UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA

Números como propiedades: disolviendo la tensión entre metafísica y epistemología del realismo acerca de la aritmética

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:
MELISA GUTIÉRREZ VIVANCO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARIO GÓMEZ TORRENTE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., febrero 2018

Agradecimientos

Aprovecho este espacio para expresar una parte de lo mucho que tengo que agradecer. A mi tutor Mario Gómez Torrente le debo el haberme proporcionado la mejor asesoría que yo pudiera imaginar. A su dedicación para escuchar mis ideas con la finalidad de ayudarme a corregirlas y refinarlas, así como a su generosidad para compartir las suyas, les debo el sentimiento de autenticidad que para mí representa este trabajo. A Carmen Curcó le agradezco todo su apoyo. Si bien su respaldo académico fue crucial para concluir este proyecto, su cariño fue simplemente indispensable. A Max Fernández (como lo mencioné desde mi tesis de maestría) le debo el haberme encaminado hacia la filosofía de las matemáticas, que ha sido una de mis mayores pasiones en los últimos 6 años. Del presente trabajo a Max le debo gran parte del contenido, fueron sus objeciones y comentarios las que con frecuencia determinaban el rumbo que tomaba la tesis. A Otávio Bueno le agradezco sus valiosos comentarios acerca de mi posición filosófica respecto a la aritmética. La perspectiva de los sus argumentos antirresalistas fue supremamente enriquecedora. También aprovecho este espacio para agradecerle el invaluable apoyo académico que me ha dado en los últimos dos años. A Carlos Torres le agradezco por ser uno de los primeros profesores que me enseñó a ver la matemática desde una perspectiva filosófica, así como sus valiosos comentarios respecto al presente trabajo.

Agradezco a CONACyT por la beca doctoral que me dio por 4 años y por la beca mixta que me permitió realizar una estancia académica en el Massachusetts Institute of Technology. A los proyectos de investigación 'Términos numéricos e implicatura escalar' (PAPIIT), 'Conocimiento y Esceptisismo' (PAPIIT- 400513) y 'Aspectos Filosóficos de la Modalidad' (CONACyT-16502) por el respaldo en diversas actividades académicas. Agradezco también al Posgrado en Filosofía de la Ciencia (especialmente a Marisela López y a Francisco Hernández Quiroz) por apoyarme con mis estudios de posgrado; a la Facultad de Ciencias por los 12 años de actividad docente y al Instituto de Investigaciones Filosóficas (especialmente a Pedro Stepanenko y a Edgar González Varela) por los 7 años en los que me proporcionó todas las condiciones necesarias para mi desarrollo académico dentro del programa de Estudiantes Asociados.

Finalmente, agradezco a mi familia y amigos por el soporte personal. Especialmente a Pablo, a Aurora, a Paco Larrión y a Ivan Nieblas por el apoyo incondicional. Ellos han sido la mejor familia que elegí.

Números como propiedades: disolviendo la tensión entre metafísica y epistemología del realismo acerca de la aritmética

Melisa Gutiérrez Vivanco

Índice general

Introducción

Este trabajo comenzó con una fuerte intuición de que las entidades matemáticas existen de forma objetiva e independiente de la mente humana. Pero al igual que en la realidad no matemática, en la realidad matemática no todas las entidades que existen son del mismo tipo: es necesario comenzar por un punto específico. Por diversas razones, los números naturales son un buen punto de partida para una investigación filosófica sobre la realidad matemática. Entre las razones matemáticas, por ejemplo, está que la estructura de los números naturales antecede a otras estructuras tanto en un sentido temporal, como en un sentido lógico. La axiomatización de la aritmética en el siglo XIX fue el comienzo de un paradigma en la práctica matemática. Además, la estructura de los números naturales sirve como base para la construcción de los sistemas de números que conforman los ejemplos clásicos de una buena parte de las estructuras algebraicas (Esto es, los números enteros como el ejemplo paradigmático de anillo y de dominio entero; los números racionales como el ejemplo paradigmático de campo numerable; los números reales como ejemplo paradigmático de campo no numerable, etc.). Del lado de las razones filosóficas tenemos que los enunciados aritméticos representan también un paradigma de importantes nociones. En particular, nociones relacionadas con la verdad. Por ejemplo, los enunciados aritméticos son un ejemplo representativo de verdades necesarias que se conocen *a priori*. Finalmente, tenemos razones prácticas; por ejemplo, el hecho de que los numerales–los términos que están por los números en las oraciones–tienen presencia prácticamente en cualquier tipo de discurso, desde los más cotidianos hasta los más puramente científicos.

Este proyecto se enmarca en un programa global en el que desde diferentes enfoques se defiende una postura realista acerca de los números naturales. En este programa se sugiere que los números son propiedades de cierto tipo. El objetivo particular que aquí perseguimos es el de, tras asentar la mencionada postura realista, dar una explicación epistemológica que dé cuenta de nuestro conocimiento aritmético. Esto debe de lograrse teniendo siempre presentes las intuiciones más compartidas acerca de los números naturales. Estas intuiciones son variadas y vienen de diferentes contextos. Por ejemplo, tenemos la intuición de que las verdades aritméticas son atemporales. Esta cualidad de atemporalidad es una consecuencia de que los enunciados aritméticos son necesarios. Si los números son propiedades, no hay una limitación que *prima facie* nos impida explicar la necesidad de los enunciados aritméticos: otros hechos sobre propiedades también son necesarios (por ejemplo, si la propiedad *ser agua* es ejemplificada por x, necesariamente, la propiedad *ser* H_2O es ejemplificada por x). Uno podría pensar que si los números son propiedades, el conocimiento aritmético es *a posteriori* (pensando en que las creencias se justifican mediante la experiencia que nos relaciona con los portadores de las propiedades numérica), pero esto no es así. Tenemos conocimiento *a priori* de las propiedades numéricas al igual que tenemos conocimiento *a priori* de otras propiedades (sabemos *a priori* que la propiedad *ser la nuera de X* es coextensional con la propiedad *ser la esposa de un(a) hijo(a) de X*). También tenemos intuiciones acerca de los números que son menos teóricas. Por ejemplo, tenemos la intuición de que términos como '7', '111_2' y 'VII', están por el mismo números; los niños tienen la intuición de que contar no es mas que 'ir uno más adelante', de que sumar no es mas que agregar cosas, de que restar no es mas que quitar cosas, etc. Todas estas intuiciones han tenido cabida, ya sea implícita o explícitamente, en esta investigación.

