Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Rigidez infinitesimal de superficies en el espacio tiempo de Minkowski

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

JAZMÍN ALICIA BASILIO VELÁZQUEZ

TUTOR

DR. PIERRE MICHEL BAYARD

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Introducción

Una dificultad fundamental en relatividad general es que no existe un concepto de "densidad de gravedad" por el principio de equivalencia de Einstein, por lo que la fórmula

$$\text{masa} = \int_{\Omega} \text{densidad de masa}$$

no es válida en relatividad general [13].

Sin embargo una descripción casi-local es necesaria pues en general se modelan sistemas con fronteras acotadas. En 1982, Penrose propuso una lista de problemas abiertos en relatividad general clásica, y el problema número uno fue " Encontrar una definición casi-local de energía-momentum (masa)" [10]. Esta definición tiene que cumplir con ciertas expectativas físicas requeridas.

Una definición muy importante es la masa de Brown-York-Liu-Yau, definida para una superficie compacta, sin frontera, tipo espacio y de curvatura positiva Σ de un espacio tiempo como

$$M = \frac{1}{8\pi}\left(\int_{\Sigma} H_0 - \int_{\Sigma} |\vec{H}|\right)$$

en donde H_0 es la curvatura media del encaje de Σ en $\mathbb{R}^3$, el cual es esencialmente único si la curvatura es positiva [8].

Esta definición no cumple una propiedad física requerida llamada "propiedad de rigidez", la cual pide que $M = 0$ para superficies en el espacio tiempo de Minkowski. Por lo que Wang y Yau han propuesto una nueva definición, la cual intenta solucionar este problema tomando en cuenta la norma del vector de curvatura media y su dirección [13].

En esta nueva definición de M, se remplaza la integral de H_0 por la integral de una cantidad que proviene de un encaje en $\mathbb{R}^{1,3}$ (pero este encaje tiene que ser únicamente determinado) [13].

Es en este contexto que resulta importante encontrar condiciones que garanticen la existencia de un *único* encaje en el espacio tiempo de Minkowski: la existencia es evidente por el teorema de Weyl (existe de hecho un encaje isométrico en $\mathbb{R}^3$). Pero es necesario encontrar condiciones extrínsecas adicionales que garanticen la unicidad.

Se dice que una superficie Σ en $\mathbb{R}^{1,3}$ es globalmente rígida, si está totalmente determinada módulo isometrías afínes de $\mathbb{R}^{1,3}$. En este trabajo se abordará una noción de rigidez mas débil. Consideremos una familia de isometrías afines A_s de $\mathbb{R}^{1,3}$ parametrizadas diferenciablemente en s con $A_0 = I$, entonces tenemos un campo de vectores V definido en Σ por

$$V = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} A_s \circ i$$

en donde $i : \Sigma \to \mathbb{R}^{1,3}$ es la inclusión. Este campo de vectores satisface la ecuación

$$\langle dV(X), X \rangle = 0 \tag{1}$$

para todo campo X tangente a Σ. Una superficie Σ es infinitesimalmente rígida, si todo campo de vectores V (no necesariamente tangentes a Σ) que satisface (1) es construido por una familia de isometrías afines.

El objetivo del presente trabajo es desarrollar en detalle las demostraciones de tres teoremas de rigidez infinitesimal para superficies de tipo espacio de codimensión 2 en el espacio tiempo de Minkowski publicados en [1]. Para ello en los capítulos 1, 2 y 3 se desarrolla de manera sucesiva el marco teórico necesario para llegar a la formulación y demostración de dichos teoremas.

En el capítulo 1 se desarrolla una introducción a la geometría semi-riemanniana, para tener a la mano los resultados que se usarán a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2 se define el concepto de deformación infinitesimal, así como otras maneras en que es posible deformar subvariedades; también se dan ejemplos de deformaciones infinitesimales. Además se define la rigidez infinitesimal y la rigidez global. Este capítulo está desarrollado siguiendo las ideas expuestas en el capítulo 12 de [11] vol. 5.

En el capítulo 3 se demuestran resultados de rigidez infinitesimal para hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$, suponiendo ciertos resultados de rigidez global ya conocidos. El caso $n = 3$ (teorema de Blaschke) se desarrolla a partir de la demostración que se encuentra en el capítulo 12 de [11] vol. 5, el caso $n > 3$ se desarrolla siguiendo la demostración de [3].

Finalmente en el capítulo 4 se formulan y demuestran los teoremas de rigidez infinitesimal publicados en [1]. Las subvariedades consideradas en este capítulo son “ planas en el tiempo”: es una propiedad análoga a torsión constante para una curva en $\mathbb{R}^3$.

Enunciemos brevemente estos teoremas. El primer resultado de rigidez que demostraremos es válido para subvariedades de codimensión 2 en $\mathbb{R}^{1,n}$.

Teorema 1 *Sea Σ una hipersuperficie compacta en un hiperplano de tipo espacio de $\mathbb{R}^{1,n}$ tal que Σ es la frontera de un abierto conexo Ω del hiperplano. Suponga que Σ tiene curvatura media positiva si $n > 3$ y suponga además* *que Σ es convexa si $n = 3$. Entonces Σ es infinitesimalmente rígida como una variedad plana en el tiempo.*

El segundo resultado de rigidez concierne a superficies en $\mathbb{R}^{1,3}$ y necesita una hipótesis topológica sobre la superficie.

Teorema 2 *Sea Σ una superficie de tipo espacio de $\mathbb{R}^{1,3}$, con vector de curvatura media de tipo espacio y no nulo, tal que la forma de conexión normal α_H sea nula. Suponga además que Σ es una esfera topológica. Entonces Σ se encuentra en un hiperplano de tipo espacio.*

En el último teorema debilitamos la hipótesis $\alpha_H = 0$, pero agregamos la hipótesis de que la superficie sea invariante por un campo rotacional de Killing.

Teorema 3 *Suponga que Σ es una superficie plana en el tiempo en $\mathbb{R}^{1,3}$ y Σ es una esfera topológica. Si Σ es invariante por un campo vectorial rotacional de Killing, entonces Σ se encuentra en un hiperplano de tipo espacio de $\mathbb{R}^{1,3}$.*

Índice general

Capítulo 1

Preliminares de geometría semi-riemanniana

1.1. Métrica semi-riemanniana y conexión de Levi-Civita

Esta sección tiene por objetivo facilitar las definiciones, construcciones y resultados básicos de geometría semi-riemanniana para el lector familiarizado con la geometría riemanniana. Sirve también para estandarizar la notación que se usará a lo largo del presente trabajo. Una introducción detallada del tema puede encontrarse en [9].

La geometría semi-riemanniana es una generalización de la geometría riemanniana, y su desarrollo se debe en gran medida a su aplicación en la Teoría de Relatividad de Einstein. Se diferencia de la geometría riemanniana al debilitar la hipótesis sobre positividad de la métrica a pedir únicamente que sea no degenerada. Recordemos algunas definiciones elementales:

Definición 1.1.1. Una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{R}$ es **no degenerada** si $B(x, y) = 0 \ \ \forall y \in V$ implica $x = 0$.

Definición 1.1.2. El **índice** de una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{R}$ es el mayor entero correspondiente a la dimensión de un subespacio $W \leq V$ tal que $B(x, x) \leq 0$ para todo $x \in W$.

Definición 1.1.3. Una **métrica semi-riemanniana** en una variedad diferenciable M es un campo tensorial (0,2) diferenciable, simétrico, no degenerado, y de índice constante. Entenderemos por variedad semi-riemanniana, una variedad diferenciable con una métrica semi-riemanniana.

Ejemplo 1.1.4. Para enteros no negativos n, ν consideremos la métrica semi-riemanniana g en $\mathbb{R}^{\nu+n}$ dada en términos de las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^{\nu+n}$ por

$$g = -\sum_{i=0}^{\nu-1}(dx^i)^2 + \sum_{j=\nu}^{\nu+n-1}(dx^j)^2. \tag{1.1}$$

El espacio semi-euclidiano $\mathbb{R}^{\nu,n}$ es por definición $(\mathbb{R}^{\nu+n}, g)$. Tomando $\nu = 0$ obtenemos $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual y en el caso $\nu = 1$, $n = 3$ obtenemos el llamado **espacio-tiempo de Minkowski** $\mathbb{R}^{1,3}$.

Definición 1.1.5. Podemos clasificar a los vectores de acuerdo a su **carácter causal**; un vector v en $\mathbb{R}^{\nu,n}$ es:

tipo espacio si $\langle v, v\rangle > 0$ o $v = 0$,

tipo luz si $\langle v, v\rangle = 0$ y $v \neq 0$,

tipo tiempo si $\langle v, v\rangle < 0$.

Esta definición se extiende a subvariedades; por ejemplo una subvariedad es de tipo espacio si todo vector tangente es de tipo espacio. Análogamente se definen subvariedades de tipo nulo, o de tipo tiempo. Claro que existen subvariedades que no están en esta clasificación. En el presente trabajo solo se trabajará con variedades tipo espacio.

La definiciones de **isometría**, **isometría local**, **conexión**, **derivada covariante**, **símbolos de Christoffel** son idénticas al caso riemanniano. La demostración de existencia y unicidad de la conexión de Levi-Civita procede de la misma manera usando la fórmula de Koszul [9]. Resultará útil tener a la mano la fórmula de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left\{\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right\}. \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) junto con la expresión (1.1) de la métrica de $\mathbb{R}^{\nu,n}$ implican que los símbolos de Christoffel en las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^{\nu,n}$ $x^0, x^1, \ldots, x^{\nu+n-1}$ se anulan, y por tanto los campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ son paralelos para $0 \leq i \leq \nu + n - 1$. Se sigue entonces que para todo par de campos diferenciables V,W de $\mathbb{R}^{\nu,n}$ la conexión de Levi-Civita se calcula de la siguiente forma:

$$\nabla_V W = \nabla_V\left(\sum_i W^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_i V(W^i)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

es decir es la derivada usual.

Definición 1.1.6. El tensor de curvatura R de una variedad semi-riemanniana (M, g) se define como

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y)Z \end{aligned}$$

donde

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

y ∇ es la conexión de Levi-Civita de (M, g).

Un simple cálculo idéntico al caso euclidiano muestra que el tensor de curvatura en $\mathbb{R}^{\nu,n}$ se anula: tomando $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ encontramos

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \sum_i Y(Z^i)\frac{\partial}{\partial x^i} - \nabla_Y \sum_i X(Z^i)\frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_i [X,Y](Z^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_i \Big(\big(XY(Z^i) - YX(Z^i)\big) - \big([X,Y]Z^i\big) \Big) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, mencionaremos que los elementos de cálculo y álgebra tensorial como **derivaciones**, **contracciones** o **cambio a tensores métricamente equivalentes** se manejan sin ninguna diferencia al caso riemanniano. En donde por esta última nos referimos a la operación que nos permite cambiar el tipo de un tensor usando la métrica, por ejemplo, el gradiente de una función es métricamente equivalente al diferencial de la función

$$df = \sum_a f_a dx^a \longrightarrow \sum_{ab} g^{ab} f_a \frac{\partial}{\partial u^b} = grad(f).$$

También los operadores laplaciano, divergencia y gradiente se definen de igual forma que en el caso riemanniano.

1.2. Subvariedades semi-riemannianas

Consideremos $(\overline{M}, \overline{g})$ una variedad semi-riemanniana y M una subvariedad de $\overline{M}$, sea i la inclusión de M en $\overline{M}$, diremos que $(M, i^*\overline{g})$ es una subvariedad semi-riemanniana de $(\overline{M}, \overline{g})$ si $i^*\overline{g}$ es no degenerada. En el estudio de las subvariedades semi-riemannianas la herramienta esencial para estudiar de qué forma M está encajada en $\overline{M}$ es la segunda forma fundamental, la cual mide la diferencia entre las conexiones de Levi-Civita ∇ de M y $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$. Esta nos da la información requerida sobre la forma de M en $\overline{M}$ y es por eso también llamada el tensor de forma.

Un vector $X_p \in T_pM$ se identifica de manera natural con $i_*X_p \in T_p\overline{M}$. Así podemos pensar a T_pM como un subespacio vectorial de $T_p\overline{M}$ y considerar la descomposición ortogonal

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$$

en donde esta descomposición ortogonal es posible ya que

$$\overline{g}\big|_{T_pM} = g_p$$

es no degenerada.

La siguiente definición será de utilidad para entender la relación entre campos en M y campos en $\overline{M}$.

Definición 1.2.1. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ es una **extensión** de X si

$$\overline{X}_p = i_* X_p \qquad\qquad \forall p \in M.$$

Usando extensiones de campos podemos definir una conexión en una subvariedad, usando la conexión ambiente.

Definición 1.2.2. Sea (M, g) una subvariedad semi-riemanniana de $(\overline{M}, \overline{g})$ La **conexión inducida** $\widetilde{\nabla}$ es la aplicación

$$\widetilde{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \mapsto \widetilde{\nabla}_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^{\top},$$

donde $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de $(\overline{M}, \overline{g})$, $\overline{X}$, $\overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ son extensiones de X, Y respectivamente y $(\cdot)^{\top}$ es la componente tangente.

Se verifica que $\widetilde{\nabla}$ está bien definida, es decir no depende de las extensiones de los campos, además define una conexión en (M, g) que de hecho coincide con la conexión de Levi-Civita de (M, g). De forma que la parte tangente de la conexión de $\overline{M}$ no aporta información de la geometría extrínseca de M en $\overline{M}$. Todo lo contrario sucede al considerar la parte normal como veremos a continuación.

Definición 1.2.3. Sea (M, g) una subvariedad semi-riemanniana de $(\overline{M}, \overline{g})$ **La segunda forma fundamental** II es la aplicación

$$\mathrm{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M^{\perp})$$
$$(X, Y) \mapsto \mathrm{II}(X, Y) = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^{\perp}$$

en donde si Z es un campo de $\overline{M}$ definido sobre M $(Z)^{\perp}$ denota la componente normal de Z.

Se demuestra que está bien definida, es tensorial en ambos argumentos y es simétrica, es decir $\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{II}(Y, X)$ para todo X, Y tangentes a M.

La información anterior puede escribirse en una sola ecuación, llamada la **fórmula de Gauss**:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)$$

en donde X, Y son campos tangentes a M y para que el lado izquierdo tenga sentido, se utilizan extensiones de X y Y como en la construcción anterior.

Un objeto que será usado frecuentemente es el vector de curvatura media denotado por $\vec{H}$ el cual es la contracción métrica de II, dividido por un factor de normalización.

Definición 1.2.4. Si $\{e_1, \dots e_n\}$ es una base ortonormal de T_pM, el **vector de curvatura media** en p es

$$\vec{H}_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ \mathrm{II}(e_i, e_i)$$

donde $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$ y $\vec{H}_p$ no depende de la base ortonormal.

En este trabajo consideraremos únicamente subvariedades de tipo espacio, de forma que $\varepsilon_i = 1$ para toda i considerada.

De manera similar podemos considerar la descomposición ortogonal de la conexión $\overline{\nabla}$ cuando tomamos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un campo normal $\eta \in \mathfrak{X}(M^\perp)$

$$\overline{\nabla}_X \eta = \left(\overline{\nabla}_X \eta\right)^\perp \oplus \left(\overline{\nabla}_X \eta\right)^\top. \tag{1.3}$$

Se verifica que la componente tangente define un tensor

$$\begin{aligned} \mathrm{II}^* : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M^\perp) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, \eta) &\mapsto -\overline{\nabla}_X \eta^\top, \end{aligned}$$

el cual no aporta nueva información pues si Y es un campo tangente a M, entonces

$$\langle \eta, Y \rangle = 0 \implies \left\langle \overline{\nabla}_X \eta, Y \right\rangle = -\left\langle \eta, \overline{\nabla}_X Y \right\rangle,$$

y por tanto

$$\langle \mathrm{II}^*(X, \eta), Y \rangle = \langle \mathrm{II}(X, Y), \eta \rangle. \tag{1.4}$$

Definición 1.2.5. Para un campo normal $\eta \in \mathfrak{X}(M^\perp)$ se define el **operador de forma** $A_\eta : TM \to TM$ como

$$A_\eta(X) = \mathrm{II}^*(X, \eta) = -\overline{\nabla}_X \eta^\top. \tag{1.5}$$

La ecuación (1.4) y la simetría de II implican que A_η es un operador autoadjunto.

Nuevamente al considerar la proyección normal en (1.3) encontramos información de la geometría extrínseca de la subvariedad.

Definición 1.2.6. La **conexión normal** es la aplicación

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M^\perp) &\to \mathfrak{X}(M^\perp) \\ (X, \eta) &\mapsto \nabla^\perp_X \eta = \left(\overline{\nabla}_X \eta\right)^\perp. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Se verifica que $\nabla^\perp$ define en efecto una conexión en el haz normal.

Sustituyendo las ecuaciones (1.5) y (1.6) en la descomposición (1.3), obtenemos la **fórmula de Weingarten**

$$\overline{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla^{\perp}_X \eta, \tag{1.7}$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\eta \in \mathfrak{X}(M^{\perp})$.

Al tener una conexión en el haz normal, podemos considerar la curvatura normal $R^{\perp}$. Las siguientes ecuaciones relacionan la curvatura $\overline{R}$ de la conexión ambiente con R y $R^{\perp}$. Usando las fórmulas de Gauss y de Weingarten se deducen las ecuaciones fundamentales de **Gauss, Codazzi y Ricci**, que únicamente enunciaremos.

Teorema 1.2.7. *Consideremos X, Y, Z, campos tangentes a M y η un campo normal. Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones:*

Ecuación de Gauss:

$$(\overline{R}(X,Y)Z))^{\top} = R(X,Y)Z - \mathrm{II}^*\big(X, \mathrm{II}(Y,Z)\big) + \mathrm{II}^*\big(Y, \mathrm{II}(X,Z)\big). \tag{1.8}$$

Ecuación de Codazzi:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X \mathrm{II})(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y \mathrm{II})(X,Z) \tag{1.9}$$

donde $(\nabla^{\perp}_X \mathrm{II})(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(\mathrm{II}(Y,Z)) - \mathrm{II}(\nabla_X Y, Z) - \mathrm{II}(Y, \nabla_X Z)$.

Ecuación de Ricci:

$$(\overline{R}(X,Y)\eta))^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\eta - \mathrm{II}\big(X, \mathrm{II}^*(Y,\eta)\big) + \mathrm{II}\big(Y, \mathrm{II}^*(X,\eta)\big). \tag{1.10}$$

Este teorema cuenta con el siguiente recíproco, los llamados **teoremas fundamentales para subvariedades**. Las demostraciones pueden consultarse en [4] y [14].

Teorema 1.2.8 (Existencia)**.** *Sea (M^n_t, g) una n-variedad semi-riemanniana de índice t simplemente conexa. Suponga que existe un $(m-n)$-haz vectorial semi-riemanniano $\nu(M^n_t)$, de índice $(s-t)$ (el índice corresponde al de la métrica en cada fibra) sobre M^n_t con una conexión, y un tensor $(0,2)$ simétrico* II *en M^n_t con valores en $\nu(M^n_t)$. Si se satisfacien las ecuaciones* (1.8)*,* (1.9) *y* (1.10) *con*

$$\overline{R}(X,Y)Z = c(\langle Z,Y\rangle X - \langle Z,X\rangle Y),$$

entonces M^n_t puede ser isométricamente inmersa en la m-dimensional variedad semi-riemanniana simplemente conexa $R^m_s(c)$ de curvatura seccional constante c de índice s, de forma que $\nu(M^n_t)$ sea el haz normal y II *la segunda forma fundamental.*

Teorema 1.2.9 (Unicidad). *Sean f, $f' : M_t^n \to R_s^m(c)$ dos inmersiones isométricas de una variedad semi-riemanniana M_t^n en una variedad semi-riemanniana simplemente conexa de curvatura seccional constante c con haces normales ν y ν' equipados con su métrica, conexión normal y segunda forma fundamental. Suponga que existe una isometría $\phi : M_t^n \to M_t^n$ que puede ser cubierta por un isomorfismo de haces $\overline{\phi} : \nu \to \nu'$ que preserva las métricas, las conexiones normales y las segundas formas fundamentales, entonces existe una isometría Φ de $R_s^m(c)$ tal que $\Phi \circ f = f'$.*

Definición 1.2.10. Dos subvariedades M_1 y M_2 de una subvariedad semi-riemanniana N se dicen **congruentes** si existe una isometría ϕ de N tal que $\phi(M_1) = M_2$.

Las subvariedades congruentes tienen la misma geometría intrínseca y extrínseca, pues una isometría del espacio ambiente es evidentemente una isometría al restringirla a una subvariedad, y usando que una isometría ambiente preserva la conexión ambiente se deduce que también se conservan la segunda forma fundamental y la conexión normal.

