



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

APROXIMACIONES A LA PROBABILIDAD DE RUINA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. EN C. DAVID JOSAFAT SANTANA COBIAN

TUTOR PRINCIPAL
DR. LUIS ANTONIO RINCÓN SOLÍS
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DRA. ELIANE REGINA RODRIGUES, IMATE, UNAM
DR. JUAN GONZÁLEZ HERNÁNDEZ, IIMAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO DE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los siguientes pilares de mi formación.

- A mis padres que trabajaron tanto para que pudiera tener una educación de mucha calidad. Su buen ejemplo, su apoyo y su cariño me han acompañado siempre.
- A mis hermanas y hermanos que siempre han sido un buen ejemplo de bondad y perseverancia y me brindaron mucho apoyo en momentos clave. A mis cuñadas y cuñados y a todos mis sobrinos, han sido muy amables conmigo. En especial gracias a mis sobrinos Diana y Roberto, ellos me han hecho sonreír cuando he estado preocupado.
- A mi querida esposa Verónica. Me anima y me inspira desde la preparatoria. Sus ideas y sus puntos de vista siempre fueron muy valiosos durante la Maestría y el Doctorado.
- A Luis Briseño. Su forma de enseñarme en las materias de Cálculo fue fundamental para el resto de mi formación y para decidir ser Académico.
- A mis amigos de la Facultad de Ciencias. Hicieron que amara el ambiente universitario.
- A Vicente Ángel Soriano, por darme la oportunidad de iniciarme en la Academia al permitirme ser su ayudante en la materia de Teoría del Riesgo.
- A Jaime Vázquez Alamilla quien siempre me mostró confianza para impartir materias en la Facultad de Ciencias.

- Al Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM que a lo largo de estos años siempre ha estado comprometido con brindar las condiciones necesarias para desarrollarme como estudiante y para poder llegar a la obtención del Grado.
- A Luis Rincón. Simplemente me ha inspirado a mejorar continuamente como Académico. Agradezco su amistad, el apoyo incondicional que me ha mostrado y su infinita paciencia al dirigirme dentro de la Maestría y el Doctorado.
- Al Dr. Juan Hernández, el tutor principal de este trabajo desde su inicio hasta que desafortunadamente tuvo que partir. Me enseñó con el ejemplo que para ser un buen matemático primero se debe ser un buen ser humano. Siempre recordaré su eterno optimismo.
- A la Dra. Eliane Rodrigues quien siempre me apoyó formando parte de mi comité tutor. Su productividad académica es un ejemplo a seguir.
- A los compañeros del cubículo del IIMAS, Mirella, Magdalena, Rosa María, Arrigo, Ricardo y ambos Pacos. Aprendí mucho de ellos y los admiro.
- A la Dra. Ana Meda, al Dr. Alberto Contreras, al Dr. Carlos Hernández y al Dr. Fernando Baltazar. Fueron mis profesores durante la Maestría y sinodales de este trabajo brindándome sugerencias y correcciones muy valiosas. Les agradezco todas sus atenciones y su paciencia.
- Agradezco la Beca 321888 del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México para realizar mis estudios de Doctorado. Sin este apoyo no hubiera podido desarrollar esta investigación.
- Agradezco al Dr. Gerardo Delgadillo Piñon de la UJAT por haberme apoyado para la finalización de este trabajo.
- Agradezco a la UNAM y a la UJAT, instituciones universitarias donde he podido recibir lo necesario para desarrollarme, primero como estudiante y después como Académico.
- Finalmente, mis alumnos en la UJAT han sido aire fresco que me ha impulsado a dar el último esfuerzo en la conclusión de este trabajo.

Resumen

En este trabajo se desarrollan nuevos métodos de aproximación a la probabilidad de ruina en horizonte infinito, primero en el modelo de Cramér-Lundberg y después, en el modelo discreto de Gerber-Dickson. Para el primer modelo, dichos métodos fueron desarrollados a partir del uso de la distribución conocida como mezcla de Erlangs y para el segundo modelo, se desarrolló un método de aproximación usando la distribución conocida como mezcla de binomiales negativas. Además, en el caso del modelo de Cramér-Lundberg, se hace una aproximación a la probabilidad de ruina cuando se desconoce la distribución del monto de las reclamaciones.

La estructura del trabajo es la siguiente. En el capítulo 1 se revisan las definiciones básicas para entender el proceso de riesgo y la llamada teoría de la ruina. En el capítulo 2 se hace una revisión de la distribución mezcla de Erlangs y de algunas de sus propiedades; también se muestra una forma de obtener la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones sigue esta distribución. En el capítulo 3 se define la función de distribución empírica y se desarrolla un resultado de estabilidad para la aproximación de la probabilidad de ruina. En el capítulo 4 se desarrollan varios de los resultados de esta investigación y se muestran ejemplos de las aproximaciones propuestas suponiendo distintas distribuciones para modelar el monto de las reclamaciones. En el capítulo 5 se hace una propuesta de aproximación a la probabilidad de ruina en el modelo de riesgo discreto, suponiendo que el monto de las reclamaciones tienen distribución Poisson mezclada. Este capítulo se puede considerar independiente de los primeros 4 capítulos, sin embargo, pretende seguir las mismas ideas que fueron aplicadas en el caso del modelo de riesgo continuo, pero adaptadas a un modelo de riesgo discreto. Los resultados en las secciones 3.2 y 4.1, así como en las secciones 5.3 a 5.6 son las contribuciones principales de este trabajo. En el capítulo 6 se muestran los comentarios finales de la investigación. Final-

mente, en los apéndices anexos se presentan algunos resultados conocidos, que son usados dentro del trabajo y que fueron colocados en este apartado para dar más fluidez a la lectura. Además, se proporcionan los códigos en lenguaje R que fueron usados para implementar las técnicas estudiadas y para obtener los resultados de los ejemplos mostrados.

Notación

- \mathbb{R} conjunto de números reales.
- \mathbb{Z} conjunto de números enteros.
- \mathbb{Z}^+ conjunto de números enteros positivos.
- \mathbb{N} conjunto de números naturales incluyendo el cero.
- $F_X(\cdot)$ función de distribución de la variable aleatoria X .
- $\bar{F}_X(x)$ probabilidad de cola de la variable aleatoria X .
- $f_X(\cdot)$ función de densidad de la variable aleatoria X .
- $M_X(\cdot)$ función generadora de momentos de la variable aleatoria X .
- $P_X(\cdot)$ función generadora de probabilidad de la variable aleatoria X .
- $F_X^{*k}(\cdot)$ función de distribución de la suma de k variables aleatorias independientes con idéntica distribución $F_X(\cdot)$.
- $F_e(\cdot)$ función de distribución de equilibrio.
- $f_e(\cdot)$ función de densidad de equilibrio.
- $\{A(t)\}_{t=1}^{\infty}$ proceso estocástico con espacio temporal discreto, formado por la sucesión de variables aleatorias $A(1), A(2), \dots$
- $\{A(t)\}_{t \geq 0}$ proceso estocástico con espacio temporal continuo formado por la sucesión no numerable de variables aleatorias $A(t)$, para $t \geq 0$.
- $\text{Poisson}(\lambda)$ distribución Poisson con $\lambda > 0$.
- $\text{Bin}(n, p)$ distribución binomial con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $0 < p < 1$.
- $\text{BinNeg}(\kappa, p)$ distribución binomial negativa con $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ y $0 < p < 1$.

- Geo(p) distribución geométrica con $0 < p < 1$ y con probabilidad positiva en el conjunto \mathbb{N} .
- GeoT(p) distribución geométrica truncada en cero con $0 < p < 1$ y con probabilidad positiva en el conjunto \mathbb{Z}^+ .
- U(a, b) distribución uniforme con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.
- Exp(β) distribución exponencial con $\beta > 0$ y media $1/\beta$.
- Gama(α, β) distribución gama con $\alpha, \beta > 0$ y media α/β .
- Erlang(κ, β) distribución Erlang, igual a una distribución Gama(κ, β) cuando $\kappa \in \mathbb{Z}^+$.
- Weibull(s, α) distribución Weibull con $s, \alpha > 0$.
- Lognormal(μ, σ^2) distribución lognormal con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.
- Pareto(a, b) distribución Pareto con $a, b > 0$.
- ParetoT(a, b, c) distribución Pareto truncada en $c > 0$ con $a, b > 0$.
- τ tiempo de ruina.
- $\psi(u)$ probabilidad de ruina cuando el capital inicial es u .
- $G(u, y)$ probabilidad de ruina con severidad no mayor al valor y .
- $\mathcal{L}_\psi(\cdot)$ transformada de Laplace de la función ψ .
- $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ convergencia casi segura.
- $X_n \xrightarrow{D} X$ convergencia en distribución.

Consideraciones adicionales

- El uso de letras para denotar constantes, variables, índices y otras cantidades siguió los siguientes criterios:
 - Para índices se usaron las letras i, j, k y l .
 - Para constantes se usaron las letras a, b, c y d .
 - Para denotar variables, se usaron las letras s y t cuando la variable era temporal y se usaron x, y y z en otros casos.

- Se usó la letra r como argumento de las funciones generadoras de momentos y de probabilidad.
 - El uso de la letra q se reservó para indicar las probabilidades usadas en las mezclas de distribuciones, además se usó Q para denotar su función de distribución.
 - Las variables aleatorias se modelaron con letras mayúsculas, principalmente se usaron W , X , Y , Z , N y M .
 - Como parámetros de las distribuciones se usaron a , b , c , n , letras griegas y cuando el parámetro tenía el significado de probabilidad se usó p . La letra n también es usada para denotar números naturales cuando no son parámetros temporales.
 - La letra u se usó de manera exclusiva para denotar el capital inicial del proceso de riesgo, tanto del discreto como del continuo.
 - Las letras μ y σ se usaron, como es tradicional, para denotar a la media y a la desviación estándar de una variable aleatoria.
- Cuando se hace referencia a alguna figura, tabla, teorema, proposición, corolario, lema u observación del trabajo, o de otros trabajos, se usa letra minúscula al inicio de la palabra, a diferencia de trabajos matemáticos escritos en idioma inglés, donde es común usar mayúscula.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Teoría del riesgo	1
1.1.1. Proceso de riesgo clásico	3
1.1.2. Teoría de la ruina	4
1.1.3. Problemas importantes en teoría del riesgo	5
1.2. Modelo de Cramér-Lundberg	6
1.2.1. Severidad de la ruina y el proceso de superávit	9
1.2.2. Aproximaciones a la probabilidad de ruina	23
1.2.3. Aproximación usando simulación	27
1.2.4. Análisis breve de los métodos de aproximación	28
1.2.5. Métodos de aproximación recientes	30
2. Distribución mezcla de Erlangs	33
2.1. Definición y propiedades	33
2.2. Probabilidad de ruina	44
3. Distribución empírica continua	47
3.1. Función de distribución empírica continua	47
3.2. Estabilidad de la probabilidad de ruina	50
4. Aproximaciones vía mezclas de Erlangs	57
4.1. Aproximaciones a la probabilidad de ruina	58
4.1.1. Primera aproximación	60
4.1.2. Segunda aproximación	61
4.1.3. Tercera aproximación	62
4.2. Ejemplos numéricos	63
4.2.1. Distribución gama	64
4.2.2. Distribución mezcla de exponenciales	73

4.2.3.	Distribución exponencial-uniforme	82
4.2.4.	Distribución Weibull	90
4.2.5.	Distribución lognormal	97
4.2.6.	Distribución Pareto	104
4.2.7.	Distribución Pareto truncada	111
4.3.	Consideraciones numéricas	118
5.	Aproximaciones en un modelo de riesgo discreto	121
5.1.	Algunos modelos de riesgo en tiempo discreto	122
5.2.	Modelo discreto de Gerber-Dickson	124
5.3.	La fórmula de Pollaczec-Khinchine	127
5.4.	Distribución mezcla de binomiales negativas	141
5.5.	Distribución Poisson mezclada	151
5.6.	Aproximación a la probabilidad de ruina	157
5.6.1.	Primer método de aproximación	162
5.6.2.	Segundo método de aproximación	164
5.7.	Ejemplos numéricos	164
5.7.1.	Distribución de mezcla constante	166
5.7.2.	Distribución de mezcla exponencial	168
5.7.3.	Distribución de mezcla Erlang	170
5.7.4.	Distribución de mezcla uniforme	172
5.7.5.	Distribución de mezcla Pareto	174
5.7.6.	Distribución de mezcla lognormal	176
6.	Conclusiones	179
A.	Resultados complementarios	181
A.1.	Fórmula de Panjer	181
A.2.	Probabilidad de ruina en el modelo de Cramér-Lundberg	183
A.2.1.	Ecuación integral	183
A.2.2.	Transformada de Laplace	183
A.2.3.	Distribuciones tipo fase	188
A.2.4.	Aproximación al coeficiente de ajuste	188
A.3.	Demostación alterna de $\psi(u)$ para MIE	190
A.4.	Teorema de la convergencia monótona y dominada	193

B. Códigos de R	195
B.1. Modelo de Cramér-Lundberg	195
B.1.1. Fórmula de Panjer	195
B.1.2. Montos de reclamación con distribución gama . . .	199
B.1.3. Montos de reclamación con distribución mezcla de dos exponenciales	201
B.1.4. Montos de reclamación con distribución exponencial uniforme	203
B.1.5. Montos de reclamación con distribución Weibull . .	205
B.1.6. Montos de reclamación con distribución Pareto trun- cada	207
B.1.7. Primera aproximación propuesta	209
B.1.8. Segunda aproximación propuesta	214
B.1.9. Tercera aproximación propuesta	217
B.1.10. Aproximación por simulacion PKMC	222
B.1.11. Aproximación por el método de tráfico ligero. . . .	228
B.1.12. Aproximación por el método subexponencial.	229
 Bibliografía	 231

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se presentan los conceptos y resultados básicos que se necesitarán en el resto del trabajo. En la sección 1.1 se hace una breve exposición del denominado proceso de riesgo, además se presentan las definiciones principales de teoría de la ruina y se indican algunos problemas importantes de teoría del riesgo. En la sección 1.2 se estudia el modelo clásico de Cramér-Lundberg, se mencionan diferentes enfoques para atacar el problema de calcular la probabilidad de ruina y se hace un repaso de algunos métodos de aproximación a la probabilidad de ruina. El material que se expone en este capítulo es bien conocido y al final del capítulo se mencionan las referencias que fueron consultadas para la elaboración de éste. Además, se desarrollaron de forma detallada las demostraciones de algunos resultados, cuya prueba se omite o se hace de forma resumida en la literatura del tema.

1.1. Teoría del riesgo

La palabra riesgo es usada en las ciencias actuariales en distintos contextos, pero es común que se asocie a la idea de perder dinero. Por ejemplo, en los seguros de vida el riesgo es la posibilidad de perder la vida y en los seguros médicos el riesgo es la posibilidad de enfermarse y tener que pagar servicios médicos. En los seguros de daños, el riesgo puede entenderse como un evento, que en caso de ocurrir, provocará un daño a algún bien y así se ocasionará una pérdida de dinero, véase por ejemplo el libro de Promislow (2011) [69, pág. 3]. Partiendo de esta definición de riesgo, supóngase que existe un riesgo, denotado por \mathcal{R} , para el cual existe un

seguro contratado durante un periodo de tiempo $(0, t]$, también supóngase que $N(t), Y_1, Y_2, \dots$ son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad¹ (Ω, \mathcal{F}, P) , donde $N(t)$ es una variable aleatoria discreta que modela el número de reclamaciones hechas a la aseguradora hasta el tiempo t y $Y_1, Y_2, \dots, Y_{N(t)}$ son variables aleatorias no negativas que modelan el tamaño o monto de dinero de dichas reclamaciones, siempre que $N(t) \geq 1$. El monto agregado de reclamaciones o pérdida total de dinero relacionada al riesgo \mathcal{R} hasta el tiempo t será denotado por la variable aleatoria $S(t)$. Es natural definir $S(t) = 0$ cuando $N(t) = 0$ y

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (1.1)$$

cuando $N(t) \geq 1$. En el caso de que $N(t)$ sea igual a una variable aleatoria N independiente del tiempo, entonces la variable $S(t)$ deriva en el conocido modelo de riesgo colectivo, y cuando $N(t)$ no es variable aleatoria, sino un número $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $S(t)$ deriva en el modelo de riesgo individual; véase por ejemplo el libro de Bowers et al. (1997) [10, págs. 27 y 367], o bien, el libro de Klugman et al. (2008) [50, pág. 210] para más detalles de estos modelos.

A la variable $S(t)$ definida en (1.1), también se le conoce como monto agregado de reclamaciones. Cuando es de interés estudiar a $S(t)$ variando el tiempo, se dice que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de reclamaciones agregadas, donde $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de conteo, las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots son independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) y puede suponerse independencia entre el proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ y la sucesión Y_1, Y_2, \dots . En la literatura de probabilidad y de teoría del riesgo es común que se refieran a las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots como severidades y a la variable aleatoria $S(t)$ como suma compuesta; el cálculo de la función de distribución de $S(t)$ es uno de los problemas principales en teoría del riesgo, véanse por ejemplo los libros de Rolski et al. (1999) [75, págs. 99–146], Klugman et al. (2008) [50, págs. 209–281] o Dickson (2005) [30, págs. 52–108] como referencias estándar del tema.

¹ Ω, \mathcal{F} y P denotan un espacio muestral, una sigma álgebra de subconjuntos de Ω y una medida de probabilidad respectivamente. Todas las variables aleatorias que se estudien en este trabajo estarán definidas en el mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y no se volverá a mencionar esta aseveración.

1.1.1. Proceso de riesgo clásico

Gran parte de la información histórica mostrada en el siguiente párrafo fue investigada en una revisión hecha en 1968 por Philipson [68], de este trabajo fueron tomados algunos títulos de las publicaciones de Cramér y Lundberg que se citan.

Mediante diversas publicaciones entre 1903 y 1934 ([57] a [63]) el actuario sueco Filip Lundberg (1876-1965) estableció y resolvió varios problemas de lo que hoy se conoce como teoría del riesgo. Estudió el flujo de pagos que hace una aseguradora por reclamaciones visto como un modelo matemático que ahora es conocido como proceso Poisson compuesto. También estudia el proceso de riesgo donde, después de un periodo de tiempo fijo, el capital de una compañía aseguradora es igual a la suma de un capital inicial y la cantidad ganada en primas, menos los reclamos pagados en dicho periodo. Más tarde, en 1955, Harald Cramér (1893-1985) en el artículo *Collective Risk Theory: A Survey of the Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes* [18], presentó una versión más clara y extendida de los artículos de Lundberg, desarrollando la teoría junto a sus estudiantes desde 1929. Una versión más general del proceso de riesgo fue estudiada por Sparre Andersen en 1957, en el trabajo *On the collective theory of risk in case of contagion between claims* [79], donde propone estudiar el número de reclamos como un proceso de renovación. Sin embargo, el que hizo un estudio más a fondo fue Thorin en 1970 en *Some remarks on the ruin problem in case the epochs of claims form a renewal process* [83].

A continuación se presenta el modelo clásico del capital de una aseguradora hasta un tiempo $t > 0$, generalizando la forma en que se hacen los pagos de las reclamaciones:

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t), \quad (1.2)$$

donde $U(0) = u$ es el capital inicial, $\Pi(t)$ representa ingresos hasta el tiempo t debido a primas y finalmente $S(t)$ es el monto agregado de reclamaciones hasta el tiempo t . Al proceso $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ definido en (1.2) se le puede llamar proceso de riesgo general. La probabilidad de que el capital se vuelva negativo en algún momento, es llamada probabilidad de ruina. Esta probabilidad puede servir para que una compañía aseguradora

mida su solvencia, es decir, qué tanto puede enfrentar las reclamaciones que le hacen los asegurados. Más adelante, en la sección 1.2 se fijarán ciertas hipótesis necesarias para que el modelo (1.2) sea llamado modelo de Cramér-Lundberg.

1.1.2. Teoría de la ruina

Como ya se dijo antes, se le llama ruina al evento de que en algún momento el proceso $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ se vuelva negativo; después de la ruina este proceso continúa su trayectoria y puede volver a ser positivo, por lo que se le conoce como tiempo de ruina al primer momento en que el capital se vuelva negativo.

Definición 1.1.1 *Para un proceso de riesgo derivado de (1.2), el tiempo de ruina se define como la variable aleatoria siguiente:*

$$\tau = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}, \quad (1.3)$$

cuando $\{t > 0 : U(t) < 0\} \neq \emptyset$, en caso contrario $\tau := \infty$.

A continuación se definen dos tipos de probabilidades de ruina, tomando en cuenta el periodo de tiempo en el que es observada la trayectoria del proceso de riesgo.

Definición 1.1.2 *Supóngase un proceso de riesgo $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, donde $U(0) = u \geq 0$. Se define la probabilidad de ruina en:*

1. *horizonte finito en el intervalo de tiempo $(0, T]$ como:*

$$\psi(u, T) = P(\tau \leq T \mid U(0) = u). \quad (1.4)$$

2. *horizonte infinito como:*

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \mid U(0) = u). \quad (1.5)$$

La teoría matemática que ha sido desarrollada para resolver problemas relacionados a τ y a ψ es conocida como teoría de la ruina. En la figura 1.1 se puede ver una trayectoria simulada del proceso de riesgo y del tiempo de ruina.

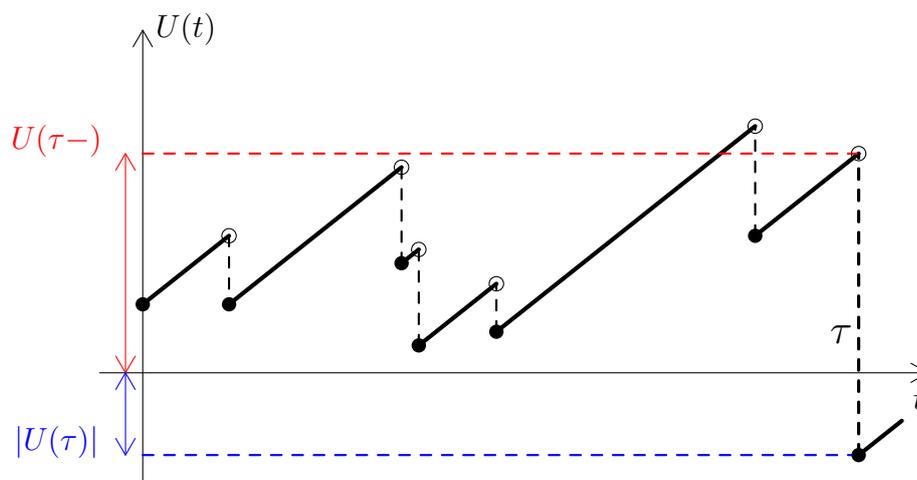


Figura 1.1: Ejemplo de trayectoria de un proceso de riesgo.

La definición de probabilidad de ruina aquí usada es la más común, sin embargo, existen definiciones alternas tomando en cuenta el comportamiento del proceso de riesgo. Por ejemplo, en el trabajo de Dassios y Wu (2008) [20], se define la ruina tipo parisina como el evento donde el valor del proceso de riesgo es negativo al menos durante un tiempo establecido².

1.1.3. Problemas importantes en teoría del riesgo

Dentro del conjunto de problemas que se estudian en teoría del riesgo, hay tres que destacan por el volumen de investigación que se ha hecho de ellos.

- El primero, es conocer la distribución del monto agregado de reclamos (1.1) en un periodo de tiempo fijo, ya sea en el modelo individual o en el modelo colectivo. En ambos modelos existen fórmulas exactas (aunque recursivas) para la distribución del monto agregado de reclamos, en el modelo individual la fórmula de De Pril, véase [21], y en el modelo colectivo la fórmula de Panjer, véase [65]; dichas fórmulas solo se pueden aplicar cuando se cumplen ciertas condiciones. Más

²Esta forma de definir la ruina está inspirada en las opciones parisinas propuestas en el trabajo pionero del tema Chesney et al. (1997) [14].

adelante, en la sección 1.2.2, se usará la fórmula de Panjer para hacer aproximaciones a la probabilidad de ruina.

- El segundo, es el cálculo de la probabilidad de ruina, principalmente en los modelos de Cramér-Lundberg (véase la sección 1.2), en el modelo de Sparre Andersen (véase por ejemplo [3, págs. 374–385]) y en el modelo discreto de Gerber-Dickson (véase el capítulo 5). El libro de Asmussen y Albrecher (2010) [3] es una referencia enciclopédica del cálculo de probabilidades de ruina en el modelo de Cramér-Lundberg y en otros modelos relacionados.
- Finalmente, en los últimos años se han estudiado de manera creciente la severidad de la ruina $|U(\tau)|$, el proceso justo antes de la ruina $U(\tau-)$ y el tiempo de ruina τ , véase la figura 1.1. Para analizar de manera conjunta las tres variables, en el artículo de Gerber y Shiu (1998) [41], se propuso una función que ahora lleva el nombre de los autores³. La búsqueda de fórmulas para dicha función, el estudio las funciones de densidad de las variables $|U(\tau)|$ y $U(\tau-)$, y el cálculo de sus momentos han sido motivo de un gran número de artículos, entre ellos se destacan [24, 31, 39, 41, 42, 53] y [55]. En la compilación hecha por Kyprianou (2013) [51], se hace un recuento de la teoría de este tema hasta ese año.

1.2. Modelo de Cramér-Lundberg

En esta sección se presenta el proceso de riesgo de Cramér-Lundberg $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ que se define para $t > 0$ como:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (1.6)$$

donde $u \geq 0$ es una constante y representa el capital inicial $U(0)$, el número de reclamos hasta el tiempo t es modelado con un proceso de Poisson $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ con intensidad $\lambda > 0$, el monto de las reclamaciones está representado por la sucesión de v.a.i.i.d. Y_1, Y_2, \dots con media común $\mu < \infty$, también se suponen independientes de $N(t)$ para cualquier $t > 0$. Se supondrá que cada Y_i tiene función de distribución $F_Y(\cdot)$ continua y tal que

³También es conocida como *expected discounted penalty function*.

$F_Y(0) = 0$. El parámetro $c > 0$ representa la tasa de primas y sin pérdida de generalidad, se supondrá que $c = (1 + \theta)\lambda\mu$, donde el valor de $\theta > 0$ es conocido como factor de recargo de la prima. Lo anterior, garantiza que se cumpla la llamada condición de ganancia neta, es decir, que $c > \lambda\mu$, lo cual implica para cualquier valor de $u \geq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \infty, \quad (1.7)$$

de forma casi segura y

$$\psi(u) < 1. \quad (1.8)$$

Véase el libro de Asmussen y Albrecher (2010) [3, proposición 1.1, páginas 3 y 4] para ver los detalles de (1.7) y (1.8). Igual que en la sección anterior, el tiempo de ruina y la probabilidad de ruina⁴ están definidos por:

$$\tau = \inf \{t > 0 : U(t) < 0\}, \quad (1.9)$$

y

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \mid U(0) = u), \quad (1.10)$$

respectivamente.

Observación 1.2.1 *El proceso de riesgo de Cramér-Lundberg tiene la ventaja de que el proceso de reclamos agregados, dado por:*

$$\{S(t)\}_{t \geq 0},$$

donde $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ es un proceso Poisson compuesto y de esta manera cumple las propiedades de tener incrementos estacionarios e independientes (véase por ejemplo el libro de Panjer y Willmot (1992) [67, págs. 82–83]). Esto implica que $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ también tiene incrementos independientes y estacionarios. Una consecuencia de lo anterior es la igualdad de probabilidades siguiente:

$$P(\tau < \infty \mid \tau > x, U(x) = y, U(0) = u) = P(\tau < \infty \mid U(0) = y), \quad (1.11)$$

donde $x, y > 0$.

⁴La probabilidad de ruina en horizonte finito no es estudiada en esta investigación, por lo cual, solo se dirá probabilidad de ruina para referirse a la probabilidad de ruina con horizonte infinito.

La igualdad (1.11) es muy útil en la derivación de varias fórmulas relacionadas a la probabilidad de ruina y en este trabajo es usada en la demostración de la proposición 1.2.11.

Observación 1.2.2 *La probabilidad de ruina es definida como la probabilidad de que en algún valor $t > 0$, el proceso sea negativo, es decir, $U(t) < 0$. Por lo anterior, los eventos siguientes son equivalentes:*

$$(U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0 \mid U(0) = u) = (\tau < \infty \mid U(0) = u), \quad (1.12)$$

sin embargo, la variable aleatoria τ es un tiempo de paro con respecto a la filtración natural de $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ y se pueden aprovechar propiedades de este tipo de variables para estudiar la probabilidad de ruina, por lo anterior es más útil usar el segundo evento para definir dicha probabilidad.

Como se acaba de mencionar, la igualdad (1.10) es útil para intentar resolver el problema de la probabilidad de ruina, por ejemplo, se puede aplicar un análisis de la primera reclamación y del tiempo en que se da ésta y bajo ciertas condiciones se puede demostrar la siguiente ecuación integral:

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \left[\frac{1}{\mu} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{1}{\mu} \int_0^u \psi(u - y) \bar{F}(y) dy \right]. \quad (1.13)$$

Una demostración de este resultado puede ser consultada en el libro de Rolski et al. (1999) [75, pág. 164]. Esta ecuación cumple con las características de una ecuación de renovación defectuosa y además es una ecuación de Volterra de segundo tipo, véase el libro de Baker (1977) [5]. Cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución exponencial la ecuación (1.13) puede resolverse y se llega a una fórmula exacta. Además es usada para derivar otras estrategias para conocer el valor de $\psi(u)$, véase el apéndice A.2 donde se mencionan algunos detalles adicionales.

Existen por lo menos cuatro estrategias principales para intentar conocer la probabilidad de ruina. La primera es encontrar una fórmula exacta a partir de (1.13), la segunda es calcularla de forma numérica, para valores de u fijos, por ejemplo usando el método trapezoidal en (1.13), véase el libro de Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 214]. La tercera estrategia es utilizar métodos de aproximación y la cuarta es encontrar cotas de su

valor. Aunque el interés principal de este trabajo es la aproximación a la probabilidad de ruina, en el apéndice A.2 se presenta una breve revisión de las otras estrategias para intentar conocer dicha probabilidad.

1.2.1. Severidad de la ruina y el proceso de superávit

La fórmula de Pollaczek-Khinchine (P-K), que se expondrá al final de la sección, sirve para calcular la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones cumplen algunas características específicas. También es conocida como fórmula de Beekman. La primera fue generada en la teoría de colas como resultado de la transformada de Laplace de la distribución del tiempo de espera, cuando los tiempos de servicio tienen distribución exponencial, véase por ejemplo el trabajo de Takacs (1971) [82], o bien, el libro de Asmussen y Albrecher (2010) [3, págs. 75–82], como una referencia más reciente. La fórmula de Beekman fue obtenida en el contexto del proceso de riesgo, véase el trabajo original de Beekman (1968) [6], o bien, el libro de Panjer y Willmot (1992) [67, págs. 370–371], donde es obtenida invirtiendo la transformada de Laplace de la probabilidad ψ vista como función. Además, en el libro clásico de Feller (1971) [36, pág. 410], se puede ver un análisis con caminatas aleatorias llegando a una fórmula equivalente. En esta sección se desarrolla la fórmula usando el enfoque del que es conocido como proceso de superávit; todas las definiciones y resultados presentados son conocidos, sin embargo, se exponen en el cuerpo principal de este trabajo debido a la importancia que tienen en la investigación, por ejemplo, permiten establecer el teorema 2.2.1 y la proposición 3.2.2. Además, los detalles de las demostraciones que aquí se presentan no aparecen normalmente en la literatura del tema.

Definición 1.2.3 *Se conocerá como severidad de la ruina o tamaño de la ruina, al valor del proceso de riesgo justo en el momento de la ruina, es decir, $|U(\tau)|$ cuando $\tau < \infty$. Si $\tau = \infty$, entonces la severidad no está definida.*

Definición 1.2.4 *La probabilidad de ruina con severidad no mayor al valor y , se define como:*

$$G(u, y) = P(\tau < \infty, |U(\tau)| \leq y \mid U(0) = u).$$

Proposición 1.2.5 *La función $G(0, y)$ está dada por:*

$$G(0, y) = \frac{1}{(1 + \theta)\mu} \int_0^y [1 - F(x)] dx. \quad (1.14)$$

Para la demostración de este resultado véase el teorema 13.5.1 del libro de Bowers et al. (1997) [10, págs. 415–416 y 427–430].

Proposición 1.2.6 *La probabilidad de ruina para un capital inicial de cero es:*

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}. \quad (1.15)$$

Demostración:

Usando la proposición 1.2.5,

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \lim_{y \rightarrow \infty} G(0, y) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \theta)\mu} \int_0^y [1 - F(x)] dx \\ &= \frac{1}{1 + \theta}. \end{aligned}$$

□

Ahora, se define la distribución de equilibrio de una función de distribución, esta función es absolutamente continua y sirve para modelar los procesos de escalera, véase por ejemplo Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 62], donde se discuten con otro enfoque estas distribuciones.

Definición 1.2.7 *Dada una función de distribución continua arbitraria $F(x)$ de una variable aleatoria con soporte no negativo y media $\mu < \infty$, su función de distribución de equilibrio, denotada por $F_e(x)$, es definida para $x > 0$ como:*

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy. \quad (1.16)$$

Una implicación de la definición anterior es que la función de densidad de equilibrio $f_e(x)$ se calcula para $x > 0$ como sigue:

$$f_e(x) = \frac{1}{\mu} [1 - F(x)], \quad (1.17)$$

para valores de $x > 0$.

Ejemplo 1.2.8 Sea F la función de distribución de una variable aleatoria con distribución Gama(α, β), entonces su función de distribución de equilibrio se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
F_e(x) &= \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy \\
&= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^x \int_y^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt dy \\
&= \frac{\beta^{\alpha+1}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\int_0^x t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \int_0^t dy dt + \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \int_0^x dy dt \right] \\
&= \int_0^x \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha e^{-\beta t} dt + \frac{\beta x}{\alpha} \int_x^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt \\
&= F_Z(x) + \frac{\beta x}{\alpha} (1 - F(x)),
\end{aligned}$$

donde $Z \sim \text{Gama}(\alpha + 1, \beta)$.

La distribución de equilibrio es importante en la teoría de la ruina porque, entre otros usos, modela el tamaño de una primera caída del proceso de riesgo por debajo del capital inicial. Más adelante, se verá su utilidad para establecer la fórmula de Pollaczec-Khinchine para calcular la probabilidad de ruina.

Además del tiempo de ruina, el tiempo de la primera caída por debajo del capital inicial es importante en el desarrollo de algunos conceptos, su definición se presenta a continuación.

Definición 1.2.9 Supóngase un proceso de riesgo de Cramér-Lundberg $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ y sea

$$\tau_u = \inf\{t > 0 : U(t) < U(0) = u\}, \quad (1.18)$$

suponiendo que el conjunto indicado es distinto del vacío, en caso contrario, $\tau_u := \infty$. A la variable aleatoria τ_u se le llamará el tiempo de la primera caída por debajo del capital inicial u .

Notar que en la definición anterior, el caso particular τ_0 , coincide con la definición de tiempo de ruina suponiendo un capital inicial de cero.

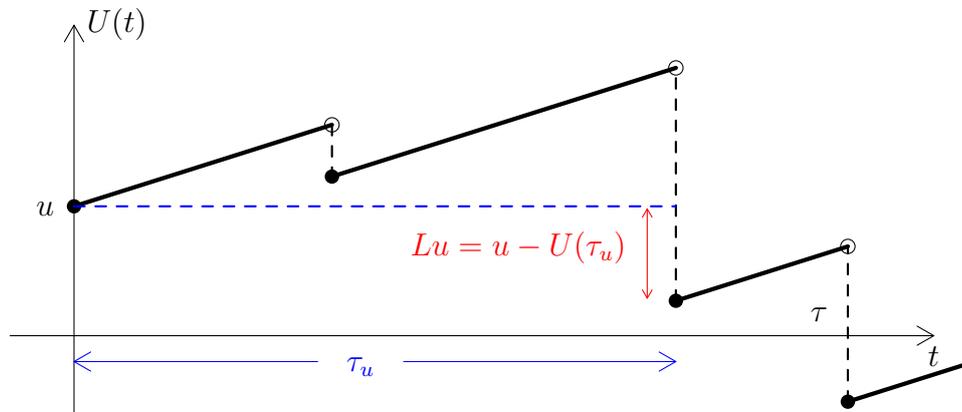


Figura 1.2: Ejemplo de una trayectoria de un proceso de riesgo y el tiempo de la primera caída por debajo del capital inicial, es decir, τ_u .

Definición 1.2.10 *Supóngase que $\tau_u < \infty$, se define el tamaño de la primera caída por debajo del capital inicial $u \geq 0$ como sigue:*

$$Lu = u - U(\tau_u). \quad (1.19)$$

En la figura 1.2 se puede visualizar el significado de τ_u y de Lu . Una propiedad muy útil es que la variable aleatoria Lu tiene distribución igual a la distribución de equilibrio del monto de las reclamaciones, como lo establece la siguiente proposición:

Proposición 1.2.11 *Dado que hay una primera caída debajo del capital inicial u , la variable aleatoria Lu tiene como función de densidad a la función de densidad de equilibrio de la distribución del monto de los reclamos, es decir,*

$$f_{Lu}(y) = \frac{1}{\mu}[1 - F_Y(y)]. \quad (1.20)$$

Demostración:

Se calcula la función de distribución de Lu usando las definiciones de Lu ,

de τ_u y de probabilidad condicional:

$$\begin{aligned}
F_{Lu}(y) &= P(Lu \leq y) \\
&= P(u - U(\tau_u) \leq y \mid \tau_u < \infty, U(0) = u) \\
&= P(-U(\tau_0) \leq y \mid \tau_0 < \infty, U(0) = 0) \\
&= P(|U(\tau)| \leq y \mid \tau < \infty, U(0) = 0) \\
&= P(|U(\tau)| \leq y, \tau < \infty \mid U(0) = 0) / P(\tau < \infty \mid U(0) = 0) \\
&= \frac{G(0, y)}{\psi(0)} \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^y [1 - F_Y(x)] dx,
\end{aligned}$$

la tercera igualdad de este desarrollo se da por (1.11) y la última por (1.14) y (1.15). Derivando $F_{Lu}(y)$ con respecto a y , se llega a la densidad (1.20). \square

Para hacer el cálculo de $f_{Lu}(y)$ puede consultarse de nuevo el ejemplo 1.2.8. La proposición anterior es necesaria para demostrar la proposición 1.2.20, donde se establecen características importantes del proceso de riesgo modificado $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ definido a continuación.

Definición 1.2.12 *Supóngase el proceso $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ definido para $t \geq 0$ por:*

$$\begin{aligned}
Z(t) &= u - U(t) \\
&= \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - ct,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

donde se supone que $U(0) = u$. Entonces se dice que $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ es el proceso de superávit relacionado al proceso de riesgo de Cramér-Lundberg $\{U(t)\}_{t \geq 0}$.

Notar que $Z(0) = 0$ y el evento ruina se puede reescribir como sigue tomando en cuenta el proceso que se acaba de definir:

$$(U(t) < 0 \text{ p.a. } t > 0) = (u - U(t) > u \text{ p.a. } t > 0) = (Z(t) > u \text{ p.a. } t > 0),$$

donde las iniciales p.a. quieren decir para algún. Véase la figura 1.3 donde se ilustra lo anterior. Además, debido a que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \infty,$$

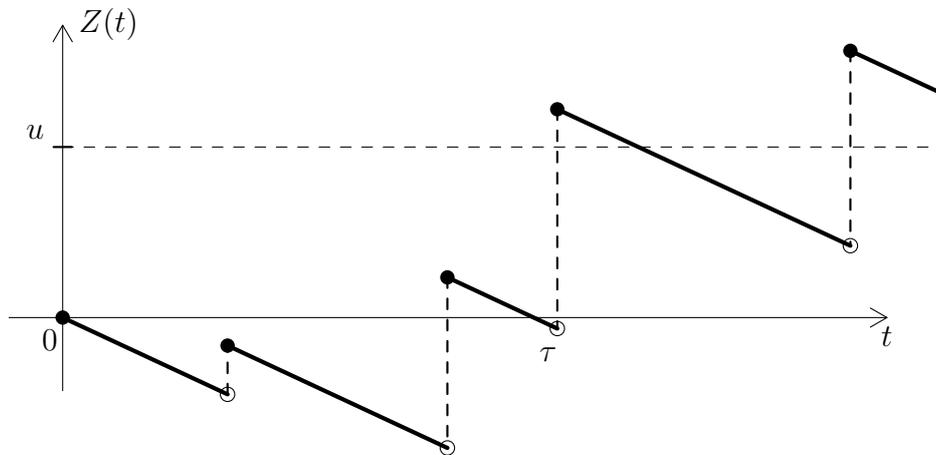


Figura 1.3: Ejemplo de una trayectoria del proceso de riesgo de superávit $Z(t)$.

casi seguramente, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = -\infty, \quad (1.22)$$

casi seguramente, bajo la condición de ganancia neta, véase (1.7). Por otro lado, como se dijo en la observación 1.2.1, el proceso $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos estacionarios e independientes y esta propiedad se hereda al proceso $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$. Sobre este proceso, se puede encontrar en el libro de Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 1] la siguiente frase: “*For mathematical purposes, it is frequently more convenient to work with the claim surplus process (also called aggregate loss process)...*”. En la figura 1.3, se puede observar un ejemplo de trayectoria de este proceso. En el presente trabajo, este proceso servirá para plantear una definición alterna de probabilidad de ruina, equivalente a (1.10), que implica un nuevo enfoque para su cálculo.

Definición 1.2.13 *Supóngase el modelo de superávit (1.21) derivado de un modelo de Cramér-Lundberg, se define la probabilidad de ruina como:*

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(Z(t) > u \text{ para alguna } t > 0) \\ &= P(M > u), \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde $M = \max_{t \geq 0} \{Z(t)\}$.

La variable aleatoria M existe casi seguramente por (1.22). Ahora, se presentan algunas definiciones y resultados necesarios para mostrar que la variable aleatoria M puede escribirse como una suma geométrica compuesta. En otras palabras, M puede escribirse como un modelo colectivo, cuya variable de conteo tiene distribución geométrica. En el libro de Willmot y Lin (2001) [88, págs. 107–140], se dedica un capítulo entero a estudiar varias propiedades de este tipo de variable aleatoria.

Definición 1.2.14 *Sea $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ un proceso de superávit, si en alguna reclamación se tiene que $Z(t) > 0$, entonces decimos que el proceso tuvo un primer récord. El tiempo que transcurre para que suceda dicho récord es denotado y definido como:*

$$\tau_1^* = \inf\{t > 0 : Z(t) > 0\}. \quad (1.24)$$

En general, se define el tiempo del i -ésimo récord del proceso de superávit $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ como:

$$\tau_i^* = \inf\{t > \tau_{i-1}^* : Z(t) > Z(\tau_{i-1}^*)\}, \quad (1.25)$$

para $i = 1, 2, \dots$ y definiendo $\tau_0^ = 0$. Cuando el conjunto indicado es vacío, entonces se define $\tau_i^* = \infty$.*

Observación 1.2.15 *Por la definición de los tiempos τ_i^* , se observa que si $\tau_k^* < \infty$ para algún valor de k , entonces $\tau_i^* < \infty$ para cualquier valor de $i \leq k$. Del mismo modo, cuando $\tau_m^* = \infty$ para algún valor de m , entonces $\tau_i^* = \infty$ para $i \geq m$. También es importante señalar que estas variables aleatorias cumplen con ser tiempos de paro con respecto a la filtración natural del proceso $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$, es decir, su valor puede ser determinado por la trayectoria del proceso hasta ese momento.*

La siguiente observación será importante para estudiar el tamaño de los récords, es decir, por cuánto se supera el récord anterior.

Observación 1.2.16 *Suponiendo que $U(0) = u$ y que $\tau_1^* < \infty$, entonces:*

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= \inf\{t > 0 : Z(t) > 0\} \\ &= \inf\{t > 0 : U(t) < U(0) = u\} \\ &= \tau_u. \end{aligned}$$

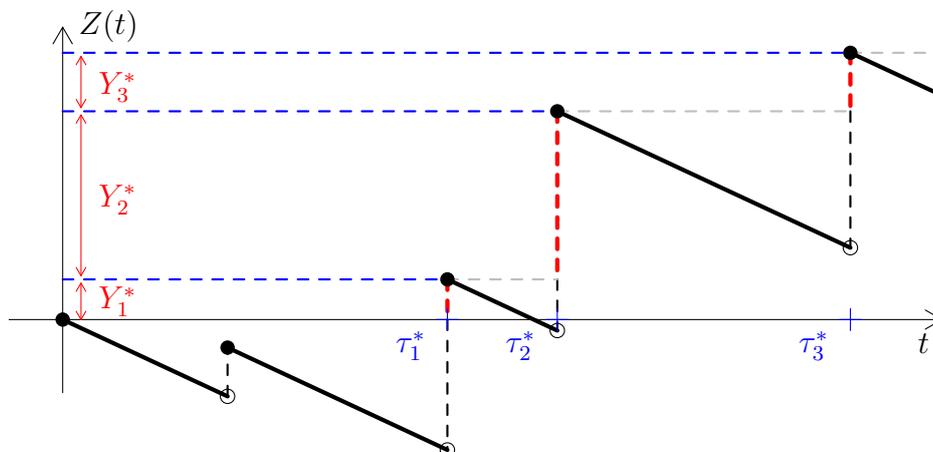


Figura 1.4: Ejemplo de una trayectoria de un proceso de riesgo alterno $Z(t)$, los tiempos de paro entre récords y el tamaño de los récords.

Por lo anterior, $Z(\tau_1^*) = Z(\tau_u) = u - U(\tau_u)$, por lo tanto:

$$Z(\tau_1^*) = Lu, \quad (1.26)$$

y por (1.20), la función de densidad de $Z(\tau_1^*)$ es igual a la función de densidad de equilibrio f_e . En general, suponiendo que $\tau_i^* < \infty$ y para $0 < s < x$,

$$\begin{aligned} P(\tau_i^* \leq x \mid \tau_{i-1}^* = s) &= P(\tau_i^* - \tau_{i-1}^* \leq x - s \mid \tau_{i-1}^* = s) \\ &= P(\tau_1^* \leq x - s). \end{aligned} \quad (1.27)$$

La segunda igualdad es consecuencia de los incrementos estacionarios e independientes del proceso de superávit. Por último, observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P(Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*) \leq x) &= \\
&\int_0^\infty \int_0^\infty P(Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*) \leq x \mid \tau_{i-1}^* = s, Z(\tau_{i-1}^*) = y) f_e(y) dy dF_{\tau_{i-1}}(s) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty P(Z(\tau_i^*) - Z(s) \leq x \mid \tau_{i-1}^* = s, Z(s) = y) f_e(y) dy dF_{\tau_{i-1}}(s) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty P(Z(\tau_1^*) \leq x) f_e(y) dy dF_{\tau_{i-1}}(s) \\
&= P(Z(\tau_1^*) \leq x) \\
&= F_e(x).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

La tercera igualdad se da gracias a los incrementos estacionarios e independientes del proceso de superávit.

Ahora, se define el número de récords que tendrá el proceso de superávit durante una trayectoria.

Definición 1.2.17 *Se define el número de récords del proceso $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$, como la variable aleatoria*

$$K = \text{máx}\{k \geq 1 : \tau_k^* < \infty\},$$

suponiendo que el conjunto indicado es distinto del vacío, en caso contrario se define $K = 0$ y se dirá que el proceso $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ tiene cero récords.

Notar que $K < \infty$, debido a que $Z(t) \rightarrow -\infty$ casi seguramente, bajo la hipótesis de ganancia neta (véase (1.7)).

Proposición 1.2.18 *Sea K el número de récords de la definición 1.2.17. Entonces la función de probabilidad de K está dada por:*

$$f_K(k) = (1 - \psi(0))(\psi(0))^k, \tag{1.29}$$

para cada valor de $k = 0, 1, 2, \dots$, es decir, $K \sim \text{Geo}(1 - \psi(0))$.

Demostración:

El tiempo de la primera caída definido por (1.18) es equivalente al tiempo del primer récord, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
f_K(0) &= P(\tau_1^* = \infty) \\
&= P(\tau_u = \infty) \\
&= P(\tau = \infty \mid U(0) = 0) \\
&= 1 - \psi(0).
\end{aligned}$$

Esto demuestra (1.29) para $k = 0$. Por otro lado, la probabilidad de que haya un récord es igual a la probabilidad de que $\tau_1^* < \infty$ y $\tau_2^* = \infty$, entonces:

$$\begin{aligned}
 f_K(1) &= P(\tau_1^* < \infty, \tau_2^* = \infty) \\
 &= P(\tau_2^* = \infty \mid \tau_1^* < \infty)P(\tau_1^* < \infty) \\
 &= P(\tau_1^* = \infty)P(\tau_1^* < \infty) \\
 &= f_K(0)\bar{F}_K(0) \\
 &= [1 - \psi(0)][\psi(0)].
 \end{aligned}$$

Esto demuestra (1.29) para $k = 1$. La tercera igualdad es válida por (1.27). Ahora se verá el caso general. Sea $A_k = (\tau_1^* < \infty, \dots, \tau_k^* < \infty)$. Por la observación (1.2.15) se tiene que $A_k = (\tau_k^* < \infty)$, por lo cual, para cada valor de $k = 2, 3, \dots$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 P(A_k) &= P(\tau_k^* < \infty \mid A_{k-1})P(A_{k-1}) \\
 &= P(\tau_k^* < \infty \mid \tau_{k-1}^* < \infty)P(A_{k-1}) \\
 &= P(\tau_1^* < \infty)P(A_{k-1}) \\
 &= \psi(0)P(A_{k-1}) \\
 &\vdots \\
 &= [\psi(0)]^k.
 \end{aligned}$$

La tercera igualdad, de nuevo es válida porque $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos estacionarios e independientes. Así, para $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 f_K(k) &= P(\tau_{k+1}^* = \infty, A_k) \\
 &= P(\tau_{k+1}^* = \infty \mid A_k)P(A_k) \\
 &= P(\tau_1^* = \infty)[\psi(0)]^k \\
 &= [1 - \psi(0)][\psi(0)]^k.
 \end{aligned}$$

□

En el ejemplo de trayectoria ilustrado en la figura 1.4, se puede ver que a cada tiempo τ_i^* se le relaciona una variable aleatoria Y_i^* que modela el tamaño del i -ésimo récord. A continuación se definen tales variables.

Definición 1.2.19 Sean Y_1^*, Y_2^*, \dots variables aleatorias definidas por

$$Y_i^* = Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*), \quad (1.30)$$

para cada valor de $i = 1, 2, \dots$ siempre y cuando $\tau_i^* < \infty$. A cada variable Y_i^* se le conocerá como tamaño del récord i .

Proposición 1.2.20 Para un proceso de superávit, las variables aleatorias $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_K^*$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad igual a $f_e(x)$, definida en (1.17), e independientes del número de récords K .

Demostración:

Primero, como se estableció en la observación 1.2.16, por (1.26) y (1.28) cada Y_i^* tiene distribución igual a la distribución de equilibrio del monto de las reclamaciones y por lo tanto son idénticamente distribuidas. Para mostrar que son variables aleatorias independientes, supongamos que K es conocido, sea $n(i) = N(\tau_i^*)$ cuando $i \geq 1$ y $n(0) := 0$, donde $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es el proceso de Poisson definido para el proceso de riesgo $\{U(t)\}_{t \geq 0}$; además sean T_1, T_2, \dots los tiempos entre arribos del proceso de Poisson mencionado y Y_1, Y_2, \dots los montos de las reclamaciones. Entonces para cada valor de $i = 1, \dots, K$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y_i^* &= Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*) \\ &= \sum_{j=1}^{n(i)} (Y_j - cT_j) - \sum_{j=1}^{n(i-1)} (Y_j - cT_j) \\ &= \sum_{j=n(i-1)+1}^{n(i)} (Y_j - cT_j). \end{aligned}$$

La independencia se da porque tanto las variables aleatorias $Y_1, \dots, Y_{n(K)}$, como las variables aleatorias $T_1, \dots, T_{n(K)}$ son independientes, formalmen-

te:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^K (Y_i^* \leq y_i)\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^K \left(\sum_{j=n(i-1)+1}^{n(i)} (Y_j - cT_j) \leq y_i\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^K P\left(\sum_{j=n(i-1)+1}^{n(i)} (Y_j - cT_j) \leq y_i\right) \\
&= \prod_{i=1}^K P(Y_i^* \leq y_i).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Y_1^*, \dots, Y_K^* son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Finalmente, la independencia entre el número de récords y el tamaño de esos récords, es consecuencia de la independencia entre el monto de las reclamaciones y el número de reclamaciones en el proceso $\{U(t)\}_{t \geq 0}$. \square

En la siguiente proposición se establece que la variable aleatoria $M := \max_{t \geq 0} \{Z(t)\}$, se distribuye igual que una suma geométrica compuesta, donde la variable de conteo está dada por K y las severidades corresponden a las variables aleatorias Y_1^*, Y_2^*, \dots

Proposición 1.2.21 *Supóngase un proceso de superávit $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ para el cual se tienen $K \geq 0$ récords como en la definición 1.2.17. Sean Y_1^*, Y_2^*, \dots los tamaños de los récords como en la definición 1.2.19. Entonces la variable aleatoria $M = \max_{t \geq 0} \{Z(t)\}$ se distribuye igual que la suma compuesta $\sum_{j=1}^K Y_j^*$ y para cualquier valor de $u > 0$,*

$$\psi(u) = P\left(\sum_{i=1}^K Y_i^* > u\right). \quad (1.31)$$

Demostración:

Primero supóngase que $K = 0$, es decir, $Z(t) \leq 0$ para todo valor de $t \geq 0$, lo cual implica que $M = 0$ y que $U(t) \geq u$ siempre y por tanto $\psi(u) = 0$. La suma compuesta $\sum_{j=1}^K Y_j^*$ se define como cero cuando $K = 0$, así con cualquier valor de $u > 0$,

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^K Y_i^* > u\right) &= P(u < 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad (1.31).

Ahora, dado $K > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K Y_i^* &= \sum_{i=1}^K [Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*)] \\ &= Z(\tau_K^*) \\ &\geq Z(t), \end{aligned}$$

donde la desigualdad se cumple para cualquier valor de $t \geq 0$, porque τ_K^* es el valor donde el proceso $\{Z(t)\}_{t \geq 0}$ tiene su último récord. Esto, implica que:

$$\sum_{i=1}^K Y_i^* = \max_{t \geq 0} \{Z(t)\}. \quad (1.32)$$

Entonces, para $u > 0$:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^K Y_i^* > u\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^K Y_i^* > u \mid K = k\right) f_K(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\max_{t \geq 0} \{Z(t)\} > u\right) f_K(k) \\ &= P\left(\max_{t \geq 0} \{Z(t)\} > u\right) \\ &= \psi(u). \end{aligned}$$

□

Los resultados anteriores sirven para demostrar la fórmula de Pollaczek-Khinchine. Dicha fórmula se usará más adelante para justificar las aproximaciones a la probabilidad de ruina que serán propuestas.

Proposición 1.2.22 (*Fórmula de Pollaczek-Khinchine.*) Usando la notación e hipótesis anteriores, la probabilidad de ruina se puede expresar como la suma siguiente:

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k [1 - F_e^{*k}(u)], \quad (1.33)$$

para $u > 0$ y donde $F_e^{*k}(u) = P(\sum_{j=1}^k Y_j^* \leq u)$ para $k = 1, 2, \dots$

Demostración:

Por la proposición 5.3.16, la ley de la probabilidad total condicionando con respecto a la variable aleatoria K , las proposiciones 1.2.18, 1.2.20 y 1.15 se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= P\left(\sum_{j=1}^K Y_j^* > u\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=0}^k Y_j^* > u \mid K = k\right) f_K(k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=0}^k Y_j^* > u\right) [1 - \psi(0)][\psi(0)]^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^k [1 - F_e^{*k}(u)].
\end{aligned}$$

□

La fórmula (1.33) sirve para calcular a $\psi(u)$ solo en algunos casos donde se conoce la distribución de las convoluciones de la distribución de equilibrio y además se conoce a qué valor converge la serie resultante, por ejemplo en el caso de reclamos exponenciales, su distribución de equilibrio es de nuevo exponencial y por tanto sus convoluciones tienen distribución Erlang y al sustituir en la fórmula la serie resultante converge a una función exponencial y se logra obtener la probabilidad de ruina. A continuación se muestran los detalles.

Ejemplo 1.2.23 *Supóngase que el monto de las reclamaciones tiene distribución $Exp(\beta)$, es fácil comprobar que la función de densidad de equilibrio vuelve a ser $Exp(\beta)$, esto implica que la k -ésima convolución tiene distribución $Erlang(k, \beta)$, entonces:*

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1 + \theta} \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^k [1 - F_e^{*k}(u)] \\
&= \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \theta)^k} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\beta u} \frac{(\beta u)^i}{i!} \\
&= \frac{\theta}{1 + \theta} e^{-\beta u} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\beta u)^i}{i!} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \theta)^k}.
\end{aligned}$$

Notar que:

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^k} = \frac{1}{\theta(1+\theta)^i}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{1}{1+\theta} e^{-\beta u} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\beta u)^i}{i!(1+\theta)^i} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\beta u\right\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.2.2. Aproximaciones a la probabilidad de ruina

Aproximar la probabilidad de ruina es un problema muy estudiado y para el cual se han desarrollado soluciones desde varios enfoques. A continuación se hace una breve exposición de algunos de estos métodos por su relación que tienen con los que se proponen en el capítulo 4. Varios de ellos necesitan la existencia del llamado coeficiente de ajuste o la existencia de varios momentos, por esta razón se comienza definiendo dicho coeficiente. Se presenta la definición según el libro de Klugman et al. (2008) [50, pág. 295].

Definición 1.2.24 *El coeficiente de ajuste denotado por R , es definido como la primera raíz positiva de la ecuación:*

$$M(r) = 1 + (1 + \theta)\mu r, \quad (1.35)$$

donde $M(r)$ es la función generadora de momentos del monto de las reclamaciones, suponiendo que ésta existe.

El coeficiente de ajuste tiene distintos usos en el área de teoría del riesgo y en el apéndice de este trabajo se presentan más comentarios acerca de esta cantidad.

1. **Aproximación de Cramér o de Cramér-Lundberg.** Los primeros trabajos que trataron el problema de aproximar la probabilidad de ruina fueron hechos por Cramér y Lundberg basados en la existencia del coeficiente de ajuste, debido a lo anterior, este método no puede ser usado cuando la distribución del monto de las reclamaciones es de cola pesada, ver por ejemplo Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 6].

Además, puede ser necesario algún método numérico para calcular la raíz de (1.35), véase por ejemplo el libro clásico de Panjer y Willmot (1992) [67, págs. 359–361]. En el apéndice A.2.4 se puede encontrar una manera de aproximar el valor del coeficiente de ajuste R cuando éste existe. La aproximación a la probabilidad de ruina de Cramér-Lundberg es la siguiente:

$$\psi(u) \approx Ce^{-Ru}, \quad (1.36)$$

suponiendo que u es un valor muy grande y donde

$$C = (\theta\mu)/[E(Ye^{RY}) - \mu(1 + \theta)].$$

Puede consultarse una demostración del resultado que fundamenta esta aproximación en el libro de Grandell (1991) [45, páginas 6–7].