En el capítulo 1 daré razones para motivar la defensa de un realismo en cuanto a los números (estos argumentos pueden funcionar también para otras ramas de la matemática). La idea fundamental es que la práctica aritmética–tanto en contextos formales como en contextos informales–tiene la característica de estar profundamente arraigada al uso del lenguaje. Si esto es así, uno pensaría que el lenguaje no nos está 'engañando' de alguna forma mediante el encubrimiento de lo que sería el contenido de las oraciones aritméticas. Si la práctica aritmética es correcta, el uso de su lenguaje es correcto. Si el realismo es correcto, los enunciados aritméticos son literalmente verdaderos, y son verdaderos en un sentido en el que intuitivamente entendemos que cualquier enunciado es verdadero. Esta noción intuitiva sobre lo que quiere decir que una oración sea verdadera la desarrollaré en el capítulo 2. Los enunciados con términos numéricos son verdaderos de forma homogénea con los enunciados no aritméticos que conforman un fragmento importante del lenguaje natural. Este fragmento es aquél en el que la verdad se da en virtud de que las entidades a las que refieren los términos singulares satisfacen las propiedades que los enunciados predican.

La propuesta positiva comienza a desarrollarse en el capítulo 3. Ésta descansa en la idea de que los números son propiedades de cardinalidad de pluralidades, consideradas *como tales* y no como entidades individuales de un tipo complejo (como lo serían, por ejemplo, los conjuntos). Este desarrollo viene acompañado con una propuesta de traducción que ofrece un lenguaje en el que se pueden reconstruir los enunciados de la aritmética y que intuitivamente, se corresponde con la idea de que los números son propiedades. En el capítulo 4 he contrastado los resultados de nuestra propuesta con los de otras propuestas realistas, eligiendo–en virtud de su popularidad entre los naturalistas–aquéllas que consideran a los números como ciertos conjuntos descritos por la Teoría de conjuntos. El objetivo de este contraste es mostrar que una propuesta de los números como propiedades tiene una clara ventaja explicativa (en lo que respecta a los usos de los números en contextos ordinarios) frente a una teoría de los números como conjuntos. Finalmente, el capítulo 5 es la búsqueda de la respuesta al que, bajo la perspectiva de algunos, es el mayor reto filosófico al que se enfrenta una teoría realista. Éste es, el reto epistemológico originalmente presentado por Benacerraf (1973), reformulado posteriormente por Field (1989) y del cual, también he presentado mi propia reformulación en términos de dos requisitos de homogeneidad en el capítulo 2. Si los números existen como entidades abstractas e independientes de la mente humana, es de ellos de lo que hablan los enunciados aritméticos. Por lo tanto, nuestro conocimiento aritmético tiene que ser sobre estas entidades. La propuesta presentada ofrece una explicación epistemológica que tiene como propósito iluminar el conocimiento aritmético que hasta ahora, podía haber parecido misterioso.

Capítulo 1

¿Por qué ser realista?

En este capítulo mi objetivo es motivar una postura realista en matemáticas. En particular, la postura que defenderé a lo largo del trabajo respecto a los números naturales. El primer paso será explicar las razones por las que he decidido tomar como punto de partida la filosofía del lenguaje y de esta manera, abordar la discusión acerca de la realidad aritmética comenzando por la pregunta de cómo es que son verdaderas las proposiciones que involucran términos numéricos. Mostraré que existen buenas razones para pensar que–a pesar de lo oscuro que puede tornarse este debate metafísico–el realismo es la postura filosófica más sensata al momento de querer explicar la práctica formal de la aritmética y al mismo tiempo, su uso en los ámbitos cotidianos. Para lograr este objetivo es necesario presentar ciertos elementos de la filosofía del lenguaje que resultarán relevantes para la presente investigación. En la primera sección del capítulo explicaré el debate enmarcado en el ámbito de las proposiciones. En la segunda sección presento la idea del principio de composicionalidad de la referencia de Frege, algunas objeciones que se le han hecho, y cómo una postura realista puede tomar ventaja de este principio. En la tercera sección la motivación para el realismo vendrá desde el conocimiento matemático, presentando como ejemplo el paradigmático realismo de Gödel. Finalmente, la última sección me servirá para presentar algunas de las razones por las que considero que una teoría que sea realista respecto a la matemática es mucho más prometedora que una que implique un antirrealismo. En particular me enfocaré en el nominalismo y es uno de sus más fuertes representantes: el ficcionalismo. En capítulos posteriores retomaré algunas de las cuestiones que presentaré a continuación.

1.1. Proposiciones

Durante siglos, la naturaleza de las matemáticas ha intrigado a muchas generaciones de matemáticos y filósofos. Entre las cuestiones relacionadas con esta naturaleza se encuentra la pregunta sobre qué es aquello que estudian las matemáticas. Aunque existen diversas ideas acerca de estos temas, hay algunos puntos en los que posiblemente cualquiera estaría de acuerdo. Por ejemplo, no es difícil aceptar que, de existir las entidades estudiadas en matemáticas –aquéllas sobre las que hablan las proposiciones de la matemática– éstas tienen la cualidad de ser abstractas y si esto es así, las entidades matemáticas, en contraste con las entidades físicas, no son susceptibles de ser localizadas dentro de cadenas causales que las relacionen de manera directa con nuestros mecanismos de percepción. Esto sugiere que la metodología de investigación deberá ser distinta a la típicamente utilizada en el análisis de fenómenos parcial o totalmente físicos. Dicha metodología quedará en buena medida restringida por el tipo de relaciones que podamos mantener con las entidades matemáticas. Esta *limitación* empírica ha dado lugar a que muchos filósofos guíen su investigación sobre la naturaleza de la matemática preguntándose qué es aquello de lo que hablan las proposiciones que constituyen el lenguaje matemático, o de forma más general, las proposiciones que involucran términos propios del discurso matemático.