Para finalizar solo mencionaremos que todos los conceptos desarrollados para subvariedades, se aplican sin ninguna diferencia (localmente) al caso general de una variedad inmersa isométricamente $f : M \to N$, pues localmente una inmersión es un encaje y en las definiciones y teoremas dados en la sección, basta con cambiar la inclusión por f, y considerar $f_* T_p M$ como un subespacio de $T_{f(p)}N$.

1.3. Método del marco móvil

El método del marco móvil permite usar de manera muy eficiente el formalismo de las formas diferenciales. Dicho método tiene como idea principal usar una base local de campos de vectores ortonormales en lugar de usar el paralelismo y los campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Sea M^n una variedad riemanniana y $p \in M^n$. Haciendo uso del método de Gram-Schmidt siempre es posible construir n campos $\{X_1, .., X_n\}$ definidos en una vecindad de p de manera que

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_i^j \qquad 1 \leq i, j \leq n;$$

se dice que $\{X_1, .., X_n\}$ es un marco móvil.

Definición 1.3.1. Sea $\{X_1, .., X_n\}$ un marco móvil. **Las formas de conexión** de dicho marco están definidas por

$$\omega_j^i(X) = \langle \nabla_X X_j, X_i \rangle \qquad \text{donde } X \text{ es tangente a } M.$$

Es claro que son formas diferenciales en el sentido usual, por la linealidad de ∇ en el primer argumento. La interpretación geométrica es la siguiente:

al evaluar ω^i_j en un vector X, obtenemos la proyección en X_i de la derivada covariante de X_j a lo largo de X. Es decir $\omega^i_j(X)$ representa la variación de X_j en la dirección de X, en X_i.

Usando esta construcción es posible estudiar la conexión habiéndola separado en varias 1-formas.

Teorema 1.3.2. *Sean $\{X_1, .., X_n\}$ un marco móvil ortonormal en una variedad riemaniana (M, g), θ^i la base dual del marco móvil definida por $\theta^i(X_j) = \delta^i_j$ y ω^i_j las formas de conexión. Entonces se cumplen las **ecuaciones estructurales**.*
Primera ecuación estructural:

$$d\theta^i = -\sum_k \omega^i_k \wedge \theta^k \qquad \omega^i_j = -\omega^j_i.$$

Segunda ecuación estructural:

$$d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j$$

en donde las 2-formas Ω^i_j están relacionadas con la curvatura de acuerdo a

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^i_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l.$$

Una demostración puede encontrarse en [11] vol. 2 p. 267.

Consideremos ahora M^n una subvariedad riemanniana de N^m. En ambas podemos definir marcos móviles locales, y estudiar a partir de sus ecuaciones estructurales, la geometría extrínseca de M.

Sea un marco móvil $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots X_m$ de N^m de manera que los primeros n campos sean tangentes a M y los últimos $m - n$ campos sean ortogonales a M. Consideremos $\theta^i, \omega^i_j, \Omega^i_j$ las formas duales, de conexión y de curvatura de M para el marco $X_1, \ldots, X_n$ y sean $\phi^\alpha, \psi^\alpha_\beta$ y Ψ^α_β las formas de N para el marco $X_1, \ldots, X_m$ de N^m.
Se tienen entonces las ecuaciones estructurales para M y las ecuaciones estructurales para N; su relación nos permite estudiar la geometría extrínseca de M.

Usaremos la siguiente convención de índices $1 \leq i, j \leq n$, $n + 1 \leq r, s \leq m$ y $1 \leq \alpha, \beta \leq m$. Entonces se cumple que al restringir a TM

$$\phi^i = \theta^i, \quad \phi^r = 0$$

y usando las primeras ecuaciones estructurales se tiene que en TM

$$\psi^i_j = \omega^i_j.$$

Usando el lema de Cartan [11] vol.3 p.18 se encuentra que existen únicas funciones s_{ij}^r en M tales que

$$\psi_j^r = \sum_i s_{ij}^r \theta^i, \qquad\qquad s_{ij}^r = s_{ji}^r.$$

Mientras que si definimos las formas de conexión normal como

$$\beta_r^s(X) = \langle \overline{\nabla}_X X_r, X_s \rangle \qquad\qquad \text{con } X \text{ tangente a } M$$

tenemos que en TM

$$\beta_r^s = \psi_r^s.$$

Al tomar distintos rangos de índices en la segunda ecuación estructural para N encontramos

$$\begin{aligned}
\Psi_j^i &= \Omega_j^i - \sum_r \psi_i^r \wedge \psi_j^r, \\
d\psi_j^r &= -\sum_i \psi_i^r \wedge \omega_j^i - \sum_w \psi_w^r \wedge \psi_j^w + \Psi_j^r, \\
d\psi_r^s &= \sum_i \psi_i^s \wedge \psi_i^r - \sum_w \psi_w^s \wedge \psi_r^w + \Psi_r^s.
\end{aligned}$$

Estos tres juegos de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi respectivamente y nos referiremos a ellas como su versión respectiva en formas diferenciales.

Para una prueba de estas afirmaciones consultar [11] vol.4 p. 42.

Capítulo 2

Noción de rigidez de variedades en espacios semi-euclideanos

2.1. Distintos tipos de deformaciones

Las siguientes definiciones presentan tres distintas formas en que es posible deformar una superficie inmersa isométricamente en un espacio euclideano.

Definición 2.1.1. Consideremos $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ una inmersión isométrica de una variedad semi-riemanniana M en $\mathbb{R}^{\nu,n}$. Diremos que una aplicación suave $\alpha : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ es una **deformación por inmersiones isométricas** de f si cumple:

(I) para todo $t \in [0,1]$ la aplicación α_t dada por $p \mapsto \alpha(p,t)$ es una inmersión;

(II) $\alpha(0) = f$;

(III) $\alpha_t^* \langle\ ,\ \rangle = \alpha_0^* \langle\ ,\ \rangle$ para todo $t \in [0,1]$.

Si en la definición anterior f es un encaje y pedimos que α_t sea encaje para cada $t \in [0,1]$, obtenemos el concepto de deformación por encajes isométricos de un encaje. Las siguientes definiciones se harán para el caso general de una inmersión, aunque es también posible definirlas usando encajes.

Facilitará la definición de los siguientes conceptos una notación lo más compacta posible, por lo que introducimos los siguientes conjuntos.

Definición 2.1.2. El **grupo de las isometrías lineales de** $\mathbb{R}^{\nu,n}$ es

$$O(\nu,n) = \{A : \mathbb{R}^{\nu,n} :\to \mathbb{R}^{\nu,n} \text{ lineal} \mid \langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{\nu,n}\};$$

el **grupo de las isometrías afines de** $\mathbb{R}^{\nu,n}$ denotado $\mathbf{Iso}(\nu, n)$ es

$$\{F : \mathbb{R}^{\nu,n} \to \mathbb{R}^{\nu,n} |\ F(x) = v + A(x)\ \forall x,\ \text{con } A \in O(\nu, n) \text{ y } v \in \mathbb{R}^{\nu,n}\}.$$

Definición 2.1.3. Diremos que la deformación por inmersiones isométricas $\alpha : [0, 1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ de f es trivial si para cada $t \in [0, 1]$ se cumple que $\alpha_t = A_t \circ f$ donde $A_t \in \mathbf{Iso}(\nu, n)$.

Es claro que dada una inmersión, siempre es posible encontrar deformaciones por inmersiones isométricas componiendo con elementos de $\mathbf{Iso}(\nu, n)$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.4. Una inmersión isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ es **deformable por inmersiones isométricas** si existe una deformación por inmersiones isométricas no trivial de f.

Es decir si existe una deformación por inmersiones isométricas

$$\alpha : [0, 1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$$

y $t \in [0, 1]$ tal que α_t no es de la forma $A \circ f$ para ningún $A \in \mathbf{Iso}(\nu, n)$.

A continuación se describe el análogo discreto de una deformación por inmersiones isométricas:

Definición 2.1.5. Sea $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ una inmersión isométrica. Diremos que f es **deformable** si existe $g : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ inmersión con las siguientes condiciones:

(i) $f^* \langle\ ,\ \rangle = g^* \langle\ ,\ \rangle$;

(ii) g no es de la forma $A \circ f$ para ninguna $A \in \mathbf{Iso}(\nu, n)$.

También es posible formular la definición usando encaje en lugar de inmersión. Una inmersión que no es deformable se puede pensar como únicamente determinada, módulo elementos en $\mathbf{Iso}(\nu, n)$.

Observación 2.1.5.1. Toda inmersión deformable por inmersiones isométricas es deformable.

Consideremos ahora el análogo infinitesimal de deformación por inmersiones isométricas.

Definición 2.1.6. Dada una inmersión isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$, una **deformación infinitesimal** $Z : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ de f es una aplicación suave que satisface

$$\langle dZ(X), df(X)\rangle = 0 \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.1}$$

Definición 2.1.7. El **campo de variación infinitesimal** de una deformación por inmersiones isométricas $\alpha : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ es el campo de vectores

$$\begin{aligned} Z : M &\to \mathbb{R}^{\nu,n} \\ p &\mapsto \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0,p). \end{aligned}$$

Proposición 2.1.8. *El campo de variación infinitesimal de una deformación por inmersiones isométricas es una deformación infinitesimal de f.*

Demostración. Sea $\alpha : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ una deformación por inmersiones isométricas de una inmersión $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ entonces

$$\langle X, Y\rangle = \langle \alpha_{t*}(X), \alpha_{t*}(Y)\rangle \qquad \forall\ X, Y \in T_pM, \quad \forall t \in [0,1].$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d}{dt}\left\langle \alpha_{t*}(X), \alpha_{t*}(Y)\right\rangle \\ =& \left\langle \frac{d}{dt}\alpha_{t*}(X), \alpha_{t*}(Y)\right\rangle + \left\langle \alpha_{t*}(X), \frac{d}{dt}\alpha_{t*}(Y)\right\rangle; \end{aligned} \tag{2.2}$$

tomando una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $c(0) = p$ y $c'(0) = X$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha_{t*}(X)\bigg|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\alpha(t, c(s)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\alpha(t, c(s)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} Z(c(s)) \\ &= dZ(X). \end{aligned}$$

Usando el cálculo anterior y el hecho de que $\alpha_{0*}(X) = df(X)$ la ecuación (2.2) evaluada en $t = 0$ se escribe como

$$0 = \langle dZ(X), df(Y)\rangle + \langle df(X), dZ(Y)\rangle \qquad \forall X, Y \in\ T_pM.$$

La cual es equivalente por polarización a

$$0 = \langle dZ(X), df(X)\rangle \qquad \forall X \in\ T_pM.$$

□

Definición 2.1.9. Una deformación infinitesimal Z de una inmersión isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ es **trivial** si existen $w \in \mathbb{R}^{\nu,n}$ y C un endomorfismo lineal antisimétrico de $\mathbb{R}^{\nu,n}$ tales que

$$Z(p) = C \cdot f(p) + w \qquad \forall p \in M.$$

Observación 2.1.9.1. Una deformación infinitesimal trivial es una deformación infinitesimal, ya que si X es un campo tangente a M, entonces

$$\begin{aligned}\langle dZ(X), df(X)\rangle &= \langle C \cdot df(X), df(X)\rangle \\ &= -\langle df(X), C \cdot df(X)\rangle\end{aligned}$$

donde C denota la matriz asociada al endomorfismo antisimétrico. Se cumple entonces (2.1).

Proposición 2.1.10. *Dada una deformación por inmersiones isométricas trivial $\alpha : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ de una inmersión isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ el campo de variación de α define una deformación infinitesimal trivial.*

Demostración. Consideremos una deformación por inmersiones isométricas trivial $\alpha : [0,1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ de una inmersión $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$, es decir una deformación de la forma

$$\alpha(t,p) = B(t) \cdot f(p) + v(t)$$

para todo $t \in [0,1]$ y todo $p \in M$, donde $B(t) \in O(\nu,n)$ y $v(t) \in \mathbb{R}^{\nu,n}$. Derivando respecto a t encontramos que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0,p) = B'(0) \cdot f(p) + v'(0).$$

Por tanto solo resta verificar que $B'(0)$ es un endomorfismo antisimétrico. Pero eso se sigue de la siguiente relación

$$B(t)^T \eta B(t) = \eta \qquad \forall t \in [0,1],$$

en donde η es la matriz de la métrica y la relación es válida porque $B(t) \in O(\nu,n)$. Derivando respecto a t encontramos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} B(t)^T \eta B(t) = 0,$$

es decir

$$B'(0)^T \eta B(0) + B(0)^T \eta B'(0) = 0$$

pues la métrica es constante. Usando que $B(0) = I$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$B'(0)^T \eta = -\eta B'(0),$$

es decir $B'(0)$ es un endomorfismo antisimétrico de $\mathbb{R}^{\nu,n}$. □

Observación 2.1.10.1. Este resultado implica que una deformación infinitesimal $Z : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ de la inmersión $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ es trivial, si la aplicación

$$\begin{aligned}\alpha : [0,1] \times M &\to \mathbb{R}^{\nu,n} \\ (t,p) &\mapsto tZ(p) + f(p)\end{aligned}$$

es una deformación por inmersiones isométricas trivial.

2.2. Distintos tipos de rigidez

Ahora que hemos introducido las formas en que es posible deformar una subvariedad o inmersión, definiremos cuando no es posible deformarla.

Definición 2.2.1. Una inmersión $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,m}$ de una variedad semi-riemanniana en $\mathbb{R}^{\nu,m}$, se dice:

globalmente rígida si para toda $g : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ inmersión isométrica se tiene $g = A \circ f$, donde $A \in \mathbf{Iso}(\nu, n)$;

infinitesimalmente rígida si toda deformación infinitesimal $Z : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ de f es trivial;

rígida por inmersiones isométricas si toda deformación por inmersiones isométricas de f es trivial.

En general no es posible concluir sobre la rigidez por inmersiones isométricas a partir de rigidez infinitesimal. El siguiente resultado nos da una condición muy fuerte bajo la cual se concluye que una inmersión es rígida por inmersiones isométricas, suponiendo la rigidez infinitesimal del campo variacional para cada $t \in [0, 1]$.

Lema 2.2.2. *Sea $\alpha : [0, 1] \times M \to \mathbb{R}^n$ una deformación por inmersiones isométricas de una inmersión f y sea Z_t el campo de variación de α al tiempo t. Si cada Z_t es trivial, entonces α es trivial.*

Demostración. Por definición

$$Z_t(p) = \frac{\partial}{\partial t}\alpha(t, p),$$

y como cada Z_t es trivial, se tiene

$$Z_t(p) = B_t \cdot \alpha(t, p) + w_t$$

donde B_t es un endomorfismo antisimétrico de $\mathbb{R}^n$ y $w_t \in \mathbb{R}^n$. Entonces para todo $p_1, p_2 \in M$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\alpha(t, p_1) - \alpha(t, p_2)\|^2 &= 2\left\langle \alpha(t, p_1) - \alpha(t, p_2), Z_t(p_1) - Z_t(p_2)\right\rangle \\
&= 2\left\langle \alpha(t, p_1) - \alpha(t, p_2), B_t \cdot [\alpha(t, p_1) - \alpha(t, p_2)]\right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

dado que B_t es antisimétrica. Por tanto $\|\alpha(t, p_1) - \alpha(t, p_2)\|$ es constante para todo $t \in [0, 1]$, lo que implica

$$\|\alpha(t, p_1) - \alpha(t, p_2)\| = \|\alpha(0, p_1) - \alpha(0, p_2)\| \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene $\alpha_t(p) = A_t(\alpha_0(p)) + w_t$ con $A_t \in O(n)$ y $w_t \in \mathbb{R}^n$. $\square$

2.3. Ejemplos y propiedades

Presentamos a continuación ejemplos de deformaciones infinitesimales.

Ejemplo 2.3.1. Considere M una subvariedad semi-riemanniana de dimensión estrictamente menor a la de la variedad ambiente $\mathbb{R}^{\nu,n}$ y η un campo vectorial normal a M tal que el operador de forma A_η sea nulo. Entonces la ecuación de Weingarten se lee

$$\overline{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla^{\perp}_X \eta = \nabla^{\perp}_X \eta \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

y el campo $Z = \eta$ satisface la ecuación (2.1) que en el caso de la inclusión se lee

$$\left\langle \overline{\nabla}_X \eta, X \right\rangle = 0 \qquad\qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Ejemplo 2.3.2. Tomando un campo de Killing Z en una subvariedad M de $\mathbb{R}^{\nu,n}$ tenemos que

$$\left\langle \overline{\nabla}_X Z, X \right\rangle = \langle \nabla_X Z, X \rangle = 0 \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

El siguiente ejemplo es una deformación infinitesimal no trivial, con soporte compacto.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos el plano $z = 0$ en $\mathbb{R}^3$, y sea $f \neq 0$ una función real C^∞ definida en el plano, con soporte compacto. Definamos $Z = f\frac{\partial}{\partial z}$. Como la segunda forma fundamental del plano es nula, y Z es una sección del haz normal, el ejemplo 2.3.1 muestra que en efecto Z define una deformación infinitesimal del plano. Para verificar que no puede ser trivial, suponga lo contrario, es decir que

$$Z(x) = C \cdot x + w \tag{2.3}$$

para una matriz antisimétrica C y un vector fijo w. Como f tiene soporte compacto podemos elegir X_1, X_2 linealmente independientes en el plano tales que $Z(X_i) = Z(-X_i) = 0$ para $i = 1, 2$; entonces

$$\begin{aligned} 0 &= C \cdot X_1 + w, \\ 0 &= C \cdot -X_1 + w, \end{aligned}$$

y por lo tanto $0 = 2w$. Entonces en la ecuación (2.3) $Z(X_i) = 0$ implica $C \cdot X_i = 0$ para $i = 1, 2$; como $\{X_1, X_2\}$ es una base del plano $z = 0$ concluimos que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \subset Ker(C)$ lo que contradice $f \neq 0$. Por tanto Z no es trivial.

Observación 2.3.3.1. Es inmediato de la $\mathbb{R}$-bilinealidad de la conexión y la métrica que el espacio de las deformaciones infinitesimales de una inmersión isométrica forman un espacio vectorial real. Al ser las matrices antisimétricas un espacio vectorial, tenemos que las deformaciónes infinitesimales triviales son un subespacio vectorial del primero.

El siguiente resultado muestra como se relacionan la métrica de la variedad inmersa y la de una "variación" construida a partir de una deformación infinitesimal.

Proposición 2.3.4. *Sea Z una deformación infinitesimal de una inmersión $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$. Defina $\alpha_t : [-1,1] \times M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ por*

$$\alpha_t(p) = t \cdot Z(p) + f(p).$$

Entonces para todo punto p en M existen un abierto V_p de M vecindad de p y un número $t_p \in (0,1]$ tales que α_t es una inmersión en V_p para $-t_p \le t \le t_p$. Además la métrica $\alpha_t^* \langle\ ,\ \rangle$ en M está relaciónada con la métrica $f^* \langle\ ,\ \rangle$ por

$$[\alpha_t^* \langle\ ,\ \rangle](X,Y) = [f^* \langle\ ,\ \rangle](X,Y) + t^2 \langle dZ(X), dZ(Y)\rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En particular, las métricas ${\alpha_t}^* \langle\ ,\ \rangle$ y $\alpha_{-t}^* \langle\ ,\ \rangle$ en M coinciden.