2. **Aproximación de De Vylder.** Este método es de fácil aplicación, véase por ejemplo el libro de Grandell (2000) [47] donde se hace un análisis del buen funcionamiento de esta aproximación. Fue propuesto en el artículo de De Vylder (1978) [22] y consiste en calcular la probabilidad de ruina para un modelo alterno en el que el monto de las reclamaciones tiene distribución $\text{Exp}(\bar{\beta})$, este valor se utiliza para aproximar la probabilidad de ruina del modelo original. Los parámetros del modelo alterno $\bar{\lambda}$, $\bar{\beta}$ y $\bar{\theta}$, se calculan a partir de igualar los tres primeros momentos de ambos modelos y quedan determinados como sigue:

$$\bar{\lambda} = \frac{9\lambda\mu_2^3}{2\mu_3^2}, \quad \bar{\beta} = \frac{3\mu_2}{\mu_3}, \quad \bar{\theta} = \frac{2\mu\mu_3}{3\mu_2^2}\theta, \quad (1.37)$$

donde $\mu_i = E(Y^i)$ para $i = 2, 3$. Por tanto, la aproximación a la probabilidad de ruina es la siguiente:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{1 + \bar{\theta}} \exp(-Ru), \quad (1.38)$$

donde $R = \bar{\theta}\bar{\beta}/(1 + \bar{\theta})$, el cual coincide con el coeficiente de ajuste cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución exponencial. En caso de que el monto de las reclamaciones originales se distribuya de forma exponencial, la aproximación es exacta y se obtiene la expresión (1.34). Cuando el monto de las reclamaciones se modela con otras

distribuciones, es necesario que existan sus tres primeros momentos. Se ha mejorado este método usando los cuatro primeros momentos y suponiendo que la nueva distribución del monto de las reclamaciones es gama, véase el artículo de Burnecki et al. (2005) [11].

3. **Método de aproximación usando Panjer.** En este método la idea es calcular la probabilidad de ruina desde la expresión (1.31), donde la probabilidad de ruina es igual a la probabilidad de cola de una suma geométrica compuesta:

$$\psi(u) = P\left(\sum_{j=1}^K Y_j^* > u\right).$$

Cuando las variables aleatorias Y_j^* son discretas, la distribución de esta suma puede calcularse de manera exacta usando la fórmula recursiva de Panjer, véase el apéndice A.1. Pero si son continuas, se puede hacer un procedimiento de discretización, luego se puede obtener una aproximación de $\psi(u)$ al calcular $(l_1 + l_2)/2$ donde l_1 y l_2 representan probabilidades de cola de las distribuciones asociadas a la discretización. La aproximación puede ser tan buena como se quiera, ya que el valor de $|l_2 - l_1|$ se acerca a cero conforme la discretización es más fina, véase el artículo de Panjer (1986) [66]. A continuación se presenta esta aproximación de forma más detallada.

- a) Supóngase que el monto de las reclamaciones tiene una función de distribución continua con $F(0) = 0$. Y sea F_e su función de distribución de equilibrio. Se denota por Y^* a las variables aleatorias con función de distribución F_e .
- b) Sea $f_u(i) = F_e(i/\beta) - F_e((i-1)/\beta)$ para cada valor de $i = 1, 2, \dots$ y sea $f_d(i) = f_u(i+1)$ para cada valor de $i = 0, 1, \dots$ y donde β es un número real positivo llamado parámetro de discretización. De esta manera, quedan definidas las funciones de probabilidad que discretizan a Y^* de forma superior e inferior.
- c) Sean $D = \sum_{j=1}^K Y d_j^*$ y $U = \sum_{j=1}^K Y u_j^*$, donde $Y d_j^*$ e $Y u_j^*$ tienen como funciones de probabilidad a f_d y f_u respectivamente.
- d) Usando la recursión de Panjer se calcula el valor exacto de las funciones de distribución F_D y F_U .

e) Debido a que $\bar{F}_U(u\beta)$ y $\bar{F}_D(u\beta)$ son cotas superiores e inferiores para $P(\sum_{j=1}^K Y_j^* > u)$, se puede aproximar la probabilidad de ruina como sigue:

$$\psi(u) \approx \frac{\bar{F}_D(u\beta) + \bar{F}_U(u\beta)}{2}. \quad (1.39)$$

Esta forma de estimar un valor controlado de $\psi(u)$ se ha usado para contrastar otros métodos de aproximación, véase por ejemplo el artículo de Asmussen y Binswanger (1997) [2].

4. **Aproximación de Tijms.** En el libro de Tijms 1986 [84, pág. 60], se propone el uso de una combinación de dos exponenciales para aproximar la probabilidad de cola de una suma geométrica compuesta. Puesto que la probabilidad de ruina puede ser vista como una probabilidad de ese tipo, entonces se usa la siguiente aproximación:

$$\psi(u) \approx \left(\frac{1}{1+\theta} - C \right) e^{-\alpha u} + C e^{-Ru}, \quad (1.40)$$

donde, C y R son como en (1.36) y

$$\alpha = \frac{1/(1+\theta) - C}{E(Y^2)/(2\mu\theta) - C/R}. \quad (1.41)$$

Según las palabras del libro de Klugman et al. (2008) [50, pág. 313], la fórmula (1.40) combina la eficiencia de la aproximación de Cramér-Lundberg cuando el valor de u es grande con un término que busca mejorar la aproximación cuando el valor de u es pequeño. En el artículo de Choi et al. (2010) [15], se hace una mejora a este método sumando un tercer término a (1.40).

5. **Aproximación para distribuciones subexponenciales.** Se dice que una función de distribución $F(x)$ es subexponencial si tiene soporte $(0, \infty)$ y cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} = 2.$$

En [34] se muestra que la distribución de una suma de subexponenciales es subexponencial y viceversa. Una consecuencia es la siguiente

aproximación para la probabilidad de ruina. Supóngase que el monto de las reclamaciones tiene distribución subexponencial. Entonces:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{\theta} [1 - F_e(u)], \quad (1.42)$$

conforme $u \rightarrow \infty$. Los principales ejemplos de distribuciones subexponenciales son Pareto, lognormal y Weibull, en este último caso cuando su primer parámetro está entre cero y uno. Más detalles de este método de aproximación pueden consultarse en Asmussen y Albrecher (2010) [3, págs. 293–302].

6. Método de tráfico ligero. Este método es consecuencia del siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \psi(u) &\approx \frac{1}{\mu(1+\theta)} \int_u^\infty [1 - F(x)] dx \\ &= \frac{1}{1+\theta} [1 - F_e(u)], \end{aligned} \quad (1.43)$$

conforme $\theta \rightarrow \infty$. Es una aproximación simple pero la hipótesis de un factor de recargo muy grande no es realista. El nombre de tráfico ligero proviene de que al ser necesario que las primas sean mucho más grandes que el valor esperado de los reclamos, éstas serán relativamente pequeñas. Este método puede consultarse en Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 98].

1.2.3. Aproximación usando simulación

Existen varios enfoques para calcular la probabilidad de ruina usando simulación. Todos ellos están basados en la aplicación de la ley de los grandes números, véase por ejemplo el libro de Feller (1968) [35, pág. 258]. Uno de los enfoques más conocido es el siguiente, supóngase que Z_1, Z_2, \dots son v.a.i.i.d. donde $Z_i = 1_{(\tau < \infty)}$ suponiendo $U(0) = u$ con esperanza común $E(Z) = \psi(u)$, entonces usando la ley de los grandes números se sabe que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \psi(u),$$

de forma casi segura. Para una muestra aleatoria z_1, z_2, \dots, z_n que se pueda obtener de Z_1, Z_2, \dots, Z_n , se define como aproximación a la probabilidad

de ruina por simulación Monte Carlo cruda a la siguiente expresión:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i. \quad (1.44)$$

Existen varias formas de generar valores para las variables aleatorias Z_1, Z_2, \dots . En el artículo de Asmussen y Binswanger (1997) [2] se estudian tres métodos basados en mejorar la simulación Monte Carlo cruda disminuyendo el error relativo $\sigma_Z/\psi(u)$, donde σ_Z es la desviación estándar muestral. De ellos, en este trabajo se usa el siguiente método (método III de [2]) con fines comparativos y será abreviado como PKMC:

1. Generar $K_i \sim \text{Geo}(\theta/(1 + \theta))$. Si $K_i = 0$, definir $Z_i = 0$.
2. Generar X_1, \dots, X_{K_i} m.a. de la densidad f_e . Si $K_i = 1$, definir $Y = u$ y $m = 0$, en caso contrario definir $Y = u - X_{(1)} - \dots - X_{(K_i-1)}$ y $m = X_{(K_i-1)}$, donde $X_{(1)}, \dots, X_{(K_i-1)}$ son los primeros $K_i - 1$ estadísticos de orden de X_1, \dots, X_{K_i} .
3. Definir $Z_i = \bar{F}_e(\text{máx}(Y, m))/\bar{F}_e(m)$.
4. Repetir pasos 1 a 3 para $i = 1, \dots, n$.
5. Estimar $\psi(u)$ por \bar{Z}_n , por lo tanto:

$$\psi(u) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i. \quad (1.45)$$

En la tabla 1.1 se hace un resumen de los requerimientos de distintos métodos de aproximación para la probabilidad de ruina, el i -ésimo momento de la distribución del monto de las reclamaciones se representa con μ_i .

1.2.4. Análisis breve de los métodos de aproximación

En las secciones 1.2.2 y 1.2.3 se han comentado algunos métodos para aproximar probabilidades de ruina. Dos de estos métodos son el método de Cramér y el método de De Vylder. Sin embargo, como se mencionó antes, el primero requiere la existencia del coeficiente de ajuste y es útil solo para valores de u grandes. El método de De Vylder requiere que la distribución del monto de las reclamaciones tenga sus tres primeros momentos finitos. Cuando el monto de las reclamaciones tiene una distribución de cola ligera,

Tabla 1.1: Comparación de los requerimientos necesarios para algunos de los métodos de aproximación más conocidos.

	Método de aproximación	Requerimientos
1	Cramér [17]	Coficiente R y u grande.
2	Tijms [84]	Coficiente R.
3	Tijms mejorado [15]	Coficiente R.
4	Renyi [47]	$\mu_2 < \infty$.
5	Tráfico pesado [3]	$\mu_2 < \infty$, u y θ pequeños.
6	Tráfico pesado y ligero [3]	$\mu_2 < \infty$ y u no muy grande.
7	Beekman-Bowers [7]	$\mu_2, \mu_3 < \infty$.
8	De Vylder [22]	$\mu_2, \mu_3 < \infty$.
9	Exponencial [23]	$\mu_2, \mu_3 < \infty$.
10	Lundberg [47]	$\mu_2, \mu_3 < \infty$.
11	Gama-De Vylder [11]	$\mu_2, \mu_3, \mu_4 < \infty$.
12	Tráfico ligero [3]	Valores de u y θ grandes.
13	Subexponencial [3]	Valores de u grandes.
14	P-K Monte Carlo [2]	Generación de valores aleatorios desde la distribución de equilibrio.
15	Panjer [66]	Discretización de distribución de equilibrio.

una aproximación que es simple y con buenos resultados es la aproximación de Tijms, como se menciona en Klugman et al. (2008) [50, pág. 314]. Si es posible generar una muestra aleatoria que tenga como distribución a la distribución de equilibrio del monto de las reclamaciones, entonces se puede aplicar la aproximación de Pollaczek-Khinchine Monte Carlo (PKMC); si la distribución del monto de las reclamaciones no tiene una densidad de equilibrio sencilla, entonces las simulaciones necesarias en el método de PKMC podrían ser difíciles de obtener. Cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución de cola pesada, hay dos métodos de aproximación para los cuales es suficiente conocer la expresión explícita de la función de distribución, el método de tráfico ligero (LT) y el método subexponencial (S). Sin embargo, estos métodos requieren valores especiales para θ y para u .

1.2.5. Métodos de aproximación recientes

En años recientes, han sido publicados varios trabajos sobre la estimación y aproximación a la probabilidad de ruina teniendo nuevas estrategias para tal fin. Por ejemplo, en el artículo de Albrecher et al. (2010) [1], se muestra un procedimiento eficiente donde se aproxima la probabilidad de ruina usando una inversión numérica de su transformada de Laplace. Entre otras condiciones, su método requiere que la cola de la distribución del monto de las reclamaciones sea una función completamente monótona. En el artículo de Avram et al. (2011) [4], se hace una variante del método de De Vylder aproximando la probabilidad de ruina usando un modelo de Cramér-Lundberg alterno, la distribución del monto de los reclamos es aproximada por una distribución mezcla de exponenciales cuyos parámetros se obtienen de igualar varios de sus primeros momentos con los primeros momentos de la distribución original y por tanto se requiere la existencia de éstos. Otra aproximación muy precisa es propuesta en el artículo de Goffard et al. (2016) [43], donde la distribución defectuosa asociada a la probabilidad de ruina es proyectada en un sistema de polinomios ortonormales, obteniendo una fórmula para $\psi(u)$ que depende de una suma infinita. Truncando esta suma se obtiene una aproximación. Para este método es necesario que exista el coeficiente de ajuste. En el artículo de Gzyl et al. (2013) [48], los autores usan momentos fraccionarios y aplican el método de máxima entropía para aproximar a $\psi(u)$. En el artículo de Mnatsakanov et al. (2015) [64] se muestra un procedimiento para invertir una transformada de Laplace escalada. Finalmente, en el artículo de Bladt et al. (2015) [8] los autores proponen una distribución tipo fase de dimensión infinita con un número finito de parámetros para modelar distribuciones de cola pesada. Los autores prueban que la distribución tipo fase que proponen cumple tener una fórmula exacta para la probabilidad de ruina, sin embargo, se debe aplicar un algoritmo de calibración difícil de implementar. Estos trabajos que se han mencionado muestran la precisión de los métodos usando ejemplos particulares de distribuciones para el monto de los reclamos. En la tabla 1.2 se hace un resumen de los requerimientos de los distintos métodos de aproximación para la probabilidad de ruina recientes.

Los métodos de aproximación que se presentaron en esta sección, sirven

Tabla 1.2: Comparación de los requerimientos necesarios para algunos de los métodos de aproximación recientes.

	Método de aproximación	Requerimientos
1	Albrecher [1]	Monto de los reclamos con distribución completamente monótona.
2	Avram [4]	Varios momentos finitos.
3	Goffard [43]	Coficiente R.
4	Gzyl [48]	Varios momentos finitos.
5	Mnatsakanov [64]	Valores de u grandes.
6	Bladt [8]	Aplicación de algoritmo de calibración.

como contexto para justificar la utilidad de los métodos propuestos en el presente trabajo. Como se ha mencionado, dichos métodos se podrán utilizar para distribuciones de cola ligera y de cola pesada, además de que se pueden implementar en una computadora con relativa facilidad. En el capítulo 4 se desarrollan estos métodos. En el modelo discreto del proceso de riesgo que será estudiado en el capítulo 5 también se establecen objetivos similares a los aquí expuestos.

La mayoría de la información de este capítulo fue investigada en las siguientes referencias: [1] a [8], [10, 11, 15], [21] a [24], [30, 31, 34, 36, 39], [41] a [43], [45, 47, 48, 50, 51, 53, 55], [64] a [69], [75, 82, 84] y [88]. Se citan también las siguientes referencias que no pudieron ser consultadas por su antigüedad, pero que es conocida su trascendencia gracias a otras publicaciones: [17, 18], [57] a [63], [79] y [83].

Capítulo 2

Distribución mezcla de Erlangs

En este capítulo se presenta la distribución mezcla infinita de Erlangs (MIE) o simplemente mezcla de Erlangs¹. Se desarrolla con detalle la solución al problema de encontrar la probabilidad de ruina en el modelo de Cramér-Lundberg cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución MIE. La fórmula que se desarrolla es igual a la que se puede consultar en el libro de Klugman et al. (2008) [50, pág. 311], sin embargo, se desarrolló una nueva demostración exhibiendo una representación de una variable aleatoria con distribución MIE como suma compuesta. También se presenta una sucesión de funciones de distribución MIE construida a partir de una función de distribución F continua con soporte no negativo, tal que esta sucesión converge a F . Este resultado puede encontrarse en el libro de Tijms (1994) [85, pág. 163], y en este capítulo se presenta un caso donde se demuestra que hay convergencia uniforme. Este capítulo es importante para el trabajo porque los métodos de aproximación que se desarrollan en el capítulo 4 se basan en las distribuciones MIE y en varias de sus propiedades.

2.1. Definición y propiedades

Definición 2.1.1 *Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Erlang con parámetros k y $\beta > 0$ si tiene distribución Gama(k, β) y si el parámetro k es un entero mayor que cero. En este caso se escribirá $X \sim \text{Erlang}(k, \beta)$.*

¹Una distribución mezcla finita puede ser vista como una mezcla infinita, como se menciona más adelante, por lo cual solo se le llamará a esta distribución mezcla de Erlangs.

Para la distribución Erlang, se denotará por $\text{erl}(k, \beta)(x)$ y $\text{Erl}(k, \beta)(x)$ a sus funciones de densidad y de distribución respectivamente, es decir, para $x > 0$:

$$\text{erl}(k, \beta)(x) = \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\beta x},$$

y

$$\text{Erl}(k, \beta)(x) = \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\beta x} \frac{(\beta x)^j}{j!}.$$

Más adelante en este capítulo se hace uso de la siguiente expresión equivalente de la función de distribución, que relaciona la distribución Erlang y la distribución Poisson:

$$\text{Erl}(k, \beta)(x) = 1 - P(Z_{\beta x} \leq k-1), \quad (2.1)$$

donde $Z_{\beta x} \sim \text{Poisson}(\beta x)$, $\beta > 0$ y $x > 0$. A continuación, se define la distribución conocida como mezcla de Erlangs.

Definición 2.1.2 *Se dice que una variable aleatoria S tiene distribución mezcla de Erlangs con parámetros $\boldsymbol{\pi} = (q_1, q_2, \dots)$ y $\beta > 0$, si su función de densidad es la siguiente:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \text{erl}(k, \beta)(x), \quad (2.2)$$

para $x > 0$ y donde $q_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. En este caso, se escribirá $S \sim \text{MIE}(\boldsymbol{\pi}, \beta)$.

Si el número de sumandos en (2.2) es finito, se puede decir que S tiene como distribución una mezcla finita de Erlangs, sin embargo, en este trabajo no es necesario diferenciar este caso y queda contemplado en todos los resultados. Esta manera de definir una distribución mezcla de Erlangs se sigue de la definición del libro de Klugman et al. (2008) [50, pág. 230]. En el artículo de Willmot y Woo (2007) [89] y en el artículo de Willmot y Lin (2011) [90] se define y estudia una mezcla de Erlangs más general, con parámetros de forma distintos; en la segunda de estas referencias se pueden encontrar varias de sus propiedades analíticas, además se estudia la transformada de Laplace del tiempo de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución MIE y se obtiene un resultado muy similar al teorema 2.2.1 que se presenta más adelante.

Una propiedad interesante y útil de una variable aleatoria con distribución $MIE(\boldsymbol{\pi}, \beta)$, es que puede ser expresada como una suma compuesta como se establece en el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3 Sean X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con distribución $Exp(\beta)$, y sea N una variable aleatoria discreta con valores enteros mayores a cero e independiente de X_1, X_2, \dots , cuya función de probabilidad está dada por $P(N = k) = f_N(k)$, para $k = 1, 2, \dots$ y $E(N) < \infty$. Si S_N es una variable aleatoria definida como sigue:

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i, \quad (2.3)$$

entonces:

$$S_N \sim MIE(\boldsymbol{\pi}, \beta),$$

donde $\boldsymbol{\pi} = (f_N(1), f_N(2), \dots)$.

Demostración:

Es conocido que para una suma compuesta como (2.3), se cumple la siguiente igualdad (véase por ejemplo el libro de Bowers et al. (1997) [10, pág. 369]):

$$F_{S_N}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(x) P(N = k). \quad (2.4)$$

Por lo anterior, y debido a que $F_X^{*k}(x) = \text{Erl}(k, \beta)(x)$, entonces:

$$F_{S_N}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) \text{Erl}(k, \beta)(x), \quad (2.5)$$

por lo cual, $S_N \sim MIE(\boldsymbol{\pi}, \beta)$.

□

Observación 2.1.4 Una consecuencia de que una variable aleatoria con distribución $MIE(\boldsymbol{\pi}, \beta)$ pueda ser escrita como suma compuesta, es que su media, su varianza y su función generadora de momentos pueden calcularse fácilmente, véase por ejemplo Bowers et al. (1997) [10, págs. 368 y 369] donde se dan fórmulas para calcular dichas características. Así, para la variable S_N :

$$E(S_N) = E(N)/\beta. \quad (2.6)$$

$$\text{Var}(S_N) = (E(N) + 2\text{Var}(N))/\beta^2. \quad (2.7)$$

$$M_{S_N}(r) = P_N(\beta/(\beta - r)). \quad (2.8)$$

A la variable aleatoria N se le llamará variable de conteo o frecuencia y a las variables aleatorias X_1, X_2, \dots severidades, como se hace de manera tradicional en teoría del riesgo. En la siguiente proposición se enuncian algunas propiedades de las distribuciones MIE que serán útiles más adelante. El vector de probabilidades $\boldsymbol{\pi}$ será representado desde ahora como $(f_N(1), f_N(2), \dots)$ para exhibir la información relacionada a (2.3).

Proposición 2.1.5 *Supóngase que S_N es una variable aleatoria $MIE(\boldsymbol{\pi}, \beta)$, con una variable de conteo N tal que $E(N) < \infty$ y cuya distribución de probabilidad está dada por $\boldsymbol{\pi}$, entonces se cumple lo siguiente:*

a) Para $x > 0$:

$$F_{S_N}(x) = E(F_N(Z_{\beta x})), \quad (2.9)$$

donde $Z_{\beta x}$ es una variable aleatoria Poisson(βx).

b) La función de densidad de equilibrio de S_N es $MIE(\boldsymbol{\pi}_e, \beta)$, donde $\boldsymbol{\pi}_e$ es el vector de probabilidades de una variable aleatoria de conteo N_e con probabilidades dadas para cada valor de $j = 1, 2, \dots$ por:

$$f_{N_e}(j) = \frac{\bar{F}_N(j-1)}{E(N)}. \quad (2.10)$$

c) Una suma compuesta con severidades MIE y frecuencia con distribución geométrica truncada en cero, es de nuevo MIE. Es decir, supóngase que S_1, S_2, \dots son variables aleatorias independientes con distribución común $MIE(\boldsymbol{\pi}, \beta)$, cuya variable de conteo asociada a las probabilidades en $\boldsymbol{\pi}$ es N . También supóngase que M es una variable aleatoria discreta positiva con función de probabilidad dada por:

$$P(M = k) = \rho(1 - \rho)^{k-1},$$

para cada valor de $k = 1, 2, \dots$, entonces:

$$\sum_{j=1}^M S_j \sim MIE(\boldsymbol{\pi}^*, \beta), \quad (2.11)$$

donde $\boldsymbol{\pi}^*$ es el vector de probabilidades de N^* y dichas probabilidades pueden ser obtenidas de manera recursiva como sigue:

$$f_{N^*}(1) = \rho f_N(1), \quad (2.12)$$

$$f_{N^*}(k) = (1 - \rho) \sum_{i=1}^{k-1} f_N(i) f_{N^*}(k-i) + \rho f_N(k), \quad k \geq 2. \quad (2.13)$$

Demostración:

- a) Se usará la siguiente notación para la función de probabilidad Poisson: $\text{poisson}(\beta x)(j) = e^{-\beta x}(\beta x)^j/j!$ para cada valor de $j = 0, 1, 2, \dots$. Sea $Z_{\beta x} \sim \text{Poisson}(\beta x)$, $\beta > 0$ y $x > 0$, entonces por (2.5) y (2.1):

$$\begin{aligned}
F_{S_N}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) \text{Erl}(k, \beta)(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) \sum_{j=k}^{\infty} \text{poisson}(\beta x)(j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j f_N(k) \text{poisson}(\beta x)(j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} F_N(j) \text{poisson}(\beta x)(j) \\
&= E(F_N(Z_{\beta x})).
\end{aligned}$$

El intercambio de sumas en la tercera igualdad es posible por el teorema de la convergencia dominada para series, tomando como sucesión dominante a las probabilidades Poisson, cuya serie es 1. Después, en la cuarta igualdad se extendió el comienzo de la suma hasta $j = 0$, debido a que $F_N(0) = 0$.

- b) Para $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f_e(x) &= \frac{1}{E(S_N)} [1 - F_{S_N}(x)] \\
&= \frac{1}{E(N)/\beta} E(\bar{F}_N(Z_{\beta x})) \\
&= \frac{\beta}{E(N)} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_N(j) \text{poisson}(\beta x)(j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} f_{N_e}(j) \text{erl}(j, \beta)(x), \tag{2.14}
\end{aligned}$$

donde $f_{N_e}(j) = \bar{F}_N(j-1)/E(N)$, para $j \geq 1$. Como $\sum_{j=1}^{\infty} f_{N_e}(j) = 1$, entonces $f_e(x)$ es a su vez una densidad MIE($\boldsymbol{\pi}_e, \beta$).

- c) Sean S_1, S_2, \dots variables aleatorias con distribución $\text{MIE}(\boldsymbol{\pi}, \beta)$, entonces S_j tiene la misma distribución que la suma compuesta $\sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}$ para cada valor de $j = 1, 2, \dots$ por la proposición 2.1.3, donde $X_{ij} \sim \text{Exp}(\beta)$ y las probabilidades de N_j están dadas en $\boldsymbol{\pi}$, por lo cual:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j=1}^M S_j \leq x\right) &= P\left(\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij} \leq x\right) \\ &= P\left(\sum_{l=1}^{N^*} X_l \leq x\right), \end{aligned}$$

donde $N^* = \sum_{j=1}^M N_j$ y $X_l \sim \text{Exp}(\beta)$ para cada valor de $l = 1, 2, \dots$. Notar que se usan los siguientes cambios de variable en la última igualdad:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{11}, & X_2 &= X_{21}, & \dots, & X_{N_1} &= X_{N_11}; \\ X_{N_1+1} &= X_{12}, & X_{N_1+2} &= X_{22}, & \dots, & X_{N_1+N_2} &= X_{N_22}; \\ & & & & & & \vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, de nuevo por la proposición 2.1.3:

$$\sum_{l=1}^{N^*} X_l \sim \text{MIE}(\boldsymbol{\pi}^*, \beta),$$

donde las probabilidades $f_{N^*}(k)$ de $\boldsymbol{\pi}^*$ pueden ser calculadas de la siguiente forma. Sea $N_0^* = \sum_{j=1}^{M_0} N_j$, donde $M_0 \sim \text{Geo}(\rho)$, y sea $g_k = f_{N_0^*}(k)$. Entonces usando la fórmula recursiva de Panjer:

$$g_0 = \rho, \tag{2.15}$$

$$g_k = (1 - \rho) \sum_{r=1}^k f_N(r) g_{k-r}, \tag{2.16}$$

para cada valor de $k = 1, 2, \dots$. En esta última expresión, debido a que la distribución de N_j no depende de j , se escribió $f_N(r)$ en vez de $f_{N_j}(r)$.

Además, para cada valor de $k = 1, 2, \dots$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
g_k &= P(N_0^* = k) \\
&= P(N_0^* = k \mid M_0 > 0)P(M_0 > 0) + P(N_0^* = k \mid M_0 \leq 0)P(M_0 \leq 0) \\
&= P(N_0^* = k \mid M_0 > 0)(1 - \rho) \\
&= P(N^* = k)(1 - \rho) \\
&= f_{N^*}(k)(1 - \rho).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando (2.16), se obtiene la fórmula recursiva para calcular el valor de $f_{N^*}(k)$ al sustituir el valor de g_k de acuerdo a (2.17).

□

Observación 2.1.6 *Sumando los términos en la ecuación (2.13) y haciendo un cambio en el orden de las sumas se llega a que las probabilidades $\bar{F}_{N^*}(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} f_{N^*}(i)$ satisfacen la fórmula recursiva siguiente:*

$$\bar{F}_{N^*}(k) = (1 - \rho) \sum_{j=1}^k f_N(j) \bar{F}_{N^*}(k - j) + \bar{F}_N(k), \tag{2.18}$$

para cada valor de $k = 1, 2, \dots$. Esta fórmula es útil para calcular la función de distribución de una suma compuesta cuyas severidades son variables aleatorias discretas y cuando la variable de conteo tome valores mayores a cero. Esta fórmula será relevante más adelante, en la demostración del teorema 2.2.1.

La primera parte de la siguiente proposición muestra que las distribuciones MIE son densas en el espacio de funciones de distribución continuas con soporte no negativo. Este resultado fue demostrado primero en alemán en un artículo de Schassberger (1973) [77]. Una prueba escrita en inglés, es dada en el libro de Tijms (1994) [85]. Una prueba alterna puede encontrarse en el artículo de Lee y Lin (2010) [52], donde se hace uso de la función característica. La propiedad adicional de la convergencia uniforme se sigue de tomar particiones cada vez más finas del soporte compacto acotado. A continuación se muestran los detalles.

Proposición 2.1.7 *Sea F una función de distribución continua cuyo soporte está contenido en $[0, \infty)$. Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de*

distribución definidas como sigue:

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b(k, n) \cdot \text{Erl}(k, n)(x), \quad (2.19)$$

donde $b(k, n) = F(k/n) - F((k-1)/n)$. Entonces, para cualquier $x > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x). \quad (2.20)$$

Además, si F tiene soporte acotado, entonces F_n converge a F uniformemente.

Demostración:

Se demuestra solo la segunda parte, para la primera se puede consultar Lee y Lin (2010) [52], o bien, Tijms (1994) [85, pág. 163].

Supóngase que $F(x)$ tiene soporte $[0, b)$, para algún $b > 0$. Debido a que F es continua en el conjunto compacto $[0, b]$, para cualquier $\epsilon > 0$ se puede escoger una partición finita $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$, tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) < \epsilon/2$, para $i = 1, \dots, k$. Si $t \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces:

$$0 \leq F(x_i) - F(t) < \epsilon/2 \quad \text{y} \quad 0 \leq F(t) - F(x_{i-1}) < \epsilon/2. \quad (2.21)$$

Ahora, por (2.20), para cada x_i existe un entero $N_i(\epsilon, x_i)$, tal que para cada $n > N_i(\epsilon, x_i)$ se cumple que:

$$|F_n(x_i) - F(x_i)| < \epsilon/2. \quad (2.22)$$

En particular, para $x_k = b$, existe un entero $N_k(\epsilon, b)$, tal que para $n > N_k(\epsilon, b)$ se cumple que:

$$|F_n(b) - F(b)| = 1 - F_n(b) < \epsilon/2.$$

También, debido a que $F_n(x) \geq F_n(b)$ cuando $x \geq b$, entonces para estos valores de x se cumple:

$$|F_n(x) - F(x)| \leq 1 - F_n(b) < \epsilon/2. \quad (2.23)$$

Ahora, se define:

$$N = \text{máx} \{N_1(\epsilon, x_1), \dots, N_k(\epsilon, x_k)\},$$

entonces, por (2.21) y (2.22), para $t \in [x_{i-1}, x_i]$ y $n > N$ se cumple lo siguiente:

$$F_n(t) - F(t) \leq F_n(x_i) - F(x_i) + F(x_i) - F(t) < \epsilon,$$

y

$$F_n(t) - F(t) \geq F_n(x_{i-1}) - F(x_{i-1}) + F(x_{i-1}) - F(t) > -\epsilon.$$

Por lo tanto:

$$|F_n(t) - F(t)| < \epsilon. \quad (2.24)$$

Finalmente, para $t < 0$, $F_n(t) - F(t) = 0$; y para $t > b$, (2.24) también se cumple por (2.23). Entonces $|F_n(t) - F(t)| < \epsilon$ para toda t siempre que $n > N$. Por lo tanto, F_n converge uniformemente a F . □

Observación 2.1.8 *Las funciones de distribución aproximantes $F_n(x)$ definidas en (2.19) son MIE($\boldsymbol{\pi}, n$), donde la variable de conteo N tiene probabilidades dadas por $f_N(k) = F(k/n) - F((k-1)/n)$, para $k \geq 1$. Por la proposición 2.1.5 a), estas funciones pueden ser escritas como sigue:*

$$\begin{aligned} F_n(x) &= E(F_N(Z_{nx})) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{Z_{nx}} f_N(k)\right) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{Z_{nx}} [F(k/n) - F((k-1)/n)]\right) \\ &= E(F(Z_{nx}/n)). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Observación 2.1.9 *Si $F(x)$ es una función de distribución convexa, usando la ecuación (2.25) y la desigualdad de Jensen, se tendrá que para toda x y $n = 1, 2, \dots$ se cumple que:*

$$\begin{aligned} F_n(x) &= E(F(Z_{nx}/n)) \\ &\geq F(E(Z_{nx}/n)) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

lo cual establece que la aproximación es de arriba hacia abajo. De manera análoga, puede verse que si $F(x)$ es cóncava, entonces la aproximación es de abajo hacia arriba.

En el siguiente ejemplo, se puede ver que la distribución exponencial es un caso particular de una distribución con soporte no acotado, pero que también puede ser aproximada por distribuciones mezcla de Erlangs con convergencia uniforme.

Ejemplo 2.1.10 Para la distribución exponencial, $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$, $x > 0$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= E(F(Z_{nx}/n)) \\ &= E(1 - \exp(-\beta Z_{nx}/n)) \\ &= 1 - M_{Z_{nx}}(-\beta/n) \\ &= 1 - \exp(-a_n x), \end{aligned}$$

donde $a_n = n(1 - \exp(-\beta/n))$. Sea $h_n(x) = F(x) - F_n(x) = \exp(-a_n x) - \exp(-\beta x)$. Debido a que la función F es cóncava, se sigue que $h_n(x)$ es no negativa y después de algunos cálculos se puede comprobar que tiene un máximo absoluto en:

$$x^* = \frac{1}{a_n - \beta} \ln(a_n/\beta).$$

Evaluando a h_n en x^* , se llega a:

$$h_n(x^*) = (a_n/\beta)^{-b_n} - (a_n/\beta)^{-c_n},$$

donde $b_n = a_n/(a_n - \beta)$ y $c_n = \beta/(a_n - \beta)$. Cuando $n \rightarrow \infty$, $a_n \nearrow \beta$, $b_n \rightarrow -\infty$ y $c_n \rightarrow -\infty$. Por lo tanto, $h_n(x^*) \rightarrow 0$. Esto muestra que F_n converge uniformemente a F .

Se finaliza esta sección presentando un lema cuya utilidad se verá en el capítulo 4 al demostrar el teorema 4.1.1.

Lema 2.1.11 Sea X_n una variable aleatoria, cuya función de distribución $F_n(x)$ está definida como en (2.19). Entonces:

a) $E(X_n) < \infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X)$.

Demostración:

a) Como la distribución de X_n es una mezcla, entonces su esperanza es la mezcla de las esperanzas, es decir,

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (k/n) \cdot b(k, n).$$

Esta esperanza es finita para cualquier $n = 1, 2, \dots$, puesto que cada $E(X_n)$ puede verse como sigue:

$$\begin{aligned}
 E(X_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot b(k, n) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k [F(k/n) - F((k-1)/n)] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} [F(k/n) - F((k-1)/n)] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} [1 - F(j/n)] \\
 &= \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{\infty} (1/n) \bar{F}(j/n).
 \end{aligned}$$

El segundo sumando representa una suma inferior de Riemann para \bar{F} por ser función decreciente, por lo cual es menor a la integral de \bar{F} , entonces:

$$\begin{aligned}
 E(X_n) &\leq \frac{1}{n} + \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \\
 &= \frac{1}{n} + E(X) \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

b) Tomando la expresión de $E(X_n)$ del inciso anterior, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot [F(k/n) - F((k-1)/n)] \\
 &= \int_0^{\infty} x dF(x) \\
 &= E(X).
 \end{aligned}$$

□

En esta primera sección se han establecido las definiciones y resultados relacionados a la distribución mezcla de Erlangs que serán usados en el resto del trabajo. En la siguiente sección se desarrolla la solución a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones sigue esta distribución.

2.2. Probabilidad de ruina

El siguiente resultado establece cómo puede ser expresada la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones se modela con una distribución MIE. Esta fórmula permite expresar la probabilidad de ruina como un valor esperado. Su demostración, puede ser hecha siguiendo las sugerencias del ejercicio 11.17 c) del libro de Klugman et al. (2008) [50], esta demostración se desarrolla en el apéndice A.3. En esta sección, se presenta una demostración original usando la fórmula recursiva de Panjer, sugerencia hecha por un revisor anónimo de [76], trabajo derivado de esta investigación.

Teorema 2.2.1 *Supóngase que los montos de las reclamaciones tienen distribución MIE($\boldsymbol{\pi}, \beta$), donde la variable de conteo N asociada a las probabilidades de $\boldsymbol{\pi}$, es tal que $E(N) < \infty$; y supóngase que $Z_{\beta u} \sim \text{Poisson}(\beta u)$. Entonces:*

$$\psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_k P(Z_{\beta u} = k) \quad (2.26)$$

$$= E(\bar{C}_{Z_{\beta u}}), \quad (2.27)$$

donde:

$$\bar{C}_0 = \frac{1}{1 + \theta}, \quad (2.28)$$

$$\bar{C}_k = \frac{1}{1 + \theta} \left[\sum_{i=1}^k f_{N_e}(i) \bar{C}_{k-i} + \bar{F}_{N_e}(k) \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

$$f_{N_e}(i) = \frac{\bar{F}_N(i-1)}{E(N)}. \quad (2.30)$$

Demostración:

Sea $R_0 = \sum_{j=1}^{M_0} Y_{e,j}$ una suma compuesta donde $M_0 \sim \text{Geo}(\rho)$, $\rho = \theta/(1+\theta)$ y sean $Y_{e,1}, Y_{e,2}, \dots$ las variables aleatorias de equilibrio del monto de las reclamaciones MIE($\boldsymbol{\pi}, \beta$). Por la proposición 2.1.5 b), $Y_{e,j} \sim \text{MIE}(\boldsymbol{\pi}_e, \beta)$, donde las probabilidades en $\boldsymbol{\pi}_e$ están dadas por $f_{N_e}(j) = \bar{F}_N(j-1)/E(N)$, $j = 1, 2, \dots$, entonces por (1.33) se cumple que:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(R_0 > u \mid M_0 > 0)P(M_0 > 0) \\ &= (1 - \rho)P(R > u), \end{aligned}$$

donde $R = \sum_{j=1}^M Y_{e,j}$ y M es una variable aleatoria con función de probabilidad dada por $f_M(k) = \rho(1 - \rho)^{k-1}$, para $k = 1, 2, \dots$. Por la proposición 2.1.5 c), $R \sim \text{MIE}(\boldsymbol{\pi}^*, \beta)$, donde las probabilidades de $\boldsymbol{\pi}^*$ están dadas por la ecuación (2.10) y por la proposición 2.1.5 a), y escribiendo $\bar{C}_k = (1 - \rho)\bar{F}_{N^*}(k)$, $k \geq 0$, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} (1 - \rho)P(R > u) &= (1 - \rho)E(\bar{F}_{N^*}(Z_{\beta u})) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_k P(Z_{\beta u} = k). \end{aligned}$$

Finalmente, se calculan los coeficientes \bar{C}_k ,

$$\begin{aligned} \bar{C}_0 &= (1 - \rho)\bar{F}_{N^*}(0) \\ &= 1 - \rho \\ &= 1/(1 + \theta), \end{aligned}$$

y por (2.18),

$$\begin{aligned} \bar{C}_k &= (1 - \rho)\bar{F}_{N^*}(k) \\ &= \frac{1}{1 + \theta} \left[\sum_{i=1}^k f_{N_e}(i)\bar{C}_{k-i} + \bar{F}_{N_e}(k) \right], \end{aligned}$$

para cada valor de $k = 1, 2, \dots$ □

Observación 2.2.2 *En particular, para montos de reclamaciones con distribución Erlang(m, β), se puede comprobar que*

$$\bar{C}_k = \begin{cases} \frac{1}{1 + \theta} & \text{para } k = 0, \\ \frac{1}{(1 + \theta)m} \left[\sum_{i=1}^k \bar{C}_{k-i} + (m - k) \right] & \text{para } k = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{1}{(1 + \theta)m} \left[\sum_{i=1}^m \bar{C}_{k-i} \right] & \text{para } k = m + 1, m + 2, \dots \end{cases}$$

Usando estas fórmulas, la fórmula (2.26) se reduce a la conocida probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución $\text{Exp}(\beta)$ como se muestra a continuación. Para $m = 1$:

$$\bar{C}_k = \left(\frac{1}{1 + \theta} \right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Estas cantidades son claramente probabilidades de cola de una distribución geométrica con parámetro $\theta/(1 + \theta)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_k P(Z_{\beta u} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^{k+1} e^{-\beta u} \frac{(\beta u)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{1 + \theta} \exp\left\{-\left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right)\beta u\right\}.\end{aligned}$$

Esta expresión es la conocida solución explícita para la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones se modela con distribución exponencial, la cual fue obtenida también en (1.34).

A pesar de que las distribuciones tipo fase también son densas en el espacio de las distribuciones con soporte sobre $(0, \infty)$ (véase, por ejemplo, Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 542]), el cálculo de la probabilidad de ruina puede ser difícil porque se debe encontrar la exponencial de una matriz, lo cual puede ser un problema cuando la dimensión de la matriz es grande (véase Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 14]). En contraste, cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución MIE, es fácil implementar la fórmula (2.26). En el apéndice B puede verse un ejemplo de código, escrito en lenguaje R, para implementar dicha fórmula.

Las referencias que fueron consultadas y que son citadas en el texto de este capítulo son las siguientes: [3, 10, 50, 52, 84, 85, 89] y [90]. Además se cita [77], que es un trabajo difícil de conseguir, pero se considera una publicación pionera en el tema de aproximar funciones de distribución usando la distribución MIE.

Capítulo 3

Distribución empírica continua

En este capítulo se define la función de distribución empírica continua. Se establece una adaptación del teorema de Glivenko-Cantelli a este tipo de distribución y se plantea un criterio de estabilidad para la probabilidad de ruina cuando se cambia la distribución del monto de las reclamaciones. Estos resultados aportan a la investigación herramientas, primero para demostrar la convergencia de la probabilidad de ruina que se propondrá en el teorema principal 4.1.1 del capítulo 4, y después para proponer un método de aproximación a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tienen una distribución desconocida en el corolario 4.1.6. Las contribuciones originales de este capítulo son la proposición 3.1.2 y la proposición 3.2.2.

3.1. Función de distribución empírica continua

Por el teorema de Glivenko-Cantelli, véase por ejemplo el libro de Lukacs (1975) [56, pág. 105], se sabe que si X_1, \dots, X_m son v.a.i.i.d. con función de distribución común F , entonces la función de distribución empírica discreta (FDED) definida como:

$$\widehat{F}_{d,m}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{(X_i \leq x)}, \quad (3.1)$$

converge uniformemente a $F(x)$, casi seguramente. Es decir:

$$P \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_x \{ |\widehat{F}_{d,m}(x) - F(x)| \} = 0 \right) = 1. \quad (3.2)$$

Notar que para cualquier $x > 0$, mientras $F(x)$ es un número en el conjunto $[0, 1]$, la función $\widehat{F}_{d,m}(x)$ es una variable aleatoria cuyos valores dependen

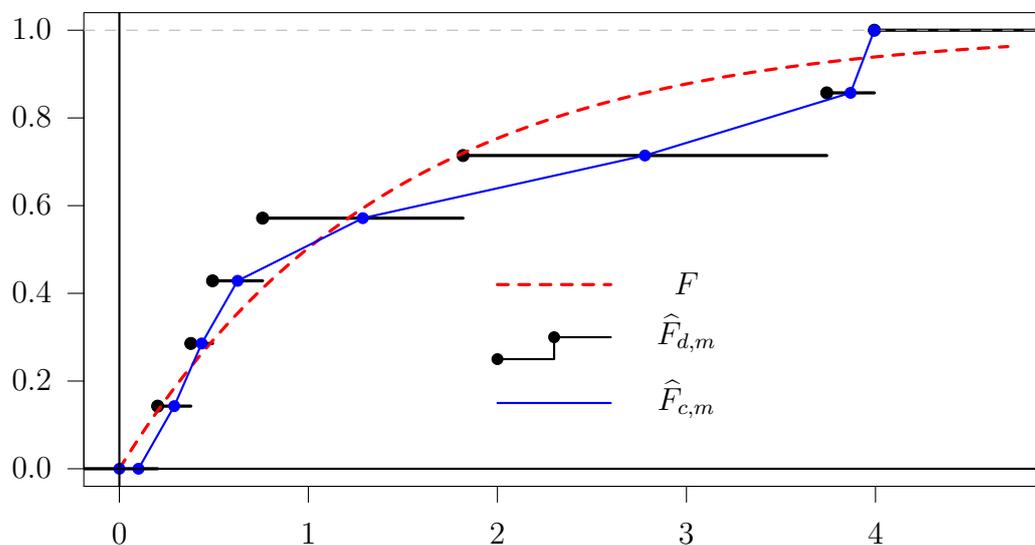


Figura 3.1: Ejemplo de distribución empírica discreta y continua.

de las variables aleatorias X_1, \dots, X_m y del valor de x . Ahora, se define una versión continua de $\widehat{F}_{d,m}$ para aproximar cualquier función de distribución continua (FDC), dicha versión continua es obtenida al unir los puntos medios de los escalones de la FDED $\widehat{F}_{d,m}$.

Definición 3.1.1 Sea F una función de distribución continua, cuyo soporte está contenido en $[0, \infty)$. Sean X_1, \dots, X_m v.a.i.i.d. con función de distribución F y sean $X_{(1)}, \dots, X_{(m)}$ sus estadísticas de orden. Se define la función de distribución empírica continua (FDEC) de X_1, \dots, X_m como sigue:

$$\widehat{F}_{c,m}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{X_{(1)}}{2} \\ \frac{2x - X_{(k-1)} - X_{(k)}}{m(X_{(k+1)} - X_{(k-1)})} + \frac{k-1}{m} & \text{si } d(k) \leq x < d(k+1) \\ \frac{2x - X_{(m-1)} - X_{(m)}}{m(X_{(m)} - X_{(m-1)})} + \frac{m-1}{m} & \text{si } d(m) \leq x < X_{(m)}, \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(m)}, \end{cases} \quad (3.3)$$

para valores de $k = 1, 2, \dots, m-1$, $d(i) := (X_{(i-1)} + X_{(i)})/2$ y $X_{(0)} := 0$.

Algunos otros métodos para producir una distribución empírica continua pueden ser considerados, sin embargo, la función que se ha definido es adecuada para los propósitos de este trabajo. En la figura 3.1, se muestra un ejemplo de gráfica de una FDEC. En el resultado siguiente se muestra que la FDEC converge uniformemente hacia F , de forma casi segura.

Proposición 3.1.2 *La FDEC $\widehat{F}_{c,m}$ definida en (3.3), converge uniformemente a F conforme $m \rightarrow \infty$, casi seguramente.*

Demostración:

Sean X_1, \dots, X_m v.a.i.i.d. con función de distribución F y sean $X_{(1)}, \dots, X_{(m)}$ sus estadísticas de orden. Notar que una forma equivalente de expresar a (3.1), es la siguiente:

$$\widehat{F}_{d,m}(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{(X_{(i)} \leq x)}.$$

Lo anterior implica que, para $k \geq 1$:

$$\widehat{F}_{d,m}(X_{(k)}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{(X_{(i)} \leq X_{(k)})} = \frac{k}{m},$$

por lo cual, si $X_{(k)} \neq X_{(k-1)}$, entonces:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{d,m}(X_{(k)}) - \widehat{F}_{d,m}(X_{(k-1)}) &= \frac{k}{m} - \frac{k-1}{m} \\ &= \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

En el caso de que exista algún valor de n para el cual $1 \leq n \leq m-1$, tal que:

$$X_{(k)} = X_{(k+1)} = \dots = X_{(k+n)},$$

entonces:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{d,m}(X_{(k)}) - \widehat{F}_{d,m}(X_{(k-1)}) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{(X_{(i)} \leq X_{(k)})} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{(X_{(i)} \leq X_{(k-1)})} \\ &= \frac{k+n}{m} - \frac{k-1}{m} \\ &= \frac{n+1}{m}. \end{aligned}$$

Sin embargo, como F es una distribución continua, entonces $X_{(k)} \neq X_{(k-1)}$, c.s. Por lo tanto, cada escalón de $\widehat{F}_{d,m}$ tiene un salto de tamaño menor o igual al $1/m$, c.s. Entonces, por la construcción de $\widehat{F}_{c,m}$, se cumple para cualquier x lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\widehat{F}_{d,m}(x) - \widehat{F}_{c,m}(x)| &\leq \sup_{1 \leq k \leq m} \{|\widehat{F}_{d,m}(X_{(k)}) - \widehat{F}_{d,m}(X_{(k-1)})|\} \\ &= \frac{1}{m} \quad \text{c.s.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por otro lado, por Glivenko-Cantelli, para $\epsilon/2 > 0$, existe un número natural $N(\epsilon/2)$, tal que para cualquier $m_0 > N(\epsilon/2)$ y para toda x , se cumple que:

$$|\widehat{F}_{d,m_0}(x) - F(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{c.s.} \quad (3.5)$$

Por último, dada $\epsilon > 0$, sea $N = \max\{N(\epsilon/2), 2/\epsilon\}$. Si $m > N$, usando (3.4) y (3.5), entonces :

$$\begin{aligned} |\widehat{F}_{c,m}(x) - F(x)| &\leq |\widehat{F}_{d,m}(x) - \widehat{F}_{c,m}(x)| + |\widehat{F}_{d,m}(x) - F(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\widehat{F}_{c,m}$ converge uniformemente a F , de forma casi segura. \square

3.2. Estabilidad de la probabilidad de ruina

Ahora se analizará la estabilidad en la probabilidad de ruina para dos modelos cuyos montos de las reclamaciones tienen distribuciones distintas, pero cercanas. La estabilidad será usada para establecer que la convergencia entre las distribuciones de los montos de las reclamaciones, implica la convergencia de las respectivas probabilidades de ruina.

Este resultado será clave en la prueba de la primera parte del teorema 4.1.1, más adelante. La suposición $c = 1$ es por simplicidad. Si $c \neq 1$, entonces se puede definir $U^*(t) = U(t/c)$ y $\psi^*(u) = \psi(u)$, donde ψ^* es la probabilidad de ruina para el modelo U^* (véase por ejemplo Asmussen y Albrecher (2010) [3, pág. 5]). Antes de pasar al resultado principal de esta

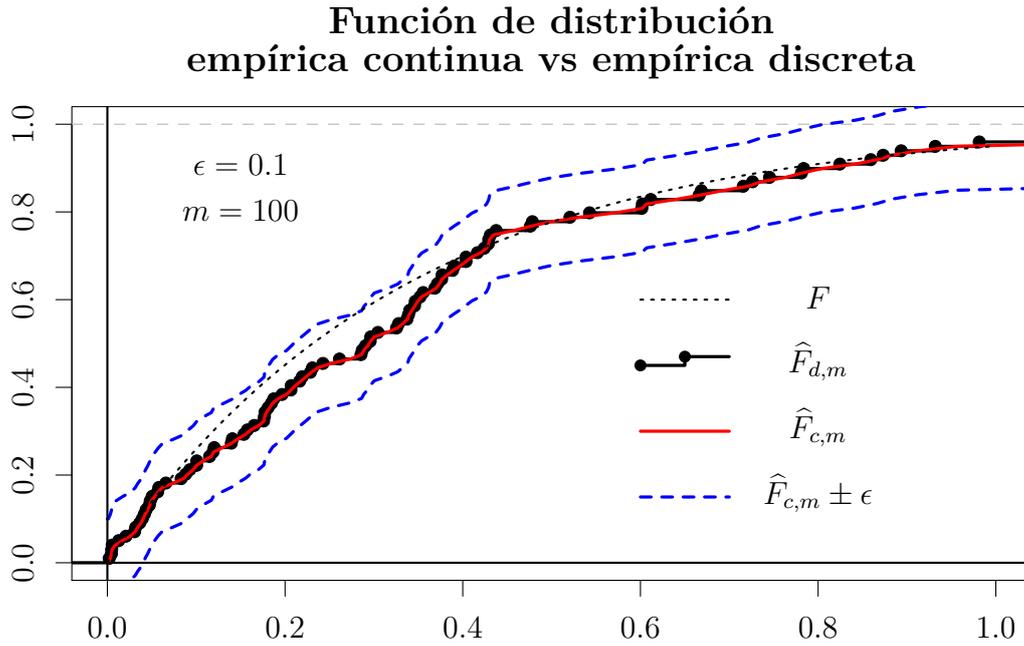


Figura 3.2: Vecindad de radio ϵ para las funciones de distribución empírica discreta y continua.

sección, se enuncia el siguiente resultado de Vatamidou et al. (2014) [86, pág. 515].

Lema 3.2.1 Si $\sup_{0 \leq x \leq u} |F_{1e}(x) - F_{2e}(x)| \leq \epsilon$, entonces:

$$|F_{1e}^{*k}(u) - F_{2e}^{*k}(u)| \leq k\epsilon, \quad (3.6)$$

donde F_{ie} denota la distribución de equilibrio asociada a la función de distribución continua con soporte no negativo F_i .

Proposición 3.2.2 Sean U_1 y U_2 dos modelos de Cramér-Lundberg donde los montos de las reclamaciones tienen funciones de distribución F_1 y F_2 y medias μ_1 y μ_2 , respectivamente. Supóngase el mismo parámetro $c = 1$, el mismo capital inicial $u > 0$ y el mismo proceso de Poisson con intensidad λ .

a) Supóngase que existen ϵ_1 y ϵ_2 , tales que se cumple lo siguiente:

$$\sup_{0 \leq x \leq u} |F_1(x) - F_2(x)| < \epsilon_1 \quad y \quad |\mu_1 - \mu_2| < \epsilon_2.$$

Entonces, para cualquier $u > 0$:

$$|\psi_1(u) - \psi_2(u)| < \xi_1 u \epsilon_1 + \xi_2 \epsilon_2, \quad (3.7)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son las respectivas probabilidades de ruina para los modelos U_1 y U_2 , y

$$\xi_1 = \frac{\lambda\mu_2}{\mu_1(1 - \lambda\mu_2)}, \quad \xi_2 = \frac{\lambda\mu_1(1 + \lambda\mu_2) + \lambda\mu_2}{\mu_1(1 - \lambda\mu_2)}. \quad (3.8)$$

b) Además, si F_1 tiene soporte $[0, b]$, para alguna $b > 0$ fija y

$$\sup_{x \geq 0} |F_1(x) - F_2(x)| < \epsilon_1,$$

entonces, para cualquier $u > 0$:

$$|\psi_1(u) - \psi_2(u)| < \xi_1 b \epsilon_1 + \xi_2 \epsilon_2. \quad (3.9)$$

Demostración:

Para simplificar la notación, sean $q_1 = \lambda\mu_1$, $q_2 = \lambda\mu_2$, $p_1 = 1 - q_1$ y $p_2 = 1 - q_2$.

a) Sea $u > 0$, y sea $F_{ie}^{*k}(u)$ la k -ésima convolución de la distribución de equilibrio de F_i . Entonces, por la fórmula de Pollaczek-Khinchine (1.33):

$$\begin{aligned} |\psi_1(u) - \psi_2(u)| &= \left| p_1 \sum_{k=1}^{\infty} q_1^k \bar{F}_{1e}^{*k}(u) - p_2 \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \bar{F}_{2e}^{*k}(u) \right| \\ &= \left| p_1 \sum_{k=1}^{\infty} q_1^k \bar{F}_{1e}^{*k}(u) - p_2 \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \bar{F}_{1e}^{*k}(u) \right. \\ &\quad \left. + p_2 \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \bar{F}_{1e}^{*k}(u) - p_2 \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \bar{F}_{2e}^{*k}(u) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |p_1 q_1^k - p_2 q_2^k| \\ &\quad + p_2 \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \left| \bar{F}_{1e}^{*k}(u) - \bar{F}_{2e}^{*k}(u) \right|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

El primer término puede ser acotado como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |p_1 q_1^k - p_2 q_2^k| &= \sum_{k=1}^{\infty} |p_1 q_1^k - p_1 q_2^k + p_1 q_2^k - p_2 q_2^k| \\
&\leq p_1 \sum_{k=1}^{\infty} |q_1^k - q_2^k| + |p_1 - p_2| \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \\
&= p_1 |q_1 - q_2| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k q_1^{k-i} q_2^{i-1} + (q_2/p_2) |p_1 - p_2| \\
&= p_1 |q_1 - q_2| \sum_{i=1}^{\infty} q_2^{i-1} \sum_{k=i}^{\infty} q_1^{k-i} + (q_2/p_2) |q_1 - q_2|,
\end{aligned}$$

puesto que $\sum_{j=0}^{\infty} q_l^j = (1 - q_l)^{-1} = p_l^{-1}$, $l = 1, 2$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |p_1 q_1^k - p_2 q_2^k| &= \frac{1 + q_2}{p_2} |q_1 - q_2| \\
&= \frac{1 + \lambda \mu_2}{1 - \lambda \mu_2} |\lambda \mu_1 - \lambda \mu_2| \\
&< \frac{\lambda(1 + \lambda \mu_2)}{1 - \lambda \mu_2} \epsilon_2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para el segundo término de (3.10), sea $x \in [0, u]$, entonces:

$$\begin{aligned}
|F_{1e}(x) - F_{2e}(x)| &= \left| \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}_1(y) dy - \frac{1}{\mu_2} \int_0^x \bar{F}_2(y) dy \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}_1(y) dy - \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}_2(y) dy \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}_2(y) dy - \frac{1}{\mu_2} \int_0^x \bar{F}_2(y) dy \right| \\
&\leq \frac{1}{\mu_1} \int_0^x |\bar{F}_1(y) - \bar{F}_2(y)| dy + \left| \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right| \int_0^x \bar{F}_2(y) dy \\
&< \frac{\epsilon_1 x}{\mu_1} + \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right| \mu_2 \\
&< \frac{x}{\mu_1} \epsilon_1 + \frac{1}{\mu_1} \epsilon_2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ahora, sea $\epsilon = u\epsilon_1/\mu_1 + \epsilon_2/\mu_1$ por (3.12) se cumple que $\sup_{0 \leq x \leq u} |F_{1e}(x) - F_{2e}(x)| < \epsilon$, y por (3.6), el segundo sumando de (3.10) puede ser acotado

como sigue:

$$\begin{aligned}
 p_2 \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \left| \bar{F}_{1e}^{*k}(u) - \bar{F}_{2e}^{*k}(u) \right| &\leq \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} k p_2 q_2^k \\
 &= \frac{q_2}{p_2} \epsilon \\
 &= \frac{\lambda \mu_2}{1 - \lambda \mu_2} \epsilon. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.11) y (3.13) en (3.10):

$$\begin{aligned}
 |\psi_1(u) - \psi_2(u)| &< \frac{\lambda(1 + \lambda \mu_2)}{1 - \lambda \mu_2} \epsilon_2 + \frac{\lambda \mu_2}{1 - \lambda \mu_2} \epsilon \\
 &= \frac{\lambda(1 + \lambda \mu_2)}{1 - \lambda \mu_2} \epsilon_2 + \frac{\lambda \mu_2}{1 - \lambda \mu_2} \left(\frac{u}{\mu_1} \epsilon_1 + \frac{1}{\mu_1} \epsilon_2 \right) \\
 &= \left[\frac{\lambda \mu_2}{\mu_1(1 - \lambda \mu_2)} \right] u \epsilon_1 + \left[\frac{\lambda \mu_1(1 + \lambda \mu_2) + \lambda \mu_2}{\mu_1(1 - \lambda \mu_2)} \right] \epsilon_2 \\
 &= \xi_1 u \epsilon_1 + \xi_2 \epsilon_2.
 \end{aligned}$$

b) Si $u \leq b$, entonces, por (3.12):

$$|F_{1e}(u) - F_{2e}(u)| < b \epsilon_1 / \mu_1 + \epsilon_2 / \mu_1.$$

Si $u > b$:

$$\begin{aligned}
 |F_{1e}(u) - F_{2e}(u)| &= 1 - F_{2e}(u) \\
 &\leq 1 - F_{2e}(b) \\
 &< b \epsilon_1 / \mu_1 + \epsilon_2 / \mu_1.
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sup_{u \geq 0} |F_{1e}(u) - F_{2e}(u)| < \frac{b \epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_1}. \tag{3.14}$$

Por lo tanto, por la proposición 3.2.1 y (3.14), para cualquier $u \geq 0$:

$$|F_{1e}^{*k}(u) - F_{2e}^{*k}(u)| \leq k \left(\frac{b \epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_1} \right).$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} p_2 \sum_{k=1}^{\infty} q_2^k \left| \overline{F}_{1e}^{*k}(u) - \overline{F}_{2e}^{*k}(u) \right| &\leq \left(\frac{b\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_1} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k p_2 q_2^k \\ &= \frac{\lambda\mu_2}{1 - \lambda\mu_2} \left(\frac{b\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_1} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

y sustituyendo (3.11) y (3.15) en (3.10):

$$\begin{aligned} |\psi_1(u) - \psi_2(u)| &< \frac{\lambda(1 + \lambda\mu_2)}{1 - \lambda\mu_2} \epsilon_2 + \frac{\lambda\mu_2}{1 - \lambda\mu_2} \left(\frac{b\epsilon_1}{\mu_1} + \frac{\epsilon_2}{\mu_1} \right) \\ &= \left[\frac{\lambda\mu_2}{\mu_1(1 - \lambda\mu_2)} \right] b\epsilon_1 + \left[\frac{\lambda\mu_1(1 + \lambda\mu_2) + \lambda\mu_2}{\mu_1(1 - \lambda\mu_2)} \right] \epsilon_2 \\ &= \xi_1 b\epsilon_1 + \xi_2 \epsilon_2. \end{aligned}$$

□

Los resultados presentados en este capítulo aportan una idea de cómo se puede medir el error en una aproximación a la probabilidad de ruina $\psi(u)$, cuando el monto de las reclamaciones tiene función de distribución F . Si dicha aproximación está dada por la probabilidad de ruina $\psi_n(u)$ asociada a montos de reclamación que tienen como función de distribución a F_n (por ejemplo, la definida en (2.19)), función aproximante a F cuando n crece, la proposición 3.2.2 establece que es necesario conocer la máxima distancia entre las funciones de distribución aproximantes y la función de distribución aproximada y la diferencia entre las medias respectivas para poder acotar la diferencia absoluta entre ψ y ψ_n . En el siguiente capítulo se da una propuesta de aproximación ψ_n , sin embargo, el problema de acotar el error entre ψ_n y ψ quedó abierto para una investigación futura.

