UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DE LA CATEGORÍA DE $\mathscr{C}$-MÓDULOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Fernando García Pérez

TUTOR

Dr. Valente Santiago Vargas

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2018

Introducción

En el año 1945 Saunders Mac Lane y Samuel Eilenberg introducen formalmente los conceptos de funtores, categorías, y transformaciones naturales en su artículo conjunto [EM45]. El contenido de dicho artículo establece por primera vez la formulación sistemática de lo que se conoce hoy en día como "*teoría de categorías*".

Para finales de la década de 1940 e inicios de la década de 1950 la teoría de categorías es aplicada principalmente al área de la topología algebraíca. Es a mediados de la década de 1950 que se publica el influyente libro [CE56] a cargo de Henri Cartan y Samuel Eilenberg, revolucionando el estudio del álgebra homológica.

Fue también durante estos años que el matemático Nobuo Yoneda, quién había aprendido álgebra homológica durante la visita de Eilenberg a Japón, estableció que:

"*Si F es un funtor de una categoría $\mathscr{C}$ a la categoría* **Con** *de conjuntos, entonces el conjunto de transformaciones naturales de $Hom_{\mathscr{C}}(C,-)$ a F está en correspondencia biyectiva con el conjunto $F(C)$ para todo $C \in \mathscr{C}$*".

Este importante resultado atribuido a Yoneda fue conocido por Mac Lane quien lo bautizó como "*Lema de Yoneda*".

Por otro lado, el alumno de Eilenberg, D.A. Buchsbaum, estableció formalmente el concepto de "*categoría exacta*" a mediados de los años cincuenta. Esta categoría consistía en un precursor de la noción "*categoría abeliana*", que viene a ser una abstracción de las propiedades fundamentales de la categoría **Ab** de grupos abelianos. Aunque las categorías abelianas fueron estudiadas más profundamente en las décadas posteriores por algunos matemáticos como P. Freyd, B.M Mitchell y P. Gabriel entre otros, es en 1957 que Alexander Grothendieck publica su famoso artículo [GA57] en el cual introduce formalmente por primera vez el concepto de categoría abeliana. En dicho artículo, Grothendieck transfiere de manera exitosa procedimientos del álgebra homólogica desarrollados en [CE56] a la categoría abeliana de gavillas sobre un espacio topológico, impulsando fuertemente el estudio de la geometría algebraica. El éxito de dicha empresa se debió en buena parte a la introducción de las categorías abelianas a su trabajo, así como el enfoque "*funtorial*" que dio al concepto de gavilla.

El trabajo de Maurice Auslander concerniente a la categoría de funtores comenzó en [AM66] al estudiar la categoría $mod(\mathscr{C}^{op})$ de funtores aditivos contravariantes finitamente presentados de una categoría abeliana $\mathscr{C}$ a la categoría **Ab** de grupos abelianos. Auslander mostró que dicha categoría era abeliana con propiedades homólogicas muy deseables que no dependían de la elección de la categoría $\mathscr{C}$, además de ser equivalente bajo ciertas condiciones a la categoría $\mathscr{C}$. Esto sugería que una manera de estudiar $\mathscr{C}$ era a través de $mod(\mathscr{C}^{op})$. No es hasta [AM74] que M. Auslander introduce los metodos funtoriales desarrollados en [AM66] a la de teoría de la representación de álgebras finitas, dicho enfoque consistía en estudiar $mod(\mathscr{C}^{op})$ cuando $\mathscr{C}$ es la categoría $mod(\Lambda)$ de módulos finitamente generados sobre un álgebra de Artin Λ.

La categoría de $\mathscr{C}$-módulos, denotada $Mod(\mathscr{C})$, cuya clase de objetos consiste de todos los funtores aditivos covariantes de la categoría $\mathscr{C}$ a la categoría **Ab** y su versión contravariante $Mod(\mathscr{C}^{op})$ así como algunas de sus subcategorías, entre ellas $mod(\mathscr{C}^{op})$ fueron utilizadas ampliamente en [AM74] para lograr su respectivo cometido más sin embargo muchas pruebas concernientes a estas categorías son asumidas tácitamente por el autor o demostradas de forma muy breve sin dar muchos detalles. El objetivo de esta tesis es esencialmente exponer de forma clara e introductoria pero también de forma rigurosa las herramientas necesarias para un estudio y exposición de algunas propiedades de las categorías $Mod(\mathscr{C})$ y $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

En el primer capítulo como el título lo sugiere, se exponen los conceptos y resultados preliminares para abordar este trabajo de forma auto-contenida. El capítulo inicia estudiando los fundamentos más generales de la teoría de categorías, para después exponer y demostrar algunas propiedades de las categorías normales, exactas y aditivas. Se concluye con la definición de categoría abeliana, así como la enunciación de un teorema atribuido a P. Freyd que permite caracterizar a las categorías abelianas.

El segundo capítulo es de contenido técnico pues se da una prueba de que la categoría de los grupos abelianos tiene estructura de categoría abeliana. Dicho resultado será necesario en la fundamentación del contenido de los capítulos posteriores.

En el tercer capítulo será muy importante en este trabajo pues contiene muchas de las herramientas para lograr el propósito de esta tesis. El capítulo comienza introduciendo la categoría de funtores $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$ entre dos categorías arbitrarias $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, para posteriormente hacer énfasis en subcategoría plena $Mod(\mathscr{C})$ de $[\mathscr{C},\mathbf{Ab}]$. Se prueba que $Mod(\mathscr{C})$ es una categoría abeliana. Se introduce el funtor covariante de representación, se da una prueba del Lema de Yoneda en su versión contravariante y algunos de sus corolarios. Se finaliza exponiendo los conceptos de objetos proyectivos y objetos generadores así como sus respectivos conceptos duales.

El cuarto capítulo inicia exponiendo una equivalencia entre la bien conocida categoría $Mod(R)$ de módulos izquierdos sobre un anillo con $Mod(\mathscr{C})$ cuando $\mathscr{C}$ es el anillo R visto como un categoría con un sólo objeto. Se prueba de manera detallada un importante lema que establece un isomorfismo en la categoría **Ab** que permitira ejemplificar objetos inyectivo y cogeneradores inyectivos en $Mod(\mathscr{C})$. Se concluye el capítulo demostrando varios resultados concernientes a la relación funtorial que hay entre las categorías $Mod(\mathscr{C})$ y $Mod(\mathscr{C}^{op})$ con el afán de demostrar la suficiencia de inyectivos en la categoría $Mod(\mathscr{C})$.

En el quinto y último capítulo se comienza estudiando la noción objetos compactos en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ y algunas de sus propiedades. Posteriormente, se estudia la sucategoría plena $\rho(\mathscr{C})$ de $Mod(\mathscr{C}^{op})$

cuyos objetos son los objetos $C \in Mod(\mathscr{C}))$ que son proyectivos y finitamente generados, también se estudiara la subcategoría plena $mod(\mathscr{C}^{op})$ de $Mod(\mathscr{C}^{op})$ cuyos objetos son los $\mathscr{C}^{op}$-módulos finitamente presentados. Se expone la noción de variedades de Annuli y generador aditivo que permitira dar una relación entre $\rho(\mathscr{C})$ y $mod(\mathscr{C}^{op})$. Finalmente, se introduce el concepto de pseudokernel para demostrar que la subcategoría $mod(\mathscr{C}^{op})$ de $Mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene dimensión proyectiva a lo más dos.

Finalmente, se da un breve apéndice con el célebre Teorema de Inmersión de Freyd-Mitchell y el Lema de la Serpiente en categorías abelianas, este último lema será usado ampliamente en el capítulo 5.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Los conceptos y teoría que se estudian en este primer capítulo corresponden a una introducción general a la teoría de categorías. Muchos de los conceptos expuestos aquí serán usados a lo largo de este texto. Como se verá conforme se avance en el capítulo se intentara ejemplificar lo más posible los conceptos que se vayan presentando.

1.1. Categorías, subcategorías y funtores.

Definición 1.1.1. *Una **categoría** $\mathscr{C}$ consiste en:*

- *Una clase $Obj(\mathscr{C})$ de elementos, llamada clase de objetos de $\mathscr{C}$.*
- *Una clase $Morf(\mathscr{C})$, llamada clase de morfismos de $\mathscr{C}$, con*

$$Morf(\mathscr{C}) = \bigcup_{(A,B)\in Obj(\mathscr{C})\times Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$$

  donde $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ es un conjunto para todo par de objetos $(A,B) \in Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{C})$ y si $(A,B) \neq (C,D)$ con $(A,B),(C,D) \in Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{C})$, entonces se tiene que

$$Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathscr{C}}(C,D) = \emptyset.$$

- *Una ley de composición $\circ$: es decir para cada terna de objetos $(A,B,C) \in Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{C})$ existe una función*

$$\theta : Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A,C).$$

  Denotaremos por $g \circ f$ a $\theta(f,g)$. La ley de composición satisface las siguientes propiedades *(i) Asociatividad:* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *siempre que la composición esté definida.*

(ii) Para todo $A \in Obj(\mathscr{C})$ *existe un elemento distinguido de* $Hom_{\mathscr{C}}(A,A)$ *denotado* 1_A*, llamado identidad en* A *tal que*

$$f \circ 1_A = f \quad y \quad 1_A \circ g = g$$

para cualquier $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *y* $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ *dado cualquier* $B \in Obj(\mathscr{C})$*.*

De ahora en adelante, escribiremos gf en lugar de $g \circ f$. También, según sea conveniente, dado un morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, esté podrá ser representado por $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$. En este caso se dice que A es el *dominio* de f y B es el *codominio* de f, los denotaremos por $dom(f) := A$ y $cod(f) := B$ respectivamente. También a veces el conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ puede ser denotado $\mathscr{C}(A,B)$.

Definición 1.1.2. *Si* $\mathscr{C}$ *es una categoría donde* $Obj(\mathscr{C})$ *es un conjunto entonces se dice que* $\mathscr{C}$ *es una* ***categoría pequeña****.*

Definición 1.1.3. *Si* $\mathscr{C}$ *una categoría. Se dice que* $\mathscr{C}'$ *es una* ***subcategoría*** *de* $\mathscr{C}$ *si satisface lo siguiente:*

(i) $Obj(\mathscr{C}') \subseteq Obj(\mathscr{C})$*.*

(ii) $Hom_{\mathscr{C}'}(A,B) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *para todo* $(A,B) \in Obj(\mathscr{C}') \times Obj(\mathscr{C}')$*.*

(iii) Sean $f \in Hom_{\mathscr{C}'}(A,B)$ *y* $g \in Hom_{\mathscr{C}'}(B,C)$*, entonces* $gf \in Hom_{\mathscr{C}'}(A,C)$ *y es igual a la composición* $gf \in Hom_{\mathscr{C}}(A,C)$*.*

(iv) Si $C \in Obj(\mathscr{C}')$*, entonces la identidad* $1_C \in Hom_{\mathscr{C}'}(C,C)$ *es igual a la identidad* $1_C \in Hom_{\mathscr{C}}(C,C)$*.*

Si $\mathscr{C}'$ es una subcategoría de $\mathscr{C}$ y $Hom_{\mathscr{C}'}(A,B) = Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ para todo $(A,B) \in Obj(\mathscr{C}') \times Obj(\mathscr{C}')$ se dice que $\mathscr{C}'$ es **subcategoría plena** de $\mathscr{C}$.

A continuación veamos algunos ejemplos de categorías.

Ejemplos de categorías

- La categoría **Con** cuya clase de objetos consiste de la clase de todos los conjuntos y donde $Hom_{Con}(A,B)$ consiste del conjunto de todas las funciones de A en B.

- La categoría **Top** cuya clase de objetos consiste de la clase de todos los espacios topológicos y donde $Hom_{Top}(A,B)$ consiste del conjunto de todas las funciones continuas del espacio A en el espacio B.

- La categoría **Ab** cuya clase de objetos consiste de la clase de todos los grupos abelianos y donde $Hom_{Ab}(A,B)$ consiste del conjunto de todas homomorfismos del grupo A en el grupo B.

- Sea $(M,\bullet)$ un monoide, podemos pensar a M como una categoría con un solo objeto, tomando $Obj(M) := \{*\}$ y $Hom_{\mathscr{M}}(*,*) := M$,donde la composición está dada por la multiplicación en M.

- Sea $\langle P, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado, podemos pensar a P como una categoría cuyos objetos son los elementos de P y dados $a,b \in P$, existe un único morfismo $a \to b$ si y sólo si $a \leq b$.

- Podemos definir la categoría $\triangle$, cuya clase de objetos es $Obj(\triangle) := \{[n] | n \in \mathbb{N}\}$ donde $[n] = \{0,...,n\}$ y los morfismos son funciones no decrecientes. Esta categoría es fundamental para definir objetos simpliciales en topología algebraíca.

- Si $\mathscr{C}$ es una categoría y $C \in Obj(\mathscr{C})$ entonces la *categoría rebanada* o de objetos sobre C, denotada $\mathscr{C}/C$ tiene como objetos a los morfismos en $Morf(\mathscr{C})$ de la forma $f : A \to C$ y si $g : B \to C$ es otro objeto en $\mathscr{C}/C$, un morfismo $h \in Hom_{\mathscr{C}/C}(f,g)$ es un morfismo $h \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}.$$

Definición 1.1.4. *Dada una categoría $\mathscr{C}$, se define la* ***categoría opuesta o dual*** *denotada $\mathscr{C}^{op}$, como sigue*

- *$Obj(\mathscr{C}^{op}) = Obj(\mathscr{C})$ y dado un $A \in \mathscr{C}$, escribiremos A^* para decir que al objeto A lo estamos considerando en la categoría $\mathscr{C}^{op}$.*

- *Si $A,B \in Obj(\mathscr{C})$ entonces $Hom_{\mathscr{C}^{op}}(A,B) = Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ y escribiremos $f : A^* \to B^*$ para denotar a $f \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(A,B)$.*

- *La composición $\beta\alpha$ en $\mathscr{C}^{op}$ está definida como el morfismo $\alpha\beta$ en $\mathscr{C}$,i.e $\beta^*\alpha^* = \alpha\beta$.*

El proceso de asociar a cada categoría $\mathscr{C}$ su categoría dual $\mathscr{C}^{op}$ nos permite dualizar cada definición o enunciado en la categoria $\mathscr{C}$ a una definición o enunciado correspondiente en la categoría $\mathscr{C}^{op}$. Desde un punto de vista práctico, este procedimiento consiste en *"voltear las flechas de los morfismos correspondientes"*.

Es inmediato ver que $\mathscr{C} = (\mathscr{C}^{op})^{op}$. Además, ahora en adelante cada vez que una noción categórica sea introducida y demostrada, en varios casos también se enunciara la noción dual y se va a asumir tácitamente que la noción dual está demostrada.

1.2. Morfismos especiales, Funtores y Transformaciones Naturales.

Definición 1.2.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría, un morfismo $\theta : A \to B$ es llamado **mono-escindido** si existe un morfismo $\theta' : B \to A$ tal que $\theta'\theta = 1_A$. Se dice que $\theta : A \to B$ es un **epi-escindido** si existe un morfismo $\theta'' : B \to A$ tal que $\theta\theta'' = 1_B$. Si θ es mono-escindido y epi-escindido entonces se dice que θ es **isomorfismo**,en este caso decimos que A y B son isomorfos y se denota por $A \cong B$.*

Observación 1.2.2. *Sea $\theta : A \to B$ un isomorfismo entonces $\theta' = \theta''$, donde θ' y θ'' son los morfismos de la definición anterior .*

Demostración. En efecto, $\theta' = \theta' 1_B = \theta'(\theta\theta'') = (\theta'\theta)\theta'' = 1_A\theta'' = \theta''$. □

Definición 1.2.3. *Sea $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ un morfismo en $\mathscr{C}$, decimos que α es un **monomorfismo** si cada vez que $\alpha f = \alpha g$ para $f,g \in Hom_{\mathscr{C}}(X,A)$ entonces $f = g$. Un morfismo $\alpha \in Hom_C(A,B)$ en $\mathscr{C}$ es un **epimorfismo** si cada vez que $f\alpha = g\alpha$ para $f,g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,X)$ implica que $f = g$.*

Lema 1.2.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) Si α y β son monomorfismos entonces $\beta\alpha$ es un monomorfismo.

(b) Si α y β son epimorfismos entonces $\beta\alpha$ es un epimorfismo.

(c) Si $\alpha \in Hom_C(A,B)$ es mono-escindido y un epimorfismo entonces α es un isomorfismo.

(d) Si $\alpha \in Hom_C(A,B)$ es epi-escindido y un monomorfismo entonces α es un isomorfismo.

(e) Si $\alpha \in Hom_C(A,B)$ es mono-escindido entonces α es un monomorfismo.

(f) Si $\alpha \in Hom_C(A,B)$ es epi-escindido entonces α es un epimorfismo.

Demostración. (a) Sin perdida de generalidad supóngase que $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B), \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(B,C)$. Sean $f,g : X \to A$ tal que $(\beta\alpha)f = (\beta\alpha)g$. Por asociatividad se tiene que $\beta(\alpha f) = \beta(\alpha g)$, como β es monomorfismo (por hipótesis) entonces $\alpha f = \alpha g$ y de suponer α monomorfismo se obtiene que $f = g$. Por lo tanto $\beta\alpha$ es monomorfismo.

(b) Prueba análoga al inciso (a).

(c) Como $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ es mono-escindido por hipótesis existe $\alpha' \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ tal que $\alpha'\alpha = 1_A$. Ahora bien, $(\alpha\alpha')\alpha = \alpha(\alpha'\alpha) = \alpha 1_A = \alpha = 1_B\alpha$, al tener por hipótesis que α es un epimorfismo concluimos que $(\alpha\alpha') = 1_B$. Así al ser α un mono-escindido y un epi-escindido se tiene que α es un isomorfismo.

(d) Prueba análoga al inciso (c).

(e) Si α es un mono-escindido entonces existe $\alpha' \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ tal que $\alpha'\alpha = 1_A$. Sean $f,g \in Hom_{\mathscr{C}}(X,A)$ tales que $\alpha f = \alpha g$. Entonces componiendo con α' se obtiene que $\alpha'(\alpha f) = \alpha'(\alpha g)$ y por asociatividad se tiene que $(\alpha'\alpha)f = (\alpha'\alpha)g$. Como $\alpha'\alpha = 1_A$ se tiene que $1_A f = 1_A g$ por lo que $f = g$, implicando que α es un monomorfismo.

(f) Prueba análoga a el inciso (e).

□

Nota: En la categoría **Con** se prueba que α es un monomorfismo si y sólo si α es inyectiva y que α es un epimorfismo si y sólo si α es suprayectiva.

Definición 1.2.5. *Una categoría $\mathscr{C}$ es* ***balanceada*** *si todo morfismo que es un monomorfismo y un epimorfismo es un isomorfismo.*

Observación 1.2.6. *(i) Si $\beta\alpha$ es un monomorfismo entonces α es un monomorfismo, pero no necesariamente β es un monomorfismo.*

(ii) Si $\beta\alpha$ es un epimorfismo entonces β es un epimorfismo, pero no necesariamente α es un epimorfismo.

Demostración. (i) Supóngase que $\alpha f = \alpha g$ entonces componiendo con β se tiene que $\beta(\alpha f) = \beta(\alpha g)$ y por asociatividad se obtiene $(\beta\alpha)f = (\beta\alpha)g$. Al ser $\beta\alpha$ un monomorfismo se tiene que $f = g$. Probándose que α es monomorfismo.
Para ver que β no necesariamente es un monomorfismo, considérense las siguientes funciones en la categoría **Con**

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

que tienen como reglas de correspondencia, $\alpha(n) = n$ y $\beta(n) = |n|$, respectivamente, claramente $\beta\alpha$ es inyectiva(monomorfismo) y suprayectiva(epimorfismo) pues $\beta\alpha = 1_{\mathbb{N}}$ pero β no es inyectiva(monomorfismo) ya que $\beta(-n) = \beta(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) La prueba es análoga a (i) y el contraejemplo anterior también demuestra lo requerido.

□

Definición 1.2.7. *Si $\alpha : A' \to A$ es un monomorfismo en $\mathscr{C}$, se dice que A' es* ***subobjeto*** *de A.*

Si $\alpha : A' \to A$ es un subobjeto de A en $\mathscr{C}$, nos vamos a referir a α como una *inclusión* de A' en A. Algunas veces escribiremos $A' \subset A$, cuando queramos indicar que A' es subobjeto de A o bien $\alpha : A' \hookrightarrow A$ diciendo en ambos casos que A' está contenido en A. Si el monomorfismo $\alpha : A' \to A$ no es isomorfismo, diremos que A' es un subobjeto propio de A. Cabe mencionar también que en general hay más de un monomorfismo $\alpha : A' \hookrightarrow A$, por lo que siempre que digamos que A' es subobjeto de A estaremos refiriendonos a un monomorfismo α en específico.

Definición 1.2.8. *Si $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ son monomorfismos, se dice que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ si existe un morfismo $\gamma : A_1 \to A_2$ tal que $\alpha_1 = \alpha_2\gamma$. Es decir el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \\
A_2. \arrow[ur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.2.9. *Si el morfismo γ de la definición anterior existe entonces γ es único y además es un monomorfismo.*

Demostración. Veamos que γ es único. Supóngase que existe otro morfismo $\gamma^{'} : A_1 \to A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_1 = \alpha_2\gamma^{'}$ entonces $\alpha_2\gamma^{'} = \alpha_1 = \alpha_2\gamma$ y como α_2 es un monomorfismo , se obtiene que $\gamma = \gamma^{'}$.

Ahora veamos que γ es un monomorfismo. En efecto, supóngase que $\gamma f = \gamma g$ para $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(X, A_1)$, por lo que $\alpha_2(\gamma f) = \alpha_2(\gamma g)$ entonces por asociatividad se tiene que $(\alpha_2\gamma)f = (\alpha_2\gamma)g$ obteniendo que $\alpha_1 f = \alpha_1 g$; y al ser α_1 un monomorfismo se tiene que $f = g$. Probándose que γ es un monomorfismo.

$\square$

Observación 1.2.10. *Si $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ son monomorfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $\alpha_2 \leq \alpha_1$ entonces existe un único isomorfismo $\gamma_1 : A_1 \to A_2$ tal que $\alpha_1 = \alpha_2\gamma$. En efecto, como $\alpha_1 \leq \alpha_2$ existe un único morfismo $\gamma : A_1 \to A_2$ tal que $\alpha_1 = \alpha_2\gamma$. De la misma manera como $\alpha_2 \leq \alpha_1$, existe $\delta : A_2 \to A_1$ tal que $\alpha_2 = \alpha_1\delta$.*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & A \\
A_2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, dashed, "\delta"'] & A \\
A_1 \arrow[ur, "\alpha_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2\gamma = (\alpha_1\delta)\gamma = \alpha_1\delta\gamma$ y como α_1 es un monomorfismo por la observación anterior, tenemos que $\delta\gamma = 1_{A_1}$. De la misma forma $\gamma\delta = 1_{A_2}$.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "1_{A_1}"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & A_1 \\
A_2 \arrow[ur, dashed, "\delta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "1_{A_2}"] \arrow[d, dashed, "\delta"'] & A_1 \\
A_2. \arrow[ur, dashed, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, γ es un isomorfismo con inversa δ. Se dice en este caso que A_1 y A_2 son ***isomorfos como subobjetos*** *de A. Cabe mencionar también que A_1 y A_2 pueden ser isomorfos sin ser isomorfos como subobjetos de A.*

Definición 1.2.11. *Si $\alpha : A \to A'$ es un epimorfismo en $\mathscr{C}$, se dice que A' es un **objeto cociente** de A.*

Definición 1.2.12. *Si $\alpha_1 : A \to A_1$ y $\alpha_2 : A \to A_2$ son epimorfismos en $\mathscr{C}$, diremos que $\alpha_1 \leq \alpha_2$ si existe un morfismo $\gamma : A_2 \to A_1$ tal que $\gamma\alpha_2 = \alpha_1$.Es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & A_1 \\ & A_2. \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

De manera dual a 1.2.9 y 1.2.10 tenemos la siguiente observación.

Observación 1.2.13. *Se puede ver que γ es único y un epimorfismo.*

Definición 1.2.14. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías . Un **funtor covariante** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una asignación de objetos y morfismos que satisface :*

(i) *Si $A \in Obj(\mathscr{C})$ entonces $F(A) = FA \in Obj(\mathscr{D})$.*

(ii) *Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ entonces $Ff : FA \to FB$ es un morfismo en $\mathscr{D}$.*

(ii) *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathscr{C}$ entonces $F(gf) = F(g)F(f)$.*

(iv) *Para cada $A \in Obj(\mathscr{C})$, se tiene que $F(1_A) = 1_{FA}$.*

Otra clase de funtores son aquellos que invierten el sentido de las flechas, es decir , si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ entonces $F(f) : F(B) \to F(A)$, esta clase de funtores serán llamados *funtores contravariantes*. De manera formal no es necesario dar una definición explícita como la definición anterior, pues un funtor contravariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es lo mismo que un funtor covariante de la forma $F' : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$.Veamos algunos ejemplos de funtores.

Ejemplos de funtores

- El *funtor identidad* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ definido por $FA = A$ y $Ff = f$ para todo $A \in Obj(\mathscr{C})$ y $f \in Morf(\mathscr{C})$.
- Si $D \in Obj(\mathscr{D})$ es un objeto fijo de $\mathscr{D}$, definimos el *funtor constante* $|\,| : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ por $|C| = D$ para todo $C \in Obj(\mathscr{C})$ y $|f| = 1_D$ para todo $f \in Morf(\mathscr{C})$.
- Definamos P : **Con** $\to$ **Con** como sigue :
  (i) Si $X \in$ **Con**, $P(X)$ es el conjunto potencia de X.
  (ii) Si $f : X \to Y$ es un morfismo en **Con**, $P(f) : P(X) \to P(Y)$ está definida por $P(f) := f(U)$ si $U \in P(X)$. Es fácil ver que P define un funtor covariante.

De la misma manera se define $P' : \mathbf{Con} \to \mathbf{Con}$ como sigue:

(i) Si $X \in \mathbf{Con}$, $P'(X)$ es el conjunto potencia de X.

(ii) Si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathbf{Con}$, $P'(f) : P'(Y) \to P'(X)$ está definida por $P'(f)(V) = f^{-1}(V)$, si $V \in P'(Y)$. Es fácil ver que P' es un funtor contravariante.

- El *funtor olvido* $F : Ab \to Con$ es aquel que dado un grupo olvida la estructura algebraica quedando sólo el conjunto subyacente y un morfismo de grupos lo ve como la función subyacente.

Definición 1.2.15. *Decimos que $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor **fiel** si la función inducida de manera natural por F*

$$Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(FA,FB)$$

$$f \longmapsto F(f)$$

*es inyectiva. En el caso que tal función sea suprayectiva, el funtor es llamado **pleno**. Además, un funtor fiel que manda objetos distintos en objetos distintos será llamado **inmersión**.*

Definición 1.2.16. *Se dice que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es **denso** si para todo $D \in \mathscr{D}$ existe un objeto $C \in \mathscr{C}$ tal que $F(C)$ es isomorfo a D.*

*Sean $F,G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores covariantes. Una **transformación natural** $\tau : F \to G$ es una familia de morfismos $\tau = \{\tau_A : FA \to GA\}_{A\in\mathscr{C}}$ tal que para cualquier morfismo $\alpha : A \to A'$ en $\mathscr{C}$ el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ {\scriptstyle F(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\alpha)} \\ FA' & \xrightarrow[\tau_{A'}]{} & GA' \end{array}$$

*Cada τ_A se llama **componente** de τ en A. También diremos que τ es una **equivalencia natural** si cada τ_A es un isomorfismo.(Escribiremos, $F \cong G$, para denotar que F y G son equivalentes naturalmente.)*

Observación 1.2.17. *Se puede ver fácilmente que si $\tau : F \to G$ y $\sigma : G \to H$ son dos transformaciones naturales entonces la composición $\sigma\tau : F \to H$ es una transformación natural dada por $(\sigma\tau)_A = \sigma_A\tau_A$ para cada $A \in Obj(\mathscr{C})$.*

Definición 1.2.18. *Se dice que las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son **isomorfas** si existen funtores $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $GF = 1_C$ y $FG = 1_D$.*

Definición 1.2.19. *Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una **equivalencia de categorías** (en este caso se dice que las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son **equivalentes**) si existe un funtor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ y dos equivalencias naturales,*

$$\varepsilon : GF \to 1_{\mathscr{C}} \quad y \quad \eta : 1_{\mathscr{D}} \to FG.$$

Proposición 1.2.20. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor covariante, entonces el funtor F es una equivalencia si y sólo si F es un funtor fiel, pleno y denso.*

Demostración. Véase una demostración en [SV07], p.90. □

1.3. Igualadores y coigualadores

Definición 1.3.1. *Sean $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, se dice que $\mu \in Hom_{\mathscr{C}}(K,A)$es un **igualador** para α y β si se satisface lo siguiente:*

(a) $\alpha\mu = \beta\mu$,

(b) Para cualquier morfismo $\mu' \in Hom_{\mathscr{C}}(K',A)$ tal que $\alpha\mu' = \beta\mu'$ existe un único $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(K',K)$ tal que $\mu' = \mu\gamma$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \\ K' \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "\mu'"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.2. *Si $\mu \in Hom_{\mathscr{C}}(K,A)$ es un igualador para $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, entonces μ es un monomorfismo. Además el igualador para α y β es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Se quiere hacer ver que si $\mu\gamma_1 = \mu\gamma_2$ para $\gamma_1, \gamma_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(X,K)$ entonces $\gamma_1 = \gamma_2$. Luego, sea $\delta \in Hom_{\mathscr{C}}(X,A)$ definido como $\delta = \mu\gamma_1$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \\ X. \arrow[u, shift left, "\gamma_1"] \arrow[u, shift right, "\gamma_2"'] \arrow[ur, dashed, "\delta"'] & & \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que :

(i) $\alpha\delta = \beta\delta$ pues $\alpha\delta = \alpha(\mu\gamma_1) = (\alpha\mu)\gamma_1 = (\beta\mu)\gamma_1 = \beta(\mu\gamma_1) = \beta\delta$.

(ii) Como μ es igualador entonces entonces (i) implica que existe un único morfismo γ tal que $\delta = \mu\gamma$. Pero $\delta = \mu\gamma_1 = \mu\gamma_2$, de donde concluimos que $\gamma_1 = \gamma_2$.

Probándose que μ es un monomorfismo.

Ahora veamos la unicidad. Supóngase que μ y μ' son dos igualadores de α y β entonces por propiedad (b) de la definición de igualador, existen $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(K,K')$ y $\gamma' \in Hom_{\mathscr{C}}(K',K)$ tales que $\mu = \mu'\gamma$ y $\mu' = \mu\gamma'$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, shift left, "\gamma"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \\ K' \arrow[u, shift left, "\gamma'"] \arrow[ur, "\mu'"'] & & \end{tikzcd}$$

Entonces $\mu(\gamma'\gamma) = (\mu\gamma')\gamma = \mu'\gamma = \mu = \mu 1_K$, como μ es un monomorfismo entonces $\gamma\gamma' = 1_K$.De la misma manera $\mu'(\gamma\gamma') = (\mu'\gamma)\gamma' = \mu\gamma' = \mu' = \mu' 1_{K'}$ y por ser μ' monomorfismo entonces $\gamma\gamma' = 1_{K'}$. Por lo tanto $\gamma : K \to K'$ es un isomorfismo. Probándose el resultado. $\square$

El igualador de dos morfismos α y β será denotado algunas veces como $Ig(\alpha,\beta)$, o bien, escribiremos $Ig(\alpha,\beta) \to A$ para denotar al morfismo μ tal que $\alpha\mu = \beta\mu$ de la definición de igualador.

Si $Ig(\alpha,\beta)$ existe para todo par de morfismos en $\mathscr{C}$ con el mismo dominio y contradominio, diremos que $\mathscr{C}$ **tiene igualadores**.

Dualmente, podemos decir que $B \to Coig(\alpha,\beta)$ es el **coigualador** de α y β si es el igualador de $\alpha*$ y $\beta*$ en la categoría dual de $\mathscr{C}$. Por lo que $\mathscr{C}^{op}$ tiene igualadores $\mathscr{C}$ si y sólo si tiene coigualadores. Por completitud enunciemos la definición de coigualador

Definición 1.3.3. *Sean $\alpha,\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, decimos que un morfismo $u \in Hom_{\mathscr{C}}(B,K)$ es un* ***coigualador*** *para los morfismos α y β si se satisface los siguiente:*

(i) $u\alpha = u\beta$,

(ii) Para cualquier morfismo $u' \in Hom_{\mathscr{C}}(B,K')$ tal que $u'\alpha = u'\beta$ existe un único morfismo $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(K,K')$ tal que $\gamma u = u'$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & K \arrow[d, dashed, "\gamma"] \\ & & K'. \end{tikzcd}$$

1.4. Productos fibrados y Coproductos fibrados

Definición 1.4.1. *Dados dos morfismos $\alpha_1 \in Hom_{\mathscr{C}}(A_1, A)$ y $\alpha_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(A_2, A)$, se dice que un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

es un ***producto fibrado*** *para α_1 y α_2 si para todo $\beta_1' \in Hom_{\mathscr{C}}(P', A_1)$ y $\beta_2' \in Hom_{\mathscr{C}}(P', A_2)$ tal que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$, entonces existe un único morfismo $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(P', P)$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$.*

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

Lema 1.4.2. *(Unicidad del producto fibrado salvo isomorfismo) Si los siguientes diagramas conmutativos*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

son productos fibrados de α_1 y α_2 entonces existe un único morfismo $\gamma' \in Hom_{\mathscr{C}}(P, P')$ tal que $\beta_1 = \beta_1'\gamma$ y $\beta_2 = \beta_2'\gamma$.

Demostración. Por definición de producto fibrado de los morfismos α_1 y α_2, al tener por hipótesis que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$, tenemos que existe un único morfismo $\gamma' \in Hom_{\mathscr{C}}(P, P')$ tal que $\beta_1 = \beta_1'\gamma'$ y $\beta_2 = \beta_2'\gamma'$. De la misma manera, al tener por hipótesis que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$, existe un único morfismo $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(P', P)$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "\gamma'"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\
& P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

Entonces,

(i) $\beta_1(\gamma\gamma') = (\beta_1\gamma)\gamma' = \beta_1'\gamma' = \beta_1$.

(ii) $\beta_2(\gamma\gamma') = (\beta_2\gamma)\gamma' = \beta_2'\gamma' = \beta_2 = \beta_2$.

Análogamente, se tiene que

(i) $\beta_1'(\gamma'\gamma) = (\beta_1\gamma')\gamma = \beta_1\gamma = \beta_1' = \beta_1'$.

(ii) $\beta_2'(\gamma'\gamma) = (\beta_2\gamma')\gamma = \beta_2\gamma = \beta_2' = \beta_2'$.

Es decir, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "\gamma\gamma'"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta^2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dashed, "\gamma'\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\
& P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}
$$

Como los cuadrados I y II son pullbacks y $\beta_1' 1_{P'} = \beta_1'$ así como $\beta_2' 1_{P'} = \beta_2'$. Concluimos por la propiedad universal que $\gamma'\gamma = 1_{P'}$. De la misma manera se ve que $\gamma\gamma' = 1_P$ y por lo tanto $P \cong P'$. $\square$

Proposición 1.4.3. *Sea el siguiente diagrama conmutativo un producto fibrado*

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

donde α_1 es un monomorfismo, entonces β_2 es un monomorfismo.

Demostración. Sean $f,g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,P)$ tales que $\beta_2 f = \beta_2 g$. Queremos ver que $f = g$. En efecto, por la conmutatividad del cuadrado tenemos que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$, entonces $\alpha_1\beta_1 f = \alpha_2\beta_2 f = \alpha_2\beta_2 g = \alpha_1\beta_1 g$. Como α_1 es un monomorfismo por hipótesis, entonces $\beta_1 f = \beta_1 g$. Sean $\theta := \beta_1 f = \beta_1 g$ y $\theta' := \beta_2 g = \beta_2 f$. Por la construcción anterior $\alpha_1\theta = \alpha_2\theta'$; y por hipótesis de ser el diagrama conmutativo un producto fibrado, existe un único morfismo $\lambda : B \to P$ tal que $\theta = \beta_1\lambda$ y $\theta' = \beta_2\lambda$. Pero f y g cumplen las igualdades anteriores, por lo tanto $\lambda = f = g$. Probándose que β_2 es un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "\theta'"] \arrow[ddr, bend right, "\theta"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 1.4.4. *Si cada cuadrado conmutativo en el siguiente diagrama es un producto fibrado y β_1 es un monomorfismo*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & B' \arrow[d, "\beta_3"'] \\
A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B
\end{tikzcd} \tag{1}$$

entonces el siguiente diagrama conmutativo es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha_2\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\beta_3"] \\
A \arrow[r, "\gamma_2\gamma_1"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como los cuadrados derecho e izquierdo en (1) conmutan se tiene en efecto que, $\gamma_2\gamma_1\beta_1 = \beta_3\alpha_2\alpha_1$. Sean $g_1 : X \to A$ y $g_2 : X \to B'$ tales que $\gamma_2\gamma_1 g_1 = \beta_3 g_2$, se quiere ver que existe un único morismo $\mu : X \to P$ tal que $g_1 = \beta_1\mu$ y $g_2 = \alpha_2\alpha_1\mu$.
Como el cuadrado derecho en (1) es producto fibrado, se tiene que existe un único morfismo δ : $X \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[dd, bend right, "g_1"'] & & \\
& Q \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & B' \arrow[d, "\beta_1"] \\
A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B,
\end{tikzcd}
$$

Es decir, $\gamma_1 g_1 = \beta_2\delta$ y $g_2 = \alpha_2\delta$. Como el cuadrado izquierdo es producto fibrado también y $\gamma_1 g_1 = \beta_2\delta$ entonces existe un único morfismo $\eta : X \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\eta"'] \arrow[drr, dashed, "\delta"] \arrow[drrr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & & \\
& P \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\beta_1"] & Q \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\beta_2"'] & B' \arrow[d, "\beta_3"'] \\
& A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B.
\end{tikzcd}
$$

Es decir, se tienen las siguientes igualdades: $g_1 = \beta_1\eta$ y $\delta = \alpha_1\eta$. Hagamos $\mu := \eta$, luego entonces $g_1 = \beta_1\mu$ y $\alpha_2\alpha_1\mu = \alpha_2\alpha_1\eta = \alpha_2\delta = g_2$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\mu"] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\alpha_2\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A \arrow[r, "\gamma_2\gamma_1"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Unicidad Supongamos que existe un morfismo $\mu' : X \to P$ tal que $\beta_1\mu' = g_1$ y $\alpha_2\alpha_1\mu' = g_2$. Por hipótesis, β_1 es monomorfismo y como $\beta_1\mu' = g_1 = \beta_1\mu$, se tiene que $\mu = \mu'$. Por lo tanto, μ es único. □

Lema 1.4.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos fibrados y supongamos que los dos cuadrados del siguiente diagrama conmutativo son productos fibrados*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\beta_2"'] & Q \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\beta_3"] \\ A \arrow[r, "\delta"'] & B & I. \arrow[l, "\gamma_2"] \end{tikzcd} \tag{*}$$

Si β_2 y γ_2 son monomorfismos y existe un morfismo $\gamma_1 : A \to I$ tal que $\delta = \gamma_2\gamma_1$, entonces existe un morfismo $\alpha_1 : P \to Q$ tal que $\eta = \alpha_2\alpha_1$ y

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\beta_3"] \\ A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \end{tikzcd} \tag{**}$$

es un producto fibrado.

Demostración. (1) *Existencia de $\alpha_1 : P \to Q$ tal que $\eta = \alpha_2\alpha_1$.*

Como el cuadrado derecho del diagrama conmutativo (*) es un producto fibrado. Al tener la existencia de los morfismos $\eta : P \to B'$ y $\gamma_1\beta_1 : P \to I$ tal que $\beta_2\eta = \gamma_2\gamma_1\beta_1$, se obtiene la existencia de un único morfismo $\alpha_1 : P \to Q$ tal que $\eta = \alpha_2\alpha_1$ y $\beta_3\alpha_1 = \gamma_1\beta_1$.

(2) El cuadrado (**) es un producto fibrado, ya se vio que (**) conmuta.

Ahora, sean $\lambda_1 : X \to Q$ y $\lambda_2 : X \to A$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\beta_3\lambda_1 = \gamma_1\lambda_2$. Se quiere demostrar que existe un morfismo $\xi : X \to P$ único respecto a tener que $\lambda_2 = \beta_1\xi$ y $\lambda_1 = \alpha_1\xi$.

Consideremos los morfismos $\alpha_2\lambda_1 : X \to B'$ y $\lambda_2 : X \to A$ tal que $\delta\lambda_2 = \beta_2\alpha_2\lambda_1$, entonces $\beta_2\alpha_2\lambda_1 = \gamma_2\beta_3\lambda_1 = \gamma_2\gamma_1\lambda_2 = \delta\lambda_2$.

Como el cuadrado izquierdo de (*) es un producto fibrado, existe un único morfismo $\xi : X \to P$ tal que $\lambda_2 = \beta_1\xi$ y $\alpha_2\lambda_1 = \eta\xi$. Veamos que $\alpha_1\xi = \lambda_1$. Como γ_2 es monomorfismo por 1.4.3 α_2 es monomorfismo. Así, como

$$\alpha_2(\alpha_1\xi) = (\alpha_2\alpha_1)\xi = \eta\xi = \alpha_2\lambda_1,$$

implica que $\alpha_1\xi = \lambda_1$, y además ya se tenía que $\lambda_2 = \beta_1\xi$. Por último, como β_2 es monomorfismo por 1.4.3, β_1 es monomorfismo. Así, al suponer que existe otro morfismo $\theta' : X \to P$ tal que $\lambda_2 = \beta_1\theta'$ y $\lambda = \alpha_1\theta'$, tenemos que $\beta_1\theta' = \lambda_2 = \beta_1\xi$. Se sigue que $\xi = \theta'$. Probándose que el cuadrado (**) es un producto fibrado.

□

A continuación, se enunciará la noción dual de producto fibrado.

Definición 1.4.6. *Dados dos morfismos $\alpha_1 \in Hom_{\mathscr{C}}(A,A_1)$ y $\alpha_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(A,A_2)$, se dice que un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & P \end{tikzcd}$$

*es un **coproducto fibrado** para α_1 y α_2 si para todo $\beta_1' \in Hom_{\mathscr{C}}(A_1,P')$ y $\beta_2' \in Hom_{\mathscr{C}}(A_2,P')$ tal que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, existe un único morfismo $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(P,P')$ tal que $\beta_1' = \gamma\beta_1$ y $\beta_2' = \gamma\beta_2$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta_1'"] & \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[drr, bend right, "\beta_2'"'] & P \arrow[dr, dashed, "\gamma"'] & \\ & & P' \end{tikzcd}$$

1.5. Intersecciones

Definición 1.5.1. *Sea $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de A. Se dice que un morfismo $\mu \in Hom_{\mathscr{C}}(A',A)$ es la **intersección** de dicha familia si se cumple:*

(a) Para cada $i \in I$ existe $v_i : A' \to A_i$ tal que $\mu = \mu_i v_i$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "v_i"'] & A \\ A_i \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Si $\theta : B \to A$ un morfismo y existen $\eta_i : B \to A_i$ tales que el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\eta_i"'] & A \\ A_i \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces existe un único morfismo $\eta \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ A' \arrow[r, "\mu"'] & A. \end{tikzcd}$$

Denotaremos al objeto A' de la definición anterior como $\bigcap A_i$ con $i \in I$, donde I es el conjunto de índices.

Definición 1.5.2. *Si la intersección existe para todo conjunto de subobjetos de cualquier objeto en una categoría $\mathscr{C}$, diremos que $\mathscr{C}$* ***tiene intersecciones****. Si la intersección existe sólo para conjuntos finitos de subobjetos entonces diremos que $\mathscr{C}$* ***tiene intersecciones finitas****.*

Ejemplo 1.5.3. *En la categoría* ***Con****, sea una familia de subconjuntos de A, $\{A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$, entonces C es la intersección conjuntista de los A_i con $i \in I$ si y sólo si*

(a) $\{C \hookrightarrow A_i\}$ para todo $i \in I$.

(b) Si $B \hookrightarrow A$ es otro subconjunto tal que $\{B \hookrightarrow A_i\}$ para todo $i \in I$ entonces $B \hookrightarrow C$

Demostración. ($\Leftarrow$) Queremos ver que $C = \bigcap A_i$. Veamos que $C \subseteq \bigcap A_i$. Para esto sea $x \in C$, entonces por inciso (a) $x \in A_i$ para todo $i \in I$; por lo tanto $x \in \bigcap A_i$. Ahora veamos que $C \supseteq \bigcap A_i$. Tomando $B = \bigcap A_i$, tenemos que $B \subseteq A$ y además $\{B \hookrightarrow A_i\}$ para todo $i \in I$ entonces por inciso (b) $\{\bigcap A_i \hookrightarrow C\}$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $C = \bigcap A_i$.

($\Rightarrow$) Sea $A_i \subseteq A$, entonces $\bigcap A_i \subseteq A_i \subseteq A$ por lo tanto se satisface (a), ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \bigcap A_i \arrow[r, hook, "i_{\bigcap A_i}"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\ A_i \arrow[ur, hook, "i_{A_i}"'] & \end{tikzcd}$$

donde todos los morfismos son inclusiones de conjuntos. Ahora, sea $B \subseteq A$ tal que $B \subseteq A_i$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "i_B"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\ A_i \arrow[ur, hook, "i_{A_i}"'] & \end{tikzcd}$$

donde todos los morfismos son inclusiones de conjuntos. Como $B \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, se tiene que $B \subseteq \bigcap A_i$ y por lo tanto se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, hook, "i"] & \\ \bigcap A_i \arrow[r, hook, "i_{\bigcap A_i}"'] & A \end{tikzcd}$$

donde todos los morfismos son inclusiones. Como $\bigcap A_i \hookrightarrow A$ es monomorfismo, el morfismo i es único y por lo tanto se satisface el inciso (b).

□

Se sigue del ejemplo anterior que la categoría **Con** tiene intersecciones.

Observación 1.5.4. *(a) Los morfismos $\{v_i : A' \to A_i\}_{i\in I}$ tales que $\mu = \mu_i v_i$ son únicos.*

(b) μ y $\{v_i : A' \to A_i\}_{i\in I}$ también son monomorfismos.

Demostración. (a) Supóngase que existe una familia de morfismos $\{v'_i : A' \to A_i\}_{i\in I}$ tales que $\mu_i v'_i = \mu = \mu_i v_i$. Como μ_i son monomorfismos para todo $i \in I$ entonces $v_i = v'_i$ y así se tiene la unicidad.

(b) Sean $\alpha_1, \alpha_2 : X \to A'$ tales que $\mu\alpha_1 = \mu\alpha_2$. Queremos ver que $\alpha_1 = \alpha_2$. Consideremos $f := \mu\alpha_1 = \mu\alpha_2$. Por lo tanto, $f = \mu_i v_i \alpha_1$ para todo $i \in I$. Es decir, $f = \mu_i \eta_i$ con $\eta_i = v_i\alpha_1$. Por la propiedad (b) de intersección f se factorizaba de manera única a través de μ. Pero $f = \mu\alpha_1$ y $f = \mu\alpha_2$, por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2$.

□

Observación 1.5.5. *En la definición 1.5.1 el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[dr, "v_i"] \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & B \arrow[ll, "\eta"'] \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[ddl, bend left, "\theta"] \\ & A_i \arrow[d, "\mu_i"'] & \\ & A & \end{tikzcd}$$

pues se tiene por la definición de intersección que $\mu = \mu_i v_i$, $\theta = \mu_i\eta_i$ y $\theta = \mu\eta$ pero como los $\mu'_i s$ son monomorfismos entonces $\eta_i = v_i\eta$. Pues en efecto, se tiene que la igualdad

$$\mu_i(v_i\eta) = (\mu_i v_i)\eta = \mu\eta = \theta = \mu_i\eta_i$$

implica que $\eta_i = v_i\eta$ para todo $i \in I$.

Proposición 1.5.6. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ monomorfismos. Entonces el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado si y sólo si $\mu := \alpha_2\beta_2 : P \to A$ es la intersección de α_1 y α_2 .

Demostración. ($\Rightarrow$) Por conmutatividad del cuadrado tenemos que el siguiente diagrama conmuta para $i = 1,2$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_2\beta_2"] \arrow[d, "\beta_i"'] & A \\ A_i \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $\theta : P' \to A$ un morfismo tal que existen $\beta' : P' \to A_2$ y $\beta_1' : P' \to A_1$ tal que $\theta = \alpha_1\beta_1'$ y $\theta = \alpha_2\beta_2'$. Por definición de producto fibrado, existe $\xi : P' \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dashed, "\xi"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\xi"'] & A \\ P. \arrow[ur, "\alpha_2\beta_2=\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Como μ es monomorfismo, se tiene que ξ es único con la propiedad de hacer conmutar el diagrama anterior.

($\Leftarrow$) Sean $\beta_1' : P' \to A_1$ y $\beta_2' : P' \to A_2$ tal que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$. Sea $\theta : \alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$. Como el siguiente diagrama conmuta para $i = 1,2$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\beta_i'"'] & A \\ A_i \arrow[ur, hook, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

Por la definición de intersección existe un único morfismo $\varepsilon : P' \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ P \arrow[r, "\mu:=\alpha_2\beta_2"'] & A \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\alpha_2\beta_2' = \theta = \alpha_2\beta_2\varepsilon$, pero como α_2 es un monomorfismo, tenemos que $\beta_2' = \beta_2\varepsilon$. De la misma manera como $\mu = \alpha_1\beta_1$ tenemos que $\alpha_1\beta_1' = \theta = \alpha_1\beta_1\varepsilon$ y como α_1 es un monomorfismo tenemos que $\beta_1' = \beta_1\varepsilon$. Probándose que

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

□

De la proposición 1.5.6 tenemos que si $\mathscr{C}$ tiene productos fibrados entonces $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas.

1.6. Uniones

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Sea $u : A' \to A$ un subobjeto de A y $h : B' \to B$ un subobjeto de B. Se dice que **el subobjeto u es llevado al subobjeto h por f** si existe un morfismo $f' : A' \to B'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & B' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Observación 1.6.1. *El morfismo $f' : A' \to B'$ es único pues si existe $f'' : A' \to B'$ con la propiedad mencionada, al ser h un monomorfismo y $hf' = hf''$ implica que $f' = f''$.*

Definición 1.6.2. *La **unión** de una familia $\{u_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ de subobjetos de un objeto A es un subobjeto $u : A' \to A$ de A que satisface las siguientes condiciones.*

(a) $u_i \leq u$ para toda $i \in I$.(ver definición 1.2.7).

(b) *Si $f : A \to B$ es un morfismo y cada $u_i : A_i \to A$ es llevado a algún subobjeto $\mu : B' \to B$ de B por f entonces también $u : A' \to A$ es llevado a $\mu : B' \to B$.*

Nota: Se puede ver que cualesquiera dos subobjetos $u : A' \hookrightarrow A$ y $u'' : A'' \hookrightarrow A$ que satisfagan la definicion anterior son isomorfos. Denotaremos por $\bigcup_{i\in I} A_i \hookrightarrow A$ a una elección de tales subojetos de A.

Definición 1.6.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría . Si la unión existe para todo conjunto de subobjetos de cualquier objeto en $\mathscr{C}$, se dice que $\mathscr{C}$ **tiene uniones**.*

Ejemplo 1.6.4. *Sea $\{A_i \to A\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto A, entonces un subconjunto C de A es la unión de la familia $\{A_i\}$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones.*

(a) *Si $c : C \hookrightarrow A$ es la inclusión canónica entonces existen inclusiones $\gamma_i : A_i \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, hook, "u_i"] \arrow[d, hook, "\gamma_i"'] & A \\ C \arrow[ur, hook, "c"'] & \end{tikzcd}$$

(b) *Si $f : A \to B$ es una función y cada $u_i : A_i \to A$ es llevado a algún subconjunto $\mu : B' \to B$ de B por f, entonces $c : \bigcup A_i \hookrightarrow A$ también es llevado a $\mu : B' \to B$ por f.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ La condición (a) es inmediata. Ahora queremos ver que se satisface (b), para esto suponemos que cada u_i es llevado al subobjeto $\mu : B' \to B$, es decir, $fu_i = \mu f_i'$ para cada $i \in I$. Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmuntativo para todo $i \in I$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, dashed, "f_i'"] \arrow[d, hook, "u_i"'] & B' \arrow[d, hook, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Definimos $F : \bigcup A_i \to B'$ para cada $x \in \bigcup A_i$ como $F(x) = f_i'(x) si x \in A_i$. Veamos que esta función está bien definida. En efecto, sea $x \in A_i \bigcap A_j$ y consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, dashed, "f_i'"] \arrow[d, hook, "u_i"'] & B' \arrow[d, hook, "\mu"'] & A_j \arrow[l, dashed, "f_j'"'] \arrow[d, hook, "u_j"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B & A \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Por un lado como $x \in A_i$ entonces $f_i'(x) \in B'$ y $\mu f_i'(x) = fu_i(x) = f(x)$. Por otro lado, como $x \in A_j$ entonces $f_j'(x) \in B'$ y $\mu f_j'(x) = fu_j(x) = f(x)$. Como μ es la inclusión, concluimos que $f_i'(x) = f_j'(x)$ y así F está bien definida.

Así, por un lado, si $x \in \bigcup A_i$ entonces $x \in A_i$ para alguna $i \in I$ por lo tanto $F(x) = f_i'(x)$ obteniendo que $\mu F(x) = \mu f_i'(x)$. Por otro lado, si $x \in \bigcup A_i$ entonces $x \in A_i$ para algún $i \in I$ y por (a) se tiene que $c\gamma_i(x) = u_i$. Por lo tanto $fc(x) = fc\gamma_i(x) = fu_i(x) = \mu f_i'(x)$, donde la última igualdad se tiene porque u_i es llevado a μ por f. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bigcup A_i \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, hook, "c"'] & B' \arrow[d, hook, "\mu"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

De esta forma, el morfismo $c : \bigcup A_i \hookrightarrow A$ es llevado a B' mediante f.

($\Leftarrow$) Queremos demostrar que $C = \bigcup A_i$

($\supseteq$) Sea $x \in \bigcup A_i$ entonces $x \in A_i$ para algún $i \in I$ pero por el inciso (a), se tiene que $x \in C$. Por tanto, $\bigcup A_i \subseteq C$

($\subseteq$) Tomando $B^{'} = \bigcup A_i$, $B = A$ y $f = 1_A$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, bend left, "f^{'}"] \arrow[ddr, dashed, "i_C"'] & & \\
& A_i \arrow[r, "i_{A_i}"'] \arrow[d, hook, "i_{A_i}"] & \bigcup A_i = B^{'} \arrow[d, hook, "i_{\bigcup A_i}"] \\
& A \arrow[r, "1_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $C \subseteq \bigcup A_i$. Así, $C = \bigcup A_i$

$\square$

Del ejemplo anterior se sigue que la categoría **Con** tiene uniones.

Observación 1.6.5. *En la definición de unión (def.1.6.2 (a)) los morfismos $\{v_i : A_i \to A'\}$ tal que $u_i = uv_i$ son monomorfismos y además son únicos respecto dicha propiedad.*

Demostración. Como $u_i = uv_i$ y u_i es monomorfismo para toda $i \in I$ entonces por observación 1.2.6(a) v_i es monomorfismo para toda $i \in I$. Si existen v_i tales que $uv_i = u_i = uv_i'$ al ser u un monomorfismo entonces $v_i = v_i'$ para toda $i \in I$. $\square$

Observación 1.6.6. *De la definición de unión, definición 1.6.2, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "v_i"'] \arrow[r, "f_i'"] \arrow[d, "u_i"] & B' \arrow[d, "\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Sólo basta ver que $f''v_i = f_i'$. En efecto, como $\mu f_i' = fu_i = fuv_i = \mu f''v_i$ y al ser μ un monomorfismo, entonces $f_i' = f''v_i$ para toda $i \in I$. □

Observación 1.6.7. *Sea $u_i \leq \mu$ para toda $i \in I$ donde $\{u_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ es una familia de subobjetos de A y $\mu : B \to A$ también un subobjeto de A. Entonces $u \leq \mu$ donde $u : \bigcup A_i \to A$ es la unión de los subobjetos de A.*

Demostración. Como $u_i \leq \mu$ se obtiene el sigiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, bend left, "1_B"] \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "v_i"'] \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "u_i"] & B \arrow[d, "\mu"] \\
& A \arrow[r, "1_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

Es decir, cada u_i es llevado a $\mu : B \to A$ mediante $1_A : A \to A$. Pero como el morfismo u es la unión de los u_i's entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bigcup A_i \arrow[drr, bend left, "f'"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "v_i'"'] \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "u_i"] & B \arrow[d, "\mu"] \\
& A \arrow[r, "1_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

entonces $u = \mu f'$. Por lo tanto $u \leq \mu$. □

Observación 1.6.8. *La unión de una familia de subobjetos de un objeto A en $\mathscr{C}$ es única salvo isomorfismos.*

Demostración. Si se tiene que tanto $u : A' \to A$ como $u' : A'' \to A$ son uniones de la familia de subobjetos $\{u_i : A_i \to A\}$. Por la observación 1.6.7 al tener por un lado $u_i \leq u'$ para toda $i \in I$ entonces $u \leq u'$ y por otro lado $u_i \leq u$ para toda $i \in I$ entonces $u' \leq u$. Por lo tanto $u \cong u'$ como subobjetos de A. □

Proposición 1.6.9. *Sean $\alpha, \beta : A \to B$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$ con igualadores y sea $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ una familia de subobjetos de A. Si la unión existe para dicha familia y $\alpha|_{A_i} = \beta|_{A_i}$ para todo $i \in I$ entonces $\alpha|_{\cup A_i} = \beta|_{\cup A_i}$.*

Demostración. Sea $\mu : \bigcup_{i \in I} A_i \to A$ la unión de la familia $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ de subobjetos de A y $\psi : K \to \bigcup A_i$ el igualador de los morfismos $\beta\mu, \alpha\mu : \bigcup A_i \to B$. Para ver que $\alpha|_{A_i} = \beta|_{A_i}$ basta probar que ψ es un isomorfismo. Como μ y ψ ya son monomorfismos entonces $\mu\psi$ es monomorfismo, donde $\mu\psi : K \to A$.
Se hara ver que $\mu\psi : K \to A$ satisface la definición de unión de la familia $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ de subobjetos de A es decir, veremos que se cumple (a) y (b) de la definición 1.6.2.

(a) Primero veamos que $\mu_i \leq \mu\psi$ para toda $i \in I$.

Como μ ya es unión de los μ_i's entonces existe un único morfismo $v_i : A_i \to \bigcup A_i$ tal que $\mu_i = \mu v_i$ para cada $i \in I$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, hook, "\mu_i"] \arrow[d, hook, "v_i"'] & A \\ \bigcup A_i. \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Usando que $(\alpha|_{A_i} = \beta|_{A_i})$ tenemos que $\alpha\mu_i = \beta\mu_i$ y entonces $\alpha\mu v_i = \beta\mu v_i$ para toda $i \in I$. Al ser $\psi : K \to \bigcup A_i$ igualador de $\alpha\mu$ y $\beta\mu$ existen únicos morfismos $\{h_i : A_i \to K\}_{i \in I}$ tales que el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, dashed, "h_i"'] \arrow[d, hook, "v_i"] & \\ K \arrow[r, "\psi"'] & \bigcup A_i \arrow[r, shift left, "\alpha\mu"] \arrow[r, shift right, "\beta\mu"'] & B. \end{tikzcd}$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, dashed, "h_i"'] \arrow[d, hook, "v_i"] \arrow[dr, hook, "\mu_i"] & & \\ K \arrow[r, "\psi"'] & \bigcup A_i \arrow[r, hook, "\mu"'] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & B \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\mu\psi h_i = \mu v_i = \mu_i$. Entonces el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
& A_i \arrow[dl, dashed, "h_i"'] \arrow[d, hook, "\mu_i"] \\
K \arrow[r, "\mu\psi"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Probándose que $\mu_i \leq \mu\psi$ para toda $i \in I$.

(b) **Propiedad de ser llevado**.

Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ y $\theta : B' \to B$ un subobjeto de C tal que cada μ_i es llevado a θ mediante f. Como $\mu : \bigcup A_i \to A$ es la unión de la familia μ_i, tenemos que μ es llevado a θ mediante f. Es decir, existe $f'' : \bigcup A_i \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\bigcup A_i \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "v_i"'] \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, hook, "\mu_i"] & B' \arrow[d, hook, "\theta"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Luego el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[drr, dashed, bend left, "f''\psi"] \arrow[ddr, dashed, bend right, "\mu\psi"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "h_i"'] \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\mu_i"] & B' \arrow[d, "\theta"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Por los diagramas anteriores se tiene que $\mu_i = \mu\psi h_i$ y $\theta f_i = \mu_i f$, $f_i = f''\psi h_i$ ya que se tiene la igualdad $f_i = f'' v_i = f''\psi h_i$. Por otro lado, el cuadrado exterior conmuta pues como $f\mu = \theta f''$ entonces $f\mu\psi = \theta f''\psi$.

Por lo tanto el subobjeto $\mu\psi : K \to A$ es llevado a $\theta : B' \hookrightarrow B$ mediante f. Es decir, $\mu\psi$ satisface las propiedades de unión. Por la unicidad de la unión se obtiene un isomorfismo, $\lambda : K \to \bigcup A_i$ tal que $\mu\lambda = \mu\psi$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\mu\psi"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \\
\bigcup A_i \arrow[ur, hook, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Como sólo existe un único morfismo λ que hace conmutar el diagrama anterior, entonces $\lambda = \psi$. Por lo tanto ψ es un isomorfismo. Así , como ψ es isomorfismo e igualador de $\beta\mu$ y $\alpha\mu$ entonces $\beta\mu\psi = \alpha\mu\psi$ por lo que $\beta\mu = \alpha\mu$. Es decir, $\alpha|_{\bigcup A_i} = \beta|_{\bigcup A_i}$.

□

1.7. Imágenes

Definición 1.7.1. *La **imagen** de un morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ se define como el subobjeto más pequeño de B que factoriza a f. Es decir, un monomorfismo $u : I \hookrightarrow B$ es la imagen de f si:*

(a) $f = uf'$ *para algún morfismo* $f' : A \to I$.

(b) Si $u' : I' \to B$ *es otro subobjeto de* B *tal que existe* $f'' : A \to I$ *con* $f = u'f''$ *entonces* $u \leq u'$. *Es decir, existe un único morfismo* $m : I \to I'$ *tal que* $u = u'm$.

Es decir, el triángulo derecho del siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& I' \arrow[dr, "u'"] & \\
A \arrow[ur, "f''"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\
& I \arrow[ur, "u"'] \arrow[uu, dashed, "m"] &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.7.2. *En la definición 1.7.1,definición de imagen, se tiene que* $f^{''} = mf^{'}$

$$\begin{tikzcd}
& I' \arrow[dr, "u'"] & \\
A \arrow[ur, "f''"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\
& I \arrow[ur, "u"'] \arrow[uu, dashed, "m"] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como $u'f'' = f = uf' = u'mf'$ y puesto que u' es monomorfismo entonces $f'' = mf'$. □

Observación 1.7.3. *Sea* $f : A \to B$ *un morfismo con* $u : I \to B$ *y* $u' : I' \to B$ *monomorfismos que son imágenes de* f *entonces* u *y* u' *son isomorfos como subobjetos de* B.

Demostración. Al ser u y u' imágenes de f se tiene que $u \leq u'$ y $u' \leq u$

$$(u \leq u') \quad \begin{tikzcd} I' \arrow[r, "u'"] & B \\ I \arrow[u, dashed, "a"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] & B \\ I' \arrow[u, dashed, "b"] \arrow[ur, "u'"'] & \end{tikzcd} \quad (u' \leq u)$$

De esta forma se tiene que $ba = 1_I$ y $ab = 1_{I'}$. Probándose que u y u' son isomorfos como subobjetos de B. Denotaremos por $u : Imf \to B$ a la elección de una imagen del morfismo f. $\square$

Denotaremos, $u : Im(f) \to B$, a una imagen del morfismo f.

Ejemplo 1.7.4. *Consideremos la categoría* ***Con****, sea $f : A \to B$ una función y $C \subseteq B$. Entonces*

$$C = \{y \in B \,|\, y = f(x) \, para \; algún \, x \in A\} \,.$$

si y sólo si se cumplen (a) y (b) de la definición anterior.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Veamos que se cumple (a) de la definición de imagen. Sea $f' : A \to C$ una función definida como $f'(x) = f(x)$ para $x \in A$. Como $f'(x) = f(x)$ se tiene que $if'(x) = f(x)$ para toda $x \in A$ donde $i : C \hookrightarrow B$ es la inclusión. Lo cual implica que $if' = f$.

Ahora veamos que se cumple (b) de la definición categórica de imagen. Para demostrar esto, sea $z : I \hookrightarrow B$ función inyectiva tal que existe una función $f'' : A \to I$ con $f = zf''$. Se quiere hacer ver que existe una única función $m : C \to I$ tal que $i = zm$.

(i) **Existencia**.
Se define $m : C \to I$ como $m(y) = f''(x)$ para algún $x \in A$ con $f'(x) = y$. Veamos que m está bien definida. Si existe $x' \in A$ con $f'(x') = y$, veamos que $f''(x) = m(y) = f''(x)$. Pero

- $y = i(y) = if'(x) = zf''(x)$.
- $y = i(y) = if'(x') = f(x') = zf''(x')$.

Y como z es una función inyectiva, al tener que $zf''(x) = y = zf''(x')$ se obtiene que $f''(x) = f''(x^{'})$. Por lo tanto m está bien definida.

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dr, "z"] & \\ A \arrow[ur, "f''"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "i"'] \arrow[uu, dashed, "m"] & \end{tikzcd}$$

(ii) Veamos que $i = zm$.

En efecto, sea $y \in C$ entonces $zm(y) = zf''(x)$ con x tal que $f(x) = y$. Así, al tener que $zf''(x) = f(x) = y$ se obtiene que $i(y) = zm(y)$. Por lo que $i = zm$.

(iii) **Unicidad**.

Supóngase que existe otra función $m' : C \to I$ tal que $zm' = i$ entonces $zm' = i = zm$. Pero z es inyectiva(monomorfismo) por hipótesis, entonces $m = m'$. Por lo tanto se satisface el inciso (b) de la definición categórica de imagen. Probándose que $C = Imf$ es una imagen en el sentido categórico.

$(\Leftarrow)$ Sea $u : C \to B$ un monomorfismo tal que existe $f' : A \to C$ con $f = uf'$. Consideremos la factorización canónica de f, $f = f''i$ donde $f'' : A \to I$ con $I = \{f(a) \mid a \in A\}$ e $i : I \hookrightarrow B$ la inclusión canónica. Como u satisface (b) de la definición categórica de imagen entonces existe un único morfismo $m : C \to Imf$ tal que $u = im$. Además, como u es monomorfismo entonces m es monomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
& Imf \arrow[dr, "i_{Imf}"] & \\
A \arrow[ur, "f''"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\
& C \arrow[uu, dashed, "m"] \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Al ser f'' un epimorfismo, m es un epimorfismo. Entonces m es isomorfismo. Por lo tanto $I \cong C$.

$\square$

Se sigue del ejemplo anterior que la categoría **Con** tiene imágenes.

Proposición 1.7.5. *Si $f : A \to B$ es un monomorfismo entonces f es igual a su imagen.*

Demostración. Tenemos que $f = f1_A$. Sea $f = uf'$ otra factorización de f con $u : I' \to B$ un monomorfismo. Tomando $m = f'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& I' \arrow[dr, "u"] & \\
A \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr] \arrow[dr, "1_A"'] & & B \\
& A \arrow[uu, dashed, "m"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Probándose que $f : A \to B$ es una imagen de f. $\square$

Definición 1.7.6. *Decimos que una categoría $\mathscr{C}$, tiene imágenes si para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ tiene imagen. ($u : I \to A$). Y si el morfismo $f' : A \to I$, con $f = uf'$, es siempre un epimorfismo, diremos que $\mathscr{C}$ tiene imágenes epimórficas.*

Proposición 1.7.7. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría con igualadores entonces toda imagen de un morfismo en $\mathscr{C}$, es una imagen epimórfica.*

Demostración. Sean $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$, $u : I \to B$ la imagen de f y $f' : A \to I$ tal que $f = uf'$. Veremos que f' es un epimorfismo. Sean $\alpha, \beta : I \to X$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha f' = \beta f'$. Veamos que $\alpha = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dr, "u\lambda"] \arrow[dd, bend right, "\mu"'] & \\
A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] \arrow[dr, "f'"'] & & B \\
 & I \arrow[ur, "u"'] \arrow[uu, dashed, bend right, "m"'] \arrow[d, bend right, "\alpha"'] \arrow[d, bend left, "\beta"] & \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Se quiere ver que si f es un morfismo en $\mathscr{C}$ entonces $f' : A \to I$ es epimorfismo donde $f = uf'$ con $u : I \to B$ imagen de f, es decir, se demostrará que sean $\alpha, \beta : I \to X$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha f' = \beta f'$ entonces $\alpha = \beta$.

Para esto consideremos $\mu : K \to I$ igualador de α y β. Luego, por la propiedad del igualador existe un único morfismo $g : A \to K$ tal que $f' = \mu g$. Además, $u\mu \leq u$. Como u es imagen de f , existe un único morfismo $m : I \to K$ tal que $u = u\mu m$.

Así obtenemos que:

(i) $u\mu m = u1_I$ implica que $\mu m = 1_I$ pues u es monomorfismo.

(ii) $u\mu m\mu = u\mu$ implica $\mu m\mu = \mu$ pues u es monomorfismo. Luego, $\mu m\mu = \mu 1_K$ implica que $m\mu = 1_K$ pues mu es monomorfismo .

De (i) y (ii) se sigue que μ es un isomorfismo; y en particular, un epimorfismo que se escinde. Por lo tanto, el hecho de que $\alpha\mu = \beta\mu$ implica que $\alpha = \beta$, concluyéndose que f' es un epimorfismo. □

Proposición 1.7.8. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en una categoría balanceada $\mathscr{C}$. Si $f = uf'$ con $f' : A \to I$ epimorfismo y $u : I \to B$ un monomorfismo, entonces u es la imagen de f.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f'"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & I \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $f = f''u'$ con $u' : Imf \to B$ la imagen de f y $f'' : A \to Imf$. Entonces por la propiedad (b) de la definición de imagen (ver 1.7.1), existe un único monomorfismo $m : Imf \to I$ tal que $u' = um$.

Como $u'f'' = f = uf'$ y $u'f'' = umf''$, entonces $umf'' = uf'$. Usando que u es un monomorfismo obtenemos que $mf'' = f'$. Además, al ser f' un epimorfismo por hipótesis, entonces m también lo es. Por lo tanto, m es un isomorfismo. De donde, $I \cong Imf$ y $u : I \to B$ es la imagen de B. $\square$

Definición 1.7.9. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ con $u : A' \to A$ un monomorfismo en $\mathscr{C}$. Denotaremos como $f(A')$ a la imagen del morfismo $fu : A' \to B$.*

Definición 1.7.10. *La **coimagen** de un morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ se define como un epimorfismo $j : A \to J$ que satisface lo siguiente:*

(a) Existe un morfismo $k : J \to B$ tal que $f = kj$.

(b) Si $j' : A \to J'$ es otro epimorfismo tal que existe $k' : J' \to B$ con $f = k'j'$ entonces existe $\delta : J' \to J$ tal que el triángulo izquierdo del siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & J \arrow[dr, "k"] & \\ A \arrow[ur, "j"] \arrow[rr] \arrow[dr, "j'"'] & & B \\ & J \arrow[uu, dashed] \arrow[ur, "k'"'] & \end{tikzcd}$$

1.8. Imágenes inversas

Definición 1.8.1. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en una categoría $\mathscr{C}$ y $\alpha_1 : B' \to B$ un subobjeto de B, la **imagen inversa** del subobjeto $\alpha_1 : B' \hookrightarrow B$ es el subobjeto de $\beta_1 : P \hookrightarrow A$ de A, dado por el siguiente diagrama de producto fibrado*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

El objeto P se denota usualmente como $f^{-1}[B']$ y al morfismo β_1 lo denotaremos muchas veces como $i_{f^{-1}[B']}$.

Ejemplo 1.8.2. *En la categoría* ***Con*** *, sea $f : A \to B$ una función y $B' \subseteq B$, entonces*

$$P = \{x \in A | f(x) \in B'\}$$

si y sólo si el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado de los morfismos f y α_1.(donde $\alpha_1 : B' \hookrightarrow B$ es la función inclusión).

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $P = [B'] = \{x \in A | f(x) \in B'\}$ y se considera $\beta_1 = i_P$,$\alpha_1 = i_{B'}$ donde i_P,$i_B$son las funciones inclusiones y $\beta_2 = f|_P$. Sea $x \in P \subseteq A$. Por un lado $f\beta_1(x) = fi_P(x) = f(x)$.

Por otro lado, $\alpha_1\beta_2(x) = (\alpha_1 f_{|P}(x) = \alpha_1 f(x)) = i_{B'}f(x) = f(x)$.

Por lo tanto, $\alpha_1\beta_2 = f\beta_1$. Ahora, sean $\beta_1' : P' \to A$ y $\beta_2' : P' \to B'$ tales que $\alpha_1\beta_2' = f_1\beta_1'$. Se quiere ver que existe un único morfismo $\gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$. Es decir tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Para esto, sea $x \in P'$ y consideremos $y = \beta_1'(x) \in A$. Veamos que $y \in P$. Como $y = \beta_1'(x)$ entonces $f(y) = f\beta_1'(x) = \alpha_1\beta_2'(x) = i_{B'}\beta_2'(x) = \beta_2'(x) \in B'$. Por lo tanto, $y \in P$. Así, se define $\gamma : P' \to P$, como $\gamma(x) := \beta_1'(x)$. De esta manera, se tiene que si $x \in P'$, se tienen las siguientes igualdades:

(i) $\beta_1\gamma(x) = \beta_1\beta_1'(x) = \beta_1'(x)$.

(ii) $\beta_2\gamma(x) = \beta_2\beta_1'(x) = f|_P\beta_1'(x) = f\beta_1'(x) = \alpha_1\beta_2'(x) = \beta_2'(x)$.

Por lo tanto, de (i) y (ii) se tiene que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$.

Unicidad de γ Sea $\gamma' : P' \to P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma'$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma'$. Como $\beta_1\gamma' = \beta_1' = \beta_1\gamma$ con β_1 monomorfismo se tiene que $\gamma' = \gamma$.

Se sigue que el diagrama conmutativo de las hipótesis es un producto fibrado de los morfismos α_1 y f_1.

($\Leftarrow$) Consideremos $f^{-1}[B']$ la imagen inversa conjuntista de $B' \subset B$ mediante f. Luego, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, hook, "\beta_1'"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B' \arrow[d, hook, "i_{B'}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-1}[B'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_{f^{-1}[B']}"'] & B' \arrow[d, hook, "i_{B'}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

donde los morfismo verticales son las inclusiones y el primer cuadrado es un producto fibrado. Entonces existe un único morfismo $\gamma : f^{-1}[B'] \to P$ tal que $i_{f^{-1}[B']} = \beta_1'\gamma$ y $f\gamma = \beta_2'$. De donde concluimos que $\gamma : f^{-1}[B'] \to P$ es la inclusión. Por lo tanto, $f^{-1}[B'] \subseteq P$. Por otro lado, como el cuadrado (*) conmuta tenemos que $\beta_2' = f|_P$ y por lo tanto si $x \in P$ se tiene que $f(x) = \beta_2'(x) \in B'$. Luego, $P \subseteq f^{-1}[B']$. Por lo tanto $P = f^{-1}[B']$.

$\square$

Se sigue del ejemplo anterior que la categoría **Con** tiene imágenes inversas.

Lema 1.8.3. *Sea $f : A \to B$ un morfismo y $f^{-1}[B'] \hookrightarrow A$ la imagen inversa del subobjeto $\alpha_1 : B' \hookrightarrow B$, dada por el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

supongamos existen morfismos $f' : P \to B_1$ y $\mu : B_1 \hookrightarrow B$ subobjeto de B con $B_2 = \mu f'$, entonces $\beta_1 : f^{-1}[B'] \hookrightarrow A$ es la imagen inversa mediante f del subobjeto $\alpha_1\mu : \beta_1 \to B$ de B.

Demostración. Veamos que el cuadrado exterior del siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} P = f^{-1}[B'] \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "\beta_2"'] \arrow[dd, hook, "\beta_1"'] & B_1 \arrow[d, hook, "\mu"] \\ & B' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Consideremos morfismos $g_1 : X \to B_1$ y $g_2 : X \to A$ tales que $fg_2 = \alpha_1\mu g_1$.Como el cuadrado (*) es producto fibrado, existe un único morfismo $h : X \to f^{-1}[B'] = P$ tal que $g_2 = \beta_1 h$ y $\beta_2 h = g_1$.

Pero por hipótesis $\beta_2 = \mu f'$ por lo que $\mu f'h = \mu g_1$. Pero μ es un monomorfismo, entonces $f'h = g_1$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "g_1"] \arrow[dddr, bend right, "g_2"'] & & \\
& P = f^{-1}[B'] \arrow[r, "f'"'] \arrow[dd, hook, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\beta_2"] & B_1 \arrow[d, hook, "\mu"] \\
& & B' \arrow[d, hook, "\alpha_1"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Donde el morfismo $h : X \to P$ es único, pues si existe otro morfismo $h' : X \to P$ tal que $g_2 = \beta_1 h'$ y $g_1 = f'h'$. Al ser β_1 un monomorfismo se sigue que $h' = h$. Por lo tanto $\beta_1 : f^{-1}[B'] \to A$ es la imagen inversa mediante f del subobjeto $\alpha_1\mu : B_1 \hookrightarrow B$ de B.

$\square$

Lema 1.8.4. *Sea $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ y $\mu : I \to B$ un subobjeto de B tal que existe un morfismo $f' : A \to I$ con $f = uf'$. Sea $h : B' \to B$ otro subobjeto de B tal que $f^{-1}[B']$ y $I \cap B'$ están definidas, entonces $f^{-1}[I \cap B']$ existe y $f^{-1}[I \cap B'] = f^{-1}[B']$.*

Demostración. Como la intersección $I \cap B'$ está definida y tanto $\mu : I \to B$, como $h : B' \to B$ son subobjetos de B, entonces el siguiente diagrama conmutativo es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
I \cap B' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mu_1"'] & B' \arrow[d, "h"] \\
I \arrow[r, "\mu"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Como $f^{-1}[B']$ está definida se tiene que el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[B'] \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & B' \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Consideremos los morfismos $\beta_2 : f^{-1}[B'] \to B'$, $f'\beta_1 : f^{-1}[B'] \to I$. Por la conmutatividad de (*) se sigue que $h\beta_2 = f\beta_1 = uf'\beta_1 = u(f'\beta_1)$.Entonces existe un único morfismo $\delta : f^{-1}[B'] \to I \cap B'$ tal que $\beta_2 = \gamma\delta$ y $f'\beta_1 = \mu_1\delta$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P = f^{-1}[B'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[dd, hook, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\beta_2"] & I \cap B' \arrow[d, hook, "\gamma"] \\
 & B' \arrow[d, hook, "h"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Por el lema anterior se tiene que $f^{-1}[I \cap B'] = f^{-1}[B']$.

$\square$

Proposición 1.8.5. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ y consideremos las inclusiones $A_1 \subset A_2 \subset A$ y $B_1 \subset B_2 \subset B$. Entonces se tienen las siguiente relaciones siempre que ambos lados de la relación estén definidas*

(a) $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(b) $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$.

(c) $A_1 \subset f^{-1}[f(A_1)]$.

(d) $B_1 \supset f(f^{-1}[B_1])$.

(e) $f(A_1) = f(f^{-1}[f(A_1)])$.

(f) $f^{-1}[B_1] = f^{-1}[f(f^{-1}[B_1])]$.

Demostración. Sólo probemos (b).

(b) Como B_1 y B_2 son subobjetos de B y $B_1 \subset B_2$, se tienen definidos los monomorfismos $v_1 : B_1 \to B$, $v_2 : B_2 \to B$ y $v : B_1 \to B_2$ con el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "v"'] & B \\
B_2 \arrow[ur, "v_2"'] &
\end{tikzcd}$$

También $f^{-1}[B_1]$ está definida por lo que se tiene el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[B_1] \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "i_{f^{-1}[B_1]}"'] & B_1 \arrow[d, "v_1"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Y al estar $f^{-1}[B_2]$, se tiene que el siguiente diagrama conmutativo es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[B_2] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "i_{f^{-1}[B_2]}"'] & B' \arrow[d, "v_2"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Al tener $v_2 v \gamma_1 = v_1 \gamma_1 = f i_{f^{-1}[B_1]}$ y al ser el último diagrama un producto fibrado se obtiene la existencia de un único morfismo $\gamma : f^{-1}[B_1] \to f^{-1}[B_2]$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[B_1] \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "v\gamma_1"] \arrow[ddr, bend right, "i_{f^{-1}[B_1]}"'] & & \\
& f^{-1}[B_2] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "i_{f^{-1}[B_2]}"] & B' \arrow[d, "v_2"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Como $i_{f^{-1}[B_2]}\gamma = i_{f^{-1}[B_1]}$ con $i_{f^{-1}[B_1]}$ un monomorfismo. Por lo tanto γ es un monomorfismo. Así, $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$.
Los demás incisos se prueban de manera similar.

$\square$

Proposición 1.8.6. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$, donde $\mathscr{C}$ es una categoría con imágenes e imágenes inversas. Si $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ es una familia de subobjetos de A, donde $\cup A_i$ está definida, entonces $\cup f(A_i)$ está definida y además se tiene que $\cup f(A_i) = f(\cup A_i)$.*

Demostración. Sea $\mu : \cup A_i \to A$ la unión de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$. Sean $\mu_i' : A_i \to A$ los únicos morfismos tales que $\mu\mu_{i'} = \mu_i$ para todo $i \in I$. Como $f(A_i) := Im(f\mu_i)$ y $f(\cup A_i) := Im(\mu f)$ (ver 1.7.9). Sean $\theta_i : f(A_i) \to B$ y $\lambda : f(\cup A_i) \to B$ las imágenes de $f\mu_i$ y μf respectivamente. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & f(\cup A_i) \arrow[dr, "\lambda"] & \\
\cup A_i \arrow[ur, "\bar{\lambda}"] \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "f"] & B \\
A_i \arrow[u, "\mu_i'"] \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[r, "\theta_i'"'] & f(A_i) \arrow[ur, "\theta_i'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por la conmutatividad del diagrama se tiene que $f\mu_i = \lambda\bar{\lambda}\mu_i'$. Por ser $f(A_i) = Im(f\mu_i)$ imagen, se tiene que existen únicos morfismos $\{\lambda_i : f(A_i) \to f(\cup A_i))\}_{i\in I}$ tal que $\theta_i = \lambda\lambda_i$ para toda $i \in I$, es decir $\theta_i \leq \lambda$ para toda $i \in I$. Obteniendo la conmutatividad del siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & f(\cup A_i) \arrow[dr, "\lambda"] & \\
A_i \arrow[ur, "\bar{\lambda}\mu_i^{'}"] \arrow[dr, "\theta_i^{'}"'] & & B \\
 & f(A_i) \arrow[uu, "\lambda_i"] \arrow[ur, "\theta_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Se quiere ver que $\lambda : f(\cup A_i) \to B$ es la unión de la familia de morfismos $\{\theta_i : f(A_i) \to B\}_{i\in I}$. Supóngase que los $\theta_i's$ son llevados al subobjeto $h : C^{'} \to C$ mediante el morfismo g . Obteniendo así el siguiente diagrama conmutativo para toda $i \in I$

$$
\begin{tikzcd}
f(A_i) \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\theta_i"'] & C' \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Como la imagen inversa del subobjeto $C^{'}$ bajo g está dada por un producto fibrado , se obtiene el siguiente diagrama conmutativo para toda $i \in I$

$$
\begin{tikzcd}
f(A_i) \arrow[dr, dashed, "\gamma_i"] \arrow[drr, bend left, "g_i"] \arrow[ddr, bend right, "\theta_i"'] & & \\
 & g^{-1}[C'] \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\alpha_2"] & C' \arrow[d, "h"] \\
 & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Pues $g\theta_i = hg_i$ por conmutatividad del diagrama anterior y por definición de imagen inversa de h. Además, como $f\mu_i = \theta_i\theta_i' = \alpha_2\gamma_i\theta_i'$ y por hipótesis se tiene que $\cup A_i$ está definida, por lo tanto por la propiedad universal de la unión se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cup(A_i) \arrow[drr, bend left, "\bar{f}"] \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & \\
& A_i \arrow[ul, "\mu_i'"'] \arrow[r, "\gamma_i\theta_i'"'] \arrow[d, "\mu_i"'] & B' \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Entonces $\alpha_2\bar{f} = f\mu = \lambda\bar{\lambda}$ pero como $f(\cup A_i) = Im(f\mu)$ entonces existe un único morfismo $\eta : f(\cap A_i) \to g^{-1}(C^{'})$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& f(\cup A_i) \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "\eta"] & \\
\cup A_i \arrow[ur, "\bar{\lambda}"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & & B \\
& g^{-1}[C^{'}] \arrow[ur, "\alpha_2"'] &
\end{tikzcd}$$

por suponer que los morfismos $\theta_i's$ son llevados al subobjeto $h : C' \to C$ en C mediante el morfismo g. Como $g\lambda = g\alpha_2\eta = h\alpha_1\eta$, se obtiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
f(\cup A_i) \arrow[drr, bend left, "\alpha_1\eta"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda"'] & & \\
& f(A_i) \arrow[ul, dashed, "\lambda_i"'] \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\theta_i"'] & C' \arrow[d, "h"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\lambda : f(\cup A_i) \to B$ es la unión de la familia $\{\theta_i : f(A_i) \to B\}$de subobjetos de B. Probándose que $\cup f(A_i)$ está definida y $\cup f(A_i) = f(\cup A_i)$.

$\square$

De manera analoga, se prueba la siguiente proposición.

Proposición 1.8.7. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$, donde $\mathscr{C}$ es una categoría imágenes inversas. Si $\{\mu_i : B_i \to B\}_{i\in I}$ es una familia de subobjetos de B, donde $\cap B_i$ está definida, entonces $\cap f^{-1}[B_i]$ existe y además se tiene que $\cap f^{-1}[B_i] = f^{-1}[\cap B_i]$.*

1.9. Objetos cero

Definición 1.9.1. *Un objeto $0 \in \mathscr{C}$ es llamado objeto **inicial** si $|Hom_{\mathscr{C}}(0,C)| = 1$ para cada $C \in Obj(\mathscr{C})$.*

De manera dual a la definición anterior, tenemos que

Definición 1.9.2. *Un objeto $0 \in Obj(\mathscr{C})$ es llamado objeto **terminal** si $|Hom_{\mathscr{C}}(C,0)| = 1$ para cada $C \in Obj(\mathscr{C})$.*

Definición 1.9.3. *Si $0 \in Obj(\mathscr{C})$ es un objeto inicial y terminal, se dice que 0 es un **objeto cero** para la categoría $\mathscr{C}$.*

Definición 1.9.4. *Diremos que $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ es el **morfismo cero** si se factoriza a través del objeto cero. Es decir existen morfismos $f' : A' \to 0$ y $f'' : 0' \to B$ tal que $f = f''f$.*

Observación 1.9.5. *Si 0 y $0^{'}$ son dos objetos iniciales (terminales respectivamente) en una categoría $\mathscr{C}$ con objeto iniciales (terminales respectivamente) entonces $0 \cong 0^{'}$.*

Demostración. Si 0 y $0'$ son objetos iniciales en la categoría $\mathscr{C}$ entonces $|Hom_{\mathscr{C}}(0,0')| = 1$ y $|Hom_{\mathscr{C}}(0',0)| = 1$. Digamos que $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(0,0')$ y $\alpha' \in Hom_{\mathscr{C}}(0',0)$ entonces $\alpha\alpha' = 1_{0'}$ y $\alpha'\alpha = 1_0$. Por lo tanto $0 \cong 0'$. Análogamente si 0 y $0'$ son objetos terminales en $\mathscr{C}$. □

Ejemplo 1.9.6. *En la categoría **Con**, el conjunto $\emptyset$ es un objeto inicial pues para cada conjunto A existe una sola función $f : \emptyset \to A$ cuyo dominio es $\emptyset$. Esto se sigue de que una función de $\emptyset$ a A es un subconjunto del producto cartesiano $\emptyset \times A$ pero $\emptyset \times A = \emptyset$. Por lo tanto $f = \emptyset : \emptyset \to A$ para cualquier conjunto A y entonces $\emptyset$ es un objeto inicial. Sin embargo, $\emptyset$ no es un objeto terminal pues no se puede dar una función $f : A \to \emptyset$ para cualquier conjunto no vacío A. Pues por definición a cada elemento $a \in A$ le correspondería un único elemento en el vacío lo cual no es posible.*

Ejemplo 1.9.7. *En la categoría **Con** sea $S = \{x\}$ un conjunto con un sólo elemento. Se tiene que S es objeto terminal en **Con**, pues sea A un conjunto arbitrario y $f : A \to S$ una función. Para todo $a \in A$ se debe tener que $f(a) = x$. Como esta es la única regla de correspondencia que se puede dar para todo conjunto A entonces $S = \{x\}$ es un objeto terminal en **Con**. Sin embargo, $S = \{x\}$ no es un objeto inicial en **Con** pues se puede dar más de una correspondencia del conjunto S en cualquier conjunto A con más de dos elementos.*

Ejemplo 1.9.8. *En **Grp**, el grupo trivial (grupo con un sólo elemento, denotado $\{e\}$) es el objeto inicial, terminal y por lo tanto el objeto cero en la categoria **Grp**.*

Demostración. (i) Sea $f : \{e\} \to G$ un homomorfismo de grupos, donde $\{e\}$ es el grupo trivial y G es un grupo arbitrario. Por las propiedades de los homomorfismos de grupos, se tiene que la regla de correspondencia es $f(e) = e'$ con e' el elemento neutro de G entonces se sigue que $\{e\}$ es objeto inicial en **Grp**.

(ii) Sea $f : G \to \{e\}$ un homomorfismo de grupos del grupo trivial a G grupo arbitrario. Entonces la regla de correspondencia es $f(g) = e$ para todo $g \in G$, se sigue que $\{e\}$ es objeto terminal en **Grp**.

De (i) y (ii) se sigue que $\{e\}$ es objeto cero en **Grp**.

□

Observación 1.9.9. *Se puede ver que una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero cada conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ tiene un único morfismo cero, denotado por 0_{AB} o simplemente por 0.*

1.10. Kerneles y Cokerneles

Definición 1.10.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Se dice que un morfismo $u : K \to A$ es un **kernel** de f si $fu = 0$ y para todo morfismo $u' : K' \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fu' = 0$ existe un único morfismo $\gamma : K' \to K$ en $\mathscr{C}$ tal que $u\gamma = u'$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ K'. \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Observación 1.10.2.

(a) Como un kernel de f está dado por una propiedad universal, se sigue que cualesquiera dos kerneles de f son isomorfos. A una elección de kernel de f, la denotaremos con $Ker(f)$.

(b) Reformulando la definición de kernel, se tiene que $u : K \to A$ es el kernel de f si y sólo si el siguiente cuadrado es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[d, "\alpha"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

(c) Como el kernel de f está dado por el producto fibrado de inciso anterior y $\alpha : 0 \to B$ es un monomorfismo, se sigue que $K = \alpha^{-1}(0)$ y $u : K \to A$ es un monomorfismo.

Ejemplo 1.10.3. *En la categoría **Grp**, sea $f : G \to K$ un morfismo de grupos y*

$$N = \{x \in G | f(x) = 1_K\}$$

entonces la inclusión $i : Ker(f) \hookrightarrow G$ es un kernel en el sentido categórico (definición 1.10.1).

Demostración. (i) Fácilmente se puede ver que $fi = 0$ al tener la factorización de fi mediante el objeto cero de la categoría **Grp**, como se ve en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[rr, "fi"] \arrow[dr, dashed] & & K \\
& \{1_K.\} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

(ii) Sea $u' : K' \to G$ un monomorfismo tal que $fu' = 0$; se quiere hacer ver que existe un único morfismo $\gamma : K' \to Ker(f)$ tal que $i\gamma = u'$. Primero, considerése la factorización del morfismo u' mediante su imagen

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[rr, "u'"] \arrow[dr, two heads, "h"'] & & G \\
& Im(u') \arrow[ur, hook, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

donde h es un epimorfismo e i' es la inclusión de $Im(u')$ en G. Luego, como

$$Im(u') = \{y \in G \mid u'(x) = y \text{ para algún } x \in K'\},$$

y al tener que $fu'(x) = 1_K$ para todo $x \in K'$, se tiene que $f(u'(x)) = 1_K$. Por lo tanto $u'(x) \in Ker(f)$, próbandose que $Im(u') \subseteq Ker(f)$.

Luego, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con $g : Im(u') \hookrightarrow K$ la inclusión

$$\begin{tikzcd}
Im(u') \arrow[d, hook, "g"'] \arrow[dr, hook, "i"] & K' \arrow[l, two heads, "h"'] \arrow[r, two heads] \arrow[d, "u'"] & \{1_K\} \arrow[d, hook] \\
Ker(f) \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[dr, two heads] & G \arrow[r, "f"] & K \\
& \{1_K\} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Entonces tomándose $\gamma := gh$, se tiene para $x \in K'$ arbitrario las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
i\gamma(x) &= i(gh(x)) \\
&= i'(h(x)) \\
&= u'(x).
\end{aligned}$$

Probándose que $i\gamma = u'$. Como i es un monomorfismo, se sigue la unicidad de γ respecto a la factorización de u'.

$\square$

Definición 1.10.4. *Se dice que una categoría **tiene kerneles** si $\mathscr{C}$ tiene objeto cero y todos los morfismos en $\mathscr{C}$ tienen un kernel en la categoría $\mathscr{C}$.*

Ejemplo 1.10.5. *La categoría **Grp** tiene kerneles por el ejemplo 1.10.3. La categoría **Ab** también tiene kerneles.*

Lema 1.10.6. *Sea $\mathscr{C}$ es una categoría con objeto cero. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathscr{C}$ es una categoría con igualadores entonces $\mathscr{C}$ tiene kerneles.

(b) Si $f : A \to B$ es un monomorfismo en $\mathscr{C}$ y el morfismo f tiene kernel entonces $Ker(f) = 0$.

(c) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathscr{C}$. Si existen $Ker(f)$ y $Ker(gf)$ entonces $Ker(f) \subset Ker(gf)$. Además, si g es monomorfismo entonces $Ker(f) = Ker(gf)$.

Demostración. (a) Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ y $0_{AB} : A \to B$ el morfismo cero en $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$. Como $\mathscr{C}$ tiene igualadores, existe un morfismo $u : K \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fu = 0_{AB}u = 0_{KB}$. Ahora, considérese un morfismo $u' : K' \to A$ tal que $fu' = 0_{AB}u' = 0_{KB}$. Entonces se tiene por la propiedad universal del igualador de los morfismos f y 0_{AB} la existencia de un único morfismo $\gamma : K' \to K$ tal que $u\gamma = u'$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0_{AB}"'] & B \\ K' \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto u es kernel de f. Al ser el morfismo f en $\mathscr{C}$ arbitrario $\mathscr{C}$ tiene kerneles.

(b) Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces al tener el morfismo f kernel en $\mathscr{C}$ existe un morfismo $u : K \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fu = 0$. Luego, al ser f un monomorfismo se obtiene que $u = 0$. Probándose que $Ker(f) = 0$.

(c) Supóngase que $u : K \to A$ es el kernel de gf y que $u' : K' \to A$ es el kernel de f, entonces se tiene que $(gf)u' = g(fu') = g0 = 0$. Luego, por la propiedad universal del kernel de gf existe un único morfismo $\gamma : K' \to K$ tal que $u\gamma = u'$. Al ser u' monomorfismo se tiene que γ es monomorfismo, lo cual implica que $K' \subset K$. Así, $Ker(f) \subset Ker(gf)$. Ahora, si g es un monomorfismo, como $gfu =$ entonces $fu = 0$. Por lo tanto, existe un único morfismo $\gamma' : K \to K'$ tal que $u = u'\gamma'$. Se tiene por un lado que $u' = u\gamma = (u'\gamma')\gamma = u'(\gamma'\gamma)$ y por otro lado se tiene que $u = u'\gamma' = (u\gamma)\gamma' = u(\gamma\gamma')$. Así,

(i) $u(\gamma\gamma') = u(1_K)$ implica que $\gamma\gamma' = 1_K$ y;

(ii) $u'(\gamma'\gamma) = u(1_{K'})$ implica que $\gamma'\gamma = 1_{K'}$.

Por lo tanto $K \cong K'$, demostrando que $Ker(f) = Ker(gf)$.

$\square$

De manera dual a la definición de kernel, tenemos la siguiente definición

Definición 1.10.7. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$, se dice que un morfismo $w : B \to C$ en $\mathscr{C}$ es un* **cokernel** *de f si $wf = 0$ y para todo morfismo $w' : B \to C'$ en $\mathscr{C}$ tal que $w'f = 0$, existe un único morfismo $\gamma : C \to C'$ tal que $\gamma w = w'$.*

Si todo morfismo en $\mathscr{C}$ tiene cokernel, se dice que la categoría $\mathscr{C}$ **tiene cokerneles**. Se puede ver que el cokernel de un morfismo es único salvo isomorfismo y el objeto C en la definición de cokernel será denotado como $Coker(f)$.

Proposición 1.10.8. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
K \arrow[r, "u"'] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

donde el cuadrado derecho es un producto fibrado, u es el kernel de α_1 y γ es el morfismo inducido en el producto fibrado por los morfismo $u : K \to A_1$ y $0 : K \to A_2$, entonces γ es el kernel de β_2.

Demostración. Como el diagrama en la proposición es conmutativo se tiene que $\beta_1\gamma = u$ y como u es un monomorfismo pues $u = Ker(\alpha_1)$ se tiene que γ también es un monomorfismo. Luego, al tener que el segundo cuadrado del diagrama es un producto fibrado se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, dotted, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, se tiene que $0 = \beta_2\gamma$. Ahora, sea $v : X \to P$ un morfismo tal que $\beta_2 v = 0$ entonces se tiene que $\alpha_1\beta_1 v = \alpha_2\beta_2 v = \alpha_2 0 = 0$. Así, por tener $u = Ker(\alpha_1)$ se sigue de la propiedad universal del kernel que existe un único morfismo $w : X \to K$ tal que $uw = \beta_1 v$.

Así pues, se quiere ver que $v = \gamma w$. Consideremos el morfismo $\theta_1 := uw : X \to A_1$ así como el morfismo $\theta_2 := 0 : X \to A_2$, como $\beta_1 v = uw = \beta_1 \gamma w$ y $\beta_2 v = 0 = \beta_2 \gamma w$ entonces los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\theta_2"] \arrow[dr, dashed, "\gamma w"'] \arrow[ddr, bend right, "\theta_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\theta_2"] \arrow[dr, dashed, "v"] \arrow[ddr, bend right, "\theta_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d, "\beta_1"] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del coproducto fibrado, concluimos que $\gamma w = v$.

Unicidad: Supóngase que existe otro morfismo $w' : X \to K$ tal que $\gamma w' = v = \gamma w$. Al ser γ un monomorfismo se sigue que $w' = w$. Probándose que $\gamma = Ker(\beta_2)$.

□

Proposición 1.10.9. *Consideremos el siguiente diagrama en una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\alpha_1"] & A \arrow[d, "\beta_3"] & \\
B' \arrow[r, "\beta_1"'] & B \arrow[r, "\beta_2"'] & B''
\end{tikzcd}$$

donde β_1 es el kernel del morfismo $\beta_2 : B \to B''$, entonces el diagrama puede ser extendido a un producto fibrado si y sólo si $\alpha_1 = Ker(\beta_2\beta_3)$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Supóngase que $\alpha_1 = Ker(\beta_2\beta_3)$ entonces $\beta_2\beta_3\alpha_1 = 0$. Pero como $\alpha_1 = Ker(\beta_2\beta_3)$ se tiene entonces que existe un único morfismo $\gamma : A' \to B'$ tal que $\beta_1\gamma = \beta_3\alpha_1$. Ahora, considérense, $\theta_1 : X \to B^{'}$ y $\theta_2 : X \to A$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\beta_1\theta_1 = \beta_3\theta_2$. Como $\beta_2\beta_3\theta_2 = \beta_2\beta_1\theta_1 = 0$ y al tener que $\alpha_1 = Ker(\beta_2\beta_3)$ se sigue por la propiedad universal del kernel de $\beta_2\beta_3$ que existe un único morfismo $\eta : X \to A'$ tal que $\alpha_1\eta = \theta_2$. Por otro lado, como $\beta_1 = Ker(\beta_2)$ se tiene que β_1 es un monomorfismo. Como $\beta_1\gamma\eta = \beta_3\alpha_1\eta = \beta_3\theta_2 = \beta_1\theta_1$ se sigue que $\gamma\eta = \theta_1$. Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\theta_2"] \arrow[dr, dashed, "\eta"] \arrow[ddr, bend right, "\theta_1"'] & & & \\
& A' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma"] & A \arrow[d, "\beta_3"] & \\
& B' \arrow[r, "\beta_1"'] & B \arrow[r, "\beta_2"'] & B''.
\end{tikzcd}$$

Probándose que el diagrama de la proposición se puede extender a un producto fibrado.

($\Rightarrow$) Supóngase que existe un morfismo $\gamma : A' \to B'$ en $\mathscr{C}$ tal que completa un cuadrado conmutativo $\beta_3\alpha_1 = \beta_1\gamma$, el cual es un producto fibrado. Veamos que $\alpha_1 = Ker(\beta_2\beta_3)$. Al ser $\beta_1 = Ker(\beta_2)$ se tiene que $\beta_2\beta_1 = 0$. Por lo tanto, $\beta_2\beta_3\alpha_1 = \beta_2\beta_1\gamma = 0$.

Ahora, considérese un morfismo $\delta : X \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $\beta_2\beta_3\delta = 0$. De esta manera al tener que $\beta_1 = Ker(\beta_2)$ se tiene por la propiedad universal del kernel que existe un único morfismo $\eta : X \to B'$ tal que $\beta_1\eta = \beta_3\delta$. Por lo que se sigue de la propiedad universal del coproducto fibrado la existencia de un único morfismo $\theta : X \to A$ tal que $\gamma\theta = \eta$ y $\alpha_1\theta = \delta$. Es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\delta"] \arrow[ddr, bend right, "\eta"'] & & \\
& A' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma"] & A \arrow[d, "\beta_3"] \\
& B' \arrow[r, "\beta_1"'] & B \arrow[r, "\beta_2"'] & B''.
\end{tikzcd}$$

Probándose que $\alpha_1 = Ker(\beta_2\beta_3)$.

□

Proposición 1.10.10. *Sean $u : K \to A$ el kernel de un morfismo $f : A \to B$ y $p : A \to C$ el cokernel de u, entonces $u = Ker(p)$.*

Demostración. Sean $u = Ker(f)$ y $p = Coker(u)$, entonces $pu = 0$. Considérese un morfismo $v : X \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $pv = 0$. Como $fu = 0$ y $Coker(u) = p$, existe un único morfismo $\gamma : C \to B$ tal que $f = \gamma p$. Por lo que $fv = \gamma pv = 0$ y como $u = Ker(f)$, se tiene por la propiedad universal del kernel la existencia de un único morfismo $\gamma' : X \to K$ tal que $u\gamma' = v$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & B \\
X \arrow[u, dashed, "\gamma'"] \arrow[ur, "v"'] & C. \arrow[ur, dashed, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $u = Ker(p)$.

□

1.11. Categorías normales y conormales

Definición 1.11.1. *Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero es **normal** si todo monomorfismo en dicha categoría es el kernel de algún morfismo en $\mathscr{C}$.*

De manera dual, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.11.2. *Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero es **conormal** si todo epimorfismo en dicha categoría es el cokernel de algún morfismo en $\mathscr{C}$.*

Proposición 1.11.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con kerneles y normal entonces $\mathscr{C}$ tiene imágenes inversas e intersecciones finitas.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ y $u : B' \to B$ un subobjeto de B. Como la categoría $\mathscr{C}$ es normal, u es el kernel de algún morfismo $\alpha_1 : B \to B''$ y como $\mathscr{C}$ tiene kerneles, consideremos $u = Ker(\alpha_1 f)$ con $u' : A' \to A$. Por proposición 1.10.9 existe un morfismo $\gamma : A' \to B'$ tal que el cuadrado del siguiente diagrama conmutativo es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[d, "f"] & \\ B' \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "\alpha_1"'] & B''. \end{tikzcd}$$

Por definición de imagen inversa se tiene que $f^{-1}[B'] = A'$ demostrando que $\mathscr{C}$ tiene imágenes inversas. Para dos subobjetos de B $u' : B' \to B$ y $u' : B'' \to B$ de B, se tiene que $B' \cap B'' = (u')^{-1}(B'')$ probándose que $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas. □

Lema 1.11.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con kerneles y cokerneles. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\mathscr{C}$ es normal y $u : A \to B$ es un monomorfismo entonces $Ker(Coker(u)) = u$.

(b) Si $\mathscr{C}$ es conormal y $p : A \to B$ es un epimorfismo entonces $Coker(Ker(p)) = p$.

Demostración. (a) Como $\mathscr{C}$ es normal y u es un monomorfismo entonces u es el kernel de algún morfismo, sea $u = Ker(f)$ con $f : B \to C$. Como $\mathscr{C}$ tiene cokerneles, sea $p = Coker(u)$ entonces por 1.10.10 se tiene que $Ker(Coker(u)) = Ker(p) = u$. Probándose que $Ker(Coker(u)) = u$.
(b) Se demuestra de manera análoga el inciso (a). □

Lema 1.11.5. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría normal entonces $\mathscr{C}$ es una categoría balanceada.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una categoría normal y $f : A \to B$ un monomorfismo en $\mathscr{C}$ que también es un epimorfismo. Por el inciso (a) del lema anterior se tiene que $f := Ker(Coker(f))$. Como f es un epimorfismo, se tiene entonces por el inciso (b) del dual del lema 1.10.6 que $Coker(f) = 0$. Es decir $\alpha = Coker(f) := B \to 0$.

(i) Veamos que f es un epi-escindido. En efecto, al considerarse el morfismo $\alpha : B \to 0$ se tiene que $\alpha 1_B = 0$. Por lema anterior se tiene que $Ker(Coker(f)) = Ker(B \xrightarrow{\alpha} 0) = f$. Entonces por propiedad universal del kernel de α, existe un único morfismo $\gamma : B \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\alpha"] & 0 = Coker(f) \\ B \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "1_B"'] & & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $f\gamma = 1_B$.

(ii) Veamos que f es un mono-escindido. En efecto, se tiene la siguiente igualdad

$$f(\gamma f) = (f\gamma)f = 1_B f = f = f1_A.$$

Así, al ser f un monomorfismo se sigue que $\gamma f = 1_A$. Por lo tanto, f es mono-escindido.

Así, de (i) y (ii) se tiene que f es un isomorfismo. Probándose que la categoría $\mathscr{C}$ es balanceada. □

Lema 1.11.6. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero, imágenes y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Supóngase que f tiene cokernel ($p : B \to Coker(f)$) y que $p = Coker(f)$ tiene kernel ($v : Ker(p) \to B$). Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones.*

(1) Existe un único morfismo $q : A \to Ker(p)$ tal que $f = vq$.

(2) Si $\mathscr{C}$ tiene cokerneles y es normal entonces $Im(f) = Ker(Coker(f))$. Además, si $\mathscr{C}$ también tiene igualadores entonces $q = Coim(f)$.

Demostración. (1) Puesto que $p = Coker(f)$ se tiene que $pf = 0$. Como $v = Ker(p)$, por la propiedad universal existe un único morfismo $q : A \to Ker(p)$ tal que $f = vq$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "q"'] & B \arrow[r, "p"] & Coker(f) \\ Ker(p). \arrow[ur, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

(2) Veamos que $v : Ker(p) \to B$ es la imagen del morfismo f. Por el inciso (1) basta probar la segunda propiedad de imagen. Sea $\gamma : B' \to B$ un subobjeto de B tal que $f = \gamma\beta$ para algún morfismo $\beta : A \to B'$. Como $\mathscr{C}$ tiene cokerneles. Sea $\delta : B \to Coker(\gamma)$ el cokernel del morfismo $\gamma : B' \to B$. Al ser γ un monomorfismo se tiene que $Ker(Coker(\gamma)) = \gamma$, es decir, $Ker(\delta) = \gamma$. Por otro lado, tenemos que $\delta f = \delta\gamma\beta = 0\beta = 0$, entonces por la propiedad universal del cokernel de f existe un único morfismo $\eta : Coker(f) \to Coker(\gamma)$ que es tal que $\delta = \eta p$. Veamos que existe $m : Ker(p) \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & B' \arrow[dr, "\gamma"] & & \\
A \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "q"'] & Ker(p) \arrow[u, dashed, "m"] \arrow[r, "v"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\delta"'] & Coker(f) \arrow[d, dashed, "\eta"] \\
 & & & Coker(\gamma)
\end{tikzcd}$$

En efecto, tenemos que $0 = pf = fvq$. Pero q es un epimorfismo y entonces $pv = 0$. Por lo tanto, $\delta v = \eta pv = 0$. Luego, por la propiedad universal del kernel de δ se tiene la existencia de un único morfismo $m : Ker(p) \to B'$ tal que $v = \gamma m$. Por lo tanto, $v = Im(f)$. Por construcción, se tiene que $Ker(Coker(f)) = v$. Probándose que $Ker(Coker(f)) = Im(f)$.

En caso de que $\mathscr{C}$ tenga igualadores, por proposición 1.7.7 al tener que $f = vq$ con $v = Im(f)$ se sigue que q es un epimorfismo. Luego, sea $f = v'q'$ otra factorización de f con $q' : A \to I$ un epimorfismo. Entonces, como $0 = pf = pv'q'$ y q' es un monomorfismo se tiene que $pv' = 0$. De la propiedad universal del kernel de p que existe un único morfismo $\psi : I' \to Ker(p)$ tal que $v' = v\psi$. Como $vq = f = v'q' = v\psi q'$ y v es un monomorfismo pues $v = Im(f)$, concluimos que $q = \psi q'$. Probándose que $q = Coim(f)$.

$\square$

1.12. Categorías exactas

Definición 1.12.1. *Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ es una **categoría exacta** si $\mathscr{C}$ tiene kerneles y cokerneles, es normal y conormal y además todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ puede ser factorizado como $f = vq$*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & I \arrow[r, "v"'] & B
\end{tikzcd}$$

en donde q es un epimorfismo y v es un monomorfismo.

Lema 1.12.2. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría exacta y $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ tal que f se factoriza como $f = vq$ con q un epimorfismo y v un monomorfismo. Considerando el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
Ker(q) \arrow[r, "u"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & B \arrow[r, "p"] & Coker(v) \\
& & I \arrow[ur, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde $u = Ker(q)$, $p = Coker(v)$, se satisfacen las siguientes afirmaciones.

(a) $\mathscr{C}$ es una categoría balanceada que tiene imágenes.

(b) $Ker(f) = u$, $Coker(f) = p$ y $Im(f) = v$.

Demostración.

(a) Como $\mathscr{C}$ es una categoría exacta entonces $\mathscr{C}$ es una categoría normal. Por lo tanto, del lema 1.11.5 se tiene que $\mathscr{C}$ es una categoría balanceada. Luego, por inciso (2) del lema 1.11.6 se tiene que $Ker(Coker(f)) = Im(f)$ demostrando que $\mathscr{C}$ tiene imágenes.

(b) Puesto que v es un monomorfismo se tiene por lema 1.10.6 que $Ker(f) = Ker(vq) = Ker(q) = u$. Dualmente, se tiene que $Coker(f) = p$. Luego, por inciso (a) de este mismo lema se tiene que $\mathscr{C}$ es balanceada y tiene imágenes, entonces f tiene imagen a saber $Im(f) = Ker(Coker(f))$. Como $f = vq$ con v un monomorfismo y q un epimorfismo, por lema 1.11.6 concluimos que $v = Im(f)$. $\square$

Observación 1.12.3.

(a) Una categoría $\mathscr{C}$ que es normal, conormal, con kerneles, cokerneles e igualadores es una categoría exacta.

(b) Una categoría $\mathscr{C}$ es exacta si y sólo si $\mathscr{C}^{op}$ es exacta.

(c) Si $\mathscr{C}$ es exacta entonces $\mathscr{C}$ tiene coimágenes.

(d) En el lema anterior se tiene que $Coim(f) = Coker(Ker(f)) = q$.

Definición 1.12.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría exacta, decimos que una sucesión de morfismos en $\mathscr{C}$*

$$\ldots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \ldots$$

*es una **sucesión exacta** si $Im(\alpha_{i-1}) = Ker(\alpha_i)$ para todo i.*

Proposición 1.12.5. *En una categoría exacta $\mathscr{C}$ se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ *es una sucesión exacta en* $\mathscr{C}$ *si y sólo si* $A \overset{\alpha^*}{\leftarrow} B \overset{\beta^*}{\leftarrow} C$ *es una sucesión exacta en* $\mathscr{C}^{op}$.

(b) $0 \to A \overset{\alpha}{\to} B$ *es una sucesión exacta en* $\mathscr{C}$ *si y sólo si* α *es un monomorfismo.*

(c) $A \overset{\alpha}{\to} B \to 0$ *es una sucesión exacta en* $\mathscr{C}$ *si y sólo si* α *es un epimorfismo.*

(d) $0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \to 0$ *es una sucesión exacta en* $\mathscr{C}$ *si y sólo si* α *es un isomorfismo.*

Demostración.

(a) ($\Rightarrow$) Como $\mathscr{C}$ es una categoría exacta entonces se tienen las siguientes factorizaciones de los morfismos α y β

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "q"'] & & B \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "r"'] & & C \\ & I \arrow[ur, "v"'] & & J \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

con q,r epimorfismos y v,w monomorfismos. Luego, por lema 1.12.2 se tiene que $Im(\alpha) = v$, $Im(\beta) = w$ y $Coim(\beta) = r$. Pero por hipótesis de ser sucesión exacta en $\mathscr{C}$ se tiene que $Im(\alpha) = v = Ker(\beta)$. Por lo tanto $v = Ker(r)$. Se quiere demostrar que $r = Coker(\alpha)$, para demostrar esto vemos que al ser r un epimorfismo y por el lema 1.11.4 se tiene que $Coker(Ker(r)) = r = Coker(v)$. Por lo tanto, $Coker(\alpha) = Coker(vq) = Coker(v) = Coker(Ker(r)) = r = Coim(\beta)$, pero por el principio de dualidad se tiene que

(i) $Coker(\alpha)$ se convierte en $Ker(\alpha^*)$ en $\mathscr{C}^{op}$.

(ii) $Coim(\beta)$ se convierte en $Im(\beta)^*$ en $\mathscr{C}^{op}$.

Por lo tanto, $Ker(\alpha^*) = r^* = Im(\beta^*)$. Probándose que $A \overset{\alpha^*}{\leftarrow} B \overset{\beta^*}{\leftarrow} C$ es una sucesión exacta en $\mathscr{C}^{op}$.

($\Leftarrow$) Se sigue del inciso (b) de la observación 1.12.3 y de la implicación que se acaba de demostrar.

(b) ($\Rightarrow$) Supóngase que $0 \to A \overset{\alpha}{\to} B$ es una sucesión exacta en $\mathscr{C}$ por lo que $Ker(\alpha) = 0 = Im(0 \to A)$ y se quiere ver que α es un monomorfismo. Para esto consideremos la factorización de α a través de su imagen, esto es,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "q"'] & & B \\ & & Im(f) \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

con $\alpha = vq$. Luego, $q = Coker(Ker(\alpha)) = Coker(0 \to A)$ pues $Ker(\alpha) = (0 \to A)$. Pero se puede probar fácilmente que $Coker(0 \to A) = 1_A$. Por lo tanto $\alpha = vq = v$ y entonces α es monomorfismo pues v lo es.

($\Leftarrow$) Por un lado, como α es un monomorfismo por el inciso (b) del lema 1.10.6 se tiene que $Ker(\alpha) = 0$. Por otro lado $Im(0 \to A) = 0$ probándose que $0 \to A \stackrel{\alpha}{\to} B$ es una sucesión exacta en $\mathscr{C}$.

(c) Se sigue de los incisos (a) y (b).

(d) Se sigue de (b) y (c) al ser $\mathscr{C}$ una categoría exacta. □

Definición 1.12.6. *Una **sucesión exacta corta** en una categoría exacta $\mathscr{C}$ es una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

en donde el objeto $C \in \mathscr{C}$ será denotado usualmente como B/A.

Lema 1.12.7. *Una sucesión de morfismos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta si y sólo si β es epimorfismo y $\alpha = Ker(\beta)$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Como $\alpha = Ker(\beta)$, tenemos que α es un monomorfismo. Luego, basta verificar que $Im(\alpha) = Ker(\beta)$. Por hipótesis $\alpha = Ker(\beta)$ y como α es un monomorfismo entonces $Im(\alpha) = \alpha$ por lo tanto $Im(\alpha) = Ker(\beta)$. Demostrando que la sucesión es exacta.

($\Rightarrow$) Basta verificar que $\alpha = Ker(\beta)$. Como la sucesión es exacta corta por hipótesis entonces $0 \to A \stackrel{\alpha}{\to} B$ es una sucesión exacta. Por lo tanto α es un monomorfismo, entonces $Im(\alpha) = \alpha$. Probándose que $\alpha = Im(\alpha) = Ker(\alpha)$.

□

De manera análoga, se tiene la siguiente caracterización de una sucesión exacta corta.

Lema 1.12.8. *Una sucesión de morfismos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta si y sólo si α es monomorfismo y $\beta = Coker(\alpha)$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Por los incisos (a) y (c) del lema 1.12.5 se tiene que β es un epimorfismo por lo que $\beta = Coker(Ker(\beta))$ por lema 1.11.4 (b). Por lema 1.12.7, tenemos que $Ker(\beta) = \alpha$. Demostrando que $\beta = Coker(\alpha)$.

($\Leftarrow$) Por lema 1.12.7, basta ver que $\alpha = Ker(\beta)$. Como α es un monomorfismo entonces $Ker(Coker(\alpha)) = \alpha$ por lema 1.11.4 (a). Pero $\beta = Coker(\alpha)$, por lo tanto $\alpha = Ker(\beta)$.También β es un epimorfismo pues $\beta = Coker(\alpha)$. Luego por lema 1.12.7, se tiene que la sucesión es exacta. □

Lema 1.12.9. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría y consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ K' \arrow[r, "\mu'"'] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

donde α, β y γ son isomorfismos y el primer renglón es sucesión exacta. Entonces el segundo renglón es una sucesión exacta.

Demostración. Se deja como ejercicio al lector. □

Lema 1.12.10. *En el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & B/A \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & B'/A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde la primera y segunda fila son sucesiones exactas cortas, existe un único morfismo $\gamma' : A \to A'$ tal que $\gamma\alpha = \alpha'\gamma'$ si y sólo si existe un único morfismo $\gamma'' : B/A \to B'/A'$ tal que $\gamma''\beta = \beta'\gamma$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supóngase que existe $\gamma' : A \to A'$ tal que $\gamma\alpha = \alpha'\gamma'$ entonces $\beta'\gamma\alpha = \beta'\alpha'\gamma' = 0$ pues $\alpha' = Ker(\beta')$. Como $\beta = Coker(\alpha)$ por propiedad universal del cokernel de α existe un único morfismo $\gamma'' : B/A \to B'/A'$ tal que $\gamma''\beta = \beta'\gamma$.

($\Leftarrow$) La demostración es análoga a la implicación anterior.

□

Observación 1.12.11. *En el lema anterior con con $B = B'$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, dashed, "\gamma'"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, equal, "1_B"] & B/A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\gamma''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & B'/A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Se tiene que $\alpha \leq \alpha'$ si y sólo si $\beta' \leq \beta$.

