



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTIMACIÓN DEL VALOR EN RIESGO CONDICIONAL A
TRAVÉS DE MODELOS GARCH EN MERCADOS
EMERGENTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
ACTUARIO

PRESENTA
MARTÍN CAMARENA CRISTIÁN

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. EDUARDO SELIM MARTÍNEZ MAYORGA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Enero 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi querida abuela Lucía . . . por siempre, mi mamá Lucha.

Agradecimientos

Ha sido un largo y arduo camino hasta este punto y sinceramente no habría llegado tan lejos sin el apoyo y amor incondicional de mí familia. Te agradezco mamá por ser mí principal soporte y motivación de vida, por haberme formado como un hombre de bien. Gracias padre por cuidarme día tras día, guiarme, centrarme y por toda tu confianza depositada en mí. Muchas gracias a ambos por sus innumerables esfuerzos y sacrificios hechos. Lo que soy y lo que tengo se los debo simplemente a ustedes.

Porque sin la orientación y consejo de mí hermana María Luisa, mi nena, todo habría sido inmensamente difícil. Gracias por soportar todas mis desveladas, por ser mi cómplice en las buenas y velar por mí en las malas, por protegerme y consentirme tantas veces que ya perdí la cuenta. Eres y has sido mí inspiración, mi brújula, mí gran ejemplo a seguir.

De antemano sabes que lo mío no son las palabras . . . ni las definiciones. No tienes una idea de lo agradecido que te estoy por haberme ayudado a hacer realidad este sueño; muchas gracias Eduardo, por todo tu valioso tiempo, dedicación, paciencia (sobretudo), por motivarme, corregirme y enseñarme, por compartirme parte de tu conocimiento, en fin, gracias por creer en mí. Tus aportes, críticas y sugerencias permitieron que este manuscrito llegará a excelente término pero sin duda alguna es tu amistad el verdadero regalo que dejó tras de sí todo este trabajo en equipo.

Asimismo agradezco en demasía a mis sinodales, la Dra. Lizbeth Naranjo, al Dr. Ricardo Ramírez, al M. en C. Fernando Pérez y al Dr. Arrigo Coen por sus valiosas lecturas y precisas observaciones, recomendaciones y comentarios que fueron fundamentales para el enriquecimiento y culminación de mí tesis. Ha sido un placer trabajar con ustedes.

Un enorme agradecimiento a mis más valiosos amigos: Diana, Alejandro, Iván, Irvin y Ricardo, por acompañarme en esta travesía. En cada uno de ustedes hay una persona muy especial . . . no cabe duda de que el gusto ha sido completamente suyo.

Por último, pero no menos importante, a la UNAM máxima casa de estudios, a la hermosa Facultad de Ciencias, a mis profesores, compañeros y a todas las demás maravillosas personas que en su momento, de forma directa o indirecta, intencional o casualmente, contribuyeron para que esto fuera posible.

¡ Muchas gracias !

Martín

Índice general

Introducción	1
1. Mercados Emergentes	5
1.1. Características económicas	6
1.2. Propiedades estadísticas asociadas a mercados emergentes	9
1.3. Definición del portafolio de estudio: caso mexicano	12
2. Algunos conceptos de administración de riesgos	21
2.1. Diferentes clasificaciones del riesgo	22
2.2. Valor en Riesgo	25
2.2.1. Limitaciones del VaR	28
2.2.2. Medidas de riesgo coherente	29
2.3. Algunos métodos de estimación del VaR	33
2.3.1. Estimación paramétrica	33
2.3.1.1. Matriz de Varianzas-Covarianzas	33
2.3.2. Estimación no paramétrica	35
2.3.2.1. Simulación histórica	36
2.3.2.2. Simulación Monte Carlo	38
2.3.3. Estimación semiparamétrica	40
2.4. Pruebas de desempeño del VaR	40
2.5. Valor en Riesgo Condicional - CVaR	42
2.6. Estimación del CVaR a partir de los métodos seleccionados	47
3. Fundamentos y generalidades de los modelos ARCH y GARCH	49
3.1. Conceptos de series de tiempo	49
3.1.1. Algunas propiedades y componentes de las series de tiempo	50
3.1.1.1. Descomposición tradicional de una serie de tiempo	54
3.2. Modelos Autorregresivos	56
3.2.1. Modelos Autorregresivos $AR(1)$	57
3.2.2. Modelos Autorregresivos $AR(2)$	59
3.2.3. Modelos Autorregresivos $AR(p)$	72

3.3. Modelos de Medias Móviles	76
3.3.1. Modelos de Medias Móviles $MA(1)$	76
3.3.2. Modelos de Medias Móviles $MA(2)$	80
3.3.3. Modelos de Medias Móviles $MA(q)$	85
3.4. Modelos Autorregresivos de Medias Móviles	88
3.4.1. Modelos Autorregresivos de Medias Móviles $ARMA(1, 1)$	88
3.4.2. Modelos Autorregresivos de Medias Móviles $ARMA(p, q)$	93
3.5. Modelos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicionada	96
3.5.1. Modelos $ARCH(1)$	97
3.5.2. Modelos $ARCH(q)$	103
3.6. Modelos Generalizados Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicionada	107
3.6.1. Modelos $GARCH(1, 1)$	107
3.6.2. Modelos $GARCH(p, q)$	112
3.7. Modelos Autorregresivos Generalizados con Heterocedasticidad Condicionada Exponencial $EGARCH(p, q)$	115
3.8. Modelos Autorregresivos Generalizados con Heterocedasticidad Condicionada de la forma t de Student asimétrica $TGARCH(p, q)$	118
4. Estimación del riesgo bajo los modelos heterocedásticos condicionales propuestos	121
4.1. Metodología Box-Jenkins.	122
4.2. Estimación y <i>backtesting</i> del VaR y obtención del CVaR con modelos heterocedásticos condicionales	124
4.2.1. Ajuste de modelo $GARCH$	124
4.2.2. Ajuste del modelo $EGARCH$	131
4.2.3. Ajuste del modelo $TGARCH$	137
4.2.4. Resultados del VaR	146
4.2.5. Simulación Histórica Filtrada	147
4.2.6. Resultados del CVaR	150
Conclusiones	155
Apéndices	157
A. Algoritmo de Box Müller	159
A.1. Descripción del algoritmo	159
B. Archivos auxiliares y códigos en R	161
Bibliografía	165

Introducción

Derivado de la evolución en los mercados financieros y el surgimiento de instrumentos de inversión más complejos, en los últimos años, una de las tareas que ha tomado mayor relevancia dentro del proceso de administración del riesgo es encontrar e implementar medidas cada vez más precisas, con el fin de obtener mayores rendimientos a un nivel de riesgo racional. Es así que el comportamiento de las volatilidades de los rendimientos de la gran variedad de activos disponibles en el mercado ha propiciado el desarrollo y aplicación de metodologías de medición de riesgo mucho más sofisticadas. Ejemplo de esto son las basadas en supuestos derivados de la teoría de cópulas, el uso de modelos *ARCH – GARCH* o bien de funciones de distorsión de riesgo.

Dada su sencilla interpretación el Valor en Riesgo (VaR, cuyas siglas provienen del inglés *Value at Risk*) destaca de entre todas las demás medidas de riesgo, situándose como la herramienta más reconocida y de mayor uso por las entidades y reguladores financieros. Sin embargo, su cálculo puede llegar a ser demasiado complicado dependiendo de la metodología y los supuestos seleccionados para su estimación.

No obstante, la aplicación del VaR presenta muchas más limitaciones que ventajas en el ejercicio diario. La primera de ellas radica en su aplicación en escenarios donde se observa alta volatilidad de los precios de los activos, situación donde resulta bastante imprecisa y poco confiable. Cabe señalar que los escenarios que poseen las características previamente mencionadas responderán al término de “mercados emergentes”. Adicionalmente, se observará que, a partir de la definición de VaR que se dará en este trabajo, esta medida no proporciona información acerca de las pérdidas que le exceden.

En consecuencia, para contrarrestar las deficiencias del VaR se desarrolló y constituyó una medida capaz de cuantificar el promedio de las cantidades que se pueden encontrar en las colas de la distribución de rendimientos y se le dio el nombre de Valor en Riesgo Condicional (CVaR proveniente del término en inglés *Conditional Value at Risk*). Las propiedades asociadas a esta medida se observan ideales para el estudio del riesgo de las inversiones. Sin embargo, para poder estimarla necesariamente debe calcularse el valor del VaR, o lo que es lo mismo, sin un consistente cálculo del VaR se puede inferir que la estimación del CVaR

resultará endeble.

La solución es simple, establecer un procedimiento de cómputo del VaR que considere las características inherentes de la cartera de estudio bajo escenarios volátiles. El problema consta en seleccionar los supuestos y el método de estimación del riesgo indicado de entre las distintas opciones disponibles para ello.

Bajo este contexto, esta tesis tiene el firme propósito de exponer las características y propiedades del VaR y CVaR mostrando, a través de un análisis descriptivo y comparativo, la efectividad de la adopción de *Modelos Generalizados Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicionada (GARCH)* preferentemente sobre algunos de los métodos de estimación del riesgo de mayor reconocimiento y popularidad internacional como son el método de simulación histórica, de simulación Monte Carlo y el método Delta-Normal.

Es necesario mencionar que el estudio se basa en el uso de tasas de rendimientos de instrumentos accionarios comprendidos del periodo de 2012 a 2016, del mercado financiero mexicano, excelente representante del conjunto de países emergentes en la actualidad.

Motivación de estudio

La medición del riesgo es un factor determinante que preocupa a los diferentes participantes del mercado. El Sistema Financiero Mexicano no es la excepción, es por ello que es necesario que las distintas entidades tengan conocimiento de la actualización de las metodologías existentes, así como del surgimiento de nuevas propuestas y de la promulgación de estatutos por parte de organismos reguladores nacionales e internacionales. Lo anterior con el fin de mitigar escenarios desfavorables y asentar el buen ejercicio de la toma correcta de decisiones a través de análisis de riesgos apropiados.

Los ordenamientos y métodos utilizados en México refieren a usos ambiguos de técnicas de administración de riesgo. Los escenarios e instrumentos financieros actuales sugieren la aplicación de teorías matemáticas más sofisticadas que puedan hacer frente a las necesidades y problemáticas existentes.

Prolongar el uso de metodologías simples frente a escenarios de gran incertidumbre financiera, como es el caso del mercado financiero mexicano, conducirá a resultados cada vez más imprecisos e insostenibles.

En los últimos años se han perfeccionado técnicas y han sido desarrollados gran diversidad de métodos para estimar el riesgo de mercado de las inversiones. Muchos de estos métodos han demostrado ser poco prácticos.

La primera medida formal de riesgo conocida fue la volatilidad. Esta se define como la fluctuación del valor de un activo financiero en un periodo de tiempo, término que desde un punto de vista estadístico, se relaciona con el concepto de desviación estándar, que mide el grado de dispersión de los valores que componen una muestra con respecto a su media. Por lo tanto la volatilidad ayuda a poder distinguir un activo estable de aquel que no lo es.

El gran problema que implica el uso de volatilidades recae en el hecho de que no toma en consideración la dirección de las inversiones debido a que no distingue entre riesgo de pérdida (*downside risk*) o de ganancia (*upside risk*). Por lo anterior, la volatilidad no debería ser más que una variable de medición del riesgo, y de ninguna manera, un criterio de selección de activos o carteras.

Por dichos motivos, para consolidar una eficaz administración del riesgo es menester encontrar medidas que solo consideren los valores ubicados en la región del *downside risk*. Este conjunto de herramientas se conocen como medidas basadas en cuantiles cuyo máximo representante es y ha sido sin lugar a dudas el VaR. No obstante, las principales metodologías de estimación del VaR utilizan dos grandes supuestos: en primer lugar que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal (condiciones normales de mercado) y además que las varianzas de dichos rendimientos permanecen invariantes a lo largo del tiempo.

Fue gracias al trabajo de Edgar Peters (1993) que mediante la modelación de una enorme cantidad de series financieras demostró que la distribución de los rendimientos presenta generalmente colas pesadas y por lo tanto la hipótesis de normalidad suele ser rechazada. Por ende, fue necesario recurrir al desarrollo de medidas que complementarán la estimación del riesgo de las carteras de inversión y es entonces que, encabezados por el CVaR, fueron introducidas las medidas de riesgo coherente.

A lo largo de este trabajo, se tendrá interés en estudiar la adaptabilidad de algunas de las metodologías de estimación del VaR y CVaR en los mercados emergentes y posteriormente su robustecimiento mediante la adopción de supuestos de heterocedasticidad condicional, mismos que consideramos ejercicios mejor adaptables a la situación y condición actual del mercado financiero mexicano y por consiguiente para los miembros restantes del conjunto de mercados emergentes.

Organización de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera:

- En el primer capítulo se da una breve introducción al concepto de mercado emergente, resaltando la importancia en la actualidad de la correcta medición de sus riesgos

asociados. Para ello se ahonda en el estudio de las características y propiedades estadísticas que los rodean, tales como son la distribución leptocúrtica y la asimetría de los rendimientos. En esta parte se presenta el conjunto de activos que compondrán el portafolio de estudio y a su vez se efectúa un análisis estadístico descriptivo e inferencial de dicha información.

- En el Capítulo Dos se ofrece un acercamiento formal a las medidas de riesgo coherentes haciendo gran énfasis en la descripción del VaR y CVaR. Asimismo se resaltan sus limitaciones y explican de manera concisa algunas de las metodologías más comunes de estimación a partir de categorías de cómputo comprendidas por los modelos paramétricos, no paramétricos y semiparamétricos. De forma complementaria, se indican los pros y contras referentes a la aplicación de cada una de estas metodologías. Cada uno de los resultados que se obtienen, se someten a pruebas de *backtesting*.
- Para el tercer capítulo se muestra un análisis amplio y detallado del concepto de serie de tiempo. Este conducirá a profundizar en el estudio de las principales propiedades de los modelos ARMA tales como la obtención y descripción del comportamiento de las funciones de autocorrelación pura y parcial, del concepto de estacionariedad y de los componentes de las series. Adicionalmente se presentan los modelos *ARCH – GARCH* así como de algunas de sus adecuaciones más representativas (*EGARCH* y *TGARCH*) resaltando la teoría alrededor de estos, características matemáticas y las razones por las que deben ser consideradas como metodologías preferentes de estimación del riesgo del portafolio propuesto respecto a los métodos convencionales.
- Finalmente, en el Capítulo Cuatro se recopilan los resultados constituidos a lo largo de este trabajo con el fin de consolidar un análisis de riesgo consistente y poder ofrecer una sólida conclusión acerca de la metodología más apropiada de estimación del riesgo sobre la clase de mercados emergentes a partir de lo observado en el mercado mexicano.

Cabe señalar que los códigos y hojas de cálculo utilizados para obtener los resultados mostrados en la presente tesis pueden ser consultados a través del sitio GitHub accediendo a la siguiente dirección: <https://github.com/MartinCamarena/TesisMC>

Capítulo 1

Mercados Emergentes

Un país denominado emergente es aquel que se encuentra en vías de desarrollo, es decir, tiene gran potencial de crecimiento derivado principalmente de sus altos niveles de producción industrial, de la cantidad y calidad de sus exportaciones, así como de la gran demanda de productos de consumo y servicios por parte de sus ciudadanos que, a diferencia de los mercados desarrollados, ya se encuentra abastecida.

Este grupo de países están clasificados dentro del rango de mercados de mediano-alto riesgo debido a que tienen asociados riesgos específicos del tipo político, económico y de tipo de cambio, adicionales a los riesgos sistémicos como lo son el riesgo de liquidez, de crédito, de mercado, etc. Ciertamente son escenarios ideales para aquellos inversionistas que no son aversos al riesgo.

Las necesidades de los consumidores que deben de satisfacer así como la constante adopción y desarrollo de proyectos en materia de tecnología son puntos que hacen de estos un campo de inversión aún más atractivos. Como entidad financiera, el desenvolverse en esta clase de mercados sugiere estar plenamente consciente de aceptar la posibilidad de obtener considerables ganancias o notables pérdidas.

Una ventaja muy clara de poder estudiar y trabajar con este conjunto de economías radica en poder contemplar, en su forma más simple, el efecto de diversificación de la composición de las carteras, debido a las oscilaciones positivas y negativas provocadas por el constante movimiento de las volatilidades de los instrumentos, ya que estas son impactadas directamente por los diferentes factores de riesgo asociados a las inversiones como son el tipo de cambio, la inflación, los movimientos de tasas de interés o el precio de cierre de las acciones, por mencionar algunos ejemplos, en cuyo caso deben ser manejados con suma precaución ya que pueden amenazar la inversión y dirigirla hacia resultados para nada satisfactorios. Es por ello que, las entidades y agentes financieros, deben robustecer

periódicamente sus procesos de administración de riesgos financieros a manera de llevar a cabo mejores prácticas de mercado.

1.1. Características económicas

El uso del término “Mercado Emergente” fue empleado por primera vez por Antoine von Agtmael en 1981, economista miembro de la Corporación Financiera Internacional (IFC por las siglas en inglés provenientes de *International Finance Corporation*). Dicha organismo forma parte del Banco Mundial que es la institución internacional que entre sus funciones sirve de apoyo financiero a países que buscan establecer mejores condiciones de vida de sus habitantes. La idea alrededor de este concepto, desde aquel entonces, se encuentra basada en mirar las oportunidades financieras a largo plazo que este característico grupo de economías pueden llegar a ofrecer.

También conocidos como “países en desarrollo”, los mercados emergentes pueden ser referidos a aquellas naciones que en los últimos años han experimentado un aumento en su Producto Interno Bruto (PIB), además de un crecimiento de los ingresos familiares y un fortalecimiento en la industrialización de sus procesos y actividades económicas.

Este conjunto de países actúan como serios competidores respecto a economías más desarrolladas. Por mencionar algunos datos, en las economías emergentes se consume mundialmente cerca del 48 % de petróleo, el 56 % de cobre y el 66 % de acero.¹ Por otro lado, el 43 % de la riqueza mundial se encuentra repartida en esta clase de países en los que habitan aproximadamente 5 billones de personas².

Dentro del conjunto de características que los distinguen se encuentran las siguientes:

- La mayoría de sus habitantes pueden ser clasificados dentro del estrato social medio-bajo.
- Gran proporción de la población son jóvenes y debido a las escasas oportunidades de educación existentes el oficio que mayor se practica es el de la mano de obra.
- Derivado de la dificultad de encontrar un trabajo estable y bien remunerado, estos países presentan una alta tasa de migración hacia mercados desarrollados. Es común observar fuga de talentos al extranjero.

¹Datos obtenidos de los sitios oficiales del International Monetary Fund (IMF) y de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

²Datos obtenidos del sitio oficial de la Organización de las Naciones Unidas (ONU) al 31 de diciembre de 2016

- El valor de los ingresos familiares respecto al costo de servicios y productos de primera necesidad, a pesar de crecer año tras año, es insuficiente.
- Son naciones que poseen una pobre infraestructura comercial y urbana por lo que están en constante búsqueda y desarrollo de modelos de modernización.
- Algunos de estos países solían ser pobres o poseen un alto nivel de pobreza. Regularmente crecen económicamente por encima del promedio mundial.
- En el ámbito político experimentan constantes cambios de ideologías y poder en búsqueda de mejoras. Muchos de estos cambios, en su momento, sentaron las bases y marcaron la dirección del crecimiento hacia la consolidación como país emergente.
- Los mercados de deuda y renta variable crecen rápidamente, sin embargo son muy susceptibles a cambios y frente a escenarios de crisis son relativamente débiles debido a las características de las estrategias de inversión que predominan por parte de los inversionistas (basadas en su mayoría en procesos de cobertura e inversiones en subyacentes denominados en divisas).

Estos son algunos datos relevantes por tipo de economía, según la clasificación mundial comúnmente utilizada por la OCDE:

Característica	Economía avanzada ¹	Economía emergente	Economía frontera ²
Mediana de edad de los habitantes	38 años	32 años	24 años
Sector clave	Servicios	Manufactura	Agricultura
Nivel educacional	Alto	Medio	Bajo
Libertad de política económica	Amplia	Moderada	Restringida
Sistema político-económico predominante	Capitalismo	Transición capitalista	Autoritarismo
Riesgo de país	Bajo	Variable	Alto
Infraestructura	Desarrollada	Moderada	Inadecuada

¹ Un sinónimo de País Desarrollado

² Aquellos países de baja capitalización bursátil, poca regulación y niveles de inversión extranjera mínimos.

Cuadro 1.1: *Características de los diferentes tipos economías según la OCDE.*

Cabe señalar que es *Morgan Stanley Capital Internacional* (MSCI, firma líder en el desarrollo de índices de referencia utilizados por los inversionistas para evaluar las inversiones) quien decide qué países pueden ser clasificados dentro de esta categoría. Para ello se basa en el uso de la metodología de selección del índice de mercados emergentes de MSCI

expresado en dólares. Al 31 de diciembre de 2016 los 24 países que formaban parte de la muestra eran:

América	Europa y África	Asia
Brasil	República Checa	China
Chile	Egipto	Corea
Colombia	Grecia	Emiratos Árabes Unidos
México	Hungría	Filipinas
Perú	Polonia	India
	Rusia	Indonesia
	Sudáfrica	Malasia
	Turquía	Pakistán
		Qatar
		Taiwán
		Tailandia

Cuadro 1.2: Países denominados emergentes al 31 de diciembre de 2016.

No obstante, además de los riesgos sistémicos inherentes a cualquier economía, los mercados emergentes deben hacer frente y poner énfasis en la atención de riesgos idiosincráticos entre los que se destacan:

- **Riesgos Sociales:** Como se mencionó anteriormente, una de las características de estos países son los constantes cambios de poder político. Esto provoca incertidumbre directa en los inversionistas ya que dichos cambios pueden resultar muy drásticos (incluso si el mismo partido o ideología continua gobernando) dependiendo del tipo de oportunidades ofrecidas y la búsqueda de mejores condiciones de vida exigidas por sus habitantes.
- **Riesgo de moneda local.** En el ámbito internacional, el valor de las monedas de los países emergentes respecto al de las economías consolidadas en promedio es menor. Es por ello que es común encontrar que las estrategias de inversión hagan uso de otro tipo de monedas, lo que implica un doble riesgo monetario, el de la moneda de referencia y el de la moneda local. Para mitigar dicho riesgo existen técnicas de cobertura, no obstante su uso implica reducción en rendimientos y el desaprovechamiento de los beneficios ofrecidos por la diversificación.
- **Riesgo de contagio.** Las economías emergentes dependen directamente de otras economías ya que requieren de altas cantidades de materias primas, materiales, productos y por supuesto entradas de capital derivadas principalmente de las exportaciones que efectúen. Entonces si aquellos países de los que dependen sufren severos problemas financieros, estos tarde o temprano terminarán por afectarlos. Es decir, su correlación

será muy cercana a uno. A diferencia de los mercados desarrollados donde se cuentan con mecanismos de control y planes de contingencia económica firmes, la correlación con los mercados emergentes será inversa no olvidando que, en el largo plazo, la correlación siempre tenderá a uno, es decir, llegará el punto o se dará una situación adversa en que a todas las economías se verán alcanzadas por los efectos de dicho evento (como fue el caso de la crisis mundial ocurrida en el 2008).

Por otro lado uno de los problemas más graves a los que deben hacer frente es a los actos de corrupción:

- **Corrupción:** Sin duda alguna este es un factor predominante que afecta la forma de hacer negocios bajo cualquier perspectiva. Se ha demostrado que aquellas naciones que presentan menor índice de corrupción ofrecen una menor volatilidad de los rendimientos. Lamentablemente, la gran mayoría de los países emergentes no muestran índices de corrupción dentro de estos niveles deseados.

La corrupción no puede ser predecible o gestionable, el camino que ha mostrado ser la solución para frenar esta clase de actos es la educación. Sin embargo la débil estructura del sistema educativo de estos países, sobretodo en sus niveles básicos, resulta el primer inconveniente para ello. Según datos del Índice de Percepción de la Corrupción 2016, México se encuentra ubicado en el lugar 123 de 176 países con una calificación de 30, siendo Dinamarca y Nueva Zelanda los que ostentan la mayor calificación con un total de 90 puntos.³ De los países listados como mercados emergentes, Chile ocupa la mejor posición, siendo el número 24 con 66 puntos. Esto da una idea general acerca de la corrupción como un problema en común que enfrentan dichos mercados.

De lo anterior se puede intuir la importancia de contar con métodos de administración certeros y a la vez de sencilla implementación esto con el fin de poseer un mejor control y mayor conocimiento del riesgo financiero. La mayoría de los esfuerzos, sin embargo, se han enfocado en robustecer sistemas y procesos existentes, en lugar de considerar un replanteamiento totalmente diferente de la gestión de riesgos.

1.2. Propiedades estadísticas asociadas a mercados emergentes

La Teoría de Portafolios publicada por Markowitz (1952) señala que es posible añadir valores o instrumentos a cierto portafolio con el fin de reducir la covarianza del mismo, lo que implica a su vez reducir su riesgo asociado, brindando la posibilidad de elegir los mejores instrumentos que minimicen el riesgo y maximicen el rendimiento de la inversión.

³Índice de Percepción de la Corrupción 2016 publicado por la organización no gubernamental Transparencia Internacional.

Bajo escenarios emergentes, los precios de los activos se comportan más pausados respecto a los observados en los mercados desarrollados. Esto implica que muy rara vez los rendimientos superarán los registrados en los países de primer mundo o bien que los factores que puedan influir en el cálculo del precio tarden en hacerse presentes. Entonces, la mayor parte de las veces, sucederá que el precio al que se este cotizando no refleje en su totalidad los efectos de las buenas o malas noticias alrededor del activo, lo que dificulta enormemente el estudio del riesgo bajo mecanismos convencionales de medición y por lo tanto se requiere de herramientas complementarias un poco más sofisticadas que ayuden para una mejor toma de decisiones.

Como se mencionó, para el caso de los mercados emergentes, las volatilidades en gran medida se ven directamente influenciadas por las políticas domésticas bajo las que operan los inversionistas. Como lo menciona Mody (2004), dichas políticas adoptadas por esta clase de países son generalmente “procíclicas”, es decir, refuerzan los auges económicos y agravan las recesiones, pudiendo cambiar de sentido en el corto plazo, perjudicando de esta manera el despegue y consolidación de las inversiones.

Un ejemplo muy claro de ello es la crisis de 1994 de México también conocida bajo el seudónimo de “Efecto Tequila” considerada como la primer crisis en términos de liquidez de la década de los noventa debido a que generó incertidumbre en el sistema financiero internacional por la idea de la ocurrencia de posibles “efectos dominó” sobre el resto de los mercados emergentes. Cabe señalar que meses antes de que se desatara dicha crisis se mencionaba con vehemencia que el país se encontraba en la dirección correcta, habiendo superado y suprimido por completo todo tipo de efectos secundarios causados por el periodo de déficit de los años ochenta. La realidad fue otra. En aquel entonces la revista Fortune publicó una lista de otras siete naciones (Filipinas, Indonesia, Malasia, Tailandia, Brasil, Argentina y Chile) propensas a entrar en crisis tal como fue el caso de México. Seis de estas economías, a excepción de Chile, efectivamente lo harían por lo que el resto tendrían que ser socorridas internacionalmente siendo al final satisfactoriamente rescatadas ⁴.

Otro ejemplo similar es el ocurrido en 1997 en Asia, cuando la moneda tailandesa, después de gozar de un crecimiento económico significativo apenas una década atrás (creciendo en algunos años a un promedio superior al 9% anual) se devaluó a niveles críticos debido a efectos especulativos y una serie de despidos masivos en sectores como el financiero, inmobiliario y de construcción lo que terminaría por impactar a las economías de Corea del Sur, Filipinas, Malasia e Indonesia. Para este segundo caso fue necesaria la intervención del FMI que, a través de “paquetes rescate” y la participación del país vecino Japón, pudieron detener lo que puede ser denominado, la primer gran crisis de globalización en la historia. En ambos sucesos las consecuencias sociales fueron demasiado graves y algunas de ellas se

⁴Fortune, “After Mexico who’s next?”, 6 de marzo de 1995, p.14

siguen haciendo presentEsto muestra y refuerza la idea de lo correlacionados y vulnerables que pueden resultar esta clase de economías ante eventos adversos externos de mercado y de lo rápido que puede cambiar el ámbito económico interno de estos países. Por ello es necesario que los inversionistas, al encontrarse trabajando bajo este tipo de escenarios, actúen con prudencia al momento de definir y ejecutar las estrategias de operación y asimismo se encuentren apoyados por herramientas tecnológicas y procedimientos que les brinden un amplio panorama del riesgo.

Dado que se tratan de economías que se encuentran sumergidas en constantes crisis (experimentando en ocasiones la entrada de una nueva crisis casi al término de otra) es lógico pensar que al considerar series de tiempo de un periodo en particular, serán observadas gran variedad entre los rendimientos de los activos más aún cuantos dichos activos forman parte del mercado de capitales. Es decir, es muy probable observar diferencias entre varianzas del valor de los instrumentos, lo que supone un comportamiento no normal de las volatilidades, mostrando un mayor peso en las colas (exceso de curtosis) y haciendo visible el efecto de asimetría de la distribución (sesgo negativo/positivo respecto a la media). Los mercados financieros por naturaleza son inestables. Para mitigar la ocurrencia de recesiones deben existir y ser implementadas políticas ajenas a cambios en el “sentimiento del mercado” o en la ideología partidaria que pudiese llegar a regir. Dado que este es un punto débil de los mercados emergentes, se debe proceder teniendo en consideración la alta probabilidad de enfrentarse, en el corto plazo, con escenarios de recesión.

Para hacer más evidente la diferencia entre el comportamiento volátil de los mercados emergentes frente a los desarrollados, a continuación se brinda una breve comparación entre los índices VIX y VXEEM, ambos creados por el mercado de opciones de *Chicago Board Options Exchange* o CBOE, siendo su objetivo el medir y llevar un histórico de información con relación al valor de las volatilidades de las opciones, el primero tomando como referencia el S&P 500 y el segundo al índice de mercados emergentes de MSCI, ambos excelentes indicadores de sus respectivos mercados.

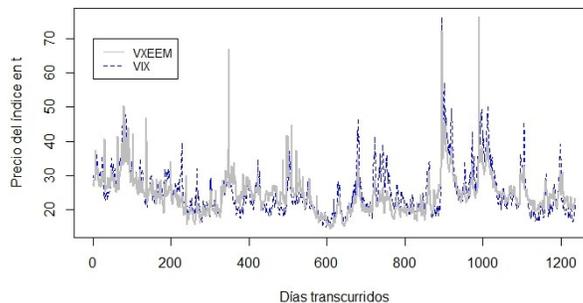


Figura 1.1: Gráfica de precios del índice VIX vs VXEEM.

Como se puede observar, el comportamiento de ambos índices siguen la misma dirección, presentando en la mayoría de los casos las mismas altas y bajas de valores, no obstante, siendo las del VXEEM generalmente más severas. Asimismo es posible corroborar que el comportamiento del VIX es más “centrado” y posee escasas observaciones en puntos extremos, lo que refleja lo controladas que pueden estar las economías desarrolladas, confirmando de esta manera su fuerte estabilidad ante movimientos contrarios de mercado.

Las economías en desarrollo realizan esfuerzos para poder incorporarse a la élite de economías a nivel mundial. Su surgimiento se dio principalmente por la dimensión de sus transacciones financieras con el resto del mundo. No obstante, la característica más representativa de estos mercados consiste en que poseen una elevada volatilidad financiera. Por ello, para su estudio, se recomienda hacer uso de técnicas que no se encuentren basadas en el supuesto de normalidad del comportamiento de los rendimientos ya que seguramente se estarían subestimando los atributos de riesgo del portafolio.

1.3. Definición del portafolio de estudio: caso mexicano

Desde la creación del Índice de Mercados Emergentes en el año de 1988 por parte de entidad financiera Morgan Stanley, de tan solo 10 países que conformaron en un inicio el índice y que representaban cerca del 1% de la capitalización mundial, en la actualidad se encuentra compuesto por 24 elementos que representan el 13% de la misma.

Optamos por centrarnos en el caso de México debido a que se trata de una economía que ha experimentado un crecimiento económico “constante” en los últimos años. Los principales factores que han complicado su consolidación económica son problemas internos relacionados a los altos niveles de corrupción política y los graves conflictos de narcotráfico que existen. Tiene celebrados Tratados de Libre Comercio con economías desarrolladas tales como son el TLCAN (con Canadá y Estados Unidos) celebrado en el año de 1994, el TLC con Japón en 2004 y los TLC con la Unión Europea y la Asociación Europea de Libre Comercio (AELC conformada por Suiza, Liechtenstein, Noruega e Islandia) en 2000 y 2001 respectivamente. Los sectores donde tiene más presencia local e internacional son los referentes a alimentos y bebidas, producción de acero y hierro y por supuesto, de manufactura automotriz. Si bien la economía en tiempos de opulencia puede ubicarse dentro de los primeros lugares de la lista de mercados emergentes, en tiempos de crisis puede llegar a tomar la última posición.

Para examinar el comportamiento de las medidas de riesgo que se presentarán en los siguientes capítulos, fue considerada una cartera de cinco acciones “líderes” seleccionadas aleatoriamente del total de 35 que componen el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

Ahora bien, con la finalidad de facilitar y agilizar cálculos fue considerada la muestra del IPC conocida al 1ro de noviembre de 2016 correspondiente a la última actualizada de dicho año. Dada la intención de constituir un portafolio “bien diversificado” se procuró el incluir al menos una Emisora de los sectores más representativos existentes en el mercado. Aunado a ello, la nueva ponderación asociada a cada instrumento respecto del total de la cartera será la misma, por lo que, para efectos del portafolio propuesto, cada acción corresponderá a un 20 % de la cartera, es decir,

$$W_i = \frac{1}{n},$$

con:

- W_i : Ponderación de la acción i , donde $i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- n : Número de acciones que componen el portafolio.

El siguiente cuadro muestra las propiedades básicas de las acciones finales resultantes.

Emisora_Serie	Nombre	Sector	Total de acciones*	Ponderación original	Nueva ponderación
AMX_L	América Móvil	Telecomunicaciones	24,323.64	11.66 %	20 %
BIMBO_A	Grupo Bimbo	Consumo	1,175.80	2.29 %	20 %
CEMEX_CPO	Cementos Mexicanos	Materiales	14,004.87	8.77 %	20 %
GFNORTE_O	Grupo Financiero Banorte	Servicios financieros	2,496.35	10.64 %	20 %
TLEVISA_CPO	Grupo Televisa	Telecomunicaciones	2,445.19	8.71 %	20 %

*Cifras en millones

Cuadro 1.3: *Propiedades básicas de las acciones de estudio seleccionadas en esta tesis.*

El rango que fue considerado para el estudio consta del 02/01/2012 al 30/12/2016 teniendo un total de 1251 registros, cumpliendo de esta manera los mínimos establecidos empíricamente tanto para realizar estimaciones (de al menos 50 elementos) y para ejecutar la metodología de simulación histórica para estimar el Valor en Riesgo del portafolio (1000 elementos).

El valor del portafolio toma valores en el rango de [\$30.50, \$58.14] registrando su valor mínimo el 02/01/2012 y su máximo el 16/08/2016, es decir, la amplitud de los precios es de \$27.63. Por otro lado la media es de \$46.90 mientras que la mediana consta de \$48.58 lo que implica una diferencia entre la mediana y la media es de \$1.67. De lo anterior, el coeficiente de asimetría estimado es de -0.6276969 lo que significa que la distribución presenta

un ligero sesgo positivo, es decir con una acumulación mínima hacia la izquierda de la media.

El primer cuartil es de \$43.14 mientras que el tercero consta de \$52.10 siendo el rango intercuartil de \$8.96. La desviación estándar es de 6.962033 que en proporción a la media representa aproximadamente un 15 %. Esto significa que se trata de una desviación estándar pequeña por lo que se espera contar con una acumulación alrededor de la media significativa. Es decir, la expectativa de observar un comportamiento leptocúrtico es alta.

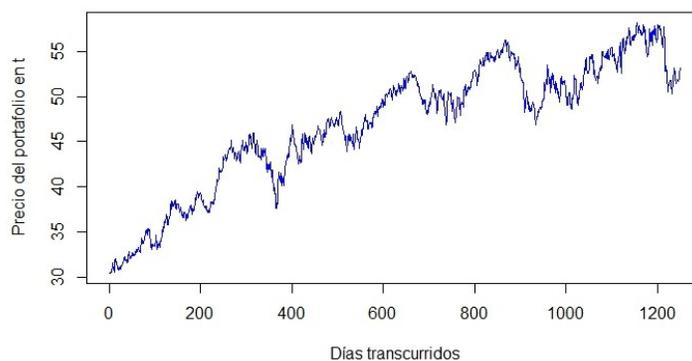


Figura 1.2: Precios del portafolio de estudio propuesto.

Lo que en términos de rendimientos se representa como

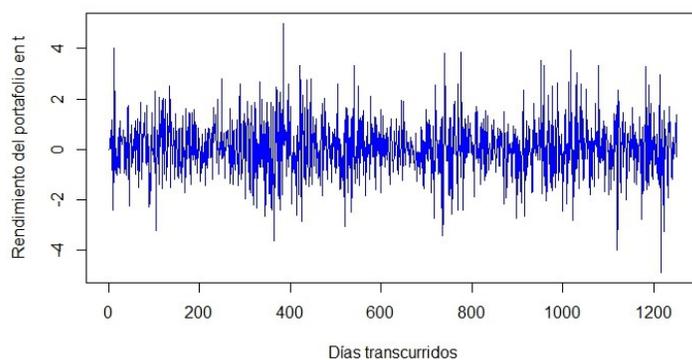


Figura 1.3: Rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

De la gráfica anterior se puede observar que la serie financiera posee un comportamiento similar al del índice VXEEM, mostrando constantes subidas y bajadas muy pronunciadas. Este efecto es también conocido agrupamiento de volatilidad.

A continuación se muestra el cuadro de frecuencias de la serie de rendimientos:

V. inferior	V. superior	Marca de clase	F. Absoluta	F. Relativa	F. R. ascendente	F. R. descendente
30	33	31.5	63	0.050	0.050	0.950
33	36	34.5	60	0.048	0.098	0.902
36	39	37.5	102	0.082	0.180	0.820
39	42	40.5	53	0.042	0.222	0.778
42	45	43.5	148	0.118	0.341	0.659
45	48	46.5	166	0.133	0.473	0.527
48	51	49.5	252	0.201	0.675	0.325
51	54	52.5	209	0.167	0.842	0.158
54	57	55.5	164	0.131	0.973	0.027
57	60	58.5	34	0.027	1	0
SUMA:			1251	1		

Cuadro 1.4: Frecuencias de los rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

De lo anterior se obtiene la siguiente gráfica:

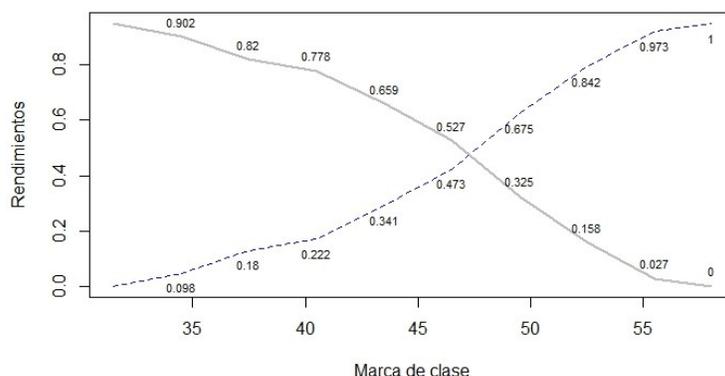


Figura 1.4: Ojiva de rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

El 47.3% de la muestra alcanza valores menores o iguales a \$48. Asimismo 84.2% de los datos toma valores menores o iguales a \$54. Por otro lado, de la gráfica de ojivas o función de distribución empírica, se puede notar que la simetría entre las líneas de frecuencias relativas ascendentes y descendentes se encuentra un poco desplazada a la derecha, lo que apoya la idea de una mínima acumulación de valores menores a la media y un parecido muy cercano al de una distribución normal.

Otro aspecto que destacar es la suma de valores que se encuentra en las colas de la distribución, representando un total de 97 elementos equivalentes a un 5% del total de registros. Esto se traduce en colas pesadas con valores cercanos a la media, características de una distribución con posible exceso de curtosis y forma leptocúrtica.