Para este capítulo, se usaron como referencias de apoyo los libros de Lukacs (1975) [56] y de Asmussen y Albrecher (2010) [3], así como el artículo de Vatamidou et al. (2014) [86].

Capítulo 4

Aproximaciones vía mezclas de Erlangs

En este capítulo se establece que cuando el monto de las reclamaciones es modelado con una distribución continua arbitraria, la probabilidad de ruina puede ser aproximada con las probabilidades de ruina de una sucesión de modelos de Cramér-Lundberg, cuyos montos de reclamación siguen ciertas distribuciones MIE aproximantes a la distribución original. En este resultado se basan dos nuevos métodos de aproximación propuestos en este trabajo. Además, se desarrolla un método que puede ser usado cuando se conozca una muestra suficientemente grande de montos de reclamación, a pesar de que se desconozca su distribución. La idea es poder evitar métodos estadísticos previos de bondad de ajuste sobre los datos conocidos y aún así poder aproximar la probabilidad de ruina. Este tercer método usa como herramienta principal la función de distribución empírica continua, de la que se habló en la sección 3.1. Estas aproximaciones, son establecidas formalmente en los corolarios 4.1.2, 4.1.4 y 4.1.6. En la sección 4.2 se muestran varios ejemplos usando distintas distribuciones para modelar el monto de las reclamaciones, distribuciones tanto de cola ligera, como de cola pesada. Finalmente, en la sección 4.3 se comenta cómo se implementaron los métodos de aproximación y se menciona cómo se pueden aplicar en el caso de que el monto de las reclamaciones se modelen con distribuciones distintas a las usadas en los ejemplos de este trabajo.

4.1. Aproximaciones a la probabilidad de ruina

Como ya se mostró en la tabla 1.1 de la sección 1.2.2, varios de los métodos de aproximación que aparecen en la literatura tienen como hipótesis que la distribución del monto de los reclamos cumpla con propiedades que no tienen todas las distribuciones. Por ejemplo, en algunos métodos es necesaria la existencia del coeficiente de ajuste y/o que algunos de sus primeros momentos sean finitos. En esta investigación se desarrollaron métodos de aproximación que requieren que la función de distribución del monto de las reclamaciones sea fácil² de evaluar y que su primer momento sea finito; por lo cual, no es necesario que exista el coeficiente de ajuste ni momentos adicionales a la media. Para los fines anteriores, se aprovecha que la probabilidad de ruina es conocida cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución MIE. El procedimiento para aproximar la probabilidad de ruina es el siguiente:

- Suponer que se tiene una función de distribución continua $F(x)$, con soporte contenido en $[0, \infty)$; y sea $\{F_n(x)\}$ una sucesión de funciones de distribución definidas como en (2.19), es decir, funciones de distribución mezcla de Erlangs aproximantes a $F(x)$.
- Si n es lo suficientemente grande, $F_n(x)$ estará cerca de $F(x)$, y como se muestra más adelante, también $\psi_n(u)$ estará cerca de $\psi(u)$, donde $\psi_n(u)$ representa la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene función de distribución $F_n(x)$, y $\psi(u)$ es la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene función de distribución $F(x)$. Así, el valor de $\psi_n(u)$, podrá ser usado como una aproximación a $\psi(u)$.

Este procedimiento queda formalizado en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1 *Si en un modelo de Cramér-Lundberg el monto de las reclamaciones tiene función de distribución F continua y con media finita, entonces:*

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u),$$

²Considérese que una función es fácil de evaluar, si sus valores pueden calcularse en un instante con ayuda de una computadora.

para valores de $u > 0$ y donde:

$$\psi_n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{k,n} P(Z = k) = E(\bar{C}_{Z,n}), \quad (4.1)$$

para valores de $n = 1, 2, \dots$ y donde Z representa una variable aleatoria Poisson(un) y la sucesión $\{\bar{C}_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$ está dada por:

$$\bar{C}_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{1+\theta}, & \text{si } k = 0. \\ \frac{1}{1+\theta} \left[\sum_{i=1}^k f_{Ne}(i) \bar{C}_{k-i,n} + \bar{F}_{Ne}(k) \right], & \text{si } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.2)$$

$$f_{Ne}(i) = \frac{1 - F((i-1)/n)}{\sum_{j=1}^{\infty} [1 - F((j-1)/n)]}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Además, si la función F tiene soporte acotado, entonces la probabilidad ψ_n converge uniformemente sobre $[0, \infty)$ a la probabilidad ψ .

Demostración:

Sea $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de distribución que aproximan a $F(x)$, definidas como en (2.19), y sea μ_n la media de cada F_n . Por el lema 2.1.11 b), para cualquier $\epsilon_2 > 0$ existe N_0 , tal que para toda $n > N_0$ se cumple lo siguiente:

$$|\mu_n - \mu| < \epsilon_2. \quad (4.4)$$

Debido a que la función F es continua en el conjunto compacto $[0, u]$, entonces en este intervalo hay convergencia uniforme de F_n a F , lo cual implica que para $\epsilon_1 > 0$ existe N_1 , tal que para toda $n > N_1$ se cumple lo siguiente:

$$\sup_{t \leq u} |F_n(t) - F(t)| < \epsilon_1. \quad (4.5)$$

Ahora, dada $\epsilon > 0$, se define $\epsilon_1 = \epsilon/(2\xi_1 u)$ y $\epsilon_2 = \epsilon/(2\xi_2)$, donde ξ_1 y ξ_2 están dados por (3.8). Si se define $N_{max} = \max\{N_0, N_1\}$, entonces por (4.4) y por (4.5), para $n > N_{max}$ se cumple lo siguiente:

$$\sup_{x \leq u} |F_n(x) - F(x)| < \frac{\epsilon}{2\xi_1 u} \quad \text{y} \quad |\mu_n - \mu| < \frac{\epsilon}{2\xi_2}, \quad (4.6)$$

y usando la desigualdad (3.7) de la proposición 3.2.2 y (4.6), se cumple la siguiente desigualdad:

$$|\psi_n(u) - \psi(u)| < \epsilon.$$

Por lo tanto, para $u \geq 0$, ψ_n converge puntualmente a ψ . Por último, usando el teorema 2.2.1 se calcula el valor de $\psi_n(u)$, donde los coeficientes están dados por:

$$f_{Ne}(i) = \bar{F}_N(i-1)/E(N),$$

donde el numerador está dado por:

$$\begin{aligned} \bar{F}_N(i-1) &= \sum_{j=i}^{\infty} b(j, n) \\ &= \sum_{j=i}^{\infty} [F(j/n) - F((j-1)/n)] \\ &= 1 - F((i-1)/n), \end{aligned}$$

y el denominador es el siguiente valor esperado:

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{F}_N(i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{F}((i-1)/n). \end{aligned}$$

La última suma siempre es finita, porque $F(x)$ tiene media finita, véase la prueba del lema 2.1.11 a). Finalmente, cuando F tiene soporte acotado, se sabe por la proposición 2.1.7 que $F_n \rightarrow F$ uniformemente. Entonces por (4.6), para toda x se cumple la desigualdad,

$$|F_n(x) - F(x)| < \frac{\epsilon}{2\xi_1 b},$$

por lo cual, el valor de N_{max} es independiente del valor de u . Por lo tanto, se obtiene la convergencia uniforme. \square

4.1.1. Primera aproximación

A continuación se presenta como corolario la primera aproximación que se propone en este trabajo.

Corolario 4.1.2 *Suponer que en un modelo de Cramér-Lundberg, el monto de las reclamaciones tiene una función de distribución continua F . Si n es un número suficientemente grande, entonces:*

$$\psi(u) \approx e^{-un} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{k,n} \frac{(un)^k}{k!}, \quad (4.7)$$

donde los valores de $\{\bar{C}_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$ están dados por (4.2) y (4.3).

La aproximación anterior, puede ser calculada cuando el monto de las reclamaciones se modela con cualquier función de distribución continua, cuya media sea finita. Como una ventaja adicional, para cada valor de n grande, los sumandos en (4.7) convergen a cero con rapidez exponencial y por tanto la suma infinita puede ser truncada en algún sumando a partir del cual, los términos siguientes resulten ser poco representativos numéricamente, véase la sección 4.3 para más detalles.

Ejemplo 4.1.3 Usando la ecuación (4.7), se calcula una aproximación a la probabilidad de ruina en el caso de que el monto de las reclamaciones tenga distribución $Exp(\beta)$ y se comprueba que converge a la solución conocida cuando $n \rightarrow \infty$.

Primero, se calcula de manera sencilla lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_{Ne}(i) &= e^{-i\beta/n}(e^{\beta/n} - 1), \\ \bar{F}_{Ne}(k) &= e^{-\beta k/n}. \end{aligned}$$

Después de algunos cálculos, se llega a:

$$\bar{C}_{k,n} = \frac{1}{1+\theta} \left[\left(\frac{1}{1+\theta} \right) (1 - e^{-\beta/n}) + e^{-\beta/n} \right]^k. \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.8) en (4.7) y simplificando, se obtiene la siguiente expresión para la probabilidad de ruina:

$$\psi_n(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp \left\{ -\frac{\theta}{1+\theta} n (1 - e^{-\beta/n}) u \right\}. \quad (4.9)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, se puede comprobar que $n(1 - e^{-\beta/n}) \rightarrow \beta$, por lo cual, se llega a la conocida probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones se distribuye de manera exponencial.

Más adelante se considerarán otros ejemplos de aplicación de este método para aproximar probabilidades de ruina.

4.1.2. Segunda aproximación

La segunda aproximación, que se enuncia en el siguiente corolario, se basa en el valor esperado que aparece en la igualdad (4.1), aplicando la ley

de los grandes números (LGN), véase por ejemplo el libro de Feller (1968) [35, pág. 260].

Corolario 4.1.4 *Suponer que en un modelo de Cramér-Lundberg, el monto de las reclamaciones tiene una función de distribución continua F . Sea z_1, \dots, z_m una muestra aleatoria de una distribución Poisson(un). Si n y m son números suficientemente grandes, entonces:*

$$\psi(u) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{C}_{z_i, n}, \quad (4.10)$$

donde los valores de $\{\bar{C}_{k, n}\}_{k=0}^{\infty}$ están dados por (4.2) y (4.3).

Ejemplo 4.1.5 *En el caso donde el monto de las reclamaciones tiene distribución $\text{Exp}(\beta)$, la aproximación (4.10) converge a $E(\bar{C}_{Z, n})$, conforme m tiende a infinito. Es decir, usando (4.8):*

$$E(\bar{C}_{Z, n}) = \frac{1}{1 + \theta} E \left(\left[\frac{1}{1 + \theta} (1 - e^{-\beta/n}) + e^{-\beta/n} \right]^Z \right).$$

La última esperanza, es la función generadora de probabilidad de la distribución Poisson(un). Por lo cual:

$$E(\bar{C}_{Z, n}) = \frac{1}{1 + \theta} \exp \left[un \left(\frac{1}{1 + \theta} (1 - e^{-\beta/n}) + e^{-\beta/n} - 1 \right) \right].$$

Con algunos cálculos adicionales, puede mostrarse que esta expresión se reduce a (4.9), y la solución exacta (1.34) es obtenida conforme $n \rightarrow \infty$.

Otros ejemplos serán mostrados más adelante.

4.1.3. Tercera aproximación

Cuando se conoce una muestra aleatoria representativa del monto de las reclamaciones, es posible construir una función de distribución empírica continua como se expuso en el capítulo 3 y así se puede obtener una aproximación a la probabilidad de ruina, usando el teorema 4.1.1. El siguiente corolario establece esta tercera aproximación propuesta.

Corolario 4.1.6 *Suponer un modelo de Cramér-Lundberg, donde se desconoce la distribución para el monto de las reclamaciones. Si x_1, \dots, x_m*

es una muestra aleatoria de los montos de reclamación, entonces para un número natural n suficientemente grande, se cumple la siguiente aproximación:

$$\psi(u) \approx e^{-un} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{k,n} \frac{(un)^k}{k!}, \quad (4.11)$$

donde los valores de $\{\bar{C}_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$ están dados por (4.2) y

$$f_{N_e}(i) = \frac{1 - \widehat{F}_c((i-1)/n)}{\sum_{j=1}^{\infty} [1 - \widehat{F}_c((j-1)/n)]}, \quad (4.12)$$

para valores de $i \geq 1$, y donde \widehat{F}_c es la FDEC de la muestra, definida por (3.3).

Este método de aproximación puede ser el más importante en las aplicaciones, ya que brinda la posibilidad de encontrar una probabilidad de ruina cuando se cuente con una muestra representativa del monto de las reclamaciones sin conocer la distribución de éstas. Se deja como un problema pendiente contrastar valores de la aproximación propuesta con una donde se use que el monto de las reclamaciones sigan una distribución ajustada a la muestra conocida. Además, se deben establecer pruebas de hipótesis para comprobar que los datos provienen de reclamaciones que llegan de acuerdo a un proceso de Poisson.

En las tres aproximaciones propuestas se puede estudiar el valor de n necesario para que la aproximación obtenida sea confiable, en el sentido de poder acotar la diferencia de aproximaciones con un valor mayor a n (criterio de Cauchy). Es decir, dada $\epsilon > 0$, encontrar un valor de n , tal que se cumpla lo siguiente:

$$|\psi_n(u) - \psi_m(u)| < \epsilon, \quad (4.13)$$

para valores de $m \geq n$. Si el valor exacto de $\psi(u)$ es conocido, entonces encontrar el valor de n tal que:

$$|\psi_n(u) - \psi(u)| < \epsilon. \quad (4.14)$$

4.2. Ejemplos numéricos

En esta sección se aplican los nuevos métodos de aproximación, propuestos en los corolarios 4.1.2, 4.1.4 y 4.1.6. Para modelar el monto de las

reclamaciones se usaron cuatro distribuciones de cola ligera y tres de cola pesada. La elección de las distribuciones, se hizo pensando en contrastar los resultados con ejemplos clásicos que se usan de manera recurrente en la literatura, o bien, para mostrar la factibilidad de los métodos con distribuciones no tradicionales. Los ejemplos clásicos que se usaron son las distribuciones gama, mezcla de exponenciales, Weibull, lognormal y Pareto. Los ejemplos no tradicionales son las distribuciones Pareto truncada y exponencial-uniforme, esta última definida en el ejemplo 4.2.3.

Se hicieron aproximaciones a la probabilidad de ruina para distintos valores de u y de θ . En algunos casos, cuando se conoce una fórmula, los resultados se compararon con los valores exactos de $\psi(u)$; en otros casos se usó el método de Panjer (1.39) para estimar el valor más parecido al valor exacto. Los resultados también fueron contrastados con el método de aproximación de Pollaczek-Khinchine (PKMC) (1.45). En el caso de las distribuciones Weibull, lognormal y Pareto, también se aplicaron los métodos subexponencial (S) (1.42) y de tráfico ligero (LT) (1.43). Se construyeron tablas y figuras con los resultados para poder analizar las aproximaciones, éstas se colocaron hasta el final del capítulo para poder compararlas de forma cómoda. La implementación de los métodos fue hecha usando el software R [71], y los códigos pueden consultarse en el apéndice B.

4.2.1. Distribución gama

En este ejemplo se considera que una variable aleatoria tiene distribución Gama(α, β), si su densidad es la siguiente:

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad (4.15)$$

suponiendo que $x > 0$ y los parámetros α y β son números positivos. Cuando el monto de los reclamos tiene distribución Gama(α, β), con $\alpha > 1$, en el artículo de Willmot (1988) [87, pág. 277] se obtiene la siguiente fórmula para la probabilidad de ruina:

$$\psi(u) = 1 - \frac{\theta}{1 + \theta} \left\{ e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cdot B_j + e^{-\beta u / [\alpha(1+\theta)]} \right\}, \quad (4.16)$$

donde:

- $A_j = \left[\frac{-(\beta u)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\theta)} \right]^j$,
- $B_j = \frac{M(j+1, j(\alpha+1)+1, \beta u [1 + \{\alpha(1+\theta)\}^{-1}])}{\Gamma(j(\alpha+1)+1)}$,
- $M(a, b, z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+j-1)z^j}{b(b+1)\cdots(b+j-1)j!}$.

En este ejemplo se supuso una distribución Gama(3.5, 3.5) para modelar el monto de las reclamaciones. En este caso $\mu = 1$ y se supuso $\lambda = 1$, por lo cual, la tasa de primas cumple la igualdad $c = (1 + \theta)$. Para aproximar la probabilidad de ruina se aplicaron los métodos propuestos y se compararon los resultados con el valor exacto de $\psi(u)$, calculado con la fórmula (4.16). En los tres nuevos métodos se usó un valor de $n = 200$. Para la aproximación (4.10) se hicieron 100 simulaciones. Para la aproximación (4.11) se generó una muestra aleatoria de 10,000 observaciones a partir de una distribución Gama(3.5, 3.5). Para contrastar se usó el método de simulación de PKMC, para el cual, se hicieron 50,000 simulaciones. Para generar las variables aleatorias necesarias, con función de densidad dada por:

$$f_e(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) = \gamma \int_x^{\infty} t^{2.5} e^{-3.5t} dt,$$

donde $\gamma = 3.5^{3.5}/\Gamma(3.5)$, se usó el método de aceptación y rechazo (véase, por ejemplo, el libro de Rizzo (2007) [74, pág. 55]), usando como densidad propuesta, una densidad

$$\text{MIE}(\boldsymbol{\pi}, 3.5), \quad \boldsymbol{\pi} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4),$$

y se estableció como constante de contraste $C = 1.152857$.

Dentro de la tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos al aplicar la fórmula exacta, los métodos de aproximación y el método de PKMC; se hicieron los cálculos para $u = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ y $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. Además, se muestra el respectivo error relativo dado por:

$$\frac{\hat{\psi}(u) - \psi(u)}{\psi(u)}, \tag{4.17}$$

donde $\hat{\psi}$ indica la probabilidad de ruina aproximada y ψ la probabilidad de ruina exacta. Los valores exactos de la probabilidad de ruina se pueden localizar en la fila con la nomenclatura E . Los valores obtenidos con

los métodos de aproximación establecidos por los corolarios 4.1.2, 4.1.4 y 4.1.6, se pueden observar en las filas denotadas por N_1 , N_2 y N_3 , respectivamente. Finalmente, los resultados del método de aproximación PKMC, se muestran en la fila denotada por PK. En las figuras 4.1 a 4.10 se pueden observar gráficos con el comportamiento de las mismas cantidades.

Tabla 4.1: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de los reclamos tiene distribución Gama(3.5, 3.5).

u	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$
1	0.1		0.25		0.5		0.75		1	
<i>E</i>	0.8017	0.0000	0.6048	0.0000	0.4155	0.0000	0.3090	0.0000	0.2425	0.0000
<i>N</i> ₁	0.8022	0.0007	0.6057	0.0015	0.4166	0.0026	0.3101	0.0035	0.2435	0.0042
<i>N</i> ₂	0.8019	0.0003	0.6052	0.0006	0.4159	0.0009	0.3094	0.0012	0.2428	0.0014
<i>N</i> ₃	0.8014	-0.0004	0.6043	-0.0008	0.4149	-0.0014	0.3084	-0.0019	0.2419	-0.0022
PK	0.8002	-0.0019	0.6068	0.0033	0.4175	0.0043	0.3122	0.0086	0.2451	0.0085
2										
<i>E</i>	0.6943	0.0000	0.4376	0.0000	0.2380	0.0000	0.1480	0.0000	0.1008	0.0000
<i>N</i> ₁	0.6953	0.0014	0.4390	0.0033	0.2394	0.0059	0.1492	0.0080	0.1018	0.0097
<i>N</i> ₂	0.6948	0.0007	0.4382	0.0014	0.2386	0.0024	0.1485	0.0031	0.1012	0.0036
<i>N</i> ₃	0.6940	-0.0004	0.4373	-0.0007	0.2378	-0.0008	0.1480	-0.0003	0.1008	0.0004
PK	0.6932	-0.0022	0.4424	0.0093	0.2413	0.0109	0.1504	0.0163	0.1023	0.0244
3										
<i>E</i>	0.6012	0.0000	0.3164	0.0000	0.1361	0.0000	0.0707	0.0000	0.0417	0.0000
<i>N</i> ₁	0.6026	0.0022	0.3180	0.0051	0.1373	0.0091	0.0716	0.0123	0.0423	0.0150
<i>N</i> ₂	0.6020	0.0013	0.3173	0.0028	0.1367	0.0047	0.0711	0.0061	0.0420	0.0073
<i>N</i> ₃	0.6011	-0.0003	0.3163	-0.0002	0.1362	0.0010	0.0709	0.0032	0.0419	0.0060
PK	0.6018	-0.0018	0.3218	0.0136	0.1386	0.0165	0.0719	0.0197	0.0420	0.0335
4										
<i>E</i>	0.5206	0.0000	0.2288	0.0000	0.0778	0.0000	0.0338	0.0000	0.0172	0.0000
<i>N</i> ₁	0.5222	0.0030	0.2304	0.0069	0.0788	0.0123	0.0343	0.0166	0.0176	0.0203
<i>N</i> ₂	0.5216	0.0018	0.2297	0.0040	0.0784	0.0067	0.0341	0.0087	0.0174	0.0104
<i>N</i> ₃	0.5205	-0.0002	0.2288	0.0001	0.0780	0.0021	0.0340	0.0052	0.0174	0.0087
PK	0.5206	-0.0028	0.2330	0.0186	0.0793	0.0269	0.0345	0.0350	0.0172	0.0149
5										
<i>E</i>	0.4508	0.0000	0.1654	0.0000	0.0445	0.0000	0.0161	0.0000	0.0071	0.0000
<i>N</i> ₁	0.4525	0.0038	0.1669	0.0087	0.0452	0.0155	0.0165	0.0210	0.0073	0.0257
<i>N</i> ₂	0.4519	0.0024	0.1663	0.0053	0.0449	0.0090	0.0163	0.0118	0.0072	0.0139
<i>N</i> ₃	0.4508	-0.0002	0.1655	0.0005	0.0447	0.0034	0.0163	0.0075	0.0072	0.0123
PK	0.4497	0.0003	0.1685	0.0172	0.0459	0.0282	0.0168	0.0239	0.0070	-0.0065
10										
<i>E</i>	0.2195	0.0000	0.0327	0.0000	0.0027	0.0000	0.0004	0.0000	8.63754E-05	0.0000
<i>N</i> ₁	0.2212	0.0076	0.0333	0.0177	0.0028	0.0316	0.0004	0.0431	9.09295E-05	0.0527
<i>N</i> ₂	0.2208	0.0056	0.0331	0.0125	0.0028	0.0214	0.0004	0.0282	8.92798E-05	0.0336
<i>N</i> ₃	0.2196	0.0001	0.0328	0.0023	0.0028	0.0095	0.0004	0.0191	8.89457E-05	0.0298
PK	0.2207	-0.0012	0.0330	0.0311	0.0027	0.0692	0.0004	-0.1476	1.14593E-04	0.0604

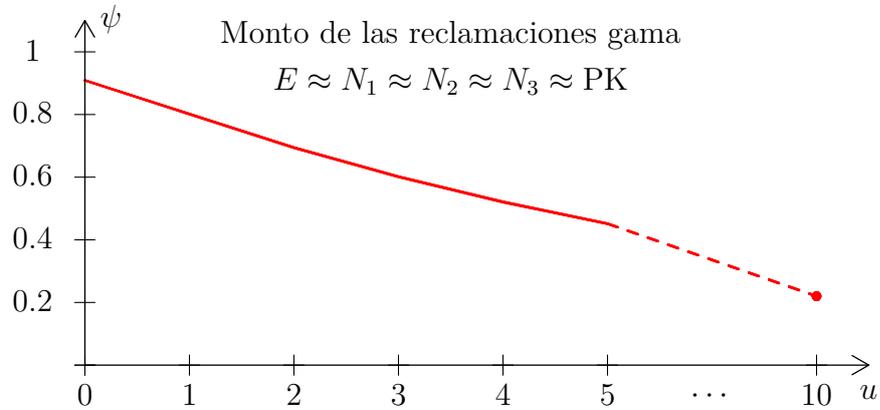


Figura 4.1: Probabilidad de ruina para reclamos gama y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

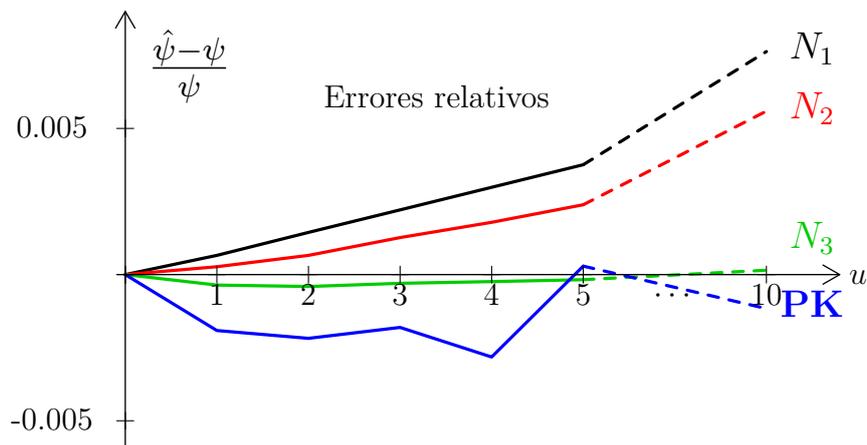


Figura 4.2: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución gama y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

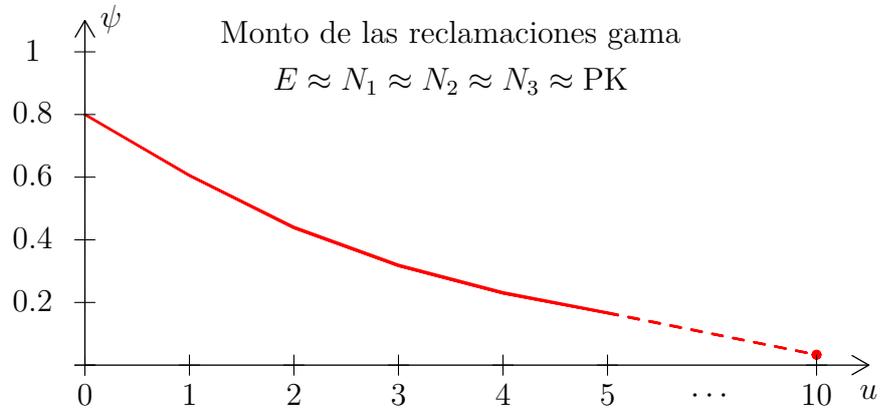


Figura 4.3: Probabilidad de ruina para reclamos gama y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

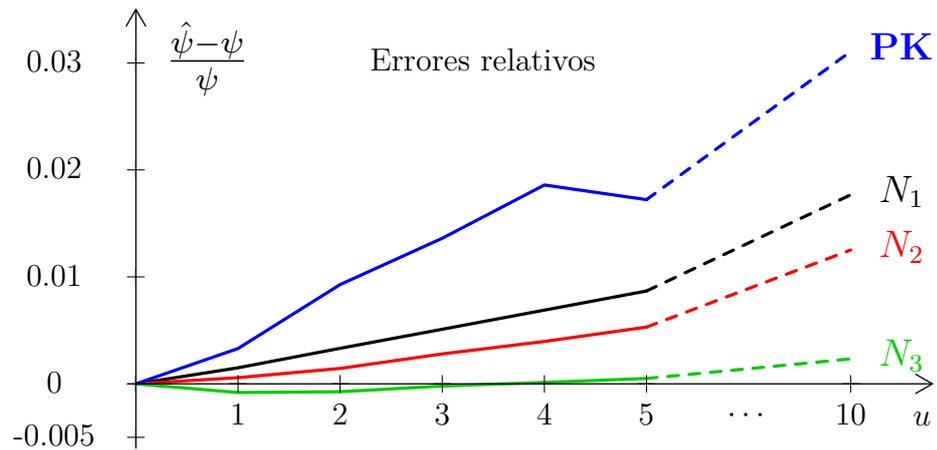


Figura 4.4: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución gama y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

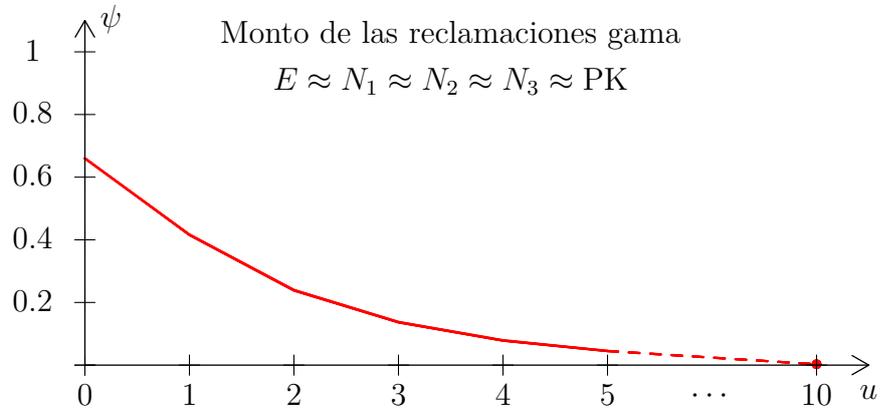


Figura 4.5: Probabilidad de ruina para reclamos gama y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

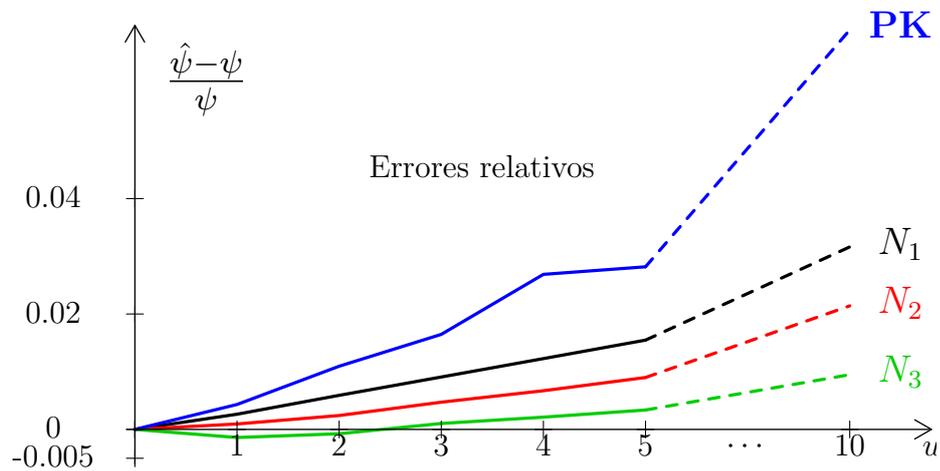


Figura 4.6: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución gama y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

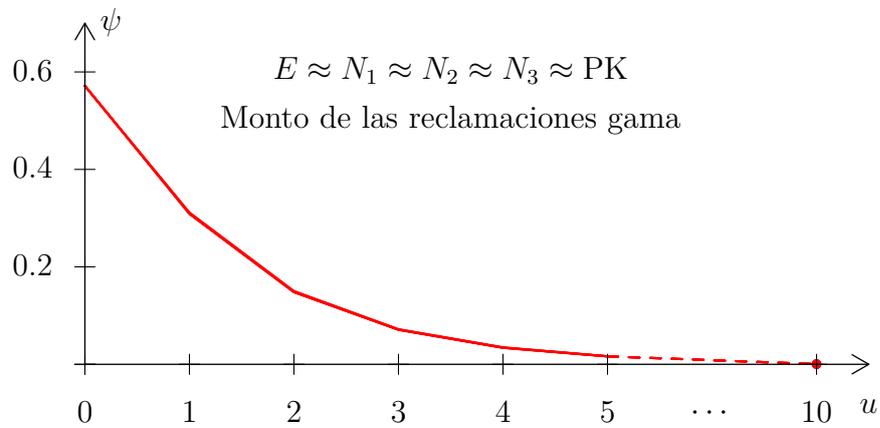


Figura 4.7: Probabilidad de ruina para reclamos gama y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

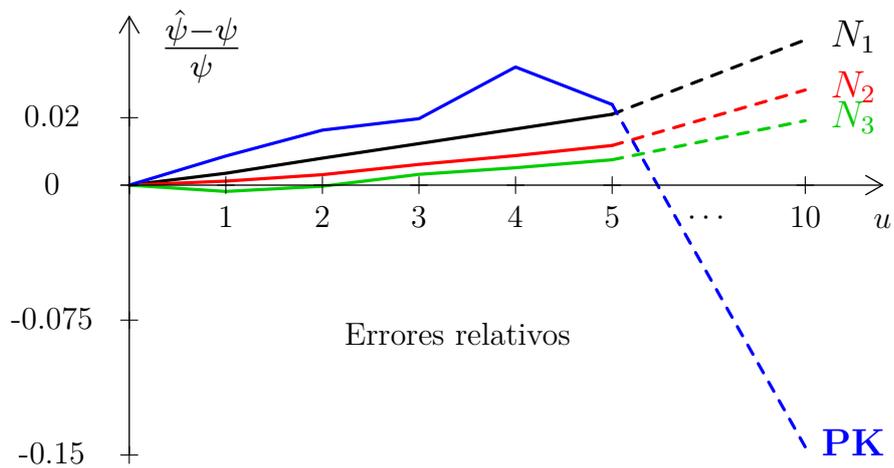


Figura 4.8: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución gama y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

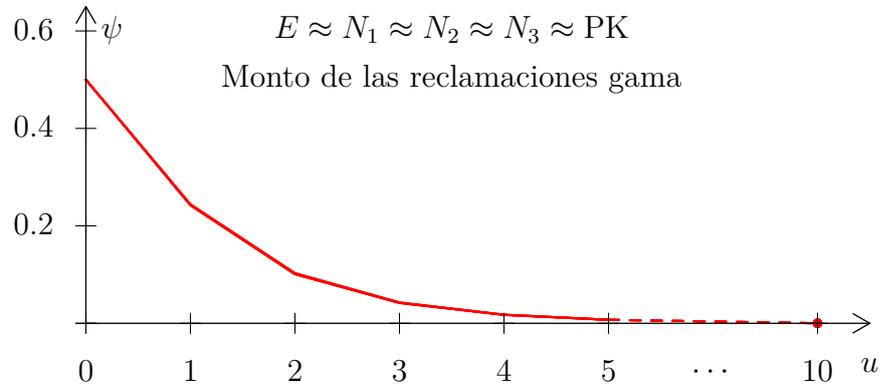


Figura 4.9: Probabilidad de ruina para reclamos gama y un factor de recargo de $\theta = 1$.

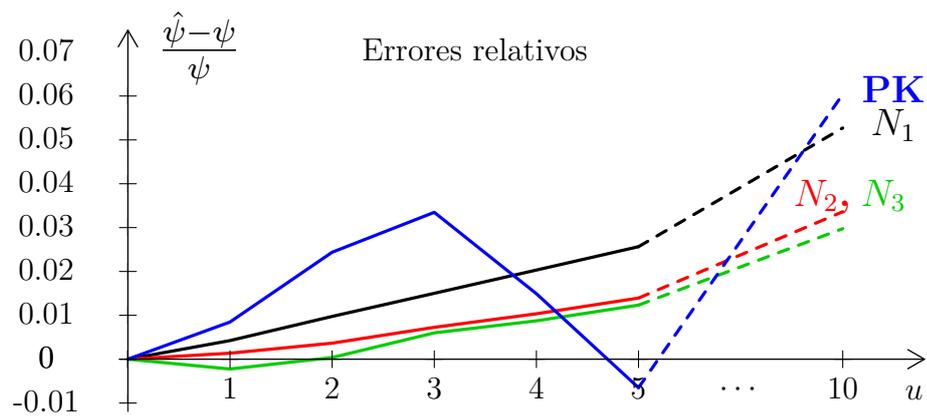


Figura 4.10: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución gama y un factor de recargo de $\theta = 1$.

En las figuras que representan las probabilidades de ruina, no se alcanza a ver diferencia representativa en los resultados, por lo cual, se hicieron los gráficos de los errores relativos. A partir de éstos, se observa que los métodos de aproximación comienzan a tener un error más grande conforme u comienza a crecer. Lo anterior, debe ser consecuencia de que al aumentar el valor de u , se debió de aumentar el valor de n , sin embargo, se estableció el mismo valor de n para todos los casos. Por ejemplo, para el caso particular de $u = 10$ y $\theta = 0.1$, si en vez de aplicar el método con $n = 200$ cuyo error relativo fue de 0.0076, se aplica con $n = 1000$, entonces se obtiene un error relativo de 0.0016. Para los otros casos pasa lo mismo. También se puede observar que para la mayoría de valores de u y θ , las aproximaciones propuestas son al menos tan precisas como el método de aproximación de PKMC.

4.2.2. Distribución mezcla de exponenciales

En este ejemplo se considera que una v.a. tiene distribución mezcla de exponenciales con parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ si su función de densidad es la siguiente:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0, \quad (4.18)$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\alpha_i, \beta_i > 0$ y $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$; en este caso se escribirá $X \sim \text{MExp}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Cuando el monto de las reclamaciones tiene esta distribución, se puede calcular la probabilidad de ruina exacta invirtiendo la transformada de Laplace de ψ , véase el artículo de Bohman (1971) [9], por ejemplo. Para el caso particular $\text{MExp}((1/2, 1/2), (3, 7))$ con $\theta = 2/5$, la probabilidad de ruina se calcula en el libro de Bowers et al. (1997) [10, pág. 421], llegando a la siguiente expresión:

$$\psi(u) = \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}. \quad (4.19)$$

De forma general, para $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, la probabilidad de ruina tiene la siguiente fórmula:

$$\psi(u) = \frac{P(r_2)}{Q'(r_2)} e^{ur_2} + \frac{P(r_3)}{Q'(r_3)} e^{ur_3}, \quad (4.20)$$

donde:

- $P(x) = A_1 x^2 + A_2 x + A_3,$
- $Q'(x) = 3 B_1 x^2 + 2 B_2 x + B_3$
- $r_2 = \left(-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4 B_1 B_3}\right) / (2 B_1),$
- $r_3 = \left(-B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4 B_1 B_3}\right) / (2 B_1),$
- $A_1 = \mu \theta$
- $A_2 = \mu \theta (\beta_1 + \beta_2)$
- $A_3 = \mu \theta \beta_1 \beta_2$
- $B_1 = \mu (1 + \theta),$
- $B_2 = \mu (1 + \theta) (\beta_1 + \beta_2) - 1,$
- $B_3 = \mu (1 + \theta) \beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1,$
- $\mu = \alpha_1 / \beta_1 + \alpha_2 / \beta_2.$

Los cálculos que se usaron para obtener la fórmula anterior se omiten por ser demasiado extensos.

En este ejemplo se tomó el caso particular de cuando el monto de las reclamaciones sigue una distribución MExp((1/2, 1/2), (3, 7)), y los resultados de aplicar los métodos propuestos para aproximar la probabilidad de ruina se comparan con el valor exacto calculado con la fórmula (4.20). En este caso $\mu = 5/21$ y se supuso $\lambda = 21/5$, por lo que $c = (1 + \theta)$. En los tres nuevos métodos se usó un valor de $n = 200$. Para la aproximación en (4.10) se hicieron 100 simulaciones. Para la aproximación (4.11), se generó una muestra aleatoria de 10,000 observaciones. Para contrastar, se usó el método de simulación de PKMC, para el cual se hicieron 50,000 simulaciones. Para generar las variables aleatorias, necesarias para este método, con función de densidad dada por:

$$f_e(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) = \frac{7}{10}(3e^{-3x}) + \frac{3}{10}(7e^{-7x}), \quad x > 0,$$

es decir, la densidad de una $MExp((7/10, 3/10), (3, 7))$, se simularon variables aleatorias $Exp(3)$ y $Exp(7)$ dependiendo de experimentos Bernoulli con probabilidad de éxito igual a 0.7. Igual que en el ejemplo anterior, dentro de la tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos al aplicar los métodos de aproximación y el respectivo error relativo dado por (4.17). Se muestran aproximaciones para valores de $u = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ y $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. La nomenclatura E se refiere a que en esa fila de la tabla aparecen los valores exactos de la probabilidad de ruina, N_1 , N_2 y N_3 se refieren a los métodos de aproximación establecidos por los corolarios 4.1.2, 4.1.4 y 4.1.6. Finalmente, PK indica el método de aproximación PKMC. En las figuras 4.11 a 4.20 se puede observar el comportamiento de las mismas cantidades.

Tabla 4.2: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de los reclamos tiene distribución MExp((0.5, 0.5), (3, 7)).

u	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$								
1	0.1		0.25		0.5		0.75		1	
<i>E</i>	0.6496	0.0000	0.3842	0.0000	0.1990	0.0000	0.1224	0.0000	0.0839	0.0000
<i>N</i> ₁	0.6512	0.0025	0.3863	0.0055	0.2007	0.0088	0.1237	0.0109	0.0850	0.0125
<i>N</i> ₂	0.6506	0.0016	0.3854	0.0031	0.1999	0.0044	0.1230	0.0049	0.0843	0.0051
<i>N</i> ₃	0.6507	0.0017	0.3853	0.0030	0.1997	0.0033	0.1227	0.0024	0.0840	0.0010
PK	0.6500	0.0006	0.3876	0.0090	0.2019	0.0146	0.1236	0.0097	0.0841	0.0025
2										
<i>E</i>	0.4688	0.0000	0.1892	0.0000	0.0624	0.0000	0.0282	0.0000	0.0154	0.0000
<i>N</i> ₁	0.4712	0.0050	0.1913	0.0107	0.0635	0.0172	0.0288	0.0216	0.0158	0.0246
<i>N</i> ₂	0.4703	0.0031	0.1904	0.0061	0.0630	0.0086	0.0285	0.0097	0.0156	0.0101
<i>N</i> ₃	0.4694	0.0012	0.1892	0.0000	0.0620	-0.0073	0.0277	-0.0179	0.0150	-0.0297
PK	0.4697	0.0018	0.1917	0.0130	0.0632	0.0127	0.0284	0.0073	0.0152	-0.0160
3										
<i>E</i>	0.3384	0.0000	0.0932	0.0000	0.0196	0.0000	0.0065	0.0000	0.0028	0.0000
<i>N</i> ₁	0.3409	0.0074	0.0947	0.0160	0.0201	0.0258	0.0067	0.0323	0.0030	0.0370
<i>N</i> ₂	0.3401	0.0051	0.0942	0.0101	0.0199	0.0146	0.0066	0.0167	0.0029	0.0178
<i>N</i> ₃	0.3386	0.0005	0.0928	-0.0043	0.0192	-0.0229	0.0062	-0.0494	0.0026	-0.0801
PK	0.3382	-0.0007	0.0942	0.0109	0.0199	0.0158	0.0065	0.0014	0.0029	0.0353
4										
<i>E</i>	0.2443	0.0000	0.0459	0.0000	0.0062	0.0000	0.0015	0.0000	0.0005	0.0000
<i>N</i> ₁	0.2467	0.0099	0.0469	0.0213	0.0064	0.0344	0.0016	0.0432	0.0006	0.0496
<i>N</i> ₂	0.2460	0.0070	0.0466	0.0138	0.0063	0.0199	0.0015	0.0230	0.0005	0.0246
<i>N</i> ₃	0.2442	-0.0002	0.0455	-0.0087	0.0059	-0.0382	0.0014	-0.0794	0.0005	-0.1263
PK	0.2450	0.0032	0.0467	0.0165	0.0061	-0.0129	0.0014	-0.0931	0.0006	0.1140
5										
<i>E</i>	0.1763	0.0000	0.0226	0.0000	0.0019	0.0000	3.45E-04	0.0000	9.67E-05	0.0000
<i>N</i> ₁	0.1785	0.0124	0.0232	0.0266	0.0020	0.0431	3.64E-04	0.0543	1.03E-04	0.0623
<i>N</i> ₂	0.1779	0.0090	0.0230	0.0178	0.0020	0.0259	3.55E-04	0.0300	9.98E-05	0.0322
<i>N</i> ₃	0.1761	-0.0010	0.0223	-0.0130	0.0018	-0.0534	3.08E-04	-0.1086	8.02E-05	-0.1704
PK	0.1772	0.0054	0.0232	0.0260	0.0016	-0.1602	2.51E-04	-0.2727	1.19E-04	0.2267
10										
<i>E</i>	0.0345	0.0000	6.56E-04	0.0000	5.89E-06	0.0000	2.24E-07	0.0000	2.06E-08	0.0000
<i>N</i> ₁	0.0354	0.0248	6.91E-04	0.0537	6.40E-06	0.0878	2.49E-07	0.1111	2.32E-08	0.1282
<i>N</i> ₂	0.0352	0.0196	6.82E-04	0.0396	6.23E-06	0.0588	2.40E-07	0.0693	2.21E-08	0.0756
<i>N</i> ₃	0.0344	-0.0046	6.34E-04	-0.0345	5.15E-06	-0.1255	1.70E-07	-0.2414	1.32E-08	-0.3601
PK	0.0344	-0.0048	6.45E-04	-0.0174	2.01E-05	2.4196	5.85E-10	-0.9974	3.33E-09	-0.8382

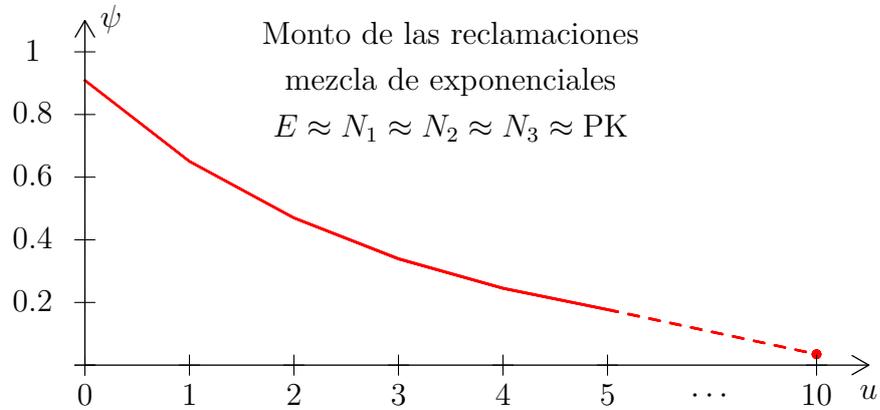


Figura 4.11: Probabilidad de ruina para reclamos mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

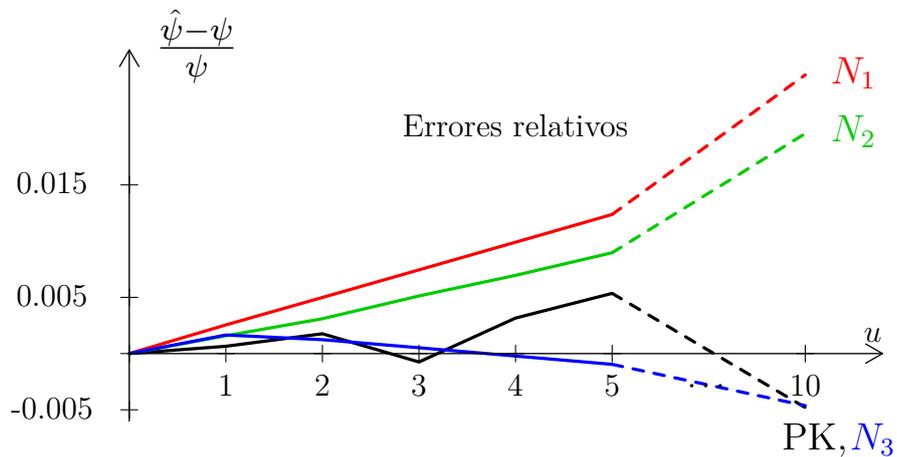


Figura 4.12: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

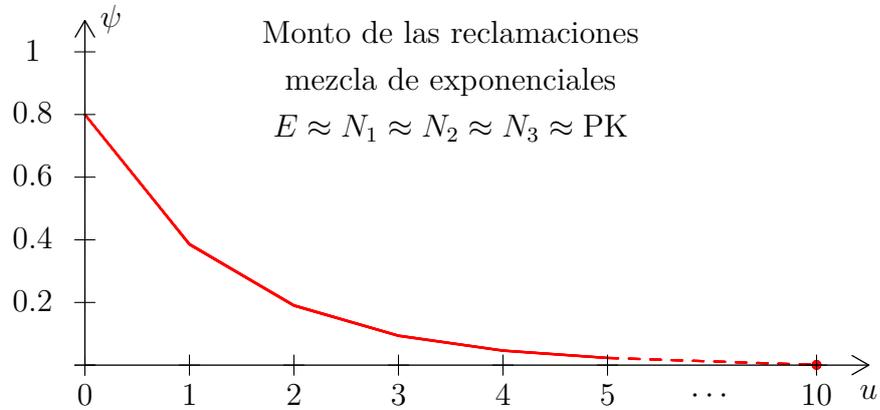


Figura 4.13: Probabilidad de ruina para reclamos mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

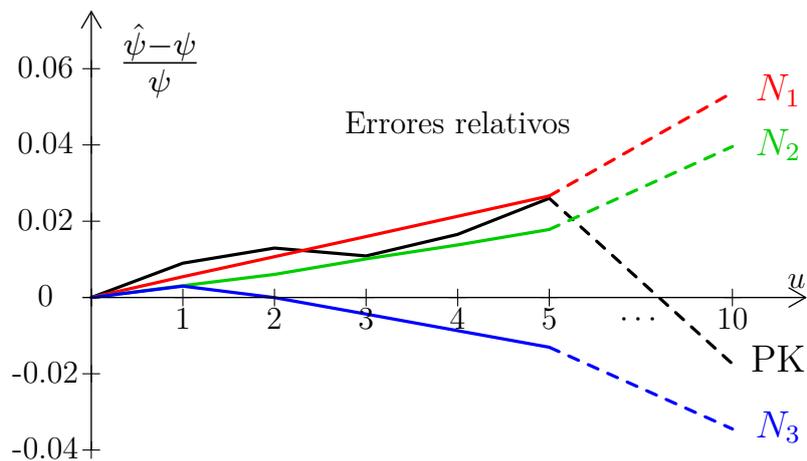


Figura 4.14: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

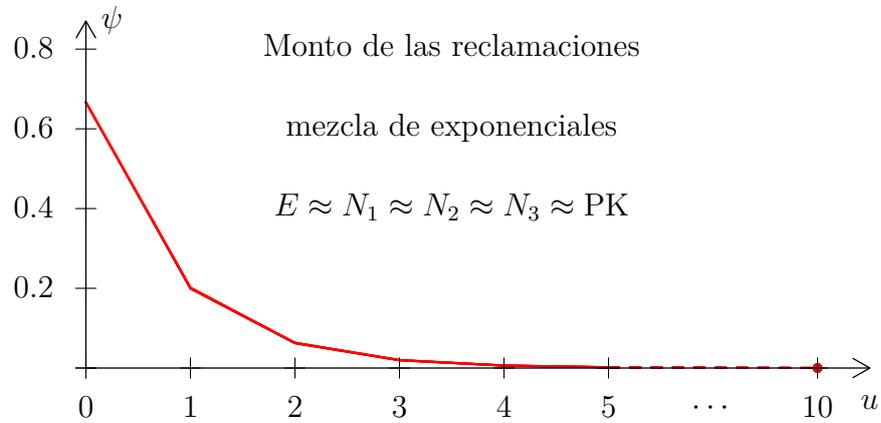


Figura 4.15: Probabilidad de ruina para reclamos mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

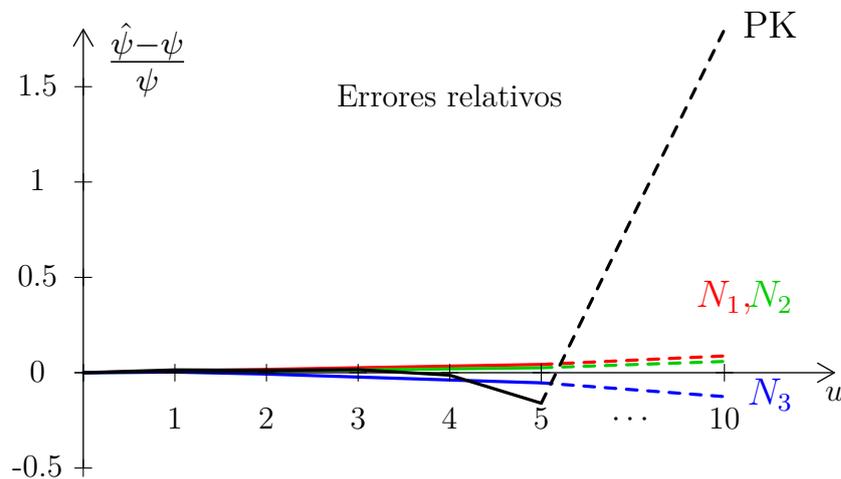


Figura 4.16: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

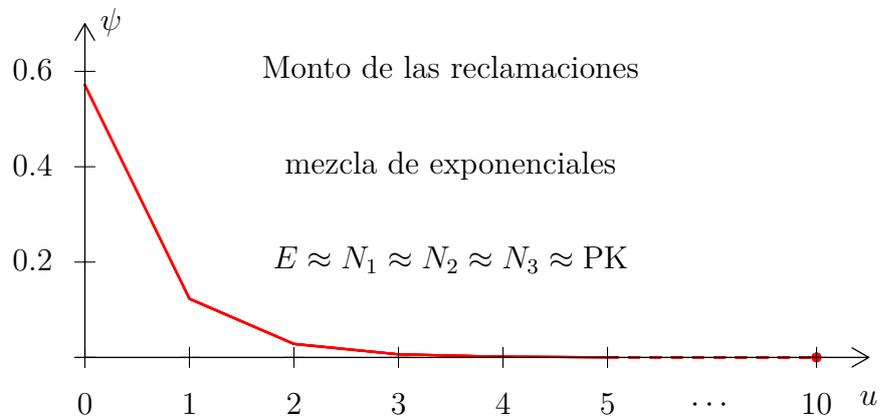


Figura 4.17: Probabilidad de ruina para reclamos mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

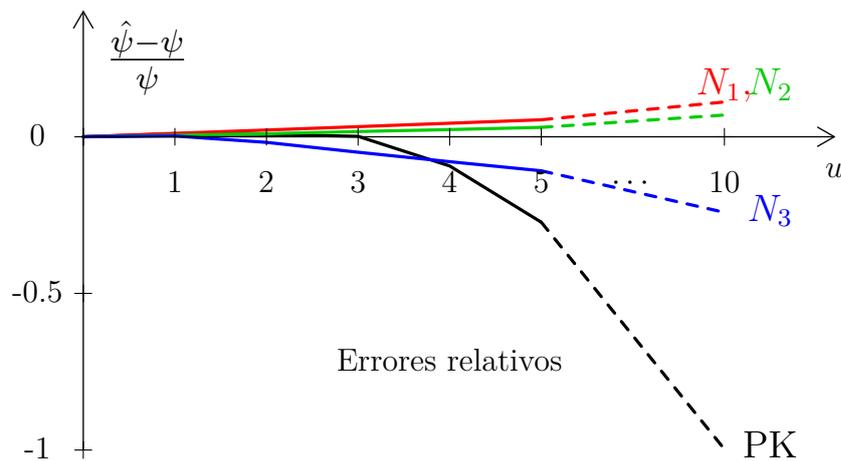


Figura 4.18: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

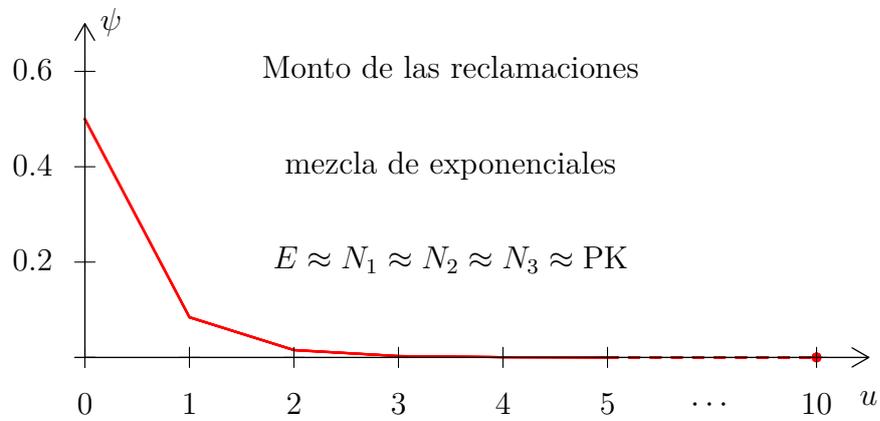


Figura 4.19: Probabilidad de ruina para reclamos mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 1$.

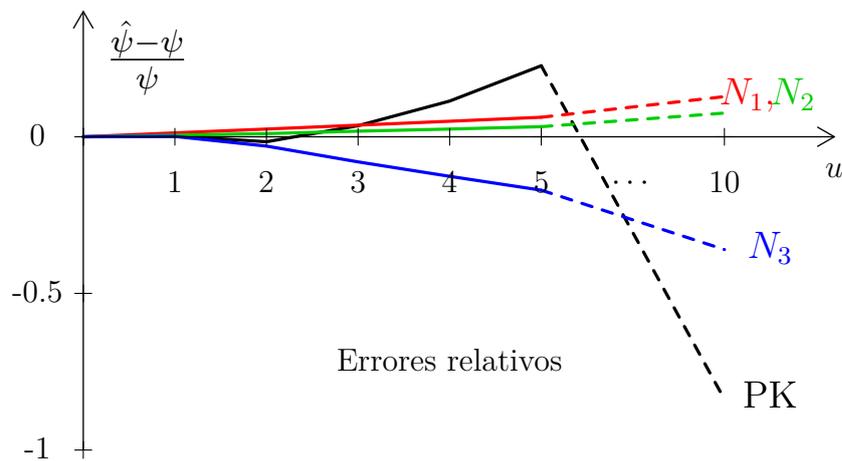


Figura 4.20: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución mezcla de exponenciales y un factor de recargo de $\theta = 1$.