Proposición 1.12.12. *En una categoría exacta $\mathscr{C}$ sea*

$$\{0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{\alpha_i} A \xrightarrow{\beta_i} A/A_i \longrightarrow 0\}_{i\in I}$$

una familia de sucesiones exactas. Son equivalentes

(a) Existe una sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\lambda} A/A' \longrightarrow 0$$

que satisface los siguientes incisos:

(i) para λ existe una familia de morfismos $\{\beta_i' : A/A_i \to A/A'\}_{i\in I}$ tales que $\lambda = \beta_i'\beta_i$ para todo $i \in I$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} A/A' & A \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[dl, "\beta_i"] \\ A/A_i. \arrow[u, "\beta_i'"] & \end{tikzcd}$$

(ii) si $\theta : A \to X$ es un morfismo tal que el siguiente diagrama es conmutativo para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} X & A \arrow[l, "\theta"'] \arrow[dl, "\beta_i"] \\ A/A_i \arrow[u, "\lambda_i"] & \end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $\delta : A/A' \to X$ tal que $\theta = \delta\lambda$

$$\begin{tikzcd} A/A' \arrow[dr, "\delta"] & \\ A \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\theta"'] & X. \end{tikzcd}$$

(b) $u : A' \to A$ es la unión de la familia $\{\alpha_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ de subobjetos de A.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Primero veamos que $\alpha_i \leq u$ para todo $i \in I$. Por inciso (i) existen morfismos $\beta_i' : A/A_i \to A/A'$ tales que $\lambda = \beta_i'\beta_i$ para toda $i \in I$ entonces por lema 1.12.10 se tiene la existencia de una familia de morfismos $\{\alpha_i' : A_i \to A\}_{i\in I}$ tal que $\alpha_i = u\alpha_i'$ para todo $i \in I$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, "\lambda"] & A/A' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"'] \arrow[u, dashed, "\alpha_i'"] & A \arrow[r, "\beta_i"'] \arrow[u, equal, "1_A"'] & A/A_i \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\beta_i'"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Probándose que $\alpha_i \leq u$. Ahora veamos la propiedad de ser llevado. Sea $\mu : B' \to B$ un subobjeto de B tal que cada α_i es llevado por μ mediante f. Es decir, tenemos el siguiente cuadrado conmutativo para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[d, hook, "f_i"'] & A \arrow[d, hook, "f"] \\
B' \arrow[r, "\mu"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Por lema 1.10.9, existe $\lambda_i : A/A_i \to B/B'$ para toda $i \in I$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"'] & A \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "f"] & A/A_i \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha_i"'] & B \arrow[r, "\mu"'] & B/B' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Considerando $\theta = gf$ con $g : B \to B/B'$ y $f : A \to B$, se tiene por inciso (b) la existencia de un único morfismo $\delta : A/A' \to A/B'$ tal que $\theta = \delta\gamma$. Por lema 1.10.9 , existe $f' : A' \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f"] & A/A' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\mu"'] & B \arrow[r, "g"'] & B/B' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{*}$$

Por lo tanto u es llevado mediante f all subobjeto $\mu : B' \to B$ de B. Por lo tanto $u : A' \to A$ es la unión de la familia de morfismos $\{\alpha_i : A_i \to A\}_{i \in I}$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $u : A' \to A$ es la unión de la familia $\{\alpha_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ de subobjetos de A. Entonces como $\alpha_i = u\alpha_i'$ puesto que $\alpha_i \leq u$ y por lema 1.10.9 se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, dashed, "\alpha'_i"'] & A \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, equal, "1_A"] & A/A_i \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta'_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"'] & A \arrow[r, "\lambda"'] & A/A' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto se satisface (i). Ahora sea $\theta : A \to X$ morfismo tal que pada cada i existe $\lambda_i : A/A_i \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X & A \arrow[l, "\theta"'] \arrow[dl, "\beta_i"] \\
A/A_i \arrow[u, "\lambda_i"] &
\end{tikzcd}$$

Sea $\theta' : K \to A$ el kernel de θ. Como $\theta\alpha_i = \lambda_i\beta_i\alpha_i = \lambda_i 0 = 0$para toda $i \in I$, por la propiedad universal del kernel de θ existe un único morfismo $\gamma_i : A \to K$ tal que $\alpha_i = \theta'\gamma_i$ para toda $i \in I$, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, dashed, "\gamma_i"'] & A \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, equal, "1_A"] & A/A_i \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lambda_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\theta'"'] & A \arrow[r, "\theta"'] & B/B' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es decir, los morfismos $\alpha_i's$ son llevados al subobjeto $\theta' : K \to A$ mediante $1_A : A \to A$ y como $u : A' \to A$ es la unión de los $\alpha_i's$ se tiene entonces que existe $\gamma' : A' \to K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\gamma'"'] & A \arrow[d, "1_A"] \\
K \arrow[r, "\theta'"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Como $\theta u = \theta\theta'\gamma' = 0\gamma = 0$ y $\lambda = Coker(u)$, existe; $delta : A/A' \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "\gamma'"'] & A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal, "1_A"] & A/A' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\theta'"'] & A \arrow[r, "\theta"'] & B/B' & .
\end{tikzcd}$$

Satisfaciéndose (ii). Por lo tanto la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\lambda} A/A' \longrightarrow 0$$

satisface (i) y (ii).

$\square$

Proposición 1.12.13. *En una categoría exacta $\mathscr{C}$, considerese la familia de sucesiones exactas*

$$\{0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{\alpha_i} A \xrightarrow{\beta_i} A/A_i \longrightarrow 0\}_{i=1,2}$$

entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A^{'} \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\lambda} A/A^{'} \longrightarrow 0$$

tal que dicha sucesión satisface el inciso (i) y (ii) de la proposición anterior.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama con $\beta_2' = Coker(\beta_2\alpha_1)$ (pues $\mathscr{C}$ tiene cokerneles)

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & A \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & A/A_1 \arrow[r] & 0 \\ & A/A_2 \arrow[r, "\beta_2'"'] & X & \end{tikzcd}$$

Por dual de la proposición 1.10.9 que el diagrama anterior se puede extender al siguiente coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & A/A_1 \arrow[d, "\beta_1'"] \\ A/A_2 \arrow[r, "\beta_2'"'] & X. \end{tikzcd} \tag{1}$$

Como β_1 y β_2 son epimorfismos entonces β_1' y β_2' también son epimorfismos, por lo tanto $\beta_2'\beta_2$ y $\beta_1'\beta_1$ son epimorfismos. Entonces por conmutatividad del diagrama (1) se tiene que $\beta_2'\beta_2 = \beta_1'\beta_1$, tomemos $\lambda := \beta_3'\beta_2 = \beta_1'\beta_1$. Luego, se forma una sucesión exacta con λ y $Ker(\lambda) = u$

$$0 \longrightarrow Ker(\lambda) \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\lambda} X \longrightarrow 0.$$

Sea $A' = Ker(\lambda)$, por lo que se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\lambda} A/A' \longrightarrow 0.$$

Por el diagrama (1) , se tiene que λ saisface la propiedad (i) de 1.12.12. Se $\theta : A \to C$ tal que existen morfismos $\{\lambda_i : A/A_i \to C\}_{i=1,2}$ tal que $\lambda\beta_2 = \theta = \lambda_1\beta_1$. Luego entonces existe un único $\delta : A/A' \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & A/A_1 \arrow[d, "\beta_1'"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_1"] & \\
A/A_2 \arrow[r, "\beta_2'"'] \arrow[drr, bend right, "\lambda_2"'] & A/A' \arrow[dr, dashed, "\delta"] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\theta = \lambda_1\beta_1 = \delta\beta_1'\beta_1 = \delta\lambda$. Probándose que se satisfacen (i) y (ii) de 1.12.12. $\square$

Corolario 1.12.14. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría exacta entonces $\mathscr{C}$ tiene uniones finitas.*

Demostración. Como $\mathscr{C}$ es una categoría exacta entonces $\mathscr{C}$ es una categoría conormal que tiene cokerneles. Luego, por la proposición anterior se satisfacen los incisos (i) y (ii) de la proposición 1.12.12. Por lo tanto $\mathscr{C}$ tiene uniones finitas. $\square$

1.13. Teoremas de isomorfismo y lema del 9

Proposición 1.13.1. *En una categoría exacta $\mathscr{C}$ consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & A' \arrow[d, "\delta_1"'] & A \arrow[d, "\eta_1"'] & A'' \arrow[d, "\theta_1"] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] & B \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\eta_2"'] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\theta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\gamma_1"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con todas las columnas y filas exactas, entonces existen morfismos $\alpha_1 : A' \to A$ *y* $\alpha_2 : A \to A''$ *tales que* $\beta_1\delta_1 = \eta_1\alpha_1$ *y* $\beta_2\eta_1 = \theta_1\alpha_2$*. Además la sucesión*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta.

Demostración. Por el lema 1.12.10 al tener que el morfismo γ_1 es tal que $\gamma_1\delta_2 = \eta_2\beta_1$ se tiene la existencia del morfismo $\alpha_1 : A' \to A$ tal que $\beta_1\delta_1 = \eta_1\alpha_1$. De la misma manera al tener que el morfismo γ_2 es tal que $\gamma_2\eta_2 = \theta_2\beta_2$ se tiene la existencia de un morfismo $\alpha_2 : A \to A''$ tal que $\beta_2\eta_1 = \theta_1\alpha_2$.
Al ser $\beta_1\delta_1$ un monomorfismo y $\beta_1\delta_1 = \eta_1\alpha_1$ entonces α_1 es monomorfismo, luego por conmutatividad del cuadrado superior izquierdo $\beta_2\eta_1\alpha_1 = \beta_2\beta_1\delta_1 = 0\delta_1 = 0$. Primero demostraremos que la sucesión

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\beta_2\eta_1} B'' \xrightarrow{\theta_2} C'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

es una sucesión exacta, para esto se tiene que ver antes que

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\beta_2\eta_1} B''$$

es una sucesión exacta. Como α_1 es un monomorfismo por construcción sólo bastaría ver que $\alpha_1 = Ker(\beta_2\eta_1)$. Ya se vio que $\beta_2\eta_1\alpha_1 = 0$, ahora supóngase que existe un morfismo $u : X \to A$ tal que $\beta_2\eta_1 u = 0$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha_1"] & A \arrow[r, "\beta_2\eta_1"] & B'' \\ X \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Pero como $\beta_1 = Ker(\beta_2)$, existe un único morfismo $u' : X \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\beta_1"] & B \arrow[r, "\beta_2"] & B'' \\ X \arrow[u, dashed, "u'"] \arrow[ur, "\eta_1 u"'] & & \end{tikzcd}$$

Luego, como $\gamma_1\delta_2 = \eta_2\beta_1$ se tiene que $(\gamma_1\delta_2)u' = \eta_2\beta_1 u' = \eta_2(\beta_1 u') = \eta_2\eta_1 u = 0u = 0$; así al ser γ_1 un monomorfismo se obtiene que $\delta_2 u' = 0$. Puesto que $\delta_1 = Ker(\delta_2)$ entonces existe un único morfismo $u'' : X \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\delta_1"] & B' \arrow[r, "\delta_2"] & C' \\ X. \arrow[u, dashed, "u''"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Obteniendo así las siguientes igualdades, $\eta_1\alpha_1u'' = \beta_1\delta_1u'' = \beta_1u' = \eta_1u$, y al ser η_1 un monomorfismo se tiene que $\alpha_1u'' = u$. Como ya se tenía que $(\beta_2\eta_1)\alpha_1 = 0$ entonces $\alpha_1 = Ker(\beta_2\eta_1)$. Por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\beta_2\eta_1} B''$$

es una sucesión exacta. De manera dual se muestra que

$$A \xrightarrow{\beta_2\eta_1} B'' \xrightarrow{\theta_2} C'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta demostrando que la sucesión (*) es una sucesión exacta. Considerando el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & A'' \arrow[dr, "\theta_1"] & & \\ A \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[rr, "\beta_2\eta_1"] \arrow[dr, "q"'] & & B'' \arrow[r, "\theta_2"] & C'' \\ & I \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $u = Im(\beta_2\eta_1)$. Como $\theta_1\alpha_2 = \beta_2\eta_1$ entonces $Ker(\beta_2\eta_1) = Ker(\theta_1\alpha_2)$. Luego, al ser θ_1 un monomorfismo y como la sucesión (*) es exacta entonces $\alpha_1 = Im(\alpha_1) = Ker(\beta_2\eta_1) = Ker(\alpha_2)$. Por lo tanto $Im(\alpha_1) = Ker(\alpha_2)$. Veamos que α_2 es un epimorfismo. En efecto, puesto que $Im(\beta\eta_1) = Ker(\theta_2)$ y $Ker(\theta_2) = \theta_1$ entonces como $\theta_1 = Im(\beta_2\eta_1)$ lo cual implica que existe un único isomorfismo $m : A'' \to I$ tal que $um = \theta_1$. Como u es un monomorfismo y $uq = um\alpha_2$ se tiene que $q = m\alpha_2$. Así al ser m un isomorfismo, se tiene que $m^{-1}q = m^{-1}m\alpha_2$ implica que $m^{-1}q = \alpha_2$. Por otro lado al ser qm^{-1} un epimorfismo entonces α_2 es un epimorfismo, por lo que la sucesión

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. $\square$

A la proposición anterior se le conoce también como “**el lema del 9**”.

Corolario 1.13.2. *Sea $B \subset A_2 \subset A_1$ subobjetos en una categoría exacta $\mathscr{C}$ entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_1/A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2/B \arrow[r] & A_1/B \arrow[r] & A_1/A_2 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por el dual de la proposición anterior se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_1/A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2/B \arrow[r] \arrow[d] & A_1/B \arrow[r] \arrow[d] & A_1/A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con filas y renglones exactos. □

Proposición 1.13.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría exacta. Si el diagrama conmutativo siguiente es un producto fibrado*

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C' \arrow[d, "\alpha_1"] \\
B \arrow[r, "\alpha_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

y además α_1 es un monomorfismo y α_2 un epimorfismos, entonces el diagrama anterior puede ser extendido a un diagrama conmutativo con filas y renglones exactos de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\gamma\alpha_2"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como $\mathscr{C}$ es una categoría exacta entonces el morfismo α_1 tiene cokernel a saber el morfismo $\gamma : C \to C''$. También el morfismo α_2 tiene kernel a saber el morfismo $\theta : A \to B$. Como α_1 es un monomorfismo entonces $Im(\alpha_1) = \alpha_1$ pero por construcción $\gamma = Coker(\alpha_1)$. Así

$$Im(\alpha_1) = \alpha_1 = Ker(Coker(\alpha_1)) = Ker(\gamma)$$

por lo tanto $Im(\alpha_1) = Ker(\gamma)$. Análogamente, $Im(\theta) = Ker(\alpha_2)$. Luego, por proposición 1.10.9, se tiene que $\beta_2 = Ker(\gamma\alpha_2)$ demostrando que la columna central del diagrama es exacta. Por el lema del 9 se tiene que existen morfismos $\delta : A \to B'$ y $\lambda : B' \to C'$ tal que $\theta 1_A = \beta_2\delta$ y $\alpha_1\lambda = \alpha_2\beta_2$ con

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\delta} B' \xrightarrow{\lambda} C' \longrightarrow 0$$

sucesión exacta. Así, por propiedad universal del kernel de γ se tiene que $\lambda = \beta_1$. En efecto, como $\beta_2 = Ker(\gamma\alpha_2)$, entonces $\gamma\alpha_2\beta_2 = 0$. Pero $\alpha_1 = Ker(\gamma)$ por propiedad universal del kernel de γ existe un único morfismo β_1 tal que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\lambda$. Pero $\alpha_1\lambda = \alpha_2\beta_2$. Probándose que $\beta_1 = \lambda$ pues α_1 es un monomorfismo. □

Corolario 1.13.4. *Sea $f : A \to B$ un morfismo en una categoría exacta $\mathscr{C}$. Si $\mu : B' \to B$ es un subobjeto de B. Entonces se tiene un epimorfismo*

$$f^{-1}[B'] \longrightarrow Im(f) \cap B'$$

y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow f^{-1}[B'] \longrightarrow A \longrightarrow Im(f)/Im(f) \cap B' \longrightarrow 0.$$

Demostración. Por definición de imagen inversa y por observación anterior se tiene que producto fibrados e intersecciones finitas coinciden. Por tanto se puede construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[B'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\mu"'] & Im(f)\cap B' \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\mu_2"'] \\
A \arrow[r, "f"'] & B & Im(f). \arrow[l, "\gamma_2"]
\end{tikzcd}$$

Así, como μ_2 y γ_2 son monomorfismos y al tener la factorización de f a través de su imagen se tiene que existe $q : A \to Im(f)$ tal que $\gamma_2 q = f$ entonces por lema 1.4.5 se tiene el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[B'] \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Im(f)\cap B' \arrow[d, "\mu_2"] \\
A \arrow[r, "q"'] & Im(f).
\end{tikzcd}$$

Al ser q un epimorfismo, por proposición anterior se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow f^{-1}[B'] \longrightarrow A \longrightarrow Im(f)/Im(f)\cap B' \longrightarrow 0.$$

$\square$

Proposición 1.13.5. *En una categoría exacta $\mathscr{C}$, consideremos el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\delta_1"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\eta_1"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\theta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & B \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\eta_2"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\theta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\gamma_1"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde la fila y la columna central son exactas. Entonces el diagrama anterior es conmutativo con filas y renglones exactos si y sólo si (2) y (4) son producto fibrado y coproducto fibrado respectivamente, y (1) y (3) son las factorizaciones a través de su imágen de $\beta_2\eta_1$ y $\eta_2\beta_1$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si en el diagrama anterior se tiene la conmutatividad así como la exactitud de todas las filas y columnas entonces α_2 es un epimorfismo y θ_1 un monomorfismo. Al ser

$\beta_2\eta_1 = \theta_1\alpha_2$ se tiene que $\theta_1\alpha_2$ es la factorización de $\beta_2\eta_1$ mediante su imagen. De la misma manera, $\gamma_1\delta_1$ es la factorización de $\eta_2\beta_1$ mediante su imagen. Para ver que (2) es un producto fibrado, basta ver que $\alpha_1 = Ker(\beta_2\eta_1)$. Pero $\beta_2\eta_1 = \theta_1\alpha_2$ entonces $Ker(\beta_2\eta_1) = Ker(\theta_1\alpha_2)$ y como θ_1 es monomorfismo entonces $Ker(\theta_1\alpha_2) = Ker(\alpha_2)$. Por lo tanto $Ker(\beta_2\eta_1) = \alpha_1$ y por proposición 1.10.9, (2) se puede extender a un producto fibrado. Análogamente se prueba que (4) se puede extender a un coproducto fibrado.

($\Leftarrow$) Como (2) se puede extender a un producto fibrado, entonces $\alpha_1 = Ker(\beta_2\eta_1) = Ker(\theta_1\alpha_2)$ y al ser θ_1 un monomorfismo, se tiene que $\alpha_1 = Ker(\theta_1\alpha_2) = Ker(\alpha_2)$. Por lo tanto $\alpha_1 = Ker(\alpha_2)$. Veamos que α_2 es un epimorfismo. En efecto, al tener que $\theta_1\alpha_2$ es la factorización de $\beta_2\eta_1$ a través de su imagen se obtiene que α_2 es un epimorfismo. Por lo tanto, la primera fila y la columna son sucesiones exactas. De manera dual la fila y columna restantes son también sucesiones exactas.

□

Corolario 1.13.6. *En una categoría exacta $\mathscr{C}$, si $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ son subobjetos de A, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo con columnas y filas exactas*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A_2 \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & A \arrow[r, "\alpha_1'"'] \arrow[d, "\alpha_2'"'] & A/A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\theta_1"'] \arrow[d] & A/A_2 \arrow[r, "\theta_2"'] \arrow[d] & A/A_1 \cup A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}.$$

Demostración. Como la intersección finita coincide con producto fibrados entonces el cuadrado (1) es un producto fibrado. Luego, por proposición 1.12.13 tenemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_1'"] \arrow[d, "\alpha_2'"'] & A/A_1 \arrow[d, "\delta_2"] \\
A/A_2 \arrow[r, "\theta_2"'] & A/A_1 \cup A_2
\end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado. Ahora, sea $\alpha_2'\alpha_1 = \theta_1\gamma_2$ con γ_2 un epimorfismo y θ_1 un monomorfismo, es decir, tenemos la factorización a través de su imagen de $\alpha_2'\alpha_1$. Análogamente $\alpha_1'\alpha_2$ se factoriza mediante su imagen, entonces por el corolario anterior todo el diagrama es conmutativo con filas y renglones exactos. □

Corolario 1.13.7. *Si $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ son subobjetos de A en una categoría exacta $\mathscr{C}$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_1 \cup A_2 \arrow[r] & A_1 \cup A_2/A_1 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Remplazando A por $A_1 \cup A_2$ en el diagrama del corolario anterior obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & A_1 \cup A_2 \arrow[r, "\alpha_1'"] \arrow[d, "\alpha_2'"'] & A_1 \cup A_2/A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\theta_1"'] \arrow[d] & A/A_2 \arrow[r, "\theta_2"'] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con filas y renglones exactos , por lo tanto se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_1 \cup A_2 \arrow[r] & A_1 \cup A_2/A_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con renglones exactos. □

Corolario 1.13.8. *Consideremos el siguiente diagrama en una categoría exacta $\mathscr{C}$ con fila y co-*

lumna exacta,

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & A \arrow[d, "\eta_1"'] & & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta_1"] & B \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\eta_2"'] & B'' \arrow[r] & 0 \\
 & & C \arrow[d] & & \\
 & & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Entonces:

(1) $\beta_2\eta_1$ *es epimorfismo resp.(monomorfismo) si y sólo si* $\eta_2\beta_1$ *es epimorfismo resp.(monomorfismo).*

(2) $\beta_2\eta_1$ *es isomorfismo si y sólo si* $\eta_2\beta_1$ *es isomorfismo.*

Demostración.

(a) Sin perdida de generalidad supongamos que $\eta_2\beta_1$ es un epimorfismo. Consideremos el diagrama de la proposición 1.10.9, como $\gamma_1\delta_1$ es una factorización mediante su imagen, así $\gamma_1\delta_2 = \eta_2\beta_1$ y al suponer $\eta_2\beta_1$ es epimorfismo tenemos que γ_1 es un epimorfismo. Como $Coker(\gamma_1) = \gamma_2$, entonces $C'' = 0$. Entonces θ_1 es un epimorfismo y por lo tanto $\theta_1\alpha_2 = \beta_2\eta_1$ es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & A \arrow[d, "\eta_1"'] \arrow[r, dashed, "\alpha_2"] & A'' \arrow[d, dashed, "\theta_1"] & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, dashed, "\delta_1"'] & B \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\eta_2"'] & B'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\theta_2"] & 0 \\
 & C' \arrow[r, dashed, "\gamma_1"'] & C \arrow[r, dashed, "\gamma_2"'] \arrow[d] & C'' & \\
 & & 0 & & .
\end{tikzcd}$$

(b) Se sigue del inciso (a) y que $\mathscr{C}$ es una categoría balanceada.

□

1.14. Productos y Coproductos

Definición 1.14.1. *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$, entonces una familia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ es un **producto** para la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ si se cumple que para cualquier familia de morfismos $\{\alpha_i : A' \to A_i\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\alpha' : A' \to A$ tal que $\alpha_i = \rho_i\alpha$ para toda $i \in I$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & A \arrow[dl, "\rho_i"] \\ & A_i. & \end{tikzcd}$$

Observación 1.14.2.

(a) Sea $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ un producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathscr{C}$, entonces el producto es único salvo isomorfismo.

(b) Una familia $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ es un producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathscr{C}$ si y sólo si la función

$$\phi_B : Hom_{\mathscr{C}}(B,A) \longrightarrow \textstyle\prod_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}}(B,A_i)$$

definida por $\phi_B(\beta) = (\rho_i\beta)_{i\in I}$ es biyectiva para todo objeto $B \in \mathscr{C}$ con $\prod_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}}(B,A_i)$ producto cartesiano de conjuntos.

Demostración.

(a) Sean $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ y $\{\rho'_i : A' \to A_i\}_{i\in I}$ productos de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathscr{C}$ entonces se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dashed, "\alpha'"] \arrow[dr, "\rho'_i"'] & A \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, "\rho_i"] & A' \arrow[dl, "\rho'_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

con $\alpha' : A' \to A$ y $\alpha : A \to A'$ morfismos únicos respecto a cumplir que $\rho'_i = \rho_i\alpha'$ y $\rho_i = \rho'_i\alpha$ respectivamente para todo $i \in I$. Luego por la propiedad universal del producto $\{\rho'_i : A' \to A_i\}_{i\in I}$ se tiene que $\theta = \alpha\alpha' : A' \to A'$ es único respecto a satisfacer que $\rho'_i\theta = \rho'_i$ pero $\rho_i 1_{A'} = \rho'_i$. Por lo tanto $\alpha\alpha' = \theta = 1_{A'}$. De la misma manera se obtiene que $\alpha'\alpha = 1_A$. Probándose así que el producto es único salvo isomorfismo.

(b) $(\Leftarrow)$ Por un lado, al suponer que ϕ_B es suprayectiva entonces para cada $(\beta_i) \in \prod_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}}(B,A_i)$ con $\beta_i : \beta \to A_i$ entonces existe algún morfismo $\beta : B \to A$ tal que $\phi_B(\beta) = \beta_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto existe un $\beta : B \to A$ tal que $\rho_i\beta = \beta_i$ para toda $i \in I$. Por otro lado, al suponer que ϕ_B es inyectiva se tiene que si $\beta', \beta : B \to A$ son morfismos tales que $\rho_i\beta = \beta_i' = \rho_i\beta'$ para todo $i \in I$ entonces $\beta' = \beta$. Por lo tanto se obtiene la conmutatividad del siguiente diagrama para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & & A \arrow[dl, "\rho_i"] \\ & A_i. & \end{tikzcd}$$

con $\beta : B \to A$ único respecto a la conmutatividad del diagrama anterior. Probándose que la familia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ es un producto para la familia $\{A_i\}_{i\in I}$.

($\Rightarrow$) Se sigue fácilmente del hecho de que la familia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ es un producto para la familia $\{A_i\}_{i\in I}$.

$\square$

Si la familia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ es un producto para la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ entonces se denotara a este producto como $\{\rho_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i\}_{i\in I}$ donde el morfismo $\rho_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ será llamado **i-ésima proyección** del producto sobre A_i.

Observación 1.14.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Sea $i \in I$ fijo, para cada $j \in I$, se define el morfismo $\delta_{ij} : A_i \to A_j$ donde*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si\ j \neq i, \\ 1_{A_i}, & si\ j = i. \end{cases}$$

*Si existe el producto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces existen morfismos $\mu_i : A_i \to \prod_{i\in I} A_i$ llamados **inclusiones** tales que $\rho_j\mu_i = \delta_{ij}$ para cada $i, j \in I$. En particular, cada proyección ρ_i es epi-escindido y cada inclusión μ_i es mono-escindido.*

Demostración. Consideremos la familia $\{\delta_{ij} : A_i \to A_j\}_{j\in I}$ por la propiedad universal del producto existe un único morfismo $\mu_i : A_i \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\mu_i"] \arrow[dr, "\delta_{ij}"'] & & \prod A_i \arrow[dl, "\rho_j"] \\ & A_j & \end{tikzcd}$$

para todo $j \in I$. En particular, para $j = i$ se tiene que $\rho_i\mu_j = \delta_{ij} = 1_{A_i}$. Por lo tanto, ρ_i es epi-escindido y cada μ_i es mono-escindido.

□

Proposición 1.14.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Si $\rho_i : A_1\prod A_2 \to A_i$ y $\mu_i : A_i \to A_1\prod A_2$ con $i = 1,2$ son las proyecciones e inclusiones del producto $A_1\prod A_2$ respectivamente, entonces $Ker(\rho_2) = \mu_1$.*

Demostración. Por observación anterior se tiene que $\rho_2\mu_1 = \delta_{12} = 0$ y μ_1 es split-mono. Por lo tanto μ_1 es mono. Ahora, supongamos que $\alpha : A' \to A_1\prod A_2$ es un morfismo tal que $\rho_2\alpha = 0$. Luego se define un morfismo $\alpha_1 : A' \to A_1$ como $\alpha_1 := \rho_1\alpha$. Consideremos $\mu_1\alpha_1 : A' \to A_1\prod A_2$, entonces tenemos

$$\rho_i(\mu_1\alpha_1) = \rho_i(\mu_1\rho_1\alpha) \quad \text{para} \quad i = 1,2. \tag{*}$$

Así, si en la igualdad (*) se tiene $i = 1$, entonces

$$\rho_1(\mu_1\alpha_1) = (\rho_1\mu_1)\alpha_1 = \alpha_1.$$

Por otro lado, si en la igualdad (*) se tiene $i = 2$, entonces

$$\rho_2(\mu_1\alpha_1) = (\rho_2\mu_1)\alpha_1 = 0.$$

Consideremos la familia de morfismos $\{\alpha_i = \rho_i\alpha : A' \to A_i\}_{i=1,2}$. Por la propiedad universal del producto $A_1\prod A_2$ existe un único morfismo $\theta : A' \to A_1\prod A_2$ tal que para $\alpha_i : \theta \to A_i$, se tiene que $\alpha_i = \rho_i\theta$. Como $\rho_i(\mu_1\alpha_1) = \alpha_i$ para $i = 1,2$, se tiene que $\alpha = \theta = \mu_1\alpha_1$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para $i = 1,2$,

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "\alpha=\theta"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & A_1\prod A_2 \arrow[dl, "\rho_i"] \\ & A_i. & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, α se factoriza a través de μ_1, es decir, se satisface la propiedad universal del kernel. Probándose que $\mu_1 = Ker(\rho_2)$. □

Definición 1.14.5. *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$, se dice que una familia de morfismos $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ es un **coproducto** para la familia $\{A_i\}$ si se cumple que para cualquier familia de morfismos $\{\beta_i : A_i \to A'\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\beta : A \to A'$ tal que $\beta_i = \beta\mu_i$ para toda $i \in I$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$*

$$\begin{tikzcd} A' & & A \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \\ & A_i. \arrow[ul, "\beta_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

De la misma forma como con el producto, si el coproducto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ existe, es único salvo isomorfismo. Luego, si la familia de morfismos $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ es un coproducto para la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ entonces se denota a este coproducto como $\{\mu_i : A_i \to \bigoplus_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ donde el morfismo $\mu_i : A_i \to \bigoplus_{i\in I} A_i$ será llamado la **i-ésima inclusión** de A_i en el coproducto.

Ejemplo 1.14.6. *En la categoría **Con** sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, entonces la unión disjunta de $\{A_i\}_{i\in I}$ es un coproducto para dicha familia en la categoría **Con**.*

Demostración. Para una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de conjuntos la unión disjunta de dicha familia se define como

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} \{(x,i) | x \in A_i\}$$

donde $\bigcup$ denota la unión. Se definen las inclusiones en $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ como los morfismos $\mu_i : A_i \to \bigsqcup A_i$ donde $\mu_i(x) = (x,i)$ para $x \in A_i$. Sea A un conjunto y morfismos $\alpha_i : A_i \to A$ para cada $i \in I$. Se afirma que existe un único morfismo $\alpha : \bigsqcup_{i\in I} A_i \to A$ tal que $\alpha_i = \alpha\mu_i$ para toda $i \in I$. En efecto, definamos $\alpha : \bigsqcup A_i \to A$ como $\alpha(x,i) = \alpha_i(x)$ si $\delta = i$ con $i \in I$. Para $x \in A_i$ se tiene que $\mu_i(x) = (x,i)$, lo cual implica que $\alpha(\mu_i(x)) = \alpha(x,i) = \alpha_i(x)$; así $\alpha_i(x) = \alpha(\mu_i(x))$. Por lo tanto $\alpha_i = \alpha\mu_i$. Además, el morfismo α es único respecto a satisfacer que $\alpha_i = \alpha\mu_i$ pues si supone la existencia de otro morfismo $\alpha' : \bigsqcup_{i\in I} A_i \to A$ tal que $\alpha\mu_i = \alpha_i = \alpha'\mu_i$ entonces para un $(x,i) \in \bigsqcup_{i\in I} A_i$ se tiene que $\alpha'(x,\delta) = \alpha'\mu_i(x) = \alpha_i(x) = \alpha(x,i)$. Por lo tanto, $\alpha' = \alpha$. Probándose que α es único respecto a satisfacer que $\alpha_i = \alpha\mu_i$. □

De manera análoga a la observación 1.14.3 se tiene que para una categoría con objeto cero, se pueden definir las **proyecciones** $\rho_i : \bigoplus_{i\in I} A_i \to A_i$ tales que $\rho_j\mu_i = \delta_{ij}$ para todo $i, j \in I$ en donde cada proyección ρ_i es epi-escindido y cada inclusión μ_i es mono-escindido.

Proposición 1.14.7. *Si $\mathscr{C}$ tiene imágenes, imágenes inversas y coproductos entonces $\mathscr{C}$ tiene uniones. De hecho , si $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ es una familia de subobjetos de A, entonces su unión está dada por la imagen del morfismo $f : \oplus_{i\in I} A_i \to A$ tal que para cada $i \in I$, el morfismo $f\mu_i$ es el subobjeto $f_i : A_i \to A$ $(f_i = f\mu_i)$*

Demostración. Sea $f : \bigoplus_{i\in I} A_i \to A$ el único morfismo tal que $f_i = f\mu_i$ para todo $i \in I$. Sea

$$\bigoplus_{i\in I} A_i \xrightarrow{q} Im(f) \xrightarrow{u} A$$

la factorización de f a través de su imagen, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\mu_i"'] & A \\ \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[r, "q"'] & Im(f) \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

por lo que $f_i = f\mu_i = uq\mu_i$. Por lo tanto $f_i \leq u$.
Sea $\alpha : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$ y $\beta : B' \to B$ un subobjeto de B. Supóngase que cada f_i es llevado al subobjeto $\beta : B' \to B$ mediante el morfismo α. Es decir, para cada $i \in I$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"'] & B' \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B. \end{tikzcd}$$

Luego, al tomar la imagen inversa de β a través de α se obtiene el siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \alpha^{-1}[B'] \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & B' \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B. \end{tikzcd}$$

y dado que β es monomorfismo, se tiene que α_2 es un monomorfismo. Al tener que $\beta\alpha_i = \alpha f_i$ existe un único morfismo $\gamma_i : A_i \to \alpha^{-1}[B']$ tal que $\alpha_2\gamma_i = f_i$ y $\alpha_i = \alpha_1\gamma_i$. Veamos que $\alpha_2\gamma = f$ donde $\gamma : \bigoplus_{i\in I} A_i \to \alpha^{-1}[B']$ es el único morfismo tal que $\gamma\mu_i = \gamma_i$ para toda $i \in I$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A & \alpha^{-1}[B'] \arrow[l, "\alpha_2"'] & & \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[ll, "\gamma"'] \\ & & A_i \arrow[ul, "\gamma_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, $\alpha_2\gamma = f$ pues $(\alpha_2\gamma)\mu_i = \alpha_2\gamma_i = f_i = f\mu_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $\alpha_2\gamma = f$. Como α_2 es un monomorfismo por la propiedad universal de la imagen, se tiene el morfismo
$\lambda : Im(f) \to \alpha^{-1}[B']$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & Im(f) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "u"] & \\
\bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[ur, "q"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "f"'] & \alpha^{-1}[B'] \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & A \arrow[dl, equal] \\
 & A. &
\end{tikzcd}$$

Entonces al considerar el morfismo $\alpha_1\lambda : Im(f) \to B'$ se puede ver que

$$\beta(\alpha_1\lambda) = (\beta\alpha_1)\lambda = (\alpha\alpha_2)\lambda = \alpha(\alpha_2\lambda) = \alpha u.$$

Por lo tanto el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
Im(f) \arrow[r, "\alpha_1\lambda"] \arrow[d, "u"'] & B' \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Probándose que $u : Im(f) \to A$ es la unión de la familia $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ de subobjetos de A.

$\square$

Para una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$ supóngase que para todo $i \in I$ se tiene que $A_i = A$. En este caso se denota al producto de dicha familia como A^I y al coproducto de la misma familia como $A^{(I)}$. Se define también el **morfismo diagonal** como $\triangle : A \to A^I$ dado por $\rho_i\triangle = 1_{A_i}$ para toda $i \in I$. De manera dual se define el **morfismo codiagonal** $\triangledown : A^{(I)} \to A$ dado por $\triangledown\mu_i = 1_{A_i}$ para todo $i \in I$. Así pues, $\triangle$ es un monomorfismo y $\triangledown$ es un epimorfismo.

Lema 1.14.8. *Sean $\{A_j\}_{j\in J}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ familias de objetos en una categoría $\mathscr{C}$. Denotemos por $M_{I\times J}(A,B)$ al conjunto de matrices de tamaño $I \times J$ cuyo ij-ésimo término está dado por un morfismo $f_{ij} \in Hom_{\mathscr{C}}(A_j, B_i)$ donde $i \in I$ y $j \in J$. Entonces la correspondencia*

$$\phi : Hom_{\mathscr{C}}\left(\bigoplus_{j\in J} A_j, \prod_{i\in I} B_i\right) \longrightarrow M_{I\times J}(A,B)$$

dada por la asignación $\phi(f) = (f_{ij})_{I\times J}$ tal que $f_{ij} = \rho_i f \mu_j$, es una asignación biyectiva, donde μ_j es la j-ésima inclusión en el coproducto y ρ_i es la i-ésima proyección del producto.

Demostración.

(i) **Inyectividad**. Supóngase que $\phi(f) = \phi(g)$, entonces $\rho_i f \phi_j = \rho_i g \phi_j$ para todo $i \in I$ y $j \in J$. Luego, fijando alguna $i \in I$ se tiene que $(\rho_i f)\mu_j = (\rho_i g)\mu_j$ para toda $j \in J$, por la propiedad universal del coproducto tenemos que $\rho_i f = \rho_i g$. Esto lo hicimos para i arbitrario, por lo tanto $\rho_i f = \rho_i g$ para todo $i \in I$. Entonces de la propiedad universal del producto concluimos que $f = g$.

(ii) **Suprayectividad**.

Sea $(f_{ij})_{I\times J} \in Mat_{I\times J}(A,B)$. Fijemos $i \in I$, es decir, el objeto B_i es fijo. Así, se obtiene una familia de morfismos $\{f_{ij} : A_j \to B_i\}_{j\in j}$, es decir B_i es un objeto fijo. Entonces por la propiedad universal del coproducto $\{\mu_j : A_j \to \bigoplus_{j\in J} A_j\}_{j\in J}$ existe un único morfismo $f_i : \oplus_{j\in J} A_j \to B_i$ tal que $f_{ij} = f_i \mu_j$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $j \in J$.

$$\begin{tikzcd}
B_i & & \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[ll, dashed, "f_i"'] \\
& A_j. \arrow[ul, "f_{ij}"] \arrow[ur, "\mu_j"'] &
\end{tikzcd}$$

De tal forma que al ir variando $i \in I$ sobre f_i, se obtiene una familia $\{f_i\}$ con $f_i : \oplus_{j\in J} A_j \to B_i$. Por la propiedad universal del producto $\{\rho_i : \prod_{i\in I} B_i \to B_i\}_{i\in I}$ que existe un único morfismo $f : \bigoplus_{j\in J} A_j \to \prod_{i\in I} B_i$ tal que $f_i = \rho_i f$ para toda $i \in I$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \prod_{i\in I} B_i \arrow[dl, "\rho_i"] \\
& B_i &
\end{tikzcd}$$

Por lo que $f_{ij} = f_i \mu_j = \rho_i f \mu_j$. Por lo tanto, $f_{ij} = \rho_i f \mu_j = \phi(f)$. Es decir, f es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$ y toda $j \in J$.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[r, "f"] & \prod_{i\in I} B_i \arrow[d, "\rho_i"] \\
A_j \arrow[u, leftarrow, "\mu_j"] \arrow[r, "f_{ij}"'] & B_i.
\end{tikzcd}$$

Probándose que la asignación ϕ es suprayectiva.

Por lo tanto, ϕ es biyectiva.

$\square$

Ejemplo 1.14.9. *Para un morfismo*

$$\bigoplus_{j=1}^{2} A_j \xrightarrow{\quad f \quad} \prod_{i=1}^{3} B_i$$

entonces tenemos por 1.14.8 la correspondencia con la siguiente matriz de 3×2

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} \rho_1 f \mu_1 & \rho_1 f \mu_2 \\ \rho_2 f \mu_1 & \rho_2 f \mu_2 \\ \rho_3 f \mu_1 & \rho_3 f \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{pmatrix}$$

donde

$$f_{11} : A_1 \to B_1 \qquad f_{12} : A_2 \to B_1$$

$$f_{21} : A_1 \to B_2 \qquad f_{22} : A_2 \to B_2$$

$$f_{31} : A_1 \to B_3 \qquad f_{32} : A_2 \to B_3$$

Lema 1.14.10. *En una categoría* $\mathscr{C}$*, sean* $\alpha, \beta : A \to B$ *dos morfismos. Consideremos los morfismos* $\theta_1 = \begin{pmatrix} 1_A \\ \beta \end{pmatrix} : A \to A \prod B$ *y* $\theta_2 = \begin{pmatrix} 1_A \\ \alpha \end{pmatrix} : A \to A \prod B$*. Entonces el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] \\ A \arrow[r, "\theta_2"'] & A \prod B \end{tikzcd} \tag{1}$$

es la intersección de θ_1 *y* θ_2 *si y sólo si el morfismo u es igualador de los morfismos* α *y* β*.*

Demostración. Notemos que por la forma en que están definidas θ_1 y θ_2 se puede ver que son monomorfismos.

$(\Rightarrow)$ Supóngase que $\theta_i u : K \to A \prod B$ para $i \in \{1,2\}$ es la intersección de θ_1 y θ_2. Luego, al coincidir producto fibrados con intersecciones finitas se tiene que el diagrama conmmutativo (1) es un producto fibrado. Así, de la conmutatividad del diagrama (1) se sigue que

$$\theta_1 u = \begin{pmatrix} u \\ \beta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \alpha u \end{pmatrix} = \theta_2 u.$$

Por lo tanto, $\beta u = \alpha u$. Ahora, supóngase que existe un morfismo $u' : X \to A$ tal que $\alpha u' = \beta u'$, entonces

$$\theta_2 u' = \begin{pmatrix} u' \\ \alpha u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ \beta u' \end{pmatrix} = \theta_1 u',$$

y al ser el diagrama conmutativo un producto fibrado se tiene que existe un único morfismo $\gamma : X \to K$ tal que $u' = u\gamma$. Probándose que u es el igualador de los morfismos α y β.

$(\Leftarrow)$ Supóngase que el morfismo $u : K \to A$ es el igualador de los morfismos α y β. Al tener que

$$\theta_1 u = \begin{pmatrix} 1_A \\ \beta \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u \\ \beta u \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \theta_2 u = \begin{pmatrix} 1_A \\ \alpha \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u \\ \alpha u \end{pmatrix}$$

se sigue que $\theta_1 u = \theta_2 u$, pues $\beta u = \alpha u$.

Sean $\alpha_1 : X \to A$ y $\alpha_2 : X \to A$ morfismos tales que $\theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_2$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] \\ A \arrow[r, "\theta_2"'] & A\prod B. \end{tikzcd}$$

Entonces componiendo en la igualdad $\theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_2$ el morfismo $\rho_1 : A\prod B \to A$ se tiene que $\rho_1(\theta_1\alpha_1) = \rho_1(\theta_2\alpha_2)$.

Como $\rho_1\theta_1 = 1_A = \rho_1\theta_2$ se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2$. Así como $\theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_2$, obtenemos que $\theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_1$ por lo que

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta\alpha_1 \end{pmatrix} = \theta_1\alpha_1 = \theta_2\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha\alpha_1. \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\beta\alpha_1 = \alpha\alpha_1$. Como u es el igualador de α y β, se tiene que existe un único morfismo $\gamma : X \to K$ tal que $\alpha_1 = u\gamma$ y $\alpha_1 = u\gamma$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_1"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_1"'] & & \\ & K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[d, "\theta_1"] \\ & A \arrow[r, "\theta_2"'] & A\prod B. \end{tikzcd}$$

Probándose que el diagrama conmutativo es la intersección de los morfismos θ_1 y θ_2. $\square$

Lema 1.14.11. *Dados dos morfismos $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ en una categoría $\mathscr{C}$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\beta_2"] \arrow[dd, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\beta"'] & & A_2 \arrow[dd, "\alpha_2"] \\ & A_1 \prod A_2 \arrow[ur, "\rho_2"'] \arrow[dl, "\rho_1"] & \\ A_1 \arrow[rr, "\alpha_1"'] & & A \end{tikzcd} \tag{1}$$

donde ρ_1 y ρ_2 son las proyecciones del producto $\{\rho_i : A_1 \prod A_2 \to A_i\}_{i=1,2}$ y $\beta_i = \rho_i\beta$ para $i = 1,2$. Entonces se tiene que el cuadrado conmutativo es un producto fibrado si y sólo si β es el igualador de los morfismos $\alpha_i\rho_i$ para $i = 1,2$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Se quiere probar que el morfismo $\beta : P \to A_1 \prod A_2$ es el igualador de los morfismos $\alpha_i\rho_i$ para $i = 1,2$. Se sigue fácilmente de la conmutatividad del diagrama que

$$(\alpha_2\rho_2)\beta = \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\beta_1 = (\alpha_1\rho_1)\beta.$$

Ahora, supóngase que existe otro morfismo $\delta : X \to A_1 \prod A_2$ tal que $(\alpha_2\rho_2)\delta = (\alpha_1\rho_1)\delta$. Luego, al suponer que el diagrama conmutativo es un producto fibrado se tiene que existe un único morfismo $\gamma : X \to P$ tal que $\beta_i\gamma = \rho_i\delta$ para $i = 1,2$; así, se obtiene que $\rho_i\delta = \rho_i\beta\gamma$. Por lo tanto, se sigue de la propiedad universal del producto que $\delta = \beta\gamma$.

Además, el morfismo γ obtenido anteriormente es único respecto a satisfacer que $\delta = \beta\gamma$. En efecto, si existiera otro morfismo $\gamma' : X \to P$ tal que $\beta\gamma' = \delta$, se tendría que $\rho_i\beta\gamma' = \rho_i\delta$ para $i = 1,2$. Así $\beta_i\gamma' = \rho_i\delta$ con $i = 1,2$. Por lo tanto, $\gamma' = \delta$ por la porpiedad universal del producto fibrado. Probándose que β es el igualador de $\alpha_1\rho_1$ y $\alpha_2\rho_2$.

($\Leftarrow$) Supóngase que β es el igualador de $\alpha_1\rho_1$ y $\alpha_2\rho_2$. Sean $\beta_1' : X \to A_1$ y $\beta_2' : X \to A_2$ dos morfismos tales que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$. Por la propiedad universal del producto existe un único morfismo $\delta : X \to A_1 \prod A_2$ tal que $\rho_i\delta = \beta_i'$ para $i = 1,2$, obteniendo las siguientes igualdades

$$(\alpha_1\rho_1)\delta = \alpha_1(\rho_1\delta) = \alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2' = \alpha_2(\rho_2\delta) = (\alpha_2\rho_2)\delta.$$

Pero β es el igualador de $\alpha_1\rho_1$ y $\alpha_2\rho_2$, lo cual implica la existencia de un único morfismo $\eta : X \to P$ tal que $\delta = \beta\eta$. Por tanto, $\beta_i' = \rho_i\delta = \rho_i(\beta\eta) = \beta_i\eta$ para $i = 1,2$. Supongamos ahora la existencia de otro morfismo $\eta' : X \to P$ tal que $\beta_i' = \beta_i\eta' = \rho_i\beta\eta$, por la propiedad universal del producto se tiene que $\beta\eta = \delta = \beta\eta'$. Luego, al ser β un monomorfismo puesto que β es un igualador se tiene que $\eta = \eta'$. Probándose que el diagrama es un producto fibrado. $\square$

Lema 1.14.12. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero 0, y sean A_1 y A_2 objetos en $\mathscr{C}$, entonces el siguiente diagrama es un producto fibrado*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

si y sólo si $\rho = A_1 \prod A_2$ *con proyecciones* ρ_1 *y* ρ_2.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supóngase que el diagrama es un producto fibrado. Sean $\alpha_1 : X \to A_1$ y $\alpha_2 : X \to A_2$ morfismos, como $0\alpha_1 = 0 = 0\alpha_2$, existe un único morfismo $\alpha : X \to P$ tal que $\alpha_i = \rho_i \alpha$ para $i = 1,2$ entonces $P = A_1 \prod A_2$ con proyecciones ρ_1 y ρ_2.

($\Leftarrow$) Supóngase que $P = A_1 \prod A_2$ con ρ_1 y ρ_2 las respectivas proyecciones. Si $\alpha_1 : X \to A_1$ y $\alpha_2 : X \to A_2$ son tales que $0\alpha_1 = 0 = 0\alpha_2$ entonces por la propiedad universal del producto existe un único morfismo $\alpha' : X \to P$ tal que $\rho_i \alpha' = \alpha_i$ para $i = 1,2$. Probándose que el diagrama es un producto fibrado. □

Proposición 1.14.13. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría, entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(1) Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Entonces $\mathscr{C}$ tiene producto fibrados si y sólo si $\mathscr{C}$ tiene igualadores y productos finitos.

(2) Sea $\mathscr{C}$ una categoría con productos finitos. Entonces $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas si y sólo si $\mathscr{C}$ tiene igualadores.

Demostración.

(1) ($\Rightarrow$) Como $\mathscr{C}$ tiene objeto cero y producto fibrados, entonces por el lema anterior $\mathscr{C}$ tiene productos finitos. Luego, al coincidir producto fibrados de monomorfismos con intersecciones finitas se tiene por el lema 1.14.10 que $\mathscr{C}$ tiene igualadores.

($\Leftarrow$) Si $\mathscr{C}$ tiene productos finitos e igualadores entonces por el lema 1.14.11, $\mathscr{C}$ tiene producto fibrados.

(2) ($\Rightarrow$) Si $\mathscr{C}$ tiene productos finitos e intersecciones finitas, entonces se sigue por el lema 1.14.10 que $\mathscr{C}$ tiene igualadores.

($\Leftarrow$) Si $\mathscr{C}$ tiene igualadores y productos finitos entonces por inciso (1) de esta proposición se tiene que $\mathscr{C}$ tiene producto fibrados. Por lo tanto, $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas.

□

1.15. Categorías aditivas

Definición 1.15.1. *Una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero es* ***semiaditiva*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(i) $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *tiene estructura de monoide abeliano.*

(ii) La composición

$$Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A,C)$$

$$(f,g) \longrightarrow gf$$

es ***bilineal****, es decir, para* $\alpha,\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *y* $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(B,C)$ *se tiene que* $\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$ *y si* $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *y* $\alpha,\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(B,C)$ *entonces* $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$*.*

Definición 1.15.2. *Una categoría $\mathscr{C}$ es* ***aditiva*** *si se satisface las siguientes condiciones:*

(i) $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *tiene estructura de grupo abeliano.*

(ii) La composición es bilineal.

Observación 1.15.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, entonces se cumplen las siguientes afimaciones:*

(a) $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$ *,* $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$ *y* $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$*.*

(ii) $Ker(\alpha-\beta) = Ig(\alpha,\beta)$*.*

(iii) $End_{\mathscr{C}}(M) := Hom_{\mathscr{C}}(M,M)$ *es un anillo asociativo con 1.*

Demostración.

(a) $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$ se sigue de la siguiente igualdad

$$\alpha\beta + \alpha(-\beta) = \alpha(\beta + (-\beta)) = \alpha 0 = 0.$$

De manera análoga se obtiene que $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$ y $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

(b) Sea $u = Ker(\alpha-\beta)$, entonces $0 = (\alpha-\beta)u = \alpha u - \beta u$. Luego, $\alpha u = \beta u$. La propiedad universal del igualador se sigue de la propiedad universal del kernel. Por lo tanto, u es igualador de α y β.

(c) Al conjunto $End_{\mathscr{C}}(M) = Hom_{\mathscr{C}}(M,M)$ se le puede dotar estructura de anillo asociativo con las operaciones de *suma*, dado por la estructura de $Hom_{\mathscr{C}}(M,M)$ como grupo abeliano y la operación *producto* que por definición es la composición de morfismos en la categoría $\mathscr{C}$. □

Proposición 1.15.4. *Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de objetos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$, entonces una familia finita de morfismos $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ es un coproducto para la familia $\{A_i\}_{i=1}^n$ si y sólo existe una familia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ tales que $\delta_{ij} = \rho_i\mu_j$ y $\sum_{k=1}^n \mu_k\rho_k = 1_A$ donde*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si\ i \neq j, \\ 1_{A_i}, & si\ i = j. \end{cases}$$

para $i \in \{1,...,n\}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supóngase que $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ es un coproducto de $\{A_i\}_{i=1}^n$. Por ser $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva, la categoría $\mathscr{C}$ tiene objeto cero y se pueden dar las proyecciones respecto al coproducto. Es decir, existe una familia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ tales que $\rho_i\mu_j = \delta_{ij}$ para $i, j \in \{1,...,n\}$. Por otra parte, se tiene que para $i \in \{1,...,n\}$ fija

$$\left(\sum_{k=1}^n \mu_k\rho_k\right)\mu_i = \left(\sum_{k=1}^n \mu_k\rho_k\mu_i\right) = \sum_{k=1}^n \mu_k\delta_{ki} = \mu_i = 1_A\mu_i.$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto se obtiene que $(\sum_{k=1}^n \mu_k\rho_k) = 1_A$.

($\Leftarrow$) Supóngase que se tiene una familia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ tales que $\rho_i\mu_j = \delta_{ij}$ y $\sum_{k=1}^n \mu_k\rho_k = 1_A$. Así, dada una familia de morfismos $\{f_i : A_i \to A'\}_{i=1}^n$, definimos $f = \sum_{k=1}^n f_k\rho_k$, y entonces se tiene que

$$f\mu_i = \sum_{k=1}^n f_k\rho_k\mu_i = \sum_{k=1}^n f_k\delta_{ki} = f_i, \text{ para toda } i = 1,..,n.$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i = 1,..,n$.

$$\begin{tikzcd} A' & & A \arrow[ll, dashed, "f"'] \\ & A_i. \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

Unicidad Supongamos la existencia de otro morfismo $f' : A \to A'$ tal que $f'\mu_i = f_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces se tiene que

$$f' = f'1_A = f' \sum_{k=1}^{n} \mu_k \rho_k = \sum_{k=1}^{n} f'\mu_k \rho_k = \sum_{k=1}^{n} f_k \rho_k = f.$$

Así, el morfismo f es único respecto a satisfacer que $f\mu_i = f_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Probándose que familia finita de morfismos $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ es un coproducto para la familia $\{A_i\}_{i=1}^n$. $\square$

Lema 1.15.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, y consideremos morfismos $\mu_i : A_i \to A$ y $\rho_i : A \to A_i$ para $i = 1, 2$. Si $\rho_i \mu_i = 1_{A_i}$ para $i = 1, 2$ y $\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 = 1_A$, entonces $\rho_1 \mu_2 = 0 = \rho_2 \mu_1$.*

Demostración. Al suponer que $\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 = 1_A$ se obtiene que

$$\rho_2 = \rho_2 1_A = \rho_2(\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2) = \rho_2 \mu_1 \rho_1 + \rho_2 \mu_2 \rho_2 = \rho_2 \mu_1 \rho_1 + 1_{A_2} \rho_2 = \rho_2 \mu_1 \rho_1 + \rho_2.$$

Luego, al ser $\mathscr{C}$ una categoría aditiva se tiene que $\rho_2 \mu_1 \rho_1 = 0$. Pero al ser ρ_1 un epimorfismo, se tiene que $\rho_2 \mu_1 \rho_1 = 0 = 0\rho_1$ implica que $\rho_2 \mu_1 = 0$. De manera análoga, $\rho_2 \mu_1 = 0$. $\square$

Definición 1.15.6. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$. Se dice que $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es un **biproducto** si el morfismo $\delta = (\delta_{ij}) : \bigoplus_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} A_i$ definido como*

$$\delta = (\delta_{ij}) = \begin{cases} 0, & si\ i \neq j, \\ 1_{A_i}, & si\ i = j, \end{cases}$$

es un isomorfismo.

Corolario 1.15.7. *En una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$ todo coproducto finito es un biproducto.*

Demostración. Por la proposición 1.15.4, al ser $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ el coproducto de la familia finita $\{A_i\}_{i=1}^n$ se tiene la existencia de morfismos $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ tales que $\rho_i \mu_j = \delta_{ij}$ y $\sum_{k=1}^n \mu_k \rho_k = 1_A$. De esta manera, al considerar una familia de morfismo $\{\alpha_i : A' \to A_i\}_{i=1}^n$, se define al morfismo $\alpha : A' \to A$ como

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \alpha_k.$$

Luego,

$$\rho_i \alpha = \rho_i \sum_{k=1}^{n} \mu_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \rho_i \mu_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \alpha_k = \alpha_i.$$

Por lo que $\rho_i\alpha = \alpha_i$, para todo $i = 1,\ldots,n$.

Unicidad Supongamos que exste otro morfismo $\alpha' : A' \to A$ tal que $\rho_i\alpha' = \alpha_i$ para todo $i = 1,\ldots,n$, entonces se tiene que

$$\alpha' = 1_A\alpha' = \left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\rho_k\right)\alpha' = \sum_{k=1}^{n}\mu_k\alpha_k = \alpha.$$

Así, $\alpha = \alpha'$. Probándose que $\{\rho_i : A \to A_i\}_{i=1}^{n}$ es un producto para $\{A_i\}_{i=1}^{n}$. De esta forma se tiene que $\delta = 1_A$ y así δ es un isomorfismo. Probándose que $A = \oplus_{i=1}^{n}A_i$. □

Observación 1.15.8. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva y sean I,J y K conjuntos finitos. Consideremos el morfismo*

$$f : \bigoplus_{k\in K}A_k \longrightarrow \prod_{j\in J}B_j$$

representado por la matriz $A = (f_{jk})$ y el morfismo

$$g : \bigoplus_{j\in J}B_j \longrightarrow \prod_{i\in I}C_i$$

representado por $B = (g_{ij})$. Entonces la matriz correspondiente a la composición gf es igual al producto de las matrices BA.

Demostración. Notemos que como $\mathscr{C}$ es semiaditiva $\prod_{j\in J}B_j = \oplus_{j\in J}B_j$, entonces tiene sentido gf. Denotemos por A^k a la k-ésima columna de A y denotemos por B_i al i-ésimo renglón de B. Luego, sea $h = gf$ que es representado por $C = (h_{ik})$ donde $h_{ik} = \rho_i(gf)\mu_k$. Entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} h_{ik} = \rho_i g f\mu_k = \rho_i g(1_{\bigoplus_{j\in J}B_j})f\mu_k = \rho_i g\left(\sum_{j\in J}\mu_j\rho_j\right)f\mu_k &= \sum_{j\in J}(\rho_i g\mu_j)(\rho_j f\mu_k)\\ &= \sum_{j\in J}(g_{ij})(f_{jk})\\ &= B_iA^k. \end{aligned}$$

Es decir, la entrada ik de la matriz C coincide con la entrada ik de BA. Por lo tanto, $C = BA$.

□

Proposición 1.15.9. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva , $C \in \mathscr{C}$ e I un conjunto finito. Consideremos la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ con $A_i = A$ para todo $i \in I$ y supongamos que el coproducto $A^{(I)} = \bigoplus_{i\in I}A_i$ existe, entonces la función*

$$\phi : End_{\mathscr{C}}(A^{(I)}) \longrightarrow M_{I\times I}(End_{\mathscr{C}}(A))$$

definida como $\phi(f) = (f_{ij})_{I\times I}$, es un isomorfismo de anillos.