Demostración. Si X es un vector tangente en M, con $X = c'(0)$ para una curva c en M, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_{t_*} X &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \alpha_t\big(c(s)\big) \\ &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} f(c(s)) + tZ\big(c(s)\big) \\ &= (f \circ c)'(0) + tdZ\big(c'(0)\big) \\ &= df(X) + tdZ(X). \end{aligned}$$

Por tanto

$$[{\alpha_t}^* \langle\ ,\ \rangle](X,Y) = \langle \alpha_{t*}X, \alpha_{t*}Y\rangle = \langle df(X), df(Y)\rangle + t^2 \langle dZ(X), dZ(Y)\rangle,$$

debido a que

$$\langle df(X), dZ(Y)\rangle + \langle df(Y), dZ(X)\rangle = 0.$$

Para verificar la primera afirmación, considere $p \in M$, y la aplicación continua h_p dada por

$$\begin{aligned} h_p : [-1,1] \times M &\to \mathbb{R} \\ (t,q) &\mapsto \det(\Pi[\alpha_{t*}]), \end{aligned}$$

donde Π es la proyección de la matriz asociada $[\alpha_{t*}]$ a un menor cuyo determinante no se anula en $(0,p)$. Como h_p es continua, existe una vecindad abierta $(-t_p, t_p) \times V_p$ de $(0,p)$ tal que $h\big((-t_p,t_p) \times V_p\big) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir tal que para todo $(t,q) \in (-t_p,t_p) \times V_p$ α_t es una inmersión en q. $\square$

Proposición 2.3.5. *Dada una deformación infinitesimal trivial Z de una inmersión isométrica $f : M \to \mathbb{R}^{\nu,n}$ existe una deformación por inmersiones isométricas trivial de f tal que su campo de variación infinitesimal coincide con Z.*

Demostración. Sea Z la deformación infinitesimal de f de la hipótesis

$$Z(p) = C \cdot f(p) + w, \qquad \forall p \in M.$$

Entonces Z es el campo de variación infinitesimal de la deformación por inmersiones isométricas definida por

$$\alpha(t, p) = e^{tC} \cdot f(p) + tw.$$

En efecto, derivando respecto a t, obtenemos

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, p) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} e^{tC} \cdot f(p) + tw = C \cdot f(p) + w = Z(p).$$

Resta verificar que la deformación por inmersiones isométricas es trivial, es decir que $e^{tC} \in O(\nu, n)$ para todo $t \in [0, 1]$. Como C es una mátriz antisimétrica, tambien lo es tC, para todo $t \in [0, 1]$ y se tiene la siguiente relación

$$\eta \cdot tC \cdot \eta^{-1} = -tC^T$$

donde η es la matriz de la métrica de $\mathbb{R}^{\nu,n}$. Aplicando la exponencial de ambos lados de la ecuación anterior se concluye

$$\eta \cdot e^{tC} \cdot \eta^{-1} = \left(e^{-tC}\right)^T,$$

equivalentente

$$\eta \cdot e^{tC} = \left(e^{-tC}\right)^T \cdot \eta.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por la izquierda por $\left(e^{tC}\right)^T$

$$\left(e^{tC}\right)^T \cdot \eta \cdot e^{tC} = \eta,$$

es decir $e^{tC} \in O(\nu, n)$ para todo $t \in [0, 1]$. □

Proposición 2.3.6. ***1)*** *Si Z es una deformación infinitesimal de un abierto M de un espacio afín de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ y Z es siempre tangente al plano, entonces Z es trivial.*

2) *Z es una deformación infinitesimal de un abierto M del espacio afín anteriormente considerado si y solo si el componente tangencial $Z^\top$ de Z es una deformación infinitesimal y por tanto trivial.*

3) *Si $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie y Z una deformación infinitesimal de M que es normal a M en todas partes, entonces en cualquier punto p donde $Z(p) \neq 0$ la segunda forma fundamental II_p es nula. Por tanto si $Z(p) \neq 0$ para todo p en un abierto U, entonces U se encuentra en un hiperplano.*

Demostración. **1)** Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el espacio afín de la hipótesis es el generado por las primeras k coordenadas $\{x^1, x^2, \ \dots \ , x^k\}$. Como Z es tangente a dicho espacio, entonces

$$Z = \sum_{i=1}^{k} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

en donde $a^1, a^2, \dots, a^k$ son funciones suaves de las coordenadas $x^1, x^2, \ \dots \ , x^k$. Para toda $1 \leq j \leq k$ se tiene

$$dZ\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

y usando (2.1) deducimos que para $1 \leq i, j \leq k$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dZ\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, dZ\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\rangle = 0,$$

es decir para toda i, j

$$\frac{\partial a^j}{\partial x^i} = -\frac{\partial a^i}{\partial x^j}. \tag{2.4}$$

Si $i = j$ obtenemos $\frac{\partial a^i}{\partial x^i} = 0$, y derivando la igualdad respecto a otra coordenada x^l

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial a^j}{\partial x^i} &= -\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial a^i}{\partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial a^i}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial a^l}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial a^l}{\partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial a^j}{\partial x^l} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial a^j}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{\partial a^j}{\partial x^i}$ es una función constante, y a^i es de la forma

$$a^i = \sum_j \frac{\partial a^i}{\partial x^j} x^j + w^i$$

para alguna constante w^i. Por lo tanto

$$Z(p) = C \cdot p + w$$

donde C es la matriz $\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)_{ij}$ que es antisimétrica por (2.4) y hemos identificado el espacio tangente al k-plano en p con el mismo k-plano.

2) Descomponemos la deformación infinitesimal Z en su parte tangente y su parte normal, $Z^\top = Z - Z^\perp$. Como M está contenido en un plano tenemos que $A_{Z^\perp}$ se anula. El ejemplo 2.3.1 muestra que la parte normal siempre define una deformación infinitesimal. Como la suma de deformaciones infinitesimales es una deformación infinitesimal, se tiene que Z es una deformación infinitesimal si y solo si $Z^\top$ lo es.

3) Por definición Z es una deformación infinitesimal si y solo si

$$\langle dZ(X), X\rangle = 0 \qquad\qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

en donde identificamos el tangente a la variedad con su imagen bajo i_*. Como Z es normal a M se tiene $\langle Z, X\rangle = 0$ para todo X campo tangente a M lo que implica que

$$\langle Z, dX(X)\rangle = -\langle dZ(X), X\rangle = 0 \qquad\qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Por tanto Z es una deformación infinitesimal de la subvariedad si y solo si

$$\langle \mathrm{II}(X, X), Z\rangle = -\langle dZ(X), X\rangle = 0 \qquad\qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.5}$$

Si U es una vecindad abierta de M tal que $Z(q) \neq 0$ para todo $q \in U$, la ecuación (2.5) implica que

$$\mathrm{II}_q(X_q, X_q) = 0 \qquad\qquad \forall q \in U \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Como II es bilineal y simétrica, concluimos que $\mathrm{II} = 0$ en U. $\square$

Capítulo 3

Rigidez de hipersuperficies en espacios euclidianos

3.1. Rigidez de superficies en $\mathbb{R}^3$

El resultado principal de este capítulo es el siguiente: toda superficie compacta, convexa en $\mathbb{R}^3$ que no contiene ninguna porción de un plano, es infinitesimalmente rígida. Para demostrar este resultado, será necesario definir el "campo rotacional asociado a una deformación", el cual nos permite tener una idea más intuitiva del significado de una deformación infinitesimal. Los resultados expuestos en esta sección pueden encontrarse en [11].

Consideremos una superficie inmersa isométricamente $f : M \to \mathbb{R}^3$. Entonces una deformación infinitesimal trivial de f es de la forma

$$Z(p) = C \cdot f(p) + w,$$

en donde C es una matriz antisimétrica fija, w un vector fijo y en donde se identifica $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^3$. Debido a que la multiplicación de una matriz antisimétrica por un vector (x, y, z) se identifica con el producto vectorial,

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-cy + bz, cx - az, -bx + ay) = (a, b, c) \times (x, y, z),$$

es posible escribir a Z como

$$Z(p) = Y \times f(p) + w \tag{3.1}$$

para w y Y vectores fijos. Diferenciando la ecuación (3.1) obtenemos

$$dZ(X) = Y \times df(X)$$

para todo $X \in TM$. El siguiente lema muestra que esta ecuación es válida para una deformación infinitesimal arbitraria, tomando Y no como un vector constante sino como una función $Y : M \to \mathbb{R}^3$.

Lema 3.1.1. *Si Z es una deformación infinitesimal de $f : M \to \mathbb{R}^3$, entonces para cada $p \in M$ existe un único vector $Y(p) \in \mathbb{R}^3$ tal que*

$$dZ(X) = Y(p) \times df(X) \qquad \forall X \in T_pM.$$

Además el campo de vectores $Y : M \to \mathbb{R}^3$ definido de esta forma es diferenciable.

Demostración. Sean $X_1, X_2 \in T_pM$ línealmente independientes. Afirmamos que para $i = 1, 2$, existen vectores $Y_i \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$dZ(X_i) = Y_i \times df(X_i).$$

Esta afirmación se verifica observando que si $dZ(X_i) = 0$ entonces $Y_i = 0$ cumple lo requerido. Si $dZ(X_i) \neq 0$ entonces como Z es una deformación infinitesimal se tiene que $\langle dZ(X_i), df(X_i)\rangle = 0$ y el espacio generado por $dZ(X_i)$ y $df(X_i)$, denotado $\mathscr{L}(dZ(X_i), df(X_i))$, es un subespacio de $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ de dimensión 2. Así si $\mathscr{L}(dZ(X_i), df(X_i))^\perp$ es su complemento ortogonal, se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} L_i : \ \mathscr{L}(dZ(X_i), df(X_i))^\perp &\to \mathscr{L}(dZ(X_i)) \\ X &\mapsto X \times df(X_i) \end{aligned}$$

es un isomorfismo, lo que implica la afirmación.

Usando que Z es una deformación infinitesimal tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle df(X_1), dZ(X_2)\rangle + \langle df(X_2), dZ(X_1)\rangle \\ &= \langle df(X_1), Y_2 \times df(X_2)\rangle + \langle df(X_2), Y_1 \times df(X_1)\rangle \\ &= - \langle Y_2, df(X_1) \times df(X_2)\rangle + \langle Y_1, df(X_1) \times df(X_2)\rangle \\ &= \langle Y_1 - Y_2, df(X_1) \times df(X_2)\rangle . \end{aligned}$$

Por tanto $Y_1 - Y_2 \in df(T_pM)$, y podemos escribir

$$Y_1 - Y_2 = a\ df(X_1) + b\ df(X_2) \qquad \text{para algunas constantes } a, b \in \mathbb{R}.$$

Si definimos $Y(p)$ como

$$Y(p) = Y_2 + b\ df(X_2) = Y_1 - a\ df(X_1)$$

entonces se tiene

$$dZ(X_i) = Y_i \times df(X_i) = Y(p) \times df(X_i).$$

La unicidad puede verificarse pensando la ecuación anterior como la multiplicación por una matríz antisimétrica C,

$$dZ(X) = Y \times df(X) = C \cdot df(X) \qquad\qquad X \in T_pM. \tag{3.2}$$

Esta ecuación implica que C está determinada sobre el plano tangente (un espacio de dimensión 2) y por tanto que está totalmente determinada. Este hecho se verifica de la siguiente forma: tomemos $p \in M$ y un marco ortonormal $\{X_1,X_2\}$ en una vecindad de p el cual identificaremos con $\{f_*X_1, f_*X_2\}$ y completamos a un marco móvil de $\mathbb{R}^3$ con X_3 normal a M.

Así es posible determinar para cada punto en la vecindad de p una matríz B dada por

$$B_{ij} = \langle C \cdot X_j, X_i \rangle . \tag{3.3}$$

Como C es antisimétrica la ecuación (3.2) nos indica que B está bien definida pues

$$\langle C \cdot X_3, X_i \rangle = - \langle X_3, C \cdot X_i \rangle$$

para $i = 1, 2$ y

$$\langle C \cdot X_3, X_3 \rangle = 0.$$

Claramente las entradas de B son diferenciables como funciones con dominio en M y B es la única matríz antisimétrica que satisface (3.3).

Puntualmente la matríz C se obtiene por conjugación de B con una matriz de cambio de base φ, es decir

$$C_p = \varphi_p^t \; B_p \; \varphi_p.$$

Como la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a X_1, X_2, X_3 tiene entradas diferenciables al variar de punto en M (pues X_1, X_2, X_3 son campos diferenciables) entonces $p \mapsto C_p$ es diferenciable. Además como en cada punto p la aplicación

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \\ H &\mapsto \varphi_p^t \; H \; \varphi_p \end{aligned}$$

es inyectiva, obtenemos la unicidad de C_p, y por tanto la de Y_p. □

Definición 3.1.2. El campo vectorial $p \mapsto Y(p)$ del lema 3.1.1 es llamado **campo de rotación (infinitesimal)** de la deformación Z.

Las aclaraciones hechas al inicio de la sección muestran que si Z es trivial, entonces el campo rotacional es constante. El siguiente lema es el recíproco de esta afirmación.

Lema 3.1.3. *Si el campo de rotación de una deformación infinitesimal Z es constante, entonces Z es trivial.*

Demostración. Por hipótesis existe un vector $Y_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$dZ(X) = Y_0 \times df(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sea c una curva en M con $c(0) = p_0 \in M$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\, Z(c(t)) = dZ(c'(t)) = Y_0 \times df(c'(t)) = Y_0 \times \frac{d}{dt}\, f(c(t)),$$

por tanto

$$Z(c(t)) - Z(p_0) = Y_0 \times (f(c(t)) - f(p_0)),$$

es decir

$$Z(c(t)) = Y_0 \times f(c(t)) + w_0,$$

donde $w_0 \in \mathbb{R}^3$ no depende de c o de p_0. Es decir, para todo $p \in M$ se tiene

$$Z(p) = Y_0 \times f(p) + w_0.$$

□

Los dos lemas anteriores lemas 3.1.1 y 3.1.3 nos dicen que una deformación infinitesimal de una superficie en $\mathbb{R}^3$ define un campo rotacional, el cual actúa en vectores tangentes al punto con el producto vectorial; además, dicho campo rotacional es constante si y solo si Z es trivial.

Para la demostración del siguiente teorema de rigidez se usarán resultados básicos de superficies planas en $\mathbb{R}^3$. Usaremos con frecuencia los siguientes términos:

Definición 3.1.4. Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$; diremos que un punto $p \in M$ es **plano** si ambas curvaturas principales en dicho punto son 0, y que es **parabólico** si una curvatura principal es 0 y la otra es distinta de 0.

Será también necesario recordar la definición de superficie reglada:

Definición 3.1.5. Una **superficie reglada** es aquella que puede ser parametrizada como

$$f(s,t) = c(s) + t\delta(s)$$

para dos curvas $c, \delta : (a,b) \to \mathbb{R}^3$.

Lema 3.1.6. *Sea M una superficie en $\mathbb{R}^3$ de curvatura de Gauss $K = 0$. Entonces:*

1) *Si ambas curvaturas principales en una vecindad U de un punto p son cero, entonces U es parte de un plano.*

2) *Si p es un punto no plano, entonces p está contenido en una vecindad que pertenece a una superficie reglada.*

Demostración. Para la primera parte denotemos ν un vector unitario normal a la superficie; si ambas curvaturas se anulan en un abierto U, para dicho abierto se tiene $d\nu = 0$, entonces el vector normal ν es constante en la vecidad y $U \subset p + \nu^{\perp}$.

Para la segunda afirmación, note que en una vecindad de un punto no plano p, por la continuidad de las curvaturas principales podemos considerar $k_1 = 0$ y $k_2 \neq 0$ en dicha vecindad de p; sea $\{X_1, X_2, \nu\}$ un marco móvil formado por los vectores principales y el vector normal. Consideremos las formas θ^i duales al marco móvil y las formas de conexión ω_1^2, ψ_1^3 y ψ_2^3 (ver Sección 1.3). Como

$$\overline{\nabla}_{X_i}\nu = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ k_2 X_2, & i = 2 \end{cases},$$

se cumple entonces

$$\begin{aligned} \psi_1^3(X_i) &= -\psi_3^1(X_i) = -\left\langle X_1, \overline{\nabla}_{X_i}\nu \right\rangle = 0 \\ \psi_2^3(X_i) &= -\psi_3^2(X_i) = -\left\langle X_2, \overline{\nabla}_{X_i}\nu \right\rangle = -k_2\theta^2(X_i), \end{aligned}$$

es decir

$$\psi_1^3 = 0, \qquad \psi_2^3 = -k_2\theta^2. \tag{3.4}$$

Usando la segunda ecuación estructural y el hecho de que $\mathbb{R}^3$ es plano, lo que implica que las formas de curvatura ambiente son nulas, encontramos que

$$0 = d\psi_1^3 = -\psi_2^3 \wedge \omega_1^2 = k_2\theta^2 \wedge \omega_1^2.$$

Como k_2 no se anula entonces se cumple

$$0 = \theta^2 \wedge \omega_1^2(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} \theta^2(X_1) & \omega_1^2(X_1) \\ \theta^2(X_2) & \omega_1^2(X_2) \end{vmatrix};$$

la ecuación anterior implica que en todo punto

$$\omega_1^2 = \lambda\theta^2$$

para una función λ, y por tanto

$$\left\langle \overline{\nabla}_{X_1} X_1, X_2 \right\rangle = \omega_1^2(X_1) = \lambda\theta^2(X_1) = 0. \tag{3.5}$$

Además (3.4) indica que

$$0 = \psi_1^3(X_1) = \left\langle \overline{\nabla}_{X_1} X_1, X_3 \right\rangle, \tag{3.6}$$

y como X_1 es unitario, la compatibilidad de la conexión con el producto punto implica

$$0 = \left\langle \overline{\nabla}_{X_1} X_1, X_1 \right\rangle. \tag{3.7}$$

De las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) obtenemos

$$\overline{\nabla}_{X_1} X_1 = 0.$$

Por tanto las curvas integrales de X_1 son geodésicas respecto a la conexión de $\mathbb{R}^3$, es decir son lineas rectas. $\square$

Lema 3.1.7. *Sea p un punto parabólico en una superficie plana inmersa en $\mathbb{R}^3$. Sea $L_p \subset \mathbb{R}^3$ la linea recta que contiene la regla por p de la superficie reglada del lema anterior. Considere O_p la componente conexa de p en $L_p \cap M \cap \{x \in M : k_2(x) \neq 0\}$. Sea c la parametrización por longitud de arco de L_p, con $c(0) = p$, y definamos $k(s) = k_2(c(s))$. Entonces en O_p la función k es de la forma*

$$k(s) = \frac{1}{As + B}$$

para A y B constantes.

Demostración. Siguiendo la notación y construcción del lema anterior tenemos

$$\psi_1^3 = 0, \qquad \psi_2^3 = -k_2 \theta^2. \tag{3.8}$$

En la demostración del lema anterior habíamos concluido usando las ecuaciones estructurales que ω_1^2 es un múltiplo de θ^2, y, junto con la ecuación anterior, eso implica que es también un múltiplo de ψ_2^3, digamos

$$\omega_1^2 = \lambda \psi_2^3. \tag{3.9}$$

Usando nuevamente la segunda ecuación estructural y (3.8) obtenemos

$$d\psi_2^3 = -\psi_1^3 \wedge \omega_2^1 = 0. \tag{3.10}$$

Entonces por (3.8)

$$\begin{aligned} 0 = d\psi_2^3 &= -dk_2 \wedge \theta^2 - k_2\ d\theta^2 \\ &= -dk_2 \wedge \theta^2 + k_2\ \omega_1^2 \wedge \theta^1, \end{aligned}$$

en donde se usó la primera ecuación estructural para la segunda igualdad. Reescribiendo la igualdad anterior

$$dk_2 \wedge \theta^2 = -k_2\ \theta^1 \wedge \omega_1^2,$$

y aplicando esta 2-forma a (X_1, X_2) en ambos lados de la igualdad anterior

$$\begin{aligned} X_1(k_2) &= -k_2\ \omega_1^2(X_2) && \\ &= -k_2\ \lambda\ \psi_2^3(X_2) && \text{por (3.9)} \\ &= (k_2)^2\ \lambda && \text{por (3.8).} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora examinemos la segunda ecuación estructural de M (ver Sección 1.3) para ω_2^1

$$d\omega_1^2 = -\sum_{k=2}^{2} \omega_k^1 \wedge \omega_2^k + \Omega_1^2$$

como $\omega_1^1 = \omega_1^2 = 0$, la ecuación anterior tiene la forma

$$d\omega_1^2 = \Omega_1^2.$$

Como las formas de curvatura del espacio ambiente se anulan, usando la ecuación anterior encontramos que la ecuación de Gauss (desarrollada en la Sección 1.3)

$$\Psi_1^2 = \Omega_1^2 - \sum_{r=1}^{3} \psi_2^r \wedge \psi_1^r$$

se lee como

$$0 = d\omega_1^2 - \psi_2^3 \wedge \psi_1^3.$$

Es sencillo verificar por un cálculo directo que

$$\psi_1^3 \wedge \psi_2^3 = K\theta^1 \wedge \theta^2.$$

Tenemos en efecto

$$\psi_1^3 \wedge \psi_2^3(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} \langle d\nu(X_1), X_1\rangle & \langle d\nu(X_2), X_1\rangle \\ \langle d\nu(X_1), X_2\rangle & \langle d\nu(X_2), X_2\rangle \end{vmatrix} = K\ \theta^1 \wedge \theta^2(X_1, X_2).$$

Obtenemos así la ecuación

$$d\omega_1^2 = -K\theta^1 \wedge \theta^2. \tag{3.12}$$

Como $K = 0$ concluimos que

$$d\omega_1^2 = 0, \tag{3.13}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = d\omega_1^2 &= d(\lambda\ \psi_2^3) && \text{por (3.9)} \\ &= d\lambda \wedge \psi_2^3 + 0 && \text{por (3.10)} \\ &= -k_2\ d\lambda \wedge \theta^2 && \text{por (3.8).} \end{aligned}$$

Aplicando esta 2-forma a (X_1, X_2) se encuentra que $-k_2\ d\lambda(X_1) = 0$, es decir λ es constante a lo largo de las curvas integrales de X_1. Por lo que la ecuación (3.11) dice que la función $k(s) = k_2(c(s))$ satisface la ecuación diferencial

$$k'(s) = -Ak(s)^2 \tag{3.14}$$

para alguna constante A. Esta ecuación es equivalente en O_p a

$$\left(\frac{1}{k(s)}\right)' = -\frac{k'(s)}{k(s)^2} = A, \tag{3.15}$$

y por tanto

$$\frac{1}{k(s)} = As + B;$$

despejando $k(s)$ encontramos la expresión buscada

$$k(s) = \frac{1}{As + B} \tag{3.16}$$

para una constante B que determina la condición inicial $k(0)$. □

Corolario 3.1.8. *Sea p un punto parabólico de una superficie plana inmersa en $\mathbb{R}^3$, sea L_p la linea recta que contiene la curva integral de X_1 (el campo formado por los vectores principales correspondientes a la curvatura nula) y sea C_p la componente conexa de $M \cap L_p$ que contiene a p. Entonces C_p está formado por puntos parabólicos y no tiene puntos terminales en $M \cap L_p$, en otras palabras C_p es homeomorfo a un intervalo abierto.*

Demostración. Primero demostraremos que C_p está formado por puntos parabólicos. Suponga por el contrario que existen puntos no parabólicos en C_p. Sea c la parametrización de L_p por longitud de arco al igual que en el lema anterior. Como existe un punto no parabólico entonces O_p está acotado superiormente o inferiormente (respecto a la parametrización); en cualquier caso el supremo o ínfimo respectivamente, digamos $q = c(s_0)$, satisface que $k_2(q) = 0$, caso contrario, en una vecindad del punto tendríamos $k_2 \neq 0$ y $k_1 = 0$, en contradicción con que era el supremo o el ínfimo respectivamente de O_p. Entonces, usando la fórmula del lema anterior y la continuidad de k_2, obtenemos

$$0 = k_2(q) = k(c(s_0)) = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{As + B}.$$

Lo cual es imposible. Por tanto todos los puntos de C_p son parabólicos y $C_p = O_p$. Si $q \in M$ es un punto terminal de C_p, el mismo argumento muestra que $k_2(q) \neq 0$; por tanto q sería un punto parabólico y en una vecindad de q se tendría que M es una superficie reglada con q en su interior, de forma que el reglado considerado inicialmente se podría extender de forma que q estuviera en su interior, lo que es una contradicción. □

Frecuentemente, para demostrar la rigidez infinitesimal de una superficie, se hace uso de fórmulas integrales deducidas usando el teorema de Stokes junto con una forma diferencial "mágica". Tal es el caso del siguiente teorema; para ello será necesario introducir dos maneras de construir formas diferenciales usando formas diferenciales con valores en $\mathbb{R}^3$ y el producto vectorial e interior de $\mathbb{R}^3$.