En las figuras que representan las probabilidades de ruina, no se alcanza a ver diferencia representativa en los resultados, por lo cual, se hicieron los gráficos de los errores relativos. A partir de éstos, se observa que los métodos de aproximación comienzan a tener un error más grande conforme u comienza a crecer. Como ya se comentó en la sección anterior, el problema se resuelve tomando valores de n más grandes. También se puede observar que para la mayoría de valores de u y $\theta < 0.75$, el método de aproximación con menor error relativo es el N_3 , que es el método que supone conocer una muestra del monto de las reclamaciones. De nuevo, las aproximaciones propuestas son al menos tan precisas como el método de aproximación de PKMC.

4.2.3. Distribución exponencial-uniforme

En este ejemplo se supondrá que el monto de reclamaciones tiene función de densidad dada por:

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1_{(0,k)}(x) + \frac{e^{-\alpha k}}{1-k} 1_{[k,1]}(x), \quad (4.21)$$

donde $\alpha > 0$ y $0 < k < 1$ son sus dos parámetros. Esta es una densidad no tradicional que será llamada en este trabajo exponencial-uniforme. Se supondrá el caso particular de $\alpha = 4$ y $k = 0.75$. La función densidad de interés es entonces:

$$f(x) = 4e^{-4x} 1_{(0,0.75)}(x) + 4e^{-3} 1_{[0.75,1]}(x). \quad (4.22)$$

En la figura 4.21 se puede ver cómo es su gráfica. Su función de distribución es la siguiente:

$$F(x) = 1 - e^{-4x} 1_{(0,0.75)}(x) - 4e^{-3}(1-x) 1_{[0.75,1]}(x). \quad (4.23)$$

Su media es $\mu = 1/4 - (1/8)e^{-3}$ y su función de densidad de equilibrio es la siguiente:

$$f_e(x) = \frac{1}{1/4 - (1/8)e^{-3}} \left(e^{-4x} 1_{(0,0.75)}(x) + 4e^{-3}(1-x) 1_{[0.75,1]}(x) \right). \quad (4.24)$$

En este caso, se desconoce si existe una fórmula explícita para la probabilidad de ruina. Se usó la aproximación de Panjer [66] como el valor más

parecido, debido a que se puede controlar el error; se usó $\beta = 1,000$ como parámetro de discretización. Para contrastar los resultados se usó el método de PKMC, donde se generaron 50,000 simulaciones; las variables aleatorias con densidad de equilibrio $f_e(x) = (1 - F(x))/\mu$ fueron simuladas usando el método de aceptación y rechazo usando como densidad propuesta a $g(x) = f(x)$, es decir, la densidad exponencial-uniforme original y como constante de contraste a $C = 1.1$; para generar valores de la v.a. exponencial-uniforme se usó el método de la transformación inversa (véase por ejemplo el libro de Rizzo (2007) [74, pág. 49]). De nuevo, en los tres nuevos métodos se usó $n = 200$. Para la aproximación 4.10 se hicieron 100 simulaciones. Para la aproximación 4.11 se generó una muestra aleatoria de 10,000 observaciones.

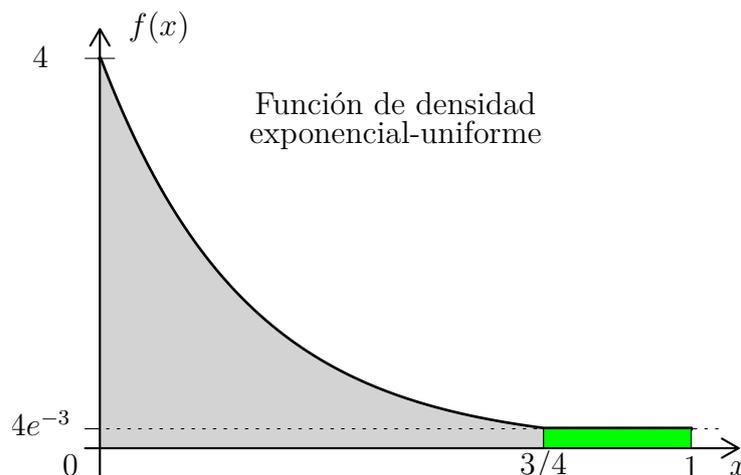


Figura 4.21: Función de densidad exponencial-uniforme con parámetros $\alpha = 4$ y $k = 3/4$.

Igual que en los ejemplos anteriores, dentro de la tabla 4.3 se muestran los resultados obtenidos al aplicar los métodos de aproximación y el respectivo error relativo dado por (4.17). Se muestran aproximaciones para $u = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ y $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. La nomenclatura E^* se refiere a que en esa fila aparecen los valores obtenidos usando la aproximación de Panjer, que como se ha dicho, serán usados como los valores exactos de

la probabilidad de ruina, N_1 , N_2 y N_3 se refieren a los métodos de aproximación establecidos por los corolarios 4.1.2, 4.1.4 y 4.1.6 y PK indica el método de aproximación PKMC. En las figuras 4.22 a 4.31 se puede observar el comportamiento de las mismas cantidades.

Tabla 4.3: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución exponencial uniforme con $\alpha = 4$ y $k = 0.75$.

u	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$								
1	0.1		0.25		0.5		0.75		1	
E^*	0.6128	0.0000	0.3332	0.0000	0.1514	0.0000	0.0826	0.0000	0.0508	0.0000
N_1	0.6158	0.0049	0.3370	0.0113	0.1545	0.0204	0.0850	0.0285	0.0526	0.0359
N_2	0.6150	0.0036	0.3358	0.0080	0.1535	0.0136	0.0841	0.0182	0.0519	0.0223
N_3	0.6119	-0.0015	0.3323	-0.0026	0.1510	-0.0024	0.0826	-0.0005	0.0509	0.0023
PK	0.6099	-0.0048	0.3379	0.0141	0.1530	0.0106	0.0845	0.0222	0.0518	0.0192
2										
E^*	0.4086	0.0000	0.1348	0.0000	0.0323	0.0000	0.0108	0.0000	0.0045	0.0000
N_1	0.4126	0.0097	0.1378	0.0223	0.0336	0.0401	0.0114	0.0550	0.0048	0.0680
N_2	0.4116	0.0072	0.1369	0.0160	0.0332	0.0272	0.0112	0.0358	0.0047	0.0430
N_3	0.4075	-0.0027	0.1341	-0.0047	0.0321	-0.0045	0.0108	-0.0019	0.0045	0.0021
PK	0.4070	-0.0041	0.1361	0.0100	0.0332	0.0269	0.0107	-0.0103	0.0049	0.0738
3										
E^*	0.2724	0.0000	0.0545	0.0000	0.0069	0.0000	0.0014	0.0000	0.0004	0.0000
N_1	0.2764	0.0146	0.0563	0.0338	0.0073	0.0612	0.0015	0.0845	0.0004	0.1050
N_2	0.2756	0.0116	0.0559	0.0257	0.0072	0.0440	0.0015	0.0584	0.0004	0.0704
N_3	0.2714	-0.0039	0.0541	-0.0065	0.0068	-0.0055	0.0014	-0.0008	0.0004	0.0058
PK	0.2713	-0.0041	0.0562	0.0317	0.0074	0.0790	0.0014	0.0170	0.0003	-0.1917
4										
E^*	0.1816	0.0000	0.0220	0.0000	0.0015	0.0000	0.0002	0.0000	3.55E-05	0.0000
N_1	0.1852	0.0195	0.0230	0.0455	0.0016	0.0827	0.0002	0.1147	4.06E-05	0.1432
N_2	0.1845	0.0157	0.0228	0.0350	0.0015	0.0601	0.0002	0.0801	3.89E-05	0.0969
N_3	0.1807	-0.0050	0.0218	-0.0082	0.0015	-0.0064	0.0002	0.0003	3.58E-05	0.0094
PK	0.1818	0.0011	0.0222	0.0104	0.0014	-0.0461	0.0002	-0.1628	2.00E-05	-0.4364
5										
E^*	0.1211	0.0000	0.0089	0.0000	0.0003	0.0000	2.42E-05	0.0000	3.14E-06	0.0000
N_1	0.1240	0.0245	0.0094	0.0572	0.0003	0.1046	2.77E-05	0.1458	3.71E-06	0.1826
N_2	0.1235	0.0201	0.0093	0.0448	0.0003	0.0774	2.67E-05	0.1034	3.53E-06	0.1253
N_3	0.1203	-0.0062	0.0088	-0.0100	0.0003	-0.0074	2.42E-05	0.0013	3.18E-06	0.0131
PK	0.1220	0.0073	0.0091	0.0233	0.0003	0.0001	2.51E-05	0.0375	0	-1.0000
10										
E^*	0.0159	0.0000	9.59E-05	0.0000	1.36E-07	0.0000	9.18E-10	0.0000	1.70E-11	0.0000
N_1	0.0167	0.0496	1.07E-04	0.1181	1.65E-07	0.2210	1.21E-09	0.3144	2.38E-11	0.4010
N_2	0.0166	0.0427	1.05E-04	0.0972	1.59E-07	0.1717	1.13E-09	0.2336	2.19E-11	0.2876
N_3	0.0158	-0.0118	9.41E-05	-0.0187	1.34E-07	-0.0123	9.24E-10	0.0063	1.75E-11	0.0312
PK	0.0154	-0.0349	2.16E-05	-0.7742	0	-1.0000	0	-1.0000	0	-1.0000

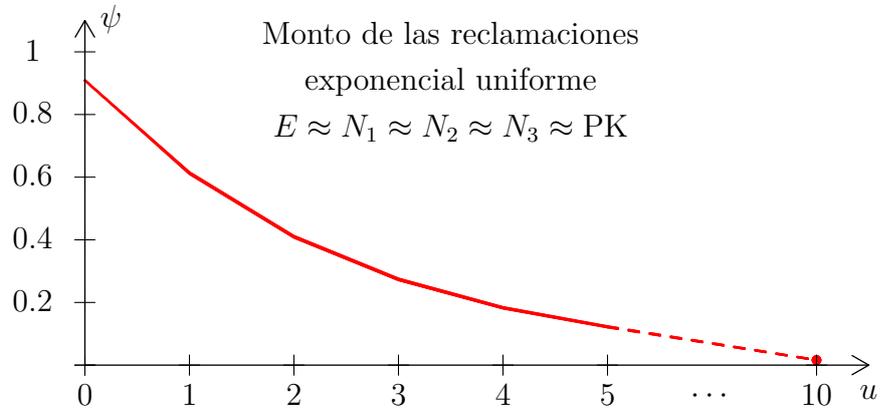


Figura 4.22: Probabilidad de ruina para reclamos exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

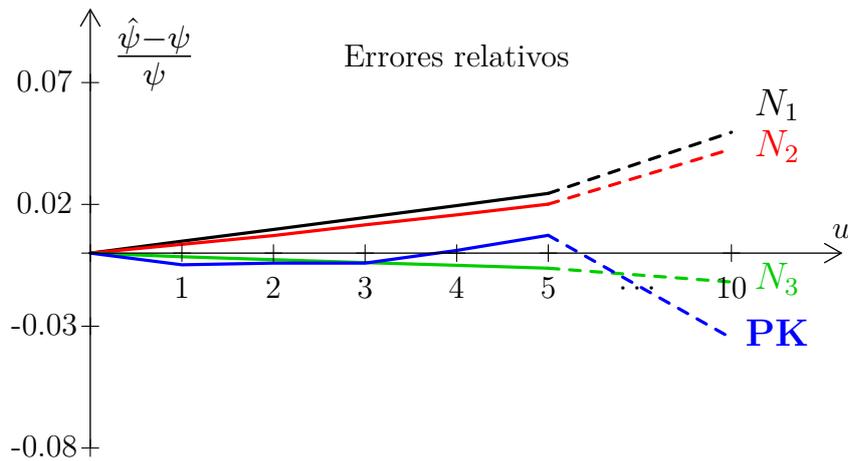


Figura 4.23: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

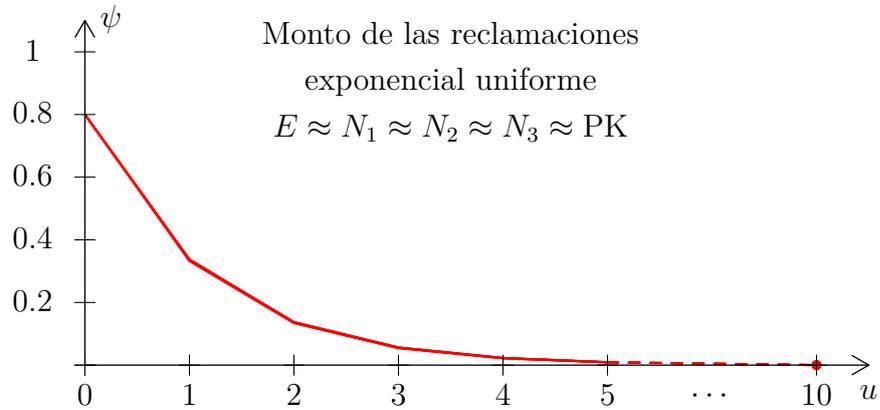


Figura 4.24: Probabilidad de ruina para reclamos exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

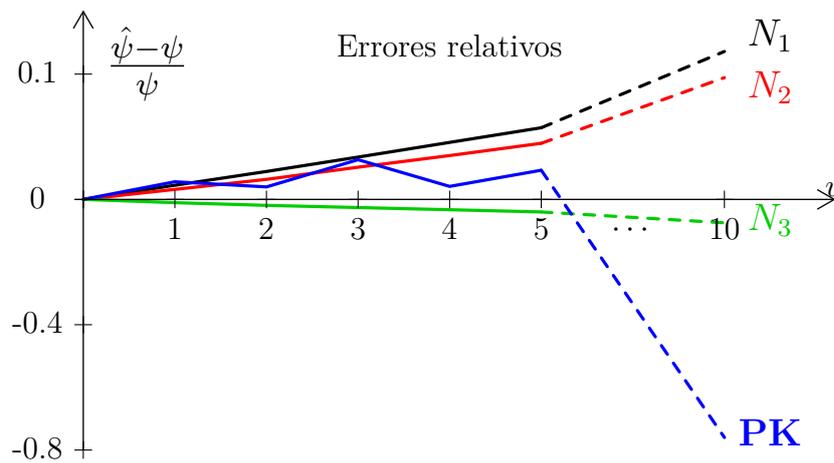


Figura 4.25: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

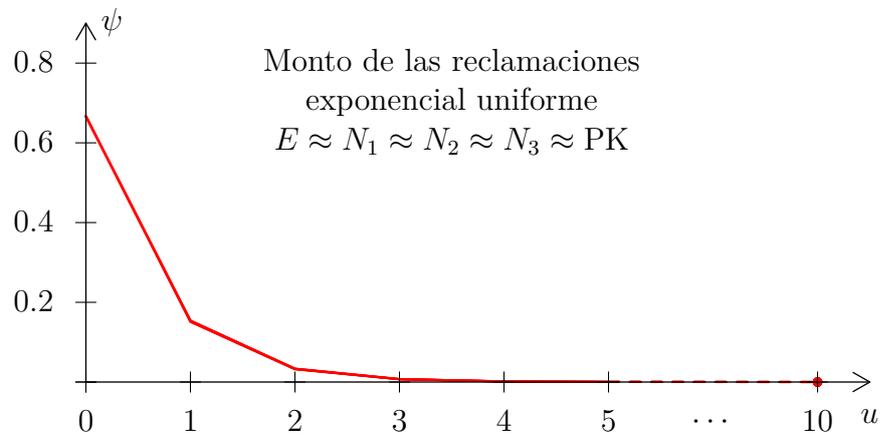


Figura 4.26: Probabilidad de ruina para reclamos exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

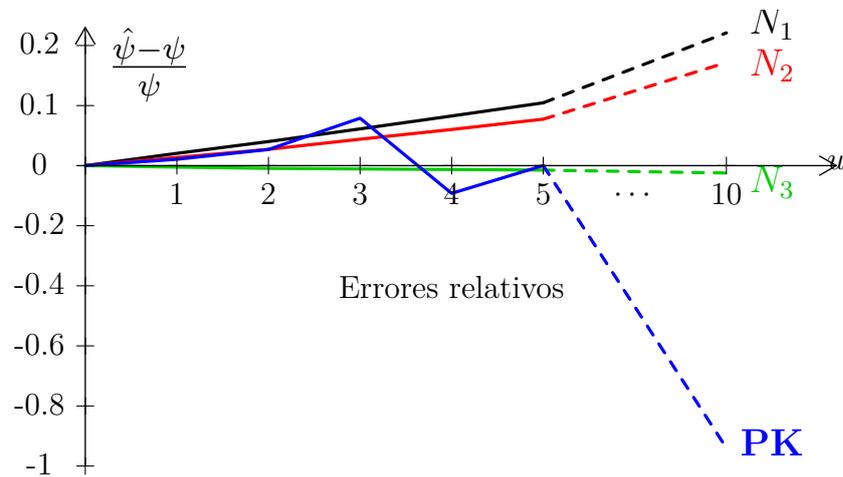


Figura 4.27: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

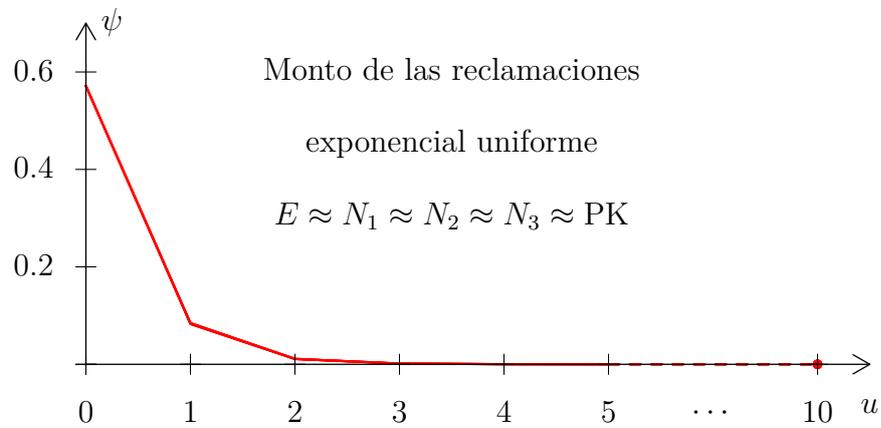


Figura 4.28: Probabilidad de ruina para reclamos exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

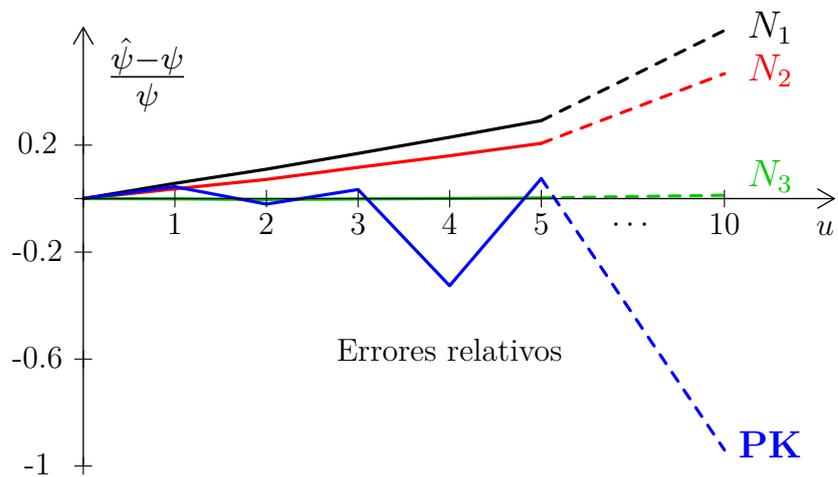


Figura 4.29: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

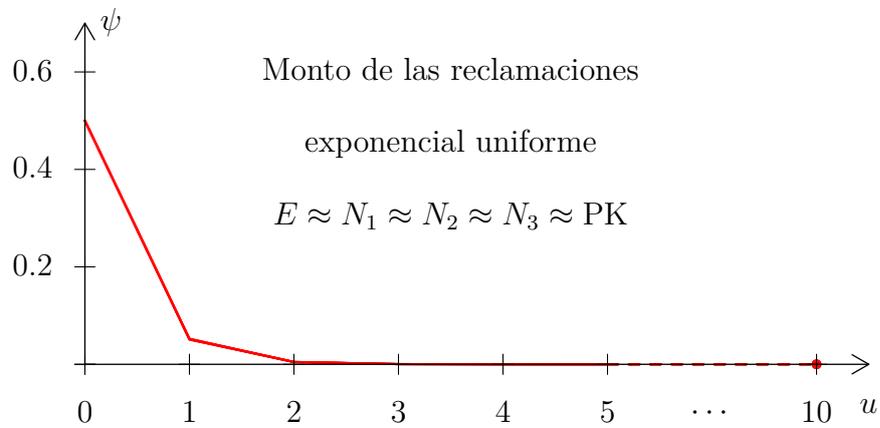


Figura 4.30: Probabilidad de ruina para reclamos exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 1$.

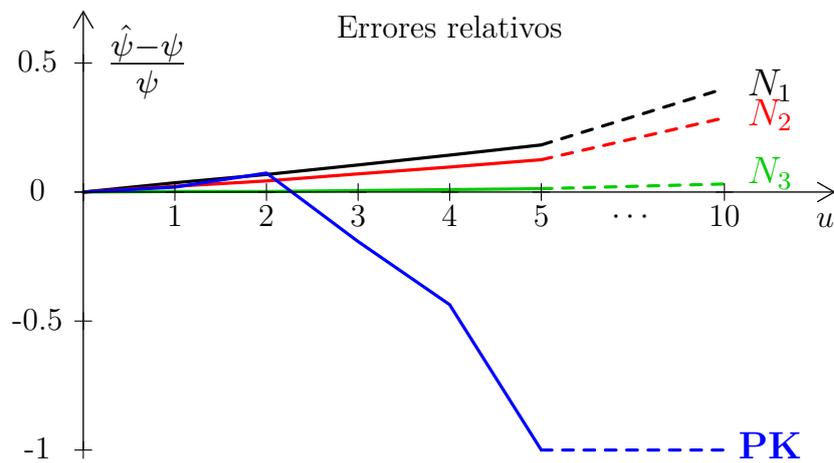


Figura 4.31: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución exponencial uniforme y un factor de recargo de $\theta = 1$.

En este ejemplo, las probabilidades de ruina fueron muy pequeñas para valores de $\theta > 0.5$ y $u > 2$. Esto ocasionó que el error relativo del método PKMC fuera muy grande en tales casos, sin embargo, los métodos de aproximación propuestos se mantuvieron estables, aunque creció rápidamente su error relativo conforme u crecía. De nuevo, esto se corrige al aumentar el número n . Por ejemplo, en el caso $\theta = 1$ y $u = 10$, el error relativo es de N_1 es de 0.4 cuando $n = 200$, pero se vuelve 0.07 cuando $n = 1000$.

4.2.4. Distribución Weibull

En este ejemplo se supondrá que el monto de las reclamaciones tiene función de distribución Weibull dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-(\alpha x)^r},$$

para valores de $x > 0$. En este caso, es común la notación Weibull(r, α) con parámetros $r, \alpha > 0$. Esta distribución es de cola pesada cuando $0 < r < 1$ y no hay una fórmula explícita para la probabilidad de ruina. Se analizó el caso particular Weibull(0.5, 1) y $\lambda = 0.5$, de esta manera se cumple la igualdad $c = (1 + \theta)$. Como no se puede calcular de manera exacta a $\psi(u)$, se usó la aproximación de Panjer [66] usando $\beta = 100$ como parámetro de discretización para obtener el valor que fue considerado como exacto. Para contrastar los resultados, además de los métodos subexponencial y de tráfico ligero, también se usó el método de PKMC, donde se generaron 50,000 simulaciones; las variables aleatorias con densidad de equilibrio $f_e(x) = 1 - F(x)$ que fueron necesarias, se generaron usando el método de la transformación inversa. De nuevo, en los tres nuevos métodos se usó $n = 200$. Para la aproximación 4.10 se hicieron 100 simulaciones. Para la aproximación 4.11 se generó una muestra aleatoria de 10,000 observaciones. La tabla 4.4 muestra los resultados para los valores $u = 10, 20, 30, 40, 50, 100$ y $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, la nomenclatura es como en los casos anteriores para E^* , N_1 , N_2 , N_3 y PK. Los resultados de aplicar el método subexponencial se presentan en la fila S y los del método de tráfico ligero en la fila LT. En las figuras 4.32 a 4.41 se ilustran los resultados de las aproximaciones y de los errores relativos de las aproximaciones.

Tabla 4.4: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución Weibull(0.5, 1).

u	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$								
10	0.1		0.25		0.5		0.75		1	
E^*	0.7507	0.0000	0.5296	0.0000	0.3413	0.0000	0.2457	0.0000	0.1895	0.0000
N_1	0.7506	-0.0001	0.5295	-0.0002	0.3412	-0.0003	0.2456	-0.0003	0.1894	-0.0003
N_2	0.7505	-0.0003	0.5293	-0.0006	0.3410	-0.0010	0.2454	-0.0012	0.1892	-0.0014
N_3	0.7509	0.0003	0.5299	0.0005	0.3415	0.0007	0.2458	0.0006	0.1896	0.0005
PK	0.7509	0.0003	0.5325	0.0055	0.3445	0.0095	0.2474	0.0070	0.1914	0.0101
S	1.7619	1.3470	0.7047	0.3307	0.3524	0.0324	0.2349	-0.0438	0.1762	-0.0703
LT	0.1602	-0.7866	0.1409	-0.7339	0.1175	-0.6559	0.1007	-0.5902	0.0881	-0.5351
20										
E^*	0.6433	0.0000	0.3833	0.0000	0.2059	0.0000	0.1324	0.0000	0.0947	0.0000
N_1	0.6432	-0.0002	0.3831	-0.0005	0.2058	-0.0008	0.1322	-0.0010	0.0946	-0.0011
N_2	0.6431	-0.0004	0.3830	-0.0009	0.2057	-0.0013	0.1322	-0.0017	0.0945	-0.0019
N_3	0.6418	-0.0023	0.3809	-0.0062	0.2033	-0.0128	0.1299	-0.0186	0.0924	-0.0235
PK	0.6437	0.0006	0.3864	0.0082	0.2087	0.0134	0.1341	0.0132	0.0964	0.0185
S	0.6251	-0.0284	0.2500	-0.3477	0.1250	-0.3930	0.0833	-0.3704	0.0625	-0.3397
LT	0.0568	-0.9117	0.0500	-0.8695	0.0417	-0.7977	0.0357	-0.7302	0.0313	-0.6698
30										
E^*	0.5548	0.0000	0.2823	0.0000	0.1291	0.0000	0.0755	0.0000	0.0508	0.0000
N_1	0.5545	-0.0004	0.2820	-0.0010	0.1289	-0.0016	0.0753	-0.0020	0.0507	-0.0024
N_2	0.5544	-0.0006	0.2819	-0.0014	0.1288	-0.0022	0.0753	-0.0028	0.0507	-0.0032
N_3	0.5516	-0.0058	0.2780	-0.0153	0.1251	-0.0307	0.0722	-0.0439	0.0481	-0.0546
PK	0.5546	-0.0004	0.2854	0.0110	0.1310	0.0152	0.0773	0.0240	0.0523	0.0284
S	0.2708	-0.5119	0.1083	-0.6163	0.0542	-0.5803	0.0361	-0.5217	0.0271	-0.4673
LT	0.0246	-0.9556	0.0217	-0.9233	0.0181	-0.8601	0.0155	-0.7950	0.0135	-0.7337
40										
E^*	0.4797	0.0000	0.2097	0.0000	0.0825	0.0000	0.0444	0.0000	0.0285	0.0000
N_1	0.4794	-0.0007	0.2094	-0.0015	0.0823	-0.0027	0.0443	-0.0036	0.0284	-0.0044
N_2	0.4793	-0.0009	0.2093	-0.0020	0.0822	-0.0035	0.0442	-0.0045	0.0283	-0.0053
N_3	0.4750	-0.0098	0.2042	-0.0260	0.0782	-0.0520	0.0412	-0.0736	0.0259	-0.0907
PK	0.4793	-0.0009	0.2124	0.0128	0.0839	0.0168	0.0459	0.0337	0.0294	0.0339
S	0.1312	-0.7264	0.0525	-0.7497	0.0262	-0.6820	0.0175	-0.6062	0.0131	-0.5391
LT	0.0119	-0.9751	0.0105	-0.9499	0.0087	-0.8940	0.0075	-0.8312	0.0066	-0.7696
50										
E^*	0.4153	0.0000	0.1566	0.0000	0.0535	0.0000	0.0267	0.0000	0.0164	0.0000
N_1	0.4149	-0.0010	0.1562	-0.0023	0.0533	-0.0044	0.0266	-0.0062	0.0163	-0.0076
N_2	0.4148	-0.0012	0.1561	-0.0029	0.0532	-0.0052	0.0266	-0.0071	0.0163	-0.0087
N_3	0.4092	-0.0147	0.1503	-0.0399	0.0491	-0.0816	0.0236	-0.1171	0.0140	-0.1455
PK	0.4151	-0.0006	0.1587	0.0138	0.0547	0.0224	0.0277	0.0369	0.0170	0.0333
S	0.0685	-0.8350	0.0274	-0.8249	0.0137	-0.7437	0.0091	-0.6582	0.0069	-0.5828
LT	0.0062	-0.9850	0.0055	-0.9650	0.0046	-0.9146	0.0039	-0.8535	0.0034	-0.7914
100										
E^*	0.2037	0.0000	0.0376	0.0000	0.0069	0.0000	0.0026	0.0000	0.0014	0.0000
N_1	0.2030	-0.0036	0.0372	-0.0123	0.0066	-0.0361	0.0024	-0.0641	0.0013	-0.0893
N_2	0.2029	-0.0039	0.0371	-0.0131	0.0066	-0.0373	0.0024	-0.0653	0.0013	-0.0906
N_3	0.1954	-0.0408	0.0332	-0.1167	0.0051	-0.2580	0.0016	-0.3875	0.0007	-0.4915
PK	0.2031	-0.0029	0.0385	0.0229	0.0071	0.0285	0.0028	0.0683	0.0015	0.1012
S	0.0050	-0.9755	0.0020	-0.9469	0.0010	-0.8550	0.0007	-0.7445	0.0005	-0.6439
LT	0.0005	-0.9978	0.0004	-0.9894	0.0003	-0.9517	0.0003	-0.8905	0.0002	-0.8220

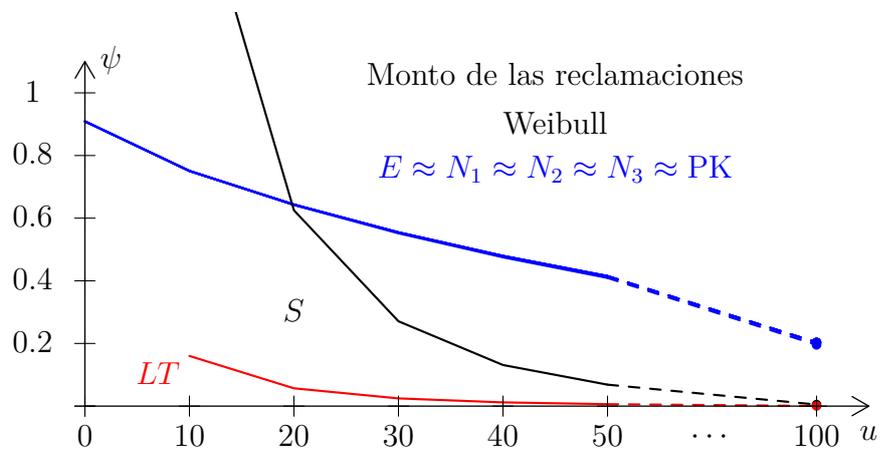


Figura 4.32: Probabilidad de ruina para reclamos Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

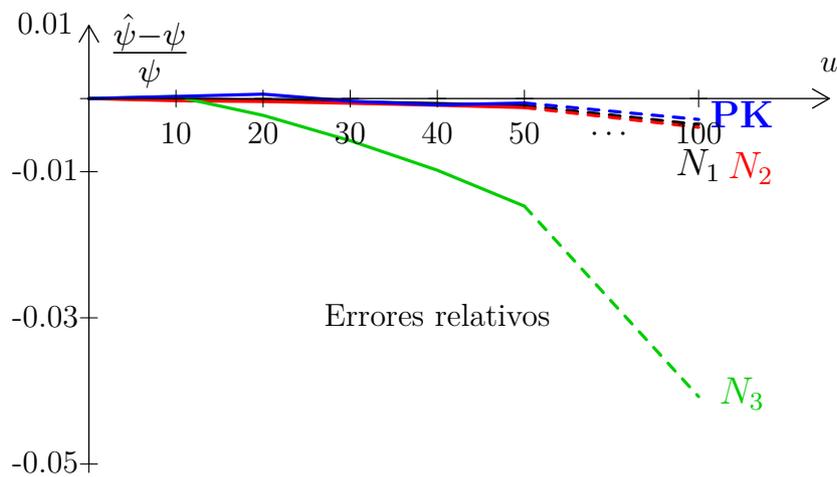


Figura 4.33: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

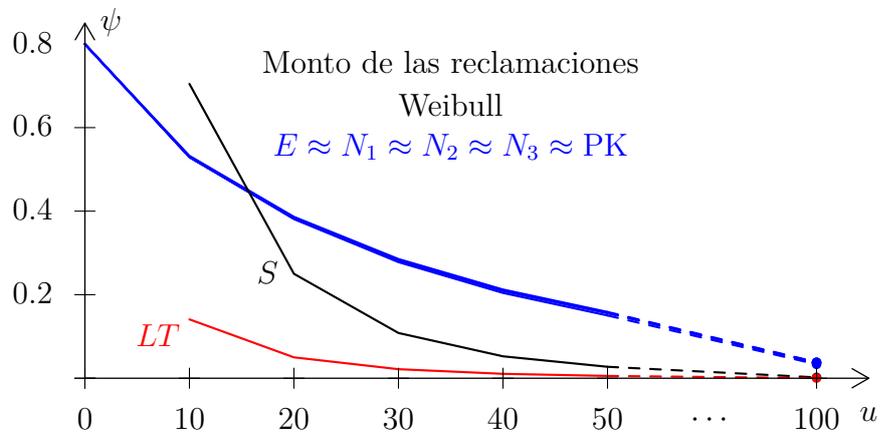


Figura 4.34: Probabilidad de ruina para reclamos Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

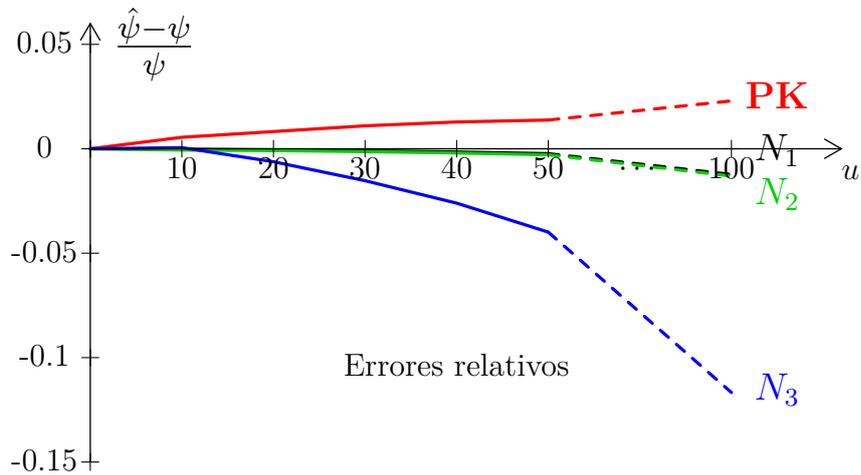


Figura 4.35: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

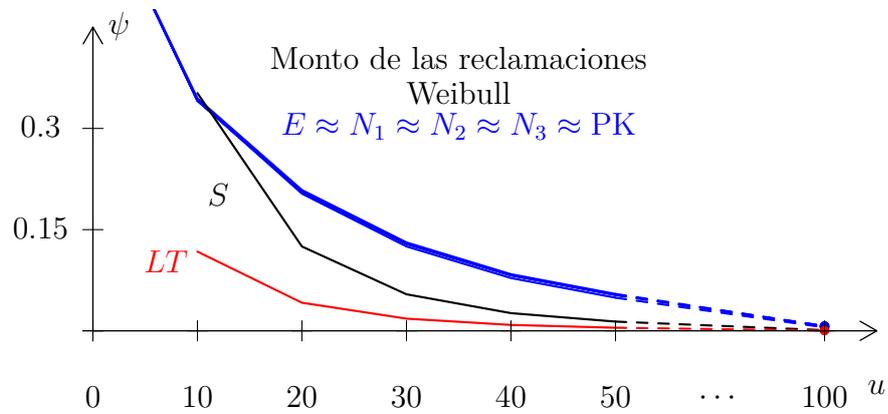


Figura 4.36: Probabilidad de ruina para reclamos Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

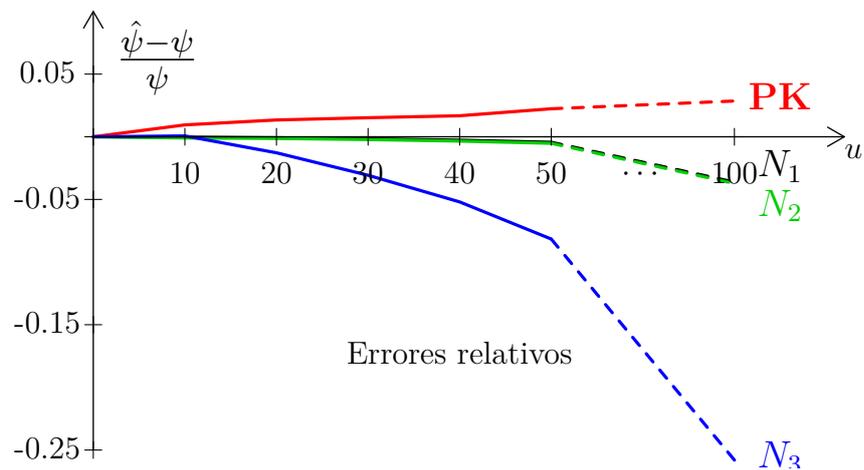


Figura 4.37: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

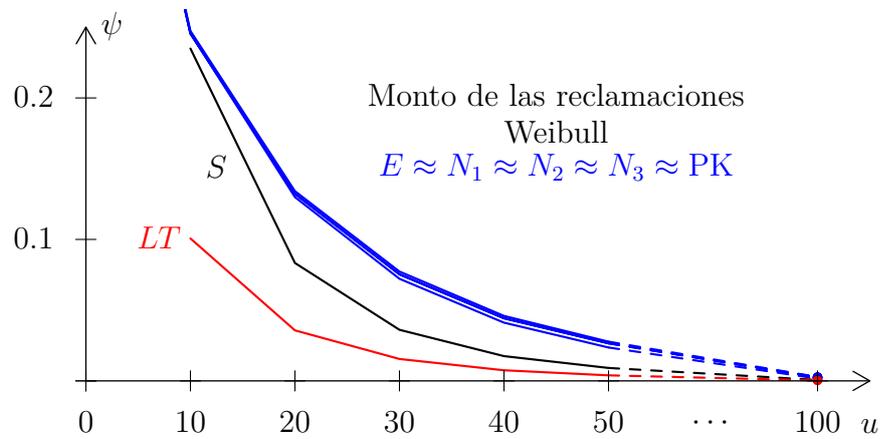


Figura 4.38: Probabilidad de ruina para reclamos Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

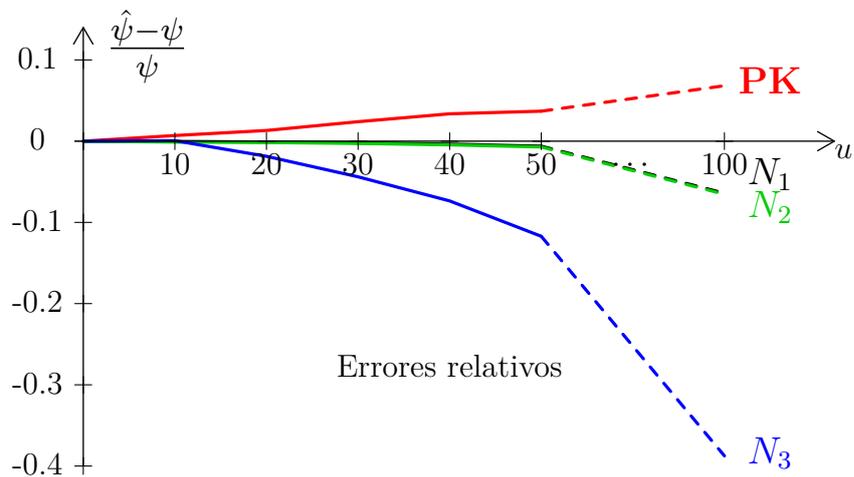


Figura 4.39: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Weibull y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

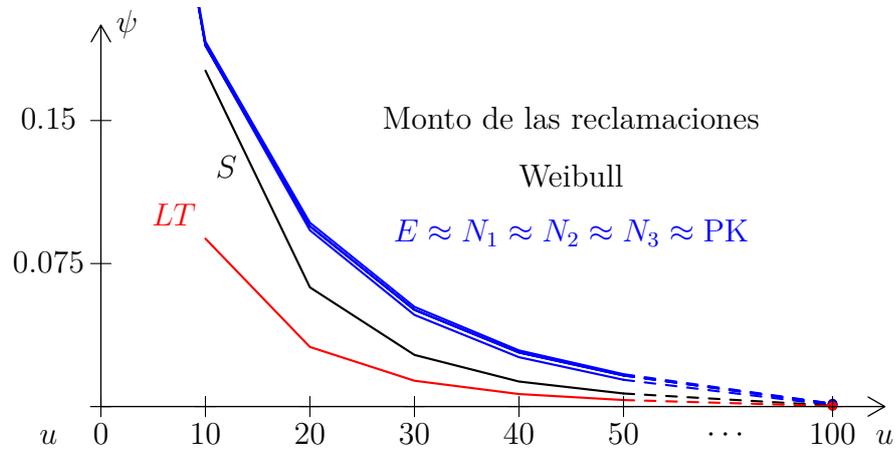


Figura 4.40: Probabilidad de ruina para reclamos Weibull y un factor de recargo de $\theta = 1$.

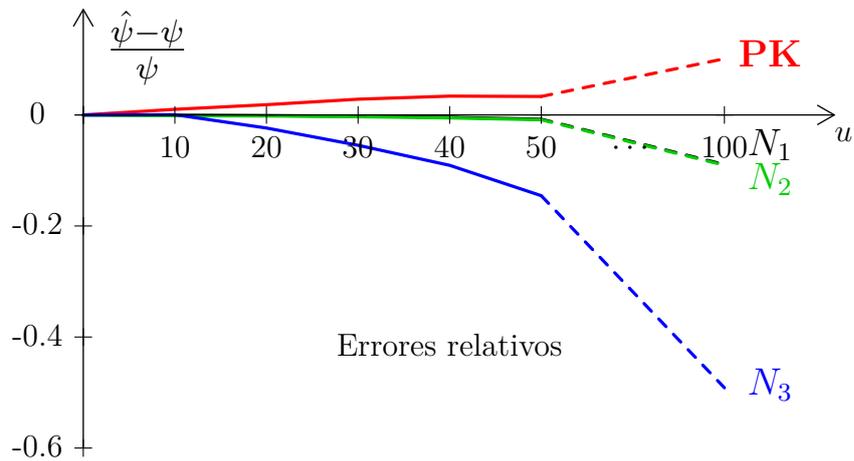


Figura 4.41: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Weibull y un factor de recargo de $\theta = 1$.

En este ejemplo se puede observar que el método de aproximación N_3 tiene el error relativo más grande, sin tomar en cuenta los métodos S y LT que tienen un error relativo enorme con respecto a los métodos N_1 , N_2 , N_3 y PKMC. También se observa que en la mayoría de los casos, los métodos de aproximación subexponencial y de tráfico ligero no son muy precisos, lo cual confirma que solo son útiles para casos de valores grandes de u y de θ .

4.2.5. Distribución lognormal

En este ejemplo se supondrá que el monto de las reclamaciones tiene función de distribución lognormal dada por:

$$F(x) = \Phi((\ln(x) - \mu)/\sigma), \quad x > 0,$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar. En este caso, se escribirá Lognormal(μ, σ^2) con $\sigma > 0$. La distribución lognormal es de cola pesada y en el artículo de Ramsey y Usábel (1997) [73] se calculó la probabilidad de ruina usando un método numérico llamado integración producto. Se usarán en este ejemplo los mismos parámetros que fueron usados en dicho trabajo, es decir, $\mu^* = -1.62$ y $\sigma^* = 1.8$. En este caso la media es $\mu = \exp(\mu^* + \sigma^{*2}/2) = \exp(-1.62 + (1.8)^2/2) = 1$, y se tomó $\lambda = 1$ para que se cumpla la igualdad $c = (1 + \theta)$. Se usaron los valores obtenidos en [73] como los valores exactos de la probabilidad de ruina. Para contrastar los resultados, además de los métodos LT y S, también se usa el método de PKMC donde se generaron 50,000 simulaciones; las variables aleatorias con densidad de equilibrio $f_e(x) = 1 - F(x)$ fueron simuladas usando el método de aceptación y rechazo, usando una densidad propuesta Pareto(1, 2). De nuevo, en los tres nuevos métodos se usó $n = 200$. Para la aproximación 4.10 se hicieron 100 simulaciones. Para la aproximación 4.11 se generó una muestra aleatoria de 50,000 observaciones. La tabla 4.5 muestra los resultados para los valores $u = 10, 20, 30, 40, 50, 100$ y $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, la nomenclatura es como en los casos anteriores para E^* , N_1 , N_2 , N_3 y PK. Los resultados de aplicar el método subexponencial se presentan en la fila S y los del método de tráfico ligero en la fila LT, como en el ejemplo Weibull. En las figuras 4.42 a 4.51 se ilustran los resultados de las aproximaciones y de los errores relativos de las aproximaciones.

Tabla 4.5: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución Lognormal($-1.62, (1.8)^2$).

u	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$								
10	0.1		0.25		0.5		0.75		1	
E^*	0.7398	0.0000	0.5188	0.0000	0.3369	0.0000	0.2457	0.0000	0.1922	0.0000
N_1	0.7392	-0.0007	0.5181	-0.0015	0.3361	-0.0022	0.2451	-0.0026	0.1916	-0.0029
N_2	0.7391	-0.0009	0.5179	-0.0018	0.3359	-0.0028	0.2449	-0.0033	0.1914	-0.0036
N_3	0.7390	-0.0011	0.5178	-0.0021	0.3359	-0.0028	0.2450	-0.0031	0.1915	-0.0032
PK	0.7396	-0.0002	0.5229	0.0078	0.3382	0.0040	0.2469	0.0046	0.1928	0.0032
S	2.0569	1.7804	0.8227	0.5858	0.4114	0.2212	0.2742	0.1160	0.2057	0.0704
LT	0.1870	-0.7472	0.1645	-0.6828	0.1371	-0.5929	0.1175	-0.5217	0.1028	-0.4648
20										
E^*	0.6567	0.0000	0.4108	0.0000	0.2402	0.0000	0.1657	0.0000	0.1252	0.0000
N_1	0.6558	-0.0013	0.4097	-0.0025	0.2393	-0.0037	0.1650	-0.0043	0.1246	-0.0046
N_2	0.6558	-0.0014	0.4096	-0.0028	0.2392	-0.0040	0.1649	-0.0046	0.1246	-0.0050
N_3	0.6556	-0.0016	0.4096	-0.0030	0.2392	-0.0040	0.1649	-0.0044	0.1246	-0.0046
PK	0.6571	0.0006	0.4143	0.0086	0.2420	0.0078	0.1665	0.0053	0.1255	0.0025
S	1.1896	0.8115	0.4758	0.1584	0.2379	-0.0094	0.1586	-0.0425	0.1190	-0.0500
LT	0.1081	-0.8353	0.0952	-0.7683	0.0793	-0.6698	0.0680	-0.5897	0.0595	-0.5250
30										
E^*	0.5936	0.0000	0.3395	0.0000	0.1845	0.0000	0.1229	0.0000	0.0912	0.0000
N_1	0.5924	-0.0019	0.3383	-0.0036	0.1836	-0.0051	0.1222	-0.0060	0.0906	-0.0064
N_2	0.5924	-0.0020	0.3382	-0.0038	0.1835	-0.0054	0.1222	-0.0063	0.0905	-0.0068
N_3	0.5928	-0.0012	0.3391	-0.0014	0.1845	-0.0003	0.1231	0.0009	0.0913	0.0021
PK	0.5944	0.0015	0.3426	0.0091	0.1867	0.0116	0.1235	0.0048	0.0914	0.0029
S	0.8203	0.3819	0.3281	-0.0337	0.1641	-0.1110	0.1094	-0.1104	0.0820	-0.1002
LT	0.0746	-0.8744	0.0656	-0.8067	0.0547	-0.7037	0.0469	-0.6187	0.0410	-0.5501
40										
E^*	0.5417	0.0000	0.2874	0.0000	0.1477	0.0000	0.0961	0.0000	0.0704	0.0000
N_1	0.5404	-0.0025	0.2860	-0.0047	0.1467	-0.0067	0.0953	-0.0076	0.0698	-0.0083
N_2	0.5403	-0.0026	0.2860	-0.0050	0.1467	-0.0070	0.0953	-0.0080	0.0698	-0.0087
N_3	0.5421	0.0007	0.2886	0.0041	0.1493	0.0104	0.0976	0.0157	0.0717	0.0195
PK	0.5429	0.0021	0.2900	0.0089	0.1499	0.0150	0.0965	0.0046	0.0705	0.0017
S	0.6151	0.1355	0.2461	-0.1438	0.1230	-0.1671	0.0820	-0.1463	0.0615	-0.1259
LT	0.0559	-0.8968	0.0492	-0.8288	0.0410	-0.7224	0.0352	-0.6341	0.0308	-0.5629
50										
E^*	0.4976	0.0000	0.2472	0.0000	0.1215	0.0000	0.0777	0.0000	0.0564	0.0000
N_1	0.4961	-0.0031	0.2457	-0.0059	0.1205	-0.0083	0.0769	-0.0095	0.0558	-0.0102
N_2	0.4960	-0.0033	0.2457	-0.0062	0.1205	-0.0087	0.0769	-0.0098	0.0558	-0.0106
N_3	0.4994	0.0036	0.2500	0.0115	0.1244	0.0235	0.0802	0.0321	0.0586	0.0380
PK	0.4987	0.0021	0.2491	0.0077	0.1237	0.0177	0.0780	0.0039	0.0564	0.0005
S	0.4853	-0.0248	0.1941	-0.2147	0.0971	-0.2012	0.0647	-0.1669	0.0485	-0.1399
LT	0.0441	-0.9113	0.0388	-0.8429	0.0324	-0.7337	0.0277	-0.6430	0.0243	-0.5699
100										
E^*	0.3439	0.0000	0.1338	0.0000	0.0577	0.0000	0.0354	0.0000	0.0253	0.0000
N_1	0.3415	-0.0070	0.1321	-0.0133	0.0566	-0.0184	0.0347	-0.0208	0.0248	-0.0222
N_2	0.3415	-0.0072	0.1320	-0.0136	0.0566	-0.0187	0.0347	-0.0211	0.0248	-0.0225
N_3	0.3500	0.0177	0.1390	0.0385	0.0608	0.0543	0.0376	0.0601	0.0269	0.0626
PK	0.3445	0.0017	0.1349	0.0079	0.0591	0.0236	0.0356	0.0048	0.0252	-0.0047
S	0.2145	-0.3764	0.0858	-0.3589	0.0429	-0.2566	0.0286	-0.1932	0.0214	-0.1537
LT	0.0195	-0.9433	0.0172	-0.8718	0.0143	-0.7522	0.0123	-0.6542	0.0107	-0.5768

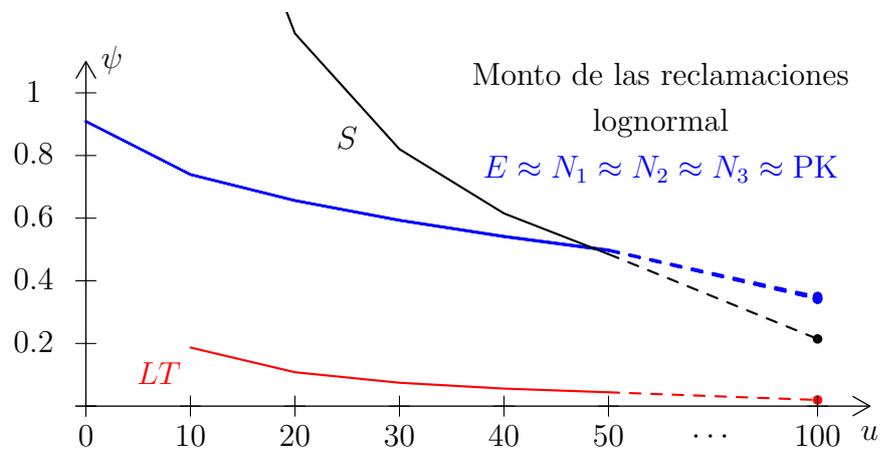


Figura 4.42: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

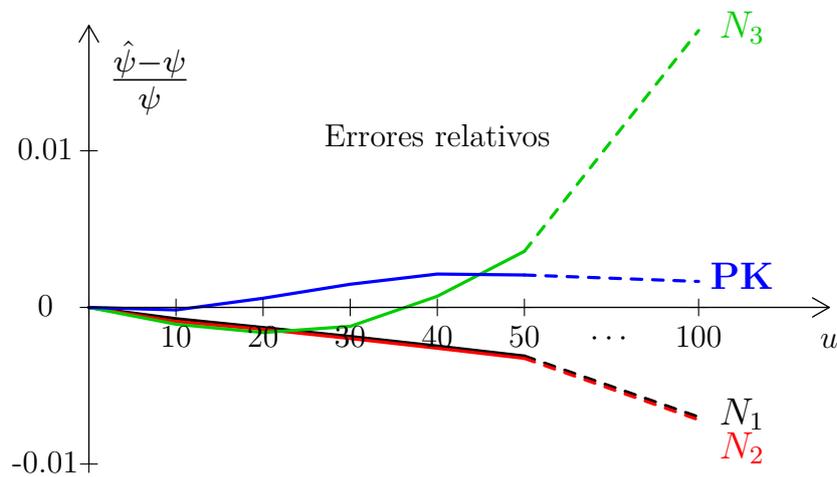


Figura 4.43: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

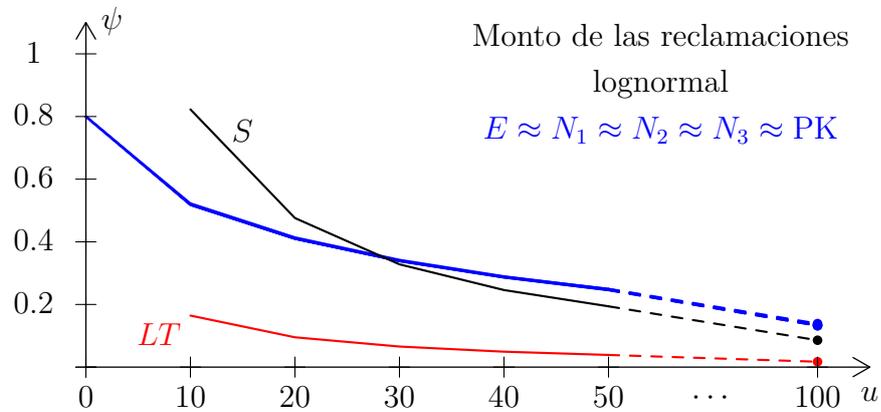


Figura 4.44: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

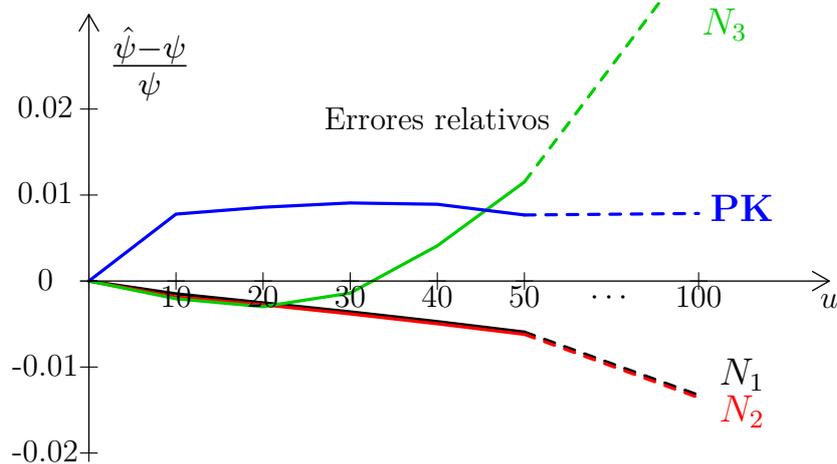


Figura 4.45: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

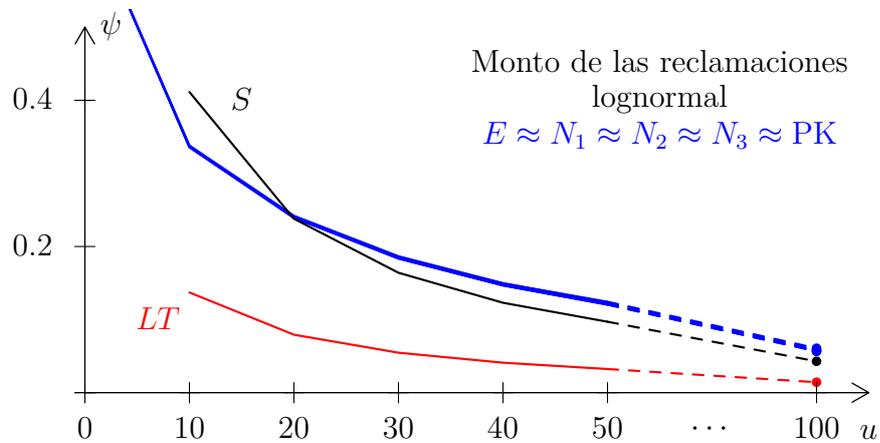


Figura 4.46: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

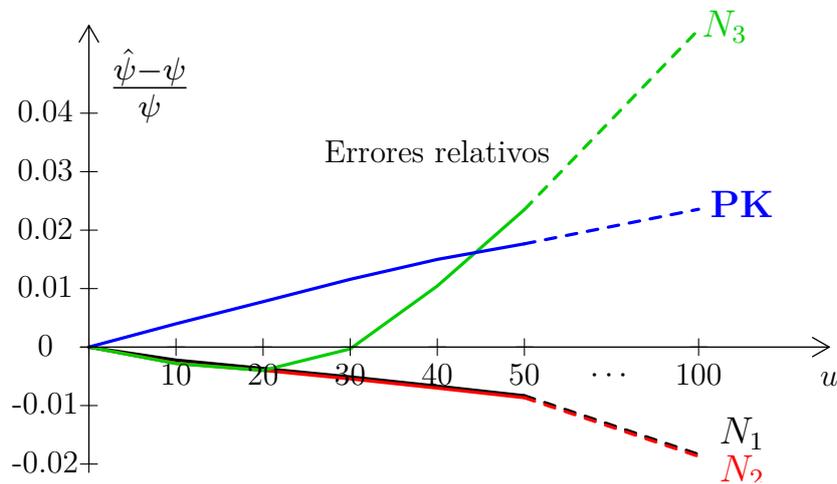


Figura 4.47: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

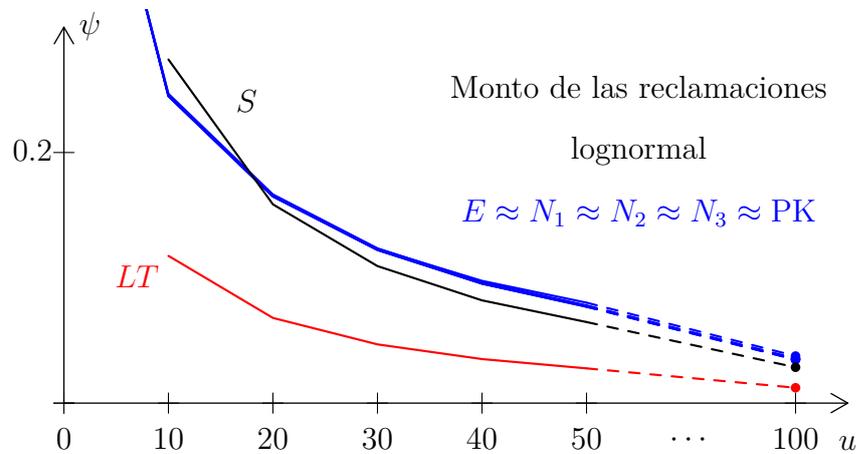


Figura 4.48: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

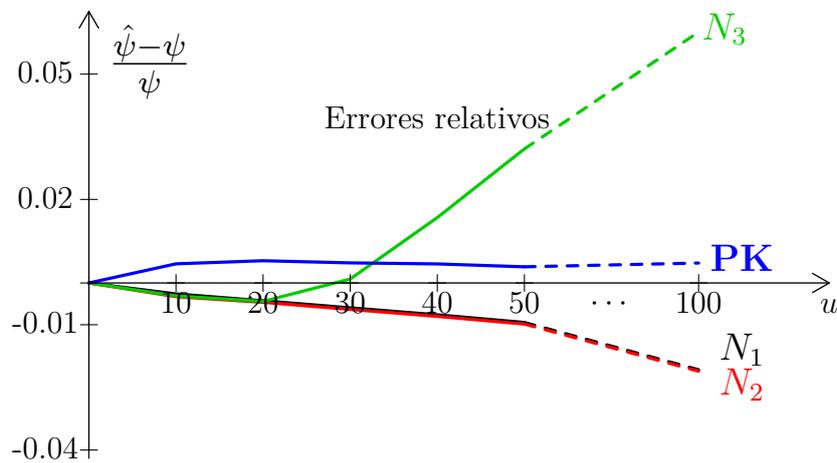


Figura 4.49: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

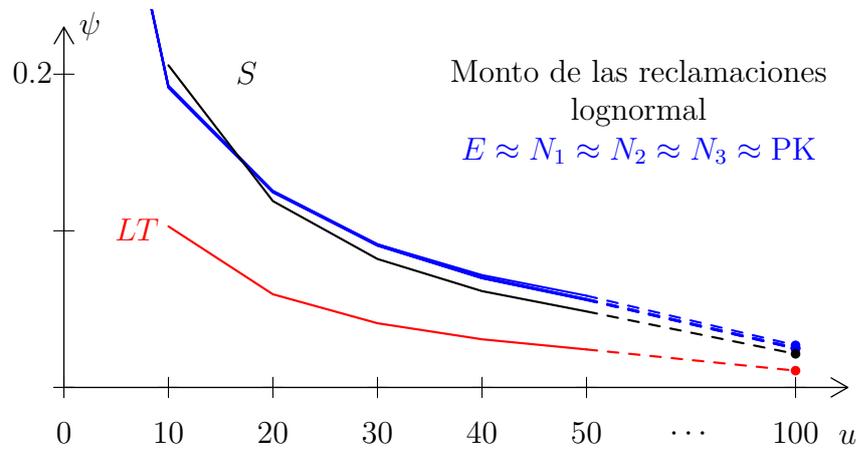


Figura 4.50: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 1$.

