores adimensionales de posición y momento, respectivamente. Lo anterior se observa al recuperar las ecuaciones

³Un análisis sobre la noción de fase del campo electromagnético cuantizado puede encontrarse en [7].

(3.1.9) y (3.1.10) y escribir

$$\begin{aligned}\hat{a} + \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}} \omega \hat{q}, \\ \hat{a} - \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}} i \hat{p}.\end{aligned}$$

Así, los operadores \hat{X}_1 y \hat{X}_2 satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}.$$

De la relación anterior se sigue directamente que

$$(\Delta \hat{X}_1)^2 (\Delta \hat{X}_2)^2 \geq \frac{1}{4} |[\hat{X}_1, \hat{X}_2]|^2 = \frac{1}{16}.$$

Debido a la ortogonalidad de los estados de número, notamos que

$$\langle n | \hat{X}_1 | n \rangle = 0 = \langle n | \hat{X}_2 | n \rangle.$$

Sin embargo, el valor esperado de \hat{X}_1^2 y \hat{X}_2^2 es distinto de cero:

$$\begin{aligned}\langle n | \hat{X}_1^2 | n \rangle &= \frac{1}{4} \langle n | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle n | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle n | 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} (2n + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle n | \hat{X}_2^2 | n \rangle &= -\frac{1}{4} \langle n | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \langle n | \hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1 | n \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \langle n | -2\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1 | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} (2n + 1)\end{aligned}$$

Consecuentemente, para un estado de número, la incertidumbre en ambas cuadraturas es la misma. Incluso en el estado vacío ($n = 0$) se tiene que

$$(\Delta \hat{X}_1)_{\text{vacuum}}^2 = \frac{1}{4} = (\Delta \hat{X}_2)_{\text{vacuum}}^2.$$

Antes de continuar con el caso de multi-modos, es importante recuperar el concepto de fotón y puntualizar su significado. Es necesario destacar que el *quanto* del campo de un modo representa aquellas excitaciones de energía en porciones discretas de $\hbar\omega$. A este *quanto* se le conoce como fotón, partículas no localizables pero que se encuentran distribuidas en todo el volumen. La noción previa contrasta con la idea de fotón como corpúsculos de luz, como en la antigua teoría cuántica.

3.2 Cuantización del Campo Electromagnético de Multi-modos

El resultado para el campo de un modo confinado en una cavidad puede generalizarse al caso de campos de multi-modos. En este estudio retomamos las expresiones del campo eléctrico y magnético en términos del potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, es decir,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (3.2.2)$$

las cuales provienen de la elección de la norma de Coulomb (2.1.17) y la ausencia de fuentes de radiación.

Para continuar es pertinente pensar que el espacio libre puede ser modelado como una cavidad tridimensional con lados de longitud L , cuyas paredes son perfectamente reflejantes. Además, consideraremos que la longitud L es de mucho mayores proporciones que cualquier objeto situado dentro de la

cavidad con el cual la radiación podría interactuar. Asimismo, consideraremos la longitud de onda del campo mucho más pequeña que nuestra longitud L . Estas hipótesis nos permitirán obtener resultados físicos independientes de las dimensiones de la cavidad.

La razón por la cual exigimos una cavidad cúbica es simple: lograr imponer condiciones de frontera en sus paredes. Por ejemplo, en el caso de la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ requerimos que la onda plana satisfaga la condición

$$e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)}$$

de donde se sigue que

$$k_x = \left(\frac{2\pi}{L}\right)m_x, \quad m_x \in \mathbb{Z};$$

y análogamente, para las otras direcciones tenemos

$$k_y = \left(\frac{2\pi}{L}\right)m_y, \quad m_y \in \mathbb{Z};$$

$$k_z = \left(\frac{2\pi}{L}\right)m_z, \quad m_z \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, el vector de onda, a partir de las condiciones previas, es

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(m_x, m_y, m_z),$$

cuya magnitud está relacionada con la frecuencia ω_k a través de $k = \frac{\omega_k}{c}$.

El conjunto de enteros (m_x, m_y, m_z) especifican un modo normal del campo, y la cantidad de éstos es infinito pero numerable. Así, el número total de modos en un intervalo $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$ es

$$\Delta m = \Delta m_x \Delta m_y \Delta m_z = 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z,$$

donde el factor 2 refleja las dos polarizaciones independientes. Ahora, utilizando la condición $\lambda \ll L$, tendremos ondas densamente envueltas en el

k-espacio, por lo que el intervalo Δm puede aproximarse por la diferencial

$$dm = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) dk_x dk_y dk_z.$$

En coordenadas polares, el vector de onda se puede expresar como

$$\mathbf{k} = k(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

de tal manera que la diferencial dm se escribirá en términos del ángulo sólido, en la dirección de \mathbf{k} , $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

$$dm = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) k^2 dk d\Omega = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) \frac{\omega^2}{c^3} d\omega_k d\Omega. \quad (3.2.3)$$

En la última igualdad de la ecuación (3.2.3), se utilizó la relación, ya mencionada, $k = \frac{\omega_k}{c}$. Procedemos a integrar la primera igualdad de la ecuación (3.2.3)

$$\left. \begin{array}{l} \text{número de modos} \\ \text{en todas las direcciones} \\ \text{en el intervalo } [k, k + dk] \end{array} \right\} = V \left(\frac{k^2}{\pi^2} \right) dk = V \rho_k dk, \quad (3.2.4)$$

donde se introdujo la densidad de modos $\rho_k dk$, es decir, el número de modos por unidad de volumen. Similarmente, integramos ahora la segunda igualdad de (3.2.3)

$$\left. \begin{array}{l} \text{número de modos} \\ \text{en todas las direcciones} \\ \text{en el intervalo } [\omega_k, \omega_k + d\omega_k] \end{array} \right\} = V \left(\frac{\omega_k^2}{c^3 \pi^2} \right) d\omega_k \equiv V \rho(\omega_k) d\omega_k.$$

Es posible expresar el potencial vectorial en términos de ondas planas en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, s} [A_{\mathbf{k}, s}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + A_{\mathbf{k}, s}^*(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}], \quad (3.2.5)$$

donde $A_{\mathbf{k}, s}$ es la amplitud compleja del campo y $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, s}$ es un vector de polarización. La suma corre sobre las k 's definidas por el conjunto de enteros (m_x, m_y, m_z) y sobre s que representa las dos polarizaciones independientes. Dichas polarizaciones satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}, s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}, s'} = \delta_{s, s'}.$$

En términos del vector de onda, a la norma de Coulomb (2.1.17) también se le conoce como la condición de *transversalidad*, o *norma transversal*, que alude a la ortogonalidad entre la dirección de propagación y la de polarización. Lo anterior queda descrito por

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}, s} = 0.$$

Por otra parte, las dos direcciones de polarización crean un sistema que cumple con

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}, 1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, 2} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \boldsymbol{\kappa}.$$

En el espacio libre, utilizando la ecuación (3.2.4), es posible reemplazar la suma sobre \mathbf{k} de la ecuación (3.2.5), por la integral siguiente

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{\pi^2} \int k^2 dk.$$

Retomando las ecuaciones (2.1.18) y (2.1.17), obtenemos, para la amplitud compleja $A_{\mathbf{k}, s}(t)$, la ecuación del oscilador armónico

$$\frac{d^2 A_{\mathbf{k}, s}}{dt^2} + \omega_k^2 A_{\mathbf{k}, s} = 0, \quad (3.2.6)$$

sabiendo que $\omega_k = ck$. La solución a la ecuación previa es

$$A_{\mathbf{k},s}(t) = A_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega_k t}, \quad (3.2.7)$$

donde $A_{\mathbf{k},s}(0) \equiv A_{\mathbf{k},s}$. Mediante (3.2.1) y (3.2.2) podemos escribir el campo eléctrico y magnético, en términos de $A_{\mathbf{k},s}$, como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} [A_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - A_{\mathbf{k},s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}], \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k (\kappa \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) [A_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - A_{\mathbf{k},s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}]. \quad (3.2.9)$$

A través de las ecuaciones anteriores podemos expresar la energía del campo

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right] dV.$$

Imponiendo las condiciones de frontera en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ obtenemos los siguientes resultados, los cuales se generalizan análogamente para las otras direcciones,

$$\int_0^L e^{\pm ik_x x} dx = \begin{cases} L & k_x = 0 \\ 0 & k_x \neq 0. \end{cases}$$

Reescribiendo lo anterior, logramos la siguiente expresión

$$\int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dV = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V.$$

Así, la contribución del campo eléctrico a la energía H es

$$\frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s}^*(t) - R,$$

donde

$$R = \frac{1}{2} \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s,s'} \omega_k^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s'} [A_{\mathbf{k},s}(t) A_{-\mathbf{k},s'}(t) + A_{\mathbf{k},s}^*(t) A_{-\mathbf{k},s'}^*(t)].$$

Sin embargo, para obtener la contribución energética del campo magnético es necesario utilizar la identidad vectorial

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

de la cual obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s'}) &= \delta_{s,s'} \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s'}) &= -\mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s'}. \end{aligned}$$

La contribución de \mathbf{B} , a partir de los resultados anteriores, es

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV = \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s}^*(t) + R \quad (3.2.10)$$

Sumando las ecuaciones (3.2.8) y (3.2.10) conseguimos determinar la energía del campo

$$H = 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s}^*(t) = 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s} A_{\mathbf{k},s}^*.$$

Para obtener la última igualdad fue necesario usar la solución (3.2.7) del oscilador armónico.

Nuestra intención es cuantizar el campo y, a pesar de tener una expresión sencilla en términos de las amplitudes complejas $A_{\mathbf{k},s}$, es necesario introducir las variables canónicas $p_{\mathbf{k},s}$ y $q_{\mathbf{k},s}$. Con su introducción expresamos $A_{\mathbf{k},s}$ y $A_{\mathbf{k},s}^*$ en función de éstas como

$$A_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{(1/2)}} [\omega_k q_{\mathbf{k},s} + i p_{\mathbf{k},s}] \quad (3.2.11)$$

$$A_{\mathbf{k},s}^* = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{(1/2)}} [\omega_k q_{\mathbf{k},s} - i p_{\mathbf{k},s}]. \quad (3.2.12)$$

Ahora, sustituyendo (3.2.11) y (3.2.12) en la ecuación de la energía del campo (3.2), obtenemos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} (p_{\mathbf{k},s}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k},s}^2),$$

donde cada uno de los términos representa la energía de un oscilador armónico simple de masa unitaria. Ahora, al igual que en la sección (1.1.1), requerimos convertir las variables canónicas en operadores, para proceder con la cuantización. Además, necesitamos que éstos cumplan las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},s}, \hat{q}_{\mathbf{k}',s'}] = 0 = [\hat{p}_{\mathbf{k},s}, \hat{p}_{\mathbf{k}',s'}]$$

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},s}, \hat{p}_{\mathbf{k}',s'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{s,s'}.$$

Al igual que en el caso de un campo de un modo, podemos definir los operadores de aniquilación y creación como

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{(1/2)}}[\omega_k\hat{q}_{\mathbf{k},s} + i\hat{p}_{\mathbf{k},s}] \quad (3.2.13)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{(1/2)}}[\omega_k\hat{q}_{\mathbf{k},s} - i\hat{p}_{\mathbf{k},s}], \quad (3.2.14)$$

los cuales satisfacen

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger],$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{s,s'},$$

de tal forma, la energía del campo se convierte en el operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right).$$

En la última igualdad utilizamos el operador de número ($\hat{n}_{\mathbf{k},s} = \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$), para el modo \mathbf{k}, s . Asimismo, cada modo es independiente de los demás y le corresponde un conjunto de eigenestados de número $|n_{\mathbf{k},s}\rangle$. Al j -ésimo modo, le asignamos los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}_j s_j} \equiv \hat{a}_j$ y $\hat{n}_{\mathbf{k}_j s_j} \equiv \hat{n}_j$. Entonces el Hamiltoniano del campo puede escribirse en términos de un modo en particular

$$\hat{H} = \sum_j \hbar\omega_j \left(\hat{n}_j + \frac{1}{2}\right).$$

A su vez, un estado de número de *varios modos* es el producto tensorial de los estados de número de cada modo, lo cual puede escribirse como

$$\begin{aligned} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes \dots &= |n_1\rangle |n_2\rangle |n_3\rangle \dots \\ &\equiv |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle \\ &= |\{n_j\}\rangle. \end{aligned}$$

Así, la ecuación de eigenvalores del j-ésimo modo se puede expresar en términos del estado de número fotónico de multi-modos

$$\hat{H}|\{n_j\}\rangle = E|\{n_j\}\rangle,$$

donde el eigenvalor E es

$$E = \sum_j \hbar\omega_j \left(n_j + \frac{1}{2}\right).$$

Los estados de número, por otra parte, continúan satisfaciendo la condición de ortogonalidad

$$\langle n_1, n_2, n_3, \dots | n'_1, n'_2, n'_3, \dots \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2} \delta_{n_3, n'_3} \dots$$

Paralelamente, la acción de los operadores de aniquilación y creación del j-ésimo modo sobre el estado de número de multi-modos es

$$\hat{a}_j = |n_1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j} |n_1, n_2, n_3, \dots, n_j - 1, \dots\rangle$$

y

$$\hat{a}_j^\dagger = |n_1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_2, n_3, \dots, n_j + 1, \dots\rangle,$$

respectivamente. Antes de continuar, denotamos al estado de vacío de multi-modos como

$$|\{0\}\rangle = |0_1, 0_2, 0_3, \dots, 0_j, \dots\rangle,$$

cumpléndose también

$$\hat{a}_j|\{0\}\rangle = 0, \quad \forall j.$$

Análogamente a la ecuación (3.1.21), en el caso de multi-modos, también podemos generar todos los estados de número a partir del estado de vacío como

$$|\{n_j\}\rangle = \prod_j \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |\{0\}\rangle$$

Para proceder con la cuantización del campo de multi-modos, la amplitudes complejas $A_{\mathbf{k},s}$ deben ser reemplazadas por operadores, los cuales, de (3.2.11) y (3.2.13), tienen la siguiente forma

$$\hat{A}_{\mathbf{k},s} = \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\mathbf{k},s}.$$

En consecuencia, al potencial vectorial cuantizado le corresponde la siguiente expresión

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (3.2.15)$$

Por lo tanto, en base a la expresión (3.2.15), podemos escribir los operadores del campo eléctrico y magnético como

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right]$$

y

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},s} (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right]$$

respectivamente, donde $\kappa = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$.

Por otra parte, los operadores de aniquilación, (3.2.13), y de creación, (3.2.14), deben ser interpretados en la representación de Heisenberg en $t = 0$. En analogía con el caso más sencillo de un campo de un modo, el operador de aniquilación dependiente del tiempo será

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0)e^{-i\omega_k t}.$$

Así, la dependencia temporal en la expresión del campo eléctrico previa, se ve reflejada en

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left[\hat{a}(t)_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - \hat{a}(t)_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right].$$

Es común presentar el campo eléctrico en términos de dos sumandos

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t),$$

donde $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ está dada por

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \hat{a}(t)_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$$

y

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \left[\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right]^\dagger.$$

$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ es el término de frecuencia positiva del campo, porque contiene todos los términos que oscilan como $e^{-i\omega t}$ para $\omega > 0$, mientras que $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ es la sección negativa. De la misma forma, es usual encontrar expresiones similares para el potencial vectorial y el campo magnético. Además, $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ contiene sólo operadores de aniquilación, a los cuales le corresponden los valores de frecuencia positiva. Al contrario, $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ sólo contiene operadores de creación, asociados a frecuencias negativas.

El acoplamiento más importante entre campo y materia es a través de la interacción del campo eléctrico con un momento dipolar o mediante interacciones no lineales que involucran potencias del campo eléctrico. Debido a esto, la atención se centrará en el campo eléctrico, el cual, además, es más "intenso" que el magnético debido al factor $\frac{1}{c}$.

Finalmente, para una onda plana de un modo el campo eléctrico es

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x [\hat{a}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t)}].$$

En óptica cuántica, frecuentemente se considera la variación espacial del campo, en contraste con las dimensiones del sistema atómico, como despreciable. Ésta es la llamada *aproximación de onda larga*. Para la radiación óptica, se tiene

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \gg |\mathbf{r}_{\text{átomo}}|,$$

donde $|\mathbf{r}_{\text{átomo}}|$ es una longitud característica del tamaño de un átomo. Con esta condición provocamos que

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx 1 \pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \approx 1,$$

logrando así reemplazar la exponencial por la unidad, es decir,

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \approx \hat{\mathbf{E}}(t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x [\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}].$$

A la aproximación anterior se le conoce como la aproximación dipolar, la cual se utilizará a lo largo del texto.

3.3 Estados Coherentes

Una consecuencia importante de la cuantización del campo de radiación son las relaciones de incertidumbre asociadas a las variables del campo. Por

lo mismo, es de esperarse que se busque una función de onda, a la cual, al estar sujeta a un potencial armónico simple, le corresponda una mínima incertidumbre en todo momento, es decir, se asemeje lo mayor posible a un campo clásico. En esta sección presentamos un conjunto de estados, los *estados coherentes*, que satisfacen la búsqueda de mínima incertidumbre y simulan, hasta donde la mecánica cuántica lo permite, un estado clásico del oscilador armónico simple.

Clásicamente un campo electromagnético consiste de ondas cuya amplitud y fase están bien definidas. Sin embargo, lo anterior no se cumple al tratar el campo cuánticamente debido a la presencia de fluctuaciones asociadas a la amplitud y a la fase. Un campo electromagnético en un estado de número $|n\rangle$ tiene una amplitud bien definida, pero una fase totalmente incierta. En contraste, un campo en un estado coherente tiene la misma incertidumbre en ambas variables.

Con el fin de evitar un valor esperado nulo del operador del campo eléctrico, requerimos una superposición de estados de número que difieran entre ellos sólo por la unidad. Esto debido a la acción de los operadores de creación, \hat{a}^\dagger , y aniquilación, \hat{a} , los cuales crean o destruyen una excitación del campo, respectivamente. Por lo tanto, buscamos una función de onda de la forma

$$|\psi\rangle = C_n|n\rangle + C_{n\pm 1}|n \pm 1\rangle,$$

cumpléndose $|C_n|^2 + |C_{n\pm 1}|^2 = 1$. Un estado construido de una superposición de todos los estados de número previene obtener un valor esperado nulo del operador, supongamos \hat{a} . Para obtener un campo clásico es posible reemplazar los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger por variables continuas y una forma de lograrlo es buscando eigenestados del operador de aniquilación. Dichos estados se

denotan como $|\alpha\rangle$ y satisfacen

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$. Asimismo, la ecuación de eigenvalores del operador de creación es

$$\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha^*|\alpha\rangle.$$

Como el conjunto de estados de número $|n\rangle$ forma un conjunto completo, entonces podemos expresar $|\alpha\rangle$ como una expansión en términos de éstos.

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (3.3.1)$$

Aplicando el operador de aniquilación a la ecuación (3.3.1) obtenemos

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} |n-1\rangle.$$

Igualando los coeficientes de $|n-1\rangle$ de ambos lados llegamos a

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1}$$

o

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} C_{n-2} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} \cdots \frac{\alpha}{\sqrt{1}} C_0 \\ &= \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \end{aligned}$$

Por ende,

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Procedemos a determinar C_0 mediante la condición de normalización

$$\begin{aligned}
1 = \langle \alpha | \alpha \rangle &= |C_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{(\alpha^n)^* \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'}} \langle n | n' \rangle \\
&= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\
&= |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} \\
\Rightarrow C_0 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}
\end{aligned}$$

Como resultado de lo anterior, escribimos nuestro estado coherente normalizado

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.3.2)$$

Consideramos ahora el operador del campo eléctrico

$$\hat{E}_x(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t)}],$$

que satisface las ecuaciones de Maxwell en el vacío, y obtenemos su valor esperado

$$\langle \alpha | \hat{E}_x(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\alpha e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} - \alpha^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)}].$$

Si sustituimos α por su forma polar, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, tendremos

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \hat{E}_x(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle &= i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} |\alpha| [e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \theta)} - e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t + \theta)}] \\
&= 2(i)^2 \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} |\alpha| \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta - \omega t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \alpha | \hat{E}_x(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = 2 \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} |\alpha| \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \theta), \quad (3.3.3)$$

que tiene la forma de un campo clásico, donde el vector de onda está dado por $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$.

Análogamente, para el caso $\langle \alpha | \hat{E}_x^2(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle$, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{E}_x^2(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle &= -\left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right) \left[|\alpha|^2 e^{i2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\theta-\omega t)} + |\alpha|^2 e^{-i2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\theta-\omega t)} - 2|\alpha|^2 - 1 \right] \\ &= \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right) \left[1 + 4|\alpha|^2 \left(-\frac{1}{4} e^{i2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\theta-\omega t)} - \frac{1}{4} e^{-i2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\theta-\omega t)} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ \Rightarrow \quad \langle \alpha | \hat{E}_x^2(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle &= \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right) \left[1 + 4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \theta) \right]. \end{aligned}$$

De este modo, las fluctuaciones en $\hat{E}_x(\mathbf{r}, t)$,

$$\Delta E_x \equiv (\Delta \hat{E}_x^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

son idénticas a aquéllas del estado de vacío (cuando $n = 0$). Por esto mismo, los estados coherentes contienen sólo el ruido del vacío, lo cual es una razón para confirmar su analogía con los estados clásicos. Usando los operadores de cuadratura mencionados anteriormente, (3.1.23) y (3.1.24), vemos que se cumple

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{X}_1)_\alpha^2 &= \langle \alpha | \hat{X}_1^2 | \alpha \rangle - (\langle \alpha | \hat{X}_1 | \alpha \rangle)^2 \\ &= \frac{1}{4} \langle \alpha | \hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | \alpha \rangle - \frac{1}{4} (\langle \alpha | \hat{a} + \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[(\alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1) - (\alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2) \right] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

y análogamente para \hat{X}_2 :

$$(\Delta \hat{X}_2)_\alpha^2 = \frac{1}{4}.$$

Esto sólo confirma que los estados coherentes tienen las fluctuaciones del vacío. Entonces, vemos que al utilizar los operadores de cuadratura los estados coherentes minimizan el producto de incertidumbre y exhiben mismas incertidumbres (las del vacío) en cada cuadratura.

De acuerdo a la ecuación (3.3.3), el valor $|\alpha|$ pareciera reflejar una amplitud del campo. El valor esperado del operador del número de fotones $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ es

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

y entonces $|\alpha|^2$ es sólo el promedio de fotones del campo. Ahora, para calcular las fluctuaciones del número de fotones calculamos

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | \alpha \rangle \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \\ &= \bar{n}^2 + \bar{n}. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2} = \sqrt{\bar{n}}, \quad (3.3.4)$$

lo cual es característico de una distribución de Poisson. Si ahora deseamos calcular la probabilidad de encontrar n fotones en el campo, entonces

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!},$$

que representa una distribución de Poisson con una media de \bar{n} . Incluso, de la ecuación (3.3.4), notamos que la incertidumbre fraccional del número de fotones, es decir,

$$\frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}, \quad (3.3.5)$$

decrece con el aumento de \bar{n} .