Definición 3.1.9. Sea M una variedad riemanniana y ω, η formas diferenciales de grado k y l respectivamente. Definimos la $(k+l)$-formas $\omega \widehat{\times} \eta$ y $\omega \cdot \eta$ por

$$\begin{aligned}
&\omega \widehat{\times} \eta(X_1, ..., X_k, X_{k+1}, ...X_{k+l}) \\
&\qquad = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn\sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) \times \eta(X_{\sigma(k+1)}, ..., X_{\sigma(k+l)}). \\
&\omega \cdot \eta(X_1, ..., X_k, X_{k+1}, ...X_{k+l}) \\
&\qquad = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn\sigma \cdot \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(k)}) \cdot \eta(X_{\sigma(k+1)}, ..., X_{\sigma(k+l)}).
\end{aligned}$$

Se tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\omega \widehat{\times} \eta &= (-1)^{kl+1} \eta \widehat{\times} \omega, \\
\omega \cdot \eta &= (-1)^{kl} \eta \cdot \omega, \\
d(\omega \widehat{\times} \eta) &= d\omega \widehat{\times} \eta + (-1)^k \omega \widehat{\times} d\eta, \\
d(\omega \cdot \eta) &= d\omega \cdot \eta + (-1)^k \omega \cdot d\eta, \\
d(\omega \cdot (\eta \widehat{\times} \lambda)) &= (d\omega \cdot (\eta \widehat{\times} \lambda)) + (-1)^k (\omega \cdot (d\eta \widehat{\times} \lambda)) \\
&\quad + (-1)^{k+l} (\omega \cdot (\eta \widehat{\times} d\lambda)).
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.10 (Blaschke). *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta convexa que no contiene ninguna porción de un plano. Entonces M es infinitesimalmente rígida.*

Demostración. Como M es convexa tenemos $K(p) \geq 0$ en cada punto $p \in M$. En efecto, en el caso contrario, M se encontraría de ambos lados de T_pM, lo que contradice la convexidad.

Empecemos con el caso $K > 0$ en todo punto. Sea Z una deformación infinitesimal de la inclusión $f : M \to \mathbb{R}^3$ y sea Y su campo de rotación, de forma que

$$dZ(X) = Y(p) \times df(X),$$

para todo $p \in M$ y todo $X \in T_pM$. Esta relación puede escribirse en términos de las 1-formas dZ, df con valores en $\mathbb{R}^3$ y de la función Y con valores en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera

$$dZ = Y \ \widehat{\times} \ df.$$

Derivando la ecuación

$$0 = d(dZ) = dY \ \widehat{\times}\ df. \tag{3.17}$$

Esto quiere decir que para $X_1, X_2 \in T_pM$ se tiene

$$dY(X_1) \times df(X_2) - dY(X_2) \times df(X_1) = 0. \tag{3.18}$$

Tomando el producto punto de esta ecuación con $df(X_1)$ y $df(X_2)$ obtenemos

$$\langle dY(X_1) \times df(X_2), df(X_1)\rangle = 0,$$
$$\langle dY(X_2) \times df(X_1), df(X_2)\rangle = 0,$$

por lo que $dY(X_i)$ pertenece al plano generado por $df(X_1)$ y $df(X_2)$; como f es la inclusión se concluye que dY es un endomorfismo lineal de T_pM en T_pM.

Si elegimos un marco móvil $\{X_1, X_2\}$, podemos escribir

$$dY(X_1) = \alpha\ df(X_1) + \beta\ df(X_2), \tag{3.19}$$
$$dY(X_2) = \gamma\ df(X_1) + \delta\ df(X_2), \tag{3.20}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son funciones suaves; haciendo el producto vectorial de (3.19) y (3.20) por $df(X_2)$ y $df(X_1)$ respectivamente obtenemos

$$dY(X_1) \times df(X_2) = \alpha df(X_1) \times df(X_2), \tag{3.21}$$
$$dY(X_2) \times df(X_1) = \delta df(X_2) \times df(X_1); \tag{3.22}$$

restando (3.22) de (3.21) y usando (3.18) deducimos que

$$(\alpha + \delta)\ df(X_1) \times df(X_2) = 0; \tag{3.23}$$

como f es la inclusión y X_1 , X_2 son linealmente independientes, se concluye que

$$\alpha + \delta = 0. \tag{3.24}$$

Ahora derivemos la siguiente expresión utilizando la fórmula intrinseca de la derivada exterior de una 1-forma

$$0 = d(dY)(X_1, X_2) = X_1(dY(X_2)) - X_2(dY(X_1)) - dY([X_1, X_2]);$$

sustituyendo (3.19) y (3.20) y usando la regla de Leibniz obtenemos

$$0 = \gamma\overline{\nabla}_{X_1}X_1 + \delta\overline{\nabla}_{X_1}X_2 - \alpha\overline{\nabla}_{X_2}X_1 - \beta\overline{\nabla}_{X_2}X_2 + \text{términos tangentes a } M. \tag{3.25}$$

Tomando el producto interior con el normal exterior a la superficie N deducimos

$$0 = \gamma \left\langle \overline{\nabla}_{X_1} X_1, N \right\rangle + \delta \left\langle \overline{\nabla}_{X_1} X_2, N \right\rangle - \alpha \left\langle \overline{\nabla}_{X_2} X_1, N \right\rangle - \beta \left\langle \overline{\nabla}_{X_2} X_2, N \right\rangle;$$

renombrando para aligerar la notación y usando (3.24), obtenemos

$$0 = \gamma l - 2\alpha m - \beta n.$$

En particular si tomamos X_1, X_2 vectores principales en el punto p se tiene $m = 0$, y la ecuación se lee

$$0 = \gamma l - \beta n. \tag{3.26}$$

Como $K = ln > 0$, entonces γ y β tienen el mismo signo, de forma que $0 \leq \beta\gamma$ y por (3.26) $0 = \beta\gamma$ si y solo si $\beta = \gamma = 0$. Por tanto para cada punto p se tiene

$$0 \leq \alpha^2 + \beta\gamma = -det(dY), \tag{3.27}$$

donde la igualdad se da si y solo si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, es decir $Y = 0$.

Considere ahora la 1-forma

$$\omega = dY \bullet (f \ \widehat{\times} \ Y); \tag{3.28}$$

entonces tomando la derivada exterior, obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega &= -dY \bullet (df \ \widehat{\times} \ Y) - dY \bullet (f \ \widehat{\times} \ dY) \\ &= Y \cdot (df \ \widehat{\times} \ dY) + f \cdot (dY \ \widehat{\times} \ dY) \end{aligned}$$

y usando (3.17)

$$d\omega = f \cdot (dY \ \widehat{\times} \ dY).$$

Calculemos ahora $dY \ \widehat{\times} \ dY$:

$$\begin{aligned} dY \ \widehat{\times} \ dY(X_1, X_2) &= 2 \ dY(X_1) \times dY(X_2) \\ &= 2 \ [\alpha df(X_1) + \beta df(X_2)] \times [\gamma df(X_1) + \delta df(X_2)] \quad \text{por (3.19) y (3.20)} \\ &= 2 \ (\alpha\delta - \beta\gamma) \ df(X_1) \times df(X_2) \\ &= 2 \ det(dY) \ N \ dA(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Por tanto

$$d\omega = \ 2h \ det(dY) \ dA \tag{3.29}$$

en donde h es la función soporte, definida por: $h = f \cdot N : M \to \mathbb{R}$, la cual mide la distancia del origen al plano tangente de $f(M)$; como $f(M)$ es convexa entonces $f(M)$ se encuentra únicamente de un lado de cada plano tangente y como el origen se encuentra en el interior de $f(M)$ (hipótesis que podemos suponer, pues solo necesitamos componer con una traslación) h es una función siempre positiva.

Integrando la forma (3.29) y usando el teorema de Stokes encontramos la *fórmula integral de Blaschke*:

$$\int_M h\ det(dY)dA = 0. \tag{3.30}$$

Como $h > 0$ por ser $f(M)$ convexa, y $det(dY) \leq 0$ por (3.27), debe ser $det(dY) = 0$ en todo punto y el caso de igualdad en (3.27) implica $dY = 0$. Por tanto Y es constante, y por el lema 3.1.3 Z es trivial.

Consideremos ahora el caso $K \geq 0$; como M no contiene porciones de planos el conjunto de puntos planos es denso en ninguna parte. Afirmamos que la desigualdad (3.27) es aún válida. En efecto, el caso de puntos donde $K > 0$ ya se analizó, veamos qué pasa en un punto parabólico, y supongamos que en (3.26) se tiene $n = 0$ y $l \neq 0$. Entonces en (3.26) encontramos que $\gamma = 0$, de forma que aún se cumple $0 \leq \alpha^2 + \beta\gamma = -det(dY)$ en todos los puntos no planos, los cuales forman un conjunto denso. Por lo que la fórmula integral de Blaschke

$$\int_M h\ det(dY)dA = 0$$

aún nos dice que $det(dY) = 0$ en el conjunto de puntos no planos. Como se trata de una función continua, se tiene que $det(dY) = 0$ en todo punto.

Verificaremos ahora que $dY(p) = 0$ para todo $p \in M$. En los puntos con $K > 0$ el mismo argumento usado anteriormente funciona. Resta verificar el caso de un punto parabólico; una vez verificado esto, se tendrá $dY = 0$ en el conjunto de puntos no planos de M, y al ser Y continua se concluirá $dY = 0$ en todo punto.

Si el punto parabólico p pertenece a la cerradura de $\{q \in M : K(q) > 0\}$ concluimos nuevamente por continuidad que $dY = 0$. Por lo que podemos suponer que p está contenido en una vecindad en donde $K = 0$.

Apliquemos el lema 3.1.6 a la subvariedad de M formada por el interior de todos los puntos planos. Asi encontramos que en el interior de todos los puntos planos existe una superficie reglada con p en su interior y el corolario 3.1.8 muestra que el punto terminal de la regla por p no es un punto en el interior de los puntos parabólicos: tampoco puede ser plano por la manera en que se comporta la curvatura no nula a lo largo de la recta (lema 3.1.7), por tanto debe ser un punto con $K > 0$ o un punto parabólico en la cerradura de $\{q \in M | K(q) > 0\}$. Sea

$$(s, t) \mapsto c(s) + td(s),$$

una parametrización de la superficie reglada. Podemos escoger (localmente) a c como la intersección de la superficie reglada con un plano perpendicular a la regla por p y además parametrizar d por longitud de arco:

$$|d| = 1 \quad \text{de forma que} \quad \left\langle d, d' \right\rangle = 0.$$

Sean X_1, X_2 los vectores coordenados respecto a la parametrización:

$$\begin{aligned} X_1(s,t) &= c'(s) + td'(s), \\ X_2(s,t) &= d(s). \end{aligned}$$

Entonces a lo largo de la regla por p se tiene

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \left\langle c' + td', d \right\rangle = \left\langle c', d \right\rangle = 0.$$

De la forma del reglado tenemos que X_2 es el vector principal con curvatura principal $n = 0$, y X_1 es el otro vector principal con curvatura principal $l \neq 0$. Por (3.26) se tiene

$$\gamma = 0 \qquad \text{a lo largo de la regla por } p. \tag{3.31}$$

Como $0 = -det(dY) = \alpha^2 + \beta\gamma$ en todo punto, en particular para puntos en el reglado, concluimos que

$$\alpha = 0 \qquad \text{a lo largo de la regla por } p. \tag{3.32}$$

Está última ecuación junto con (3.19) , (3.20) y (3.21) implica

$$dY(X_1) = \beta df(X_2) \tag{3.33}$$
$$dY(X_2) = 0 \qquad \text{a lo largo de la regla por } p. \tag{3.34}$$

Entonces la ecuación (3.25) se simplifica a

$$\begin{aligned} 0 &= -X_2(\beta df(X_2)) \\ &= -X_2(\beta)\ df(X_2) - \beta \overline{\nabla}_{X_2} X_2 \\ &= -X_2(\beta)\ df(X_2); \end{aligned}$$

para la última igualdad estamos usando que $\overline{\nabla}_{X_2} X_2 = 0$: esto se debe a que X_2 es el campo de líneas de curvatura asociado a la curvatura nula a lo largo del reglado y por tanto las líneas integrales de X_2 son líneas rectas. Por tanto, como f es la inclusión, concluimos que $0 = X_2(\beta)$ a lo largo de la regla por p, de forma que β es constante a lo largo de esta recta. Como $dY = 0$ en los puntos terminales, entonces $\beta = 0$ en dichos puntos y por tanto $\beta = 0$ en p; ahora usando (3.33) y (3.34) se concluye que $dY(p) = 0$. $\square$

3.2. Rigidez de hipersuperficies en $\mathbb{R}^{n+1}$ para $n \geq 3$

La geometría extrínseca de una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$ está determinada por su segunda forma fundamental, su métrica y su conexión en el haz normal. Para el caso de hipersuperficies, resulta de especial importancia estudiar la segunda forma fundamental.

Para una hipersuperficie, la segunda forma fundamental es una forma bilineal, y en este sentido es más fácil de analizar. El siguiente teorema corresponde a la rigidez global de una hipersuperficie M^n en $\mathbb{R}^{n+1}$; es un caso particular de un teorema de rigidez que aplica a casos de mayor codimensión, el teorema de Allendorfer, y en donde la hipótesis crucial es la complejidad de la segunda forma fundamental.

En el presente capítulo se darán dos teoremas de rigidez infinitesimal usando teoremas de rigidez global. El siguiente teorema nos da herramientas para relacionar estos dos tipos de rigidez, pero antes será necesaria una definición.

Definición 3.2.1. Una inmersión $f : M^m \to N^n$ de una variedad riemanniana en otra es substancial si no existe una subvariedad Q^q con $q < n$ totalmente geodésica de N^n tal que $f(M) \subset Q^q$.

Teorema 3.2.2. *[3] Sea Z una deformación infinitesimal de una inmersión $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de una variedad conexa M^n. Considere las aplicaciones $G_t : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, definidas por*

$$G_t(x) = f(x) + tZ(x). \tag{3.35}$$

1) *Para todo $t \in \mathbb{R}$, G_t es una inmersión y G_t, G_{-t} inducen la misma métrica sobre M.*

2) *Si f es substancial y para algún $t_0 \neq 0$, G_{t_0} y G_{-t_0} son congruentes en $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces Z es trivial.*

Demostración. **1)** La métrica inducida tiene la forma

$$G_t^* \langle X, Y \rangle = \langle G_{t*}X, G_{t*}Y \rangle = \langle X, Y \rangle + t^2 \left\langle \overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z \right\rangle. \tag{3.36}$$

Por tanto

$$\|G_{t*}X\|^2 = \|X\|^2 + t^2 \|\overline{\nabla}_X Z\|^2.$$

Como la métrica es riemanniana ambos términos son positivos y

$$\|G_{t*}X\|^2 = 0 \text{ si y solo si } \|X\|^2 = 0;$$

como la métrica es definida positiva se concluye que la aplicación es una inmersión para todo t. El hecho que G_t, G_{-t} inducen la misma métrica se sigue de (3.36).

2) Si G_{t_0} y G_{-t_0} son congruentes para algún $t_0 \neq 0$, existe una transformación ortogonal T de $\mathbb{R}^{n+1}$ y un vector constante $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$f + t_0 Z = T(f - t_0 Z) + w.$$

Derivando con respecto a un vector tangente X, obtenemos

$$X + t_0 \overline{\nabla}_X Z = T(X - t_0 \overline{\nabla}_X Z)$$

en donde se identifica X con $f_* X$, o equivalentemente

$$t_0\ (T + I)\ \overline{\nabla}_X Z = (T - I)\ X. \tag{3.37}$$

Si $T + I$ es invertible, entonces

$$\overline{\nabla}_X Z = BX, \tag{3.38}$$

donde $t_0 B = (T + I)^{-1}(T - I)$, y la ecuación (3.38) indica que B es antisimétrica, ya que haciendo el producto interior con Y se obtiene

$$\langle BX, Y\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Z, Y\right\rangle = -\left\langle X, \overline{\nabla}_Y Z\right\rangle = -\langle X, BY\rangle.$$

Como $\overline{\nabla}_X(Bf) = BX$, se tiene que

$$\overline{\nabla}_X(Z - Bf) = 0,$$

y al ser X es arbitrario, se sigue que $Z = Bf + w$ y por tanto que Z es trivial.

Resta verificar que $T + I$ es invertible. Suponga por el contrario que existe un vector $\eta \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $T(\eta) = -\eta$. Entonces para cualquier vector X tangente a M se tiene

$$\begin{aligned}
2\langle X, \eta\rangle &= \langle TX, T\eta\rangle + \langle X, \eta\rangle \\
&= -\langle TX, \eta\rangle + \langle X, \eta\rangle \\
&= -\langle (T - I)X, \eta\rangle \\
&= -t_0\big(\left\langle T(\overline{\nabla}_X Z), \eta\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_X Z, \eta\right\rangle\big) \qquad \text{por (3.37)} \\
&= -t_0\big(\left\langle \overline{\nabla}_X Z, T^{-1}\eta\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_X Z, \eta\right\rangle\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que M está contenida en un plano afín ortogonal a η, en contradicción con que la inmersión f es substancial. Por tanto $T + I$ es invertible. $\square$

Teorema 3.2.3. *(Beez-Killing) Sean M y $\overline{M}$ superficies inmersas en $\mathbb{R}^{n+1}$, y sea $\phi : M \to \overline{M}$ una isometría. Suponga que $d\nu : T_pM \to T_pM$ tiene rango ≥ 3. Entonces $\phi^*\overline{\mathrm{II}}(p) = \pm\mathrm{II}(p)$. Por tanto, si M y $\overline{M}$ son hipersuperficies conexas y $d\nu : T_pM \to T_pM$ tiene rango ≥ 3 para todo $p \in M$, entonces ϕ es la restricción de una isometría euclidiana.*

Una demostración de este teorema se encuentra en [11] vol. 5 p. 167.

El siguiente teorema es la versión infinitesimal del teorema 3.2.3.