Su histograma toma la siguiente forma:

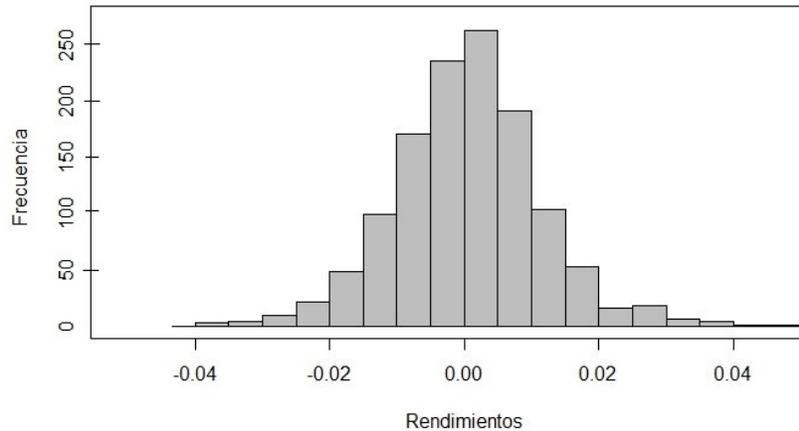


Figura 1.5: *Histograma de rendimientos del portafolio de estudio propuesto.*

Confirmando una alta acumulación de valores en el rango intercuartil alrededor de la media. Ahora calculando la curtosis se obtiene el valor de 2.492025, de donde se dice que si el resultado es positivo la distribución es leptocúrtica. Valores cercanos a cero corresponden a curtosis asociadas a la distribución normal o a familias mesocúrticas.

Llevando a cabo pruebas de normalidad de datos tales como son la Kolmogorov-Smirnov, Saphiro-Wilks, Anderson-Darling y Jarque Bera se obtuvieron los siguientes resultados. Sea:

H_0 : La muestra proviene de una Dist. normal vs H_1 : La muestra no proviene de una Dist.normal.

El nivel de significancia que se trabajará es de 5%. Es decir $\alpha=0.05$. Por lo tanto el criterio de decisión está dado por:

$$\text{Criterio de decisión: } \begin{cases} \text{Si p-valor} < \alpha, & \text{entonces se rechaza } H_0. \\ \text{Si p-valor} \geq \alpha, & \text{entonces no se rechaza } H_0. \end{cases}$$

A continuación se ofrece un resumen de las pruebas aplicadas.

Prueba	Nivel de significancia	p-valor	Resultado
Kolmogorov-Smirnov	5 %	0.07436 %	Se rechaza H_0
Saphiro-Wilks	5 %	1.869×10^{-6} %	Se rechaza H_0
Anderson-Darling	5 %	7.833×10^{-6} %	Se rechaza H_0
Jarque Bera	5 %	2.2×10^{-14} %	Se rechaza H_0

Cuadro 1.5: Resumen de la aplicación de pruebas de normalidad de los precios del portafolio de estudio propuesto.

Como se puede notar, los p-valores obtenidos son demasiado pequeños por lo tanto son rechazadas las hipótesis nulas, es decir, con la información disponible se rechaza el supuesto de que los datos siguen una distribución normal.

Lo anterior, al observar el gráfico de cuantiles o gráfico QQ termina por ser corroborado ya que son notables las desviaciones de los rendimientos del portafolio respecto a la línea de normalidad.

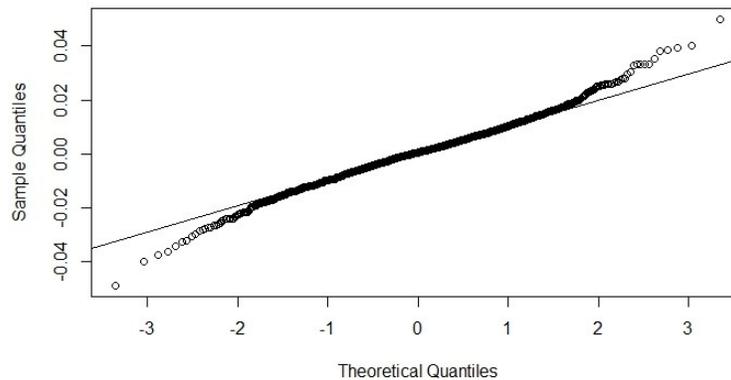


Figura 1.6: Gráfico de cuantiles de los rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

Es claro identificar una acumulación de datos alrededor de la media y la presencia de colas pesadas al momento de graficar la distribución de los rendimientos a partir de su histograma.

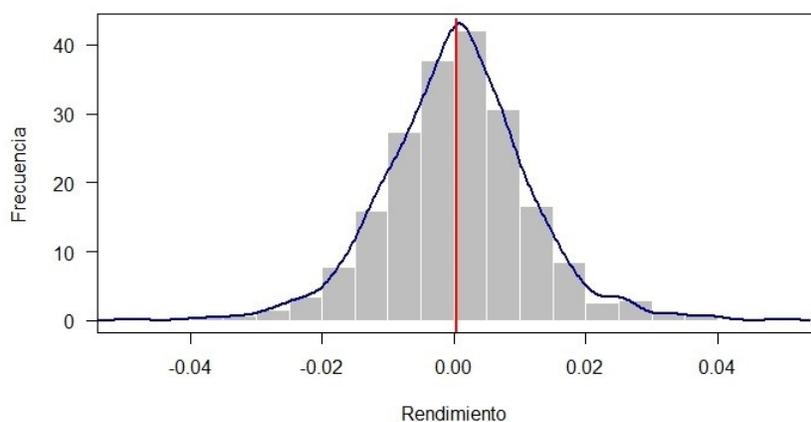


Figura 1.7: *Histograma de rendimientos del portafolio de estudio propuesto con media señalada y función de distribución empírica.*

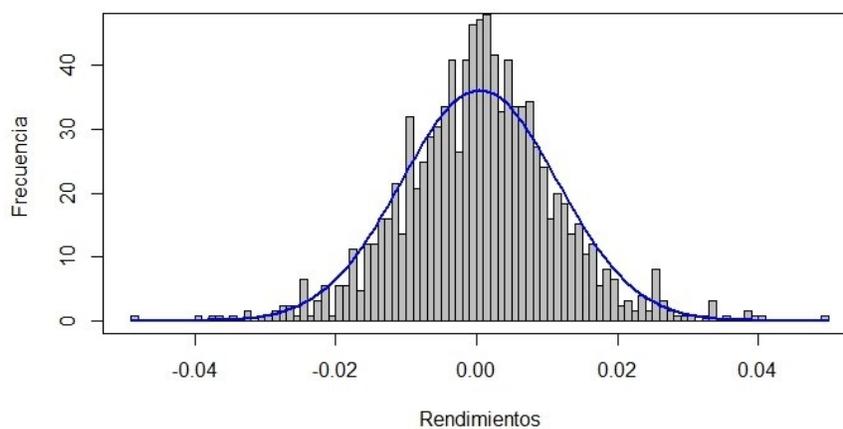


Figura 1.8: *Histograma de rendimientos observados del portafolio de estudio propuesto vs función de distribución normal teórica.*

Se concluye que la serie de rendimientos no presenta un comportamiento normal ya que sigue una distribución leptocúrtica con sesgo ligeramente positivo muy cercano a cero, varianza cambiante con agrupamiento de volatilidad (periodos de poca volatilidad seguidos de otros de alta volatilidad) y valor de mediana superior a la media.

Por otro lado, un camino para descartar la presencia de homocedasticidad en los datos es mediante la prueba de Levene misma que permite comprobar la igualdad de varianzas de dos o más muestras.

Para este trabajo se consideró la comparación de varianzas tomando el caso de 2 muestras aleatorias. Es así que la prueba se encuentra fundamentada en las siguientes hipótesis:

$$\mathbf{H}_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \text{ vs } \mathbf{H}_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2,$$

de donde el estadístico de la prueba se encuentra definido de la siguiente manera:

$$W_0 = \frac{(N - k) \sum_{i=1}^k N_i (Z_i - Z')^2}{(k - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N_i} (Z_{ij} - Z'_i)},$$

con:

- k como el número de muestras consideradas.
- N el número total de casos de que forman parte de las muestras consideradas.
- N_i el número total de casos de que forman parte de la muestra i .
- Z' la media de Z_{ij} .
- Z'_i la media de Z_{ij} respecto de la muestra i .
- Z_{ij} definida de la siguiente manera:

$$Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_i|,$$

donde:

- \bar{Y}_i es la media de la muestra i .
- Y_{ij} el valor de la variable j que forma parte de la muestra i .

Es por ello que el criterio de decisión está dado de la siguiente manera:

$$\text{Criterio de decisión: } \begin{cases} \text{Se rechaza } H_0 & \text{si } W_0 > F_{\alpha, k-1, N-k}. \\ \text{No se rechaza } H_0 & \text{si } W_0 \leq F_{\alpha, k-1, N-k}. \end{cases}$$

considerando un nivel de confianza del 95 %, es decir, con $\alpha = 5\%$ y con $F_{\alpha, k-1, N-k}$ correspondiente al cuantil de la prueba F de Snedecor con $k - 1$ y $N - k$ grados de libertad haciendo uso del nivel de confianza α establecido.

Es así que, para llevar a cabo la prueba, se hizo uso de la función *levene.test* en R^5 de donde se obtuvo lo siguiente:

⁵Dicha función forma parte de la paquetería *lawstat* que puede ser consultada en la siguiente dirección: <https://cran.r-project.org/web/packages/lawstat/lawstat.pdf>

W_0	$F_{\alpha, k-1, N-k}$	Resultado
340.71	1.141	Se rechaza H_0

Por lo tanto, la hipótesis nula de igualdad de varianzas se rechaza y con ello el supuesto de homocedasticidad en la serie.

Sin embargo, puede no resultar suficiente la aplicación de una única prueba para optar por la adopción y uso de modelos heterocedásticos. Es por ello que, adicionalmente, fue llevada a cabo la prueba de Breush-Pagan, misma que se emplea para determinar la presencia de heterocedasticidad en una serie de tiempo.

Al igual que en la prueba de Levene, la hipótesis nula corresponderá al hecho de que las varianzas son aproximadamente las mismas (homocedasticidad), mientras que la hipótesis alternativa indicará que las varianzas son distintas (heterocedasticidad) bajo la propuesta de un modelo de regresión lineal. Para ello, como lo mencionan los propios Breusch y Pagan (1980), basta con corroborar que la varianza de los residuos de la regresión se encuentran relacionados linealmente con los valores de los regresores. Es así que definen el criterio de selección de la siguiente manera:

$$\text{Criterio de decisión: } \begin{cases} \text{Se rechaza } H_0 & \text{si el p-valor de la prueba} < \alpha. \\ \text{No se rechaza } H_0 & \text{si el p-valor de la prueba} \geq \alpha. \end{cases}$$

Por lo tanto, haciendo uso de la función *bptest* de la paquetería *lmtest* de *R*, se llegó al siguiente resultado:

p-valor	α	Resultado
340.71	1.141	Se rechaza H_0

De lo anterior, se sugiere el ajuste de modelos tipo ARCH-GARCH a la serie de precios del portafolio de estudio propuesto.

Capítulo 2

Algunos conceptos de administración de riesgos

Para la mayoría de las personas la palabra riesgo esta asociada a la idea de peligro, o visto de otra manera a la probabilidad de obtener un resultado negativo. Dentro del ámbito financiero la idea prevalece con la peculiaridad de que los resultados insatisfactorios que pueden llegar a sufrir los diferentes participantes del mercado financiero, llámese inversionista, entidad financiera (banco, aseguradora, casa de bolsa, etc.) o emisor se traducen en pérdidas monetarias.

Por su naturaleza, el riesgo en una inversión (y de hecho en cualquier aspecto de la vida) es de carácter inherente y una de sus propiedades más importantes radica en que no existe manera de eliminarlo. Por esta razón, el primer paso para poder encararlo es entenderlo para posteriormente determinar la manera en que deberá ser administrado y de esta forma mitigarlo, transferirlo o evadirlo.

Abordar el tema de la administración del riesgo no es una tarea sencilla. El ideal de inversión radica en encontrar estrategias eficientes que maximicen los rendimientos de los activos o portafolios de inversión adoptando un nivel mínimo de exposición al riesgo.

Por mucho tiempo el VaR ha sido la opción de medición de riesgo financiero de mayor popularidad entre las alternativas existentes. Sin embargo, debido a que la evolución de los factores de riesgo de inversión, producto del desarrollo y creación de nuevos productos financieros, ha sido descomunal y por otro lado, las severas crisis financieras ocurridas a nivel mundial en la última década, han hecho que esta medida llegue a resultar insuficiente. Consecuencia de ello es la importancia que el uso del CVaR ha adquirido dada su particularidad de considerar los posibles escenarios catastróficos que pudieran llegar a ocurrir por encima del VaR.

Por este motivo, para comprender las debilidades y fortalezas del VaR y CVaR, se comenzará por definir los tipos de riesgos que rodean la actividad diaria de una entidad financiera así como las características de riesgo asociadas a la serie de rendimientos del portafolio estudio propuesto.

2.1. Diferentes clasificaciones del riesgo

En la actualidad las empresas enfrentan amenazas demasiado complejas, muchas de ellas de enormes magnitudes. Por ello, con el fin de prevenir crisis como las ocurridas en los últimos años - tales como la crisis Argentina en el 2001, la “Gran Recesión” en Estados Unidos del 2008 o bien la crisis griega y la gran deuda europea en 2010 - uno de los objetivos prioritarios de los participantes de la industria financiera es encontrar indicadores de riesgo que sean cada vez más precisos. De ahí la gran importancia de trabajar en pro de su búsqueda o desarrollo.

Para alcanzar mejores prácticas de medición del riesgo es imprescindible que las entidades financieras identifiquen primeramente los diferentes peligros a los que se encuentran expuestas. Es así que, considerando el estudio de Harcher (2005), se enuncian a continuación los diferentes tipos de riesgos a los que comúnmente hacen frente las instituciones financieras:

- **Riesgo de Mercado.** Pérdida potencial generada a partir de la fluctuación en los precios en el mercado o cambios adversos en los factores de riesgo como son: el tipo de cambio, la tasa de interés, la inflación, etc.
- **Riesgo de Crédito.** Se define como la incertidumbre asociada al incumplimiento de al menos uno de los términos del contrato por parte de alguna de las contrapartes involucradas en el proceso de inversión.
- **Riesgo de Liquidez.** Término asociado a la posibilidad de no contar con los recursos suficientes para hacer frente a las obligaciones financieras de la entidad.
- **Riesgo Operacional** Considerado dentro de este subconjunto desde el año 2003 por Basilea II, consiste en la posibilidad de incurrir en pérdidas derivado de errores, deficiencias, fallas de los procesos y sistemas debido al factor humano o a la tecnología utilizada. Dentro de esta categoría se pueden encontrar los denominados riesgo legal y riesgo tecnológico.

Para hacer frente al riesgo se necesitan sistemas y métodos que logren identificarlo, medirlo y controlarlo, conduciéndolo a niveles aceptables para el inversionista. No obstante, cabe señalar que una de las tareas más complicadas dentro de la administración del riesgo

financiero se encuentra en seleccionar la metodología de medición del riesgo acorde al comportamiento de los portafolios de la entidad.

Para facilitar dicha selección es preciso recordar, en primera instancia, la estructura fundamental del modelo de administración de riesgos el cual comprende las siguientes etapas:

1. **Identificación:** Parte de reconocer del conjunto comprendido por el total de riesgos existentes y aplicables a la inversión, aquellos específicos que pudiesen afectar directamente los resultados esperados de la misma.
2. **Evaluación:** Consiste en cuantificar la probabilidad de pérdida y medir la magnitud de los eventos de incertidumbre a los que está expuesta la cartera.
3. **Selección de método de administración:** Se elige la opción más adecuada para mitigar el riesgo, que además se recomienda debe ser viable, clara y estructurada para el ejercicio de la entidad.
4. **Implementación:** Una vez que se adopta una estrategia general de administración se pone en práctica y se analiza a detalle. Se determina si es o no conveniente para la entidad.
5. **Seguimiento y mantenimiento:** Supervisión constante de los resultados, ajustes al modelo y control de riesgos.

Un aspecto a destacar dentro de la etapa de identificación consiste en definir y acotar las variables sobre las que el estudio del riesgo se encontrará basado. Es así que en este trabajo serán consideradas las tasas logarítmicas de los rendimientos observados del 2012 a 2016. Lo anterior debido a las ventajas que implica el uso de logaritmos en el manejo de los datos a través del tiempo y que más adelante se detallan.

Partiendo de estudiar la forma para obtener el rendimiento simple de un activo del periodo de $t - 1$ a t se tiene que:

$$RS_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

con:

- t : periodo de tiempo (un día).
 - P_t : precio al día t .
-

Por lo que la obtención del rendimiento logarítmico o rendimiento compuesto (RC) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} RC_t &= \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \\ &= \log(P_t) - \log(P_{t-1}) \\ &= \log(1 + RS_t), \end{aligned}$$

donde:

- t corresponde al periodo de tiempo (un día).
- P_t es el precio al día t .

Cabe señalar que la determinación de los rendimientos bajo este supuesto implican una serie de ventajas sobre el método simple, que consisten en lo siguiente :

- **Normalización de los rendimientos:** Si se está modelando sobre el mercado de valores, es común suponer que los rendimientos diarios de los activos se distribuyen normalmente. Bajo este contexto, a diferencia de los RS , la determinación del rendimiento compuesto de un activo a través del tiempo correspondería a la suma de muestras aleatorias de una distribución normal misma que, por Teorema de Crámer, es normal.

En cambio, para el RS el uso de sumas es sustituido por el producto de las variables, y dado que estas variables siguen una distribución gaussiana, el producto puede llegar a ser un problema para el estudio conjunto de las mismas, ya que puede que no se distribuya normal. Es decir,

$$RS_k = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \prod_{i=1}^k (1 + RS_i).$$

Mientras que, para RC :

$$RC_k = \sum_{i=1}^k \log(1 + RS_i) = \sum_{i=1}^k (\log(P_{i+1}) - \log(P_i)) = \log(P_k) - \log(P_1).$$

Teniendo que, para el caso de supuestos de normalidad de los rendimientos, se tiene que la suma de variables que siguen una distribución normal se distribuye normal.

Adicionalmente se puede observar que la forma de obtención del rendimiento para cualquier intervalo de tiempo se simplifica considerablemente.

- **Igualdad aproximada:** Esto significa que, en los casos en que la rentabilidad es muy pequeña, los rendimientos logarítmicos son muy parecidos a los rendimientos simples, es decir,

$$\log(1 + r) \approx r, \text{ con } r < 1.$$

Por lo anterior, ya definida la forma de consideración del rendimiento del portafolio de estudio, así como habiendo conocido los diferentes tipos de riesgo existentes que pudiesen afectarlo, se procede a presentar las medidas de riesgo del VAR y CVaR así como algunos métodos de estimación.

Como es posible observar en la Figura 2.1, conforme más grande sea el periodo de estudio, mayor será el grado de error entre la estimación del rendimiento simple y el rendimiento compuesto.

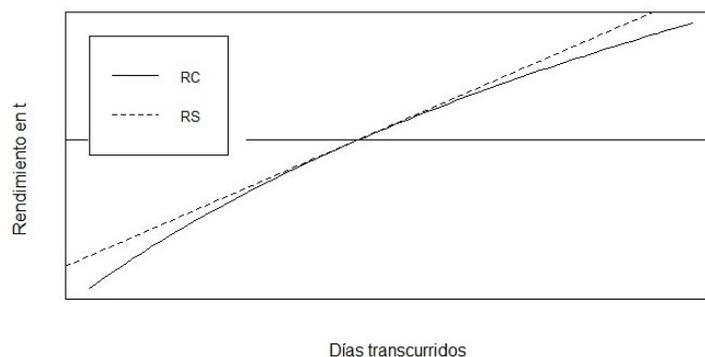


Figura 2.1: Comparativo del comportamiento del RC vs RS.

2.2. Valor en Riesgo

Una de las preguntas que surge al iniciar cualquier tipo de inversión consiste en saber ¿cuánto es lo máximo que se puede llegar a perder? o, expresado de otra manera, ¿en qué momento la inversión se encuentra mayormente expuesta a situaciones que deriven en pérdidas considerables? De una forma sencilla el VaR actúa como una respuesta razonable para este tipo de cuestionamientos, al menos a través de adoptar la forma de un límite.

Los inicios del VaR se remontan a la década de los setenta, época en que las primeras crisis de impacto internacional se hacen partícipes (tales como son la crisis de tipo de cambio en 1971 y la referente a los precios del petróleo en 1973, ambas que llevaron a la obtención de altas tasas de interés y niveles históricos de volatilidad) y cuyas consecuencias condujeron a las empresas a trabajar en el desarrollo de modelos con la habilidad de medir

y administrar el riesgo para poder definir estrategias para mitigarlo. Esto debido a que uso de la varianza y desviación estándar como medidas de riesgo propuestas en la teoría de portafolios de Markowitz (1952) comenzaron a resultar insuficientes.

Como bien lo narra Gillian Tett (2010), fue hasta el año de 1994 que Dennis Weatherstone, Presidente de JP Morgan en aquel entonces, solicitó a su equipo de riesgo, denominado como Riskmetrics, en respuesta a diversos desastres financieros ocurridos en la década de los ochentas la entrega diaria de un reporte posterior al cierre de operaciones que resumiera la exposición de su Compañía ante los movimientos del mercado. Lo anterior con el fin de prevenir las posibles pérdidas que pudieran ocurrir al día siguiente. Fue así que, la creatividad del equipo y el afán de encontrar una medida que sirviera de referencia del riesgo de las inversiones y partiendo de la Teoría de portafolios, condujo a definir un cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias de la cartera. Dado que dicho reporte tenía la particularidad de que debía ser entregado a las 4:15 de la tarde, posteriormente fue bautizado como “Reporte 4:15”.

Años más tarde y debido a su rotundo éxito y gran utilidad, la medida implementada sería renombrada bajo el título de “Valor en Riesgo”. Es así que es definido el Valor en Riesgo de la siguiente manera:

Definición 2.2.1. (*Valor en Riesgo*)

Sea la variable aleatoria X que representa los rendimientos de los instrumentos del portafolio y α el nivel de confianza dado, entonces:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} \\ &= F_X^{-1}(\alpha), \end{aligned}$$

donde F_X corresponde a función de distribución de X y F_X^{-1} a la función inversa generalizada con $0 < \alpha < 1$.

El VaR es aquella medida que resume la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) en un horizonte fijo de tiempo dentro de un intervalo de confianza determinado bajo condiciones normales de mercado, es decir, donde el precio de los activos tiende a mantenerse en constante equilibrio.

Por lo tanto, para estimar el VaR es necesario considerar un lapso de tiempo, comúnmente establecido de un día, así como un nivel de confianza α usualmente del 95 % o 99 % de la distribución de rendimientos. Esto no significa que el VaR no se pueda calcular para analizar el riesgo de la inversión bajo diferentes parámetros. De hecho las empresas dentro

de sus políticas internas de administración del riesgo frecuentemente hacen uso de parámetros en diferentes escalas como medidas prudenciales. Lo que si es importante destacar es el hecho de que esta medida no proporciona información relacionada a la magnitud de aquellas pérdidas que le superan. Es cierto que dichas pérdidas tendrán asociada una probabilidad muy pequeña de ocurrencia, que no es lo mismo a pensar que nunca ocurrirán.

Si se considera que el VaR de un activo es de \$100 a un día con un nivel de confianza del 95 %, eso significará que con 5 % de probabilidad el valor de pérdida del activo resultará por encima de \$100 al día siguiente. Visto gráficamente el VaR presenta el comportamiento mostrado en la Figura 2.2.

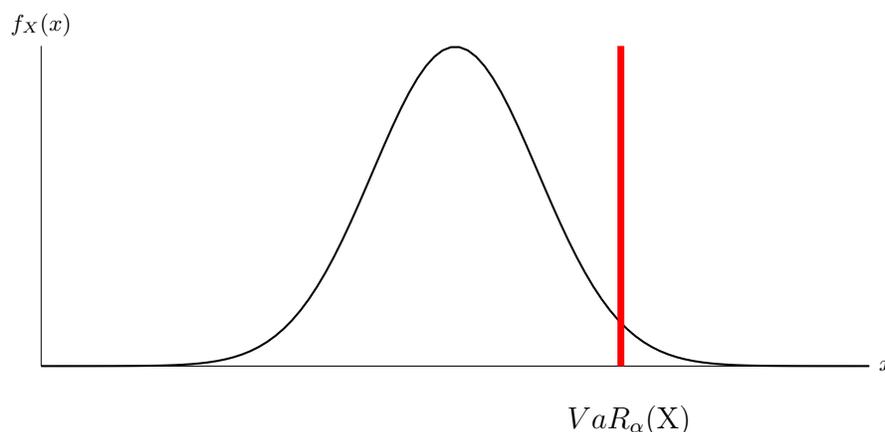


Figura 2.2: Descripción gráfica del VaR.

Bajo un gran número de metodologías de obtención del VaR se supone que los rendimientos se distribuyen normal ya que simplifica en gran medida los cálculos del mismo.

El VaR se usa comúnmente por bancos y aseguradoras para medir la suficiencia tanto del capital como de sus reservas. Lo anterior con el fin de asegurar una cobertura de las pérdidas que pudiesen ocurrir a consecuencia de movimientos adversos del mercado, llegando a exponer la condición financiera de la empresa. Su adaptabilidad y popularidad, en materia de gestión de riesgos, se debe a su fácil interpretación y sencillo cálculo además que puede expresarse en términos monetarios; lo que sin duda resulta muy atractivo para los inversionistas y reguladores.

Sin embargo, desde su implementación, el VaR ha sido severamente criticado por sus múltiples deficiencias al momento de suponer distribuciones de pérdidas diferentes a la normal. Esto se traduce, como se verá un poco más adelante, en problemas de subaditividad, o

que es lo mismo, en conflictos en la diversificación del riesgo de los activos. Por lo anterior el VaR no es una buena referencia bajo escenarios de alta volatilidad, cualidad propia de los mercados emergentes.

Su consolidación se dio por el impulso del Comité de Basilea en el año de 1996 que, como parte de las modificaciones del acuerdo de Basilea I establecido en 1988, decidió incluir un capital de requerimiento adicional por concepto de cobertura de riesgo de mercado en su normativa, lo que implicó la incorporación del VaR como medida de riesgo a nivel internacional. A su vez esta inclusión condujo a los organismos reguladores a ofrecer completa libertad a las instituciones financieras de utilizar métodos internos para lograr estimarlo.

No obstante estos modelos, según Basilea, debían cumplir tres requisitos básicos:

- Permitir la realización de pruebas de estrés.
- Considerar un nivel de confianza del 99 % y 95 %.
- Poseer información del activo de al menos un año.

Fue entonces que las entidades, dependiendo de sus necesidades y actividades, fueron proponiendo diferentes metodologías de cómputo del riesgo. Algunas políticas fueron orientadas a refinar la metodología inicial añadiendo supuestos sobre la distribución de rendimientos. Otras se enfocaron en replantear métodos numéricos y sistemas óptimos para su cómputo. Por estas razones es posible encontrar hoy en día una enorme cantidad de metodologías para estimar el VaR, que a pesar de partir del mismo lugar, difieren considerablemente entre ellas, en el sentido de considerar los demás factores y supuestos de partida, tales como son la consideración de procesos de simulación, supuestos de distribución de los rendimientos, estimación de parámetros. etc.

2.2.1. Limitaciones del VaR

Como se mencionó anteriormente, el VaR al tratarse de un cuantil único en la distribución de rendimientos, no brinda mayor información sobre los valores de la cola que se ubican más allá de este punto. Es así que el VaR sólo describe la pérdida financiera máxima de un subtotal de resultados adversos del mercado, lo que puede conducir a subestimar las pérdidas potenciales que le superan. Esta debilidad es crucial para los reguladores e inversionistas, ya que los movimientos negativos del mercado de gran impacto son la mayor amenaza para las instituciones financieras, e incluso aún definiendo niveles de confianza altos, el VaR no podría detectar esta clase de movimientos.

Por otro lado al violar el axioma de la subaditividad, del que se hablará más adelante, existe el riesgo de llegar a conclusiones erróneas, ya que bajo su construcción, la diversificación aumenta el riesgo combinado de la cartera, lo que contradice la idea de diversificar.

Aunado a lo anterior, como lo demuestran Danielsson (2013), el VaR sólo viola el axioma de la subaditividad para las distribuciones de rendimientos con colas pesadas, lo que para efectos del presente estudio robustece la idea y propósito de tomar complementariamente una medida alterna que resulte más adaptable al tratarse de escenarios de economías emergentes.

Finalmente la consideración del VaR como medida reguladora del riesgo podría ser bastante cuestionada, ya que las instituciones financieras podrían manipular fácilmente el resultado obtenido. Lo anterior dado que las entidades financieras pueden elegir libremente la metodología de estimación del VaR dependiendo sus estrategias comerciales, y por lo tanto, podrían ocurrir en manipulaciones de mercado basadas en la búsqueda del VaR deseado. Adicional a ello, dichas prácticas serían bastante difíciles de identificar por parte de los reguladores.

Al observar estas deficiencias el Comité de Basilea en el 2013, a través de mejoras continuas al documento de Basilea III, propuso robustecer el papel del VaR con la aplicación del CVaR, reforzando de esta manera el proceso de determinación de los requerimientos de capital regulatorio de las instituciones financieras y conduciendo a mejores prácticas de administración del riesgo.

Esta nueva medida se encuentra dentro del rango de medidas coherentes cuyos axiomas se describen a continuación.

2.2.2. Medidas de riesgo coherente

Desde que el concepto de varianza fue introducido, se han desarrollado numerosas medidas de riesgo en el ámbito financiero. Como lo propone Giacometti (2004) es posible englobar las medidas de riesgo en dos principales ramas:

- **Medidas de dispersión:** Aquellas funciones de riesgo crecientes, positivas y homogéneas. Destacan en este conjunto la desviación estándar y la desviación media absoluta.

Sea X variable de estudio, α una constante y γ función de riesgo. Si $X > 0$ y $\alpha > 1$ entonces:

$$\gamma(\alpha X) = \alpha \gamma(X) > \gamma(X),$$

lo que implica que las medidas de dispersión no son consistentes con la dominancia estocástica de primer orden definida de la siguiente manera:

Definición 2.2.2. (*Dominancia estocástica de primer orden*)

Sean F y G funciones de distribución. Se dice que F domina a G en primer orden, si y solo si,

$$F(x) \leq G(x),$$

para toda x variable aleatoria.

- **Medidas de seguridad:** Basadas en medidas de riesgo que involucran la probabilidad del comportamiento positivo y negativo del rendimiento del portafolio.

A diferencia de las medidas de dispersión, esta clase de medidas son consistentes con la dominancia estocástica de primer orden. Dentro de esta categoría se encuentran las denominadas medidas de riesgo coherente.

Años previos, Artzner (1997) definió las condiciones que debe satisfacer una medida de riesgo y fue él quien por primera vez propuso el uso del término de “riesgo coherente”.

Definición 2.2.3. (*Medida de riesgo coherente*)

Sea $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de riesgo donde V es un espacio de variables aleatorias que considera todos los posibles factores de riesgo. Se dice que γ es una medida de riesgo coherente si satisface los axiomas de:

- Monotonía.
- Homogeneidad positiva.
- Invariante ante traslaciones.
- Subaditividad.

Es decir,

- **Axioma M - Monotonía.**

Para todo $X, Y \in V$ con $X \leq Y$ ordenadas en dominancia estocásticas de primer orden, entonces $\gamma(X) \leq \gamma(Y)$.

Lo que quiere decir que a mayor niveles de rentabilidad corresponderá mayores niveles riesgo.

- **Axioma HP - Homogeneidad positiva.**

Para todo $\lambda \geq 0$ y $X \in V$, entonces $\lambda\gamma(X) = \gamma(\lambda X)$.

Esto implica que cualquier aumento en la posición de la cartera, el riesgo aumenta proporcionalmente. En particular si

$$\begin{aligned}\gamma(nX) &= \gamma(X + X + \cdots + X) \\ &= n\gamma(X),\end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N}$.

- **Axioma T - Invariante ante traslaciones.**

Para todo $X \in V$ y $a \in \mathbb{R}$, $\gamma(X + a) = \gamma(X) + a$.

Que significa que si se invierte una cantidad adicional en el portafolio, el nivel de riesgo estará afectado proporcionalmente por dicha cantidad. Un ejemplo muy claro es si se invierte en un activo de referencia, que implica un nivel casi nulo de riesgo, el riesgo final estará dado por la cantidad adicional invertida.

- **Axioma S - Subaditividad.**

Para todo X y $Y \in V$, entonces $\gamma(X + Y) \leq \gamma(X) + \gamma(Y)$.

Esta condición está relacionada directamente con el concepto de diversificación dado que indica que el riesgo de un portafolio diversificado debe ser menor o igual a la suma de los riesgos individuales de los activos que lo componen.

Como se ha mencionado hasta este punto el VaR no satisface la condición de subaditividad y una forma muy fácil de verlo es a través de un contraejemplo, mismo que Jorion (2003) expuso y que a continuación se enuncia:

Sea A un activo con valor de 100 y probabilidad de incumplimiento de 0.5 %. Entonces, en el siguiente mes se puede presentar cualquiera de estos escenarios:

- Un incumplimiento de pago de 0 con probabilidad de 99.5 %.
- Un incumplimiento de pago de 100 con probabilidad de 0.5 %.

Dado que la probabilidad de obtener un incumplimiento de pago de 0 es mayor al 99 %, se dice que el VaR al 99 % de confianza del activo A es de 0.

Si ahora se consideran tres activos A_1 , A_2 y A_3 con las características previamente mencionadas, se tendrá que la suma de los VaR de dichos activos será igual a cero, es decir,

$$\begin{aligned}VaR_{99\%}(A_1) + VaR_{99\%}(A_2) + VaR_{99\%}(A_3) &= \sum_{i=1}^3 VaR_{99\%}(A_i) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Mientras que calculando sus probabilidades de incumplimiento conjunto se tiene lo siguiente:

Evento	Activos	Probabilidad	Pago
Sin incumplimiento	0	$0.95 \times 0.95 \times 0.95 = 0.985$	0
1 incumplimiento	A_1, A_2, A_3	$3 \times 0.05 \times 0.95 \times 0.95 = 0.0149$	-100
2 incumplimientos	A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3	$3 \times 0.05 \times 0.05 \times 0.95 = 0.00007$	-200
3 incumplimientos	$A_1A_2A_3$	$1 \times 0.05 \times 0.05 \times 0.05 = 0.0000001$	-300

Cuadro 2.1: *Contraejemplo de no subaditividad del VaR.*

De donde la probabilidad de obtener ningún o al menos un incumplimiento está dada por la suma de

$$0.985 + 0.0149 = 99.99\%$$

De lo anterior, el VaR del portafolio es de 100 dado que corresponde al valor mínimo cuya probabilidad es mayor al nivel de confianza del 99% establecido. Por lo tanto el VaR del portafolio es mayor al VaR considerando los activos individualmente, mostrando de esta manera que dicha medida no cumple con la propiedad de subaditividad y por consiguiente no puede ser considerada una medida de riesgo coherente.

La consecuencia de esta afirmación implica el hecho de que pueden existir casos donde el VaR conduzca a resultados contradictorios para el administrador de riesgo. Fue bajo estos antecedentes que fue concebido el CVaR como medida de riesgo complementaria capaz de ofrecer al inversionista un panorama más amplio del comportamiento del riesgo de sus inversiones. Esta medida, así como el VaR, debía ser práctica y de sencilla interpretación.

Sin embargo, para llegar a hacer uso del CVaR se requiere en primera instancia calcular el VaR del portafolio. Por ello y dado la existencia de un amplio catálogo de alternativas para conseguirlo, es necesario describir los métodos de estimación que son los mayormente usados por los inversionistas y administradores del riesgo hoy en día.

2.3. Algunos métodos de estimación del VaR

Como se mencionó, el VaR puede calcularse para periodos de inversión de un día o mayores plazos, tales como una semana o un mes. Lo más común es encontrar estimaciones del VaR a un día. Son tres las categorías en que pueden englobarse la totalidad de estos métodos, que, como lo describen Engle & Manganelli (2001), comprenden el método paramétrico, no paramétrico y semiparamétrico.

2.3.1. Estimación paramétrica

Son los métodos en los que se utiliza una parametrización específica para modelar el comportamiento o la volatilidad de los rendimientos de los activos. Este enfoque es denominado paramétrico ya que implica la estimación de un parámetro, comúnmente la desviación estándar y no una simple lectura del cuantil de la distribución empírica. Es común encontrar que los supuestos de normalidad bajo este tipo de modelos prevalecen sobre los demás.

Existen varias formas de calcular el VaR de manera paramétrica entre las que destaca la aproximación mediante la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos o también conocido como el método Delta-Normal.

2.3.1.1. Matriz de Varianzas-Covarianzas

La metodología de varianzas y covarianzas, dada su sencilla implementación, goza de una basta popularidad entre los participantes del mercado financiero, debido a que considera el supuesto de normalidad de las variables de estudio, es decir, de los rendimientos.

Al aplicar esta metodología el portafolio se descompone en los elementos que lo constituyen, que dependen de los factores de riesgo. Lo anterior implica que las volatilidades y correlaciones son estables a través del tiempo y por consiguiente, el riesgo total del portafolio estará construido con base en la agregación de los factores de riesgo y sus correlaciones.

Para ello es necesario construir las matrices de volatilidades, correlaciones y de varianzas y covarianzas de cada uno de los componentes del portafolio. Como se puede intuir, si el portafolio posee una cantidad “considerable” de elementos el método deja de ser práctico.

El VaR Delta-Normal del portafolio se determina de la siguiente manera:

$$VaR_{\alpha}(X) = \sigma_p \cdot Z_{\alpha} \cdot P \cdot \sqrt{t},$$

donde:

- σ_p : La volatilidad diaria del portafolio.

- Z_α : Cuantil de una v. a $N(0,1)$ equivalente al nivel de confianza α .
- P : Valor del portafolio.
- t : Horizonte de tiempo en días en que se desea ajustar el VaR.

Para obtener la varianza del portafolio, es necesario considerar tanto los VaR individuales de los activos como las correlaciones entre los rendimientos de los mismos, lo que resulta sencillo de calcular si se expresa en términos matriciales como a continuación se muestra

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & \cdots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} & \cdots & \rho_{2,n} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 & \cdots & \rho_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \rho_{n,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

con $\rho_{i,j} = \frac{Cov(i,j)}{\sigma_i \sigma_j}$,

entonces,

$$\sigma_P = (V \cdot \hat{\sigma} \cdot V^T)^{\left(\frac{1}{2}\right)},$$

teniendo que:

- V : Es el vector de dimensión $1 \times n$ de los VaR de cada una de las acciones que componen al portafolio.
- $\hat{\sigma}$: La matriz de correlación de los rendimientos de los activos que componen la cartera. Por lo que se tratará de una matriz de orden $n \times n$.

Es así que, considerando los acuerdos internacionales, el cuantil equivalente al nivel de confianza es del 95 % y por otro lado tenemos que $t = 1$ dado que se desea calcular el VaR del portafolio a un día.

Por lo tanto, haciendo uso de herramientas informáticas, resulta sencillo calcular la volatilidad de los rendimientos de los activos y por ende el VaR individual de los elementos de la cartera.

Siendo así, el VaR bajo el método Delta-Normal para el portafolio de estudio, considerando un monto de \$1,000,000, un nivel de confianza del 95 % y un horizonte de tiempo a un día, es igual a:

Metodología	VaR
Delta - Normal	\$17,611.03

que corresponde al 1.761 % respecto del total de la cartera.

Bajo este enfoque se encuentran las siguientes ventajas:

- El cálculo de los parámetros es sencillo.
- Su cómputo es rápido.
- Es un buen modelo para rendimientos que presentan un comportamiento normal.

No obstante también tiene asociadas las siguientes desventajas:

- Entre mayor sea el número de activos que componen el portafolio más complejo se vuelve la obtención de los parámetros del modelo y por lo tanto la estimación del VaR.
- Es un método impreciso para activos que no presentan linealidad en sus posiciones o bien para aquellos que no se distribuyen de una forma normal (la gran mayoría) o presentan gran acumulación en las colas.

En la actualidad la estimación del riesgo bajo este método presenta una enorme popularidad debido a lo práctico que resulta su aplicación. Sin embargo, no se debe olvidar que la mayoría de las series financieras de rendimientos no presentan un comportamiento normal y por ende haciendo uso de este método existirá una alta probabilidad de estar subestimando el riesgo del portafolio.

2.3.2. Estimación no paramétrica

Esta es una forma de cálculo del VaR que no hace uso de ningún supuesto sobre la distribución de los rendimientos y tampoco del comportamiento de los parámetros. Es característico encontrar que los métodos de simulación poseen gran popularidad en esta clase de estimaciones. Entre ellos están la simulación histórica y la simulación Monte Carlo.

El supuesto bajo el que se encuentran fundamentados estos métodos consiste en que la distribución de rendimientos esperada se asemejará a la del pasado reciente. Por lo tanto no es necesario el supuesto de considerar el comportamiento gaussiano de los rendimientos lo que implica la no subestimación del peso de las colas de la distribución de rendimientos.

2.3.2.1. Simulación histórica

La simulación histórica se basa en una técnica de ordenamiento ascendente de los rendimientos históricos simulados. Consiste en simular precios futuros a partir de la consideración de las rentabilidades pasadas. Por lo tanto, se trata de una metodología basada en el riesgo observado del portafolio.

Este método es tan popular que, como lo menciona Pérignon y Smith (2010), cerca del 73 % de los bancos comerciales lo aplican para estimar el VaR, debido principalmente a dos razones:

- Precisamente a que las posiciones de las entidades están afectadas por una enorme cantidad de factores de riesgo, el método de simulación histórica puede aplicarse de forma sencilla.
- Los niveles de VaR bajo este método son relativamente constantes, lo que les conviene a las entidades financieras, ya que prefieren evitar cambios drásticos de un día para otro que puedan alterar sus obligaciones y estrategias.