En los siguientes gráficos se muestran dos diferentes casos de la distribución de probabilidad del número de fotones. En la Figura 3a se muestra dicha

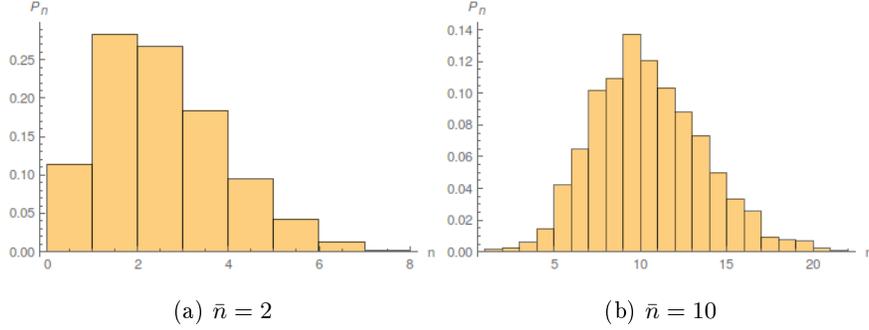


Figura 3: Distribución de la probabilidad de encontrar n fotones en el campo de un estado coherente.

distribución para $\bar{n} = 2$, mientras que en la Figura 3b la correspondiente a $\bar{n} = 10$.

Por otro lado, usando la expresión $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, la distribución de fase de los estados coherentes está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} |\langle \varphi | \alpha \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\varphi-\theta)} \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{n!}} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Para valores grandes de $|\alpha|^2$, la distribución de Poisson puede ser aproximada por una Gaussiana [7]:

$$e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \approx (2\pi|\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(n - |\alpha|^2)^2}{2|\alpha|^2} \right].$$

Mediante el resultado pasado, podemos aproximar la ecuación (3.3.6) de la forma siguiente

$$\mathcal{P}(\varphi) \approx \left(\frac{2\bar{n}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp [-2\bar{n}(\varphi - \theta)^2],$$

con $\bar{n} = |\alpha|^2$. La Figura (4) ilustra cómo el aumento del número promedio de fotones, \bar{n} , provoca que el pico se vuelva más estrecho.

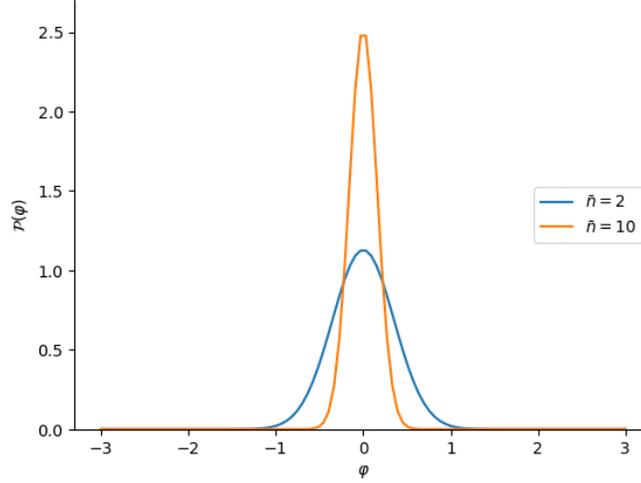


Figura 4: Distribución de fase de los estados coherentes con $\theta = 0$ para distintos valores del número promedio de fotones.

De los resultados anteriores también se sigue que la energía media del estado coherente es

$$\langle \alpha | H | \alpha \rangle = \hbar\omega(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(\bar{n} + \frac{1}{2}),$$

que nos permite observar que el parámetro α determina la amplitud compleja de oscilación y su energía. Además, si combinamos la expresión

$$(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$$

con la ecuación (3.3.2) se obtiene

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle,$$

es decir,

$$|\alpha\rangle = e^{(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^\dagger)} |0\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (3.3.7)$$

donde el operador $\hat{D}(\alpha)$, denota el *operador de desplazamiento*

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \frac{|\alpha|^2}{2})}.$$

La ecuación (3.3.7) indica que $\hat{D}(\alpha)$ es el operador de creación del estado coherente $|\alpha\rangle$. En otras palabras, el estado coherente es el estado base del oscilador desplazado del origen por la cantidad α .

Resumiendo lo anterior, los estados coherentes $|\alpha\rangle$ son estados cuánticos con cercanas similitudes con estados clásicos:

- (i) el valor esperado del campo eléctrico tiene una expresión semejante a un campo clásico, como se muestra en la ecuación (3.3.3),
- (ii) las fluctuaciones del campo eléctrico son iguales a las del estado de vacío,
- (iii) de la ecuación (3.3.5), las fluctuaciones en la incertidumbre fraccional del número de fotones decrece con el aumento de \bar{n} ,
- (iv) el aumento del número promedio de fotones provoca una distribución de fase más localizable.

Sin embargo, a diferencia de los estados de número, los estados coherentes no son ortogonales: sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ estados coherentes, entonces

$$\begin{aligned}
 \langle\beta|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^n \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m\rangle \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta^* \alpha} \\
 &= e^{\frac{1}{2}(\beta^* \alpha - \beta \alpha^*)} e^{-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2},
 \end{aligned}$$

donde el primer término es sólo una fase compleja por lo que

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\beta - \alpha|^2} \neq 0.$$

De lo anterior es claro que los estados coherentes no son ortogonales. Sin embargo, si $|\beta - \alpha|$ es muy grande, entonces nos aproximariamos a lograrlo.

Por otro lado, la relación de completez en estos estados está dada en términos de una integral sobre el plano complejo α

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = 1,$$

donde $d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha)d\text{Im}(\alpha)$. Para mostrar esta relación escribimos

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \int e^{-|\alpha|^2} \sum_n \sum_m \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| d^2\alpha$$

y sustituimos $\alpha = re^{i\theta}$ y $d^2\alpha = r dr d\theta$, de tal forma que

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \sum_n \sum_m \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}.$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{nm},$$

y haciendo el cambio de variable $r^2 = y$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^\infty dy e^{-y} y^n \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} n! = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| \\ &= \pi, \end{aligned}$$

completando de esta forma la prueba.

Cualquier estado $|\psi\rangle$ en el espacio de Hilbert del campo cuantizado de un modo puede expresarse en términos de estados coherentes como

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle.$$

Sin embargo, si tomamos a $|\psi\rangle$ como un estado coherente $|\beta\rangle$, entonces

$$|\beta\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha|\beta\rangle \quad (3.3.8)$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta}. \quad (3.3.9)$$

La última ecuación hace énfasis en la no linealidad de los estados coherentes. Además, éstos forman un conjunto *súpercompleto*, dado que existen elementos de sobra para expresar cualquier estado en términos de estados coherentes. Es decir, debido a la no ortogonalidad, cualquier estado coherente puede ser expresado en términos de una expansión de estados coherentes, cuya expresión no es única. El valor $\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta}$ en la ecuación (3.3.9) toma el papel de una función delta de Dirac.

Hasta el momento hemos presentado brevemente el formalismo matemático que será fundamental para la construcción de los siguientes capítulos. Al inicio se mostró que el campo electromagnético puede ser cuantizado en términos de osciladores armónicos, que representan los modos del campo, mediante estados que describen el número de excitaciones (fotones) presentes en cada modo normal. Posteriormente introdujimos los estados coherentes, los cuales nos permiten una interpretación cuántica de mínima incertidumbre y que, además, nos facilitan el estudio similar al de un estado clásico del oscilador armónico simple.

Así, hemos introducido las nociones físicas y la plataforma matemática que nos permitirán proseguir con el análisis de la interacción átomo-campo, desde una perspectiva puramente cuántica.

4 Interacción Átomo-Campo; Teoría Cuántica: El modelo de Jaynes-Cummings

Hasta el momento sólo se ha estudiado la interacción átomo-campo desde el punto de vista semiclásico. Sin embargo, fenómenos como la *emisión espontánea* son imposibles de explicar mediante la consideración del campo como un sistema clásico. Por lo tanto, para lograr explicar resultados experimentalmente observados, requerimos la descripción cuantizada del campo. Si ignoramos el proceso de decaimiento, la inversión atómica, desde la descripción semiclásica, predice las oscilaciones de Rabi estudiadas en el capítulo anterior. Pero, si al campo lo consideramos un sistema enteramente cuántico, entonces nos enfrentamos con el fenómeno de *colapso y resurgimiento*.

En este capítulo discutiremos la interacción de un campo de radiación cuantizado con un sistema atómico de dos niveles, mediante las aproximaciones dipolar y de onda rotante. El estudio del campo de un modo nos conduce a un Hamiltoniano fundamental en la óptica cuántica. Principalmente, este tratamiento nos permitirá obtener soluciones exactas para constantes de acoplamiento arbitrarias y así exhibir una dinámica puramente cuántica, como el colapso y resurgimiento en la inversión atómica. Además, este modelo ilustra, de la forma más sencilla, el fenómeno de emisión espontánea.

El decaimiento espontáneo de un nivel atómico se tratará considerando la interacción de un átomo de dos niveles. Además, examinaremos el estado del campo que se genera en el proceso de emisión de un *quanto* de energía, equivalente a la energía de separación entre los niveles atómicos.

4.1 Hamiltoniano de Interacción Átomo-Campo

La interacción de un campo de radiación \mathbf{E} con un átomo de un solo electrón puede describirse en la aproximación dipolar mediante el siguiente Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F - e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (4.1.1)$$

donde \hat{H}_A y \hat{H}_F representan las energías del átomo y del campo de radiación, respectivamente, en ausencia de una interacción. Por otro lado, el tercer término representa la energía de interacción, donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el operador de posición del electrón. En la aproximación dipolar, el átomo se encuentra sumergido en un campo uniforme.

Del capítulo anterior tenemos que la expresión del campo libre \hat{H}_L en términos de los operadores de creación y aniquilación está dada por

$$\hat{H}_F = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.1.2)$$

donde la suma sobre s representa las dos posibles polarizaciones de cada modo.

Para expresar el término correspondiente a \hat{H}_A recuperamos, del capítulo primero, los operadores de transición

$$\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|,$$

donde $\{|i\rangle\}$ representa un conjunto completo de eigenestados de energía atómicos. De la ecuación de eigenvalores de \hat{H}_A se sigue que

$$\hat{H}_A = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i \mathbf{E}_i \hat{\sigma}_{ii}. \quad (4.1.3)$$

De acuerdo con el análisis del Capítulo 1, es posible expresar el operador dipolar como

$$e\hat{\mathbf{r}} = \sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|\mathbf{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \vec{\varphi}_{ij}\hat{\sigma}_{ij}, \quad (4.1.4)$$

donde $\vec{\varphi}_{ij} = e\langle i|\mathbf{r}|j\rangle$ son las entradas de la matriz de transición eléctrica-dipolar. Es importante recordar que el operador del campo eléctrico se encuentra evaluado en la aproximación dipolar en la posición del átomo, por lo que la expresión del campo eléctrico de multi-modos, de acuerdo al capítulo segundo, es

$$\hat{\mathbf{E}} = i \sum_{\mathbf{k},s} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right), \quad (4.1.5)$$

con $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} \equiv (\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0V)^{1/2}$ y $s = \{1, 2\}$. Por razones de simplicidad, la expresión anterior parte de la consideración de una base de polarización lineal y además, los vectores unitarios de polarización se tomaron reales.

Mediante las ecuaciones (4.1.4) y (4.1.5) calcularemos ahora el Hamiltoniano de interacción. Para ello, limitaremos nuestro análisis al caso de un sistema atómico de dos niveles, por lo que nuestro conjunto de eigenestados accesibles se reduce a $|e\rangle$ y $|g\rangle$. Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}} &= -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = - \left(\sum_{i,j} \vec{\varphi}_{ij}\hat{\sigma}_{ij} \right) \left(i \sum_{\mathbf{k},s} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right) \right) \\ &= -i \sum_{\mathbf{k},s} \left[(\vec{\varphi}_{eg}\hat{\sigma}_{eg} + \vec{\varphi}_{ge}\hat{\sigma}_{ge}) \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right) \right] \\ &= -i \sum_{\mathbf{k},s} \left[(\vec{\varphi}\hat{\sigma}^\dagger + \vec{\varphi}^*\hat{\sigma}) \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right) \right] \\ &= -i \sum_{\mathbf{k},s} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left[\vec{\varphi} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \hat{\sigma}^\dagger + \vec{\varphi}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \hat{\sigma} \right] \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right), \end{aligned}$$

donde, del análisis realizado en el capítulo anterior, se tiene que $\hat{\sigma}_{eg} = |e\rangle\langle g| = \hat{\sigma}^\dagger$ y, análogamente, $\hat{\sigma}_{ge} = \hat{\sigma}$, y que $\vec{\varphi}_{eg} = \vec{\varphi}$ y $\vec{\varphi}_{ge} = \vec{\varphi}^*$. El producto escalar $\vec{\varphi} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}$ entre el momento dipolar $\vec{\varphi}$ y el vector de modo $\mathbf{e}_{\mathbf{k},s}$ resulta en un número complejo

$$\vec{\varphi} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} = |\vec{\varphi} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}| e^{i\varphi},$$

cuya fase es φ . Así, nuestro Hamiltoniano de interacción se reduce a

$$\hat{H}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} = \hbar \sum_{\mathbf{k},s} g_{\mathbf{k},s} (-i) \left[\hat{\sigma}^\dagger e^{i\varphi} + \hat{\sigma} e^{-i\varphi} \right] \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right),$$

con

$$g_{\mathbf{k},s} = \frac{|\vec{\varphi} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}|}{\hbar} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}. \quad (4.1.6)$$

Finalmente, al escoger $\varphi = \frac{\pi}{2}$ como nuestra fase, obtenemos

$$\hat{H}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} = \hbar \sum_{\mathbf{k},s} g_{\mathbf{k},s} \left[\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma} \right] \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \right), \quad (4.1.7)$$

El Hamiltoniano atómico para un sistema de dos niveles puede ser escrito en términos de la matriz $\hat{\sigma}_z$ y, si despreciamos el término de energía constante, llegamos a

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z. \quad (4.1.8)$$

Continuamos simplificando el Hamiltoniano del campo al despreciar el *punto cero* de energía, con lo que obtenemos

$$\hat{H}_F = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}, \quad (4.1.9)$$

donde el subíndice F se refiere al campo.

Sustituimos ahora las ecuaciones (4.1.9), (4.1.8) y (4.1.7) en el Hamiltoniano total (4.1.1), es decir,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k},s} \left[\hat{\sigma}^{\dagger} + \hat{\sigma} \right] \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger} \right). \quad (4.1.10)$$

El Hamiltoniano anterior está compuesto por el Hamiltoniano del campo libre y el correspondiente al sistema atómico de dos niveles. La interacción entre estos dos sistemas está expresada en términos de los operadores atómicos $\hat{\sigma}$ y $\hat{\sigma}^{\dagger}$, y del operador del campo $\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}$.

Sin embargo, para proceder es necesario seguir con la simplificación del Hamiltoniano de la ecuación (4.1.10). Para ello volvemos a centrarnos en el término de interacción, el cual puede escribirse como

$$\hat{H}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} = \hbar \sum_{\mathbf{k},s} g_{\mathbf{k},s} \left[\hat{\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger} + \hat{\sigma}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k},s} - \hat{\sigma}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger} \right], \quad (4.1.11)$$

y sobre éste realizamos la siguiente aproximación

$$\hat{H}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} \approx \hat{H}_{\text{int}} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \left[\hat{\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \hat{\sigma}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{k}} \right].$$

La simplificación anterior puede argumentarse mediante el siguiente razonamiento.

Del capítulo anterior, sabemos que los operadores del campo, $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger}$, evolucionan como

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k},s}(t) &= \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0)e^{-i\omega t}, \\ \hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger}(t) &= \hat{a}_{\mathbf{k},s}^{\dagger}(0)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Análogamente, es posible mostrar que, en el caso de un átomo libre, los operadores de transición atómica tienen una dependencia temporal similar,

es decir,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(t) &= \hat{\sigma}(0)e^{-i\omega_0 t}, \\ \hat{\sigma}^\dagger(t) &= \hat{\sigma}^\dagger(0)e^{i\omega_0 t}.\end{aligned}$$

Con las expresiones anteriores escribimos la ecuación (4.1.11) en la forma siguiente

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathbf{r},\mathbf{E}} &= \hbar \sum_{\mathbf{k},s} g_{\mathbf{k},s} \left[\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{i(\omega-\omega_0)t} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \right] \\ &\quad - \hbar \sum_{\mathbf{k},s} g_{\mathbf{k},s} \left[\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{-i(\omega+\omega_0)t} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{i(\omega+\omega_0)t} \right].\end{aligned}$$

$$\hbar\omega \approx E_e - E_g$$

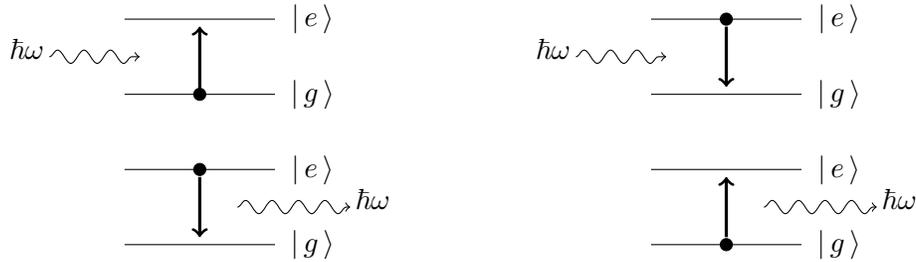


Figura 5: Aproximación de onda rotante. A mano izquierda la absorción de un fotón provoca la excitación del átomo (arriba) y la desexcitación de éste genera la emisión de un fotón (abajo). Del lado derecho se observa el proceso contrarrotante, aquéllos que son descartados en dicha aproximación.

Vemos que la contribución de $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$ y $\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$ involucran términos que sólo contienen la diferencia de frecuencias, es decir, la desintonía $\Delta \equiv \omega - \omega_0$. Mientras tanto, $\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s}$ y $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$ oscilan con aproximadamente el doble de la frecuencia óptica. En pocas palabras, $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$ y $\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$ oscilan lentamente.

Como la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de primer orden respecto del tiempo, su solución provoca que la suma y resta de las frecuencia se vea reflejada en el denominador, provocando que la contribución dominante sea aquel término que oscila lentamente. De esta forma, en la imagen de Schrödinger, el Hamiltoniano de interacción puede aproximarse por

$$\hat{H}_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}} \approx \hat{H}_{\text{int}} = \hbar \sum_{\mathbf{k},s} g_{\mathbf{k},s} \left[\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{-i\Delta t} \right]. \quad (4.1.12)$$

A la aproximación que nos condujo a despreciar los términos $\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s}$ y $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$ se le conoce como *aproximación de onda rotante*, ya referida en capítulos anteriores y esquemáticamente representada en la Figura 5.

Así, lo anterior nos permite expresar finalmente nuestro Hamiltoniano completo como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_{\text{int}} \\ &= \sum_{\mathbf{k},s} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{\mathbf{k},s} g_{\mathbf{k},s} \left[\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} \right] \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Esta forma del Hamiltoniano, que describe la interacción de un solo átomo de dos niveles con un campo de multi-modos, es el comienzo de un gran número de estudios en la óptica cuántica.

4.1.1 Sistema Desacoplado

De los resultados previos discutiremos el caso del sistema desacoplado, es decir, cuando no existe interacción alguna entre el átomo y el campo, esto es, cuando $g = 0$. Consideraremos, a partir de ahora, el Hamiltoniano (4.1.13) para un campo de un modo. Por otro lado, para la discusión siguiente recuperaremos la expresión del Hamiltoniano del campo, incluyendo también

el punto cero de energía. La consideración anterior se debe a que la inclusión de dicho término nos permitirá expresiones más ilustrativas en el problema de eigenvalores y eigenestados. En consecuencia, escribimos el Hamiltoniano del campo como

$$\hat{H}_F = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Con éste, y con la suposición de un campo de un modo, podemos ahora reescribir la ecuación (4.1.13) de la siguiente manera

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar g \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \right). \quad (4.1.14)$$

Cuando no existe interacción alguna, la ecuación anterior se reduce al Hamiltoniano compuesto por los términos correspondientes al sistema atómico y al campo, es decir,

$$\hat{H}_L = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

donde el subíndice L hace referencia al *Hamiltoniano libre*.

Caso Resonante

El caso más sencillo ocurre cuando la frecuencia de transición atómica y la del campo se encuentran en resonancia, lo cual implica que $\omega_0 = \omega$. Por ello la ecuación del Hamiltoniano libre se puede expresar como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left[\frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right] = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}) = \hbar\omega \hat{M}, \quad (4.1.15)$$

donde se utilizó la relación de completitud, $|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = 1$, para obtener la segunda igualdad. Además, se introdujo el *operador de número de excitaciones* \hat{M}

$$\hat{M} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}.$$

Por el análisis precedente sabemos que el Hamiltoniano de interacción sólo acopla los estados $|e\rangle \otimes |n\rangle \equiv |e, n\rangle$ y $|g\rangle \otimes |n+1\rangle \equiv |g, n+1\rangle$, por lo que serán éstos los que ocuparemos para tratar el problema de eigenvalores. Para el estado $|e, n\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned}\hat{H} |e, n\rangle &= \hbar\omega \left[\frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right] |e, n\rangle \\ &= \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} \right] |e, n\rangle \\ &= \hbar\omega(n+1) |e, n\rangle\end{aligned}$$

y análogamente para el estado $|g, n+1\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{H} |g, n+1\rangle &= \hbar\omega \left[-\frac{1}{2} + (n+1) + \frac{1}{2} \right] |g, n+1\rangle \\ &= \hbar\omega(n+1) |g, n+1\rangle.\end{aligned}$$

Lo anterior nos indica que los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ son eigenestados del operador \hat{M} con mismo eigenvalor $n+1$. Consecuentemente son eigenestados del Hamiltoniano (4.1.15) con eigenvalor $\hbar\omega(n+1)$. La única excepción ocurre cuando nos encontramos en el estado de vacío, $|g, 0\rangle$, situación en la cual se cumple que $\hat{H} |g, 0\rangle = 0$.

Caso no Resonante

En general, en condiciones no resonantes, el Hamiltoniano del sistema desacoplado puede ser escrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\frac{\hat{\sigma}_z}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \hbar \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (4.1.16)$$

donde introducimos el parámetro de desintonía $\Delta \equiv \omega - \omega_0$.

Procedemos calculando los eigenvalores de los mismos estados, $|e, n\rangle$ y

$|g, n + 1\rangle$, con el Hamiltoniano de la ecuación (4.1.16), es decir,

$$\begin{aligned}\hat{H} |e, n\rangle &= E_{e,n} |e, n\rangle = \hbar \left[\omega(n + 1) - \frac{\Delta}{2} \right] |e, n\rangle, \\ \hat{H} |g, n + 1\rangle &= E_{g,n+1} |g, n + 1\rangle = \hbar \left[\omega(n + 1) + \frac{\Delta}{2} \right] |g, n + 1\rangle,\end{aligned}$$

lo cual se ilustra esquemáticamente en la Figura 6. Además, a $|e, n\rangle$ y $|g, n + 1\rangle$ se les conoce como *estados desnudos*, debido a que son los eigenestados del Hamiltoniano libre.