Demostración. Se tiene por la observación anterior y por el lema 1.14.8 que

$$\begin{aligned} End_{\mathscr{C}}(A^{(I)}) &= Hom_{\mathscr{C}}\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, \bigoplus_{i\in I} A_i\right) \\ &= Hom_{\mathscr{C}}(\bigoplus_{j\in I} A_i, \prod_{i\in I} A_i) \\ &\cong \{(f_{ij}) | f_{ij} : A_i \to A_j\}_{I\times I} \\ &\cong \{(f_{ij}) | f_{ij} \in End_{\mathscr{C}}(A)\} \\ &\cong M_{I\times I}(End_{\mathscr{C}}(A)). \end{aligned}$$

□

Lema 1.15.10. *Sean $\mathscr{C}$ es una categoría semiaditiva con biproductos $M\bigoplus M$ para todo $M \in Obj(\mathscr{C})$ y $\alpha, \beta : A \to B$ morfismos en $\mathscr{C}$. Entonces la suma $\alpha + \beta$ está dada por cualquiera de las tres composiciones siguientes:*

(1)

$$A \xrightarrow{\Delta} A\bigoplus A \xrightarrow{\theta_1} B$$

(2)

$$A \xrightarrow{\theta_2} B\bigoplus B \xrightarrow{\nabla} B$$

(3)

$$A \xrightarrow{\Delta} A\bigoplus A \xrightarrow{\theta_3} B\bigoplus B \xrightarrow{\nabla} B$$

donde $\theta_1 = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$, $\theta_2 = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$, $\theta_3 = \begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix}$ *y* $\nabla = \begin{pmatrix}1_A & 1_A\end{pmatrix}$.

Demostración.

(1) Podemos suponer que $A\prod A = A\bigoplus A$ por lo que tiene sentido la composición respectiva. Así,

$$\theta_1\Delta = (\alpha\ \beta)\begin{pmatrix}1_A \\ 1_A\end{pmatrix} = \alpha 1_A + \beta 1_A = \alpha + \beta.$$

(2) y (3) se hacen de manera análoga a (1) mediante la multiplicación de las respectivas matrices.

□

Definición 1.15.11. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y $\theta : A \to A$ un morfismo en $\mathscr{C}$, se dice que θ es* ***idempotente*** *si $\theta^2 = \theta$.*

Observación 1.15.12. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y $\theta : A \to A$ un morfismo idempotente en $\mathscr{C}$, entonces $1_A - \theta$ es idempotente.*

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}(1_A - \theta)^2 &= (1_A - \theta)(1_A - \theta)\\ &= 1_A 1_A - \theta 1_A - 1_A\theta + \theta^2\\ &= 1_A - \theta - \theta + \theta\\ &= 1_A - \theta.\end{aligned}$$

Se sigue por definición que $(1_A - \theta)$ es idempotente en $\mathscr{C}$. □

Proposición 1.15.13. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $\mu_1 : A_1 \to A$ y $\rho_1 : A \to A_1$ son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\rho_1\mu_1 = 1_{A_1}$ entonces $\theta := \mu_1\rho_1$ es idempotente y $\mu_1 = Ker(1_A - \theta)$.

(b) Si $\theta : A \to A$ es un idempotente y $\mu_1 = Ker(1_A - \theta)$, $\mu_2 = Ker(\theta)$, entonces $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2.

Demostración.

(a) Como

$$\theta^2 = (\mu_1\rho_1)(\mu_1\rho_1) = \mu_1(\rho_1\mu_1)\rho_1 = \mu_1 1_{A_1}\rho_1 = \mu_1\rho_1 = \theta.$$

Se sigue por definición que θ es idempotente.

Para ver que $\mu_1 = Ker(1_A - \theta)$, primero obsérvese que

$$(1_A - \theta)\mu_1 = 1_A\mu_1 - \theta\mu_1 = \mu_1 - \mu_1\rho_1\mu_1 = \mu_1 - \mu_1 1_{A_1} = \mu_1 - \mu_1 = 0.$$

Sea $\alpha : X \to A$ un morfismo tal que $(1_A - \theta)\alpha = 0$, entonces se obtiene que $\alpha - \theta\alpha = 0$. Por lo tanto, $\alpha = \theta\alpha$. Luego, $\mu_1(\rho_1\alpha) = (\mu_1\rho_1)\alpha = \theta\alpha = \alpha$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\mu_1"] & A \arrow[r, "1_A - \theta"] & A \\ X. \arrow[u, "\rho_1\alpha"] \arrow[ur, "\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

Al ser μ_1 un monomorfismo se sigue que $\rho_1\alpha : X \to A_1$ es único tal que $\mu_1(\rho_1\alpha) = \alpha$. Probándose que $\mu_1 = Ker(1_A - \theta)$.

(b) Como $\mu_1 = Ker(1_A - \theta)$, al tener que $(1-\theta)\theta = \theta - \theta^2 = \theta - \theta = 0$, se tiene la existencia un único morfismo $\rho_1 : A \to A_1$ tal que $\mu_1\rho_1 = \theta$. Por lo que tenemos que $\mu_1\rho_1\mu_1 = \theta\mu_1 = \mu_1$, donde la última igualdad se sigue del hecho que $(1_A - \theta)\mu_1 = \mu_1 - \theta\mu_1 = 0$. Así, al ser μ_1 un monomorfismo y $\mu_1\rho_1\mu_1 = \mu_1 1_{A_1}$ se sigue que $\rho_1\mu_1 = 1_{A_1}$. De manera análoga, existe $\rho_2 : A \to A_2$ tal que $\mu_2\rho_2 = 1_A - \theta$ y $\rho_2\mu_2 = 1_{A_2}$. Por lo que se tiene la siguiente igualdad:

$$\mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 = \theta + (1_A - \theta) = 1_A;$$

y por lema 1.15.5 se obtiene que $\rho_2\mu_1 = 0 = \rho_1\mu_2$. Finalmente, por la equivalencia de la proposición 1.15.4 se tiene que

$$\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1,2}$$

es un coproducto. □

1.16. Categorías exactas y aditivas

Definición 1.16.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría exacta, se dice que una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

***se escinde** si β es un epi-escindido.*

Proposición 1.16.2. *Si en una categoría exacta y aditiva $\mathscr{C}$ una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

se escinde, entonces existen morfismos $\gamma : C \to B$ y $\delta : B \to A$ tales que $B = A \bigoplus C$ con α y γ las inclusiones y con proyecciones β y δ.

Demostración. Como la sucesión exacta corta en la hipótesis se escinde, se tiene la existencia de un morfismo $\gamma : C \to B$ tal que $\beta\gamma = 1_C$. Así, por proposición 1.15.13 (a), se tiene que $\theta = \gamma\beta$ es idempotente y también que $\gamma = Ker(1_B - \theta)$. Como la sucesión de la hipótesis ES exacta, se tiene que $\alpha = Ker(\beta)$. Dado que γ es monomorfismo, se obtiene que

$$\alpha = Ker(\beta) = Ker(\gamma\beta) = Ker(\theta).$$

Una vez más, por proposición 1.15.13 (b) se obtiene que $B = A \bigoplus C$ donde α y γ, son las inclusiones en $B = A \bigoplus C$. Sean $\delta : B \to A$ y $\rho : B \to C$ las proyecciones del coproducto $B = A \bigoplus C$, pero como $\rho\alpha = \beta\alpha = 0$ y $\rho\gamma = 1_C = \beta\gamma$ entonces $\beta = \rho$.

□

Corolario 1.16.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría exacta y aditiva. Si*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

$$A \xleftarrow{\rho} B \xleftarrow{\gamma} C$$

son sucesiones exactas tales que $\rho\alpha = 1_A$ y $\beta\gamma = 1_C$, entonces $B = A\bigoplus C$ con inclusiones α,γ y proyecciones β,ρ.

Demostración. Como $\beta\gamma = 1_C$, entonces β es un epi-escindido y consecuentemente, β es un epimorfismo. De la misma manera $\rho\alpha = 1_A$ implica que es un mono-escindido y consecuentemente α es monomorfismo. Así podemos formar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0,$$

por la proposición anterior α y γ son las inclusiones de $B = A\bigoplus C$ y β es una de las proyecciones. Por último, como $\rho\alpha = 1_A$ y $\rho\gamma = 0$ entonces ρ es la otra proyección de $B = A\bigoplus C$. □

Proposición 1.16.4. *Sean $\mu_1 : A_1 \to A$ y $\mu_2 : A_2 \to A$ dos monomorfismos en una categoría exacta $\mathscr{C}$. Si $A_1\bigoplus A_2 = A$ con μ_1 y μ_2 las respectivas inclusiones en A, entonces $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$. Si además $\mathscr{C}$ es una categoría aditiva con $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$, entonces $A = A_1\bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2.*

Demostración. Supóngase que $A = A_1\bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1,μ_2 y proyecciones ρ_1,ρ_2,

Luego, por dual de 1.14.4 se tiene que $Coker(\mu_2) = \rho_1$. Con lo cual se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\mu_2} A_1\bigoplus A_2 \xrightarrow{\rho_1} A_1 \longrightarrow 0.$$

Así, $A_1 \cong A_1\bigoplus A_2/A_1$ y por corolario 1.13.6, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu_2"'] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \bigoplus A_2 \arrow[r, "\rho_2"'] \arrow[d, "\rho_1"'] & A_1 \bigoplus A_2/A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & A_1 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d] & A_1 \bigoplus A_2/A_1 \cup A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\beta_1\alpha_2 = \rho_1\mu_1 = 1_{A_1}$ se sigue que α_2 es mono-escindido. Entonces, α_2 es monomorfismo, así se tiene que α_2 es monomorfismo y también epimorfismo. Por lo tanto α_2 es un isomorfismo al estar en una categoría exacta $\mathscr{C}$. Consecuentemente $A_1 \cap A_2 = 0$. Luego, de manera análoga, como α_2 es isomorfismo se tiene que β_1 es un isomorfismo y por tanto $A_1 \bigoplus A_2/A_1 \cup A_2 = 0$. Como

$$0 \longrightarrow A_1 \cup A_2 \longrightarrow A_1 \bigoplus A_2 \longrightarrow (A_1 \bigoplus A_2/A_1 \cup A_2) = 0 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y $A_1 \bigoplus A_2/A_1 \cup A_2 = 0$ entonces $A = A_1 \bigoplus A_2 = A_1 \cup A_2$.

Supóngase ahora que $\mathscr{C}$ es una categoría exacta y aditiva con $A_1 \cap A_2 = 0$ y $A_1 \cup A_2 = A$. De nuevo por el corolario 1.13.6, al tener que $A = A_1 \cup A_2$ y que $A/A_1 \cup A_2 = 0$ se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mu_2"'] & A_2/A_1 \cap A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A/A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1/A_1 \cap A_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & A/A_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Del hecho de que $\gamma_1\mu_1 = \beta_1\alpha_2$ y de que α_2 y $\beta 2$ son isomorfismos, se sigue que $\gamma_1\mu_1 : A_1 \to A/A_2$ es un isomorfismo. Como $\gamma_1\mu_1$ es isomorfismo, existe un morfismo $\xi : A/A_2 \to A_1$ tal que

$(\gamma_1\mu_1)\xi = \gamma_1(\mu_1\xi) = 1_{A/A_2}$. Luego por 1.16.2 se tiene que $A = A_1 \bigoplus A_2$ con inclusiones μ_1 y μ_2.

□

1.17. Categorías abelianas

Definición 1.17.1. *Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ es una* ***categoría abeliana*** *si $\mathscr{C}$ es una categoría exacta, aditiva y con productos finitos.*

Teorema 1.17.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana.

(b) $\mathscr{C}$ tiene kerneles, cokerneles, productos finitos, coproductos finitos, es normal y es conormal.

(c) $\mathscr{C}$ tiene coproductos fibrados, producto fibrados, es normal y conormal.

Demostración. Véase demostración en [MB65], p. 33. □

Capítulo 2

Categoría de grupos abelianos

En este breve capítulo se aborda la demostración técnica de que la categoría de grupos abelianos es una categoría abeliana usando el teorema 1.17.2. El hecho de que la categoría de grupos abelianos es una categoría abeliana será fundamental en el desarrollo de los capítulos posteriores de esta tesis, además de proporcionar el ejemplo arquetípico de una categoría abeliana.

Definición 2.0.1. *Denotaremos como **Ab** a la categoría cuya clase de objetos consiste de la clase de todos los grupos abelianos y cuya clase de morfismo, $Hom_{Ab}(A,B)$, consiste del conjunto de todos homomorfismos del grupo abeliano A en el grupo abeliano B.*

Proposición 2.0.2. *La categoria **Ab** tiene productos.*

Demostración. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos, definamos $\prod G_i = \{(g_i)_{i\in I} | g_i \in G_i\}$ y para cada $j \in I$ se define la proyección en la j-ésima coordenada con la asignación

$$\Pi_j : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_j$$

$$(g_i)_{i\in I} \longmapsto \Pi_j((g_i)_{i\in I}) = g_j.$$

Tenemos que $\prod_{i\in I} G_i$ es un grupo abeliano con la suma coordenada a coordenada y Π_i es un morfismo de grupos abelianos para toda $i \in I$. Se afirma que la familia $\{\Pi_i : \prod_{i\in I} G_i \to G_i\}_{i\in I}$ es un producto para $\{G_i\}_{i\in I}$.

En efecto, considérese una familia $\{f_i : Y \to G_i\}_{i\in I}$ de grupos abelianos. Así, definimos $f : Y \to \prod_{i\in I} G_i$ como $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$ para todo $y \in Y$. Primero veamos que f es un morfismo en **Ab**. Sean $y, y' \in Y$, entonces

$$f(y+y') = (f_i(y+y'))_{i\in I} = (f_i(y))_{i\in i} + (f_i(y'))_{i\in i} = f(y) + f(y').$$

Probando que f es morfismo en **Ab**. Como

$$(\Pi_j \circ f)(y) = \Pi_j((f_i(y))_{i\in I}) = f_j(y) \quad \text{para toda } y \in Y.$$

Se tiene que el siguiente diagrama conmuta para toda $j \in I$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & & \prod_{i\in I} G_i \arrow[dl, "\Pi_j"] \\
& G_j. &
\end{tikzcd}$$

Unicidad. Supóngase que $g : Y \to \prod G_i$ es un morfismo de grupos tal que $\Pi_j g = f_j$ para todo $j \in I$. Para $y \in Y$ tenemos que $g(y) = (g_i)_{i\in I}$, por lo que

$$g_j = \Pi_j((g_i)_{i\in I}) = \Pi_j(g(y)) = (\Pi_j g)(y) = f_j(y).$$

Por lo tanto, $g(y) = (g_i)_{i\in I} = (f_i(y))_{i\in I} = f(y)$. Por lo tanto, $g = f$. Probándose que la familia $\{\Pi_i : \prod_{i\in I} G_i \to G_i\}_{i\in I}$ es un producto para $\{G_i\}_{i\in I}$. □

Proposición 2.0.3. *La categoria **Ab** tiene coproductos.*

Demostración. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos. Sea

$$\bigoplus_{i\in I} G_i := \{(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \,|\, g_i = 0 \text{ salvo un número finito de coordenadas}\}.$$

Se puede ver que $\bigoplus_{i\in I} G_i$ es un subgrupo de $\prod_{i\in I} G_i$. Para cada $j \in I$ se define la j-ésima inclusión como:

$$\mu_j : G_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} G_i$$

$$g \longmapsto \mu_j(g) := (g_i)_{i\in I},$$

donde $\mu_j(g) := (g_i)_{i\in I}$ satisface que $g_j = g$ y para $i \neq j$ se tiene que $g_i \neq 0$. Es rutina checar que $\mu_j : G_j \to \bigoplus_{i\in I} G_i$ es morfismo de grupos abelianos.

Afirmamos que $\{\mu_i : G_i \to \bigoplus_{i\in I} G_i\}_{i\in I}$ es un coproducto para la familia $\{G_i\}_{i\in I}$. En efecto, sea $\{\beta_i : G_i \to Y\}$ otra familia de morfismos en **Ab**. Definimos $\beta : \bigoplus_{i\in I} \to Y$ como sigue: para $(g_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$ se tiene que $g_i = 0$ salvo para un número finito de i's, entonces hacemos $\beta(g) = \sum_{i\in I} \beta_i(g_i)$. Veamos primero que β es un morfismo de grupos abelianos. Para esto, sean $(g_i)_{i\in I}, (g_i')_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\beta((g_i)_{i\in I} + (g_i')_{i\in I}) = \beta((g_i + g_i')_{i\in I}) &= \sum_{i\in I} \beta_i(g_i + g_i') \\
&= \sum_{i\in I} (\beta_i(g_i) + \beta_i(g_i')) \\
&= \sum_{i\in I} \beta_i(g_i) + \sum_{i\in I} \beta_i(g_i') \\
&= \beta((g_i)_{i\in I}) + \beta((g_i')_{i\in I}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, β es un morfismo en **Ab**.

Ahora veamos que el siguiente diagrama conmuta en **Ab** para toda $i \in I$,

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I} \arrow[rr, "\beta"] & & Y \\
& G_i. \arrow[ul, "\mu_i"] \arrow[ur, "\beta_i"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $g \in G_i$, entonces $\beta\mu_i = \beta((g_i)_i) = \beta_i(g_i)$, ya que $g_i = g$ y $g_j = 0$ para todo $j \neq i$. Probándose que $\beta\mu_i = \beta_i$ para toda $i \in I$. Supongamos que existe otro $\beta' : \bigoplus_{i\in I} G_i \to Y$ tal que $\beta'\mu_i = \beta_i$ para toda $i \in I$. Sea $(g_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, entonces tenemos que $(g_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} \mu_i(g_i)$ ya que $(g_i) = 0$ salvo para un número finito de elementos en I. Luego

$$\beta'((g_i)_{i\in I}) = \beta'(\sum_{i\in I} \mu_i(g_i)) = \sum_{i\in I} \beta'\mu_i(g_i) = \sum_{i\in I} \beta_i(g_i) = \beta((g_i)_{i\in I}).$$

Probándose que $\beta = \beta'$ y entonces $\{\mu_i : G_i \to \bigoplus_{i\in I} G_i\}$ es un coproducto de $\{G_i\}_{i\in I}$.

$\square$

Observación 2.0.4. *En la categoría **Ab**, el grupo trivial cuyo único elemento es el elemento neutro es el objeto inicial en dicha categoría y lo denotamos como* $\{0\}$ *o simplemente* 0.

Demostración. La verificación de esa observación es similar a la prueba de la observación 1.9.8 en la que el objeto cero de la categoría **Grp** es el grupo que consiste de un sólo elemento. $\square$

Proposición 2.0.5. *La categoria **Ab** tiene kerneles.*

Demostración. Sea $f : G \to K$ un morfismo en **Ab** y sea $i : Ker(f) \to G$ la inclusión canónica con $Ker(f) := \{x \in G | f(x) = 0\}$. Notemos que $Ker(f)$ es un subgrupo abeliano de G y la inclusión $i : Ker(f) \to G$ es un morfismo de grupos abelianos. De manera análoga a como se demostró que la categoría **Grp** tiene kerneles, se puede ver que $i : Ker(f) \to G$ es el kernel del morfismo $f : G \to K$ en **Ab**.

□

Proposición 2.0.6. *La categoría **Ab** tiene cokerneles.*

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición anterior. □

Proposición 2.0.7. *La categoría **Ab** es normal.*

Demostración. Sea $f : G \to H$ un monomorfismo en **Ab**, se quiere demostrar que $f = Ker(g)$ para algún morfismo $g : H \to K$ en **Ab**.

(a) Sea $g : H \to K$ con $K := H/Im(f)$ donde el morfismo g es la proyección canónica en el cociente. De esta manera se tiene que $gf(x) = 0$ para todo $x \in G$.

(b) Ahora, supóngase que existe un morfismo $f' : G' \to H$ en **Ab** tal que $gf' = 0$. Entonces para $x' \in G'$, se tiene que $gf'(x') = 0$. Así, para $h := f'(x')$ se tiene que $g(h) = h + Im(f) = 0$. Por tanto, $h \in Im(f)$. Luego, se define un morfismo $m : G' \to G$ en **Ab** como $m(x') = a$ donde $x' \in G'$ y $a \in G$ es tal que $f(a) = f'(x')$. Notemos que la existencia de a es único ya que f es monomorfismo.

Se quiere ver que el morfismo $m : G' \to G$ como se definió, es un morfismo en **Ab**. Sean $x', y' \in G'$, entonces por un lado se tiene que $m(x' + y') = a^*$ donde $a^* \in G$ es tal que

$$f(a^*) = f'(x' + y') = f'(x') + f'(y').$$

Por otro lado, se tiene que $m(x') + m(y') = a + b$ con $a, b \in G$ tal que $f(a) = f'(x')$ y $f(b) = f'(y')$. Así,

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) + f(b) \\ &= f'(x') + f'(y) \\ &= f'(x' + y') \\ &= f(a^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(a^*) = f(a+b)$ y como f es un monomorfismo, se tiene que $a^* = a+b$. Con lo que se obtiene que $m(x'+y') = m(x')+m(y')$, demostrando que $m : G' \to G$ como se había definido es un morfismo en **Ab**. Veamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] & H \arrow[r, "g"] & K \\ G'. \arrow[u, dashed, "m"] \arrow[ur, "f'"'] & & \end{tikzcd}$$

Sea $x' \in G'$ arbitrario, entonces

$$fm(x') = f(a) = f'(x').$$

Por lo tanto, $fm = f'$. La unicidad del morfismo m respecto a esta factorización se sigue de que si se supone que existe otro morfismo $m' : G' \to G$ tal que $fm' = f' = fm$ entonces al ser f un monomorfismo se tiene que $m = m'$.

Por lo tanto, $f = Ker(g)$. Probándose que **Ab** es normal.

□

Proposición 2.0.8. *La categoría **Ab** es conormal.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración de la proposición anterior. □

Corolario 2.0.9. *La categoría **Ab** es una categoría abeliana.*

Demostración. La demostración se sigue de las proposiciones 2.0.2, 2.0.3, 2.0.4, 2.0.5, 2.0.6, 2.0.7, 2.0.8, y del teorema 1.17.2. □

Capítulo 3

Funtores Aditivos

En la sección 3,1 se inicia el estudio de la categoría de funtores $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ y algunas de sus propiedades básicas. En la sección 3,2 se introduce la definición de la categoría de $\mathscr{C}$-módulos, denotada $Mod(\mathscr{C})$ y se prueba que $Mod(\mathscr{C})$ es una categoría abeliana mediante el teorema 1.17.2. Se expone el funtor covariante de representación que permitirá relacionar funtorialmente una categoría abeliana pequeña con su representación en $\mathscr{C}^{op}$-módulo.

Una herramienta importante en el estudio de categorías lo es el Lema de Yoneda del cual se da una prueba detallada en su versión contravariante en la sección 3,3.

Por último, se definen en $3{,}4 - 3{,}5$ los objetos proyectivo y objetos generadores en categorías, sus caracterizaciones y propiedades así como sus nociones duales.

3.1. Categoría de Funtores

Definición 3.1.1. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías cualesquiera, denotaremos por $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ a la clase de todos los funtores covariantes de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$. Dados $F, G \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$, denotaremos por $Nat[F, G]$ a la clase de todas las transformaciones naturales de F a G.*

Observación 3.1.2. *Si $\eta \in Nat[F, G]$ y $\tau \in Nat[G, H]$ son transformaciones naturales de funtores, definimos la composición $\tau\eta \in Nat[F, H]$ por $(\tau\eta)_C = \tau_C\eta_C$ para toda $C \in \mathscr{C}$. Para cualquier funtor F, la transformación natural identidad $1_F \in Nat[F, F]$ es por definición $(1_F)_C = 1_{F(C)}$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Además se verifica fácilmente que*

(i) $(\delta\tau)\eta = \delta(\tau\eta)$ *para todo* $\eta \in Nat(F, G)$, $\tau \in Nat(G, H)$ *y* $\delta \in Nat(H, K)$,

(ii) *para todo* $F \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$, $1_F\eta = \eta$ *para todo* $\eta \in Nat(G, F)$ *y* $\tau = \tau 1_F$ *para todo* $\tau \in Nat(F, K)$.

A continuación veamos un par de resultados que nos ayudaran a conocer las condiciones necesarias para las cuales $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$ es una categoría. (lo único que falta ver es que $Nat(F,G)$ es conjunto para todo $F,G \in [\mathscr{C},\mathscr{D}]$.)

Lema 3.1.3. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña, entonces la clase $Mor(\mathscr{C})$ de morfismos de $\mathscr{C}$ y el producto*

$$\prod_{(C,D)\in Obj(\mathscr{C})\times Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$$

son conjuntos.

Demostración. Puesto que la clase $Obj(\mathscr{C})$ es un conjunto y como

$$Mor(\mathscr{C}) := \bigcup_{(C,D)\in Obj(\mathscr{C})\times Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$$

donde cada $Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$ es un conjunto para cada $(C,D) \in Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{C})$, se tiene entonces que $Mor(\mathscr{C})$ es un conjunto. De la misma manera, se tiene que

$$\prod_{(C,D)\in Obj(\mathscr{C})\times Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$$

es un conjunto.

□

Proposición 3.1.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña y $\mathscr{D}$ una categoría arbitraría, entonces se satisface lo siguiente:*

(a) $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$ es una categoría, donde la clase de objetos de $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$ consiste de todos los funtores covariantes de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ y las transformaciones naturales entre funtores covariantes es la clase de morfismos de $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$,

(b) si $\mathscr{D}$ es una categoría pequeña, entonces $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$ también lo es.

Demostración. Sean X y Y dos conjuntos cualesquiera, se denota por $Hom_{Con}(X,Y)$ al conjunto de todas las funciones de X a Y.

Sean $F,G \in [\mathscr{C},\mathscr{D}]$. Al ser $\mathscr{C}$ una categoría pequeña, se obtiene que las clases

$$\mu_F := \bigcup_{(C,D)\in Obj(\mathscr{C})\times Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{D}}(F(C),F(D)), \quad \mu_G := \bigcup_{(C,D)\in Obj(\mathscr{C})\times Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{D}}(G(C),G(D))$$

$$\text{y} \quad \eta_{(F,G)} := \prod_{C \in Obj(\mathscr{C})} Hom_{\mathscr{D}}(F(C), G(C))$$

son conjuntos. Además, por el lema 3.1.3 se tiene que la clase

$$\mathscr{A}_{(F,G)} := Hom_{Con}(Mor(\mathscr{C}), \mu_F) \times Hom_{Con}(Mor(\mathscr{C}), \mu_G) \times \eta_{(F,G)}$$

es un conjunto. Por un lado, cada funtor $F \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ define una función,

$$\Theta_F : Mor(\mathscr{C}) \longrightarrow \mu_F$$

cuya regla de correspondencia está dada por $\Theta_F(f) = F(f)$ para cada $f \in Mor(\mathscr{C})$. De esta manera, el funtor F queda determinado totalmente por $\Theta_F \in Hom_{Con}(Mor(\mathscr{C}), \mu_F)$. Por otro lado, una transformación natural $\tau : F \to G$ es un elemento $\bar{\tau} := (\tau_C)_{C \in Obj(\mathscr{C})}$ del conjunto $\eta_{(F,G)}$. Luego, cada $\tau \in Nat[F,G]$ se puede ver como una terna $(\Theta_F, \Theta_G, \bar{\tau}) \in \mathscr{A}_{(F,G)}$. Así, $[F,G]$ es una subclase de $\mathscr{A}_{(F,G)}$. Por lo tanto, $[F,G]$ es un conjunto.

(b) Supóngase que $\mathscr{D}$ es una categoría pequeña, entonces por lema 3.1.3 se tiene que $Mor(\mathscr{C})$ y $\mathscr{D}$ son conjuntos. Por la demostración del inciso (a) se tiene que cada $F \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ se puede identicar con una función $\Theta_F : Mor(\mathscr{C}) \to \mu_F$. Luego,

$$\Theta_F \in Hom_{Con}(Mor(\mathscr{C}), \mu_F) \subset Hom_{Con}(Mor(\mathscr{C}), Mor(\mathscr{D})).$$

Probándose que la clase de funtores de $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ es un conjunto. Es decir, $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ es un conjunto. Luego, por la observación 3.1.2 se tiene que $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ es una categoría.

□

Definición 3.1.5. *Se dice que una subcategoría $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ es* ***densa*** *si para todo $C \in Obj(\mathscr{C})$ existe $C' \in \mathscr{C}'$ tal que C y C' son isomorfos.*

Definición 3.1.6. *Se dice que una subcategoría $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$* ***esqueléticamente pequeña*** *si $\mathscr{C}$ tiene una subcategoría $\mathscr{C}'$ que es densa y pequeña.*

Definición 3.1.7. *Se dice que un funtor covariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es* ***aditivo*** *si satisface las condiciones siguientes:*

(i) $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías aditivas.

(ii) Para todo $(C,D) \in Obj(\mathscr{C}) \times Obj(\mathscr{D})$, el morfismo inducido por F

$$Hom_{\mathscr{C}}(C,D) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(F(C),F(D))$$

es un morfismo en la categoría ***Ab***. *Es decir, para todo* $\alpha,\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$ *se tiene que* $F(\alpha+\beta) = F(\alpha)+F(\beta)$.

3.2. La categoría $Mod(\mathscr{C})$

En toda esta sección $\mathscr{C}$ será una categoría pequeña.

Definición 3.2.1. *Denotaremos por* $Mod(\mathscr{C})$ *a la subcategoría plena de* $[\mathscr{C},\boldsymbol{Ab}]$ *cuya clase de objetos consiste de todos los funtores aditivos covariantes de la categoría* $\mathscr{C}$ *a la categoría* ***Ab*** *y donde* $Hom_{Mod(\mathscr{C})}(F,G)$ *consiste de todas las transformaciones naturales del funtor* F *en el funtor* G. *De esta manera, para* $F,G,H \in Mod(\mathscr{C})$, $\alpha \in Hom_{Mod(\mathscr{C})}(F,G)$ *y* $\beta \in Hom_{Mod(\mathscr{C})}(G,H)$ *arbitrarios, se define una ley de composición como:*

$$\circ : Hom_{Mod(\mathscr{C})}(F,G) \times Hom_{Mod(\mathscr{C})}(G,H) \longrightarrow Hom_{Mod(\mathscr{C})}(F,H)$$

$$(\alpha,\beta) \longmapsto \beta\alpha$$

donde $(\beta\alpha)_C = \beta_C\alpha_C$ *para todo* $C \in \mathscr{C}$ *y* $1_F \in Hom_{Mod(\mathscr{C})}(F,F)$ *es por definición* $(1_F) = 1_{F(C)}$ *para cada* $C \in \mathscr{C}$.

Notación A un objeto M en $Mod(\mathscr{C})$ lo llamaremos un $\mathscr{C}$**-módulo**.

Normalmente, utilizaremos la notación $Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$ para denotar al conjunto $Hom_{Mod(\mathscr{C})}(F,G)$.

Proposición 3.2.2. *La categoría* $Mod(\mathscr{C})$ *tiene objeto cero.*

Demostración. Se afirma que el funtor $F_0 : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ en $Mod(\mathscr{C})$ tal que $F_0(C) = 0$ para cada $C \in \mathscr{C}$ donde $0 \in \mathbf{Ab}$ es el grupo trivial, es el objeto objeto cero en la categoría $Mod(\mathscr{C})$.

Como $0 \in \mathbf{Ab}$ es el grupo trivial, el cual es objeto inicial y terminal en la categoría **Ab**, existe una unica familia de morfismos

$$\alpha := \{\alpha_C : G(C) \longrightarrow 0\}_{C\in\mathscr{C}}$$

para G cualquier objeto en $Mod(\mathscr{C})$. De la misma manera, existe una única familia de morfismos

$$\beta := \{\beta_C : 0 \longrightarrow H(C)\}_{C\in\mathscr{C}}$$

par H cualquier objeto en $Mod(\mathscr{C})$. Veamos que α y β son transformaciones naturales. Sea $f : C_1 \to C_2$ en $\mathscr{C}$, entonces $F_0(f) = 0$. Luego, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} G(C_1) \arrow[r, "\alpha_{C_1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F_0(C_1) = 0 \arrow[d, "F_0(f)"] \\ G(C_2) \arrow[r, "\alpha_{C_2}"'] & F_0(C_2) = 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 = F_0(C_1) \arrow[r, "\beta_{C_1}"] \arrow[d, "F_0(f)"'] & H(C_1) \arrow[d, "H(f)"] \\ 0 = F_0(C_2) \arrow[r, "\beta_{C_2}"'] & H(C_2). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el funtor F_0 como se definió en esta demostración es el objeto cero en $Mod(\mathscr{C})$.

$\square$

Lema 3.2.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña y **Ab** la categoría de grupos abelianos. Entonces la categoría* $\mathrm{Mod}(\mathscr{C})$ *es una categoría aditiva.*

Demostración. Sean $F, G \in Mod(\mathscr{C})$. Veamos que $Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$ es un grupo abeliano. Para esto tenemos que definir una operación

$$+ : Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G] \times Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G] \longrightarrow Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G],$$

como sigue: Dados $\eta, \psi \in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$, definimos $\eta + \psi \in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$ con

$$\eta + \psi := \{(\eta + \psi)_C := \eta_C + \psi_C : F(C) \longrightarrow G(C)\}_{C \in \mathscr{C}.}$$

Notemos que como $\eta_C, \psi_C \in Hom_{Ab}(F(C), G(C))$, entonces tiene sentido tomar la suma $\eta_C + \psi_C \in Hom_{Ab}(F(C), G(C))$. Veamos que $\eta + \psi \in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$. Sea $f : C \to C'$ un morfismo en $\mathscr{C}$, Como η y ψ son transformaciones naturales, tenemos que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\psi_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\psi_{C'}"'] & G(C'). \end{tikzcd}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} (\eta + \psi)_C G(f) = (\eta_C + \psi_C) G(f) = \eta_C G(f) + \psi_C G(f) =& \eta_{C'} F(f) + \psi_{C'} G(f) \\ =& (\eta_{C'} + \psi_{C'}) G(f) \\ =& (\eta + \psi)_{C'} G(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\eta + \psi \in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$. Veamos la estructura de grupo abeliano que tiene $Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$.

(a) Se tiene que $(\eta+\psi)+\varepsilon=\eta+(\psi+\varepsilon)$ para todo $\eta,\psi,\varepsilon\in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$. En efecto, esto se sigue del hecho que $(\eta_C+\psi_C)+\varepsilon_C=\eta_C+(\psi_C+\varepsilon_C)$ se vale en **Ab** para todo $C\in\mathscr{C}$.

(b) La transformación natural cero $0:F\to G$ se define como aquella tal que $0_C:F(C)\to G(C)$ es el morfismo de grupos abelianos 0 para cada $C\in\mathscr{C}$.

(c) Dado $\eta\in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$, definimos $-\eta\in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$, como aquella tranasformación natural tal que $(-\eta)_C:=-\eta_C$ para cada $C\in\mathscr{C}$. Es fácil ver, que $(-\eta)$ es el inverso aditivo de η.

(d) Por la definición de $\eta+\psi$, se ve que $\eta+\psi=\psi+\eta$ para todo $\eta,\psi\in Nat_{Mod\mathscr{C}}[F,G]$

□

Proposición 3.2.4. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ tiene productos .*

Demostración. Sea una famila $\{F_i\}_{i\in I}$ de objetos en $Mod(\mathscr{C})$, queremos ver que tal familia tiene producto en $Mod(\mathscr{C})$. Para esto, primero veamos que la siguiente asignación es funtorial.

Se define una asignación

$$\prod_{i\in i}F_i:\mathscr{C}\longrightarrow\mathbf{Ab},$$

como sigue:

(i) Para cada $C\in\mathscr{C}$ se define $(\prod_{i\in I}F_i)(C)=\prod_{i\in I}F_i(C)$.

(ii) Para $f:C_1\to C_2$ en $\mathscr{C}$ queremos definir $(\prod_{i\in I}F_i)(f)=(\prod_{i\in I}F_i)(C_1)\to(\prod_{i\in I}F_i)(C_2)$.

Para esto consideramos la familia de morfismos

$$\{F_i(f):F_i(C_1)\longrightarrow F_i(C_2)\}_{i\in I}.$$

Como la familia

$$\{\lambda^i_{C_2}:\prod_{i\in I}F_i(C_2)\longrightarrow F_i(C_2)\}_{i\in I},$$

es un producto para la familia de objetos $\{F_i(C_2)\}_{i\in I}$ en **Ab**, al tener la familia de morfismos

$$\{F_i(f)\lambda^i_{C_1}:\prod_{i\in I}F_i(C_1)\longrightarrow F_i(C_2)\}_{i\in I},$$

se tiene por la propiedad universal de producto de la familia $\{F_i(C_2)\}_{i\in I}$ en **Ab** que existe un único morfismo

$$\prod_{i\in I} F_i(f) : \prod_{i\in I} F_i(C_1) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(C_2),$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} F_i(C_1) \arrow[r, dashed, "\prod_i F_i(f)"] \arrow[d, "\lambda^i_{C_1}"'] & \prod_{i\in I} F_i(C_2) \arrow[d, "\lambda^i_{C_2}"] \\
F_i(C_1) \arrow[r, "F_i(f)"'] & F_i(C_2),
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda^i_{C_1} : \prod_i F_i(C_1) \to C_1$ y $\lambda^i_{C_2} : \prod_i F_i(C_2) \to C_2$ son las proyecciones definidas en 2.0.2 en la categoría **Ab**.

Veamos que $\prod_{i\in I} F_i$ es un funtor.

(a) Verifiquemos primero que $\prod_{i\in I} F_i(1_C) = 1_{\prod_{i\in I} F_i(C)}$ para todo $C \in \mathscr{C}$.

Sea $1_C : C \to C$ con $C \in \mathscr{C}$. Por definición $\prod_{i\in I} F_i(1_C)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} F_i(C) \arrow[r, "\lambda^i_C"] \arrow[d, dashed, "\prod_{i\in I} F_i(1_C)"'] & F_i(C) \arrow[d, "F_i(1_C)"] \\
\prod_{i\in I} F_i(C) \arrow[r, "\lambda^i_C"'] & F_i(C)
\end{tikzcd}$$

donde λ^i_C es la proyección en la i-ésima coordenada. De esta manera, se tiene que

$$1_{F_i(C)}\lambda^i_C = \lambda^i_C \circ \left(\prod_{i\in I} F_i(1_C)\right).$$

Pero $1_{\prod_{i\in I} F_i(C)} : \prod_{i\in I} F_i(C) \to \prod_{i\in I} F_i(C)$ satisface que $1_{F_i(C)} \circ \lambda^i_C = \lambda^i_C \circ \left(1_{\prod_{i\in I} F_i(C)}\right)$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $\prod_{i\in I} F_i(C) = 1_{\prod_{i\in I} F_i(C)}$.

(b) Sean $f_1 : C_1 \to C_2$ y $f_2 : C_2 \to C_3$ morfismos en $\mathscr{C}$, veamos que

$$\left(\prod_{i\in I} F_i(f_2)\right) \circ \left(\prod_{i\in I} F_i(f_1)\right) = \prod_{i\in I} F_i(f_1 f_2).$$

Por un lado, por definición de $\prod_{i\in I} F_i(f_1$ y $\prod_{i\in I} F_i(f_2$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo para toda $i \in I$,

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} F_i(C_1) \arrow[r, "\lambda^i_{C_1}"] \arrow[d, dashed, "\prod_{i\in I} F_i(f_1)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(f_1)"] \\
\prod_{i\in I} F_i(C_2) \arrow[r, "\lambda^i_{C_2}"'] \arrow[d, dashed, "\prod_{i\in I} F_i(f_2)"'] & F_i(C_2) \arrow[d, "F_i(f_2)"] \\
\prod_{i\in I} F_i(C_3) \arrow[r, "\lambda^i_{C_3}"'] & F_i(C_3).
\end{tikzcd} \tag{*}$$

Como $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor, se tiene que

$$F(f_2 f_1) = F(f_2)F(f_1).$$

y los morfismos $\prod_{i\in I} F_i(f_1)$ y $\prod_{i\in I} F_i(f_2)$ son únicos respecto a la conmutatividad de los dos cuadrados del diagrama (*). Por otro lado, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo por definición del $\prod_{i\in I} F_i(f_2 f_1)$,

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} F_i(C_1) \arrow[r, "\lambda^i_{C}"] \arrow[d, dashed, "\prod_{i\in I} F_i(f_2 f_1)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(f_2 f_1)"] \\
\prod_{i\in I} F_i(C_3) \arrow[r, "\lambda^i_{C}"'] & F_i(C_3).
\end{tikzcd} \tag{**}$$

Así, como $\prod_{i\in I} F_i(f_2 f_1)$ es morfismo único respecto a la conmutatividad del diagrama (**), entonces se obtiene que

$$\prod_{i\in I} F_i(f_2 f_1) = \left(\prod_{i\in I} F_i(f_2)\right) \circ \left(\prod_{i\in I} F_i(f_1)\right).$$

Por lo tanto, de (a) y (b) se sigue que la asignación dada para

$$\prod_{i\in I} F_i : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}.$$

define un funtor covariante.

Veamos que $\prod_{i\in I} F_i : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ es aditivo.

Sean $f, g : C_1 \to C_2$ en $\mathscr{C}$; tenemos que $\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(f+g)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(C_1) \arrow[r, "\lambda^i_{C_1}"] \arrow[d, dashed, "\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(f+g)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(f+g)"] \\
\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(C_2) \arrow[r, "\lambda^i_{C_2}"'] & F_i(C_2)
\end{tikzcd}$$

De la misma manera $\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(f)$ y $\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(g)$ son los únicos morfismos que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(C_1) \arrow[r, "\lambda^i_{C_1}"] \arrow[d, dashed, "\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(f)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(f)"] \\
\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(C_2) \arrow[r, "\lambda^i_{C_2}"'] & F_i(C_2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(C_1) \arrow[r, "\lambda^i_{C_1}"] \arrow[d, dashed, "\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(g)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(g)"] \\
\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(C_2) \arrow[r, "\lambda^i_{C_2}"'] & F_i(C_2)
\end{tikzcd}$$

para toda $i \in I$. Como $F_i(f+g) = F_i(f) + F_i(g)$ pues F_i es aditivo para toda $i \in I$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lambda^i_{C_2}\left(\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(f)+\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(g)\right) &= \lambda^i_{C_2}\circ\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(f)+\lambda^i_{C_2}\circ\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(g)\\
&= F_i(f)\lambda^i_{C_1}+F_i(g)\lambda^i_{C_1}\\
&= (F_i(f)+F_i(g))\lambda^i_{C_1}\\
&= F_i(f+g)\lambda^i_{C_1}
\end{aligned}
$$

para toda $i\in I$. Por lo tanto,

$$
\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(f+g)=\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(f)+\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(g),
$$

probándose que $\prod_{i\in I}F_i$ es un funtor aditivo.

Ahora , veamos que la familia de morfismos

$$
\lambda^i := \{\lambda^i_C : \prod_{i\in I}F_i(C)\longrightarrow F_i(C)\}_{C\in\mathscr{C}},
$$

es una tranformación natural

$$
\lambda^i : \prod_{i\in I}F_i\longrightarrow F_i.
$$

donde λ^i_C son las proyecciones en la i-ésima coordenada, en la categoría **Ab**.

Sea $f:C_1\to C_2$ un morfismo en $\mathscr{C}$, para $i\in I$ fija, se quiere hacer ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\left(\prod_{i\in I}F_i\right)(C_1) \arrow[r, "\lambda^i_{C_1}"] \arrow[d, "\prod_{i\in I}F_i(f)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(f)"] \\
\prod_{i\in I}F_i(C_2) \arrow[r, "\lambda^i_{C_2}"'] & F_i(C_2).
\end{tikzcd}
\qquad (*)
$$

Pero tal diagrama es conmutativo por la definición de

$$\prod_{i\in I} F_i(f) : \prod_{i\in I} F_i(C_1) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(C_2).$$

Por lo tanto, la familia de morfismos

$$\lambda^i := \{\lambda^i_C : \prod_{i\in I} F_i(C) \longrightarrow F_i(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

es una tranformación natural

$$\lambda^i : \prod_{i\in I} F_i \longrightarrow F_i.$$

para cada $i \in I$.

Propiedad universal

Sea $\{\gamma^i : G \to F_i\}_{i\in I}$ una familia de transformaciones naturales donde:

$$\gamma^i := \{\gamma^i_C : G(C) \longrightarrow F_i(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Fijando $C \in \mathscr{C}$, tenemos la familia

$$\{\gamma^i_C : G(C) \to F_i(C)\}_{i\in I}$$

en **Ab**. Como

$$\{\lambda^i_C : \prod_{i\in I} F_i(C) \longrightarrow F_i(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

es el producto de la familia $\{F_i(C)\}_{i\in I}$, existe un único morfismo en **Ab**

$$\delta_C : G(C) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(C),$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G(C) \arrow[rr, dashed, "\delta_C"] \arrow[dr, "\gamma_C^i"'] & & \prod_{i\in i} F_i(C) \arrow[dl, "\lambda_C^i"] \\ & F_i(C) & \end{tikzcd}$$

para cada $i \in I$ y $C \in \mathscr{C}$. Así, variando $C \in \mathscr{C}$ se tiene la familia de morfismos

$$\delta := \{\delta_C : G(C) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Con δ_C tal que $\gamma_C^i = \lambda_C^i \delta_C$ para toda $i \in I$ y $C \in \mathscr{C}$. Se afirma que la familia de morfismos δ es una transformación natural entre los funtores $G \in Mod(\mathscr{C})$ y $\prod_{i\in I} F_i$ en $Mod(\mathscr{C})$.

Para ver esto, sea $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Se quiere demostrar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G(C_1) \arrow[r, "\delta_{C_1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & \prod_{i\in I} F_i(C_1) \arrow[d, "\prod_i F_i(f)"] \\ G(C_2) \arrow[r, "\delta_{C_2}"'] & \prod_{i\in I} F_i(C_2). \end{tikzcd} \tag{1}$$

Para un morfismo $f : C_1 \to C_2$ en $\mathscr{C}$ se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo para toda $i \in I$ por construcción de $\prod_{i\in I} F_i(f)$,

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} F_i(C_1) \arrow[r, "\lambda_{C_1}^i"] \arrow[d, dashed, "\prod_{i\in I} F_i(f)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(f)"] \\ \prod_{i\in I} F_i(C_2) \arrow[r, "\lambda_{C_2}^i"'] & F_i(C_2) \end{tikzcd}$$

También tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} G(C_1) \arrow[rr, "\delta_{C_1}"] \arrow[dr, "\gamma^i_{C_1}"'] & & \prod_{i\in I} F_i(C_1) \arrow[dl, "\lambda^i_{C_1}"] \\ & F_i(C_1) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(C_2) \arrow[rr, "\delta_{C_2}"] \arrow[dr, "\gamma^i_{C_2}"'] & & \prod_{i\in I} F_i(C_2) \arrow[dl, "\lambda^i_{C_2}"] \\ & F_i(C_2). & \end{tikzcd}$$

Es decir, se tienen las siguientes igualdades

$$\lambda^i_{C_1}\delta_{C_1} = \gamma^i_{C_1} \quad \text{y} \quad \lambda^i_{C_2}\delta_{C_2} = \gamma^i_{C_2} \quad \text{para toda } i \in I.$$

Por otro lado, como $\gamma^i : G \to F_i$ es una transformación natural, tenemos el siguiente diagrama conmutativo para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} G(C_1) \arrow[r, "\gamma^i_{C_1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F_i(C_1) \arrow[d, "F_i(f)"] \\ G(C_2) \arrow[r, "\gamma^i_{C_2}"'] & F_i(C_2). \end{tikzcd}$$

obteniéndose la siguiente igualdad para toda $i \in I$

$$\lambda^i_{C_2}\left(\prod_{i\in I} F_i(f)\right)\delta_{C_1} = F_i(f)\lambda^i_{C_1}\delta_{C_1} = F_i(f)\gamma^i_{C_1} = \gamma^i_{C_2}G(f) = \lambda^i_{C_2}\delta_{C_2}G(f).$$

Por lo tanto, $\lambda^i_{C_2}((\prod_{i\in I} F_i(f))\delta_{C_1}) = \lambda^i_{C_2}(\delta_{C_2}G(f))$ para toda $i \in I$ y de la propiedad universal del producto se sigue que $(\prod_{i\in I} F_i(f))\,\delta_{C_1} = \delta_{C_2}G(f)$. Probándose así que el cuadrado (1) es conmutativo y por tanto la familia de morfismos

$$\delta := \{\delta_C : G(C) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(C)\}_{C\in\mathscr{C}},$$

es una transformación natural entre los funtores $G \in Mod(\mathscr{C})$ y $\prod_{i\in I} F_i$ en $Mod(\mathscr{C})$. Además el siguiente diagrama conmuta en $Mod(\mathscr{C})$ por construcción de δ

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, dashed, "\delta"] \arrow[dr, "\gamma^i"'] & & \prod_{i\in i} F_i \arrow[dl, "\lambda^i"] \\ & F_i. & \end{tikzcd}$$

Unicidad.-

Sea

$$\delta' := \{\delta'_C : G(C) \to \prod_{i\in I} F_i(C)\}_{C\in\mathscr{C}}$$

una transformación natural (morfismo en $Mod(\mathscr{C})$) tal que $\lambda^i\delta' = \gamma^i$ para toda $i \in I$. Entonces para $C \in \mathscr{C}$ fija se tiene que

$$\lambda^i_C \delta'_C = \gamma^i_C = \lambda^i_C \delta_C$$

para cada $i \in I$. Luego, como la familia de morfismos

$$\{\lambda^i_C : \prod_{i\in I} F_i(C) \longrightarrow F_i(C)\}_{i\in I}.$$

es el producto para la familia $\{F_i(C)\}_{i\in I}$, se sigue que $\delta_C = \delta'_C$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, $\delta = \delta'$. Probándose que la familia de morfismos en $Mod(\mathscr{C})$

$$\{\lambda^i : \prod_{i\in I} F_i \longrightarrow F_i\}_{i\in I}$$

es un producto para la familia de objetos $\{F_i\}_{i\in I}$ en $Mod(\mathscr{C})$.

□

Proposición 3.2.5. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ tiene coproductos .*

Demostración. La demostración se hace de forma parecida a la proposición anterior usando que **Ab** tiene coproductos. □

Proposición 3.2.6. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ tiene kerneles*

Demostración. Sea $\alpha : F \to G$ un morifsmo en $Mod(\mathscr{C})$ con

$$\alpha := \{\alpha_C : F(C) \to G(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Se define la siguiente asignación $Ker(\alpha) : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ como sigue: para cada $C \in \mathscr{C}$ se tiene que

$$(Ker\alpha)(C) := Ker(\alpha_C)$$

y para un morfismo $f : C_1 \to C_2$ en $\mathscr{C}$ se define

$$(Ker(\alpha))(f) := \bar{f}$$

donde

$$\bar{f} = (Ker(\alpha))(f) : Ker(\alpha_{C_1}) \longrightarrow Ker(\alpha_{C_2}).$$

es el morfismo único respecto a la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_{C_1}) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, dashed, "\bar{f}"'] & F(C_1) \arrow[r, "\alpha_{C_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
Ker(\alpha_{C_2}) \arrow[r, "i_{C_2}"'] & F(C_2) \arrow[r, "\alpha_{C_2}"'] & G(C_2),
\end{tikzcd}$$

donde $i_{C_1} : Ker(\alpha_{C_1}) \hookrightarrow F(C_1)$ y $i_{C_2} : Ker(\alpha_{C_2}) \hookrightarrow F(C_2)$ son las inclusiones de los kerneles correspondientes en $\mathbf{Ab}$.

En efecto, como $\alpha_{C_2}F(f)i_{C_1} = G(f)\alpha_{C_1}i_{C_1} = 0$ se sigue por la propiedad universal de i_{C_2}, la existencia un único morfismo $\bar{f}$ tal que

$$F(f)i_{C_1} = i_{C_2}\bar{f}.$$

Veamos que la asignación $Ker(\alpha) : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor.

(i) Sea $1_C : C \to C$ el morfismo identidad en $\mathscr{C}$, afirmamos que $(Ker\alpha)(1_C) = 1_{Ker(\alpha_C)}$.

En efecto, como el morfismo $(Ker\alpha)(1_C) : Ker(\alpha_C) \to Ker(\alpha_C)$ es único respecto la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_C) \arrow[r, "i_C"] \arrow[d, "(Ker\alpha)(1_C)"'] & F(C) \arrow[d, "F(1_C)=1_{F(C)}"] \\
Ker(\alpha_C) \arrow[r, "i_C"'] & F(C).
\end{tikzcd}$$

$$Ker_C = Ker_C((Ker\alpha)(1_C). \tag{1}$$

Pero $1_{Ker(\alpha_C)} : Ker(\alpha_C) \to Ker(\alpha_C)$ es tal que $i_C 1_{Ker(\alpha_C)} = 1_{F(C)} i_C$. Así, por la propiedad universal de i_C se tiene que $(Ker\alpha)(1_C) = 1_{Ker(\alpha_C)}$.

(ii) Sean $f : C_1 \to C_2$ y $g : C_2 \to C_3$ morfismos en $\mathscr{C}$, afirmamos que $(Ker\alpha)(gf) = (Ker\alpha)(g)(Ker\alpha)(f)$.

En efecto, por definición, existen $\bar{f} = Ker(\alpha)(f)$ y $\bar{g} = Ker(\alpha)(g)$ tal que los dos cuadrados en el siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_{C_1}) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(f)"] \\
Ker(\alpha_{C_2}) \arrow[r, "i_{C_2}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & F(C_2) \arrow[d, "F(g)"] \\
Ker(\alpha_{C_3}) \arrow[r, "i_{C_3}"'] & F(C_3).
\end{tikzcd}$$

Como $F(gf) = F(g)F(f)$, se tiene que

$$F(gf)i_{C_1} = i_{C_3}(\bar{g}\bar{f}).$$

Por definición de $(Ker\alpha)(gf)$, se tiene $Ker(\alpha)(gf)$ es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_{C_1}) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, "(Ker\alpha)(gf)"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(gf)"] \\
Ker(\alpha_{C_3}) \arrow[r, "i_{C_3}"'] & F(C_3),
\end{tikzcd}$$

Luego, concluimos que $Ker(\alpha)(gf) = \bar{g}\bar{f} = Ker(\alpha)(g) \circ Ker(\alpha)(f)$. Probándose que $Ker(\alpha)$ es un funtor.

Veamos que $Ker\alpha : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ es aditiva.

Sean $f, g : C_1 \to C_2$ en $\mathscr{C}$, tenemos que $(Ker\alpha)(f+g)$, $(Ker\alpha)(f)$ y $(Ker\alpha)(g)$ son los únicos morfismos respecto a la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_{C_1}) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, "(Ker\alpha)(f+g)"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(f+g)"] \\
Ker(\alpha_{C_2}) \arrow[r, "i_{C_2}"'] & F(C_2).
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_{C_1}) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, "(Ker\alpha)(f)"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(f)"] \\
Ker(\alpha_{C_2}) \arrow[r, "i_{C_2}"'] & F(C_2).
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_{C_1}) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, "(Ker\alpha)(g)"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(g)"] \\
Ker(\alpha_{C_2}) \arrow[r, "i_{C_2}"'] & F(C_2).
\end{tikzcd}$$

Como F es aditivo, tenemos que $F(f+g) = F(f) + F(g)$. Luego,

$$\begin{aligned}
i_{C_2}((Ker\alpha)(f) + (Ker\alpha)(g)) &= i_{C_2} \circ (Ker\alpha)(f) + i_{C_2} \circ (Ker\alpha)(g) \\
&= F(f)i_{C_1} + F(g)i_{C_1} \\
&= (F(f) + F(g))i_{C_1} \\
&= F(f+g)i_{C_1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(Ker\alpha)(f+g) = (Ker\alpha)(f) + (Ker\alpha)(g)$, probándose que $Ker\alpha$ es funtor aditivo.

Sea $i : Ker(\alpha) \to F$, dada por la familia de morfismos

$$i = \{i_C : Ker(\alpha)(C) \longrightarrow F(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Para $f : C_1 \to C_2$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha_{C_1}) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, "(Ker\alpha)(gf)"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(f)"] \\
Ker(\alpha_{C_3}) \arrow[r, "i_{C_2}"'] & F(C_3),
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, i es una transformación natural.

Veamos que $i : Ker\alpha \to F$ es el kernel de $\alpha : F \to G$. Sea $\gamma : H \to F$ transformación natural tal que $\alpha\gamma = 0$. Entonces $\alpha_C\gamma_C = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$. Como $i_C = Ker(\alpha_C)$, existe un único morfismo $\beta_C : H(C) \to (Ker\alpha)(C)$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $C \in \mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
H(C) \arrow[d, "\beta_C"'] \arrow[dr, "\gamma_C"] & \\
(Ker\alpha)(C) \arrow[r, "i_C"'] & F(C).
\end{tikzcd}$$

Sea $\beta = \{\beta_C : H(C) \to (Ker\alpha)(C)\}_{C\in\mathscr{C}}$. Afirmamos que β es una transformación natural entre los funtores H y $Ker\alpha$. En efecto, sea $f : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Luego, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
(Ker\alpha)(C_1) \arrow[r, "i_{C_1}"] \arrow[d, "(Ker\alpha)(f)"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(f)"] \\
(Ker\alpha)(C_2) \arrow[r, "i_{C_2}"'] & F(C_2),
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
H(C_1) \arrow[d, "\beta_{C_1}"'] \arrow[dr, "\gamma_{C_1}"] & \\
(Ker\alpha)(C_1) \arrow[r, "i_{C_1}"'] & F(C_1),
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
H(C_2) \arrow[d, "\beta_{C_2}"'] \arrow[dr, "\gamma_{C_2}"] & \\
(Ker\alpha)(C_2) \arrow[r, "i_{C_2}"'] & F(C_2),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H(C_1) \arrow[r, "\gamma_{C_1}"] \arrow[d, "(H(f)"'] & F(C_1) \arrow[d, "F(f)"] \\ H(C_2) \arrow[r, "\gamma_{C_2}"'] & F(C_2). \end{tikzcd}$$

Luego,

$$i_{C_2}\beta_{C_2}H(f) = \gamma_{C_2}H(f) = F(f)\gamma_{C_1} = F(f)i_{C_1}\beta_{C_1} = i_{C_2}((Ker\alpha)(f))\beta_{C_1}$$

pero i_{C_2} es un monomorfismo, por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H(C_1) \arrow[r, "\beta_{C_1}"] \arrow[d, "H(f)"'] & (Ker\alpha)(C_1) \arrow[d, "(Ker\alpha)(f)"] \\ H(C_2) \arrow[r, "\beta_{C_2}"'] & (Ker\alpha)(C_2). \end{tikzcd}$$

Probándose que $\beta : H \to Ker\alpha$ es transformación natural.

Por construcción se tiene que $\gamma = i\beta$. Supongamos que existe otro $\beta' : H \to Ker\alpha$ tal que $\gamma = i\beta'$. Entonces tenemos que $\gamma_C = i_C\beta'_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$. Luego, $i_C\beta'_C = i_C\beta_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$; y como i_C es un monomorfismo para todo $C \in \mathscr{C}$, tenemos que $\beta'_C = \beta_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$. Probándose que $\beta' = \beta$. Por lo tanto, $i : Ker\alpha \to F$ es el kernel de α. □

Proposición 3.2.7. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ tiene cokerneles .*

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición anterior. □

Proposición 3.2.8. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ es normal.*

Demostración. Sea $\alpha : F_1 \to F_2$ una transformacíon natural entre los funtores $F_1, F_2 \in Mod(\mathscr{C})$ tal que α es un monomorfismo, entonces $Ker(\alpha) = 0$, esto es, $Ker(\alpha_C) = 0$ para cada $C \in \mathscr{C}$

Como **Ab** es una categoría abeliana, se tiene que α_C es monomorfismo si y sólo si $Ker(\alpha_C) = 0$. Por lo que α_C es monomorfismo para cada $C \in \mathscr{C}$. Luego, como **Ab** es normal y α_C es un monomorfismo para cada $C \in \mathscr{C}$, entonces

$$\alpha_C = Ker(Coker(\alpha_C))$$

para cada $C \in \mathscr{C}$, obteniendóse la siguiente sucesión exacta en **Ab** para todo $C \in \mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow F_1(C) \xrightarrow{\alpha_C} F_2(C) \longrightarrow Coker(\alpha_C) \longrightarrow 0.$$

Luego, por la construcción del cokernel de α, tenemos que el siguiente diagrama conmuta para $f : C_1 \to C_2$ en $\mathscr{C}$,

$$\begin{tikzcd}
F_1(C_1) \arrow[r, "\alpha_{C_1}"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F(C_1) \arrow[r, "Coker\alpha_{C_1}"] \arrow[d, "F_2(f)"'] & Coker(\alpha_{C_1}) \arrow[d, "Coker(f)"] \\
F_2(C_2) \arrow[r, "\alpha_{C_2}"'] & F(C_2) \arrow[r, "Coker\alpha_{C_2}"'] & Coker(\alpha_{C_2}).
\end{tikzcd}$$

Por la construcción del funtor Ker y $Coker$ en $Mod(\mathscr{C})$ se tiene entonces que $\alpha = Ker(Coker(\alpha))$. Probándose que $Mod(\mathscr{C})$ es una categoría normal.