En México, el uso de esta metodología para las Administradoras de Fondos para el Retiro (AFORE) por regulación es obligatorio, incluso la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR) en un anexo a la ley de los Sistemas de Ahorro para el Retiro (Ley de los SAR) establece la metodología y consideraciones a tomar en cuenta para la correcta aplicación de la misma. Esto ofrece una idea de la relevancia que ha alcanzado este método.

Un factor clave para poder hacer buen uso de este método se encuentra la disponibilidad de la información de los activos, debido a que por diversos motivos puede ser en algunos casos difícil de recopilar (por mencionar un ejemplo tratándose de nuevos activos). El número de datos recomendados para obtener mejores resultados, según Vlaar y van den Goorbergh (1999), debe ser de al menos 1000 elementos, es decir, aproximadamente cuatro años de información histórica (suponiendo alrededor de 252 días hábiles por año). Mientras más cortos sea el periodo de información histórica, mayor importancia se dará al pasado reciente y menor será la probabilidad de incluir eventos extremos.

La secuencia que resume la aplicación de este método es la siguiente:

1. Se debe seleccionar un horizonte de tiempo para la consideración de los datos financieros.
 2. Se recopila la información de los instrumentos que componen la cartera expresada en términos diarios.
-

3. Se obtiene los rendimientos de las series financieras para cada una de las fechas seleccionadas.
4. Son simuladas las pérdidas y ganancias de cada serie considerando la posición en el portafolio al día actual, es decir, se multiplica el rendimiento observado al día $t - i$ por la posición total al día t , para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$.
5. Son simuladas las pérdidas/ganancias totales del portafolio a partir de la suma de las pérdidas/ganancias de cada uno de los activos que conforman el portafolio.
6. Se ordenan los resultados de menor a mayor y se obtiene el cuantil deseado partiendo del nivel de confianza definido para el VaR.

Nótese que para aquellos casos donde el cuantil de la serie financiera no corresponda a un número entero, dado que no se cuentan con registro de medias observaciones, se tomará el promedio de la observación i e $i + 1$, donde i es igual al número de la observación que corresponde al cuantil deseado.

Finalmente se obtendrá el VaR del portafolio aplicable a un día y el mismo proceso podrá aplicarse sucesivamente para los días siguientes recorriendo simplemente la serie de datos. De lo anterior, el VaR del portafolio de estudio propuesto estimado por simulación histórica es de

Metodología	VaR
Simulación histórica	\$17,038.53

equivalente al 1.7038% del total de la cartera.

Dentro de las ventajas de hacer uso de la simulación histórica se encuentran las siguientes:

- La no consideración del comportamiento de los rendimientos de forma normal.
- No es necesario estimar varianzas, covarianzas ni otro tipo de parámetros.
- Son considerados los valores extremos de los rendimientos observados dentro de la estimación y por lo tanto en el efecto de colas pesadas de la distribución es tomado en cuenta.

Y por otro lado, como parte de las desventajas se tiene que:

- La disponibilidad de la información de rendimientos puede ser en algunos casos difícil de conseguir como es el caso de nuevos activos o instrumentos con poca historia registrada. En estos casos las estimaciones probablemente resultarán insuficientes.
- Cuanto menor sea el rango de los datos utilizados, mayor la probabilidad de no considerar eventos extremos y por ende se estará subestimando la volatilidad del activo.

Como es bien sabido, el comportamiento de las series financieras se caracteriza por exhibir una distribución leptocúrtica de los rendimientos. Aplicar supuestos de normalidad implica una subestimación del peso de las colas, es por ello que este método es considerado uno de los mejores y más adecuados por los académicos e inversionistas, debido principalmente a su atractiva combinación de fácil aplicación y consideración del riesgo inherente de los rendimientos.

2.3.2.2. Simulación Monte Carlo

A diferencia del método de simulación histórica los métodos de simulación Monte Carlo son capaces de tomar en cuenta todas las propiedades del valor de la cartera con respecto al factor de riesgo subyacente, incorporando las propiedades distributivas deseables, tales como las colas pesadas y la variabilidad de las volatilidades a través del tiempo.

La principal diferencia entre la simulación histórica y la simulación Monte Carlo se basa en que la primera realiza la simulación utilizando los cambios reales observados en el mercado durante los últimos n días mientras que en la simulación Monte Carlo utiliza un generador de números aleatorios para producir los cambios hipotéticos en las variables financieras seleccionadas.

Como puede intuirse, para poder obtener mejores estimaciones del riesgo se requiere de mucha información lo que quizás puede considerarse como una de las mayores debilidades de este método. Por otro lado es necesaria la definición del tipo de mecanismo aleatorio sobre el que se simulará la variable aleatoria seleccionada. Estos procesos pueden ser del tipo normal, log-normal, t de Student, f de Fisher, Poisson, etc.

Para esta tesis, la variable sobre la que se determinará una simulación estocástica será la volatilidad diaria del portafolio, asimismo el proceso de generación de números aleatorios será a través del método de Box Müller ¹.

Entre más sea el número de instrumentos que componen la cartera, el proceso será más robusto y la dificultad de estimación será sumamente mayor.

¹Cuya metodología puede ser consultada en el Apéndice A del presente trabajo.

Resumiendo la metodología de simulación Montecarlo consiste en:

1. Se define el número de simulaciones que serán estimadas.
2. Se seleccionan las variables financieras sobre las que se realizarán las simulaciones. Comúnmente se opta por la volatilidad.
3. La fórmula de obtención de cada una de las simulaciones es la siguiente:

$$V_{t+1} = V_t \cdot (1 + \mu + Z \cdot \sigma),$$

donde:

V_{t+1} : Valor del Portafolio a tiempo $t + 1$.

V_t : Valor del Portafolio a tiempo t .

μ : El valor esperado de los rendimientos diarios del portafolio.

Z : Variable aleatoria generada a través del proceso Box Müller.

σ : Volatilidad diaria de los precios del portafolio.

4. Se obtienen los parámetros determinísticos de la ecuación.
5. Se simulan todos los posibles resultados mediante la afectación de los factores de riesgo definidos y los números aleatorios obtenidos.
6. Se ordenan los resultados de menor a mayor y se obtiene el cuantil deseado partiendo del nivel de confianza definido para el VaR.

Al igual que para el método de simulación histórica, para aquellos casos donde el cuantil de la serie financiera no corresponda a un número entero, se tomará el promedio de la observación i e $i + 1$, donde i es igual al número de la observación que corresponde al cuantil deseado.

Es así que simulando 30,000 veces el valor a $t + 1$ del portafolio de estudio se obtuvo que el VaR por simulación Monte Carlo es de:

Metodología	VaR
Simulación Monte Carlo	\$17,750.87

equivalente al 1.775 % de la cartera.

Las ventajas que se poseen al hacer uso de este método son las siguientes:

- Se pueden añadir al proceso las consideraciones que el inversionista desee o considere relevantes, por lo que es catalogado un método de potencia y flexibilidad.
- No es necesario asumir una distribución de los rendimientos de los activos.

Las desventajas que se pueden considerar son:

- Entre mayor sea el número de supuestos de riesgo adicionados al modelo, o bien mayor el número de activos, se requerirá de mayor capacidad informática para llevar a cabo las simulaciones.

La dificultad de aplicar este método dependerá directamente de la definición de los factores de riesgo de interés así como del sistema especializado disponible para simular y obtener las correspondientes estimaciones. Es un método que al ser muy flexible se adapta al enfoque de riesgo del inversionista, lo que lo convierte en un método de alta potencia y una seria opción para medir el riesgo.

2.3.3. Estimación semiparamétrica

Como se ha visto hasta ahora, los métodos de estimación estudiados suponen en su mayoría que los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente, sin embargo, está ampliamente documentado y demostrado que los efectos de asimetría y exceso de curtosis son evidentes para la mayoría de las series financieras, lo que resulta, tarde o temprano, en una subestimación o sobreestimación del valor real del VaR.

Para ello se han desarrollado modelos de series de tiempo de tipo heterocedásticos, cuyos principales representantes son los modelos *ARCH* y *GARCH*. Estas metodologías combinan propiedades de modelos de estimación tanto paramétricos como no paramétricos. En el siguiente capítulo se estudiará con mayor detalle la estructura y propiedades de esta clase de metodologías bajo la premisa de estudiar las ventajas implícitas que suponen frente a los métodos convencionales previamente analizados.

2.4. Pruebas de desempeño del VaR

Los métodos de estimación del VaR de un portafolio pueden englobarse en tres grandes rubros, mismos que a su vez contienen un gran número de técnicas así como una gran cantidad de supuestos que refinan dichas estimaciones. Es por ello que resultará común para un inversionista el preguntarse si la técnica seleccionada está arrojando la mejor estimación del riesgo posible. ¿Cómo saber qué camino es más prudente? ¿Cómo determinar si los supuestos empleados son suficientes para el modelo? Es así que, una vez que se calcula el VaR es muy recomendable realizar pruebas de desempeño o de respaldo (*Backtesting*) que,

en esencia, se encargan de evaluar si las estimaciones de los modelos son apropiadas.

Las pruebas más comunes de respaldo utilizan los rendimientos observados en un horizonte de tiempo definido, comparando los mismos contra el valor de riesgo estimado, es decir, evalúan el número de veces que el valor observado supera el nivel de riesgo y considerando el nivel de confianza establecido para el VaR comparan dicho porcentaje contra la proporción de excedentes o excepciones respecto del total.

Es así que se espera que los valores observados excedan en cierto porcentaje de confianza el valor de riesgo estimado.

La prueba Kupiec o de proporción de fracasos (POF por sus siglas en inglés) es considerada, en el medio, como la prueba ideal de *Backtesting* del VaR para muestras grandes.

Bajo esta prueba Kupiec (1995) sugiere definir la hipótesis nula de que el estimador de la probabilidad de fallo sea proporcional al nivel de confianza establecido para el VaR. Lo anterior se reduce a considerar a H_0 de la forma

$$H_0 : p = \frac{x}{N},$$

donde:

- x : Es el número de excepciones o veces en que el valor observado excede el VaR estimado.
- N : Número total de observaciones.

Siendo así lo que se busca es no rechazar la H_0 y para ello se evalúan la hipótesis a través de una prueba de razón de máxima verosimilitud aplicada al estimador de probabilidad y al valor de probabilidad definido a través del uso de un estadístico de forma binomial como el que a continuación se muestra:

$$LR_{POF} = -2 \log \left(\frac{p^x (1-p)^{N-x}}{\hat{p}^x (1-\hat{p})^{N-x}} \right),$$

donde:

- $\hat{p} = \frac{x}{N}$.
- LR_{POF} sigue una distribución $\chi^2_{1-\alpha}$ aproximadamente.

Por último, si $LR_{POF} > Q_{\chi^2_{1-\alpha}}$, Q cuantil de la distribución Ji-cuadrada a un nivel de confianza de $1 - \alpha$, se determinará que el estimador es bueno, por lo tanto el modelo es

consistente y se acepta H_0 .

De los valores de VaR estimados la prueba Kupiec arrojó los siguientes resultados:

Metodología	Valor $\chi_{.05}^2$	LR_{POF}	H_0
VaR Paramétrico	0.04	214.82	El modelo es consistente
VaR Simulación histórica	0.04	243.82	El modelo es consistente
VaR Simulación Monte Carlo	0.04	204.18	El modelo es consistente

Cuadro 2.2: Resultado de las pruebas de desempeño de las metodologías de VaR propuestas.

De donde queda demostrado que bajo las tres diferentes metodologías, la estimación del VaR es confiable.

2.5. Valor en Riesgo Condicional - CVaR

Hasta este momento se han propuesto, descrito y desarrollado algunas alternativas de estimación del VaR, sin embargo como se mencionó, esta medida de riesgo bajo la mayoría de los comportamientos de las series financieras resulta insuficiente y no cumple con el principio de subaditividad de una medida de riesgo coherente. Por lo tanto, es común pensar en una constante subestimación del riesgo del portafolio.

Por estas razones el CVaR fue creado inicialmente como una extensión del VaR, no obstante la utilidad y las ventajas que tiene asociadas el uso de esta medida han llegado a convertirla en una herramienta indispensable para el análisis del riesgo de los rendimientos de los activos. Ejemplo de ello es la sustitución en el 2013 del requisito de estimación regulatorio del VaR a un nivel del 99% por la estimación del CVaR a un nivel de confianza del 97.5% por parte del Comité de Basilea (2013). Introducida por Artzner (1997), es definido el CVaR de la siguiente manera:

Definición 2.5.1. (*Valor en Riesgo Condicional*)

Sea la variable aleatoria X que representa los rendimientos de los instrumentos del portafolio y α el nivel de confianza dado, entonces:

$$CVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}(X \mid X > VaR_\alpha(X)).$$

Es decir, el CVaR es la pérdida esperada de los montos que exceden el valor del VaR, en otras palabras, equivale al promedio de las pérdidas que superan el nivel establecido del VaR y por lo tanto es claro que para un nivel de confianza α , $CVaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X)$.

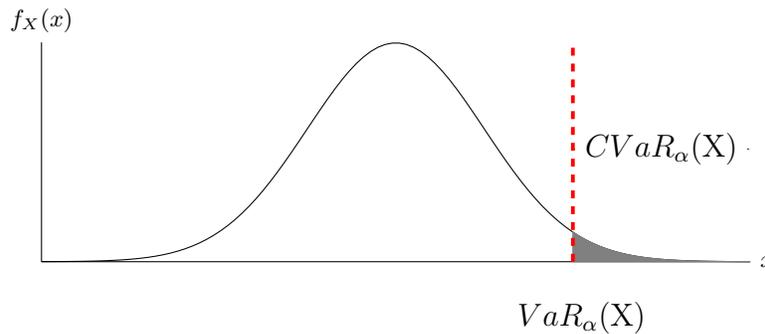


Figura 2.3: Descripción gráfica del CVaR.

De primera vista, a diferencia del VaR, el conocimiento de las colas de la distribución de los rendimientos ahora es un importante factor a considerar. Cabe mencionar que el CVaR cumple con las propiedades de una medida de riesgo coherente, tal como se muestra a continuación:

Proposición 2.5.1.

El CVaR satisface los axiomas de coherencia de una medida de riesgo.

Demostración:

- **Axioma T - Invariante ante traslaciones.**

Dado que

$$CVaR_\alpha(X + \beta) = \mathbb{E}[X + \beta \mid X + \beta > VaR_\alpha(X + \beta)],$$

por invarianza del VaR

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X + \beta) &= \mathbb{E}[X + \beta | X > VaR_\alpha(X)] \\ &= \mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)] + \mathbb{E}[\beta | X > VaR_\alpha(X)] \\ &= CVaR_\alpha(X) + \beta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\gamma(X + \beta) = \gamma(X) + \beta.$$

■ **Axioma HP - Homogeneidad positiva.**

Sea $\beta > 0$, entonces

$$CVaR_\alpha(X\beta) = \mathbb{E}[X\beta | X\beta > VaR_\alpha(X\beta)],$$

por homogeneidad positiva del VaR

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X\beta) &= \mathbb{E}[X\beta | X > VaR_\alpha(X)] \\ &= \beta \mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)] \\ &= \beta CVaR_\alpha(X). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\gamma(X\beta) = \gamma(X)\beta.$$

■ **Axioma M - Monotonía.**

Supóngase X y Y variables aleatorias tales que $X \leq Y$, entonces:

$$CVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)].$$

es decir

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X) &= \mathbb{E}[X + VaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(X) | X > VaR_\alpha(X)] \\ &= VaR_\alpha(X) + \mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X) | X - VaR_\alpha(X) > 0]. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)] = VaR_\alpha(X) + \mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X) | X > VaR_\alpha(X)],$$

es así que

$$\mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)] = VaR_\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)I_{X > VaR_\alpha(X)}]}{\mathbb{P}(X > VaR_\alpha(X))},$$

de donde se llega a que

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] \leq VaR_\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)I_{X > VaR_\alpha(X)}I_{Y > VaR_\alpha(Y)}]}{\alpha},$$

o bien

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] \leq VaR_\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X - VaR_\alpha(Y)I_{Y > VaR_\alpha(Y)}]}{\mathbb{P}(Y > VaR_\alpha(Y))},$$

obteniendo que

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] = VaR_\alpha(X) + \mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)|Y > VaR_\alpha(Y)],$$

es decir

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] = \mathbb{E}[X|Y > VaR_\alpha(Y)],$$

y finalmente

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] \leq \mathbb{E}[Y|Y > VaR_\alpha(Y)].$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] \leq \mathbb{E}[Y|Y > VaR_\alpha(Y)],$$

es decir,

$$CVaR_\alpha(X) \leq CVaR_\alpha(Y).$$

■ **Axioma S -Subaditividad.**

Considérese X, Y variables aleatorias. Entonces:

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] = VaR_\alpha(X) + \mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)|X > VaR_\alpha(X)],$$

se tiene que

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] = VaR_\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)I_{X > VaR_\alpha(X)}]}{\mathbb{P}(X > VaR_\alpha(X))},$$

es decir,

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] \geq VaR_\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)I_{X > VaR_\alpha(X)}I_{X+Y > VaR_\alpha(X+Y)}]}{\alpha},$$

de donde se obtiene que

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] \geq VaR_\alpha(X) + \frac{\mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)I_{X+Y > VaR_\alpha(X+Y)}]}{\mathbb{P}(X + Y > VaR_\alpha(X + Y))},$$

y además

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] = VaR_\alpha(X) + \mathbb{E}[X - VaR_\alpha(X)|X + Y > VaR_\alpha(X + Y)],$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(X)] \leq \mathbb{E}[X|X + Y > VaR_\alpha(X + Y)],$$

análogamente

$$\mathbb{E}[Y|Y > VaR_\alpha(Y)] \leq \mathbb{E}[Y|X + Y > VaR_\alpha(X + Y)].$$

Entonces, por definición de CVaR:

$$CVaR_\alpha(X + Y) = \mathbb{E}[X + Y|X + Y > VaR_\alpha(X + Y)],$$

es decir,

$$CVaR_\alpha(X + Y) = \mathbb{E}[X|X + Y > VaR_\alpha(X + Y)] + \mathbb{E}[Y|X + Y > VaR_\alpha(X + Y)],$$

de donde se tiene que

$$CVaR_\alpha(X + Y) \leq \mathbb{E}[X|X > VaR_\alpha(Y)] + \mathbb{E}[Y|Y > VaR_\alpha(Y)],$$

y finalmente

$$CVaR_\alpha(X + Y) \leq CVaR_\alpha(X) + CVaR_\alpha(Y).$$

Por lo tanto, el CVaR satisface los axiomas de coherencia de una medida de riesgo. ■

Las pérdidas catastróficas, cuyos montos asociados son superiormente mayores a los obtenidos por el VaR, son consideradas bajo el CVaR, parecería entonces que esta medida es la más indicada para evaluar el riesgo de las inversiones de las entidades financieras.

Sin embargo, desde sus inicios, el CVaR no ha sido aceptado de la mejor manera por los participantes del mercado financiero, debido a que consideran que los valores resultado de su aplicación, son generalmente demasiado altos, lo que implica un requerimiento de capital mayor y una pérdida de oportunidad de aprovechamiento del exceso monetario respecto al considerado bajo el VaR.

No obstante, esta medida representa una ventaja adicional a la propiedad de subaditividad sobre el VaR, que se traduce en poder optimizar el nivel de riesgo a una cota deseada obteniendo así, al mismo tiempo, una reducción del VaR del portafolio. Es decir, la gestión del riesgo de la cartera producto del uso del CVaR como medida de riesgo predilecta supone el establecimiento de un mayor control y entendimiento del riesgo.

2.6. Estimación del CVaR a partir de los métodos seleccionados

Partiendo de la definición CVaR, lo que se busca es calcular el promedio de las pérdidas que superan el valor en riesgo definido, por lo tanto, la estimación del CVaR dependerá directamente del método de cómputo del VaR y de los valores obtenidos.

Es así que a continuación serán descritas las metodologías de estimación del CVaR a través de los métodos utilizados para calcular el VaR, y en el Capítulo Cuatro se mostrará la forma de calcularlo mediante el uso de supuestos heterocedásticos. Entonces, tomando como referencia los métodos de cálculo del VaR previamente expuestos, el CVaR del portafolio presenta los siguientes valores:

- **Estimación paramétrica - Matriz de Varianzas-Covarianzas** Si bien este método se reduce a la estimación de la volatilidad del portafolio y a la construcción y uso de la matriz de varianzas y covarianzas de los activos, al ser un proceso puntual, es decir, que bajo el uso de los parámetros se llega a un solo posible resultado, es una tarea prácticamente imposible estimar el CVaR del portafolio.

Para poder conseguirlo sería necesario combinar partes de los modelos no paramétricos a la metodología, ya sea simulando los posibles escenarios de volatilidad o bien algún otro factor de riesgo. Por ende otra debilidad de los modelos de estimación paramétrica es la imposibilidad de poder estimar el CVaR de la cartera.

- **Estimación no paramétrica - Simulación histórica** Si se tuviera que elegir un método que describiera la esencia y ejemplificara gráficamente el significado del CVaR sin duda alguna ese método sería el de simulación histórica. Su estimación es sencilla, una vez obtenido el VaR de la cartera, tomando todos aquellos valores que le exceden, se suman y simplemente se divide el total entre el número de casos considerados. Es así que el CVaR es igual a:

Metodología	CVaR
Simulación histórica	\$ 23,035.27

que corresponde a un excedente con respecto al valor del VaR del 28.66 %.

- **Estimación no paramétrica - Simulación Monte Carlo** Análogamente al método de simulación histórica, se consideran aquellos valores simulados que excedan el VaR obtenido. El resultado al que se llega bajo esta metodología es el siguiente:

Metodología	CVaR
Simulación histórica Montecarlo	\$26,729.85

equivalente a 35.19% veces más el valor del VaR.

Resumiendo,

Metodología	VaR	CVaR
Delta - Normal	\$ 17,611.03	N/A
Simulación histórica	\$ 17,038.53	\$23,035.27
Simulación Monte Carlo	\$17,750.87	\$26,729.85

Cuadro 2.3: Resultados de VaR y CVaR obtenidos a través de las metodologías propuestas.

Estos resultados, en el Capítulo Cuatro, serán comparados y analizados a detalle frente aquellos obtenidos mediante el uso de modelos *ARCH – GARCH* y algunas de sus principales variantes.

Capítulo 3

Fundamentos y generalidades de los modelos ARCH y GARCH

En el capítulo anterior se mostró que para estimar el VaR de un portafolio es común considerar los rendimientos observados bajo supuestos de normalidad del mercado, con media y varianza determinadas. Sin embargo, se pueden encontrar muchas más propiedades estadísticas acerca de la evolución en el tiempo de los rendimientos y del riesgo de los activos que componen el portafolio mediante el uso de diversas técnicas de análisis, siendo una de ellas a través de series de tiempo, bajo la consideración de Modelos Autorregresivos de Medias Móviles (ARMA) o bien de Modelos Autorregresivos Condicionalmente Heterocedásticos (ARCH) o alguna de sus variantes.

Se comenzará por definir el concepto de serie de tiempo. Posteriormente se ofrecerá una breve introducción a los modelos ARMA. Finalmente serán presentados los modelos ARCH y GARCH exponiendo a su vez las fortalezas y limitaciones que poseen en materia de administración de riesgos financieros.

3.1. Conceptos de series de tiempo

Si bien la experiencia empírica encamina a concebir la idea de serie de tiempo como aquel conjunto de observaciones o registros ordenados de una variable de estudio a lo largo de un periodo de tiempo determinado, se puede entender este concepto como la realización de un proceso estocástico. En otras palabras,

Definición 3.1.1. (*Serie de tiempo*)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso estocástico en (Ω, \mathcal{F}) , es decir, una sucesión de variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad.

Adicionalmente si se cumple que $t_{n+1} - t_n = c$ con c constante para todo $n \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ se dice que la serie es equiespaciada. A lo largo de este trabajo se hará uso exclusivo de series equiespaciadas y en tiempo discreto, es decir, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}$.

Una serie financiera *per se* es una serie de tiempo cuyas variables comúnmente corresponden a los precios o rendimientos de un portafolio o activo.

El objetivo del análisis de series de tiempo dependerá del enfoque que el investigador defina con respecto a las variables que componen a la misma y puede tomar al menos una de las dos siguientes vertientes:

- Comprender la evolución del proceso así como los atributos que generaron las variables que lo componen.
- Proyectar o pronosticar escenarios futuros de las variables, considerando características y condiciones observadas en el pasado; es decir, a partir del grado de dependencia entre observaciones adyacentes.

En esta tesis se trabajará bajo la consideración del segundo objetivo descrito, resaltando de esta forma el gran impacto que supone el estudio de los valores observados de los rendimientos así como de las volatilidades asociadas a los mismos, que afectan el valor presente y futuro de las variables.

Por lo anterior, se enunciarán a continuación algunas de las propiedades generales y conceptos probabilísticos que rodean el concepto de serie de tiempo.

3.1.1. Algunas propiedades y componentes de las series de tiempo

Para efectuar un análisis de series de tiempo es necesario estudiar los conceptos de media, covarianza, estacionariedad, autocorrelación y ruido blanco Gaussiano.

Las siguientes son algunas funciones elementales para el estudio de series de tiempo:

Definición 3.1.2. (*Función de media de $\{X_t\}$*)

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie de tiempo con $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$. Se define a la función de media como

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t).$$

Asimismo la función de autocovarianza está dada por la siguiente definición:

Definición 3.1.3. (*Función de autocovarianza de $\{X_t\}$*)

Se denomina a la función de autocovarianza de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ como γ_X y se define de la siguiente manera:

$$\gamma_x(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s),$$

es decir,

$$\gamma_x(t, s) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))],$$

para todo t y $s \in \mathbb{Z}$.

Dicha función explica el comportamiento de la covarianza de los datos en diferentes puntos del tiempo.

Por otro lado, cuando se supone que los valores pasados y futuros de una serie de tiempo son “estadísticamente similares”, implícitamente se tiene que los datos son estacionarios; es decir, la estacionariedad implica que tanto la esperanzas como las varianzas de los datos no dependen del tiempo y que las covarianzas entre variables aleatorias será la misma entre cualesquiera dos separadas por el mismo lapso de tiempo.

Existen dos tipos de estacionariedad, fuerte y débil, a continuación se muestra la definición de estacionariedad fuerte:

Definición 3.1.4. (*Estacionariedad fuerte*)

Se dice que una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es estacionaria fuerte si la distribución conjunta de $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ es la misma que la de $\{X_{t_1+j}, X_{t_2+j}, \dots, X_{t_n+j}\}$ para cualesquiera n y $j \in \mathbb{N}$.

No obstante pedir que dos conjuntos de datos numerables posean la misma distribución conjunta es demasiado y en la práctica el verificar estos supuestos resulta una tarea muy difícil.

Es por ello que es común trabajar con la estacionariedad débil dado que requiere únicamente de la existencia de sus primeros dos momentos los cuales deben ser los mismos a través del tiempo. La definición de esta clase de estacionariedad es la siguiente:

Definición 3.1.5. (*Estacionariedad débil*)

Se dice que una serie $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es estacionaria débil si:

- $\mu_X(t)$ es independiente de t .
- $\gamma_X(t+h, t)$ es independiente de t para cada h .

De lo anterior, dado que t es independiente de h , suele hacerse referencia solo al término h , es decir, $\gamma_X(h)$.

Nótese que:

$$\gamma_X(0) = \sigma_X^2,$$

es decir,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_t, X_t] &= \text{Var}(X_t) \\ &= \sigma_X^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, una herramienta que resulta muy útil es la función ρ_X , que se conoce como función de autocorrelación de $\{X_t\}$, y cuya definición se muestra a continuación:

Definición 3.1.6. (*Función de autocorrelación de $\{X_t\}$*)

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie de tiempo. La función de autocorrelación de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, denotada por ρ_X , se define como

$$\begin{aligned} \rho_X(k) &= \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+k})}{\text{Var}(X_t)} \\ &= \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)}, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

La función toma valores dentro del rango $[-1, 1]$, por lo tanto, cabe recordar que la autocorrelación, en términos simples, permite medir la dependencia lineal de las variables en el tiempo respecto a los valores observados. Sus propiedades son las siguientes:

Proposición 3.1.1.

La función de autocorrelación satisface las siguientes propiedades:

- I. $\rho_X(0) = 1$.
- II. $\rho_X(\tau) = \rho_X(-\tau)$.
- III. $|\rho_X(\tau)| \leq 1$.

Demostración:

- I. Sustituyendo $k = 0$ de la definición,

$$\rho_X(0) = \frac{\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = 1.$$

- II. Partiendo de la definición de covarianza

$$\gamma_X(k) = Cov[X_t, X_{t+k}],$$

por propiedades de estacionariedad de la serie,

$$\gamma_X(k) = Cov[X_t, X_{t-k}],$$

por lo tanto

$$\gamma_X(k) = \gamma_X(-k),$$

entonces, por definición de ρ_X

$$\frac{\gamma_X(-k)}{\gamma_X(0)} = \rho_X(-k),$$

y finalmente

$$\rho_X(k) = \rho_X(-k),$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$.

- III. Se cumple directamente de la definición de correlación. ■

No obstante, en la práctica contar únicamente con esta función como herramienta, complicará en numerosas ocasiones identificar de primera instancia la naturaleza del modelo estadístico más conveniente según el comportamiento de los datos de estudio. Para ello se hace uso de funciones de autocorrelación parciales, que muestran el comportamiento de las variables en el tiempo eliminando los efectos de correlación de las variables intermedias. Más adelante se brindará la definición de este tipo de funciones.

Un aspecto que destacar es el uso de los correlogramas dado que, mediante la consideración de estos gráficos, es posible efectuar una primera aproximación de identificación del modelo estadístico, es decir, una prueba de carácter visual que puede ofrecer gran noción de las características estadísticas que rodean a los datos de estudio.

Finalmente, un ejemplo de proceso estacionario es el ruido blanco Gaussiano que se define a continuación:

Definición 3.1.7. (*Ruido blanco Gaussiano*)

Se dice que un proceso $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un ruido blanco Gaussiano no correlacionado si

$$\epsilon_t \sim N(0, 1),$$

para toda $t \in \mathbb{N}$.

Gran parte de la teoría de series de tiempo está desarrollada sobre supuestos de estacionariedad y muchos de los métodos de análisis de series de tiempo no estacionarias requieren de transformaciones a series estacionarias para poder ser analizados.

3.1.1.1. Descomposición tradicional de una serie de tiempo

Es común que en las series de tiempo se pueda identificar la presencia de los siguientes elementos:

- **Tendencia:** Definida como aquel cambio en la media de los datos (creciente o decreciente) a largo plazo. Se trata de un elemento determinístico comúnmente denotado por T_t .
- **Estacionalidad:** Variación recurrente que presenta la serie de tiempo cada determinado periodo (mensual, semanal, bimestral, semestral, etc.). Estos cambios se presentan año tras año. El componente estacional es un elemento determinístico denotado por E_t .

- **Componente aleatorio:** Referente a las fluctuaciones que no responden a ningún patrón de comportamiento, es decir, son resultados de efectos fortuitos, de ocurrencia poco usual e impredecibles. Es el único elemento aleatorio que se considera en la serie y será denotado por A_t .

Es así que la serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ podrá ser expresada, bajo un *modelo aditivo*, como

$$X_t = T_t + E_t + A_t,$$

y bajo un *modelo multiplicativo puro* de la forma

$$X_t = T_t \cdot E_t \cdot A_t,$$

o considerando un *modelo multiplicativo mixto*

$$X_t = T_t \cdot E_t + A_t.$$

A diferencia de los modelos multiplicativos donde se presupone que a medida de que incrementa o decrece la tendencia de los datos, el factor estacional también aumenta o disminuye, se trabajará bajo los supuestos del modelo aditivo donde la magnitud de las variaciones estacionales de la serie resulta invariante al comportamiento de la tendencia.

Uno de los objetivos del análisis de series de tiempo es encontrar un modelo estadístico que describa el proceso estocástico de interés predicciones con cierto grado de precisión. Es así que, dentro de los modelos clásicos de series de tiempo que consideran una dependencia lineal entre las varianzas de los datos, se encuentran los modelos ARMA.

Sin embargo, antes de comenzar el estudio de dichos modelos, se definirán previamente dos operadores que servirán para entender de mejor forma la notación y propiedades de los mismos. Estos son los operadores de rezago y diferencias:

Definición 3.1.8. (*Operador de rezago*)

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie de tiempo, se define al operador de rezago como

$$B(X_t) = X_{t-1},$$

para toda $t \in \mathbb{Z}$.

Entonces para cada tiempo de rezago se tiene que

$$B^k(X_t) = B(B^{k-1}X_t),$$

lo que significa que la aplicación sucesiva de k veces la función de rezago es recursiva. Siendo así, por mencionar algunos ejemplos,

$$B^2(X_t) = X_{t-2}$$

y

$$B^k(X_t) = X_{t-k}.$$

Definición 3.1.9. (*Operador diferencia*)

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie de tiempo, se define al operador diferencia como

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1},$$

que, en términos del operador de rezago queda expresado como

$$\Delta X_t = (1 - B)(X_t),$$

para toda $t \in \mathbb{Z}$.

Entonces para el caso de diferencias dobles:

$$\begin{aligned} \Delta^2(X_t) &= \Delta(\Delta X_t) \\ &= \Delta(X_t - X_{t-1}) \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= (X_t - 2(X_{t-1}) + X_{t-2}) \\ &= (X_t - 2B(X_t) + B^2(X_t)) \\ &= (1 - 2B + B^2)(X_t) \\ &= (1 - B)^2(X_t). \end{aligned}$$

Es así que la k -ésima diferencia estaría dada de la forma:

$$\Delta^k(X_t) = (1 - B)^k(X_t).$$

3.2. Modelos Autorregresivos

Los modelos autorregresivos se basan en la idea de que los valores actuales que vaya tomando la serie de tiempo $\{X_t\}$ se encuentran en función lineal de los valores pasados más un término de error aleatorio o ruido blanco. El orden asociado a esta clase de modelos es comúnmente denotado por p e indica el número de rezagos que deben ser considerados para “pronosticar” el valor de la serie.

3.2.1. Modelos Autorregresivos $AR(1)$

Los modelos autorregresivos de orden uno o de primer orden son aquellos que intentan explicar el comportamiento lineal de una variable de salida respecto de su valor inmediato anterior.

Definición 3.2.1. (*Proceso autorregresivo de primer orden*)

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie de tiempo. Un proceso autorregresivo de primer orden, denotado por $AR(1)$, está dado de la forma:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t,$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para toda $t \in \mathbb{Z}$ y ϕ_1 es el parámetro del modelo.

El modelo $AR(1)$ puede expresarse en función del operador de rezago como

$$(1 - \phi_1 B)(X_t) = \epsilon_t.$$

Proposición 3.2.1.

Un modelo $AR(1)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{(1 - \phi_1^2)}$.
- II. $\gamma_X(k) = \frac{\phi_1^k \sigma_e^2}{(1 - \phi_1^2)}$.
- III. $\rho_X(k) = \phi_1^k$.

Demostración:

I. Partiendo del hecho de que,

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \text{Var}(X_t) \\ &= \text{Var}(\phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t) \\ &= \text{Var}(\phi_1 X_{t-1}) + \text{Var}(\epsilon_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_1^2 \text{Var}(X_{t-1}) + \sigma_e^2 \\
&= \phi_1^2 \sigma_X^2 + \sigma_e^2,
\end{aligned}$$

teniendo que

$$(1 - \phi_1^2) \sigma_X^2 = \sigma_e^2,$$

por lo que

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{(1 - \phi_1^2)}.$$

Es posible observar que para que la varianza del proceso sea finita, el valor absoluto del parámetro debe cumplir con la condición $|\phi_1| < 1$. Adicionalmente con ello el proceso autorregresivo será estacionario.

II. Por definición de $\gamma_X(k)$,

$$\gamma_X(k) = \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_{t-k} - \mu_{t-k})],$$

pero como μ_t y μ_{t-k} son igual a cero, la ecuación se reduce a:

$$\gamma_X(k) = \mathbb{E}[X_t X_{t-k}].$$

Es así que, la función de autocovarianza evaluada en 1 está dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma_X(1) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}[(\phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t)(X_{t-1})] \\
&= \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-1}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-1}) \\
&= \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}^2) + \mathbb{E}(\epsilon_t) \mathbb{E}(X_{t-1}) \\
&= \phi_1 \gamma_0 + 0 \\
&= \phi_1 \gamma_0.
\end{aligned}$$

Además, para cualquier valor de $|k| > 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\gamma_X(k) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-k}] \\
&= \mathbb{E}[(\phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t)(X_{t-k})] \\
&= \mathbb{E}[(\phi_1(\phi_1 X_{t-2} + \epsilon_t))(X_{t-k})] \\
&= \mathbb{E}[\phi_1^{k-1}(\phi_1 X_{t-k} + \epsilon_t)(X_{t-k})] \\
&= \phi_1^k \mathbb{E}(X_{t-k} X_{t-k}) + \phi_1^{k-1} \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-k}) \\
&= \phi_1^k \mathbb{E}(X_{t-k}^2) + \phi_1^{k-1} \mathbb{E}(\epsilon_t) \mathbb{E}(X_{t-k}) \\
&= \phi_1^k \gamma_0 + 0 \\
&= \frac{\phi_1^k \sigma_e^2}{(1 - \phi_1^2)}.
\end{aligned}$$

III. Sustituyendo $k = 1$ de la definición de función de autocorrelación se tiene que:

$$\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \frac{\phi_1 \gamma_0}{\gamma_0} = \phi_1.$$

Es así que para $|k| > 1$, haciendo uso de la expresión de la función de autocovarianza para valores de $|k| > 1$, la sucesión de autocorrelaciones del modelo $AR(1)$ estará dada por:

$$\begin{aligned} \rho_X(k) &= \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} \\ &= \frac{\phi_1^k \gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} \\ &= \phi_1^k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Obsérvese que conforme k aumenta, la sucesión de autocorrelaciones tiende a cero con decaimiento exponencial siempre que $0 < \phi_1 < 1$ y decrecerá con signos alternados cuando $-1 < \phi_1 < 0$. Bajo estos modelos se espera que la función de autocorrelación se vaya “rápidamente” a cero. Por último, sus correlogramas teóricos pueden presentar un comportamiento similar a los a continuación mostrados:

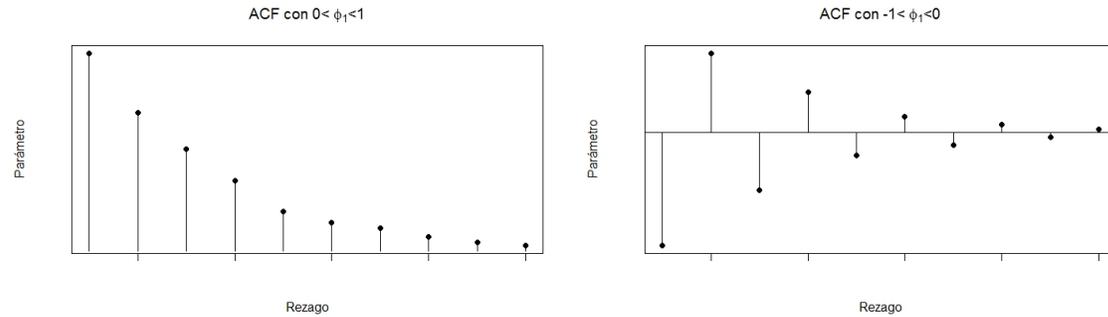


Figura 3.1 Funciones de autocorrelación de un proceso $AR(1)$.

3.2.2. Modelos Autorregresivos $AR(2)$

Definición 3.2.2. (*Proceso autorregresivo de segundo orden*)

Una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso autorregresivo de segundo orden, denotado por $AR(2)$, si

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t,$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para toda $t \in \mathbb{Z}$ y ϕ_1, ϕ_2 son los parámetros del modelo.

Entonces, haciendo uso del operador de rezago el proceso $AR(2)$ podría expresarse como

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} \\ &= (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t,\end{aligned}$$

de donde se tiene que la ecuación $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ satisface la condición

$$(1 - \phi_1 y - \phi_2 y^2) = 0,$$

con y de la forma

$$y = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}.$$

cuyas raíces serán reales cuando $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ y complejas cuando $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$.

De lo anterior, se dice que el proceso es estacionario si y solo si las raíces exceden a uno en valor absoluto. Para ello se deben satisfacer las siguientes condiciones:

Proposición 3.2.2.

Las raíces de un proceso $AR(2)$ exceden a uno en valor absoluto si y solo si

- I. $\phi_2 + \phi_1 < 1$.
- II. $\phi_2 - \phi_1 < 1$.
- III. $|\phi_2| < 1$.

Demostración:

- I. Considérense los recíprocos de las raíces denotados por r_1 y r_2 . Entonces

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{-2\phi_2}{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \\ &= \frac{-2\phi_2}{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \cdot \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \\ &= \frac{-2\phi_2(\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})}{-4\phi_2} \\ &= \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}.\end{aligned}$$

Análogamente para r_2 , se tiene que

$$\begin{aligned}
 r_2 &= \frac{-2\phi_2}{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \\
 &= \frac{-2\phi_2}{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \cdot \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \\
 &= \frac{-2\phi_2(\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})}{-4\phi_2} \\
 &= \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2},
 \end{aligned}$$

teniendo que las raíces serán reales cuando $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$.