Notamos que en el caso no resonante los eigenvalores correspondientes a los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n + 1\rangle$ no coinciden, dando como resultado un subespacio ortogonal de Hilbert $\Xi(n)$

$$\Xi(n) : \{|e, n\rangle, |g, n + 1\rangle\}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

4.1.2 Sistema Acoplado

Ahora permitimos el acoplamiento entre el sistema atómico y el campo, es decir, volvemos al Hamiltoniano de la ecuación (4.1.14). Tratando individualmente el término de interacción

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g (\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a})$$

vemos que el proceso de *absorción* queda matemáticamente descrito por

$$\langle e, n | \hat{H}_{\text{int}} |g, n + 1\rangle = \hbar g(n + 1),$$

que corresponde a una transición $|g, n + 1\rangle \rightarrow |e, n\rangle$. Asimismo, el de *emisión* queda expresado como

$$\langle g, n + 1 | \hat{H}_{\text{int}} |e, n\rangle = \hbar g(n + 1),$$

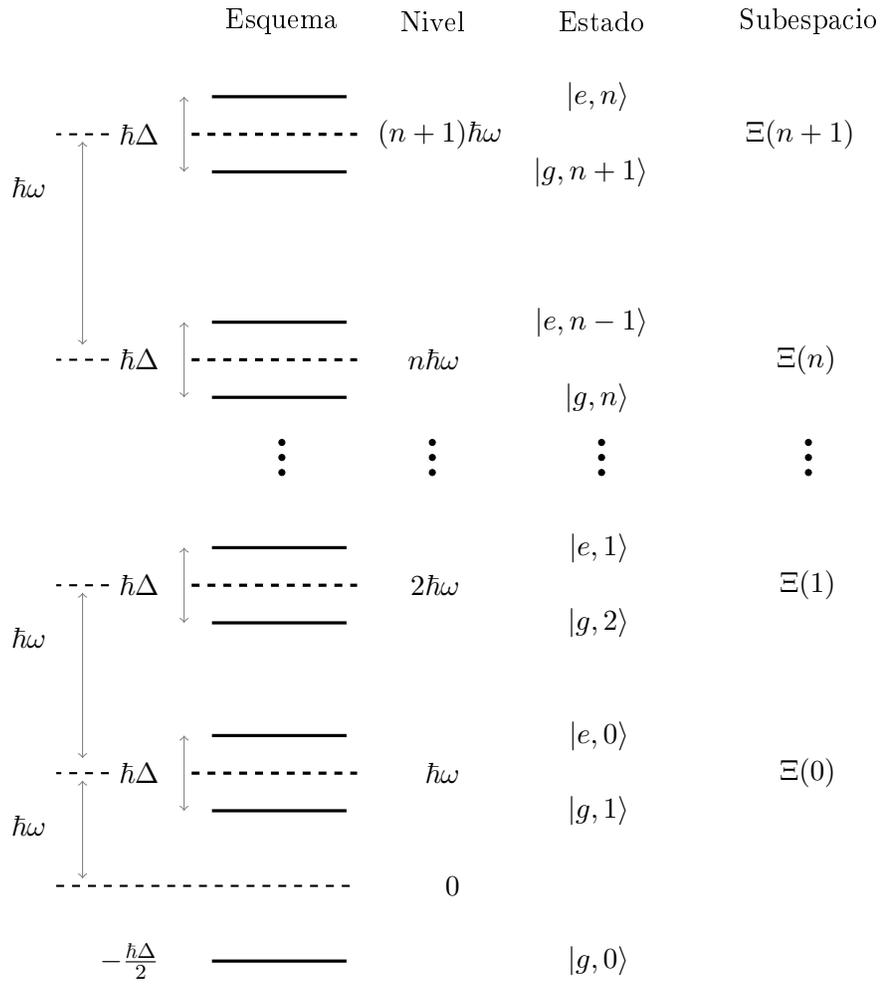


Figura 6: Esquema de los niveles *desnudos* $E_{e,n}$ y $E_{g,n+1}$ del sistema desacoplado. A cada par de niveles de energía le corresponden dos eigenestados, los cuales forman el subespacio bidimensional de Hilbert $\Xi(n)$. El estado base $|g, 0\rangle$ es independiente de los otros.

es decir, una transición $|e, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle$. Esto nuevamente reafirma que únicamente consideramos los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n+1\rangle$ que son aquéllos que forman el subespacio $\Xi(n)$.

Así, el Hamiltoniano del sistema queda descrito por la siguiente matriz

$$\begin{aligned} (\hat{H})_n &= \begin{pmatrix} \langle e, n | \hat{H}_L | e, n \rangle & \langle e, n | \hat{H}_{\text{int}} | g, n+1 \rangle \\ \langle g, n+1 | \hat{H}_{\text{int}} | e, n \rangle & \langle g, n+1 | \hat{H}_L | g, n+1 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar \begin{pmatrix} \omega(n+1) - \frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \omega(n+1) + \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \hbar\omega(n+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta & \Omega_n \\ \Omega_n & \Delta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde incluimos la frecuencia $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$.

Diagonalización

Eigenvalores Usamos ahora la ecuación de eigenvalores

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega(n+1) - \frac{\Delta}{2} & \frac{\Omega_n}{2} \\ \frac{\Omega_n}{2} & \omega(n+1) + \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hbar\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

y obtenemos los dos siguientes eigenvalores para la energía

$$E_{\pm, n} = \hbar\lambda_{\pm} = \hbar \left[\omega(n+1) \pm \frac{\mathcal{R}_n}{2} \right], \quad (4.1.17)$$

donde $\mathcal{R}_n = \sqrt{\Delta^2 + \Omega_n^2}$, lo cual se puede observar en la Figura 7. Este análisis nos permite observar que en resonancia la separación de energías está dada por $(\Delta E)_n = \hbar\Omega_n$ como en el diagrama de la Figura 8. Además, de esto vemos que la energía de separación de los dos niveles aumenta con el número de fotones, porque $(\Delta E)_n \propto \sqrt{n}$.

Caso no resonante: $\Delta > 0$

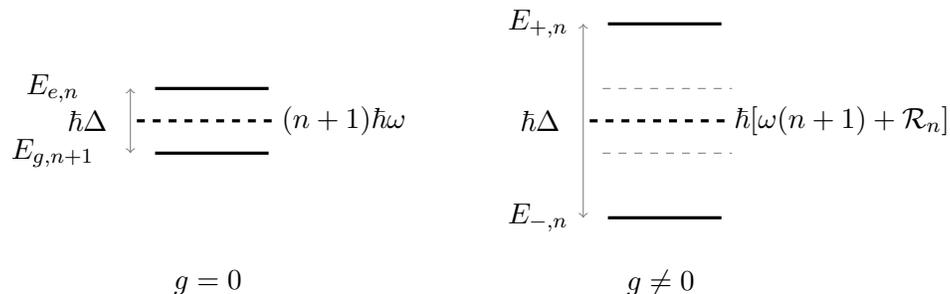


Figura 7: Esquema de los estados vestidos $E_{\pm n}$ del sistema acoplado, los cuales se comparan con los del sistema desacoplado.

Caso resonante: $\Delta = 0$

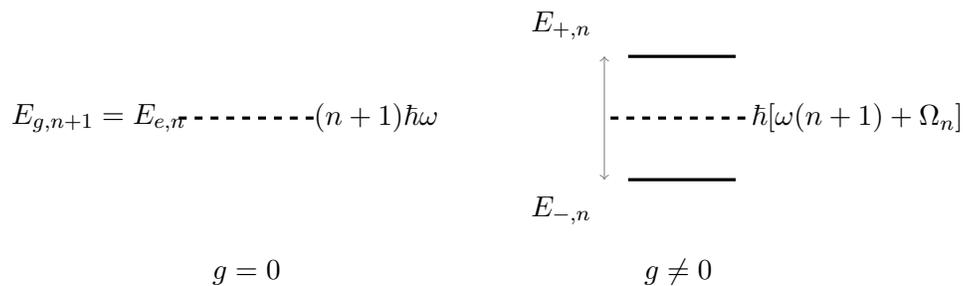


Figura 8: En resonancia, $\Delta = 0$, la degeneración aumenta por el acoplamiento, y la separación entre los niveles se vuelve $(\Delta E)_n = \hbar\Omega_n$.

Eigenestados A los eigenestados correspondientes a los eigenvalores (4.1.17) también se les conoce como *estados vestidos* por su interacción con fotones.

Continuamos considerando la ecuación de eigenvalores en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -\Delta & \Omega_n \\ \Omega_n & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \pm \mathcal{R}_n \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

de la cual, usando la condición de normalización $u^2 + v^2 = 1$, obtenemos los

eigenvectores

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_- = \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{R}_n - \Delta)^2 + \Omega_n^2}} \begin{pmatrix} \Omega_n \\ \mathcal{R}_n - \Delta \end{pmatrix} \quad (4.1.18)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_+ = \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{R}_n - \Delta)^2 + \Omega_n^2}} \begin{pmatrix} -\mathcal{R}_n + \Delta \\ \Omega_n \end{pmatrix}. \quad (4.1.19)$$

Las dos expresiones anteriores las podemos simplificar haciendo las sustituciones siguientes

$$\sin \theta_n \equiv \frac{\Omega_n}{\sqrt{(\mathcal{R}_n - \Delta)^2 + \Omega_n^2}}, \quad (4.1.20)$$

$$\cos \theta_n \equiv \frac{\mathcal{R}_n - \Delta}{\sqrt{(\mathcal{R}_n - \Delta)^2 + \Omega_n^2}}. \quad (4.1.21)$$

Con éstas podemos expresar nuestros eigenvectores como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_- = \sin \theta_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \theta_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.22)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_+ = \cos \theta_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin \theta_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.23)$$

Utilizando las ecuaciones (4.1.23) y (4.1.22), y los vectores estado de $\Xi(n)$ podemos expresar a los estados vestidos en términos de los estados desnudos, es decir, son los eigenvalores del sistema acoplado. Finalmente escribimos

$$|\psi_-\rangle = \sin \theta_n |e, n\rangle + \cos \theta_n |g, n+1\rangle, \quad (4.1.24)$$

$$|\psi_+\rangle = \cos \theta_n |e, n\rangle - \sin \theta_n |g, n+1\rangle. \quad (4.1.25)$$

Esto significa que el Hamiltoniano de interacción provoca una transformación unitaria sobre la base $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$, que equivale a una rotación por un ángulo θ_n en $\Xi(n)$. En particular, cuando el sistema está en resonancia, lo

anterior se puede resumir en

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|e, n\rangle \pm |g, n+1\rangle], \quad (4.1.26)$$

que es un estado entrelazado con $\theta_n = \frac{\pi}{4}$.

Sin embargo, de las sustituciones (4.1.20) y (4.1.21) podemos obtener el valor

$$\tan 2\theta_n = -\frac{\Omega_n}{\Delta}.$$

De éste notamos que cuando $\Delta \rightarrow 0$ obtenemos el estado (4.1.26). Mientras tanto, si $|\Delta| \rightarrow \infty$ el ángulo $\theta_n \rightarrow 0$, recuperando así los estados desnudos.

4.2 Dinámica del Modelo de Jaynes-Cummings

El modelo de Jaynes-Cummings es el modelo fundamental en el estudio de la interacción de un sistema atómico con un campo cuantizado. Éste describe la dinámica de un solo átomo de dos niveles al interactuar con un campo de radiación de un modo. Por lo que la ecuación (4.1.13), al considerar un campo de un modo, se reduce a

$$\begin{aligned} \hat{H}_{JC} &= \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_{\text{int}} \\ &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \hbar g \left[\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger e^{i\Delta\cdot t} + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a}e^{-i\Delta\cdot t} \right], \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

que representa el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings.

El estudio de la dinámica del modelo de Jaynes-Cummings lo dividiremos en dos casos: *(i)* el resonante y *(ii)* el no resonante. En el primero el Hamiltoniano no tendrá dependencia temporal, por lo que su evolución se analizará mediante el operador de evolución temporal usando álgebra de operadores. Por otro lado, en el segundo caso la dependencia temporal del

Hamiltoniano será explícita y el estudio se llevará a cabo tomando un *ansatz* para la función de onda que contenga una combinación apropiada de estados del campo y atómicos.

4.2.1 Caso Resonante

Iniciaremos con el caso más sencillo, para facilitar la comprensión de la dinámica del modelo de Jaynes-Cummings. El caso resonante ocurre cuando $\Delta = 0$, ocasionando que el término de interacción de la ecuación (4.2.1) pierda su dependencia temporal, es decir,

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \right).$$

Continuamos utilizando la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_{\text{int}} |\psi(t)\rangle,$$

cuya solución está dada por

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\psi(0)\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{int}} t\right) \\ &= |\psi(0)\rangle \exp\left[-igt \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}\right)\right] \\ &\equiv |\psi(0)\rangle \hat{U}(t, t_0 = 0). \end{aligned}$$

En la presente sección discutiremos la dinámica al evaluar el operador de evolución temporal

$$\hat{U}(t, t_0 = 0) \equiv \exp\left[-igt \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}\right)\right]$$

del modelo de Jaynes-Cummings resonante.

La función de onda inicial estará dada por el producto tensorial de los estados del campo y los atómicos, es decir,

$$|\psi(0)\rangle \equiv |\psi\rangle_{\text{átomo}} \otimes |\psi\rangle_{\text{campo}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} w_n [C_e |e\rangle + C_g |g\rangle] |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \begin{pmatrix} C_e \\ C_g \end{pmatrix} |n\rangle,$$

donde el estado del campo está dado por

$$|\psi\rangle_{\text{campo}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} w_n |n\rangle$$

y el atómico por

$$|\psi\rangle_{\text{átomo}} \equiv C_e |e\rangle + C_g |g\rangle = C_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en la última igualdad utilizamos la notación vectorial de los estados atómicos, ya revisada en el capítulo anterior.

Operador de Evolución Temporal

Iniciamos escribiendo la definición en series de potencias de la función exponencial

$$e^{-\lambda \hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \hat{A}^n,$$

donde λ es un escalar y \hat{A} es un operador arbitrario. Utilizando lo anterior descomponemos la suma en términos pares e impares, esto es

$$\hat{U}(t, t_0 = 0) = \exp \left[-igt \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \right) \right] = \hat{c} - i\hat{s},$$

donde

$$\hat{c} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (gt)^{2n}}{(2n)!} \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \right)^{2n} \quad (4.2.2)$$

y

$$\hat{s} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (gt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \right)^{2n} \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \right). \quad (4.2.3)$$

Potencias Pares

Primero consideraremos el operador

$$\left(\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a}\right)^2 = \hat{\sigma}^2\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{\sigma}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{a}\hat{a}^\dagger$$

y recordamos las siguientes relaciones

$$\hat{\sigma}^{\dagger 2} = 0,$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.$$

Lo anterior indica que los operadores de transición atómica pueden aplicarse sólo una vez. Por otro lado, tenemos el operador

$$\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger = (|g\rangle\langle e||e\rangle\langle g|) = |g\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

que corresponde a una doble transición, primero del estado base al excitado $|e\rangle$ y un posterior retorno al estado base $|g\rangle$.

Análogamente tenemos el operador

$$\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} = (|e\rangle\langle g||g\rangle\langle e|) = |e\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.5)$$

el cual representa una transición del estado excitado al base y otra de regreso para finalizar nuevamente en el excitado.

El operador $\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger$ se encuentra acompañado por el operador del campo $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, esto es, el camino atómico $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |g\rangle$ debe estar acompañado por la aniquilación de un fotón y por su recreación. En sentido inverso, el camino atómico seguido por el operador $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$, es decir, $|e\rangle \rightarrow |g\rangle \rightarrow |e\rangle$ está caracterizado por la creación de un fotón y por su posterior aniquilación.

Por lo tanto, el operador $(\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a})^2$ puede escribirse como

$$(\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a})^2 = \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{a}\hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{a}\hat{a}^\dagger & 0 \\ 0 & \hat{a}^\dagger\hat{a} \end{pmatrix}.$$

De los cálculos previos, particularmente de las ecuaciones (4.2.4) y (4.2.5), podemos escribir el siguiente resultado

$$(\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a})^{2n} = \begin{pmatrix} (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^n & 0 \\ 0 & (\hat{a}^\dagger\hat{a})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}^{2n} & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}^{2n} \end{pmatrix}. \quad (4.2.6)$$

Por lo anterior, el operador \hat{c} , definido en la ecuación (4.2.2), puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{c} &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (gt)^{2n}}{(2n)!} \sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}^{2n} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (gt)^{2n}}{(2n)!} \sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}^{2n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}) & 0 \\ 0 & \cos(\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Potencias Impares

De la definición (4.2.3) del operador \hat{s} y del análisis para las potencias pares encontramos la siguiente expresión

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (gt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}^{2n+1}}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (gt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}^{2n+1}}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}} \end{pmatrix} (\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a}).$$

Utilizaremos ahora la expresión

$$\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

con la cual obtenemos la siguiente expresión para \hat{s}

$$\begin{aligned}\hat{s} &= \begin{pmatrix} \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}} & 0 \\ 0 & \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}}\hat{a} \\ \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}}\hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De la definición de los operadores \hat{c} y \hat{s} notamos que el primero es diagonal en la base de estados atómicos, mientras que \hat{s} no lo es.

Finalmente, de los resultados anteriores, expresamos el operador de evolución temporal de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{U}(t, t_0 = 0) &= \exp \left[-igt \left(\hat{\sigma}\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger\hat{a} \right) \right] = \hat{c} - i\hat{s} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}) & 0 \\ 0 & \cos(\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}}\hat{a} \\ \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}}\hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(gt\sqrt{\hat{n} + 1}) & 0 \\ 0 & \cos(\sqrt{\hat{n}}) \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n}+1})}{\sqrt{\hat{n}+1}}\hat{a} \\ \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n}})}{\sqrt{\hat{n}}}\hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde se utilizó el operador de número $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Así, el operador $\hat{U}(t, t_0 = 0)$ contiene toda la dinámica del modelo de Jaynes-Cummings en resonancia, es decir, cuando $\Delta = 0$. Asimismo, el operador de evolución puede expresarse, de forma más conveniente y sucinta, como

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &= \cos(gt\sqrt{\hat{n} + 1})|e\rangle\langle e| + \cos(gt\sqrt{\hat{n}})|g\rangle\langle g| + \\ &\quad - i \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n} + 1})}{\sqrt{\hat{n} + 1}}\hat{a}|e\rangle\langle g| - i \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n}})}{\sqrt{\hat{n}}}\hat{a}^\dagger|g\rangle\langle e|\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

La expresión del operador de evolución temporal anterior sugiere que la dinámica átomo-campo consiste de un número par o impar de intercambios de *quantos* energéticos, proveniente de excitaciones entre el campo y el átomo. Estos intercambios pueden ser interpretados individualmente de la siguiente manera:

Potencias Pares Como la aniquilación de un *quanto* del campo está asociada con la creación de una excitación atómica y, por el contrario, la creación de un *quanto* del campo asociada con la desexcitación del átomo, entonces un número par de intercambios de *quantos* energéticos dejará invariante los estados atómicos. Por lo tanto, el operador correspondiente a los intercambios pares de fotones tendrá una representación diagonal.

Además, es posible notar que la dependencia temporal está gobernada por las funciones coseno y seno. De lo anterior, como los términos en la diagonal no representan transiciones y al tiempo $t = 0$ el estado inicial debe emerger, este término diagonal sólo puede tener funciones coseno.

Así, para lograr lo anterior debemos primero crear un fotón y luego destruirlo. Este proceso se lleva a cabo n veces y queda descrito por

$$(\hat{a}\hat{a}^\dagger)(\hat{a}\hat{a}^\dagger)\cdots(\hat{a}\hat{a}^\dagger) = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^n = (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)^n = \sqrt{\hat{n} + 1}^{2n}.$$

De la misma forma, el otro término se debe a que primero destruimos un fotón y luego lo creamos nuevamente, proceso que se repite n veces y queda descrito por

$$(\hat{a}^\dagger\hat{a})(\hat{a}^\dagger\hat{a})\cdots(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = (\hat{a}^\dagger\hat{a})^n = \sqrt{\hat{n}}^{2n}.$$

Potencias Impares Los últimos dos términos de (4.2.7) representan los intercambios de un número impar de fotones. Por lo mismo, el operador no puede ser diagonal, ya que describe las transiciones atómicas. Si inicialmente el átomo se encuentra en el estado base, éste requiere la aniquilación de un fotón para lograr hacer la transición al estado excitado. Posteriormente puede intervenir en él un proceso de $2n$ fotones, el cual crea y destruye un

fotón n veces, y cuya expresión en términos de operadores es

$$(\hat{a}\hat{a}^\dagger)(\hat{a}\hat{a}^\dagger)\cdots(\hat{a}\hat{a}^\dagger)\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^n\hat{a} = \sqrt{\hat{n}+1}^{2n}\hat{a}.$$

Sin embargo, para obtener una función seno de las potencias impares, debemos multiplicar y dividir por $\sqrt{\hat{n}+1}$. Análogamente, el otro término representa la transición de $2n+1$ fotones del estado excitado al estado base. Aquí primero creamos un fotón para luego someternos al proceso de destrucción y creación de $2n$ fotones, es decir,

$$(\hat{a}^\dagger\hat{a})(\hat{a}^\dagger\hat{a})\cdots(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^\dagger = (\hat{a}^\dagger\hat{a})^n\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{n}}^{2n}\hat{a}^\dagger.$$

Como no existen transiciones para $t = 0$, la dependencia temporal está determinada por una función seno.

Función de onda del sistema compuesto

Estamos listos para aplicar el operador de evolución temporal a nuestra función de onda inicial

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \begin{pmatrix} C_e \\ C_g \end{pmatrix} |n\rangle.$$

De las relaciones anteriores vemos que

$$\frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n}+1})}{\sqrt{\hat{n}+1}}\hat{a}|n\rangle = \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n}+1})}{\sqrt{\hat{n}+1}}\sqrt{\hat{n}}|n-1\rangle = \sin(gt\sqrt{\hat{n}})|n-1\rangle$$

y

$$\frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n}})}{\sqrt{\hat{n}}}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \frac{\sin(gt\sqrt{\hat{n}})}{\sqrt{\hat{n}}}\sqrt{\hat{n}+1}|n+1\rangle = \sin(gt\sqrt{\hat{n}+1})|n+1\rangle.$$

Mediante estas relaciones llegamos a la expresión de nuestra función de onda dependiente del tiempo

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \left[\begin{pmatrix} C_e \cos(gt\sqrt{n+1}) |n\rangle \\ C_g \cos(gt\sqrt{n}) |n\rangle \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} C_g \sin(gt\sqrt{n}) |n-1\rangle \\ C_e \sin(gt\sqrt{n+1}) |n+1\rangle \end{pmatrix} \right]$$

o

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \left\{ C_e [\cos(gt\sqrt{n+1}) |e, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n+1}) |g, n+1\rangle] \right. \\ \left. + C_g [\cos(gt\sqrt{n}) |g, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n}) |e, n-1\rangle] \right\}. \quad (4.2.8)$$

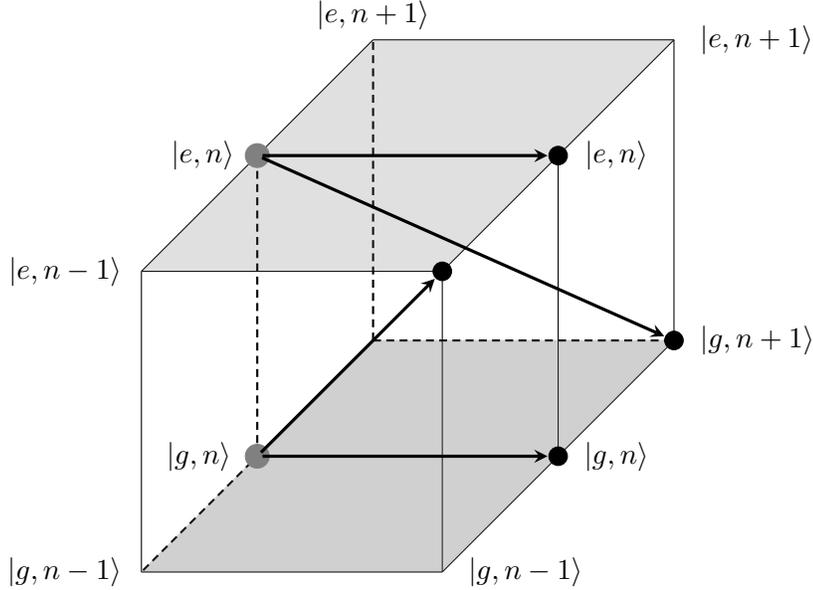


Figura 9: Representación del modelo de Jaynes-Cummings en el espacio átomo-campo. Los estados $|\psi_{\text{átomo}}, \psi_{\text{campo}}\rangle$ de dicho espacio están ubicados en las esquinas de los cubos. El plano inferior representa el estado base atómico, $|g\rangle$, y el superior el estado excitado, $|e\rangle$. Por otro lado, las esquinas, de los planos inferior y superior, reflejan el número de fotones presentes en el estado base o excitado, respectivamente. Los vectores muestran los procesos que son posibles en el modelo de JC, dado que éste sólo permite el intercambio de un solo cuanto de excitación.