Teorema 3.2.4. *[3] Sea $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión isométrica y ν el campo normal suponga que rango$\big(d\nu_p\big) \geq 3$ para todo $p \in M$. Entonces f es infinitesimalmente rígida.*

Demostración. Primero se demostrará que cualquier deformación infinitesimal de f es localmente trivial. Sea Z una deformación infinitesimal de f. Para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definimos

$$\begin{aligned} G_t : M^n &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ p &\mapsto f(p) + tZ(p). \end{aligned}$$

Afirmamos que para todo p en M existe una vecindad abierta $U_p \ni p$ y un t_p suficientemente pequeño tal que el rango de la aplicación de Gauss de G_{t_p}, $G_{-t_p} : U_p \to \mathbb{R}^{n+1}$ es mayor o igual a 3, en efecto; tomemos un marco móvil $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de M^n en una vecindad de p, como la aplicación

$$(t, q) \mapsto G_t(q)$$

es suave, por tanto también lo son las aplicaciones

$$(t, q) \mapsto G_{t*}(X_i(q)),$$

y podemos elegir un vector constante ν tal que para tiempos suficientemente pequeños y una vecindad de p suficientemente pequeña $G_{t*}(\{X_1, \ldots, X_n\}) \cup \nu$ es una base de $\mathbb{R}^{n+1}$. Realizando el proceso de ortogonalización en $\mathbb{R}^{n+1}$ obtenemos para cada t un marco móvil $\{X_{1t} \ldots, X_{nt}, \nu_t\}$ adaptado a $G_t(M)$,el cual es diferenciable en ambos parámetros t y q. Por lo que la aplicación

$$(t, q) \mapsto d\nu_t(X_{it}(q))$$

es continua y como el rango de una transformación lineal es semicontinua inferiormente se sigue la afirmación.

Por el teorema 3.2.2 las inmersiones $G_{t_p}|_{U_p}$ y $G_{-t_p}|_{U_p}$ son isométricas, el rango de su aplicación de Gauss en mayor o igual a 3 y podemos suponer que $G_{t_p}(U_p)$ y $G_{-t_p}(U_p)$ son conexas. Entonces se satisfacen la hipótesis del teorema 3.2.3 y deducimos que ambas inmersiones son congruentes.

Como el rango del operador de forma de f es mayor o igual a 3 la inmersión $f_{|U_p}$ es substancial (caso contrario $f(U_p)$ estaría contenida en un hiperplano y el operador de forma se anularía, en contradicción con la hipótesis sobre su rango) y por el teorema 3.2.2 concluimos que $Z_{|U_p}$ es trivial.

Para concluir, cubrimos M con una cubierta numerable tal que en cada abierto Z sea trivial. Si Z es trivial en dos abiertos U_1 y U_2 entonces

$$\begin{aligned} Z &= B_1\ f + w_1 \qquad &\text{en } U_1 \\ Z &= B_2\ f + w_2 \qquad &\text{en } U_2 \end{aligned}$$

para matrices antisimétricas B_1, B_2 fijas y vectores w_1, w_2 fijos. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Z = B_1 X \qquad & \text{en } U_1 \\ \overline{\nabla}_X Z = B_2 X \qquad & \text{en } U_2, \end{aligned}$$

y para $p \in U_1 \cap U_2$ se tiene $B_1(X_p) = B_2(X_p)$, es decir

$$(B_1 - B_2)\big|_{T_pM} = 0.$$

Como f es substancial en $U_1 \cap U_2$, al variar el punto p en $U_1 \cap U_2$ se tiene que los espacios tangentes con $p \in U_1 \cap U_2$ generan $\mathbb{R}^{n+1}$; por tanto $B_1 = B_2$. Aplicando inductivamente el argumento en cada abierto de la cubierta se concluye que la variación infinitesimal es globalmente trivial. $\square$

Teorema 3.2.5. *Si f,$g : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ $n \geq 3$ son inmersiones isométricas de una variedad compacta en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $f(M)$ no contiene ningún punto totalmente geodésico entonces $f(M)$ y $g(M)$ son congruentes.*

De hecho se cumple una versión más fuerte de este teorema, pidiendo únicamente que el conjunto de puntos totalmente geodésicos no desconecte a M. Es un teorema demostrado por Sacksteder y una demostración se puede encontrar en [2] p. 96.

Corolario 3.2.6. *[3] Sea $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, una inmersión isométrica de una variedad compacta tal que en ningún punto el operador de forma se anula. Entonces f es infinitesimalmente rígida.*

Demostración. Suponga que Z es una deformación infinitesimal como antes, consideremos las inmersiones G_t y G_{-t}

$$\begin{aligned} G_{\pm t} : M^n &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ p &\mapsto f(p) \pm tZ(p). \end{aligned}$$

Localmente la condición de que no haya puntos totalmente geodésicos se conserva para t suficientemente pequeño, pues equivale a que al menos una curvatura principal no se anula, la cual es una condición abierta, y la familia de deformaciones es continua en ambas variables (Una justificación más explícita usa los mismos argumentos que los expuestos en la demostración del teorema 3.2.4).

Así para cada punto p en M existe una vecindad $U_p \ni p$ y un tiempo t_p tal que G_t y G_{-t} conservan la condición de no tener ningún punto totalmente geodésico para $t \in (-t_p, t_p)$ al restringirse a esta vecindad.

Como M es compacta, existe una familia finita $\{(-t_i, t_i) \times U_i\}_{i=1}^n$ tal que G_t y G_{-t} son inmersiones sin ningún punto totalmente geodésico en U_i y para $t \in (-t_i, t_i)$. Tomando $t_0 < min(t_1, \ldots, t_n)$ se tendrá que G_{t_0} y G_{-t_0} son inmersiones isométricas sin puntos geodésicos en toda la variedad.

Por tanto podemos aplicar el teorema 3.2.5 y concluir que G_{t_0} y G_{-t_0} son congruentes.

Una inmersión de una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{n+1}$ sin puntos geodésicos es substancial, pues si estuviera contenida en un hiperplano, su operador de forma se anularía. Y como G_{t_0} y G_{-t_0} son congruentes, por el teorema 3.2.2, concluimos que Z es trivial. $\square$

Capítulo 4

Rigidez de superficies en el espacio tiempo de Minkowski

4.1. Noción de superficies planas en el tiempo

Para entender geométricamente qué es una superficie plana en el tiempo, haremos una analogía usando curvas en el espacio euclidiano y nos ayudaremos del marco de Frenet, el cual se estudia en la teoría clásica de curvas.

Consideremos una curva biregular $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco y su marco de Frenet, el cual está formado por el vector tangente T, el normal N y el binormal B; dichos vectores forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para cada tiempo.

Denotemos la curvatura por κ y la torsión por τ. Observemos que las fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_T T &= T' = & \kappa N, & \\
\overline{\nabla}_T N &= N' = -\kappa N & & + \tau B, \\
\overline{\nabla}_T B &= B' = & -\tau N, &
\end{aligned}$$

nos indican que la curvatura y la torsión son los coeficientes de las formas de conexión respecto a este marco móvil adaptado a la curva, ya que estos coeficientes se definen por las fórmulas

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_T T &= \left\langle \overline{\nabla}_T T, T \right\rangle T + \left\langle \overline{\nabla}_T T, N \right\rangle N + \left\langle \overline{\nabla}_T T, B \right\rangle B, \\
\overline{\nabla}_T N &= \left\langle \overline{\nabla}_T N, T \right\rangle T + \left\langle \overline{\nabla}_T N, N \right\rangle N + \left\langle \overline{\nabla}_T N, B \right\rangle B, \\
\overline{\nabla}_T B &= \left\langle \overline{\nabla}_T B, T \right\rangle T + \left\langle \overline{\nabla}_T B, N \right\rangle N + \left\langle \overline{\nabla}_T B, B \right\rangle B.
\end{aligned}$$

Ahora tomemos no una curva sino una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^{1,3}$, y un marco móvil $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ adaptado a la superficie, donde e_1 y e_2 son tangentes a

Σ, e_3 es el vector de curvatura media normalizado y e_4 es su complemento ortogonal en el haz normal. Entonces la forma de conexión

$$\begin{aligned}\alpha_H : T\Sigma &\to \mathbb{R}\\ X &\mapsto \left\langle \overline{\nabla}_X e_3, e_4 \right\rangle\end{aligned}$$

es el análogo natural a la torsión, pues ambas miden el cambio del vector normal principal e_3, proyectando al vector "binormal" e_4 en direcciones tangentes a la variedad (Ver la segunda fórmula de Frenet).

Diremos que una superficie Σ es plana en el tiempo si la divergencia de esta 1-forma es idénticamente cero. Recordando que la divergencia de un tensor se define como la derivación covariante seguida de una contracción (una derivación promediada) encontramos la tan buscada analogía: las curvas análogas a una superficie plana en el tiempo son aquellas con torsión constante.

En el presente capítulo se abordan tres teoremas: el teorema principal 4.2.3 trata de la rigidez infinitesimal para superficies de codimensión 2 en $\mathbb{R}^{1,n}$ y los teoremas 4.2.11 y 4.2.12 tratan sobre reducción de codimensión y son útiles para encontrar ejemplos en donde las hipótesis del teorema 4.2.3 se satisfacen.

Definición 4.1.1. Suponga que el vector de curvatura media $\vec{H}$ de Σ en $\mathbb{R}^{1,n}$ es un vector de tipo espacio y que $\vec{H} \neq 0$ en todo punto. **La forma de conexión normal en el marco de curvatura media** denotada α_H está definida para vectores tangentes a Σ por

$$\alpha_H = \left\langle \overline{\nabla} e_n, e_{n+1} \right\rangle,$$

en donde $e_n = -\frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ y e_{n+1} es el vector normal de tipo tiempo, orientado al futuro, que es ortogonal a e_n.

Definición 4.1.2. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^{1,n}$ como en las definiciones anteriores. Se dice que Σ es **plana en el tiempo** si

$$\operatorname{div}_\sigma(\alpha_H) = 0,$$

en donde σ denota la métrica de Σ.

Observación 4.1.2.1. Una curva regular contenida en un plano tiene torsión idénticamente cero; se cumple un resultado análogo para las superficies planas en el tiempo.

Sea Σ una subvariedad de $\mathbb{R}^{1,n}$ de tipo espacio de dimensión $n-1$ que se encuentra contenida en un espacio afín de tipo espacio de dimensión n, entonces Σ es plana en el tiempo. En efecto, sea e_{n+1} el vector constante y ortogonal al espacio afín. Sin pérdida de generalidad se puede elegir para que cumpla

$$\alpha_H(X) = \left\langle \overline{\nabla}_X e_n, e_{n+1} \right\rangle \qquad \text{para } X \text{ tangente a } \Sigma.$$

Entonces por la compatibilidad de la métrica se cumple

$$\alpha_H(X) = -\left\langle e_n, \overline{\nabla}_X e_{n+1} \right\rangle = 0 \qquad \forall X \in T\Sigma$$

α_H es la forma nula y su divergencia se anula también.

4.2. Rigidez infinitesimal para superficies planas en el tiempo

Esta sección trata el resultado principal del capítulo, un resultado de rigidez infinitesimal para superficies de codimensión 2 en $\mathbb{R}^{1,n}$. El siguiente lema da la expresión del vector de curvatura media de una superficie en función del laplaciano de la inmersión.

Lema 4.2.1. *Sea* $f : \Sigma \to \mathbb{R}^{1,n}$ *una inmersión isométrica con funciones coordenadas* $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$*, entonces*

$$\vec{H} = \frac{1}{n}(\Delta f_0, \ldots, \Delta f_n).$$

Demostración. Denotemos $\overline{\nabla}$ la conexión ambiente y ∇ la conexión de Levi-Civita de Σ. Calculemos primero Δf_j usando un marco geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ en una vecindad de un punto fijo $p \in \Sigma$, es decir un marco tal que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ y $\langle E_i, E_j \rangle (p) = \delta_i^j$ para $1 \leq i \; j \leq n$.

$$\begin{aligned}
\Delta f_j(p) &= \operatorname{div}(grad(f_j))(p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle \nabla_{E_k(p)} grad(f_j), E_k(p) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k(p)(\langle grad(f_j), E_k \rangle) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k(p)(df_j(E_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (E_k E_k f_j)(p). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{E_i} E_i(p) = 0$ ciertamente se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(E_i, E_i)(p) &= \overline{\nabla}_{dfE_i} df E_i(f(p)) \\
&= \big(E_i E_i(f_0)(p), \ldots, E_i E_i(f_n)(p)\big),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\vec{H}(p) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(E_i,E_i)(p)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(E_iE_i(f_0)(p),\dots,E_iE_i(f_n)(p)\big)\\
&= \frac{1}{n}(\Delta f_0,\dots,\Delta f_n) && \text{por (4.1).}
\end{aligned}$$

□

Lema 4.2.2. *(Fórmula integral de Reilly) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ cuya frontera es una subvariedad compacta Σ. Suponga que u es una función definida en $\mathbb{R}^n$ que satisface*

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \ \text{ en } \Omega,\\
u &= f \ \text{ en } \Sigma.
\end{aligned}$$

Entonces, si denotamos por D^2u a la hessiana de u, se cumple

$$\int_\Omega |D^2u|^2 = -\int_\Sigma \sum_{a,b}\left(h_{ab}f^bf^a + 2(\Delta_\Sigma f)u_n + h\big(u_n\big)^2\right)$$

en donde e_n es el vector normal exterior, $h_{ab} = \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^a}}e_n, \frac{\partial}{\partial u^b}\right\rangle$, h es la traza de h_{ab} y Δ_Σ es el laplaciano calculado en Σ.

Demostración. Denotemos por Δ al laplaciano calculado en $\mathbb{R}^n$ y por Δ_Σ el laplaciano calculado en Σ.

Derivando de la manera usual en el sistema de coordenadas canónico de $\mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\Delta\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}2\ u_i\ u_{ij}\right)_j = \sum_{i,j=1}^{n}u_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{n}u_iu_{ijj}$$

y por la igualdad de las parciales cruzadas

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \sum_{i,j}u_{ij}^2 + \sum_i u_i(\Delta u)_i = \sum_{i,j}u_{ij}^2 = |D^2u|^2. \tag{4.2}$$

Para todo punto $p \in \Sigma$ podemos encontrar un marco móvil $\{e_1,\dots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ definido en una vecindad U de p, tal que para puntos $q \in U\cap\Sigma$ se cumple que $e_{1_q},\dots,e_{n-1_q}$ son tangentes y e_{n_q} es normal a Σ. Además podemos suponer que $\overline{\nabla}_{e_n}e_n = 0$, en donde $\overline{\nabla}$ denota la conexión de $\mathbb{R}^n$. Por el teorema de la divergencia tenemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}\big(\nabla|\nabla u|^2\big) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \big\langle \nabla|\nabla u|^2, e_n\big\rangle\,; \tag{4.3}$$

además en Σ se cumple

$$\frac{1}{2}\left\langle \nabla|\nabla u|^2, e_n\right\rangle = \left\langle \sum_{i,j=1}^{n}(e_iu)(e_je_iu)e_j, e_n\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}(e_iu)(e_ne_iu). \qquad (4.4)$$

Recordando ahora que Δu está dado por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} e_ie_iu - \overline{\nabla}_{e_i}e_iu,$$

y como $\overline{\nabla}e_ne_n = 0$ y $\Delta u = 0$ se concluye que

$$e_ne_n(u) = \sum_{a=1}^{n-1}\overline{\nabla}_{e_a}e_au - e_ae_au;$$

sumando y restando $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-1}\nabla^{\Sigma}_{e_a}e_au$, en donde ∇^{Σ} denota la conexión de Σ, se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} e_ne_n(u) &= \sum_{a=1}^{n-1}\big(\overline{\nabla}_{e_a}e_a - \nabla^{\Sigma}_{e_a}e_a\big)u - \sum_{a=1}^{n-1}(e_ae_af - \nabla^{\Sigma}_{e_a}e_af) \\ &= -he_n(u) - \Delta_{\Sigma}f. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(e_iu)(e_ne_iu) &= (e_nu)(e_ne_nu) + \sum_{a=1}^{n-1}(e_au)(e_ne_au) \\ &= (e_nu)\Big(-he_n(u) - \Delta_{\Sigma}f\Big) + \sum_{a=1}^{n-1}(e_au)(e_ne_au). \qquad (4.5) \end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$\left\langle\overline{\nabla}_{e_n}e_a, e_n\right\rangle = -\left\langle e_a, \overline{\nabla}_{e_n}e_n\right\rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad \left\langle\overline{\nabla}_{e_a}e_n, e_n\right\rangle = \frac{1}{2}e_a|e_n|^2 = 0,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} e_ne_au &= e_ae_nu + \overline{\nabla}_{e_n}e_au - \overline{\nabla}_{e_a}e_nu \\ &= e_ae_nu + \sum_{b=1}^{n-1}\left\langle\overline{\nabla}_{e_n}e_a, e_b\right\rangle e_bu - \sum_{b=1}^{n-1}\left\langle\overline{\nabla}_{e_a}e_n, e_b\right\rangle e_bu. \qquad (4.6) \end{aligned}$$

Usando (4.5) y (4.6) junto con la ecuación

$$\left\langle\overline{\nabla}_{e_a}e_n, e_b\right\rangle = h_{ab},$$

encontramos que

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i u)(e_n e_i u) = -he_n(u)^2 - e_n(u)\Delta_\Sigma f + \sum_{a=1}^{n-1}(e_a u)(e_a e_n u)$$
$$+ \sum_{a,b=1}^{n-1}\left\langle \overline{\nabla}_{e_n} e_a, e_b\right\rangle (e_b u)(e_a u) - \sum_{a,b=1}^{n-1} h_{ab} e_a u e_b u.$$

Notemos ahora que

$$\sum_{a,b=1}^{n-1}\left\langle \overline{\nabla}_{e_n} e_a, e_b\right\rangle (e_b u)(e_a u) = 0,$$

pues al tomar la suma sobre todos los índices el término de índice (a, b) se anula con el término de índice (b, a). Por tanto

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i u)(e_n e_i u) = -he_n(u)^2 - e_n(u)\Delta_\Sigma f + \sum_{a=1}^{n-1}(e_a u)(e_a e_n u) - \sum_{a,b=1}^{n-1} h_{ab} e_a u e_b u.$$

Notando que

$$\sum_{a=1}^{n-1}(e_a u)(e_a e_n u) = \sum_{a=1}^{n-1}(e_a f)(e_a e_n u) = \nabla_\Sigma f(e_n(u))$$

donde $\nabla_\Sigma f$ es el gradiente de f calculado en Σ, junto con la ecuación

$$\sum_{a,b=1}^{n-1} h_{ab} e_a u e_b u = h(\nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma f)$$

y (4.4), regresamos a una expresión global:

$$\frac{1}{2}\left\langle \nabla|\nabla u|^2, e_n\right\rangle = -he_n(u)^2 - e_n(u)\Delta_\Sigma f + \nabla_\Sigma f(e_n(u)) - h(\nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma f).$$

Usando (4.3) y la ecuación anterior encontramos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta|\nabla u|^2 = -\int_\Sigma he_n(u)^2 - \int_\Sigma e_n(u)\Delta_\Sigma f + \int_\Sigma \nabla_\Sigma f(e_n(u))$$
$$- \int_\Sigma h(\nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma f). \tag{4.7}$$

Ahora usaremos la fórmula de integración por partes

$$\int_\Sigma \langle \nabla g, X\rangle = \int_{\partial\Sigma} g\,\langle X, N\rangle - \int_\Sigma (g \operatorname{div} X),$$

donde X es un campo vectorial y g una función, tomando

$$X = \nabla_\Sigma f \quad \text{y} \quad g = e_n(u);$$

usando que $\partial\Sigma = \emptyset$, obtenemos

$$\int_\Sigma \nabla_\Sigma f(e_n(u)) = -\int_\Sigma e_n(u)\Delta_\Sigma f. \tag{4.8}$$

Finalmente al sustituir (4.8) en (4.7) e igualando con (4.2), concluimos la fórmula buscada

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D^2u|^2 = -\int_\Sigma he_n(u)^2 - 2\int_\Sigma e_n(u)\Delta_\Sigma f - \int_\Sigma \sum_{a,b=1}^{n-1} h_{ab}f^a f^b.$$

□

El siguiente teorema aborda la rigidez infinitesimal para una variedad Σ de codimensión 2 en $\mathbb{R}^{1,n}$. Se demuestra que si Σ es una hipersuperficie en $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ entonces Σ es infinitesimalmente rígida como una variedad plana en el tiempo, en donde esto quiere decir que las deformaciones infinitesimales consideradas conservan la condición

$$\operatorname{div}(\alpha_H) = 0.$$

Explícitamente, se considerarán únicamente aquellas deformaciones infinitesimales V de Σ que cumplen

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} (\operatorname{div}_{\sigma(s)}\alpha_H)(p + sV(p)) = 0$$

para todo $p \in M$.