Dado que se busca que las raíces sean mayores a uno en valor absoluto, o menores a uno en valor absoluto en términos de recíprocos, se tiene que

$$-1 < \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < 1,$$

por lo que, de la primera parte de la desigualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
 -2 &< \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} \\
 -2 - \phi_1 &< -\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} \\
 4 + 4\phi_1 + \phi_1^2 &> \phi_1^2 + 4\phi_2 \\
 4 &> 4\phi_2 - 4\phi_1 \\
 1 &> \phi_2 - \phi_1.
 \end{aligned}$$

II. Partiendo de la segunda mitad de la desigualdad obtenida en I., se observa que

$$\begin{aligned}
 \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &< 2 \\
 \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} &< 2 - \phi_1 \\
 \phi_1^2 + 4\phi_2 &< 4 - 4\phi_1 + \phi_1^2 \\
 4\phi_2 + 4\phi_1 &< 4 \\
 \phi_2 + \phi_1 &< 1.
 \end{aligned}$$

III. Considérese

$$r_1 \cdot r_2 = \left(\frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \cdot \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \right).$$

Se tiene que $|r_1| < 1$ y $|r_2| < 1$ por lo que cumple que $|r_1 r_2| < 1$, es decir,

$$\left| \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2 - 4\phi_2}{4} \right| < 1,$$

por lo tanto, por propiedades de valor absoluto

$$|\phi_2| < 1.$$

■

Cabe señalar que el proceso de análisis para el caso de raíces complejas es análogo al previamente descrito. Por otro lado,

Proposición 3.2.3.

Un modelo $AR(2)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\sigma_X^2 = \phi_1 \gamma_X(k-1) + \phi_2 \gamma_X(k-2) + \sigma_\epsilon^2$.
- II. $\gamma_X(k) = \phi_1 \gamma_X(k-1) + \phi_2 \gamma_X(k-2)$.
- III. $\rho_X(k) = \phi_1 \rho_X(k-1) + \phi_2 \rho_X(k-2)$.

Demostración:

I. y II. Se sabe que

$$\gamma_0 = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t),$$

es por ello que para poder estimar el valor de la función γ_0 se efectúa lo siguiente:

Si se multiplica por ambos lados de la ecuación original del modelo $AR(2)$ por X_{t-k} ,

$$(X_{t-k})(X_t) = (\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \epsilon_t)(X_{t-k}),$$

de donde, sacando esperanzas de cada uno de los términos, se llega a cualquiera de los siguientes casos:

$$\begin{cases} \gamma_X(k) = \phi_1 \gamma_X(k-1) + \phi_2 \gamma_X(k-2) & \text{si } k \neq 0. \\ \gamma_X(k) = \phi_1 \gamma_X(k-1) + \phi_2 \gamma_X(k-2) + \sigma_\epsilon^2 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{N}$, que corresponde a la expresión de la función de autocovarianza del proceso $AR(2)$. De esta forma quedan demostradas las propiedades I. y II. del proceso $AR(2)$.

III. Ahora si a la ecuación resultante cuando $k \neq 0$ se divide entre γ_0 se obtiene

$$\frac{\gamma_X(k)}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \gamma_X(k-1)}{\gamma_0} + \frac{\phi_2 \gamma_X(k-2)}{\gamma_0},$$

entonces, por definición de $\rho_X(k)$ se tiene que

$$\rho_X(k) = \phi_1 \rho_X(k-1) + \phi_2 \rho_X(k-2),$$

para $k \in \mathbb{N}$, que corresponde a la expresión de la función de autocorrelación del proceso $AR(2)$. ■

Estas ecuaciones de las funciones de autocovarianza y autocorrelación del modelo AR son mejor conocidas como ecuaciones de Yule Walker.

Una forma equivalente de obtener y utilizar las ecuaciones de Yule Walker es a través de su forma matricial. Esto se puede expresar como se muestra a continuación a través de su forma recursiva

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \end{pmatrix}.$$

Que en su forma general se expresa como

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \dots & \rho_{2-p} & \rho_{1-p} \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \dots & \rho_{3-p} & \rho_{2-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(1-p) & \rho_X(2-p) & \rho_X(3-p) & \dots & \rho_X(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \\ \vdots \\ \rho_X(p) \end{pmatrix}.$$

A diferencia de la serie de valores autocorrelacionados del modelo $AR(1)$ se espera que para los $AR(2)$ a partir del segundo término se observe un decaimiento exponencial a cero.

Algunas de sus variantes de correlogramas son:

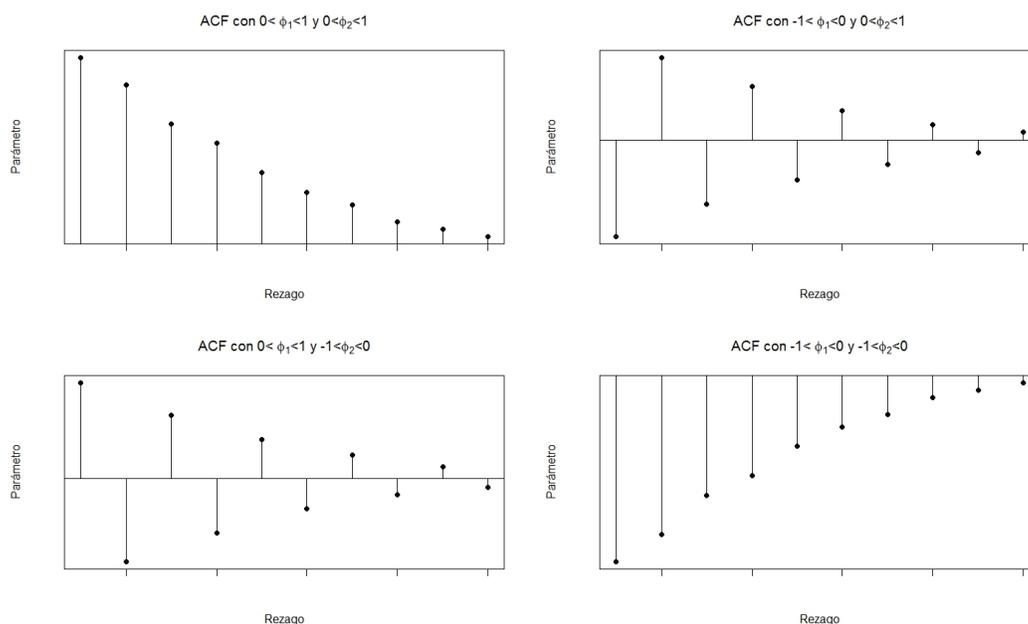


Figura 3.2 Funciones de autocorrelación de un proceso $AR(2)$.

Como es evidente en estos casos puede ocurrir que las funciones de autocorrelación para los modelos $AR(1)$ y $AR(2)$ lleguen a ser muy similares lo que se traduce en un problema ya que, de primera instancia, resulta casi imperceptible poder diferenciar un modelo de otro. Sin embargo, para dar solución a este tipo de inconvenientes, es necesario recurrir al uso de funciones de autocorrelación parcial.

Esta nueva clase de funciones facilitan el proceso de identificación de los modelos autorregresivos dado que arrojan gráficas de las funciones de autocorrelación parcial con características muy similares para los modelos de primer orden, asimismo para los de segundo orden y sucesivamente.

Como se observará más adelante, para el caso de los modelos de medias móviles, la situación será la opuesta, de tal forma que las funciones de autocorrelación parcial serán muy similares entre diferentes órdenes y por ello se deberá recurrir al uso de funciones de autocorrelación para poder identificar el orden del modelo que se ajuste a los valores de la serie de tiempo. De lo anterior, se definen las funciones de autocorrelación parcial de un modelo de serie de tiempo de la siguiente manera:

Definición 3.2.3. (*Función de autocorrelación parcial*)

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ una serie de tiempo, la función de autocorrelación parcial de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ se define como

$$\rho_X(1,1) = \rho_X(1)$$

$$\rho_X(2,2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & \rho_X(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}},$$

$$\rho_X(3,3) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(2) \\ \rho_X(2) & \rho_X(1) & \rho_X(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(2) & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}},$$

⋮

$$\rho_X(k,k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \dots & \rho_X(k-2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 & \dots & \rho_X(k-3) & \rho_X(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \dots & 1 & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \dots & \rho_X(1) & \rho_X(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \dots & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \dots & \rho_X(k-3) & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \dots & 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \dots & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}}.$$

De esta forma, retomando el proceso $AR(1)$ con $|\phi_1| < 1$ se tiene lo siguiente:

Proposición 3.2.4.

Las funciones de autocorrelación parcial de un proceso $AR(1)$ satisfacen lo siguiente:

- I. $\rho_X(1,1) = \phi_1$.
- II. $\rho_X(2,2) = 0$.
- III. $\rho_X(k,k) = 0$ con $k \geq 3$.

Demostración:

I. Por definición, para $k = 1$, $\rho_X(1, 1) = \rho_X(1) = \phi_1$.

II. Para $k = 2$ se tiene que de la definición de $\rho_X(2, 2)$,

$$\begin{aligned}\rho_X(2, 2) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & \rho_X(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\rho_X(2) - \rho_X(1)^2}{1 - \rho_X(1)^2} \\ &= \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

III. Sea $k = 3$, de la definición de $\rho_X(3, 3)$ se tiene que

$$\rho_X(3, 3) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(2) \\ \rho_X(2) & \rho_X(1) & \rho_X(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) \\ \rho_X(2) & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\rho_X(3, 3) &= \frac{(\rho_X(3) + \rho_X(1)^3 + \rho_X(1)\rho_X(2)^2) - (\rho_X(1)\rho_X(2) + \rho_X(1)^2\rho_X(3) + \rho_X(1)\rho_X(2))}{(1 + \rho_X(1)^2\rho_X(2) + \rho_X(1)^2\rho_X(2)) - (\rho_X(2)^2 + \rho_X(1)^2 + \rho_X(1)^2)} \\ &= \frac{(\phi_1^3 + \phi_1^3 + \phi_1\phi_1^4) - (\phi_1^2\phi_1 - \phi_1^2\phi_1^3 + \phi_1\phi_1^2\phi_1^2\phi_1^2)}{(1 + \phi_1^2\phi_1^2) - (\phi_1^4 + \phi_1^2 + \phi_1^2)} \\ &= \frac{(\phi_1^3 + \phi_1^3 + \phi_1^5) - (\phi_1^3 - \phi_1^5 + \phi_1^3)}{(1 + \phi_1^4 + \phi_1^4) - (\phi_1^4 + \phi_1^2 + \phi_1^2)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora, para probar el caso donde $k > 3$ es posible hacer uso de dos tipos de metodologías, bajo el uso del método de condensación de Chío (1853) para cálculo de determinantes o bien mediante el uso del Algoritmo de Durbin-Levinson (1946). Siendo así, el método de condensación de Chío para determinantes es definido como

Definición 3.2.4. (*Método de condensación de Chío para cálculo de determinantes*)

Sea A una matriz de $n \times n$, el determinante de A en términos de sus $(n - 1) \times (n - 1)$ determinantes esta dado de la forma:

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{1,1}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{n,1} & a_{n,3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Sin embargo, tomando la forma de los términos de la última fila de la matriz, para cualquier valor de k con $k > 3$, la matriz numerador de la función de autocorrelación parcial estará dada por:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,k} \\ a_{k,1} & a_{k,k} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \rho_{k-i} & \rho_{k-(i+1)} \\ \rho_{k-(i-1)} & \rho_{k-i} \end{vmatrix} \\ &= (\rho_X(k-i)^2 - (\rho_X(k-(i-1))\rho_X(k-(i+1)))) \\ &= (\rho_X(k-i)^2 - (\phi^{k-(i-1)}\phi^{k-(i+1)})) \\ &= (\rho_X(k-i)^2 - (\rho_X(k-i)^2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

con $0 < i \leq y k > 3$.

Es así que las entradas de la última fila de la matriz A estaría compuesta solo de ceros dado que, por propiedad de los determinantes, si una matriz A tiene al menos una fila o columna formada por ceros, entonces $|A| = 0$. Por lo tanto,

$$\rho_X(k, k) = 0,$$

con $k \geq 3$. ■

Lo que significa que el primer rezago de un $AR(1)$ presentará un valor distinto de cero y posteriormente los demás valores se encontrarán en el eje de las x .

Por otro lado, el algoritmo Durbin-Levinson proporciona un método iterativo para calcular la funciones de autocorrelación parcial de un proceso estacionario. Este proceso se define como

Definición 3.2.5. (*Algoritmo Durbin-Levinson*)

Se define el algoritmo de Durbin-Levinson como la secuencia de pasos recursivos necesarios para estimar las funciones de autocorrelación parciales de un proceso autorregresivo (o de medias móviles). Dichos pasos consisten en lo siguiente:

- Paso 1. Considerar que $\rho_X(1, 1) = \rho_X(1)$.
- Paso 2. Para $k > 1$:

$$\rho_X(k, k) = \frac{\rho_X(k) - \sum_{n=1}^{k-1} \rho_X(k-1, n)\rho_X(k-n)}{1 - \sum_{n=1}^{k-1} \rho_X(k-1, n)\rho_X(n)},$$

y además

$$\rho_X(k, n) = \rho_X(k-1, n) - \rho_X(k, k)\rho_X(k-1, k-n),$$

para $n = \{1, 2, 3 \dots k-1\}$.

Es decir, las demostraciones del comportamiento de las funciones de autocorrelación parcial para el $AR(1)$ mediante el uso del algoritmo de Durbin-Levinson están dadas de la siguiente forma:

Demostración:

- I. Por definición para $k = 1$, $\rho_X(1, 1) = \rho_X(1) = \phi_1$.
- II. Sea $k = 2$, por Durbin-Levinson,

$$\begin{aligned} \rho_X(2, 2) &= \frac{\rho_X(2) - \rho_X(1, 1)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(1, 1)\rho_X(1)} \\ &= \frac{\rho_X(2) - \rho_X(1)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(1)\rho_X(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho_X(1)^2 - \rho_X(1)^2}{1 - \rho_X(1)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

III. Sea $k = 3$, por Durbin-Levinson se tiene que

$$\rho_X(3, 3) = \frac{\rho_X(3) - \rho_X(2, 1)\rho_X(2) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\rho_X(2, 1) &= \rho_X(1, 1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1, 1) \\
&= \phi_1,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho_X(3, 3) &= \frac{\rho_X(3) - \phi_1\rho_X(2) - 0}{1 - \phi_1^2 - 0} \\
&= \frac{\phi_1^3 - \phi_1\phi_1^2}{1 - \phi_1^2 - 0} \\
&= \frac{\phi_1^3 - \phi_1^3}{1 - \phi_1^2 - 0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente para $k > 3$ se llega a la siguiente expresión:

$$\rho_X(k, k) = \frac{\rho_X(k) - \dots - \rho_X(2, 1)\rho_X(2) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \dots - \rho_X(k-1, k-1)\rho_X(k-1)}$$

y dado que dado que $\rho_X(k, k) = 0$, con $k > 3$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\rho_X(k, k) &= \frac{\rho_X(3) - \rho_X(2, 1)\rho_X(2) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Por lo que, como se había previsto, las funciones de autocorrelación parcial decaerán a cero a partir del segundo rezago, lo que gráficamente podría verse como

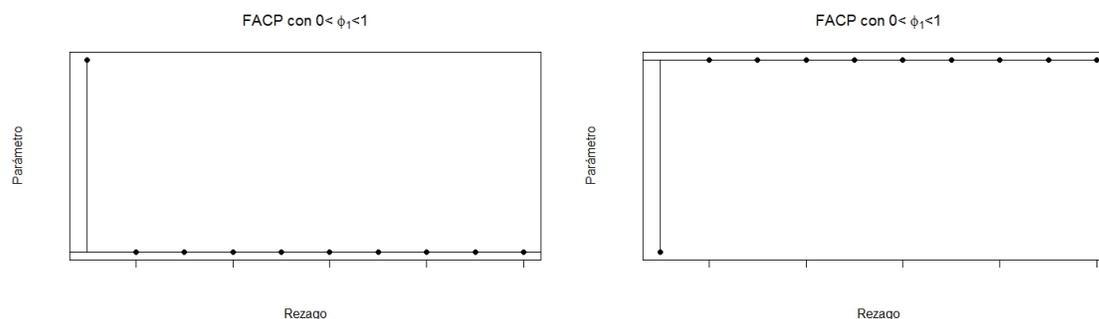


Figura 3.3 Funciones de autocorrelación parcial de un proceso $AR(1)$.

Ahora bien, retomando el proceso $AR(2)$ se tiene lo siguiente:

Proposición 3.2.5.

Las funciones de autocorrelación parcial de un proceso $AR(2)$ satisfacen las siguientes propiedades:

- I. $\rho_X(1, 1) = \frac{\phi_1}{(1 - \phi_2)}$.
- II. $\rho_X(2, 2) = \phi_2$.
- III. $\rho_X(k, k) = 0$ con $k \geq 3$.

Demostración:

- I. De la definición para $k = 1$ se tiene que

$$\rho_X(1, 1) = \rho_X(1) = \frac{\phi_1}{(1 - \phi_2)}.$$

- II. Sea $k = 2$, entonces se obtiene que

$$\rho_X(2, 2) = \frac{\frac{\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)}{(1 - \phi_2)} - \left(\frac{\phi_1}{(1 - \phi_2)}\right)^2}{1 - \left(\frac{\phi_1}{(1 - \phi_2)}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 - \phi_2)\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)^2}{(1 - \phi_2)^2} - \frac{\phi_1^2}{(1 - \phi_2)^2} \\
= & \frac{(1 - \phi_2)\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}{(1 - \phi_2)^2} \\
= & \frac{(1 - \phi_2)\phi_1^2 + \phi_2(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} \\
= & \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2\phi_2 + \phi_2^3 - 2\phi_2^2 + \phi_2 - \phi_1^2}{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 - \phi_1^2} \\
= & \frac{-\phi_1^2\phi_2 + \phi_2^3 - 2\phi_2^2 + \phi_2}{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 - \phi_1^2} \\
= & \frac{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 - \phi_1^2\phi_2}{1 - 2\phi_2 + \phi_2^2 - \phi_1^2} \\
= & \phi_2.
\end{aligned}$$

III. Sea $k = 3$, por Durbin-Levinson,

$$\rho_X(3, 3) = \frac{\rho_X(3) - \rho_X(2, 1)\rho_X(2) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)}$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho_X(2, 1) &= \rho_X(1, 1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1, 1) \\
&= \frac{\phi_1}{(1 - \phi_2)} - \frac{\phi_1\phi_2}{(1 - \phi_2)} \\
&= \frac{(1 - \phi_2)\phi_1}{(1 - \phi_2)} \\
&= \phi_1.
\end{aligned}$$

Regresando a la ecuación original

$$\begin{aligned}
\rho_X(3, 3) &= \frac{\phi_1\rho_X(2) + \phi_2\rho_X(1) - \rho_X(2, 1)\rho_X(2) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)} \\
&= \frac{(\phi_1 - \rho_X(2, 1))\rho_X(2) + (\phi_2 - \rho_X(2, 2))\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)} \\
&= \frac{(\phi_1 - \phi_1)\rho_X(2) + (\phi_2 - \phi_2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)} \\
&= \frac{(0)\rho_X(2) + (0)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Análogamente para los valores de $k \geq 4$ puede demostrarse, aplicando un análisis similar, que las funciones de autocorrelación parcial de un $AR(2)$ son cero. Es así que para este tipo de procesos los primeros dos rezagos de la funciones de autocorrelación parcial corresponderán a valores distintos de cero y a partir del tercero estos se centrarán en el eje de la x . Las gráficas que describen este tipo de funciones son las siguientes:

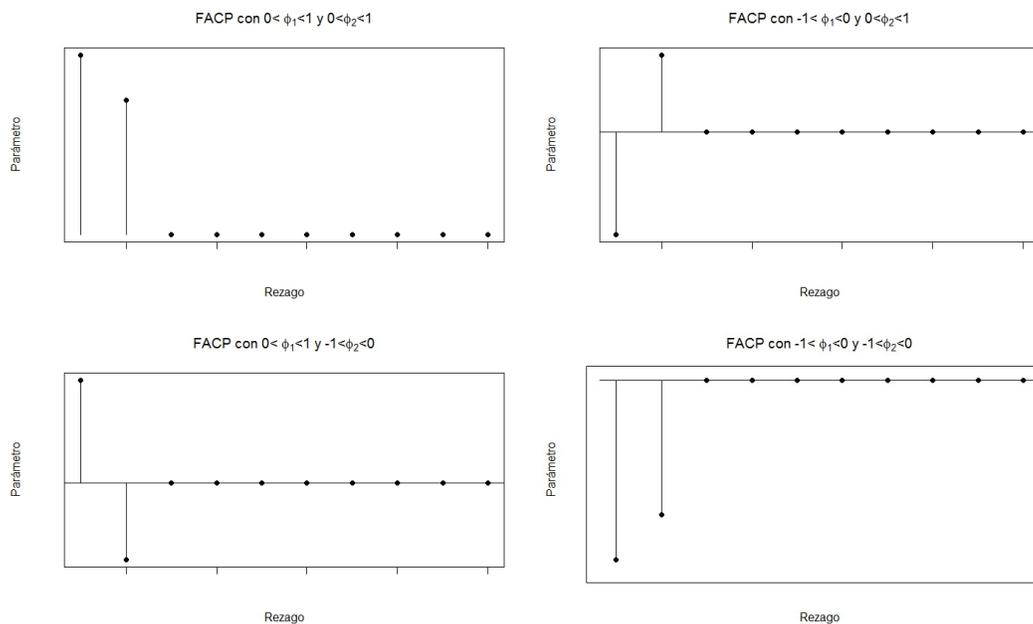


Figura 3.4 Funciones de autocorrelación parcial de un proceso $AR(2)$.

3.2.3. Modelos Autorregresivos $AR(p)$

Ahora, generalizando la forma del proceso autorregresivo en orden p denotado por $AR(p)$, se tiene lo siguiente:

Definición 3.2.6. (Proceso autorregresivo de orden p)

Se dice que una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso autorregresivo de orden p , denotado por $AR(p)$, si

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t,$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para toda $t \in \mathbb{Z}$ y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son los parámetros del modelo.

Si a dicho proceso le son aplicados operadores de rezago, este puede denotarse como

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= X_t - (\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p}) \\ &= X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} \\ &= X_t(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) \\ &= \phi(B)X_t,\end{aligned}$$

donde $\phi(B)$ es conocido como polinomio autorregresivo.

Para poder demostrar que un proceso $AR(p)$ es estacionario, como se hizo para el caso del $AR(2)$, debe probarse que el valor de las raíces del polinomio autorregresivo $\phi(B)$ son mayores a uno en valor absoluto, es decir, que las raíces recíprocas toman valores dentro del círculo unitario.

Para facilitar dicha tarea, es recomendable recurrir al uso del Teorema Fundamental del Álgebra que establece que todo polinomio de grado n tiene a lo más n raíces.

Teorema 3.2.1. (*Teorema Fundamental del Álgebra*)

Sea $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ un polinomio de grado n . Se puede expresar a $P(x)$ en términos de sus factores como

$$P(x) = \alpha_n (x - Z_0)(x - Z_1)(x - Z_2) \dots (x - Z_n),$$

y además

$$P(x) = 0,$$

donde Z_n son raíces del polinomio.

De lo anterior, el polinomio $\phi(B)$ puede ser expresado como sigue:

$$1 - \phi_1 Z_1 - \phi_2 Z_2 - \cdots - \phi_p Z_p = 0.$$

Entonces se tendrá a lo más p cantidad de raíces del polinomio misma que pueden ser reales o complejas.

Es así que, la condición de estacionariedad para un proceso $AR(p)$ está dada por:

$$|Z_i| > 1,$$

para toda $i \in \mathbb{N}$. Una demostración completa acerca de estacionariedad de los $AR(p)$ puede ser consultada en Kirchgässner (2013).

Las características del proceso estacionario $AR(p)$ que pueden ser estimadas de forma análoga a los modelos $AR(1)$ y $AR(2)$ son:

Proposición 3.2.6.

Un proceso $AR(p)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\gamma_X(0) = \phi_1\gamma_X(1) + \phi_2\gamma_X(2) + \cdots + \phi_p\gamma_X(p) + \sigma_e^2$.
- II. $\gamma_X(k) = \phi_1\gamma_X(k-1) + \phi_2\gamma_X(k-2) + \cdots + \phi_p\gamma_X(k-p)$.
- III. $\rho_X(p) = \phi_1\rho_X(p-1) + \phi_2\rho_X(p-2) + \cdots + \phi_p$.

Demostración:

I. Multiplicando ambos lados de la ecuación del proceso $AR(p)$ por X_t y obteniendo el valor esperado se llega a lo siguiente:

$$\gamma_X(0) = \phi_1\gamma_X(1) + \phi_2\gamma_X(2) + \cdots + \phi_p\gamma_X(p) + \sigma_e^2,$$

con $p = 0$.

De lo anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t\epsilon_t) &= \mathbb{E}(\epsilon_t(\phi_1X_{t-1} + \phi_2X_{t-2} + \cdots + \phi_pX_{t-p} + \epsilon_t)) \\ &= \phi_1\mathbb{E}(\epsilon_tX_{t-1}) + \phi_2\mathbb{E}(\epsilon_tX_{t-2}) + \cdots + \phi_p\mathbb{E}(\epsilon_tX_{t-p}) + \mathbb{E}(\epsilon_t\epsilon_t) \\ &= 0 + \cdots + \mathbb{E}(\epsilon_t^2) \\ &= \sigma_e^2, \end{aligned}$$

II. Partiendo de la ecuación del proceso $AR(p)$, multiplicando ambos lados por X_t se llega inmediatamente al resultado deseado

$$\gamma_X(k) = \phi_1\gamma_X(k-1) + \phi_2\gamma_X(k-2) + \cdots + \phi_p\gamma_X(k-p),$$

con $k > 0$.

III. Haciendo uso de la matriz generalizada de Yule Walker se puede deducir que, por definición $\rho_X(0) = 1$, por lo que para el caso de $k = 1$

$$\rho_X(1) = \phi_1 + \phi_2\rho_X(1) + \cdots + \phi_p\rho_X(p-1),$$

mientras que para el caso de $k = 2$

$$\rho_X(2) = \phi_1\rho_X(1) + \phi_2\rho_X(2) + \cdots + \phi_p\rho_X(p-2),$$

considerando $k = 3$

$$\rho_X(3) = \phi_1\rho_X(2) + \phi_2\rho_X(1) + \cdots + \phi_p\rho_X(p-3),$$

finalmente para $k = p$

$$\rho_X(p) = \phi_1\rho_X(p-1) + \phi_2\rho_X(p-2) \cdots + \phi_p.$$

■

Como lo muestran Brockwell y Davis (2002), al tratarse de las funciones de autocorrelación parcial, aplicando el mismo razonamiento que se hizo para el $AR(1)$ y al $AR(2)$ al llegar al p -ésimo rezago, la gráfica cortará a cero y por lo tanto la identificación del modelo se convierte en una tarea relativamente sencilla.

Un dato interesante que destacar parte de la ecuación de $\gamma_X(0)$, ya que si se expresan los términos de la forma

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)},$$

entonces

$$\gamma_X(0) = \phi_1\rho_X(1)\gamma_X(0) + \phi_2\rho_X(2)\gamma_X(0) + \cdots + \phi_p\rho_X(p)\gamma_X(0) + \sigma_e^2,$$

de donde, agrupando factores comunes se llega a que

$$\gamma_X(0) = \frac{\sigma_e^2}{(1 - \phi_1\rho_X(1) - \phi_2\rho_X(2) - \cdots - \phi_p\rho_X(p))}.$$

Finalmente una característica muy importante de los modelos autorregresivos es la condición de causalidad, que consiste en expresar al modelo $AR(p)$ en términos de un proceso de medias móviles; esto significa que:

$$X_t = \epsilon_t + \phi_1\epsilon_{t-1} + \phi_2\epsilon_{t-2} + \cdots, +$$

lo que implica que es posible denotar un proceso autorregresivo estacionario en términos de ruido blanco de manera que el proceso posea la estructura de un modelo de medias móviles con orden infinito.

3.3. Modelos de Medias Móviles

Un proceso de medias móviles o de promedios móviles es aquel que parte del supuesto de que los valores que vaya tomando la serie de tiempo $\{X_t\}$ pueden ser explicados en función de un término independiente y ruido blanco ponderado observados.

El orden de los modelos MA comúnmente se denota por q y corresponde al número de términos de error que deben ser considerados para la estimación de $\{X_t\}$.

3.3.1. Modelos de Medias Móviles $MA(1)$

A diferencia de los modelos AR , los modelos MA basan su funcionamiento en la consideración de los errores aleatorios a través del tiempo para explicar el comportamiento de las variables a tiempo t . De esta forma, un proceso $MA(1)$ se define como

Definición 3.3.1. (*Proceso de media móvil de primer orden*)

Se dice que una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de media móvil de primer orden, denotado por $MA(1)$, si

$$X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1},$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para todo $t \in \mathbb{Z}$ y θ_1 es el parámetro del modelo.

Por otro lado, se tiene que para un proceso $MA(1)$ se cumple lo siguiente:

Proposición 3.3.1.

Un proceso $MA(1)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\gamma_X(0) = (1 + \theta^2)\sigma_\epsilon^2$.
- II. $\gamma_X(k) = 0$ para $|k| > 1$.
- III. $\rho_X(k) = 0$ para $|k| > 1$.

Demostración:

I. Partiendo del hecho de que

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \text{Var}(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}) \\ &= \text{Var}(\epsilon_t) + \theta^2\text{Var}(\epsilon_{t-1}) \\ &= \sigma_e^2 + \theta^2\sigma_e^2 \\ &= (1 + \theta^2)\sigma_e^2,\end{aligned}$$

es decir

$$\gamma_X(0) = (1 + \theta^2)\sigma_e^2.$$

II. Nótese que

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) \\ &= \mathbb{E}[(X_t - \mu_t)(X_{t-k} - \mu_{t-k})] \\ &= \mathbb{E}[X_t X_{t-k}],\end{aligned}$$

si $k = 1$

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})X_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t-1} + \theta\epsilon_{t-2})] \\ &= \theta\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}^2) \\ &= \theta\sigma_e^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $|k| > 1$

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-k}] \\ &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1})X_{t-k}] \\ &= 0.\end{aligned}$$

III. Por definición $\rho_X(0) = 1$.

Para $k = 1$

$$\begin{aligned}\rho_X(1) &= \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} \\ &= \frac{\theta}{(1 + \theta^2)}.\end{aligned}$$

Ahora bien, para $k > 1$

$$\begin{aligned}\rho_X(k) &= \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} \\ &= \frac{0}{(1 + \theta^2)\sigma_e^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Finalmente, es sencillo observar que $|\rho_X(1)| < \frac{1}{2}$ para todo $\theta \neq 0$.

Al igual que los modelos *AR* es posible expresar el proceso *MA* en función del operador de rezago, es decir,

$$X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1},$$

o bien

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= X_t - \theta_1\epsilon_{t-1} \\ &= X_t - \theta_1(X_{t-1} - \theta_1\epsilon_{t-2}) \\ &= X_t - \theta_1X_{t-1} + \theta_1^2\epsilon_{t-2} \\ &= X_t - \theta_1X_{t-1} + \theta_1^2X_{t-2} - \theta_1^3X_{t-3} + \dots + (-\theta_1)^nX_{t-n} + (-\theta_1)^{n+1}\epsilon_{t-n-1} \\ &= \sum_{j=0}^n (-\theta_1)^j X_{t-j} + (-\theta_1)^{n+1}\epsilon_{t-n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta_1)^j X_{t-j},\end{aligned}$$

lo que equivale a

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} (\theta_1)^j X_{t-j} + \epsilon_t,$$

de donde se deduce que si $|\theta| < 1$ la serie converge a un valor finito y por lo tanto $|\theta| < 1$ corresponde a la condición de invertibilidad del modelo *MA*(1), es decir, que puede ser expresado de la forma de un modelo *AR*.

El correlograma de la función de autocorrelación teórica de este proceso puede ser de las siguientes maneras:

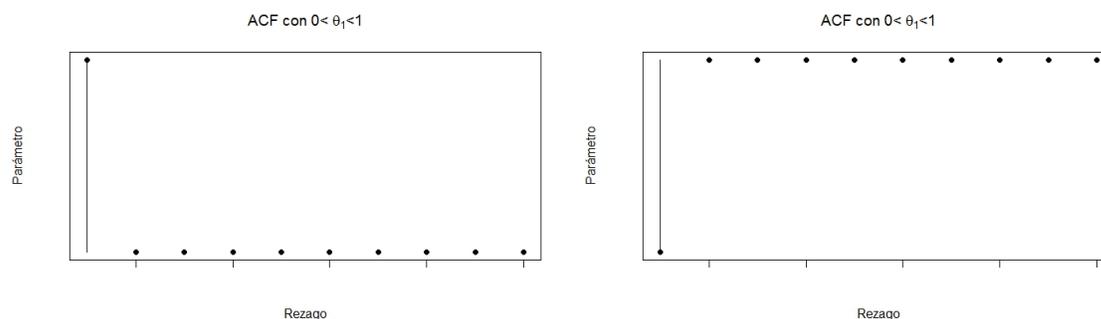


Figura 3.5 Funciones de autocorrelación de un proceso $MA(1)$.

Obsérvese que a partir del segundo valor de la serie de autocorrelaciones los valores serán cero.

Proposición 3.3.2.

Las funciones de autocorrelación parcial de un proceso $MA(1)$ satisfacen las siguientes propiedades:

- I. $\rho_X(1, 1) = \frac{\theta_1}{(1 + \theta_1^2)}$.
- II. $\rho_X(2, 2) = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4}$.
- III. $\rho_X(3, 3) = \frac{\theta_1^3}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4 + \theta_1^8}$.

Demostración:

- I. Utilizando el algoritmo Durbin-Levinson para hallar el valor de las funciones de autocorrelación parcial de un $MA(1)$, se obtiene que, por definición, para $n = 1$

$$\rho_X(1, 1) = \frac{\theta_1}{(1 + \theta_1^2)}.$$

- II. Sea $n = 2$, entonces por Durbin-Levinson,

$$\rho_X(2, 2) = \frac{-\rho_X(1)^2}{1 - \rho_X(1)^2} = \frac{\frac{-\theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)^2}}{1 - \frac{\theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)^2}} = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4}.$$

III. Partiendo del resultado de Brockwell (2006) se tiene que para valores de $k \geq 1$

$$\rho_X(k, k) = (-1)^{k-1} \frac{\theta_1^k}{1 + \sum_{j=1}^k \theta_1^{2j}},$$

sustituyendo $k = 3$ se llega a

$$\rho_X(3, 3) = \frac{\theta_1^3}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4 + \theta_1^8},$$

de donde es posible intuir que, conforme n aumenta, la función de autocorrelación parcial converge a cero. ■

Gráficamente las funciones de autocorrelación parcial de un $MA(1)$ generalmente presentan alguno de los siguientes comportamientos:

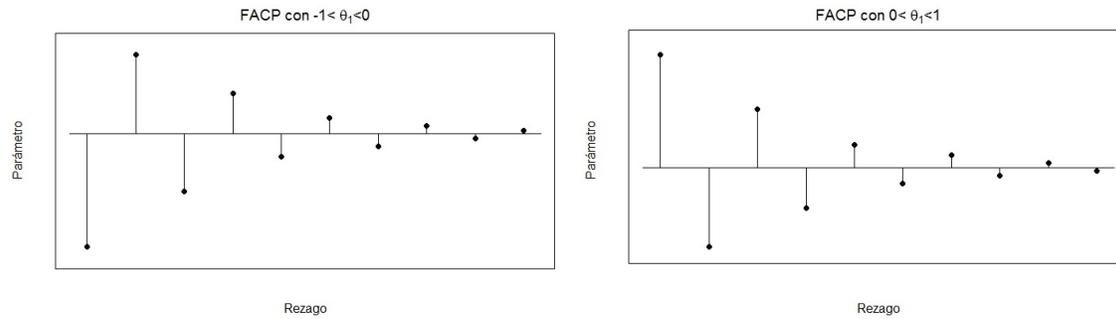


Figura 3.6 Funciones de autocorrelación parcial de un proceso $MA(1)$.

3.3.2. Modelos de Medias Móviles $MA(2)$

Definición 3.3.2. (*Proceso de media móvil de segundo orden*)

Se dice que una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de media móvil de segundo orden, denotado por $MA(2)$, si

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2},$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para todo valor de $t \in \mathbb{Z}$ y θ_1, θ_2 son los parámetros del modelo.

Adicionalmente si se cumple que $|\theta_1| < 2$, $|\theta_2| < 1$, $\theta_2 - \theta_1 < 1$ y $\theta_2 + \theta_1 < 1$, se dice que el proceso es estacionario.

Es importante señalar que para la obtención de las condiciones de estacionariedad del modelo $MA(2)$ el procedimiento es análogo al de un $AR(2)$ previamente exhibidas, es decir, haciendo uso de la fórmula general del álgebra.

Por otra parte se tiene que un proceso $MA(2)$ cumple con lo siguiente:

Proposición 3.3.3.

Un proceso $MA(2)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\gamma_X(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_e^2$.
- II. $\gamma_X(k) = 0$ para $|k| > 2$.
- III. $\rho_X(k) = 0$ para $|k| > 2$.

Demostración:

I. Dado que

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \text{Var}(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2}) \\ &= \text{Var}(\epsilon_t) + \theta_1^2\text{Var}(\epsilon_{t-1}) + \theta_2^2\text{Var}(\epsilon_{t-2}) \\ &= \sigma_e^2 + \theta_1^2\sigma_e^2 + \theta_2^2\sigma_e^2 \\ &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_e^2.\end{aligned}$$

II. Sea $k = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2})X_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-1} + \theta_1\epsilon_{t-2} + \theta_2\epsilon_{t-3})] \\ &= \theta_1\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}^2) + \theta_2\mathbb{E}(\epsilon_{t-2}^2) \\ &= \theta_1\sigma_e^2 + \theta_1\theta_2\sigma_e^2 \\ &= (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_e^2.\end{aligned}$$

Sea $k = 2$

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(2) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-2}] \\
 &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}) X_{t-2}] \\
 &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-2} + \theta_1 \epsilon_{t-3} + \theta_2 \epsilon_{t-4})] \\
 &= \theta_2 \mathbb{E}(\epsilon_{t-2}^2) \\
 &= \theta_2 \sigma_e^2.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, sea $k > 2$

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(k) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-k}] \\
 &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2}) X_{t-k}] \\
 &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-k} + \theta_1 \epsilon_{t-k-1} + \theta_2 \epsilon_{t-k-2})] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

III. Por definición $\rho_X(0) = 1$.

Sea $k = 1$

$$\begin{aligned}
 \rho_X(1) &= \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} \\
 &= \frac{(\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_e^2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_e^2} \\
 &= \frac{(\theta_1 + \theta_1 \theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}.
 \end{aligned}$$

Para el caso en que $k = 2$

$$\begin{aligned}
 \rho_X(2) &= \frac{\gamma_X(2)}{\gamma_X(0)} \\
 &= \frac{\theta_2 \sigma_e^2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_e^2} \\
 &= \frac{\theta_2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}.
 \end{aligned}$$

Finalmente para el caso en que $k > 2$

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \frac{0}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \sigma_e^2)} = 0.$$

■

Lo que implica que para el modelo $MA(2)$ los valores de la función de autocorrelación, después del tercer rezago, serán cero. Ejemplos del posible comportamiento de la función de autocorrelación de un $MA(2)$ son los siguientes:

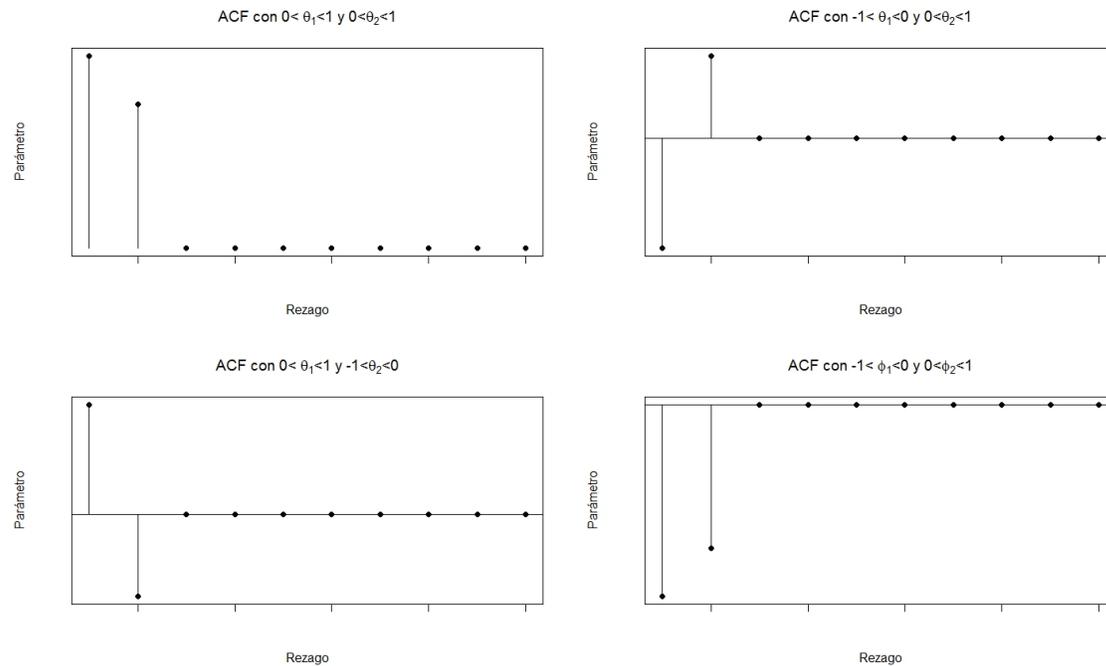


Figura 3.7 Funciones de autocorrelación de un proceso $MA(2)$.