□

Proposición 3.2.9. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ es conormal.*

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la proposición anterior. □

Corolario 3.2.10. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ es abeliana.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9 y el teorema 1.17.2. □

3.2.1. Funtor covariante de representación

Definición 3.2.11. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana pequeña . El* ***funtor covariante de representación*** *$P : \mathscr{C} \to Mod(\mathscr{C}^{op})$ se define como sigue,*

(i) ***En objetos.-*** *Dado $C \in \mathscr{C}$ se define $P(C)$ como el funtor aditivo $P(C) := Hom_{\mathscr{C}}(-, C) : \mathscr{C} \to$* ***Ab****. Cuando $Hom_{\mathscr{C}}(-, C)$ es considerado un objeto en la categoría $Mod(\mathscr{C}^{op})$ lo denotaremos como P_C.*

(ii) ***En morfismos.-*** *Dado $f \in Hom_{\mathscr{C}}(C_1, C_2)$ morfismo en $\mathscr{C}$, entonces $P(f) : P_{C_1} \to P_{C_2}$ es la transformación natural dada por la familia $\{P(f)_C\}_{C\in\mathscr{C}}$ donde cada componente de la familia es una función*

$$P(f)_C : Hom_{\mathscr{C}}(C, C_1) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(C, C_2).$$

definida como $P(f)_C(g') = fg'$ para $g' \in Hom_{\mathscr{C}}(C, C_1)$.

Observación 3.2.12. *La familia de morfismos $\{P(f)_C\}_{C\in\mathscr{C}}$ del inciso (ii) de la definición anterior define en efecto una transformación natural entre el funtor P_{C_1} al funtor P_{C_2} .*

Demostración. Sean $f : C_1 \to C_2$, $g : A \to B$ y $g' : B \to C_1$ morfismo en $\mathscr{C}$. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} P_{C_1}(B) \arrow[r, "P(f)_B"] \arrow[d, "P_{C_1}(g)"'] & P_{C_2}(B) \arrow[d, "P_{C_2}(g)"] \\ P_{C_1}(A) \arrow[r, "P(f)_A"'] & P_{C_2}(A). \end{tikzcd}$$

En efecto, para $g' \in P_{C_1}(B)$ se tiene por un lado que

$$(P_{C_2}(g)P(f)_B)(g') = P_{C_2}(g)(fg') = (fg')g.$$

Y por otro lado, se tiene que

$$(P(f)_A P_{C_1}(g))(g') = P(f)_B(g'g) = f(g'g) = (fg')g.$$

Por tanto, la familia de morfismos $\{P(f)_C\}_{C\in\mathscr{C}}$ define una transformación natural entre el funtor P_{C_1} al funtor P_{C_2}.

□

Proposición 3.2.13. *La asignación en la definición 3.2.11 define en efecto un funtor covariante de una categoría pequeña $\mathscr{C}$ a la categoría $Mod(\mathscr{C}^{op})$.*

Demostración.

(i) Veamos que $P(1_C) = 1_{P(c)}$.

En efecto, sea $C' \in \mathscr{C}$, entoces $P(1_C)_{C'} : P_C(C') \to P_C(C')$ está definida como $(P(1_C)_{C'})(h) = 1_C \circ h = h$ para $h \in Hom_{\mathscr{C}}(C', C)$. Por lo tanto, $P((1_C))_{C'} = 1_{P_C(C')}$.

Como $C' \in \mathscr{C}$ fue arbitraria, se tiene que $P(1_C) = 1_{P_C} = 1_{P(C)}$.

(ii) Veamos que $P(gf) = P(g)P(f)$ para $f : C_1 \to C_2$ y $g : C_2 \to C_3$ morfismos en $\mathscr{C}$.

Veamos que para $C \in \mathscr{C}$ se tiene que

$$P(gf)_C = P(g)_C \circ P(f)_C.$$

En efecto, para $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(C,C_1)$ se tiene que $P(f)_C(\alpha) = f\alpha$. Luego,

$$(P(g)_C \circ P(f)_C)(\alpha) = (P(g)_C)(P(f)_C(\alpha)) = (P(g)_C)(f\alpha) = g(f\alpha).$$

Por otro lado,

$$P(gf)_C(\alpha) = (gf)(\alpha) = g(f\alpha).$$

Por lo tanto, $P(gf)_C = P(g)_C P(f)_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$. Entonces $P(gf) = P(g)P(f)$.

De (i) y (ii) se sigue que la asignación en la definición 3.2.11 define en efecto un funtor covariante $P : \mathscr{C} \to Mod(\mathscr{C}^{op})$. □

Lema 3.2.14. *El funtor covariante de representación ,$P : \mathscr{C} \to Mod(\mathscr{C}^{op})$, es exacto a izquierda, es decir, manda sucesiones exactas izquierdas en sucesiones exactas izquierdas.*

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$$

una sucesión exacta derecha en $\mathscr{C}$, se quiere ver que

$$0 \longrightarrow P_{A'} \xrightarrow{P(f)} P_A \xrightarrow{P(g)} P_{A''}$$

es una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

(i) Veamos primero que $P(f) : P_{A'} \to P_A$ es un monomorfismo.

Sea $\theta : F \to P_{A'}$ y $\eta : F \to P_{A'}$ transformaciones naturales tales que $P(f)\theta = P(f)\eta$, esto significa que para todo $C \in \mathscr{C}$ se tiene que $P(f)_C\theta_C = P(f)_C\eta_C$ donde

$$P(f)_C\theta_C : F(C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(C,A).$$

Por tanto, para un $x \in F(C)$ arbitrario, se tiene que $P(f)_C(\theta_C(x)) = P(f)_C(\eta_C(x))$ y por definición del funtor covariante de representación tenemos que $f \circ \theta_C(x) = f \circ \eta_C(x)$. Luego, al ser f monomorfismo se obtiene que $\theta_C(x) = \eta_C(x)$ para todo $x \in F(C)$, entonces $\theta_C = \eta_C$. Probándose que $P(f)$ es un monomorfismo.

(ii) Veamos que $P(f) = Ker(P(g))$.

Como $gf = 0$, entonces $P(gf) = P(g)P(f) = 0$. Sea $\tau : F \to P_A$ en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ tal que $P(g)\tau = 0$, por lo que $P(f)_C\tau_C = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$.

Así, el morfismo $P(f)_C\tau_C : F(C) \to Hom_{\mathscr{C}}(C, A'')$, por lo tanto para cada $x \in F(C)$ se tiene que

$$P(g)_C(\tau_C(x)) = g \circ \tau_C(x) = 0,$$

donde $\tau_C(x) \in Hom_{\mathscr{C}}(C, A)$. Por lo tanto, $g\tau_C(x) = 0 : C \to A''$ y por la propiedad universal del kernel de g, se tiene que existe un único morfismo $\theta_C(x) : C \to A'$ tal que $f\theta_C(x) = \tau_C(x)$. Es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f"] & A \\ C. \arrow[u, "\theta_C(x)"] \arrow[ur, "\tau_C(x)"'] & \end{tikzcd}$$

Así, podemos definir $\phi : F \to P_{A'}$ para cada $x \in F(C)$ se define $\phi_C(x) = \theta_C(x)$. Veamos que esta asignación es una transformación natural entre el funtor F y el funtor $P_{A'}$. En efecto, sea $f_1 : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathscr{C}$ queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(C_2) \arrow[r, "\phi_{C_2}"] \arrow[d, "F(f_1)"'] & Hom_{\mathscr{C}}(C_2, A') \arrow[d, "Hom_{\mathscr{C}}(f_1, A')"] \\ F(C_1) \arrow[r, "\phi_{C_1}"'] & Hom_{\mathscr{C}}(C_1, A'). \end{tikzcd} \quad (*)$$

En efecto, sea $x \in F(C_2)$. Por un lado se tiene que

$$\left(Hom_{\mathscr{C}}(f,A')\phi_{C_2}\right)(x) = \left(Hom_{\mathscr{C}}(f_1,A')\right)(\theta_{C_2}(x)) = \theta_{C_2}(x)f_1 \in Hom_{\mathscr{C}}(C_1,A'),$$

con $\theta_{C_2}(x) \in Hom_{\mathscr{C}}(C_2,A')$. Por otro lado, para $x \in F(C_2)$ consideramos $F(f_1)(x) = x' \in F(C_1)$, entonces se tiene que $\phi_{C_1}F(f_1)(x) = \phi_{C_1}(x') = \theta_{C_1}$ con $\theta_{C_1}(x')$ el único morfismo tal que $f\theta_{C_1}(x') = \tau_{C_1}(x')$. Como $f\theta_{C_2}(x) = \tau_{C_2}(x) \in Hom_{\mathscr{C}}(C_2,A)$ entonces $(f\theta_{C_2}(x))f_1 = (\tau_{C_2}(x))f_1$. Veamos que $(\tau_{C_2}(x))f_1 = \tau_{C_1}(x')$. En efecto,

$$\begin{aligned} \tau_{C_1}(x') = \tau_{C_1}(F(f_1)(x)) &= \tau_{C_1} \circ F(f_1)(x) \\ &= \left(Hom_{\mathscr{C}}(f_1,A) \circ \tau_{C_2}\right)(x) \\ &= \left(Hom_{\mathscr{C}}(f_1,A)\right)(\tau_{C_2}(x)) \\ &= \tau_{C_2}(x)f_1, \end{aligned}$$

donde la antepenultima igualdad es debido a la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(C_2) \arrow[r, "\tau_{C_2}"] \arrow[d, "F(f)"'] & Hom_{\mathscr{C}}(C_2,A) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{C}}(A,f_1)"] \\ F(C_1) \arrow[r, "\tau_{C_1}"'] & Hom_{\mathscr{C}}(C_1,A) \end{tikzcd}$$

al ser $\tau : F \to P_A$ una transformación natural . Luego, se tiene que

$$f(\theta_{C_2}(x)f_1) = (f\theta_{C_2}(x))f_1 = (\tau_{C_2}(x))f_1 = \tau_{C_1}(F(f_1)(x)) = \tau_{C_1}(x').$$

Luego, por la unicidad de la factorización de $\tau_{C_1}(x')$, se tiene que $\theta_{C_2}(x)f_1 = \theta_{C_1}(x')$, demostrando que $\phi : F \to P_{A'}$ es una transformación natural.

Así, se tiene que $P(f)\phi : F \to P_A$ es tal que para cada $C \in \mathscr{C}$ el morfismo

$$P(f)_C\phi_C : F(C) \longrightarrow Hom_C(C,A)$$

tiene regla de corresponencia para cada $x \in F(C)$ como sigue

$$P(f)_C\phi_C(x) = P(f)_C(\theta_C(x)) = f\theta_C(x) = \tau_C(x).$$

Por lo tanto $P(f)_C\phi_C = \tau_C$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Probándose que $P(f)\phi = \tau$.

Unicidad. Como $P(f) : P_{A'} \to P_A$ es un monomorfismo, si existiera $\phi' : F \to P_{A'}$ transformación natural tal que $P(f)\phi' = \tau = P(f)\phi$ entonces $\phi' = \phi$. Por lo tanto, $P(f) = Ker(P(g))$.

De (i) y (ii) se sigue que

$$0 \longrightarrow P_{A'} \xrightarrow{P(f)} P_A \xrightarrow{P(g)} P_{A''}$$

es una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

$\square$

3.3. Lema de Yoneda contravariante

Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $G, F : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ funtores contravariantes. Denotamos por $Nat[F,G]$ al conjunto de transformaciones naturales entre F, G.

Lema 3.3.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria. Entonces para cada funtor contravariante $G : \mathscr{C} \to$ **Con** y cada objeto $X \in \mathscr{C}$, se dispone de una función biyectiva*

$$\Omega := \Omega_{X,G} : Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,X), G] \longrightarrow G(X),$$

*llamada **isomorfismo de Yoneda contravariante**, cuya regla de correspondencia está dada por $\Omega(\alpha) = (\Omega_{X,G})(\alpha) := (\alpha_X(1_X))$ para $\alpha \in Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,X), G]$. La inversa de la función anterior es la función*

$$\Omega^{-1} = \Omega^{-1}_{X,G} : G(X) \longrightarrow Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,X), G],$$

*donde a cada $x \in G(X)$ se asigna la transformación natural $\Omega^{-1}_{X,G}(x) : Hom_{\mathscr{C}}(-,X) \to G$ cuya Y-ésima componente $(\Omega_{X,G}(x))_Y : Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \to G(Y)$ es tal que para un morfismo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,X)$ arbitrario se tiene que $(\Omega^{-1}_{X,G}(x)_Y)(g) = G(g)(x)$ donde $G(g) : G(X) \to G(Y)$ es un morfismo en **Con**.*

Demostración. Para cada $x \in G(X)$ consideramos $\Omega'(x) : P_X \to G$ dada por

$$\Omega'(x) := \{(\Omega'(x))_Y : Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \longrightarrow G(Y)\}_{Y \in \mathscr{C}}$$

donde cada $(\Omega'(x))_Y : Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \longrightarrow G(Y)$ tiene por regla de correspondencia,

$$(\Omega'(x))_Y(g) := G(g)(x) \quad \text{para todo} \quad g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,X).$$

Veamos que $\Omega' : P_X \to G$ es una transformación natural. Sea $h : Y \to Y'$ un morfismo en $\mathscr{C}$.

$$\begin{tikzcd}
P_X(Y') \arrow[r, "(\Omega'(x))_{Y'}"] \arrow[d, "P_X(h)"'] & G(Y') \arrow[d, "G(H)"] \\
P_X(Y) \arrow[r, "(\Omega'(x))_Y"'] & G(Y).
\end{tikzcd}$$

En efecto, el diagrama anterior es conmutativo pues por un lado tenemos que para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y',X)$ se tiene que

$$G(h)(\Omega'(x))_{Y'}(g) = G(h)G(g)(x) = G(gh)(x).$$

Por otro lado, para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,X)$ se tiene que

$$(\Omega'(x))_Y P_X(h)g = (\Omega'(x))_Y(gh) = (G(gh))(x).$$

Por lo tanto, $\Omega'(x) : P_X \to G$ es una transformación natural. Así, vemos que

$$\Omega' : G(X) \longrightarrow Nat[P_X, G]$$

$$x \longmapsto \Omega'(x),$$

es una función del conjunto $G(X)$ al conjunto $Nat[P_X,G]$.

(1) Veamos primero que la siguiente composición de funciones,

$$\Omega'\Omega : Nat[P_X,G] \longrightarrow Nat[P_X,G],$$

es la función identidad sobre el conjunto $Nat[P_X,G]$. Sea $\eta \in [P_X,G]$, verifiquemos que $\Omega'\Omega(\eta) = \eta$. Para esto necesitamos ver que $(\Omega'\Omega(\eta))_Y = \eta_Y$ para cada $Y \in \mathscr{C}$.

En efecto, por definición $\Omega(x) = \eta_X(1_X) := x' \in G(X)$. Luego

$$(\Omega'\Omega(\eta))_Y = (\Omega'(x'))_Y : Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \to G(Y)$$

es tal que para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,X)$ es tiene que

$$(\Omega'\Omega(\eta))_Y(g) = G(g)(x') = G(g)(\eta_X(1_X)).$$

Por otro lado, como η es una transformación natural para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y,X)$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo en **Con**:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(X,X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "P_X(g)"'] & G(X) \arrow[d, "G(g)"] \\
Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y).
\end{tikzcd}$$

Así, para $1_X \in Hom_{\mathscr{C}}(X,X)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
G(g)(\eta_X(1_X)) = (G(g)\eta_X)(1_X) = (\eta_Y P_X(g))(1_X) &= \eta_Y(P_X(g)(1_X)) \\
&= \eta_Y((Hom_{\mathscr{C}}(-,X)(g))(1_X)) \\
&= \eta_Y(1_X \circ g) = \eta_Y(g).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, η_Y y $(\Omega'\Omega(\eta))_Y : Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \to G(Y)$ tienen la misma regla de correspondencia, probándose que $\Omega'\Omega = 1_{Nat[P_X,G]}$.

(2) Ahora veamos que la composición de funciones,

$$\Omega\Omega' : G(X) \longrightarrow G(X)$$

es también la identidad sobre el conjunto $G(X)$.

Tomando $x \in G(X)$ entonces se tiene que

$$(\Omega\Omega')(x) = \Omega(\Omega'(x)) = (\Omega'(x))_X(1_X) = G(1_X)(x) = 1_{G(X)}(x) = x.$$

Por lo tanto, $\Omega\Omega'$ es también la identidad sobre $G(X)$.

De los incisos se sigue que $\Omega' = \Omega^{-1}$, probándose que la función

$$\Omega = \Omega_{X,G} : Nat[P_X, G] \longrightarrow G(X).$$

es un función biyectiva. □

Lema 3.3.2. *Sea $\phi : G \to F$ transformación natural y $G : Y \to X$ morfismo en $\mathscr{C}$. Consideremos la transformación natural $P(g) : P_Y = Hom_{\mathscr{C}}(-,Y) \longrightarrow P_X = Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ definida en 3.2.11. Entonces,*

(a) El siguiente diagrama es conmutativo en ***Con****:*

$$\begin{tikzcd}
Nat[P_X,G] \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Omega_{X,G}"'] & Nat[P_Y,G] \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\Omega_{Y,G}"'] & Nat[P_Y,F] \arrow[d, "\Omega_{Y,F}"] \\
G(X) \arrow[r, "G(g)"'] & G(Y) \arrow[r, "\phi_Y"'] & F(Y),
\end{tikzcd}$$

donde la regla de correspondencia de la función

$$\Psi : Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),G] \longrightarrow Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,Y),G],$$

es tal que para una transformación natural $\eta \in Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),G]$ arbritraria se tiene que $\Psi(\eta) = \eta P(g)$ con $P(g) : P_Y \to P_X$ y donde la regla de correspondencia de la función

$$\Theta = [Hom_C(-,Y),\phi] : Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,Y),G] \longrightarrow Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F],$$

es tal que para una transformación natural $\xi \in Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,Y),G]$ arbitraria se tiene que $\Theta(\xi) = \phi\xi$.

*(b) Si $\mathscr{C}$ es una categoría aditiva y el funtor contravariante $G : \mathscr{C} \to$ **Ab** es aditivo, entonces el isomorfismo de Yoneda contravariante*

$$\Omega = \Omega_{X,G} : Nat[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),G] \longrightarrow G(X)$$

es un isomorfismo de grupos abeliano

Demostración.

(a) Sea $g : Y \to X$ morfismo en $\mathscr{C}$, veamos que el cuadrado izquierdo del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Nat[P_X,G] \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Omega_{X,G}"'] & Nat[P_Y,G] \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\Omega_{Y,G}"'] & Nat[P_Y,F] \arrow[d, "\Omega_{Y,F}"] \\
G(X) \arrow[r, "G(g)"'] & G(Y) \arrow[r, "\phi_Y"'] & F(Y),
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto, sea $\eta \in Nat[P_X,G]$ arbitraria, por un lado se tiene que

$$(G(g)\Omega_{X,G})(\eta) = G(g)(\Omega_{X,G}(\eta)) = G(g)(\eta_X(1_X)).$$

Por otro lado, al ser $\eta : P_X \to G$ una transformación natural para $g : Y \to X$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(X,X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "P_X(g)"'] & G(X) \arrow[d, "G(g)"] \\
Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y).
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$G(g)(\eta_X(1_X)) = (G(g)\eta_X)(1_X) = (\eta_Y P_X(g))(1_X) = \eta_Y(P_X(g)1_X) = \eta_Y(1_X g) = \eta_Y(g).$$

Pero,

$$\begin{aligned}
(\Omega_{Y,G}\Psi)(\eta) = (\Omega_{Y,G})(\Psi(\eta)) = \Omega_{Y,G}(\eta P(g)) &= (\eta P(g))_Y(1_Y) \\
&= (\eta_Y(P(g))_Y)(1_Y) \\
&= \eta_Y(P(g)_Y(1_Y)) \\
&= \eta_Y(g1_Y) \\
&= \eta_Y(g).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el cuadro izquierdo del diagrama conmuta.

Ahora veamos que el cuadrado derecho del diagrama es conmutativo.

Sea $\rho \in Nat[P_Y, G]$ arbitraria entonces,

$$(\Omega_{Y,F}\Theta)(\rho) = \Omega_{Y,F}(\Theta\rho) = \Omega_{Y,F}(\phi\rho) = (\phi\rho)_Y(1_Y).$$

Por otro lado,

$$(\phi_Y\Omega_{Y,G})(\rho) = \phi_Y(\Omega_{Y,G}(\rho)) = \phi_Y(\rho_Y(1_Y)) = (\phi_Y\rho_Y)(1_Y) = (\phi\rho)_Y(1_Y).$$

Por lo tanto, se obtiene la conmutativad del cuadrado derecho. Probándose que el diagrama $(\triangle)$ es conmutativo.

(b) Basta ver que

$$\Omega = \Omega_{X,G} : Nat[P_X, G] \longrightarrow G(X).$$

es un morfismo de grupos abelianos con P_X y G funtores aditivos, pues Ω ya es biyectiva por lema anterior. Así, sean $\eta, \eta' \in Nat[P_X, G]$ transformaciones naturales arbitrarias, entonces

$$\begin{aligned}\Omega(\eta+\eta') =&(\eta+\eta')_X(1_X)\\ =&\eta_X(1_X)+\eta'_X(1_X)\\ =&\Omega(\eta)+\Omega(\eta').\end{aligned}$$

Por lo tanto, Ω es un isomorfismo de grupos abelianos. $\square$

A continuación se discutira la noción de producto de categorías así como de funtores en 2 variables.

Definición 3.3.3. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. El **producto** $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ es una categoría cuya clase de objetos consta de los pares ordenados (C,D) con $C \in Obj(\mathscr{C})$ y $D \in Obj(\mathscr{D})$ y*

$$Hom_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}\left[(C,D),(C',D')\right] := Hom_{\mathscr{C}}(C,C') \times Hom_{\mathscr{D}}(D',D).$$

es el conjunto de morfismos entre los pares $(C,D),(C',D') \in Obj(\mathscr{C}\times\mathscr{D})$ donde para dos morfismos

$$(f,g) : (C,D) \to (C',D') \quad y \quad (f',g') : (C',D') \to (C'',D'').$$

en $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$, la composición

$$(f',g')(f,g) : (C,D) \to (C'',D'')$$

queda definida como la pareja ordenada $(f'f, g'g)$. *La composición así definida es asociativa donde el morfismo identidad del objeto* (C,D) *es el pareja ordenada* $(1_C, 1_D)$.

Definición 3.3.4. *Un **bifuntor** es un funtor covariante cuyo dominio es el producto de dos categorías, es decir, una asignación*

$$F : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{E}$$

donde $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ *y* $\mathscr{E}$ *son categorías, y* F *es un funtor.*

Observación 3.3.5. *Si* $\mathscr{C}$ *es una categoría pequeña, tenemos la categoría* $[\mathscr{C}^{op}, \textbf{\textit{Con}}]$ *de todos los funtores contravariantes de* $\mathscr{C}$ *en **Con** (ver sección 1 de este capítulo). Consideremos los bifuntores*

$$S, E : \mathscr{C}^{op} \times [\mathscr{C}^{op}, \textbf{\textit{Con}}] \to \textbf{\textit{Con}}.$$

definidos en $g : X^* \to Y^*$ *en* $\mathscr{C}^{op}$ *(i.e.* $g : Y \to X$ *en* $\mathscr{C}$*) y* $\phi : G \to F$ *morfismo una transformación natural entre los funtores contravariantes* G *y* F*, como:*

(i) $S(X,G) := Nat[P_X, G]$ *y*

$$S(g,\phi) : Nat[P_X, G] \longrightarrow Nat[P_Y, F],$$

es una asignación dada por $S(g,\phi)(\eta) := \phi\eta P(g) \in Nat[P_Y, F]$ *para* $\eta \in Nat[P_X, G]$.

(ii) $E(X,G) := G(X)$ *y* $E(g,\phi) : G(X) \to F(Y)$ *con* $E(g,\phi) = F(g)\phi_X = \phi_Y G(g)$.

Entonces el isomorfismo de Yoneda es un isomorfismo $\Omega : S \to E$ *de bifuntores, es decir, para* $g : Y \to X$ *en* $\mathscr{C}$ *y* $\phi : G \to F$ *en* $[\mathscr{C}^{op}, \textbf{\textit{Con}}]$ *el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
Nat[P_X, G] \arrow[r, "\Omega_{X,G}"] \arrow[d, "S(g,\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "E(g,\phi)"] \\
Nat[P_Y, F] \arrow[r, "\Omega_{Y,F}"'] & F(Y).
\end{tikzcd} \tag{*}$$

Demostración. Se quiere demostrar que el isomorfismo de Yoneda

$$\Omega_{X,G} : Nat[P_X, G] \longrightarrow G(X)$$

es un isomorfismo de los bifuntores $\Omega : S \to E$. Sea $\phi : G \to F$ en $[\mathscr{C}^{op}, \mathbf{Con}]$ y $g : Y \to X$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Veamos que el diagrama (*) conmuta. Sea $\eta \in Nat[P_X, G]$, por la naturalidad de η se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(X,X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "P_X(g)"'] & G(X) \arrow[d, "G(g)"] \\ Hom_{\mathscr{C}}(Y,X) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y). \end{tikzcd}$$

En particular para $1_X \in Hom_{\mathscr{C}}(X,X)$ se tiene que

$$G(g)(\eta_X(1_X)) = (G(g)\eta_X)(1_X) = (\eta_Y P_X(g))(1_X) = \eta_Y(g).$$

Ahora si, veamos que hacer ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} Nat[P_X,G] \arrow[r, "\Omega_{X,G}"] \arrow[d, "S(g,\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "E(g,\phi)"] \\ Nat[P_Y,F] \arrow[r, "\Omega_{Y,F}"'] & F(Y). \end{tikzcd} \tag{*}$$

En efecto, para $\eta \in Nat[P_X, G]$ se tiene que

$$\begin{aligned} (E(g,\phi)\Omega_{X,G})(\eta) &= (E(g,\phi)(\Omega_{X,G})(\eta)) \\ &= E(g,\phi)(\eta_X(1_X)) \\ &= (\phi_Y G(g))(\eta_X(1_X)) \\ &= \phi_Y(G(g)(\eta_X(1_X))) \\ &= \phi_y(\eta_Y(g)) \\ &= (\phi_Y \eta_Y)(g) \end{aligned}$$

Y por otro lado, para $\eta \in Nat[P_X, G]$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\Omega_{Y,F}S(g,\phi))(\eta) &= \Omega_{Y,F}(\phi\eta P(g))\\ &= (\phi\eta P(g))_Y(1_Y)\\ &= (\phi_Y\eta_Y(P(g))_Y)(1_Y)\\ &= \phi_Y\eta_Y(P(g)_Y(1_Y))\\ &= (\phi_Y\eta_Y)(g1_Y)\\ &= \phi_Y\eta_Y(g).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(E(g,\phi)\Omega_{X,G}) = (\Omega_{Y,F}S(g,\phi)).$$

Por lo tanto, el diagrama (*) es conmutativo. Se sigue por lema 3.3.1, que el isomorfismo de Yoneda

$$\Omega := \Omega_{X,G} : Nat[P_X, G] \longrightarrow G(X)$$

es un isomorfismo de los bifuntores $\Omega : S \to E$ definidos en esta observación.

□

Corolario 3.3.6. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y considerando la función*

$$\beta_{C,C''} : Hom_{\mathscr{C}}(C,C'') \longrightarrow Nat[P_C, P_{C''}].$$

donde $\beta_{C,C''}(g) = P(g)$ con $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C,C'')$, entonces se satisface que

(a) $\beta_{C,C''}$ es natural en las variables C'' y C.

(b) $\beta_{C,C''}$ es biyectiva con inversa

$$\beta^{-1}_{C,C''}(\alpha) = \alpha_C(1_C).$$

para $\alpha \in Nat[P_C, P_{C''}]$.

(c) Si $\mathscr{C}$ es aditiva , entonces $\beta_{C,C''}$ es isomorfismo de grupos.

Demostración. Recordemos que tenemos la función (ver Lema de Yoneda)

$$\Omega^{-1} = \Omega^{-1}_{C,P_{C''}} : P_{C''}(C) = Hom_{\mathscr{C}}(C, C'') \longrightarrow Nat[P_C, P_{C''}].$$

Donde para $g \in P_{C''}(C) = Hom_{\mathscr{C}}(C, C'')$ $\Omega^{-1}(g) : P_C \to P_{C''}$ es la transfomación natural, tal que para cada $Y \in \mathscr{C}$ $(\Omega^{-1}(g))_Y : Hom_{\mathscr{C}}(Y, C) \to Hom_{\mathscr{C}}(Y, C'')$ tiene por regla de correspondencia

$$(\Omega^{-1}(g))_Y(\alpha) = (P_{C''}(\alpha))(g)), \quad \text{para } \alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, C).$$

Pero $P_{C''}(\alpha) : Hom_{\mathscr{C}}(C, C'') \to Hom_{\mathscr{C}}(Y, C'')$ es tal que $(P_{C''}(\alpha))(g) = g\alpha$ para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C, C'')$.

Por lo tanto, $(\Omega^{-1}(g))_Y(\alpha) = g\alpha$.

Recordemos que $P(g) : P_C \to P_{C''}$ es tal que para $Y \in \mathscr{C}$, $P(g)_Y : Hom_{\mathscr{C}}(Y, C) \to Hom_{\mathscr{C}}(Y, C'')$ tiene regla de correspondencia $(P(g)_Y)(\alpha) = g\alpha$ para todo $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, C)$. Por lo tanto, $\beta_{C,C''} = \Omega^{-1}_{C,P_{C''}}$. Luego el corolario, se sigue de 3.3.1 y 3.3.2.

□

3.4. Objetos proyectivos

Definición 3.4.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria, decimos que $P \in \mathscr{C}$ es un **objeto proyectivo** si para todo diagrama en $\mathscr{C}$*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\alpha"'] & C' \end{tikzcd}$$

con $\alpha : C \to C'$ un epimorfismo y $f : P \to C'$ morfismo arbitrario en $\mathscr{C}$, existe un morfismo $\bar{f} : P \to C$ tal que $f = \alpha\bar{f}$.

Definición 3.4.2. *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor covariante, decimos que F preserva monomorfismos(epimorfismos) si $F(f)$ es un monomorfismo (epimorfismo) siempre que f sea un monomorfismo(epimorfismo).*

Observación 3.4.3. *P es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$ si y sólo si el funtor*

$$Hom_{\mathscr{C}}(P, -) : \mathscr{C} \to \textbf{\textit{Con}}$$

preserva epimorfismos.

Demostración.

($\Leftarrow$) Sea $\alpha : C \to C'$ un epimorfismo en $\mathscr{C}$, entonces

$$Hom_{\mathscr{C}}(P,\alpha) : Hom_{\mathscr{C}}(P,C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(P,C')$$

es un epimorfismo en la categoría **Con**. Es decir, $Hom_{\mathscr{C}}(P,\alpha)$ es una función suprayectiva en **Con**. Así, si $\gamma \in Hom_{\mathscr{C}}(P,C')$ existe entonces un morfismo $\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(P,C)$ tal que $\gamma = Hom_{\mathscr{C}}(P,\alpha)(\beta)$. Por lo tanto, $\gamma = \alpha\beta$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ C \arrow[r, "\alpha"'] & C' \end{tikzcd}$$

con α epimorfismo. Probándose que P es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$.

($\Rightarrow$) La demostración es análoga a la implicación que se acaba de demostrar.

□

Observación 3.4.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, P es un objeto proyectivo si y sólo si*

$$Hom_{\mathscr{C}}(P,-) : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$$

es un funtor exacto.

Demostración. Esto se sigue de la observación anterior y de que el funtor $Hom_{\mathscr{C}}(C,-) : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ es exacto a izquierda para todo $C \in \mathscr{C}$. □

Proposición 3.4.5. *Si $f : P \to P'$ es mono-escindido en $\mathscr{C}$ con P' objeto proyectivo en $\mathscr{C}$, entonces P es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Como $f : P \to P'$ es mono-escindido en $\mathscr{C}$, entonces existe un morfismo $f' : P' \to P$ en $\mathscr{C}$ tal que $f'f = 1_P$. Sean $g : C \to C'$ un epimorfismo y $\alpha : P \to C'$ un morfismo arbitrario $\mathscr{C}$. Consideremos el morfismo $\alpha f' : P' \to C'$, como P' es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$, existe un morfismo $\alpha' : P' \to C$ tal que $g\alpha' = \alpha f'$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, dashed, "\alpha'"'] \arrow[d, "\alpha f'"] \\ C \arrow[r, "g"'] & C'. \end{tikzcd}$$

Entonces $g\alpha' f = \alpha f' f = \alpha 1_P = \alpha$. Por lo tanto, si tomamos $\bar{f} = \alpha' f$ tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\bar{f}=\alpha' f"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[r, "g"'] & C'. \end{tikzcd}$$

Probándose que P es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$. $\square$

Proposición 3.4.6. *Sean $\mathscr{C}$ una categoría con coproductos y $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en categoría $\mathscr{C}$. Entonces P_i es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$ para cada $i \in I$ si y sólo si $\bigoplus_{i\in I} P_i$ es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supóngase que P_i es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$ para cada $i \in I$ y sea $\alpha : C \to C'$ un epimorfismo en $\mathscr{C}$. Al tomar un morfismo $f : \bigoplus_{i\in I} P_i \to C'$ en $\mathscr{C}$ y al considerar las inclusiones $\mu_i : P_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} P_i$ de cada P_i en el coproducto, se obtiene una familia de morfismos $\{f\mu_i : P_i \to C'\}_{i\in I}$. Puesto que P_i es un objeto proyectivo para cada $i \in I$, se tiene la existencia de un morfismo $\bar{f}_i : P_i \to C$ tal que $\alpha\bar{f}_i = f\mu_i$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, "\bar{f}_i"'] \arrow[d, "f\mu_i"] \\ C \arrow[r, "\alpha"'] & C'. \end{tikzcd}$$

Luego, por la propiedad universal del coproducto se tiene la existencia de un único morfismo $\phi : \bigoplus_{i\in I} P_i \to C$ respecto a satisfacer que $\bar{f}_i = \phi\mu_i$ para toda $i \in I$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$

$$\begin{tikzcd} C & & \bigoplus_{i\in I} P_i \arrow[ll, dashed, "\phi"'] \\ & P_i. \arrow[ul, "\bar{f}_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

Así, se sigue que $\alpha\phi\mu_i = \alpha\bar{f}_i = f\mu_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, por la propiedad universal del coproducto $\bigoplus_{i\in I} P_i$ se tiene que $\alpha\phi = f$. Es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i\in I} P_i \arrow[dl, dashed, "\phi"'] \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\alpha"'] & C'. \end{tikzcd}$$

Probándose que $\bigoplus_{i\in I} P_i$ es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$.

($\Leftarrow$) Puesto que cada inclusión $\mu_i : P_i \to \bigoplus_{i\in I} P_i$ en el coproducto es un mono-escindido, se sigue por la proposición 3.4.5 que P_i es un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$ para cada $i \in I$.

$\square$

Definición 3.4.7. *Decimos que una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de objetos en una categoría $\mathscr{C}$ es una **familia de generadores** en $\mathscr{C}$ si dados dos morfismos $f,g : C \to D$ en $\mathscr{C}$ tales que $f \neq g$, existe un morfismo $\chi : X_i \to C$ para algún $i \in I$ tal que $f\chi \neq g\chi$. Decimos que un objeto $X \in \mathscr{C}$ es un **generador** en $\mathscr{C}$ si la familia que consta de un sólo objeto $\{X\}$ es una familia de generadores en $\mathscr{C}$.*

Observación 3.4.8. *X es generador en la categoría $\mathscr{C}$ si y sólo si el funtor*

$$Hom_{\mathscr{C}}(X,-) : \mathscr{C} \longrightarrow \textbf{\textit{Con}}$$

es una inmersión, es decir, es un funtor fiel que manda objetos distintos en objetos distintos.

Demostración.

($\Rightarrow$) Primero veamos que el funtor $Hom_{\mathscr{C}}(X,-) : \mathscr{C} \longrightarrow \textbf{Con}$ es fiel, esto es, veamos que la asignación

$$\theta : Hom_{\mathscr{C}}(C,C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(X,C), Hom_{\mathscr{C}}(X,C'))$$

es inyectiva para todo $C,C' \in \mathscr{C}$. Para esto, sean $f,g : C \to C'$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $f \neq g$, se quiere ver que $\theta(f) \neq \theta(g)$. Así, por un lado tenemos el morfismo en **Con**,

$$\theta(f) = Hom_{\mathscr{C}}(X,f) : Hom_{\mathscr{C}}(X,C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X,C'),$$

que es tal que para $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(X,C)$ arbitrario se tiene que $\theta(f)(\alpha) = f\alpha$. Y también tenemos el morfismo en **Ab**,

$$\theta(g) : Hom_{\mathscr{C}}(X,g) : Hom_{\mathscr{C}}(X,C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X,C'),$$

que es tal que para $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(X,C)$ arbitrario se tiene que $\theta(g)(\alpha) = g\alpha$. Por otro lado, puesto que X es generador en $\mathscr{C}$, se tiene que existe un morfismo $\chi : X \to C$ tal que $f\chi \neq g\chi$. Por lo tanto, $\theta(f) \neq \theta(g)$. Luego, el funtor $Hom_{\mathscr{C}}(X,-)$ es un funtor fiel. Del segundo axioma de la definición de categoría (ver 1.1.1), se tiene que para $A,B \in Obj(\mathscr{C})$ tales que $A \neq B$ entonces $Hom_{\mathscr{C}}(X,A) \neq Hom_{\mathscr{C}}(X,B)$. Por lo tanto, el funtor

$$Hom_{\mathscr{C}}(X,-) : \mathscr{C} \to \textbf{Con}$$

es una inmersión.

($\Leftarrow$) Se sigue fácilmente del hecho de que

$$Hom_{\mathscr{C}}(X,-) : \mathscr{C} \to \textbf{Con}$$

un funtor fiel. $\square$

Lema 3.4.9. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero, 0. Entonces $C = 0$ si y sólo si $1_C = f_0$ donde f_0 es el morfismo cero de C en C.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Como $C = 0$, tenemos que $|Hom_{\mathscr{C}}(C,C)| = 1$ y como $1_C \in Hom_{\mathscr{C}}(C,C)$, tenemos que $1_C = 0$.

($\Leftarrow$) Consideremos el morfismo $f_0 : C \to C$, recordemos que por definición de morfismo cero, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "\beta"] & \\ C \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "f_0"'] & & C. \end{tikzcd}$$

Por hipótesis tenemos que $\beta\alpha = f_0 = 1_C$. Por otro lado $\alpha\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(0,0)$ y como 0 es objeto cero, tenemos que $|Hom_{\mathscr{C}}(C,C)| = 1$. Pero $1_0 = Hom_{\mathscr{C}}(0,0)$, por lo tanto $1_0 = \alpha\beta$. De donde concluimos que $0 \cong 0$. Por lo tanto podemos suponer que $C = 0$.

$\square$

Lema 3.4.10. *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor fiel covariante, entonces*

(a) Si $F(f)$ es un monomorfismo (epimorfismo), entonces f es un monomorfismo (epimorfismo) para f un morfismo en $\mathscr{C}$.

(b) Si $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son categorías con objeto cero, $F(C) \neq 0$ siempre que $C \neq 0$.

Demostración.

(a) Supongamos que $F(f) : F(A) \to F(B)$ es un monomorfismo en $\mathscr{D}$ para $f : A \to B$ morfismo en $\mathscr{C}$. Sean $g,h : X \to A$ morfismos en $\mathscr{C}$ tal que $fg = fh$, se quiere ver que $g = h$. En efecto, evaluando en el funtor F se tiene que $F(fg) = F(fh)$, entonces $F(f)F(g) = F(f)F(h)$ y al ser $F(f)$ monomorfismo, se obtiene que $F(g) = F(h)$ pero como F es fiel, se tiene que $g = h$. Probándose que f es monomorfismo.

(b) (Por contrapositiva) Supóngase que $F(C) = 0$, se hara ver que $C = 0$. Sean $f_0, 1_C : C \to C$ los morfismo cero e identidad respectivamente. Entonces $F(f_0), F(1_C) : F(C) \to F(C)$. Como $|Hom_{\mathscr{C}}(F(C),F(C)| = 1$ pues $F(C) = 0$, se tiene que $F(f_0) = F(1_C)$. Como F es fiel, concluimos que $f_0 = 1_C$. Por el lema 3.4.9, se tiene que $C = 0$. $\square$

Proposición 3.4.11. *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor exacto covariante en $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y $\mathscr{D}$ una categoría exacta y aditiva. Entonces F es un funtor aditivo.*

Demostración. Ver [MB65], p.55. $\square$

Proposición 3.4.12. *Sea $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ un funtor exacto covariante con $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y $\mathscr{D}$ una categoría exacta aditiva tal que $F(C)\neq 0$ para todo $C\in\mathscr{C}$ con $C\neq 0$, entonces F es un funtor fiel.*

Demostración. Se quiere ver que para $A,B\in\mathscr{C}$ arbitrarios, la correspondencia

$$Hom_{\mathscr{C}}(A,B)\longrightarrow Hom_{F(\mathscr{D})}(F(A),F(B)),$$

es inyectiva. Sean $f,g:A\to B$ morfismos en $\mathscr{C}$ con tales que $f\neq g$, se quiere demostrar que $F(f)\neq F(g)$. Como F es aditivo (por la proposición 3.4.11), renombrando $h=f-g$, bastaría demostrar que si $h:A\to B$ es tal que $h\neq 0$, entonces $F(h)\neq 0$. Como $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana, podemos factorizar al morfismo h como $h=vq$ con $q:A\to Im(h)$ un epimorfismo y $v:Im(h)\hookrightarrow B$ un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "q"'] & & B \\ & Im(h). \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Como $h\neq 0$, entonces $Im(h)\neq 0$ y entonces concluimos que $F(Im(h))\neq 0$. Por otro lado, $F(h)=F(v)F(q)$ con $F(q):F(A)\to F(Im(h))$ un epimorfismo y $F(v):F(Im(h))\to F(B)$ un monomorfismo. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(h)"] \arrow[dr, "F(q)"'] & & F(B) \\ & F(Im(h)). \arrow[ur, "F(v)"'] & \end{tikzcd}$$

De donde concluimos que $F(v)$ es la imagen de $F(h)$. Así, $Im(F(h))\cong F(Im(h))\neq 0$. Luego, como $F(v)$ es un monomorfismo, se concluye que $F(h)\neq 0$, pues si $F(h)=0$ entonces $F(v)F(q)=0$, lo cual implica que $F(q)=0$ pues $F(v)$ es un monomorfismo. Al ser $F(q)$ un epimorfismo, concluimos que $F(Im(h))=0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, F es un funtor fiel.

$\square$

Proposición 3.4.13. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y X un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$. Si $Hom_{\mathscr{C}}(X,C)\neq 0$ para todo $C\neq 0\in\mathscr{C}$, entonces X es un generador en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea X un objeto proyectivo en $\mathscr{C}$, entonces por 3.4.4 se tiene que $Hom_{\mathscr{C}}(X,-):\mathscr{C}\to\mathbf{Ab}$ es un funtor exacto. Luego, al tener que $Hom_{\mathscr{C}}(X,C)\neq 0$ para todo $C\in\mathscr{C}$ se sigue por la proposición 3.4.12 que $Hom_{\mathscr{C}}(X,-):\mathscr{C}\to\mathbf{Ab}$ es un funtor fiel, es decir, $Hom_{\mathscr{C}}(X,-):\mathscr{C}\to\mathbf{Ab}$ es una inmersión. Así, por 3.4.8 se tiene que X es un generador en la categoría $\mathscr{C}$. $\square$

Lema 3.4.14. *Sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor exacto con $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y $\mathscr{D}$ una categoría exacta y aditiva, entonces F preserva coproductos finitos.*

Demostración. La haremos sólo para el coproducto de 2 objetos. Sean de C_1 y C_2 objetos en $\mathscr{C}$ y $\{\mu_i : C_i \to C_1 \oplus C_2\}_{i=1,2}$ un coproducto. Veamos que $\{F(\mu_i) : F(C_i) \to F(C_1 \bigoplus C_2)\}_{i=1,2}$ es un coproducto de $F(C_1)$ y $F(C_2)$.

Por el lema 1.15.4, existen morfismos $\rho_i : C_1 \bigoplus C_2 \to C_i$ para $i = 1,2$ tal que

$$\rho_i\mu_j = \begin{cases} 1_{A_j}, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{2} \mu_i\rho_i = 1_{C_1 \bigoplus C_2}.$$

Como F es exacto, tenemos que F es aditivo y por tanto, tenemos que aplicando F a las igualdades anteriores , tenemos las siguientes igualdades

$$F(\rho_i)F(\mu_j) = \begin{cases} 1_{F(A_j)}, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{2} F(\mu_i)F(\rho_i) = 1_{F(C_1 \bigoplus C_2)}.$$

Por lo tanto, por 1.15.4 concluimos que $\{F(\mu_i)\}_{i=1}^{2}$ es un coproducto de $F(C_1)$ y $F(C_2)$. Probándose que F preserva coproductos finitos.

□

Lema 3.4.15. *Sea $X \in \mathscr{C}$, entonces $Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama en $Mod(\mathscr{C}^{op})$

$$\begin{tikzcd} & Hom_{\mathscr{C}}(-X) \arrow[d, "\varepsilon"] \\ F \arrow[r, "\eta"'] & F' \end{tikzcd}$$

con $F, F' \in Mod(\mathscr{C}^{op})$, η un epimorfismo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ y ε un morfismo arbitrario en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Como η es un epimorfismo, entonces $\eta_C : F(C) \to F'(C)$ es epimorfismo para cada $C \in \mathscr{C}$. Por observación 3.3.5, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo en **Ab** para $1_X : X \to X$ y $\eta : F \to F'$

$$\begin{tikzcd} Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F] \arrow[r, "\Omega_{X,F}"] \arrow[d, "S(1_X,\eta)"'] & F(X) \arrow[d, "E(1_X,\eta)=\eta_X"] \\ Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F'] \arrow[r, "\Omega_{X,F'}"'] & F'(X). \end{tikzcd}$$

Luego, como η_X es epimorfismo y $\Omega_{X,F'}$, $\Omega_{X,F}$ son isomorfismos se sigue que $S(1_X,\eta)$ es un epimorfismo. Pero $S(1_X,\eta) = Hom_{Mod(\mathscr{C}^op)}(Hom_{\mathscr{C}}(-,X),\eta)$. Por lo tanto

$$Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),-] : Mod(\mathscr{C}^{op}) \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

es un epifuntor, es decir, preserva epimorfismos. Por lo tanto, por 3.4.3 se tiene que $Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. □

3.5. Objetos inyectivos

Definición 3.5.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria, decimos que $Q \in \mathscr{C}$ es un **objeto inyectivo** si para todo diagrama en $\mathscr{C}$*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & C' \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

con $\alpha : C \to C'$ un monomorfismo y $f : C \to Q$ morfismo arbitrario en $\mathscr{C}$, existe un morfismo $\bar{f} : C' \to Q$ tal que $f = \bar{f}\alpha$.

Definición 3.5.2. *Sea G un grupo abeliano, decimos que G **es divisible** si toda ecuación $g = nx$, con $g \in G$ y $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tiene solución en G.*

Ejemplo 3.5.3. *(i) $\mathbb{Z}$ **no es divisible** pues $2 = nx$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tiene como única solución $x = \frac{2}{n} \in \mathbb{Q}$ y para $n = 3$ se tiene que $x \notin \mathbb{Z}$.*

*(ii) $\mathbb{Q}$ **es divisible** pues para toda ecuación $g = nx \in \mathbb{Q}$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $g \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x = \frac{g}{n}$ es una solución en $\mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3.5.4. *Sea $G \in \mathbf{Ab}$, entonces G es divisible si y sólo si G es un objeto inyectivo en $\mathbf{Ab}$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supóngase G es divisible. Por el criterio de Baer (véase [RJ09], p.118) basta ver que si $i : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ es la inclusión y $f : n\mathbb{Z} \to G$ es un morfismo de grupos arbitrarios, entonces existe $\bar{f} : \mathbb{Z} \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} n\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ G. & \end{tikzcd}$$

Como G es divisible, existe $e \in G$ tal que $ne = f(n)$, entonces definimos el morfismo $\bar{f} : \mathbb{Z} \to G$ como $\bar{f}(1) = e$. Sea $a \in n\mathbb{Z}$, entonces con $a = nb$ para algún $b \in \mathbb{Z}$. Por un lado,

$$\bar{f}i(a) = \bar{f}(a) = a\bar{f}(1) = ae.$$

Por otro lado

$$f(a) = f(nb) = bf(n) = b(ne) = (nb)e = ae.$$

Por lo tanto, $f = \bar{f}i$.

$(\Leftarrow)$ Supóngase que G es un objeto inyectivo en **Ab**, se quiere demostrar que para $g \in G$ arbitrario, $g = nx$, tiene solución en G con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Sea $g \in G$ y $f : n\mathbb{Z} \to G$ un morfismo en **Ab** definido como $f(nb) = bg$ para $nb \in n\mathbb{Z}$. En efecto, la función es un morfismo de grupos abelianos pues para $nb, nb' \in n\mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(nb + nb') &= f(n(b + b')) \\ &= (b + b')g \\ &= bg + bg' \\ &= f(nb) + f(nb'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f : n\mathbb{Z} \to G$ con la regla de correspondencia asignada es un morfismo de grupos abelianos. Como G es un objeto inyectivo en **Ab**, existe un morfismo $\bar{f} : \mathbb{Z} \to G$ tal que $\bar{f}_{|n\mathbb{Z}} = f$. Se afirma que $\bar{f}(1)$ es una solución en G a la ecuación $g = nx$. En efecto, tenemos que $\bar{f}(n) = n\bar{f}(1)$. Pero como $\bar{f}|_{n\mathbb{Z}} = f$ se tiene que

$$\bar{f}(n) = f(n) = f(n,1) = 1g = g.$$

Por lo tanto $n\bar{f}(1) = g$. Probándose que G es divisible. □

Proposición 3.5.5. *Sea G un grupo abeliano divisible y H un subgrupo de G, entonces $G/H \in Ab$ es divisible.*

Demostración. Se sigue de la divisibilidad de G. □

Considerando la definición dual a la definición 3.4.7, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.5.6. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *es cogenerador inyectivo en* ***Ab***.

Demostración. Como $\mathbb{Q} \in \mathbf{Ab}$ es divisible y $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$ se sigue por la proposición anterior que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \in \mathbf{Ab}$ es divisible. Luego, por la proposición 3.5.4 se tiene que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \in \mathbf{Ab}$ es un objeto inyectivo. Así, basta ver que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \in \mathbf{Ab}$ es un cogenerador. Sea $M \neq 0$ un grupo abeliano y tomemos $m \in M$ con $m \neq 0$. Veamos que

$$Hom_{Ab}\left(M, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right) \neq \{0\}.$$

Denotemos por $\langle m \rangle$ al subgrupo de M generado por m.

Caso 1.- Si $\mathrm{ord}(m) = \infty$, se define $f : \langle m \rangle \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ como $f(m) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Caso 2.- Si $\mathrm{ord}(m) = n > 1$, se define $f : \langle m \rangle \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ como $f(m) = \frac{1}{n} + \mathbb{Z}$.

Como $\frac{1}{2}, \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$, entonces en ambos casos se tiene que $f(m) \neq 0$. Luego, como $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \in \mathbf{Ab}$ es un objeto inyectivo, se tiene que existe $\bar{f} : M \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ tal que $\bar{f}i = f$, donde $i : \langle m \rangle \hookrightarrow M$ es la inclusión. Es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \langle m \rangle \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}. & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\bar{f} \neq 0$. Como $\bar{f} \in Hom_{Ab}\left(M, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right)$, concluimos que $Hom_{Ab}\left(M, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\right) \neq 0$ para $M \neq 0$ arbitrario, con lo cual se demuestra que $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ es un cogenerador inyectivo en $\mathbf{Ab}$. (por el dual de 3.4.13).

$\square$

Capítulo 4

Relaciones con otras categorías

En la primera parte de este capítulo se estudia la relación entre $Mod(\mathscr{C})$ y la categoría de módulos sobre un anillo.

En la segunda parte de este capítulo se expone la existencia y suficiencias de inyectivos en la $Mod(\mathscr{C})$, la prueba del lema 4.2.3 atribuido a N. Yoneda así como la relación funtorial entre las categorías $Mod(\mathscr{C})$ y $Mod(\mathscr{C}^{op})$ será crucial para esto.

4.1. Categoría de módulos sobre un anillo

Definición 4.1.1. *Sea R un anillo asociativo con 1, se dice que una pareja (M,λ) es un **R-módulo izquierdo**, si M es un grupo abeliano y $\lambda : R \to End_{Ab}(M)$ es un morfismo de anillos con 1, donde $End_{Ab}(M) := Hom_{Ab}(M,M)$. es un morfismo de anillos.*

Observación 4.1.2. *La definición anterior significa que para cada $r \in R$ existe un morfismo $\lambda(r) : M \to M$ tal que para todo $r,s \in R$ y todo $x,y \in M$ se tiene que:*

(i) $\lambda(r)(x+y) = \lambda(r)(x) + \lambda(r)(y)$.

(ii) $\lambda(r+s)(x) = \lambda(r)(x) + \lambda(s)(x)$.

(iii) $\lambda(rs)(x) = \lambda(r)(\lambda(s)(x))$.

(iv) $\lambda(1)(x) = x$.

Para facilitar la notación se evita escribir λ en la definición anterior. De esta manera se escribe rx en vez de $\lambda(r)(x)$. El morfismo λ induce una "multiplicación escalar a la izquierda"dada por la asignación

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r,x) \longmapsto \lambda(r)(x) = rx$$

tal que para todo $r,s \in R$ y $x,y \in M$ se satisfacen los siguientes axiomas:

(i) $r(x+y) = rx + ry$.

(ii) $(r+s)x = rx + sx$.

(iii) $(rs)x = r(sx)$.

(iv) $1x = x$.

Inversamente dada una acción $R \times M \to M$ que satisface (i), (ii), (iii) y (iv)del párrafo anterior induce un morfismo de anillos con 1 $\lambda : R \to End_{Ab}(M)$.

Definición 4.1.3. *Dado un anillo asociativo con* 1 *R, la* ***categoría de módulos izquierdos sobre R*** *denotada como $Mod(R)$ es la categoría cuya clase de objetos consiste de los módulos izquierdos sobre R y donde $Hom_{Mod(R)}(M,N)$ consiste del conjunto de todos morfismos de grupos $f : M \to N$ tal que $f(rm) = rf(m)$ para todo $r \in R$, $m \in M$.*

Para facilitar la notación al conjunto $Hom_{Mod(R)}(M,N)$ de la definición anterior lo denotaremos simplemente como $Hom_R(M,N)$.

Ejemplo 4.1.4. *(a) Todo espacio vectorial sobre un campo K es un K-módulo izquierdo.*

(b) Todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo.

(c) Todo anillo R es un R-módulo izquierdo si se define la multiplicación escalar a izquierda como la multiplicación $(r,s) \mapsto rs$, de elementos del anillo R.

(d) Sea un conjunto X un conjunto distinto del vacío, M un R-módulo izquierdo y M^X la colección de todas las funciones $f : X \to M$, entonces M^X es un R-módulo izquierdo con la operación suma y multiplicación escalar definidas como $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ y $(rf)(x) := rf(x)$ respectivamente. En particular, si $X = R$ con R un anillo asociativo con 1 *se puede ver que $M^R := Hom_R(R,M)$ es un R-módulo izquierdo. (de hecho es un submódulo de M^R).*

Proposición 4.1.5. *Sea M un R-módulo izquierdo, entonces existe un isomorfismo $\alpha : M \to Hom_R(R,M)$ de R-módulos izquierdos cuya regla de correspondencia está dada por*

$$\alpha : M \longrightarrow Hom_R(R,M)$$

$$m \longmapsto \phi_m : R \to M,$$

donde para $m \in M$ $\phi_m(r) = rm$ para todo $r \in R$.

Demostración. Sea $\beta : Hom_R(R,M) \to M$ una asignación tal que para $\phi \in Hom_R(R,M)$ se tiene que $\beta(\phi) = \phi(1_R) \in M$.

Veamos que $\beta = \alpha^{-1}$. En efecto, por un lado, para $m \in M$ se tiene que

$$\beta\alpha(m) = \beta(\phi_m) = \phi_m(1_R) = 1_R m = m \in M.$$

Por otro lado, para $\phi \in Hom_R(R,M)$ se tiene que $\alpha\beta(\phi) = \alpha(\phi(1_R))$. Así, tomando $m' := \phi(1_R) \in M$ se obtiene que $\alpha(\phi(1_R)) = \alpha(m') = \phi_{m'}$, donde $\phi_{m'} \in Hom_R(R,M)$ es tal que $\phi_{m'}(r) = rm'$ para todo $r \in R$. Por lo tanto, para todo $r \in R$ se tiene que

$$\phi_{m'}(r) = rm' = r\phi(1_R) = \phi(r1_R) = \phi(r).$$

Por tanto, $\alpha\beta(\phi) = \phi$. Probándose que $\beta = \alpha^{-1}$.

Es fácil ver que α es unmorfismo de R-módulos y por tanto α es un isomorfismo de R-módulos. □

Definición 4.1.6. *Sea R un anillo asociativo con 1, denotemos por $\mathscr{C}_R$ a la categoría dada por los siguientes datos.*

(i) $Obj(\mathscr{C}_R) = \{*\}$

(ii) $Hom_{\mathscr{C}_R}(*,*) = R$.

La composición en $\mathscr{C}_{\mathscr{R}}$ está dada por la multiplicación en R.

De esta manera, podemos obtener la categoría $Mod(\mathscr{C}_R)$ descrita en la siguiente observación enunciada a continuación.

Observación 4.1.7. *Por la definición 3.2.1 tenemos que la categoría $Mod(\mathscr{C}_R)$ cuya clase de objetos consiste de todos los funtores aditivos covariantes de la categoría $\mathscr{C}_R$ a la categoría **Ab** y donde $Hom_{Mod(\mathscr{C}_R)}(F,G)$ consiste de todas las transformaciones naturales del funtor F en el funtor G.*

Lema 4.1.8. *Sea $F : \mathscr{C}_R \to$ **Ab** un objeto en $Mod(\mathscr{C}_R)$, entonces $F(*)$ tiene estructura de R-módulo izquierdo.*

Demostración. Primero notemos que $F(*) \in$ **Ab**. Queremos definir un morfismo de anillos con 1, $\lambda : R \to End_{\mathbb{Z}}(F(*))$. Para esto notemos que F induce un morfismo de grupos abelianos $\lambda : Hom_{\mathscr{C}_R}(*,*) \to Hom_{\mathbf{Ab}}(F(*),F(*)$ con $\lambda(r) := F(r)$ para todo $r \in Hom_{\mathscr{C}_R}(*,*) = R$. Como F es funtor, tenemos que $\lambda(rs) = F(rs) = F(r)F(s) = \lambda(r)\lambda(s)$ para todo $r,s \in Hom_{\mathscr{C}_R}(*,*)$ y $\lambda(1) =$

$1_{F(*)}$. Por lo tanto $\lambda : R \to End_{\mathbb{Z}}(F(*))$ es un morfismo de anillos con 1. Probándose que $F(*)$ es un R-módulo izquierdo. □

Lema 4.1.9. *Sea $F, F' \in Mod(\mathscr{C}_R)$ y $T : F \to F'$ una transformación natural. Entonces $\tau_* : F(*) \to F'(*)$ es un morfismo de R-módulo izquierdo.*

Demostración. Tenemos que $\tau : F \to F'$ está dada por

$$\tau := \{\tau_* : F(*) \to F'(*)\}_{* \in Obj(\mathscr{C}_R)}.$$

Luego, τ_* es la única componente de la transformación natural τ. Como $\tau_* : F(*) \to F'(*)$ es un morfismo en **Ab** se tiene que

$$\tau_*(a+b) = \tau_*(a) + \tau_*(b) \quad \text{para todo} \quad a, b \in F(*).$$

De esta manera, falta sólo ver que $\tau_*(rx) = r\tau_*(x)$ para $x \in F(*)$ y $r \in R$ arbitrarios.