Teorema 4.2.3. *Sea Σ una hipersuperficie compacta en un hiperplano de tipo espacio de $\mathbb{R}^{1,n}$ tal que Σ es la frontera de un abierto conexo Ω del hiperplano. Suponga que Σ tiene curvatura media positiva si $n > 3$ y suponga además que Σ es convexa si $n = 3$. Entonces Σ es infinitesimalmente rígida como una variedad plana en el tiempo.*

Demostración. Sea Σ una subvariedad de $\mathbb{R}^{1,n}$ como en las hipótesis del teorema, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\Sigma = \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{t = 0\}$. Denotemos por σ a la métrica de Σ la cual coincide con la inducida por $\mathbb{R}^{1,n}$, sea e_n el normal exterior a Σ, $h_{ab} = \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial u^a}} e_n, \frac{\partial}{\partial u^b}\right\rangle$ y h la traza de h_{ab}.

Sea V una deformación infinitesimal de $i : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,n}$ y consideremos la deformación por inmersiones isométricas de i dada por

$$X(s, p) = p + sV(p)$$

y denotemos por X_s a la aplicación $p \mapsto X(s,p)$. Para cada punto $p \in \Sigma$ existe $\varepsilon_p > 0$ y una vecindad abierta $V_p \ni p$, tal que para todo $s \in (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$, X_{ε_p} es una inmersión en U_p (ver proposición 2.3.4). Como Σ es compacta entonces, existe $\varepsilon > 0$ de forma que X_s es una inmersión para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Y localmente $(X_s(\Sigma), \sigma_{(s)})$ es una subvariedad riemanniana de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Para demostrar el teorema basta verificar que existe una familia de isometrías afines A_s de $\mathbb{R}^{1,n}$ tal que $X(p,s) = A_s \circ i$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pues en este caso

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} X = V$$

y V será una deformación infinitesimal trivial por la proposición 2.1.10.

Podemos suponer que la deformación infinitesimal V es ortogonal a $\mathbb{R}^n$, pues en el caso general podemos escribir a V como

$$V = V^\top + V^\perp \qquad \text{donde } V^\top \in \mathbb{R}^n \text{ y } V^\perp \in \mathbb{R}^{n\perp}; \tag{4.9}$$

como $V^\perp \in \mathbb{R}^{n\perp}$ entonces, para todo Y tangente a Σ, $dV^\perp(Y) \in \mathbb{R}^{n\perp}$. Derivando (4.9), respecto a Y y haciendo producto punto con Y deducimos

$$\left\langle dV^\top(Y), Y \right\rangle = 0,$$

lo que implica que $V^\top$ es una deformación infinitesimal de Σ en $\mathbb{R}^n$. Como las hipersuperficies en $\mathbb{R}^n$ son rígidas bajo las hipótesis (por el teorema 3.1.5 para el caso $n = 3$ y el teorema 3.2.5 para el caso $n > 3$) concluimos que $V^\top$ es una deformación infinitesimal trivial. Como la suma de deformaciones infinitesimales triviales es una deformación infinitesimal trivial, basta verificar que $V^\perp$ es una deformación infinitesimal trivial. Se usará frecuentemente la notación

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial s}(0)$$

en caso que f sea una función diferenciable, por otro lado si tenemos un campo diferenciable Y en $\mathbb{R}^{1,n}$, entonces

$$\delta Y = D_V(Y)$$

en donde D es la derivada usual en $\mathbb{R}^{1,n}$.

Verifiquemos que la hipótesis

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \operatorname{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)\big(p + sV(p)\big) = 0$$

para $p \in M$ es válida también para la parte ortogonal $V^\perp$: tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\big(\operatorname{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)(p + sV(p))\big) \\ &= V\big(\operatorname{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)\big) \\ &= V^\top\big(\operatorname{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)\big) + V^\perp\big(\operatorname{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)\big); \end{aligned}$$

resta verificar que

$$V^{\top}\big(\mathrm{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)\big) = \delta\big(\mathrm{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)(p + sV^{\top}(p))\big) = 0 :$$

como el campo variacional $V^{\top}$ es siempre tangente a $\mathbb{R}^n$ se tiene que las superficies $X_s(\Sigma)$ están siempre contenidas en $\mathbb{R}^n$ y para tales superficies $\alpha_H = 0$, como se mostró en la observación 4.1.2.1; por tanto $V^{\top}\big(\mathrm{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)\big) = 0$, lo que demuestra que se cumplirá aún que

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} \mathrm{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H) = 0$$

a lo largo de $X(p, s) = p + sV^{\perp}(p)$.

Una vez hecha la reducción del problema, consideremos $V = f\frac{\partial}{\partial t}$ donde $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ es una función suave. Podemos así construir nuestra variación por inmersiones isométricas

$$\begin{aligned} X_s &= i + sV \\ &= (X_s^0, X_s^1, \dots, X_s^n), \end{aligned}$$

notemos que

$$\delta X_s^0 = f \tag{4.10}$$

$$X_s^k = X_0^k \qquad \text{para } 1 \leq k \leq n. \tag{4.11}$$

Sea Δ_s el laplaciano calculado en Σ con la métrica $X_s^*\sigma(s)$. Usando el lema 4.2.1, obtenemos

$$\vec{H}_s = \Delta_s X_s = \big(\Delta_s X_s^0, \Delta_s X_s^1, \dots, \Delta_s X_s^n\big). \tag{4.12}$$

Para calcular $\delta\vec{H}$ será necesario realizar algunos cálculos preliminares. Observemos primero que $\delta\sigma_{ab} = 0$; en efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ab} &= \delta\left\langle X_{s*}\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right), X_{s*}\left(\frac{\partial}{\partial u^b}\right)\right\rangle \\ &= \delta\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial u^a} + s\frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\frac{\partial}{\partial u^b} + s\frac{\partial f}{\partial u^b}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle, \end{aligned}$$

como $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ab} &= -\delta\left(s^2\frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial f}{\partial u^b}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Verifiquemos que lo mismo sucede con los símbolos de Christoffel: denotemos por (σ^{ab}) a la matriz inversa de (σ_{ab}) derivando entrada a entrada encontramos que

$$0 = \delta \sum_c \sigma^{ac}\ \sigma_{cb} = \sum_c \left(\delta\sigma^{ac}\ \sigma_{cb}(0) + \sigma^{ab}(0)\ \delta\sigma_{ab} \right) = \sum_c \delta\sigma^{ac}\ \sigma_{cb}(0),$$

y por tanto $\delta\sigma^{ab} = 0$ ya que $(\sigma_{ab})(0)$ es invertible.

Utilizando las fórmulas de Christoffel, se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^c_{ab} &= \delta\left(\frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial u^a}\sigma_{bk} + \frac{\partial}{\partial u^b}\sigma_{ka} - \frac{\partial}{\partial u^k}\sigma_{ab} \right\} \sigma^{kc} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k \delta\left(\left\{ \frac{\partial}{\partial u^a}\sigma_{bk} + \frac{\partial}{\partial u^b}\sigma_{ka} - \frac{\partial}{\partial u^k}\sigma_{ab} \right\} \right) \sigma^{kc}(0) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial u^a}\sigma_{bk} + \frac{\partial}{\partial u^b}\sigma_{ka} - \frac{\partial}{\partial u^k}\sigma_{ab} \right\} (0) \delta\sigma^{kc} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que deducimos

$$\delta(\Delta_s X^k_s) = \Delta_0(\delta X^k_s) \qquad \text{para } 0 \leq k \leq n \tag{4.13}$$

Esto se sigue de la expresión del laplaciano en cartas coordenadas, en efecto, tenemos:

$$\Delta_s X^k_s = \sum_{a,b} \sigma(s)^{ab} \left(\frac{\partial^2 X^k_s}{\partial u^a \partial u^b} - \sum_c \frac{\partial X^k_s}{\partial u^c} \Gamma^c_{ab}(s) \right)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\delta\Delta_s X^k_s &= \sum_{a,b} \sigma^{ab}(0) \left(\frac{\partial^2 \delta X^k_s}{\partial u^a \partial u^b} - \sum_c \frac{\partial \delta X^k_s}{\partial u^c} \Gamma^c_{ab}(0) \right) \\
&= \Delta_0(\delta X^k_s)
\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (4.10) - (4.13) encontramos que

$$\begin{aligned}
\delta\vec{H} &= \left(\delta\Delta_s\ X^0_s, \delta\Delta_s X^1_s, \ldots,\ \delta\Delta_s X^n_s \right) \\
&= (\Delta_0 \delta X^0_s, 0, \ldots, 0) \\
&= (\Delta f) \frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned}$$

en donde $\Delta f = \Delta_0 f, \vec{H} = \vec{H_0} = -he_n$ con $h > 0$. Deducimos de lo anterior

$$\begin{aligned}\delta|\vec{H}_s|^2 &= 2\left\langle \delta\vec{H}, \vec{H}_0 \right\rangle \\ &= 2\left\langle \delta\vec{H}, -he_n \right\rangle \\ &= 2\left\langle \Delta f\ \frac{\partial}{\partial t}, -he_n \right\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

es decir

$$2|\vec{H}_0|\ \delta|\vec{H}| = 0.$$

Como $\vec{H} \neq 0$ en todo punto se concluye que

$$\delta|\vec{H}| = 0$$

y encontramos finalmente que

$$\delta e_n = \frac{-\delta\vec{H}h + \delta|\vec{H}|\vec{H}}{h^2} = -\frac{\Delta f}{h}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{4.14}$$

Por otra parte, como $0 = \delta\left\langle e_{n+1}, e_{n+1}\right\rangle = 2\left\langle \delta e_{n+1}, e_{n+1}\right\rangle$ se concluye que δe_{n+1} se encuentra contenido en $\mathbb{R}^n$; calculemos sus componentes en un punto fijo $p \in M$, usando $n-1$ campos coordenados de Σ y el normal e_n. Podemos suponer además que en el punto p dicho sistema es ortonormal. Tenemos

$$\begin{aligned}0 &= \delta\left\langle e_{n+1}, \frac{\partial}{\partial u^a}\right\rangle \\ &= \left\langle \delta e_{n+1}, \frac{\partial}{\partial u^a}\right\rangle + \left\langle e_{n+1}, \frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle,\end{aligned}$$

y usando que $e_{n+1} = \frac{\partial}{\partial t}$ deducimos

$$\left\langle \delta e_{n+1}, \frac{\partial}{\partial u^a}\right\rangle = \frac{\partial f}{\partial u^a}. \tag{4.15}$$

Y como $0 = \delta\left\langle e_{n+1}, e_n\right\rangle$, obtenemos

$$\left\langle \delta e_{n+1}, e_n\right\rangle = -\left\langle e_{n+1}, -\frac{\Delta f}{h}\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = -\frac{\Delta f}{h}. \tag{4.16}$$

Usando las primeras n coordenadas y la expresión del gradiente en cartas

$$\nabla f = \sum_{a,b}\sigma^{ab}\frac{\partial f}{\partial u^a}\frac{\partial}{\partial u^b},$$

junto con el hecho de que e_n es un vector normal a Σ se concluye de (4.14) y (4.15) que

$$\delta e_{n+1} = \nabla f - \frac{\Delta f}{h} e_n. \tag{4.17}$$

Ahora introduciremos la forma diferencial $\delta\alpha_H$ la cual está definida para vectores tangentes a Σ por

$$\delta\alpha_H(Y) = \delta\big(\alpha_H(X_{s*}Y)\big).$$

Es inmediato que es $\mathbb{R}$-lineal, verifiquemos que es tensorial, tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_H(fY) &= \delta\left\langle D_{X_{s*}(fY)} e_n, e_{n+1}\right\rangle \\
&= \left\langle D_V D_{X_{s*}(fY)} e_n, e_{n+1}\right\rangle + \left\langle D_{X_{s*}(fY)} e_n, D_V e_{n+1}\right\rangle,
\end{aligned}$$

por la igualdad de las parciales cruzadas

$$\begin{aligned}
&= \left\langle D_{X_{s*}(fY)} D_V e_n, e_{n+1}\right\rangle + \left\langle D_{X_{s*}(fY)} e_n, D_V e_{n+1}\right\rangle \\
&= f\Big(\left\langle D_{X_{s*}(Y)} D_V e_n, e_{n+1}\right\rangle + \left\langle D_{X_{s*}(Y)} e_n, D_V e_{n+1}\right\rangle \Big);
\end{aligned}$$

usando nuevamente la igualdad de las parciales cruzadas

$$\begin{aligned}
&= f\Big(\left\langle D_V D_{X_{s*}(Y)} e_n, e_{n+1}\right\rangle + \left\langle D_{X_{s*}(Y)} e_n, D_V e_{n+1}\right\rangle \Big) \\
&= f\delta\alpha_H(Y).
\end{aligned}$$

Calculemos ahora sus componentes,

$$\begin{aligned}
(\delta\alpha_H)_a &= \delta\left\langle D_a e_n, e_{n+1}\right\rangle \\
&= \left\langle D_V(D_a e_n), e_{n+1}\right\rangle + \left\langle D_a e_n, D_V e_{n+1}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por la igualdad de las parciales cruzadas junto con (4.14) y (4.17) deducimos

$$\begin{aligned}
(\delta\alpha_H)_a &= \left\langle D_a \delta e_n, e_{n+1}\right\rangle + \left\langle D_a e_n, \delta e_{n+1}\right\rangle \\
&= \left\langle D_a\Big(-\frac{\Delta f}{h}\frac{\partial}{\partial t}\Big), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle + \left\langle D_a e_n, \nabla f - \frac{\Delta f}{h} e_n\right\rangle.
\end{aligned}$$

Usando luego que $\langle De_n, e_n\rangle = 0$ (e_n es unitario) y $D\frac{\partial}{\partial t} = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(\delta\alpha_H)_a &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u^a}\Big(-\frac{\Delta f}{h}\Big)\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle + \left\langle D_a e_n, \sum_b f^b \frac{\partial}{\partial u^b}\right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial u^a}\frac{\Delta f}{h} + \sum_b f^b \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial u^a}} e_n, \frac{\partial}{\partial u^b}\right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial u^a}\frac{\Delta f}{h} + \sum_b f^b h_{ab}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Como $\delta\sigma = 0$, entonces

$$\delta(\mathrm{div}_{\sigma(s)}\alpha_H) = \mathrm{div}_{\sigma(0)}(\delta\alpha_H), \tag{4.19}$$

lo cual se verifica directamente de la definición de la divergencia de α_H como contracción métrica del 2-tensor $\nabla\alpha_H$ dado por

$$\nabla\alpha_H(Z,Y) = \nabla_Z\alpha_H(Y) = Z\big(\alpha_H(Y)\big) - \alpha_H(\nabla_Z Y).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\big(\nabla\alpha_H\big)_{ba} &= \nabla\alpha_H\left(\frac{\partial}{\partial u^b},\frac{\partial}{\partial u^a}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial u^b}\left(\alpha_H\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right)\right) - \alpha_H\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^b}}\frac{\partial}{\partial u^a}\right)\\
&= \Big(\frac{\partial \alpha_{H\,a}}{\partial u^b} - \sum_c \Gamma^c_{ba}\alpha_{H\,c}\Big),
\end{aligned}$$

y al tomar la contracción métrica

$$\mathrm{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H) = \sum_{a,b}\sigma^{ab}(s)\big(\nabla\alpha_H\big)_{ba} = \sum_{a,b}\left(\sigma^{ab}(s)\Big(\frac{\partial\alpha_{H\,a}}{\partial u^b} - \sum_c\Gamma^c_{ba}\alpha_{H\,c}\Big)\right);$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\delta\Big(\mathrm{div}_{\sigma(s)}(\alpha_H)\Big) &= \sum_{a,b}\delta\left(\sigma^{ab}(s)\Big(\frac{\partial\alpha_{H\,a}}{\partial u^b} - \sum_c\Gamma^c_{ba}(s)\alpha_{H\,c}\Big)\right)\\
&= \sum_{a,b}\left(\sigma^{ab}(0)\Big(\frac{\partial\delta\alpha_{H\,a}}{\partial u^b} - \sum_c\Gamma^c_{ba}(0)\delta\alpha_{H\,c}\Big)\right)\\
&= \mathrm{div}_{\sigma(0)}(\delta\alpha_H),
\end{aligned}$$

lo que prueba (4.19). Sustituyendo en (4.19) la ecuación (4.18) deducimos que

$$\begin{aligned}
\delta(\mathrm{div}_{\sigma(s)}\alpha_H) &= \mathrm{div}_\sigma(\delta\alpha)\\
&= \mathrm{div}_\sigma\left(\sum_a\frac{\partial}{\partial u^a}\frac{\Delta f}{h}du^a\right) + \mathrm{div}_\sigma\left(\sum_a\Big(\sum_b f^b h_{ab}\Big)du^a\right)\\
&= \sum_{a,b}\left(\sigma^{ab}\frac{\partial^2}{\partial u^a\partial u^b}\frac{\Delta f}{h} - \sum_c\frac{\partial}{\partial u^c}\frac{\Delta f}{h}\Gamma^c_{ab}\right)\\
&\quad + \mathrm{div}_\sigma\left(\sum_a\Big(\sum_b f^b h_{ab}\Big)du^a\right)\\
&= \Delta\Big(\frac{\Delta f}{h}\Big) + \mathrm{div}_\sigma\left(\sum_a\Big(\sum_b f^b h_{ab}\Big)du^a\right).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Multiplicando la ecuación (4.20) por f e integrando sobre Σ, obtenemos

$$0 = \int_\Sigma f\big(\Delta(\frac{\Delta f}{h})\big) + \int_\Sigma f \mathrm{div}_\sigma\bigg(\sum_a \big(\sum_b h_{ab} f^b\big) du^a\bigg);$$

usando que el laplaciano es autoadjunto y la fórmula de integración por partes

$$\int_\Sigma \langle \nabla g, X\rangle = \int_{\partial\Sigma} g \langle X, N\rangle - \int_\Sigma (g \mathrm{div} X),$$

donde X es un campo vectorial y g una función, encontramos que

$$0 = \int_\Sigma \frac{(\Delta f)^2}{h} - \int_\Sigma \langle \nabla f, X\rangle \tag{4.21}$$

en donde X es el campo métricamente equivalente a $\sum_a \big(\sum_b h_{ab} f^b\big) du^a$ (es válido usar la misma fórmula para campos y para formas, debido a que la divergencia de ambos coincide, pues la derivación covariante y la contracción conmutan con la operación de subir o bajar índices). La expresión en la segunda integral de (4.21) se lee como

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, X\rangle &= df\bigg(\sum_{a,b} h^{ab} f_b \frac{\partial}{\partial u^a}\bigg)\\
&= \sum_c f_c du^c\bigg(\sum_{a,b} h^{ab} f_b \frac{\partial}{\partial u^a}\bigg)\\
&= \sum_{a,b,c} h^{ab} f_b \ f_c \delta^c_a\\
&= \sum_{a,b} h^{ab} f_b f_a.
\end{aligned}$$

Por tanto la ecuación (4.21) se lee

$$0 = \int_\Sigma \frac{(\Delta f)^2}{h} - \int_\Sigma \sum_{a,b} f_a f_b h^{ab}. \tag{4.22}$$

Para probar el teorema es suficiente demostrar que f es la restricción a Σ de una función lineal. Sea u una solución al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \quad u = f & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Entonces la fórmula de Reilly en $\mathbb{R}^n$ demostrada en el lema 4.2.2 se lee

$$\int_\Omega \left|D^2 u\right|^2 = -\int_\Sigma \bigg(\sum_{a,b} h^{ab} f_a f_b + 2(\Delta f) e_n(u) + h\big(e_n(u)\big)^2\bigg). \tag{4.23}$$

Restando de la ecuación (4.23) la ecuación (4.22) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega |D^2u|^2 + \int_\Sigma \frac{(\Delta f)^2}{h} + 2(\Delta f)e_n(u) + h\big(e_n(u)\big)^2 \\ &= \int_\Omega |D^2u|^2 + \int_\Sigma \left(\frac{\Delta f}{\sqrt{h}} + \sqrt{h}e_n(u)\right)^2. \end{aligned}$$

Por tanto $D^2u = 0$ y $f = u|_\Sigma$ donde u es una función lineal compuesta con una traslación. □

La hipótesis en el teorema 4.2.11 de que $\Sigma \subset \mathbb{R}^{1,n}$ esté inmersa en un hiperplano afín, es una hipótesis muy fuerte, sin embargo, resulta interesante ver que hay una relación entre está hipótesis y que Σ sea plana en el tiempo. A continuación demostraremos teoremas de reducción de codimensión para superficies planas en el tiempo, se demuestran tres teoremas de reducción de codimensión: el primero es un resultado clásico de reducción de codimensón, el cual se encuentra enunciado aquí en $\mathbb{R}^{1,n}$ pero los argumentos son válidos tanto en el caso euclidiano como en el caso semi-euclidiano, el segundo teorema da una condición suficiente en términos de la 1-forma de conexión α_H (ver definición 4.1.1) para que una superficie de tipo espacio en $\mathbb{R}^{1,3}$ homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ esté contenida en un hiperplano, el tercer teorema concluye que una superficie de tipo espacio homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ e invariante por un campo rotacional de Killing se encuentra contenida en un hiperplano.