Asimismo, las funciones de autocorrelación parcial de un proceso $MA(2)$ cumplen con lo siguiente:

Proposición 3.3.4.

Las funciones de autocorrelación parcial de un proceso $MA(2)$ satisfacen las siguientes propiedades:

- I. $\rho_X(1, 1) = \frac{(\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)}$.
- II. $\rho_X(2, 2) = \frac{\rho_X(2) - \rho_X(1)^2}{1 - \rho_X(1)^2}$.
- III. $\rho_X(3, 3) = \frac{\rho_X(3) - \rho_X(2, 1)\rho_X(2) - \rho_X(2, 2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2, 1)\rho_X(1) - \rho_X(2, 2)\rho_X(2)}$.

El caso de la funciones de autocorrelación parcial para un $MA(2)$ es similar al de un $MA(1)$, es decir, conforme los rezagos aumenten, la función se acercará a cero.

Demostración:

I. Directamente aplicando el algoritmo de Durbin-Levinson se tiene que

$$\rho_X(1,1) = \frac{(\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)},$$

entonces $\rho_X(1,1) > 0$.

II. Aplicando Durbin-Levinson

$$\rho_X(2,2) = \frac{\rho_X(2) - \rho_X(1)^2}{1 - \rho_X(1)^2} < \rho_X(1,1).$$

III. Aplicando Durbin-Levinson para el caso de $n=3$

$$\rho_X(3,3) = \frac{\rho_X(3) - \rho_X(2,1)\rho_X(2) - \rho_X(2,2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2,1)\rho_X(1) - \rho_X(2,2)\rho_X(2)},$$

donde,

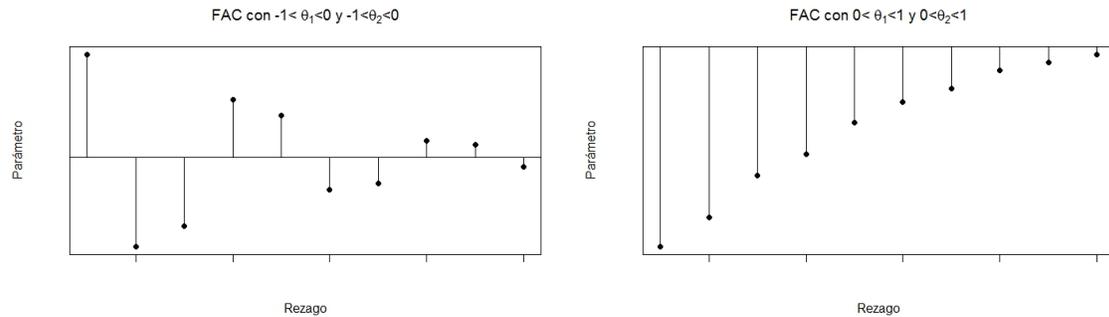
$$\rho_X(2,1) = \rho_X(1,1) - \rho_X(2,2)\rho_X(1,1),$$

por lo que

$$\rho_X(3,3) = \frac{\rho_X(3) - \rho_X(2,1)\rho_X(2) - \rho_X(2,2)\rho_X(1)}{1 - \rho_X(2,1)\rho_X(1) - \rho_X(2,2)\rho_X(2)} < \rho_X(2,2) < \rho_X(1,1).$$

■

Por lo que se espera que la función de autocorrelación parcial tienda a cero conforme k aumente. Lo que gráficamente puede verse como



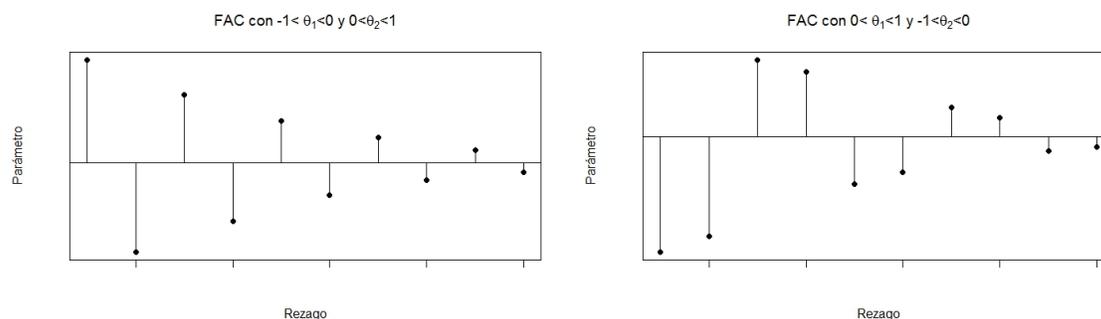


Figura 3.8 Funciones de autocorrelación parcial de un proceso $MA(2)$.

Emplear exclusivamente estas herramientas gráficas como métodos de identificación entre procesos del tipo $MA(1)$ y $MA(2)$ puede resultar muy complicado, ya que distinguir una de otra, tal como ocurre con las funciones de autocorrelación de los procesos $AR(1)$ y $AR(2)$, es casi imperceptible.

Es por ello que las funciones de autocorrelación en el caso de los MA servirán como una herramienta complementaria del análisis estadístico de los datos y no como una medida de identificación del modelo más adecuado.

3.3.3. Modelos de Medias Móviles $MA(q)$

La generalización de los modelos $MA(q)$ esta dada de la siguiente manera:

Definición 3.3.3. (*Proceso de media móvil de orden q*)

Una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de media móvil de orden q , denotado por $MA(q)$, si

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para todo valor de $t \in \mathbb{Z}$ y $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ son los parámetros del modelo.

Ahora bien, se puede considerar la siguiente proposición:

Proposición 3.3.5.

Un proceso $MA(q)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_e^2$.
- II. $\gamma_X(k) = 0$ para $|k| > q$.
- III. $\rho_X(k) = 0$ para $|k| > q$.

Demostración:

I. Se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sigma_X^2 &= \text{Var}(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}) \\
 &= \text{Var}(\epsilon_t) + \theta_1^2\text{Var}(\epsilon_{t-1}) + \theta_2^2\text{Var}(\epsilon_{t-2}) + \cdots + \theta_q^2\text{Var}(\epsilon_{t-q}) \\
 &= \sigma_e^2 + \theta_1^2\sigma_e^2 + \theta_2^2\sigma_e^2 + \cdots + \theta_q^2\sigma_e^2 \\
 &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_e^2 \\
 &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_e^2.
 \end{aligned}$$

II. Sea $0 \leq k \leq q$ entonces

$$\gamma_X(k) = \text{Cov}(X_t, X_{t-k}),$$

de la definición de covarianza

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(k) &= \mathbb{E}[X_t, X_{t-k}] \\
 &= \mathbb{E}[(\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q})(\epsilon_{t-k} + \theta_{t-k-1}\epsilon_{t-k-1} + \cdots + \theta_{t-k-q}\epsilon_{t-k-q})] \\
 &= \sigma_e^2 \sum_{t=0}^q \theta_t \theta_{t-k},
 \end{aligned}$$

con $\theta_0 = 1$.

Por otro lado, para $k > q$ se tiene que:

$$\gamma_X(k) = 0,$$

debido a que no existirán términos de choques aleatorios en común entre $\{X_t\}$ y $\{X_{t-k}\}$ y los demás productos de esperanzas son independientes entre sí.

III. Por definición para $k = 0$ se tiene que $\rho_X(k) = 1$.
Entonces, sea $0 \leq k \leq q$

$$\rho_X(k) = \frac{\sum_{t=0}^q \theta_t \theta_{t-k}}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)}.$$

Mientras que para valor de $k > q$

$$\rho_X(k) = 0,$$

dado que $\gamma_X(k) = 0$, para $k > q$. ■

Que implica que el correlograma de los valores de las funciones de autocorrelación serán cero para $k > q$. Por otro lado, como lo muestran Brockwell y Davis (2002), para las funciones de autocorrelación parcial es posible encontrar que entre mayores sean los rezagos, los valores de dichas función se acercarán a cero, reflejando de esta manera el comportamiento que siguen las funciones de autocorrelación de un proceso $AR(p)$.

Se dice entonces que existe una dualidad entre las funciones de autocorrelación de los modelos $MA(q)$ con respecto a la estructura de las funciones de autocorrelación parcial de los $AR(p)$ y la estructura de los funciones de autocorrelación parcial de un $MA(q)$ con las funciones de autocorrelación de un $AR(p)$.

Un aspecto que señalar es la posibilidad de expresar un proceso estacionario $MA(q)$ en función de sus rezagos, es decir,

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

sustituyendo por el operador de rezago

$$X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) \epsilon_t,$$

equivalente a

$$X_t = \theta(B) \epsilon_t,$$

por lo tanto, aplicando la inversa del polinomio $\theta(B)$

$$\epsilon_t = X_t (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + B^q)^{-1},$$

lo que corresponde a la condición de invertibilidad de un modelo $MA(q)$, así como su representación en términos autorregresiva. Cabe señalar que las raíces de la función $\theta(B)$ en valor absoluto deben ser menores a uno para que el proceso sea invertible.

De lo anterior, se desprende un resultado bastante útil dentro del análisis de series de tiempo, que corresponde al hecho de señalar que todo proceso estacionario puede expresarse de la forma $MA(q)$, es decir, el Teorema de Descomposición de Wold.

Teorema 3.3.1. (*Teorema de Descomposición de Wold*)

Sea $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es una serie de tiempo estacionaria, entonces puede escribirse como

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i} + \mu,$$

donde $\psi_1 = 0$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$, $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco y μ es la media de la serie de tiempo, es decir, un valor determinístico.

El poder emplear este teorema ayudará a entender y obtener de forma más simple las propiedades implícitas de los modelos ARMA. La demostración de este teorema puede ser consultada en el libro de Brockwell (2006).

3.4. Modelos Autorregresivos de Medias Móviles

Los procesos autorregresivos de medias móviles determinan el valor de $\{X_t\}$ en función de los valores pasados observados hasta el retardo p , y a su vez considerando el pasado de la errores estimados hasta el retardo q , es decir, se trata de un modelo que combina a los procesos AR y MA .

3.4.1. Modelos Autorregresivos de Medias Móviles $ARMA(1, 1)$

Definición 3.4.1. (*Proceso autorregresivo de media móvil de orden (1,1)*)

Se dice que una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso autorregresivo de media móvil de orden (1,1), denotado por $ARMA(1, 1)$, si

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1},$$

donde $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para todo valor de $t \in \mathbb{Z}$ y ϕ_1, θ_1 son los parámetros del modelo.

Una característica que resaltar de esta clase de modelos consiste en que, debido a que están compuestos por una parte autorregresiva y una parte media móvil, estos heredan sus respectivas propiedades. Es así que el proceso $ARMA(1,1)$ será estacionario y causal cuando $|\phi_1| < 1$ e invertible si $|\theta_1| < 1$.

Este modelo se puede escribir en términos del operador de rezago de la siguiente manera:

$$(1 - \phi_1 B)X_t = (1 + \theta_1 B)\epsilon_t,$$

teniendo que, por otro lado

Proposición 3.4.1.

Un proceso $ARMA(1,1)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\gamma_X(0) = \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1)\sigma_\epsilon^2}{(1 - \phi_1^2)}$.
- II. $\gamma_X(k) = \phi_1^{k-1}\gamma_X(1)$ para $k > 1$.
- III. $\rho_X(k) = \phi_1^{k-1}\rho_X(1)$ para $k > 1$.

Demostración:

I. Se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \text{Var}(\phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}) \\ &= \sigma_\epsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\epsilon^2 + 2\phi_1\theta_1 \sigma_\epsilon^2 + \phi_1^2 \sigma_X^2 \\ &= \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1)\sigma_\epsilon^2}{(1 - \phi_1^2)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\gamma_X(0) = \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1)\sigma_\epsilon^2}{(1 - \phi_1^2)}.$$

II. Sea el caso en que $k = 1$. Partiendo del hecho de que $\mu_t = 0$ para cualquier $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= \mathbb{E}(X_t X_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}[(\phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1})(X_{t-1})] \\ &= \mathbb{E}[(\phi_1 (X_{t-1})^2 + \epsilon_t X_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-1} X_{t-1})] \\ &= \phi_1 \mathbb{E}((X_{t-1})^2) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-1}) + \theta_1 \mathbb{E}(\epsilon_{t-1} X_{t-1}) \\ &= \phi_1 \gamma_X(0) + \theta_1 \sigma_\epsilon^2.\end{aligned}$$

Para el caso en que $k = 2$

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(2) &= \mathbb{E}(X_t X_{t-2}) \\
 &= \mathbb{E}[(\phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1})(X_{t-2})] \\
 &= \mathbb{E}[(\phi_1(X_{t-1} X_{t-2}) + \epsilon_t X_{t-2} + \theta_1 \epsilon_{t-1} X_{t-2})] \\
 &= \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-2}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-2}) + \theta_1 \mathbb{E}(\epsilon_{t-1} X_{t-2}) \\
 &= \phi_1 \gamma_X(1).
 \end{aligned}$$

Para el caso en que $k > 2$

$$\begin{aligned}
 \gamma_X(k) &= \mathbb{E}(X_t X_{t-k}) \\
 &= \mathbb{E}[(\phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1})(X_{t-k})] \\
 &= \mathbb{E}[(\phi_1(X_{t-1} X_{t-k}) + \epsilon_t X_{t-k} + \theta_1 \epsilon_{t-1} X_{t-k})] \\
 &= \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t-k}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t-k}) + \theta_1 \mathbb{E}(\epsilon_{t-1} X_{t-k}) \\
 &= \phi_1 \gamma_X(k-1),
 \end{aligned}$$

que al ser aplicado de forma recursiva conduce al siguiente resultado:

$$\gamma_X(k) = \phi_1^{k-1} \gamma_X(1).$$

III. Por definición sea $\rho_X(0) = 1$.

Para el caso en el que $k = 1$

$$\begin{aligned}
 \rho_X(1) &= \frac{\phi_1 \gamma_X(0) + \theta_1 \sigma_e^2}{\gamma_X(0)} \\
 &= \phi_1 + \frac{\theta_1 \sigma_e^2}{\gamma_X(0)} \\
 &= \phi_1 + \frac{\theta_1 \sigma_e^2}{\frac{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1) \sigma_e^2}{(1 - \phi_1^2)}} \\
 &= \frac{\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 + \phi_1^2 \theta_1 + \theta_1}{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1)} \\
 &= \frac{(\phi_1 + \theta_1)(1 + \phi_1 \theta_1)}{(1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1)}.
 \end{aligned}$$

Para el caso de $k > 1$

$$\begin{aligned} \rho_X(k) &= \frac{\phi_1 \gamma_X(k-1)}{\gamma_X(0)} \\ &= \phi_1 \rho_X(k-1) \\ &= \frac{\phi_1^{k-1} \gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} \\ &= \phi_1^{k-1} \rho_X(1). \end{aligned}$$

■

Lo que implica que la función de autocorrelación de un proceso $ARMA(1, 1)$ tendrá un decaimiento exponencial a cero que no se corta pero disminuye a medida de que k aumenta. En otras palabras, la función de autocorrelación de esta clase de modelos es similar a la forma de la función de autocorrelación de un $AR(1)$.

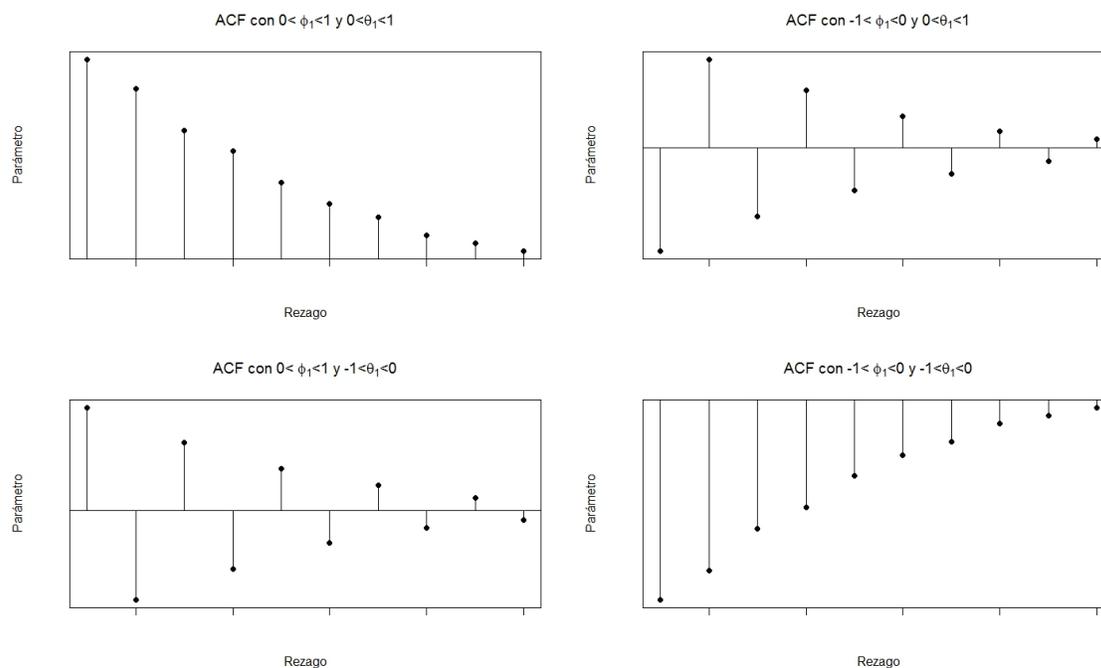


Figura 3.9 Funciones de autocorrelación de un proceso $ARMA(1,1)$.

Proposición 3.4.2.

Las funciones de autocorrelación parcial de un proceso $ARMA(1,1)$ satisfacen las siguientes propiedades:

- I. $\rho_X(1,1) = \rho_X(1)$.
- II. $\rho_X(1,1) > \rho_X(k,k)$ para toda $k > 1$.

Demostración:

- I. Esto puede ser probado directamente de la definición ya que $\rho_X(1,1) = \rho_X(1)$.
- II. Sea $k = 2$, entonces

$$\rho_X(2,2) = \frac{\rho_X(2) - \rho_X(1)^2}{(1 - \rho_X(1)^2)} = \frac{\phi_1 \rho_X(1) - \rho_X(1)^2}{(1 - \rho_X(1)^2)} = \rho_X(1) \frac{\phi_1 - \rho_X(1)}{(1 - \rho_X(1)^2)},$$

de donde el segundo término de la ecuación

$$\frac{\phi_1 - \rho_X(1)}{(1 - \rho_X(1)^2)} < 1,$$

por lo que

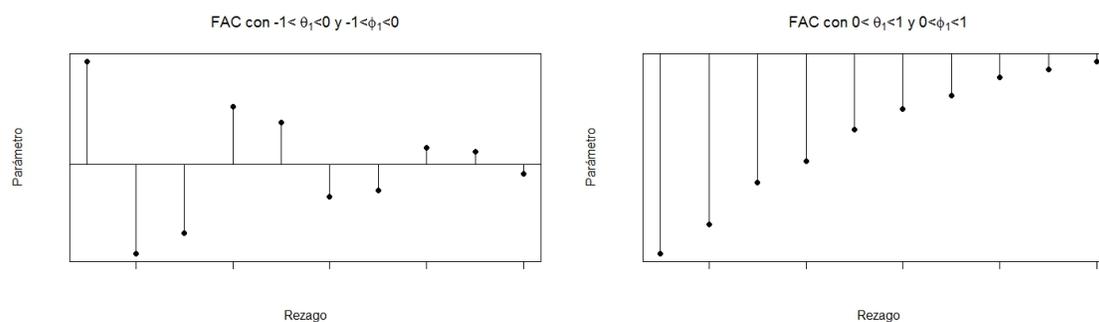
$$\rho_X(1,1) > \rho_X(2,2),$$

y análogamente

$$\rho_X(1,1) > \rho_X(k,k),$$

para todo valor de $k > 1$. ■

Gráficamente esto podría verse de la siguiente manera:



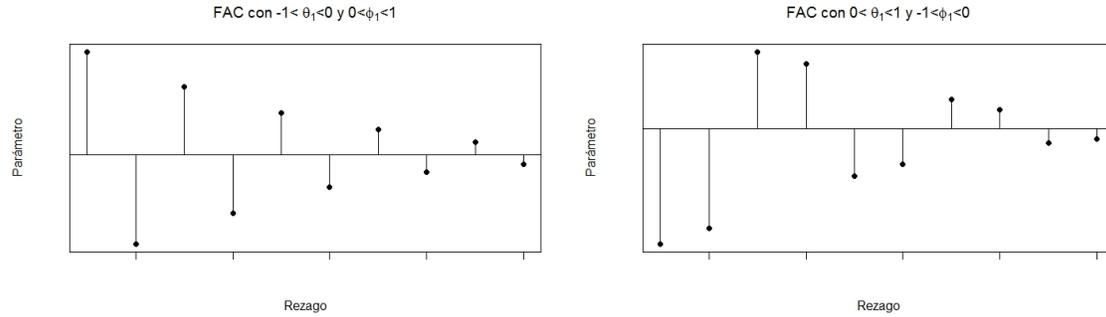


Figura 3.10 Funciones de autocorrelación parcial de un proceso $ARMA(1,1)$.

3.4.2. Modelos Autorregresivos de Medias Móviles $ARMA(p, q)$

De esta forma, un proceso $ARMA$ generalizado se define de la siguiente manera:

Definición 3.4.2. (*Proceso autorregresivo de medias móviles de orden (p, q)*)

Se dice que una serie de tiempo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso autorregresivo de medias móviles de orden (p, q) con $p, q \geq 0$, denotado como $ARMA(p, q)$, si

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

donde ϵ_t es un proceso de ruido blanco, μ_t es cero para todo valor de $t \in \mathbb{Z}$ y ϕ_j con j en $\{1, 2, \dots, p\}$ y, θ_k con k en $\{1, 2, \dots, q\}$ son los parámetros del modelo.

Además el proceso $ARMA(p, q)$ puede ser expresado en términos del operador de rezago como a continuación se muestra

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\epsilon_t,$$

El proceso será causal e invertible si las raíces de los polinomios $\phi_p(B)$ y $\theta_q(B)$ son en módulo mayores a la unidad.

Una forma equivalente de expresar la estructura de un proceso $ARMA(p, q)$ es

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t.$$

Proposición 3.4.3.

Un proceso $ARMA(p, q)$ causal e invertible satisface las siguientes propiedades:

- I. $\gamma_X(0) = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$.
- II. $\gamma_X(k) = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k}$ para $k \geq 0$.
- III. $\rho_X(k) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$ para $k \geq 1$.

Demostración:

I. Por descomposición de Wold

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t,$$

expresado en términos del operador de rezago

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\epsilon_t,$$

considerando $\Psi(B) = (\theta(B))(\phi(B)^{-1})$ se tiene que

$$X_t = \Psi(B)\epsilon_t,$$

por lo tanto

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j},$$

con $\psi_0 = 1$ de donde $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j$ es una serie infinita. Por lo tanto la varianza de un $ARMA(p, q)$ tendrá la estructura de la varianza de un MA , es decir,

$$\sigma_X^2 = Var \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \right),$$

por lo que

$$\sigma_X^2 = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2,$$

con $\psi_0 = 1$.

Entonces

$$\gamma_X(0) = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2,$$

con $\psi_0 = 1$.

II. Sea

$$\begin{aligned} \gamma_X(k) &= \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) \\ &= \mathbb{E}(X_t, X_{t-k}) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j-k} \epsilon_{t-j-k} \right) \\ &= \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k}, \end{aligned}$$

con $k \geq 0$.

III. Por definición, para $k = 0$ se tiene $\rho_X(0) = 1$.

Sea $k \geq 1$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_X(k) &= \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} \\ &= \frac{\sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k}}{\sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}, \end{aligned}$$

■

Lo anterior, como lo expone Brockwell (2006), implica que tanto la función de autocorrelación de un $ARMA(p, q)$ será similar a la función de autocorrelación de un $AR(p)$ y que la funciones de autocorrelación parcial a la de un $MA(q)$. Esto convierte en una tarea muy complicada la identificación gráfica de los modelos ARMA. Por ello, existen otro tipo de criterios complementarios que son útiles al momento de seleccionar el tipo de modelo acorde al comportamiento de los datos de estudio, tales como son el AIC y BIC.

A modo de resumen se presenta el siguiente cuadro:

Modelo	Función de autocorrelación	Función de autocorrelación parcial
$AR(p)$	Los valores decrecen exponencialmente a cero	Corta a cero tras el rezago p
$MA(q)$	Corta a cero tras el rezago q	Los valores decrecen exponencialmente a cero
$ARMA(p, q)$	Los valores decrecen a cero	Los valores decrecen a cero

Cuadro 3.1: Descripción del comportamiento de las FAC y FACP de los modelos AR, MA y ARMA.

Es importante remarcar que lo que se busca al emplear modelos de series de tiempo es la parsimonia de los modelos, que como lo señalan McNeil, Frey Embrechts (2005), significa que tengan asociado un orden menor o bien que utilicen el menor número de rezagos necesarios para explicar la correlación de componentes del modelo, lo que va muy de la mano con la lógica matemática, pues pensar en procesos que requieran de grandes números de rezagos para explicar el comportamiento de una variable, induce pensar que seguramente el modelo implementado no es adecuado.

3.5. Modelos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicionada

Un supuesto común en la teoría clásica de series de tiempo es considerar el comportamiento de la varianza de los datos de forma homocedástica. Sin embargo, en el ámbito financiero la experiencia empírica ha demostrado que este supuesto comúnmente resulta inválido debido en gran parte a que el efecto de las volatilidades para distintos periodos de tiempo varía demasiado.

Es por ello que una manera alternativa de considerar la estimación de la varianza es a partir de supuestos de heterocedasticidad. Para el inversionista la volatilidad se traduce en riesgo y de ahí la gran importancia de encontrar modelos de estimación y proyección del mismo. Modelar el comportamiento estadístico para las volatilidades es el cometido de los Modelos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicionada (*ARCH*).

Fue entonces que Robert Engle (1982) dio a conocer una nueva clase de modelos ca-

paces de determinar un patrón de comportamiento de la volatilidad de los precios de los activos financieros a través del tiempo. Esta nueva generación de modelos fueron denominados *ARCH* (derivado del uso de las siglas en inglés de *Autorregresive Conditionally Heterocedastic Models*) que condujeron a Engle a ganar el premio nobel de economía en el año 2003. La clave de los modelos *ARCH* radica en tomar en cuenta la información pasada de las variables y su volatilidad observada como factores altamente explicativos de su comportamiento presente y de su valor futuro.

Aunque estos modelos fueron originalmente centrados a estudiar e interpretar datos macroeconómicos fue gracias a Bollerslev que en el año de 1986 y, aunado a la aparición de los modelos *GARCH* o modelos generalizados *ARCH*, que su aplicación en el mundo de las finanzas fue tomando fuerza hasta servir hoy en día como una herramienta bastante útil y eficiente para los analistas de riesgo. Desde entonces, se han desarrollado numerosas variantes de los modelos heterocedásticos tales como son los *PGARCH*, *APARCH*, *QS – ARCH*, *IGARCH*, *EGARCH* y los *TGARCH*, estos dos últimos siendo objeto de estudio en el presente trabajo.

Al igual que se hizo para los modelos ARMA, se mostrarán y analizarán las propiedades y características que satisfacen los procesos *ARCH*, *GARCH*, *EGARCH* y *TGARCH* para finalmente poder observar y comparar las ventajas y desventajas del supuesto de heterocedasticidad en series financieras sobre los modelos clásicos previamente expuestos.

3.5.1. Modelos *ARCH*(1)

Definición 3.5.1. (*Proceso autorregresivo heterocedástico condicionado de primer orden*)

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es un proceso autorregresivo heterocedástico condicionado de primer orden, denotado por *ARCH*(1) y centrado en ω_0 , si

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

y además

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2,$$

donde $\omega_0 > 0$ y $0 \leq \omega_1 < 1$ y además $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano, independiente de Y_{t-i} con $i \geq 1$ y por lo tanto de σ_{t-i} que corresponde a la volatilidad del modelo.

Por ende, es necesario probar que el modelo *ARCH* es un proceso estacionario, para

ello se debe mostrar que la media y varianza son constantes tiempo t y que la covarianza es la misma para dos variables distintas separadas por el mismo lapso de tiempo. En otras palabras

Proposición 3.5.1.

Un proceso $ARCH(1)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\mu_t = 0$.
- II. $\mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}) = 0$.
- III. $Var(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \omega_1)}$.
- IV. $Var(Y_t|F_{t-1}) = \sigma_t^2$.
- V. $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$.

Demostración:

I. Dado que

$$\mu_t = \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t) = \mathbb{E}(\sigma_t) \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0.$$

II. Sea F_{t-1} el conjunto de toda la información disponible a tiempo $t - 1$. La esperanza condicional está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}) &= \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t|F_{t-1}) \\ &= \sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t|F_{t-1}) \quad \text{por independencia} \\ &= 0. \end{aligned}$$

III. Partiendo de la definición de varianza, se tiene que

$$Var(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2) - \mathbb{E}(Y_t)^2,$$

es decir,

$$Var(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2),$$

es así que

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \mathbb{E}[(\sigma_t \epsilon_t)^2],$$

que equivale a

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2),$$

de donde sustituyendo y desarrollando términos se llega a que

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \omega_0 + \omega_1 \mathbb{E}(Y_{t-1}^2),$$

por supuesto de estacionariedad

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \omega_0 + \omega_1 \mathbb{E}(Y_t^2),$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \frac{\omega_0}{(1 - \omega_1)}.$$

Entonces

$$Var(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \omega_1)},$$

con $0 < \omega_1 < 1$.

Por lo que la varianza del modelo es constante.

IV. Partiendo de la definición de varianza condicionada

$$\begin{aligned} Var(Y_t|F_{t-1}) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}))^2|F_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}(Y_t^2|F_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2|F_{t-1}) \\ &= \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2|F_{t-1}) \\ &= \sigma_t^2, \end{aligned}$$

de donde se observa que efectivamente la varianza condicional del proceso $ARCH(1)$ no es constante en el tiempo y evolucionará según los valores previos que haya tomado la serie Y_{t-1}^2 .

V. Partiendo de la definición de covarianza

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \mathbb{E}[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-k} - \mu_{t-k})],$$

se llega a que

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \mathbb{E}(Y_t Y_{t-k}) - \mathbb{E}(Y_{t-k} \mu_t) - \mathbb{E}(Y_t \mu_{t-k}) + \mathbb{E}(\mu_{t-k} \mu_t),$$

teniendo que, por esperanza iterada

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t Y_{t-k}) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y_t Y_{t-k}|F_{t-1})] \\ &= \mathbb{E}[Y_{t-k} \mathbb{E}(Y_t|F_{t-1})] \\ &= \mathbb{E}[Y_{t-k} \cdot 0] \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = -\mathbb{E}(Y_{t-k})\mathbb{E}(\mu_t) - \mathbb{E}(Y_t)\mathbb{E}(\mu_{t-k}) + \mathbb{E}(\mu_{t-k})\mathbb{E}(\mu_t),$$

por lo que

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = 0.$$

Es así que se concluye que la serie $\{Y_t\}$ de la forma *ARCH* es un proceso estacionario. ■

Una de las ventajas de los modelos *ARCH* consiste en poder expresar el cuadrado de las observaciones de la forma de un *AR*. Es así que un *ARCH*(1) expresado como un *AR*(1) está dado por

$$Y_t^2 = \sigma_t^2 \epsilon_t^2,$$

y posteriormente

$$Y_t^2 - \sigma_t^2 \epsilon_t^2 = 0,$$

sumando σ_t^2 de ambos lados de la ecuación

$$Y_t^2 - \sigma_t^2 \epsilon_t^2 + \sigma_t^2 = \sigma_t^2,$$

que equivale a

$$Y_t^2 - (\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2) = \sigma_t^2,$$

por lo que

$$Y_t^2 - (\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2) = \omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2,$$

si se denomina a $\{Z_t\}$ como $Z_t = \sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$ entonces

$$Y_t^2 = \omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2 + Z_t,$$

bastaría mostrar que $\{Z_t\}$ es un ruido blanco. Es así que:

Proposición 3.5.2.

El proceso $\{Z_t\}$ asociado a Y_t^2 expresado de la forma

$$Z_t = \sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2,$$

es ruido blanco.

Demostración:

Para el caso de la media

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_t) &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2) - \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(\epsilon_t^2) - \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por otro lado, para el caso de la varianza, partiendo de su definición

$$\sigma_{Z_t} = \mathbb{E}(Z_t^2) - \mathbb{E}(Z_t)^2,$$

de donde

$$\sigma_{Z_t} = \mathbb{E}(Z_t^2),$$

por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_t^2) &= \mathbb{E}[(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2)^2] \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^4 \epsilon_t^4 - 2\sigma_t^4 \epsilon_t^2 + \sigma_t^4) \\ &= \mathbb{E}(Y_t^4 - 2\sigma_t^2 Y_t^2 + \sigma_t^4) \\ &= \mathbb{E}(Y_t^4) - 2\mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(Y_t^2) + \mathbb{E}(\sigma_t^4).\end{aligned}$$

Por lo tanto, es necesario mostrar que el cuarto momento de la variable Y_t es constante, es decir

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 \epsilon_t^4),$$

que equivale a probar

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \mathbb{E}[(\omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2)^2] \mathbb{E}(\epsilon_t^4).$$

Para obtener el valor del cuarto momento del ruido blanco se emplea la desigualdad de Jensen que indica lo siguiente:

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \mathbb{E}(\epsilon^4) \mathbb{E}(\sigma^4) \geq \mathbb{E}[(\epsilon^4)((\sigma_X^2)^2)],$$

dividiendo la desigualdad entre el término $\mathbb{E}(Y_t^2)^2$ se obtiene por definición la curtosis de la variable,

$$\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{\mathbb{E}(\sigma_X^2)^2} \geq \frac{\mathbb{E}[(\epsilon^4)((\sigma_X^2)^2)]}{\mathbb{E}(\sigma_X^2)^2},$$

es decir, la curtosis cumple con la siguiente condición:

$$\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{\mathbb{E}(\sigma_X^2)^2} \geq \mathbb{E}(\epsilon^4),$$

entonces, suponiendo que $\mathbb{E}(\epsilon^4) = 3$, regresando a la fórmula de $\mathbb{E}(Y_t^4)$

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4)\mathbb{E}(\epsilon_t^4),$$

de donde

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = 3\mathbb{E}[(\omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2)^2],$$

llegando a que

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \frac{3\omega_0^2}{(1 - 3\omega_1^2)} + \frac{6\omega_0^2\omega_1}{(1 - \omega_1)(1 - 3\omega_1^2)},$$

entonces,

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \frac{3\omega_0^2 + 3\omega_0^2\omega_1}{(1 - \omega_1)(1 - 3\omega_1^2)},$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \frac{3\omega_0^2(1 + \omega_1)}{(1 - \omega_1)(1 - 3\omega_1^2)}.$$

Regresando a la expresión de $\mathbb{E}(Z_t^2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t^2) &= \mathbb{E}(\sigma_t^4\epsilon_t^4 - 2\sigma_t^4\epsilon_t^2 + \sigma_t^4) \\ &= (\mathbb{E}(\epsilon_t^4) - 2\mathbb{E}(\epsilon_t^2) + 1)\mathbb{E}(\sigma_t^4) \\ &= (3 - 2 + 1)\mathbb{E}(\sigma_t^4) \\ &= (2)\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{3} \\ &= (2)\frac{3\omega_0^2(1 + \omega_1)}{3(1 - \omega_1)(1 - 3\omega_1^2)} \\ &= \frac{2\omega_0^2(1 + \omega_1)}{(1 - \omega_1)(1 - 3\omega_1^2)}, \end{aligned}$$

de cuyo resultado se obtiene una constante.

Finalmente es necesario validar que la covarianza de $\{Z_t\}$ es constante. Para ello se parte de la definición de covarianza

$$\begin{aligned} Cov(Z_t) &= \mathbb{E}[(Z_t - \mu_t)(Z_s - \mu_s)] \\ &= \mathbb{E}[Z_t Z_s] \\ &= \mathbb{E}(Z_t)\mathbb{E}(Z_s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto el proceso $\{Z_t\}$ es ruido blanco. ■

De esta forma resulta práctico trabajar con modelos *ARCH* expresados en términos de procesos *AR* ya que, como lo demostró Taylor (1986), la función de autocorrelación así como de autocorrelación parcial del cuadrado de un proceso ARCH poseen el mismo comportamiento que las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de un *AR*.

Por último la curtosis de la serie $\{Y_t\}$ está dada por:

$$\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{\mathbb{E}(\sigma^4)} = \frac{3\omega_0^2(1 + \omega_1)}{(1 - \omega_1)(1 - 3\omega_1^2)} = \frac{\omega_0}{(1 - \omega_1)^2},$$

de donde, desarrollando y agrupando factores comunes

$$\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{\mathbb{E}(\sigma^4)} = \frac{3(1 - \omega_1 + \omega_1 - \omega_1^2)}{(1 - 3\omega_1^2)},$$

por lo tanto

$$\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{\mathbb{E}(\sigma^4)} = \frac{3(1 - \omega_1^2)}{(1 - 3\omega_1^2)} > 3,$$

con $\omega_1 > 0$.

Dado que la curtosis es mayor que 3, es posible asegurar que las colas serán más pesadas que las de una distribución normal, en específico de una $N(0, 1)$, mostrando un acoplamiento al comportamiento leptocúrtico de una serie financiera.

Como se puede observar, los modelos *ARCH* ofrecen ventajas que se carecían al hacer uso de modelos basado en supuestos homocedásticos, sin embargo, como es de esperarse, también poseen desventajas que se detallan más adelante.

3.5.2. Modelos *ARCH*(q)

Los modelos *ARCH* de orden q pueden ser definidos de la siguiente manera:

Definición 3.5.2. (*Proceso autorregresivo heterocedástico condicionado de orden q*)

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es un proceso autorregresivo heterocedástico condicionado de orden q , denotado por $ARCH(q)$ y centrado en ω_0 si,

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

y además

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \omega_i Y_{t-i}^2,$$

donde ω_0, ω_i con i en $\{1, 2, \dots, q\}$ son los parámetros del modelo, $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano, independiente de Y_{t-i} con $i \geq 1$ y por lo tanto de σ_{t-i} que corresponde a la volatilidad del modelo.

Es decir, los valores de las volatilidades dependerán de las última q -ésimas observaciones.

Por otro lado, se puede considerar la siguiente proposición:

Proposición 3.5.3.

Un proceso $ARCH(q)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\mu_t = 0$.
- II. $\mathbb{E}(Y_t | F_{t-1}) = 0$.
- III. $Var(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \sum_{i=1}^q \omega_i)}$.
- IV. $Var(Y_t | F_{t-1}) = \sigma_t$.
- V. $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$.

Demostración:

I. Partiendo de la definición de media se tiene que

$$\mu_t = \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t) = \mathbb{E}(\sigma_t) \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0.$$

II. Sea F_{t-1} el conjunto de toda la información disponible a tiempo $t - 1$. La esperanza condicional está dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}) &= \mathbb{E}(\sigma_t\epsilon_t|F_{t-1}) \\ &= \sigma_t\mathbb{E}(\epsilon_t|F_{t-1}) \quad \text{por independencia} \\ &= 0.\end{aligned}$$

III. Partiendo de la definición de varianza, se tiene que

$$\text{Var}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2) - \mathbb{E}(Y_t)^2,$$

es decir,

$$\text{Var}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2),$$

de donde

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \mathbb{E}[(\sigma_t\epsilon_t)^2] = \mathbb{E}(\sigma_t^2)\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \mathbb{E}\left(\omega_0 + \sum_{i=1}^q \omega_i Y_{t-i}^2\right),$$

entonces, por supuesto de estacionariedad

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \omega_i \mathbb{E}(Y_{t-i}^2)$$

por lo tanto

$$\text{Var}(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \sum_{i=1}^q \omega_i)},$$

con $0 < \sum_{i=1}^q \omega_i < 1$.

De lo anterior se obtiene que la varianza del modelo $ARCH(q)$ es constante.