Dinámica del sistema

Con el análisis previo estamos preparados para estudiar la dinámica del modelo de Jaynes-Cummings en resonancia. La ecuación (4.2.8) es la función de onda de dicho modelo, que describe la interacción de un átomo en el estado de superposición $|\psi\rangle_{\text{átomo}} \equiv C_e|e\rangle + C_g|g\rangle$ con un campo de radiación dado por el estado de número $|n\rangle$. Vemos que el operador de evolución (4.2.7) actuará sobre el estado inicial

$$\begin{aligned} |\psi(t=0)\rangle &\equiv |\psi\rangle_{\text{átomo}} \otimes |\psi\rangle_{\text{campo}} \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} w_n [C_e|e\rangle + C_g|g\rangle] \otimes |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \{C_e|e, n\rangle + C_g|g, n\rangle\} \end{aligned}$$

transformándolo en

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \left\{ C_e [\cos(gt\sqrt{n+1})|e, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n+1})|g, n+1\rangle] \right. \\ \left. + C_g [\cos(gt\sqrt{n})|g, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n})|e, n-1\rangle] \right\} \end{aligned}$$

Como caso particular consideramos a nuestro átomo inicialmente en el estado excitado $|e\rangle$, es decir,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n C_e |e, n\rangle.$$

Nuevamente, aplicándole el operador de evolución (4.2.7), obtenemos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n [\cos(gt\sqrt{n+1})|e, n\rangle - i \sin(gt\sqrt{n+1})|g, n+1\rangle].$$

De lo anterior podemos calcular los valores esperados de encontrar a nuestro

sistema en los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n + 1\rangle$:

$$c_{e,n}(t) = \langle e, n | \psi(t) \rangle = w_n \cos(gt\sqrt{n+1}), \quad (4.2.9)$$

$$c_{g,n+1}(t) = \langle g, n + 1 | \psi(t) \rangle = w_n \sin(gt\sqrt{n+1}). \quad (4.2.10)$$

En la Figura 9 representamos la dinámica de este sistema en una red tridimensional. Cada esquina del cubo representa un estado del sistema átomo-campo. En la superficie superior encontramos los estados $|e, m\rangle$, en donde el sistema está caracterizado por el estado de Fock con número de fotones m y el átomo excitado. En la superficie inferior se encuentran los estados $|g, m\rangle$, que son aquéllos con un estado de número $|m\rangle$ y el átomo en el estado base. A su vez, en el lado izquierdo se ubican los estados *antes* de la interacción, mientras que del lado derecho están aquéllos *después* de ella.

Utilizamos ahora las flechas para ilustrar el comportamiento dinámico del sistema. Entonces, como sólo permitimos el intercambio de una excitación entre el campo y el átomo, el estado $|e, n\rangle$ sólo puede permanecer igual o mudar a $|g, n + 1\rangle$. Este proceso se ilustra por las flechas que surgen de $|e, n\rangle$ y apuntan a las esquinas permitidas. Por otro lado, el estado $|g, n\rangle$ puede continuar así o trasladarse al estado $|e, n - 1\rangle$.

Finalizamos así el estudio del caso resonante, para ahora analizar el caso más complejo de la dinámica de interacción, cuando el sistema se encuentra fuera de resonancia, es decir, $\Delta \neq 0$.

4.2.2 Caso No Resonante

Procedemos ahora con el otro caso del modelo de Jaynes-Cummings, en el cual el parámetro de desintonía no se desprecia. En este problema el Hamiltoniano de interacción tiene una dependencia temporal explícita, impidiéndonos proceder igual que en la sección anterior.

El análisis que llevaremos a cabo se basa en proponer un *ansatz* para la función de onda, porque el Hamiltoniano de interacción acopla los subsistemas de los estados atómicos y del campo. Así, dicho *ansatz* será una combinación de estados atómicos y del campo.

Iniciamos resolviendo la ecuación de movimiento de nuestra función de onda $|\psi(t)\rangle$, ésta es

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{\text{int}} |\psi\rangle \quad (4.2.11)$$

con

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g \left(\hat{\sigma} \hat{a}^\dagger e^{i\Delta \cdot t} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} e^{-i\Delta \cdot t} \right) \quad (4.2.12)$$

Nuestra función de onda queda descrita en todo momento por la combinación lineal de los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n\rangle$. Por ello, nuestra función de onda queda expresada por

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n [C_e |e, n\rangle + C_g |g, n\rangle] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [c_{e,n}(t) |e, n\rangle + c_{g,n}(t) |g, n\rangle], \end{aligned}$$

donde utilizamos la notación abreviada $w_n C_e \equiv c_{e,n}(t)$ y $w_n C_g \equiv c_{g,n}(t)$.

Sin embargo, nuestra energía de interacción (4.2.12) sólo puede causar transiciones atómicas entre estados del campo que distan por la unidad, es decir, $|e, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle$ y viceversa. Por ello, consideraremos la evolución de las amplitudes correspondientes $c_{e,n}$ y $c_{g,n+1}$, respectivamente. A partir de esta consideración escribimos nuestra función de onda en la forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{e,n}(t) |e, n\rangle + c_{g,n+1}(t) |g, n+1\rangle]. \quad (4.2.13)$$

Ecuaciones de Rabi

Para obtener las ecuaciones de movimiento de las amplitudes de probabilidad, sustituimos nuestra función de onda (4.2.13) en la ecuación (4.2.11), donde \hat{H}_{int} está dada por (4.2.12)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} &= i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} [\dot{c}_{e,n} |e, n\rangle + \dot{c}_{g,n+1}(t) |g, n+1\rangle] \\ &= \hat{H}_{\text{int}} |\psi\rangle \\ &= \hbar g \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} [c_{e,n} e^{i\Delta \cdot t} |g, n+1\rangle + c_{g,n+1} e^{-i\Delta \cdot t} |e, n\rangle], \quad (4.2.14) \end{aligned}$$

donde se utilizó que

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^\dagger |g\rangle &= |e\rangle, \\ \hat{\sigma}^\dagger |e\rangle &= |e\rangle \langle g| |e\rangle = |e\rangle \langle g| e\rangle = 0, \\ \hat{\sigma} |e\rangle &= |g\rangle. \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores notamos que el estado excitado no puede volver a ser excitado y, por definición, es imposible ir por debajo del estado base.

Es importante destacar la acción de \hat{H}_{int} sobre el estado $|g, 0\rangle$ que corresponde a $n = -1$:

$$\hat{H}_{\text{int}} |g, 0\rangle = 0.$$

Es decir, el vacío no puede excitar un átomo inicialmente en el estado base, por lo que el estado $|g, 0\rangle$ se desacopla del resto.

Ahora sí, volvemos a las ecuaciones de movimiento (4.2.14) y proyectamos $\langle e, n |$ y $\langle g, n + 1 |$ en éstas. Así, obtenemos las ecuaciones de movimiento correspondientes a cada amplitud

$$\begin{aligned}\dot{c}_{e,n} &= -ig\sqrt{n+1}e^{-i\Delta\cdot t}c_{g,n+1} \\ \dot{c}_{g,n+1} &= -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta\cdot t}c_{e,n},\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

las cuales son muy similares a las ecuaciones de movimiento obtenidas en el tratamiento semiclásico. A éstas se les conoce como *las ecuaciones de Rabi*.

Solución de las Ecuaciones de Rabi; Transformada de Laplace

Las ecuaciones de Rabi (4.2.15) son dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. El método de solución más inmediato es el que utilizamos en el tratamiento semiclásico. Para variar el estudio del problema emplearemos la transformada de Laplace, la cual nos permitirá automáticamente introducir las condiciones iniciales.

La transformada de Laplace nos permitirá obtener un conjunto de ecuaciones algebraicas, las cuales se pueden resolver directamente. Posteriormente utilizaremos la transformada de Laplace inversa para encontrar las amplitudes de probabilidad $c_{e,n}$ y $c_{g,n+1}$.

Introducimos la transformada de Laplace de las amplitudes de probabilidad

$$\bar{c}_{e,n}(s) \equiv \int_0^\infty dt e^{-st} e^{i\Delta\cdot t/2} c_{e,n}(t)$$

y

$$\bar{c}_{g,n+1}(s) \equiv \int_0^\infty dt e^{-st} e^{-i\Delta\cdot t/2} c_{g,n+1}(t)$$

Aquí transformamos las amplitudes de probabilidad $e^{i\Delta \cdot t/2} c_{e,n}$ y $e^{-i\Delta \cdot t/2} c_{g,n+1}$, esto es, incluimos parte de la dependencia temporal del Hamiltoniano debido al parámetro de desintonía. Este procedimiento nos permite obtener ecuaciones simples para $\bar{c}_{e,n}(s)$ y $\bar{c}_{g,n+1}(s)$.

Si multiplicamos las ecuaciones (4.2.15) por $e^{-st} e^{i\Delta \cdot t/2}$ y por $e^{-st} e^{-i\Delta \cdot t/2}$, e integramos sobre el tiempo, llegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt e^{-st} e^{i\Delta \cdot t/2} \dot{c}_{e,n}(t) &= -ig\sqrt{n+1} \bar{c}_{g,n+1}, \\ \int_0^\infty dt e^{-st} e^{-i\Delta \cdot t/2} \dot{c}_{g,n+1}(t) &= -ig\sqrt{n+1} \bar{c}_{e,n}. \end{aligned}$$

Al integrar por partes las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} c_{e,n} e^{it\Delta/2} e^{-st} + \left(s - i\frac{\Delta}{2}\right) \bar{c}_{e,n} &= -ig\sqrt{n+1} \bar{c}_{g,n+1}, \\ c_{g,n+1} e^{-it\Delta/2} e^{-st} + \left(s + i\frac{\Delta}{2}\right) \bar{c}_{g,n+1} &= -ig\sqrt{n+1} \bar{c}_{e,n}, \end{aligned}$$

lo cual se resume en el siguiente sistema inhomogéneo

$$\mathbf{U} \begin{pmatrix} \bar{c}_{e,n}(s) \\ \bar{c}_{g,n+1}(s) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s - i\frac{\Delta}{2} & ig\sqrt{n+1} \\ ig\sqrt{n+1} & s + i\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_{e,n}(s) \\ \bar{c}_{g,n+1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{e,n}(t=0) \\ c_{g,n+1}(t=0) \end{pmatrix}$$

de dos ecuaciones algebraicas acopladas.

La solución de este sistema es de la forma

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{e,n} \\ \bar{c}_{g,n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} c_{e,n}(0) \\ c_{g,n+1}(0) \end{pmatrix}, \quad (4.2.16)$$

donde la matriz inversa de \mathbf{U} está dada por

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{U}} \begin{pmatrix} s + i\frac{\Delta}{2} & -ig\sqrt{n+1} \\ -ig\sqrt{n+1} & s - i\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{U}} \mathbf{U}^\dagger. \quad (4.2.17)$$

Continuamos calculando el determinante de la matriz \mathbf{U}

$$\det \mathbf{U} = s^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2(n+1) = (s + i\lambda_n)(s - i\lambda_n), \quad (4.2.18)$$

donde

$$\lambda_n \equiv \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2(n+1)},$$

que definen los ceros del determinante: $s = \pm i\lambda_n$. Estos valores nos servirán para encontrar las amplitudes de probabilidad $c_{e,n}(t)$ y $c_{g,n+1}(t)$.

Procedemos invirtiendo la transformada de Laplace mediante la relación

$$\begin{pmatrix} e^{it\Delta/2}c_{e,n}(t) \\ e^{-it\Delta/2}c_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} ds e^{st} \begin{pmatrix} \bar{c}_{e,n}(s) \\ \bar{c}_{g,n+1}(s) \end{pmatrix},$$

donde \mathcal{C} se escoge de tal forma que se incluyan todos los polos. Si sustituimos la ecuación (4.2.16) junto con la expresión (4.2.17) en la fórmula de inversión, entonces encontramos la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} e^{it\Delta/2}c_{e,n}(t) \\ e^{-it\Delta/2}c_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} ds \frac{e^{st}}{\det \mathbf{U}} \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} c_{e,n}(t=0) \\ c_{g,n+1}(t=0) \end{pmatrix},$$

donde los polos son los ceros del determinante. Ahora notamos la relación

$$\frac{1}{\det \mathbf{U}} = \frac{1}{(s+i\lambda_n)(s-i\lambda_n)} = \frac{1}{2i\lambda_n} \left(\frac{1}{s-i\lambda_n} - \frac{1}{s+i\lambda_n} \right),$$

para llegar a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{it\Delta/2}c_{e,n}(t) \\ e^{-it\Delta/2}c_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} ds \left(\frac{1}{s-i\lambda_n} - \frac{1}{s+i\lambda_n} \right) \frac{e^{st}}{2i\lambda_n} \mathbf{U}^\dagger(s) \begin{pmatrix} c_{e,n}(0) \\ c_{g,n+1}(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} ds \left(\frac{e^{st}\mathbf{U}^\dagger(s)}{s-i\lambda_n} - \frac{e^{st}\mathbf{U}^\dagger(s)}{s+i\lambda_n} \right) \frac{1}{2i\lambda_n} \begin{pmatrix} c_{e,n}(0) \\ c_{g,n+1}(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i\lambda_n} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} ds \left(\frac{e^{st}\mathbf{U}^\dagger(s)}{s-i\lambda_n} \right) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} ds \left(\frac{e^{st}\mathbf{U}^\dagger(s)}{s+i\lambda_n} \right) \right] \begin{pmatrix} c_{e,n}(0) \\ c_{g,n+1}(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Del cálculo complejo conocemos la *fórmula integral de Cauchy*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{z-a} = f(a)$$

válida para funciones analíticas f . En este caso la curva cerrada de integración circula el polo simple en $z = a$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Utilizando la fórmula pasada podemos reducir la expresión de las amplitudes de probabilidad a

$$\begin{pmatrix} e^{it\Delta/2}c_{e,n}(t) \\ e^{-it\Delta/2}c_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\lambda_n} \left[e^{i\lambda_n t} \mathbf{U}^\dagger(s = i\lambda_n) - e^{-i\lambda_n t} \mathbf{U}^\dagger(s = -i\lambda_n) \right] \begin{pmatrix} c_{e,n}(0) \\ c_{g,n+1}(0) \end{pmatrix}.$$

Recordando la definición de \mathbf{U}^\dagger en la ecuación (4.2.17), encontramos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\lambda_n} \left[e^{i\lambda_n t} \mathbf{U}^\dagger(s = i\lambda_n) - e^{-i\lambda_n t} \mathbf{U}^\dagger(s = -i\lambda_n) \right] \\ &= \frac{1}{2\lambda_n} \left[e^{i\lambda_n t} \begin{pmatrix} \lambda_n + \frac{\Delta}{2} & -g\sqrt{n+1} \\ -g\sqrt{n+1} & \lambda_n - \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} - e^{-i\lambda_n t} \begin{pmatrix} -\lambda_n + \frac{\Delta}{2} & -g\sqrt{n+1} \\ -g\sqrt{n+1} & -\lambda_n - \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Así, llegamos al siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} e^{it\Delta/2}c_{e,n}(t) \\ e^{-it\Delta/2}c_{g,n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_n t) + i\frac{\Delta}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n t) & -i\frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \\ -i\frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) & \cos(\lambda_n t) - i\frac{\Delta}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{e,n}(0) \\ c_{g,n+1}(0) \end{pmatrix},$$

del cual, finalmente, conseguimos las siguientes expresiones explícitas de las amplitudes de probabilidad $c_{e,n}(t)$ y $c_{g,n+1}(t)$

$$c_{e,n}(t) = e^{-i\Delta \cdot t/2} \left\{ \left[\cos(\lambda_n t) + i\frac{\Delta}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \right] c_{e,n}(0) - i\frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) c_{g,n+1}(0) \right\} \quad (4.2.19)$$

y

$$c_{g,n+1}(t) = e^{i\Delta \cdot t/2} \left\{ -i\frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) c_{e,n}(0) + \left[\cos(\lambda_n t) - i\frac{\Delta}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \right] c_{g,n+1}(0) \right\}. \quad (4.2.20)$$

Las ecuaciones (4.2.19) y (4.2.20) nos proporcionan las amplitudes de probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado $|e\rangle$ y n fotones en el campo, o al átomo en el estado base $|g\rangle$ y $n + 1$ fotones, respectivamente.

Si ahora suponemos que el átomo se encuentra en el estado excitado inicialmente, entonces $c_{e,n}(0) = w_n(0)$ y $c_{g,n+1}(0) = 0$, donde $w_n(0)$ es la probabilidad de hallar el estado de Fock n -ésimo en el campo de radiación. De esta condición inicial, y de las ecuaciones (4.2.19) y (4.2.20) obtenemos

$$c_{e,n}(t) = e^{-i\Delta \cdot t/2} w_n(0) \left[\cos(\lambda_n t) + i \frac{\Delta}{2\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \right], \quad (4.2.21)$$

$$c_{g,n+1}(t) = e^{i\Delta \cdot t/2} w_n(0) \frac{-ig\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t). \quad (4.2.22)$$

De (4.2.21) y (4.2.22) obtenemos las cantidades $|c_{e,n}(t)|^2$ y $|c_{g,n}(t)|^2$ que representan las probabilidades de encontrar, al tiempo t , al campo con n fotones y al átomo en los estado $|e\rangle$ y $|g\rangle$, respectivamente. La probabilidad $p(n)$ de tener n fotones en el campo al tiempo t se consigue calculando

$$\begin{aligned} p(n) &= |c_{e,n}(t)|^2 + |c_{g,n}(t)|^2 \\ &= \rho_{n,n}(0) \left[\cos^2(\lambda_n t) + \left(\frac{\Delta}{2\lambda_n} \right)^2 \sin^2(\lambda_n t) \right] \\ &\quad + \rho_{n-1,n-1}(0) \left(\frac{g\sqrt{n}}{\lambda_{n-1}} \right)^2 \sin^2(\lambda_{n-1} t), \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

donde $\rho_{n,n} = |w_n(0)|^2$ es la probabilidad de encontrar n fotones presentes en el campo a un tiempo $t = 0$. Notemos que la expresión (4.2.23) es igual a la traza de los estados atómicos, donde la traza es la suma de los elementos de la diagonal de una matriz.

Otra importante cantidad es la *inversión atómica* $W(t)$, la cual relaciona la probabilidad de amplitud $c_{e,n}$ y $c_{g,n}$ mediante la expresión

$$W(t) = \sum_n [|c_{e,n}(t)|^2 - |c_{g,n}(t)|^2]. \quad (4.2.24)$$

Sustituyendo, para $c_{e,n}$ y $c_{g,n}$, las ecuaciones (4.2.21) y (4.2.22), encontramos que

$$\begin{aligned}
W(t) &= \sum_n \left[\cos^2(\lambda_n t) + \sin^2(\lambda_n t) \left\{ \left(\frac{\Delta}{2\lambda_n} \right)^2 - \left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \right)^2 \right\} \right] \\
&= \sum_n \left[\frac{1}{2} (\cos(2\lambda_n t) + 1) + \frac{1}{2} (1 - \cos(2\lambda_n t)) \left\{ \left(\frac{\Delta}{2\lambda_n} \right)^2 - \left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \right)^2 \right\} \right] \\
&= \sum_n \left[\left(\frac{\Delta}{\lambda_n} \right)^2 + \frac{4g^2(n+1)}{\lambda_n^2} \cos(2\lambda_n t) \right]. \tag{4.2.25}
\end{aligned}$$

Es interesante notar que incluso para un campo inicialmente en el estado de vacío ($\rho_{nn} = \delta_{n,0}$) obtenemos la siguiente inversión atómica

$$W(t) = \frac{4}{\Delta^2 + 4g^2} \left\{ \Delta^2 + 4g^2 \cos \left(2t\sqrt{\Delta^2 + 4g^2} \right) \right\}, \tag{4.2.26}$$

es decir, se llevan a cabo las oscilaciones de Rabi. Este resultado resalta por su clara diferencia con el resultado semiclásico (2.3.9), donde el átomo en el estado excitado no puede hacer una transición al estado inferior en ausencia de un campo de radiación. En el tratamiento cuántico, una transición en el vacío del estado excitado al base es posible debido a la *emisión espontánea*.

El fenómeno de *colapso y resurgimiento* se puede interpretar partiendo de la ecuación (4.2.25). Cada término en el sumando representa oscilaciones de Rabi para cada valor definido n . La distribución de fotones $\rho_{nn}(0)$ determina el peso de cada valor n . Inicialmente, en $t = 0$, el átomo se encuentra preparado en un estado definido y por lo tanto todos los términos en la suma están correlacionados. Conforme el tiempo avanza las oscilaciones de Rabi asociadas a diferentes excitaciones tienen diferentes frecuencias y así la correlación empieza a disminuir, generando el *colapso* de la inversión. Posteriormente las correlaciones se restauran, ocasionando un *resurgimiento*. Este comportamiento continúa y queda descrito por una secuencia infinita

de resurgimientos y colapsos. Es la estructura granular de la distribución de fotones la razón por la cual existen dichos resurgimientos, fenómeno puramente cuántico. Este comportamiento se hace evidente en la Figura (10), la cual se realizó utilizando QUANTUMOPTICS.JL⁴ en JULIA [8]. A su vez, el gráfico Figura (11) muestra el mismo fenómeno con un número promedio de fotones $\bar{n} = 2$.

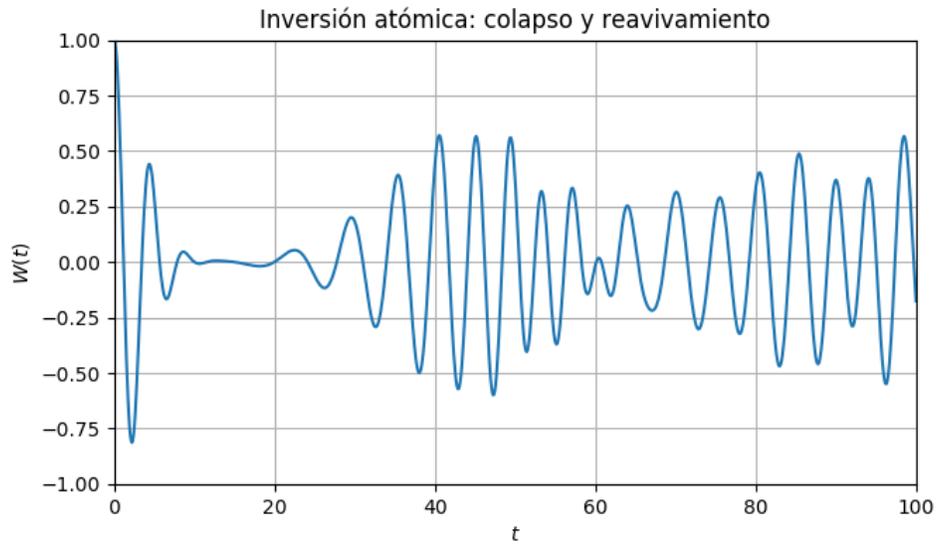


Figura 10: Inversión atómica utilizando QUANTUMOPTICS con el campo inicialmente en un estado coherente y el átomo excitado.