Definición 4.2.4. Un subhaz N_0 del haz normal N es **paralelo en el haz normal** si para cualesquiera puntos p, q en la variedad M y cualquier curva

$$\gamma : I \to M \quad \text{con} \quad \gamma(0) = p \quad \text{y} \quad \gamma(1) = q$$

se cumple que

$$P^\perp_{(\gamma,0,1)}(N_{0p}) = N_{0q}$$

en donde $P^\perp_{(\gamma,0,t)}$ denota el transporte paralelo normal a lo largo de γ.

Teorema 4.2.5. *[1] Sea M una subvariedad semi-riemanniana de $\mathbb{R}^{1,n}$ y N_0 un subhaz de rango k del haz normal de M. Suponga que la segunda forma fundamental de M con respecto a cualquier dirección en N_0 se anula y que N_0 es paralelo en el haz normal. Entonces M se encuentra en una subvariedad totalmente geodésica $(n+1-k)$- dimensional.*

Demostración. Podemos suponer que M es conexa pues la conclusión es local, y cualquier variedad es localmente conexa.

Fijemos un punto $p \in M$. Se demostrará que $M \subset (N_0)^\perp_p$ en donde $(N_0)^\perp_p$ es el espacio afín por p perpendicular a $(N_0)_p$. Para esto tomemos $\eta_p \in (N_0)_p \subset T_pM^\perp$, y consideremos una curva $\gamma : I \to M$ con $\gamma(0) = p$. Denotemos por η_t al transporte paralelo normal de η_p a lo largo de γ, entonces por la hipótesis del paralelismo de N_0 se cumple que $\eta_t \in (N_0)_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$.

Por hipótesis, la segunda forma fundamental respecto a η_t se anula para todo $t \in I$: para cualesquiera $X, Y \in T_{\gamma(t)}M$,

$$0 = \langle \mathrm{II}(X,Y), \eta_t \rangle = \langle A_{\eta_t}(X), Y \rangle \qquad \forall t \in I;$$

por tanto, para todo $t \in I$ se tiene $A_{\eta_t} = 0$, y usando la ecuación de Weingarten

$$\overline{\nabla}_{\dot\gamma(t)}\eta_t = -A_{\eta_t}\dot\gamma(t) + \nabla^{\perp}_{\dot\gamma(t)}\eta(t) = 0,$$

concluimos que η_t es paralelo en la variedad ambiente. Esto implica

$$\frac{d}{dt}\langle \gamma(t) - \gamma(0), \eta_t \rangle = \langle \dot\gamma(t), \eta_t \rangle = 0,$$

es decir $\gamma(t) - \gamma(0) \in \eta_t^{\perp}$ para todo $t \in I$. Como esto es válido para cualquier curva γ por p y cualquier vector en N_{0p} se concluye que M está contenida en $N_{0p}^{\perp}$. □

Para la demostración del siguiente teorema usaremos herramientas de la teoría de superficies de Riemann.

Definición 4.2.6. Un atlas $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ de una superficie Σ es **conforme** si los cambios de coordenadas

$$z_\beta \circ {z_\alpha}^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son funciones holomorfas. Una carta es compatible con un atlas conforme si agregandola al atlas previo obtenemos nuevamente un atlas conforme. Una estructura conforme se obtiene añadiendo todas las cartas conformes a un atlas conforme. Una superficie de Riemann es una superficie junto con una estructura conforme.

Definición 4.2.7. Una métrica en una superficie de Riemann es conforme, si en las coordenadas locales $z = x + iy$ es de la forma

$$\lambda^2(z)dzd\overline{z},$$

en donde λ es en una función suave con valores en los reales positivos, $dz = dx + idy$ y $dz = dx - idy$.

Teorema 4.2.8. *Sea (M, g) una superficie orientada con una métrica riemanniana, entonces M admite una estructura conforme, respecto a la cual la métrica es conforme:*

$$g(z) = \lambda(z)^2 dzd\overline{z}.$$

La demostración se encuentra en [6] p.155.

Definición 4.2.9. Sea (Σ, g) una superficie de Riemann con una estructura conforme $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$. Una **diferencial cuadrática** (meromorfa) φ en Σ es un conjunto de funciones meromorfas φ_ν en los parámetros locales z_ν, para los cuales la regla de transformación

$$\varphi_\nu(z_\nu)dz_\nu^2 = \varphi_\mu(z_\mu)dz_\mu^2, \qquad dz_\mu = \left(\frac{dz_\mu}{dz_\nu}\right)dz_\nu$$

se mantiene cuando z_μ y z_ν son parámetros cuyos valores corresponden al mismo punto de Σ y $\left(\frac{dz_\mu}{dz_\nu}\right)$ el número complejo que se se identifica con la matriz jacobiana del cambio de coordenadas. La diferencial cuadrática es holomorfa si su representación φ_ν es holomorfa.

La definición aquí dada puede encontrarse en [12] y concuerda con [5] y [6]. Es inmediato de la definición que el espacio de las diferenciales cuadráticas holomorfas de una superficie de Riemann forma un espacio vectorial complejo $\mathrm{Q}(\Sigma)$. Además se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.2.10. *Sea Σ una superficie de Riemann con una métrica conforme, de género p, entonces*

$$\begin{array}{ll} dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Q}(\Sigma) = 0 & si\ p = 0 \\ dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Q}(\Sigma) = 1 & si\ p = 1 \\ dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Q}(\Sigma) = 3p - 3 & si\ p \geq 2 \end{array}$$

Una demostración se puede encontrar en [6] p.217.

Consideremos una superficie de tipo espacio Σ de $\mathbb{R}^{1,3}$, y su vector de curvatura media

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\mathrm{II}(e_i, e_i)$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es un marco móvil de Σ. Suponga que el vector de curvatura media de Σ es un vector de tipo espacio no nulo en todo punto y considere ahora $e_3 = -\frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ y e_4 el vector de tipo tiempo normal a la superficie, orientado al futuro que es ortonormal a e_3.

Teorema 4.2.11. *[1] Sea Σ una superficie de tipo espacio de $\mathbb{R}^{1,3}$, con vector de curvatura media de tipo espacio y no nulo, tal que $\alpha_H = 0$. Suponga además que Σ es una esfera topológica. Entonces Σ se encuentra en un hiperplano de tipo espacio.*

Demostración. Consideremos un sistema de coordenadas locales (u^a, u^b) de Σ, $e_3 = -\frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ y e_4 el vector unitario normal de tipo tiempo ortogonal a e_3 que está orientado al futuro.

Proyectando a e_3 y e_4 podemos escribir la segunda forma fundamental de Σ de la siguiente forma:

$$\mathrm{II}\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\right) = h^3_{ab}e_3 - h^4_{ab}e_4.$$

Se demostrará que $\mathbb{R}e_4$ es un subhaz del haz normal que cumple las hipótesis del teorema 4.2.5, es decir que es paralelo en el haz normal y que h^4 se anula.

Observe que la condición $\alpha_H = 0$ implica que la sección e_4 del normal es paralela en el haz normal. En efecto, si X es un vector tangente a Σ, entonces tenemos que

$$\left\langle \nabla^{\perp}_X e_4, e_4 \right\rangle = \langle \overline{\nabla}_X e_4, e_4 \rangle = 0,$$

debido a que e_4 es unitario y además

$$\left\langle \nabla^{\perp}_X e_4, e_3 \right\rangle = \langle \nabla_X e_4, e_3 \rangle = -\alpha_H(X) = 0,$$

debido a que $\langle e_3, e_4 \rangle = 0$. Lo que implica que $\mathbb{R}e_4$ es un subhaz paralelo en el haz normal.

Resta demostrar que $h^4 = 0$. Para esto demostraremos que la divergencia y la traza de h^4 se anulan; se demostrará luego que un tensor (0,2) simétrico sin traza y sin divergencia corresponde a la parte real de una diferencial cuadrática holomorfa que por el teorema 4.2.10 es idénticamente 0.

Verifiquemos ahora que $tr(h^4) = 0$: usando un sistema de coordenadas normales $\{\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\}$ en un punto p en donde realizamos el cálculo, tenemos

$$\mathrm{tr}(h^4)_p = \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^a}} \frac{\partial}{\partial u^a}, e_4 \right\rangle_p + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^b}} \frac{\partial}{\partial u^b}, e_4 \right\rangle_p = -|\vec{H}|_p \left\langle e_3, e_4 \right\rangle_p = 0.$$

Verifiquemos que también la divergencia se anula: recordemos que por definición

$$\mathrm{div}(h^4) = \mathrm{tr}(\nabla h^4). \tag{4.24}$$

Por tanto será necesario calcular $\big(\nabla_X h^4\big)(Y, Z)$. Para simplificar el proceso supongamos que X, Y, Z son campos tangentes tales que

$$\nabla X(p) = \nabla Y(p) = \nabla Z(p) = 0$$

en un punto $p \in \Sigma$ en donde realizamos el cálculo. Suponiendo esto se tiene

$$\big(\nabla_X h^4\big)\big(Y, Z\big) = X\big(h^4(Y, Z)\big) = X \left\langle \mathrm{II}(Y, Z), e_4 \right\rangle.$$

Usando la compatibilidad de la conexión $\overline{\nabla}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$ con la métrica y la ecuación de Codazzi obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_X h^4(Y, Z) &= \left\langle \overline{\nabla}_Z \mathrm{II}(Y, X), e_4 \right\rangle + \left\langle \mathrm{II}(Y, Z), \overline{\nabla}_X e_4 \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_Z (h^3(Y, X)e_3 - h^4(X, Y)e_4), e_4 \right\rangle + \left\langle \mathrm{II}(Y, Z), \overline{\nabla}_X e_4 \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle e_3, e_4\rangle = 0$ y $\langle e_4, e_4\rangle = 1$, deducimos

$$\nabla_X h^4(Y,Z) = h^3(Y,X)\left\langle \overline{\nabla}_Z e_3, e_4\right\rangle + Z(h^4(X,Y)) + h^3(Y,Z)\left\langle e_3, \overline{\nabla}_X e_4\right\rangle,$$

es decir

$$(\nabla_X h^4)(Y,Z) = Z(h^4(X,Y)) + h^3(X,Y)\alpha_H(Z) - h^3(Y,Z)\alpha_H(X). \quad (4.25)$$

Por tanto, si tomamos un sistema de coordenadas normales $\{\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\}$ en un punto y calculamos, se obtiene de (4.25) que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(h^4)_b &= \sum_a \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^a}} h^4\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\right) \\
&= \sum_a \frac{\partial}{\partial u^b}\left(h^4\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^a}\right)\right) + h^3\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^a}\right)\alpha_H\left(\frac{\partial}{\partial u^b}\right) \quad (4.26) \\
&\quad - \sum_a h^3\left(\frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b}\right)\alpha_H\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right).
\end{aligned}$$

Usando que $tr(h^4) = 0$ y que $\alpha_H = 0$ en (4.26) se concluye:

$$\operatorname{div}(h^4)_b = 0,$$

y por tanto $\operatorname{div}(h^4) = 0$. En resumen h^4 es un tensor $(0,2)$ simétrico, sin traza, y sin divergencia. Se procederá a construir la diferencial cuadrática holomorfa a partir del tensor h^4. Los argumentos que se detallan en seguida pueden encontrarse en [5].

Usando el teorema 4.2.8 podemos suponer a nuestra superficie Σ como una superficie de Riemann, con una métrica conforme. Tomemos (U_ν, z_ν) una carta conforme. Al ser h^4 un tensor simétrico y sin traza, sus coordenadas en esta carta tienen la forma

$$\begin{pmatrix} h^4_{11} & h^4_{12} \\ h^4_{21} & h^4_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\nu & v_\nu \\ v_\nu & -u_\nu \end{pmatrix}.$$

Definimos $\varphi_\nu = u_\nu - iv_\nu$, entonces la parte real de $\varphi_\nu dz^2$ coincide con h^4:

$$\begin{aligned}
Re(\varphi_\nu dz^2) &= Re\big((u_\nu - iv_\nu)(dx_1 + idx_2)^2\big) \\
&= Re\big((u_\nu - iv_\nu)(dx_1^2 + 2idx_1dx_2 - dx_2^2)\big) \\
&= u_\nu dx_1^2 + 2v_\nu dx_1 dx_2 - u_\nu dx_2^2 \\
&= h^4. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Verifiquemos que si realizamos una definición análoga en cada carta coordenada obtenemos un objeto φdz^2 globalmente definido. Para esto tomemos otra carta (U_μ, z_μ) y verifiquemos que en la intersección de los dominios

$$\varphi_\nu(z_\nu)dz_\nu^2 = \varphi_\mu(z_\mu)dz_\mu^2,$$

o equivalentemente

$$\varphi_\nu(z_\nu)\left(\frac{dz_\nu}{dz_\mu}\right)^2 = \varphi_\mu(z_\mu).$$

Al ser h^4 un tensor $(0,2)$ lo podemos escribir en cada sistema de coordenadas locales como una matriz simétrica que actúa en parejas de vectores, de la manera usual en que se identifica una matriz con una forma bilineal. Como h^4 es un objeto globalmente bien definido, es invariante bajo cambios de coordenadas, y por tanto la matriz que representa h^4 en el sistema de coordenadas z_μ está relacionada con la matriz que representa a h^4 en el otro sistema z_ν de coordenadas por la ecuación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\nu & v_\nu \\ v_\nu & -u_\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\mu & v_\mu \\ v_\mu & -u_\mu \end{pmatrix}$$

en donde $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ corresponde a la matriz de cambio de coordenadas, que se identifica con el número complejo $\left(\frac{dz_\nu}{dz_\mu}\right)$. Realizando la multiplicación de matrices encontramos

$$\begin{pmatrix} u_\nu(a^2-b^2)+2v_\nu ba & -2u_\nu ba + v_\nu(a^2-b^2) \\ v_\nu(a^2-b^2)-2u_\nu ba & -2v_\nu ab - u_\nu(a^2-b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\mu & v_\mu \\ v_\mu & -u_\mu \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \varphi_\mu &= u_\mu - iv_\mu \\ &= u_\nu(a^2-b^2)+2v_\nu ab - i(-2u_\nu ba + v_\nu(a^2-b^2) \\ &= (u_\nu - iv_\nu)(a^2-b^2+2abi) \\ &= \varphi_\nu\left(\frac{dz_\nu}{dz_\mu}\right)^2. \end{aligned}$$

De forma que φdz^2 está bien definido. Resta únicamente verificar que φdz^2 es holomorfo en las cartas conformes; esto es consecuencia de que la divergencia de h^4 se anule.

En una carta conforme la métrica es de la forma $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$ y los símbolos de Christoffel están dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial_1\lambda}{\lambda} &= \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22}, \\ \frac{\partial_2\lambda}{\lambda} &= \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{11}. \end{aligned}$$

Usando estos símbolos encontramos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1}\partial_1 &= \frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_1 - \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_2,\\
\nabla_{\partial_1}\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\partial_1 &= \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_1 + \frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_2,\\
\nabla_{\partial_2}\partial_2 &= -\frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_1 + \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_2.
\end{aligned}$$

En estas cartas coordenadas la ecuación $\mathrm{div} h^4(\partial_1) = 0$ se escribe

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda^2}\big(\nabla_{\partial_j} h^4\big)(\partial_j, \partial_1)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{2}\Big(\partial_j h^4(\partial_j,\partial_1) - h^4(\nabla_{\partial_j}\partial_j, \partial_1) - h^4(\partial_j, \nabla_{\partial_j}\partial_1)\Big)\\
&= \frac{1}{\lambda^2}\Big(\partial_1 h^4(\partial_1,\partial_1) + \partial_2 h^4(\partial_2,\partial_1) - A\Big)\\
&\text{con } A = 2h^4(\nabla_{\partial_1}\partial_1, \partial_1) + h^4(\nabla_{\partial_2}\partial_2, \partial_1) + h^4(\partial_2, \nabla_{\partial_2}\partial_1).
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
A &= 2h^4\Big(\frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_1 - \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_2, \partial_1\Big) + h^4\Big(-\frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_1 + \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_2, \partial_1\Big)\\
&\quad + h^4\Big(\partial_2, \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_1 + \frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_2\Big)\\
&= h^4\Big(\frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_1 - \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_2, \partial_1\Big) + h^4\Big(\partial_2, \frac{\partial_2\lambda}{\lambda}\partial_1 + \frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_2\Big)\\
&= h^4\Big(\frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_1, \partial_1\Big) + h^4\Big(\partial_2, \frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\partial_2\Big)\\
&= \frac{\partial_1\lambda}{\lambda}\mathrm{tr}(h^4)\\
&= 0;
\end{aligned}$$

por tanto $\mathrm{div} h^4(\partial_1) = 0$ se lee como

$$\partial_1 h^4(\partial_1,\partial_1) + \partial_2 h^4(\partial_2,\partial_1) = 0,$$

que en términos de $\varphi = u - iv$ quiere decir

$$\partial_1 u = \partial_2(-v). \tag{4.28}$$

Ahora veamos cómo se lee la ecuación $\mathrm{div} h^4(\partial_2) = 0$ en términos de este sistema de coordenadas: tenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\lambda^2} (\nabla_{\partial_j} h^4)(\partial_j, \partial_2) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{2} \Big(\partial_j h^4(\partial_j, \partial_2) - h^4(\nabla_{\partial_j} \partial_j, \partial_2) - h^4(\partial_j \nabla_{\partial_j} \partial_2) \Big) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \Big(\partial_1 h^4(\partial_1, \partial_2) + \partial_2 h^4(\partial_2, \partial_2) - B \Big) \\
&\text{con } B = 2h^4(\partial_2, \nabla_{\partial_2} \partial_2) + h^4(\partial_1, \nabla_{\partial_1} \partial_2) + h^4(\nabla_{\partial_1} \partial_1, \partial_2);
\end{aligned}
$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
B &= 2h^4 \Big(-\frac{\partial_1 \lambda}{\lambda} \partial_1 + \frac{\partial_2 \lambda}{\lambda} \partial_2, \partial_2 \Big) + h^4 \Big(\partial_1, \frac{\partial_2 \lambda}{\lambda} \partial_1 + \frac{\partial_1 \lambda}{\lambda} \partial_2 \Big) \\
&\qquad + h^4 \Big(\frac{\partial_1 \lambda}{\lambda} \partial_1 - \frac{\partial_2 \lambda}{\lambda} \partial_2, \partial_2 \Big) \\
&= h^4 \Big(-\frac{\partial_1 \lambda}{\lambda} \partial_1 + \frac{\partial_2 \lambda}{\lambda} \partial_2, \partial_2 \Big) + h^4 \Big(\partial_1, \frac{\partial_2 \lambda}{\lambda} \partial_1 + \frac{\partial_1 \lambda}{\lambda} \partial_2 \Big) \\
&= \frac{\partial_2 \lambda}{\lambda} \Big(h^4\big(\partial_2, \partial_2\big) + h^4\big(\partial_1, \partial_1\big) \Big) \\
&= \frac{\partial_2 \lambda}{\lambda} \mathrm{tr}(h^4) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

por lo que la ecuación $\mathrm{div} h^4(\partial_2) = 0$ en estas coordenadas se lee como

$$\partial_1 h^4(\partial_1, \partial_2) + \partial_2 h^4(\partial_2, \partial_2) = 0.$$

En términos de $\varphi = u - iv$ quiere decir

$$\partial_2 u = -\partial_1(-v). \tag{4.29}$$

Las ecuaciones (4.28) y (4.29) son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para φ y por tanto φ es holomorfa en este sistema de coordenadas conformes, por lo que φdz^2 es en efecto una diferencial cuadrática holomorfa, la cual, por ser Σ topológicamente una esfera, debe anularse por el teorema 4.2.10; por tanto su parte real también, y usando (4.27) concluimos que $h^4 = 0$.

En resumen $\mathbb{R}e_4$ es un sub-haz del haz normal, paralelo en el haz normal y la segunda forma fundamental respecto a e_4 se anula. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 4.2.5 de reducción de codimensión; usando este teorema concluimos que Σ se encuentra en un hiperplano de tipo espacio. □

Antes de enunciar el siguiente teorema es conveniente aclarar los términos que emplearemos.

Diremos que una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^{1,3}$ es invariante por un campo vectorial de $\mathbb{R}^{1,3}$ si para todo punto $p \in \Sigma$, el flujo del campo $\varphi_p(t)$ se queda contenido en Σ para todo tiempo.

Por un campo rotacional de Killing en $\mathbb{R}^{1,3}$ nos referimos a un campo de Killing tal que su componente en $\frac{\partial}{\partial t}$ se anula idénticamente. Estos campos se identifican de manera natural con los campos de Killing de $\mathbb{R}^3$ por la correspondencia

$$\begin{aligned}\psi : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) &\to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{1,3})\\ a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} &\mapsto a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z} + 0\frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

Se cumple entonces que X es un campo de Killing en $\mathbb{R}^3$ si y solo si $\psi(X)$ es un campo rotacional de Killing en $\mathbb{R}^{1,3}$.