El uso de recursos teóricos pertenecientes a la filosofía del lenguaje podrá arrojar luz a profundas cuestiones filosóficas acerca de la matemática. Por un lado aportará elementos para dar una interpretación adecuada y una explicación de la teoría y la práctica matemáticas; por el otro, preguntarnos por cuestiones como la referencia y la predicación en las oraciones está íntimamente relacionado con la pregunta sobre si existen o no los objetos matemáticos. Como es de suponerse estas dos cuestiones están relacionadas entre sí. Una investigación sobre la naturaleza de las proposiciones de la matemática deberá establecer guías para dar respuesta a ambas. Así, el primer paso es relacionar la cuestión ontológica con el lenguaje matemático. Pero éste es un movimiento que resulta muy natural: de existir los objetos matemáticos, son ellos de los que hablan las proposiciones de esta disciplina. Si los objetos matemáticos no existen, es necesario explicar la función de las proposiciones matemáticas. Por ejemplo, hay que dar cuenta de qué significa que una oración sea verdadera cuando sus términos denotan entidades inexistentes. Este es el principio del camino: aterrizar la pregunta acerca de la ontología matemática en el terreno del lenguaje.

En términos de lenguaje podemos dividir las posturas sobre la ontología de la matemática en dos corrientes. (i) La corriente realista que típicamente sostiene que las proposiciones de la matemática refieren a los objetos abstractos designados por los términos matemáticos y las propiedades que estas proposiciones predican de ellos. La referencia, cuantificación y predicación de las oraciones matemáticas es acerca de dichos objetos. (ii) La corriente antirrealista, que paradigmáticamente es representada por las teorías nominalistas.

El nominalismo puede ser someramente caracterizado como la postura filosófica que niega la existencia de objetos abstractos. Estas teorías pueden variar en gran medida su explicación acerca del comportamiento de las proposiciones. Por razones que detallaré más adelante, y que están relacionadas justamente con la naturaleza de las proposiciones matemáticas y su papel en el conocimiento humano, las posturas nominalistas que han tenido más fuerza en el debate filosófico de los últimos años son las ficcionalistas. Por esta razón, con frecuencia será el ficcionalismo quien encabece el frente enemigo de las posturas realistas.

El ficcionalismo es una corriente que establece algo acerca del lenguaje. En una descripción muy superficial, la idea es que el lenguaje de la matemática es un lenguaje de ficción cuyas afirmaciones son susceptibles de tener sentido a pesar de que las entidades de las que este lenguaje habla sean inexistentes. Falta mucho por decir al respecto; por ahora sólo quiero mencionar brevemente un poco sobre la relación entre algunas de estas teorías –que parten del lenguaje– y sus repercusiones en tanto a las consecuencias ontológicas que se siguen de ellas.

Una primera clasificación entre posturas ficcionalistas es la que hacen (Burgess y Rosen, 1997) entre la concepción revolucionaria y la concepción hermenéutica. En la concepción revolucionaria el ficcionalista tiene como objetivo central la reconstrucción o revisión de las teorías científicas y/o matemáticas (Field, 1980). Las teorías actuales deben ser sustituidas por nuevas teorías. Estas nuevas teorías son el resultado de asignar nuevos significados a las palabras pertenecientes a las teorías actuales. Las proposiciones que constituyen estas teorías –en las que hay términos que parecen referir a objetos abstractos– no son las correctas. En la concepción hermenéutica la recostrucción, o reinterpretación, se toma como el análisis más profundo de lo que *realmente* significan los términos matemáticos. La aparente naturaleza de las proposiciones, refiriendo, predicando y cuantificando sobre objetos abstractos, se debe a una interpretación superficial. Esta forma más débil de ficcionalismo es compatible con la creencia en las actuales teorías matemáticas y científicas. En un ficcionalismo de tipo hermenéutico no existe un compromiso ontológico hacia las enidades aparentemente denotadas. Esto deja abierta la puerta a permanecer silentes frente a la pregunta sobre la ontología matemática. Así, dentro de la gama de opciones teóricas, existen aquéllas propuestas es que se puede dar una explicación satisfactoria sobre el comportamiento de las proposiciones matemáticas–por ejemplo sobre su verdad y cómo accedemos a ella–sin necesidad de asumir un compromiso hacia la existencia o hacia la no existencia de los objetos matemáticos (Bueno, 2016; Yablo, 2010). Pero el mencionado silencio no deja de tener profundas consecuencias filosóficas en cuanto a la naturaleza ontológica de la matemática. Volveré a esta cuestión con más detalle en secciones posteriores.

Lo que existe, de algún modo determina aquello de lo que hablamos. La posición que se tome frente a la ontología de la matemática repercutirá en las explicaciones que se ofrezcan en torno a las proposiciones. Pero también se puede ir en el sentido opuesto: se puede partir de una teoría sobre proposiciones y a partir de los elementos proporcionados por la teoría, desarrollar una investigación que lleve a la conclusión de cómo las entidades matemáticas deberían ser[1]–o cómo es que la teoría nos muestra que no hay tales entidades–. La estrecha relación entre las cuestiones ontológicas y las lingüísticas, así como los beneficios metodológicos que brindan estos tratamientos, son una buena motivación para comenzar la defensa de cierta posición filosófica con el análisis de las proposiciones involucradas.

[1]Relacionado con este tipo de enfoques se introduce la distinción entre realistas ontológicos y realistas en valor de verdad. Aunque sería extraño defender un realismo ontológico y negar la existencia de valores de verdad dentro de un mismo fragmento de la matemática, no es raro encontrar posturas realistas en cuanto a valor de verdad defendidas por antirrealistas ontológicos. Aquí entrarían por ejemplo, algunas de las teorías sobre la verdad de la matemática que Benacerraf llama *combinatorias* o teorías como la de Stephen Yablo [2010]. Estos son algunos ejemplos en los que a pesar de no haber un compromiso con la existencia de las entidades referidas como tales, sí lo hay con la existencia de la verdad de ciertas proposiciones matemáticas.