⁴Ver Apéndice A.1

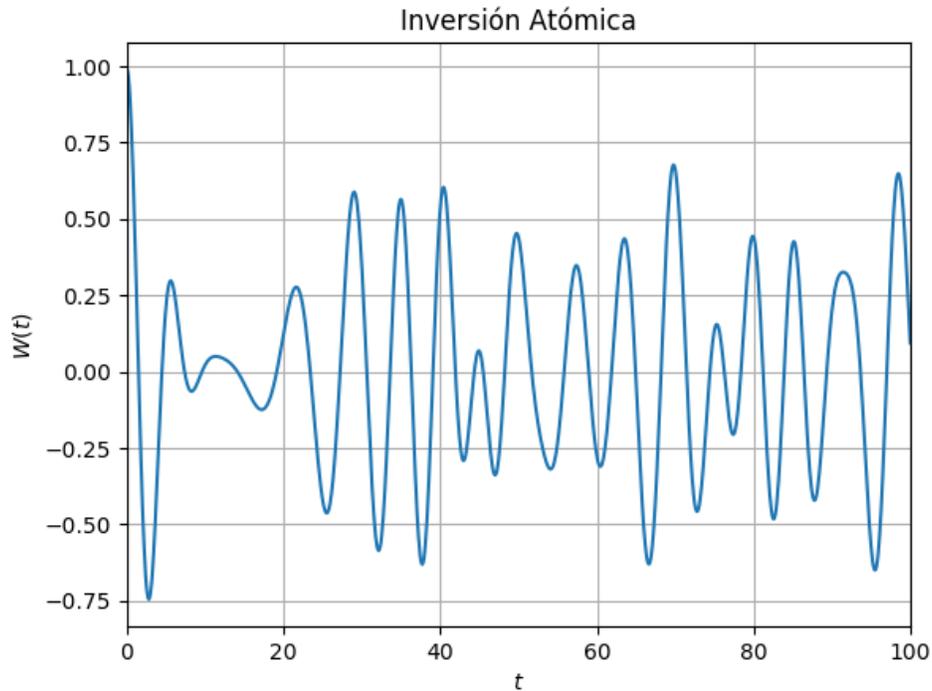


Figura 11: Inversión atómica analítica con el campo inicialmente en un estado coherente con un número promedio de fotones $\bar{n} = 2$ y el átomo excitado.

4.3 Discusión sobre las Soluciones

Ahora discutiremos el contenido físico de las soluciones obtenidas en las secciones anteriores. Éstas las analizaremos desde dos casos límites: *(i)* cuando el campo de radiación se encuentra en resonancia con la frecuencia de transición atómica y *(ii)* cuando éstas están en alta desintonía. El estudio del primer caso estará muy relacionado con la derivación, realizada en secciones anteriores, mediante álgebra de operadores. En el segundo caso la evolución temporal de la función de onda $|\psi\rangle$ del sistema completo se sigue de la identificación de un *Hamiltoniano efectivo*, que conserva la población atómica

y la estadística de los fotones. Dicho Hamiltoniano efectivo es fundamental en el campo de estudio de la electrodinámica cuántica y óptica cuántica.

4.3.1 Consideraciones Generales

En la sección anterior notamos que el Hamiltoniano de interacción acopla sólo dos amplitudes de probabilidad: $c_{e,n}$ y $c_{g,n+1}$. Como nos restringimos a evoluciones temporales unitarias, esto es, consideramos el sistema cerrado de átomo-campo y como la mecánica cuántica es lineal, entonces las amplitudes de probabilidad dependientes del tiempo serán igualmente combinaciones lineales de las amplitudes de probabilidad a un tiempo $t = 0$.

Asimismo, como el Hamiltoniano de interacción crea una excitación atómica al aniquilar un fotón y viceversa, la evolución temporal del sistema cuántico sólo puede ser descrito por un periódico intercambio energético entre las excitaciones del campo y del átomo. Por lo mismo, las amplitudes de probabilidad deben de ser funciones periódicas. Las funciones periódicas más elementales son el coseno y el seno, funciones que efectivamente aparecen en (4.2.19) y (4.2.20). La periodicidad de dicho intercambio energético está dada en términos de la *frecuencia generalizada de Rabi*

$$\lambda_n \equiv \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2(n+1)}$$

que, como hemos visto, son las raíces del determinante de la matriz \mathbf{U} .

Para lograr transiciones del estado $|g, n+1\rangle$ al estado $|e, n\rangle$ o viceversa es necesaria la presencia del campo. Por ello, las amplitudes de probabilidad deben ser al menos proporcionales al campo eléctrico o, de otra forma, proporcionales a la frecuencia de Rabi λ_n . Consecuentemente, la contribución en $c_{e,n}$, debida a la transición desde $c_{g,n+1}$ debe ser proporcional a una función seno, porque para valores muy pequeños el coseno es independiente

de λ_n . Siguiendo el mismo razonamiento, la contribución en $c_{g,n+1}$ debida a una transición desde $c_{e,n}$ debe estar descrita por una función seno.

Es más, la probabilidad de permanecer en el mismo estado debe ser proporcional a una función coseno, para lograr garantizar, que en el límite de tiempos cortos o de un campo débil, no existe transición alguna.

4.3.2 Caso Resonante

Iniciaremos la discusión con el caso más sencillo, el caso resonante, es decir, cuando $\Delta \equiv \omega - \omega_0 = 0$. En este límite notamos que la frecuencia de Rabi se reduce a

$$\lambda_n = g\sqrt{n+1}.$$

Con lo anterior en mente, las amplitudes de probabilidad se escriben en la forma siguiente

$$c_{e,n}(t) = \cos(gt\sqrt{n+1}) c_{e,n}(0) - i \sin(gt\sqrt{n+1}) c_{g,n+1} \quad (4.3.1)$$

y

$$c_{g,n+1}(t) = -i \sin(gt\sqrt{n+1}) c_{e,n} + \cos(gt\sqrt{n+1}) c_{g,n+1}(0). \quad (4.3.2)$$

De estas expresiones también notamos el intercambio periódico de excitaciones entre el campo y el átomo. Además, es notorio que la función seno siempre tiene como coeficiente $-i$, el cual proviene de la ecuación de Schrödinger, que se refleja en la ecuaciones de Rabi, (4.2.15).

Oscilaciones de Rabi de vacío

Un caso especial surge cuando consideramos el campo inicialmente en el estado base, es decir, en el estado de vacío. En este caso, las ecuaciones

previas se escriben como

$$c_{e,0}(t) = \cos(gt) c_{e,0}(0) - i \sin(gt) c_{g,1}$$

y

$$c_{g,1}(t) = -i \sin(gt) c_{e,0} + \cos(gt) c_{g,1}(0).$$

Éstas indican un intercambio periódico entre las excitaciones atómicas y el campo, incluso cuando éste se encuentra en el estado de vacío. La frecuencia de este intercambio es la *frecuencia de Rabi del vacío* g dada por la ecuación (4.1.6) para un modo

$$g \equiv \frac{|\vec{\phi} \cdot \mathbf{e}|}{\hbar} \mathcal{E}_0.$$

Como antes vimos, en el vacío, un átomo inicialmente en el estado base no puede llegar a ser excitado. Sin embargo, si el átomo comienza en el estado excitado, entonces hay un intercambio periódico entre el átomo y el campo. En este caso, tendríamos las condiciones iniciales $c_{e,0} \equiv 1$ y $c_{g,1} \equiv 0$, provocando que

$$c_{e,0}(t) = \cos(gt)$$

y

$$c_{g,1}(t) = -i \sin(gt).$$

4.3.3 Caso no Resonante

Otro análisis importante es cuando la desintonía es muy alta, es decir, cuando se tiene que

$$\frac{2g\sqrt{n+1}}{|\Delta|} \ll 1. \quad (4.3.3)$$

En este caso las amplitudes de probabilidad se ven influenciadas por la modificación de la frecuencia de Rabi, la cual será de la forma

$$\lambda_n = \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{4g^2\sqrt{n+1}}{\Delta^2} \right)^{1/2} \approx \frac{\Delta}{2} \left(1 + \frac{2g^2(n+1)}{\Delta^2} \right) = \frac{\Delta}{2} + \frac{g^2(n+1)}{\Delta}$$

y de la ecuación (4.2.19)

$$c_{e,n}(t) \approx e^{-i\Delta t/2} [\cos(\lambda_n t) + i \sin(\lambda_n t)] c_{e,n}(0) = \exp \left[-i \left(\frac{\Delta}{2} - \lambda_n \right) t \right] c_{e,n}(0),$$

o

$$c_{e,n}(t) \approx \exp \left[i \frac{g^2(n+1)}{\Delta} t \right] c_{e,n}(0). \quad (4.3.4)$$

Aquí ignoramos las transiciones del estado base, porque

$$\left| \frac{g\sqrt{n+1}}{\lambda_n} \right| = \frac{2g\sqrt{n+1}}{|\Delta|[1 + 4g^2(n+1)/\Delta^2]^{1/2}} < \frac{2g\sqrt{n+1}}{|\Delta|} \ll 1.$$

La gran desonancia impide que el átomo logre una transición: debe permanecer en su estado inicial.

Análogamente, podemos observar qué es lo que ocurre en la amplitud de probabilidad $c_{g,n+1}(t)$

$$c_{g,n+1}(t) \approx \exp \left[-i \left(\frac{\Delta}{2} - \lambda_n \right) t \right] c_{g,n+1}(0) = \exp \left[-i \frac{g^2(n+1)}{\Delta} t \right] c_{g,n+1}(0). \quad (4.3.5)$$

Notemos que las amplitudes de probabilidad están rotadas de distinta forma: $c_{g,n+1}$ rota en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que $c_{e,n}$ lo hace en el sentido contrario.

Hamiltoniano Efectivo

Ahora ya contamos con las herramientas necesarias para simplificar las ecuaciones (4.2.19) y (4.2.20), y (4.2.13). Sustituyendo las expresiones (4.3.4) y

(4.3.5), para las amplitudes de probabilidad $c_{e,n}$ y $c_{g,n+1}$, en la función de onda (4.2.13) encontramos que

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp\left(i \frac{g^2(n+1)}{\Delta} t\right) c_{e,n}(0) |e, n\rangle + \exp\left(-i \frac{g^2 n}{\Delta} t\right) c_{g,n}(0) |g, n\rangle \right]. \quad (4.3.6)$$

Recordamos las relaciones

$$\begin{aligned} e^{i\varphi \hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a}} |e, n\rangle &= e^{i\varphi n} |e, n\rangle \\ e^{i\varphi \hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a}} |g, n\rangle &= e^{-i\varphi n} |g, n\rangle \end{aligned}$$

para una fase real arbitraria φ . Además vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + \mathbf{1})|e\rangle &= |e\rangle \\ \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + \mathbf{1})|g\rangle &= 0, \end{aligned}$$

con lo que reescribimos la función de onda como

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &\approx \exp\left\{\frac{1}{\hbar} \frac{\hbar g^2}{\Delta} \left[\hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + \mathbf{1})\right] t\right\} \sum_{n=0}^{\infty} [c_{e,n}(0) |e, n\rangle + c_{g,n}(0) |g, n\rangle] \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{\text{eff}} t\right) |\psi(0)\rangle. \end{aligned}$$

En la expresión anterior introducimos el *Hamiltoniano efectivo*

$$\hat{H}_{\text{eff}} \equiv -\frac{\hbar g^2}{\Delta} \left[\hat{\sigma}_z \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z + \mathbf{1})\right]. \quad (4.3.7)$$

Cuando alcanzamos una desintonía muy alta, la dinámica del modelo de Jaynes-Cummings queda descrita por el Hamiltoniano efectivo (4.3.7). Esta dinámica conserva la estadística de los fotones y la población atómica. En realidad sólo introduce los cambios de fase

$$\varphi_n^{(e)}(t) \equiv \frac{g^2(n+1)}{\Delta} t$$

y

$$\varphi_n^{(g)}(t) \equiv \frac{g^2 n}{\Delta} t$$

en los vectores de estado $|e, n\rangle$ y $|g, n\rangle$.

La función de onda (4.3.6) puede ser expresada en términos de los cambios de fase y, recordando que $c_{e,n}(0) = w_n C_e$ y $c_{g,n}(0) = w_n C_g$, entonces obtenemos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \left(e^{i\varphi_n^{(e)}(t)} C_e |e\rangle + e^{-i\varphi_n^{(g)}(t)} C_g |g\rangle \right) |n\rangle. \quad (4.3.8)$$

Es importante destacar que los cambios de fase $\varphi_n^{(e)}(t)$ y $\varphi_n^{(g)}(t)$, los cuales dependen del número de fotones, son diferentes para el estado excitado y para el estado base. Además, los estados atómicos no se factorizan del estado del campo, es decir, el Hamiltoniano efectivo, el cual no provoca transición alguna en el sistema, crea un *entrelazamiento* entre los estados atómicos y del campo.

En pocas palabras, a lo largo de este capítulo, estudiamos la forma de interacción más sencilla entre radiación-materia, dada por el modelo de Jaynes-Cummings. Éste describe la interacción entre un campo electromagnético de un modo confinado en una cavidad y un átomo de dos niveles. El intercambio energético entre el campo y el átomo, provoca el comportamiento oscilatorio de las poblaciones (oscilaciones de Rabi) y la superposición de estados (estados vestidos). Además, el tratamiento puramente cuántico de la interacción átomo-campo nos permitió analizar el fenómeno de colapso y resurgimiento, el cual proviene de las características cuánticas del campo.

Al poderse obtener una solución exacta, dicho modelo funciona como una herramienta básica en el estudio de la óptica cuántica. Además, su influencia

es notoria en el estudio de la electrodinámica cuántica y fue fundamental en la investigación de átomos ultra-fríos, así como en información cuántica.

Al contar ya con las bases del modelo de Jaynes-Cummings, en el capítulo siguiente estudiaremos sus generalizaciones, es decir, analizaremos los modelos de Dicke y de Tavis-Cummings.

5 El Modelo de Dicke: Una Generalización de N Átomos de Jaynes-Cummings

En la teoría de radiación, un átomo cuenta con una probabilidad de permanecer excitado que decae exponencialmente con el tiempo. Es decir, un gas de átomos diluido, preparados inicialmente en el nivel energético superior de una transición electrónica, decaen, por la emisión espontánea de luz, hacia niveles inferiores de energía. Esto se lleva a cabo de acuerdo a un proceso en donde los átomos interactúan independientemente unos de otros con el campo de radiación desencadenando la emisión de radiación incoherente, cuya tasa es proporcional al número de átomos N .

La descripción anterior es válida si la distancia interatómica es grande, es decir, cuando se ignora la interacción dipolo-dipolo y al campo como mediador de la interacción entre los átomos. En este capítulo, analizaremos el resultado fundamental de *superradiancia* en el modelo de Dicke [2]: una colección de átomos acoplada a, y por, un campo electromagnético común, contará con una emisión de radiación cuya intensidad máxima será proporcional a N^2 . R.H. Dicke en 1954 calculó la tasa de radiación emitida espontáneamente por un sistema atómico de dos niveles. Al considerar la colección atómica como un solo sistema cuántico, Dicke encontró que en ciertas condiciones los átomos pueden radiar de forma *cooperativa* con una tasa proporcional al cuadrado del número de átomos. Así, esta radiación se vuelve sensiblemente mayor y más rápida que la emisión de los átomos independientes. A este fenómeno se le conoce como superradiancia y se le atribuye a la interacción *coherente* de los dipolos atómicos con el medio.

El interés por el modelo de Dicke adquirió mayor auge debido a la habilidad de manipular átomos individuales y fotones en una cavidad. Además,

la transición de fase reportada a inicios de 1970 por Wang y Hioe [5] y Hepp y Lieb [9,10] también provocó un renovado interés por este modelo.

La descripción del modelo de Dicke es, en sí, una generalización del modelo de Jaynes-Cummings, analizado en el capítulo anterior. Este sistema está compuesto por N átomos interactuando cooperativamente con un modo del campo de radiación. La esencia del comportamiento cooperativo se basa en que los dipolos atómicos interactúan con el mismo modo del campo.

El presente capítulo tiene como objetivo analizar los principales resultados obtenidos por R.H. Dicke y su análisis en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$. Para lograrlo definiremos los estados de Dicke y los operadores atómicos colectivos, que nos servirán posteriormente para estudiar el espectro de energía de este modelo. Después realizaremos el análisis en el límite termodinámico siguiendo el texto de Wang y Hioe e incluiremos una breve discusión sobre la importancia del término \mathbf{A}^2 .

5.1 El Hamiltoniano de Dicke en la Aproximación de Onda Rotante

El Hamiltoniano que describe la interacción entre radiación y materia puede escribirse en dos formas equivalentes [11]. Una está asociada a la expansión multipolar

$$H_M = \sum_{\alpha} \left(\frac{\mathbf{p}_{\alpha}^2}{2m} + V(r_{\alpha}) \right) - e \sum_{\alpha} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3\mathbf{r}, \quad (5.1.1)$$

donde el primer término describe el campo atómico, el segundo la interacción dipolar con el campo eléctrico y el último la energía del campo de radiación. Otra forma de escribir dicho Hamiltoniano está relacionado con la norma de Coulomb ⁵

⁵En la literatura también se le conoce como norma de radiación.

$$H_R = \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m} + V(r_\alpha) - \frac{e}{mc} \sum_\alpha (\mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{A}) + \frac{e^2 \mathbf{A}^2}{2mc^2} + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3\mathbf{r}, \quad (5.1.2)$$

donde se consideró la aproximación de onda larga⁶. Además, la expresión (5.1.2) contiene el término *diamagnético*, que incluye el valor \mathbf{A}^2 . Ambas expresiones (5.1.1 - 5.1.2) están relacionadas mediante la transformación unitaria de norma [11,12]

$$U = \exp \left[i \frac{e}{\hbar c} \sum_{s=1}^N \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{A} \right],$$

es decir, ambos Hamiltonianos representan las mismas predicciones físicas al tratarse correctamente.

Sin embargo, si al sistema atómico lo restringimos únicamente a sus dos niveles de energía más bajos (aproximación de dos niveles), el Hamiltoniano (5.1.1) da lugar al Modelo de Dicke [2]. Dicho Hamiltoniano describe la interacción colectiva de un modo de radiación de frecuencia ω_F con una sola transición, entre los niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ (de frecuencia ω_0), en un sistema de N átomos idénticos de dos niveles, localizados en una cavidad en la aproximación dipolar. Así, el Hamiltoniano del sistema puede ser escrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega_F \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^j + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{\sigma}_+^j + \hat{\sigma}_-^j), \quad (5.1.3)$$

donde ω_F es la frecuencia del campo, $\hbar\omega_0$ representa la energía de separación atómica, y \hat{a}^\dagger y \hat{a} denotan los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, de una excitación del campo de un modo. Por otro lado, $\hat{\sigma}_z^j$ es el

⁶En óptica cuántica frecuentemente se considera la variación espacial del campo en contraste con las dimensiones del sistema atómico como despreciable; ésta es la llamada *aproximación de onda larga*, también conocida como *aproximación dipolar*.

operador j -ésimo de la población atómica relativa; $\hat{\sigma}_+^j$ y $\hat{\sigma}_-^j$ los operadores de transición del j -ésimo átomo, y γ la constante de acoplamiento. En contraste con lo anterior, la aproximación de dos niveles de (5.1.2) da lugar a un Hamiltoniano distinto, que contiene el término diamagnético y, además, no es equivalente en términos de norma a (5.1.3) [13].

Si ahora expresamos (5.1.3) como

$$\hat{H} = \omega_F \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^j + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^j + \hat{a} \hat{\sigma}_+^j) + \sum_{j=1}^N \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+^j + \hat{a} \hat{\sigma}_-^j),$$

donde $\hbar = 1$, es posible observar que el tercer y cuarto término corresponden al término *rotante* y al *contrarrotante* del Hamiltoniano de interacción, respectivamente. Por el análisis realizado en el capítulo anterior, sabemos que en cercana resonancia ($\omega_F \approx \omega_0$) los términos rotantes varían rápidamente en una escala de tiempo de $1/\omega_F$ y con un promedio cercano a cero. Por lo anterior, se hace la aproximación de onda rotante (RWA). Mediante esta aproximación el Hamiltoniano anterior toma la siguiente expresión

$$\hat{H}_{TC} = \omega_F \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{S}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+), \quad (5.1.4)$$

a la cual se le conoce como el Hamiltoniano de Tavis-Cummings [3]. Además, la acción de estos operadores se efectúa sobre una muestra de átomos indistinguibles. Dada la indistinguibilidad de los átomos en el modelo de Dicke, en la siguiente sección nos encargaremos de presentar los operadores atómicos colectivos, \hat{S}_\pm y \hat{S}_z , con lo que justificaremos la expresión del Hamiltoniano anterior.

5.1.1 Estados de Dicke y operadores atómicos

Muchos problemas en la óptica cuántica están relacionados con la interacción entre un sistema atómico de dos niveles y un campo electromagnético. Su

estudio necesariamente está ligado a una selección de estados cuánticos para lograr una descripción del átomo y del campo, asunto que trataremos a continuación.

En un sistema de N átomos de dos niveles, al átomo j -ésimo en el estado base se le denota $|g_j\rangle$ y al excitado $|e_j\rangle$. Un operador actuando en este sistema puede ser expresado en términos del conjunto de matrices de Pauli $\sigma_x^j, \sigma_y^j, \sigma_z^j$ y la matriz identidad, donde el superíndice indica su acción sobre el átomo j -ésimo. Al restringir el sistema atómico a sólo dos niveles, éste puede ser descrito como un sistema de espín- $\frac{1}{2}$, cuyos operadores de ascenso y descenso están dados por

$$\hat{\sigma}_{\pm}^j = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x^j \pm i\hat{\sigma}_y^j),$$

los cuales satisfacen las reglas de conmutación siguientes

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_z^j, \hat{\sigma}_{\pm}^j] &= \pm 2\hat{\sigma}_{\pm}^j, \\ [\hat{\sigma}_+^j, \hat{\sigma}_-^j] &= \hat{\sigma}_z^j, \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

donde los estados $|g_j\rangle$ y $|e_j\rangle$ son eigenestados de $\hat{\sigma}_z^j$.

De las expresiones anteriores, definimos los operadores atómicos colectivos como

$$\begin{aligned} \hat{J}_{\mu} &= \frac{1}{2} \sum_j^N \hat{\sigma}_{\mu}^j \quad (\mu = x, y, z) \\ \hat{J}_{\pm} &= \sum_j^N \hat{\sigma}_{\pm}^j, \\ \mathbf{J}^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \end{aligned}$$

El espacio de Hilbert correspondiente a la muestra de N átomos está

generado por el conjunto de 2^N estados producto

$$|\phi_{1\dots N}\rangle = \bigotimes_{j=1}^N |\psi_j\rangle, \quad (\psi = e, g). \quad (5.1.6)$$

En particular, si nuestro sistema está compuesto por N átomos excitados, entonces tendríamos

$$|+\rangle = \bigotimes_{j=1}^N |e_j\rangle = |e, e, \dots, e\rangle,$$

que corresponde al eigenvalor no degenerado $N/2$.