IV. Partiendo de la definición de varianza condicionada, realizando un desarrollo similar al caso del $ARCH(1)$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y_t|F_{t-1}) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}))^2|F_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}(Y_t^2|F_{t-1}) = \sigma_t^2\mathbb{E}(\epsilon_t^2|F_{t-1}) = \sigma_t^2.\end{aligned}$$

Es decir, la varianza condicional del modelo $ARCH(q)$ no es constante en el tiempo, ya que evolucionará según los valores previos que haya tomado la serie Y_{t-i} .

V. De la definición de covarianza se tiene que

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-k}) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-k} - \mu_{t-k})] \\ &= \mathbb{E}[(Y_t Y_{t-k} - Y_{t-k} \mu_t - Y_t \mu_{t-k} + \mu_{t-k} \mu_t)] \\ &= -Y_{t-k} \mu_t - Y_t \mu_{t-k} + \mu_{t-k} \mu_t. \end{aligned}$$

dado que

$$\mathbb{E}(Y_t Y_{t-k}) = 0,$$

por lo tanto

$$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0.$$

Puesto que $\mathbb{E}(Y_t) = 0$ para toda t en $\{1, 2, 3, \dots, q\}$, se concluye que la serie $\{Y_t\}$ de la forma $ARCH(q)$ es un proceso estacionario. ■

Como se mostró para el caso de primer orden y siguiendo el mismo procedimiento, el modelo $ARCH(q)$ en su forma cuadrática estará expresado en términos de $AR(q)$ como

$$Y_t^2 - (\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2) = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \omega_i Y_{t-i}^2,$$

si se nombra a $\{Z_t\}$ como $Z_t = \sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$ entonces

$$Y_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \omega_i Y_{t-i}^2 + Z_t,$$

donde $\{Z_t\}$ es ruido blanco.

De esta manera es posible obtener las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial para llevar a cabo análisis más detallado de la información y utilizarlas como herramienta de identificación del orden de esta clase de modelos. Cabe señalar que dichas funciones seguirán el mismo comportamiento que las correspondientes a los $AR(q)$ previamente mostradas.

No obstante la familia $ARCH(q)$, como lo menciona Tsay (2005), presentan diversas desventajas entre las que destacan:

- Al considerar el cuadrado de las observaciones pasadas el modelo asume que los valores positivos y negativos tienen los mismos efectos sobre la volatilidad lo que contradice el comportamiento real de los instrumentos financieros donde efectos negativos generalmente implica la obtención de altas volatilidades.

- Es común que los modelos *ARCH* requieran de un número elevado de rezagos para describir el proceso que sigue la volatilidad.
- Se vuelve un modelo más restrictivo debido a que se debe de cumplir los criterios de existencia del cuarto momento de la variable. Entre mayor sea el orden del *ARCH* más complicadas la estimación de sus restricciones.

Es por ello pocos años después surgirían una nueva clase de modelos, mismos que buscarían subsanar dichas deficiencias observadas en los *ARCH* y que a continuación son estudiados. Se tratan de los Modelos Generalizados Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicionada o *GARCH*.

3.6. Modelos Generalizados Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicionada

Bajo la propuesta de Bollersév (1986), los modelos generalizados no solo involucrarán la consideración de las observaciones pasadas, sino que se incorpora el estudio de las varianzas condicionales rezagadas de la serie. Estos modelos describen el efecto de agrupamiento de volatilidad (acumulación de altas/bajas volatilidades por periodos de tiempo seguidas de periodos contrastantes de volatilidad). De primera instancia los *GARCH* parecieran ser modelos más robustos y suficientes que los *ARCH*.

3.6.1. Modelos *GARCH*(1, 1)

Para el caso de los modelos generalizados autorregresivos de orden (1, 1) se tiene la siguiente definición:

Definición 3.6.1. (*Proceso generalizado autorregresivo heterocedástico condicionado de orden (1, 1)*)

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es un proceso generalizado autorregresivo heterocedástico condicionado de orden (1, 1), denotado por *GARCH*(1, 1) y centrado en ω_0 , si

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

y además

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2 + v_1 \sigma_{t-1}^2,$$

donde ω_0 , ω_1 y v_1 son los parámetros del modelo. Además $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano, independiente de Y_{t-i} con $i \geq 1$ y por lo tanto de σ_{t-i} que corresponde a la volatilidad del modelo.

La diferencia sustancial con relación a los *ARCH* radica que esta nueva clase de familia incorpora la consideración de las varianzas condicionales pasadas dentro de la estimación de la varianza presente.

Por lo anterior, un proceso *GARCH*(1, 1) cumple con lo siguiente:

Proposición 3.6.1.

Un proceso *GARCH*(1, 1) satisface las siguientes propiedades:

- I. $\mu_t = 0$.
- II. $\mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}) = 0$.
- III. $Var(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \omega_1 - v_1)}$.
- IV. $Var(Y_t|F_{t-1}) = \sigma_t^2$.
- V. $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$.

Demostración:

I. Partiendo de la definición de media se tiene que

$$\mu_t = \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t) = \mathbb{E}(\sigma_t) \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0.$$

II. Sea F_{t-1} el conjunto de toda la información disponible a tiempo $t - 1$. La esperanza condicional está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}) &= \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t|F_{t-1}) \\ &= \sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t|F_{t-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

III. Partiendo de la definición de varianza, se tiene que

$$Var(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2) - \mathbb{E}(Y_t)^2$$

es decir

$$Var(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_t^2) &= \mathbb{E}[(\sigma_t \epsilon_t)^2] \\
&= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2) \\
&= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(\epsilon_t^2) \\
&= \mathbb{E}(\omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2 + v_1 \sigma_{t-1}^2) \\
&= \omega_0 + \omega_1 \mathbb{E}(Y_t^2) + v_1 \mathbb{E}(Y_t^2) \quad \text{por supuesto de estacionariedad} \\
&= \frac{\omega_0}{(1 - \omega_1 - v_1)}.
\end{aligned}$$

llegando a

$$Var(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \omega_1 - v_1)},$$

con $0 < \omega_1 < 1$ y $0 < v_1 < 1$. De donde se tiene que la varianza del modelo es constante.

IV. De la definición de varianza condicionada se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Var(Y_t | F_{t-1}) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}(Y_t | F_{t-1}))^2 | F_{t-1}] \\
&= \mathbb{E}(Y_t^2 | F_{t-1}) \\
&= \sigma_t^2.
\end{aligned}$$

V. De la definición de covarianza se tiene que

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t-k}) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-k} - \mu_{t-k})] \\
&= \mathbb{E}[(Y_t Y_{t-k} - Y_{t-k} \mu_t - Y_t \mu_{t-k} + \mu_{t-k} \mu_t)] \\
&= -\mathbb{E}(Y_{t-k}) \mathbb{E}(\mu_t) - \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(\mu_{t-k}) + \mathbb{E}(\mu_{t-k}) \mathbb{E}(\mu_t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces los modelos $GARCH(1, 1)$ son estacionarios. ■

De la misma manera que en el caso de los $ARCH$, es posible escribir los elementos del cuadrado de las series $GARCH(1, 1)$ ahora en términos de un proceso $ARMA(1, 1)$ de tal forma que, haciendo $\sigma_t^2 = Y_t^2 - Z_t$, entonces

$$Y_t^2 - Z_t = \omega_0 + \omega_1 Y_{t-1}^2 + v_1 (Y_{t-1}^2 - Z_{t-1}),$$

es así que el proceso $GARCH(1, 1)$ queda descrito en términos de un $ARMA(1, 1)$ como

$$Y_t^2 = \omega_0 + (\omega_1 + v_1) Y_{t-1}^2 + Z_t - v_1 Z_{t-1},$$

donde $\{Z_t\}$ debe satisfacer las propiedades de ruido blanco, es decir,

Proposición 3.6.2.

El proceso $\{Z_t\}$ asociado a Y_t^2 expresado de la forma

$$Z_t = \sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2,$$

es ruido blanco.

Demostración:

Para el caso de la media, partiendo de la aplicar la definición

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t) &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(\epsilon_t^2) - \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, para el caso de la varianza

$$\mathbb{E}(Z_t^2) = \mathbb{E}[(\sigma_t^2 \epsilon_t^2 - \sigma_t^2)^2],$$

es decir,

$$\mathbb{E}(Z_t^2) = \mathbb{E}(Y_t^4) - 2\mathbb{E}(\sigma_t^2)\mathbb{E}(Y_t^2) + \mathbb{E}(\sigma_t^4).$$

Lo que se reduce a validar que la curtosis de los datos es finita. Para ello

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 \epsilon_t^4),$$

suponiendo que $\mathbb{E}(\epsilon^4) = 3$ se llega a que

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = 3\mathbb{E}[(\sigma_t^2)^2],$$

obteniendo que

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = 3\mathbb{E}(\omega_0^2 + 2\omega_0\omega_1 Y_{t-1}^2 + 2\omega_0 v_1 \sigma_{t-1}^2 + \omega_1^2 Y_{t-1}^4 + 2\omega_1 Y_{t-1}^2 v_1 \sigma_{t-1}^2 + v_1^2 \sigma_{t-1}^4),$$

haciendo uso de supuestos de estacionariedad, la expresión se reduce a

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = 3\omega_0^2 + 6\omega_0\omega_1 \mathbb{E}(Y_t^2) + 6\omega_0 v_1 \mathbb{E}(Y_t^2) + 3\omega_1^2 \mathbb{E}(Y_t^4) + 6\omega_1 v_1 \mathbb{E}(Y_t^4) + 3v_1^2 \mathbb{E}(Y_t^4),$$

por lo que

$$\mathbb{E}(Y_t^4) = \frac{3\omega_0^2(1 + \omega_1 + v_1)}{(1 - \omega_1 - v_1)(1 - 3\omega_1^2 - 2\omega_1 v_1 - v_1^2)},$$

de donde la varianza esta dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Z_t^2) &= \mathbb{E}(Y_t^4) - 2\mathbb{E}(\sigma_t^2)\mathbb{E}(Y_t^2) + \mathbb{E}(\sigma_t^4) \\
 &= \mathbb{E}(Y_t^4) - \mathbb{E}(\sigma_t^4) \\
 &= \mathbb{E}(Y_t^4) - \frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{3} \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)\mathbb{E}(Y_t^4) \\
 &= \frac{2\omega_0^2(1 + \omega_1 + v_1)}{(1 - \omega_1 - v_1)(1 - 3\omega_1^2 - 2\omega_1v_1 - v_1^2)}.
 \end{aligned}$$

Cuya fórmula involucra solo constantes y que conducen a la obtención de una constante.

Por último, hace falta validar que la covarianza del proceso $\{Z_t\}$ es constante. Para ello, se tiene que, de la definición de covarianza

$$\begin{aligned}
 Cov(Z_t) &= \mathbb{E}[(Z_t - \mu_t)(Z_s - \epsilon_s)] \\
 &= \mathbb{E}[Z_t Z_s] \\
 &= \mathbb{E}(Z_t)\mathbb{E}(Z_s) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por lo anterior, $\{Z_t\}$ es ruido blanco. ■

Es debido señalar que Bollerssev (1986) probó que si la condición $(v_1 + \omega_1)^2 + 2\omega_1^2 < 1$ se cumple, el momento de orden 4 será finito.

Prosiguiendo con el análisis, es posible obtener la curtosis de la serie con lo que se tendría una gran noción del comportamiento de las colas bajo estos modelos. Es así que la curtosis esta dada por

$$\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{\mathbb{E}(\sigma_t^4)} = \frac{\frac{3\omega_0^2(1 + \omega_1 + v_1)}{(1 - \omega_1 - v_1)(1 - 3\omega_1^2 - 2\omega_1v_1 - v_1^2)}}{\frac{\omega_0^2}{(1 - \omega_1 - v_1)^2}},$$

obteniendo que

$$\frac{\mathbb{E}(Y_t^4)}{\mathbb{E}(\sigma_t^4)} = \frac{3(1 - (\omega_1 + v_1)^2)}{(1 - (\omega_1 + v_1)^2 - 2\omega_1^2)} > 3.$$

Esto significa que, al igual que los *ARCH*, en esta clase de modelos seguirá siendo más probable que los valores de las colas sean más grandes respecto a los de una distribución normal.

3.6.2. Modelos $GARCH(p, q)$

Generalizando la definición de los $GARCH$ para órdenes de p y q se tiene la siguiente definición:

Definición 3.6.2. (*Proceso generalizado autorregresivo heterocedástico condicionado de orden (p, q)*)

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es un proceso generalizado autorregresivo heterocedástico condicionado de orden (p, q) , denotado por $GARCH(p, q)$ y centrado en ω_0 , si

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

y además

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q v_j \sigma_{t-j}^2,$$

donde ω_0 , ω_i con j en $\{1, 2, \dots, q\}$ y v_j con j en $\{1, 2, \dots, q\}$ son los parámetros de los modelos. Además $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano, independiente de Y_{t-i} con $i \geq 1$ y por lo tanto de σ_{t-i} que corresponde a la volatilidad del modelo.

Se pueden establecer las siguientes propiedades:

Proposición 3.6.3.

Un proceso $GARCH(p, q)$ satisface las siguientes propiedades:

- I. $\mu_t = 0$.
- II. $\mathbb{E}(Y_t | F_{t-1}) = 0$.
- III. $Var(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \sum_{i=1}^p \omega_i - \sum_{j=1}^q v_j)}$.
- IV. $Var(Y_t | F_{t-1}) = \sigma_t^2$.
- V. $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$.

Demostración:

I. Partiendo de la definición de media se tiene que

$$\mu_t = \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t) = \mathbb{E}(\sigma_t) \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0.$$

II. Sea F_{t-1} el conjunto de toda la información disponible a tiempo $t - 1$. La esperanza condicional está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t | F_{t-1}) &= \mathbb{E}(\sigma_t \epsilon_t | F_{t-1}) \\ &= \sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t | F_{t-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

III. Partiendo de la definición de varianza, se tiene que

$$\text{Var}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2) - \mathbb{E}(Y_t)^2,$$

es decir,

$$\text{Var}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_t^2),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t^2) &= \mathbb{E}[(\sigma_t \epsilon_t)^2] \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2) \\ &= \mathbb{E}\left(\omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q v_j \sigma_{t-j}^2\right) \\ &= \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i \mathbb{E}(Y_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q v_j \mathbb{E}(Y_{t-j}^2) \quad \text{por supuesto de estacionariedad} \\ &= \frac{\omega_0}{(1 - \sum_{i=1}^p \omega_i - \sum_{j=1}^q v_j)}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\text{Var}(Y_t) = \frac{\omega_0}{(1 - \sum_{i=1}^p \omega_i - \sum_{j=1}^q v_j)},$$

con $0 < \sum_{i=1}^p \omega_i < 1$ y $0 < \sum_{j=1}^q v_j < 1$.

Se concluye que la varianza del modelo es constante.

IV. La varianza condicional está dada por

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_t|F_{t-1}) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}))^2|F_{t-1}] \\
 &= \mathbb{E}(Y_t^2|F_{t-1}) \\
 &= \mathbb{E}(\sigma_t^2 \epsilon_t^2|F_{t-1}) \\
 &= \sigma_t^2 \mathbb{E}(\epsilon_t^2|F_{t-1}) \\
 &= \sigma_t^2,
 \end{aligned}$$

V. De la definición de covarianza se observa lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-k} - \mu_{t-k})] \\
 &= \mathbb{E}[(Y_t Y_{t-k} - Y_{t-k} \mu_t - Y_t \mu_{t-k} + \mu_{t-k} \mu_t)] \\
 &= \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_{t-k}) - \mathbb{E}(Y_{t-k}) 0 - \mathbb{E}(Y_t) 0 \\
 &= \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_{t-k}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Es decir, todo proceso $GARCH(p, q)$ es un proceso estacionario. ■

En este caso para denotar el modelo $GARCH(p, q)$ ahora en términos de un proceso $ARMA(p, q)$ se tiene que, haciendo

$$\sigma_t^2 = Y_t^2 - Z_t,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 Y_t^2 - Z_t &= \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q v_j (Y_{t-j}^2 - Z_{t-j}) \\
 &= \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q v_j Y_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^q v_j Z_{t-j},
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 Y_t^2 - \sum_{j=1}^q v_j Y_{t-j}^2 - \sum_{i=1}^p \omega_i Y_{t-i}^2 &= \omega_0 + Z_t - \sum_{j=1}^q v_j Z_{t-j} \\
 Y_t^2 - \sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\omega_j + v_j) Y_{t-j}^2 &= \omega_0 + Z_t - \sum_{j=1}^q v_j Z_{t-j},
 \end{aligned}$$

por lo que

$$Y_t^2 = \omega_0 + \sum_{j=1}^{\max(p,q)} (\omega_k + v_j) Y_{t-j}^2 + Z_t - \sum_{j=1}^q v_j Z_{t-j},$$

con Z_{t-j} ruido blanco para $j \geq 1$, por lo que el proceso $GARCH(p, q)$ queda expresado en términos de un $ARMA(\text{máx}(p, q), q)$.

Habiendo obtenido la forma para expresar el cuadrado de la serie de rendimientos a partir de modelos $GARCH(p, q)$ como un $ARMA(\text{máx}(p, q), q)$ se pueden obtener tanto las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial, mismas que presentaran un comportamiento similar al de los modelos $ARMA(p, q)$, que además servirán para identificar y dar una primera noción del orden de los parámetros del modelo a emplear. Sin embargo, otro camino para poder identificar dichos órdenes consiste en la obtención de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial del cuadrado de los residuales que resultan del ajuste de modelos $ARMA$ a la serie de observaciones. Dependerá de cada aplicador la elección de cualquiera de estos dos procedimientos para identificar los órdenes del modelo.

Un aspecto muy importante que señalar es el hecho de que las desventajas inherentes a los modelos $ARCH$ son heredadas en los $GARCH$ (salvo la descripción del comportamiento de las varianzas en el presente en función de los valores de la serie y las varianzas observadas) por lo que se puede concluir que el uso de la familia heterocedástica condicionada generalizada subsana en menor medida las deficiencias de los $ARCH$ y por lo tanto requerirá de ajustes para poder ser catalogada un proceso recomendado para la estimación y análisis del riesgo del portafolio. Esta clase de ajustes son exhibidos bajo el uso de los modelos $EGARCH$ y $TGARCH$ que a continuación se presentan.

3.7. Modelos Autorregresivos Generalizados con Heterocedasticidad Condicionada Exponencial $EGARCH(p, q)$

A partir del desarrollo y estudio de los modelos $GARCH$ comenzaron a surgir variantes que diferían de la forma de poder estimar la volatilidad de los datos. Una de las versiones que sobresalen de este nuevo conjunto de familias recae en los $EGARCH$ o Modelos Autorregresivos Generalizados con Heterocedasticidad Condicionada Exponencial.

Fue Daniel Nielson, a principio de la década de los noventa, el responsable de exhibir la manera en que los modelos $EGARCH$ poseen la particularidad de estimar la varianza condicional de los datos de forma asimétrica, es decir, capturando la esencia del comportamiento de la volatilidad ante movimientos de mercado.

Esta gran diferencia, en comparación con los $GARCH$ y como lo menciona el propio Nielson (1991), radica en considerar los efectos de los movimientos positivos y negativos de las volatilidades observadas, aspecto que en los modelos $ARCH - GARCH$ al ser evaluadas a través del cuadrado de sus valores, podrían estar subestimadas.

Es así que ahora rendimientos negativos (malas noticias) impactan de forma negativa en la estimación de la volatilidad y rendimientos positivos (buenas noticias) lo hacen de forma positiva.

Para ello se incorpora al modelo una función de innovaciones o errores $g(\epsilon_t)$. Esta nueva función dependerá directamente del signo y magnitud de los valores de $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ y se encuentra definida de la siguiente manera:

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} \lambda_1 \epsilon_t + \lambda_2 \epsilon_t - \lambda_2 \mathbb{E}(|\epsilon_t|) & \text{si } \epsilon_t \geq 0. \\ \lambda_2 \epsilon_t - \lambda_1 \epsilon_t - \lambda_2 \mathbb{E}(|\epsilon_t|) & \text{si } \epsilon_t < 0. \end{cases}$$

y λ_1, λ_2 son números reales.

Entonces, la definición para los procesos *EGARCH* es:

Definición 3.7.1. (*Proceso generalizado con heterocedasticidad condicionada exponencial de orden (p, q)*)

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es un proceso generalizado con heterocedasticidad condicionada exponencial de orden (p, q) , denotado por *EGARCH* (p, q) y centrado en ω_0 , si

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

y además

$$\log(\sigma_t^2) = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i \log(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q v_j g(\epsilon_{t-j}),$$

donde ω_i con i en $\{1, 2, \dots, p\}$ y $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano independiente de Y_{t-i} con $i \geq 1$ y por lo tanto de σ_{t-i} que corresponde a la volatilidad del modelo.

De lo anterior se deriva la expresión

$$\sigma_t^2 = e^{\omega_0} \prod_{i=1}^p (\sigma_{t-i}^2)^{\omega_i} \prod_{j=1}^q e^{v_j g(\epsilon_{t-j})},$$

en donde se observa la principal diferencia de los EGARCH respecto de los modelos GARCH, ya que esta vez la volatilidad evolucionará de forma multiplicativa.

Cabe señalar que la propiedad de asimetría es considerada a través del coeficiente de λ_1 . Para ilustrar esto, si se considera $\lambda_1 < 0$ y $\log(\sigma_t^2) = \omega_0 + \lambda_1 \epsilon_{t-1}$, en el caso de que $\epsilon_{t-1} < 0$ (que implica que $Y_{t-1} < 0$), la variable $\log(\sigma_t^2)$ será mayor que su media ω_0 , y en cambio, será menor cuando $Y_{t-1} > 0$.

Por otro lado, a través de $\log(\sigma_t^2)$ es posible llegar a expresar a la serie de la forma de un proceso *ARMA*(p, q). Es por eso que, al igual que se hizo para los *GARCH*, los procesos *EGARCH* son reescritos en términos de los procesos *ARMA* partiendo de reemplazar los términos

$$\log(\sigma_{t-j}^2) = \log(Y_{t-j}^2) - \log(\epsilon_{t-j}^2),$$

se llega a que

$$\log(Y_t^2) = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \omega_i \log(Y_{t-i}^2) - \sum_{i=1}^p \omega_i \log(\epsilon_{t-i}^2) + \log(\epsilon_t^2) + \sum_{j=1}^q v_j g(\epsilon_{t-j}),$$

teniendo

$$v_t = \log(Y_t^2) - \sum_{i=1}^p \omega_i \log(Y_{t-i}^2) = \omega_0 + \log(\epsilon_t^2) + \sum_{j=1}^q v_j g(\epsilon_{t-j}) - \sum_{i=1}^p \omega_i \log(\epsilon_{t-i}^2),$$

llegando a que el proceso v_t sigue un modelo *MA*($\max(p, q)$) y por lo tanto el proceso $\log(Y_t^2)$ seguirá un *ARMA*($p, \max(p, q)$).

Es así que resultará útil el poder identificar el orden de estos modelos por medio del comportamiento de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial del logaritmo del cuadrado de las observaciones. No obstante, su identificación, como en el caso de los *GARCH*, también puede darse a partir del estudio de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial del cuadrado de los residuales obtenidos mediante el ajuste de modelos *ARMA* a la serie de observaciones. La elección del camino que mejor le convenga dependerá de la experiencia y objetivos de estudio de cada aplicador.

Una de las grandes ventajas que ofrecen los *EGARCH* a través del uso de logaritmos es la no restricción del signo de los posibles valores de los parámetros, obteniendo una adaptación de las estimaciones de las volatilidades de las series financieras respecto a su comportamiento real observado en los mercados.

Dentro de las desventajas de emplear estos modelos se encuentran que las estimaciones de los parámetros pueden resultar no tan simples como las empleadas en otros métodos. De la misma manera entre mayor sea el periodo de tiempo de estudio, mayores serán los recursos empleados para estimar los parámetros. Finalmente su no linealidad los convierte

en modelos más complejos de utilizar.

Por ende, sería lógico pensar que estos modelos de estimación del riesgo del portafolio tienen amplias posibilidades de ser considerados preferibles respecto del análisis y cómputo del VaR y CVaR dada las condiciones de los activos y propiedades mostradas.

3.8. Modelos Autorregresivos Generalizados con Heterocedasticidad Condicionada de la forma t de Student asimétrica $TGARCH(p, q)$

También conocidos como modelos $GARCH$ por umbrales, los $TGARCH$, llamados así por las siglas del inglés *Threshold GARCH* fueron propuestos por Zakoian (1994) con el fin de describir series de rendimientos bursátiles en Latinoamérica bajo el supuesto de estimar las perturbaciones usando la distribución t de Student asimétrica. Esto implica definir como prioridad la consideración de la magnitud de las áreas de las colas de las volatilidades, área que para efectos de la estimación de las medidas de riesgo resulta fundamental analizar.

Cabe señalar que así como los $EGARCH$, el supuesto de asimetría bajo esta nueva familia de modelos se encuentra presente ya que asigna mayores varianzas condicionales a rentabilidades negativas

Es así que la definición de los $TGARCH$ es la siguiente:

Definición 3.8.1. (*Proceso autorregresivo generalizado con heterocedasticidad condicionada de la forma t de Student de orden (p, q)*)

Se dice que una serie de tiempo $\{Y_t\}$ es un proceso autorregresivo generalizado con heterocedasticidad condicionada de la forma t de Student de orden (p, q) , denotado por $TGARCH(p, q)$ y centrado en ω_0 , si

$$Y_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

y además

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p (\omega_i + \gamma_i I_{t-i}) \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q v_j \sigma_{t-j}^2,$$

donde $\sum_{i=0}^p \omega_i < 1$ y a su vez γ_i (el coeficiente de apalancamiento) y v_j son números reales no negativos, $\{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano independiente de Y_{t-i} con $i \geq 1$ y por lo tanto de σ_{t-i} que corresponde a la volatilidad del modelo.

Por otro lado la variable I_{t-i} es una indicadora que funciona de la siguiente manera:

$$I_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_{t-i} < 0 \text{ (malas noticias).} \\ 0 & \text{si } \epsilon_{t-i} \geq 0 \text{ (buenas noticias).} \end{cases}$$

Es decir, la variable I_{t-i} usa un umbral igual a cero para considerar los impactos pasados. Cabe señalar que en caso de existir asimetría se esperará que el coeficiente γ sea positivo.

Es importante destacar que si el coeficiente de apalancamiento corresponde al valor de cero, se obtiene un modelo $GARCH(p, q)$. En síntesis, esta clase de modelos captura la presencia de la asimetría en la varianza de los datos, lo que puede referirse al hecho de que rentabilidades negativas llevan asignados valores de varianzas mayores respecto a las rentabilidades positivas, que en el medio se conocen como efectos de apalancamiento.

Si se nombra a $\omega_i + \gamma_i I_{t-i}$ como una variable ρ_i , es posible aplicar la misma conversión a un proceso $ARMA(p, q)$ que en los modelos $GARCH$ se llevo a cabo. Entonces podrán ser estimadas las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los datos y por ende se poseerá una herramienta de identificación de esta clase de procesos. Sin embargo, este camino, a diferencia de los $GARCH$ y $EGARCH$ puede llegar a ser bastante complicado en cuestión de obtención de los parámetros por lo que comúnmente se recurre a optar por tomar como referencia el comportamiento de las funciones de autocorrelación del cuadrado de los residuales obtenidos del ajuste del modelo $ARMA$ respecto a la serie de rendimientos logarítmicos de los precios.

Como es de esperarse, los $TGARCH$ son procesos estacionarios, lo cual puede comprobarse aplicando el mismo análisis que se llevó a cabo para los modelos $ARCH$ y $GARCH$. Estos modelos ofrecen las siguientes ventajas:

- Heredan las fortalezas de los modelos $EGARCH$, considerando la asimetría de las volatilidades.
- Incorporan la estimación de la magnitud de las colas, lo que se traduce en un modelo más refinado respecto a la similitud del comportamiento de las series financieras en la vida real.
- Recuperan la linealidad de los parámetros, lo que ayuda en la interpretación del modelo y en la sencilla estimación de los coeficientes.

Es decir, la teoría parece indicar que esta familia estadística es la más indicada para el análisis de los rendimientos del portafolio de estudio, dada su construcción, propiedades y supuestos asociados.

Una vez identificados los términos que forman parte de los modelos, se procede a estimar los parámetros que los constituyen. Para ello se hará uso del método de Método de máxima cuasi-verosimilitud (QMLE).

Entonces, para cada modelo de interés obtenido, la función QMLE y los coeficientes serán estimados mediante el lenguaje de programación *R*, en específico haciendo uso de las librerías “fgarch”¹ y “rugarch”² cuyas descripciones pueden ser consultadas en el sitio oficial del *The Comprehensive R Archive Network*. Resumiendo, los podrecimientos de identificación de los posibles órdenes de cada uno de los modelos heterocedásticos *GARCH*, *EGARCH* y *TGARCH* son los siguientes:

Modelo	FAC y FACP mediante transformación de la serie	FAC y FACP mediante ajuste de ARMA a la serie original
$GARCH(p, q)$	Se considera la serie de la forma $\{Y_t^2\}$. Las FAC y FACP muestran un comportamiento del tipo $ARMA(\max(p, q), q)$, es decir, los valores decrecen a cero	Es considerada la serie del cuadrado de los residuales. El ejercicio se reduce a identificar los rezagos significativos de los gráficos.
$EGARCH(p, q)$	Se considera la serie de la forma $\{\log(Y_t^2)\}$. Las FAC y FACP muestran un comportamiento del tipo $ARMA(p, \max(p, q))$ los valores decrecen a cero.	Es considerada la serie del cuadrado de los residuales. El ejercicio se reduce a identificar los rezagos significativos de los gráficos.
$TGARCH(p, q)$	Es difícil su obtención dado que los modelos poseen una función implícita de los términos aleatorios.	Es considerada la serie del cuadrado de los residuales. El ejercicio se reduce a identificar los rezagos significativos de los gráficos.

Cuadro 3.2: Descripción del comportamiento de las FAC y FACP de los modelos *GARCH*, *EGARCH* y *TGARCH*.

Sin embargo, con la finalidad de identificar y explicar la estructura de modelos del tipo *GARCH* y sus variantes, en el siguiente capítulo se hará uso de la metodología adaptada de Box-Jenkins desarrollada inicialmente para modelos *ARIMA*. Esto con el objetivo de pronosticar el valor de la volatilidad que servirá para calcular el VaR y CVaR del portafolio bajo las supuestos heterocedásticos. Para ello, la selección de cada uno de los modelos será a través de los criterios AIC y BIC.

¹<https://cran.r-project.org/web/packages/fGarch/fGarch.pdf>

²<https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>

Capítulo 4

Estimación del riesgo bajo los modelos heterocedásticos condicionales propuestos

Como lo menciona Jorion (2007), para estimar el VaR y CVaR de las inversiones se dispone de dos formas, el primero de ellos modelando la distribución de los rendimientos, y el segundo analizando y capturando el proceso de volatilidad asociado a dichos rendimientos.

A lo largo de este trabajo se ha enfatizado en el estudio de las técnicas que forman parte de este segundo enfoque. Esto se hace a través de la descripción de las principales metodologías para estimar la volatilidad dinámica a tiempo discreto, considerando la distribución de los rendimientos a partir de la propuesta de uso de modelos *ARCH* y *GARCH* y alguna de sus variantes.

La volatilidad, ya sea determinista (que permanece fija a lo largo del tiempo, es decir, sus cambios se describen de forma conocida) o estocástica (que va cambiando en el transcurso del tiempo en forma desconocida), mide la magnitud de los cambios aleatorios de la rentabilidad o precio de un activo.

Es por ello que el cálculo de la volatilidad es cada vez más preciso. Comenzando su estimación por medio de la desviación estándar de los rendimientos pasados, se posee el inconveniente de que esta no brinda mayor información de su comportamiento en el tiempo. Por ello, posteriormente, los métodos *GARCH* considerarían a la varianza como un buen estimador de la volatilidad teniendo en cuenta la evolución en el tiempo de los rendimientos en función de lo observado y modelando las variaciones del precio de los activos.

En este capítulo será mostrada la comparación del uso de metodologías convencionales de estimación del riesgo obtenidas en el Capítulo Dos frente a metodologías que adoptan supuestos de heterocedasticidad. Recuérdese que, para su aplicación, fueron consideradas

las exigencias contenidas en el Acuerdo de Basilea II, tomando un nivel de confianza del VaR del 95 % y efectuando la estimación a periodo de un día.

4.1. Metodología Box-Jenkins.

Con la finalidad de facilitar el trabajo de los investigadores y estadísticos, para construir un modelo de serie tiempo capaz de explicar la estructura y predecir la evolución de dicha serie en el futuro, Box y Jenkins (1970) desarrollaron una metodología fundamentada en cuatro pasos, misma que se detalla a continuación:

- 1. Identificación:** Consiste en elegir un modelo de entre varios posibles candidatos para explicar el comportamiento de la serie estacionaria (en caso de no serlo se aplican transformaciones del tipo logarítmico, diferencial de primer orden, etc.). La selección de los órdenes de los modelos puede efectuarse de forma gráfica o estadística.

El método gráfico implica analizar las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, ya sea del cuadrado de los residuales obtenidos a partir de ajustar un modelo *ARMA* a la serie de rendimientos o bien considerando la forma de la serie derivada del modelo heterocedástico expresado en su forma *ARMA*. No obstante esta forma no es del todo confiable, ya que dependerá del criterio y experiencia de cada persona si le corresponde o no cierto orden.

Por otro lado, la forma estadística está fuertemente relacionada con el segundo paso de la metodología, el de estimación.

- 2. Estimación:** Se realiza la estimación de los parámetros de los modelos seleccionados. Para ello se hace uso de librerías y funciones especializadas en *R* mismas que pueden ser consultadas en el la dirección contenida en el Apéndice B de esta tesis.
 - 3. Verificación del modelo:** Se comprueba a partir de pruebas de bondad de ajuste cada uno de los modelos estimados y se determina cuál debiera ser considerado. Si bien existen diversas pruebas de bondad de ajuste que pudiesen dirigir la preferencia de seleccionar cierto modelo sobre otro, para evitar controversias y dar un mayor fundamento al resultado obtenido, se usará el criterio estadístico mediante la consideración y análisis de los criterios Akaike (AIC) y de información Bayesiano (BIC). Lo anterior dado que se tratan de dos pruebas bastante conocidas en el medio académico y aceptadas por los investigadores y usuarios financieros. A continuación se definen ambos criterios:
-

Definición 4.1.1. (*Criterio de información de Akaike*)

El criterio de información de Akaike, denotado por AIC, es una medida de bondad de ajuste definida como

$$AIC = 2k - 2 \log(L),$$

donde k es el número de parámetros a estimar y L el valor máximo que puede alcanzar la función de verosimilitud.

El AIC mide discrepancia entre los valores observados y los valores esperados a partir de la máxima verosimilitud del modelo.

Por otro lado el criterio de información bayesiano BIC se define de la siguiente manera:

Definición 4.1.2. (*Criterio de información bayesiano*)

El criterio de información Bayesiano, denotado por BIC, es una medida de bondad de ajuste definida como

$$BIC = k \log(n) - 2 \log(L),$$

donde k es el número de parámetros a estimar, L el valor máximo que puede alcanzar la función de verosimilitud y n corresponde al número de observaciones.

El BIC busca seleccionar el modelo más sencillo y parsimonioso mientras que el AIC elimina la parte de parsimonia y hace énfasis en aquel modelo que brinde mayor detalle en las predicciones respecto a los datos de estudio.

Cabe señalar que, para el estudio del portafolio propuesto, se seleccionará aquel modelo que cumpla con los valores más pequeños con relación a ambos criterios. En caso de que existan modelos cuyos AIC sean menores respecto de los demás pero sus BIC no, o viceversa, el criterio de desempate estará dado por el BIC menor.

Se considerará que un modelo es válido si los coeficientes estimados son significativos. Para ello se analizarán las gráficas cuantil-cuantil de los residuales y será considerado el error estándar de la estimación de los coeficientes.

- **4. Predicción:** A partir del modelo seleccionado se realizan las predicciones de la variable de estudio, en este caso, de la volatilidad.

Por ende, se trata de un proceso iterativo de prueba y error, mismo que tendrá fin hasta lograr encontrar un modelo que resulte consistente.

En esta tesis se hace hincapié en la búsqueda de modelos parsimoniosos. Es por ello que se hace el intento de que dichos órdenes, debido a las características propias del portafolio, comprendan los valores entre 1 y 2, existiendo la posibilidad de que no se este considerando el orden mejor ajustable a la serie de rendimientos del portafolio de estudio y de cada acción que lo componen.

Por último, dado que será empleada la metodología Delta-Normal para la estimación del VaR del portafolio bajo supuestos heterocedásticos, se tomará en cuenta tanto el orden del modelo asociado a cada acción correspondiente como del portafolio en su conjunto.

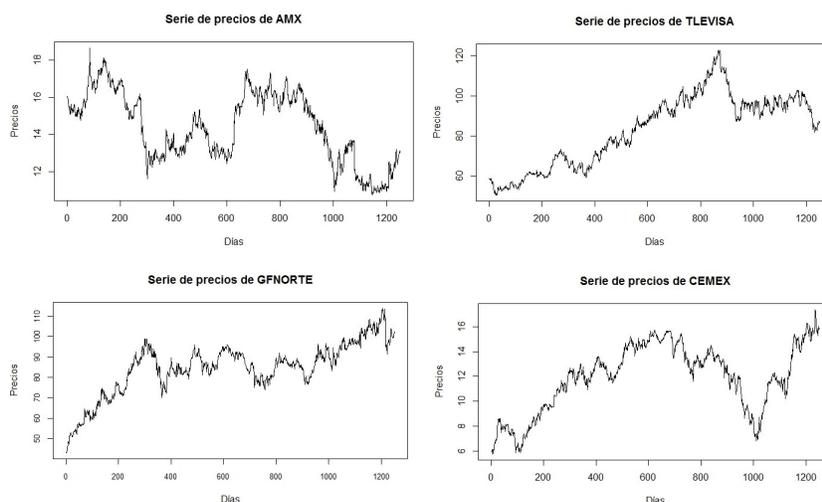
4.2. Estimación y *backtesting* del VaR y obtención del CVaR con modelos heterocedásticos condicionales

A continuación se muestran las estimaciones y pruebas de respaldo de los rendimientos del portafolio de estudio a través de los modelos heterocedásticos condicionales propuestos. Todos los resultado obtenidos y graficados se generaron con el *software* \mathbb{R} y dichos códigos se encuentran detallados en el Apéndice B de este trabajo.

Finalmente, dado que se ajustarán modelos *ARMA* a la serie de rendimientos en el caso de los *TGARCH*, o bien, se estudiará la expresión de los *GARCH* e *EGARCH* en su forma *ARMA*, cada modelo resultante estará precedido por el término *ARMA* para su identificación.

4.2.1. Ajuste de modelo *GARCH*

Partiendo de graficar la serie de precios de cada una de las acciones que forman parte del portafolio de estudio se obtuvo lo siguiente:



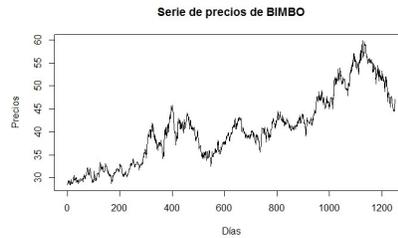


Figura 4.1 Gráficas del comportamiento de los precios de las acciones que conforman el portafolio de estudio propuesto.

Se puede observar que la serie de precios de cada una de las acciones posee un comportamiento no estacionario, por lo que es necesario aplicar diferencial de primer orden. Esto coincide con la forma en que se estiman los rendimientos logarítmicos de las series y corresponderán a “nuevas” $\{Y_t\}$.

Es así que las gráficas de los rendimientos de cada una de las acciones son las siguientes:

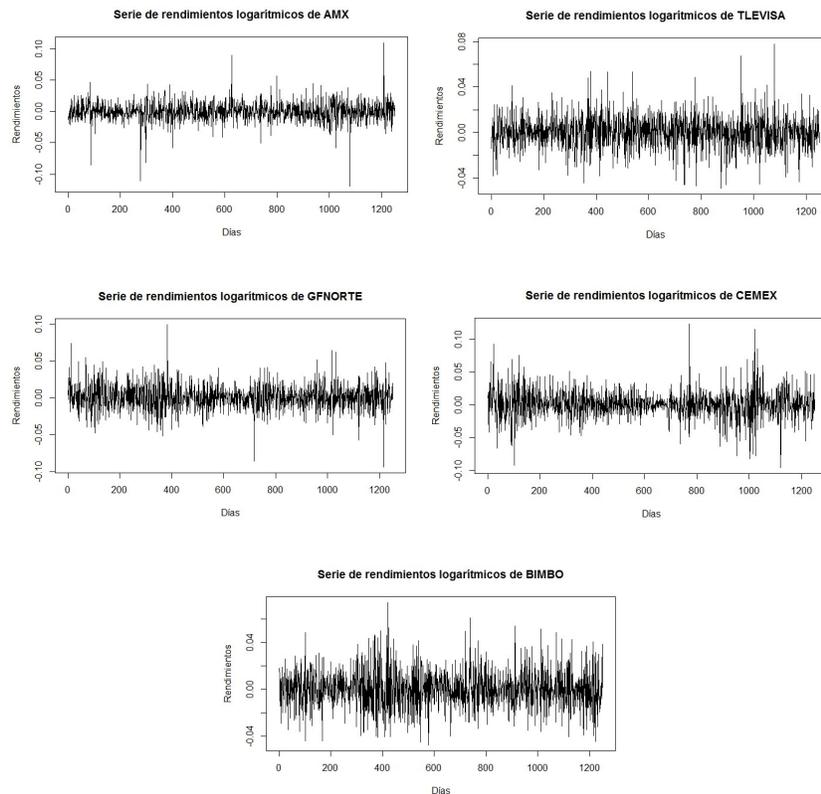


Figura 4.2 Gráficas del comportamiento de los rendimientos de las acciones que conforman el portafolio de estudio propuesto.