1.2. Frege: el principio de composicionalidad

La filosofía de Frege es un punto de referencia importante dentro del debate platonismo-antiplatonismo. Frege era un platonista en cuanto a su visión de las matemáticas. Estaba convencido de que la matemática se dedica al estudio de sus objetos abstractos, objetivos e independientes de la mente humana, y que por lo tanto, las proposiciones de la matemática –en particular de la aritmética– refieren y cuantifican sobre estos objetos. Así, la preocupación de Frege por buscar un fundamento a la matemática se tradujo en clarificar el acceso epistémico de los matemáticos a los números naturales: estas entidades objetivas e independientes. De esta manera, el proyecto de fundamentación de las matemáticas en *Los fundamentos de la aritmética* (Frege, 1884), se convirtió en la tarea de traducir el lenguaje de la aritmética a un lenguaje completamente analítico; dentro de su marco, un lenguaje cuyos enunciados se valieran únicamente de leyes lógicas generales y definiciones. A partir de la definición de número, la lógica revelaría de manera clara nuestro acceso epistémico a estos objetos matemáticos. Pero para alcanzar el objetivo final, era necesario sofisticar el aparato lógico, trabajo que Frege realizó en su *Conceptografía* (Frege, 1879). Finalmente, el interés por la lógica llevó a Frege a desarrollar ampliamente la filosofía del lenguaje: al final de cuentas, la lógica se constituye por *qué se sigue de qué* y esto es determinado por el contenido de las expresiones. Todas éstas, son cuestiones propias de la filosofía del lenguaje.

Entre los argumentos de Frege, hay dos que juegan un papel central apoyando al platonismo matemático dentro de su teoría. Uno de ellos de carácter ontológico y otro semántico. El argumento ontológico (que no desarrollaré aquí) se plantea bajo la suposición de que el mundo se divide en dos tipos de entidades: conceptos y objetos. Los conceptos son cierto tipo de funciones. Pero los números no pueden ser conceptos. En particular porque no toman argumentos como lo hacen las funciones. Por lo tanto los números tienen que ser objetos. Por su parte, el argumento semántico enmarca el debate platonista en el campo de la filosofía del lenguaje y replantea la cuestión apelando a la naturaleza de las proposiciones matemáticas. A éste se le conoce como el argumento de composicionalidad de la referencia, y aunque ha sido muy debatido, es difícil negar que hay un buen fragmento del lenguaje que alberga en algún nivel de su naturaleza, la esencia de esta estructura. Podemos plantear este conocido argumento de la siguiente manera:

P.1 Las proposiciones de las matemáticas pretende referirse a objetos matemáticos abstractos y cuantificar sobre ellos.

P.2 Los teoremas matemáticos son verdaderos.

P.3 Un enunciado no puede ser verdadero a menos que sus subexpresiones tengan éxito en hacer lo que pretenden hacer[2].

Por lo tanto, existen objetos matemáticos abstractos a los que estas expresiones refieren y sobre los que cuantifican.

De la misma manera que la oración 'La Tierra gira alrededor del Sol' es verdadera sólo si 'La Tierra' refiere a un objeto, y este objeto pertenece a la clase de los objetos que tienen la propiedad de girar alrededor del Sol, la oración 'El dos tiene exactamente dos divisores positivos' es verdadera sólo si 'El dos' refiere a un objeto en el mundo, y este objeto pertenece a la clase de los objetos que tienen la propiedad de tener exactamente dos divisores positivos. En contraste, la oración 'El rey de Francia es calvo' no es verdadera si 'El Rey de Francia' no refiere a ningún objeto–en cuyo caso carece de valor de verdad–, o bien, si el objeto denotado no tiene la propiedad de ser calvo–en cuyo caso es falsa–. La referencia de la oración es su valor de verdad y esta referencia quedará determinada por la referencia de cada una de las partes de la oración.

Es decir que, para que una proposición sea verdadera es necesario que los términos singulares de la oración que la expresa refieran a objetos existentes. Si la teoría es correcta y las proposiciones matemáticas son verdaderas, la verdad de dichas proposiciones se debe en parte a que los términos singulares denotan objetos existentes cumpliendo satisfactoriamente los requisitos de referencia de la teoría.

La teoría de Frege ha sido muy controvertida. Sin ir más lejos, está la conocida objeción de Russell en contra de que una oración cuyo término singular carezca de referencia no tenga de valor de verdad. Según Russell nuestra teoría del lenguaje debe respaldar la intuición de que oraciones como 'El rey de Francia es calvo' son falsas en virtud (para este ejemplo) de que

[2]Es decir, que los términos referenciales de hecho refieran, que los cuantificadores cuantifiquen sobre ellos, y que los términos predicativos realicen su función predicativa sobre los términos referenciales.

no hay un actual rey de Francia. Pero decir que 'El rey de Francia es calvo' es falsa así sin más, nos llevaría a aceptar que su negación 'El rey de Francia no es calvo' es verdadera, lo cual no parece algo aceptable. La propuesta russelliana para evitar que las oraciones con términos singulares sin referente queden sin valor de verdad es traducir oraciones como 'El rey de Francia es calvo' en oraciones del tipo 'Existe un único x tal que x tiene la propiedad de ser rey de Francia y x es calvo', la cual claramente es falsa. La cuestión que importa aquí es si las objeciones/modificaciones de Russell socavan la conclusión del argumento composicional en el sentido de que, la verdad (aunque no la propiedad de tener valor de verdad) de un enunciado se da en virtud de la existencia de los objetos denotados y las propiedades que de éstos se predican. La respuesta es que claramente no. Dentro del marco de Russell, la oración 'El dos tiene exactamente dos divisores positivos' es verdadera sólo si la oración 'Existe un único x tal que x es el dos y x tiene exactamente dos divisores positivos' es verdadera. Entonces, bajo el punto de vista russelliano, persiste la idea de que la verdad de las proposiciones implica la existencia de los referentes, no sólo para las oraciones explícitamente existenciales sino para cualquier oración que contenga términos singulares.