Estados con un átomo en el estado base, por ejemplo, $|e, e, \dots, e, g, e\rangle$, corresponden a un conjunto de N estados degenerados, cuyo eigenvalor es $N/2 - 1$. Una observación similar le corresponde a estados con n_+ átomos en el estado excitado y n_- en el estado base, los cuales tienen una degeneración dada por $\frac{N!}{n_+!n_-!}$ y cuentan con un eigenvalor $m = \frac{n_+ - n_-}{2}$. Para remover dicha degeneración notamos que el problema considerado es equivalente al problema del momento angular. Así, a partir de las reglas de conmutación (5.1.5), vemos que los operadores \hat{J}_μ obedecen las mismas reglas de conmutación que los del momento angular, es decir,

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z.$$

Además, podemos expresar los operadores de ascenso y descenso de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ &\equiv \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \\ \hat{J}_- &\equiv \hat{J}_x - i\hat{J}_y, \end{aligned}$$

que obedecen lo siguiente

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}^2, \hat{J}_\pm] &= [\mathbf{J}^2, \hat{J}_z] = 0, \\
 [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] &= \pm \hbar \hat{J}_\pm, \\
 [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2\hbar \hat{J}_z.
 \end{aligned}
 \tag{5.1.7}$$

Tomando en cuenta lo anterior, llamaremos momento angular total (o simplemente momento angular) a la suma de las contribuciones del momento angular orbital $\hat{\mathbf{L}}$ y espinorial $\hat{\mathbf{S}}$:

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}.$$

Una posible base para los estados de (5.1.6) son los eigenestados de \hat{J}_z . Un eigenestado de \mathbf{J}^2 y \hat{J}_z se escribe como $|j, m\rangle$, donde j es el momento angular (total) y m la proyección z del momento angular, donde las ecuaciones de eigenvalores tienen la siguiente expresión⁷

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}^2|j, m\rangle &= \hbar j(j+1)|j, m\rangle, \\
 \hat{J}_z|j, m\rangle &= \hbar m|j, m\rangle.
 \end{aligned}$$

A los eigenestados $|j, m\rangle$ se les conoce como *estados de Dicke* y se han utilizado en el estudio de la superradiancia. Además, estos estados, que en realidad son los estados de momento angular, están definidos como los eigenestados de \hat{J}_z :

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2\hbar} (\hat{J}_+ \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+).$$

De los resultados anteriores, es posible expresar \mathbf{J}^2 como

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2} (\hat{J}_+ \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_z^2.$$

⁷Se acostumbra hablar de la magnitud del momento angular en unidades $\hbar = 1$; por ejemplo, el momento angular $\hbar l$ se lee como momento angular l .

Incluso, utilizando la expresión anterior y las relaciones de conmutación (5.1.7), podemos mostrar [14] que j y m cumplen

$$-j \leq m \leq j.$$

Finalmente, la acción de los operadores de momento angular sobre los estados de Dicke es

$$\begin{aligned}\hat{J}_z|j, m\rangle &= \hbar m|j, m\rangle, \\ \hat{J}_+|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j, m+1\rangle, \\ \hat{J}_-|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle,\end{aligned}$$

y sus respectivos elementos de matriz son

$$\begin{aligned}\langle j, m|\hat{J}_z|j', m'\rangle &= \hbar m \delta_{j,j'} \delta_{m,m'}, \\ \langle j, m|\hat{J}_\pm|j', m'\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m'(m' \pm 1)}\delta_{j,j'}\delta_{m,m' \pm 1},\end{aligned}$$

resultados que se demuestran en [14, 15].

Nuestro análisis siguiente se centrará en la situación en donde el momento angular estará determinado únicamente por la contribución espinorial $\hat{\mathbf{S}}$, es decir, cuando $\hat{\mathbf{L}} = 0$. Esto provoca que $|j, m\rangle = |s, m_s\rangle$ y consecuentemente que $\hat{J}_\mu \rightarrow \hat{S}_\mu$, justificando con esto la notación de la expresión (5.1.4) escrita en la sección anterior.

5.2 Eigenestructura

5.2.1 Modelo de Dicke de Dos Átomos

Análisis Atómico

El caso más sencillo del Modelo de Dicke es el de dos átomos. Comenzaremos el análisis ignorando la interacción entre el sistema atómico y el campo de

radiación. Así, reduciremos momentáneamente el estudio al término del Hamiltoniano $\frac{1}{2}\omega_0\hat{S}_z$ para los átomos. En esta situación la energía del estado base está dado por $-\frac{1}{4}S\omega_0$, donde S es el espín total del sistema, el cual, en este caso, es $S = 1$. Además, el número de estados de espín está determinado por $\xi(S) = 2S + 1$.

Por lo anterior, el sistema de dos átomos de Dicke puede tener espín total $S = 1$ (estado superradiante) o espín total $S = 0$ (estado sub-radiante). La denotación de los prefijos *super* y *sub* alude a la tasa de radiación del sistema de Dicke si éste se acopla con un campo electromagnético. En una base de espín $|s, m_s\rangle$ tendríamos

1. Estado Superradiante; $S = 1$

- (a) Iniciamos con la única combinación posible para $|s = 1, m_s = 1\rangle$, es decir,

$$|1, 1\rangle = |e_1, e_2\rangle \quad (5.2.1)$$

- (b) Aplicando el operador de descenso al estado (5.2.1) obtenemos

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1, e_2\rangle + |e_1, g_2\rangle). \quad (5.2.2)$$

- (c) Análogamente haciendo actuar \hat{S}_- sobre el estado anterior logramos

$$|1, -1\rangle = |g_1, g_2\rangle.$$

2. Estado Sub-radiante; $S = 0$

- (a) Como el estado $|s = 0, m_s = 0\rangle$ debe ser ortogonal a (5.2.2) y la única opción es una combinación lineal de $|e_1, g_2\rangle$ y $|g_1, e_2\rangle$,

entonces escribimos

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g_1, e_2\rangle - |e_1, g_2\rangle).$$

Por otro lado, la degeneración de los estados de Dicke está dada, para $N \geq 2$ y $S \leq \frac{N}{2}$, por [16]

$$g(S) = \frac{N!(2S+1)}{(\frac{N}{2}+S+1)!(\frac{N}{2}-S)!}.$$

Consideraremos que el valor máximo de espín del sistema es $S = \frac{N}{2}$. Incluso, como $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$ conmuta, por las reglas (5.1.7), con el término atómico del Hamiltoniano de Dicke (5.1.4), entonces el valor del espín se conserva.

Análisis Completo

Proseguiremos ahora recuperando el estudio del Hamiltoniano completo (5.1.4). Para encontrar sus eigenestados definimos el número de excitación,

$$\hat{M} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{S}_z.$$

y calculamos su conmutador con el Hamiltoniano (5.1.4),

$$\begin{aligned} [\hat{M}, \hat{H}] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{H}] + [\hat{S}_z, \hat{H}] \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left([\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a} \hat{S}_+] + [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{S}_-] + [\hat{S}_z, \hat{a}^\dagger \hat{S}_-] + [\hat{S}_z, \hat{a} \hat{S}_+] \right) \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left(-\hat{a} \hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{S}_- - \hat{a}^\dagger \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+ \right) \\ \Rightarrow [\hat{M}, \hat{H}] &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad en la expresión anterior contiene los términos contrarrotantes, los cuales se anulan debido a la aproximación de onda rotante

(RWA). Además, dicha expresión muestra que el valor del número de excitación es constante, cuyo valor denotaremos por η .

Ahora, proponemos una superposición del estado de Dicke $|j, m\rangle$ y un estado de número $|n\rangle$ para el campo, para encontrar los eigenvalores de \hat{H} . Lo anterior se realiza con el objetivo de mantener el número de excitación como una constante de valor η . Particularmente, en caso de resonancia, $\omega_0 = \omega_F$, encontramos que los eigenestados son

$$\begin{aligned} |n, 0\rangle &= \sqrt{\frac{\eta+1}{2\eta+1}}|1, 1\rangle|n-1\rangle - \sqrt{\frac{\eta}{2\eta+1}}|1, -1\rangle|n+1\rangle \\ |n, \pm 1\rangle &= \sqrt{\frac{\eta}{2(2\eta+1)}}|1, 1\rangle|n-1\rangle + \sqrt{\frac{\eta+1}{2(2\eta+1)}}|1, -1\rangle|n+1\rangle \\ &\pm \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle|n\rangle. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Ahora, para obtener los eigenvalores de los eigenestados (5.2.3) debemos calcular la acción del Hamiltoniano (5.1.4) para $N = 2$ ($H_{N=2}$) sobre los eigenestados $|n, 0\rangle$ y $|n, \pm 1\rangle$, donde

$$\begin{aligned} \hat{H}_{N=2} &= \omega_0 \hat{M} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+) \\ &= \omega_0 \hat{M} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger [\sigma_-^1 + \sigma_-^2] + \hat{a} [\sigma_+^1 + \sigma_+^2]). \end{aligned}$$

Finalmente, el cálculo descrito anteriormente es

$$\begin{aligned} \hat{H}_{N=2}|n, 0\rangle &= \hat{H}_{N=2} \left(\sqrt{\frac{\eta+1}{2\eta+1}}|1, 1\rangle|n-1\rangle - \sqrt{\frac{\eta}{2\eta+1}}|1, -1\rangle|n+1\rangle \right) \\ &= \omega_0 \hat{M} \left(\sqrt{\frac{\eta+1}{2\eta+1}}|1, 1\rangle|n-1\rangle - \sqrt{\frac{\eta}{2\eta+1}}|1, -1\rangle|n+1\rangle \right) \\ &= \omega_0 \left([(\eta-1)+1] \sqrt{\frac{\eta+1}{2\eta+1}}|1, 1\rangle|n-1\rangle \right) \\ &\quad + \omega_0 \left([1-(\eta+1)] \sqrt{\frac{\eta}{2\eta+1}}|1, -1\rangle|n+1\rangle \right) \\ &= \eta \omega_0 |n, 0\rangle, \end{aligned}$$

dato que $\frac{\gamma}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+) |n, 0\rangle = 0$.

Procedemos análogamente para los eigenestados $|n, \pm 1\rangle$ y obtenemos, para el operador \hat{M} , que

$$\hat{M}|n, \pm 1\rangle = \eta \omega_0 |n, \pm 1\rangle. \quad (5.2.4)$$

Continuamos ahora con el término que describe la interacción

$$\begin{aligned} & (\hat{a}^\dagger \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+) |n, \pm 1\rangle \\ &= 2\sqrt{\eta + \frac{1}{2}} \left\{ \pm \frac{\eta}{2(2\eta + 1)} (|e_1, g_2, n\rangle + |g_1, e_2, n\rangle) + \sqrt{\frac{\eta + 1}{2(2\eta + 1)}} |g_1, g_2, n + 1\rangle \right\} \\ &+ 2\sqrt{\eta + \frac{1}{2}} \left\{ \pm \frac{\eta + 1}{2(2\eta + 1)} (|e_1, g_2, n\rangle + |g_1, e_2, n\rangle) + \sqrt{\frac{\eta}{2(2\eta + 1)}} |e_1, e_2, n - 1\rangle \right\} \\ &= 2\sqrt{\eta + \frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\eta}{2(2\eta + 1)}} |e_1, e_2, n - 1\rangle + \sqrt{\frac{\eta + 1}{2(2\eta + 1)}} |g_1, g_2, n + 1\rangle \right\} \\ &+ 2\sqrt{\eta + \frac{1}{2}} \left\{ \pm \frac{1}{2} (|e_1, g_2, n\rangle + |g_1, e_2, n\rangle) \right\} \\ &= 2\sqrt{\eta + \frac{1}{2}} |n, \pm 1\rangle, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+) |n, \pm 1\rangle = \gamma \sqrt{2\eta + 1} |n, \pm 1\rangle \quad (5.2.5)$$

Sumando (5.2.4) y (5.2.5) logramos obtener los eigenvalores de $|n, \pm 1\rangle$, los cuales son

$$\eta \omega_0 \pm \gamma \sqrt{2\eta + 1}.$$

El espectro de eigenvalores es una sucesión de tripletes excepto para $\eta = 1$ (doblete) y para $\eta = 0$ (singulete). La Figura 12 muestra lo anterior para diferentes números de excitación.

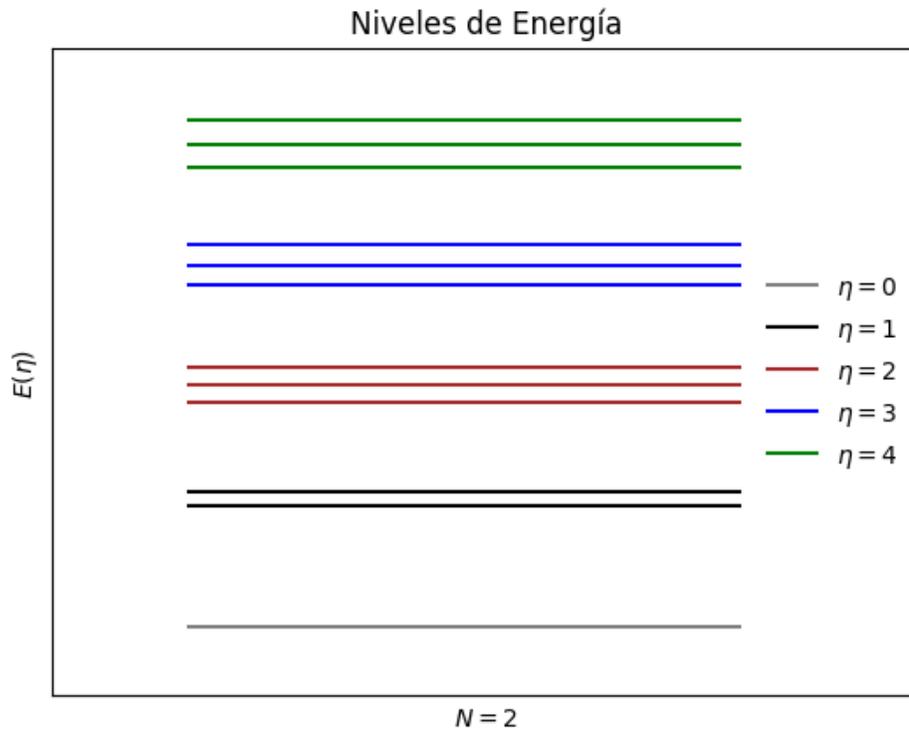


Figura 12: Diagrama de los niveles de energía del Hamiltoniano de Dicke en resonancia. Los niveles de energía se muestran en función del número de excitación η y para el caso de dos átomos ($N = 2$).

Por otro lado, la evolución del modelo de Dicke para $N = 2$ presenta el mismo comportamiento de colapso y resurgimiento, característica puramente cuántica del modelo. Nuevamente, utilizando JULIA y QUANTUMOPTICS.JL modelamos la evolución del modelo de Dicke de dos átomos⁸, la cual se presenta en la siguiente Figura 13, en donde $W(t)$, la inversión atómica, está

⁸Ver Apéndice A.2

dada por

$$W(t) = \frac{1}{2} \hat{S}_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \hat{\sigma}_z^j.$$

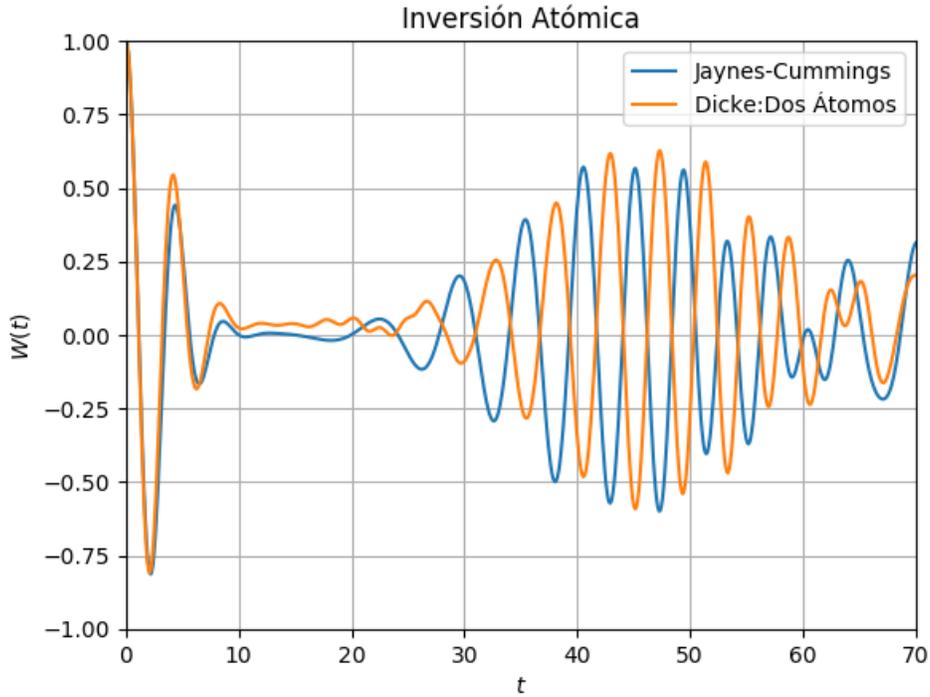


Figura 13: Inversión atómica comparativa, para el caso de un átomo (Jaynes Cummings) y dos átomos (modelo de Dicke).

5.2.2 $N > 2$ Átomos de Dicke

Para obtener los eigenvalores y proceder con el problema de diagonalización del Hamiltoniano (5.1.4) seguiremos el análisis de Narducci, Orszag y Tuft [17], quienes, con base en el estudio de Tavis y Cummings⁹, denotan a los

⁹Ellos observaron que el Hamiltoniano de Dicke con la RWA conmuta con el operador \mathbf{J}^2 y con \hat{M} . El operador \mathbf{J}^2 del momento angular mide los grados de correlación de los

eigenestados arbitrarios $|j, \eta, l\rangle$, caracterizados por el *número de cooperación*¹⁰ j y por el número de excitaciones $\eta + j$. La letra l se utilizará para etiquetar los eigenestados del multiplete (j, η) con

$$\begin{aligned} 0 \leq l \leq j + \eta, & \quad \text{para } \eta \leq j \\ 0 \leq l \leq 2j, & \quad \text{para } \eta \geq j. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de eigenvalores que debemos resolver es

$$\hat{H}|j, \eta, l\rangle = E_l^{(j, \eta, l)}|j, \eta, l\rangle, \quad (5.2.6)$$

donde \hat{H} está dado por el Hamiltoniano (5.1.4).

La representación más general de los estados $|j, \eta, l\rangle$ consiste en requerir que éstos sean eigenestados simultáneos de los operadores \mathbf{S}^2 , \hat{S}_z y \hat{H} , que consecuentemente nos lleva a la siguiente expresión

$$|j, \eta, l\rangle = \sum_{n=\max\{0, \eta-j\}}^{\eta+j} A_n^{(j, \eta, l)} |n\rangle |j, m\rangle, \quad (5.2.7)$$

donde el límite inferior de la suma es 0 si $\eta \leq j$ ó $\eta - j$ si $\eta \geq j$ y los estados $|n\rangle$ y $|j, m\rangle$ son los eigenestados de $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ y \hat{S}_z , respectivamente. Por otro lado, la labor de los coeficientes $A_n^{(j, \eta, l)}$ es caracterizar al l -ésimo eigenvector del multiplete (j, η) del Hamiltoniano.

Continuamos aplicando el Hamiltoniano (5.1.4) a los eigenestados (5.2.7) con lo que obtendremos una relación de recurrencia de los coeficientes $A_n^{(j, \eta, l)}$,

 espines individuales, mientras que el operador \hat{M} calcula las excitaciones en el sistema colectivo, cuyo eigenvalor es $\eta = n + m$ con $\hbar = 1$.

¹⁰El término número de cooperación lo introdujo Dicke [2], refiriéndose a las diferentes representaciones de $SU(2)$ utilizadas en la descripción del espacio de Hilbert del sistema. Físicamente puede ser interpretado como el número efectivo de átomos en el sistema, es decir, aquéllos que contribuyen en la energía del campo atómico.

como se observa a continuación

$$\begin{aligned}
\hat{H}|j, \eta, l\rangle &= \left[\omega_F \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{S}_z + \kappa \left(\hat{a}^\dagger \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+ \right) \right] |j, \eta, l\rangle \\
&= [\omega_F n + \nu m] A_n^{(j, \eta, l)} + \kappa \left\{ \sqrt{n} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} A_{n-1}^{(j, \eta, l)} \right\} \\
&+ \kappa \left\{ \sqrt{n+1} \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} A_{n+1}^{(j, \eta, l)} \right\} \\
&= E_l^{(j, \eta)} A_n^{(j, \eta, l)}, \tag{5.2.8}
\end{aligned}$$

donde $\nu = \frac{1}{2} \omega_0$, $\kappa = \frac{\gamma}{\sqrt{N}}$ y se cumple que

$$\begin{aligned}
0 \leq n \leq \eta + j, & \quad \text{si } \eta \leq j, \\
\eta - j \leq n \leq \eta + j, & \quad \text{si } \eta \geq j.
\end{aligned}$$

Es posible visualizar el problema de eigenvalores (5.2.8) como la ecuación matricial

$$\mathcal{H} \mathbf{A}^l = E_l \mathbf{A}^l, \tag{5.2.9}$$

donde el vector columna \mathbf{A}^l es de dimensión $(2j+1)$ con entradas $A_n^{(j, \eta, l)}$ y \mathcal{H} es una matriz tridiagonal de iguales dimensiones.

El principal problema al que nos enfrentamos es la diagonalización del Hamiltoniano, la cual se realizará en dos regiones del plano (j, η) , es decir, en las dos siguientes situaciones

$$j \ll \eta, \tag{5.2.10}$$

$$\eta = -j + p, \quad p \ll 2j. \tag{5.2.11}$$

En el primer caso (5.2.10) estamos considerando estados colectivos que contienen un alto número de excitaciones elementales. Por otro lado, en el segundo caso (5.2.11) hay un número pequeño de excitaciones en relación al número de estados de energía accesibles.

Niveles de Energía Altamente Excitados: $j \ll \eta$

En este caso, el índice n de la relación de recurrencia (5.2.8) corre sobre los $2j+1$ valores entre $\eta-j$ y $\eta+j$. Por el momento, será conveniente introducir un nuevo índice i definido por

$$n = i + \eta, \quad |i| \leq j, \quad (5.2.12)$$

al igual que una nueva etiqueta dada por $\mu = l - j$. De la definición del nuevo índice, obtenemos también que $m = \eta - n = -i$, por lo que la expresión (5.2.8) puede escribirse como

$$\begin{aligned} & [\eta + i(\omega_F - \nu)] A_i^{(j, \eta, \mu)} \\ & + \kappa [(i + \eta)(j + i)(j - i + 1)]^{\frac{1}{2}} A_{i-1}^{(j, \eta, \mu)} \\ & + \kappa [(i + \eta + 1)(j + i + 1)(j - i)]^{\frac{1}{2}} A_{i+1}^{(j, \eta, \mu)} \\ & = E_\mu A_i^{(j, \eta, \mu)}, \quad |i|, |\mu| \leq j. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Sin embargo, nos ubicamos en el caso en donde $j \ll \eta$, entonces los factores $\sqrt{\eta+i}$ y $\sqrt{\eta+i+1}$ son esencialmente constantes sobre todo el rango que abarca el índice i . Consecuentemente, podemos reemplazar la ecuación (5.2.13) por la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right) i A_i^{(j, \eta, \mu)} \\ & + \frac{\sqrt{\eta}}{2} \left\{ [(j-i)(j-i+1)]^{\frac{1}{2}} A_{i-1}^{(j, \eta, \mu)} + [(j-i)(j+i+1)]^{\frac{1}{2}} A_{i+1}^{(j, \eta, \mu)} \right\} \\ & \Rightarrow A_{i+1}^{(j, \eta, \mu)} = \left(\frac{E_\mu - \eta}{2\kappa} \right) A_i^{(j, \eta, \mu)} \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Incluso, es posible obtener (5.2.14) de manera más formal mediante la aplicación de los operadores \hat{S}_z y \hat{S}_x . Así, la ecuación anterior puede expresarse

sarse como

$$\left(\left[\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right] \hat{S}_z + \sqrt{\eta} \hat{S}_x \right) |\psi\rangle_\mu = \left(\frac{E_\mu - \eta}{2\kappa} \right) |\psi\rangle_\mu, \quad |\mu| \leq j, \quad (5.2.15)$$

donde \hat{S}_z y \hat{S}_x son los operadores de momento angular actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión $(2j+1)$ y los estados $|\psi\rangle_\mu$ son superposiciones lineales de estados que diagonalizan \hat{S}_z , esto es

$$|\psi\rangle_\mu = \sum_{i=-j}^j A_i^{(\mu)} |j, i\rangle.$$

Notamos que, para que las ecuaciones (5.2.14) y (5.2.15) sean equivalentes, es necesario hacer la aclaración que $A_i^{(\mu)} \equiv A_i^{(j, \eta, l)}$. Escribimos ahora la ecuación (5.2.15) como

$$\left(\cos \theta \hat{S}_z + \sin \theta \hat{S}_x \right) |\psi\rangle_\mu = \left(\frac{E_\mu - \eta}{2\kappa} \right) \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + \eta \right]^{-\frac{1}{2}} |\psi\rangle_\mu,$$

donde se utilizó que

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + \eta \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \sin \theta &= \sqrt{\eta} \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + \eta \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Continuamos aplicando la transformación unitaria generada por el operador de rotación $e^{i\theta \hat{S}_y}$ a $|\psi\rangle_\mu$ y definimos el estado, que resulta de su aplicación, como

$$|\psi(\theta)\rangle_\mu \equiv e^{i\theta \hat{S}_y} |\psi\rangle_\mu.$$

Finalmente obtenemos una ecuación de eigenvalores más familiar dada por

$$\hat{S}_z |\psi(\theta)\rangle_\mu = \frac{E_\mu - \eta}{2\kappa} \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + \eta \right]^{-\frac{1}{2}} |\psi(\theta)\rangle_\mu, \quad |\mu| \leq j$$

Los eigenvalores de la expresión anterior son los $(2j+1)$ valores de μ , mientras que los eigenestados $|\psi(\theta)\rangle_\mu$ son esencialmente los eigenestados del momento angular $|j, m\rangle$. Así, obtenemos la expresión de los eigenvalores

$$E_\mu^{(j, \eta)} = \eta + 2\kappa \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + \eta \right]^{\frac{1}{2}} \mu$$

$$\Rightarrow E_\mu^{(j, \eta)} = \eta + \mu \sqrt{\delta^2 + 4\kappa \eta}, \quad |\mu| \leq j, \quad (5.2.16)$$

con $\delta = \omega_F - \nu$.