Por un lado, tenemos que las estructuras de R-módulos a izquierda de $F(*)$ y $F'(*)$ están dadas por los morfismos de anillos

$$\lambda : R \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(F(*)), \quad \lambda(r) := F(r),$$

$$\lambda' : R \longrightarrow End_{\mathbb{Z}}(F'(*)), \quad \lambda'(r) := F'(r),$$

respectivamente.

Es decir, τ es una transformación natural se tiene que para $r : * \to *$ con $r \in R$ arbitrario, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(*) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "F(r)"'] & F'(*) \arrow[d, "F'(r)"] \\ F(*) \arrow[r, "\tau_*"'] & F'(*). \end{tikzcd}$$

Por tanto, $F'(r)\tau_* = \tau_* F(r)$. Entonces, para $x \in F(*)$ se tiene que $(F'(r)\tau_*)(x) = (\tau_* F(r))(x)$. Luego,

$$\begin{aligned}\tau_*(rx) = \tau_*(\lambda(r)(x)) &= \tau_*(F(r)(x))\\ &= (\tau_* F(r))(x)\\ &= (F'(r)\tau_*)(x)\\ &= F'(r)(\tau_*(x))\\ &= \lambda'(r)\tau_*(x)\\ &= r\tau_*(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tau_*(rx) = r\tau_*(x)$ para todo $x \in F(*)$ y $r \in R$. Probándose que $\tau_* : F(*) \to F'(*)$ es un morfismo en $Mod(R)$. □

Definición 4.1.10. *Definimos una asignación $\Delta : Mod(\mathscr{C}_R) \to Mod(R)$ como sigue:*

*(i) **En objetos.-** Para $F : \mathscr{C}_R \to Ab$ un funtor covariante en $Mod(\mathscr{C}_R)$ se tiene que $\Delta(F) = F(*)$ con $F(*) \in Mod(R)$.*

*(ii) **En morfismos.-** Sea $\tau : F \to F'$ un morfismo en $Mod(\mathscr{C}_R)$ donde $F, F' : \mathscr{C}_R \to Ab$ son funtores covariantes aditivos. Se define $\Delta(\tau) := \tau_*$ donde τ_* es la única componente de la transformación natural*

$$\tau := \{\tau_* : F(*) \to F'(*)\}_{* \in Obj(\mathscr{C}_R)}.$$

Proposición 4.1.11. *La asignación $\Delta : Mod(\mathscr{C}_R) \to Mod(R)$ definida en 4.1.10 es funtorial.*

Demostración.

(a) Veamos que $\Delta(\eta\tau) = \Delta(\eta)\Delta(\tau)$ para $\tau : F \to F'$ y $\eta : F' \to F''$ morfismos en $Mod(\mathscr{C}_R)$.

En efecto, se tiene que $\Delta(\eta\tau) = \Delta(\eta)\Delta(\tau)$ pues

$$\Delta(\eta\tau) = (\eta\tau)_* = \eta_*\tau_* = \Delta(\eta)\Delta(\tau).$$

(b) Sea $1_F : F \to F$ la transformación natural identidad sobre $F \in Mod(\mathscr{C}_R)$, entonces $\Delta(1_F) = 1_{\Delta(1_F)}$. En efecto, esto se sigue de la siguiente igualdad: $\Delta(1_F) = (1_F)_* = 1_{F(*)} = 1_{\Delta(F)}$.

Por lo tanto, la asignación $\Delta : Mod(\mathscr{C}_R) \to Mod(R)$ definida en 4.1.10 es funtorial. □

Lema 4.1.12. *Sea R un anillo asociativo con 1 y $M \in Mod(R)$. Sea $F_M : \mathscr{C}_R \to \boldsymbol{Ab}$ la asignación definida como*

(i) $F_M(*) := M$

(ii) para $r \in R = Hom_{\mathscr{C}_R}(*,*)$, la función $F_M(r) : M \to M$ tiene por regla de correspondencia $F_M(r)(m) = rm$.

Entonces F_M es un funtor covariante.

Demostración.

(i) Sea $1_R \in R$ el elemento identidad del anillo R. Entonces $F_M(1_R) : M \to M$ es tal que $F_M(1_R)(m) = 1_R m = m$ para todo $m \in M$. Por lo tanto, $F_M(1_R) = 1_M = 1_{F_M(*)}$.

(ii) Sean $r,s \in R$. Entonces $F_M(rs) : M \to M$ es tal que $F_M(rs) = (rs)m$ para todo $m \in M$. Pero $F_M(r) \circ F_M(s) : M \to M$ es tal que $(F_M(r) \circ F_M(s))(m) = F_m(r)(F_M(s)(m)) = F_M(r)(sm) = r(sm)$. Por lo tanto, $F_M(r) \circ F_M(s) = F_M(rs)$.

Probándose que es un funtor covariante. □

Lema 4.1.13. *Sea $f : M \to M'$ un morfismo en $Mod(R)$ y definimos $\tau_f : F_M \to F_{M'}$ en $\tau_f := \{(\tau_f)_* : F_M(*) \to F_{M'}(*)\}_{* \in Obj(\mathscr{C})}$ donde $(\tau_f)_* = f$ es la única componente de τ_f. Entonces τ_f es una transformación natural entre los funtores F_M y $F_{M'}$.*

Demostración. Para $r \in Hom_{\mathscr{C}_R}(*,*)$, tenemos que ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M = F_M(*) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_M(r)"'] & F_{M'}(*) = M' \arrow[d, "F_{M'}(r)"] \\ M = F_M(*) \arrow[r, "f"'] & F_{M'}(*) = M'. \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $m \in M$, entonces $(F_{M'}(r) \circ f)(m) = F_{M'}(r)(f(m)) = r(f(m))$. Por otro lado, $(f \circ F_M(r))(m) = f(F_M(r)(m)) = f(rm)$. Pero como f es unmorfismo de R-módulos izquierdos, tenemos que $rf(m) = f(rm)$. Por lo tanto, el diagrama anterior conmuta. Probándose que τ_f es una t ransformación natural.

□

Por los lemas anteriores tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1.14. *Definimos una asignación $\Gamma : Mod(R) \to Mod(\mathscr{C}_R)$ entre categorías como sigue:*

(i) ***En objetos****.- Para $M \in Mod(R)$ se tiene que $\Gamma(M) = F_M : \mathscr{C}_R \to Ab$ funtor donde F_M es el funtor del lema 4.1.8.*

(ii) ***En morfismos***.- *Si* $f : M \to M'$ *morfismo en* $Mod(R)$*, se tiene* $\Gamma(f) = \tau_f : F_M \to F_{M'}$ *donde* τ_f *es la transformación natural del lema 4.1.9.*

Proposición 4.1.15. *La asignación* $\Gamma : Mod(R) \to Mod(\mathscr{C}_R)$ *definida anteriormente es un funtor.*

Demostración.

(i) Sea $\Gamma_M : M \to M$ el morfismo identidad sobre M. Entonces $\tau_{1_M} : F_M \to F_M$ es tal que su única componente $(\tau_{1_M})_* : F_M(*) \to F_M(*)$, por lo tanto $\Gamma(1_M) = 1_{\Gamma(M)}$.

(ii) Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ morfismo de R-módulos izquierdos. Por un lado $\tau_{gf} : F_M \to F_{M''}$ es tal que su única componente es gf. Por otro lado, $\tau_g \circ \tau_f$ tiene como única componente a $(\tau_g)_*(\tau_f)_* = g \circ f$. Por lo tanto, $\Gamma(gf) = \Gamma(g)\Gamma(f)$. Probándose que Γ es un funtor. □

Proposición 4.1.16. *Las categorías* $Mod(R)$ *y* $Mod(\mathscr{C}_R)$ *son isomorfas entre si.*

Demostración. Sean $\Delta : Mod(\mathscr{C}_R) \to Mod(R)$ y $\Gamma : Mod(R) \to Mod(\mathscr{C}_R)$ los funtores definidos en 4.1.10 y 4.1.14 respectivamente.

(i) $\Delta\Gamma = 1_{Mod(R)}$ con $1_{Mod(R)} : Mod(R) \to Mod(R)$ el funtor identidad en $Mod(R)$.

Sea $M \in Mod(R)$ entonces $\Gamma(M) = F_M : \mathscr{C}_R \to Ab$, por tanto se sigue que

$$\Delta\Gamma(M) = \Delta(F_M) = F_M(*) = M \in Mod(R).$$

Ahora, sea $f : M \to M'$ morfismo en $Mod(R)$, entonces $\Gamma(f) = \tau_f$ donde

$$\tau_f := \{(\tau_f)_* : F_M(*) \to F_{M'}(*)\}_{* \in Obj(\mathscr{C})}$$

es una transformación natural entre los funtores $F, F' \in Mod(\mathscr{C}_R)$ con $(\tau_f)_* = f$. Luego, $\Delta\Gamma(f) = \Delta(\tau_f) = (\tau_f)_* = f$. Probándose que $\Delta\Gamma = 1_{Mod(R)}$.

(ii) $\Gamma\Delta = 1_{Mod(\mathscr{C}_R)}$ con $1_{Mod(\mathscr{C}_R)} : Mod(\mathscr{C}_R) \to Mod(\mathscr{C}_R)$ el funtor identidad en $Mod(\mathscr{C}_R)$.

Sea $F \in Mod(\mathscr{C}_R)$, entonces $M := \Delta(F) = F(*) \in Mod(R)$. De esta manera, se sigue que

$$\Gamma\Delta(F) = \Gamma(F(*)) = \Gamma(M) = F_M$$

con $F_M \in Mod(\mathscr{C}_R)$.

Veamos que $F_M = F$.

Por un lado se tiene que $F_M : \mathscr{C}_R \to \mathbf{Ab}$ es un funtor en $Mod(\mathscr{C}_R)$ tal que para $* \in \mathscr{C}_R$ se tiene que $F_M(*) = M = F(*) \in Mod(R)$. Por lo tanto F_M tiene la misma regla de correspondencia en objetos que F. Para un morfismo $r : * \to *$ en $\mathscr{C}_R$ se tiene que $F_M(r) = M \to M$ es un morfismo en $Mod(R)$ tal que para $m \in M$, $(F_M(r))(m) = rm$.

Pero $rm = \lambda(r)(m) = F(r)(m)$, esto por la definición de la estructura de R-módulo sobre M. Por lo tanto $F_M(r) = F(r)$. Luego $F = F_M$. Por lo tanto, $\Gamma\Delta(F) = F$.

Ahora, sea $\tau : F \to F'$ un morfismo en $Mod(\mathscr{C}_R)$, entonces $\Delta(\tau) = \tau_*$ con

$$f := \tau_* : F(*) \longrightarrow F'(*)$$

la única componente de τ. Luego , $\Gamma\Delta(\tau) = \Gamma(f)$ donde $\Gamma(f) : F_{F(*)} \to F_{F'(*)}$ es una transformación natural dada por

$$\Gamma(f) := \{f : F(*) \to F(*)\}_{* \in Obj(\mathscr{C}_R)}.$$

Por lo tanto, $\Delta\Gamma(\tau) = \tau$. Y así, se tiene que $\Gamma\Delta = 1_{Mod(\mathscr{C}_R)}$.

Probándose que $Mod(R)$ y $Mod(\mathscr{C}_R)$ son categorías isomorfas.

$\square$

Observación 4.1.17. *Sea R un anillo asociativo con 1, entonces bajo el funtor*

$$\Delta : Mod(\mathscr{C}_R) \longrightarrow Mod(R)$$

definida en 4.1.10 se tiene que $\Delta(Hom_{\mathscr{C}_R}(*, -)) = R$. En efecto,

$$\Delta(Hom_{\mathscr{C}_R}(*, -)) = Hom_{\mathscr{C}_R}(*, *) = R \in Mod(R).$$

Proposición 4.1.18. *Sean R un anillo asociativo con 1. Consideremos $F \in Mod(\mathscr{C}_R)$ y el isomorfismo de Yoneda*

$$\Omega := \Omega_{*,F} : Nat[Hom_{\mathscr{C}}(*, -), F] \longrightarrow F(*),$$

versión para funtores covariantes de 3.3.2 (b). Para $F(*) \in Mod(R)$ consideremos el isomorfismo $\beta : Hom_R(R, F(*)) \to F(*)$ en $Mod(R)$ definido en la demostración de 4.1.5. Entonces mediante el funtor $\Delta : Mod(\mathscr{C}_R) \to Mod(R)$, el isomorfismo de grupos abelianos Ω se "corresponde" con β. Es decir, $\Omega = \Omega_{*,F} = \beta \circ \Delta$.

Demostración. Sea

$$\beta : Hom_R(R, F(*)) \to F(*)$$

el morfismo en $Mod(R)$ definido en la demostración de 4.1.5 y sea

$$\Delta : Mod(\mathscr{C}_R) \to Mod(R)$$

el funtor definido en 4.1.10. Por un lado, para $\eta \in [Hom_{\mathscr{C}_R}(*,-),F]$ se tiene que $\Delta(\eta) = \eta_*$ con

$$\eta_* : Hom_{\mathscr{C}_R}(*,*) \longrightarrow F(*)$$

un morfismo en $Mod(R)$.

Luego, $\beta\Delta(\eta) = \beta(\eta_*)$ donde $\beta(\eta_*) = \eta_*(1_R)$.

Por otro lado, para $\eta \in Nat[Hom_{\mathscr{C}_R}(*,-),F]$ se tiene por el análogo de 3.3.2 (b) que

$$\Omega(\eta) = \eta_*(1_*) = \eta_*(1_R).$$

Donde la última igualdad se tiene al tener que $1_* : * \to *$ es igual a 1_R. Por lo tanto se sigue que $\beta\Delta(\eta) = \Omega(\eta)$, probándose que $\beta\Delta = \Omega$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Nat[Hom_{\mathscr{C}_R}(*,-),F] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Omega_{*,F}"'] & Hom_R[(*,*),F(*)] = Hom_R[R,F(*)] \arrow[d, "\beta"] \\
F(*) \arrow[r, equal] & F(*),
\end{tikzcd}$$

es conmutativo en la categoría **Ab**.

□

4.2. Existencia de inyectivos en la categoría $Mod(\mathscr{C})$

En toda esta sección $\mathscr{C}$ será una categoría aditiva y pequeña (pedimos que $\mathscr{C}$ sea pequeña, pues consideraremos la categoría $Mod(\mathscr{C})$ descrita en la definición 3.2.1). Más generalmente se puede pedir que $\mathscr{C}$ sea esqueléticamente pequeña. Pero para nuestros fines sólo pediremos que $\mathscr{C}$ sea pequeña.

Lema 4.2.1. *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías y $F,G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ funtores. Sea $H : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ un funtor y $\eta : F \to G$ una transformación natural. Se satisfacen los siguientes incisos.*

(a) Si F y G son covariantes y H es covariante entonces $H\eta := \{H(\eta_A)\}_{A\in\mathscr{A}}$ es una transformación natural $H\eta : HF \to HG$ entre funtores covariantes.

(b) Si F y G son covariantes y H es contravariante entonces $H\eta := \{H(\eta_A)\}_{A\in\mathscr{A}}$ es una transformación natural $H\eta : HG \to HF$ entre funtores contravariantes.

(c) Si F y G son contravariantes y H es covariante entonces $H\eta := \{H(\eta_A)\}_{A\in\mathscr{A}}$ es una transformación natural $H\eta : HF \to HG$ entre funtores contravariantes.

(d) Si F y G son contravariantes y H es contravariante entonces $H\eta := \{H(\eta_A)\}_{A\in\mathscr{A}}$ es una transformación natural $H\eta : HG \to HF$ entre funtores covariantes.

Demostración. Demostremos solo (d), ya que los otros incisos son similares. Sea $f : A \to A'$ un morfismo en $\mathscr{A}$, veamos que el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} HG(A) \arrow[r, "H(\eta_A)"] \arrow[d, "HG(f)"'] & HF(A) \arrow[d, "HF(f)"] \\ HG(A') \arrow[r, "H(\eta_{A'})"'] & HF(A'). \end{tikzcd}$$

En efecto, como $\eta : F \to G$ es una transformación natural, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A') \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A) \arrow[r, "\eta_A"'] & G(A). \end{tikzcd}$$

Luego, al aplicar H al diagrama anterior, obtenemos el diagrama conmutativo buscado. □

Definición 4.2.2. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva $C \in \mathscr{C}$ y $G \in \boldsymbol{Ab}$. Definimos un funtor covariante $J_{C,G} : \mathscr{C} \to Ab$ como*

$$J_{C,G} := Hom_{Ab}(-,G) \circ Hom_{\mathscr{C}}(-,C),$$

con $Hom_{Ab}(-,G) : \boldsymbol{Ab} \to \boldsymbol{Ab}$ y $Hom_{\mathscr{C}}(-,C) : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$.

Siendo un poco más específicos, tenemos que $J_{C,G}$ está definida como sigue.

(a) En objetos. Para $C' \in \mathscr{C}$ se tiene que $J_{C,G}(C') := Hom_{Ab}\Big(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G\Big)$.

(b) En morfismos: Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces

$$J_{C,G}(f) : Hom_{Ab}\Big(Hom_{\mathscr{C}}(A,C),G\Big) \to Hom_{Ab}\Big(Hom_{\mathscr{C}}(B,C),G\Big)$$

tiene por regla de correspondencia: $J_{C,G}(f)(\alpha) := \alpha \circ Hom_{\mathscr{C}}(f,C)$ para $\alpha : Hom_{\mathscr{C}}(A,C) \to G$, donde $Hom_{\mathscr{C}}(f,C) : Hom_{\mathscr{C}}(B,C) \to Hom_{\mathscr{C}}(A,C)$.

Lema 4.2.3. *Sean $F : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$ un funtor covariante aditivo, $C \in \mathscr{C}$ y $G \in \boldsymbol{Ab}$. Entonces tenemos un isomorfismo de grupos abelianos*

$$Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,G}] \xrightarrow{\Theta := \Theta_{F,C,G}} Hom_{Ab}(F(C),G).$$

que es natural en F, C y G.

Demostración. Sean $F \in Mod(\mathscr{C})$, $C \in \mathscr{C}$ y $G \in \mathbf{Ab}$ fijos. Queremos definir la función

$$Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,G}] \xrightarrow{\Theta := \Theta_{F,C,G}} Hom_{Ab}(F(C), G).$$

Sea $\eta \in Nat[F, J_{C,G}]$ donde $\eta := \{\eta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C', C), G)\}_{C' \in \mathscr{C}}$; y cada componente $\eta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C', C), G)$ es un morfismo de grupos abelianos. En particular, tenemos la C-ésima componente

$$\eta_C : F(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C, C), G).$$

Luego, para $x \in F(C)$, tenemos el morfismo de grupos abelianos

$$\eta_C(x) : Hom_{\mathscr{C}}(C, C) \longrightarrow G.$$

De esta manera, tenemos $(\eta_C(x))(1_C) \in G$. Por lo tanto, definimos la función

$$\Theta(\eta) : F(C) \to G$$

con regla de correspondencia: $(\Theta(\eta))(x) = (\eta_C(x))(1_C)$ para $x \in F(C)$.
Veamos que $\Theta(\eta) : F(C) \to G$ es un morfismo de grupos abelianos. En efecto, sean $x, y \in F(C)$, entonces

$$\begin{aligned}
(\Theta(\eta))(x+y) =& \Big(\eta_C(x+y)\Big)(1_C) \\
=& \Big(\eta_C(x) + \eta_C(y)\Big)(1_C) \\
=& \Big(\eta_C(x)\Big)(1_C) + \Big(\eta_C(y)\Big)(1_C) \\
=& (\Theta(\eta))(x) + (\Theta(\eta))(y),
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debido a que η_C es un morfismo de grupos abelianos y la tercera igualdad es por definición de suma de morfismos entre grupos abelianos. Por lo tanto, $\Theta(\eta)$ es un morfismo en $\mathbf{Ab}$.
Veamos que Θ es un morfismo de grupos abelianos. En efecto, sean $\eta, \psi \in Nat_{Mod\mathrm{C}}[F, J_{C,G}]$. Entonces $\Theta(\eta + \psi) : F(C) \to G$ tiene por regla de correspondencia para $x \in F(C)$

$$\begin{aligned}
\Theta(\eta+\psi)(x) = (\eta+\psi)_C(x)(1_C) = \Big((\eta_C + \psi_C)(x)\Big)(1_C) =& (\eta_C(x) + \psi_C(x))(1_C) \\
=& (\eta_C(x))(1_C) + (\psi_C(x))(1_C) \\
=& \Theta(\eta)(x) + \Theta(\psi)(x) \\
=& (\Theta(\eta) + \Theta(\psi))(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Theta(\eta + \psi) = \Theta(\eta) + \Theta(\psi)$, probándose que Θ es un morfismo de grupos abelianos.
Ahora queremos definir un morfismo de grupos abelianos

$$\Theta' : Hom_{Ab}(F(C), G) \to Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,G}].$$

Para $f \in Hom_{Ab}(F(C), G)$ queremos obtener $\Theta'(f) = \eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,G}]$ con

$$\eta := \{\eta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C', C), G)\}_{C' \in \mathscr{C}.}$$

Entonces para cada $C' \in \mathscr{C}$ queremos definir $\eta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)$. Para $y \in F(C')$ necesitamos un morfismo de grupos abelianos

$$\eta_{C'}(y) : Hom_{\mathscr{C}}(C',C) \longrightarrow G.$$

Sea $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$, entonces tenemos morfismo de grupos abelianos $F(g) : F(C') \to F(C)$. Luego tenemos $f \circ F(g) : F(C') \to G$ y así $\Big(f \circ F(g)\Big)(y) \in G$. De esta manera definimos la función

$$\eta_{C'}(y) : Hom_{\mathscr{C}}(C',C) \longrightarrow G$$

que tiene por regla de correspondencia: $\Big(\eta_{C'}(y)\Big)(g) := \Big(f \circ F(g)\Big)(y)$ para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$. Veamos que $\eta_{C'}(y)$ es un morfismo de grupos abelianos. En efecto, sean $g_1, g_2 : C' \to C$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big(\eta_{C'}(y)\Big)(g_1+g_2) &= \Big(f \circ F(g_1+g_2)\Big)(y)\\
&= \Big(f \circ (F(g_1)+F(g_2))\Big)(y)\\
&= \Big(f \circ F(g_1) + f \circ F(g_2)\Big)(y)\\
&= \Big(f \circ F(g_1)\Big)(y) + \Big(f \circ F(g_2)\Big)(y)\\
&= \Big(\eta_{C'}(y)\Big)(g_1) + \Big(\eta_{C'}(y)\Big)(g_2)
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\eta_{C'} : F(C') \to Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)$ es un morfismo de grupos abelianos. En efecto, sean $y, y' \in F(C')$ entonces $\eta_{C'}(y+y') : Hom_{\mathscr{C}}(C',C) \to G$ tiene por regla de correspondencia: para $g : C' \to C$

$$\begin{aligned}
\Big(\eta_{C'}(y+y')\Big)(g) &= \Big(f \circ F(g)\Big)(y+y')\\
&= \Big(f \circ F(g)\Big)(y) + \Big(f \circ F(g)\Big)(y')\\
&= \Big(\eta_{C'}(y)\Big)(g) + \Big(\eta_{C'}(y')\Big)(g)\\
&= \Big(\eta_{C'}(y) + \eta_{C'}(y')\Big)(g)
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es debido a que $f \circ F(g)$ es un morfismo de grupos abelianos. Por lo tanto, $\eta_{C'}(y+y') = \eta_{C'}(y) + \eta_{C'}(y')$, probándose que $\eta_{C'}$ es un morfismo de grupos abelianos.
Ahora veamos que $\eta := \{\eta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)\}_{C' \in \mathscr{C}.}$ es una transformación natural entre los funtores F y $J_{C,G}$.
Sea $h : C' \to C''$ morfismo en $\mathscr{C}$, queremos ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
F(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"] \arrow[d, "F(h)"'] & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G) \arrow[d, "J_{C,G}(h)"] \\
F(C'') \arrow[r, "\eta_{C''}"'] & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C'',C),G).
\end{tikzcd} \tag{1}$$

En efecto, sea $y \in F(C')$. Por un lado, tenemos que

$$\Big(J_{C,G}(h)\circ\eta_{C'}\Big)(y) = J_{C,G}(h)\Big(\eta_{C'}(y)\Big) = \eta_{C'}(y)\circ Hom_{\mathscr{C}}(h,C) \in \underline{Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C'',C),G)}$$

tiene la siguiente regla de correspondencia: para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C'',C)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\Big(\eta_{C'}(y)\circ Hom_{\mathscr{C}}(h,C)\Big)(g) = \Big(\eta_{C'}(y)\Big)(Hom_{\mathscr{C}}(h,C)(g)) &= \Big(\eta_{C'}(y)\Big)(gh)\\ &= \Big(f\circ F(gh)\Big)(y).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\Big(\eta_{C''}\circ F(h)\Big)(y) = \eta_{C''}\Big(F(h)(y)\Big) \in \underline{Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C'',C),G)}$$

tiene la siguiente regla de correspondencia: para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C'',C)$ tenemos que

$$\Big[\eta_{C''}\Big(F(h)(y)\Big)\Big](g) = \Big(f\circ F(g)\Big)(F(h)(y)) = \Big(f\circ F(g)\circ F(h)\Big)(y) = \Big(f\circ F(gh)\Big)(y)$$

Por lo tanto, $\Big(\Big(\eta_{C''}\circ F(h)\Big)(y)\Big)(g) = \Big(\Big(J_{C,G}(h)\circ\eta_{C'}\Big)(y)\Big)(g)$. De donde concluimos que $\Big(\eta_{C''}\circ F(h)\Big)(y) = \Big(J_{C,G}(h)\circ\eta_{C'}\Big)(y)$. Luego, tenemos que

$$\eta_{C''}\circ F(h) = J_{C,G}(h)\circ\eta_{C'}.$$

Probándose que el diagrama (1) conmuta y por lo tanto η es una transformación natural y así $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,G}]$.
Ahora veamos que la asignación

$$\Theta' : Hom_{Ab}(F(C),G) \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,G}]$$

definida anteriormente es un morfismo en **Ab**. En efecto, sean $f_1, f_2 : F(C) \to G$ morfismos de grupos abelianos. Por un lado, tenemos

$$\Theta'(f_1+f_2) = \zeta = \{\zeta_{C'} : F(C') \to Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)\}_{C'\in\mathscr{C}}.$$

Sea $C' \in \mathscr{C}$, para $y \in F(C')$ tenemos que $\zeta_{C'}(y) : Hom_C(C',C) \to G$ tiene por regla de correspondencia: para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$

$$\Big(\zeta_{C'}(y)\Big)(g) = \Big((f_1+f_2)\circ F(g)\Big)(y) = \Big(f_1\circ F(g)+f_2\circ F(g)\Big)(y) = \Big(f_1\circ F(g)\Big)(y)+\Big(f_2\circ F(g)\Big)(y).$$

Por otro lado, sean $\eta := \Theta'(f_1)$ y $\psi := \Theta'(f_2)$ con

$$\eta := \{\eta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)\}_{C'\in\mathscr{C}},$$

$$\psi := \{\psi_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)\}_{C'\in\mathscr{C}}.$$

Tenemos que

$$\eta+\psi = \{(\eta+\psi)_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)\}_{C'\in\mathscr{C}}$$

donde por definición (ver 3.2.3) se tiene que $(\eta+\psi)_{C'} := \eta_{C'} + \psi_{C'}$ para cada $C' \in \mathscr{C}$. Sea $C' \in \mathscr{C}$, para $y \in F(C')$ se tiene que $(\eta+\psi)_{C'}(y) : Hom_{\mathscr{C}}(C,C') \to G$ tiene por regla de correspondencia: para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$

$$\begin{aligned}\Big((\eta+\psi)_{C'}(y)\Big)(g) = \Big((\eta_{C'}+\psi_{C'})(y)\Big)(g) &= \Big(\eta_{C'}(y)+\psi_{C'}(y)\Big)(g)\\ &= \Big(\eta_{C'}(y)\Big)(g) + \Big(\psi_{C'}(y)\Big)(g)\\ &= \Big(f_1 \circ F(g)\Big)(y) + \Big(f_2 \circ F(g)\Big)(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\eta+\psi)_{C'}(y) = \zeta_{C'}(y)$ para cada $y \in F(C')$. Luego, tenemos que $(\eta+\psi)_{C'} = \zeta_{C'}$ para $C' \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, tenemos que $\eta+\psi = \zeta$. Es decir, tenemos que $\Theta'(f_1)+\Theta'(f_2) = \Theta(f_1+f_2)$, probándose que $\Theta' : Hom_{Ab}(F(C),G) \to Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}]$ es un morfismo de grupos abelianos.

(a) **Naturalidad de Θ en F**

Sea $\eta : F \to F'$ es una transformación natural, donde

$$\eta = \{\eta_C : F(C) \to F'(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Entonces para $C \in \mathscr{C}$ y $G \in \mathbf{Ab}$ fijos, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F',J_{C,G}] \arrow[r, "\Theta_{F',C,G}"] \arrow[d, "\Psi"'] & Hom_{Ab}(F'(C),G) \arrow[d, "\Psi'"] \\ Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}] \arrow[r, "\Theta_{F,C,G}"] & Hom_{Ab}(F(C),G) \end{tikzcd}$$

con $\Psi(\gamma) := \gamma\eta$ para $\gamma \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F',J_{C,G}]$ y $\Psi'(\alpha) := \alpha\eta_C$ para $\alpha \in Hom_{Ab}(F'(C),G)$.
En efecto, sea $\gamma \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F',J_{C,G}]$, entonces

$$\Big(\Theta_{F,C,G}\circ\Psi\Big)(\gamma) = \Theta\Big(\Psi(\gamma)\Big) = \Theta(\gamma\eta) \in \underline{Hom_{Ab}(F(C),G)}$$

donde para $x \in F(C)$ se tiene que

$$\Theta(\gamma\eta)(x) = \Big((\gamma\eta)_C(x)\Big)(1_C) = \Big((\gamma_C\circ\eta_C)(x)\Big)(1_C) = \Big(\gamma_C(\eta_C(x))\Big)(1_C)$$

Por otro lado,

$$\Big(\Psi'\circ\Theta_{F',C,G}\Big)(\gamma) = \Psi'\Big(\Theta_{F',C,G}(\gamma)\Big) = \Theta_{F',C,G}(\gamma)\circ\eta_C \in \underline{Hom_{Ab}(F(C),G)}$$

donde para $x \in F(C)$ se tiene que

$$(\Theta_{F',C,G}(\gamma)\circ\eta_C)(x) = \Big(\Theta_{F',C,G}(\gamma)\Big)(\eta_C(x)) = \Big(\gamma_C(\eta_C(x))\Big)(1_C)$$

Por lo tanto, $\Big(\Big(\Theta_{F,C,G}\circ\Psi\Big)(\gamma)\Big)(x) = \Big(\Big(\Psi'\circ\Theta_{F',C,G}\Big)(\gamma)\Big)(x)$. De donde concluimos que $\Big(\Theta_{F,C,G}\circ\Psi\Big)(\gamma) = \Big(\Psi'\circ\Theta_{F',C,G}\Big)(\gamma)$ para $\gamma \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F',J_{C,G}]$. Así, $\Theta_{F,C,G}\circ\Psi = \Psi'\circ\Theta_{F',C,G}$. probándose que el diagrama requerido conmuta.

(b) **Naturalidad en** $C \in \mathscr{C}$.
Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, tenemos que $P(f) : P_A = Hom_{\mathscr{C}}(-,A) \to P_B = Hom_{\mathscr{C}}(-,B)$ es una transformación natural por 3.2.12. Luego,

$$\Delta := Hom_{Ab}(-,G)P(f) : Hom_{Ab}(-,G) \circ Hom_{\mathscr{C}}(-,B) \to Hom_{Ab}(-,G) \circ Hom_{\mathscr{C}}(-,A)$$

definida por $\Delta_C = Hom_{Ab}(P(f)_C, G)$ es una transformación natural (ver 4.2.1).
Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Entonces para F y G fijos, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{A,G}] \arrow[r, "\Theta_{F,A,G}"] & Hom_{Ab}(F(A), G) \\
Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{B,G}] \arrow[r, "\Theta_{F,B,G}"] \arrow[u, "\Upsilon"] & Hom_{Ab}(F(B), G) \arrow[u, "\Upsilon'"']
\end{tikzcd}$$

con $\Upsilon(\eta) = \Delta\eta$ para $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{B,G}]$ y $\Psi'(\alpha) = \alpha F(f)$ para $\alpha \in Hom_{Ab}(F(B), G)$.
En efecto, para $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{B,G}]$ tenemos que

$$\Big(\Theta_{F,A,G} \circ \Upsilon\Big)(\eta) = \Theta_{F,A,G}(\Upsilon(\eta)) = \Theta_{F,A,G}(\Delta\eta) \in \underline{Hom_{Ab}(F(A), G)}$$

donde para $x \in F(A)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Theta_{F,A,G}(\Delta\eta)(x) = \Big((\Delta\eta)_A(x)\Big)(1_A) &= \Big((\Delta_A\eta_A)(x)\Big)(1_A) \\
&= \Big(\Delta_A(\eta_A(x))\Big)(1_A) \\
&= \Big(Hom_{Ab}(P(f)_A, G)(\eta_A(x))\Big)(1_A) \\
&= \Big((\eta_A(x)) \circ P(f)_A\Big)(1_A) \\
&= \Big(\eta_A(x)\Big)(P(f)_A(1_A)) \\
&= \Big(\eta_A(x)\Big)(f \circ 1_A) \\
&= \Big(\eta_A(x)\Big)(f).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\Big(\Upsilon' \circ \Theta_{F,B,G}\Big)(\eta) = \Upsilon'\Big(\Theta_{F,B,G}(\eta)\Big) = \Theta_{F,B,G}(\eta) \circ F(f) \in \underline{Hom_{Ab}(F(A), G)}$$

donde para $x \in F(A)$ se tiene que

$$\Big(\Theta_{F,B,G}(\eta) \circ F(f)\Big)(x) = \Big(\Theta_{F,B,G}(\eta)\Big)(F(f)(x)) = \eta_B(F(f)(x))(1_B) = \Big((\eta_B \circ F(f))(x)\Big)(1_B).$$

Como $\eta : F \to J_{B,G}$ es una transformación natural, tenemos que para $f : A \to B$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(A,B),G) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_{B,G}(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\eta_B]{} & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(B,B),G). \end{array}$$

Es decir, para $x \in F(A)$ se tiene que

$$(\eta_B \circ F(f))(x) = (J_{B,G}(f) \circ \eta_A)(x).$$

Pero $(J_{B,G}(f) \circ \eta_A)(x) = \Big(J_{B,G}(f)\Big)(\eta_A(x)) = \eta_A(x) \circ Hom_{\mathscr{C}}(f,C)$. Entonces, para $1_B \in Hom_{\mathscr{C}}(B,B)$ tenemos que $\Big(\eta_A(x) \circ Hom_{\mathscr{C}}(f,B)\Big)(1_B) = \eta_A(x)\Big(Hom_{\mathscr{C}}(f,B)(1_B)\Big) = \eta_A(x)(f)$.
De donde concluimos que

$$\Big((\eta_B \circ F(f))(x)\Big)(1_B) = \Big((J_{B,G}(f) \circ \eta_A)(x)\Big)(1_B) = \eta_A(x)(f).$$

Por lo tanto, $\Big(\Big(\Theta_{F,A,G} \circ \Upsilon\Big)(\eta)\Big)(x) = \Big(\Big(\Upsilon' \circ \Theta_{F,B,G}\Big)(\eta)\Big)(x)$. Luego,

$$\Big(\Theta_{F,A,G} \circ \Upsilon\Big)(\eta) = \Big(\Upsilon' \circ \Theta_{F,B,G}\Big)(\eta)$$

y entonces $\Theta_{F,A,G} \circ \Upsilon = \Upsilon' \circ \Theta_{F,B,G}$, probándose la conmutatividad del diagrama.

(c) **Naturalidad en G.**
Sea $f : G \to G'$ un morfismo en **Ab**. Definamos tranformación natural $\Lambda : J_{C,G} \to J_{C,G'}$ con

$$\Lambda = \{\Lambda_{C'} : Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G) \to Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G')\}_{C' \in \mathscr{C}}.$$

Donde para cada $C' \in \mathscr{C}$

$$\Lambda_{C'} : Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G) \to Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G'),$$

tiene regla de correspondencia $\Lambda_{C'}(\alpha) = f\alpha$ para $\alpha \in Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)$. Sea $h : C' \to C''$ un morfismo en $\mathscr{C}$, afirmamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G) & \xrightarrow{\Lambda_{C'}} & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G') \\ {\scriptstyle J_{C,G}(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_{C,G'}(h)} \\ Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C'',C),G) & \xrightarrow[\Lambda_{C''}]{} & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C'',C),G'). \end{array}$$

En efecto, para $\alpha \in Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)$, tenemos que

$$\Big(J_{C,G'}(h) \circ \Lambda_{C'}\Big)(\alpha) = J_{C,G'}(h)(\Lambda_{C'}(\alpha)) = J_{C,G'}(h)(f\alpha) = (f\alpha) \circ Hom_{\mathscr{C}}(h,C)$$

Por otro lado,

$$\Big(\Lambda_{C''} \circ J_{C,G}(h)\Big)(\alpha) = (\Lambda_{C''})(J_{C,G}(h)(\alpha)) = \Lambda_{C''}(\alpha \circ Hom_{\mathscr{C}}(h,C)) = f \circ (\alpha \circ Hom_{\mathscr{C}}(h,C))$$

Por lo tanto, el diagrama anterior conmuta y entonces Λ es una transformación natural.
(**Nota**: como tenemos $f : G \to G'$ entonces tenemos $P(f) : Hom_{Ab}(-,G) \to Hom_{Ab}(-,G')$ es una transformación natural entonces al componer por la derecha con $Hom_{\mathscr{C}}(-,C)$ tenemos una transformación natural $P(f)Hom_{\mathscr{C}}(-,C) : J_{C,G} \to J_{C,G'}$ (ver pág. 59 del Mitchell) y de hecho $\Delta = P(f)Hom_{\mathscr{C}}(-,C)$).
Sea $f : G \to G'$ un morfismo de grupos abelianos. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}] \arrow[r, "\Theta_{F,C,G}"] \arrow[d, "\Phi"'] & Hom_{Ab}(F(C),G) \arrow[d, "\Phi'"] \\
Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G'}] \arrow[r, "\Theta_{F,C,G'}"'] & Hom_{Ab}(F(C),G')
\end{tikzcd}$$

con $\Phi(\eta) := \Lambda\eta$ para $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}]$ y $\Phi'(g) = fg$ para $g \in Hom_{Ab}(F(C),G)$.
En efecto, sea $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}]$, entonces

$$\Big(\Theta_{F,C,G'} \circ \Phi\Big)(\eta) = \Theta_{F,C,G'}(\Phi(\eta)) = \Theta_{F,C,G'}(\Lambda\eta) \in \underline{Hom_{Ab}(F(C),G')}$$

tiene regla de correspondencia: para $x \in F(C)$

$$\begin{aligned}\Theta_{F,C,G'}(\Lambda\eta)(x) = \Big((\Lambda\eta)_C(x)\Big)(1_C) = \Big((\Lambda_C\eta_C)(x)\Big)(1_C) &= \Big(\Lambda_C(\eta_C(x))\Big)(1_C) \\ &= \Big(f \circ \eta_C(x)\Big)(1_C).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\Big(\Phi' \circ \Theta_{F,C,G}\Big)(\eta) = \Phi'(\Theta_{F,C,G}(\eta)) = f \circ \Theta_{F,C,G}(\eta) \in \underline{Hom_{Ab}(F(C),G')}$$

tiene regla de correspondencia: para $x \in F(C)$

$$\Big(f \circ \Theta_{F,C,G}(\eta)\Big)(x) = f\Big((\Theta_{F,C,G}(\eta))(x)\Big) = f\Big((\eta_C(x))(1_C)\Big) = \Big(f \circ \eta_C(x)\Big)(1_C).$$

Por lo tanto, $\Big(\Big(\Theta_{F,C,G'} \circ \Phi\Big)(\eta)\Big)(x) = \Big(\Big(\Phi' \circ \Theta_{F,C,G}\Big)(\eta)\Big)(x)$. Luego,

$$\Big(\Theta_{F,C,G'} \circ \Phi\Big)(\eta) = \Big(\Phi' \circ \Theta_{F,C,G}\Big)(\eta)$$

y entonces $\Theta_{F,C,G'} \circ \Phi = \Phi' \circ \Theta_{F,C,G}$, probándose que el diagrama es conmutativo.

(d) Ahora veamos que $\Theta'\Theta = 1_{Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}]}$. En efecto, sea $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}]$. Luego, sea $f := \Theta(\eta) : F(C) \to G$. Entonces $\Theta'(\Theta(\eta)) = \Theta'(f) = \zeta$ con

$$\zeta := \{\zeta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)\}_{C' \in \mathscr{C}}.$$

Donde para $C' \in \mathscr{C}$, $\zeta_{C'} : F(C') \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G)$ esta definida como sigue. Para $y \in F(C')$ el morfismo de grupos abelianos

$$\zeta_{C'}(y) : Hom_{\mathscr{C}}(C',C) \longrightarrow G$$

tiene regla de correspondencia: $\Big(\zeta_{C'}(y)\Big)(g) := \Big(f \circ F(g)\Big)(y)$, para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$.
Luego, entonces

$$\Big(\zeta_{C'}(y)\Big)(g) = \Big(f \circ F(g)\Big)(y) = \Big(\Theta(\eta) \circ F(g)\Big)(y) = \Big(\Theta(\eta)\Big)(F(g)(y)) = \Big(\eta_C(F(g)(y))\Big)(1_C)$$

Como $\eta : F \to J_{C,G}$ es una transformación natural, tenemos que para $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
F(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"] \arrow[d, "F(g)"'] & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C',C),G) \arrow[d, "J_{C,G}(g)"] \\
F(C) \arrow[r, "\eta_C"'] & Hom_{Ab}(Hom_{\mathscr{C}}(C,C),G)
\end{tikzcd}$$

Es decir, para $y \in F(C')$ se tiene que

$$(\eta_C \circ F(g))(y) = (J_{C,G}(g) \circ \eta_{C'})(y).$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Big(\eta_C(F(g)(y))\Big)(1_C) = \Big((\eta_C \circ F(g))(y)\Big)(1_C) &= \Big((J_{C,G}(g) \circ \eta_{C'})(y)\Big)(1_C) \\
&= \Big(J_{C,G}(g)(\eta_{C'}(y))\Big)(1_C) \\
&= \Big(\eta_{C'}(y) \circ Hom_{\mathscr{C}}(g,C)\Big)(1_C) \\
&= \eta_{C'}(y)\Big(Hom_{\mathscr{C}}(g,C)(1_C)\Big) \\
&= \eta_{C'}(y)(g)
\end{aligned}$$

Luego, entonces $\Big(\zeta_{C'}(y)\Big)(g) = \Big(\eta_{C'}(y)\Big)(g)$ para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C',C)$. Por lo tanto, se tiene que $\zeta_{C'}(y) = \eta_{C'}(y)$ para $y \in F(C')$. Lo que implica que $\zeta_{C'} = \eta_{C'}$ para cada $C' \in \mathscr{C}$. Probándose que $\zeta = \eta$, es decir, $\Theta'\Theta(\eta) = \eta$ y por lo tanto $\Theta'\Theta = 1_{Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}]}$.

(e) Ahora veamos que $\Theta\Theta' = 1_{Hom_{Ab}(F(C),G)}$. En efecto, sea $f : F(C) \to G$ un morfismo en **Ab**. Sea $\eta := \Theta'(f) \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,J_{C,G}]$, entonces por definición tenemos que $\Theta(\eta) : F(C) \to G$ tiene regla de correspondencia: $\Big(\Theta(\eta)\Big)(x) = (\eta_C(x))(1_C)$ para $x \in F(C)$. Pero por definición de $\eta := \Theta'(f)$, tenemos que $\eta_C(x) : Hom_{\mathscr{C}}(C,C) \to G$ es tal que

$$(\eta_C(x))(1_C) = \Big(f \circ F(1_C)\Big)(x) = (f \circ 1_{F(C)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, tenemos que $\Theta(\eta)(x) = f(x)$ para todo $x \in F(C)$. Por lo tanto, $\Theta(\Theta'(f)) = \Theta(\eta) = f$. Probándose que $\Theta\Theta' = 1_{Hom_{Ab}(F(C),G)}$.
Luego, de (a), (b), (c),(d) y (e), se sigue que

$$Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,G}] \longrightarrow Hom_{Ab}(F(C), G),$$

es un isomorfismo de grupos abelianos, el cual es natural en F, C y G. □

Teorema 4.2.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y pequeña.*

*(a) Si $E \in$ **Ab** es un objeto inyectivo en **Ab**, entonces $J_{C,E}$ es un objeto inyectivo en $Mod(\mathscr{C})$ para todo $C \in \mathscr{C}$.*

*(b) Si E es un cogenerador inyectivo de **Ab**, entonces el funtor $\prod_{C\in\mathscr{C}} J_{C,E} : \mathscr{C} \to$ **Ab** es un cogenerador inyectivo de $Mod(\mathscr{C})$.*

Demostración.

(a) Sea $\tau : F \to F'$ un monomorfismo en $Mod(\mathscr{C})$ y $\eta : F \to J_{C,E}$ un morfismo $Mod(\mathscr{C})$. Por la naturalidad del isomorfismo θ del lema 4.2.3 tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F', J_{C,E}] \arrow[r, "\theta_{F',C,E}"] \arrow[d, "\Psi"'] & Hom_{\mathbf{Ab}}(F'(C), E) \arrow[d, "\Psi'"] \\
Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, J_{C,E}] \arrow[r, "\theta_{F,C,E}"'] & Hom_{\mathbf{Ab}}(F(C), E).
\end{tikzcd} \quad (*)$$

con $\Psi(\gamma) = \gamma\tau$ para $\gamma \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F', J_{C,E}]$ y $\Psi'(\alpha) = \alpha\tau_C$ para $\alpha \in Hom_{\mathbf{Ab}}(F'(C), E)$.

Notemos que $\Psi = Hom_{Mod(\mathscr{C})}(\tau, J_{C,E})$. Luego para ver que $J_{C,E}$ es inyectivo en $Mod(\mathscr{C})$ basta ver que $Hom_{\mathbf{Ab}}(F'(C), E)$ es suprayectiva: Por el diagrama (*) basta ver que Ψ' es suprayectiva. En efecto, sea $\beta : F(C) \to E$ un morfismo en **Ab**. Como $\tau_C : F(C) \to F(C')$ es un monomorfismo y E es un objeto inyectivo en **Ab**, existe $\alpha : F'(C) \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "\beta"'] & F'(C) \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\ E. & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\Psi'(\alpha) = \beta$. Probándose que Ψ' es suprayectiva y por lo tanto Ψ es suprayectiva.

(b) Sean E un objeto cogenerador e inyectivo en **Ab**. Sea $T \in Mod(\mathscr{C})$ con $T \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} Nat_{Mod(\mathscr{C})}[T, \prod_{C\in\mathscr{C}} J_{C,E}] &\cong \prod_{C\in\mathscr{C}} Nat_{Mod(\mathscr{C})}[T, J_{C,E}] \\ &\cong \prod_{C\in\mathscr{C}} Hom_{Ab}[T(C), E]. \end{aligned}$$

Con $T \neq 0$, existe $C \in \mathscr{C}$ tal que $T(C) \neq 0$ y como E es un cogenerador inyectivo, tenemos que $Hom_{Ab}[T(C), E] \neq 0$. Por lo tanto $Nat_{Mod(\mathscr{C})}[T, \prod_{C\in\mathscr{C}} J_{C,E}] \neq 0$ y por el dual de 3.4.13 y 3.4.6 se sigue que $\prod_{C\in\mathscr{C}} J_{C,E}$ es un cogenerador inyectivo de $Mod(\mathscr{C})$.

$\square$

Consideremos el grupo abeliano $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Luego, tenemos un funtor $Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$, el cual jugará un papel muy importante en otra prueba de la existencia de suficientes inyectivos en la categoría $Mod(\mathscr{C})$. En todo lo que sigue, la construcción del funtor $D : Mod(\mathscr{C}) \longrightarrow Mod(\mathscr{C}^{op})$ se puede hacer para cualquier cogenerador inyectivo E de **Ab**. Pero nos concentraremos en el cogenerador inyectivo $E = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Definición 4.2.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, definimos un funtor*

$$D : Mod(\mathscr{C}) \longrightarrow Mod(\mathscr{C}^{op})$$

*(a) Objetos. Para $F \in Mod(\mathscr{C})$ definimos $DF := Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \circ F \in Mod(\mathscr{C}^{op})$. Es decir, para $C \in \mathscr{C}$ tenemos que $DF(C) = Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in$ **Ab** y para $f : C \to C'$ morfismo en $\mathscr{C}$ tenemos que $DF(f) = Hom_{Ab}(F(f), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Es decir, $DF(f)$ tiene por regla de correspondencia*

$$DF(f) : DF(C') = Hom_{Ab}(F(C'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow DF(C) = Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\alpha : F(C') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longmapsto \alpha \circ F(f) : F(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(b) *Morfismos. Sean $F,F' : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$ funtores en $Mod(\mathscr{C})$ y $\eta : F \to F'$ una transformación natural. Por 4.2.1(b), tenemos que*

$$Hom_{Ab}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\eta := \{Hom_{Ab}(\eta_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}},$$

es una transformación natural: $Hom_{Ab}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\eta : Hom_{Ab}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\circ F' \to Hom_{Ab}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\circ F$. De esta manera definimos $D(\eta) := Hom_{Ab}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\eta$. Es decir,

$$D(\eta) := \{D(\eta)_C : DF'(C) \longrightarrow DF(C)\}_{C\in C}$$

donde $D(\eta)_C := Hom_{Ab}(\eta_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : Hom_{Ab}(F'(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es tal que

$$\begin{aligned} D(\eta)_C : Hom_{Ab}(F'(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\longrightarrow Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \alpha &\longmapsto \alpha\circ\eta_C \end{aligned}$$

Observación 4.2.6. *Notemos que tenemos que*

$$J_{C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} = D\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-,C)\Big).$$

Veremos en las siguientes proposiciones que D es parecido a una dualidad entre categorías y como $Hom_{\mathscr{C}}(-,C)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, es de esperarse que $J_{C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ sea inyectivo en $Mod(\mathscr{C})$ (ver 4.2.4).

Lema 4.2.7. *La definición anterior nos define en efecto un funtor contravariante entre la categoría $Mod(\mathscr{C})$ y $Mod(\mathscr{C}^{op})$*

Demostración.

(a) Sean $F,F',F'' \in Mod(\mathscr{C})$ y $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,F']$ y $\tau \in Nat_{Mod_{\mathscr{C}}}[F',F'']$. Veamos que $D(\tau\eta) = D(\eta)D(\tau)$.
En efecto,

$$\tau\eta := \{(\tau\eta)_C = \tau_C\eta_C : F(C) \longrightarrow F''(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Por lo tanto,

$$D(\tau\eta) = \{D(\tau\eta)_C := Hom_{Ab}(\tau_C\eta_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : Hom_{Ab}(F''(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$D(\tau) = \{D(\tau)_C := Hom_{Ab}(\tau_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : Hom_{Ab}(F''(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{Ab}(F'(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

y

$$D(\eta) = \{D(\eta)_C := Hom_{Ab}(\eta_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : Hom_{Ab}(F'(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Como $Hom_{Ab}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un funtor tenemos que

$$Hom_{Ab}(\tau_C\eta_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom_{Ab}(\eta_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\circ Hom_{Ab}(\tau_C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Por lo tanto, $D(\tau\eta)_C = D(\eta)_C D(\tau)_C = (D(\eta)D(\tau))_C$ para cada $C\in\mathscr{C}$. Por lo tanto, se tiene que $D(\tau\eta) = D(\eta)D(\tau)$.

(b) Ahora veamos que $D(1_F) = 1_{D(F)}$. Sea $1_F \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,F]$ con

$$1_F := \{(1_F)_C = 1_{F(C)} : F(C) \longrightarrow F(C)\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Luego, tenemos que

$$D(1_F) = \{D(1_F)_C := Hom_{Ab}(1_{F(C)}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}}$$

Como $Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un funtor, tenemos que $Hom_{Ab}(1_{F(C)}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 1_{Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} = 1_{DF(C)}$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, $D(1_F) = 1_{D(F)}$.
Por lo que de los incisos (a) y (b) , obtenemos que la asignación

$$D : Mod(\mathscr{C}) \longrightarrow Mod(\mathscr{C}^{op})$$

dada en la definición 4.2.5, define un funtor contravariante de $Mod(\mathscr{C})$ en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. □

Definición 4.2.8. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, definimos un funtor*

$$D' : Mod(\mathscr{C}^{op}) \longrightarrow Mod(\mathscr{C})$$

(a) Objetos. Para $F \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ definimos $D'F := Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \circ F \in Mod(\mathscr{C})$. Es decir, para $C \in \mathscr{C}$ tenemos que $D'F(C) = Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in \boldsymbol{Ab}$ y para $f : C \to C'$ morfismo en $\mathscr{C}$ tenemos que $D'F(f) = Hom_{Ab}(F(f), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Es decir, $D'F(f)$ tiene por regla de correspondencia

$$D'F(f) : D'F(C) = Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow D'F(C') = Hom_{Ab}(F(C'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\alpha : F(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longmapsto \alpha \circ F(f) : F(C') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(b) Morfismos. Sean $F, F' : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$ funtores en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ y $\eta : F \to F'$ una transformación natural. Por 4.2.1(d), tenemos que

$$Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\eta := \{Hom_{Ab}(\eta_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}},$$

es una transformación natural: $Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\eta : Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \circ F' \to Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \circ F$. De esta manera definimos $D'(\eta) := Hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\eta$. Es decir,

$$D'(\eta) := \{D'(\eta)_C : D'F'(C) \longrightarrow D'F(C)\}_{C\in C}$$

donde $D'(\eta)_C := Hom_{Ab}(\eta_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : Hom_{Ab}(F'(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es tal que

$$D'(\eta)_C : Hom_{Ab}(F'(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$\alpha \longmapsto \alpha \circ \eta_C$$

Observación 4.2.9. *De manera análoga a lema 4.2.7, se puede ver que la asignación*

$$D' : Mod(\mathscr{C}^{op}) \longrightarrow Mod(\mathscr{C})$$

define en efecto un funtor contravariante.

Proposición 4.2.10. *En la categoría $Mod(\mathscr{C})$, consideremos los funtores*

$$Mod(\mathscr{C}) \xrightarrow{1_{Mod(\mathscr{C})}} Mod(\mathscr{C}),$$

$$Mod(\mathscr{C}) \xrightarrow{D'D} Mod(\mathscr{C}).$$

Entonces, existe una transformación natural

$$\Gamma : 1_{Mod(\mathscr{C})} \longrightarrow D'D$$

donde

$$\Gamma := \{\Gamma_F : F \longrightarrow D'DF\}_{F \in Mod(\mathscr{C})}$$

con Γ_F monomorfismo para cada $F \in Mod(\mathscr{C})$.

Demostración. Sea $F \in Mod(\mathscr{C})$, queremos definir $\Gamma_F : F \to D'DF$ con

$$\Gamma_F := \{(\Gamma_F)_C : F(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C \in \mathscr{C}}$$

Sea $C \in \mathscr{C}$, definamos

$$(\Gamma_F)_C : F(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Para $x \in F(C)$ definimos el morfismo

$$(\Gamma_F)_C(x) : Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\alpha \longmapsto \alpha(x).$$

Es decir, $\Big((\Gamma_F)_C(x)\Big)(\alpha) := \alpha(x)$ para $\alpha : F(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Afirmación.- Γ_F es una transformación natural. Sea $f : C \to C'$ un morfismo en $\mathscr{C}$, queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "(\Gamma_F)_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big) \arrow[d, "D'DF(f)"] \\
F(C') \arrow[r, "(\Gamma_F)_{C'}"'] & Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F(C'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $x \in F(C)$ por un lado

$$\begin{aligned}\Big(D'DF(f)\circ(\Gamma_F)_C\Big)(x) =& D'DF(f)\Big((\Gamma_F)_C(x)\Big)\\ =& (\Gamma_F)_C(x)\circ DF(f) \in \underline{Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F(C'),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)}\end{aligned}$$

tiene la siguiente regla de correspondencia: para $\alpha : F(C') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\Big((\Gamma_F)_C(x)\circ DF(f)\Big)(\alpha) = (\Gamma_F)_C(x)\Big(DF(f)(\alpha)\Big) = (\Gamma_F)_C(x)\Big(\alpha\circ F(f)\Big) = (\alpha\circ F(f))(x)$$

Por otro lado, para $x \in F(C)$ se tiene que

$$\Big((\Gamma_F)_{C'}\circ F(f)\Big)(x) = \Big((\Gamma_F)_{C'}\Big)(F(f)(x)) \in \underline{Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F(C'),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)}$$

tiene la siguiente regla de correspondencia: para $\alpha : F(C') \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\Big((\Gamma_F)_{C'}(F(f)(x))\Big)(\alpha) = \alpha(F(f)(x)) = (\alpha\circ F(f))(x)$$

Por lo tanto, tenemos que $\Big(\Big(D'DF(f)\circ(\Gamma_F)_C\Big)(x)\Big)(\alpha) = \Big(\Big((\Gamma_F)_{C'}\circ F(f)\Big)(x)\Big)(\alpha)$. De donde concluimos que $\Big(D'DF(f)\circ(\Gamma_F)_C\Big)(x) = \Big((\Gamma_F)_{C'}\circ F(f)\Big)(x)$. Luego, entonces $D'DF(f)\circ(\Gamma_F)_C = (\Gamma_F)_{C'}\circ F(f)$, probándose que el diagrama anterior conmuta y entonces $\Gamma_F : F \to D'DF$ es una transformación natural.
Ahora veamos que

$$\Gamma := \{\Gamma_F : F \longrightarrow D'DF\}_{F\in Mod(\mathscr{C})}$$

es una transformación natural entre los funtores $1_{Mod(\mathscr{C})}$ y $D'D$.
Sea $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,F']$, hay que ver que el siguiente diagrama es conmutativo en $Mod(\mathscr{C})$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\Gamma_F"] \arrow[d, "\eta"'] & D'DF \arrow[d, "D'D\eta"] \\ F' \arrow[r, "\Gamma_{F'}"'] & D'DF'. \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Como todos los morfismos en el diagrama anterior son transformaciones naturales entre funtores en $Mod(\mathscr{C})$. Hay que ver que $D'D(\eta)\circ\Gamma_F = \Gamma_{F'}\circ\eta$ como transformaciones naturales entre los funtores F y $D'DF'$. Es decir, tenemos que ver que $(D'D(\eta))_C\circ(\Gamma_F)_C = (\Gamma_{F'})_C\circ\eta_C$ para cada $C\in\mathscr{C}$. Es decir, queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "(\Gamma_F)_C"] \arrow[d, "\eta_C"'] & Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big) \arrow[d, "(D'D(\eta))_C"] \\ F'(C) \arrow[r, "(\Gamma_{F'})_C"'] & Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F'(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big) \end{tikzcd} \qquad (2)$$

En efecto, sea $x \in F(C)$ por un lado

$$\begin{aligned}
\Big((D'D(\eta))_C \circ (\Gamma_F)_C\Big)(x) =& (D'D(\eta))_C\Big((\Gamma_F)_C(x)\Big)\\
=& \Big(Hom_{Ab}((D(\eta))_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\Big)\Big((\Gamma_F)_C(x)\Big)\\
=& \Big(Hom_{Ab}(Hom_{Ab}(\eta_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\Big)\Big((\Gamma_F)_C(x)\Big)\\
=& (\Gamma_F)_C(x) \circ Hom_{Ab}(\eta_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \in \underline{Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F'(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)}
\end{aligned}$$

tiene la siguiente regla de correspondencia: para $\alpha : F'(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Big((\Gamma_F)_C(x) \circ Hom_{Ab}(\eta_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\Big)(\alpha) &= (\Gamma_F)_C(x)\Big(Hom_{Ab}(\eta_C, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})(\alpha)\Big)\\
&= \Big((\Gamma_F)_C(x)\Big)(\alpha\eta_C)\\
&= (\alpha\eta_C)(x)
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $x \in F(C)$ se tiene que

$$\Big((\Gamma_{F'})_C \circ \eta_C\Big)(x) = \Big((\Gamma_F)_{C'}\Big)(\eta_C(x)) \in \underline{Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F'(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)}$$

tiene la siguiente regla de correspondencia: para $\alpha : F'(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\Big((\Gamma_F)_C(\eta_C(x))\Big)(\alpha) = \alpha(\eta_C(x)) = (\alpha\eta_C)(x)$$

Por lo tanto, $\Big(\Big((D'D(\eta))_C \circ (\Gamma_F)_C\Big)(x)\Big)(\alpha) = \Big(\Big((\Gamma_{F'})_C \circ \eta_C\Big)(x)\Big)(\alpha)$. De donde concluimos que

$$\Big((D'D(\eta))_C \circ (\Gamma_F)_C\Big)(x) = \Big((\Gamma_{F'})_C \circ \eta_C\Big)(x).$$

Luego, $(D'D(\eta))_C \circ (\Gamma_F)_C = (\Gamma_{F'})_C \circ \eta_C$, probándose que el diagrama anterior conmuta y entonces $(D'D(\eta))_C \circ (\Gamma_F)_C = (\Gamma_{F'})_C \circ \eta_C$ para cada $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, $(D'D(\eta)) \circ (\Gamma_F) = (\Gamma_{F'}) \circ \eta$. De esta manera, tenemos que $\Gamma : 1_{Mod(\mathscr{C})} \to D'D$ es una transformación natural con

$$\Gamma := \{\Gamma_F : F \longrightarrow D'DF\}_{F \in Mod(\mathscr{C})}.$$

Veamos ahora que

$$(\Gamma_F)_C : F(C) \longrightarrow Hom_{Ab}\Big(Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big)$$

es monomorfismo para cada $C \in \mathscr{C}$. En efecto, sean $x, x' \in F(C)$ con $x \neq x'$. Definimos los siguientes morfismos en **Ab**:

(1) $f : \mathbb{Z} \to F(C)$ tal que $f(1) = x$, es decir, $f(n) = nx$ para $n \in \mathbb{Z}$.