Me interesa dejar muy claro que éste no es un intento por defender alguna teoría filosófica del lenguaje o de la matemática de Frege, Russell o cualquier otro autor en particular. Mi objetivo es mucho más modesto y no requiere discutir si ciertas teorías de la referencia son exitosas o no. Por ejemplo, aquí no cabría presentar como objeción al argumento anterior el hecho de que, tanto Frege como Russell suponían a los nombre propios como ciertas codificaciones de descripciones definidas–suposición que sólo algunos filósofos mantuvieron después de Kripke–. Si nos colocamos ahora en el marco de Kripke, y suscribimos que 'Dos' es un designador rígido, todo lo que se ha dicho hasta aquí se sigue sosteniendo. Es el objeto designado por 'Dos' –en todo mundo posible– el que al satisfacer una propiedad P hará verdadera una cierta oración $P(Dos)$. Lo que pretendo transmitir es la siguiente intuición que, a mi parecer, es muy natural y es compatible con muchas prominentes propuestas filosóficas como las que he mencionado. Ésta es que:

> Una oración es verdadera en virtud de que aquello de lo que habla existe y satisface las propiedades que dicha oración predica.

Por supuesto, esto no quiere decir qué toda oración sea analizable total o parcialmente bajo el principio de composicionalidad. Tampoco quiere decir que todos los fenómenos lingüísticos sean composicionales. Sin embargo, creo que existe un buen fragmento del lenguaje que sí se rige bajo principios de composicionalidad. Creo incluso que dentro de teorías semánticas más complicadas que las que he mencionado, la explicación acerca de este fragmento 'más simple' del lenguaje concurre con la mencionada intuición. Vale la pena señalar que, en general, el hecho de que haya algunos fenómenos muy complicados no implica que no haya otros que son tan simples como parecen ser. En cualquier caso, para salir un poco del esquema composicional y decir algo más sobre la relación entre la referencia de un enunciado y su valor de verdad, consideremos ahora la teoría que Stephen Yablo desarrolla en su libro *Aboutness* (Yablo, 2014). La teoría de Yablo es un buen punto de contraste por dos razones. La primera de ellas es que explícitamente Yablo niega el principio de composicionalidad como una explicación satisfactoria para determinar el contenido de las oraciones. En segundo lugar, resulta relevante para mis propósitos porque esta teoría viene acompañada de un resultado en contra del platonista matemático.

En palabras de Yablo, uno de los grandes retos de la filosofía del lenguaje ha sido explicar cómo seres finitos son capaces de entender un potencial infinito de oraciones. El principio de composicionalidad brinda una respuesta. Este entendimiento es recursivo; si conocemos el significado de cada una de las partes de la oración y comprendemos las reglas que nos permiten identificar la acción del predicado y los cuantificadores sobre los términos singulares, tendremos el contenido de la oración completa. El problema es reconciliar esta respuesta con lo que las oraciones *realmente* están diciendo, pues con frecuencia las oraciones tienen significados que son semánticamente inesperados (Yablo, 2014, p. 165). La solución de Yablo consiste en brindar alternativas a la vía composicional para determinar el significado de una oración S. Estas alternativas servirán como guía para saber lo que S dice intuitivamente. En general, el contenido aseverado –lo que una oración *realmente* está diciendo– puede estar a una gran distancia del contenido semántico-composicional. El contenido de las oraciones (*subject matter*) está constreñido pero no queda determinado, por sus condiciones de verdad. Estas condiciones se dan de forma compleja debido a que cada oración tiene distintas *formas de ser verdadera*. El significado de una oración tiene que ver con sus valores de verdad en varios escenarios posibles: las circunstancias relativas a cada uno de esos escenarios determinan el valor de verdad. Por ejemplo, consideremos un caso de metáfora,

A = *Crotona está en el arco de la bota italiana*

Alguien podría decir esto y nosotros tomar la afirmación como verdadera. Y claro, la razón no es que Crotona esté en una relación de pertenencia con el objeto bota que, a su vez, tiene la propiedad de ser italiana. Aceptar la afirmación es otro tipo de ejercicio. Es pensar en ... como-si .... Es pensar en Italia *como si* fuera una bota. Esto es, permitir a nuestra imaginación ser guiada por los hechos acerca de la cosa pensada. Analizando con más detalle el contenido tenemos algo como lo siguiente,

El hecho es que Crotona está en un cierto lugar. ¿Qué lugar es éste? Crotona está en el lugar en el que tendría que estar para que fuera aceptable en la historia (en la que Italia fuera una bota) que Crotona está en el arco de la bota italiana.

En el caso de las metáforas, la aceptabilidad de la emisión literal depende cómo *son* las cosas en el escenario figurativo. Para diferentes casos tendremos diferentes principios que determinarán el contenido real de una oración. En casos de metáfora sería algo como lo siguiente,

El contenido real de A, en el contexto del escenario figurativo G, es el R tal que A sería imaginado verdadero sólo en el caso cuando R es realmente verdadero.

Si γ es la función generadora –que toma hipótesis acerca de las condiciones en el escenario figurativo para especificar qué es lo que puede ser imaginado– entonces podemos escribir,

El contenido real de A (anteriormente llamado R), en el contexto del escenario figurativo G, es $\gamma^{-1}(A)$.

Al igual que para este ejemplo, se proponen diversos principios que permiten determinar el contenido real para diferentes tipos de oraciones (no sólo para metáforas). Notemos que esto le permite a Yablo hablar de enunciados casi-verdaderos, o verdaderos de cierta forma, sin tener que afirmar la satisfacción de la referencia y predicación que ocurren en el enunciado. Lo importante al hablar de la verdad no es el enunciado literal sino el *contenido real* que éste está aseverando. Este contenido puede estar dado de múltiples maneras, pero en cualquier caso, los componentes literales de un enunciado no implican la existencia de los objetos a los que parecen referir ni la satisfacción de las propiedades que en él se predican.

La ventaja obvia de una teoría como ésta es que explica fenómenos muy complejos que quedan fuera del alcance de las teorías que pretenden explicar la referencia, el significado, y el valor veritativo de una oración por medio de sencillas reglas que permitan describir a las oraciones en términos de sus componentes. Una teoría como la de Yablo explica casos complicados como los de los usos figurativos, las presuposiciones, o típicos contraejemplos de las teorías tradicionales como es el de la oración 'Pegaso no existe'. La cual aparentemente es verdadera, pero nos lleva a controversias decir que lo es en virtud de que existe el objeto referido por el término 'Pegaso' que tiene la propiedad de no existir. Todas estas virtudes explicativas son innegables. A mi parecer lo que esto muestra es que hay fenómenos lingüísticos para los que la explicación clásica resulta insuficiente. Pero que una explicación tenga limitados sus alcances no la vuelve incorrecta. Con frecuencia la complejidad de los fenómenos demanda extender o hacer más complejas nuestras teorías. Por ejemplo, existen fenómenos que requieren modelos para los que el cálculo de una sola variable real resulta insuficiente, lo que nos obliga a incrementar la dimensión o la complejidad del marco de trabajo para poder explicarlos. Dependiendo del fenómeno, el marco se extenderá, por ejemplo, al cálculo de varias variables, o al uso de variables complejas. Esto no quiere decir que los fenómenos que sí logran ser explicados usando cálculo de una sola variable estén erróneamente explicados –incluso si puedo valerme de estrategias como proyecciones o encajes para explicar estos fenómenos sencillos en los marcos más complejos–. Del mismo modo, el hecho de que haya fenómenos complejos del lenguaje que no admitan una explicación sencilla no impide que haya fragmentos importantes del lenguaje que sí admiten este tipo de explicación.