Además, las entradas de la matriz correspondientes están dadas por

$$A_i^{(\mu)} = \langle j, i | e^{-i\theta \hat{S}_y} | j, \mu \rangle \equiv A_i^{(j, \eta, \mu)},$$

donde

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + \eta \right]^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.2.17)$$

con lo que completamos finalmente el problema de diagonalización para $j \ll \eta$.

Niveles de Energía de Bajas Excitaciones: $\eta = p + j, \quad p \ll 2j$

De un modo análogo procederemos ahora con el estudio de los eigenestados y eigenvalores de los estados atómicos caracterizados por un número bajo de excitaciones en relación al número de estados de energía accesibles.

Iniciaremos retomando la expresión (5.2.8) y tomando en cuenta que la dimensión del espacio en este caso es $\eta + j + 1 = p + 1$. Introducimos ahora los nuevos índices

$$i = n - \frac{1}{2}, \quad |i| \leq \frac{1}{2}p,$$

$$\mu = l - \frac{1}{2}, \quad |\mu| \leq \frac{1}{2}p.$$

Reescribimos la ecuación (5.2.8), utilizando que $m = \eta - n$, como

$$\begin{aligned} [n\omega_F + \nu(\eta - n)] A_n^{(j, \eta, l)} + \kappa [n(j - \eta + n)(j + \eta - n + 1)]^{\frac{1}{2}} A_{n-1}^{(j, \eta, l)} \\ + \kappa [(n + 1)(j - \eta + n + 1)(j + \eta - n)]^{\frac{1}{2}} A_{n+1}^{(j, \eta, l)} \\ = E_l^{(j, l)} A_n^{(j, \eta, l)}, \end{aligned}$$

que nos facilitará hacer las sustituciones pertinentes. Ahora podemos escribir la relación de recurrencia como

$$\begin{aligned} \left[\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right] i A_n^{(j, \eta, \mu)} + \frac{1}{2} \left[(i + \frac{1}{2}p)(2j - \frac{1}{2}p + i)(\frac{1}{2}p - i + 1) \right]^{\frac{1}{2}} A_{i-1}^{(j, \eta, \mu)} \\ + \frac{1}{2} \left[(i + \frac{1}{2}p + 1)(2j - \frac{1}{2}p + i + 1)(\frac{1}{2}p - i) \right]^{\frac{1}{2}} A_{i+1}^{(j, \eta, \mu)} \\ = \frac{1}{2\kappa} \left(E_\mu + \nu j - \frac{1}{2}(\omega_F - \nu)p \right) A_i^{(j, \eta, \mu)}. \quad (5.2.18) \end{aligned}$$

Siguiendo la misma metodología que en el primer caso, restringiremos nuestra atención a los multipletes que contengan $p \ll 2j$ y notamos que los factores $\sqrt{2j - \frac{1}{2}p + i + 1}$ y $\sqrt{2j - \frac{1}{2}p + i}$ en (5.2.18) son aproximadamente constantes e iguales a $\sqrt{2j}$ para todo valor de i . Identificamos nuevamente la expresión equivalente en términos de los operadores atómicos

$$\left(\left[\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right] \hat{S}_z + \sqrt{2j} \hat{S}_x \right) |\psi\rangle_\mu = \frac{1}{2\kappa} \left(E_\mu + \nu j - \frac{1}{2}(\omega_F - \nu)p \right) |\psi\rangle_\mu, \quad (5.2.19)$$

donde los operadores actúan en un espacio de Hilbert de dimensión $(p + 1)$ generado por los eigenvectores $|\frac{1}{2}p, i\rangle$ de \hat{S}_z .

Volvemos a expresar (5.2.19) de una manera más ilustrativa mediante la acción del operador unitario de rotación $e^{i\theta\hat{S}_y}$ con

$$\cos \theta = \frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + 2j \right]^{-\frac{1}{2}},$$

obteniendo así la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\hat{S}_z |\psi(\theta)\rangle_\mu = \frac{E_\mu + \nu j - \frac{1}{2}(\omega_F - \nu)p}{2\kappa} \left[\left(\frac{\omega_F - \nu}{2\kappa} \right)^2 + 2j \right]^{-\frac{1}{2}} |\psi(\theta)\rangle_\mu.$$

De este modo concluimos que los eigenvalores de energía están dados por

$$E_\mu^{(j,\eta)} = \frac{1}{2}(\omega_F + \nu) - \nu j + \mu \sqrt{\delta^2 + 8\kappa^2 j}, \quad |\mu| \leq \frac{1}{2},$$

donde nuevamente $\delta = \omega_F - \nu$ y los respectivos eigenvectores del multiplete (j, η) son de la forma

$$|j, \eta, l\rangle = \sum_{n=0}^{\eta+j} A_n^{(j,\eta,l)} |n\rangle |j, m\rangle,$$

con

$$A_n^{(j,\eta,l)} = \langle \frac{1}{2}p, n - \frac{1}{2}p | e^{i\theta \hat{S}_y} | \frac{1}{2}p, l - \frac{1}{2}p \rangle, \quad 0 \leq n \leq p.$$

Concluimos con la Figura 14 que ilustra esquemáticamente la eigenestructura del modelo de Dicke de distinto número N de átomos y diferentes valores del número de excitación η .

Excitaciones

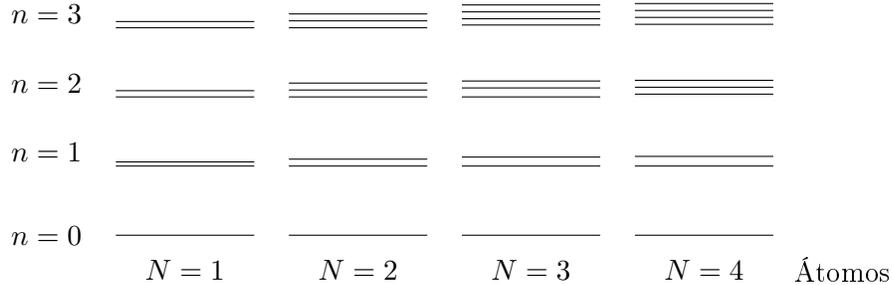


Figura 14: Ilustración de los niveles de energía del Hamiltoniano de Dicke en resonancia para distinto número de átomos N y valores de excitación η .

5.3 Análisis Termodinámico

En esta sección, una vez establecido el modelo, mostraremos cómo surge una transición de fase en el modelo para temperaturas distintas de cero. Aquí consideraremos la interacción entre el campo eléctrico común, que introduce un orden en el sistema, y las fluctuaciones térmicas del ambiente, que desorganizan al sistema. Veremos que a bajas temperaturas el sistema atómico es capaz de auto-organizarse y de actuar colectivamente provocando el surgimiento de una fase superradiante. Además, al final de la sección, presentamos una breve discusión sobre el particular papel que desempeña el término \mathbf{A}^2 en la transición de fase de Dicke.

5.3.1 Transición de Fase para T finita

En esta sección analizaremos cómo surge la transición de fase en el modelo de Dicke, cuya descripción se realizó en las secciones anteriores, para temperaturas distintas de cero. A continuación seguiremos el análisis termodinámico elaborado por Wang y Hioe [5] para el Hamiltoniano de Dicke en la RWA (5.1.4). Retomamos el Hamiltoniano del modelo

$$H = \omega_F \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z^j + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^j + \hat{a} \hat{\sigma}_+^j) \right], \quad (5.3.1)$$

donde $\hbar = 1$ y se recuperó la notación explícita con los operadores atómicos individuales.

Para proceder con el análisis termodinámico, utilizaremos la función de partición canónica $Z(N, T)$:

$$Z(N, T) = \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} \right] \quad ; \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (5.3.2)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. Para calcular la traza de la función de partición utilizaremos como base los estados coherentes $|\alpha\rangle$ de Glauber

[18], cuyas propiedades se presentaron en el capítulo segundo. Por lo tanto, utilizaremos las bases $\{|\alpha\rangle\}$ y $\{\otimes_{i=1}^N |\epsilon_i\rangle\}$, para el campo y el sistema atómico, respectivamente. En la base atómica, $|\epsilon_i\rangle$ es el eigenvector de $\hat{\sigma}_z^i$ del i -ésimo átomo con eigenvalores $\epsilon_i = \pm 1$. Ahora, escribimos la función de partición como

$$Z(N, T) = \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \langle \alpha | e^{-\beta \hat{H}} | \alpha \rangle | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle, \quad (5.3.3)$$

donde $\int d^2\alpha = \int \int d(\text{Re } \alpha) d(\text{Im } \alpha)$.

Para resolver la integral (5.3.3) es necesario introducir los operadores

$$\begin{aligned} \hat{b}^\dagger &:= \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{N}}, \\ \hat{b} &:= \frac{\hat{a}}{\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

los cuales satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \frac{1}{N}. \quad (5.3.4)$$

De esta forma podemos reescribir el Hamiltoniano (5.3.1), en términos de estos nuevos operadores, como

$$\hat{H}_N = \sum_{j=1}^N \left[\omega_F \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z^j + \gamma (\hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_-^j + \hat{b} \hat{\sigma}_+^j) \right].$$

Nuestra intención es mostrar que los operadores del campo en $e^{-\beta \hat{H}_N}$ pueden ser reemplazados por los mismos operadores dispuestos en el orden antinormal¹¹ y para ello utilizamos que

$$e^{-\beta \hat{H}_N} = \sum_r \frac{(-\beta \hat{H}_N)^r}{r!}.$$

¹¹El valor esperado de cualquier operador en el orden antinormal está dado por

$$\langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^r (\hat{a})^s | \alpha \rangle = (\alpha^*)^r (\alpha)^s.$$

Normalmente los operadores del campo aparecen en la forma $\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{b} \dots \hat{b}^\dagger \hat{b}$, pero se pueden acomodar como

$$\begin{aligned}
\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger \hat{b} &= \hat{b}^\dagger \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{N} \right)^2 \hat{b} \\
&= \hat{b}^\dagger \left[\hat{b}^\dagger \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} \right) \hat{b} \right] \hat{b} + \left\{ \frac{2}{N} \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} + \frac{1}{N^2} \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\} \\
&= \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \left[\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{N} \right] \hat{b} \hat{b} + \left\{ \frac{2}{N} \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} + \frac{1}{N^2} \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\} \\
&= \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b} \hat{b} + \frac{3}{N} \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger + \frac{1}{N^2} \hat{b}^\dagger \hat{b},
\end{aligned}$$

de donde se percibe que cada intercambio de \hat{b} y \hat{b}^\dagger introduce un término $\frac{1}{N}$ extra, debido a la relación de conmutación (5.3.4). Si tomamos el límite termodinámico, donde $N \rightarrow \infty$, entonces podemos ignorar todos los términos del orden $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$. Con el argumento anterior, escribimos

$$\langle \alpha | \hat{H}^r | \alpha \rangle \simeq (\langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle)^r = \left[\omega_F \alpha^* \alpha + \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z^j + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\alpha^* \hat{\sigma}_-^j + \alpha \hat{\sigma}_+^j) \right] \right]^r$$

y finalmente expresamos los elementos de matriz

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | e^{-\beta \hat{H}} | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \sum_r \frac{(-\beta \hat{H})^r}{r!} | \alpha \rangle \\
&= \exp \left[-\beta \left(\omega_F \alpha^* \alpha + \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z^j + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\alpha^* \hat{\sigma}_-^j + \alpha \hat{\sigma}_+^j) \right] \right) \right].
\end{aligned}$$

De la expresión anterior, es posible hacer la siguiente sustitución

$$h_j = \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z^j + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\alpha^* \hat{\sigma}_-^j + \alpha \hat{\sigma}_+^j),$$

con la cual el argumento de la exponencial se simplifica y facilita el integrando

de (5.3.3) al escribirlo como

$$\begin{aligned}
& \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \langle \alpha | e^{-\beta \hat{H}} | \alpha \rangle | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle \\
&= e^{-\beta \omega_F |\alpha|^2} \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \exp \left[-\beta \sum_{j=1}^N h_j \right] | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle \\
&= e^{-\beta \omega_F |\alpha|^2} \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_N | \prod_{j=1}^N e^{-\beta h_j} | \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \rangle \\
&= \bigotimes_{i=1}^N e^{-\beta \omega_F |\alpha|^2} \prod_{j=1}^N \langle \epsilon_i | e^{-\beta h_j} | \epsilon_i \rangle.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, podemos expresar la función de partición como

$$\begin{aligned}
Z(N, T) &= \bigotimes_{i=1}^N \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{-\beta \omega_F |\alpha|^2} \left(\prod_{j=1}^N \langle \epsilon_i | e^{-\beta h_j} | \epsilon_i \rangle \right) \\
&= \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{-\beta \omega_F |\alpha|^2} \left(\langle \epsilon_i | e^{-\beta h} | \epsilon_i \rangle \right)^N \\
&= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{-\beta \omega_F |\alpha|^2} \left(\langle +1 | e^{-\beta h} | +1 \rangle + \langle -1 | e^{-\beta h} | -1 \rangle \right)^N \\
&= \int \frac{d^2 \alpha}{\pi} e^{-\beta \omega_F |\alpha|^2} \left[\text{Tr}(e^{-\beta h}) \right]^N \tag{5.3.5}
\end{aligned}$$

con $h = \frac{1}{2} \omega_0 \hat{\sigma}^z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\alpha^* \hat{\sigma}_- + \alpha \hat{\sigma}_+)$. Así, la expresión matricial de h es

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \omega_0 & \frac{2\gamma}{\sqrt{N}} \alpha \\ \frac{2\gamma}{\sqrt{N}} \alpha^* & -\frac{1}{2} \omega_0 \end{pmatrix},$$

cuyos eigenvalores son

$$\lambda = \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{16\gamma^2 |\alpha|^2}{\omega_0^2 N} \right)}. \tag{5.3.6}$$

Sustituyendo los eigenvalores anteriores en (5.3.5) escribimos la siguiente

integral ¹²

$$\begin{aligned}
Z(N, T) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta\omega_F|\alpha|^2} (e^{-\beta\lambda} + e^{\beta\lambda})^N \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\beta\omega_F|\alpha|^2} \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2|\alpha|^2}{\omega_0^2 N}} \right) \right]^N \\
&= 2 \int_0^\infty dr e^{-\beta\omega_F r^2} \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2 r^2}{\omega_0^2 N}} \right) \right]^N. \quad (5.3.7)
\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $y = \frac{r^2}{N}$ para obtener

$$\begin{aligned}
Z(N, T) &= N \int_0^\infty dy e^{-\beta\omega_F Ny} \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right) \right]^N \\
&= N \int_0^\infty dy \exp[-\beta\omega_F Ny] \exp \left\{ N \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right) \right] \right\} \\
&= N \int_0^\infty dy \exp \left\{ N \left(-\beta\omega_F y + \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right) \right] \right) \right\} \\
&\hspace{15em} (5.3.8)
\end{aligned}$$

y al utilizar el método de Laplace [19] la integral (5.3.8) puede escribirse como

$$Z(N, T) = N \frac{C}{\sqrt{N}} \max_{0 \leq y < \infty} \exp \left\{ N \left(-\beta\omega_F y + \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right) \right] \right) \right\}.$$

El análisis previo nos permite estudiar el caso particular sin interacción ($\gamma = 0$), donde la función de partición canónica tiene la siguiente expresión

$$Z_{\gamma=0} = \frac{1}{\omega_F} \left(2 \cosh \left(\frac{1}{2} \omega_0 \beta \right) \right)^N.$$

¹²Para lograr evaluar (5.3.7) utilizamos que

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2 \int_0^\infty r dr$$

En esta situación, la energía libre por partícula está dada por

$$f = -\beta \ln(Z_{\gamma=0}) = -k_B T \ln \left(2 \cosh \left(\frac{1}{2} \omega_0 \beta \right) \right). \quad (5.3.9)$$

Para continuar con nuestro análisis recordamos la expresión (5.3.8) y definimos la función $\xi(y)$

$$\xi(y) = -\beta \omega_F y + \ln \left(2 \cosh \left[\frac{\beta \omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right] \right). \quad (5.3.10)$$

El cálculo de sus puntos críticos requiere evaluar primero su derivada

$$\xi'(y) = -\beta \omega_F + \tanh \left[\frac{\beta \omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right] \left(\frac{4\beta\gamma^2}{\omega_0} \right) \left(1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Luego, haciendo $\xi'(y) = 0$, obtenemos la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\omega_F \omega_0}{4\gamma^2} \right) \vartheta = \tanh \left(\frac{\beta \omega_0}{2} \vartheta \right), \quad (5.3.11)$$

donde

$$\vartheta = \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \quad ; \quad 1 \leq \vartheta < \infty. \quad (5.3.12)$$

Notamos que $\tanh(x) < 1$, entonces, si $4\gamma^2 < \omega_F \omega_0$, $\xi(y)$ tendrá un máximo en $y = 0$. En este caso, la energía libre por partícula, f , es la misma que la del caso de no interacción, es decir, (5.3.9).

Por otro lado, si se cumple que $4\gamma^2 > \omega_F \omega_0$, la solución sólo dependerá del parámetro β . Por ello, definimos el parámetro β_c como la solución de la ecuación

$$\frac{\omega_F \omega_0}{4\gamma^2} = \tanh \left(\frac{1}{2} \omega_0 \beta_c \right). \quad (5.3.13)$$

Si $\beta < \beta_c$ la ecuación (5.3.11) no tiene solución en la región $1 \leq \vartheta < \infty$, por lo que obtenemos nuevamente la energía libre dada por (5.3.9).

Sin embargo, para $\beta > \beta_c$ la ecuación (5.3.11) tiene una, y sólo una, solución en la región $1 \leq \vartheta < \infty$ que está dada por

$$\frac{\omega_F \omega_0}{4\gamma^2} \vartheta_0 = \tanh\left(\frac{\beta_c \omega_0 \vartheta_0}{2}\right).$$

Que la solución es única se puede observar claramente en la Figura 15.

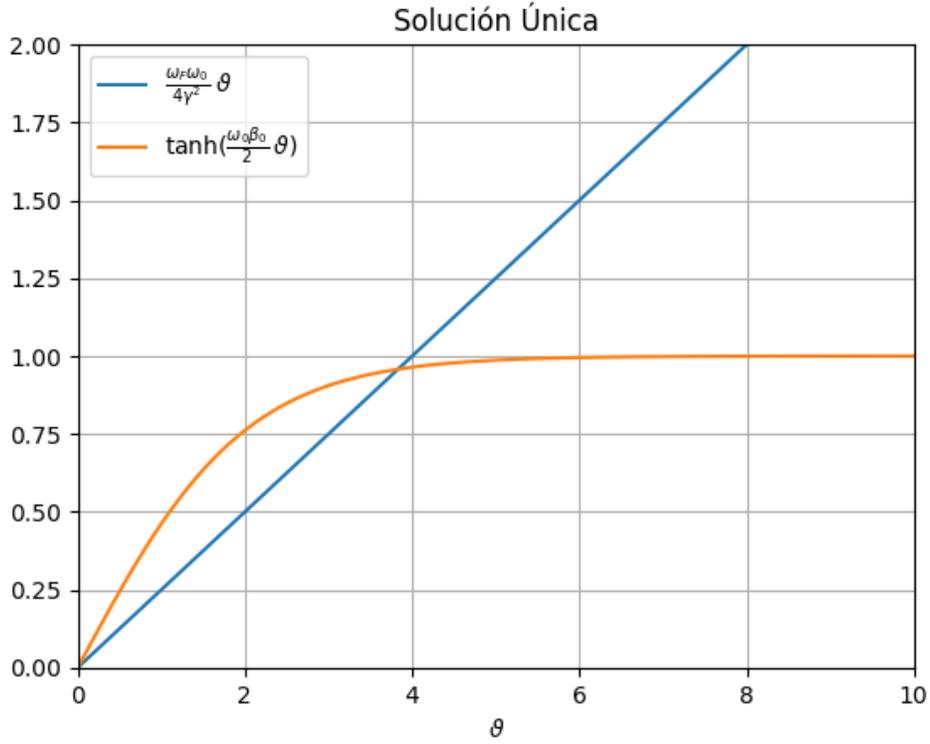


Figura 15: Aparte de la solución trivial $\vartheta = 0$, la ecuación (5.3.11) tiene solución única cuando $\beta > \beta_c$.

Escribimos $\left(\frac{\omega_F \omega_0}{4\gamma^2}\right) \vartheta_0 = \frac{1}{2} \nu$ y, mediante la expresión (5.3.12), resolvemos para y_0

$$y_0 = \left(\frac{\nu \gamma}{2\omega_F}\right)^2 - \left(\frac{\omega_0}{4\gamma}\right)^2. \quad (5.3.14)$$

Con lo anterior escribimos la energía libre como

$$-\beta f = \ln \left[\exp(-\beta y_0) 2 \cosh \left\{ \left(\frac{1}{2} \omega_0 \beta \right) \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y_0} \right\} \right],$$

la cual, utilizando (5.3.14), tiene la siguiente expresión

$$-\beta f = \ln \left[2 \cosh \left\{ \frac{\beta \gamma^2 \nu}{\omega_F} \right\} \right] - \beta \left(\left(\frac{\nu \gamma}{2\omega_F} \right)^2 - \left(\frac{\omega_0}{4\gamma} \right)^2 \right),$$

donde

$$\frac{1}{2} \nu = \tanh \left(\frac{\beta \gamma^2 \nu}{\omega_F} \right).$$

Recuperando el análisis anterior, vemos que si $4\gamma^2 < \omega_F \omega_0$, entonces, a cualquier temperatura, no ocurre ninguna transición de fase en el sistema. No obstante, en el caso $4\gamma^2 > \omega_F \omega_0$, existe una temperatura crítica dada por (5.3.13), donde $\beta_c = (k_B T_c)^{-1}$. A esta temperatura crítica T_c el sistema cambia discontinuamente de un estado a otro.