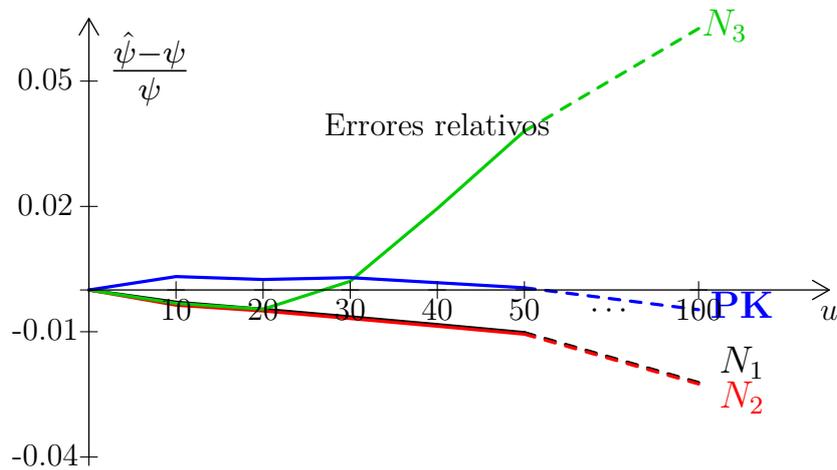


Figura 4.51: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución lognormal y un factor de recargo de $\theta = 1$.

Como en el ejemplo Weibull, en este ejemplo se puede observar que el método de aproximación N_3 tiene el error relativo más grande entre los métodos PKMC, N_1 , N_2 y N_3 . También se observa que en la mayoría de los casos, los métodos de aproximación subexponencial y de tráfico ligero no son muy precisos. Solo en el caso $\theta = 1$ se percibe en la gráfica de aproximaciones que el método subexponencial es cercano a los otros métodos, pero el método de tráfico ligero sigue siendo el peor método.

4.2.6. Distribución Pareto

En este ejemplo se supondrá que los montos de las reclamaciones siguen una distribución Pareto, con función de distribución dada por:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{b+x} \right)^a, \quad x > 0.$$

En este caso, se escribirá Pareto(a, b) con $a, b > 0$. La distribución Pareto es de cola pesada y no tiene media finita cuando $a \leq 1$, además el segundo momento no existe cuando $a \leq 2$. En el artículo de Ramsey (2003) [72] se encuentra una expresión para la probabilidad de ruina en este caso. Para este ejemplo se usaron los mismo parámetros que fueron usados en el artículo de Ramsey y Usábel (1997) [73], donde se calcularon los valores de $\psi(u)$ usando el método de integración producto. De este último trabajo se tomaron los valores de $\psi(u)$ para contrastar los métodos de aproximación propuestos y están representados por E^* en la tabla de resultados más adelante. Se supuso el caso Pareto(2, 1), cuya media es uno y también se supuso $\lambda = 1$, de esta manera $c = (1 + \theta)$. Para contrastar, además de los métodos LT y S, también se usó el método de PKMC, donde se generaron 50,000 simulaciones; las variables aleatorias con densidad de equilibrio $f_e(x) = (1+x)^{-2}$, se distribuyen Pareto(1, 1), y se simularon usando el método de la transformación inversa. De nuevo, en los tres nuevos métodos se usó $n = 200$. Para la aproximación 4.10 se hicieron 100 simulaciones. Para la aproximación 4.11 se generó una muestra aleatoria de 50,000 observaciones. En la tabla 4.6 se muestran los resultados de las aproximaciones para $u = 10, 20, 30, 40, 50, 100$ y $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, usando la misma nomenclatura que antes. En las figuras 4.52 a 4.61 se ilustran los resultados de las aproximaciones y de los errores relativos de las aproximaciones.

Tabla 4.6: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución Pareto(2, 1).

u	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$								
10	0.1		0.25		0.5		0.75		1	
E^*	0.6271	0.0000	0.3727	0.0000	0.2066	0.0000	0.1382	0.0000	0.1025	0.0000
N_1	0.6260	-0.0017	0.3713	-0.0037	0.2054	-0.0058	0.1373	-0.0071	0.1017	-0.0080
N_2	0.6258	-0.0021	0.3710	-0.0044	0.2052	-0.0068	0.1371	-0.0082	0.1016	-0.0092
N_3	0.6249	-0.0036	0.3693	-0.0091	0.2031	-0.0170	0.1351	-0.0229	0.0997	-0.0272
PK	0.6263	-0.0014	0.3762	0.0096	0.2084	0.0086	0.1399	0.0117	0.1040	0.0148
S	0.9091	0.4496	0.3636	-0.0242	0.1818	-0.1201	0.1212	-0.1232	0.0909	-0.1133
LT	0.0826	-0.8682	0.0727	-0.8048	0.0606	-0.7067	0.0519	-0.6242	0.0455	-0.5566
20										
E^*	0.4981	0.0000	0.2453	0.0000	0.1193	0.0000	0.0759	0.0000	0.0550	0.0000
N_1	0.4960	-0.0042	0.2431	-0.0088	0.1177	-0.0131	0.0747	-0.0153	0.0541	-0.0167
N_2	0.4959	-0.0045	0.2430	-0.0092	0.1176	-0.0136	0.0747	-0.0159	0.0541	-0.0173
N_3	0.4887	-0.0189	0.2342	-0.0452	0.1101	-0.0768	0.0686	-0.0964	0.0490	-0.1092
PK	0.4969	-0.0024	0.2484	0.0130	0.1205	0.0104	0.0766	0.0094	0.0559	0.0160
S	0.4762	-0.0441	0.1905	-0.2234	0.0952	-0.2015	0.0635	-0.1635	0.0476	-0.1348
LT	0.0433	-0.9131	0.0381	-0.8447	0.0317	-0.7338	0.0272	-0.6415	0.0238	-0.5674
30										
E^*	0.4114	0.0000	0.1783	0.0000	0.0814	0.0000	0.0511	0.0000	0.0369	0.0000
N_1	0.4084	-0.0072	0.1757	-0.0146	0.0797	-0.0210	0.0498	-0.0241	0.0359	-0.0258
N_2	0.4083	-0.0075	0.1757	-0.0150	0.0797	-0.0215	0.0498	-0.0246	0.0359	-0.0263
N_3	0.3942	-0.0418	0.1614	-0.0952	0.0693	-0.1493	0.0420	-0.1777	0.0297	-0.1942
PK	0.4111	-0.0009	0.1813	0.0166	0.0823	0.0109	0.0515	0.0096	0.0376	0.0185
S	0.3226	-0.2160	0.1290	-0.2764	0.0645	-0.2076	0.0430	-0.1575	0.0323	-0.1253
LT	0.0293	-0.9287	0.0258	-0.8553	0.0215	-0.7359	0.0184	-0.6389	0.0161	-0.5627
40										
E^*	0.3479	0.0000	0.1376	0.0000	0.0609	0.0000	0.0380	0.0000	0.0275	0.0000
N_1	0.3442	-0.0107	0.1346	-0.0211	0.0591	-0.0294	0.0368	-0.0331	0.0265	-0.0351
N_2	0.3441	-0.0110	0.1346	-0.0215	0.0590	-0.0299	0.0368	-0.0336	0.0265	-0.0355
N_3	0.3244	-0.0674	0.1179	-0.1432	0.0484	-0.2053	0.0292	-0.2317	0.0208	-0.2451
PK	0.3478	-0.0004	0.1396	0.0147	0.0616	0.0121	0.0383	0.0060	0.0281	0.0208
S	0.2439	-0.2989	0.0976	-0.2907	0.0488	-0.1983	0.0325	-0.1449	0.0244	-0.1131
LT	0.0222	-0.9363	0.0195	-0.8581	0.0163	-0.7328	0.0139	-0.6335	0.0122	-0.5565
50										
E^*	0.2992	0.0000	0.1105	0.0000	0.0482	0.0000	0.0301	0.0000	0.0218	0.0000
N_1	0.2948	-0.0147	0.1074	-0.0282	0.0463	-0.0382	0.0289	-0.0425	0.0209	-0.0446
N_2	0.2947	-0.0149	0.1073	-0.0286	0.0463	-0.0386	0.0288	-0.0429	0.0209	-0.0450
N_3	0.2717	-0.0918	0.0906	-0.1805	0.0367	-0.2386	0.0223	-0.2593	0.0160	-0.2687
PK	0.2992	0.0000	0.1118	0.0119	0.0487	0.0104	0.0303	0.0039	0.0223	0.0227
S	0.1961	-0.3445	0.0784	-0.2903	0.0392	-0.1857	0.0261	-0.1326	0.0196	-0.1022
LT	0.0178	-0.9404	0.0157	-0.8581	0.0131	-0.7286	0.0112	-0.6283	0.0098	-0.5511
100										
E^*	0.1649	0.0000	0.0522	0.0000	0.0228	0.0000	0.0145	0.0000	0.0106	0.0000
N_1	0.1583	-0.0398	0.0486	-0.0690	0.0209	-0.0847	0.0132	-0.0905	0.0096	-0.0934
N_2	0.1583	-0.0401	0.0486	-0.0693	0.0209	-0.0850	0.0132	-0.0908	0.0096	-0.0937
N_3	0.1305	-0.2084	0.0354	-0.3228	0.0145	-0.3662	0.0090	-0.3787	0.0065	-0.3843
PK	0.1648	-0.0003	0.0528	0.0107	0.0228	0.0005	0.0146	0.0034	0.0109	0.0274
S	0.0990	-0.3994	0.0396	-0.2417	0.0198	-0.1330	0.0132	-0.0906	0.0099	-0.0686
LT	0.0090	-0.9454	0.0079	-0.8483	0.0066	-0.7110	0.0057	-0.6103	0.0050	-0.5343

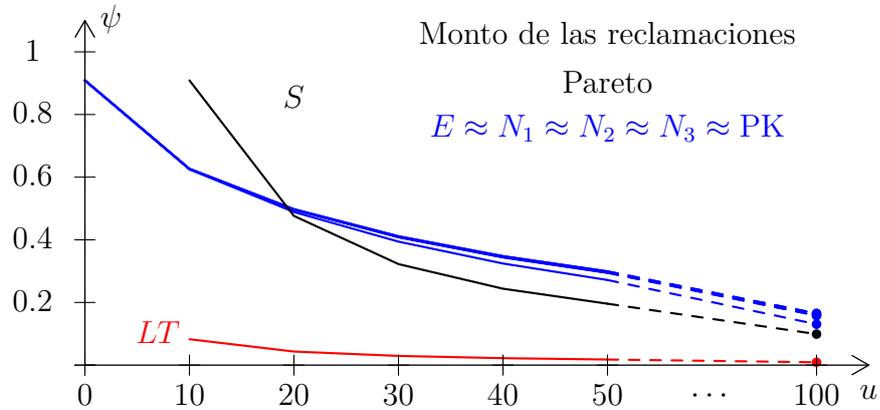


Figura 4.52: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

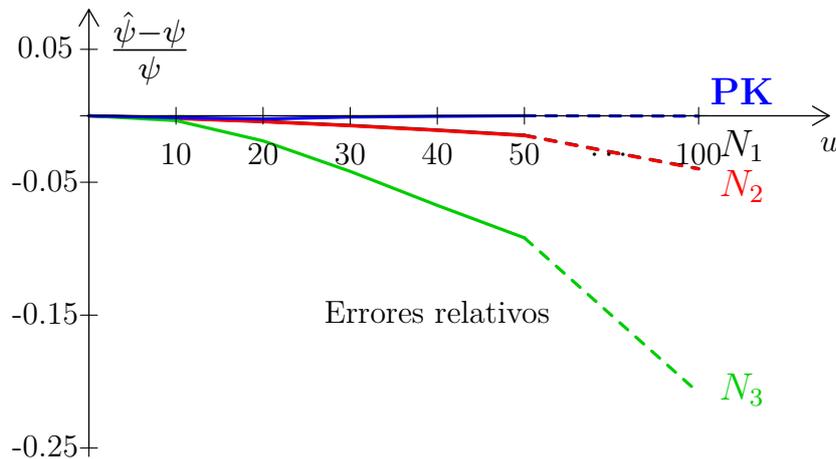


Figura 4.53: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

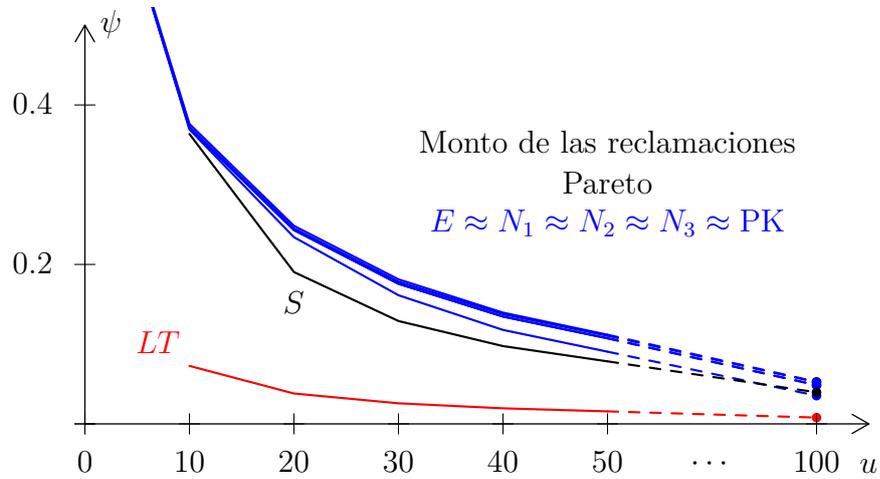


Figura 4.54: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

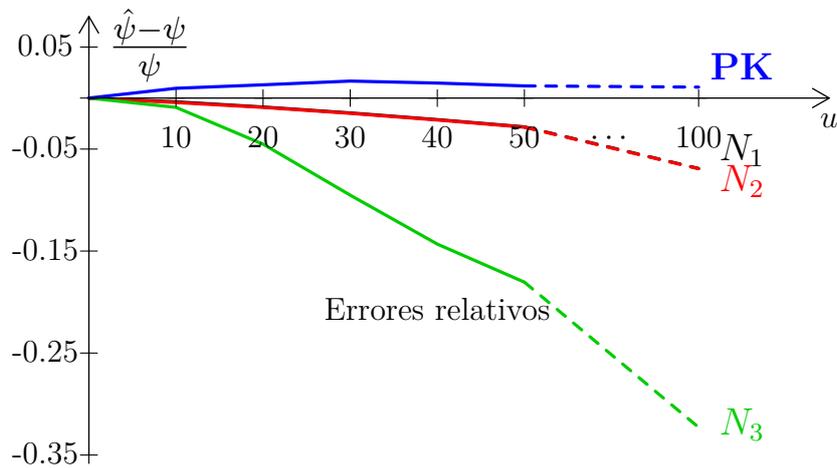


Figura 4.55: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

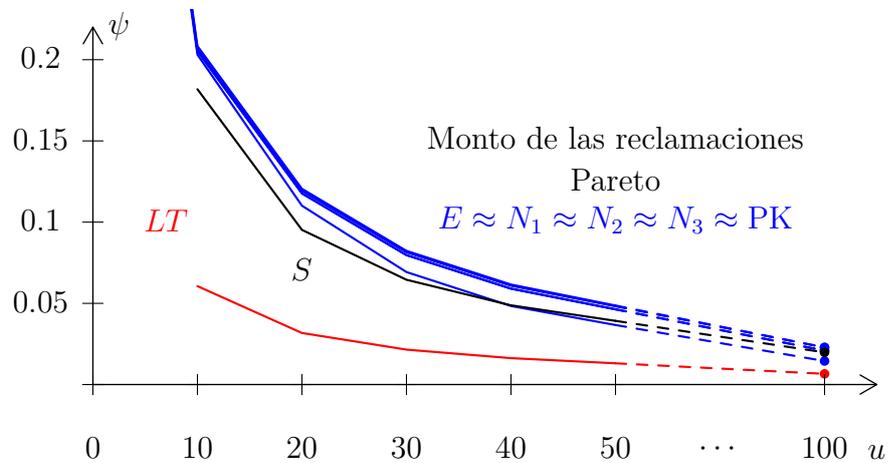


Figura 4.56: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

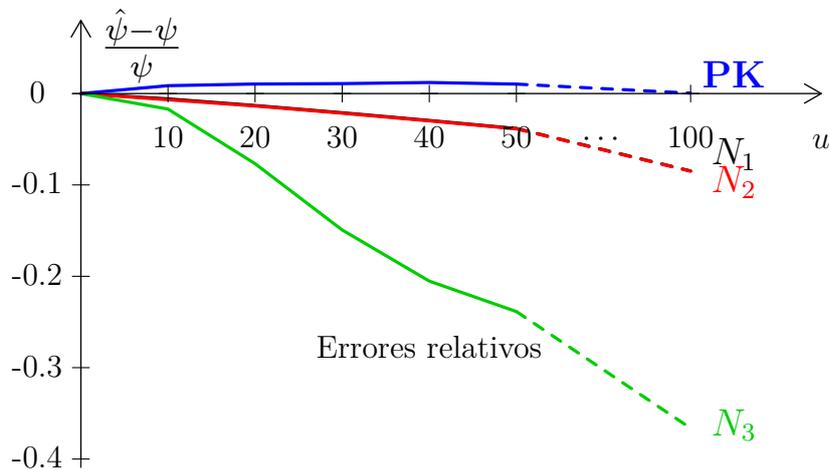


Figura 4.57: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

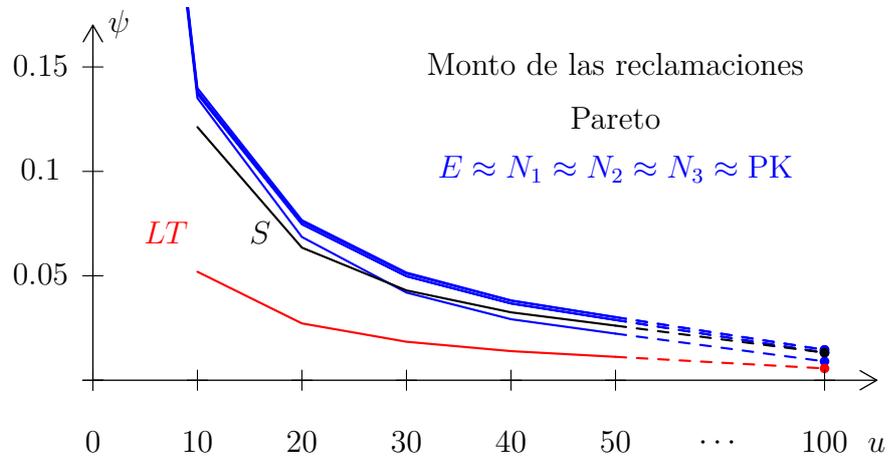


Figura 4.58: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

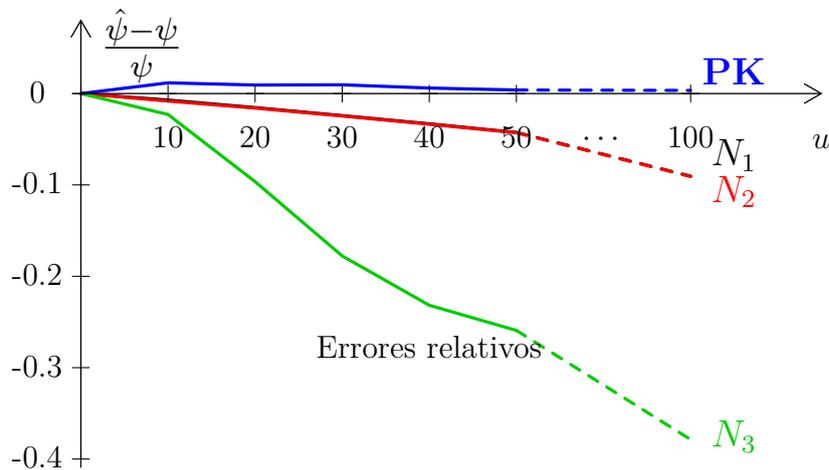


Figura 4.59: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

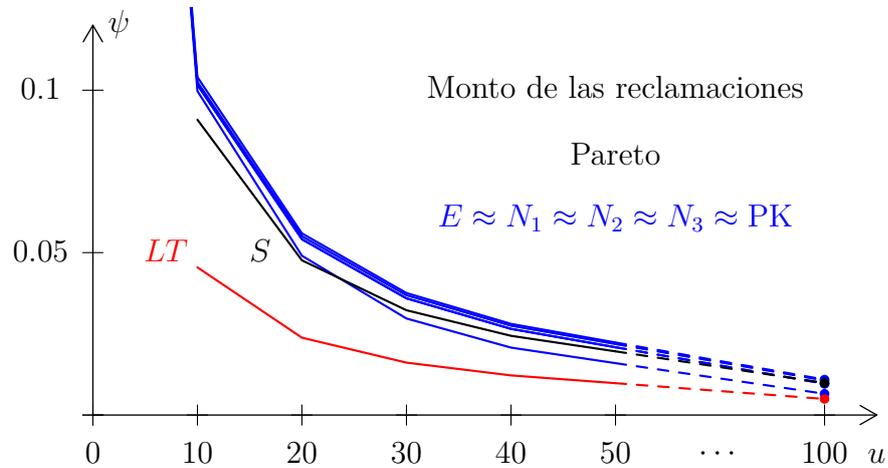


Figura 4.60: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 1$.

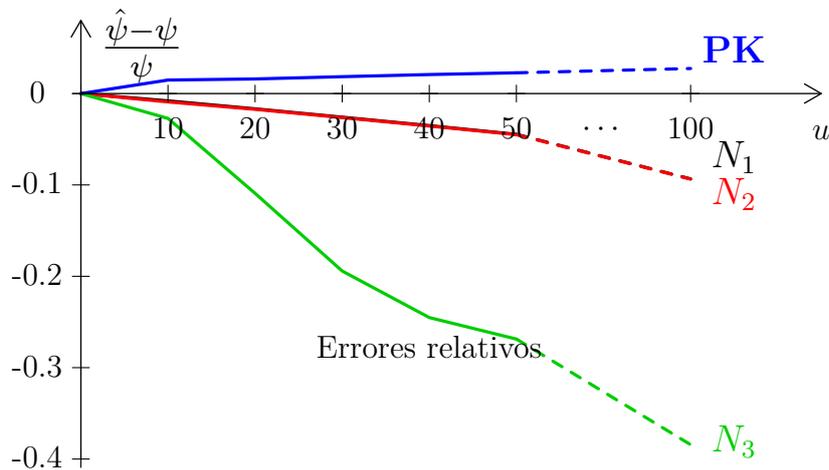


Figura 4.61: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto y un factor de recargo de $\theta = 1$.

En este caso, se observan parecidos los resultados de todas las aproximaciones, excepto para el método de tráfico ligero. De nuevo el método N_3 tuvo errores relativos muy alejados a los de N_1 y N_2 , dicho error se vuelve más pequeño aumentando el tamaño de la muestra de montos de reclamación y el valor de n .

4.2.7. Distribución Pareto truncada

La distribución Pareto es un ejemplo de una distribución de cola pesada y el truncarla puede ser de interés, por ejemplo, en un esquema de reaseguro con pérdida máxima. Se considera que una variable aleatoria tiene distribución Pareto truncada en $M > 0$, y es denotada como $\text{ParetoT}(a, b, M)$, $a > 0, b > 0$, si su función de distribución es la siguiente:

$$F(x) = [1 - (b/(b+x))^a] 1_{(0,M)}(x) + 1_{[M,\infty)}(x). \quad (4.25)$$

La media en este caso es:

$$\mu = \frac{b}{a-1} \left[1 - \left(\frac{b}{b+M} \right)^{a-1} \right].$$

En este ejemplo, para modelar el monto de los reclamos se usó una distribución $\text{ParetoT}(2, 1, 15)$ y $\lambda = 1/\mu$, por lo cual, $c = (1 + \theta)$. Se usó de nuevo la aproximación de Panjer con parámetro de discretización $\beta = 100$, como el valor más parecido a $\psi(u)$. Para el método de PKMC se hicieron 50,000 simulaciones. Las variables aleatorias con función de distribución $F_e(x) = (1/\mu)(x/(1+x))$, $x < 15$ y $F_e(x) = 1$, $x \geq 15$ fueron simuladas usando el método de la transformación inversa. Para las nuevas aproximaciones se usó $n = 200$. Para la aproximación (4.10) se hicieron 100 simulaciones. Para la aproximación (4.11) se generó una muestra aleatoria de 10,000 observaciones. En la tabla 4.7 y en las figuras 4.62 a 4.71 se muestran e ilustran los resultados, de nuevo para los casos $u = 10, 20, 30, 40, 50, 100$ y $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

Tabla 4.7: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución Pareto(2, 1) truncada en $M = 15$.

u	θ	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$								
10	0.1		0.25		0.5		0.75		1	
E_{TP}^*	0.5586	0.0000	0.2884	0.0000	0.1350	0.0000	0.0804	0.0000	0.0548	0.0000
N_1	0.5587	0.0001	0.2885	0.0001	0.1350	0.0001	0.0804	0.0002	0.0548	0.0002
N_2	0.5583	-0.0005	0.2881	-0.0011	0.1347	-0.0017	0.0802	-0.0022	0.0547	-0.0025
N_3	0.5594	0.0014	0.2889	0.0017	0.1350	0.0004	0.0803	-0.0013	0.0547	-0.0029
PK	0.5575	-0.0020	0.2918	0.0118	0.1367	0.0124	0.0816	0.0148	0.0562	0.0243
20										
E_{TP}^*	0.3577	0.0000	0.1127	0.0000	0.0300	0.0000	0.0120	0.0000	0.0061	0.0000
N_1	0.3577	0.0000	0.1127	0.0002	0.0300	0.0004	0.0120	0.0008	0.0061	0.0011
N_2	0.3576	-0.0004	0.1126	-0.0010	0.0299	-0.0014	0.0120	-0.0016	0.0061	-0.0017
N_3	0.3583	0.0017	0.1129	0.0017	0.0300	-0.0005	0.0120	-0.0030	0.0061	-0.0054
PK	0.3568	-0.0025	0.1152	0.0226	0.0306	0.0192	0.0121	0.0050	0.0065	0.0719
30										
E_{TP}^*	0.22900	0.0000	0.04411	0.0000	0.00676	0.0000	0.00187	0.0000	0.00072	0.0000
N_1	0.22899	0.0000	0.04412	0.0001	0.00676	0.0005	0.00187	0.0012	0.00072	0.0020
N_2	0.22885	-0.0007	0.04405	-0.0014	0.00675	-0.0020	0.00186	-0.0021	0.00071	-0.0020
N_3	0.22946	0.0020	0.04417	0.0013	0.00674	-0.0026	0.00186	-0.0066	0.00071	-0.0098
PK	0.22891	-0.0004	0.04413	0.0004	0.00697	0.0313	0.00178	-0.0483	0.00084	0.1711
40										
E_{TP}^*	0.14656	0.0000	0.01725	0.0000	0.00152	0.0000	0.00029	0.0000	8.37E-05	0.0000
N_1	0.14655	-0.0001	0.01725	0.0000	0.00152	0.0005	0.00029	0.0012	8.39E-05	0.0021
N_2	0.14644	-0.0008	0.01722	-0.0018	0.00152	-0.0025	0.00029	-0.0027	8.35E-05	-0.0027
N_3	0.14690	0.0023	0.01727	0.0010	0.00151	-0.0046	0.00029	-0.0102	8.24E-05	-0.0149
PK	0.14742	0.0059	0.01719	-0.0037	0.00165	0.0863	0.00018	-0.3663	0.00014	0.7533
50										
E_{TP}^*	0.09380	0.0000	0.00674	0.0000	0.00034	0.0000	0.00004	0.0000	9.72E-06	0.0000
N_1	0.09378	-0.0002	0.00674	-0.0001	0.00034	0.0005	4.44E-05	0.0014	9.74E-06	0.0024
N_2	0.09370	-0.0010	0.00673	-0.0021	0.00034	-0.0029	4.42E-05	-0.0032	9.69E-06	-0.0031
N_3	0.09404	0.0026	0.00675	0.0007	0.00034	-0.0064	4.37E-05	-0.0135	9.53E-06	-0.0193
PK	0.09419	0.0042	0.00681	0.0090	0.00036	0.0513	4.12E-05	-0.0707	1.68E-06	-0.8264
100										
E_{TP}^*	0.01007	0.0000	6.16E-05	0.0000	1.94E-07	0.0000	3.83E-09	0.0000	2.06E-10	0.0000
N_1	0.01007	-0.0005	6.15E-05	-0.0006	1.94E-07	0.0005	3.84E-09	0.0023	2.07E-10	0.0043
N_2	0.01005	-0.0018	6.14E-05	-0.0037	1.93E-07	-0.0050	3.81E-09	-0.0051	2.05E-10	-0.0047
N_3	0.01011	0.0040	6.15E-05	-0.0008	1.91E-07	-0.0159	3.71E-09	-0.0300	1.98E-10	-0.0414
PK	0.00962	-0.0453	5.87E-05	-0.0466	0	-1.0000	0	-1.0000	0	-1.0000

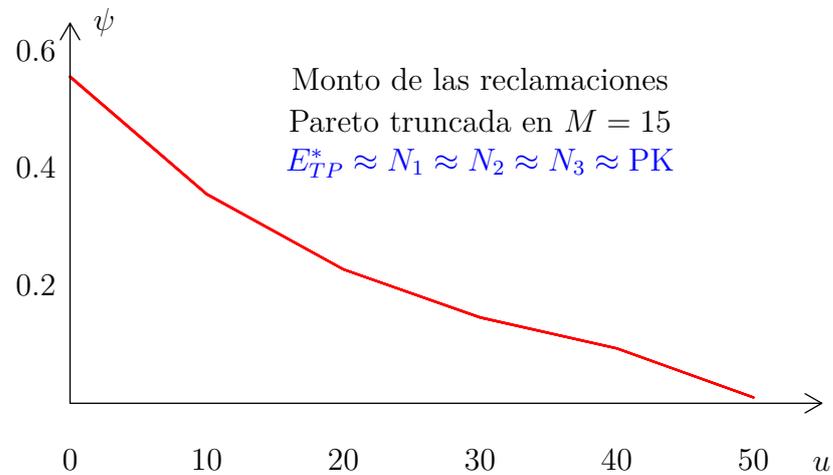


Figura 4.62: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

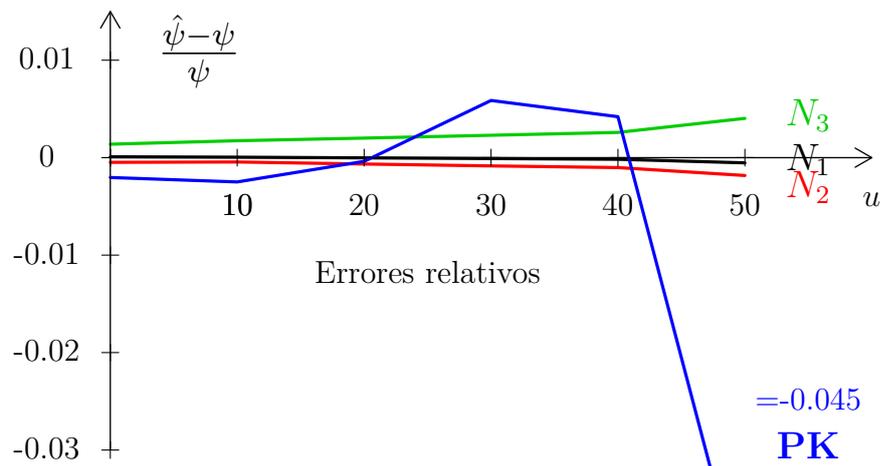


Figura 4.63: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.1$.

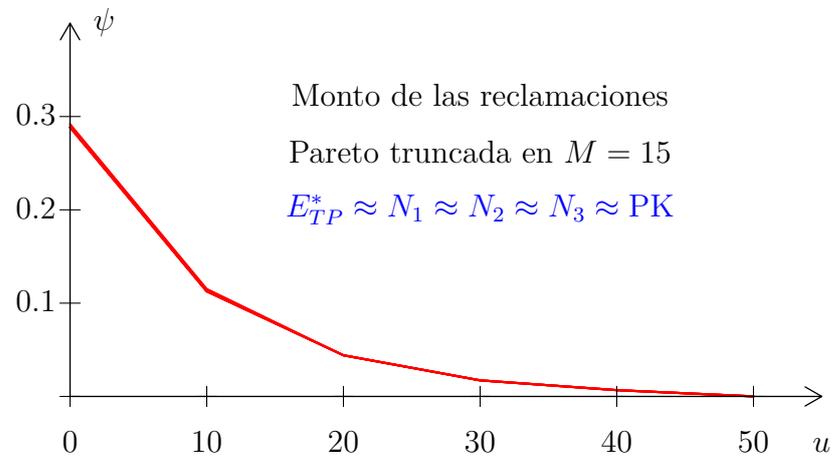


Figura 4.64: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

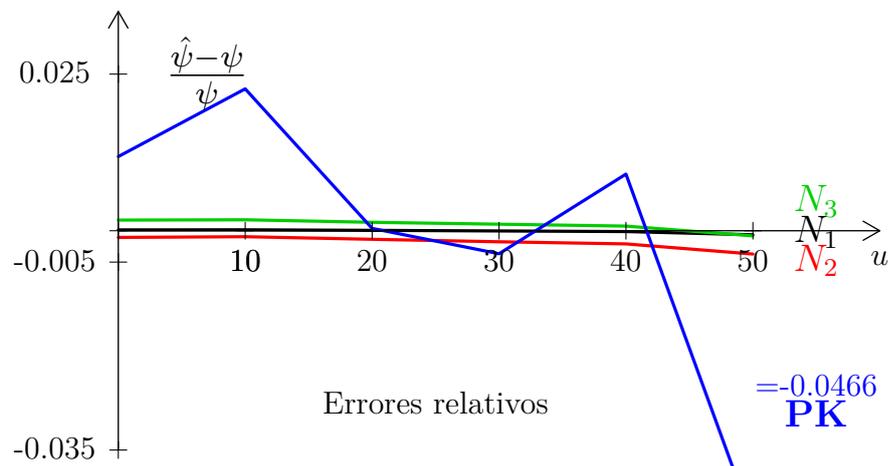


Figura 4.65: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.25$.

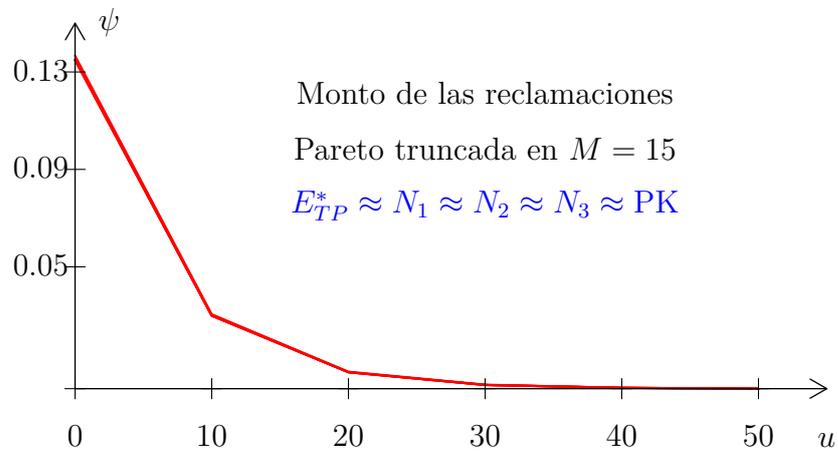


Figura 4.66: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

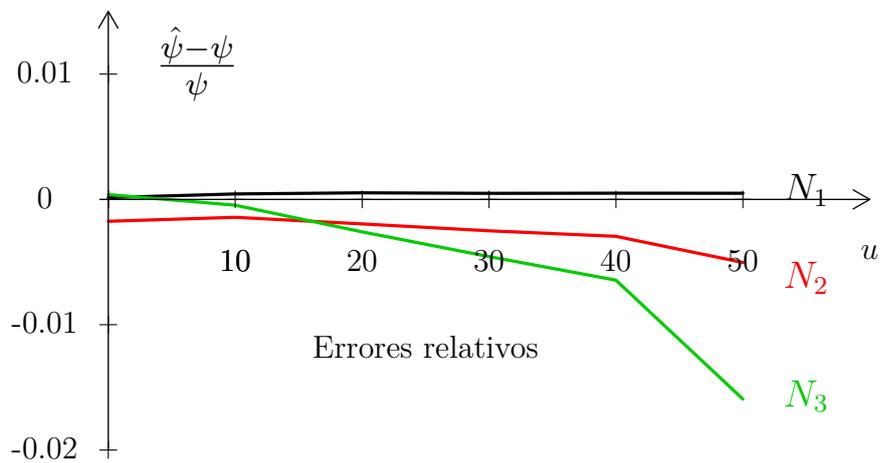


Figura 4.67: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.5$.

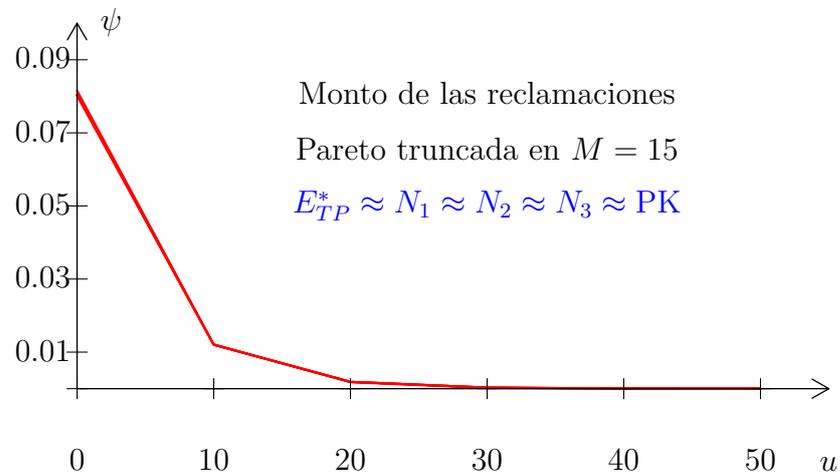


Figura 4.68: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

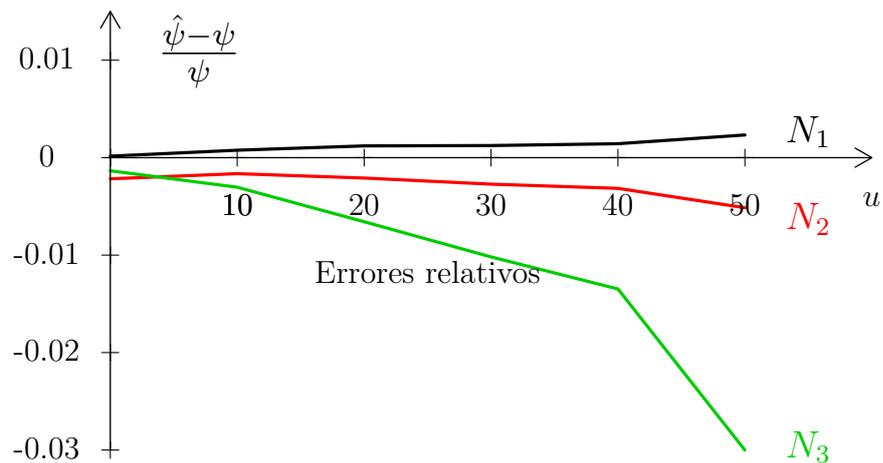


Figura 4.69: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 0.75$.

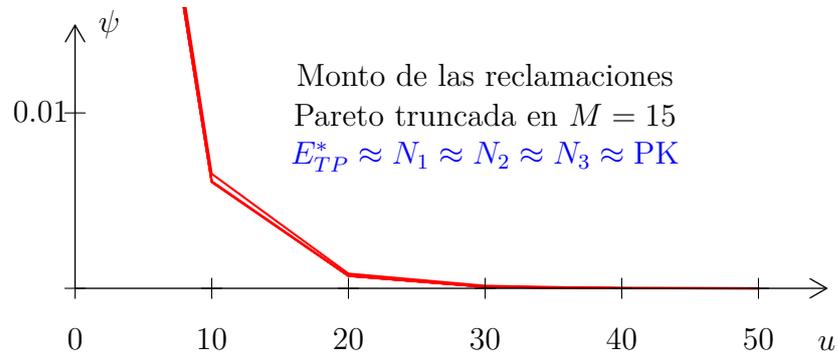


Figura 4.70: Probabilidad de ruina para reclamos con distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 1$.

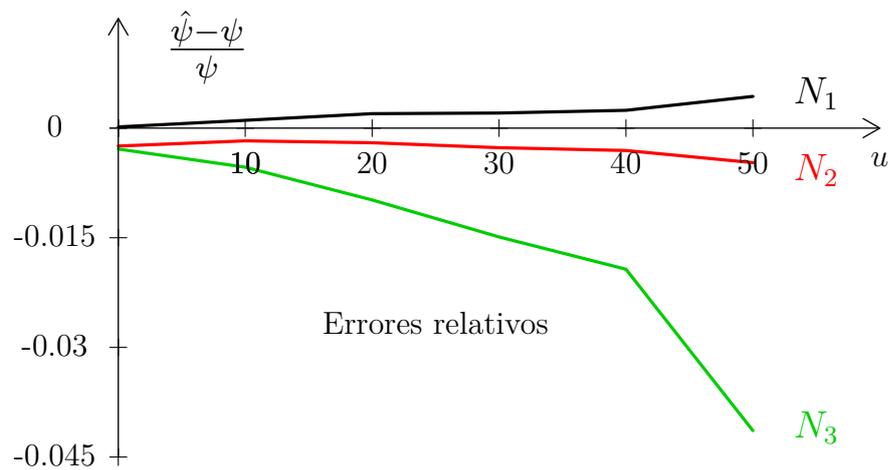


Figura 4.71: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Pareto truncada en $M = 15$ y un factor de recargo de $\theta = 1$.

En este ejemplo, las aproximaciones tuvieron mucha precisión con respecto al método de PKMC y se obtuvieron los errores relativos más pequeños de todos los ejemplos.

En general, los métodos de aproximación propuestos, además de lo que ya se ha mencionado, tienen la ventaja de que la aproximación obtenida se puede mejorar tanto como se quiera elevando el valor de n , esto no se puede hacer en los métodos donde la fórmula de aproximación depende de los valores de los primeros momentos o del coeficiente de ajuste. Por otro lado, en los métodos numéricos basados en invertir la transformada de Laplace de ψ se usa un algoritmo cuya implementación podría ser difícil, sin embargo, es relativamente fácil implementar los métodos propuestos en este capítulo, como se puede observar en el apéndice B. En la última sección de este capítulo se hacen comentarios adicionales sobre esta implementación.

4.3. Consideraciones numéricas

Cuando se implementan las fórmulas de las aproximaciones propuestas se debe tratar con sumas infinitas, lo cual implica posibles problemas numéricos. En esta sección se comenta cómo se trataron los ejemplos de la sección anterior.

La primera aproximación (4.7) es una suma infinita, cada sumando es un producto de los coeficientes $\bar{C}_{k,n}$ (4.2) y el término

$$e^{-un} \frac{(un)^k}{k!},$$

el cual es igual a $P(X = k)$ para $X \sim \text{Poisson}(un)$, debido a esto, se calculó el máximo entero k , tal que $P(X = k) > 0$ numéricamente. En términos de la implementación, se buscó el valor de $k \geq un$, tal que para $j = k + 1, k + 2, \dots$ se tenga lo siguiente:

$$e^{-un} \frac{(un)^j}{j!} = 0.$$

Luego, los coeficientes $\bar{C}_{k,n}$ son probabilidades de cola, por lo que su valor es decreciente y no afectarán para que los sumandos $k + 1, k + 2, \dots$ en (4.7) sean cero. Por lo tanto, se trunca la suma en el k -ésimo sumando.

Para el cálculo de los coeficientes $\overline{C}_{k,n}$, se deben calcular las probabilidades (4.3) que son iguales a un cociente cuyo denominador es una suma infinita convergente. Los sumandos son decrecientes, por lo cual, se puede programar una suma finita, descartando los términos menores a algún valor $\epsilon > 0$ muy pequeño. En el ejemplo de la distribución gama, la convergencia fue rápida y se tomó $\epsilon = 0$, igual en el ejemplo de la distribución mezcla de exponenciales. En los casos Weibull, lognormal y Pareto se usó $\epsilon = 0.00001$ y $\epsilon = 0.000001$. Estos valores de ϵ eran razonables porque al usar valores más pequeños no se mejoraba casi la aproximación y sí ocasionaba que el cálculo fuera mucho más lento. Para el ejemplo de la distribución exponencial-uniforme y Pareto truncada, también se usó $\epsilon = 0$, ya que el soporte de estas distribuciones es acotado y por tanto el denominador de (4.3) es una suma finita.

Para la segunda aproximación (4.10), se obtuvieron buenos resultados en nuestros ejemplos usando $m = 100$ simulaciones. Se puede mejorar la aproximación con un valor de m mayor, pero el objetivo fue observar que esta aproximación del tipo Monte Carlo es una alternativa al método PKMC. En el método de PKMC se debieron usar 5,000 y 50,000 simulaciones para obtener resultados similares. En esta segunda aproximación de nuevo se deben calcular los coeficientes $\overline{C}_{k,n}$ y calcular entonces las probabilidades de (4.3), pero se calcularon usando los mismos criterios que en la primera aproximación.

Para la tercera aproximación (4.11), de nuevo se calculó el mayor entero k , tal que $P(X = k) > 0$ (numéricamente) para $X \sim \text{Poisson}(un)$, y la suma fue truncada en este valor de k . En esta aproximación se deben calcular las probabilidades en (4.12). La suma infinita que aparece en ellas es siempre finita porque la función de distribución empírica continua alcanza el valor de uno para algún valor de j finito. En los ejemplos se tomaron en cuenta las sumas completas y no hubo necesidad de truncarlas. Los detalles de los códigos utilizados se pueden encontrar en el apéndice B.

Las referencias que fueron consultadas para este capítulo, son las siguientes: [2, 3, 7, 11, 15], de [21] a [23], [47, 65, 66, 84] y [87].

Capítulo 5

Aproximaciones en un modelo de riesgo discreto

En este capítulo se presenta el modelo de riesgo en tiempo discreto que se denominará en este trabajo como modelo de Gerber-Dickson. En dicho modelo, el capital inicial, las primas, los montos de las reclamaciones y el tiempo toman valores enteros no negativos. Se presentan las definiciones principales y algunas soluciones para calcular la probabilidad de ruina. Después, se define la distribución mezcla de binomiales negativas y se muestran algunas de sus propiedades, además se muestra su relación con la distribución Poisson mezclada. Se calcula la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución mezcla de binomiales negativas y finalmente, usando ideas similares a las vistas en los capítulos anteriores, se desarrolla un método para aproximar la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Poisson mezclada.

Entre las aportaciones de este capítulo al tema del modelo discreto se encuentran: el desarrollo de la versión discreta de la fórmula de Pollaczek-Khinchine (proposición 5.3.17), una fórmula para calcular la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución mezcla de binomiales negativas (proposición 5.4.7), una forma de aproximar una distribución Poisson mezclada usando un tipo específico de mezcla de binomiales negativas (proposición 5.5.6), y por último, el teorema 5.6.1, el cual sirve para proponer dos formas (corolarios 5.6.2 y 5.6.4) de aproximar la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Poisson mezclada. Además, se incluyen ejemplos cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución Poisson mezclada con distintas distribuciones para Λ .

5.1. Algunos modelos de riesgo en tiempo discreto

Existen varias versiones del proceso de riesgo en tiempo discreto, según las suposiciones que se hagan para las primas, el monto de las reclamaciones y el número de éstas por periodo. En esta sección se presenta un breve resumen de los modelos más conocidos.

En 1988, Hans-Ulrich Gerber en el artículo *Mathematical fun with the compound binomial process* [40], presenta el siguiente proceso:

$$U(0) = u, \quad (5.1)$$

$$U(t) = u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (5.2)$$

para cada valor de $t = 1, 2, \dots$, donde u y t representan el capital inicial y el número de periodos que han transcurrido¹, respectivamente. La variable de conteo $N(t)$ representa el número de periodos donde se han hecho reclamaciones hasta el tiempo t y tiene distribución $\text{Bin}(t, p)$, donde p representa la probabilidad de que haya reclamaciones en cada periodo. Las variables Y_1, Y_2, \dots son v.a.i.i.d. con función de probabilidad común $f(x) = P(Y_i = x)$ para cada valor de $x = 1, 2, \dots$ y media común $\mu < 1/p$ (condición de ganancia neta); cada Y_i representa la suma de los montos de las reclamaciones en el i -ésimo periodo donde hayan existido dichas reclamaciones. En cada periodo se supone una ganancia de una unidad por concepto de primas. Este modelo, conocido como proceso binomial compuesto, supone que todos los elementos son números enteros no negativos, por lo que el proceso $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tiene espacio temporal y de estados discreto. La probabilidad de ruina con horizonte infinito se define, para $u = 0, 1, 2, \dots$ como:

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \mid U(0) = u),$$

donde el tiempo de ruina τ se define como sigue:

$$\tau = \text{mín}\{t \geq 1 : U(t) \leq 0\},$$

siempre que el conjunto no sea vacío, si lo fuera, entonces se define $\tau = \infty$, ya que $U(t)$ nunca habrá sido menor o igual a cero. Para este modelo, la

¹Se ha evitado el uso de la letra n para denotar el tiempo discreto, como tradicionalmente se usa, debido a que dicha letra será usada en las aproximaciones, tanto a las funciones de distribución Poisson mezclada como a la probabilidad de ruina. Esta convención es seguida en todo el capítulo.

probabilidad de ruina se puede calcular usando la siguiente fórmula que puede encontrarse en el artículo de Gerber (1988) [40]:

$$\begin{aligned}\psi(0) &= p\mu, \\ \psi(u) &= (1-p)\psi(u+1) + p \sum_{x=1}^u \psi(u+1-x) f(x) + p\bar{F}(u),\end{aligned}\quad (5.3)$$

para $u = 1, 2, \dots$ y donde $\bar{F}(u) = \sum_{x=u+1}^{\infty} f(x)$.

En 1989, Elias Shiu trabaja con un modelo discreto muy similar al modelo compuesto binomial en su artículo *The probability of eventual ruin in the compound binomial model* [78]. La diferencia principal está en cómo define el tiempo de ruina:

$$\tau = \text{mín}\{t \geq 1 : U(t) < 0\},$$

es decir, se establece que hay ruina solo si el proceso se vuelve estrictamente negativo, de nuevo $\tau := \infty$ cuando $U(t) > 0$ para todo número natural t . En el mismo trabajo, se desarrollan varias fórmulas para calcular la probabilidad de ruina, en particular, se encuentra la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}1 - \psi(0) &= \frac{1 - p\mu}{1 - p}, \\ 1 - \psi(u) &= (1 - \psi(0)) \sum_{j=0}^{M(u)} \left(\frac{-p}{1-p}\right)^j E \left[\binom{u+j-S_j}{j} (1-p)^{S_j-u} \right],\end{aligned}$$

donde $S_j = \sum_{i=1}^j Y_i$, y $M(u) = \text{máx}\{j \geq 1 : S_j \leq u\}$.

En 1997, en el libro de Bowers et al. [10, pág. 401] puede encontrarse el siguiente modelo discreto:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^t W_i, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

donde u y c representan el capital inicial y la tasa de primas, respectivamente. Se supone $U(0) = 0$ y que W_1, W_2, \dots son v.a.i.i.d., donde W_i representa la suma de los montos de las reclamaciones en el periodo i . Este modelo no supone que los valores de u o de c sean números enteros, o que los montos de las reclamaciones tomen solo valores discretos, por lo que

el proceso $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tiene un espacio temporal discreto, pero un espacio de estados continuo. La ruina también se define como el evento donde el proceso de riesgo es estrictamente negativo. En este modelo, se define el coeficiente de ajuste R , como la solución positiva de la ecuación:

$$M_W(r) = e^{rc}.$$

En el mismo libro [10, pág. 403], se encuentra la siguiente fórmula para la probabilidad de ruina, dependiente del coeficiente de ajuste R :

$$\psi(u) = \frac{\exp(-Ru)}{E[\exp(-RU(\tau)) \mid \tau < \infty]}. \quad (5.5)$$

Previo al modelo anterior, David Dickson en el trabajo *Some comments on the compound binomial model* (1994) [27], simplifica el proceso de riesgo binomial definido por Gerber, suponiendo $p = 1$ y considerando a las variables aleatorias Y_i como los montos de las reclamaciones hechas en cada periodo i . Si en algún periodo $Y_i = 0$, esto quiere decir que no se hacen reclamaciones en ese periodo.

El trabajo de este capítulo estará basado en este último modelo que es presentado formalmente y con mayor detalle en la sección siguiente.

5.2. Modelo discreto de Gerber-Dickson

Definición 5.2.1 *Sea u un número entero mayor o igual a cero y sean Y_1, Y_2, \dots variables aleatorias con valores en $0, 1, 2, \dots$. Se define como proceso de riesgo de Gerber Dickson, o simplemente modelo de Gerber-Dickson, al proceso $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$ definido por:*

$$U(t) = u + t - \sum_{i=1}^t Y_i, \quad (5.6)$$

para cada valor de $t = 0, 1, 2, \dots$ y por conveniencia, $\sum_{i=1}^0 Y_i := 0$.

Se define el tiempo de ruina τ como el primer momento en que el proceso de riesgo es menor o igual a cero:

$$\tau = \text{mín}\{t \geq 1 : U(t) \leq 0\}, \quad (5.7)$$

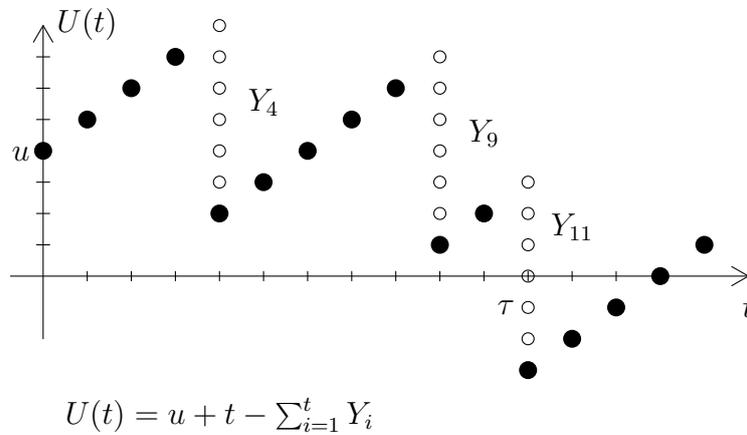


Figura 5.1: Ejemplo de una trayectoria de un proceso de riesgo discreto.

suponiendo que el conjunto indicado es distinto del vacío, en caso contrario $\tau := \infty$. La probabilidad de ruina en horizonte infinito con capital inicial de u se define como:

$$\psi(u) = P(\tau < \infty \mid U(0) = u), \quad (5.8)$$

para cada valor de $u = 0, 1, 2, \dots$. Para que se cumpla la condición de ganancia neta se requiere que el valor esperado del monto agregado de reclamos sea mayor que las primas en cada punto del tiempo:

$$E\left(\sum_{i=1}^t Y_i\right) > t,$$

por lo que se debe de suponer que $\mu < 1$. De esta manera, como se muestra en el artículo de Damarackas y Siaulyis (2015) [19, pág. 467]:

$$\psi(u) < 1.$$

Condicionando con respecto al monto reclamado al final del primer periodo,

la probabilidad de ruina puede desarrollarse como sigue:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(\tau < \infty \mid U(0) = u) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} P(\tau < \infty \mid Y_1 = x, U(0) = u) P(Y_1 = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} f(x) P(\tau < \infty \mid U(1) = u + 1 - x, U(0) = u),\end{aligned}$$

donde $f(x) = P(Y_1 = x)$. Al final del primer periodo, a lo más se tiene un capital de $u + 1$, esto implica que la última suma puede separarse como sigue:

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{x=0}^u f(x) P(\tau < \infty \mid U(1) = u + 1 - x, U(0) = u) \\ &\quad + \sum_{x=u+1}^{\infty} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^u f(x) \psi(u + 1 - x) + \bar{F}(u),\end{aligned}\tag{5.9}$$

donde $\bar{F}(u) = 1 - F(u) = P(Y_1 > u)$. A partir de la fórmula de Gerber (5.3), se llega a la fórmula (5.9), haciendo las modificaciones pertinentes. A continuación se presenta una fórmula recursiva que puede considerarse la versión discreta de la ecuación integral (1.13) que surge en el modelo de Cramér-Lundberg.