¿Qué dice Yablo acerca de enunciados simples como 'La mesa del comedor es café'? Ciertamente, si de hecho la mesa del comedor es café, tenemos una forma en la que la oración es verdadera. Pero una oración puede ser verdadera en más de una forma. De algún modo 'La mesa del comedor' podría no tener referente y/o que éste no cumpliera la propiedad de ser café y la oración podría seguir siendo verdadera. Si la oración 'La mesa del comedor es café' fuera verdadera y además, de hecho la mesa del comedor fuera café, estaríamos frente a una simple coincidencia. Respecto a las oraciones que involucran términos matemáticos, la explicación sobre cómo determinamos su contenido–y de acuerdo a éste cómo explicamos su valor de verdad–tampoco va a seguir el esquema fregeano. Una primera razón que motiva a Yablo a rechazar el esquema de composicionalidad que presenté al principio de esta sección podemos verla en el ejemplo siguiente,

> El número de lunas de Marte es indiscutiblemente dos. ¿Cómo es esto posible cuando es discutible que los números siquiera existan? [. . .] Si el número de lunas de Marte se nos arroja como indudablemente dos es porque nos enfocamos en la parte correspondiente a Marte y sus lunas y no en la parte correspondiente al término numérico *dos*.

En pocas palabras, si un enunciado es verdadero y el contenido de éste–en virtud del cual es verdadero–estuviera determinado composicionalmente, tan indubitable como es la verdad del enunciado completo, debería de ser la función de cada una de sus subexpresiones. En particular, debería ser clara la referencia de los términos que parecieran designar a los números. Si queremos reivindicar el esquema, tenemos que mostrar que los términos numéricos denotan ciertas entidades, que los predicados y cuantificadores actúan sobre éstos y que por lo tanto, el contenido de estos enunciados es justamente el que parece ser. De este modo, con la misma seguridad que podemos hacer afirmaciones sobre las lunas de Marte, podemos hacerlas sobre la entidad que presumiblemente es el número dos.

Después de toda esta historia (que es mucho más larga, interesante y compleja de lo que yo podría presentar aquí) lo que quiero destacar es lo siguiente. ¿Negaríamos que si Cecilia es atleta, entonces la oración 'Cecilia es atleta' es verdadera en virtud de que Cecilia es la persona a la que nos referimos al emitir el nombre 'Cecilia' y esta persona cumple las condiciones que constituyen la cualidad de ser atleta? Mi intuición, y creo la más natural, es que no. Mi propósito es defender que, en este mismo sentido, tampoco negaríamos que la oración 'Seis en un número perfecto' es verdadera en virtud de que el número denotado por 'Seis' cumple las condiciones que constituyen la cualidad de ser perfecto. No es mi intención que lo que acabo de decir sea aceptado inmediatamente pero espero que el argumento a lo largo del presente trabajo logre respaldar estas afirmaciones. En particular espero mostrar los siguientes dos puntos. 1. Que la forma tan simple en la que Frege pensó acerca de la verdad de una oración es la correcta para un cierto fragmento del lenguaje y; 2. Que está filosóficamente fundamentada la analogía entre este fragmento del lenguaje natural y un cierto fragmento del lenguaje matemático.

Hasta aquí he presentado ejemplos de teorías que ejemplifican ciertos aspectos de la relación que hay entre los aspectos lingüístico y ontológico, y cómo esta relación frecuentemente se da en términos de la verdad de los enunciados. La referencia (o *aboutness* para Yablo) de una oración es una relación entre la forma lingüística y los hechos que estará íntimamente relacionada con el valor de verdad que le corresponda a la oración. La idea general puede ser esquematizada de la siguiente forma con sus respectivas conclusiones para los casos de Frege y Yablo,

P.1 El valor veritativo de una oración está dado de cierta forma.

P.2 El contenido de la oración–relacionado con el mencionado valor veritativo– está dado de tal otra forma.

C De la forma en la que se relacionan P.1 y P.2 se concluye que los objetos matemáticos tienen que existir [Frege] o,

C' De la forma en la que se relacionan P.1 y P.2 se concluye que los objetos matemáticos bien pueden no existir [Yablo].

Otra forma de relacionar el aspecto semántico con la cuestión ontológica es añadir a la explicación sobre la verdad algún otro elemento, por ejemplo, un compromiso ontológico. Esto se puede realizar utilizando el criterio de Quine acerca de compromisos ontológicos:

> Una oración de primer orden (o una colección de estas oraciones) está ontológicamente comprometida con la existencia de los objetos que se supone están en el rango de las variables para que la oración (o colección de oraciones) sea(n) verdadera(s).

De este principio y el esquema fregeano se sigue que múltiples oraciones matemáticas están ontológicamente comprometidas con objetos matemáticos. Como ya había mencionado antes, para que S sea verdadera sus subexpresiones deben tener éxito en su propósito de referir. Consecuentemente, para que S sea verdadera deben existir objetos matemáticos en el rango de las variables. Por el criterio de Quine esto significa que S está ontológicamente comprometida con objetos matemáticos. El problema con estos enfoques es que pareciera que en nombre de explicaciones semánticas se generan afirmaciones ontológicas que dejan una sensación de vacío explicativo. Decir, 'las entidades matemáticas tienen que existir (o no tienen por qué existir) de acuerdo a nuestra mejor explicación semántica (o a nuestra mejor explicación científica)' parece una buena estrategia argumentativa. Sin embargo, a primera vista, no dice mucho de la naturaleza de estas entidades o de lo que sea que constituya el contenido de las proposiciones. Esto sugiere respuestas al esquema fregeano–incluyendo al argumento resultante de agregar el criterio de Quine–construidas sobre la aparente brecha que hay entre la cuestión semántica y la ontológica.