(2) $g : \mathbb{Z} \to F(C)$ tal que $g(1) = x'$ es decir, $g(n) = nx'$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador de **Ab**, tenemos que existe un morfismo $\alpha : F(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\alpha f \neq \alpha g$. Entonces, tenemos que $(\alpha f)(1) \neq (\alpha g)(1)$. Ya que si $(\alpha f)(1) = (\alpha g)(1)$, tendríamos que $(\alpha f)(n) = (\alpha g)(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y entonces $\alpha f = \alpha g$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(\alpha f)(1) \neq (\alpha g)(1)$, es decir, $\alpha(x) \neq \alpha(x')$.
Ahora si, veamos que $(\Gamma_F)_C(x) \neq (\Gamma_F)_C(x')$. En efecto, sea el morfismo $\alpha : F(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ encontrado anteriormente, entonces $(\Gamma_F)_C(x)(\alpha) = \alpha(x) \neq \alpha(x') = (\Gamma_F)_C(x')(\alpha)$. Por lo tanto, tenemos que los morfismos $(\Gamma_F)_C(x), (\Gamma_F)_C(x') : Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son distintos y así $(\Gamma_F)_C$ es un momomorfismo para cada $C \in \mathscr{C}$. Esto prueba que Γ_F es un monomorfismo para $F \in Mod(\mathscr{C})$. Entonces $\Gamma : 1_{Mod(\mathscr{C})} \to D'D$ es un monomorfismo. □

Proposición 4.2.11. *Sean $F \in Mod(\mathscr{C})$ y $G \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ y $\eta : F \to D'G$ una transformación natural con*

$$\eta := \{\eta_C : F(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(G(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C \in \mathscr{C}}.$$

Entonces, tenemos correspondencia biyectiva

$$\Phi : Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, D'G] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C})^{op}}[G, DF]$$

$$\eta \longmapsto \Phi(\eta)$$

con

$$\Phi(\eta) := \{(\Phi(\eta))_C : G(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C \in \mathscr{C}}.$$

Donde la C-ésima componente $\Phi(\eta)_C : G(C) \to Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tiene la siguiente regla de correspondencia: Para $x \in G(C)$ el morfismo $\Phi(\eta)_C(x) : F(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es tal que

$$(\Phi(\eta)_C(x))(y) := (\eta_C(y))(x)$$

para $y \in F(C)$.

Demostración. Veamos que en efecto, $\Phi(\eta) \in Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[G, DF]$. Sea $f : C \to C'$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G(C') \arrow[r, "\Phi(\eta)_{C'}"] \arrow[d, "G(f)"'] & DF(C') = Hom_{Ab}(F(C'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "DF(f)"] \\ G(C) \arrow[r, "\Phi(\eta)_C"'] & DF(C) = Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{tikzcd} \quad (*)$$

En efecto, sea $x \in G(C')$ entonces por un lado

$$\begin{aligned}\Big(DF(f) \circ \Phi(\eta)_{C'}\Big)(x) =& DF(f)\Big(\Phi(\eta)_{C'}(x)\Big) \\ =& \Phi(\eta)_{C'}(x) \circ F(f) \in \underline{Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}\end{aligned}$$

tiene la regla de correspondencia: para $y \in F(C)$

$$\Big(\Phi(\eta)_{C'}(x) \circ F(f)\Big)(y) = \Big(\Phi(\eta)_{C'}(x)\Big)(F(f)(y)) = \Big(\eta_{C'}(F(f)(y))\Big)(x).$$

Por otro lado, para $x \in G(C')$ se tiene que

$$\Big(\Phi(\eta)_C \circ G(g)\Big)(x) = (\Phi(\eta)_C)\Big(G(f)(x)\Big) \in \underline{Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$$

tiene la regla de correspondencia: para $y \in F(C)$

$$\Big(\Phi(\eta)_C(G(f)(x))\Big)(y) = \eta_C(y)\Big(G(f)(x)\Big).$$

Como $\eta : F \to D'G$ es una transformación natural, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & D'G(C) = Hom_{Ab}(G(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "D'G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & D'G(C') = Hom_{Ab}(G(C'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{tikzcd} \qquad (**)$$

Es decir, para $y \in F(C)$ tenemos que

$$\Big(D'G(f) \circ \eta_C\Big)(y) = \Big(\eta_{C'} \circ F(f)\Big)(y).$$

Pero, $\Big(D'G(f)\Big)(\eta_C(y)) = \eta_C(y) \circ G(f)$. Por lo tanto, para $x \in G(C')$ se tiene que

$$\eta_C(y)\Big(G(f)(x)\Big) = \Big(\eta_C(y) \circ G(f)\Big)(x) = \Big((\eta_{C'} \circ F(f))(y)\Big)(x) = \Big(\eta_{C'}(F(f)(y))\Big)(x).$$

Por lo tanto, $\Big(\Big(DF(f) \circ \Phi(\eta)_{C'}\Big)(x)\Big)(y) = \Big(\Big(\Phi(\eta)_C \circ G(g)\Big)(x)\Big)(y)$. De donde concluimos que

$$\Big(DF(f) \circ \Phi(\eta)_{C'}\Big)(x) = \Big(\Phi(\eta)_C \circ G(g)\Big)(x).$$

Entonces $DF(f) \circ \Phi(\eta)_{C'} = \Phi(\eta)_C \circ G(g)$, probándose que el diagrama conmuta. De esta manera tenemos que $\Phi(\eta) : G \to DF$ es una transformación natural.
Ahora para $F \in Mod(\mathscr{C})$ y $G \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ queremos definir una función

$$\Psi : Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[G, DF] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F, D'G].$$

Para $\zeta : G \to DF$ una transformación natural con

$$\zeta := \{\zeta_C : G(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(F(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C \in \mathscr{C}},$$

definimos

$$\Psi : Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[G,DF] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'G]$$

$$\zeta \longmapsto \Psi(\zeta)$$

con

$$\Psi(\zeta) := \{(\Psi(\zeta))_C : F(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(G(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Donde la C-ésima componente $\Psi(\zeta)_C : F(C) \to Hom_{Ab}(G(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tiene la siguiente regla de correspondencia: Para $x \in F(C)$ el morfismo $\Psi(\zeta)_C(x) : G(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es tal que

$$(\Psi(\zeta)_C(x))(y) := (\zeta_C(y))(x)$$

para $y \in G(C)$.
De la misma manera como se hizo anteriormente se prueba que en efecto $\Psi(\zeta) \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'G]$.
Ahora veamos que $\Psi\Phi = 1_{Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'G]}$.
Sea $\eta \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'G]$ y $\zeta := \Phi(\eta)$ (es decir, $\zeta_C = \Phi(\eta)_C$ para cada $C \in \mathscr{C}$). Entonces

$$\Psi(\zeta) := \{(\Psi(\zeta))_C : F(C) \longrightarrow Hom_{Ab}(G(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{C\in\mathscr{C}}.$$

Donde la C-ésima componente $\Psi(\zeta)_C : F(C) \to Hom_{Ab}(G(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tiene la siguiente regla de correspondencia: Para $x \in F(C)$ el morfismo $\Psi(\zeta)_C(x) : G(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es tal que

$$(\Psi(\zeta)_C(x))(y) := (\zeta_C(y))(x)$$

para $y \in G(C)$.
Como $\zeta = \Phi(\eta)$, tenemos que $(\Psi(\zeta)_C(x))(y) = (\zeta_C(y))(x) = \Big(\Phi(\eta)_C(y)\Big)(x) = (\eta_C(x))(y)$ para cada $y \in G(C)$. Por lo tanto, tenemos que $(\Psi(\zeta)_C(x) = \eta_C(x) : G(C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ para $x \in F(C)$ y entonces $\Psi(\zeta)_C = \eta_C$ para $C \in \mathscr{C}$. Es decir, $\Psi(\Phi(\eta)) = \eta$. Por lo tanto $\Psi\Phi = 1_{Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'G]}$.
De la misma manera se prueba que $\Phi\Psi = 1_{Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[G,DF]}$. Así concluimos que

$$\Phi : Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'G] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C})^{op}}[G,DF]$$

es una biyección. □

Lema 4.2.12. *El funtor $D : Mod(\mathscr{C}) \longrightarrow Mod(\mathscr{C}^{op})$, es un funtor exacto.*

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\tau} H \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C})$, es decir,

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{\eta_C} G(C) \xrightarrow{\tau_C} H(C) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

es una sucesión exacta en **Ab** para cada $C \in \mathscr{C}$. Se quiere demostrar que la sucesión

$$0 \longrightarrow DH \xrightarrow{D(\tau)} DG \xrightarrow{D(\eta)} DF \longrightarrow 0, \tag{2}$$

es exacta. Al aplicar el funtor $Hom_{\mathbf{Ab}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ a la sucesión (1), se obtiene la siguiente sucesión en **Ab**

$$0 \longrightarrow Hom_{Ab}(H(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{(D\tau)_C} Hom_{Ab}(G(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{(D\eta)_C} Hom_{Ab}(f(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

En efecto, la sucesión anterior es exacta pues por 3.4.4 se tiene que el funtor $Hom_{\mathscr{C}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ es exacto ya que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cogenerador inyectivo en **Ab**. Entonces, la sucesión (3) es exacta, es decir,

$$0 \longrightarrow DH(C) \xrightarrow{(D\tau)_C} DG(C) \xrightarrow{(D\eta)_C} DF(C) \longrightarrow 0$$

es sucesión exacta para cada $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto, se tiene que

$$0 \longrightarrow DH \xrightarrow{D(\tau)} DG \xrightarrow{D(\eta)} DF \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Así, se concluye que $D : Mod(\mathscr{C}) \longrightarrow Mod(\mathscr{C}^{op})$ es un funtor exacto.

$\square$

Lema 4.2.13. *Sea $\eta : F \to G$ morfismo en $Mod(\mathscr{C})$ y M un objeto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
Nat_{Mod(\mathscr{C})}[G,D'M] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Phi"'] & Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'M] \arrow[d, "\Phi"] \\
Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DG] \arrow[r, "\phi'"'] & Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DF],
\end{tikzcd}$$

donde Φ está definido como en 4.2.11 y las funciones ϕ y ϕ' tienen las siguientes regla de corres-

pondencia:

$$\phi : Nat_{Mod(\mathscr{C})}[G,D'M] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'M]$$

$$\tau \longmapsto \phi(\tau) := \tau\eta$$

para todo $\tau \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[G,D'M]$ *y*

$$\phi' : Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DG] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DF]$$

$$\varepsilon \longmapsto \phi'(\varepsilon) := D(\eta)\varepsilon$$

para todo $\varepsilon \in Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DG]$.

Demostración. Sea $\tau \in Nat_{Mod(\mathscr{C})}[G,D'M]$ con $\tau := \{\tau_C : G(C) \longrightarrow D'M(C)\}_{C\in\mathscr{C}}$. Por un lado, tenemos que

$$(\phi'\Phi)(\tau) = \phi'(\Phi(\tau)) = D(\eta)\Phi(\tau) \in \underline{Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DF]}$$

tiene como C-ésima componente a $D(\eta)_C\Phi(\tau)_C : M(C) \longrightarrow DF(C) = Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ donde para $x \in M(C)$

$$\Big(D(\eta)_C\Phi(\tau)_C\Big)(x) = D(\eta)_C\Big(\Phi(\tau)_C(x)\Big) = (\Phi(\tau)_C(x))\circ\eta_C \in \underline{Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$$

tiene como regla de correspondencia $\Big((\Phi(\tau)_C(x))\circ\eta_C\Big)(y) = \Big(\Phi(\tau)_C(x)\Big)(\eta_C(y)) = \Big(\tau_C(\eta_C(y))\Big)(x)$ $= \Big((\tau\eta)_C(y)\Big)(x)$ para $y \in F(C)$.
Por otro lado,

$$(\Phi\phi)(\tau) = \Phi(\phi(\tau)) = \Phi(\tau\eta) \in \underline{Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DF]}$$

tine como C-ésima componente $(\Phi(\tau\eta)_C : M(C) \longrightarrow DF(C) = Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ donde para $x \in M(C)$

$$(\Phi(\tau\eta)_C)(x) \in \underline{Hom_{Ab}(F(C),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$$

tiene como regla de correspondencia $\Big((\Phi(\tau\eta)_C)(x)\Big)(y) = \Big((\tau\eta)_C(y)\Big)(x)$ para $y \in F(C)$. Por lo tanto, concluimos que $\Big((\phi'\Phi)(\tau)\Big)_C = \Big((\Phi\phi)(\tau)\Big)_C$ para todo $C \in \mathscr{C}$. Luego, $(\phi'\Phi)(\tau) = (\Phi\phi)(\tau)$, probándose que el diagrama requerido conmuta. □

Lema 4.2.14. *Sea* $D' : Mod(\mathscr{C}^{op}) \to Mod(\mathscr{C})$ *el funtor definido en 4.2.8 y* $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ *un objeto proyectivo en* $Mod(\mathscr{C}^{op})$*, entonces* $D'M$ *es un objeto inyectivo en* $Mod(\mathscr{C})$*.*

Demostración. Sea

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\eta} G \xrightarrow{\tau} H \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C})$, entonces por lema 4.2.12 se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow DH \xrightarrow{D(\tau)} DG \xrightarrow{D(\eta)} DF \longrightarrow 0$$

en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Luego, al ser M un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ se tiene por 3.4.4 que la sucesión

$$0 \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DH] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DG] \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DF] \longrightarrow 0,$$

es exacta en $\mathbf{Ab}$. De esta manera, por 4.2.11, 4.2.13 y 1.12.9 tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DH] \arrow[r] & Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DG] \arrow[r] & Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[M,DF] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Nat_{Mod(\mathscr{C})}[H,D'M] \arrow[r] \arrow[u, "\Phi"] & Nat_{Mod(\mathscr{C})}[G,D'M] \arrow[r] \arrow[u, "\Phi"] & Nat_{Mod(\mathscr{C})}[F,D'M] \arrow[r] \arrow[u, "\Phi"] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con filas exactas en $\mathbf{Ab}$. Probándose que

$$Nat_{Mod(\mathscr{C})}[-,D'M] : Mod(\mathscr{C}) \to \mathbf{Ab}$$

es un funtor exacto y así, $D'M$ es un objeto inyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. $\square$

Corolario 4.2.15. *El funtor $D'(Hom_{\mathscr{C}}(-,X)) : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$ es un objeto inyectivo en $Mod(\mathscr{C})$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del lema anterior, ya que $Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ es proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. $\square$

Lema 4.2.16. *Sea $\mathscr{C}'$ una subcategoría pequeña densa de $\mathscr{C}$, es decir, $\mathscr{C}$ es esqueléticamente pequeña. Sea $G = \bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$, entonces G es un generador proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.*

Demostración. Por lema 3.4.15 se tiene que $Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Luego, por 3.4.6 se tiene que $\bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Así, por 3.4.13 basta ver que para $F \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ arbitrario, se tiene que

$$Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[\bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F] \neq 0.$$

En efecto, se tiene que

$$Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[\bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F] \cong \prod_{X\in\mathscr{C}'} Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F].$$

Luego, por otro lado, por lema de Yoneda contravariante se tiene que

$$Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F] \cong F(X).$$

Por lo tanto,

$$Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[\bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F] \cong \prod_{X\in\mathscr{C}'} F(X)$$

Así, como $F \neq 0$, entonces $F(C) \neq 0$ para algún $C \in \mathscr{C}$ y como $\mathscr{C}'$ es densa en $\mathscr{C}$ se sigue que existe un isomorfismo $\alpha_C : C \to C'$ con $C' \in \mathscr{C}'$. Luego, se tiene que $F(C') \neq 0$. Por lo tanto se tiene que

$$Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[\bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X),F] \neq 0.$$

Probándose que $G = \bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ es un generador proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. □

Lema 4.2.17. *Si $\mathscr{C}$ es una categoría con coproductos, entonces $U \in \mathscr{C}$ es un generador para $\mathscr{C}$ si y sólo si existe un epimorfismo $h : U^{(I)} \to C$ para cada $C \in \mathscr{C}$, donde $I = Hom_{\mathscr{C}}(U,C)$ es un conjunto de índices.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supóngase que $U \in \mathscr{C}$ es generador para $\mathscr{C}$ y sea $C \in \mathscr{C}$. Consideremos $I := Hom_{\mathscr{C}}(U,C)$, para cada $f \in Hom_{\mathscr{C}}(U,C)$ y sea $\mu_f : U \to U^{(I)}$ la f-ésima inclusión de U en el coproducto $U^{(I)}$.

Por la propiedad universal del corproducto , existe un único morfismo $h : U^{(I)} \to C$ tal que $f = h\mu_f$ para todo $f \in I$. Es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo para toda $f \in Hom_{\mathscr{C}}(U,C) = I$

$$\begin{tikzcd} C & & U^{(I)} \arrow[ll, dashed, "h"'] \\ & U. \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "\mu_f"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, veamos que $h : U^{(I)} \to C$ es un epimorfismo. Sean $\alpha, \beta : C \to C'$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha h = \beta h$, entonces

$$(\alpha h)\mu_f = (\beta h)\mu_f.$$

para todo $f \in I = Hom_{\mathscr{C}}(U,C)$. Luego, por asociatividad se tiene que

$$\alpha(h\mu_f) = \beta(h\mu_f) \quad \text{para toda} \quad f \in I.$$

De esta manera, se sigue que $\alpha f = \beta f$ para todo $f \in I = Hom_{\mathscr{C}}(U,C)$. Por último, por ser $U \in \mathscr{C}$ un generador en $\mathscr{C}$ se sigue que $\alpha = \beta$. Por lo tanto, $h : U^{(I)} \to C$ es un epimorfismo.

$(\Leftarrow)$ Sean $\alpha, \beta : C \to C'$ morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha \neq \beta$, se quiere demostrar que existe un morfismo $u : U \to C$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha u \neq \beta u$. Sea $h : U^{(I)} \to C$ un epimorfismo en $\mathscr{C}$, entonces $\alpha h \neq \beta h$. Por otro lado, al tener el coproducto $\left\{\mu_i : U \to U^{(I)}\right\}_{i \in I}$, por la propiedad universal se sigue que existe $i \in I$ tal que $\alpha h \mu_i \neq \beta h \mu_i$.

Por asociatividad tenemos que $\alpha(h\mu_i) \neq \beta(h\mu_i)$ para algún $i \in I$. De esta manera, tomando al morfismo $u : U \to C$ como $u := h\mu_i$ se tiene que $\alpha u \neq \beta u$. Por lo tanto, U es un generador en $\mathscr{C}$.

□

Definición 4.2.18. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría, se dice que $\mathscr{C}$ tiene* ***suficientes inyectivos*** *si para todo $C \in \mathscr{C}$ existe un monomorfismo $\alpha : C \to I$ con I inyectivo.*

Proposición 4.2.19. *La categoría $Mod(\mathscr{C})$ tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. Sea $M \in Mod(\mathscr{C})$, entonces $DM \in Mod(\mathscr{C}^{op})$. Luego, por el lema 4.2.16 se tiene que $G = \bigoplus_{X \in \mathscr{C}} Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$ es un generador proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Por tanto, por el lema anterior existe un epimorfismo

$$\alpha : G^{(\Lambda)} \longrightarrow DM$$

en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ con $\Lambda = Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[G, DM]$ y además $G^{(\Lambda)}$ es proyectivo. Por la proposición 4.2.10 tenemos un monomorfismo $\Gamma_M : M \to D'(DM)$ en $Mod(\mathscr{C})$ y por 4.2.12 $D'(\alpha) : D'(DM) \to D'(G^{(\Lambda)})$ es un monomorfismo en $Mod(\mathscr{C})$. Por lo tanto

$$M \xrightarrow{\Gamma_M} D'(DM) \xrightarrow{D'(\alpha)} D'(G^{(\Lambda)}),$$

es un monomorfismo en $Mod(\mathscr{C})$. Además, por 4.2.14 se tiene que $D'(G^{(\Lambda)})$ es inyectivo en $Mod(\mathscr{C})$ pues $G^{(\Lambda)}$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Así, concluimos que la categoría $Mod(\mathscr{C})$ tiene suficientes inyectivos. □

Capítulo 5

Subcategorias de $Mod(\mathscr{C}^{op})$

En este capítulo se estudian detalladamente varias propiedades y caracterizaciones de algunas subcategorías de $Mod(\mathscr{C}^{op})$ utilizadas en [AM74]. Por último, se estudia la noción de pseudokernel en una categoría esqueléticamente pequeña $\mathscr{C}$, esto se hace, con el propósito de calcular la dimensión proyectiva de $mod(\mathscr{C}^{op})$, la cual se concluye es de longitud finita a lo más dos.

5.1. Objetos compactos

En todo este capítulo cada vez que hablemos de $Mod(\mathscr{C}^{op})$, supondremos que $\mathscr{C}$ es una categoría esqueléticamente pequeña y aditiva (ver definición 1.15.2).

Definición 5.1.1. *Se dice que $C \in \mathscr{C}$ es un **objeto compacto** en $\mathscr{C}$ si para todo morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(C, \bigoplus_{i\in I} C_i)$ existe un subconjunto finito $J \subset I$ y un morfismo $\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(C, \bigoplus_{i\in J} C_i)$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in J} C_i \arrow[rr, "U_{JI}"] & & \bigoplus_{i\in I} C_i \\ & C, \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

donde $U_{JI} : \bigoplus_{i\in J} C_i \to \bigoplus_{i\in I} C_i$ es el morfismo inducido por las inclusiones canónicas del coproducto $\{u_i : C_i \to \bigoplus_{i\in I} C_i\}_{i\in J}$.

Observación 5.1.2. *(a) En la definición anterior, el hecho que U_{JI} es el morfismo inducido por las inclusiones $\{u_i : C_i \to \bigoplus_{i\in I} C_i\}_{i\in J}$ significa que U_{JI} es el único morfismo tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in J$*

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in J} C_i \arrow[rr] & & \bigoplus_{i\in I} C_i \\
& C_i, \arrow[ul, "\mu_i"] \arrow[ur, "u_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde $\{u_i : C_i \to \bigoplus_{i\in I} C_i\}_{i\in I}$ *es el coproducto de la familia* $\{C_i\}_{i\in I}$ *y* $\{\mu_i : C_i \to \bigoplus_{i\in J} C_i\}_{i\in J}$ *es el coproducto de la familia* $\{C_i\}_{i\in J}$.

(b) El morfismo U_{JI} *es un monomorfismo.*

Proposición 5.1.3. *Sea* $\mathscr{C}$ *una categoría aditiva con coproductos, entonces un objeto* $C \in \mathscr{C}$ *es compacto si y sólo si el funtor* $Hom_{\mathscr{C}}(C,-) : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$ *preserva coproductos. Es decir ,*

$$Hom_{\mathscr{C}}(C,\bigoplus_{i\in I} C_i) \cong \bigoplus_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}}(C,C_i).$$

Demostración. Veáse una demostración en [MB65], p.75. □

Observación 5.1.4. $Hom_{\mathscr{C}}(-,X) : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Ab}$ *es un objeto compacto en* $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

Demostración. Se tienen los siguientes isomorfismos:

$$
\begin{aligned}
Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),\bigoplus_{i\in I} M_i] &\cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big)(X) \\
&= \bigoplus_{i\in I} M_i(X) \\
&\cong \bigoplus_{i\in I} Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),M_i],
\end{aligned}
$$

donde el primer y último isomorfismo se tienen por el Lema de Yoneda contravariante. Por lo tanto,

$$Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),\bigoplus_{i\in I} M_i] \cong \bigoplus_{i\in I} Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,X),M_i].$$

Luego, por la proposición 5.1.3 se sigue que $Hom_{\mathscr{C}}(-,X) : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ es un objeto compacto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. □

Análogamente, se tiene que $Hom_{\mathscr{C}}(X,-) : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$ es un objeto compacto $Mod(\mathscr{C})$.

Lema 5.1.5. *Sea* $\mathscr{C}$ *una categoría abeliana,* C *y* D *objetos compactos en* $\mathscr{C}$*, entonces* $C\bigoplus D$ *es un objeto compacto en* $\mathscr{C}$.

Demostración. Supongamos que C y D son objetos compactos en $\mathscr{C}$ y sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{C}$. Luego, se tienen los siguientes isomorfismos

$$Hom_{\mathscr{C}}(C,\bigoplus_{i\in I} C_i) \cong \bigoplus_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}}(C,C_i) \quad \text{y} \quad Hom_{\mathscr{C}}(D,\bigoplus_{i\in I} C_i) \cong \bigoplus_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}}(D,C_i).$$

De esta manera, se tiene que

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathscr{C}}(C\bigoplus D,\bigoplus_{i\in I}C_i) &\cong Hom_{\mathscr{C}}(C,\bigoplus_{i\in I}C_i)\prod Hom_{\mathscr{C}}(D,\bigoplus_{i\in I}C_i)\\
&\cong Hom_{\mathscr{C}}(C,\bigoplus_{i\in I}C_i)\bigoplus Hom_{\mathscr{C}}(D,\bigoplus_{i\in I}C_i)\\
&\cong \left[\bigoplus_{i\in I}Hom_{\mathscr{C}}(C,C_i)\right]\bigoplus\left[\bigoplus_{i\in I}Hom_{\mathscr{C}}(D,C_i)\right]\\
&\cong \bigoplus_{i\in I}\left[Hom_{\mathscr{C}}(C,C_i)\bigoplus Hom_{\mathscr{C}}(D,C_i)\right]\\
&\cong \bigoplus_{i\in I}Hom_{\mathscr{C}}(C\bigoplus D,C_i).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Hom_{\mathscr{C}}(C\bigoplus D,\bigoplus_{i\in I}C_i)\cong\bigoplus_{i\in I}Hom_{\mathscr{C}}(C\bigoplus D,C_i)$. Entonces por 5.1.3, $C\bigoplus D$ es un objeto compacto en $\mathscr{C}$. □

5.2. Finitamente generados

Definición 5.2.1. *Decimos que un objeto M en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es **finitamente generado** si dada una familia de objetos $\{M_i\}_{i\in I}$ en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ y un epimorfismo*

$$f:\bigoplus_{i\in I}M_i\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

existe un conjunto finito $J\subset I$ tal que la restricción

$$f_{|\bigoplus_{i\in J}M_i}:\oplus_{i\in J}M_i\longrightarrow M,$$

es un epimorfismo, donde $f_{|\bigoplus_{i\in J}M_i}:=fU_{JI}$ (ver observación 5.1.2).

La siguiente proposición nos dice que todas las "propiedades categóricas" son preservadas por equivalencias de categorías. Esta es la razón por la cual una equivalencia de categorías es importante, pues dos categorías equivalentes las podemos considerar como "iguales".

Proposición 5.2.2. *Si $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ es una equivalencia de categorías. Entonces*

(a) $\mathscr{C}$ tiene kerneles (cokerneles) si y sólo si $\mathscr{D}$ tiene kerneles (cokerneles).

(b) $\mathscr{C}$ tiene coproductos (productos) si y sólo si $\mathscr{D}$ tiene coproductos (productos).

(c) $\mathscr{C}$ es aditiva si y sólo si $\mathscr{D}$ es aditiva, en este caso F y G son funtores aditivos.

(d) $\mathscr{C}$ es normal (conormal) si y sólo si $\mathscr{D}$ es normal (conormal).

Demostración. Como F es equivalencia, existe $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ y equivalencias naturales

$$\varepsilon : GF \to 1_{\mathscr{C}} \quad \text{y} \quad \eta : 1_{\mathscr{D}} \to FG.$$

Demos una idea de como se puede demostrar (a).
Supongamos que $\mathscr{D}$ tiene kerneles. Sea $g : B \to C$ un morfismo en $\mathscr{C}$, luego $F(g) : F(B) \to F(C)$ es un morfismo en $\mathscr{D}$. Entonces, existe $\mu : X \to F(B)$ tal que $\mu = Ker(F(g))$. Luego, tenemos morfismo $G(\mu) : G(X) \to GF(B)$. Como tenemos $\varepsilon : GF \to 1_{\mathscr{C}}$ que es un isomorfismo natural, tenemos un isomorfismo $\varepsilon_B : GF(B) \to B$. Por lo tanto, tenemos un morfismo $\varepsilon_B G(\mu) : G(X) \to B$. Es fácil ver que $\varepsilon_B G(\mu)$ es el kernel de f. □

Proposición 5.2.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y esqueléticamente pequeña. Se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) Sea $\{C_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de objetos en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces el objeto $\bigoplus_{i=1}^n Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es finitamente generado.

(b) Un objeto $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ es finitamente generado si y sólo si existe un epimorfismo

$$\bigoplus_{i=1}^n Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \to M$$

para alguna familia finita $\{C_i\}_{i=1}^n$ en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

(c) Sea $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ finitamente generado. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones.

(c1) Si $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ y $f : M \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ un morfismo, entonces existe un conjunto finito $J \subset I$ tal que $Im(f) \subset \bigoplus_{j\in J} M_j$.

(c2) M es un objeto compacto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

(d) Sea $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(d1) si M_2 es finitamente generado, entonces M_3 es finitamente generado.

(d2) si M_1 y M_3 son finitamente generados, entonces M_2 es finitamente generado.

(e) Sean M_1 y M_2 objetos en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces $M_1 \bigoplus M_2$ es un objeto finitamente generado en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ si y sólo si M_1 y M_2 son finitamente generados.

Demostración.

(a) Supongamos que $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ es un epimorfismo. Luego, como $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, se tiene que existe morfismo $q : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, two heads, "f"'] & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i).
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Al ser $Mod(\mathscr{C}^{op})$ una categoría abeliana se tiene que el morfismo q se puede factorizar a través de su imagen como

$$\begin{tikzcd}
 & Im(q) \arrow[dr, hook, "\gamma"] & \\
\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[ur, two heads, "\beta"] \arrow[rr, "q"'] & & \bigoplus_{i\in I} M_i,
\end{tikzcd}$$

donde β es un epimorfismo y γ es un monomorfismo. Por la observación 5.1.4 y el lema 5.1.5 se tiene que $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ es un objeto compacto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Así, al tener que

$$q \in Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}\left[\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i), \bigoplus_{i\in I} M_i\right].$$

se tiene la existencia de un morfismo

$$\alpha : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in J} M_i.$$

para $J \subseteq I$ un subconjunto finito tal que $q = U_{JI}\alpha$ donde U_{JI} es el morfismo inducido por las inclusiones $\{u_i : M_i \to \bigoplus_{i\in I}\}_{i\in J} M_i$ (ver observación 5.1.2).
Luego, por la propiedad universal de la imagen de q existe un monomorfismo $\delta : Im(q) \hookrightarrow \bigoplus_{i\in J} M_i$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Im(q) \arrow[dd, hook, "\delta"] \arrow[dr, hook, "\gamma"] & \\
\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[ur, two heads, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \bigoplus_{i\in I} M_i \\
 & \bigoplus_{i\in J} M_i \arrow[ur, "U_{JI}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo cual, $Im(q) \subseteq \bigoplus_{i\in J} M_i$. Así, se obtiene que

$$U_{JI}\delta\beta = \gamma\beta = q.$$

De esta manera, por el diagrama (1) se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[dl, two heads, "\beta"'] \arrow[dd, equal] \\
 & Im(q) \arrow[dl, "U_{JI}\delta"'] & \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[rr, "f"'] & & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i).
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$1_{\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)} = fU_{JI}\delta\beta = (fU_{JI})(\delta\beta).$$

Entonces, del hecho que $1_{\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)}$ es un epimorfismo se sigue que (fU_{JI}) es un epimorfismo, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[dl, two heads, "\beta"'] \arrow[dd, equal] \\
 & Im(q) \arrow[dl, "\delta"'] & \\
\bigoplus_{i\in J} M_i \arrow[rr, two heads, "fU_{JI}"'] & & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i).
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, al ser $fU_{JI} = f_{|\bigoplus_{i\in J} M_i}$ se obtiene un epimorfismo,

$$f_{|\bigoplus_{i\in J} M_i} : \bigoplus_{j\in J} M_i \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i),$$

con $J \subset I$ finito. Probándose que $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ es finitamente generado.

(b) $(\Rightarrow)$ Por 4.2.16, sabemos que $G := \bigoplus_{C\in\mathscr{C}} Hom_{\mathscr{C}}(-,C)$ es un generador proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Luego, por 4.2.17, existe un epimorfismo

$$f : \bigoplus_{i\in I} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \twoheadrightarrow M,$$

donde I es un conjunto no necesariamente finito. Entonces, al ser M finitamente generado se tiene que existe $J \subset I$ con J finito tal que

$$f|_{\bigoplus_{i\in J} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)} : \bigoplus_{i\in J} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \twoheadrightarrow M$$

es un epimorfismo.

$(\Leftarrow)$. Supongamos que existe un epimorfismo $\rho : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \to M$ para alguna familia finita $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ de objetos en $\mathscr{C}$.

Consideramos un epimorfismo

$$f : \bigoplus_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow M$$

donde I es un conjunto no necesariamente finito. Se quiere demostrar que existe $J \subset I$ finito tal que

$$f|_{\bigoplus_{i\in J} M_i} : \bigoplus_{i\in J} M_i \twoheadrightarrow M.$$

es un epimorfismo. Como $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, se tiene que existe un morfismo

$$q \in Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}\left[\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i), \bigoplus_{i\in I} M_i\right],$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, two heads, "\rho"] \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, two heads, "f"'] & M.
\end{tikzcd}$$

Luego, del hecho que $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ un objeto compacto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ se sigue que existe un conjunto $J \subset I$ finito y un morfismo

$$\alpha : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in J} M_i$$

tal que $q = U_{JI}\alpha$ donde U_{JI} es el morfismo definido en la observación 5.1.2.
Así, considerando la factorización del morfismo q mediante su imagen se obtiene que existe $\gamma : Im(q) \to \bigoplus_{i\in J} M_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& Im(q) \arrow[dr, hook, "\delta"] \arrow[dd, hook, "\gamma"] & \\
\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[ur, two heads, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \bigoplus_{i\in I} M_i \\
& \bigoplus_{i\in J} M_i. \arrow[ur, "U_{JI}"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces,

$$fU_{JI}\gamma\beta = fU_{JI}\alpha = fq = \rho.$$

Por lo tanto, se obtiene el siquiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[dl, two heads, "\beta"'] \arrow[dd, "\rho"] \\
& Im(q) \arrow[dl, "\gamma"'] & \\
\bigoplus_{i\in J} M_i \arrow[rr, two heads, "fU_{JI}"'] & & M.
\end{tikzcd}$$

Al ser $\rho = (fU_{JI})(\gamma\beta)$ un epimorfismo se sigue que (fU_{JI}) es un epimorfismo, demostrando que el morfismo

$$f|_{\bigoplus_{i\in J} M_i} : \bigoplus_{i\in J} M_i \twoheadrightarrow M,$$

es un epimorfismo. Probándose que M es un objeto finitamente generado en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

(c1) Por el inciso (b) al ser M un objeto finitamente generado se tiene que existe un epimorfismo

$$g : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Al tener un morfismo $f : M \to \bigoplus_{i\in I} M_i$, se puede construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h:=fg"] \\
M \arrow[r, "f"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i.
\end{tikzcd}$$

Luego, como $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ es un objeto compacto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, se tiene que existe $J \subset I$ con J finito y un morfismo

$$\beta : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \longrightarrow \bigoplus_{i\in J} M_i,$$

tal que $h = fg = U_{JI}\beta$ (ver 5.1.2). Por otro lado, considerando la factorización del morfismo fg mediante su imagen se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Im(fg) \arrow[dr, hook, "q"] & \\
\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[ur, two heads, "v"] \arrow[rr, "fg"'] & & \bigoplus_{i\in I} M_i,
\end{tikzcd}$$

con v un epimorfismo y q un monomorfismo. Así, por la propiedad universal de la imagen de fg existe un monomorfismo $\alpha : Im(fg) \hookrightarrow \bigoplus_{i\in J} M_i$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & Im(fg) \arrow[dd, hook, "\alpha"] \arrow[dr, hook] & \\
\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[ur, two heads] \arrow[dr] & & \bigoplus_{i\in I} M_i \\
 & \bigoplus_{i\in J} M_i. \arrow[ur, "U_{JI}"'] &
\end{tikzcd}$$

Finalmente, al ser g un epimorfismo se tiene que $Im(fg) \cong Im(f)$. Por lo tanto, $Im(f) \subset \bigoplus_{i\in J} M_i \subset \bigoplus_{i\in I} M_i$.

(c2) Ahora veamos que M es un objeto compacto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Sea $f : M \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ un morfismo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, consideremos la factorización de f a través de su imagen

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, hook, "q'"] & \\ M \arrow[ur, two heads, "v'"] \arrow[rr, "f"'] & & \bigoplus_{i\in I} M_i, \end{tikzcd}$$

donde v' es un epimorfismo y q' es un monomorfismo. Por el inciso $(c1)$, tenemos que $Im(f) \subseteq \bigoplus_{i\in J} M_i$ para algún $J \subseteq I$ finito. Es decir, existe un monomorfismo $\gamma : Im(f) \to \bigoplus_{i\in J} M_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Im(f) \arrow[dd, hook, "\gamma"'] \arrow[dr, hook, "q'"] & \\ & \bigoplus_{i\in I} M_i \\ \bigoplus_{i\in J} M_i. \arrow[ur, "U_{JI}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, tenemos que $f = q'v' = U_{JI}\gamma q'$. De esta manera, se obtiene una factorización de f a través de U_{JI} con $J \subset I$ finito. Probándose que M es un objeto compacto en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

(d1) Supóngase que $M_2 \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ es finitamente generado, entonces por el inciso (c) se tiene un epimorfismo

$$\rho : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \longrightarrow M_2,$$

con $\{C_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de objetos en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Se define el morfismo

$$\rho' : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \longrightarrow M_3.$$

en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ como $\rho' := g\rho$. De esta manera, ρ' es un epimorfismo pues ρ y g son epimorfismos. Así, por el inciso (b) se tiene que $M_3 \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ es finitamente generado.

(d2) Sea

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow[f]{} M_2 \xrightarrow[g]{} M_3 \longrightarrow 0.$$

una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ con M_1 y M_3 finitamente generados. Por el inciso (b) existen dos epimorfismos,

$$\rho_1 : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \twoheadrightarrow M_1 \quad \text{y} \quad \rho_3 : \bigoplus_{i=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \twoheadrightarrow M_3$$

en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Como g es un epimorfismo y $\bigoplus_{i=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ se obtiene un morfismo

$$\rho_3' : \bigoplus_{i=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \longrightarrow M_2,$$

tal que $\rho_3 = g\rho_3'$. Así, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[d, "\rho_1"'] \arrow[dr, "f\rho_1"] & & \bigoplus_{i=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \arrow[dl, dashed, "\rho_3'"'] \arrow[d, "\rho_3"] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[r, "g"'] & M_3 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Para simplificar la notación, sean $P_1 := \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ y $P_3 := \bigoplus_{i=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$. Luego, por la propiedad universal del coproducto $P_1 \bigoplus P_3$, existe $\rho_2 : P_1 \bigoplus P_3 \longrightarrow M_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, "f\rho_1"'] & P_1 \bigoplus P_3 \arrow[d, dashed, "\rho_2"] & P_3 \arrow[l, hook', "i_2"'] \arrow[dl, "\rho_3'"] \\
 & M_2, &
\end{tikzcd} \tag{*}$$

donde i_1 y i_2 son las inclusiones del coproducto $P_1 \bigoplus P_3$. Sean los morfismos $\rho_1' : P_1 \bigoplus P_3 \longrightarrow P_1$ y $\rho_2' : P_1 \bigoplus P_3 \longrightarrow P_3$ las respectivas proyecciones del coproducto $P_1 \bigoplus P_3$. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & P_1 \bigoplus P_3 \arrow[r, "\rho_2'"] \arrow[d, "\rho_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\rho_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[r, "g"'] & M_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{**}$$

En efecto, el cuadrado izquierdo del diagrama (**) es conmutativo por la conmutatividad de (*). Veamos que el cuadrado derecho del diagrama (**) es también un cuadrado conmutativo. Como se tiene que

$$\rho_3\rho_2' = g\rho_3'\rho_2' = g(\rho_2 i_2)\rho_2' = g\rho_2(i_2\rho_2').$$

Luego, considerando que $\rho_2' i_1 = 0, \rho_1' i_2 = 0, \rho_2' i_2 = 1_{P_3}$ y $\rho_1' i_1 = 1_{P_1}$ y

$$1_{P_1 \bigoplus P_3} = i_1\rho_1' + i_2\rho_2'$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
g\rho_2 =& g\rho_2(1_{P_1 \bigoplus P_2}) = \\
=& g\rho_2(i_2\rho_2') + g\rho_2(i_1\rho_1') \\
=& g\rho_2 i_2\rho_2' + g(\rho_2 i_1)\rho_1' \\
=& g\rho_2 i_2\rho_2' + g(f\rho_1)\rho_1' \\
=& g\rho_2 i_2\rho_2' \\
=& \rho_3\rho_2'.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g\rho_2 = \rho_3\rho_2'$. Así, el cuadrado derecho de (**) es conmutativo y en consecuencia todo el diagrama (**) es conmutativo. Luego se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& Ker(\rho_1) \arrow[r, "\bar{f}'"] \arrow[d] & Ker(\rho_2) \arrow[r, "\bar{g}'"] \arrow[d] & Ker(\rho_3) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & P_1 \bigoplus P_3 \arrow[r, "\rho_2'"] \arrow[d, "\rho_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\rho_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M_2 \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& Coker(\rho_1) \arrow[r, "\bar{f}"'] & Coker(\rho_2) \arrow[r, "\bar{g}"'] & Coker(\rho_3). &
\end{tikzcd}$$

Por el Lema de la serpiente (véase A.0.2 en el apéndice) y el diagrama anterior, se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$O \longrightarrow Ker(\rho_1) \xrightarrow[\bar{f}']{} Ker(\rho_2) \xrightarrow[\bar{g}']{} Ker(\rho_3) \overset{\delta}{\dashrightarrow} Coker(\rho_1) \xrightarrow[\bar{f}]{} Coker(\rho_2) \xrightarrow[\bar{g}]{} Coker(\rho_3) \longrightarrow 0.$$

Como ρ_1 y ρ_3 son epimorfismos, entonces $Coker(\rho_1) = Coker(\rho_3) = 0$. Así tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Coker(\rho_2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $Coker(\rho_2) = 0$ y en consecuencia ρ_2 es un epimorfismo. Probándose por inciso (b) que $M_2 \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ es finitamente generado.

(d) $(\Leftarrow)$. Sean M_1 y M_2 objetos finitamente generados en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Entonces, al considerar el coproducto $\{M_i \to M_1 \bigoplus M_2\}_{i=1,2}$ se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow[i_1]{} M_1 \bigoplus M_2 \xrightarrow[\rho_2]{} M_2 \longrightarrow 0$$

donde i_1 es la primera inclusión de coproducto y ρ_2 es la segunda proyección del coproducto. Por lo tanto, se sigue del inciso (d2) que $M_1 \bigoplus M_2$ es un objeto finitamente generado en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Supongamos que $M_1 \bigoplus M_2$ es finitamente generado. Consideremos sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \bigoplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0.$$

Por el inciso (d1), de esta proposición tenemos que M_2 es finitamente generado. De la misma manera se demuestra que M_1 es finitamente generado. □

Definición 5.2.4. *Denotamos por $\rho(\mathscr{C})$ a la sucategoría plena de $Mod(\mathscr{C}^{op})$ cuyos objetos son los objetos $C \in Mod(\mathscr{C}))$ que son proyectivos y finitamente generados.*

Proposición 5.2.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña y aditiva.*

(a) Un objeto M en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ está en $\rho(\mathscr{C})$ si y sólo si M es sumando directo de un coproducto finito $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i)$.

(b) Sea $e : M \to M$ un morfismo idempotente en $\rho(\mathscr{C})$, entonces $Ker(e), Ker(1-e) \in \rho(\mathscr{C})$. Además,

$$M \cong Ker(e) \oplus Ker(1-e).$$

Demostración.

(a) ($\Rightarrow$) Si $M \in \rho(\mathscr{C})$, entonces M es un objeto finitamente generado y proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Al ser M finitamente generado en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ se sigue por inciso (b) de la proposición 5.2.3 que existe un epimorfismo

$$f : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, al ser M un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ se sigue que existe un morfismo $q : M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "1_M"] \\ \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \arrow[r, two heads, "f"'] & M. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $fq = 1_M$, es decir, el morfismo f se escinde y entonces M es un sumando directo de $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i)$.

($\Leftarrow$) Si M es un sumando directo de $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i)$ existe un objeto $M' \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ tal que $M' \bigoplus M \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i)$. Luego, existe proyección canónica

$$p_2 : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Por 5.2.3(b), tenemos que M es finitamente generado. Finalmente, por 3.4.6, se sigue que M es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Probándose que $M \in \rho(\mathscr{C})$.

(b) Si el morfismo $e : M \to M$ en $\rho(\mathscr{C})$ es idempotente entonces $1 - e : M \to M$ en $\rho(\mathscr{C})$ es también idempotente. Así, como $\rho(\mathscr{C}) \subset Mod(\mathscr{C}^{op})$ se sigue que los morfismos e y $1-e$ tienen kernel en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Sean

$$q_2 = Ker(1-e) : Ker(1-e) \to M \quad \text{y} \quad q_1 = Ker(e) : Ker(e) \to M$$

los respectivos kerneles de $1-e$ y e. Luego, por la proposición 1.15.13 se tiene que

$$M \cong Ker(e) \oplus Ker(1-e),$$

donde q_1 y q_2 son las inclusiones del coproducto. De esta manera, al ser $Ker(e)$ y $Ker(1-e)$ sumandos directos de $M \in \rho(\mathscr{C})$ se tiene por el inciso (a) que $Ker(e)$ y $Ker(1-e)$ también están en $\rho(\mathscr{C})$. $\square$

Proposición 5.2.6. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña y aditiva. Entonces, el funtor $P:\mathscr{C}\to\rho(\mathscr{C})$ dado por $P(C):=Hom_{\mathscr{C}}(-,C)$ para $C\in\mathscr{C}$, es una equivalencia de categorías si y sólo si satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\mathscr{C}$ tiene coproductos finitos.

(ii) Si $C\in\mathscr{C}$ y $e:C\to C$ es un morfismo idempotente en $\mathscr{C}$, entonces $e:C\to C$ tiene kernel en $\mathscr{C}$.

Demostración. Primero notemos que por 3.3.6, tenemos que P es un funtor fiel y pleno.

($\Rightarrow$) Supongamos que el funtor $P:\mathscr{C}\to\rho(\mathscr{C})$ es una equivalencia de categorías, es decir, existe un funtor $P':\rho(\mathscr{C})\to\mathscr{C}$ y equivalencias naturales

$$\tau:P'P\to 1_{\mathscr{C}} \quad \text{y} \quad \tau':PP'\to 1_{\rho(\mathscr{C})}.$$

(i). Por 5.2.2, se sigue que $\mathscr{C}$ tiene coproductos finitos pues $\rho(\mathscr{C})$ tiene coproductos finitos por 5.2.3(e) y 3.4.6.
(ii). Sea $e:C\to C$ un idempotente, entonces $F(e)$ es un idempotente en $\rho(\mathscr{C})$. Por 5.2.5, tenemos que $F(e)$ tiene kernel en $\rho(\mathscr{C})$. Luego, por 5.2.2, concluimos que e tiene kernel en $\mathscr{C}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathscr{C}$ tiene coproductos finitos y que $\mathscr{C}$ tiene kerneles de idempotentes. Primero, notemos que por el inciso (b) de 3.3.6 se tiene que el funtor $P:\mathscr{C}\to\rho(\mathscr{C})$ ya es fiel y pleno. Por lo tanto, por la proposición 1.2.20 basta ver que el funtor $P:\mathscr{C}\to\rho(\mathscr{C})$ es denso. Es decir, se quiere ver que para cada $Y\in\rho(\mathscr{C})$ existe un objeto $X\in\mathscr{C}$ tal que $P(X)=Hom_{\mathscr{C}}(-,X)\cong Y$.
Consideremos la subcategoría plena $\mathrm{Im}(P)$ de $\rho(\mathscr{C})$ cuyos objetos son los objetos $Z\in\rho(\mathscr{C})$ tal que existe $W\in\mathscr{C}$ tal que $P(W)\simeq Z$.
De esta manera, tenemos que el funtor

$$P:\mathscr{C}\longrightarrow \mathrm{Im}(P)$$

es un funtor fiel, pleno y denso. Por lo tanto, existe un funtor $P':\mathrm{Im}(P)\longrightarrow\mathscr{C}$ y equivalencias naturales

$$\tau:P'P\to 1_{\mathscr{C}} \quad \text{y} \quad \tau':PP'\to 1_{\mathrm{Im}(P)}.$$

Sea $Y\in\rho(\mathscr{C})$, por el inciso (a) de la proposición 5.2.5 se tiene que existe otro objeto $Y'\in\rho(\mathscr{C})$ tal que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)\cong Y\bigoplus Y',$$

para alguna familia finita $\{C_i\}_{i=1}^n$ de objetos en $\mathscr{C}$. Afirmamos que $Y\bigoplus Y'\in\mathrm{Im}(P)$. En efecto, como $\mathscr{C}$ tiene coproductos finitos tenemos que existe $C:=\bigoplus_{i=1}^n C_i\in\mathscr{C}$. Luego, como se tiene que $Hom_{\mathscr{C}}(C',C)\simeq\bigoplus_{i=1}^n Hom_{\mathscr{C}}(C',C_i)$ para todo $C'\in\mathscr{C}$, concluimos que

$$Hom_{\mathscr{C}}(-,C)\simeq\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)\simeq Y\bigoplus Y'.$$

Por lo tanto, $Y\bigoplus Y' \in \operatorname{Im}(P)$.
Sean $i_Y : Y \to Y\bigoplus Y'$ y $i_{Y'} : Y' \to Y\bigoplus Y'$ las inclusiones y $p_Y : Y\bigoplus Y' \to Y$ y $p_{Y'} : Y\bigoplus Y' \to Y'$ las proyecciones del coproducto $Y\bigoplus Y'$.
Luego, definimos un morfismo $\theta : Y\bigoplus Y' \to Y\bigoplus Y'$ en $\rho(\mathscr{C})$ como $\theta := i_{Y'}p_{Y'}$:

$$\begin{tikzcd} Y\bigoplus Y' \arrow[r, "p_{Y'}"'] \arrow[rr, bend left, "\theta"] & Y' \arrow[r, "i_{Y'}"'] & Y\bigoplus Y'. \end{tikzcd}$$

El morfismo θ es idempotente, pues

$$\begin{aligned} \theta\theta &= (i_{Y'}p_{Y'})(i_{Y'}p_{Y'}) \\ &= (i_{Y'}p_{Y'}i_{Y'}p_{Y'}) \\ &= i_{Y'}1_{Y'}p_{Y'} \\ &= i_{Y'}p_{Y'} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

Consideremos $e := P'(\theta) : A \longrightarrow A$ en $\mathscr{C}$ con $A := P'(Y\bigoplus Y')$.
Como θ es idempotente, tenemos que e es un morfismo idempotente en $\mathscr{C}$. Luego, por hipótesis existe un morfismo

$$\mu : U \longrightarrow A$$

con $\mu = \operatorname{Ker}(e)$. Por otro lado, sabemos que tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i_Y} Y\bigoplus Y' \xrightarrow{p_{Y'}} Y' \longrightarrow 0,$$

es decir, $i_Y = \operatorname{Ker}(p_{Y'})$. Luego, como $i_{Y'}$ es un monomorfismo, tenemos que

$$i_Y = \operatorname{Ker}(i_{Y'}p_{Y'}) = \operatorname{Ker}(\theta), \quad \text{(ver 1.10.6).}$$

Es decir, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i_Y} Y\bigoplus Y' \xrightarrow{\theta} Y\bigoplus Y' .$$

Afirmamos que $P(U) \simeq Y$. En efecto, sabemos que P preserva kerneles (ver 3.2.14), entonces se tiene la siguiente sucesión exacta en $\operatorname{Mod}(\mathscr{C}^{op})$

$$0 \longrightarrow P(U) \xrightarrow{P(\mu)} P(A) \xrightarrow{P(e)} P(A).$$

Ahora, como tenemos equivalencia natural $\tau' : PP' \longrightarrow 1_{\operatorname{Im}(P)}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P(U) \arrow[r, "P(\mu)"] & PP'(Y\bigoplus Y') \arrow[r, "PP'(\theta)"] \arrow[d, "\tau'_{Y\bigoplus Y'}"'] & PP'(Y\oplus Y') \arrow[d, "\tau'_{Y\bigoplus Y'}"'] \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i_Y"] & Y\bigoplus Y' \arrow[r, "\theta"] & Y\bigoplus Y', \end{tikzcd}$$

donde los renglones son exactos y $\tau'_{Y\bigoplus Y'}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, por la propiedad universal del kernel de θ, existe un único morfismo $\gamma : P(U) \longrightarrow Y$ que hace conmutar el diagrama anterior. Luego, como $\tau'_{Y\bigoplus Y'}$ es un isomorfismo, se concluye que γ es un isomorfismo.
Probándose que $P(U) \simeq Y$ y entonces P es un funtor denso. De donde, concluimos que
$P : \mathscr{C} \longrightarrow \rho(\mathscr{C})$ es una equivalencia de categorías. □

Recordemos que a un objeto M en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ lo llamaremos un $\mathscr{C}^{op}$-**módulo**.

Definición 5.2.7. *Sea M un $\mathscr{C}^{op}$-módulo, se dice que $M' \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ es un $\mathscr{C}^{op}$-**submódulo** de M si $M'(C) \subseteq M(C)$ para todo $C \in \mathscr{C}$.*

Definición 5.2.8. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría arbitraria y A un objeto de $\mathscr{C}$ Sea $\mathscr{S}$ una clase de subobjetos de A se dice una **clase representativa** de subobjetos de A si todo subobjeto de A es isomorfo a un subobjeto en la clase $\mathscr{S}$. Si todo $A \in \mathscr{C}$ tiene una clase representativa la cual es un conjunto, diremos que $\mathscr{C}$ es **localmente pequeña**.*

Observación 5.2.9. *La noción de que $\mathscr{C}$ sea localmente pequeña es también conocida como que $\mathscr{C}$ es una categoría **bien potenciada** (en inglés **well-powered**).*

Proposición 5.2.10. *Sea $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ una subcategoría pequenã y densa de $\mathscr{C}$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones.*

(a) Si $I : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ es el funtor inclusión, entonces existe un funtor

$$\text{res} : Mod(\mathscr{C}^{op}) \longrightarrow Mod(\mathscr{B}^{op}), \qquad res(M) = M \circ I,$$

(para simplificar la notación, hacemos $M|_{\mathscr{B}} := res(M)$).

(b) Para $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$ la colección de $\mathscr{B}^{op}$-submódulos de $M|_{\mathscr{B}}$ es un conjunto.

(c) $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es localmente pequeña.

(d) La subcategoría $\rho(\mathscr{C}) \subset Mod(\mathscr{C}^{op})$ es esqueléticamente pequeña.

Demostración.

(a) Ejercicio al lector.

(b) Sea $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces para $C \in \mathscr{C}$ se tiene que $M(C) \in$ **Ab**. Para cada $C \in \mathscr{C}$ se define el siguiente conjunto

$$S(C) := \{X \subseteq M(C) \mid X \text{ es un subgrupo de } M(C)\} \subseteq \mathscr{P}(M(C)).$$

donde $\mathscr{P}(M(C))$ denota al conjunto potencia de $M(C)$.
Se sabe que la clase de los objetos de $\mathscr{C}$ no es necesariamente un conjunto pero la clase de los objetos $Obj(\mathscr{B})$ si es un conjunto. Por lo tanto,

$$\prod_{C\in Obj(\mathscr{B})} S(C) := \{(X_C)_{C\in Obj(\mathscr{B})} \mid X_C \in S(C),\ \forall C \in Obj(\mathscr{B})\},$$

es un conjunto. Sea $\mathscr{X}_M$ la colección de $\mathscr{B}^{op}$-submódulos de $M|_{\mathscr{B}}$.
Ahora bien, para M' un $\mathscr{B}^{op}$-submódulo de $M|_{\mathscr{B}}$ se tiene que $M'(C) \in S(C)$ para cada $C' \in \mathscr{B}$. Luego, se define la siguiente correspondencia

$$\phi : \mathscr{X}_M \longrightarrow \prod_{C\in Obj(\mathscr{B})} S(C)$$

como $\phi(M') = (M'(C))_{C\in\mathscr{B}}$ para $M' \in \mathscr{X}_M$.
Ahora veamos que dicha correspondencia es inyectiva. Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{X}_M$ tales que $M_1 \neq M_2$, es decir, $M_1(C') \neq M_2(C')$ para algún $C' \in \mathscr{B}$. Pero

$$\phi(M_1) = (M_1(C'))_{C'\in\mathscr{B}},$$

$$\phi(M_2) = (M_2(C'))_{C'\in\mathscr{B}},$$

y en la C'-ésima entrada, los elementos $(M_1(C'))_{C'\in\mathscr{B}}$ y $(M_2(C'))_{C'\in\mathscr{B}}$ son distintos. Por lo tanto, la correspondencia ϕ es inyectiva. Probándose que $\mathscr{X}_M$ es un conjunto.

(c) Sean $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$, consideremos la clase $\mathscr{Y}_M$ de submódulos de M con las siguientes propiedades:

(i) Todo submódulo de M es isomorfo a un submódulo en la clase $\mathscr{Y}$,

(i) Si N y N' pertenecen a $\mathscr{Y}_M$ con $N \neq N'$, entonces N y N' no son isomorfos como submódulos de M.