Proposición 5.2.2 *Supóngase un modelo de Gerber-Dickson donde el monto de las reclamaciones tiene como función de distribución a $F(x)$, entonces se cumple la siguiente fórmula recursiva:*

$$\psi(0) = \mu, \tag{5.10}$$

$$\psi(u) = \mu + \sum_{x=1}^u \psi(x) \bar{F}(u - x) - \sum_{x=0}^{u-1} \bar{F}(x), \quad u \geq 1. \tag{5.11}$$

Para la demostración de este resultado véase el artículo de Dickson (1994) [27, págs. 34 y 35].

Observación 5.2.3 *La igualdad (5.11) puede escribirse de la siguiente forma:*

$$\psi(u) = 1 - (1 - \mu)/f(0) - \sum_{x=1}^{u-1} (1 - \psi(x))\bar{F}(u-x)/f(0). \quad (5.12)$$

Esta fórmula es válida² para $u = 1, 2, 3, \dots$ y cuando $f(0) > 0$, es decir, cuando el soporte del monto de las reclamaciones comienza en cero.

La fórmula recursiva (5.11) resuelve el problema de calcular la probabilidad de ruina, sin embargo, implementarla puede ser difícil si se desconocen los valores de $\bar{F}(x)$. Una alternativa es aproximar el valor de $\psi(u)$. El objetivo principal de este capítulo es proponer dos formas para aproximar el valor de $\psi(u)$.

Los resultados de la sección siguiente serán de utilidad para desarrollar un resultado análogo a la fórmula de Pollaczeck-Khinchine (1.33) que fue mostrada en el capítulo 1.

5.3. La fórmula de Pollaczeck-Khinchine

En esta sección se hace un análisis muy similar al visto en la sección 1.2.1, incluso varias definiciones son análogas y varias demostraciones son casi idénticas a sus correspondientes en el modelo de Cramér-Lundberg. Se desarrolla la fórmula de Pollaczeck-Khinchine en su versión discreta. Esta fórmula expresa la probabilidad de ruina como un suma infinita que involucra a las convoluciones de la versión discreta de la distribución de equilibrio. A pesar de ser muy natural su obtención, no se hace énfasis de ella en la literatura relacionada al modelo discreto. Sin embargo, en este capítulo es de mucha trascendencia, porque será la herramienta principal para demostrar el teorema 5.6.1 más adelante.

A la variable aleatoria $Y = |U(\tau)|$ se le conoce como la severidad de la ruina, debido a que indica qué tan grande fue la caída del capital por debajo del cero en el momento de la ruina, nótese que puede haber severidad cero por la forma de definir el tiempo de ruina en (5.7). En Gerber (1988) [40] se obtienen algunos resultados relacionados a la distribución de

²Si $u = 1$, la suma se vuelve cero.

Y , además en Cheng et al. (2000) [13], Dickson (1994) [27], Li y Garrido (2002) [53] y Li y Garrido (2005) [54] se estudia la función de Gerber-Shiu en su versión discreta y se obtienen resultados relacionados a las distribuciones conjuntas, las distribuciones marginales y los momentos de Y , del capital justo antes de la ruina $|U(\tau - 1)|$ y del tiempo de ruina.

La probabilidad de ruina con severidad no mayor a $y = 0, 1, 2, \dots$ y suponiendo un capital inicial $U(0) = u$ se denota como sigue:

$$\varphi(u, y) = P(\tau < \infty, Y \leq y \mid U(0) = u). \quad (5.13)$$

En la siguiente proposición se da una fórmula para calcular $\varphi(0, y)$.

Proposición 5.3.1 *La función $\varphi(0, y)$ está dada por:*

$$\varphi(0, y) = \sum_{x=0}^y \bar{F}(x), \quad (5.14)$$

para cada valor de $y = 0, 1, 2, \dots$

Para la demostración de este resultado véase el artículo de Dickson (1994) [27, págs. 36 y 37].

Proposición 5.3.2 *La probabilidad de ruina con una severidad igual a y y capital inicial de cero está dada por:*

$$P(\tau < \infty, Y = y \mid U(0) = 0) = \bar{F}(y). \quad (5.15)$$

Demostración:

Primero por (5.13) y después por (5.14):

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty, Y = y \mid U(0) = 0) &= \varphi(0, y) - \varphi(0, y - 1) \\ &= \sum_{x=0}^y \bar{F}(x) - \sum_{x=0}^{y-1} \bar{F}(x) \\ &= \bar{F}(y). \end{aligned}$$

□

De forma análoga a las funciones de densidad de equilibrio f_e de las variables aleatorias continuas (las cuales resultaban ser absolutamente continuas), en el caso discreto se puede definir una función de probabilidad de equilibrio.

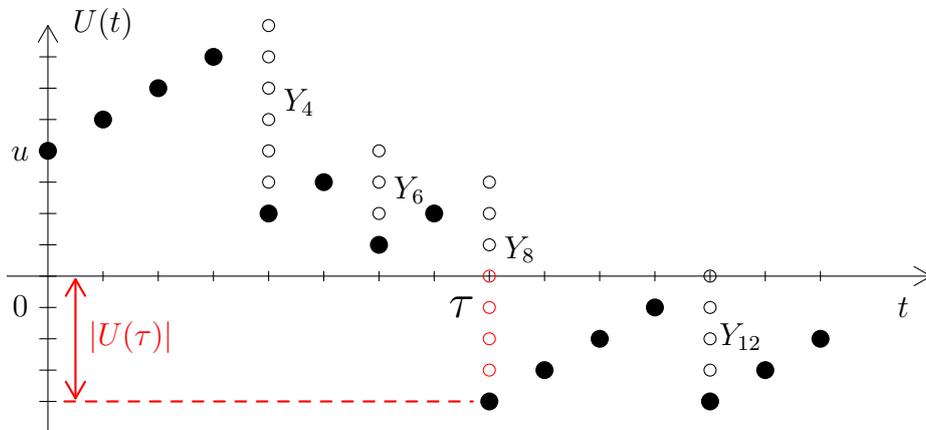


Figura 5.2: Ejemplo de una trayectoria de un proceso de riesgo discreto y la severidad de ruina.

Definición 5.3.3 Sea $F(x)$ la función de distribución de una variable aleatoria discreta con valores $0, 1, 2, \dots$ y con media $\mu < \infty$. Se define su función de probabilidad de equilibrio como:

$$f_e(x) = \bar{F}(x)/\mu, \quad (5.16)$$

para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$

Ejemplo 5.3.4 Supóngase una variable aleatoria con distribución $\text{Geo}(p)$, entonces, a partir de (5.16), para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \bar{F}(x)/\mu \\ &= (1-p)^{x+1} p / (1-p) \\ &= p(1-p)^x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de probabilidad de equilibrio de una distribución $\text{Geo}(p)$, es de nuevo $\text{Geo}(p)$.

A continuación se define el tiempo de la primera caída en el proceso de riesgo de Gerber-Dickson, aunque ahora se considera caída, tanto al evento

de que el proceso de riesgo $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$ llegue a estar por debajo del capital inicial u , como al evento de que $U(t)$ sea igual a u .

Definición 5.3.5 *Supóngase el modelo de Gerber-Dickson con un capital inicial de u . Se define τ_u como el primer momento cuando el proceso de riesgo es menor o igual al capital inicial u , es decir, para cada valor de $u = 0, 1, 2, \dots$*

$$\tau_u = \min\{t \geq 1 : U(t) \leq U(0) = u\}, \quad (5.17)$$

suponiendo que el conjunto indicado es distinto del vacío, en caso contrario, se define $\tau_u = \infty$.

Comparando las definiciones del tiempo de la primera caída y del tiempo de ruina, es claro que el tiempo de la primera caída es igual al tiempo de ruina cuando el capital inicial es cero. Usando la notación respectiva:

$$P(\tau_0 = t \mid \tau_0 < \infty) = P(\tau = t \mid \tau < \infty, U(0) = 0). \quad (5.18)$$

Definición 5.3.6 *Supóngase el modelo de Gerber-Dickson con un capital inicial de u . Se define el tamaño de la primera caída como la variable $Lu = u - U(\tau_u)$, suponiendo que $\tau_u < \infty$.*

Un resultado útil más adelante, es que la función de probabilidad de la variable aleatoria Lu es igual a la función de probabilidad de equilibrio del monto de las reclamaciones. La siguiente proposición enuncia este hecho y su demostración es una simple aplicación de la probabilidad condicional.

Proposición 5.3.7 *La función de probabilidad del tamaño de la primera caída por debajo del capital inicial está dada por:*

$$f_{Lu}(y) = f_e(y) = \bar{F}(y)/\mu, \quad (5.19)$$

para cada valor de $y = 0, 1, 2, \dots$

Demostración:

Supóngase que $y = 0, 1, 2, \dots$, entonces la función de probabilidad de Lu

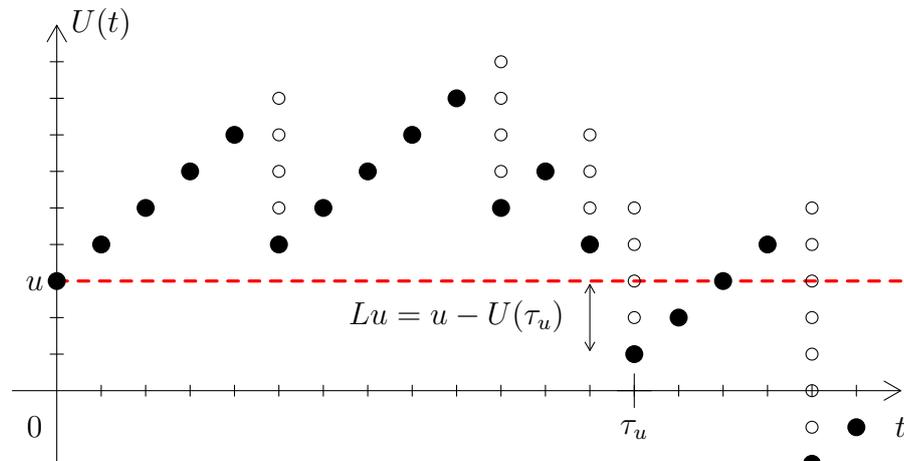


Figura 5.3: Ejemplo de una trayectoria del proceso de riesgo discreto y la primera caída por debajo del capital inicial.

está dada por:

$$\begin{aligned}
 f_{Lu}(y) &= P(Lu = y) \\
 &= P(u - U(\tau_u) = y \mid \tau_u < \infty) \\
 &= P(-U(\tau_0) = y \mid \tau_0 < \infty) \\
 &= P(|U(\tau)| = y \mid \tau < \infty, U(0) = 0) \\
 &= P(\tau < \infty, Y = y \mid U(0) = 0) / P(\tau < \infty \mid U(0) = 0) \\
 &= \bar{F}(y) / \mu.
 \end{aligned}$$

La última igualdad se da gracias a (5.10) y a (5.15).

□

De la misma forma en que el proceso de superávit definido en el capítulo 1 en (1.21) sirvió para tener una definición alterna de la probabilidad de ruina, en este capítulo se define un proceso de superávit para el modelo de Gerber-Dickson.

Definición 5.3.8 *Supóngase el proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ definido por:*

$$Z(t) = u - U(t) = \sum_{i=1}^t Y_i - t, \quad (5.20)$$

donde se supone que $U(0) = u$. Entonces se dice que $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ es el proceso de superávit relacionado al proceso de riesgo discreto de Gerber Dickson $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$.

Notar que $Z(t)$ puede escribirse como la siguiente suma:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^t (Y_i - 1),$$

para cada valor de $t = 1, 2, \dots$ y $Z(0) = 0$. Debido a que los montos de las reclamaciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ es una caminata aleatoria que inicia en cero, es cadena de Markov y tiene incrementos estacionarios e independientes. Además:

$$Z(t) \rightarrow -\infty \quad c.s. \quad (5.21)$$

suponiendo la condición de ganancia neta $\mu < 1$. Por último, la probabilidad de ruina se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(Z(t) \geq u \text{ para algún } t \geq 1) \\ &= P\left(\max_{t \geq 1} \{Z(t)\} \geq u\right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Definición 5.3.9 *Se define el tiempo del i -ésimo récord del proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ como:*

$$\begin{aligned} \tau_0^* &= 0, \\ \tau_i^* &= \min\{t > \tau_{i-1}^* : Z(t) \geq Z_{\tau_{i-1}^*}\}, \end{aligned}$$

para cada valor de $i = 1, 2, \dots$. Si el conjunto indicado es vacío, se define $\tau_i^* = \infty$.

Los tiempos anteriores representan tiempos de primer arribo del proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ a nuevos máximos, o bien, un nuevo arribo al máximo anterior. Puede observarse un ejemplo de estos tiempos en la figura 5.5.

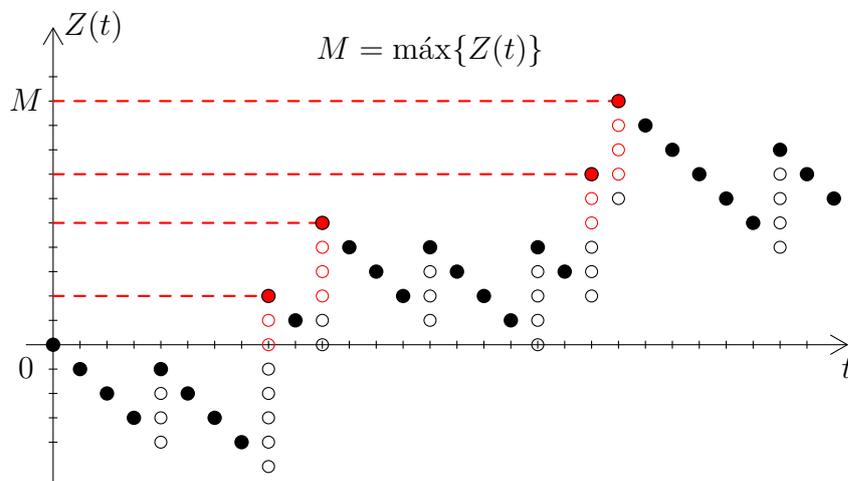


Figura 5.4: Ejemplo de una trayectoria del proceso de riesgo $\{Z(t)\}$.

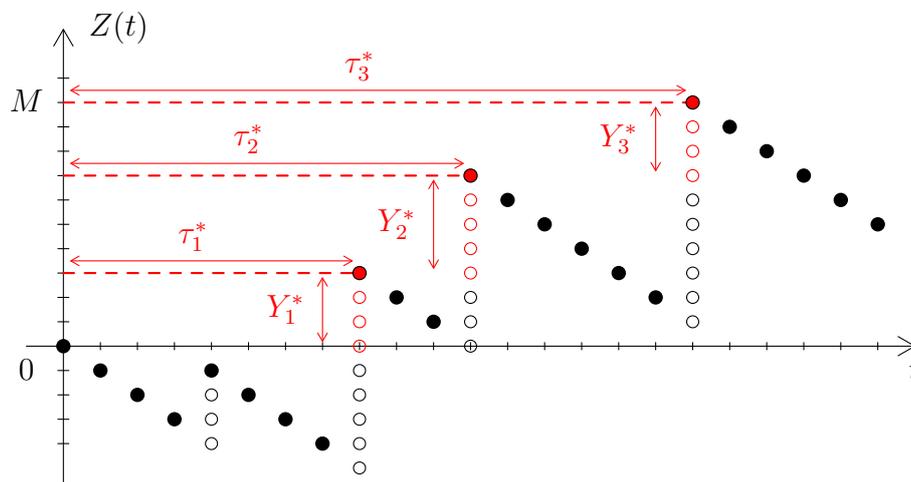


Figura 5.5: Ejemplo de una trayectoria del proceso de riesgo discreto, tiempos de los récords y tamaño de los récords.

Observación 5.3.10 *Notar que si para algún k se tiene que $\tau_k^* < \infty$, entonces $\tau_i^* < \infty$ para $i = 1, 2, \dots, k-1$, y si para algún valor de m se tiene que $\tau_m^* = \infty$, entonces $\tau_i^* = \infty$ para $i = m+1, m+2, \dots$. Como en el caso continuo en la sección 1.2, estas variables aleatorias cumplen con ser tiempos de paro con respecto a la filtración natural del proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^\infty$, es decir, su valor puede ser determinado por la trayectoria del proceso hasta ese momento.*

Por lo que se indica en la observación anterior, cuando se da al mismo tiempo que $\tau_k < \infty$ y $\tau_{k+1} = \infty$ para algún valor k , entonces ese valor es el número de máximos que ha habido hasta ese momento y además no habrá más. En congruencia con el capítulo 1, al evento de alcanzar un máximo en una trayectoria del proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^\infty$ se le conocerá como récord.

Como se menciona en la siguiente observación, para el caso especial de τ_1^* la definición coincide con el tiempo de la primera caída τ_0 , definido por (5.17). Si $U(0) = 0$, entonces coinciden las definiciones de τ_1^* , de τ_0 y del tiempo de ruina τ .

Observación 5.3.11 *Suponiendo que $U(0) = u$ y que $\tau_1^* < \infty$, entonces:*

$$\begin{aligned}\tau_1^* &= \min\{t > 0 : Z(t) \geq 0\} \\ &= \min\{t \geq 1 : U(t) \leq U(0) = u\} \\ &= \tau_u.\end{aligned}$$

Por lo anterior, $Z(\tau_1^*) = Z(\tau_u) = u - U(\tau_u)$, por lo tanto:

$$Z(\tau_1^*) = Lu, \quad (5.23)$$

y por (5.19), la función de probabilidad de $Z(\tau_1^*)$ es igual a la función de probabilidad de equilibrio f_e definida en (5.16). En general, suponiendo que $\tau_i^* < \infty$ y para $0 < s < x$,

$$\begin{aligned}P(\tau_i^* = x \mid \tau_{i-1}^* = s) &= P(\tau_i^* - \tau_{i-1}^* = x - s \mid \tau_{i-1}^* = s) \\ &= P(\tau_1^* = x - s).\end{aligned} \quad (5.24)$$

La segunda igualdad es consecuencia de los incrementos estacionarios e independientes del proceso de superávit.

El siguiente cálculo muestra que cada vez que hay un nuevo récord, el valor por el que es superado tiene como función de probabilidad a la función de probabilidad de equilibrio f_e definida en (5.16). Para simplificar la notación se escribirá:

$$p(s, y) = P(\tau_{i-1}^* = s, Z(\tau_{i-1}^*) = y),$$

para $s \geq i - 1$, $i \geq 2$ y $y \geq 0$. Sea $i \geq 2$, entonces:

$$\begin{aligned} P(Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*) = x) &= \\ &= \sum_{s=i-1}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} P(Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*) = x \mid \tau_{i-1}^* = s, Z(\tau_{i-1}^*) = y) p(s, y) \\ &= \sum_{s=i-1}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} P(Z(\tau_i^*) - Z(s) = x \mid \tau_{i-1}^* = s, Z(s) = y) p(s, y) \\ &= \sum_{s=i-1}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} P(Z(\tau_1^*) = x) p(s, y) \\ &= f_e(x). \end{aligned} \tag{5.25}$$

La tercera igualdad del desarrollo anterior se da gracias a los incrementos estacionarios e independientes del proceso de superávit.

Ahora, se estudia el número de récords que tendrá $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ durante una trayectoria.

Definición 5.3.12 *A la variable aleatoria*

$$K = \text{máx}\{k \geq 1 : \tau_k^* < \infty\},$$

se le conocerá como el número de récords del proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$, suponiendo que el conjunto indicado es distinto del vacío, en caso contrario se define $K = 0$ y se dirá que el proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tiene cero récords.

Notar que $K < \infty$, debido a que $Z(t) \rightarrow -\infty$ casi seguramente, bajo la hipótesis de ganancia neta, véase (5.21).

Proposición 5.3.13 *Sea K el número de récords de la definición 5.3.12. Entonces la función de probabilidad de K está dada por:*

$$f_K(k) = (1 - \psi(0))(\psi(0))^k, \tag{5.26}$$

para cada valor de $k = 0, 1, 2, \dots$, es decir, $K \sim \text{Geo}(1 - \psi(0))$.

Demostración:

Como se mencionó en la observación 5.3.11, el tiempo de la primera caída definido por (5.19) es equivalente al tiempo del primer récord, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 f_K(0) &= P(\tau_1^* = \infty) \\
 &= P(\tau_u = \infty) \\
 &= P(\tau = \infty \mid U(0) = 0) \\
 &= 1 - \psi(0).
 \end{aligned}$$

Esto demuestra la igualdad (5.26) para $k = 0$. Por otro lado, la probabilidad de que haya un récord es igual a la probabilidad de que $\tau_1^* < \infty$ y $\tau_2^* = \infty$, entonces:

$$\begin{aligned}
 f_K(1) &= P(\tau_1^* < \infty, \tau_2^* = \infty) \\
 &= P(\tau_2^* = \infty \mid \tau_1^* < \infty)P(\tau_1^* < \infty) \\
 &= P(\tau_1^* = \infty)P(\tau_1^* < \infty) \\
 &= f_K(0)P(K > 0) \\
 &= (1 - \psi(0))(\psi(0)).
 \end{aligned}$$

La tercera igualdad es válida por la igualdad (5.24). Queda demostrada la igualdad (5.26) para $k = 1$. Ahora se verá el caso general, sea $A_k = (\tau_1^* < \infty, \dots, \tau_k^* < \infty)$ para cada valor de $k = 2, 3, \dots$. Notar que el evento A_k se reduce a $(\tau_k^* < \infty)$ por la observación 5.3.10, entonces:

$$\begin{aligned}
 P(A_k) &= P(\tau_k^* < \infty \mid A_{k-1})P(A_{k-1}) \\
 &= P(\tau_k^* < \infty \mid \tau_{k-1}^* < \infty)P(A_{k-1}) \\
 &= P(\tau_1^* < \infty)P(A_{k-1}) \\
 &= \psi(0)P(A_{k-1}) \\
 &\vdots \\
 &= (\psi(0))^k.
 \end{aligned}$$

La tercera igualdad, de nuevo es válida porque $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tiene incrementos

estacionarios e independientes. Así, para cada valor de $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} f_K(k) &= P(\tau_{k+1}^* = \infty, A_k) \\ &= P(\tau_{k+1}^* = \infty \mid A_k)P(A_k) \\ &= P(\tau_1^* = \infty)(\psi(0))^k \\ &= (1 - \psi(0))(\psi(0))^k. \end{aligned}$$

□

En la figura 5.5, se puede observar que a cada tiempo τ_i^* se le relaciona una variable aleatoria Y_i^* que modela el tamaño del récord i . A continuación se definen tales variables.

Definición 5.3.14 Sean Y_1^*, Y_2^*, \dots variables aleatorias definidas por

$$Y_i^* = Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*), \quad (5.27)$$

para cada valor de $i = 1, 2, \dots$ siempre y cuando $\tau_i^* < \infty$. A cada variable Y_i^* se le conocerá como tamaño del récord i .

Proposición 5.3.15 Para un proceso de superávit supóngase que $K \geq 1$, entonces las variables aleatorias $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_K^*$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de probabilidad igual a $f_e(x)$, definida en (5.16), e independientes del número de récords K .

Demostración:

Primero, como se estableció en la observación 5.3.11 y por (5.25), cada Y_i^* tiene distribución igual a la distribución de equilibrio del monto de las reclamaciones y por lo tanto, son idénticamente distribuidas. Para mostrar que son variables aleatorias independientes, supóngase que K es conocido y sean Y_1, Y_2, \dots los montos de las reclamaciones del modelo de Gerber-Dickson del cual deriva el proceso de superávit. Entonces:

$$\begin{aligned} Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*) &= \sum_{j=1}^{\tau_i^*} (Y_j - 1) - \sum_{j=1}^{\tau_{i-1}^*} (Y_j - 1) \\ &= \sum_{j=\tau_{i-1}^*+1}^{\tau_i^*} (Y_j - 1), \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$Y_i^* = \sum_{j=\tau_{i-1}^*+1}^{\tau_i^*} (Y_j - 1).$$

La independencia se da porque las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots son independientes, formalmente:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^K (Y_i^* = y_i)\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^K \left(\sum_{j=\tau_{i-1}^*+1}^{\tau_i^*} (Y_j - 1) = y_i\right)\right) \\ &= \bigcap_{i=1}^K P\left(\sum_{j=\tau_{i-1}^*+1}^{\tau_i^*} (Y_j - 1) = y_i\right) \\ &= \bigcap_{i=1}^K P(Y_i^* = y_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y_1^*, \dots, Y_K^* son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Finalmente, la independencia entre el número de récords y el tamaño de esos récords, es consecuencia de la independencia entre los montos de las reclamaciones y el tiempo donde éstas se dan, al ser una variable determinista. □

En la siguiente proposición se establece que la distribución de

$$\max_{t \geq 1} \{Z(t)\},$$

es igual a la distribución de una suma geométrica compuesta, donde la variable de conteo está dada por K y las severidades corresponden a las variables Y_1^*, Y_2^*, \dots

Proposición 5.3.16 *Supóngase un proceso de superávit $\{Z(t)\}_{t=0}^\infty$, para el cual se tienen $K \geq 0$ récords, como en la definición 5.3.12, y los tamaño de los récords están dados por $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_K^*$ como en la definición 5.3.14. Entonces la variable aleatoria $\max_{t > 0} \{Z(t)\}$ se distribuye igual que la suma compuesta $\sum_{j=1}^K Y_j^*$, y por lo tanto:*

$$\psi(u) = P\left(\sum_{i=1}^K Y_i^* \geq u\right). \quad (5.28)$$

Demostración:

Sea $K \geq 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K Y_i^* &= \sum_{i=1}^K (Z(\tau_i^*) - Z(\tau_{i-1}^*)) \\ &= Z(\tau_K^*) \\ &\geq Z(t), \end{aligned}$$

donde la desigualdad se cumple para cualquier valor de $t \geq 0$, porque τ_K^* es el valor donde el proceso $\{Z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tiene su último récord. Esto implica que:

$$\sum_{i=1}^K Y_i^* = \max_{t>0} \{Z(t)\}. \quad (5.29)$$

Finalmente, por (5.22), para cada valor de $u = 1, 2, \dots$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P\left(\max_{t>0} \{Z(t)\} > u\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^K Y_i^* > u\right). \end{aligned}$$

El caso $K = 0$ es trivial puesto que implica que la probabilidad de ruina es cero. \square

Los resultados anteriores sirven para demostrar la fórmula de Pollaczeck-Khinchine. Dicha fórmula se usará más adelante para justificar las aproximaciones a la probabilidad de ruina que serán propuestas.

Proposición 5.3.17 (*Fórmula de Pollaczeck-Khinchine versión discreta.*)
Supóngase un modelo de Gerber-Dickson donde los montos de las reclamaciones tienen media μ . Usando la notación e hipótesis anteriores, para cada valor de $u = 1, 2, \dots$ la probabilidad de ruina puede calcularse como sigue:

$$\psi(u) = (1 - \mu) \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \geq u) \mu^k, \quad (5.30)$$

donde $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i^*$ para $k = 1, 2, \dots$ y Y_1^*, Y_2^*, \dots se definen como en (5.27).

Demostración:

Sea K la variable aleatoria que modela el número de récords del proceso

de superávit asociado, definido en (5.20). Por hipótesis, los montos de las reclamaciones tienen media μ , luego por (5.26) y (5.10) la variable K tiene distribución $\text{GeoT}(1 - \mu)$. Tomando en cuenta lo anterior, por (5.28) y condicionando con respecto a los valores de K :

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= P\left(\sum_{i=0}^K Y_i^* \geq u\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^k Y_i^* \geq u \mid K = k\right) f_K(k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^k Y_i^* \geq u\right) (1 - \mu)\mu^k \\
 &= (1 - \mu) \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \geq u)\mu^k.
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.3.18 *Uno de los casos donde se puede obtener la probabilidad de ruina aplicando la fórmula de Pollaczek-Khinchine es cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución $\text{Geo}(p)$, ($p > 1/2$). Para esta distribución, la distribución de equilibrio es de nuevo $\text{Geo}(p)$ (ver el ejemplo 5.3.4) y entonces la k -ésima convolución es una distribución $\text{BinNeg}(k, p)$. A continuación se muestra el cálculo.*

Sea $u \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= (1 - \mu) \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \geq u) \mu^k \\
 &= (1 - \mu) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{u+i-1}{i} p^i (1-p)^u \mu^k,
 \end{aligned}$$

haciendo intercambio de las sumas y sustituyendo $\mu = (1-p)/p$ se llega a:

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= \left(1 - \frac{1-p}{p}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} \binom{u+i-1}{i} p^i (1-p)^u \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \\
 &= \left(1 - \frac{1-p}{p}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{u+i-1}{i} p^i (1-p)^u \sum_{k=i+1}^{\infty} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \\
 &= (1-p)^{u+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{u+i-1}{i} (1-p)^i / p \\
 &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{u+1}. \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

En la sección siguiente se hace una descripción y análisis de la distribución mezcla de binomiales negativas (MIBN). Una de las aplicaciones de la igualdad (5.28) en este trabajo se encuentra en la demostración de la proposición 5.4.7, donde se calcula la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución MIBN. Después, en la sección 5.6, se aplica la fórmula de Pollaczek-Khinchine dentro de la demostración del teorema principal de este capítulo, el teorema 5.6.1.

5.4. Distribución mezcla de binomiales negativas

En esta sección se presenta la distribución mezcla de binomiales negativas que se usará como herramienta principal para generar una aproximación a la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tenga una distribución Poisson mezclada. Es importante señalar que a pesar de que la mezcla de binomiales negativas es un caso muy análogo a la distribución continua mezcla de Erlangs, no es posible usarla para aproximar cualquier distribución discreta con soporte no negativo. Solo se puede usar para aproximar distribuciones Poisson mezcladas, como se establece en el artículo de Steutel y Van Eenige (1997) [80, Teorema 1 en la pág. 273], el resultado puede consultarse en el apéndice A. En dicho artículo, los autores definen una distribución mezcla de binomiales negativas como una distribución cuya función generadora de probabilidad sea de la forma siguiente:

$$P(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m q_{k,m} \left(\frac{1 - p_{k,m}}{1 - p_{k,m} z} \right)^{r_{k,m}},$$

definida para $z < 1$ y donde los coeficientes $q_{k,m}$ son números positivos y suman uno. Esta es una distribución más general que la que se definirá en este capítulo, sin embargo, para los fines de la investigación de supondrá un caso particular que se establece en la definición siguiente.

Definición 5.4.1 *Supóngase que $0 < p < 1$, $\boldsymbol{\pi} = (q_1, q_2, \dots)$, $0 \leq q_k \leq 1$ y $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución mezcla infinita de binomiales negativas, o simplemente mezcla de binomiales negativas, con parámetros $\boldsymbol{\pi}$ y p si su función de probabilidad es la siguiente:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x, \quad (5.32)$$

para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$. En este caso, se escribe $X \sim MIBN(\boldsymbol{\pi}, p)$.

Cuando se hable de la distribución binomial negativa se usará la siguiente notación para sus funciones de probabilidad y de distribución, respectivamente:

$$\text{bn}(k, p)(x) = \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x,$$

y

$$\begin{aligned} \text{BN}(k, p)(x) &= \sum_{i=0}^x \text{bn}(k, p)(i) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{x+i}{i} p^i (1-p)^{x+1} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \text{bn}(x+1, 1-p)(i), \end{aligned}$$

ambas fórmulas válidas para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$. De esta manera, la función de probabilidad (5.32) puede escribirse como:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \text{bn}(k, p)(x),$$

para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$

Observación 5.4.2 *Una v.a. MIBN tiene la misma distribución que una suma compuesta. De forma detallada, sea N una v.a. discreta con función de probabilidad denotada por $f_N(k)$ para $k = 1, 2, \dots$ y sean X_1, X_2, \dots*

v.a.i.i.d. con distribución $\text{Geo}(p)$ e independientes de N , si se define $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$, entonces:

$$\begin{aligned} P(S_N = x) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^N X_i = x \mid N = k\right) P(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^k X_i = x\right) f_N(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) \text{bn}(k, p)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$S_N \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}, p). \quad (5.33)$$

donde $\boldsymbol{\pi} = (f_N(1), f_N(2), \dots)$.

De la observación anterior, que caracteriza a una distribución MIBN como suma compuesta, es fácil calcular algunas de sus propiedades. Por ejemplo, la esperanza está dada por:

$$\begin{aligned} E(S_N) &= E(N) E(X) \\ &= E(N) \left(\frac{1-p}{p}\right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ahora, se presenta una expresión para la función de distribución.

Proposición 5.4.3 *Supóngase que $S_N \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}, p)$, donde las probabilidades de N están dadas por $\boldsymbol{\pi} = (f_N(1), f_N(2), \dots)$, entonces su función de distribución puede escribirse de la forma siguiente:*

$$F_{S_N}(x) = E(F_N(Z)), \quad (5.35)$$

donde Z es una variable aleatoria con distribución $\text{BinNeg}(x+1, 1-p)$ para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$

Demostración:

$$\begin{aligned}
F_{S_N}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) \text{BN}(k, p)(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) \left[1 - \sum_{i=0}^{k-1} \text{bn}(x+1, 1-p)(i) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) \sum_{i=k}^{\infty} \text{bn}(x+1, 1-p)(i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^i f_N(k) \text{bn}(x+1, 1-p)(i) \\
&= E(F_N(Z)),
\end{aligned}$$

donde $Z \sim \text{BinNeg}(x+1, 1-p)$. Los intercambios de orden entre las sumas son válidos por el teorema de la convergencia dominada para series (véase apéndice C) usando como sucesión dominante cualquiera de las funciones de probabilidad.

□

En la proposición siguiente se establece que la función de probabilidad de equilibrio de una variable aleatoria MIBN es de nuevo MIBN.

Proposición 5.4.4 *Supóngase que $S_N \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}, p)$, donde la variable N tiene probabilidades dadas por $\boldsymbol{\pi} = (f_N(1), f_N(2), \dots)$, entonces la distribución de equilibrio de S_N es $\text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}_e, p)$, donde las probabilidades del vector $\boldsymbol{\pi}_e = (f_{N_e}(1), f_{N_e}(2), \dots)$ están determinadas por la función de probabilidad*

$$f_{N_e}(j) = \bar{F}_N(j-1)/E(N), \quad (5.36)$$

para cada valor de $j = 0, 1, 2, \dots$

Demostración:

Se usa la definición de f_e y después se aplica la proposición 5.4.3.

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \frac{1}{E(S_N)}(1 - F_{S_N}(x)) \\ &= \frac{p}{(1-p)E(N)} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{F}_N(i) \binom{x+i}{i} p^i (1-p)^{x+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{F}_N(i)}{E(N)} \binom{x+i}{i} p^{i+1} (1-p)^x, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de índice $j = i+1$, se llega a una función de probabilidad MIBN:

$$\begin{aligned} f_e(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{F}_N(j-1)}{E(N)} \binom{j+x-1}{x} p^j (1-p)^x \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{N_e}(j) \text{bn}(j, p)(x), \end{aligned}$$

donde $f_{N_e}(j) = \bar{F}_N(j-1)/E(N)$. Claramente $\sum_{j=1}^{\infty} f_{N_e}(j) = 1$. Por lo tanto, f_e es la función de probabilidad de una distribución MIBN($\boldsymbol{\pi}_e, p$), donde $\boldsymbol{\pi}_e = (f_{N_e}(1), f_{N_e}(2), \dots)$. □

La proposición siguiente establece que la suma geométrica compuesta de severidades con distribución MIBN, es de nuevo MIBN. Este resultado es fundamental para calcular la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución MIBN.

Proposición 5.4.5 *Supóngase que $M \sim \text{GeoT}(\rho)$ y sea S_{N_1}, S_{N_2}, \dots una sucesión de variables aleatorias, cada una con distribución MIBN($\boldsymbol{\pi}, p$), donde $\boldsymbol{\pi} = (f_N(1), f_N(2), \dots)$ y cada variable S_{N_j} con una variable de conteo asociada N_j , cuyas probabilidades están dadas por $\boldsymbol{\pi}$. Entonces:*

$$\sum_{j=1}^M S_{N_j} \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}^*, p), \quad (5.37)$$

donde $\boldsymbol{\pi}^*$ es el vector de probabilidades asociadas a una variable de conteo N^* , cuyas probabilidades pueden ser obtenidas de forma recursiva como

sigue:

$$f_{N^*}(1) = \rho f_N(1) \quad (5.38)$$

$$f_{N^*}(k) = (1 - \rho) \sum_{i=1}^{k-1} f_N(i) f_{N^*}(k-i) + \rho f_N(k), \quad (5.39)$$

para cada valor de $k = 2, 3, \dots$

Demostación:

Sean $S = \sum_{j=1}^M S_{N_j}$, $M \sim \text{GeoT}(\rho)$ y $S_{N_j} = \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}$, donde $P(N_j = k) = f_N(k)$ y $X_{ij} \sim \text{Geo}(p)$. Para $x \geq 1$ y $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(S = x \mid M = m) &= P\left(\sum_{j=1}^m S_{N_j} = x\right) \\ &= P\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij} = x\right) \\ &= P\left(\sum_{l=1}^{N_m} X_l = x\right), \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde $N_m = \sum_{i=1}^m N_i$ y $X_l \sim \text{Geo}(p)$ para $l \geq 1$. Ahora, condicionando con respecto a los valores de M y usando la expresión (5.40) se calcula $P(S = x)$, para $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(S = x) &= \sum_{m=1}^{\infty} P(S = x \mid M = m) f_M(m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{l=1}^{N_m} X_l = x\right) f_M(m) \\ &= P\left(\sum_{l=1}^{N^*} X_l = x\right), \end{aligned}$$

donde $N^* = \sum_{i=1}^M N_i$. Debido a que $X_l \sim \text{Geo}(p)$, entonces usando la caracterización (5.33), la suma compuesta $\sum_{l=1}^{N^*} X_l$ tiene distribución MIBN($\boldsymbol{\pi}^*$, p), donde las probabilidades de $\boldsymbol{\pi}^*$ están dadas por la función de probabilidad de N^* , las cuales pueden calcularse de forma recursiva usando la fórmula de Panjer (véase apéndice A):

$$\begin{aligned} f_{N^*}(1) &= \rho f_N(1), \\ f_{N^*}(k) &= (1 - \rho) \sum_{i=1}^{k-1} f_N(i) f_{N^*}(k-i) + \rho f_N(k), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Por último, se verifica el valor de $P(S = 0)$. Recordar que $P_X(r)$ denota la función generadora de probabilidad de una v.a. X , entonces:

$$\begin{aligned}
 P(S = 0) &= P_S(0) \\
 &= P_M(P_N(P_{X_{i_j}}(0))) \\
 &= P_M(P_N(p)) \\
 &= \frac{\rho P_N(p)}{1 - (1 - \rho) P_N(p)}. \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, suponiendo que $S \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}^*, p)$:

$$\begin{aligned}
 P(S = 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{N^*}(k) \text{bn}(k, p)(0) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{N^*}(k) p^k \\
 &= f_{N^*}(1) p + \sum_{k=2}^{\infty} f_{N^*}(k) p^k.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de $f_{N^*}(k)$ a partir de (5.38) y de (5.39):

$$\begin{aligned}
 P(S = 0) &= \rho f_N(1) p + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(1 - \rho) \sum_{i=1}^{k-1} f_N(i) f_{N^*}(k - i) + \rho f_N(k) \right] p^k \\
 &= \rho f_N(1) p + (1 - \rho) \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} f_N(i) f_{N^*}(k - i) p^k + \rho \sum_{k=2}^{\infty} f_N(k) p^k \\
 &= \rho \sum_{k=1}^{\infty} f_N(k) p^k + (1 - \rho) \sum_{i=1}^{\infty} f_N(i) \sum_{k=i+1}^{\infty} f_{N^*}(k - i) p^k,
 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de índice $j = k - i$:

$$\begin{aligned}
 P(S = 0) &= \rho P_N(p) + (1 - \rho) \sum_{i=1}^{\infty} f_N(i) \sum_{j=1}^{\infty} f_{N^*}(j) p^{i+j} \\
 &= \rho P_N(p) + (1 - \rho) \sum_{i=1}^{\infty} f_N(i) p^i \sum_{j=1}^{\infty} f_{N^*}(j) p^j \\
 &= \rho P_N(p) + (1 - \rho) P_N(p) P(S = 0).
 \end{aligned}$$

Despejando $P(S = 0)$, se llega a la misma expresión que en (5.41), por lo tanto, $S \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}^*, p)$.

□

Observación 5.4.6 A partir de las fórmulas recursivas (5.38) y (5.39), se puede derivar una fórmula para calcular los valores de $\bar{F}_{N^*}(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} f_{N^*}(i)$ para $k = 1, 2, \dots$

$$\bar{F}_{N^*}(k) = (1 - \rho) \sum_{j=1}^k f_N(j) \bar{F}_{N^*}(k - j) + \bar{F}_N(k). \quad (5.42)$$

A continuación se presentan los cálculos para obtener (5.42).

Para $k = 1$:

$$F_{N^*}(1) = f_{N^*}(1) = \rho f_N(1),$$

por lo tanto, $\bar{F}_{N^*}(1) = 1 - \rho f_N(1)$, lo cual coincide con la fórmula (5.42) cuando $k = 1$.

Para $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} F_{N^*}(k) &= \sum_{i=1}^k f_{N^*}(i) \\ &= f_{N^*}(1) + \sum_{i=2}^k \left[(1 - \rho) \sum_{j=1}^{i-1} f_N(j) f_{N^*}(i - j) + \rho f_N(i) \right] \\ &= \rho f_N(1) + (1 - \rho) \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} f_N(j) f_{N^*}(i - j) + \rho \sum_{i=2}^k f_N(i) \\ &= \rho \sum_{i=1}^k f_N(i) + (1 - \rho) \sum_{j=1}^{k-1} f_N(j) \sum_{i=j+1}^k f_{N^*}(i - j), \end{aligned}$$

haciendo el cambio de índice $m = i - j$, se llega a la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} F_{N^*}(k) &= \rho F_N(k) + (1 - \rho) \sum_{j=1}^{k-1} f_N(j) \sum_{m=1}^{k-j} f_{N^*}(m) \\ &= \rho F_N(k) + (1 - \rho) \sum_{j=1}^{k-1} f_N(j) F_{N^*}(k - j). \end{aligned}$$

A partir de la última igualdad se llega la expresión en (5.42).

En el siguiente resultado se establece una fórmula para calcular la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene una distribución MIBN.

Teorema 5.4.7 *Supóngase que en el modelo de Gerber-Dickson (5.6), el monto de las reclamaciones tiene distribución MIBN($\boldsymbol{\pi}, p$), donde $\boldsymbol{\pi} = (f_N(1), f_N(2), \dots)$ y $E(N) < \infty$, entonces la probabilidad de ruina es la siguiente:*

$$\psi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_k P(Z_u = k) \quad (5.43)$$

$$= E(\bar{C}_{Z_u}), \quad (5.44)$$

para cada valor de $u = 1, 2, \dots$ y donde $Z_u \sim \text{BinNeg}(u, 1 - p)$. Los valores de la sucesión $\{\bar{C}_k\}_{k=0}^{\infty}$ quedan determinados por las tres igualdades siguientes:

$$\bar{C}_0 = E(N)(1 - p)/p, \quad (5.45)$$

$$\bar{C}_k = \bar{C}_0 \left[\sum_{i=1}^k f_{Ne}(i) \bar{C}_{k-i} + \bar{F}_{Ne}(k) \right], \quad (5.46)$$

$$f_{Ne}(i) = \frac{\bar{F}_N(i - 1)}{E(N)}. \quad (5.47)$$

Demostración:

Sea

$$R_0 = \sum_{j=1}^{M_0} Y_{e,j},$$

una suma compuesta donde $M_0 \sim \text{Geo}(\rho)$, y sean $Y_{e,1}, Y_{e,2}, \dots$ las variables aleatorias de equilibrio del monto de las reclamaciones MIBN($\boldsymbol{\pi}, p$). Por la proposición 5.4.4,

$$Y_{e,j} \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}_e, p),$$

para cada valor de $j = 1, 2, \dots$ y donde las probabilidades en $\boldsymbol{\pi}_e$ están dadas por $f_{Ne}(j) = \bar{F}_N(j - 1)/E(N)$.

Por la igualdad 5.28 y después condicionando con respecto a los valores de M_0 , para $u \geq 1$:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(R_0 \geq u) \\ &= P(R_0 \geq u \mid M_0 > 0)P(M_0 > 0) + P(R_0 \geq u \mid M_0 = 0)P(M_0 = 0) \\ &= P(R_0 \geq u \mid M_0 > 0) (1 - \rho) \\ &= (1 - \rho) P(R \geq u), \end{aligned}$$

donde la variable aleatoria R es definida como la siguiente suma compuesta:

$$R := \sum_{j=1}^M Y_{e,j},$$

para la cual, $M \sim \text{GeoT}(\rho)$ con función de probabilidad $f_M(k) = \rho(1 - \rho)^{k-1}$, para $k = 1, 2, \dots$ y por la proposición 5.3.13, $\rho = 1 - \psi(0)$.

Por la proposición 5.4.5, $R \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}^*, p)$, donde las probabilidades de $\boldsymbol{\pi}^*$ están dadas por las ecuaciones (5.38) y (5.39).

Ahora, por conveniencia se establece la siguiente notación:

$$\bar{C}_k = (1 - \rho)\bar{F}_{N^*}(k), \quad (5.48)$$

para $k \geq 0$. Entonces, por (5.35):

$$\begin{aligned} (1 - \rho)P(R > u) &= (1 - \rho)E(\bar{F}_{N^*}(Z_u)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_k P(Z_u = k). \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos los coeficientes \bar{C}_k ya tomando en cuenta que $\rho = 1 - \psi(0)$, que en este caso es igual a $1 - E(N)(1 - p)/p$ por (5.10) y (5.34), entonces:

$$\begin{aligned} \bar{C}_0 &= (1 - \rho)\bar{F}_{N^*}(0) \\ &= 1 - \rho \\ &= E(N)(1 - p)/p, \end{aligned}$$

y por (5.42):

$$\begin{aligned} \bar{C}_k &= (1 - \rho)\bar{F}_{N^*}(k) \\ &= \bar{C}_0 \left[\sum_{i=1}^k f_{N_e}(i)\bar{C}_{k-i} + \bar{F}_{N_e}(k) \right], \end{aligned}$$

para cada valor de $k = 1, 2, \dots$ □

Ejemplo 5.4.8 *Un caso especial de una distribución MIBN, es la distribución geométrica, que se obtiene cuando $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, 0, \dots)$. A continuación se calcula la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones sigue una distribución $\text{Geo}(p)$ usando la fórmula (5.43).*

Usando las fórmulas (5.45) a (5.47):

$$\begin{aligned}\bar{C}_0 &= (1-p)/p. \\ \bar{C}_1 &= (1-p)/p (f_{Ne}(1)(1-p)/p + \bar{F}_{Ne}(1)) \\ &= ((1-p)/p)^2. \\ \bar{C}_2 &= (1-p)/p (f_{Ne}(1)((1-p)/p)^2 + f_{Ne}(2)(1-p)/p + \bar{F}_{Ne}(2)) \\ &= ((1-p)/p)^3. \\ &\vdots \\ \bar{C}_k &= ((1-p)/p)^{k+1}.\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo en la fórmula del teorema 5.4.7:

$$\psi(0) = \frac{1-p}{p}.$$

Y

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_k \binom{u+k-1}{k} (1-p)^u p^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)/p)^{k+1} \binom{u+k-1}{k} (1-p)^u p^k \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{u+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u+k-1}{k} (1-p)^k p^u \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{u+1}.\end{aligned}$$

De esta manera, se ha vuelto a obtener la probabilidad de ruina que se obtuvo en (5.31).

A continuación se presentan algunos resultados que servirán para establecer en qué caso se puede hacer una aproximación basándose en el uso de mezclas de binomiales negativas.

5.5. Distribución Poisson mezclada

La distribución Poisson mezclada surge al considerar un fenómeno que se puede modelar con una distribución Poisson, pero con un parámetro

desconocido. Al suponer que el parámetro es una variable aleatoria Λ , se llega a la distribución Poisson mezclada, cuya distribución de mezcla o mezclante, es la función de distribución de Λ . En el contexto de estadística Bayesiana, a la distribución de Λ se le conoce como distribución a priori. Una referencia que contiene muchas propiedades de esta distribución es el libro de Grandell (1997) [46]. Una referencia posterior que contiene una amplia revisión del tema así como una gran muestra de distribuciones conocidas que surgen de una distribución Poisson mezclada es el artículo de Karlis y Xekalaki (2005) [49]. A continuación se presenta la definición de distribución Poisson mezclada.

Definición 5.5.1 *Se dice que una variable aleatoria discreta X tiene distribución Poisson mezclada con función de distribución mezclante F_Λ si la variable aleatoria condicionada $X \mid (\Lambda = \lambda)$ tiene distribución $\text{Poisson}(\lambda)$, para alguna variable aleatoria Λ positiva.*

Cuando una variable aleatoria X tenga distribución Poisson mezclada con función de distribución mezclante F_Λ , se escribirá $X \sim \text{PM}(F_\Lambda)$. Los siguientes resultados son muy conocidos y fáciles de demostrar, todos ellos pueden consultarse en Karlis y Xekalaki (2005) [49].

Proposición 5.5.2 *Supóngase que $X \sim \text{PM}(F_\Lambda)$, entonces:*

a) *Para $x = 0, 1, 2, \dots$ la función de probabilidad de X está dada por la siguiente expresión:*

$$P(X = x) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^x / x! dF_\Lambda(\lambda). \quad (5.49)$$

En el caso particular de que Λ sea una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $f_\Lambda(i)$, $i \geq 1$, entonces:

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} i^x / x! f_\Lambda(i). \quad (5.50)$$

b) *El valor esperado de X es igual al valor esperado de Λ .*

c) *La función generadora de probabilidad de X está dada por:*

$$P_X(r) = \int_0^\infty e^{-\lambda(1-r)} dF_\Lambda(\lambda), \quad (5.51)$$

suponiendo valores de $r < 1$.

La siguiente proposición establece una relación muy interesante entre la distribución MIE, de la cual se habla en el capítulo 2, y la distribución MIBN.

Proposición 5.5.3 *Supóngase que F_Λ es función de distribución MIE($\boldsymbol{\pi}$, β), donde $\boldsymbol{\pi} = (q_1, q_2, \dots)$ y $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. Entonces la función de probabilidad de una distribución PM(F_Λ) es igual a la función de probabilidad de una distribución MIBN($\boldsymbol{\pi}$, $\beta/(\beta + 1)$).*

Demostración:

Sea $X \sim \text{PM}(F_\Lambda)$, donde F_Λ es una función de distribución MIE($\boldsymbol{\pi}$, β), donde $\boldsymbol{\pi} = (q_1, q_2, \dots)$ y $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. Entonces la función de probabilidad de X se obtiene al aplicar la igualdad (5.49) y después completar una función de densidad gama, como se muestra a continuación:

$$P(X = x) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^x / x! \sum_{k=1}^{\infty} q_k \text{erl}(k, \beta)(\lambda) d\lambda \quad (5.52)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{\beta}{\beta + 1} \right)^k \left(\frac{1}{\beta + 1} \right)^x \frac{(k + x - 1)!}{(k - 1)! x!} \quad (5.53)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \text{bn}(k, \beta/(\beta + 1))(x), \quad (5.54)$$

para valores de $x = 0, 1, 2, \dots$. Por lo tanto, $X \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}, \beta/(\beta + 1))$. □

Ejemplo 5.5.4 *Sea $X \sim \text{PM}(F_\Lambda)$, donde $\Lambda \sim \text{Exp}(\beta)$. Debido a que una distribución exponencial es igual a una mezcla de Erlangs con parámetros $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, 0, \dots)$ y β , entonces por la proposición 5.5.3 se cumple que:*

$$P(X = x) = \text{bn}(1, \beta/(\beta + 1))(x),$$

para valores de $x = 0, 1, 2, \dots$ y esto implica que $X \sim \text{Geo}(p)$, donde $p = \beta/(\beta + 1)$.

Ahora, se enuncia una proposición que será muy útil para mostrar que una distribución Poisson mezclada puede ser aproximada con funciones de distribución MIBN. Dicho resultado aparece en Grandell (1997) [46]. Recordar que la notación $X_n \xrightarrow{D} X$ quiere decir que la sucesión X_1, X_2, \dots converge en distribución a X .

Proposición 5.5.5 Sean $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias positivas, cuyas funciones de distribución están dadas por F_1, F_2, \dots y sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias, donde cada $X_i \sim PM(F_i)$, $i \geq 1$. Entonces $X_n \xrightarrow{D} X$, si y solo si, $\Lambda_n \xrightarrow{D} \Lambda$, donde $X \sim PM(F_\Lambda)$.

Para la demostración de este resultado véase Grandell (1997) [46, pág. 16].

Ahora, se establece cómo debe generarse una sucesión de distribuciones mezcla de binomiales negativas para aproximar cualquier distribución Poisson mezclada.

Proposición 5.5.6 Sea $X \sim PM(F_\Lambda)$, donde F_Λ puede ser una función de distribución continua con soporte positivo, o bien, la función de distribución de una variable aleatoria discreta positiva. Para cada valor de $n \geq 1$, sea X_n una variable aleatoria con distribución MIBN($\boldsymbol{\pi}_n, p_n$), donde:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_n &= (q(1, n), q(2, n), \dots), \\ q(k, n) &= F_\Lambda(k/n) - F_\Lambda((k-1)/n), \\ p_n &= n/(n+1),\end{aligned}$$

entonces $X_n \xrightarrow{D} X$.

Demostración:

Primero, supóngase que F_Λ es continua. Sean $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ variables aleatorias con función de distribución dada por la siguiente mezcla de Erlangs (véase capítulo 2):

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q(k, n) \text{Erl}(k, n)(x), \quad (5.55)$$

para $x > 0$, y donde $q(k, n) = F_\Lambda(k/n) - F_\Lambda((k-1)/n)$. Por la proposición 2.1.7, se sabe que para cualquier $x > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_\Lambda(x).$$

Como $\Lambda_n \xrightarrow{D} \Lambda$, entonces por la proposición 5.5.5, $X_n \xrightarrow{D} X$, donde X_n tiene distribución PM(F_n). Por último, por la proposición 5.5.3, la distribución de X_n es una MIBN($\boldsymbol{\pi}, p_n$), con parámetros $\boldsymbol{\pi} = (q(1, n), q(2, n), \dots)$ y $p_n = n/(n+1)$. Esto prueba la proposición para una función de distribución mezclante continua.

Ahora, supóngase que F_Λ es la función de distribución de una variable aleatoria discreta con soporte positivo. Sea $Y_n \sim \text{BinNeg}(\lambda n, n/(n+1))$, donde λ y n son enteros positivos y sea Z una variable aleatoria Poisson(λ). Sean $P_{Y_n}(r)$ y $P_Z(r)$ las funciones generadoras de probabilidad de Y_n y Z . Es conocido que ambas funciones generadoras existen para cualquier valor de $r < 1$. Entonces, suponiendo que $r < 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{Y_n}(r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1-r}{n}\right)^{-\lambda n} \\ &= \exp\{-\lambda(1-r)\} \\ &= P_Z(r). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Y_n \xrightarrow{D} Z. \quad (5.56)$$

Por otro lado, supóngase que X es una variable aleatoria Poisson mezclada con función de probabilidad $f_X(x)$ para $x = 0, 1, 2, \dots$ y que su distribución mezclante Λ es discreta con función de probabilidad $f_\Lambda(\lambda)$ para $\lambda = 1, 2, \dots$. Sea $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de variables aleatorias, cada una con función de probabilidad dada por:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q(k, n) \text{bn}\left(k, \frac{n}{n+1}\right)(x), \quad (5.57)$$

para $n = 1, 2, \dots$; $x = 0, 1, \dots$ y donde $q(k, n) = F_\Lambda(k/n) - F_\Lambda((k-1)/n)$. Notar que para cualquier número natural n , si k no es múltiplo de n , entonces $q(k, n) = 0$. Sea $k = \lambda n$, para $\lambda = 1, 2, \dots$, entonces:

$$q(k, n) = q(\lambda n, n) = f_\Lambda(\lambda).$$

Por lo anterior, supóngase que $x = 0, 1, \dots$ fijo, entonces:

$$\begin{aligned} f_{X_n}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} q(k, n) \text{bn}(k, n/(n+1))(x) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} q(\lambda n, n) \text{bn}(\lambda n, n/(n+1))(x) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} f_\Lambda(\lambda) \text{bn}(\lambda n, n/(n+1))(x). \end{aligned}$$

Ahora, tomando límites y por (5.56):

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} f_{X_n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} f_{\Lambda}(\lambda) \text{bn}(\lambda n, n/(n+1))(x) \\
 &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} f_{\Lambda}(\lambda) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{bn}(\lambda n, n/(n+1))(x) \\
 &= \sum_{\lambda=1}^{\infty} f_{\Lambda}(\lambda) \text{poisson}(\lambda)(x) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

Entonces, se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad (5.58)$$

para cualquier $x = 0, 1, 2, \dots$ y por lo tanto:

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Esto prueba el resultado también para el caso discreto de Λ . □

La proposición 5.5.6, indica que para una variable aleatoria $X \sim \text{PM}(F_{\Lambda})$, su función de probabilidad puede ser aproximada con una función de probabilidad MIBN con parámetros adecuados. Es decir, para un valor de n suficientemente grande:

$$P(X = x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} q(k, n) \text{bn}(k, p_n)(x), \quad (5.59)$$

donde:

$$q(k, n) = F_{\Lambda}(k/n) - F_{\Lambda}((k-1)/n), \quad (5.60)$$

$$p_n = \frac{n}{n+1}. \quad (5.61)$$

Observación 5.5.7 Para una variable aleatoria $X_n \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}_n, p_n)$ como en la proposición anterior, se cumple que:

$$E(X_n) < 1. \quad (5.62)$$

5.6. Aproximación a la probabilidad de ruina

El procedimiento para aproximar la probabilidad de ruina, análogo al utilizado en la sección 4.1, es el siguiente:

- Suponer que se tiene una función de distribución $F(x)$ de una distribución PM(F_Λ); y sea $\{F_n(x)\}$ una sucesión de funciones de distribución definidas como en la proposición 5.5.6, es decir, funciones de distribución mezcla de binomiales negativas aproximantes a $F(x)$.
- Si n es lo suficientemente grande, $F_n(x)$ estará cerca de $F(x)$, y como se muestra más adelante, también $\psi_n(u)$ estará cerca de $\psi(u)$, donde $\psi_n(u)$ representa la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene función de distribución $F_n(x)$, y $\psi(u)$ es la probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene función de distribución $F(x)$. Así, el valor de $\psi_n(u)$ podrá ser usado como una aproximación a $\psi(u)$.