En efecto, si $\psi(X)$ es de Killing, notando que las conexiones coinciden en vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$, la ecuación de Killing

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = -\langle Y, \nabla_Z X\rangle \qquad \text{para } Y, Z \text{ tangentes a } \mathbb{R}^3$$

se satisface. Por otra parte si X es un campo de Killing en $\mathbb{R}^3$, y $Y, Z \in \mathbb{R}^{1,3}$ podemos considerar la descomposición ortogonal de Y y Z respecto a $\mathbb{R}^3$, es decir

$$Y = Y^{\perp} + Y^{\top} \text{ con } Y^{\perp} \text{ normal y } Y^{\top} \text{ tangente a } \mathbb{R}^3$$

y análogamente para Z. Entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\nabla}_{(Y^{\perp}+Y^{\top})}\psi(X), Z\right\rangle &= \left\langle \nabla_{Y^{\top}} X, Z^{\top}\right\rangle\\ &= -\left\langle Y^{\top}, \nabla_{Z^{\top}} X\right\rangle\\ &= -\left\langle Y, \overline{\nabla}_{(Z^{\perp}+Z^{\top})}\psi(X)\right\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto $\psi(X)$ es un campo vectorial de Killing en $\mathbb{R}^{1,3}$.

Teorema 4.2.12. *Suponga que Σ es una superficie plana en el tiempo en $\mathbb{R}^{1,3}$ y Σ es una esfera topológica. Si Σ es invariante por un campo vectorial rotacional de Killing, entonces Σ se encuentra en un hiperplano de tipo espacio de $\mathbb{R}^{1,3}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que el campo rotacional de Killing es $\frac{\partial}{\partial \phi}$ donde (t, r, θ, ϕ) es el sistema usual de coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^{1,3}$. Esto se debe a que los campos de Killing rotacionales en $\mathbb{R}^3$ forman un espacio vectorial de dimensión 3, y se identifican con las matrices antisimétricas de 3×3 , de forma que si K es un campo rotacional de Killing, entonces es de la forma

$$K_p = A \cdot p \qquad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^3, \text{ donde } A \text{ es antisimétrica,}$$

o en términos de las coordenadas canónicas

$$K = \sum_{i,j=1}^{3} A_i^j x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{donde } A = (A_i^j) \text{ es antisimétrica.}$$

Una demostración de esto se encuentra en [9] p. 253. Usando este resultado, escribimos al campo de Killing de la hipótesis como $K_p = A \cdot p$ para $p \in \mathbb{R}^3$, y consideremos el vector $a \in \mathbb{R}^3$ que satisface

$$Ax = a \times x$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|a\| = 1$, debido a que al multiplicar por una constante un campo invariante se conserva invariante. Consideremos una transformación $S \in SO(3)$ que satisfaga

$$Se_3 = a,$$

donde $e_3 = (0, 0, 1)$. Entonces se cumple que

$$A = SE_3S^{-1},$$

en donde

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto, para todo $x \in \mathbb{R}^3$

$$Ax = a \times x = Se_3 \times SS^{-1}x = S(e_3 \times S^{-1}x) = S(E_3(S^{-1}x)) = (SE_3S^{-1})x.$$

Por tanto, para cualquier campo de Killing $K_p = A \cdot p$, se cumple que

$$K_p = S(E_3(S^{-1}p))$$

para una transformación $S \in SO(3)$ adecuada, es decir

$$K = S_* \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

En donde $S_* \frac{\partial}{\partial \phi}$ es el campo definido por $S_* \frac{\partial}{\partial \phi}(p) = dS_{S^{-1}(p)}(\frac{\partial}{\partial \phi}(S^{-1}(p))$. Por tanto no hay pérdida de generalidad si consideramos el caso particular $K = \frac{\partial}{\partial \phi}$, pues S es una isometría del espacio ambiente y conserva la geometría intrínseca y extrínseca.

Observemos que el conjunto $\{q \in \Sigma \mid \frac{\partial}{\partial \phi}(q) \neq 0\}$ es denso en Σ. En efecto, como $\frac{\partial}{\partial \phi}(q) = 0$ si y solo si $x(q) = y(q) = 0$, si esta condición sucede en un abierto de Σ, dicho abierto estaría contenido en el plano $x = y = 0$

por ende $\frac{\partial}{\partial t}$ sería tangente a Σ en dicho abierto, lo que es una contradicción pues Σ es de tipo espacio.

Como la superficie es invariante por el flujo de $\frac{\partial}{\partial \phi}$, entonces $\frac{\partial}{\partial \phi} \in T_p\Sigma$ para todo $p \in \Sigma$. Tomemos un punto $p \in \Sigma$ con $\frac{\partial}{\partial \phi}(p) \neq 0$ y una vecindad abierta de Σ tal que $\frac{\partial}{\partial \phi} \neq 0$ en dicha vecindad; existen entonces coordenadas u_1, u_2 definidas en un abierto suficientemente pequeño de p que satisfacen $\frac{\partial}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial \phi}$. Usando estas coordenadas, consideremos la parametrización local asociada

$$\begin{aligned} \Psi : U \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^{1,3} \\ (u_1, u_2) &\mapsto \Psi(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{4.30}$$

y analicemos su matriz jacobiana en términos del sistema de coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$d\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u_1} & \frac{\partial t}{\partial u_2} \\ \frac{\partial r}{\partial u_1} & \frac{\partial r}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u_1} & \frac{\partial \theta}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Por hipótesis el flujo φ_q por q de $\frac{\partial}{\partial \phi}$ cumple que $\varphi_q(s) \in \Sigma$ para todo s en donde el flujo esté definido (todo $\mathbb{R}$ pues se trata de una superficie completa y un campo de Killing). Como el flujo de $\frac{\partial}{\partial \phi}$ parametriza rotaciones de $\mathbb{R}^3$ en el eje Z tenemos, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\theta(\varphi_q(s)) = \theta(\varphi_q(0)), \tag{4.32}$$

$$r(\varphi_q(s)) = r(\varphi_q(0)), \tag{4.33}$$

$$t(\varphi_q(s)) = t(\varphi_q(0)) \tag{4.34}$$

y

$$\phi(\varphi_q(s)) = \phi(\varphi_q(0)) + s. \tag{4.35}$$

Ahora para calcular la segunda columna de (4.31) podemos tomar una curva integral de $\frac{\partial}{\partial \phi}$, pues está contenida en Σ por hipótesis, y ciertamente tiene por vector tangente $\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial u_2}$ de manera que las ecuaciones (4.32)-(4.35) implican que (4.31) sea de la forma

$$d\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u_1} & 0 \\ \frac{\partial r}{\partial u_1} & 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial u_1} & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial u_1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.36}$$

de forma que en (4.36), un subdeterminante que incluya la última fila tiene que ser invertible, podemos asumir además sin pérdida de generalidad que

$\frac{\partial\theta}{\partial u_1} \neq 0$ en todo punto de un abierto suficientemente pequeño de $\Psi^{-1}(p)$, pues si en el punto p donde estamos realizando el análisis local sucede que $\frac{\partial\theta}{\partial u_1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_1}, grad(\theta) \right\rangle = 0$, o equivalentemente, $\frac{\partial}{\partial u_1}$ es tangente a la hipersuperficie $\theta = cte$, podemos hacer una traslación de Σ en el eje Z de manera que en estas nuevas coordenadas conservamos la invarianza por $\frac{\partial}{\partial\phi}$ y se cumple además que $\frac{\partial\theta}{\partial u_1}(p) \neq 0$. Así el subdeterminante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial u_1} & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial u_1} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

es invertible, y usando el teorema de la función inversa, localmente podemos escribir a u_1 y u_2 como funciones de θ y ϕ y así localmente Σ es la gráfica de una función

$$(\theta, \phi) \to (u_1, u_2) \to (t(\theta, \phi), r(\theta\, \phi), \theta, \phi).$$

Notemos que las coordenadas t y r no dependen de ϕ, en efecto, como la matriz jacobiana de la aplicación $(u_1, u_2) \to (\theta, \phi)$ es de la forma (4.37), concluimos que la matriz jacobiana de su inversa es también triangular inferior

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial\theta} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial\theta} & \frac{\partial u_2}{\partial\phi} \end{pmatrix}.$$

Es decir $\frac{\partial u_1}{\partial\phi} = 0$ y además por (4.36) tenemos que $\frac{\partial r}{\partial u_2} = \frac{\partial t}{\partial u_2} = 0$, por tanto se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial t}{\partial\phi} = \frac{\partial t}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial\phi} + \frac{\partial t}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial\phi} = 0,$$

$$\frac{\partial r}{\partial\phi} = \frac{\partial r}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial\phi} + \frac{\partial r}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial\phi} = 0.$$

Denotemos por f a la parametrización local de Σ con regla de correspondencia

$$(\theta, \phi) \to (t(\theta), r(\theta), \theta, \phi),$$

localmente una base del plano tangente esta dada por

$$\left\{ t'\frac{\partial}{\partial t} + r'\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\theta}\ ,\ \frac{\partial}{\partial\phi} \right\}, \tag{4.38}$$

en donde ( )' denota la derivación usual respecto a θ y por otro lado una base del haz normal está dada por

$$\left\{ Y_3 = r^2\frac{\partial}{\partial r} - r'\frac{\partial}{\partial\theta}\ ,\ Y_4 = r'\frac{\partial}{\partial t} + t'\frac{\partial}{\partial r} \right\}.$$

Esta última afirmación se comprueba verificando que los vectores Y_3 y Y_4 son ortogonales al plano tangente y linealmente independientes.

Como podemos suponer que $r' \neq 0$ (pues si sucediera que $r'(p) = 0$ podemos realizar una traslación en el eje Z, de forma que $r' \neq 0$ en una vecindad abierta de p), la base propuesta es en efecto linealmente independiente.

Para verificar que son ortogonales al plano tangente, calculemos sus productos interiores con los vectores de la base (4.38) de $T\Sigma$:

$$\left\langle r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r' \frac{\partial}{\partial \theta}, t' \frac{\partial}{\partial t} + r' \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = r^2 \; r' \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle - r' \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r' \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle r' \frac{\partial}{\partial t} + t' \frac{\partial}{\partial r}, t' \frac{\partial}{\partial t} + r' \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = r't' \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + t'r' \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0$$

y

$$\left\langle r' \frac{\partial}{\partial t} + t' \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle = 0.$$

Afirmamos que por ser Σ invariante por el flujo de $\frac{\partial}{\partial \phi}$ los vectores normales e_3 y e_4 pueden escribirse como combinaciones lineales de Y_3 y de Y_4 con coeficientes que solo dependen de θ, es decir

$$e_3 = a(\theta) Y_3 + b(\theta) Y_4. \tag{4.39}$$

Esto se puede verificar de la siguiente forma: tomemos $f(\theta_1, \phi_1) = p_1$ y $f(\theta_1, \phi_2) = p_2 \in \Sigma$; como la superficie es invariante por el flujo de $\frac{\partial}{\partial \phi}$, el cual parametriza una rotación en el eje Z, tomemos L una rotación en el eje Z en $\mathbb{R}^{1,3}$ tal que $L(p_1) = p_2$. Entonces $dL_{p_1}(T_{p_1}\Sigma) = T_{p_2}\Sigma$: en efecto como ambos espacios vectoriales tienen la misma dimensión, y se trata de una restricción de una isometría del espacio ambiente, basta verificar que si $X \in T_{p_1}\Sigma$ entonces $dL_{p_1}X \in T_{p_2}\Sigma$, lo cual se puede verificar tomando una curva $\gamma : I \to \Sigma$, con $\gamma(0) = p_1$ y $\gamma'(0) = X$, de forma que

$$dL_{p_1}(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L \circ \gamma(t);$$

pero como $L \circ \gamma(t) \in \Sigma$ para todo tiempo, se concluye que $dL_{p_1}(X) \in T_{p_2}\Sigma$.

Como L es una isometría del espacio ambiente, entonces L preserva la primera forma fundamental, la segunda forma fundamental y la conexión normal de Σ, por tanto, si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de $T_{p_1}\Sigma$, entonces $\{(L_* e_1)_{p_2}, (L_* e_2)_{p_2}\}$ es una base ortonormal de $T_{p_2}\Sigma$, en donde $L_* X$ es el campo definido en una vecindad de $L(p_1) = p_2$ por $L_* X(q) =$

$dL_{L^{-1}(q)}(X_{L^{-1}(q)})$. Como el vector de curvatura media es la traza de la segunda forma fundamental, puntualmente lo podemos calcular en p_2 con esta base:

$$\vec{H}_{p_2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} D_{L_*(e_i)} L_*(e_i)_{p_2} = dL_{p_1} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} D_{e_i} e_{i_{p_1}} \right) = (L_* \vec{H})_{p_2}.$$

Y por tanto para $e_3 = -\frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$ se cumple que

$$(L_* e_3)_{p_2} = e_{3_{p_2}}.$$

Recordando que e_4 es el vector unitario de tipo tiempo orientado al futuro, ortogonal a Σ y a e_3 (ver definición 4.1.1), concluimos que $(L_* e_4)_{p_2} = e_{4_{p_2}}$. Esto se debe a que L preserva la orientación y el complemento ortogonal de $\{e_1, e_2, e_3\}$, junto con el hecho de que un vector en un espacio vectorial de dimensión uno, está determinado por su orientación y magnitud.

Veamos que también se cumple que $(L_* Y_3)_{p_2} = Y_{3_{p_2}}$, en efecto:

$$\begin{aligned}
(L_* Y_3)_{p_2} &= r^2(p_1) \left(L_* \frac{\partial}{\partial r} \right)_{p_2} - r'(p_1) \left(L_* \frac{\partial}{\partial \theta} \right)_{p_2} \\
&= r^2(p_2) \left. \frac{\partial}{\partial r} \right._{p_2} - r'(p_2) \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right._{p_2} \\
&= Y_{3_{p_2}}.
\end{aligned}$$

Además $(L_* Y_4)_{p_2} = Y_{4_{p_2}}$ por un argumento similar:

$$\begin{aligned}
(L_* Y_4)_{p_2} &= r'(p_1) \left(L_* \frac{\partial}{\partial t} \right)_{p_2} + t'(p_1) \left(L_* \frac{\partial}{\partial r} \right)_{p_2} \\
&= r'(p_2) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right._{p_2} + t'(p_2) \left. \frac{\partial}{\partial r} \right._{p_2}.
\end{aligned}$$

Por lo que para $i, j \in \{3, 4\}$ se tiene que

$$\langle e_i, Y_j \rangle_{p_1} = \langle L_*(e_i), L_*(Y_j) \rangle_{p_2} = \langle e_i, Y_j \rangle_{p_2},$$

lo que demuestra la afirmación de que e_3 se escribe de la forma (4.39). Procederemos a calcular $D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} e_3$: tenemos

$$\begin{aligned}
D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} e_3 &= a D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} Y_3 + b D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} Y_4 \\
&= a \left(r^2 D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial r} - r' D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + b \left(r' D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial t} + t' D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial r} \right).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ satisfacen las siguientes ecuaciones

$$D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial r} = \Gamma^{\phi}_{\phi r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \qquad D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial \theta} = \Gamma^{\phi}_{\phi \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

(ver [9] p. 95). Y las coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) en $\mathbb{R}^{1,3}$ satisfacen además

$$D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Usando estas expresiones en la ecuación (4.40), encontramos que

$$D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} e_3 = \left(ar^2 \Gamma^{\phi}_{\phi r} - ar' \Gamma^{\phi}_{\phi \theta} + bt' \Gamma^{\phi}_{\phi r} \right) \frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{4.41}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \alpha_H \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right) &= \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \phi}} e_3, e_4 \right\rangle \\ &= \left(ar^2 \Gamma^{\phi}_{\phi r} - ar' \Gamma^{\phi}_{\phi \theta} + bt' \Gamma^{\phi}_{\phi r} \right) \left\langle \ \frac{\partial}{\partial \phi} \ , \ e_4 \ \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

y al expresar α_H en términos de la base dual $\{d\theta, d\phi\}$

$$\alpha_H = \varphi d\theta \qquad \text{donde} \qquad \varphi = \alpha_H \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} e_3, e_4 \right\rangle.$$

Además φ depende solo de θ debido al siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \varphi &= \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} e_3, e_4 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} (aY_3 + bY_4), e_4 \right\rangle \\ &= a' \langle Y_3, e_4 \rangle + b' \langle Y_4, e_4 \rangle + a \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_3, e_4 \right\rangle + b \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_4, e_4 \right\rangle. \end{aligned}$$

Como a y b son funciones que solo dependen de θ, basta verificar que $\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_3, e_4 \right\rangle$ y $\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_4, e_4 \right\rangle$ son funciones que solo dependen de θ. En efecto

$$\begin{aligned} \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_3, e_4 \right\rangle &= \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r' \frac{\partial}{\partial \theta} \right), e_4 \right\rangle \\ &= 3rr' \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, e_4 \right\rangle + r^2 - r'' \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, e_4 \right\rangle. \end{aligned}$$

Como r solo depende de θ y los campos $\frac{\partial}{\partial r}$, e_4 y $\frac{\partial}{\partial \theta}$ son invariantes por la acción de una rotación en el eje Z, encontramos que $\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_3, e_4 \right\rangle$ es una función que solo depende de θ. Análogamente, como

$$\begin{aligned} \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_4, e_4 \right\rangle &= \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left(r' \frac{\partial}{\partial t} + t' \frac{\partial}{\partial r} \right), e_4 \right\rangle \\ &= r'' \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e_4 \right\rangle + t'' \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, e_4 \right\rangle + \frac{t'}{r} \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, e_4 \right\rangle, \end{aligned}$$

y como las funciones t , r dependen únicamente de θ, y como los campos $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ y e_4 son invariantes por la acción de una rotación en el eje Z, concluimos que la función $\left\langle D_{\frac{\partial}{\partial \theta}} Y_4, e_4 \right\rangle$ depende únicamente de θ. Por lo tanto tenemos

$$\alpha_H = \varphi(\theta) d\theta. \tag{4.43}$$

Calculando su diferencial exterior encontramos que

$$d\alpha_H = \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi \wedge d\theta = 0,$$

en la vecindad de p considerada. Como este análisis local se puede llevar a cabo en cada punto en donde $\frac{\partial}{\partial \phi}$ no se anula y dicho conjunto de puntos es denso en Σ, concluimos por continuidad que $d\alpha_H = 0$ en Σ.

Por lo tanto $\alpha_H = df$ pues Σ es simplemente conexa, por lo que la hipótesis $\operatorname{div}(\alpha_H) = 0$ se lee $\Delta f = 0$. Como Σ es conexa, compacta y orientada entonces una condición necesaria para que f sea armónica es que $df = 0$ [7]. Por tanto $\alpha_H = 0$ y al ser Σ una esfera topológica se cumplen las hipótesis del teorema 4.2.11 y se concluye que Σ está contenida en un $\mathbb{R}^3$ totalmente geodésico. $\square$

Bibliografía

[1] P. N. Chen, M. T. Wang and Y. K. Wang, *Rigidity of time-flat surfaces in the Minkowski spacetime.* Math. Res. Lett. 21:6 (2014) 1227–1240.

[2] M. Dajczer, *Submanifolds and isometric immersions.* Mathematics lecture series. Publish or Perish, Incorporated, (1990).

[3] M. Dajczer, L.L. Rodriguez, *Infinitesimal rigidity of euclidean submanifolds.* Annales de l'institut Fourier 40:4 (1990) 939–949.

[4] T. R. Eschenburg, *Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces.* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova 89 (1993) 11–18.

[5] F. Hirzebruch and A. Tromba, *Seminar on New Results in Nonlinear Partial Differential Equations.* Vieweg+Teubner Verlag, (2012).

[6] J. Jost, *Compact Riemann Surfaces.* Universitext (Berlin. Print). Springer, (1997).

[7] S. Morita, *Geometry of Differential Forms.* Iwanami series in modern mathematics. American Mathematical Society, (2001).

[8] L. Nirenberg. *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large.* Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953) 337–394.

[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity.* Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, (1983).

[10] R. Penrose. *Some unsolved problems in classical general relativity.* Ann. of Math. Stud. 102 (1982) 631–668.

[11] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, volume 1-5. Publish or Perish, Inc., 3 edition, (2005).

[12] K. Strebel, *Quadratic Differentials.* Springer Berlin Heidelberg, (2013).

[13] M. T. Wang. *Four lectures on quasi-local mass.* arXiv:1510.02931v1, (2015).

[14] B. Wettstein, *Congruence and existence of differentiable map.* PhD thesis, ETH Zürich, (1978).