Algunos filósofos han negado que los términos singulares y los cuantificadores de primer orden den lugar a compromisos ontológicos. Es posible que lo que se requiere para hacer verdaderas a las oraciones sea la existencia de algunos, pero no de todos, los objetos en el rango de los cuantificadores (Rayo, 2008). Otra opción es negar la relación entre el cuantificador existencial de primer orden y la noción de compromiso ontológico (Azzouni, 2004; Hofweber, 2000). Una respuesta a estas críticas es aceptar el esquema fregeano –para un cierto fragmento del lenguaje– y agregar una explicación satisfactoria acerca de las entidades que constituyen el dominio sobre el que actúan los cuantificadores. Dado lo dicho hasta aquí vale la pena preguntarse, además de las semánticas, ¿qué otras razones podríamos tener para creer en la existencia de los números naturales?

1.3. Conocimiento matemático

Además de la conexión entre el contenido las proposiciones y cómo es que les corresponde su valor veritativo está la cuestión epistemológica. ¿Cómo obtenemos conocimiento de dicho contenido y en consecuencia, del correspondiente valor veritativo? La matemática es una disciplina que ha mostrado ser notablemente exitosa, tanto al interior de sus propias prácticas como en su papel de herramienta de la práctica en otros campos del conocimiento. Por esta razón la suposición de la existencia del conocimiento matemático no ha generado mucha resistencia. Suponer de antemano este conocimiento es otro punto de partida para abordar la cuestión: tenemos conocimiento de las proposiciones matemáticas–realizamos una práctica exitosa alrededor de éstas–. La búsqueda de una explicación semántica y una respuesta a la pregunta ontológica quedarán constreñidas también por nuestro conocimiento matemático. Las afirmaciones filosóficas que contradigan alguna parte relevante de las oraciones que constituyen a una disciplina con las mencionadas credenciales científicas tienen una fuerte desventaja desde esta perspectiva.

Un ejemplo clásico de un platonista que muestra gran preocupación por el apego a la práctica matemática es Gödel, quien defendía la existencia de los objetos matemáticos a partir de un enfoque distinto. La estrategia es remarcar que existe un fuerte paralelismo entre teorías plausibles de conceptos y objetos matemáticos, y teorías plausibles de propiedades y objetos físicos. Al igual que la física es una ciencia exitosa en la medida en la que mayormente llega a los principios correctos, la matemática es exitosa en la medida en la que los axiomas utilizados en su práctica son verdaderos. De esta manera, al igual que los objetos físicos, los objetos matemáticos tampoco son construidos por los seres humanos lo que imposibilita que éstos sean reducidos a entidades mentales (Gödel, 1944b):

> ... a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo como una percepción también de los objetos de la teoría de conjuntos, como se ve en el hecho de que los axiomas se fuerzan a sí mismos a ser verdaderos. No veo ninguna razón por la que deberíamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir en la percepción matemática, que en la percepción sensorial... [los conjuntos] son en el mismo sentido, necesarios para obtener un sistema satisfactorio matemático, así como los objetos físicos son necesarios para una teoría satisfactoria de nuestro sentido de la percepción.
>
> Percibimos los objetos físicos, intuimos objetos matemáticos y ... en ambos casos, es imposible interpretar las proposiciones, que se quieren aseverar sobre estas entidades, como proposiciones acerca de los "datos" ...

Asumimos que tenemos conocimiento matemático. Tenemos conocimiento del mundo matemático del mismo modo que tenemos conocimiento del mundo físico; necesariamente existe una vía por la cual adquirimos dicho conocimiento. Como el contacto con los objetos matemáticos no es causal –debido a que son abstractos– la vía de adquisición no puede ser la percepción sensorial: tiene que ser una facultad más de tipo intelectual. Esta facultad es la intuición (no cualquier intuición, *la* intuición del matemático). Tenemos entonces una conexión entre el estado de conocimiento y lo que estamos conociendo. A saber, los objetos de la teoría de conjuntos. Estos objetos hacen verdaderos a los axiomas de la teoría de conjuntos. Debido a que una gran parte de la matemática actual puede ser reconstruida en teoría de conjuntos, el realismo de conjuntos de Gödel puede extenderse a otras ramas de la matemática proporcionando así una fuente de justificación para nuestras creencias.

Al decir que *una gran parte* de la matemática puede ser reconstruida en la teoría de conjuntos pretendo tener en consideración algunos debates recientes que cuestionan el poder de ésta sobre el resto de la matemática. Esta discusión queda fuera de los objetivos de el presente trabajo y, en cualquier caso, Gödel no parecía tener dicha preocupación:

> "...toda la matemática es reducible a la teoría abstracta de conjuntos. Por ejemplo, el enunciado de que los axiomas de la geometría proyectiva implican cierto teorema, significa que si un conjunto M de elementos llamados puntos y un conjunto N de subconjuntos de M llamados líneas rectas satisfacen los axiomas, entonces el teorema vale para N y M. O bien, por mencionar otro ejemplo, un teorema de la teoría de números puede interpretarse como una afirmación sobre conjuntos finitos. Así, el problema en cuestión es el de la axiomatización de la teoría de conjuntos."

Tratando de reconstruir el esquema argumentativo como lo he venido haciendo, plantearé de forma muy general la posición filosófica de Gödel relativa a la presente discusión,

- Tenemos conocimiento matemático; hay una facultad que nos permite adquirirlo.

- Dicha facultad garantiza la verdad de los axiomas de la teoría de conjuntos.

- El poder fundamental de la teoría de conjuntos sobre otras ramas de la matemática nos permite tener conocimiento también de ellas.