Es decir, $\mathscr{Y}_M$ es una clase que representa a la clase de isomorfía de submódulos de M. Veamos que $\mathscr{Y}_M$ es un conjunto. En efecto, definimos asignación

$$\psi : \mathscr{Y}_M \longrightarrow \mathscr{X}_M,$$

como $\psi(N) = N|_{\mathscr{B}}$, donde $\mathscr{X}_M$ es el conjunto de todos los $\mathscr{B}^{op}$-submódulos de $M|_{\mathscr{B}}$.
Primero, es claro que si N es un $\mathscr{C}^{op}$-submódulo de M, entonces $N|_{\mathscr{B}}$ es un $\mathscr{B}^{op}$-submódulo de $M|_{\mathscr{B}}$, por lo tanto la signación si tiene como codominio a $\mathscr{X}_M$.
Supongamos que $N, N' \in \mathscr{Y}_M$ son tales que $N|_{\mathscr{B}} = N|_{\mathscr{B}}$. Veamos que N y N' son isomorfos. Para cada $C \in \mathscr{C}$ existe un isomorfismo $\alpha_C : C \to C'$ con $C' \in \mathscr{B}$. Notemos que para $C \in \mathscr{B}$ podemos

escoger $\alpha_C = 1_C$. Como N y N' son submódulos de M, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} M(C) \arrow[r, "M(\alpha_C)"] & M(C') \\ N(C) \arrow[u, hook, "i_{N(C)}"] \arrow[r, "N(\alpha_C)"'] & N(C'), \arrow[u, hook, "i_{N(C')}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M(C) \arrow[r, "M(\alpha_C)"] & M(C') \\ N'(C) \arrow[u, hook, "i_{N'(C)}"] \arrow[r, "N'(\alpha_C)"'] & N'(C'), \arrow[u, hook, "i_{N'(C')}"'] \end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales $i_{N(C)}, i_{N(C')}, i_{N'(C)}, i_{N'(C')}$ son las inclusiones como subconjunto y $N(\alpha_C)$, $N'(\alpha_C)$ son isomorfismos. Pero $N(C') = N'(C')$ (pues $C' \in \mathscr{B}$) y entonces $i_{N(C')} = i_{N'(C')}$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M(C) \arrow[r, "M(\alpha_C)"] & M(C') \arrow[r, "M(\alpha_C)^{-1}"] & M(C) \\ N(C) \arrow[u, hook, "i_{N(C)}"] \arrow[r, "N(\alpha_C)"'] & N(C') \arrow[u, hook, "i_{N(C')}"] \arrow[r, "N'(\alpha_C)^{-1}"'] & N'(C). \arrow[u, hook, "i_{N'(C)}"] \end{tikzcd}$$

Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N(C) \arrow[rr, "N'(\alpha_C)^{-1}N(\alpha_C)"] \arrow[dr, "i_{N(C)}"'] & & N'(C) \arrow[dl, "i_{N'(C)}"] \\ & M(C) & \end{tikzcd}$$

es decir, $N(C)$ es isomorfo a $N'(C')$ como subobjeto de $M(C)$. Veamos que

$$\eta := \{\eta_C = N'(\alpha_C)^{-1}N(\alpha_C) : N(C) \longrightarrow N'(C)\}_{C\in\mathscr{C}}$$

definen un isomorfismo natural $\eta : N \to N'$. En efecto, sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Entonces tenemos un morfismo de grupos abelianos $M(f) : M(A) \to M(B)$. Luego tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} M(A) \arrow[r, "M(f)"] & M(B) \\ N(A) \arrow[u, hook, "i_{N(A)}"] \arrow[r, "N(f)"'] & N(B), \arrow[u, hook, "i_{N(B)}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M(A) \arrow[r, "M(f)"] & M(B) \\ N'(A) \arrow[u, hook, "i_{N'(A)}"] \arrow[r, "N'(f)"'] & N'(B) \arrow[u, hook, "i_{N'(B)}"'] \end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales $i_{N(A)}, i_{N(B)}, i_{N'(A)}, i_{N'(B)}$ son las inclusiones como subconjunto. Por la construcción de η, tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} N(A) \arrow[rr, "\eta_A = N'(\alpha_A)^{-1}N(\alpha_A)"] \arrow[dr, "i_{N(A)}"'] & & N'(A) \arrow[dl, "i_{N'(A)}"] \\ & M(A) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N(B) \arrow[rr, "\eta_B = N'(\alpha_B)^{-1}N(\alpha_B)"] \arrow[dr, "i_{N(B)}"'] & & N'(B) \arrow[dl, "i_{N'(B)}"] \\ & M(B). & \end{tikzcd}$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "N(f)"'] & N'(A) \arrow[d, "N'(f)"] \\ N(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & N'(B) \end{tikzcd}$$

En efecto, $i_{N'(B)}N'(f)\eta_A = M(f)i_{N'(A)}\eta_A = M(f)i_{N(A)} = i_{N(B)}N(f) = i_{N'(B)}\eta_B N(f)$ y como $i_{N'(B)}$ es mono, podemos cancelar y obtenemos que el diagrama de arriba conmuta. Por lo tanto $\eta : N \to N'$ es un isomorfismo funtorial y además por construcción se tiene que el siguiente diagrama conmuta en $Mod(\mathrm{C}^{op})$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "i_N"'] & & N' \arrow[dl, "i_{N'}"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Es decir, N y N' son isomorfos como submódulos de M. Luego, por la segunda propiedad que define a la clase $\mathscr{Y}_M$, tenemos que $N = N'$. De esta manera ψ es inyectiva y como $\mathscr{X}$ es un conjunto por el inciso (b), tenemos que $\mathscr{Y}_Y$ es un conjunto. Luego como todo submódulo de M es isomorfo a un elemento de $\mathscr{Y}_M$ (la condición (i) que define $\mathscr{Y}_M$), tenemos que $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es localmente pequeña.

(d) Veamos que $\rho(\mathscr{C})$ es esqueléticamente pequeña.
Sea $\mathscr{C}'$ una subcategoría densa de $\mathscr{C}$. Por 4.2.16, tenemos que

$$G := \bigoplus_{X\in\mathscr{C}'} Hom_{\mathscr{C}}(-,X)$$

es un generador proyectivo de $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Consideremos

$$G^{(\mathbb{N})} \in Mod(\mathscr{C}^{op}).$$

Sea $M \in \rho(\mathscr{C})$, entonces existe $M' \in \rho(\mathscr{C})$ tal que $M' \bigoplus M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ para alguna familia $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ de objetos en $\mathscr{C}$. Como $\mathscr{C}'$ es densa, existen isomorfismos $\alpha_{C_i} : C_i \to X_i$ con $X_i \in \mathscr{C}'$. Luego, tenemos que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,X_i).$$

Entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ es isomorfo a un submódulo de $G^{(\mathbb{N})}$. Luego, M es isomorfo a un submódulo de $G^{(\mathbb{N})}$. Sea $\mathscr{Y}_{G^{(\mathbb{N})}}$ el conjunto (ver inciso (c)) de representantes de las clases de isomorfismo de submódulos de $G^{(\mathbb{N})}$.
Por definición de $\mathscr{Y}_{G^{(\mathbb{N})}}$, tenemos que M es isomorfo a un único elemento $Y_M \in \mathscr{Y}_{G^{(\mathbb{N})}}$. Sea $\mathscr{A}$ la subcategoría plena de $\rho(\mathscr{C})$ cuyos objetos son los elementos de $\mathscr{Y}_{G^{(\mathbb{N})}}$. Luego, tenemos que $\mathscr{A}$ es una subcategoría densa de $\rho(\mathscr{C})$. Probándose que $\rho(\mathscr{C})$ es una categoría esqueléticamente pequeña. $\square$

5.3. Variedades de Annuli y generadores aditivos

Definición 5.3.1. *Una categoría esqueléticamente pequeña $\mathscr{V}$ es llamada* ***variedad de Annuli*** *si:*

(a) $\mathscr{V}$ es aditiva y con coproductos finitos,

(b) todo morfismo idempotente $e \in \mathscr{V}$ tiene un kernel en $\mathscr{V}$.

Definición 5.3.2. *Sea $\mathscr{V}$ una variedad de Annuli, un* ***generador aditivo para*** *$\mathscr{V}$ es una pareja $(G, \mathscr{U})$ donde $\mathscr{U}$ es una categoría aditiva y se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $G : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ es un funtor fiel y pleno,

(b) para cada objeto $V \in \mathscr{V}$ existe familia finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de objetos en $\mathscr{U}$ tal que V es isomorfo a un sumando directo de $\bigoplus_{i \in I} G(U_i)$.

Ejemplo 5.3.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña y aditiva. Por 5.2.10(d), $\rho(\mathscr{C})$ es esqueléticamente pequeña. Por 3.3.6, tenemos que el funtor de representación de Yoneda $P : \mathscr{C} \to \rho(\mathscr{C})$ es fiel y pleno. Por 5.2.5, tenemos que $M \in \rho(\mathscr{C})$ si y sólo si es sumando directo de un coproducto finito $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i)$ para alguna familia $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ de objetos en $\mathscr{C}$. Por lo tanto el par $(P, \mathscr{C})$ es un generador aditivo de $\rho(\mathscr{C})$.*

Proposición 5.3.4. *Sean $G : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ un generador aditivo para una variedad de annuli $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ una categoría aditiva con coproductos finitos y tal que los morfismos idempotentes tienen kerneles. Entonces, dado un funtor aditivo y covariante $F : \mathscr{U} \to \mathscr{W}$, existe un único (salvo isomorfismos) funtor aditivo $F' : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & \mathscr{V} \arrow[dl, "F'"] \\
\mathscr{W}. &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Construyamos F' en varios pasos.

(1) Sea $V \in \mathscr{V}$. Si $V = G(U)$ para algún $U \in Obj(\mathscr{U})$ entonces se define $F'(V) := F(U)$.
Sea $f : V \to V'$ un morfismo en $\mathscr{V}$ tal que $V = G(U)$ y $V' = G(U')$ para algunos $U, U' \in \mathscr{U}$. Como G es fiel y pleno, existe un único morfismo $f' : U \to U'$ tal que $G(f') = f$. En este caso, definimos $F'(f) := F(f')$.

(2) Luego, se puede extender F' a todo objeto V tal que $V \simeq G(U)$ para algún $U \in \mathscr{U}$.

(3) Denotemos por $\mathrm{Sum}(G(\mathscr{U}))$ a la subcategoría plena de $\mathscr{V}$ cuyos objetos son los objetos $V \in \mathscr{V}$ para los cuales existe una familia finita $\{U_i\}_{i\in I}$ de objetos en $\mathscr{U}$ tal que $V \simeq \bigoplus_{i\in I} G(U_i)$. Veamos que podemos extender F a $\mathrm{Sum}(G(\mathscr{U}))$.
En efecto, si $V \simeq \bigoplus_{i=1}^n G(U_i)$, entonces definimos $F'(V) := \bigoplus_{i=1}^n F(U_i)$.
Sea $f : V \longrightarrow V'$ un morfismo en $\mathscr{V}$ tal que $V \simeq \bigoplus_{i=1}^n G(U_i)$ y $V' \simeq \bigoplus_{j=1}^m G(U_j)$ para algunas familias $\{U_i\}_{i=1}^n$ y $\{U_j\}_{j=1}^m$ de objetos en $\mathscr{U}$. Salvo isomorfismos f está representado por la matriz

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada $f_{ij} : G(U_j) \to G(U_i)$. Como G es fiel y pleno existe un único morfismo $u_{ij} : U_j \to U_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$ tal que $f_{ij} = G(u_{ij})$. Luego, definimos $F'(f) : \bigoplus_{i=1}^n F(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m F(U_j)$ como el morfismo que esta representado por la matriz

$$F'(f) = \begin{pmatrix} F(u_{11}) & F(u_{12}) & \dots & F(u_{1n}) \\ F(u_{21}) & F(u_{22}) & \dots & F(u_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(u_{m1}) & F(u_{m2}) & \dots & F(u_{mn}) \end{pmatrix}$$

Veamos que esto define un funtor en $\mathrm{Sum}(G(\mathscr{U}))$. En efecto, sean $f : \bigoplus_{i=1}^n G(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^m G(U_j)$ y $g : \bigoplus_{j=1}^m G(U_j) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^p G(U_k)$, representados por las matrices

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{km} \end{pmatrix}$$

Tenemos que $h := gf$ esta representado por la matriz

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{k1} & h_{k2} & \dots & h_{kn} \end{pmatrix},$$

donde $h_{rs} := \sum_{l=1}^m g_{rl} f_{ls} : G(U_s) \to G(U_r)$. Luego, existen únicos $v_{rs} : U_s \to U_r$ tal que $G(v_{rs}) = h_{rs}$. Entonces por definición de F', se tiene que $F'(gf)$ esta representado por la matriz

$$F'(gf) = \begin{pmatrix} F(v_{11}) & F(v_{12}) & \dots & F(v_{1n}) \\ F(v_{21}) & F(v_{22}) & \dots & F(v_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(v_{k1}) & F(v_{k2}) & \dots & F(v_{kn}) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $F'(f)$ y $F'(g)$ están representados por la matrices

$$F'(f) = \begin{pmatrix} F(u_{11}) & F(u_{12}) & \dots & F(u_{1n}) \\ F(u_{21}) & F(u_{22}) & \dots & F(u_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(u_{m1}) & F(u_{m2}) & \dots & F(u_{mn}) \end{pmatrix} \quad F'(g) = \begin{pmatrix} F(u'_{11}) & F(u'_{12}) & \dots & F(u'_{1m}) \\ F(u'_{21}) & F(u'_{22}) & \dots & F(u'_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(u'_{k1}) & F(u'_{k2}) & \dots & F(u'_{km}) \end{pmatrix}$$

donde $u_{ij} : U_j \to U_i$ y $u'_{pq} : U_q \to U_p$ son los únicos morfismos tales que $G(u_{ij}) = f_{ij}$ y $G(u'_{pq}) = g_{pq}$. Ahora bien, $F'(g)F'(f)$ tiene por matriz asociada

$$F'(g)F'(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix},$$

donde $\alpha_{rs} := \sum_{l=1}^{m} F(u'_{rl})F(u_{ls}) : F(U_s) \to F(U_r)$. Como F es aditivo, se tiene que $\alpha_{rs} = F(\sum_{l=1}^{m} u'_{rl}u_{ls})$. Por lo tanto,

$$G(\sum_{l=1}^{m} u'_{rl}u_{ls}) = \sum_{l=1}^{m} G(u'_{rl})G(u_{ls}) = \sum_{l=1}^{m} g_{rl}f_{ls} = h_{rs} = G(v_{rs}),$$

como G es fiel, tenemos que $\sum_{l=1}^{m} u'_{rl}u_{ls} = v_{rs}$ y de esta manera obtenemos que

$$\alpha_{rs} = F(\sum_{l=1}^{m} u'_{rl}u_{ls}) = F(v_{rs}).$$

Probańdose que $F'(gf) = F'(g)F'(f)$ y de la misma manera se prueba que $F'(1_V) = 1_{F'(V)}$.
Por lo tanto, F' es un funtor en $\mathrm{Sum}(G(\mathscr{U}))$.
Ahora veamos que F' es aditivo. Sean $f, g : \bigoplus_{i=1}^{n} G(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} G(U_j)$ representados por las matrices

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}$$

Como G es fiel y pleno existe únicos morfismos $u_{ij}, v_{ij} : U_j \to U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $f_{ij} = G(u_{ij})$ y $g_{ij} = G(v_{ij})$. Luego, tenemos que $F'(f) + F'(g) : \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j)$ está representado por la matriz

$$F'(f) + F'(g) = \begin{pmatrix} F(u_{11}) + F(v_{11}) & F(u_{12}) + F(v_{12}) & \dots & F(u_{1n}) + F(v_{1n}) \\ F(u_{21}) + F(v_{21}) & F(u_{22}) + F(v_{22}) & \dots & F(u_{2n}) + F(v_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(u_{m1}) + F(v_{m1}) & F(u_{m2}) + F(v_{m2}) & \dots & F(u_{mn}) + F(v_{mn}) \end{pmatrix}$$

Por otro lado, se tiene que $f+g$ esta representado por la matriz

$$f+g=\begin{pmatrix} f_{11}+g_{11} & f_{12}+g_{12} & \dots & f_{1n}+g_{1n} \\ f_{21}+g_{21} & f_{22}+g_{22} & \dots & f_{2n}+g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1}+g_{m1} & f_{m2}+g_{m2} & \dots & f_{mn}+g_{mn} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$F'(f+g)=\begin{pmatrix} F(a_{11}) & F(a_{12}) & \dots & F(a_{1n}) \\ F(a_{21}) & F(a_{22}) & \dots & F(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(a_{m1}) & F(a_{m2}) & \dots & F(a_{mn}) \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij}:U_j\to U_i$ es el único morfismo tal que $G(a_{ij})=f_{ij}+g_{ij}$.
Pero como G es aditivo, tenemos que $f_{ij}+g_{ij}=G(u_{ij})+G(v_{ij})=G(u_{ij}+v_{ij})$. Por lo tanto, se obtiene que $a_{ij}=u_{ij}+v_{ij}$ y al tener que F aditivo, entonces $F(a_{ij})=F(u_{ij}+v_{ij})=F(u_{ij})+F(v_{ij})$ para todo $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Probándose que $F'(f+g)=F'(f)+F'(g)$ y así F' es un funtor aditivo.

(4) Ahora extendamos F a todo $\mathscr{V}$. Sea $V\in\mathscr{V}$ arbitrario, entonces existe otro V' tal que

$$V\bigoplus V'\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}G(U_i),$$

para alguna familia finita $\{U_i\}_{i=1}^{n}$. Sean $i_V:V\longrightarrow V\bigoplus V'$, $i_{V'}:V'\longrightarrow V\bigoplus V'$ las inclusiones y $p_V:V\bigoplus V'\longrightarrow V$, $p_{V'}:V\bigoplus V'\longrightarrow V'$ las proyecciones del coproducto. Entonces

$$\theta:=i_{V'}p_{V'}:\bigoplus_{i=1}^{n}G(U_i)\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}G(U_i)$$

es un idempotente en $\mathscr{V}$ tal que $i_V:V\longrightarrow V\bigoplus V'=\bigoplus_{i=1}^{n}G(U_i)$ es el kernel de θ ($\mathscr{V}$ tiene kerneles de idempotentes).
Luego, tenemos que $F'(\theta)F'(\theta)=F'(\theta\theta)=F'(\theta^2)=F'(\theta)$. Por lo tanto, $F'(\theta)$ es un idempotente en $\mathscr{W}$ y como en $\mathscr{W}$ los idempotentes se escinden, tenemos que existe

$$\mu_V:K_V\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}F(U_i)$$

tal que $\mu=\mathrm{Ker}(F'(\theta)$. De esta forma definimos $F'(V):=K_V$.
Ahora veamos como se define F' en morfismos. Sea

$$f:V_1\longrightarrow W_1$$

un morfismo en $\mathscr{V}$ donde $V_1,W_1\in\mathscr{V}$ son tales que existen $V_2,W_2\in\mathscr{V}$ tal que $V_1\bigoplus V_2\simeq\bigoplus_{i=1}^{n}G(U_i)$ y $W_1\bigoplus W_2\simeq\bigoplus_{j=1}^{m}G(U_j)$ para algunas familias finitas $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{U_j\}_{j=1}^{m}$.

Sean $i_{V_1}: V_1 \longrightarrow V_1 \bigoplus V_2$, $i_{V_2}: V_2 \longrightarrow V_1 \bigoplus V_2$ y $p_{V_1}: V_1 \bigoplus V_2 \longrightarrow V_1$ y $p_{V_2}: V_1 \bigoplus V_2 \longrightarrow V_2$ las inclusiones y proyecciones del coproducto $V_1 \bigoplus V_2$. De la misma forma, sean i_{W_1}, i_{W_2}, p_{W_1} y p_{W_2} las inclusiones y proyecciones de $W_1 \bigoplus W_2$.
Sea $\alpha : V_1 \bigoplus V_2 \longrightarrow V_1 \bigoplus V_2$ dado por $\alpha := i_{W_1} f p_{V_1}$. Afirmamos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "i_{V_1}"] \arrow[d, "f"'] & V_1 \bigoplus V_2 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\alpha"'] & V_1 \bigoplus V_2 \arrow[d, "\alpha"] \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r, "i_{W_1}"] & W_1 \bigoplus W_2 \arrow[r, "\theta'"] & W_1 \bigoplus W_2
\end{tikzcd}$$

donde $\theta := i_{V_2} p_{V_2}$ y $\theta' = i_{W_2} p_{W_2}$. En efecto, el cuadrado de la izquierda del diagrama anterior conmuta pues $\alpha i_{V_1} = (i_{W_1} f p_{v_1}) i_{V_1}) = i_{W_1} f$.
Ahora bien, por un lado

$$\alpha\theta = (i_{W_1} f p_{V_1})(i_{V_2} p_{V_2}) = (i_{W_1} f)(p_{V_1} i_{V_2}) p_{V_2} = 0$$

Por otro lado,

$$\theta'\alpha = (i_{W_2} p_{W_2})(i_{W_1} f p_{V_1}) = i_{W_2}(p_{W_2} i_{W_1})(f p_{V_1}) = 0.$$

Por lo tanto, el diagrama anterior conmuta donde θ y θ' son idempotentes. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathscr{W}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{V_1} \arrow[r, "\mu_{V_1}"] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta)"] \arrow[d, "F'(\alpha)"'] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j) \arrow[d, "F'(\alpha)"] \\
0 \arrow[r] & K_{W_1} \arrow[r, "\mu_{W_1}"] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta')"] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j)
\end{tikzcd}$$

Luego, por la propiedad universal del kernel μ_{W_1} se sigue que existe un único morfismo

$$\overline{f} : K_{V_1} \longrightarrow K_{W_1}$$

tal que el diagrama anterior conmuta, es decir, $F'(\alpha)\mu_{V_1} = \mu_{W_1}\overline{f}$. De esta manera, definimos

$$F'(f) := \overline{f} : K_{V_1} \longrightarrow K_{W_1}.$$

Como la definición de $\overline{f}$ está dada por la propiedad universal del kernel, se sigue que $F' : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{W}$ es un funtor. Además por construcción se sigue que $F'G = F$.
Veamos que F' es un funtor aditivo.
Sean $f_1, f_2 : V_1 \longrightarrow W_1$ tal que V_1 es sumando directo de $\bigoplus_{i=1}^{n} G(U_i)$ y W_1 sumando directo de $\bigoplus_{j=1}^{m} G(U_j)$. Haciendo la construcción antes descrita, obtenemos que $F'(f_1)$ y $F'(f_2)$ son los únicos morfismos que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{V_1} \arrow[r, "\mu_{V_1}"] \arrow[d, "F'(f_1)"] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta)"] \arrow[d, "F'(\alpha_1)"'] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j) \arrow[d, "F'(\alpha_1)"] \\
0 \arrow[r] & K_{W_1} \arrow[r, "\mu_{W_1}"] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta')"] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{V_1} \arrow[r, "\mu_{V_1}"] \arrow[d, "F'(f_2)"] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta)"] \arrow[d, "F'(\alpha_2)"'] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j) \arrow[d, "F'(\alpha_2)"] \\
0 \arrow[r] & K_{W_1} \arrow[r, "\mu_{W_1}"] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta')"] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j)
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha_1 = i_{W_1} f_1 p_{V_1}$ y $\alpha_2 = i_{W_1} f_2 p_{V_2}$. Sea $\gamma := \alpha_1 + \alpha_2 = i_{W_1}(f_1+f_2)p_{V_1}$, tenemos que $F'(f_1+f_2)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{V_1} \arrow[r, "\mu_{V_1}"] \arrow[d, "F'(f_1+f_2)"'] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta)"] \arrow[d, "F'(\gamma)"'] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j) \arrow[d, "F'(\gamma)"'] \\
0 \arrow[r] & K_{W_1} \arrow[r, "\mu_{W_1}"] & \bigoplus_{i=1}^{n} F(U_i) \arrow[r, "F'(\theta')"] & \bigoplus_{j=1}^{m} F(U_j)
\end{tikzcd}$$

Luego, utilizando que F' restringido a la categoría $\mathrm{Sum}(G(\mathscr{U}))$ es aditivo, se tiene que

$$\begin{aligned}
(F'(f_1)+F'(f_2))\mu_{W_1} &= F'(f_1)\mu_{W_1} + F'(f_2)\mu_{W_1} \\
&= F'(\alpha_1)\mu_{V_1} + F'(\alpha_2)\mu_{V_1} \\
&= (F'(\alpha_1)+F'(\alpha_2))\mu_{V_1} \\
&= F'(\alpha_1+\alpha_2)\mu_{V_1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $F'(f_1+f_2) = F'(f_1)+F'(f_2)$. Probándose que $F' : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ es un funtor aditivo.
Finalmente la unicidad se deja como ejercicio al lector.

□

5.4. Finitamente presentados

Definición 5.4.1. *Se dice que un objeto M de la categoría $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es* ***finitamente presentado*** *si tiene una presentación proyectiva*

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

donde P_1 y P_0 son objetos proyectivos finitamente generados, es decir, $P_1, P_0 \in \rho(\mathscr{C})$.

Definición 5.4.2. *Denotemos por $mod(\mathscr{C}^{op})$ a la subcategoría plena de $Mod(\mathscr{C}^{op})$ cuyos objetos son los $\mathscr{C}^{op}$-módulos finitamente presentados.*

Observación 5.4.3. *Sea M en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ un objeto finitamente presentado. Entonces se tiene M es finitamente generado. En efecto, sea*

$$P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0,$$

una presentación proyectiva finita de M. Como P_0 es proyectivo finitamente generado y β es un epimorfismo tenemos que M es finitamente generado (ver 5.2.3(d1)).

Proposición 5.4.4. *Sea $\mathscr{C}$ una variedad de annuli.*

(a) Si M es un $\mathscr{C}^{op}$-módulo proyectivo finitamente generado, entonces M es finitamente presentado. Es decir $\rho(\mathscr{C}) \subseteq mod(\mathscr{C}^{op})$.

(b) Sea

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces se satisfacen los siguientes incisos.

(b1) Si M_1 es finitamente generado y M_2 es finitamente presentado, entonces M_3 es finitamente presentado.

(b2) Si M_1 y M_2 son finitamente presentados, entonces M_3 es finitamente presentado.

(b3) Si M_1 y M_3 son finitamente presentados, entonces M_2 es finitamente presentado.

(c) Sea $M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Si M_1 y M_2 son finitamente presentados, entonces M_3 es finitamente presentado.

(d) Sea $\{M_i\}_{i=1}^n$ una familia en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ es finitamente presentado si sólo si M_i es finitamente presentado para cada $i \in \{1,...,n\}$.

Demostración. (a) Sea $P \in \rho(\mathscr{C})$, luego tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{1_P} P \longrightarrow 0$$

donde P_1 y 0 son proyectivos finitamente generados. Esto muestra que P es finitamente presentado.

(b1) Como M_2 es finitamente presentado, existe una resolución proyectiva

$$P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M_2 \longrightarrow 0.$$

Consideremos la factorización de α a través de su imagen

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ P_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & P_0. \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha_2} P_0 \xrightarrow{\beta} M_2 \longrightarrow 0$. Como $\alpha_1 : P_1 \to K$ es un epimorfismo y P_1 es finitamente generado, tenemos que K es finitamente

generado (ver 5.2.3(d1)).
Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha_2"'] & K' \arrow[d, hook, "\alpha_2'"'] \arrow[dddll, squiggly] & \\
\eta : 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "g\beta"] & 0 \\
\varepsilon : 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[d, equal] & M_2 \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& M_1 \arrow[r] & Coker(\beta) \arrow[r] & Coker(g\beta). &
\end{tikzcd}$$

donde las sucesiones η y ε son exactas y α_2' es el kernel de $g\beta$. Por el Lema de la Serpiente, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$O \longrightarrow K \longrightarrow K' \xrightarrow{\delta} M_1 \longrightarrow Coker(\beta) \longrightarrow Coker(g\beta) \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

Como β y g son epimorfismos, concluimos que $g\beta$ es también un epimorfismo y por lo tanto $Coker(g\beta) = Coker(\beta) = 0$. Por lo tanto, tenemos sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow K' \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0.$$

Luego, como M_1 y K son finitamente generados, tenemos que K' es finitamente generado (ver 5.2.3(d2)). Por 5.2.3(b), tenemos que existe un epimorfismo

$$\alpha_1' : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \longrightarrow K$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \xrightarrow{\quad \alpha' \quad} P_0 \xrightarrow{g\beta} M_3 \longrightarrow 0,$$

donde $\alpha' = \alpha_2'\alpha_1'$. Como $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i), P_0 \in \rho(\mathscr{C})$, tenemos que M_3 es finitamente presentado.

(b2) Sea $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ exacta con M_1 y M_2 finitamente presentados. En particular, tenemos que M_1 es finitamente generado y por $(b1)$, concluimos que M_3 es finitamente presentado.

(b3) La demostración de este inciso es básicamente la demostración del lema de la Herradura, así que daremos un bosquejo de la prueba.
Como M_1 y M_3 son finitamente presentados tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \longrightarrow 0, \qquad Q_1 \xrightarrow{\alpha'} Q_0 \xrightarrow{\beta'} M_3 \longrightarrow 0,$$

donde P_1, P_0, Q_1, Q_0 son proyectivos finitamente generados. Consideremos las factorización de α y α' a través de sus imágenes

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ P_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & P_0, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & K' \arrow[dr, "\alpha'_2"] & \\ Q_1 \arrow[ur, "\alpha'_1"] \arrow[rr, "\alpha'"'] & & Q_0. \end{tikzcd}$$

Luego, tenemos las siguientes sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha_2} P_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\alpha'_2} Q_0 \xrightarrow{\beta'} M_3 \longrightarrow 0.$$

Siguiendo, la demostración del lema de la Herradura, tenemos que podemos construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha_2"'] & K'' \arrow[r] \arrow[d, hook, "\gamma_2"'] & K' \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha'_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\beta"'] & P_0 \bigoplus Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M_2 \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como $\alpha_1 : P_1 \to K$ y $\alpha'_1 : Q_1 \to K'$ son epimorfismos y P_1, Q_1 son finitamente generados, tenemos que K y K' son finitamente generados (ver 5.2.3(d1)). Luego, considerando la sucesión exacta del primer renglón del diagrama anterior, concluimos que K'' es finitamente generado (ver 5.2.3(d2)).

Por 5.2.3(b), tenemos que existe un epimorfismo

$$\gamma_1 : \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \longrightarrow K''$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \xrightarrow{\quad\gamma\quad} P_0 \bigoplus Q_0 \xrightarrow{\lambda} M_2 \longrightarrow 0,$$

donde $\gamma := \gamma_2\gamma_1$. Como $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i), P_0 \bigoplus Q_0 \in \rho(\mathscr{C})$, tenemos que M_2 es finitamente presentado.

(c) Sea $M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ con M_1 y M_2 finitamente presentados. Consideremos la factorización de α a través de su imagen

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ M_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & M_2, \end{tikzcd}$$

Luego, tenemos que K es finitamente generado pues M_1 es finitamente generado y que $\alpha_1 : M_1 \to K$ es un epimorfismo (ver 5.2.3(d1)). Además tenemos sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0.$$

Luego, por inciso (b1) de esta proposición tenemos que M_3 es finitamente presentado.

(d) Hagamos sólo el caso $n = 2$.
($\Leftarrow$) Supongamos que M_1 y M_2 son finitamente presentados. Consideremos la siguiente sucesión exacta que se escinde

$$0 \longrightarrow M_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} M_1 \bigoplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0.$$

Se tiene por el inciso (b3) de esta proposición que $M_1 \bigoplus M_2$ es un objeto finitamente presentado.
($\Rightarrow$) Supongamos que $M_1 \bigoplus M_2$ un objeto finitamente presentado. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} M_1 \bigoplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0.$$

Como $M_1 \bigoplus M_2$ es finitamente presentado, tenemos en particular que es finitamente generado. Luego, por 5.2.3(e), tenemos que M_1 y M_2 son finitamente generados. Por el inciso (b1), de esta proposición concluimos que M_2 es finitamente presentado. De la misma manera se ve que M_1 es finitamente presentado.

$\square$

Proposición 5.4.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña y sea $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$. Las siguientes propiedades son equivalentes*

(a) M es finitamente presentado.

(b) M es finitamente generado con la siguiente propiedad, si

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

es una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ y M_2 es finitamente generado, entonces M_1 es finitamente generado.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos M es finitamente presentado. En particular M es finitamente generado. Sea

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

una sucesión exacta con M_2 finitamente generado. Al ser M finitamente presentado, existe una sucesión exacta

$$P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

con P_1 y P_0 proyectivos finitamente generados. Consideremos la factorización de α a través de su imagen

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ P_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & P_0. \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha_2} P_0 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha_2"] & P_0 \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[r, "g"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego, al tener que g es un epimorfismo y que P_0 es un objeto proyectivo, se tiene que existe un morfismo $\gamma : P_0 \to M_2$ tal que $g\gamma = \beta$. Por la propiedad universal del kernel de g, se tiene que existe único morfismo $\gamma' : K \to M_1$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma'"'] & P_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[r, "g"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego componiendo con α_1 los morfismos del cuadrado izquierdo del diagrama anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[r, "\alpha_2\alpha_1 = f"] \arrow[d, "\lambda := \gamma'\alpha_1"'] & P_0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[r, "g"'] & M. \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Consecuentemente, por el Lema de la Serpiente se tiene una sucesión exacta

$$Ker(\lambda) \longrightarrow Ker(\gamma) \longrightarrow Ker(1_M) \xrightarrow{\delta} Coker(\lambda) \xrightarrow{\theta} Coker(\gamma) \longrightarrow Coker(1_M).$$

Como $Ker(1_M) = Coker(1_M) = 0$, se tiene que $\theta : Coker(\lambda) \to Coker(\gamma)$ es un isomorfismo. Ahora bien, consideremos el cokernel $\pi : M_2 \to Coker(\gamma)$ de γ. Como π es un epimorfismo y M_2 es finitamente generado, tenemos que $Coker(\gamma)$ es finitamente generado (ver 5.2.3(d1)). Por lo tanto, $Coker(\lambda)$ es finitamente generado. Consideremos la factorización de λ a través de su imagen

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\ P_1 \arrow[ur, "\lambda_1"] \arrow[rr, "\lambda"'] & & M_1 \end{tikzcd}$$

Como $\lambda_1 : P_1 \to K'$ es un epimorfismo y P_1 es finitamente generado, por 5.2.3(d1), tenemos que K' es finitamente generado. Sea $\pi' : M_1 \to Coker(\lambda)$ el cokernel de λ. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\lambda_2} M_1 \xrightarrow{\pi'} Coker(\lambda) \longrightarrow 0,$$

donde K' y $Coker(\lambda)$ son finitamente generados. Por 5.2.3(d2), concluimos que M_1 es finitamente generado.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos M satisface (b). Como M es finitamente generado, existe un epimorfismo $\alpha : P_0 \to M$ donde $P_0 := \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i)$ para alguna familia finita $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ de objetos en $\mathscr{C}$ (ver 5.2.3(b)). Sea $\mu : K \to P_0$ el kernel de α, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \overset{\mu}{\hookrightarrow} P_0 \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow 0.$$

Como P_0 es finitamente generado, por la hipótesis concluimos que K es finitamente generado. Por 5.2.3(b), existe un epimorfismo $\pi : P_1 \to K$ donde $P_1 := \bigoplus_{j=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_j)$ para alguna familia finita de objetos $\{C_j\}_{j=1}^{m}$ en $\mathscr{C}$. Luego, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$P_1 \xrightarrow{\mu\pi} P_0 \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0.$$

Probándose que M es finitamente presentado. □

Corolario 5.4.6. *Sea M un módulo finitamente presentado. Entonces existe presentación proyectiva finita de M de la forma*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_j) \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Demostración. Se sigue de la demostración de $(b) \Rightarrow (a)$ en 5.4.5. □

5.5. Pseudokerneles

Definición 5.5.1. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña. Sea $g : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathscr{C}$, decimos que un morfismo $f : C_0 \to C_1$ es un* ***pseudokernel*** *de g, si la sucesión*

$$Hom_{\mathscr{C}}(-, C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_2)$$

es exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

Proposición 5.5.2. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña. Sean $f : C_0 \to C_1$ y $g : C_1 \to C_2$ morfismos en $\mathscr{C}$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *f es un pseudokernel de g.*

(b) *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(b1) *$gf = 0$ y*

(b2) *para otro morfismo $h : C_3 \to C_1$ tal que $gh = 0$, existe un morfismo $\gamma : C_3 \to C_0$ (**no necesariamente único**) tal que $f\gamma = h$.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $f : C_0 \to C_1$ es un pseudokernel de $g : C_1 \to C_2$, entonces se tiene que la sucesión

$$Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2) \qquad (*)$$

es exacta. Considerando la factorización de $Hom_{\mathscr{C}}(-,f) : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \to Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)$ a través de su imagen tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \arrow[rr, "Hom_{\mathscr{C}}(-,f)"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \\
& K \arrow[ur, hook, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, como $(*)$ es exacta, tenemos que $\mu : K \to Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)$ el kernel de $Hom_{\mathscr{C}}(-,g)$.
(i) Veamos que $gf = 0$. En efecto, como la sucesión $(*)$ es exacta, tenemos que

$$0 = Hom_{\mathscr{C}}(-,g) \circ Hom_{\mathscr{C}}(-,f) = Hom_{\mathscr{C}}(-,gf) : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \to Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2).$$

En particular, tomando la componente C_0-ésima, tenemos que

$$Hom_{\mathscr{C}}(C_0,gf) : Hom_{\mathscr{C}}(C_0,C_0) \to Hom_{\mathscr{C}}(C_0,C_2).$$

es el morfismo cero. Entonces para $1_{C_0} \in Hom_{\mathscr{C}}(C_0,C_0)$, tenemos que

$$0 = \Big(Hom_{\mathscr{C}}(C_0,gf)\Big)(1_{C_0}) = (gf) \circ 1_{C_0} = gf.$$

(ii) Sea $h : C_3 \to C_1$ tal que $gh = 0$. Entonces, $Hom_{\mathscr{C}}(-,g) \circ Hom_{\mathscr{C}}(-,h) = 0$. Como el morfismo $\mu : K \to Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)$ es el kernel de $Hom_{\mathscr{C}}(-,g)$, existe un único morfismo $\gamma : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_3) \to K$ tal que $Hom_{\mathscr{C}}(-,h) = \mu\gamma$. Ahora bien, como $p : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \longrightarrow K$ es un epimorfismo y $Hom_{\mathscr{C}}(-,C_3)$ es un objeto proyectivo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$, tenemos que existe un morfismo $\gamma' : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_3) \to Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& Hom_{\mathscr{C}}(-,C_3) \arrow[dl, "\gamma'"'] \arrow[d, "\gamma"] \\
Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \arrow[r, "p"'] & K.
\end{tikzcd}$$

Por 3.3.6, tenemos que el funtor de representación de Yoneda P, induce un isomorfismo

$$P : Hom_{\mathscr{C}}(C_3, C_0) \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-, C_3), Hom_{\mathscr{C}}(-, C_0)\Big).$$

Luego, existe $\lambda : C_3 \to C_0$ tal que $\gamma' = P(\lambda) = Hom_{\mathscr{C}}(-, \lambda)$. Veamos que $h = f\lambda$. Para esto consideremos la siguiente biyección, dada por el funtor de representación de Yoneda (ver 3.3.6),

$$P : Hom_{\mathscr{C}}(C_3, C_1) \longrightarrow Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-, C_3), Hom_{\mathscr{C}}(-, C_1)\Big).$$

Para ver que $h = f\lambda$, basta ver que mediante P son iguales.
En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} P(f\lambda) = P(f)P(\lambda) = Hom_{\mathscr{C}}(-, f) \circ Hom_{\mathscr{C}}(-, \lambda) &= Hom_{\mathscr{C}}(-, f) \circ \gamma' \\ &= (\mu p)\gamma' \\ &= \mu(p\gamma') \\ &= \mu\gamma \\ &= Hom_{\mathscr{C}}(-, h) = P(h). \end{aligned}$$

Por 3.3.6, concluimos que $f\lambda = h$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean $f : C_0 \to C_1$ y $g : C_1 \to C_2$ que satisfacen (b).
Veamos que la siguiente sucesión es exacta

$$Hom_{\mathscr{C}}(-, C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_2).$$

Sea

$$\eta : K \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-, C_1)$$

en $Mod(\mathscr{C}^{op})$ tal que η es el kernel de $Hom_{\mathscr{C}}(-, g)$. Por 5.2.7, podemos suponer que cada componente de η

$$\eta_C : K(C) \hookrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(C, C_1)$$

es la inclusión de $K(C)$ como subgrupo de $Hom_{\mathscr{C}}(C, C_1)$. De esta manera, un elemento $x \in K(C)$ es un morfismo $x : C \to C_1$ en $\mathscr{C}$. Queremos encontrar un epimorfismo en $Mod(\mathscr{C}^{op})$

$$\beta : Hom_{\mathscr{C}}(-, C_0) \twoheadrightarrow K$$

tal que $\eta\beta = Hom_{\mathscr{C}}(-, f)$ (esto demostraría que $Ker\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-, g)\Big) = Im\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-, f)\Big)$).
Es decir, se quiere encontrar un epimorfismo β que hace conmutar el triángulo izquierdo en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(-, C_0) \arrow[rr, "Hom_{\mathscr{C}}(-,f)"] \arrow[dr, two heads, "\beta"'] & & Hom_{\mathscr{C}}(-, C_1) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{C}}(-,g)"] & Hom_{\mathscr{C}}(-, C_2) \\ & K. \arrow[ur, hook, "\eta"'] & & \end{tikzcd}$$

Consideremos
$$Hom_{\mathscr{C}}(C_0,g): Hom_{\mathscr{C}}(C_0,C_1)\to Hom_{\mathscr{C}}(C_0,C_2).$$
la componente C_0 de $Hom_{\mathscr{C}}(-,g): Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)\to Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2)$. Como $f: C_0\to C_1$ es tal que $gf=0$, tenemos que f pertenece al kernel de $Hom_{\mathscr{C}}(C_0,g)$. Es decir, tenemos que $f\in K(C_0)$.
Por Lema de Yoneda, se tiene una biyección
$$\Omega : Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}[Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0),K]\longrightarrow K(C_0).$$
Luego, existe morfismo $\beta : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0)\to K$ tal que $\Omega(\beta):=\beta_{C_0}(1_{C_0})=f$.
Veamos que $\eta\beta = Hom_{\mathscr{C}}(-,f)$. En efecto, como
$$\eta\beta, Hom_{\mathscr{C}}(-,f): Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0)\longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1),$$
basta ver que van a dar al mismo elemento mediante el isomorfismo de Yoneda
$$\Omega : Nat_{Mod(\mathscr{C}^{op})}\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0), Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)\Big)\longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(C_0,C_1).$$
En efecto, por un lado, se tiene que
$$\begin{aligned}\Omega(Hom_{\mathscr{C}}(-,f)) &= Hom_{\mathscr{C}}(C_0,f)(1_{C_0})\\ &= f1_{C_0}\\ &= f.\end{aligned}$$
Por otro lado, se tiene que
$$\begin{aligned}\Omega(\eta\beta) &= (\eta\beta)_{C_0}(1_{C_0})\\ &= (\eta_{C_0}\beta_{C_0})(1_{C_0})\\ &= \eta_{C_0}(\beta_{C_0}(1_{C_0}))\\ &= \eta_{C_0}(f)\\ &= f,\end{aligned}$$
donde la última igualdad es debido a que η_{C_0} es la inclusion de $K(C_0)$ como subgrupo de $Hom_{\mathscr{C}}(C_0,C_1)$.
Por lo tanto, $\Omega(Hom_{\mathscr{C}}(-,f))=\Omega(\eta\beta)$ y entonces $Hom_{\mathscr{C}}(-,f)=\eta\beta$.
Ahora veamos que $\beta : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0)\longrightarrow K$ es un epimorfismo. Veamos que
$$\beta_C : Hom_{\mathscr{C}}(C,C_0)\longrightarrow K(C).$$
es epimorfismo para cada $C\in\mathscr{C}$. Sea $x\in K(C)$ arbitrario, como $K(C)\subseteq Hom_{\mathscr{C}}(C,C_1)$ tenemos que $x: C\to C_1$ es un morfismo en $\mathscr{C}$. Como la inclusión $\eta_C : K(C)\to Hom_{\mathscr{C}}(C,C_1)$ es el kernel de $Hom_{\mathscr{C}}(C,g): Hom_{\mathscr{C}}(C,C_1)\to Hom_{\mathscr{C}}(C,C_2)$, tenemos que $Hom_{\mathscr{C}}(C,g)(x)=g\circ x=0$. Luego, como estamos suponiendo (b), tenemos que existe un morfismo $y: C\to C_0$ tal que $f\circ y = x$.
Ahora bien como $\eta\beta = Hom_{\mathscr{C}}(-,f)$, tenemos que $\eta_C\circ\beta_C = Hom_{\mathscr{C}}(C,f)$ y por lo tanto, tenemos que $\eta_C(\beta_C(y)) = \Big(Hom_{\mathscr{C}}(C,f)\Big)(y) = f\circ y = x$. Pero como η_C es la inclusión, tenemos que $\beta_C(y)=x$. Luego, β_C es un epimorfismo y entonces β es un epimorfismo. Por 1.7.8, tenemos que
$$Ker\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-,g)\Big)=\eta = Im\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-,f)\Big),$$

probándose que

$$Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2).$$

es una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

□

Corolario 5.5.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría esqueléticamente pequeña. Sean $f : C_0 \to C_1$ y $g : C_1 \to C_2$ morfismos en $\mathscr{C}$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) f es el kernel de g

(b) La siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2).$$

es exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. De la manera que se hizo en 3.2.14, se demuestra fácilmente que si $f = Ker(g)$, entonces $Hom_{\mathscr{C}}(-, f)$ es un monomorfismo. Por 5.5.2, concluimos que

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2)$$

es exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$.
$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2)$$

es exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Por 5.5.2, tenemos que f es un pseudokernel de g. Ahora, sea $h : C \to C_1$ tal que $gh = 0$, entonces existe un morfismo $\gamma : C \to C_0$ tal que $h = f\gamma$. Veamos que tal γ es único. En efecto, para $C \in \mathscr{C}$ tenemos la siguiente sucesión exacta en Ab

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(C,C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(C,f)} Hom_{\mathscr{C}}(C,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(C,g)} Hom_{\mathscr{C}}(C,C_2).$$

Es decir, $Hom_{\mathscr{C}}(C, f)$ es inyectivo y como γ es tal que $Hom_{\mathscr{C}}(C, f)(\gamma) = h$, se sigue que tal γ es único. Por lo tanto $f = Ker(g)$. □

Proposición 5.5.4. *Sea $\mathscr{C}$ una variedad de Annuli. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathscr{C}$ tiene pseudokerneles.

(b) Todo morfismo en $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene kernel en $mod(\mathscr{C}^{op})$.

(c) $mod(\mathscr{C}^{op})$ es una subcategoría abeliana de $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\alpha : F \to G$ un morfismo en $mod(\mathscr{C}^{op})$. Como $mod(\mathscr{C}^{op}) \subseteq Mod(\mathscr{C}^{op})$ y $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es abeliana, existe $\mu : K \to F$ el kernel de α en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Veamos que K es finitamente presentado.
Caso 1.- Supongamos que α es un epimorfismo.
Como F es finitamente presentado, por 5.4.6, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$P_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \xrightarrow{\gamma} F \longrightarrow 0$$

donde $P_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i)$ y $P_0 = \bigoplus_{j=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_j)$. Como $\mathscr{C}$ es una variedad de Annuli, tenemos que $\mathscr{C}$ tiene coproductos finitos y entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_i) \simeq Hom_{\mathscr{C}}(-,\bigoplus_{i=1}^{n} C_i)$.
Por lo tanto, podemos suponer que $P_0 = Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0)$ y $P_1 = Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)$ para algunos objetos $C_0, C_1 \in \mathscr{C}$.
Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & K_1 \arrow[d, hook, "i'"'] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu"'] \arrow[d, equal] & F \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & K \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Como F y G son finitamente presentados y P_0 es finitamente, por 5.4.5, tenemos que K_0 y K_1 son finitamente generados. Por el lema de la serpiente, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$\varepsilon : \ 0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Por 5.2.3(d1), tenemos que K es finitamente generado.
Veamos que K_1 es finitamente presentado. Como K_1 es finitamente generado y $\mathscr{C}$ es una variedad de Annuli, tenemos que existe un epimorfismo

$$\pi : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1') \longrightarrow K_1 \longrightarrow 0$$

para algún $C_1' \in \mathscr{C}$. Luego, tenemos el morfismo $i_1'\pi : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1') \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0)$. Por el lema de Yoneda, tenemos que existe $g : C_1' \to C_0$ tal que $Hom_{\mathscr{C}}(-,g) = i_1'\pi$. Como $\mathscr{C}$ tiene pseudokerneles, tenemos que existe $f : C_2 \to C_1'$ tal que

$$Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1') \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0).$$

es una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Como $Hom_{\mathscr{C}}(-,g) = i_1'\pi$, com π un epimorfismo y i_1' un monomorfismo, tenemos la siguiente sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$

$$Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1') \xrightarrow{\pi} K_1 \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto K_1 es finitamente presentado. De la sucesión

$$\varepsilon: \ 0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

concluimos por 5.4.4(b1), que K es finitamente presentado.
Por lo tanto $\mu : K \to F$ pertenece a $mod(\mathscr{C}^{op})$. Probándose que α tiene kernel en $mod(\mathscr{C}^{op})$.

Caso 2.- Supóngase que se tiene un morfismo $\alpha : F \to G$ en $mod(\mathscr{C}^{op})$ que no necesariamente es un epimorfismo. Como $\alpha \in mod(\mathscr{C}^{op}) \subset Mod(\mathscr{C}^{op})$, entonces podemos descomponer al morfismo α a través de su imagen. De esta, manera se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & G \\ & I \arrow[ur, "\alpha''"'] & \end{tikzcd}$$

donde α' es un epimorfismo y α'' es un monomorfismo. Luego, consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha''} G \xrightarrow{g} G/I \longrightarrow 0$$

donde G es finitamente presentado. Notemos que I es finitamente generado, pues tenemos el epimorfismo $\alpha' : F \to I$ donde F es finitamente generado al ser finitamente presentado (ver 5.2.3(d1)). Por lo tanto, por 5.4.4(b1) se tiene que G/I es finitamente presentado. Luego, en el epimorfismo

$$g : G \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow G/I \longrightarrow 0.$$

tenemos que G y G/I son finitamente presentados. Por el caso 1, se tiene $I = Ker(g) \in mod(\mathscr{C}^{op})$. Por lo tanto, tenemos el epimorfismo

$$\alpha' : F \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

con $F, I \in mod(\mathscr{C}^{op})$. Por el caso 1, se sigue que $Ker(\alpha')$ es finitamente presentado.
Como α'' es un monomorfismo, tenemos que

$$Ker(\alpha) = Ker(\alpha''\alpha') = Ker(\alpha').$$

Por lo tanto , $Ker(\alpha) \in mod(\mathscr{C}^{op})$. Probándose (b).

$(b) \Rightarrow (c)$ (i) La categoría $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene productos y coproductos finitos. De la proposición 5.4.4(d), se sigue la categoría $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene coproductos finitos y como $mod(\mathscr{C}^{op})$ es aditiva, tenemos que también tiene productos finitos.

(ii) La categoría $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene kerneles y cokerneles. Por suposición de (b), sigue que la categoría $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene kerneles. Veamos que $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene cokerneles. Sea $\alpha : F \to G$ en

$mod(\mathscr{C}^{op})$ y sea

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & G \\ & I \arrow[ur, "\alpha''"'] & \end{tikzcd}$$

la descomposición de α a través de su imagen. Como $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es abeliana, tenemos la siguiente sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha''} G \longrightarrow Coker(\alpha'') \longrightarrow 0.$$

Notemos que I es finitamente generado, pues $\alpha' : F \to I$ es un epimorfismo con F finitamente presentado (ver 5.2.3(d1)). Como G es finitamente presentado, por 5.4.4(b1), entonces $Coker(\alpha'') \in mod(\mathscr{C}^{op})$. Pero como α' es un epimorfismo, tenemos que

$$Coker(\alpha) = Coker(\alpha''\alpha') = Coker(\alpha'').$$

Por lo tanto, $Coker(\alpha) \in mod(\mathscr{C}^{op})$. Probándose que $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene cokerneles.

(iii) La categoría es $mod(\mathscr{C}^{op})$ es normal y conormal. Sea $\alpha : F \to G$ un monomorfismo en $mod(\mathscr{C}^{op})$. Como $mod(\mathscr{C}^{op}) \subset Mod(\mathscr{C}^{op})$ y la categoría $Mod(\mathscr{C}^{op})$ es normal, entonces $\alpha = Ker(\beta)$ para algún morfismo $\beta : G \to H$ en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Por lo tanto, se tiene una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0,$$

donde F y G son finitamente presentados. Por 5.4.4(b1), concluimos que H es finitamente presentado. Por lo tanto $\beta \in mod(\mathscr{C}^{op})$. Probándose que la categoría $mod(\mathscr{C}^{op})$ es normal. De forma similar se prueba que $mod(\mathscr{C}^{op})$ es conormal. Por lo tanto, de (i),(ii) y (iii) y el teorema 1.17.2, se tiene que que $mod(\mathscr{C}^{op})$ es una subcategoría abeliana de $Mod(\mathscr{C}^{op})$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea $g : C_1 \to C_2$ un morfismo en $\mathscr{C}$. Se quiere demostrar que existe un morfismo $f : C_0 \to C_1$ tal que

$$Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2).$$

es una sucesión exacta en $Mod(\mathscr{C}^{op})$. En efecto, como

$$Hom_{\mathscr{C}}(-,g) : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2)$$

es un morfismo en $mod(\mathscr{C}^{op}) \subset Mod(\mathscr{C}^{op})$, se tiene por hipótesis que el morfismo $Hom_{\mathscr{C}}(-,g)$ tiene kernel en $mod(\mathscr{C}^{op})$. Sea

$$\eta : K \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)$$

tal que $\eta = Ker(Hom_{\mathscr{C}}(-,g))$ con $K \in mod(\mathscr{C})$. Como K es finitamente generado y $\mathscr{C}$ es una variedad, existe un epimorfismo

$$\theta : Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \longrightarrow K$$

para algún objeto $C_0 \in \mathscr{C}$. De esta manera, tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde el primer renglón es una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0) \arrow[rr, "\eta\theta"] \arrow[dr, two heads, "\theta"'] & & Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{C}}(-,g)"] & Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2) \\
& K \arrow[ur, hook, "\eta"'] & &
\end{tikzcd}$$

pues por construcción $Ker\Big(Hom_{\mathscr{C}}(-,g)\Big) = \eta = Im(\eta\theta)$. Por el lema de Yoneda, existe un morfismo $f : C_0 \to C_1$ tal que $Hom_{\mathscr{C}}(-,f) = \eta\theta$. Luego, tenemos que $f : C_0 \to C_1$ es un pseudokernel del morfismo $g : C_1 \to C_2$. Probándose que $\mathscr{C}$ tiene pseudokerneles.

$(c) \Rightarrow (b)$ Al ser $mod(\mathscr{C}^{op})$ una subcategoría abeliana de $Mod(\mathscr{C}^{op})$, se tiene que $mod(\mathscr{C}^{op})$ tiene kerneles. □

5.6. Dimensión proyectiva de $mod(\mathscr{C}^{op})$

Definición 5.6.1. *(a) Sea $M \in Mod(\mathscr{C}^{op})$, se dice que $p.d(M) \leq n$ (donde $p.d$ es la abreviación de **dimensión proyectiva**) si existe una resolución proyectiva*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Si tal resolución proyectiva no existe, se dice que $p.d(M) = \infty$. Decimos que $p.d(M) = n$ si n es la longitud de la resolución proyectiva más pequeña de M.

(b) Sea $\mathscr{X}$ una subcategoría de $Mod(\mathscr{C}^{op})$. Se define la dimensión proyectiva de la clase $\mathscr{X}$ como sigue:

$$p.d(\mathscr{X}) = \sup\{p.d(M) \mid M \in \mathscr{X}\}.$$

Proposición 5.6.2. *Sea $\mathscr{C}$ una variedad de Annuli con kerneles, entonces*

$$p.d\Big(mod(\mathscr{C}^{op})\Big) \leq 2.$$

Demostración. Como $M \in mod(\mathscr{C}^{op})$, se tiene que M tiene una presentación proyectiva de la forma

$$P_1 \xrightarrow{\eta_1} P_0 \xrightarrow{\eta_0} M \longrightarrow 0,$$

donde $P_0 = Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0)$ y $P_1 = Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1)$ para algunos objetos $C_0, C_1 \in \mathscr{C}$. Como $\eta_1 : P_1 \to P_0$ es un morfismo en $mod(\mathscr{C}^{op}) \subset Mod(\mathscr{C}^{op})$ por el Lema de Yoneda contravariante se tiene que existe un morfismo $g : C_1 \to C_0$ en $\mathscr{C}$ tal que $\eta_1 = Hom_{\mathscr{C}}(-,g)$. Como $\mathscr{C}$ tiene kerneles, existe un morfismo $f : C_2 \to C_1$ tal que $f = Ker(g)$. Por 5.5.3, tenemos la siguiente sucesión exacta en $mod(\mathscr{C}^{op})$

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_1) \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,g)} Hom_{\mathscr{C}}(-,C_0).$$

De esta manera definiendo $P_2 := Hom_{\mathscr{C}}(-,C_2)$ se tiene una resolución proyectiva finita de $M \in mod(\mathscr{C}^{op})$

$$0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{Hom_{\mathscr{C}}(-,f)} P_1 \xrightarrow{\eta_1} P_0 \xrightarrow{\eta_0} M \longrightarrow 0.$$

Por lo que $p.d(M) \leq 2$. Por lo tanto,

$$p.d\Big(mod(\mathscr{C}^{op})\Big) \leq 2.$$

$\square$

Apéndice A

Teorema A.0.1. ***Teorema de inmersión de Freyd-Mitchell (1964)***
Si $\mathscr{C}$ es una categoría abeliana pequeña, entonces existe un anillo R con 1 no necesariamente conmutativo y un funtor covariante, fiel y pleno $F : \mathscr{C} \to Mod(R)$ tal que $\mathscr{C}$ es una subcategoría plena de $Mod(R)$. Es decir, $Hom_{\mathscr{C}}(M,N) \cong Hom_R(F(M),F(N))$ para todo $M,N \in \mathscr{C}$.

Demostración. Vease una demostración en [WC94], p.28. $\square$

.

Lema A.0.2. ***Lema de la Serpiente***
En una categoría abeliana $\mathscr{C}$ consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C', &
\end{tikzcd}$$

con filas exactas. Entonces existe un "morfismo de conexión" $\delta : Ker(\gamma) \to Coker(\alpha)$ obteniendo una sucesión exacta,

$$Ker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}} Ker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}} Ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} Coker(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}'} Coker(\beta) \xrightarrow{\bar{g}'} Coker(\gamma).$$

Además, si f es un monomorfismo entonces $\bar{f}$ es un monomorfismo y si g' es un epimorfismo entonces $\bar{g}'$ es un epimorfismo.

Demostración. La prueba es una consecuencia del Teorema de inmersión de Freyd- Mitchell y la prueba del Lema del lema de la Serpiente en la categoría $Mod(R)$, para esto último vease una prueba en [HS71], p.99. $\square$

Bibliografía

[AF04] ANDERSON, F. W., FULLER, K. R, *Rings and Categories of Modules,* Springer-Verlag 2004.

[AM66] AUSLANDER, M., *Coherent Functors,* Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif. 1965) 189-231, Springer, New York, 1966.

[AM74] AUSLANDER, M., *Representation Theory of Artin Algebras I,* Comm. Algebra, 177-268, 1974.

[AM82] AUSLANDER, M., *A functorial approach to representation theory* Lectures Notes in Math, Vol. 944, 105-179, Springer, Berlin-New York, 1982.

[CE56] CARTAN, H., EILENBERG, M., *Homological algebra,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[EM45] SAUNDERS, M., EILENBERG, M., *General Theory of Natural Equivalences,* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 58, No. 2 (Sep., 1945), pp. 231 -294.

[GA57] GROTHENDIECK, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique,* Tohoku Math. J. (2) 9 (1957), no. 3, 119–221.

[HS71] HILTON, P., STAMBACH, U., *A Course in Homological Algebra,* Graduate Texts in Math,.4, Springer Verlag, Berling-Heidelberg-New York, 1971.

[KR07] KRÜMER, R., *Tool and Object: A history and Philosophy of Categorical Theory,* Birkhäuser Verlag 2007.

[MB65] MITCHELL, B., *Theory of Categories*, Academic Press Inc, 1965.

[RJ09] ROTMAN, R. J., *An Introduction to Homological Algebra,* Springer-Verlag, 2009.

[SM98] SAUNDERS, M., *Categories for the Working Mathematician,* Springer-Verlag, New-York, 1998.

[SV07] SANTIAGO VARGAS, V. *Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y teorema de inmersión en la categoría de grupos abelianos,* Tesis de licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias, 2007.

[WC94] WEIBEL, C.M., *An Introduction to Homological Algebra,* Cambridge University Press, 1994.