De donde se corrobora que, bajo la aplicación de la transformación logarítmica y de diferencial de primer orden, las series son estacionarias.

Siendo así, para estos modelos se optó por graficar las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los valores correspondientes a la serie del cuadrado de los rendimientos, $\{Y_t^2\}$, para elegir los órdenes del modelo *ARMA*–*GARCH* asociado a cada acción.

Los resultados fueron los siguientes para América Móvil,

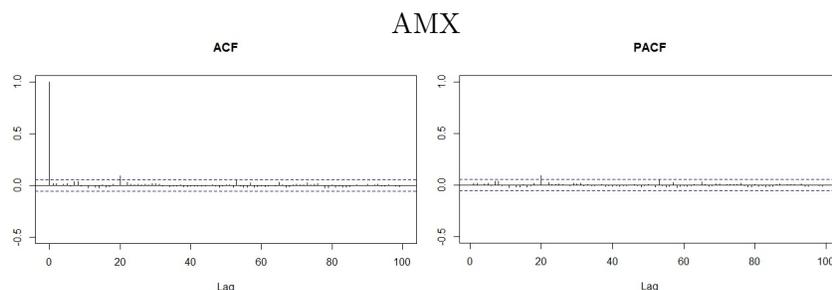


Figura 4.3 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los rendimientos de la acción AMX.

Entonces, se sugiere que el orden del modelo debiera ser *ARMA* – *GARCH* (1,1).

Para Grupo Televisa,

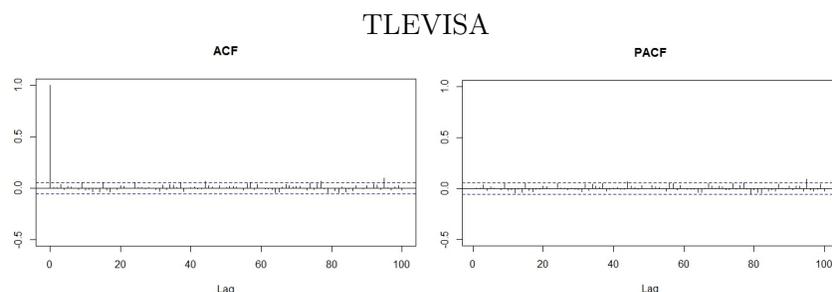


Figura 4.4 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los rendimientos de la acción TLEVISA.

No se cuentan con puntos de rezago significativos para poder asignar órdenes al modelo *ARMA* – *GARCH*.

Para Grupo Financiero Banorte,

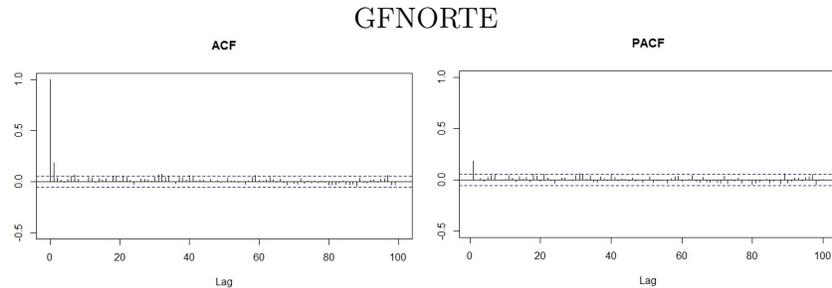


Figura 4.5 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los rendimientos de la acción GFNORTE.

En este caso podría pensarse que un $ARMA - GARCH (1,1)$ es el modelo que debe ser seleccionado.

Para Cementos Mexicanos,

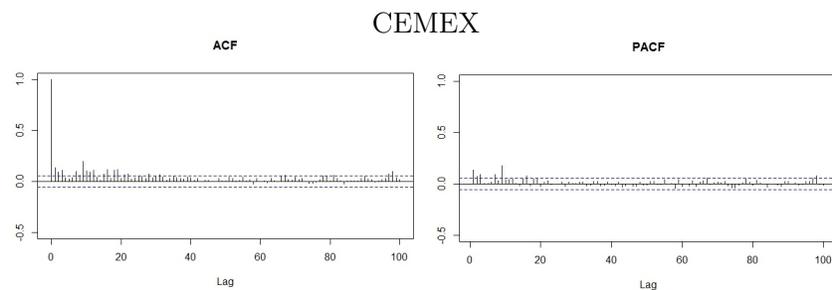


Figura 4.6 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los rendimientos de la acción CEMEX.

No es posible concluir que orden debe ser seleccionado.

Para Grupo Bimbo,

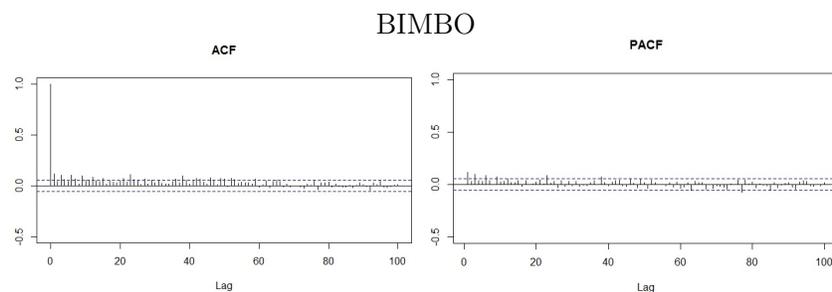


Figura 4.7 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los rendimientos de la acción BIMBO.

No se observan puntos de rezago significativos para poder asignar órdenes al modelo.

Para corroborar la selección del orden de los modelos de algunas de las acciones y esclarecer el orden $ARMA - GARCH$ del resto, se obtuvieron los valores de AIC y BIC, tomando en cuenta la propuesta de órdenes del tipo 1 y 2, mismos que se muestran a continuación:

Para América Móvil,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
AMX	GARCH(1, 1)	$\omega_0 = 0.00018184$	3.931×10^{-5}	-5.509241	-5.492822
		$\omega_1 = 0.10151015$	3.744×10^{-2}		
		$v_1 = 0.14350003$	1.723×10^{-1}		
	GARCH(1, 2)	$\omega_0 = 0.00018173$	4.244×10^{-5}	-5.507616	-5.487093
		$\omega_1 = 0.10130480$	3.759×10^{-2}		
		$v_1 = 0.14419516$	1.789×10^{-1}		
		$v_2 = 0.00000001$	1.165×10^{-1}		
	GARCH(2, 1)	$\omega_0 = 0.00021256$	1.406×10^{-4}	-5.507658	-5.487135
		$\omega_1 = 0.10063975$	3.742×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.01663419$	7.007×10^{-2}		
		$v_1 = 0.00000001$	6.505×10^{-1}		
	GARCH(2, 2)	$\omega_0 = 0.00021257$	2.502×10^{-4}	-5.506058	-5.481430
		$\omega_1 = 0.10063040$	3.782×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.01662328$	1.415×10^{-1}		
		$v_1 = 0.00000001$	1.346		
		$v_2 = 0.00000001$	1.995×10^{-1}		

Cuadro 4.1: Resultado de ajustar modelos GARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción AMX.

Es decir, se corrobora que el orden $ARMA - GARCH(1, 1)$ es válido y debiera ser seleccionado para dicha acción.

Para el caso de la acción de Grupo Televisa,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
TLEVISA	GARCH(1, 1)	$\omega_0 = 4.9303 \times 10^{-5}$	4.675×10^{-5}	-5.679550	-5.663131
		$\omega_1 = 1.5065 \times 10^{-2}$	1.664×10^{-2}		
		$v_1 = 7.3713 \times 10^{-1}$	2.411×10^{-1}		

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
TLEVISA	GARCH(1, 2)	$\omega_0 = 4.6978 \times 10^{-6}$	2.866×10^{-6}	-5.682261	-5.661738
		$\omega_1 = 1.8503 \times 10^{-2}$	8.370×10^{-3}		
		$v_1 = 4.4217 \times 10^{-2}$	5.366×10^{-2}		
		$v_2 = 9.1363 \times 10^{-1}$	5.464×10^{-2}		
	GARCH(2, 1)	$\omega_0 = 6.3703 \times 10^{-5}$	5.818×10^{-5}	-5.678237	-5.657714
		$\omega_1 = 6.8971 \times 10^{-3}$	1.986×10^{-2}		
		$\omega_2 = 1.4645 \times 10^{-2}$	2.408×10^{-2}		
		$v_1 = 6.5839 \times 10^{-1}$	3.018×10^{-1}		
	GARCH(2, 2)	$\omega_0 = 4.6979 \times 10^{-6}$	2.871×10^{-6}	-5.680661	-5.656033
		$\omega_1 = 1.8503 \times 10^{-2}$	1.053×10^{-2}		
		$\omega_2 = 1.0000 \times 10^{-8}$	1.000×10^{-2}		
		$v_1 = 4.4210 \times 10^{-2}$	6.144×10^{-2}		
		$v_2 = 9.1364 \times 10^{-1}$	6.032×10^{-2}		

Cuadro 4.2: Resultado de ajustar modelos GARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción TLEVISA.

Donde se presenta el caso en que el AIC del *ARMA – GARCH(1, 2)* es el menor, no obstante el BIC del *ARMA – GARCH(1, 1)* es el menor respecto de los demás.

Para la acción de Grupo Financiero Banorte,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
GFNORTE	GARCH(1, 1)	$\omega_0 = 1.5111 \times 10^{-5}$	7.315×10^{-6}	-5.347217	-5.330798
		$\omega_1 = 8.6766 \times 10^{-2}$	2.552×10^{-2}		
		$v_1 = 8.6422 \times 10^{-1}$	4.408×10^{-2}		
	GARCH(1, 2)	$\omega_0 = 1.9207 \times 10^{-5}$	8.816×10^{-6}	-5.356550	-5.336026
		$\omega_1 = 1.2709 \times 10^{-1}$	3.127×10^{-2}		
		$v_1 = 1.4791 \times 10^{-1}$	1.012×10^{-1}		
		$v_2 = 6.6189 \times 10^{-1}$	1.117×10^{-1}		
	GARCH(2, 1)	$\omega_0 = 1.5102 \times 10^{-5}$	N/A	-5.345882	-5.325358
		$\omega_1 = 8.7022 \times 10^{-2}$	2.325×10^{-2}		
		$\omega_2 = 1.0000 \times 10^{-8}$	N/A		
		$v_1 = 8.6394 \times 10^{-1}$	N/A		
	GARCH(2, 2)	$\omega_0 = 1.9207 \times 10^{-5}$	1.642×10^{-5}	-5.354950	-5.330321
		$\omega_1 = 1.2709 \times 10^{-1}$	3.138×10^{-2}		
		$\omega_2 = 1.0000 \times 10^{-8}$	6.931×10^{-2}		
$v_1 = 1.4791 \times 10^{-1}$		2.480×10^{-1}			
		$v_2 = 6.6189 \times 10^{-1}$	1.592×10^{-1}		

Cuadro 4.3: Resultado de ajustar modelos GARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción GFNORTE.

Destacando el modelo *ARMA – GARCH(1, 2)* dado que sus AIC y BIC son los menores respecto de los demás.

Continuando con la acción de Cementos Mexicanos,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
CEMEX	GARCH(1, 1)	$\omega_0 = 5.1098 \times 10^{-6}$	2.286×10^{-6}	-5.027765	-5.011347
		$\omega_1 = 8.2284 \times 10^{-2}$	1.446×10^{-2}		
		$v_1 = 9.1044 \times 10^{-1}$	1.480×10^{-2}		
	GARCH(1, 2)	$\omega_0 = 7.8488 \times 10^{-6}$	3.724×10^{-6}	-5.034707	-5.014184
		$\omega_1 = 1.3554 \times 10^{-1}$	2.278×10^{-2}		
		$v_1 = 2.1026 \times 10^{-1}$	9.249×10^{-2}		
		$v_2 = 6.4340 \times 10^{-1}$	8.952×10^{-2}		
	GARCH(2, 1)	$\omega_0 = 5.1116 \times 10^{-6}$	2.456×10^{-6}	-5.026463	-5.005939
		$\omega_1 = 8.2293 \times 10^{-2}$	2.846×10^{-2}		
		$\omega_2 = 1.0000 \times 10^{-8}$	3.496×10^{-2}		
		$v_1 = 9.1037 \times 10^{-1}$	1.819×10^{-2}		
	GARCH(2, 2)	$\omega_0 = 7.8489 \times 10^{-6}$	3.922×10^{-6}	-5.033107	-5.008479
		$\omega_1 = 1.3554 \times 10^{-1}$	2.844×10^{-2}		
		$\omega_2 = 1.0000 \times 10^{-8}$	3.430×10^{-2}		
$v_1 = 2.1026 \times 10^{-1}$		1.446×10^{-1}			
$v_2 = 6.4340 \times 10^{-1}$		1.287×10^{-1}			

Cuadro 4.4: Resultado de ajustar modelos GARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción CEMEX.

De nueva cuenta el modelo ARMA – GARCH(1, 2) es el seleccionado.

Para la acción de Grupo Bimbo,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
BIMBO	GARCH(1, 1)	$\omega_0 = 6.5117 \times 10^{-6}$	3.193×10^{-6}	-5.452448	-5.436030
		$\omega_1 = 4.7669 \times 10^{-2}$	1.384×10^{-2}		
		$v_1 = 9.2779 \times 10^{-1}$	2.272×10^{-2}		
	GARCH(1, 2)	$\omega_0 = 1.1553 \times 10^{-5}$	5.011×10^{-6}	-5.457286	-5.436763
		$\omega_1 = 8.8082 \times 10^{-2}$	2.027×10^{-2}		
		$v_1 = 3.5523 \times 10^{-3}$	3.043×10^{-2}		
		$v_2 = 8.6532 \times 10^{-1}$	3.497×10^{-2}		
	GARCH(2, 1)	$\omega_0 = 6.5081 \times 10^{-6}$	3.405×10^{-6}	-5.450875	-5.430351
		$\omega_1 = 4.7691 \times 10^{-2}$	2.615×10^{-2}		
		$\omega_2 = 1.0000 \times 10^{-8}$	2.721×10^{-2}		
		$v_1 = 9.2781 \times 10^{-1}$	2.446×10^{-2}		
	GARCH(2, 2)	$\omega_0 = 1.1821 \times 10^{-5}$	5.634×10^{-6}	-5.455913	-5.431285
		$\omega_1 = 8.5604 \times 10^{-2}$	2.102×10^{-2}		
		$\omega_2 = 7.1763 \times 10^{-3}$	1.788×10^{-2}		
$v_1 = 1.0000 \times 10^{-8}$		4.587×10^{-2}			
$v_2 = 8.6314 \times 10^{-1}$		3.887×10^{-2}			

Cuadro 4.5: Resultado de ajustar modelos GARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción BIMBO.

Teniendo que el modelo *ARMA*–*GARCH*(1, 2) debiera ser el considerado bajo los órdenes propuestos.

Para el portafolio completo, la selección de los órdenes del modelo *ARMA* – *GARCH* está dado por,

Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
<i>GARCH</i> (1, 1)	$\omega_0 = 4.352 \times 10^{-6}$	1.915×10^{-6}	-6.222109	-6.205690
	$\omega_1 = 6.120 \times 10^{-2}$	1.545×10^{-2}		
	$v_1 = 9.034 \times 10^{-1}$	2.69×10^{-2}		
<i>GARCH</i> (1, 2)	$\omega_0 = 4.7186 \times 10^{-6}$	2.63×10^{-6}	-6.220674	-6.200150
	$\omega_1 = 6.7095 \times 10^{-2}$	3.041×10^{-2}		
	$v_1 = 7.8196 \times 10^{-1}$	5.535×10^{-1}		
	$v_2 = 1.1249 \times 10^{-1}$	5.141×10^{-1}		
<i>GARCH</i> (2, 1)	$\omega_0 = 4.3406 \times 10^{-6}$	2.054×10^{-6}	-6.220635	-6.200111
	$\omega_1 = 6.1270 \times 10^{-2}$	3.079×10^{-2}		
	$\omega_2 = 1.0000 \times 10^{-8}$	3.535×10^{-2}		
	$v_1 = 9.0337 \times 10^{-1}$	3.057×10^{-2}		
<i>GARCH</i> (2, 2)	$\omega_0 = 8.3771 \times 10^{-6}$	3.42×10^{-6}	-6.219537	-6.194909
	$\omega_1 = 7.0090 \times 10^{-2}$	1.921×10^{-2}		
	$\omega_2 = 4.4131 \times 10^{-2}$	1.099×10^{-2}		
	$v_1 = 1.0000 \times 10^{-8}$	N/A		
	$v_2 = 8.1737 \times 10^{-1}$	N/A		

Cuadro 4.6: Resumen de ajuste de modelos *GARCH* en su forma *ARMA* a la serie de rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

De donde se obtiene que el modelo *ARMA* – *GARCH*(1,1) es el que debiera ser seleccionado para estimar la volatilidad de la cartera dado que su AIC y BIC son menores respecto a las demás propuestas

Es importante señalar que los coeficientes estimados para cada acción cumplen con ser significativos y además satisfacen las condiciones de estacionariedad del modelo *GARCH* descritas en el Capítulo Tres.

4.2.2. Ajuste del modelo *EGARCH*

De forma análoga a los *GARCH*, se optó por identificar los órdenes de los modelos a partir de la gráfica de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de la serie $\log(Y^2)$ para cada acción, es decir, a través de su forma *ARMA*.

Las gráficas de autocorrelación y de autocorrelación parcial de cada una de las cinco acciones están dadas por

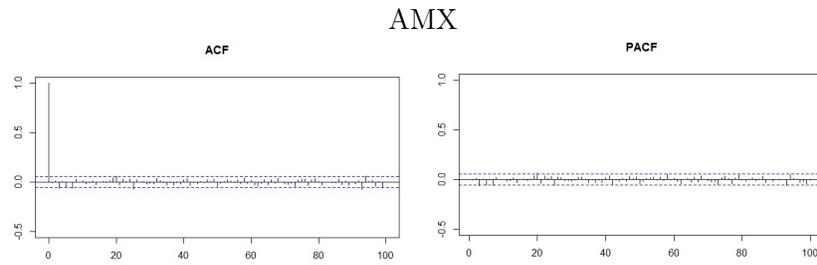


Figura 4.8 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del logaritmo del cuadrado de los rendimientos de la acción AMX.

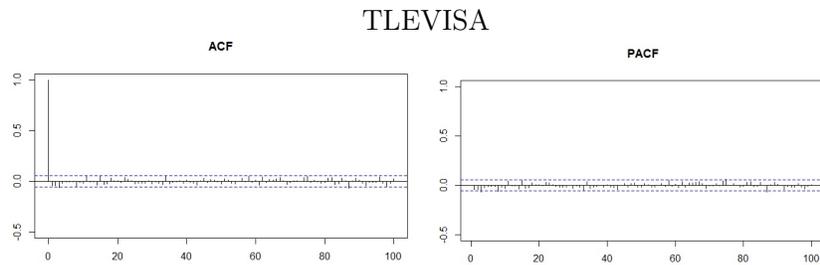


Figura 4.9 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del logaritmo del cuadrado de los rendimientos de la acción TLEVISA.

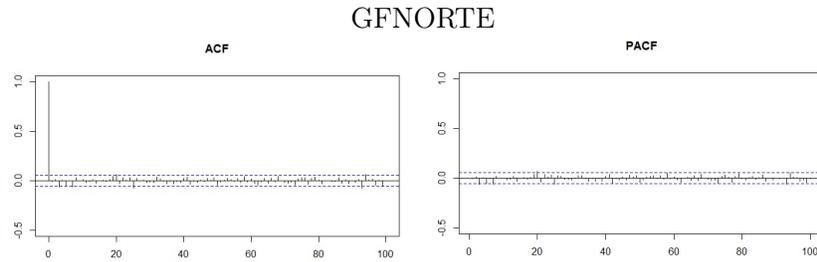


Figura 4.10 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del logaritmo del cuadrado de los rendimientos de la acción GFNORTE.

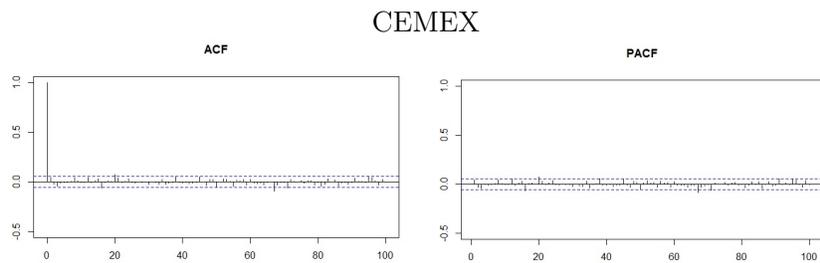


Figura 4.11 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del logaritmo del cuadrado de los rendimientos de la acción CEMEX.

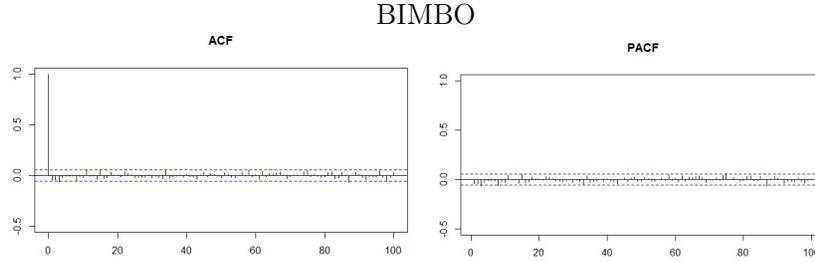


Figura 4.12 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del logaritmo del cuadrado de los rendimientos de la acción BIMBO.

Sin embargo, no se observan puntos de rezago gráficamente para poder asignar órdenes a los modelos. Ajustando modelos con órdenes 1 y 2, los resultados fueron los siguientes:

Para América Móvil,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
AMX	<i>EGARCH</i> (1, 1)	$\omega_0 = -9.999974$	2.688463	-5.5070	-5.4865
		$\omega_1 = 0.070663$	2.1611×10^{-2}		
		$v_1 = -0.198853$	3.2142×10^{-1}		
		$\gamma_1 = 0.163307$	4.3515×10^{-2}		
	<i>EGARCH</i> (1, 2)	$\omega_0 = -9.999732$	5.163194	-5.5086	-5.4840
		$\omega_1 = 0.080742$	2.8669×10^{-2}		
		$v_1 = -0.426857$	3.3871×10^{-1}		
		$v_2 = 0.228791$	2.9088×10^{-1}		
	<i>EGARCH</i> (2, 1)	$\omega_0 = -0.030473$	1.0888×10^{-3}	-5.5229	-5.4942
		$\omega_1 = 0.046398$	2.8491×10^{-1}		
		$\omega_2 = -0.081000$	2.7581×10^{-2}		
		$v_1 = 0.996355$	2×10^{-5}		
		$\gamma_1 = 0.181193$	3.5231×10^{-3}		
	<i>EGARCH</i> (2, 2)	$\omega_0 = -0.048839$	1.423×10^{-3}	-5.5281	-5.4953
		$\omega_1 = 0.069321$	7.828×10^{-3}		
		$\omega_2 = -0.126524$	2.3112×10^{-2}		
$v_1 = 0.321118$		0			
$v_2 = 0.673052$		4.5×10^{-4}			
$\gamma_1 = 0.091939$		3.592×10^{-3}			
	$\gamma_2 = -0.093194$	4.237×10^{-3}			

Cuadro 4.7: Resultado de ajustar modelos *EGARCH* en su forma *ARMA* a la serie de rendimientos de la acción AMX.

Es decir, el *ARMA – EGARCH*(2, 2) es el modelo que debiera ser considerado bajo los criterios definidos.

Para Grupo Televisa:

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
TLEVISA	EGARCH(1,1)	$\omega_0 = -0.132969$	1.215×10^{-3}	-5.6894	-5.6689
		$\omega_1 = -0.037585$	1.1413×10^{-2}		
		$v_1 = 0.984301$	0		
		$\gamma_1 = 0.014680$	9.206×10^{-3}		
	EGARCH(1,2)	$\omega_0 = -0.175362$	1.145×10^{-3}	-5.6884	-5.6638
		$\omega_1 = -0.052309$	1.5002×10^{-2}		
		$v_1 = 0.634321$	4×10^{-6}		
		$v_2 = 0.344964$	2.4×10^{-5}		
	EGARCH(2,1)	$\omega_0 = -0.116640$	$.491 \times 10^{-3}$	-5.6884	-5.6596
		$\omega_1 = -0.099381$	4.1664×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.061946$	3.9224×10^{-2}		
		$v_1 = 0.986209$	0		
		$\gamma_1 = 0.034823$	4.4734×10^{-2}		
	EGARCH(2,2)	$\omega_0 = -0.230323$	4.6749×10^{-2}	-5.6889	-5.6561
		$\omega_1 = -0.033342$	2.4899×10^{-2}		
		$\omega_2 = -0.034748$	2.2050×10^{-2}		
$v_1 = 0.161658$		5.564×10^{-3}			
$v_2 = 0.811118$		1×10^{-6}			
$\gamma_1 = 0.088899$		3.2243×10^{-2}			
$\gamma_2 = -0.088899$		2.7036×10^{-2}			

Cuadro 4.8: Resultado de ajustar modelos EGARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción TLEVISA.

De donde se considera que el modelo ARMA – EGARCH(1,1) es el que debiera ser considerado ya que posee tanto AIC y BIC menores con relación a los de los demás.

Para la acción de Grupo Financiero Banorte,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
GFNORTE	EGARCH(1,1)	$\omega_0 = -0.537912$	5.1075×10^{-1}	-5.3574	-5.3369
		$\omega_1 = -0.019051$	2.2794×10^{-2}		
		$v_1 = 0.933503$	6.2381×10^{-2}		
		$\gamma_1 = 0.212962$	5.4378×10^{-2}		
	EGARCH(1,2)	$\omega_0 = -0.597056$	2.5891×10^{-1}	-5.3664	-5.3418
		$\omega_1 = -0.035269$	2.4987×10^{-2}		
		$v_1 = 0.369588$	2.5225×10^{-1}		
		$v_2 = 0.556564$	2.5533×10^{-1}		
	EGARCH(2,1)	$\omega_0 = -0.107025$	1.511×10^{-3}	-5.3813	-5.3526
		$\omega_1 = -0.048600$	2.8871×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.023303$	1.9364×10^{-2}		
		$v_1 = 0.986678$	2.08×10^{-4}		
$\gamma_1 = 0.430490$		4.9342×10^{-2}			
$\gamma_2 = -0.339285$	4.8332×10^{-2}				

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
GFNORTE	EGARCH(2, 2)	$\omega_0 = -0.106922$	5.1138×10^{-2}	-5.3799	-5.3470
		$\omega_1 = -0.048695$	2.9404×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.023796$	2.0225×10^{-2}		
		$v_1 = 0.999998$	1.88×10^{-5}		
		$v_2 = -0.013302$	6.284×10^{-3}		
		$\gamma_1 = 0.431431$	5.4332×10^{-2}		
		$\gamma_2 = -0.341447$	5.3582×10^{-2}		

Cuadro 4.9: Resultado de ajustar modelos EGARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción GFNORTE.

Obteniendo que el modelo ARMA – EGARCH(2, 1) es el que debiera ser considerado.

Para el caso de la acción de Cementos Mexicanos,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
CEMEX	EGARCH(1, 1)	$\omega_0 = -0.098980$	4.3564×10^{-2}	-5.0553	-5.0348
		$\omega_1 = -0.071891$	1.0672×10^{-2}		
		$v_1 = 0.986594$	6.079×10^{-3}		
		$\gamma_1 = 0.136372$	7.4153×10^{-2}		
	EGARCH(1, 2)	$\omega_0 = -0.153829$	7.3761×10^{-2}	-5.0639	-5.0393
		$\omega_1 = -0.106117$	1.9261×10^{-2}		
		$v_1 = 0.306504$	1.0414×10^{-2}		
		$v_2 = 0.672633$	1.0366×10^{-2}		
	EGARCH(2, 1)	$\omega_0 = -0.067583$	2.406×10^{-3}	-5.0673	-5.0386
		$\omega_1 = -0.055828$	3.9076×10^{-2}		
		$\omega_2 = -0.015260$	3.9342×10^{-2}		
		$v_1 = 0.990760$	2.65×10^{-4}		
	EGARCH(2, 2)	$\gamma_1 = 0.367969$	4.8882×10^{-2}	-5.0667	-5.0339
		$\gamma_2 = -0.262302$	3.6597×10^{-2}		
		$\omega_0 = -0.098776$	1.6587×10^{-2}		
		$\omega_1 = -0.058866$	3.7382×10^{-2}		
$\omega_2 = -0.035791$		3.7382×10^{-2}			
$v_1 = 0.668715$		5.53×10^{-4}			
$v_2 = 0.317858$		1.232×10^{-3}			
$\gamma_1 = 0.356970$		5.4402×10^{-2}			
$\gamma_2 = -0.211757$	5.6502×10^{-2}				

Cuadro 4.10: Resultado de ajustar modelos EGARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción CEMEX.

En este caso se trata del modelo ARMA – EGARCH(1, 2) que presenta menor valor de BIC.

Para Grupo Bimbo,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
BIMBO	EGARCH(1, 1)	$\omega_0 = -0.370514$	7.0512×10^{-2}	-5.4542	-5.4337
		$\omega_1 = -0.047292$	1.8345×10^{-2}		
		$v_1 = 0.954840$	8.395×10^{-3}		
		$\gamma_1 = 0.138211$	1.9778×10^{-2}		
	EGARCH(1, 2)	$\omega_0 = -0.506728$	1.96241×10^{-1}	-5.4572	-5.4326
		$\omega_1 = -0.062543$	2.7179×10^{-2}		
		$v_1 = 0.379012$	4.9043×10^{-2}		
		$v_2 = 0.559160$	4.8745×10^{-2}		
	EGARCH(2, 1)	$\omega_0 = -0.246816$	1.3234×10^{-2}	-5.4548	-5.4261
		$\omega_1 = -0.054602$	3.8596×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.021692$	4.0015×10^{-2}		
		$v_1 = 0.969850$	1.528×10^{-3}		
		$\gamma_1 = 0.249688$	5.1196×10^{-2}		
	EGARCH(2, 2)	$\omega_0 = -0.365581$	1.36846×10^{-2}	-5.4551	-5.4223
		$\omega_1 = -0.061901$	3.7058×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.014163$	3.8503×10^{-2}		
$v_1 = 0.565404$		1.6633×10^{-2}			
$v_2 = 0.389947$		1.7833×10^{-2}			
$\gamma_1 = 0.258063$		5.6298×10^{-2}			
	$\gamma_2 = -0.089778$	5.4164×10^{-2}			

Cuadro 4.11: Resultado de ajustar modelos EGARCH en su forma ARMA a la serie de rendimientos de la acción BIMBO.

Siendo el modelo ARMA – EGARCH(1, 1) el que debiera ser seleccionado.

Por otro lado, se procede a estudiar directamente el caso del portafolio completo, es decir,

Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
EGARCH(1, 1)	$\omega_0 = -0.155232$	2.144×10^{-3}	-6.2304	-6.2099
	$\omega_1 = -0.059556$	8.351×10^{-3}		
	$v_1 = 0.982591$	1.69×10^{-3}		
	$\gamma_1 = 0.068141$	1.1667×10^{-2}		
EGARCH(1, 2)	$\omega_0 = -0.274072$	2.1739×10^{-2}	-6.2313	-6.2067
	$\omega_1 = -0.091745$	2.4863×10^{-2}		
	$v_1 = 0.365135$	1.813×10^{-3}		
	$v_2 = 0.604181$	8.87×10^{-4}		
	$\gamma_1 = 0.114068$	4.0627×10^{-2}		

Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
<i>EGARCH</i> (2, 1)	$\omega_0 = -0.146943$	2.370×10^{-3}	-6.2308	-6.2020
	$\omega_1 = -0.078520$	2.0565×10^{-2}		
	$\omega_2 = 0.017906$	8.415×10^{-3}		
	$v_1 = 0.983547$	2×10^{-6}		
	$\gamma_1 = 0.180581$	6.0785×10^{-2}		
	$\gamma_2 = -0.121982$	6.1924×10^{-2}		
<i>EGARCH</i> (2, 2)	$\omega_0 = -0.144280$	5.6053×10^{-2}	-6.2292	-6.1963
	$\omega_1 = -0.078061$	2.9853×10^{-2}		
	$\omega_2 = 0.018430$	2.3577×10^{-2}		
	$v_1 = 0.999978$	2×10^{-6}		
	$v_2 = -0.016134$	6.206×10^{-3}		
	$\gamma_1 = 0.180935$	5.55041×10^{-2}		
	$\gamma_2 = -0.123378$	5.3861×10^{-2}		

Cuadro 4.12: Resumen del ajuste de modelos *EGARCH* en su forma *ARMA* a la serie de rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

Por lo tanto se concluye que el orden *ARMA* – *EGARCH*(1, 1) es el que debiera ser considerado.

Cabe señalar que la condición de estacionariedad dada por $\sum_{i=1}^p \omega_i < 1$, es válida para los respectivos modelos.

4.2.3. Ajuste del modelo *TGARCH*

Esta variante de la familia *GARCH* al contener una función implícita de los efectos de los términos aleatorios sobre los precios del portafolio, dificulta la obtención de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial.

Por dichas razones, se optó por considerar la obtención y análisis de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los residuales al cuadrado resultado de efectuar y ajustar un *ARMA* a las series de rendimientos $\{Y_t\}$ y así determinar los órdenes del *TGARCH*; es decir, mediante el ajuste del *ARMA* se procede a determinar el orden del modelo *TGARCH* y posteriormente se hace la estimación de los parámetros bajo dicho orden.

Para América Móvil, los resultados de ajustar modelos *ARMA* a la serie de rendimientos de la acción son los siguientes:

Modelo - AMX	AIC	BIC
ARMA(1, 1)	-10429.5	-10414.1
ARMA(1, 2)	-10428.1	-10407.6
ARMA(2, 1)	-10428.1	-10407.5
ARMA(2, 2)	-10427.8	-10402.1

Cuadro 4.13: Resultado de ajustar modelos ARMA a la serie de rendimientos de la acción AMX.

Siendo el modelo $ARMA(1, 1)$ el que debiera ser considerado para la acción AMX. Por lo tanto, las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales al cuadrado resultado del ajuste del modelo $ARMA(1, 1)$ a la serie $\{Y_t\}$ son las siguientes:

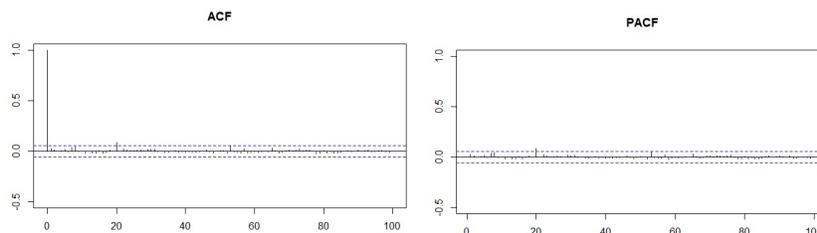


Figura 4.13 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los residuales obtenidos al ajustar un $ARMA(1,1)$ a la serie de rendimientos de la acción AMX.

Donde se podría plantear la consideración del modelo $ARMA - TGARCH(1, 1)$.

Para Grupo Televisa,

Modelo - TLEVISA	AIC	BIC
ARMA(1, 1)	-10648.8	-10633.4
ARMA(1, 2)	-10651	-10630.4
ARMA(2, 1)	-10651.1	-10630.5
ARMA(2, 2)	-10649.2	-10623.5

Cuadro 4.14: Resultado de ajustar modelos ARMA a la serie de rendimientos de la acción TLEVISA.

Se opta por un $ARMA(1, 1)$, ya que a pesar de poseer un AIC mayor, su BIC es menor respecto de los demás. Adicionalmente, las gráficas de las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los residuales al cuadrado obtenidos mediante el ajuste de dicho modelo a la serie de los rendimientos de la acción TLEVISA son

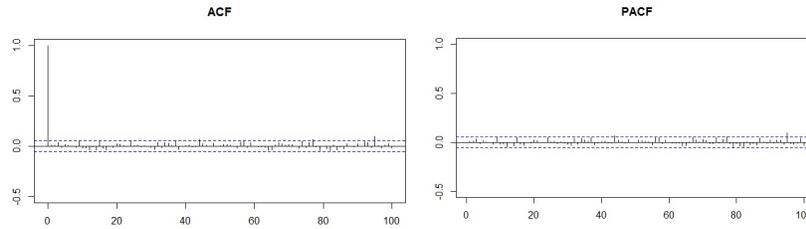


Figura 4.14 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los residuales obtenidos al ajustar un $ARMA(1,1)$ a la serie de rendimientos de la acción TLEVISA.

Obteniendo que debiera ser considerado el posible ajuste de un modelo del tipo $ARMA - TGARCH(1, 1)$ para esta acción.

Para Grupo Financiero Banorte,

Modelo - GFNORTE	AIC	BIC
$ARMA(1, 1)$	-10164.7	-10149.3
$ARMA(1, 2)$	-10178.1	-10157.6
$ARMA(2, 1)$	-10179.3	-10158.7
$ARMA(2, 2)$	-10179.9	-10154.3

Cuadro 4.15: Resultado de ajustar modelos $ARMA$ a la serie de rendimientos de la acción GFNORTE.

Para este caso, a pesar de que el AIC del $ARMA(2, 2)$ es el menor, el BIC del $ARMA(2, 1)$ muestra el valor mínimo entre las propuestas, por lo que se opta por éste último. Las gráficas de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial asociadas a los residuales al cuadrado obtenidos mediante el ajuste del modelo $ARMA(2, 1)$ a la serie de los rendimientos de la acción GFNORTE son

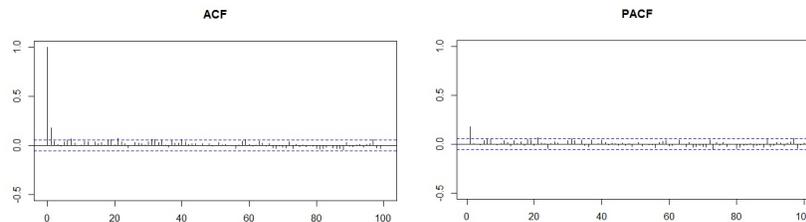


Figura 4.15 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los residuales obtenidos al ajustar un $ARMA(2,1)$ a la serie de rendimientos de la acción GFNORTE.

Siendo el modelo $ARMA - TGARCH(1, 1)$ el que debiera ser considerado para esta acción.

Para la acción de Cementos Mexicanos,

Modelo - CEMEX	AIC	BIC
<i>ARMA(1, 1)</i>	-9651.7	-9636.3
<i>ARMA(1, 2)</i>	-9651.8	-9631.3
<i>ARMA(2, 1)</i>	-9652.1	-9631.6
<i>ARMA(2, 2)</i>	-9650.9	-9625.3

Cuadro 4.16: Resultado de ajustar modelos *ARMA* a la serie de rendimientos de la acción *CEMEX*.

Se opta por el *ARMA(1,1)* dado que posee el valor de BIC menor a pesar de poseer un AIC mayor. Las gráficas de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales al cuadrado obtenidos mediante el ajuste del modelo *ARMA(1,1)* a la serie de los rendimientos de la acción *CEMEX* son

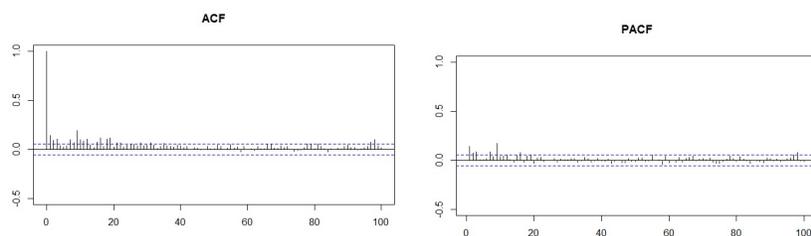


Figura 4.16 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los residuales obtenidos al ajustar un *ARMA(1,1)* a la serie de rendimientos de la acción *CEMEX*.

Por lo que no se posee suficiente evidencia para asociar órdenes al modelo *ARMA – TGARCH*.