Este procedimiento queda formalizado en el siguiente teorema.

Teorema 5.6.1 *Supóngase que en el modelo de Gerber-Dickson el monto de las reclamaciones tiene distribución Poisson mezclada con función de distribución mezclante F_Λ , entonces:*

$$\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u),$$

para cada valor de $u = 1, 2, \dots$ y donde:

$$\psi_n(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{k,n} P(Z = k) \quad (5.63)$$

$$= E(\bar{C}_{Z,n}), \quad (5.64)$$

para cada valor de $n = 1, 2, \dots$ y donde Z representa una variable aleatoria con distribución BinNeg($u, 1/(1+n)$). Los valores de la sucesión $\{\bar{C}_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$

quedan determinados por:

$$\bar{C}_{0,n} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_{\Lambda}(j/n)/n, \quad (5.65)$$

$$\bar{C}_{k,n} = \bar{C}_{0,n} \left[\sum_{i=1}^k f_{Ne}(i) \bar{C}_{k-i,n} + \bar{F}_{Ne}(k) \right], \quad (5.66)$$

$$f_{Ne}(i) = \frac{\bar{F}_{\Lambda}((i-1)/n)}{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_{\Lambda}(j/n)}. \quad (5.67)$$

Demostración:

Supóngase que $X \sim \text{PM}(F_{\Lambda})$, donde Λ es una variable aleatoria positiva, ya sea discreta o continua, pero con $E(X) < 1$. Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias tales que para cada valor de $n = 1, 2, \dots$ la variable aleatoria $X_n \sim \text{MIBN}(\boldsymbol{\pi}_n, p_n)$, donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_n &= (q(1, n), q(2, n), \dots), \\ q(k, n) &= F_{\Lambda}(k/n) - F_{\Lambda}((k-1)/n), \\ p_n &= n/(n+1). \end{aligned}$$

De esta manera, la función de probabilidad de X_n está dada por:

$$f_{X_n}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q(k, n) \text{bn}(k, n/(n+1))(x), \quad (5.68)$$

para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$ y donde $q(k, n) = F_{\Lambda}(k/n) - F_{\Lambda}((k-1)/n)$. Sea N_n una variable aleatoria con función de probabilidad $f_{N_n}(k) = q(k, n)$ para $k \geq 1$. Primero, por la igualdad (5.34):

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E(N_n) \frac{1/(n+1)}{n/(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(N_n = k)/n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k/n) q(k, n). \end{aligned}$$

Tomando límites:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (k/n) q(k, n) \\
 &= \int_0^{\infty} x dF_{\Lambda}(x) \\
 &= E(\Lambda) \\
 &= E(X).
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Ahora, por la proposición 5.5.6 se tiene que $X_n \xrightarrow{D} X$, lo cual implica que para cada valor de $x = 0, 1, 2, \dots$ se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

lo cual implica también:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}_{X_n}(x) = \bar{F}_X(x).$$

Combinando lo anterior con (5.69):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_{X_n}(x)}{E(X_n)} = \frac{\bar{F}_X(x)}{E(X)}.$$

Por lo tanto, para $x = 0, 1, 2, \dots$ la función de probabilidad de equilibrio de X_n converge a la función de probabilidad de equilibrio de X , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{e,n}(x) = f_e(x). \tag{5.70}$$

Suponiendo que X_{n1}, X_{n2}, \dots son variables aleatorias independientes cuya función de probabilidad es $f_{e,n}(x)$ y su función generadora de probabilidad está dada por $P_n(r)$, entonces la función generadora de probabilidad de

$$S_{k,n} := \sum_{i=1}^k X_{ni}, \tag{5.71}$$

es igual a

$$P_{S_{k,n}}(r) = (P_n(r))^k,$$

tomando límites, usando (5.70) y debido a la continuidad de la función generadora de probabilidad para $r < 1$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} P_{S_{k,n}}(r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(r))^k \\
 &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(r) \right)^k \\
 &= (P_e(r))^k,
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

donde $P_e(r)$ es la función generadora de probabilidad de la distribución de equilibrio de X . Si se definen $X_{e,1}, X_{e,2}, \dots$ como variables aleatorias independientes, con función de probabilidad igual a $f_e(x)$, entonces la suma

$$S_k := \sum_{i=1}^k X_{e,i}, \quad (5.73)$$

tiene como función generadora de probabilidad a:

$$P_{S_k}(r) = (P_e(r))^k, \quad (5.74)$$

Igualando (5.74) y (5.72):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{S_{k,n}}(r) = P_{S_k}(r),$$

para $r < 1$. Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{e,n}^{*k}(x) = F_e^{*k}(x). \quad (5.75)$$

Para terminar la prueba se calcula $\psi_n(u)$ a partir de la fórmula de Pollaczek-Khinchine :

$$\begin{aligned} \psi_n(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S_{k,n} \geq u) (1 - E(X_n)) E(X_n)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - P(S_{k,n} \leq u - 1)) (1 - E(X_n)) E(X_n)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - F_{e,n}^{*k}(u - 1)) (1 - E(X_n)) E(X_n)^k, \end{aligned}$$

tomando límites y usando (5.69) y (5.75):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - F_{e,n}^{*k}(u - 1)) (1 - E(X_n)) E(X_n)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F_{e,n}^{*k}(u - 1)) (1 - E(X_n)) E(X_n)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - F_e^{*k}(u - 1)) (1 - E(X)) E(X)^k \\ &= \psi(u). \end{aligned}$$

El límite puede entrar a la suma en el cálculo anterior por el teorema de la convergencia monótona para series. Por (5.62) se cumple que $E(X_n) < 1$,

entonces se usa como sucesión dominante a $E(X_n)^k$, y $\sum_{k=1}^{\infty} E(X_n)^k = E(X_n)/(1 - E(X_n)) < \infty$.

Ahora calculamos la forma de ψ_n . Como se tiene que el monto de las reclamaciones (modeladas con X_n) tienen distribución $MIBN(\boldsymbol{\pi}_n, p_n)$, donde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_n &= (q(1, n), q(2, n), \dots), \\ q(k, n) &= F_{\Lambda}(k/n) - F_{\Lambda}((k-1)/n), \\ p_n &= n/(n+1),\end{aligned}$$

entonces, por el teorema 5.4.7:

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{k,n} P(Z = k) \\ &= E(\bar{C}_{Z,n}),\end{aligned}$$

para cada valor de $u = 1, 2, \dots$ y donde $Z \sim \text{BinNeg}(u, 1/(n+1))$ y los valores de la sucesión $\{\bar{C}_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$ quedan determinados por las tres igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{0,n} &= E(N_n)/n, \\ \bar{C}_{k,n} &= \bar{C}_{0,n} \left[\sum_{i=1}^k f_{Ne}(i) \bar{C}_{k-i,n} + \bar{F}_{Ne}(k) \right], \\ f_{Ne}(i) &= \frac{\bar{F}_{N_n}(i-1)}{E(N_n)}.\end{aligned}$$

Así, solo resta calcular la forma de $E(N_n)$ y de $\bar{F}_{N_n}(i-1)$. Para el cálculo de $E(N_n)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}E(N_n) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(N_n > j-1) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} q(i, n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} (F_{\Lambda}(i/n) - F_{\Lambda}((i-1)/n)) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_{\Lambda}(j/n).\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\bar{C}_{0,n} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_{\Lambda}(j/n)/n.$$

Para el cálculo de $\bar{F}_{N_n}(i-1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{N_n}(i-1) &= P(N_n > i-1) \\ &= \sum_{k=i}^{\infty} q(k, n) \\ &= \sum_{k=i}^{\infty} (F_{\Lambda}(k/n) - F_{\Lambda}((k-1)/n)) \\ &= \bar{F}_{\Lambda}((i-1)/n). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f_{Ne}(i) = \frac{\bar{F}_{\Lambda}((i-1)/n)}{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_{\Lambda}(j/n)}.$$

□

En la siguiente sección se establecen dos métodos de aproximación a la probabilidad de ruina a partir de las fórmulas (5.63) y (5.64). Una observación importante sobre el coeficiente $\bar{C}_{0,n} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_{\Lambda}(j/n)/n$, necesario para calcular el resto de los coeficientes $\bar{C}_{k,n}$, es que representa una suma superior de la integral de \bar{F}_{Λ} . Debido a que el límite de $\bar{C}_{0,n}$ cuando $n \rightarrow \infty$ es igual a $E(\Lambda)$, entonces los coeficientes $\bar{C}_{k,n}$ resultarán sobrestimados. Por lo anterior, en los métodos de aproximación se fijará $\bar{C}_{0,n} = E(\Lambda)$, sin importar qué valor de n se use. Este cambio causó que las aproximaciones a la probabilidad de ruina mejoraran en los ejemplos que se desarrollaron.

5.6.1. Primer método de aproximación

A continuación se presenta como corolario del teorema 5.6.1 la primera propuesta de aproximación a la probabilidad de ruina en el modelo de Gerber-Dickson.

Corolario 5.6.2 *Suponer que en un modelo de Gerber-Dickson el monto de las reclamaciones tiene una distribución $PM(F_{\Lambda})$. Si n es un número suficientemente grande, entonces:*

$$\psi(u) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{k,n} bn(u, 1/(1+n))(k), \quad (5.76)$$

donde los valores de $\{\bar{C}_{k,n}\}_{k=0}^{\infty}$ se calculan como sigue:

$$\bar{C}_{0,n} = E(\Lambda) \quad (5.77)$$

$$\bar{C}_{k,n} = E(\Lambda) \left[\sum_{i=1}^k f_{Ne}(i) \bar{C}_{k-i,n} + \bar{F}_{Ne}(k) \right], \quad (5.78)$$

$$f_{Ne}(i) = \frac{\bar{F}_{\Lambda}((i-1)/n)}{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{F}_{\Lambda}(j/n)}. \quad (5.79)$$

La aproximación anterior, puede ser calculada cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución $PM(F_{\Lambda})$. Los sumandos en (5.76) convergen a cero con rapidez por el producto de las probabilidades de la distribución binomial negativa con los coeficientes $\bar{C}_{k,n}$ que son probabilidades de cola (recordar la igualdad (5.48)). Por lo tanto, la suma infinita puede ser truncada en algún sumando a partir del cual, los términos siguientes resulten ser poco representativos numéricamente.

Ejemplo 5.6.3 Usando la ecuación (5.76), se calcula una aproximación a la probabilidad de ruina en el caso de que el monto de las reclamaciones tenga distribución $PM(F_{\Lambda})$, donde $\Lambda \sim Exp(\beta)$. En este caso, esta distribución es equivalente a una distribución $Geo(\beta/(1+\beta))$ y como se ha visto en (5.31), la probabilidad de ruina exacta es la siguiente:

$$\psi(u) = \left(\frac{1/(1+\beta)}{\beta/(1+\beta)} \right)^{u+1} = 1/\beta^{u+1}.$$

Ahora se comprobará que la aproximación (5.76) converge a la solución conocida cuando $n \rightarrow \infty$.

Primero, se calcula de manera sencilla lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_{Ne}(i) &= e^{-i\beta/n}(e^{\beta/n} - 1), \\ \bar{F}_{Ne}(k) &= e^{-\beta k/n}. \end{aligned}$$

Después de algunos cálculos, se llega a:

$$\bar{C}_{k,n} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta/n}) + e^{-\beta/n} \right]^k. \quad (5.80)$$

Sustituyendo (5.80) en (5.76) y simplificando, se obtiene la siguiente expresión para la probabilidad de ruina:

$$\psi_n(u) = \frac{1}{\beta} (1 - n(1 - e^{-\beta/n})/\beta + n(1 - e^{-\beta/n}))^{-u}.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, se puede comprobar que $n(1 - e^{-\beta/n}) \rightarrow \beta$, por lo cual, se llega a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(u) = \frac{1}{\beta} (1 - 1 + \beta)^{-u} = 1/\beta^{u+1},$$

que es la conocida probabilidad de ruina cuando el monto de las reclamaciones se distribuye de manera geométrica.

Más adelante se considerarán otros ejemplos de aplicación de este método para aproximar probabilidades de ruina.

5.6.2. Segundo método de aproximación

La segunda aproximación, que se enuncia en el siguiente corolario, se basa en el valor esperado que aparece en la igualdad (5.64), aplicando la ley de los grandes números (LGN), véase el libro de Feller [35, pág. 260].

Corolario 5.6.4 *Suponer un modelo de Gerber-Dickson donde el monto de las reclamaciones sigue una distribución $PM(F_\Lambda)$. Sea z_1, \dots, z_m una muestra aleatoria de una distribución $BinNeg(u, 1/(1+n))$. Si n y m son números suficientemente grandes, entonces:*

$$\psi(u) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{C}_{z_i, n}, \quad (5.81)$$

donde los valores de $\{\bar{C}_{k, n}\}_{k=0}^\infty$ se calculan como en (5.77), (5.78) y (5.79).

5.7. Ejemplos numéricos

En esta sección se aplican los nuevos métodos de aproximación a la probabilidad de ruina que han sido propuestos en este capítulo, los resultados son contrastados con la probabilidad de ruina exacta, obtenida usando la fórmula recursiva de la proposición 5.2.2. Para poder usar dicha fórmula con éxito se escogieron ejemplos con parámetros que produjeran expresiones sencillas. Para modelar el monto de los reclamos, se usaron como distribución de mezcla a las distribuciones exponencial, Erlang, uniforme, Pareto, lognormal y geométrica truncada en cero. En todos los casos se calcularon aproximaciones a la probabilidad de ruina para los casos $u = 0, 1, 2, \dots, 10$. Para el primer método de aproximación propuesto se usó $n = 500$ y para

el segundo método se generaron $m = 1000$ valores provenientes de una distribución $\text{BinNeg}(u, 1/(n + 1))$ y de nuevo se usó $n = 500$. También se usó de manera homogénea el valor de $\epsilon = 0.00001$ para buscar el número

$$k^* = \text{máx}\{x > un \mid \text{bn}(u, 1/(1 + n))(x) > \epsilon\}. \quad (5.82)$$

Por los comentarios hechos después del corolario 5.6.2, sobre ignorar los sumandos a partir de cierto valor, solo se tomaron los primeros k^* sumandos de (5.76). Este criterio también se usó en el capítulo 4 y se explicó en la sección 4.3.

La implementación de los métodos fue hecha usando el software R [71].

5.7.1. Distribución de mezcla constante

En esta sección, se supondrá que los montos de reclamación tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $P(\Lambda = 2/3) = 1$. En este caso, la distribución $PM(F_\Lambda)$ se convierte en una distribución Poisson(2/3). Claramente $E(\Lambda) = 2/3$. En la tabla 5.1 se pueden ver los resultados de las aproximaciones. Las columnas E , N_1 y N_2 muestran para cada valor de u los valores exactos, aproximados con el primer método y aproximados con el segundo método, respectivamente. También se muestran los errores relativos $(\hat{\psi} - \psi)/\psi$ para los valores de N_1 y N_2 . En la figura 5.6 se muestran los valores de u contra los valores de E , N_1 y N_2 . Y en la figura 5.7 se muestran los valores de u contra los errores relativos de las aproximaciones.

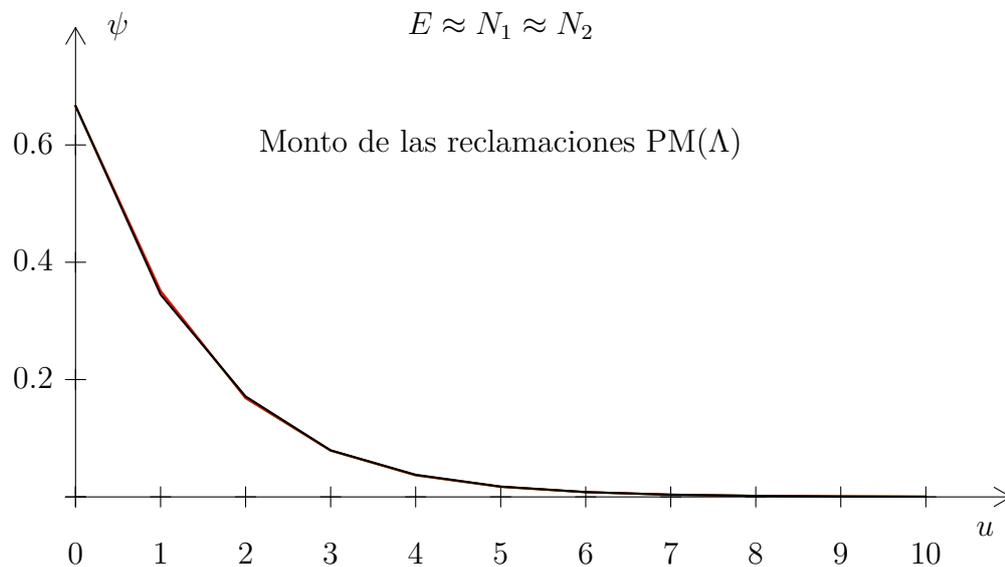


Figura 5.6: Aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $P(\Lambda = 2/3) = 1$.

Tabla 5.1: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $P(\Lambda = 2/3) = 1$.

u	E	N_1	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	N_2	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$
0	0.66667	0.66667	0.00000	0.66667	0.00000
1	0.35076	0.35100	0.00070	0.34486	-0.01682
2	0.16827	0.16863	0.00209	0.17128	0.01785
3	0.07878	0.07906	0.00363	0.07941	0.00801
4	0.03674	0.03693	0.00514	0.03770	0.02601
5	0.01714	0.01725	0.00665	0.01759	0.02626
6	0.00799	0.00806	0.00816	0.00826	0.03349
7	0.00373	0.00376	0.00967	0.00373	0.00161
8	0.00174	0.00176	0.01118	0.00170	-0.02281
9	0.00081	0.00082	0.01269	0.00077	-0.04922
10	0.00038	0.00038	0.01421	0.00034	-0.10841

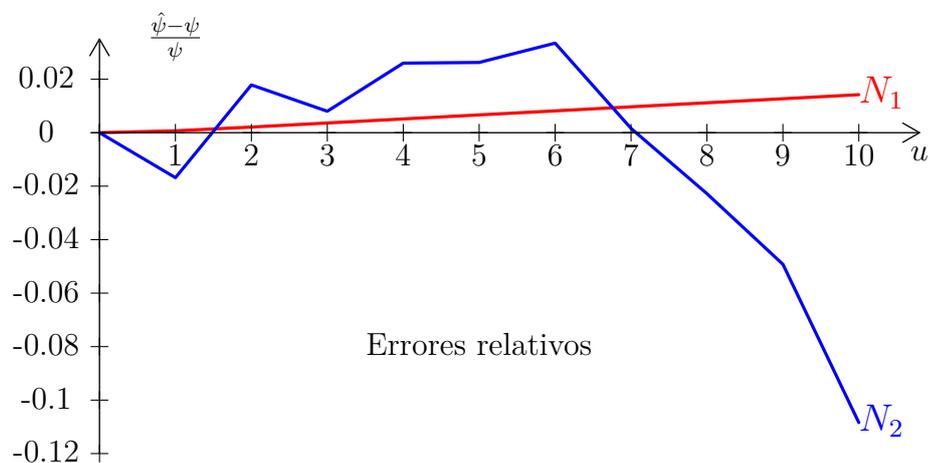


Figura 5.7: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $P(\Lambda = 2/3) = 1$.

5.7.2. Distribución de mezcla exponencial

En esta sección, se supondrá que los montos de reclamación tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Exp}(3/2)$. Como se mencionó en el ejemplo 5.5.4, es equivalente decir que el monto de las reclamaciones sigue una distribución $\text{Geo}(3/5)$. En la tabla 5.2 se pueden ver los resultados de las aproximaciones. Las columnas E , N_1 y N_2 muestran para cada valor de u los valores exactos, aproximados con el primer método y aproximados con el segundo método, respectivamente. También se muestran los errores relativos $(\hat{\psi} - \psi)/\psi$ para los valores de N_1 y N_2 . En la figura 5.8 se muestran los valores de u contra los valores de E , N_1 y N_2 . Y en la figura 5.9 se muestran los valores de u contra los errores relativos de las aproximaciones.

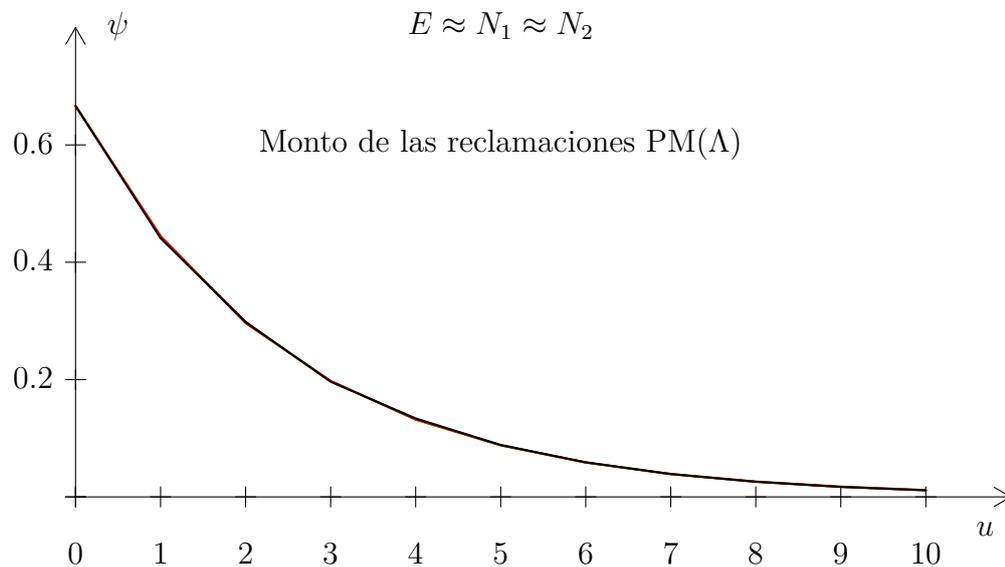


Figura 5.8: Aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Exp}(3/2)$.

Tabla 5.2: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Exp}(3/2)$.

u	E	N_1	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	N_2	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$
0	0.66667	0.66667	0.00000	0.66667	0.00000
1	0.35076	0.35100	0.00070	0.34486	-0.01682
2	0.16827	0.16863	0.00209	0.17128	0.01785
3	0.07878	0.07906	0.00363	0.07941	0.00801
4	0.03674	0.03693	0.00514	0.03770	0.02601
5	0.01714	0.01725	0.00665	0.01759	0.02626
6	0.00799	0.00806	0.00816	0.00826	0.03349
7	0.00373	0.00376	0.00967	0.00373	0.00161
8	0.00174	0.00176	0.01118	0.00170	-0.02281
9	0.00081	0.00082	0.01269	0.00077	-0.04922
10	0.00038	0.00038	0.01421	0.00034	-0.10841

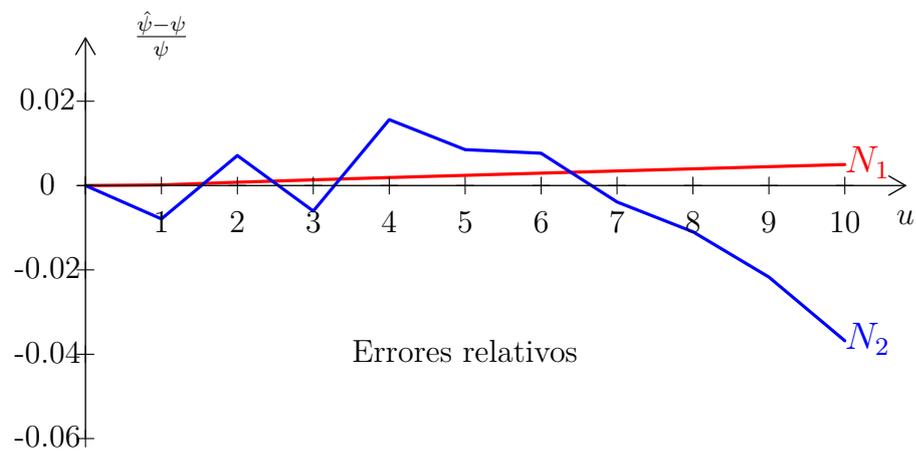


Figura 5.9: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Exp}(3/2)$.

5.7.3. Distribución de mezcla Erlang

En esta sección, se supondrá que los montos de reclamación tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Erl}(2, 3)$. Para esta distribución $E(\Lambda) = 2/3$. En la tabla 5.3 se pueden ver los resultados de las aproximaciones. Las columnas E , N_1 y N_2 muestran para cada valor de u los valores exactos, aproximados con el primer método y aproximados con el segundo método, respectivamente. También se muestran los errores relativos $(\hat{\psi} - \psi)/\psi$ para los valores de N_1 y N_2 . En la figura 5.10 se muestran los valores de u contra los valores de E , N_1 y N_2 . Y en la figura 5.11 se muestran los valores de u contra los errores relativos de las aproximaciones.

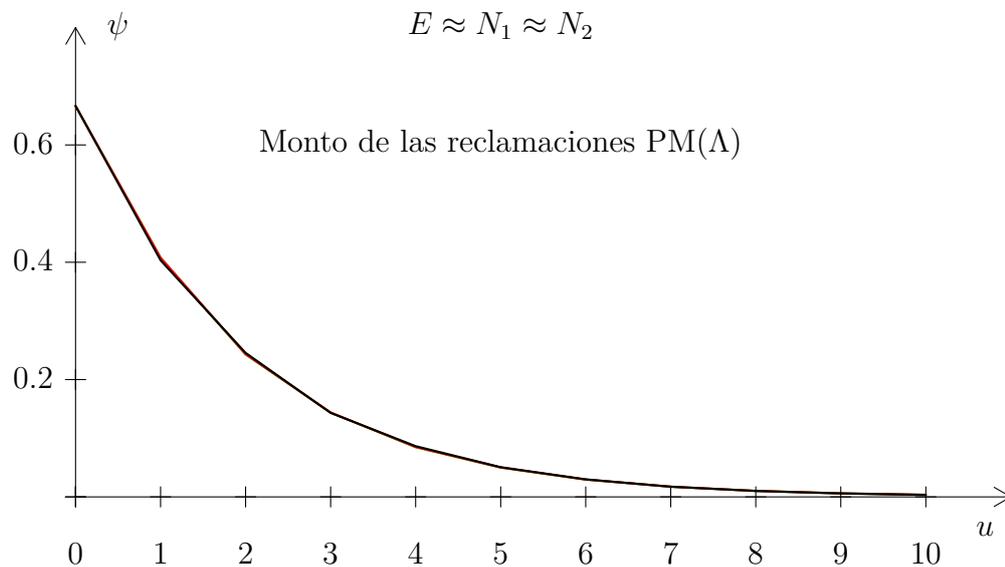


Figura 5.10: Aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Erl}(2, 3)$.

Tabla 5.3: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Erl}(2, 3)$.

u	E	N_1	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	N_2	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$
0	0.66667	0.66667	0.00000	0.66667	0.00000
1	0.35076	0.35100	0.00070	0.34486	-0.01682
2	0.16827	0.16863	0.00209	0.17128	0.01785
3	0.07878	0.07906	0.00363	0.07941	0.00801
4	0.03674	0.03693	0.00514	0.03770	0.02601
5	0.01714	0.01725	0.00665	0.01759	0.02626
6	0.00799	0.00806	0.00816	0.00826	0.03349
7	0.00373	0.00376	0.00967	0.00373	0.00161
8	0.00174	0.00176	0.01118	0.00170	-0.02281
9	0.00081	0.00082	0.01269	0.00077	-0.04922
10	0.00038	0.00038	0.01421	0.00034	-0.10841

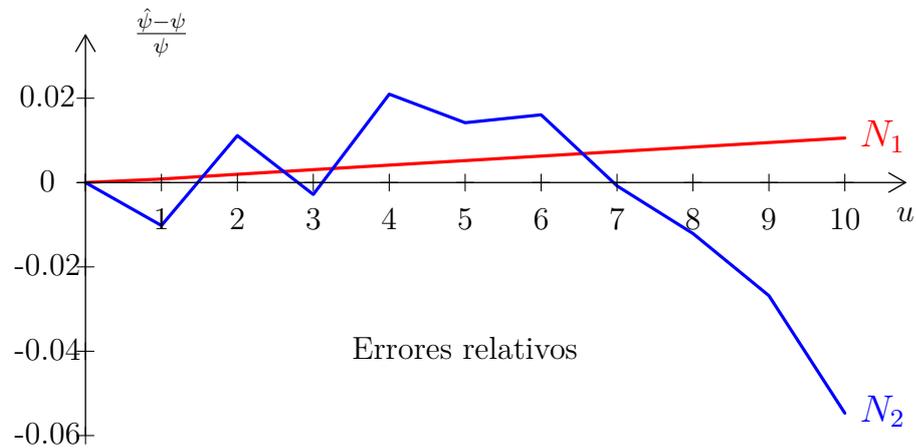


Figura 5.11: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Erl}(2, 3)$.

5.7.4. Distribución de mezcla uniforme

En esta sección, se supondrá que los montos de reclamación tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim U(0, 8/5)$. Para esta distribución $E(\Lambda) = 4/5$. En la tabla 5.4 se pueden ver los resultados de las aproximaciones. Las columnas E , N_1 y N_2 muestran para cada valor de u los valores exactos, aproximados con el primer método y aproximados con el segundo método, respectivamente. También se muestran los errores relativos $(\hat{\psi} - \psi)/\psi$ para los valores de N_1 y N_2 . En la figura 5.12 se muestran los valores de u contra los valores de E , N_1 y N_2 . Y en la figura 5.13 se muestran los valores de u contra los errores relativos de las aproximaciones.

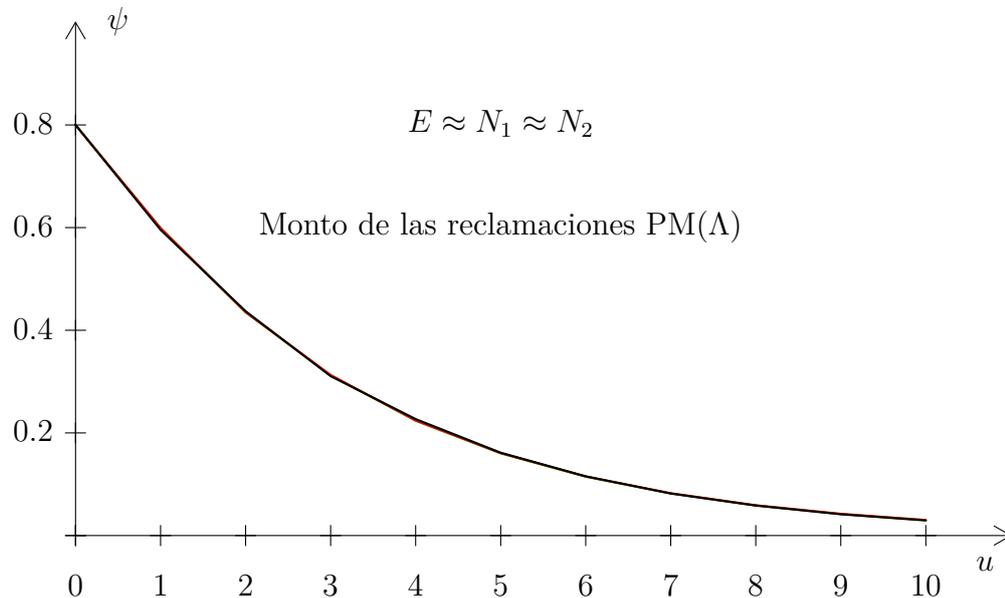


Figura 5.12: Aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim U(0, 8/5)$.

Tabla 5.4: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim U(0, 8/5)$.

u	E	N_1	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	N_2	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$
0	0.80000	0.80000	0.00000	0.80000	0.00000
1	0.59905	0.59902	-0.00006	0.59552	-0.00589
2	0.43486	0.43524	0.00087	0.43711	0.00517
3	0.31227	0.31281	0.00175	0.31055	-0.00549
4	0.22363	0.22422	0.00260	0.22691	0.01464
5	0.16010	0.16064	0.00342	0.16143	0.00835
6	0.11461	0.11510	0.00423	0.11542	0.00701
7	0.08205	0.08246	0.00503	0.08193	-0.00150
8	0.05874	0.05908	0.00583	0.05839	-0.00594
9	0.04205	0.04233	0.00662	0.04145	-0.01441
10	0.03011	0.03033	0.00741	0.02940	-0.02341

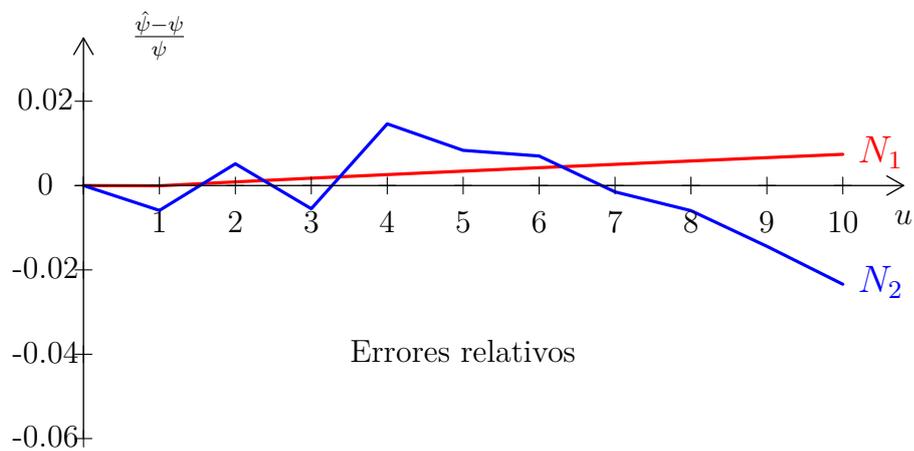


Figura 5.13: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim U(0, 8/5)$.

5.7.5. Distribución de mezcla Pareto

En esta sección, se supondrá que los montos de reclamación tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Pareto}(3, 1)$. Para esta distribución $E(\Lambda) = 1/2$. En la tabla 5.5 se pueden ver los resultados de las aproximaciones. Las columnas E , N_1 y N_2 muestran para cada valor de u los valores exactos, aproximados con el primer método y aproximados con el segundo método, respectivamente. También se muestran los errores relativos $(\hat{\psi} - \psi)/\psi$ para los valores de N_1 y N_2 . En la figura 5.14 se muestran los valores de u contra los valores de E , N_1 y N_2 . Y en la figura 5.15 se muestran los valores de u contra los errores relativos de las aproximaciones.

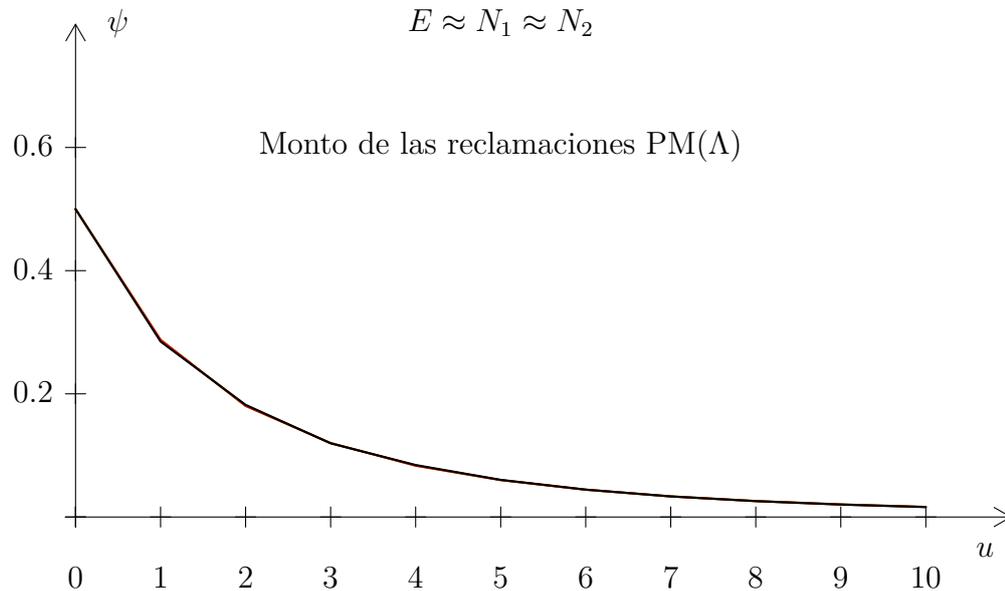


Figura 5.14: Aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Pareto}(3, 1)$.

Tabla 5.5: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Pareto}(3, 1)$.

u	E	N_1	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	N_2	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$
0	0.50000	0.50000	0.00000	0.50000	0.00000
1	0.28757	0.28751	-0.00023	0.28484	-0.00950
2	0.18050	0.18046	-0.00022	0.18216	0.00921
3	0.12014	0.12010	-0.00034	0.11960	-0.00448
4	0.08348	0.08344	-0.00053	0.08445	0.01159
5	0.06001	0.05996	-0.00076	0.06034	0.00547
6	0.04437	0.04432	-0.00100	0.04450	0.00301
7	0.03360	0.03356	-0.00127	0.03343	-0.00528
8	0.02599	0.02595	-0.00154	0.02577	-0.00866
9	0.02049	0.02045	-0.00182	0.02019	-0.01468
10	0.01643	0.01639	-0.00210	0.01612	-0.01859

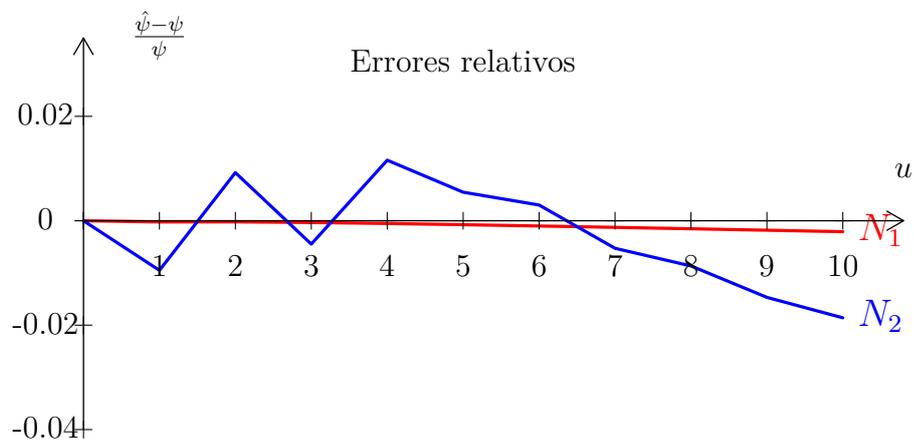


Figura 5.15: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Pareto}(3, 1)$.

5.7.6. Distribución de mezcla lognormal

En esta sección, se supondrá que los montos de reclamación tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Lognormal}(-1, 1)$. Para esta distribución $E(\Lambda) = e^{-1/2}$. En la tabla 5.6 se pueden ver los resultados de las aproximaciones. Las columnas E , N_1 y N_2 muestran para cada valor de u los valores exactos, aproximados con el primer método y aproximados con el segundo método, respectivamente. También se muestran los errores relativos $(\hat{\psi} - \psi)/\psi$ para los valores de N_1 y N_2 . En la figura 5.16 se muestran los valores de u contra los valores de E , N_1 y N_2 . Y en la figura 5.17 se muestran los valores de u contra los errores relativos de las aproximaciones.

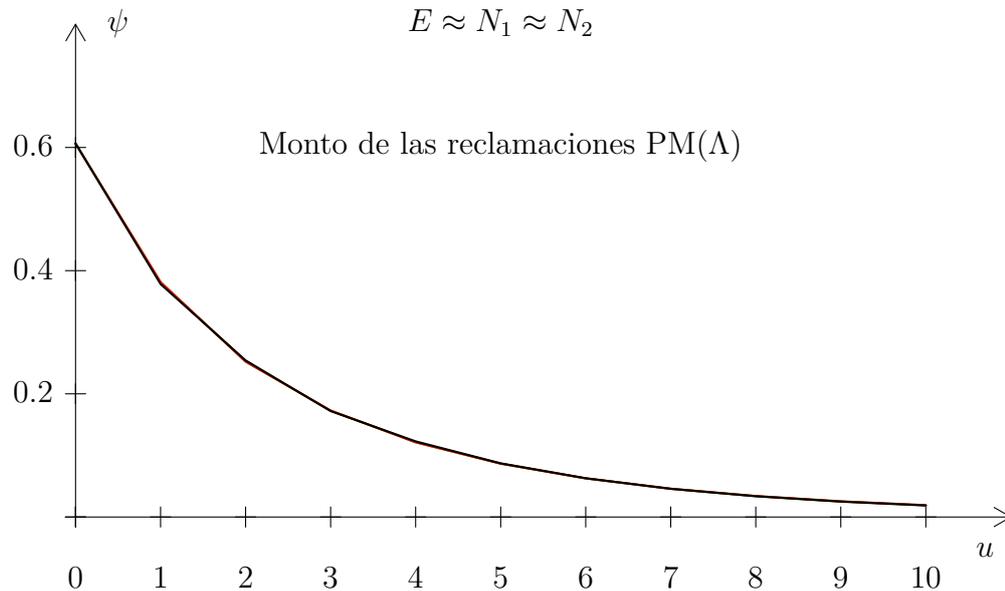


Figura 5.16: Aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Lognormal}(-1, 1)$.

Tabla 5.6: Aproximaciones a la probabilidad de ruina cuando los reclamos tienen distribución $PM(F_\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Lognormal}(-1, 1)$.

u	E	N_1	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$	N_2	$\frac{\hat{\psi}-\psi}{\psi}$
0	0.60653	0.60653	0.00000	0.60653	0.00000
1	0.38126	0.38124	-0.00005	0.37816	-0.00813
2	0.25231	0.25238	0.00025	0.25426	0.00772
3	0.17287	0.17294	0.00042	0.17198	-0.00515
4	0.12128	0.12135	0.00053	0.12282	0.01264
5	0.08661	0.08666	0.00060	0.08715	0.00624
6	0.06272	0.06276	0.00064	0.06297	0.00397
7	0.04597	0.04600	0.00067	0.04574	-0.00487
8	0.03404	0.03406	0.00067	0.03373	-0.00914
9	0.02545	0.02546	0.00066	0.02502	-0.01686
10	0.01919	0.01920	0.00063	0.01874	-0.02346

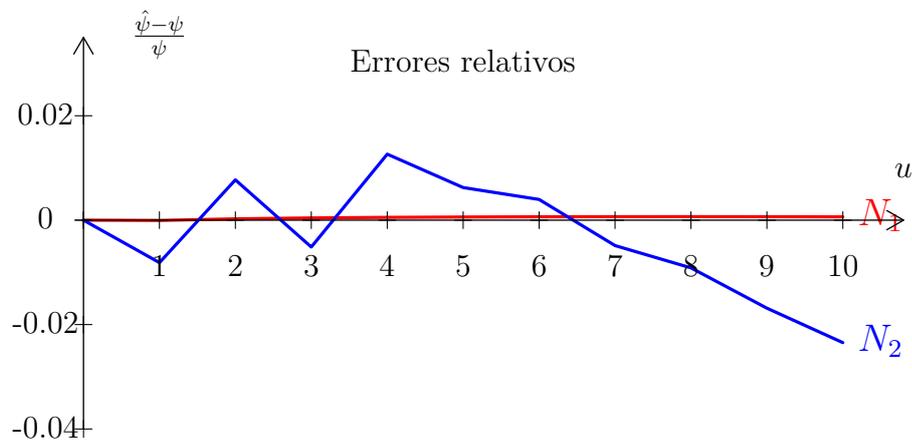


Figura 5.17: Errores relativos de las aproximaciones a la probabilidad de ruina para reclamos $PM(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Lognormal}(-1, 1)$.

En general, se puede ver en los gráficos con las aproximaciones a la probabilidad de ruina que cualquiera de los dos métodos da como resultado

valores muy cercanos al valor exacto. Para la aproximación N_1 los errores relativos siempre fueron menores a 0.02 y para el caso de N_2 , solo en el caso de Λ constante se perciben errores relativos grandes para $u = 8, 9, 10$.

Las referencias que fueron consultadas y que son citadas en el texto de este capítulo son las siguientes: [10, 13, 19, 27, 35, 40, 46, 49, 53, 54, 78] y [80].

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se mostraron tres métodos para aproximar la probabilidad de ruina en el modelo de Cramér-Lundberg, apoyándose en el uso de la distribución mezcla de Erlangs para modelar el monto de las reclamaciones. Se mostró un buen comportamiento de dichas aproximaciones, tanto en los ejemplos relacionados a distribuciones de cola pesada, como en los ejemplos relacionados a distribuciones de cola ligera.

Cuando se desconoce la distribución del monto de las reclamaciones, se puede usar uno de los tres métodos propuestos para aproximar la probabilidad de ruina, sin necesidad de ajustar primero una distribución a dichos montos.

En el caso de las distribuciones de cola pesada que fueron tomadas como ejemplo, Weibull, lognormal y Pareto, los métodos de aproximación propuestos tuvieron buenos resultados para valores de u , donde las aproximaciones subexponencial y de tráfico ligero, tuvieron resultados alejados al valor exacto.

Se mostró que, al menos cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución con soporte acotado, las aproximaciones tienen convergencia uniforme. Sin embargo, no se trató el problema de encontrar condiciones suficientes para la convergencia uniforme en el caso de distribuciones con soporte infinito. Tampoco se trató el problema de calcular cotas para el error de las aproximaciones propuestas.

Finalmente, en el último capítulo se hace un desarrollo parecido al de los primeros capítulo para desarrollar dos métodos de aproximación a la probabilidad de ruina, pero en el modelo discreto de Gerber-Dickson. Como se mostró, las distribuciones discretas análogas a las mezclas de Erlangs,

las mezclas de binomiales negativas, solo pueden usarse para aproximar probabilidades de ruina cuando el monto de las reclamaciones tiene una distribución Poisson mezclada. Sin embargo, existen algunas distribuciones discretas adicionales, para las cuales funcionan las aproximaciones propuestas.

Dentro de los problemas de teoría del riesgo, toda cantidad (por ejemplo el coeficiente de ajuste) calculable cuando el monto de las reclamaciones tiene distribución MIE en el modelo de Cramér-Lundberg, o bien, distribución MIBN en el modelo de Gerber-Dickson, puede ser una aproximación para la correspondiente cantidad usando la distribución original. Queda como trabajo futuro analizar estos casos. También, se puede analizar el uso de mezclas de Erlangs y de mezclas de binomiales negativas para aproximar la función de Gerber-Shiu, tanto en el modelo continuo como en el modelo discreto, así como las funciones de distribución de la severidad de la ruina, el capital justo antes de la ruina y el tiempo de ruina.

Otro problema que queda abierto para una futura investigación es aproximar con el mismo enfoque probabilidades de ruina en horizonte finito.

Apéndice A

Resultados complementarios

A.1. Fórmula de Panjer

En el artículo *A review of Panjer's recursion formula and its applications* de Dickson (1995) [28], se hace un análisis de cómo la fórmula de Panjer, establecida en los trabajos de Panjer en (1981) [65] y (1986) [66] y extendida en el artículo de De Pril (1986) [21], se ha vuelto trascendental en varias aplicaciones actuariales. Con la fórmula de Panjer puede calcularse de forma exacta la distribución de la suma compuesta

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i, \quad (\text{A.1})$$

suponiendo que las severidades son variables aleatorias discretas no negativas y que la frecuencia N tiene distribución binomial, Poisson o binomial negativa. A estas tres distribuciones se les conoce como familia $(a, b, 0)$ (véase, por ejemplo, Klugman et al. (2008) [50, pág. 117]) y sus probabilidades cumplen con la siguiente ecuación recursiva:

$$p_k = p_{k-1} \left(a + \frac{b}{k} \right), \quad (\text{A.2})$$

para cada valor de $k = 1, 2, \dots$ y donde $p_k := P(N = k)$. Los valores de a y b según la distribución de N pueden consultarse en la tabla A.1.

Tabla A.1: Valores de a y b según la distribución de N .

Distribución	valor de a	valor de b
$Bin(k, p)$	$\frac{-p}{1-p}$	$(k+1)\frac{p}{1-p}$
$BinNeg(\kappa, p)$	$1-p$	$(\kappa-1)(1-p)$
$Poisson(\lambda)$	0	λ

Cuando las severidades tienen función de distribución continua, se pueden encontrar cotas superiores e inferiores para la función de distribución de S . Este procedimiento se describe en Panjer 1986 [66]. Recordar que en los ejemplos numéricos del capítulo 5, el promedio de estas cotas fue usado como un valor aproximado a la probabilidad de ruina tomando a S como cierta suma geométrica compuesta.

A continuación se presenta la fórmula de recursión de Panjer.

Proposición A.1.1 (*Fórmula recursiva de Panjer*) *Supóngase la siguiente suma compuesta:*

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i,$$

donde N es de la familia $(a, b, 0)$ y las variables aleatorias Y_1, Y_2, \dots son variables aleatorias discretas, independientes e idénticamente distribuidas, independientes de N y con función de probabilidad dada por

$$f_i = P(Y = i),$$

para valores de $i = 0, 1, 2, \dots$, entonces $g_r := P(S = r)$ cumple la siguiente fórmula recursiva:

$$g_0 = P_N(f_0), \tag{A.3}$$

$$g_k = \frac{1}{1-a} \frac{f_0}{f_0} \sum_{i=1}^k \left(a + \frac{bi}{k} \right) f_i g_{k-i}, \tag{A.4}$$

para cada valor de $k = 1, 2, \dots$

Para ver una demostración de este resultado puede consultarse De Pril (1986) [21].

A.2. Probabilidad de ruina en el modelo de Cramér-Lundberg

En el modelo de Cramér-Lundberg el valor exacto de la probabilidad de ruina es conocido cuando el monto de las reclamaciones tiene ciertas distribuciones de cola ligera, por ejemplo exponencial, tipo fase o constantes, véase [3, páginas 14–15]. A continuación se presentan las técnicas más conocidas para hacer dicho cálculo.

A.2.1. Ecuación integral

La probabilidad de ruina, como función del capital inicial, cumple con la ecuación integral que se indica en la siguiente proposición.

Proposición A.2.1 *Supóngase el modelo de Cramér-Lundberg (1.2), entonces para $u \geq 0$ se cumple que:*

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \left[\frac{1}{\mu} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{1}{\mu} \int_0^u \psi(u - y) \bar{F}(y) dy \right]. \quad (\text{A.5})$$

Para ver una demostración de este resultado véase [38, págs. 114 y 115]. Es difícil encontrar una solución exacta de $\psi(u)$ resolviendo esta ecuación excepto en el caso donde el tamaño de las reclamaciones siguen una distribución exponencial o una mezcla finita de exponenciales, ver por ejemplo [38, págs. 116 y 117]. Sin embargo, la ecuación (A.5) es muy importante porque sirve para obtener la transformada de Laplace de $\psi(u)$ y se pueden implementar métodos numéricos para encontrar soluciones para un valor fijo de u .

A.2.2. Transformada de Laplace

A continuación se presentan algunas definiciones básicas. Pueden ser consultadas en el libro de Cohen (2007) [16].

Definición A.2.2 *Sea f una función con dominio en el intervalo $(0, \infty)$, se define y denota su transformada de Laplace como:*

$$\mathcal{L}_f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, \quad (\text{A.6})$$

siempre y cuando la integral sea convergente para toda $s \in A \subset \mathbb{C}$. Si dicha integral no existe para ningún valor $s \in \mathbb{C}$, se dice que no existe transformada de Laplace de la función f .

Definición A.2.3 Sea X una variable aleatoria con función de distribución continua F con $F(0) = 0$, es decir, una variable aleatoria no negativa. Entonces a la función:

$$l_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x). \quad (\text{A.7})$$

se le conoce como la transformada de Laplace-Stieltjes de la v.a. X .

Se debe notar que la función $l_X(s)$ es igual a la función generadora de momentos de X evaluada en $-s$, si ésta existe. En caso de que la variable aleatoria X sea absolutamente continua con función de densidad f , entonces:

$$l_X(s) = \mathcal{L}_f(s). \quad (\text{A.8})$$

Proposición A.2.4 Suponer que Y es una variable aleatoria que tiene función de distribución continua F con $F(0) = 0$ y que su transformada de Laplace-Stieltjes $l(s)$ existe para $s \in A \subset [0, \infty)$, entonces

$$s\mathcal{L}_{\bar{F}}(s) = 1 - l(s), \quad s \in A, \quad (\text{A.9})$$

donde $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

La demostración puede ser consultada en Cohen (2007) [16].

Proposición A.2.5 La transformada de Laplace de la probabilidad de ruina está dada por:

$$\mathcal{L}_\psi(s) = \frac{1}{s} - \frac{\mu\theta}{\mu(1+\theta)s + l(s) - 1}, \quad s > 0, \quad (\text{A.10})$$

donde $l(s)$ es la transformada de Laplace-Stieltjes del monto de los reclamos.

Para una demostración de este resultado, puede consultarse el libro de Rolski et al. (1999) [75, págs. 165 y 166].

Proposición A.2.6 (*Fórmula de expansión de Heaviside*) Sean $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ polinomios de grados n y m respectivamente y suponer una transformada de Laplace racional, es decir,

$$\mathcal{L}(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)}.$$

Si $Q_m(x)$ tiene m distintas raíces r_k , $k = 1, \dots, m$ (i.e. $Q_m(r_k) = 0$), entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{P_n(r_k)}{Q'_m(r_k)} e^{r_k x}. \quad (\text{A.11})$$

Observación A.2.7 Recordando que $l(s) = M_Y(-s)$ donde $M_Y(\cdot)$ es la función generadora de momentos de Y , entonces:

$$\mathcal{L}_\psi(s) = \frac{1}{s} - \frac{\mu\theta}{\mu(1+\theta)s + M_Y(-s) - 1}. \quad (\text{A.12})$$

Observación A.2.8 Si el monto de los reclamos tiene función generadora de momentos igual a un cociente de polinomios, entonces es evidente que la transformada de Laplace de ψ también será un cociente de polinomios, así que se puede calcular la probabilidad de ruina usando la siguiente estrategia: Calcular \mathcal{L}_ψ y después intentar invertirla usando fracciones parciales o bien la fórmula de expansión de Heaviside, véase Cohen (2007) [16].

Ejemplo A.2.9 Suponer que el monto de las reclamaciones en un modelo de Cramér-Lundberg sigue una distribución Gama(2, 1). A continuación se calculará $\psi(u)$ suponiendo $\theta = 1$.

Se sabe que $M_Y(-s) = (1+s)^{-2}$ y $\mu = 2$, entonces sustituyendo en la fórmula (A.12) y haciendo un poco de álgebra, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi(s) &= \frac{1}{s} - \frac{\mu\theta}{\mu(1+\theta)s + M_Y(-s) - 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{4s + (1+s)^{-2} - 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2 + 4s + 2s^2}{2s + 7s^2 + 4s^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

El primer sumando es el resultado de calcular la transformada de Laplace de la función constante $f(x) = 1$, el segundo sumando es un cociente de

polinomios del tipo $P_n(s)/Q_m(s)$, con $n = 2$ y $m = 3$. Además $Q_3(s) = 0$ tiene 3 soluciones distintas:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{-7 + \sqrt{17}}{8}, \quad r_3 = \frac{-7 - \sqrt{17}}{8},$$

por lo que se cumplen las condiciones de la fórmula de expansión de Heaviside, entonces la inversa de la transformada de Laplace de este cociente es

$$\sum_{k=1}^3 \frac{P_2(r_k)}{Q_3'(r_k)} e^{r_k x} = 1 - 0.55317 \exp\left(\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}x\right) + 0.05317 \exp\left(\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}x\right).$$

Al final, invirtiendo (A.13) y ordenando términos se llega a la siguiente expresión:

$$\psi(u) = 0.55317 \exp\left(\frac{-7 + \sqrt{17}}{8}u\right) - 0.05317 \exp\left(\frac{-7 - \sqrt{17}}{8}u\right).$$

Ejemplo A.2.10 *Suponer que el monto de las reclamaciones en un modelo de Cramér-Lundberg sigue una distribución mezcla de exponenciales $ME\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, con $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$. A continuación se calculará $\psi(u)$ suponiendo cualquier valor de $\theta > 0$.*

Es conocido que:

$$M_Y(-s) = \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta_1 + s} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\beta_2 + s},$$

además de que $\mu = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, entonces sustituyendo en la fórmula (A.12) y haciendo un poco de álgebra, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi(s) &= \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\mu \theta}{\mu(1+\theta)s + M_Y(-s) - 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\mu \theta}{\mu(1+\theta)s + \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta_1 + s} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\beta_2 + s} - 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\mu \theta}{\mu(1+\theta)s + \alpha_1 \beta_1 / (\beta_1 + s) + \alpha_2 \beta_2 / (\beta_2 + s) - 1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\mu \theta (\beta_1 + s)(\beta_2 + s)}{\mu(1+\theta)(\beta_1 + s)(\beta_2 + s) + \alpha_1 \beta_1 (\beta_2 + s) + \alpha_2 \beta_2 (\beta_1 + s) - (\beta_1 + s)(\beta_2 + s)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\mu \theta s^2 + \mu \theta (\beta_1 + \beta_2) s + \mu \theta \beta_1 \beta_2}{\mu(1+\theta)s^3 + (\mu(1+\theta)(\beta_1 + \beta_2) - 1)s^2 + (\mu(1+\theta)\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)s}. \end{aligned}$$

El primer sumando es el resultado de calcular la transformada de Laplace de la función constante $f(x) = 1$, el segundo sumando es un cociente de polinomios del tipo $P_n(s)/Q_m(s)$, con $n = 2$ y $m = 3$. Para simplificar la notación, se definen:

- $A_1 = \mu\theta$,
- $A_2 = \mu\theta(\beta_1 + \beta_2)$,
- $A_3 = \mu\theta\beta_1\beta_2$,
- $B_1 = \mu(1 + \theta)$,
- $B_2 = \mu(1 + \theta)(\beta_1 + \beta_2) - 1$,
- $B_3 = \mu(1 + \theta)\beta_1\beta_2 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$.

Por lo anterior:

$$P_2(s) = A_1 s^2 + A_2 s + A_3, \quad (\text{A.14})$$

y

$$Q_3(s) = B_1 s^3 + B_2 s^2 + B_3 s. \quad (\text{A.15})$$

Además $Q_3(s) = 0$ tiene 3 soluciones distintas:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{-B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1}, \quad r_3 = \frac{-B_2 - \sqrt{B_2^2 - 4B_1B_3}}{2B_1},$$

por lo que se cumplen las condiciones de la fórmula de expansión de Heaviside, entonces la inversa de la transformada de Laplace de este cociente es

$$\sum_{k=1}^3 \frac{P_2(r_k)}{Q_3'(r_k)} e^{r_k x}.$$

Al final, invirtiendo (A.13) y ordenando términos se llega a la siguiente expresión:

$$\psi(u) = 1 - \sum_{k=1}^3 \frac{P_2(r_k)}{Q_3'(r_k)} e^{r_k u}, \quad (\text{A.16})$$

donde $P_2(\cdot)$ y $Q_3(\cdot)$ están dados por (A.14) y (A.15).

A.2.3. Distribuciones tipo fase

Ahora, supóngase que el monto de las reclamaciones se modela con una distribución tipo fase con representación $(\mathbf{X}_0, \mathbf{B})$, entonces:

$$\psi(u) = \mathbf{X}_0^* e^{(\mathbf{B} + \mathbf{b}^\top \mathbf{X}_0^*)u} \mathbf{e}^\top,$$

donde $\mathbf{X}_0^* = -\frac{\lambda}{p} \mathbf{X}_0 \mathbf{B}^{-1}$.

Este resultado se obtiene usando la fórmula de Pollaczek-Khinchine y propiedades de distribuciones tipo fase. Puede consultarse la demostración en Asmussen (2010) [3, páginas 264 y 265].