Por otro lado, a una temperatura fija que satisfaga $\beta > \beta_c$, el sistema sufre un cambio en su comportamiento si la constante de acoplamiento supera su valor crítico γ_c , dado por

$$\gamma_c = \sqrt{\frac{\omega_F \omega_0}{4 \tanh\left(\frac{\beta \omega_0}{2}\right)}}.$$

Así, la energía libre está caracterizada por un punto no analítico $\gamma = \frac{\sqrt{\omega_F \omega_0}}{2}$ que representa la transición de fase. La Figura 16 muestra el comportamiento del sistema de Dicke, donde se observan las regiones normal y superradiante.

El análisis se complementa estudiando el número promedio de fotones en los dos casos, $T > T_c$ y $T < T_c$, es decir, en el estado normal y en el superradiante, respectivamente. Primero definimos el valor promedio de los

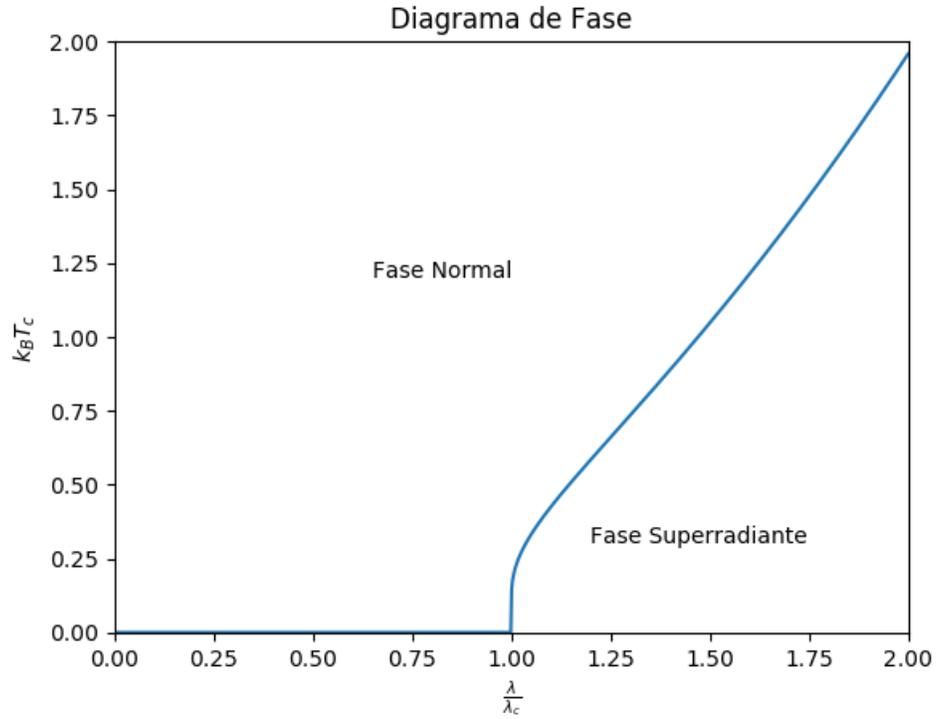


Figura 16: Diagrama de fase correspondiente al modelo de Dicke en la RWA a temperatura finita.

fotones por número de átomos,

$$\frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{N} = \frac{1}{N} \frac{\text{Tr} [\hat{a}^\dagger \hat{a} e^{-\beta \hat{H}}]}{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}}]}. \quad (5.3.15)$$

Continuamos siguiendo el mismo procedimiento del análisis previo para calcular la energía libre. Nuevamente calculamos la traza como una integral sobre la base de los estados coherentes $\{|\alpha\rangle\}$ y los estados $\{\otimes_{i=1}^N |\epsilon_i\rangle\}$. Notamos que la función de partición canónica (5.3.7) puede ser escrita utilizando

los eigenvalores (5.3.6) como

$$Z(N, T) = \sqrt{\frac{N}{\pi\omega_F\beta}} \exp [N\lambda(y)], \quad (5.3.16)$$

donde $y = \frac{|\alpha|^2}{N}$. Con lo anterior, podemos expresar la ecuación (5.3.15) como

$$\begin{aligned} \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{N} &= \frac{1}{N} \frac{1}{Z(N, T)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha|^2 e^{-\beta\omega_F|\alpha|^2} (2 \cosh(\beta\lambda))^N \\ &= \frac{N}{N} \frac{\sqrt{\frac{N}{\pi\omega_F\beta}} \int_0^\infty dy y \exp [N\lambda(y)]}{\sqrt{\frac{N}{\pi\omega_F\beta}} \int_0^\infty dy \exp [N\lambda(y)]} \\ &= \frac{\int_0^\infty dy y \exp [N\lambda(y)]}{\int_0^\infty dy \exp [N\lambda(y)]}. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

La integral (5.3.17) se resuelve mediante el método de Laplace, también conocido como *method of steepest descent*. Finalmente, para los dos casos, obtenemos lo siguiente

$$\frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{N} = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \\ y_0 & \text{si } T < T_c \end{cases}, \quad (5.3.18)$$

donde y_0 está dada por (5.3.14).

Los resultados anteriores hacen evidente la analogía entre el modelo de Dicke de superradiancia y el modelo ferromagnético de Curie-Weiss [20]. A bajas temperaturas el sistema atómico es capaz de organizarse por sí solo, mostrando una transición de fase superradiante. Sin embargo, por encima de una temperatura crítica las fluctuaciones térmicas destruyen dicho orden en el sistema.

5.3.2 El término \mathbf{A}^2

En esta sección seguiremos los pasos del análisis realizado por Rzazewski *et al.* [21], quienes muestran que la presencia de la transición de fase en el

Hamiltoniano de Dicke se debe a la ausencia del término \mathbf{A}^2 del Hamiltoniano de interacción. Este término aparece cuando el Hamiltoniano de la interacción de N átomos y un modo del campo se escribe como

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2\mu} (\mathbf{p}_j - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_j))^2 + V(\mathbf{r}_j) \right] + \hbar\omega_F \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (5.3.19)$$

donde \mathbf{p}_j es el operador de momento del electrón j -ésimo, μ es la masa reducida del sistema núcleo-electrón, $\mathbf{A}(\mathbf{r}_j)$ es el potencial vectorial de un átomo en la posición \mathbf{r}_j , dado en términos de los operadores de creación y aniquilación del campo cuantizado \hat{a}^\dagger y \hat{a} , respectivamente, y $V(\mathbf{r}_j)$ es el término que describe la interacción de Coulomb.

Con el término \mathbf{A}^2 incluido, el Hamiltoniano se escribe como

$$H_2 = \frac{1}{2_F} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \sigma_z^j + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (\hat{a}^\dagger \sigma_-^j + \hat{a} \sigma_+^j) + \kappa (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2, \quad (5.3.20)$$

donde

$$\kappa = \frac{e^2 \hbar}{4m\epsilon_0 \omega_F} \rho \quad ; \quad \rho = \frac{N}{V}.$$

Así, con el Hamiltoniano (5.3.20) realizamos el análisis de la sección anterior, es decir, calculamos la función de partición canónica, $Z_2(N, T)$, mediante el método de Laplace. Llevando a cabo este procedimiento obtenemos

$$\begin{aligned} Z_2(N, T) &= \\ &= N \int_0^\infty dy \exp \left\{ N \left(-\beta\omega_F y \left(1 + \frac{2\kappa}{\omega_F} \right) - \frac{\beta\kappa}{N} ((\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 1) \right) \right\} \\ &+ N \int_0^\infty dy \exp \left\{ N \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Para calcular $Z_2(N, T)$ en el límite termodinámico usamos nuevamente

el método de Laplace y obtenemos

$$Z_2(N, T) = \\ = C\sqrt{N} \max_{0 \leq y < \infty} e^{N \left(-\beta\omega_F y \left(1 + \frac{2\kappa}{\omega_F}\right) + \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \sqrt{1 + \frac{16\gamma^2}{\omega_0^2} y} \right) \right] \right)},$$

donde se tiene que el término $e^{\frac{\beta\kappa}{N}((\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 1)}$ se anula en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$.

Si continuamos con el análisis de $Z_2(N, T)$, siguiendo los mismos pasos que en la sección anterior, llegamos a la expresión siguiente

$$\left(\frac{\omega_0\omega_F}{4\gamma^2} \right) \left(1 + \frac{2\kappa}{\omega_F} \right) \vartheta(y) = \tanh \left(\frac{\beta\omega_0}{2} \vartheta \right), \quad (5.3.21)$$

donde $\vartheta(y)$ está dada por (5.3.12), que determina, si existe una solución distinta de cero, la presencia de una transición de fase. Dicha solución sólo puede existir si el factor $f(\rho)$ que multiplica a ϑ en el lado izquierdo de (5.3.21) es menor que la unidad. Este factor crítico es función de la densidad y se expresa como

$$f_2(\rho) = \frac{\omega_F^2 + \left(\frac{8\pi e^2}{2m}\right)\rho}{8\pi\wp^2\omega_0\rho}, \quad (5.3.22)$$

que se obtiene al incluir el término \mathbf{A}^2 y donde $\wp = e\langle e|\hat{r}|g\rangle$ es el elemento de matriz del momento dipolar eléctrico. $f_2(\rho)$ debe ser comparada con la función

$$f_1(\rho) = \frac{\omega_F^2}{8\pi\wp^2\omega_0\rho}.$$

Para lograr que el factor (5.3.22) sea menor que uno es necesario que se cumpla la condición

$$\wp D^2\omega_0 > \frac{e^2}{2m}.$$

Sin embargo, los valores de ω_0 y \wp^2 no son arbitrarios y están restringidos por la condición

$$\wp^2 \omega_0 < \frac{e^2}{2m}.$$

Finalmente, con los argumentos anteriores, podemos concluir que la transición de fase en el modelo de Dicke depende de la ausencia del término diamagnético.

Negar el término \mathbf{A}^2 al expandir el primer término de (5.3.19) se puede justificar en el límite de baja densidad dipolar, en el cual se considera un solo modo de radiación. Entonces, la contribución de este término puede ser escrita como

$$\delta H_{A^2} = \frac{e^2 \hbar \rho}{4m\epsilon_0 \omega_F} \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a} \right)^2.$$

Por lo tanto, este término añade una energía propia al campo de fotones que es proporcional a la densidad $\rho = \frac{N}{V}$ de dipolos. La importancia relativa de este término en el Hamiltoniano puede obtenerse calculando la razón entre éste y el último término de (5.3.19):

$$\begin{aligned} \frac{\rho e^2}{4m\epsilon_0 \omega_F^2} &= 2\pi\rho \left(\frac{e^2}{m\omega_F^2 8\pi\epsilon_0} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{a_0}{\hbar^2 \omega_F^2} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \right)^2 \\ &= 2\pi\rho a_0^3 \left(\frac{\text{Ry}}{\hbar\omega_F} \right)^2, \end{aligned}$$

donde a_0 es el radio de Bohr y Ry es la constante de Rydberg, dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}, \\ \text{Ry} &= \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si las partículas se encuentran más diluidas que el radio de Bohr, a_0 , entonces es válido despreciar el término δH_{A^2} para frecuencias del orden de Rydberg.

El argumento anterior sugiere que si el modelo de Dicke se entiende como una aproximación de la interacción radiación-materia en la norma de Coulomb, entonces el modelo de Dicke desprecia el término \mathbf{A}^2 . Lo anterior, como indica Rzazewski, impide que ocurra una transición de fase. No obstante, estudios recientes [22,23] señalan que, por ningún principio, se puede excluir la transición de fase en el modelo de Dicke, debido a la posibilidad de obtener el Hamiltoniano de Dicke original a partir de una transformación a la norma dipolar eléctrica.

Durante este capítulo hemos llevado a cabo el análisis de la versión generalizada del problema de Jaynes-Cummings: el modelo de Dicke. Iniciamos describiendo el problema y presentando el Hamiltoniano del sistema que describe la interacción de un sistema atómico de N partículas y un campo electromagnético de un modo. Al estudiar un modelo de N átomos fue necesaria la introducción de operadores atómicos colectivos, los cuales obedecen las reglas de conmutación del momento angular. La introducción de los operadores de momento angular y sus respectivos eigenestados dio pie a la presentación de los estados de Dicke, $|j, m\rangle$.

El análisis prosiguió estudiando el espectro de energía del modelo de Dicke. Comenzamos con el caso más sencillo de $N = 2$, para luego ampliarse a un mayor número de átomos.

Finalmente se concluyó con el estudio termodinámico del problema, para temperaturas distintas de cero, siguiendo el desarrollo de Wang y Hioe. Finalizamos este estudio incluyendo la influencia del término diamagnético en las transiciones de fase, como lo señaló inicialmente Rzazewski. Además,

se indican las recientes contribuciones de J. Keeling y de A. Vukics y P. Domokos que demuestran la existencia de la transición de fase, incluso en la presencia del término \mathbf{A}^2 .

6 Conclusiones

Esta tesis presenta un análisis extensivo de la interacción radiación-materia a través del estudio de sistemas atómicos de dos niveles y un modo del campo electromagnético. El presente trabajo comenzó considerando un campo electromagnético clásico, $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$, y un sistema atómico de dos niveles, se estudió el problema de interacción de forma semiclásica, es decir, el modelo de Rabi, que nos condujo a la ley de oro de Fermi. Posteriormente se introdujo la teoría cuántica de la radiación con la finalidad de proveer el formalismo necesario para el tratamiento matemático posterior. Así, la cuantización del campo electromagnético en términos de osciladores armónicos y la presentación de los estados coherentes de Glauber [18], permitió analizar el problema de interacción desde el punto de vista semiclásico y cuántico. El estudio se complementó con el análisis puramente cuántico de esta interacción: el problema de Jaynes-Cummings [4]. Después, se continuó con la generalización a N átomos, la cual se llevó a cabo al examinar el modelo de Dicke [2] desde la aproximación de onda rotante, que culminó con el análisis de su transición de fase.

El presente trabajo es el resultado de una dedicada revisión de múltiples trabajos y publicaciones en relación al problema de interacción entre radiación y materia. Esta investigación inició con el problema de Jaynes-Cummings que despertó mi interés por la descripción cuántica del fenómeno de interacción entre radiación coherente y materia. Gracias a la accesible formulación de este modelo, el problema de Jaynes-Cummings no ha perdido importancia. Al contrario, a más de 50 años de la publicación de su artículo, este modelo provocó una destacada cantidad de investigaciones [24] y fue esencial en los experimentos realizados por S. Haroche y D. Wineland,

que les valieron el premio Nobel en el 2012. Además, el modelo de Jaynes-Cummings ha sido fundamental en recientes estudios de información cuántica y electrodinámica cuántica en cavidades, demostrando así su relevancia y trascendencia en el futuro científico.

El objetivo del texto es proveerle al lector un completo acercamiento al problema de interacción entre un campo electromagnético de un modo y un sistema atómico de dos niveles. Por lo tanto, el orden del trabajo se planteó como una construcción paulatina del formalismo matemático y físico del problema, hasta alcanzar la mayor complejidad con el modelo de Dicke.

No obstante, dada la abrumadora cantidad de estudios que se han realizado sobre el problema de interacción radiación-materia, nos vimos obligados a descartar valiosos temas. Aún cuando fue tentador extender este compendio teórico hacia sistemas atómicos de tres niveles y temáticas más ligadas a la información cuántica, este estudio se dejó para un trabajo futuro. Nuevamente, dados los alcances de esta recopilación, no se incluyó un estudio del modelo de Dicke fuera de la aproximación de onda rotante¹³, que, sin duda alguna, sería un valioso complemento.

¹³Sin embargo, un completo análisis de este modelo se encuentra en la tesis de F. D. de Oliveira [25].

A Código de JULIA utilizando QUANTUMOPTICS.JL

A.1 Análisis del Modelo de Jaynes-Cummings

In [1]:

```
#Paquetes utilizados

using PyPlot, QuantumOptics

ω_C = 2*π           #Frecuencia de la Cavidad
ω_A = 2*π           #Frecuencia de transición atómica
g = 2*π*0.05       #Constante de acoplamiento
#g = 1
N = 15              #Número de estados de Fock

# Definimos las bases en las que trabajaremos.

b_fock = FockBasis(N)
b_spin = SpinBasis(1//2)
b = b_fock ⊗ b_spin

# Introducimos los Operadores Fundamentales

a = destroy(b_fock)
at = create(b_fock)
n = number(b_fock)

sm = sigmam(b_spin)
sp = sigmap(b_spin)
sz = sigmaz(b_spin)

#Escribimos el Hamiltoniano atómico, del campo y el de interacción

Hatom = ω_A*sz/2
Hfield = ω_C*at*a
Hint = g*(at⊗sm + a⊗sp)

#Hamiltoniano de Jaynes Cummings

H =
identityoperator(b_fock)⊗Hatom + Hfield⊗identityoperator(b_spin) + Hint
```

```

#Tiempo
T = Array(linspace(0,100,1000));

#Estado Inicial con el átomo excitado

ψ_inicial_1 =(coherentstate(b_fock, 2) ⊗ (spinup(b_spin)))

#Calculamos la evolución temporal
tout, ψ_tiempo_1 = timeevolution.schroedinger(T, ψ_inicial_1, H)
#Cálculo de la Inversión Atómica
expec_sz_1 = expect(identityoperator(b_fock) ⊗ sz, ψ_tiempo_1)

#Gráfico de Inversión atómica: Colapso y Reavivamiento

plot(T, expec_sz_1, label = "No Normalizado")
grid("on")
ylim(-1,1)
xlim(0,100)
xlabel(L"t")
ylabel(L"W(t)")
title("Inversión Atómica: Colapso y Reavivamiento")

```

A.2 Análisis del Modelo de Dicke

```

#Definimos los operadores que utilizaremos en el modelo de Dicke.
#En este caso para N = 2 átomos.

sm_1 = sigmam(b_spin) ⊗ identityoperator(b_spin)
sm_2 = identityoperator(b_spin) ⊗ sigmam(b_spin)
sp_1 = sigmap(b_spin) ⊗ identityoperator(b_spin)
sp_2 = identityoperator(b_spin) ⊗ sigmap(b_spin)
sz_1 = sigmaz(b_spin) ⊗ identityoperator(b_spin)
sz_2 = identityoperator(b_spin) ⊗ sigmaz(b_spin)
Dz = (1/2)*(sz_1 + sz_2)
Sx = (1/2)*(sp_1*sm_1 + sp_2*sm_2)

# Definimos los términos del Hamiltoniano

H_field = ω_C*at*a
H_atom = (ω_A/2)*(sz_1 + sz_2)
H_field_atom = g* (a ⊗ sp_1 + at ⊗ sm_1) + g* (a ⊗ sp_2 + at ⊗ sm_2)

H_1 = H_field ⊗ identityoperator(b_spin) ⊗ identityoperator(b_spin)

```

```

H_2 = identityoperator(b_fock) ⊗ H_atom
H_3 = H_field_atom

#Hamiltoniano de Dicke

H_Dicke = H_1 + H_2 + H_3

#Tiempo
tiempo = Array(linspace(0,100,1000));

#Estado inicial con ambos átomos excitados

ψ_inicial_up_up =
coherentstate(b_fock, 2) ⊗ (spinup(b_spin)) ⊗ (spinup(b_spin))
#Calculamos la evolución
tout, ψevol_up_up =
timeevolution.schroedinger(tiempo, ψ_inicial_up_up, H_Dicke)

#Cálculo de la Inversión Atómica
expec_sz_1_up_up =
expect(identityoperator(b_fock) ⊗ sz_1, ψevol_up_up)
expec_dz_up_up =
expect(identityoperator(b_fock) ⊗ Dz, ψevol_up_up)

#Gráfico comparativo: Jaynes-Cummings vs Dicke
plot(T, expec_sz_1, label = "Jaynes-Cummings")
plot(tiempo, expec_dz_up_up, label = "Dicke: Dos Átomos")

title("Inversión Atómica")

xlabel(L"t")
ylabel(L"W(t)")
grid("on")
legend(loc="upper right", fancybox="true")
ylim(-1,1)
xlim(0,70)

```

Bibliografia

- [1] E. Purcell, “Spontaneous emission probabilities at radio frequencies,” *Phys. Rev.* **69**, 674 (1946).
- [2] R. Dicke, “Coherence in spontaneous radiation processes,” *Phys. Rev. (Series I)* **93**, 1 (1954).
- [3] M. Tavis and F. Cummings, “Exact solution for an n-molecule-radiation-field hamiltonian,” *Phys. Rev. (Series I)* **170**, 2 (1968).
- [4] E. Jaynes and F. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE* **51**, 1 (1963).
- [5] Y. Wang and F. Hioe, “Phase transition in the dicke model of superradiance,” *Phys. Rev. A* **7**, 3 (1973).
- [6] J. Cohen-Tannoudji, C. ; Dupont-Roc and G. Grynberg, *Photons and Atoms, Introduction to QED*. Wiley, 1997.
- [7] D. Pegg and S. Barnett, “Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field,” *Phys. Rev. A* **39**, 1665 (1989).
- [8] S. Bezanson, J. ; Karpinski, B. Viral, and A. Edelman, “Julia: A fast dynamic language for technical computing,” *CoRR*, 2012.
- [9] K. Hepp and E. Lieb, “Equilibrium statistical mechanics of matter interacting with the quantized radiation field,” *Phys. Rev. A* **8**, 5 (1973).
- [10] Y. Wang and F. Hioe, “On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: The dicke maser model,” *Phys. Rev. A* **76**, 2 (1973).

- [11] E. Power and S. Zienau, “Coulomb gauge in non-relativistic quantum electro-dynamics and the shape of spectral lines,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences* **251**, 999 (1959).
- [12] A. Sivasubramanian, S. ; Widom and Y. Srivastava, “Gauge invariant formulations of dicke–preparata super-radiant models,” *Physica A* **301**, (2001).
- [13] O. Nahmad Achar, E. ; Castaños, R. López Peña, and J. Hirsch, “Mathematical methods in quantum optics: The dicke model,” *Physica Scripta* **87**, 3 (2013).
- [14] L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Fondo de Cultura Económica, 3 ed., 1996.
- [15] B. Cohen-Tannoudji, C. ; Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics, Volume One*. Wiley, 1991.
- [16] H. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. Springer, 2003.
- [17] M. Narducci, L.M. ; Orszag and R. Tuft, “Energy spectrum of the dicke hamiltonian,” *Phys. Rev. A* **8**, 4 (1973).
- [18] R. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field,” *Phys. Rev. (Series I)* **131**, 6 (1963).
- [19] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 2012.

- [20] T. Kochmański, M. ; Paszkiewicz and S. Wolski, “Curie–weiss magnet a simple model of phase transition,” *European Journal of Physics* **34**, 6 (2013).
- [21] K. Rzażewski, K. Wódkiewicz, and W. Żakowicz, “Phase transitions, two-level atoms, and the A^2 term,” *Phys. Rev. Lett.* **35**, 7 (1975).
- [22] A. Vukics and P. Domokos, “Adequacy of the dicke model in cavity qed: A counter-no-go statement,” *Phys. Rev. A* **86**, 5 (2012).
- [23] J. Keeling, “Coulomb interactions, gauge invariance, and phase transitions of the dicke model,” *Journal of Physics Condensed Matter* **19**, 29 (2007).
- [24] J. Greentree, A.D. ; Koch and J. Larson, “Fifty years of jaynes–cummings physics,” *Journal of Physics B Atomic Molecular and Optical Physics* **46**, 22 (2013).
- [25] F. de Oliveira, *Study of the Dicke model: From Phase Space Approach to Quantum Trajectories*. PhD thesis, University of Auckland, 2008.