Para el caso de Grupo Bimbo,

Modelo - BIMBO	AIC	BIC
<i>ARMA(1, 1)</i>	-10315.5	-10300.1
<i>ARMA(1, 2)</i>	-10313.8	-10293.3
<i>ARMA(2, 1)</i>	-10313.8	-10293.3
<i>ARMA(2, 2)</i>	-10311.5	-10285.8

Cuadro 4.17: Resultado de ajustar modelos *ARMA* a la serie de rendimientos de la acción *BIMBO*.

Donde el modelo $ARMA(1, 1)$ posee valores de AIC y BIC respecto de los demás. Por ello, las gráficas de la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los residuales al cuadrado resultado del ajuste del modelo propuesto con relación a la serie de rendimientos de la acción son

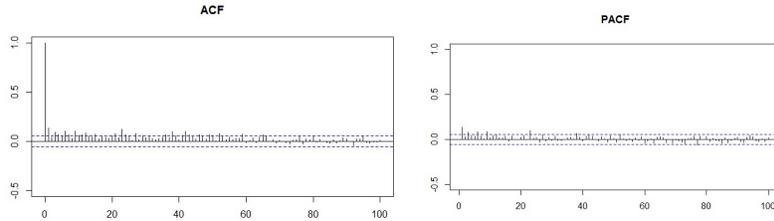


Figura 4.17 Gráficas del comportamiento de las FAC y FACP de la serie del cuadrado de los residuales obtenidos al ajustar un $ARMA(1,1)$ a la serie de rendimientos de la acción BIMBO.

Llegando a que no se posee evidencia suficiente para asociar órdenes al modelo $ARMA - TGARCH$ para esta acción.

De lo anterior, con el fin de corroborar o refutar los resultados obtenidos, fue llevado a cabo el análisis previamente expuesto para los $GARCH$ y $EGARCH$, de donde se obtuvo lo siguiente para América Móvil,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
AMX	$TGARCH(1, 1)$	$\omega_0 = 0.01364667$	4.2540×10^{-3}	-5.507096	-5.486572
		$\omega_1 = 0.10309385$	3.3513×10^{-2}		
		$v_1 = 0.03944237$	2.7541×10^{-1}		
		$\gamma_1 = -0.13639404$	2.8529×10^{-1}		
	$TGARCH(1, 2)$	$\omega_0 = 3.9065 \times 10^{-3}$	2.389×10^{-3}	-5.503466	-5.478838
		$\omega_1 = 5.1714 \times 10^{-2}$	2.389×10^{-2}		
		$v_1 = 1.0000 \times 10^{-8}$	1.039×10^{-1}		
		$v_2 = 7.0927 \times 10^{-1}$	1.368×10^{-1}		
	$TGARCH(2, 1)$	$\omega_0 = 1.3989 \times 10^{-2}$	3.475×10^{-1}	-5.508402	-5.479669
		$\omega_1 = 8.4697 \times 10^{-2}$	3.447×10^{-2}		
		$\omega_2 = 3.9928 \times 10^{-2}$	2.192×10^{-2}		
		$v_1 = 1.0000 \times 10^{-8}$	2.356×10^{-1}		
	$TGARCH(2, 2)$	$\gamma_1 = -2.5717 \times 10^{-1}$	3.003×10^{-1}	-5.500266	-5.467428
		$\gamma_2 = 1.0000 \times 10^{-1}$	2.871×10^{-2}		
		$\omega_0 = 1.3989 \times 10^{-2}$	2.389×10^{-3}		
		$\omega_1 = 0.05171450$	2.389×10^{-2}		
$\omega_2 = 0.00000001$		9.354×10^{-6}			
$v_1 = 0.00000001$		1.039×10^{-1}			
	$v_2 = 0.70926678$	1.368×10^{-1}			
	$\gamma_1 = -0.75903641$	3.475×10^{-1}			
	$\gamma_2 = -0.00685558$	0			

Cuadro 4.18: Resultado de ajustar modelos $TGARCH$ a la serie de rendimientos de la acción AMX.

Siendo el $ARMA - TGARCH(1, 1)$ el que debiera ser seleccionado para esta acción.

Para Grupo Televisa,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
TLEVISA	TGARCH(1, 1)	$\omega_0 = 0.00018548$	5.061×10^{-5}	-4.163748	-4.143224
		$\omega_1 = 0.01274703$	3.777×10^{-3}		
		$v_1 = 0.97734867$	4.031×10^{-3}		
		$\gamma_1 = 0.99999999$	2.067×10^{-2}		
	TGARCH(1, 2)	$\omega_0 = 0.00031939$	1.171×10^{-4}	-4.377024	-4.352396
		$\omega_1 = 0.02335134$	7.0878×10^{-3}		
		$v_1 = 0.14946122$	1.5776×10^{-1}		
		$v_2 = 0.81050452$	1.5690×10^{-1}		
	TGARCH(2, 1)	$\omega_0 = 0.00018147$	4.953×10^{-5}	-3.672083	-3.643350
		$\omega_1 = 0.01271580$	3.750×10^{-3}		
		$\omega_2 = 0.00000001$	0		
		$v_1 = 0.97766689$	3.939×10^{-3}		
		$\gamma_1 = 0.99999999$	2.035×10^{-2}		
	TGARCH(2, 2)	$\omega_0 = 0.00032312$	1.199×10^{-4}	-4.401808	-4.368970
		$\omega_1 = 0.02256624$	1.1782×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.00104318$	1.1579×10^{-2}		
$v_1 = 0.14189667$		1.6578×10^{-1}			
$v_2 = 0.81761048$		1.6380×10^{-1}			
$\gamma_1 = 0.99999999$		2.8814×10^{-2}			
$\gamma_2 = 0.99999999$		7.8658×10^{-2}			

Cuadro 4.19: Resultado de ajustar modelos TGARCH a la serie de rendimientos de la acción TLEVISA.

Es decir, el $ARMA - TGARCH(2, 2)$ es el seleccionado para esta acción.

Para el caso de la acción de Grupo Financiero Banorte,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
GFNORTE	TGARCH(1, 1)	$\omega_0 = 0.00098661$	4.044×10^{-4}	-5.270937	-5.250413
		$\omega_1 = 0.10990526$	2.3271×10^{-2}		
		$v_1 = 0.85793008$	3.7171×10^{-2}		
		$\gamma_1 = 0.07665497$	1.0609×10^{-1}		
	TGARCH(1, 2)	$\omega_0 = 0.0012660$	5.129×10^{-4}	-5.264201	-5.239573
		$\omega_1 = 0.1573316$	2.9073×10^{-2}		
		$v_1 = 0.2260758$	1.1208×10^{-1}		
		$v_2 = 0.5785207$	1.1081×10^{-1}		
	$\gamma_1 = 0.1131508$	1.0311×10^{-1}			

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
GFNORTE	TGARCH(2,1)	$\omega_0 = 0.00098783$	4.034×10^{-4}	-5.222814	-5.194081
		$\omega_1 = 0.11000870$	2.324×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.00000001$	0		
		$v_1 = 0.85772595$	3.710×10^{-2}		
		$\gamma_1 = 0.08127626$	1.064×10^{-1}		
		$\gamma_2 = 0.08520096$	0		
	TGARCH(2,2)	$\omega_0 = 0.00126599$	5.129×10^{-4}	-5.260998	-5.228161
		$\omega_1 = 0.15733232$	2.907×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.00000001$	0		
		$v_1 = 0.22606947$	1.121×10^{-1}		
		$v_2 = 0.57852762$	1.108×10^{-1}		
		$\gamma_1 = 0.11316130$	1.031×10^{-1}		
		$\gamma_2 = 0.12858628$	0		

Cuadro 4.20: Resultado de ajustar modelos TGARCH a la serie de rendimientos de la acción GFNORTE.

De donde se observa que el *ARMA – TGARCH(1,1)* es el modelo que debiera ser considerado bajo los criterios de selección definidos.

Para Cementos Mexicanos,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC	
CEMEX	TGARCH(1,1)	$\omega_0 = 0.00023943$	9.267×10^{-5}	-4.505577	-4.485054	
		$\omega_1 = 0.07137386$	1.255×10^{-2}			
		$v_1 = 0.93543557$	1.169×10^{-2}			
		$\gamma_1 = 0.54350473$	1.182×10^{-1}			
	TGARCH(1,2)	$\omega_0 = 0.00035865$	1.494×10^{-4}	-4.355544	-4.330915	
		$\omega_1 = 0.11891875$	1.9345×10^{-2}			
		$v_1 = 0.21734382$	8.0561×10^{-2}			
		$v_2 = 0.67682504$	7.9421×10^{-2}			
			$\gamma_1 = 0.49360070$	1.1143×10^{-1}		
	TGARCH(2,1)	$\omega_0 = 0.00023546$	9.116×10^{-5}	-4.021575	-3.992842	
		$\omega_1 = 0.07046297$	1.243×10^{-2}			
		$\omega_2 = 0.00000001$	0			
		$v_1 = 0.93627512$	1.155×10^{-2}			
		$\gamma_1 = 0.55722093$	1.208×10^{-1}			
		$\gamma_2 = -0.34035049$	0			
	TGARCH(2,2)	$\omega_0 = 0.00035865$	1.494×10^{-4}	-4.352340	-4.319502	
		$\omega_1 = 0.11891820$	1.934×10^{-2}			
		$\omega_2 = 0.00000001$	0			
		$v_1 = 0.21734555$	8.056×10^{-2}			
		$v_2 = 0.67682368$	7.942×10^{-2}			
$\gamma_1 = 0.49360050$		1.114×10^{-1}				
		$\gamma_2 = -0.14232187$	0			

Cuadro 4.21: Resultado de ajustar modelos TGARCH a la serie de rendimientos de la acción CEMEX.

Siendo el $ARMA - TGARCH(1, 1)$ el considerado puesto que posee los valores de AIC y BIC menores con relación a los demás.

Para Grupo Bimbo,

Acción	Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
BIMBO	$TGARCH(1, 1)$	$\omega_0 = 0.071054$	2.973×10^{-4}	-5.156864	-5.136340
		$\omega_1 = 0.06986969$	1.8764×10^{-2}		
		$v_1 = 0.90202144$	2.9709×10^{-2}		
		$\gamma_1 = 0.37239278$	1.4642×10^{-1}		
	$TGARCH(1, 2)$	$\omega_0 = \mathbf{0.00096584}$	$\mathbf{3.775 \times 10^{-4}}$	-5.194413	-5.169784
		$\omega_1 = \mathbf{0.10789858}$	$\mathbf{2.4960 \times 10^{-2}}$		
		$v_1 = \mathbf{0.28842470}$	$\mathbf{1.5163 \times 10^{-1}}$		
		$v_2 = \mathbf{0.56838389}$	$\mathbf{1.4833 \times 10^{-1}}$		
	$TGARCH(2, 1)$	$\omega_0 = 0.00070975$	2.974×10^{-4}	-5.041460	-5.012727
		$\omega_1 = 0.06995092$	1.878×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.00000001$	9.583×10^{-5}		
		$v_1 = 0.90201068$	2.973×10^{-2}		
		$\gamma_1 = 0.36838038$	1.463×10^{-1}		
	$TGARCH(2, 2)$	$\omega_0 = 0.00096584$	3.775×10^{-4}	-5.191213	-5.158375
		$\omega_1 = 0.10789868$	2.496×10^{-2}		
		$\omega_2 = 0.00000001$	3.005×10^{-4}		
$v_1 = 0.28842312$		1.516×10^{-1}			
$v_2 = 0.56838527$		1.483×10^{-1}			
$\gamma_1 = 0.32360376$		1.343×10^{-1}			
	$\gamma_2 = 0.14075794$	0			

Cuadro 4.22: Resultado de ajustar modelos $TGARCH$ a la serie de rendimientos de la acción BIMBO.

De donde se obtiene que el modelo $ARMA - TGARCH(1, 2)$ es el seleccionado para la acción BIMBO.

Finalmente, se procede a estimar los AIC y BIC del portafolio en su conjunto, es decir,

Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
$TGARCH(1, 1)$	$\omega_0 = 0.0001935843$	6.647×10^{-5}	-5.782357	-5.761833
	$\omega_1 = 0.03432063$	1.003×10^{-2}		
	$v_1 = 0.9563833828$	1.112×10^{-2}		
	$\gamma_1 = 0.9047439668$	3.816×10^{-1}		
$TGARCH(1, 2)$	$\omega_0 = \mathbf{0.00030256}$	$\mathbf{1.211 \times 10^{-4}}$	-5.790123	-5.765495
	$\omega_1 = \mathbf{0.05310259}$	$\mathbf{1.6908 \times 10^{-2}}$		
	$v_1 = \mathbf{0.39009126}$	$\mathbf{2.6129 \times 10^{-1}}$		
	$v_2 = \mathbf{0.54202020}$	$\mathbf{2.5386 \times 10^{-1}}$		
	$\gamma_1 = \mathbf{0.86443310}$	$\mathbf{3.7969 \times 10^{-1}}$		

Modelo	Coefficientes	Error estándar	AIC	BIC
<i>TGARCH</i> (2,1)	$\omega_0 = 0.00019477$	6.743×10^{-5}	-5.600629	-5.571896
	$\omega_1 = 0.03471930$	1.018×10^{-2}		
	$\omega_2 = 0.00000001$	1.439×10^{-4}		
	$v_1 = 0.95595880$	1.134×10^{-2}		
	$\gamma_1 = 0.89500252$	3.787×10^{-1}		
	$\gamma_2 = 0.31949958$	0		
<i>TGARCH</i> (2,2)	$\omega_0 = 0.00030256$	1.211×10^{-4}	-5.786920	-5.754083
	$\omega_1 = 0.05310244$	1.691×10^{-2}		
	$\omega_2 = 0.00000001$	0		
	$v_1 = 0.39009342$	2.613×10^{-1}		
	$v_2 = 0.54201830$	2.539×10^{-1}		
	$\gamma_1 = 0.86443357$	3.797×10^{-1}		
	$\gamma_2 = 0.33452072$	0		

Cuadro 4.23: Resultado de ajustar modelos *TGARCH* a la serie de rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

De donde el modelo *ARMA – TGARCH*(1, 2) es el considerado ya que su AIC y BIC son menores respecto al de los demás.

Cabe señalar que, de los resultados anteriores, se comprueba que los coeficientes v_j son no negativos y la suma de los valores de ω_i son menores a 1 para todos los casos.

De los modelos obtenidos para cada familia referente al portafolio de estudio, se comparan sus AIC y BIC para determinar cual de ellos es catalogado como preferente. Es así que:

Modelo	AIC	BIC
<i>ARMA – GARCH</i> (1, 2)	-6.222109	-6.205690
<i>ARMA – EGARCH</i>(1, 1)	-6.2304	-6.2099
<i>ARMA – TGARCH</i> (1, 2)	-5.790123	-5.765495

Cuadro 4.24: Resultados de las pruebas de *backtesting* con relación al ajuste de modelos heterocedásticos a la serie de rendimientos del portafolio de estudio propuesto.

Obteniendo que el modelo *ARMA – EGARCH*(1,1) parecería ser la metodología que arroja los resultados más coherentes y sólidos tomando en cuenta el riesgo de la cartera y su composición. Cabe mencionar que, al ajustar un proceso *ARMA – EGARCH*(1,1), la serie de rendimientos logarítmicos toma en cuenta la asimetría de los mismos, lo que se acopla a la forma natural de la serie, descrita en el Capítulo Uno.

Al considerar a la volatilidad como un proceso estocástico lo que se busca es ajustar un modelo que permita describir y analizar su comportamiento presente y a partir de éste pronosticar movimientos futuros. A continuación se muestran los resultados obtenidos de la aplicación de la modelación de la varianza condicionada de los *ARCH – GARCH* frente a los calculados por los métodos convencionales de estimación del riesgo.

4.2.4. Resultados del VaR

Teniendo los modelos y los órdenes que se emplearán para el cálculo del VaR, se estima el valor de la desviación estándar para cada uno de ellos, la cuál se sustituirá en la fórmula del VaR Delta-Normal del portafolio, es decir

$$VaR = \sigma_p \cdot Z_\alpha \cdot P \cdot \sqrt{t}$$

Las proyecciones de las desviaciones estándar son calculadas haciendo uso de la función “*predict*” de la mismas paqueterías “*rugarch*” y “*fgarch*” de R antes empleadas. Análogamente fueron aplicadas pruebas de *backtesting* a dichas estimaciones. Retomando los VaR obtenidos en el Capítulo Dos, se observa lo siguiente:

Metodología	VaR estimado	Backtesting (Kupiec)	Conclusión
Delta-Normal	\$17,519.07	221.98 > 0.04	El modelo es consistente
Simulación histórica	\$17,038.53	243.82 > 0.04	El modelo es consistente
Simulación Monte Carlo	\$17,750.87	204.18 > 0.04	El modelo es consistente
Delta -Normal <i>ARMA – GARCH</i>	\$16,545.65	269.92 > 0.04	El modelo es consistente
Delta -Normal <i>ARMA – EGARCH</i>	\$16,668.19	266.15 > 0.04	El modelo es consistente
Delta -Normal <i>ARMA – TGARCH</i>	\$16,785.41	254.92 > 0.04	El modelo es consistente

Cuadro 4.25: Comparativo de resultados de las metodologías del VaR convencionales seleccionados vs metodologías con supuestos heterocedásticos propuestos.

Es posible notar que, el promedio de los montos obtenidos bajo supuestos heterocedásticos, para el portafolio propuesto, resultan menores en comparación a los estimados mediante

métodos convencionales en el Capítulo Dos.

Si bien resulta sofisticado emplear estas metodologías en comparación de los métodos convencionales, con mayor certeza es posible confiar en que el valor de VaR estimado es más preciso y posee un argumento teórico robusto que lo respalda. Adicionalmente esa pequeña diferencia existente entre los montos puede ser invertida con el fin de obtener rendimientos, lo que en la vida real es visto como práctica común.

Por otro lado, cabe destacar que uno de los grandes motivos que argumentan las entidades con relación a considerar el CVaR como medida estándar de riesgo, es el hecho de que los montos obtenidos suelen ser demasiado altos respecto de los observados para el VaR. Se espera que bajo supuestos heterocedásticos dicha diferencia se reduzca significativamente.

Es importante señalar que si bien el método de simulación histórica brinda una estimación de VaR menor, las desventajas de subestimar el riesgo del portafolio a través de la omisión de eventos extremos son latentes. Al considerar eventos pasados, estos pueden estar aportando información que no necesariamente reflejen las condiciones actuales del mercado, aún si el periodo de tiempo de la información es amplio. Al tratarse de una muestra relativamente grande, el riesgo de que lo anterior esté sucediendo es altamente probable. No obstante, si a dicho método se añaden supuestos de heterocedasticidad condicional se obtienen estimaciones más robustas del VaR y por lo tanto de CVaR.

Este proceso combinado es denominado Simulación Histórica Filtrada, que bien ofrece un panorama del riesgo aún más acorde al comportamiento de la volatilidad de los activos pertenecientes a la cartera. Este método a su vez ofrece estimaciones de CVaR más “reales” y por ende funcionales.

De lo anterior se prosigue, de forma análoga, a estimar y comparar los VaR y CVaR bajo esta metodología.

4.2.5. Simulación Histórica Filtrada

Es sabido que los efectos de las crisis no pueden predecirse. Asimismo es casi un hecho que si se cuenta con una reserva estimada a partir del CVaR, éstos pueden ser mitigados e incluso darse el caso de cubrirlos en su totalidad evitando que la entidad se vea afectada. Por lo tanto, es preferible contar con capital destinado a aminorar eventos de esta índole a pagar y obtener recursos de otras fuentes que a su vez pueden acrecentar el problema y generar mayores consecuencias para la entidad.

Para estimar el VaR y CVaR bajo supuestos de heterocedasticidad condicional, se tomará en cuenta la estructura de la metodología de simulación histórica. Este método alternati-

vo, desarrollado por Adesi (2000), es conocido como simulación histórica filtrada (*SHF*) y consiste en una metodología semiparamétrica que combina los supuestos de heterocedasticidad condicional y la obtención de los rendimientos históricos del portafolio de tal manera que estos consideren las condiciones del mercado y la volatilidad condicional pasados.

Se trata de un esquema que se ajusta a valores altos de curtosis y efectos de asimetría, por lo que hereda las ventajas del método de simulación histórica aunado a la exactitud de interpretación del comportamiento de las volatilidades de los modelos *ARCH*–*GARCH*.

Se le da el nombre de “filtrada” debido a que la simulación se efectúa sobre los residuales estandarizados del modelo *GARCH* utilizado y no sobre los rendimientos.

Si al valor residual diario se le divide entre la volatilidad diaria del rendimiento, se obtienen residuales estandarizados los que a su vez son aproximadamente independientes e idénticamente distribuidos, es decir, si

$$Z_t = \frac{\epsilon_t}{\sigma_t},$$

entonces $\{Z_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias aproximadamente independientes e idénticamente distribuidas.

Estos residuales ayudan modelar la serie de rendimientos del portafolio de estudio propuesto siendo multiplicados por el término de volatilidad condicional correspondiente. La serie volatilidad histórica será estimada de manera recursiva siguiendo modelos *GARCH* o alguna de sus variantes.

La metodología de la simulación histórica filtrada a seguir es la siguiente:

1. Se obtienen los residuales estandarizados Z_t .

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_t \end{pmatrix}.$$

2. Los Z_t se dividen entre 100 y a su vez son multiplicados por el valor de volatilidad a tiempo t . Con esto se considera la volatilidad vigente en la estimación de pérdidas y ganancias de la serie.
-

$$\begin{pmatrix} (\frac{Z_1}{100}) * \sigma_t \\ (\frac{Z_2}{100}) * \sigma_t \\ \vdots \\ (\frac{Z_t}{100}) * \sigma_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^* \\ f_2^* \\ \vdots \\ f_t^* \end{pmatrix} .$$

3. El último precio conocido a tiempo t es multiplicado por el exponencial de cada uno de los resultados previamente obtenidos, es decir, como factores de acumulación con tasas con composición continua.

$$Y_t = \begin{pmatrix} Precio_t * \exp(f_1^*) \\ Precio_t * \exp(f_2^*) \\ \vdots \\ Precio_t * \exp(f_t^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Precio_1^* \\ Precio_2^* \\ \vdots \\ Precio_t^* \end{pmatrix} ,$$

que corresponderá a la “nueva” series de precios.

4. Se procede a calcular los rendimientos logarítmicos entre el precio estimado y último conocido.

$$Y_t = \begin{pmatrix} \log(\frac{Precio_1^*}{Precio_t}) \\ \log(\frac{Precio_2^*}{Precio_t}) \\ \vdots \\ \log(\frac{Precio_t^*}{Precio_t}) \end{pmatrix} ,$$

con lo que se obtiene la serie de rendimientos logarítmicos $\{Y_t\}$.

5. Cada entrada es multiplicada por el valor inicial del portafolio W_t .
6. Se ordenan de menor a mayor los resultados obtenidos y estimados cuyo cuantil $1 - \alpha$ corresponderá al VaR de la cartera.

Comparando los resultados obtenidos por las metodologías de simulación histórica, así como bajos los modelos $ARMA - GARCH$, $ARMA - EGARCH$ y $ARMA - TGARCH$ anteriormente determinados, se tiene que, por SHF ,

Metodología	VaR estimado	Backtesting (Kupiec)	Conclusión
Simulación histórica	\$17,038.53	243.82 > 0.04	El modelo es consistente
Delta - Normal $ARMA - GARCH$	\$16,545.65	269.92 > 0.04	El modelo es consistente
$SHF - ARMA - GARCH(1, 2)$	\$16,601.95	266.15 > 0.04	El modelo es consistente
$SHF - ARMA - EGARCH(1, 1)$	\$16,334.96	285.13 > 0.04	El modelo es consistente
$SHF - ARMA - TGARCH(1, 2)$	\$16,732.34	262.40 > 0.04	El modelo es consistente

Cuadro 4.26: Comparativo de resultados de estimación del VaR a través de las metodologías propuestas incorporando el método de SHF .

Los resultados anteriores se encuentran fundamentados en los criterios de selección obtenidos y como bien lo indican, las variantes de SHF parecieran ser la opción recomendada para estimar el VaR de la cartera, destacando el caso de $SHF - ARMA - EGARCH(1, 1)$.

4.2.6. Resultados del CVaR

Si bien el CVaR sigue siendo considerada en el medio como una medida de riesgo poco práctica dado que supone valores de requerimiento de capital de gran magnitud, no hay que perder de vista que su principal función es la de determinar la cantidad promedio de los montos que exceden el VaR y por lo tanto es un monto que sirve de blindaje cuando ocurren eventos catastróficos.

No sólo se ha mostrado un camino de estimación del riesgo que se encuentra muy apegado a la realidad financiera que rodea el comportamiento de las variables, sino que se también se ha optimizado el monto total de VaR.

Con respecto al CVAR, realizando un análisis análogo y tomando como punto de comparación los métodos de simulación se llegó a

Metodología	CVaR estimado
Simulación histórica	\$23,035.27
Simulación Monte Carlo	\$26,729.85
<i>SHF</i> - <i>GARCH</i> (1, 2)	\$21,898.23
<i>SHF</i> - <i>EGARCH</i>(1, 1)	\$21,645.23
<i>SHF</i> - <i>TGARCH</i> (1, 2)	\$24,815.22

Cuadro 4.27: Comparativo de resultados de estimación del CVaR a través de las metodologías propuestas.

Es así que el método de *SHF* - *EGARCH*(1, 1) muestra los valores de VaR y CVaR mínimos. Como se mencionó anteriormente, este proceso capta el comportamiento asimétrico de la volatilidad y por ende es un modelo cuya aplicación arroja resultados confiables.

Por estas razones el método que debe poseer mayor preferencia en mercados emergentes para la estimación de las medidas de riesgo de VaR y CVaR, respecto del portafolio de estudio descrito, es la *SHF* considerando como insumo de volatilidad condicional el proceso *EGARCH* de orden (1, 1).

A continuación se muestra un resumen de las fortalezas, debilidades y principales propiedades empíricas de los modelos estudiados a lo largo de éstos capítulos.

Tipo de estimación	Metodología	Ventajas	Desventajas
Paramétrica	Delta-Normal	<ul style="list-style-type: none"> *El cálculo de los parámetros es sencillo. *Su cómputo es rápido. *Es un buen modelo para datos que presentan un comportamiento Normal. 	<ul style="list-style-type: none"> *Entre mayor sea el número de activos que componen el portafolio más complicado se vuelve la tarea de obtención de los parámetros del modelo y por lo tanto la estimación del VaR. *Es un método impreciso para activos que no presentan linealidad en sus posiciones o bien para aquellos que no se distribuyen de una forma normal (la gran mayoría) y presentan gran acumulación en las colas.
No Paramétrica	Simulación histórica	<ul style="list-style-type: none"> *No es necesario realizar supuestos de normalidad de los datos. *No es necesario estimar varianzas, covarianzas ni otro tipo de parámetros. *Son considerados los valores extremos de los rendimientos observados y por lo tanto en el efecto de colas pesadas de la distribución es tomado en cuenta *Son modelos sencillos de aplicar. 	<ul style="list-style-type: none"> *Depende de la disponibilidad de la información. *Es poco preciso para activos nuevos o con poca historia. *Cuanto menor sea el rango de los datos utilizados, mayor será la probabilidad de no considerar eventos extremos y por ende se estará subestimando la volatilidad del activo.
	Simulación Monte Carlo	<ul style="list-style-type: none"> *No es necesario asumir una distribución de los rendimientos de los activos. *Se pueden añadir al proceso las consideraciones que el inversionista desee o determine como relevantes. 	<ul style="list-style-type: none"> *Entre mayor sea el número de consideraciones adicionadas al modelo se requerirá de mayor capacidad informática. *Entre más grande sea el número de activos en la cartera, se requerirá de una infraestructura informática más robusta.
Semiparamétrica	Delta - Normal <i>GARCH</i>	<ul style="list-style-type: none"> *Ajusta la forma de la distribución de los rendimientos de los activos. *Incorpora la consideración de las varianzas condicionales pasadas dentro de la estimación de la varianza presente. *Describen de mejor forma el efecto de agrupamiento de volatilidad de la serie. 	<ul style="list-style-type: none"> *Asume que los valores positivos y negativos tienen los mismos efectos sobre la volatilidad. *Heredan las desventajas de las metodologías Delta-Normal.
	Delta-Normal <i>EGARCH</i>	<ul style="list-style-type: none"> *Estiman la varianza condicional de los datos de forma asimétrica. *Consideran los efectos de los movimientos positivos y negativos de las volatilidades observadas. *No restringen el signo de los posibles valores de sus parámetros 	<ul style="list-style-type: none"> *Las estimaciones de los parámetros puede resultar no tan simple como las empleadas en otros métodos. *Entre mayor sea el periodo de tiempo de estudio, mayores serán los recursos empleados para estimar los parámetros. *Su no linealidad los convierte en modelos más difíciles de utilizar. *Heredan las desventajas de las metodologías Delta-Normal.
	Delta - Normal <i>TGARCH</i>	<ul style="list-style-type: none"> *Captura la presencia de la asimetría en la varianza de los datos. *Incorporan la estimación de la magnitud de las colas. *Recuperan la linealidad de los parámetros. 	<ul style="list-style-type: none"> *La estimación de los parámetros no es trivial. *Heredan las desventajas de las metodologías Delta-Normal.

Tipo de estimación	Metodología	Ventajas	Desventajas
Semiparamétrica	Simulación histórica Filtrada <i>GARCH</i>	<ul style="list-style-type: none"> *Ajusta la forma de la distribución de los rendimientos de los activos. *Incorpora la consideración de las varianzas condicionales pasadas dentro de la estimación de la varianza presente. *Describen de mejor forma el efecto de agrupamiento de volatilidad de la serie. *Son modelos sencillos de aplicar. 	<ul style="list-style-type: none"> *Depende de la disponibilidad de la información. *Es poco preciso para activos nuevos o con poca historia *Asume que los valores positivos y negativos tienen los mismos efectos sobre la volatilidad.
	Simulación histórica Filtrada <i>EGARCH</i>	<ul style="list-style-type: none"> *Estiman la varianza condicional de los datos de forma asimétrica. *Consideran los efectos de los movimientos positivos y negativos de las volatilidades observadas. *No restringe el signo de los posibles valores de sus parámetros. *Son modelos sencillos de aplicar. 	<ul style="list-style-type: none"> *Depende de la disponibilidad de la información. *Es poco preciso para activos nuevos o con poca historia. *La estimación de sus parámetros no es simple. *Entre mayor sea el periodo de tiempo de estudio, mayores serán los recursos empleados para estimar los parámetros. *Su no linealidad los convierte en modelos más difíciles de utilizar.
	Simulación histórica Filtrada <i>TGARCH</i>	<ul style="list-style-type: none"> *Incorporan la estimación de la magnitud de las colas. *Captura la presencia de la asimetría en la varianza de los datos. *Recuperan la linealidad de los parámetros *Son modelos sencillos de aplicar. 	<ul style="list-style-type: none"> *Depende de la disponibilidad de la información. *Es poco preciso para activos nuevos o con poca historia *La estimación de los parámetros no es trivial.

Cuadro 4.28: Resumen de propiedades, ventajas y desventajas de las metodologías de estimación del riesgo propuestas.

Conclusiones

Los métodos de administración de riesgos frecuentemente usados por las entidades financieras han sido rebasados y, en algunos casos, pueden resultar insuficientes.

Para mostrar un ejemplo de lo anterior, el enfoque de estudio de este trabajo se basó en considerar y analizar algunos de los procedimientos convencionales de medición de riesgo tanto paramétricos como no paramétricos, comprendidos por los métodos Delta-Normal, simulación histórica y simulación Monte Carlo, comparando los resultados frente a aquellos estimados mediante modelos semiparamétricos y supuestos de heterocedasticidad como lo son el método Delta-Normal bajo supuestos heterocedásticos y la simulación histórica filtrada.

Para ello, el portafolio de estudio fue conformado por acciones “representativas” del mercado financiero mexicano, país donde las características de inversión suelen ser susceptibles a cambios por movimientos en el mercado internacional y la incertidumbre acerca de la ocurrencia de eventos de recesión es latente.

La elección de modelos *GARCH*, *EGARCH* y *TGARCH* sobre modelos del tipo *ARMA* radica en que estos últimos no contemplan el efecto de agrupamiento de volatilidad comúnmente observado en las series financieras y asimismo requieren del supuesto de homocedasticidad, factor que en la práctica ha sido demostrado como inválido para este tipo de series. Sin embargo, las propiedades de los modelos *ARMA* son de gran importancia para la aplicación de los modelos heterocedásticos, ya que a través del estudio de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, así como de la expresión del modelo heterocedástico en su forma *ARMA*, es posible tener una noción del orden que corresponderá al mismo.

El VaR, a pesar de ser catalogada como la medida estándar de riesgo y gozar de una gran popularidad debido a su sencilla interpretación y fácil cálculo, en la práctica presenta inconvenientes funcionales sobre todo en cuestiones de diversificación del riesgo respecto de la composición de activos que conforman la cartera o bien, su uso en escenarios con niveles de volatilidad mediano-alto, como se caracterizan ser los mercados emergentes. Es por ello

que hacer uso y basar las estrategias de inversión en los resultados obtenidos por el VaR, en esta clase de contextos, puede traducirse en una subestimación del riesgo real de los activos.

Siendo así, se propuso la consideración del CVaR como referente del riesgo financiero dado que ofrece solución a aquellos inconvenientes exhibidos por el VaR. No obstante, como su definición lo indica, su obtención deriva directamente de la metodología de estimación del VaR previamente aplicada. Por lo anterior, fue necesario establecer el método preferente de cálculo del VaR, mismo que fue seleccionado a partir del comparativo de entre las propuestas exhibidas.

Fue así que, a pesar de que en la tesis se observa que el método de simulación histórica es altamente efectivo, es a través de la metodología de simulación histórica filtrada, en su versión $SHF - EGARCH(1,1)$ de entre los órdenes (i,j) , con $i \in \{1,2\}$ y $j \in \{1,2\}$, aquel camino que arroja los menores valores de VaR y CVaR considerando a su vez los movimientos aleatorios de las volatilidades y su asimetría. Esto adicionalmente validado por la aplicación de pruebas de respaldo, AIC y BIC.

Los criterios de decisión que se sugieren para efectuar el ajuste de modelos heterocedásticos sobre cierta serie financiera dependerán directamente de las características de su comportamiento en el tiempo. Es así que si se trata de una serie que presenta colas pesadas, se recomienda el ajuste del modelo $TGARCH$ o bien si se observa asimetría en las observaciones es aconsejable optar por los modelos $EGARCH$.

Por último, dado que la $SHF - EGARCH(1,1)$ ofrece el valor de CVaR más pequeño respecto a los obtenidos por el resto de las metodologías, satisface de esta manera el principal inconveniente y desagrado de los participantes financieros de señalar los montos obtenidos mediante el CVaR comúnmente elevados. De lo anterior, se dispone del monto justificado estadísticamente para hacer frente al riesgo financiero que rodea los activos y, por consecuencia, es posible tomar mejores decisiones de inversión basadas en riesgo.

Apéndices

Apéndice A

Algoritmo de Box Müller

A.1. Descripción del algoritmo

Proposición A.1.1.

Sean U_1 y U_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $Unif(0, 1)$. Entonces, sean

$$X = (-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = (-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi U_2)$$

son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $N(0, 1)$.

El esquema anterior utiliza dos números aleatorios en cada iteración, siendo a su vez que genera dos valores normales estándar.

Código en R

```
size = 15000

u = runif(size)
v = runif(size)

for (i in 1:size){
  x[i] = sqrt(-2*log(u[i]))*cos(2*pi*v[i])
  y[i] = sqrt(-2*log(u[i]))*sin(2*pi*v[i])
}
```

```
tab <- c(x,y)
```

```
write.table(tab, "somefile.xls", sep = "\t", row.names = F)
```

Apéndice B

Archivos auxiliares y códigos en R

Los materiales, scripts y hojas de cálculo utilizados para obtener los resultados mostrados en la presente tesis pueden ser consultados libremente a través del sitio GitHub accediendo a la siguiente dirección:

<https://github.com/MartinCamarena/TesisMC>.

Bibliografía

Bibliografía

Abramowitz, M., Stegun, I. (1964), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series # 55.

Acerbi, C., Nardio, C. and Sirtori, C. (2001), *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*, Consultative document.

Artzner, P., Delbaen, F. and Heath, D. (1999), *Coherent measure of risk*, Mathematical Finance Volume 9 - Issue 3, 203-228.

Barone Adesi, G., Giannopoulos, K., and Vosper, L. (2000), *Filtering historical simulation. Backtest analysis*, Working paper of the School of Economic Sciences and Business of the Neapolis University, 4-21.

Basel Committee on Banking Supervision (2013), *Fundamental review of the trading book*, Consultative document.

Berilant, J. and Teugels, J. (1996), *Statistics of Extremes: Theory and Applications*, Wiley, First edition.

Bollerslev, Tim (1986), *Generalized Autorregresive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics Volume 31 - Issue 3, 307-327.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C. (1970), *The Time Series Analysis. Forecasting and control*, Wiley, First edition.

Breusch, T. S., Pagan, A. R. (1980), *The Lagrange Multiplier Test and its Applications to Model Specification in Econometrics*, The Review of Economic Studies Volume 47, Oxford University, 239-253.

Brockwell, Peter, Davis and Richard (2002), *Introduction to Time series and forecasting*, Springer, Second edition.

Brockwell, Peter (2006), *Time series: theory and methods*, Springer, Second edition.

- Campbell J., A. Lo and A. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Second edition.
- Chío, F. (1853), *Mémoire sur les fonctions connues sous le nom de résultantes ou de déterminants*, Turin: E. Pons.
- Chuan-Hsiang, H. & Wei-han, L. (2010), *An Improved Procedure for VaR/CVaR Estimation under Stochastic Volatility Models*, International Journal of Theoretical and Applied Finance Volume 17 - Issue 2, 1 - 4.
- Damodaran, Aswath (2012), *Investment Philosophies: Successful Strategies and the Investors Who Made Them Work*, Wiley, Second edition.
- Daniélsson, Jon (2013) *Fat Tails, VaR and Subadditivity*, Journal of Econometrics Volume 172 - Issue 2, 283 - 291.
- Francq, Christian (2010), *Garch Models*, Wiley, First edition.
- Geert, B., Campbell, R. (1995), *Time Varying World Market Integration*, The Journal of Finance Volume 50 - No. 2, 403 - 444.
- Giacometti, R. and Lozza, S. (2004), *Risk measures for asset allocation models*, Risk measures for the 21st century, 69 - 86.
- Engle, Robert (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica Volume 50 - Issue 4, 987 - 1007.
- Harcher, Karen (2005), *Essentials of financial risk managements*, Wiley, First edition.
- Haykin, S. (2002), *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Fifth edition .
- Jorion, P. (2003), *Financial Risk Manager Handbook*, GARP, Sixth edition.
- Jorion, P. (2007), *Value-at-Risk: The New Benchmark for Managing Risk*, McGraw-Hill, Third edition.
- Kirchgässner, Gebhard (2013) *Introduction to Modern Time Series Analysis*, Springer, Second edition.
- Kupiec, P.H. (1995), *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*, The Journal of Derivatives Volume 3 - Issue 2, 73 - 84.
- Levene, Howard (1974), *Robust tests for equality of variances*, Journal of the American Statistical Association Volume 69 - No. 346, 364 - 367 .
- Levinson, Norman (1946), *The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction*, Journal of Mathematical Physics Volume 25 - Issue 1 - 4, 261 - 278.
-

- Manganelli, S., Engle, R. (2001), *Value at Risk models in finance*, Working paper No. 75 of the European Central Bank working papers series, 1 - 41.
- Markovitz, Harry (1952), *Portfolio Selection*, The Journal of Finance Volume 7 - No. 1, 77 - 91.
- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, First edition.
- Mody, Ashoka (2004), *What Is an Emerging Market?*, International Monetary Fund Working paper No. 04/177, 1 - 24.
- Nelson, Daniel (1991), *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica Volume 59 - Issue 2, 347 - 370.
- Pérignon, C., Smith, D. (2010), *The level and quality of Value-at-Risk disclosure by commercial banks*, Journal of Banking & Finance Volume 34 - Issue 2, 362 - 377.
- Peters, Edgar (1993), *Chaos and Order in the Capital Markets*, Wiley, Second edition.
- Prigent, Jean-Luq (2007), *Portfolio Optimization and Performance Analysis*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, First edition.
- Sharpe, William (1964), *Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of Risk*, The Journal of Finance Volume 19 - No. 3, 425 - 442.
- Taylor, S.J. (1986), *Modelling financial time series*, Wiley, Second edition.
- Tett, Gillian (2013), *Fool's Gold: The Inside Story of J.P. Morgan and How Wall St. Greed Corrupted Its Bold Dream and Created a Financial Catastrophe*, Free Press, First edition.
- Tsay, Ruey (2005), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, Second edition.
- Van Agtmael, Antoine (2007), *The Emerging Markets Century: How a New Breed of World-Class Companies Is Overtaking the World*, Free Press, First edition.
- Vlaar, Peter and Van den Goorbergh, Rob (1999), *Value-at-Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?*, Working paper of the Nederlandsche Bank, 1 - 37.
- Zakoian, J.M. (1994), *Threshold heteroskedastic models*, Journal of Economic Dynamics and Control Volume 18 - Issue 5, 931 - 955.
-