A.2.4. Aproximación al coeficiente de ajuste

Definición A.2.11 *El coeficiente de ajuste denotado por R , es definido como la primer raíz positiva de la siguiente ecuación:*

$$M(r) = 1 + (1 + \theta)\mu r, \quad (\text{A.17})$$

donde $M(r)$ es la función generadora de momentos del monto de las reclamaciones, suponiendo que ésta existe.

La función generadora de momentos $M(r)$ puede tomar muchas formas, pero utilizando el polinomio de Taylor como sigue, puede hallarse una aproximación al valor de R . Sea $r > 0$,

$$\begin{aligned} M(r) &= E(\exp(rY)) \\ &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(rY)^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} E(Y^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \mu_k \\ &= 1 + \mu r + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} r^k. \end{aligned}$$

La esperanza de la suma infinita fue igual a la suma infinita de las esperanzas utilizando el teorema de la convergencia monótona ya que todos

los sumando son positivos. Sustituyendo esta presentación de $M(r)$ en la ecuación (A.17) se llega a lo siguiente:

$$1 + \mu r + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} r^k = (1 + \theta)\mu r + 1,$$

simplificando y dividiendo ambos lados entre r ,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} r^{k-1} = \theta\mu.$$

Si solo se toman los primeros dos sumandos, se llega a la siguiente ecuación cuadrática:

$$\mu_3 r^2 + 3\mu_2 r - 6\theta\mu = 0,$$

la cual tiene las siguientes soluciones:

$$r_1 = \frac{-3\mu_2 + \sqrt{9\mu_2^2 + 24\theta\mu\mu_3}}{2\mu_3}$$

$$r_2 = \frac{-3\mu_2 - \sqrt{9\mu_2^2 + 24\theta\mu\mu_3}}{2\mu_3},$$

de las cuales se puede observar que $r_2 < 0$, por lo cual, una aproximación al coeficiente de ajuste será:

$$\hat{R} = \frac{-3\mu_2 + \sqrt{9\mu_2^2 + 24\theta\mu\mu_3}}{2\mu_3}. \quad (\text{A.18})$$

Ejemplo 1. Supóngase $\theta = 0.1$, $Y \sim \text{Exp}(5)$, entonces $M(r) = \frac{5}{5-r}$ para $r < 5$. Sustituyendo en la ecuación (1.35)

$$\frac{5}{5-r} = 1.01(1/5)r + 1$$

lo cual lleva a

$$R = 5/101 = 0.04950495.$$

Ahora usando la aproximación vista, (A.18)

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \frac{-3\mu_2 + \sqrt{9\mu_2^2 + 24\theta\mu\mu_3}}{2\mu_3} \\ &= \frac{-32/25 + \sqrt{9(2/25)^2 + 24(0.01)(1/5)(6/125)}}{2(6/125)} \\ &= 0.04950976. \end{aligned}$$

A.3. Demostración alterna de $\psi(u)$ para MIE

Teorema A.3.1 *La probabilidad de ruina para reclamos con distribución MIE(π, β), y $\pi = (q_1, q_2, \dots)$, es*

$$\psi(u) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j P(Z = j) = E(C_Z), \quad (\text{A.19})$$

donde $Z \sim \text{Poisson}(u\beta)$ y la sucesión $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ está dada por:

$$C_0 = \frac{1}{1+\theta} \text{ y } C_n = \frac{1}{1+\theta} [\sum_{i=1}^n q_i^* C_{n-i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} q_i^*]; \quad n = 1, 2, \dots$$

Finalmente la sucesión $\{q_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ queda determinada por la relación

$$q_k^* = \frac{\sum_{j=k}^{\infty} q_j}{\sum_{j=1}^{\infty} j q_j}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(M > u) \\ &= P(\sum_{j=0}^K Y_j^* > u). \end{aligned}$$

Con $K \sim \text{Geo}(\frac{\theta}{1+\theta})$ y Y_j^* con densidad $f_e(x)$. Por lo que se calcula $P(M > u)$ exhibiendo que M se puede ver como una suma compuesta de exponenciales. O sea,

$$\sum_{j=0}^K Y_j^* \sim \sum_{j=0}^W X_j, \quad (\text{A.20})$$

con W alguna variable aleatoria discreta y las X_j 's exponenciales. A continuación se presentan los detalles.

Primero se obtiene la f.g.m. de f_e :

$$\begin{aligned} M_e(t) &= E(e^{tx}) \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \sum_{k=1}^{\infty} q_k^* \cdot \text{erl}(k, \beta)(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k^* \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot \text{erl}(k, \beta)(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k^* \cdot \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^k \end{aligned}$$

Si se establece a $Q^*(z)$ como la función generadora de probabilidad de $\boldsymbol{\pi}^* = (q_1^*, q_2^*, \dots)$, entonces:

$$Q^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^* \cdot z^k.$$

Observar que:

$$M_e(t) = Q^*\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right) = Q^*(M_X(t)),$$

donde $M_X(t)$ es la f.g.m. de una variable aleatoria $X \sim \text{Exp}(\beta)$. La f.g.m. de $\sum_{j=0}^K Y_j^*$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} M(t) &= Q_K(M_e(t)) \\ &= Q_K(Q^*(M_X(t))) \\ &= C(M_X(t)), \end{aligned}$$

con $C(t) = Q_K(Q^*(t))$ la f.g.p. de una variable aleatoria W cuyas probabilidades se denotarán como c_k , y pueden calcularse con la fórmula siguiente:

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k C(t)}{dt^k}, k = 1, 2, \dots \text{ y } c_0 = P(K = 0). \quad (\text{A.21})$$

Por lo anterior:

$$P\left(\sum_{j=0}^K Y_j^* \leq u\right) = P\left(\sum_{j=0}^W X_j \leq u\right) = E(F_W(Z)), \quad (\text{A.22})$$

con $Z \sim \text{Poisson}(\beta u)$, por lo tanto,

$$\psi(u) = P\left(\sum_{j=0}^K Y_j^* > u\right) = E(\overline{F}_W(Z)). \quad (\text{A.23})$$

Finalmente, se calcula $\overline{F}_W(n) := C_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$.

Sean $h(t) = \frac{1}{\theta}(Q^*(t) - 1)$ y $h^{n-1}(t) = g_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$; como $K \sim \text{Geo}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$, entonces:

$$\begin{aligned}
Q_K(Q^*(t)) &= \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1 - \frac{1}{1+\theta}Q^*(t)} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{\theta}(Q^*(t)-1)} \\
&= \frac{1}{1-h(t)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h(t)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h(t)g_n(t).
\end{aligned}$$

Como $C(t) = Q_K(Q^*(t))$, entonces por lo anterior y usando (20):

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{k!} \frac{d^k C(t)}{t^k} \Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} h^{(i)}(t) g_n^{(k-i)}(t) \Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} h^{(i)}(t) \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k-i)}(t) \Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Lo anterior para $k = 1, 2, \dots$, ya que $c_0 = C(0) = P(K = 0) = \frac{\theta}{1+\theta}$. Por una parte $h^{(i)}(t)|_{t=0} = \frac{1}{\theta} i! q_i^*$, $i = 1, 2, \dots$ y por otra

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k-i)}(t) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \right)^{(k-i)} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1}(t) \right)^{(k-i)} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^n(t) \right)^{(k-i)} \\
&= C^{(k-i)}(t),
\end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k-i)}(t) \Big|_{t=0} = (k-i)! c_{k-i}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} h^{(i)}(t) \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k-i)}(t) \Big|_{t=0} \\
&= h(0)c_k + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!(k-i)!} h^{(i)}(t) \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k-i)}(t) \Big|_{t=0} \\
&= -\frac{1}{\theta} c_k + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^k q_i^* c_{k-i}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$c_0 = \frac{\theta}{1+\theta}; \quad c_k = \frac{1}{1+\theta} \sum_{i=1}^k q_i^* c_{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.24})$$

Finalmente, $C_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 - c_0 = \frac{1}{1+\theta}$ y para $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+\theta} \sum_{i=1}^k q_i^* c_{k-i} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} c_{k-i} \right) q_i^* + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} c_{k-i} \right) q_i^* \right] \\ &= \frac{1}{1+\theta} \left[\sum_{i=1}^n q_i^* C_{n-i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} q_i^* \right]. \end{aligned}$$

□

A.4. Teorema de la convergencia monótona y dominada

Para una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots para las que existe la variable aleatoria $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, se cumple lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right), \quad (\text{A.25})$$

siempre que la sucesión sea monótona, o bien, exista una variable aleatoria dominante Y , para la cual, $E(Y) < \infty$. Este par de condiciones establecen los conocidos teoremas de la convergencia monótona y teorema de la convergencia dominada para variables aleatorias. El resultado general se establece para funciones medibles. Para una demostración formal de lo anterior se puede consultar el libro de Fristedt (1997) [37, págs. 105 a 107]. Además, cuando se tiene una serie de números reales para una sucesión $\{a_{k,n}\}_{k,n}$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,n}, \quad (\text{A.26})$$

siempre que exista una sucesión $\{b_k\}_k$, tal que $|a_{k,n}| < b_k$ para cualquier valor de n y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$. Este resultado, es conocido como el teorema de la convergencia dominada para series.

Apéndice B

Códigos de R

En este apéndice se presentan los códigos que fueron utilizados para obtener los resultados numéricos que aparecen en las tablas del capítulo 4.

B.1. Modelo de Cramér-Lundberg

B.1.1. Fórmula de Panjer

En esta subsección se presenta el código para calcular probabilidades de una suma compuesta S cuyas severidades sean variables aleatorias discretas y su frecuencia sea una variable aleatoria de la familia $(a, b, 0)$, es decir, binomial, binomial negativa o Poisson. Dicho código obtiene el valor de $P(S = r)$ aplicando la fórmula recursiva de Panjer.

```
#Se comienza estableciendo los valores de a, b y g0=P(S=0).  
#Estos valores dependen de la distribución de la frecuencia.  
#Se usará para tal fin la función abg0, donde  
#dist = 'bin', 'binN' o 'poi' según la distribución de N.  
#param = vector de parámetros de la distribución de N.  
#####  
abg0 <- function(dist,param){  
  if(dist=='bin'){  
    p <- param[2]  
    n <- param[1]  
    a <- -p/(1-p)  
    b <- -(n+1)*a  
    g0 <- (1-p+p*f(0))^n
```

```

}
if(dist=='binN'){
  p <- param[2]
  n <- param[1]
  a <- (1-p)
  b <- (n-1)*a
  g0 <- (p/(1-(1-p)*f(0)))^n
}
if(dist=='poi'){
  a <- 0
  b <- param
  g0 <- exp(-param*(1-f(0)))
}
c(a,b,g0)
}

```

*#La función panjer calcula la probabilidad siguiente:
$g_r = P(S=r)$, de forma recursiva.
Debe estar definida previamente la función $f(x)$
que corresponde a la función de probabilidad de las
severidades.*

#####

```

panjer <- function(r,dist,param){
  info <- abg0(dist,param)
  a <- info[1]; b <- info[2]; g0 <- info[3]
  g <- g0
  C <- 1/(1-a*f(0))
  for(i in 1:r){
    aux <- 0
    for(j in 1:i){
      aux <- aux + C*(a+(i-j+1)*b/i)*f(i-j+1)*g[j]
    }
    g[i+1] <- aux
  }
  g[r+1]
}

```

```
#Ejemplo 1
#####
#Severidades uniformes discretas con parámetro n = 10
#Frecuencia geométrica con parámetro p=1/4
f <- function(x){(1/10)*(x>=1 && x<=10)}
r <- 20
panjer(r,'binN',c(1,1/4))
```

```
## [1] 0.01557006
```

```
#Comprobación usando simulación
m <- 10000
i <- 0
uno_o_cero <- numeric(m)
set.seed(123)
N <- rgeom(m,1/4)
while(i<m){
  i <- i + 1
  if(N[i] == 0){
    S <- 0
  }else{
    Y <- sample(1:10,N[i],replace = T)
    S <- sum(Y)
  }
  uno_o_cero[i] <- 1*(S == r)
}
mean(uno_o_cero)
```

```
## [1] 0.0159
```

```
#Ejemplo 2
#####
#Severidades Poisson con parámetro lambda = 7
#Frecuencia binomial con parámetros n= 10, p=1/3
f <- function(x){dpois(x,7)}
```

```
r <- 20
panjer(r, 'bin', c(10, 1/3))
```

```
## [1] 0.03408564
```

```
#Comprobación usando simulación
```

```
m <- 10000
i <- 0
uno_o_cero <- numeric(m)
set.seed(123)
N <- rbinom(m, 10, 1/3)
while(i < m){
  i <- i + 1
  if(N[i] == 0){
    S <- 0
  }else{
    Y <- rpois(N[i], 7)
    S <- sum(Y)
  }
  uno_o_cero[i] <- 1*(S == r)
}
mean(uno_o_cero)
```

```
## [1] 0.034
```

```
#Ejemplo 3
```

```
#####
```

```
#Severidades binomiales con parámetros n= 10, p=1/3
```

```
#Frecuencia Poisson con parámetro lambda = 7
```

```
f <- function(x){dbinom(x, 10, 1/3)}
r <- 20
panjer(r, 'poi', 7)
```

```
## [1] 0.04153745
```

```

#Comprobación usando simulación
m <- 10000
i <- 0
uno_o_cero <- numeric(m)
set.seed(123)
N <- rpois(m,7)
while(i<m){
  i <- i + 1
  if(N[i] == 0){
    S <- 0
  }else{
    Y <- rbinom(N[i],10,1/3)
    S <- sum(Y)
  }
  uno_o_cero[i] <- 1*(S == r)
}
mean(uno_o_cero)

```

```
## [1] 0.0404
```

B.1.2. Montos de reclamación con distribución gama

En esta subsección se presenta el código para calcular la probabilidad de ruina exacta cuando los montos de reclamación tienen una distribución gama. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas ‘E’ de la tabla 4.1.

La siguiente fórmula de Willmot (1988), se utiliza cuando los montos de las reclamaciones tienen distribución $\text{gama}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 1$.

$$\psi(u) = 1 - \frac{\theta}{1 + \theta} \left\{ e^{-\beta u} \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cdot B_j + e^{-\beta u / [\alpha(1+\theta)]} \right\},$$

donde:

- $A_j = \left[\frac{-(\beta u)^{\alpha+1}}{\alpha(1+\theta)} \right]^j,$
- $B_j = \frac{M(j+1, j(\alpha+1)+1, \beta u [1 + \{\alpha(1+\theta)\}^{-1}])}{\Gamma(j(\alpha+1)+1)},$

$$\blacksquare M(a, b, z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+j-1)z^j}{b(b+1)\cdots(b+j-1)j!}.$$

```

Aj=function(j,u,theta,alpha,beta){
  num=(beta*u)^(alpha+1)
  den=alpha*(1+theta)
  (-num/den)^j
}

sumandoab=function(j,a,b,z){
  aux=(a/b)*z
  for(i in 1:(j-1)){
    aux=aux*(a+i)*z/((b+i)*(i+1))
  }
  aux
}

M=function(a,b,z){
  aux=0
  delta=0
  New=1+a*z/b
  j=2
  while(New>delta){
    aux=aux+New
    New=sumandoab(j,a,b,z)
    j=j+1
  }
  aux
}

Bj=function(j,u,theta,alpha,beta){
  aux=j*(alpha+1)+1
  a=j+1
  b=aux
  z=beta*u*(1+(alpha*(1+theta))^(alpha+1))
  M(a,b,z)/gamma(aux)
}

```

```

sumaAB=function(u,theta,alpha,beta){
  epsilon=0.00000000000000000000000000000001
  suma=0
  j=1
  aux=Aj(j,u,theta,alpha,beta)*Bj(j,u,theta,alpha,beta)
  j=j+1
  while(abs(aux)>epsilon){
    suma=suma+aux
    aux=Aj(j,u,theta,alpha,beta)*Bj(j,u,theta,alpha,beta)
    j=j+1
  }
  suma
}

Psigamma=function(u,theta,alpha,beta){
  cte=beta*u/(alpha*(1+theta))
  llave=exp(-beta*u)*sumaAB(u,theta,alpha,beta)+exp(cte)
  1-theta/(1+theta)*llave
}

##Ejemplo
u=1; theta=0.1
Psigamma(u,theta,3.5,3.5)

```

```
## [1] 0.8016706
```

B.1.3. Montos de reclamación con distribución mezcla de dos exponenciales

En esta subsección se presenta el código para calcular la probabilidad de ruina exacta cuando los montos de reclamación tienen una distribución mezcla de dos exponenciales. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'E' de la tabla 4.2 y sigue la fórmula (A.16) del ejemplo A.2.10 en el apéndice A.

```

#Prueba de ruina, mezcla de exponenciales.#
#####
psi <- function(u,alpha1,alpha2,beta1,beta2,theta){
  mu <- alpha1/beta1 + alpha2/beta2
  A1 <- mu*theta
  A2 <- mu*theta*(beta1+beta2)
  A3 <- mu*theta*beta1*beta2
  B1 <- mu*(1+theta)
  B2 <- mu*(1+theta)*(beta1+beta2)-1
  B3 <- mu*(1+theta)*beta1*beta2-alpha1*beta2-alpha2*beta1
  #####
  P <- function(x){A1*x^2+A2*x+A3}
  #####
  Qprima <- function(x){3*B1*x^2+2*B2*x+B3}
  #####
  r <- 0
  r[2] <- (-B2+sqrt(B2^2-4*B1*B3))/(2*B1)
  r[3] <- (-B2-sqrt(B2^2-4*B1*B3))/(2*B1)
  #####
  C <- P(r[1])/Qprima(r[1])
  C[2] <- P(r[2])/Qprima(r[2])
  C[3] <- P(r[3])/Qprima(r[3])
  #####
  1-sum(C*exp(r*u))
}

```

#EJEMPLOS:

```
#####
```

```
alpha1 <- 0.5
```

```
alpha2 <- 0.5
```

```
beta1 <- 3
```

```
beta2 <- 7
```

```
theta <- 2/5
```

```
psi(1,alpha1,alpha2,beta1,beta2,theta)
```

```
## [1] 0.252331
```

```
#Expresión analítica:
24/35*exp(-1)+1/35*exp(-6*1)
```

```
## [1] 0.252331
```

```
theta <- 0.1
psi(1,alpha1,alpha2,beta1,beta2,theta)
```

```
## [1] 0.6495801
```

B.1.4. Montos de reclamación con distribución exponencial uniforme

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina cuando los montos de reclamación tienen una distribución mezcla de dos exponenciales. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'E*' de la tabla 4.3 y sigue el método de aproximación usando Panjer, descrito en el capítulo 1, página 24.

```
#####
#La función Estareu calcula cotas exactas
#l1 y l2 de E*, entonces E*=(l1+l2)/2 cuando
#los montos de los reclamos tienen dist. Exp-Unif
#type = 0 para l1 y type = 1 para l2, l1<l2.
#####

Estareu=function(u,theta,beta,type){
  # u=u*beta debido al proceso de discretización
  u=u*beta
  # exponencial - uniforme
  Fe <- function(x){
    cte <- 2-exp(-3)
    (2*(1-exp(-4*x))/cte)*(x<0.75)
```

```

+((2-(17-32*x+16*x^2)*exp(-3))/cte)*(x>=0.75&& x<=1)+1*(x>1)
}
fu=function(i,beta){Fe(i/beta)-Fe((i-1)/beta)}
#fu discretización por arriba 1,2,... type=1
fd=function(i,beta){Fe((i+1)/beta)-Fe(i/beta)}
#fd discretización por abajo 0,1,2,... type=0
p=theta/(1+theta)
a=1-p; b=0
g=numeric(u)
# Panjer, valores iniciales
if(type==1){
  f=function(i){fu(i,beta)}
  g0=p; cte=1
}
if(type==0){
  f=function(i){fd(i,beta)}
  g0=(1-a)/(1-a*f(0)); cte=1/(1-a*f(0))
}
if(u==0){res=g0}
if(u==1){res=c(g0,cte*(a+b)*f(1)*g0)}
# Panjer
if(u>=2){
  g[1]=cte*(a+b)*f(1)*g0
  for(r in 2:u){
    aux=0
    for(i in 1:(r-1)){
      aux=aux+cte*(a+b*i/r)*f(i)*g[r-i]
    }
    aux=aux+cte*(a+b)*f(r)*g0
    g[r]=aux
  }
  res=c(g0,g)}
#proba de cola: psi(u)=P(sum(i=1,i=N){Ye_i}>u)
1-sum(res)
}

```

```
#Ejemplo
beta <- 1000
theta <- 0.1
u <- 1
l1 <- Estareu(u,theta,beta,0)
l2 <- Estareu(u,theta,beta,1)
(l1+l2)/2
```

```
## [1] 0.6128257
```

```
error <- l2-l1
#error menor a:
error
```

```
## [1] 0.00120616
```

B.1.5. Montos de reclamación con distribución Weibull

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina cuando los montos de reclamación tienen una distribución Weibull.

```
#####
#La función Estar calcula cotas exactas
#l1 y l2 de E*, entonces E*=(l1+l2)/2 cuando
#los montos de los reclamos tienen dist. Weibull
#type = 0 para l1 y type = 1 para l2, l1<l2.
#####

Estar=function(u,theta,beta,type){
  # u=u*beta por la discretización
  u=u*beta
  ## Weibull equilibrio
  Fe=function(x){pgamma(sqrt(x),2,1)}
  fu=function(i,beta){Fe(i/beta)-Fe((i-1)/beta)}
  #fu para 1,2,... type=1
```

```

fd=function(i,beta){Fe((i+1)/beta)-Fe(i/beta)}
#fd ... 0,1,2,... type=0
p=theta/(1+theta)
a=1-p; b=0
g=numeric(u)
# Panjer, valores iniciales
if(type==1){
  f=function(i){fu(i,beta)}
  g0=p; cte=1
}
if(type==0){
  f=function(i){fd(i,beta)}
  g0=(1-a)/(1-a*f(0)); cte=1/(1-a*f(0))
}
if(u==0){res=g0}
if(u==1){res=c(g0,cte*(a+b)*f(1)*g0)}
# Panjer
if(u>=2){
  g[1]=cte*(a+b)*f(1)*g0
  for(r in 2:u){
    aux=0
    for(i in 1:(r-1)){
      aux=aux+cte*(a+b*i/r)*f(i)*g[r-i]
    }
    aux=aux+cte*(a+b)*f(r)*g0
    g[r]=aux
  }
  res=c(g0,g)}
#proba de cola psi(u)=P(M>u)
1-sum(res)
}

#Ejemplo
beta <- 100
theta <- 0.1

```

```

u <- 10
l1 <- Estar(u,theta,beta,0)
l2 <- Estar(u,theta,beta,1)
(l1+l2)/2

```

```
## [1] 0.7506832
```

```

error <- l2-l1
#error menor a:
error

```

```
## [1] 0.000385624
```

B.1.6. Montos de reclamación con distribución Pareto truncada

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina cuando los montos de reclamación tienen una distribución Pareto truncada. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas ' E_{TP}^* ' de la tabla 4.7 y sigue el método de aproximación usando Panjer, descrito en el capítulo 1, páginas 25 y 26.

```

#####
#La función Estar calcula cotas exactas
#l1 y l2 de E*, entonces E*=(l1+l2)/2 cuando
#los montos de los reclamos tienen dist. Pareto truncada
#type = 0 para l1 y type = 1 para l2, l1<l2.
#M = parámetro de truncamiento
#####
Estartp=function(u,theta,beta,type,M){
  u=u*beta
  library(actuar)
  Fe=function(x){
    mut=ppareto(M,1,1)
    (ppareto(x,1,1)/mut-1)*(x<M)+1}
  fu=function(i,beta){Fe(i/beta)-Fe((i-1)/beta)}

```

```

fd=function(i,beta){Fe((i+1)/beta)-Fe(i/beta)}
p=theta/(1+theta)
a=1-p; b=0
g=numeric(u)
if(type==1){
  f=function(i){fu(i,beta)}
  g0=p; cte=1
}
if(type==0){
  f=function(i){fd(i,beta)}
  g0=(1-a)/(1-a*f(0)); cte=1/(1-a*f(0))
}
if(u==0){res=g0}
if(u==1){res=c(g0,cte*(a+b)*f(1)*g0)}
if(u>=2){
  g[1]=cte*(a+b)*f(1)*g0
  for(r in 2:u){
    aux=0
    for(i in 1:(r-1)){
      aux=aux+cte*(a+b*i/r)*f(i)*g[r-i]
    }
    aux=aux+cte*(a+b)*f(r)*g0
    g[r]=aux
  }
  res=c(g0,g)}
1-sum(res)
}

```

#Ejemplo

beta=100

theta=0.1

u=10

M=15

l1=Estartp(u,theta,beta,0,M)

##

```
## Attaching package: 'actuar'

## The following object is masked from 'package:grDevices':
##
##      cm

l2=Estartp(u,theta,beta,1,M)
(l1+l2)/2

## [1] 0.5586148
```

B.1.7. Primera aproximación propuesta

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina usando la primera aproximación de las que se desarrollaron para el modelo de Cramér-Lundberg. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'N1' en las tablas del capítulo 4.

```
#####
#N1 calcula la aproximación del corolario 4.1.2
#u = capital inicial
#c = tasa de prima = (1+theta)*lambda*mu
#lambda = parámetro del proceso de Poisson
#n = nivel de aproximación, entre más grande mejor.
#dist = distribución del tamaño de los reclamos, solo
#para las siguientes distribuciones:
#"g"=gamma
#"me"=mezcla de exponenciales
#"eu"=exponencial uniforme
#"w"=Weibull
#"l"=lognormal
#"p"=Pareto
#"tp"=Pareto truncada en M
#par=vector de parámetros de las distribuciones
#epsilon= valor usado para truncar la suma infinita
#      que aparece en (4.3)
```

```

#M = solo para el caso de la Pareto truncada en M
#####
N1=function(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon,M){
  a=param[1]; b=param[2]
  poi_param=n*u
  lim=poi_param; pk=1
  while(pk>0){
    lim=lim+1
    pk=dpois(lim,poi_param)
  }
  if(dist=="g"){
    mu=a/b
    Fd=function(x){pgamma(x,a,b)}
  }
  if(dist=="me"){
    a1 <- param[1]
    a2 <- param[2]
    b1 <- param[3]
    b2 <- param[4]
    mu <- a1/b1 + a2/b2
    Fd <- function(x){1-a1*exp(-b1*x)-a2*exp(-b2*x)}
  }
  if(dist=="eu"){
    mu=1/4-1/8*exp(-3)
    Fd=function(x,a,b){1-exp(-4*x)*(x<3/4)-
      4*exp(-3)*(1-x)*(x>=3/4&& x<=1)}
  }
  if(dist=="w"){
    mu=gamma((1+1/a))/b
    Fd=function(x){pweibull(x,a,b)}
  }
  if(dist=="l"){
    mu=gamma((1+1/a))/b
    Fd=function(x){pweibull(x,a,b)}
  }
  if(dist=="p"){#param[1]>1
    mu=b/(a-1)
    Fd=function(x){1-(b/(b+x))^a}
  }
  if(dist=="tp"){#param[1]>1

```

```

library(actuar)
mu=(b/(a-1))*ppareto(M,a-1,b)
Fd=function(x){(ppareto(x,a,b)-1)*(x<M)+1}}
if(dist=="l"){
  mu=exp(a+b^2/2)
  Fd=function(x){plnorm(x,a,b)}}
# Cálculo de los coeficientes C_k,n#
#####
theta=c/(lambda*mu)-1
#C0
C0=1/(1+theta) #psi(0)
if(u>0){
  #Cálculo del denominador de (4.3)
  new=1; j=0; summand=1
  #Se toman los sumandos mayores a epsilon
  while(new>epsilon){
    j=j+1
    new=1-Fd(j/n)
    summand=summand+new
  }
  denominator=summand
  #f_N^star(i)
  qistar=function(k){(1-Fd((k-1)/n))/denominator}
  #Ckn= (C_0, C_1, C_2, ..., C_(lim-1) )
  # dpois(lim-1)>0 y dpois(lim)=0
  Ckn=numeric(lim)
  Ckn[1]=C0
  qi=numeric(lim-1)
  for(k in 2:lim){
    aux=C0
    qi[k-1]=qistar(k-1)
    for(j in 2:k){
      aux=aux+C0*qi[j-1]*(Ckn[k+1-j]-1)
    }
    Ckn[k]=aux
  }
}

```

```

    }
    # suma (4.5)
    aux2=Ckn[1]*dpois(0,poi_param)
    for(k in 2:lim){
      aux2=aux2+Ckn[k]*dpois((k-1),poi_param)
    }
    psi=aux2
  }else{psi=C0}
  psi
}

```

```
# Ejemplo gamma
```

```

u=1; c=1.1; lambda=1; n=200
dist="g"; param=c(3.5,3.5); epsilon=0
N1(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon)

```

```
## [1] 0.8021978
```

```
# Ejemplo mezcla de exponenciales
```

```

u=1; c=1.1; lambda=21/5; n=200
dist="me"; param=c(0.5,0.5,3,7); epsilon=0
N1(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon)

```

```
## [1] 0.6512349
```

```
# Ejemplo exponencial-uniforme
```

```

mmu <- 1/4-1/8*exp(-3)
u=1; c=1.1; lambda=1/mmu; n=200
dist="eu"; param=c(0,0); epsilon=0
N1(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon)

```

```
## [1] 0.6158079
```

```
# Ejemplo Weibull
```

```

u=10; c=1.1; lambda=0.5; n=200
dist="w"; param=c(0.5,1); epsilon=0.00001
N1(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon)

```

```
## [1] 0.7506207
```

```
# Ejemplo lognormal
```

```
u=10; c=1.1; lambda=1; n=200
dist="l"; param=c(-1.62,1.8); epsilon=0.000001
N1(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon)
```

```
## [1] 0.7392254
```

```
# Ejemplo Pareto
```

```
u=10; c=1.1; lambda=1; n=200
dist="p"; param=c(2,1); epsilon=0.000001
N1(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon)
```

```
## [1] 0.6260318
```

```
#Ejemplo Pareto truncada
```

```
library(actuar) #necesario
```

```
##
```

```
## Attaching package: 'actuar'
```

```
## The following object is masked from 'package:grDevices':
```

```
##
```

```
##      cm
```

```
dist="tp"; param=c(2,1); epsilon=0
a=param[1]; b=param[2]
u=10; c=1.1; n=200
M=15
mu=(b/(a-1))*ppareto(M,a-1,b)
lambda=1/mu
N1(u,c,lambda,n,dist,param,epsilon,M)
```

```
## [1] 0.5586639
```

B.1.8. Segunda aproximación propuesta

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina usando la segunda aproximación de las que se desarrollaron para el modelo de Cramér-Lundberg. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'N2' en las tablas del capítulo 4.

```
N2 <- function(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed,M){
  a=param[1]; b=param[2]
  poi_param=n*u
  set.seed(seed)
  Z=rpois(m,poi_param)
  lim=max(Z)
  if(dist=="g"){
    mu=a/b
    Fd=function(x){pgamma(x,a,b)}}
  if(dist=="me"){
    a1 <- param[1]
    a2 <- param[2]
    b1 <- param[3]
    b2 <- param[4]
    mu <- a1/b1 + a2/b2
    Fd <- function(x){1-a1*exp(-b1*x)-a2*exp(-b2*x)}
  }
  if(dist=="eu"){
    mu=1/4-1/8*exp(-3)
    Fd=function(x,a,b){1-exp(-4*x)*(x<3/4)-
      4*exp(-3)*(1-x)*(x>=3/4&& x<=1)}}
  if(dist=="w"){
    mu=gamma((1+1/a))/b
    Fd=function(x){pweibull(x,a,b)}}
  if(dist=="p"){#param[1]>1
    mu=b/(a-1)
    Fd=function(x){1-(b/(b+x))^a}}
  if(dist=="tp"){#param[1]>1
```

```

library(actuar)
mu=(b/(a-1))*ppareto(M,a-1,b)
Fd=function(x){(ppareto(x,a,b)-1)*(x<M)+1}}
if(dist=="l"){
  mu=exp(a+b^2/2)
  Fd=function(x){plnorm(x,a,b)}}
#####
theta=c/(lambda*mu)-1
#C0
C0=1/(1+theta) #psi(0)
if(u>0){
  new=1; j=0; summand=1
  while(new>epsilon){
    j=j+1
    new=1-Fd(j/n)
    summand=summand+new
  }
  denominator=summand
  qistar=function(k){(1-Fd((k-1)/n))/denominator}
  #Ckn= (C_0, C_1, C_2, ..., C_(lim))
  Ckn=numeric(lim+1)
  Ckn[1]=C0
  qi=numeric(lim)
  for(k in 2:(lim+1)){
    aux=C0
    qi[k-1]=qistar(k-1)
    for(j in 2:k){
      aux=aux+C0*qi[j-1]*(Ckn[k+1-j]-1)
    }
    Ckn[k]=aux
  }
  CZ=numeric(m)
  for(i in 1:m){CZ[i]=Ckn[(Z[i]+1)]}
  psi=mean(CZ)
}else{psi=C0}

```

```

  psi
}

#Ejemplo gamma
u=1; c=1.1; lambda=1; n=200; m=100; dist="g"
param=c(3.5,3.5); epsilon=0; seed=123
N2(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed)

```

```
## [1] 0.8018867
```

```

# Ejemplo mezcla de exponenciales
u=1; c=1.1; lambda=21/5; n=200; m=100; dist="me"
param=c(0.5,0.5,3,7); epsilon=0; seed <- 123
N2(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed)

```

```
## [1] 0.6506095
```

```

# Ejemplo exponencial-uniforme
mmu <- 1/4-1/8*exp(-3)
u=1; c=1.1; lambda=1/mmu; n=200; m=100; dist="eu"
param=c(0,0); epsilon=0; seed <- 123
N2(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed)

```

```
## [1] 0.6150372
```

```

#Ejemplo Weibull
u=10; c=1.1; lambda=0.5; n=200; m=100; dist="w"
param=c(0.5,1); epsilon=0.00001; seed=123
N2(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed)

```

```
## [1] 0.7504627
```

```

#Ejemplo Pareto
u=10; c=1.1; lambda=1; n=200; m=100; dist="p"
param=c(2,1); epsilon=0.000001; seed=123
N2(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed)

```

```
## [1] 0.6258111
```

```
#Ejemplo truncated Pareto
```

```
library(actuar)
```

```
##
```

```
## Attaching package: 'actuar'
```

```
## The following object is masked from 'package:grDevices':
```

```
##
```

```
##      cm
```

```
dist="tp"; param=c(2,1); epsilon=0
```

```
u=10; c=1.1; n=200; m=100
```

```
M=15
```

```
a=param[1]; b=param[2]
```

```
mu=(b/(a-1))*ppareto(M,a-1,b)
```

```
lambda=1/mu
```

```
seed=123
```

```
N2(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed,M)
```

```
## [1] 0.5583468
```

```
#Ejemplo lognormal
```

```
u=10; c=1.1; lambda=1; n=200; m=100; dist="l"
```

```
param=c(-1.62,1.8); epsilon=0.000001; seed=123
```

```
N2(u,c,lambda,n,m,dist,param,epsilon,seed)
```

```
## [1] 0.7390927
```

B.1.9. Tercera aproximación propuesta

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina usando la tercera aproximación de las que se desarrollaron para el modelo de Cramér-Lundberg. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'N3' en las tablas del capítulo 4.

```

N3=function(u,theta,rs, n = 200){
  poi_param=n*u
  lim=poi_param; pk=1
  while(pk>0){
    lim=lim+1
    pk=dpois(lim,poi_param)
  }
  os=sort(rs)
  em=ecdf(os)
  xx=knots(em)
  if(min(xx)>0){xx=c(0,xx)}
  yy=c(0,em(xx))
  size=length(xx)
  midxx=(xx[1:(size-1)]+xx[2:size])/2
  midxx=c(0,midxx,xx[size])
  empiric=approxfun(midxx,yy)
  empirical=function(x,yn = xx[size]){
    if(x<=yn){result=empiric(x)}else{result=1}
    result
  }
  C0=1/(1+theta)
  j=0; summand=0
  while(j<n*xx[size]){
    new=1-empirical(j/n)
    summand=summand+new
    j=j+1
  }
  denominator=summand
  qistar=function(k){(1-empirical((k-1)/n))/denominator}
  limsum=min(lim+1,j+1)
  qi=1; for(s in 1:(limsum-1)){qi[s]=qistar(s)}
  for(s in limsum:lim){qi[s]=0}
  Ckn=numeric(lim)
  Ckn[1]=C0
  for(k in 2:lim){

```

```

    aux=C0
    for(jj in 2:k){
      aux=aux+C0*qi[(jj-1)]*(Ckn[k+1-jj]-1)
    }
    Ckn[k]=aux
  }
  aux2=Ckn[1]*dpois(0,poi_param)
  for(k in 2:lim){
    aux2=aux2+Ckn[k]*dpois((k-1),poi_param)
  }
  psi=aux2
  psi
}

```

Ejemplos

```

# gama
set.seed(123)
size=10000
rs=rgamma(size,3.5,3.5)
u=1; theta=0.1
N3(u,theta,rs)

```

```
## [1] 0.801384
```

```

# mezcla de exponenciales
set.seed(123)
size=10000
x <- numeric(size)
for(i in 1:size){
  aux <- 1*(runif(1)<=0.5)
  if(aux==1){x[i] <- rexp(1,3)}else{x[i] <- rexp(1,7)}
}
rs <- x

```

```
u=1; theta=0.1
N3(u,theta,rs)
```

```
## [1] 0.6506535
```

```
# exponencial uniforme
set.seed(123)
size=10000
x <- numeric(size)
for(i in 1:size){
  aux <- runif(1)
  if(aux<1-exp(-3)){
    x[i] <- -0.25*log(1-aux)
  }else{
    x[i] <- 1-0.25*exp(3)*(1-aux)
  }
}
rs <- x
u=1; theta=0.1
N3(u,theta,rs)
```

```
## [1] 0.611908
```

```
# Weibull
set.seed(123)
size=10000
rs=rweibull(size,0.5,1)
u=10; theta=0.1
N3(u,theta,rs)
```

```
## [1] 0.7508926
```

```
# Pareto
library(actuar)
```

```
##
## Attaching package: 'actuar'
```

```
## The following object is masked from 'package:grDevices':  
##  
##      cm
```

```
set.seed(123)  
size=50000  
rs=rpareto(size,2,1)  
u <- 10; theta=0.1  
N3(u,theta,rs)
```

```
## [1] 0.6209263
```

```
# Pareto truncada  
library(actuar)  
M=15  
rs=1  
set.seed(123)  
size=10000  
rsp=rpareto(size,2,1)  
for(i in 1:size){  
  rs[i]=(rsp[i]-M)*(rsp[i]<=M)+M  
}  
u=10; theta=0.1  
N3(u,theta,rs)
```

```
## [1] 0.5593857
```

```
# lognormal  
set.seed(123)  
size=50000  
rs=rlnorm(size,-1.62,1.8)  
u=10; theta=0.1  
N3(u,theta,rs)
```

```
## [1] 0.7389638
```

B.1.10. Aproximación por simulacion PKMC

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina usando la aproximación usando el método PKMC. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'PK' en las tablas del capítulo 4.

```
#####
#PK calcula la aproximación PKMC
#u = capital inicial
#theta = factor de recargo
#dist = distr. de tamaño de reclamac, solo
#para las siguientes distribuciones:
#"g"=gamma
#"me"=mezcla de exponenciales
#"eu"=exponencial uniforme
#"w"=Weibull
#"l"=lognormal
#"p"=Pareto
#"tp"=Pareto truncada en M
#n= número de simulaciones
#seed= para reproducibilidad
#####
# Primero, establecemos la funcion
# de la cual se obtendra la muestra
# de la funcion de equilibrio.
requilibrium=function(sim,dist){
  if(dist=="g"){
    # proposal ErM(pi,beta)
    mfe=function(x,pi,beta){
      n=length(pi)
      f=0
      for(i in 1:n){f=f+pi[i]*dgamma(x,i,beta)}
      f
    }
    c=1.152857 # parámetro de acept-rechazo
```

```

x=1; contador=0
while(contador<sim){
  y=rgamma(1,sample(1:4,1),3.5)
  U=runif(1)
  coc=(1-pgamma(y,3.5,3.5))/(c*mfe(y,c(1/4,1/4,1/4,1/4),3.5))
  aux=y*(U<=coc)
  if(aux!=0){
    contador=contador+1
    x[contador]=aux
  }
}
if(dist=="me"){
  x <- numeric(sim)
  for(i in 1:sim){
    aux <- 1*(runif(1)<=0.7)
    if(aux==1){x[i] <- rexp(1,3)}else{x[i] <- rexp(1,7)}
  }
  x
}
if(dist=="eu"){
alpha <- 1/4-1/8*exp(-3)
fx <- function(x){4*(exp(-4*x)-(exp(-4*x)-exp(-3))*(x>=3/4))}
fxe <- function(x){exp(-4*x)/alpha-(exp(-4*x)/alpha
-4*exp(-3)*(1-x)/alpha)*(x>=3/4)}
g <- function(x){fx(x)}
C <- 1.1
exito <- 0
x <- numeric(sim)
while(exito<sim){
  aux <- runif(1)
  if(aux<1-exp(-3)){
    Y <- -0.25*log(1-aux)
  }else{
    Y <- 1-0.25*exp(3)*(1-aux)
  }
}
}

```

```

    }
    U <- runif(1)
    num <- fxe(Y)
    den <- C*g(Y)
    coc <- num/den
    if(U<=coc){
        exito <- exito + 1
        x[exito] <- Y
    }
}
}
if(dist=="w"){
    U=runif(sim)
    x=(qgamma(U,2,1))^2
}
if(dist=="p"){
    u <- runif(sim)
    x <- u/(1-u)
}
if(dist=="tp"){
    library(actuar)
    mut=ppareto(15,1,1)
    U=runif(sim); aux=U*mut
    x=qpareto(aux,1,1)
}
if(dist=="l"){
    # proposal Pareto(1,2)
    library(actuar)
    c=2
    x=1; contador=0
    while(contador<sim){
        y=rpareto(1,1,2)
        U=runif(1)
        coc=(1-plnorm(y,-1.62,1.8))/(c*dpareto(y,1,2))
        aux=y*(U<=coc)
    }
}

```

```

        if(aux!=0){
            contador=contador+1
            x[contador]=aux
        }
    }
}
x
}
#####
PK <- function(u,theta,dist,n,seed){
#Second, we stablish the equilibrium distr.
    if(dist=="g"){Fe=function(x){x*(1-pgamma(x,3.5,3.5))
        +pgamma(x,4.5,3.5)}}
    if(dist=="me"){Fe=function(x){0.7*pexp(x,3)+0.3*pexp(x,7)}}
    if(dist=="eu"){
        Fe <- function(x){
            cte <- 2-exp(-3)
            (2*(1-exp(-4*x))/cte)*(x<0.75)
            +((2-(17-32*x+16*x^2)*exp(-3))/cte)*(x>=0.75&& x<=1)
            +1*(x>1)
        }
    }
    if(dist=="w"){Fe=function(x){pgamma(sqrt(x),2,1)}}
    if(dist=="p"){Fe=function(x){1-(1+x)^{-1}}}
    if(dist=="tp"){Fe=function(x){
        mut=ppareto(15,1,1)
        (ppareto(x,1,1)/mut-1)*(x<15)+1}}
    if(dist=="l"){
        faux=function(x){1-plnorm(x,-1.62,1.8)}
        Fe=function(x){integrate(faux,0,x)$value}
    }
    rho=theta/(1+theta)
    set.seed(seed)
    K=rgeom(n,rho)
    Z=numeric(n)

```

```

for(i in 1:n){
  if(K[i]==0){Z[i]=0}
  if(K[i]==1){Z[i]=1-Fe(u)}
  if(K[i]>1){
    sim=K[i]
    x=requilibrium(sim,dist)
    os=sort(x)[1:(sim-1)]
    Y=u-sum(os)
    m=sort(x)[(sim-1)]
    maxYm=max(c(Y,m))
    Z[i]=(1-Fe(maxYm))/(1-Fe(m))
  }
}
psi=mean(Z)
psi
}

```

#Ejemplo gama

```

u=1; theta=0.1; dist="g"
n=50000; seed=123
PK(u,theta,dist,n,seed)

```

```
## [1] 0.8634491
```

#Ejemplo mezcla de exponenciales

```

u=1; theta=0.1; dist="me"
n=50000; seed=123
PK(u,theta,dist,n,seed)

```

```
## [1] 0.6500023
```

#Ejemplo exponencial-uniforme

```

u=1; theta=0.1; dist="eu"
n=50000; seed=123
PK(u,theta,dist,n,seed)

```

```
## [1] 0.90856
```

```
#Ejemplo Weibull  
u=10; theta=0.1; dist="w"  
n=5000; seed=123  
PK(u,theta,dist,n,seed)
```

```
## [1] 0.7489094
```

```
#Ejemplo Pareto  
u=10; theta=0.1; dist="p"  
n=50000; seed=123  
PK(u,theta,dist,n,seed)
```

```
## [1] 0.6262684
```

```
#Ejemplo Pareto truncada  
u=10; theta=0.1; dist="tp"  
n=50000; seed=123  
PK(u,theta,dist,n,seed)
```

```
##  
## Attaching package: 'actuar'  
  
## The following object is masked from 'package:grDevices':  
##  
##      cm
```

```
## [1] 0.557477
```

```
#Ejemplo lognormal  
u=10; theta=0.1; dist="l"  
n=50000; seed=123  
PK(u,theta,dist,n,seed)
```

```
## [1] 0.7396388
```

B.1.11. Aproximación por el método de tráfico ligero.

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina usando la aproximación usando el método LT. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'LT' en las tablas del capítulo 4.

```
LT=function(u,theta,dist,param){
  a=param[1]; b=param[2]
  if(dist=="w"){
    mu=gamma(1+1/a)/b
    Fr=function(x){exp(-(b*x)^a)}# 1-F(x)
  }
  if(dist=="p"){
    #library(actuar)
    mu=b/(a-1)
    Fr=function(x){(b/(b+x))^a}# 1-F(x)
  }
  if(dist=="l"){
    mu=exp(a+b^2/2)
    Fr=function(x){1-plnorm(x,a,b)}# 1-F(x)
  }
  Fe=(1/mu)*(integrate(Fr,0,u)$value)
  psi=(1/(1+theta))*(1-Fe)
  psi
}
```

```
# Weibull
dist="w"; param=c(0.5,1)
theta=0.1
LT(10,theta,dist,param)
```

```
## [1] 0.1601691
```

```
# lognormal
dist="l"; param=c(-1.62,1.8)
```

```
theta=0.1
LT(10,theta,dist,param)
```

```
## [1] 0.1869869
```

```
# Pareto
dist="p"; param=c(2,1)
theta=0.1
LT(10,theta,dist,param)
```

```
## [1] 0.08264463
```

B.1.12. Aproximación por el método subexponencial.

En esta subsección se presenta el código para calcular una aproximación a la probabilidad de ruina usando la aproximación usando el método subexponencial. Este código fue usado para obtener los valores que aparecen en las filas nombradas 'S' en las tablas del capítulo 4.

```
S=function(u,theta,dist){
  if(dist=="w"){
    gg <- function(x){(1-pweibull(x,1/2,1))/2}
    Fe <- function(x){integrate(gg,0,x)$value}
  }
  if(dist=="p"){
    gg <- function(x){1/(1+x)^2}
    Fe <- function(x){integrate(gg,0,x)$value}
  }
  if(dist=="l"){
    gg <- function(x){1-plnorm(x,-1.62,1.8)}
    Fe <- function(x){integrate(gg,0,x)$value}
  }
  (1/theta)*(1-Fe(u))
}
```

```
#Ejemplo Weibull
```

```
dist="w"; alpha=0.5; beta=1  
theta <- 0.1  
S(10,theta,dist)
```

```
## [1] 1.76186
```

```
#Ejemplo Pareto
```

```
dist="p"; alpha=2; beta=1  
theta <- 0.1  
S(10,theta,dist)
```

```
## [1] 0.9090909
```

```
#Ejemplo lognormal
```

```
dist="l"; alpha=-1.62; beta=1.8  
theta <- 0.1  
S(10,theta,dist)
```

```
## [1] 2.056856
```

Bibliografía

- [1] Albrecher, H., Avram, F. y Kortschak, D. (2010). On the efficient evaluation of ruin probabilities for completely monotone claim distributions. *Journal of computational and applied mathematics*, 233(10), 2724–2736.
- [2] Asmussen, S. y Binswanger, K. (1997). Simulation of ruin probabilities for subexponential claims. *ASTIN Bulletin*, 27(2), 297–318.
- [3] Asmussen, S. y Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities*. Second Edition, World Scientific, Singapore.
- [4] Avram, F., Chedom, D. F. y Horváth, A. (2011). On moments based Padé approximations of ruin probabilities. *Journal of computational and applied mathematics*, 235(10), 3215–3228.
- [5] Baker, C. (1977). *The Numerical Treatment of Integral Equations*. Clarendon Press, Oxford.
- [6] Beekman, J.A. (1968). Collective risk results. *Transactions of the Society of Actuaries*, 20, 182–199.
- [7] Beekman, J.A. (1969). A ruin function approximation. *Transactions of Society of Actuaries*, 21, 41–48.
- [8] Bladt, M., Nielsen, B. F. y Samorodnitsky, G. (2015). Calculation of ruin probabilities for a dense class of heavy tailed distributions. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2015(7), 573–591.
- [9] Bohman, H. (1971). The ruin probability in a special case. *ASTIN Bulletin*, 6(1), 66–68.
- [10] Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. y Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries. Schaumburg, Illinois.

- [11] Burnecki, K., Mista, P. y Weron, A. (2005). A new gamma type approximation of the ruin probability. *Acta Physica Polonica B*, 36, 1473–1483.
- [12] Burnecki, K., Mista, P. y Weron, A. (2005). Ruin probabilities in finite and infinite time. *Statistical Tools for Finance and Insurance*, 341–379, Springer, Berlin.
- [13] Cheng, S., Gerber, H. U. y Shiu, E. S. (2000). Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26(2), 239–250.
- [14] Chesney, M., Cornwall, J., Glenn Kentwell, M. J. y Yor, M. (1997). Parisian Pricing: An exploration of barrier options which take a finite time to be triggered. *Risk* (London magazine limited), 1997(10), 77–79.
- [15] Choi, S. K., Choi, M. H., Lee, H. S. y Lee, E. Y. (2010). New approximations of ruin probability in a risk process. *Quality Technology and Quantitative Management*, 7(4), 377–383.
- [16] Cohen, A. M. (2007). *Numerical methods for Laplace transform inversion*. Springer Science and Business Media, New York.
- [17] Cramér, H. (1930). *On the mathematical theory of risk*. Centraltryckeriet.
- [18] Cramér, H. (1955). *Collective risk theory: A survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes*. Nordiska bokhandeln.
- [19] Damarackas, J. y Šiaulyš, J. (2015). A note on the net profit condition for discrete and classical risk models. *Lithuanian Mathematical Journal*, 55(4), 465–473.
- [20] Dassios, A. y Wu, S. (2008). Parisian ruin with exponential claims. *Department of Statistics, London School of Economics and Political Science, London, UK*. (Sin publicar)
- [21] De Pril, N. (1986). On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model. *ASTIN Bulletin*, 16(2), 109–112.

- [22] De Vylder, F. (1978). A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1978(2), 114–119.
- [23] De Vylder, F. y Marceau, E. (1996). Classical numerical ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1996(2), 109–123.
- [24] Dickson, D. C. y Gray, J. R. (1984). Approximations to ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1984(3), 174–186.
- [25] Dickson, D. C. y Waters, H. R. (1991). Recursive calculation of survival probabilities. *ASTIN Bulletin*, 21(2), 199–221.
- [26] Dickson, D. C. y Waters, H. R. (1993). Gamma processes and finite time survival probabilities. *ASTIN Bulletin*, 23(2), 259–272.
- [27] Dickson, D. C. (1994). Some comments on the compound binomial model. *ASTIN Bulletin*, 24(1), 33–45.
- [28] Dickson, D. C. (1995). A review of Panjer's recursion formula and its applications. *British Actuarial Journal*, 01(1), 107–124.
- [29] Dickson, D. C. y Hipp, C. (1998). Ruin probabilities for Erlang (2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22(3), 251–262.
- [30] Dickson, D. C. (2005). *Insurance Risk and Ruin* (International Series on Actuarial Science). Cambridge University Press, Cambridge.
- [31] Dufresne, F. y Gerber, H. U. (1988). The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7(3), 193–199.
- [32] Dufresne, F. y Gerber, H. U. (1989). Three methods to calculate the probability of ruin. *ASTIN Bulletin*, 19(1), 71–90.
- [33] Dufresne, F., Gerber, H. U. y Shiu, E. S. (1991). Risk theory with the gamma process. *ASTIN Bulletin*, 21(2), 177–192.
- [34] Embrechts, P., Goldie, C. M. y Veraverbeke, N. (1979). Subexponentiality and infinite divisibility. *Probability Theory and Related Fields*, 49(3), 335–347.

- [35] Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications I*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [36] Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications II*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [37] Fristedt, B. E. y Gray, L. F. (1997). *A modern approach to probability theory*. Birkhäuser, Basel.
- [38] Gerber, H. U. (1979). *An introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation, Filadelfia.
- [39] Gerber, H. U., Goovaerts, M. J. y Kaas, R. (1987). On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin*, 17(2), 151–163.
- [40] Gerber, H. U. (1988). Mathematical fun with the compound binomial process. *ASTIN Bulletin*, 18(2), 161–168.
- [41] Gerber, H. U. y Shiu, E. S. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 48–72.
- [42] Gerber, H. U. y Shiu, E. S. (2005). The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, 9(2), 49–69.
- [43] Goffard, P. O., Loisel, S. y Pommeret, D. (2016). A polynomial expansion to approximate the ultimate ruin probability in the compound Poisson ruin model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 296, 499–511.
- [44] Grandell, J. y Segerdahl, C. (1971). A comparison of some approximations of ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1971(3-4), 143–158.
- [45] Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*. Springer Series in Statistics. Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York.
- [46] Grandell, J. (1997). *Mixed poisson processes*. Monographs on Statistics and Applied Probability 77. Springer Science Business and Media, Dordrecht.
- [47] Grandell, J. (2000). Simple approximations of ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26(2), 157–173.

- [48] Gzyl, H., Novi-Inverardi, P. L. y Tagliani, A. (2013). Determination of the probability of ultimate ruin by maximum entropy applied to fractional moments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(2), 457–463.
- [49] Karlis, D. y Xekalaki, E. (2005). Mixed poisson distributions. *International Statistical Review*, 73(1), 35–58.
- [50] Klugman, S., Panjer, H. y Willmot, G. (2008). *Loss models: From data to decisions*. Third edition, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [51] Kyprianou, A. E. (2013). *Gerber-Shiu Risk Theory*. Springer International Publishing, Switzerland.
- [52] Lee, S. C. K. y Lin, X. S. (2010). Modeling and Evaluating Insurance Losses Via Mixtures of Erlang Distributions. *North American Actuarial Journal*, 14(1), 107–130.
- [53] Li, S. y Garrido, J. (2002). On the time value of ruin in the discrete time risk model. *Business Economics Series 12*, Working Paper 02-18, Universidad Carlos III de Madrid.
- [54] Li, S. (2005). Distributions of the surplus before ruin, the deficit at ruin and the claim causing ruin in a class of discrete time risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(4), 271–284.
- [55] Li, S. y Garrido, J. (2005). On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. *Advances in Applied Probability*, 37(3), 836–856.
- [56] Lukacs, E. (1975). *Stochastic convergence*. Second Edition, Academic Press, New York.
- [57] Lundberg, F. (1903). *Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen*. Akademisk afhandling. Uppsala.
- [58] Lundberg, F. (1909). *Zur Theorie der Rückversicherung*. Trans. Int. Congr. Act. Vienna.
- [59] Lundberg, F. (1919). *Teorin for riskmassor*. Forsakringsinspektionens, Estocolmo.

- [60] Lundberg, F. (1926-1928). *Forsakringsteknisk riskutjamning*. Estocolmo.
- [61] Lundberg, F. (1930). Uber die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse. *Skand. Akt. Tidskr.*
- [62] Lundberg, F. (1932). Some supplementary researches on the collective risk theory. *Skand. Akt. Tidskr.*
- [63] Lundberg, F. (1934). On the numerical application of the collective risk theory. *De Forenade Jubilee Volume*. Estocolmo.
- [64] Mnatsakanov, R. M., Sarkisian, K. y Hakobyan, A. (2015). Approximation of the ruin probability using the scaled Laplace transform inversion. *Applied mathematics and computation*, 268, 717–727.
- [65] Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12(1), 22–26.
- [66] Panjer, H. H. (1986). Direct calculation of ruin probabilities. *Journal of Risk and Insurance*, 53(3), 521–529.
- [67] Panjer, H. H. y Willmot, G. E. (1992). *Insurance risk models*. SoA.
- [68] Philipson, C. (1968). *A Review of the Collective Theory of Risk*. Part I and II, *Skand. Akt. Tidskr.*
- [69] Promislow, S. D. (2011). *Fundamentals of Actuarial Mathematics*. Second Edition, John Wiley and Sons, Ltd. (Publicado en 2011, registrado en 2010)
- [70] Puri, P. S. y Goldie, C. M. (1979). Poisson mixtures and quasi-infinite divisibility of distributions. *Journal of Applied Probability*, 16(1), 138–153.
- [71] R Development Core Team (2008). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL: <http://www.R-project.org>.
- [72] Ramsay, C. M. (2003). A solution to the ruin problem for Pareto distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(1): 109–116.

- [73] Ramsay, C.M., Usábel, M. (1997). Calculating ruin probabilities via product integration. *ASTIN Bulletin* 27(2), 263–271.
- [74] Rizzo, Maria L. (2007). *Statistical Computing with R*. Chapman and Hall, CRC computer science and data analysis series, Florida.
- [75] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. y Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Finance and Insurance*. John Wiley and Sons, Chichester.
- [76] Santana, D., González, J. y Rincón, L. (2017). Approximations of the Ultimate Ruin Probability in a Risk Process using Erlang Mixtures. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 19(3), 775–798.
- [77] Schassberger, R. (1973). *Warteschlangen*. Springer-Verlag.
- [78] Shiu, E. (1989). The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin*, 19(2), 179–190.
- [79] Andersen, E. S. (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between claims. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 12, 275–279.
- [80] Steutel, F. W. y Van Eenige, M. J. A. (1997). Note on the approximation of distributions on \mathbb{Z}^+ by mixtures of negative binomial distributions. *Stochastic Models*, 13(2), 271–274.
- [81] Taaffe, M. R. y Johnson, M. J. (1988). The Denseness of Phase Distributions. *School of Industrial Engineering, Purdue University*, Research Memorandum, 88–20.
- [82] Takacs, Lajos. (1971). Review: J. W. Cohen, The Single Server Queue. *Ann. Math. Statist.*, 42 (1971), no. 6, 2162–2164.
- [83] Thorin, O., (1970). Some remarks on the ruin problem in case the epochs of claims form a renewal process. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1970(1-2), 29-50.
- [84] Tijms, H. C., (1986). *Stochastic modelling and analysis: a computational approach*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [85] Tijms, H. C., (1994). *Stochastic models: an algorithmic approach*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

- [86] Vatamidou, E., Adan, I., Vlasiou, M. y Zwart, B., (2014). On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 6, 510–534.
- [87] Willmot, G., (1988). Further use of Shiu's approach to the evaluation of ultimate ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7 (4), 275–281.
- [88] Willmot, G. E., y Lin, X. S. (2001). *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications*. Springer Science and Business Media, New York.
- [89] Willmot, G. y Woo, J. K., (2007). On the class of Erlang mixtures with risk theoretic applications. *North American Actuarial Journal*, 11 (2), 99–115.
- [90] Willmot, G. y Lin, S., (2011). Risk modelling with the mixed Erlang distribution. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27 (1), 2–16.