De acuerdo con mi interpretación, las preguntas relevantes para este trabajo quedarían respondidas de la siguiente forma en el marco platonista de Gödel. ¿Acerca de qué hablan los enunciados? En últimas los enunciados de la aritmética–y también de otras ramas de la matemática–hablan acerca de conjuntos. ¿En virtud de qué son verdaderos estos enunciados? En virtud de la realidad conjuntista que subyace a la realidad aritmética y que hace verdaderos a sus principios. ¿Cómo accedemos a su verdad? La percepción matemática (*intuición del matemático*) arroja creencias verdaderas acerca de la teoría de conjuntos. Esto nos permite justificar las creencias aritméticas así como de todas las ramas que admitan una reconstrucción conjuntista.

La teoría responde a todas las preguntas. El problema es que la parte fundamental que da solidez al argumento es la existencia de la mencionada intuición matemática. Pero, ¿sobre qué base podemos afirmar que la relación que mantienen los objetos abstractos y la intuición matemática es análoga a la relación causal que mantienen los objetos físicos y la percepción? En particular, no existe información acerca de algún mecanismo fisiológico que pudiera respaldar dicha intuición. En consecuencia, tampoco se muestra de manera explícita cómo funcionaría una epistemología que pueda dar cuenta de cómo obtenemos nuestro conocimiento matemático. Esta es una típica explicación platonista que apela en última instancia a misteriosos mecanismos que proporcionan el acceso de seres físicos a un mundo constituido por objetos abstractos. Este aire de misterio entre *el mundo de lo concreto* y *el mundo de lo abstracto* será uno de los principales propulsores de las teorías antirrealistas. Si logramos disolver este misterio será mucho más difícil refutar una postura realista. Retomaré la cuestión más adelante.

Independientemente de la aproximación que se tome, lo que es muy claro es que una explicación sobre la naturaleza de los números debe cubrir los aspectos semántico, ontológico y epistémico. Para tener éxito en cubrir cada uno de estos aspectos es importante organizar el debate en una forma adecuada. Éste será el trabajo que realizaré en el siguiente capítulo. Durante las secciones siguiente presentaré algunas razones por las que considero que las posturas realistas son las mejor motivadas dentro del debate acerca de la naturaleza de los números.

1.4. ¿Por qué no ser antirrealista?

Seamos antirrealistas por un momento y veamos cuáles son las opciones para el caso de la aritmética (los argumentos que presento aquí podrían servir para otras ramas, pero este trabajo es acerca de los números naturales). Enfocarnos en el discurso de la aritmética centrará la discusión en los usos–aparentemente más enigmáticos–de los términos numéricos. Esto no quiere decir que queda excluida una explicación para oraciones del lenguaje cotidiano que contengan numerales. Una oración como 'El número de lunas de Marte es dos' siempre deja abierta la puerta a decir que en ella, el uso de 'dos' como sustantivo es aparente, y que la forma de dicha oración oculta su verdadero sentido. Este *verdadero sentido* podría ser mejor capturado por alguna oración como 'Marte tiene dos lunas', en la que 'dos' es simplemente un modificador de 'las lunas de Marte'. Si los números existen, el término 'dos' en la oración en cuestión es genuinamente un sustantivo. Si los números no existieran, está la opción de remitirnos a los usos de los números como modificadores en las oraciones y brindar una explicación que muestre que estos usos (los adjetivales) no requieren de la existencia de las entidades en cuestión. Sin embargo, en oraciones como 'Dos es el menor de los números primos' no hay ningún contenido acerca de objetos concretos, por lo que una explicación como la anterior no está disponible de manera evidente. Una defensa antirrealista sustancial tiene que dar cuenta del lenguaje de la matemática pura.

Existen dos hechos fuera de controversia que tomaremos como punto de partida. Primero, las oraciones utilizadas en el discurso de la aritmética aparentemente predican y cuantifican sobre números. En otras palabras, si tomamos estos enunciados de forma literal, su verdad determina que los números existen: sea o no el caso, los enunciados funcionan *como si* los números existieran. Segundo, estos enunciados constituyen una práctica que no se encuentra aislada del resto de la actividad humana: diferentes métodos, en diferentes tiempos y lugares, llevan a los mismos resultados susceptibles de ser capturados por las mismas proposiciones. Además de esto, las proposiciones que resultan de esta práctica son tomadas como verdaderas y aplicadas en otras prácticas (científicas y no científicas), produciendo con ello resultados altamente favorables al conocimiento humano. La tarea antirrealista implica explicar la mencionada apariencia referencial, teniendo en cuenta el éxito–tradicionalmente atribuido a las virtudes epistémicas–de esta disciplina no sólo al interior de ella misma, sino también en relación al resto del conocimiento–en particular, del conocimiento científico–.

La cuestión ahora es explicar la apariencia *engañosa* de las proposiciones aritméticas en relación con su verdad. Aquí tenemos la primera bifurcación para tomar una postura antirrealista. Si las proposiciones de la aritmética son verdaderas, esta verdad se da en virtud de algún hecho ajeno a los objetos a los que los términos singulares parecen referir. En el trabajo voy a considerar dos alternativas en esta dirección: la alternativa presuposicionalista (de la que ya mencioné un poco al hablar de la teoría de la referencia de los enunciados de Yablo) y la alternativa que Benacerraf llama *combinatoria*, que en esencia, atribuye la verdad de los enunciados de la matemática a las relaciones sintácticas que éstos guardan dentro de su sistema. En el siguiente capítulo desarrollaré a profundidad mi argumento para defender que la mejor teoría para explicar la verdad de los enunciados de la aritmética debe de ser una que explique dicha verdad en términos que tradicionalmente consideramos semánticos. Es decir, en términos de satisfacción de los referentes y de los predicados que ocurren en las oraciones. Por ahora me enfocaré en la otra alternativa de la bifurcación: negar que las proposiciones de la aritmética sean verdaderas.

Uno podría sentirse impactado ante la afirmación de que las proposiciones de la aritmética son falsas. Toda la vida hemos escuchado cosas como que los números no mienten, o que ciertas cosas (verdaderas) son tan verdaderas como que dos más dos es cuatro. Lo cierto es que esta estrategia tiene una ventaja muy fuerte. Si bien, choca con nuestra intuición de que la aritmética se constituye de verdades, respeta otra intuición–igual de primitiva–de que la verdad es algún tipo de correspondencia entre las oraciones y los hechos. Si los números no existen, no hay un hecho en la realidad que sea reportado por la oración,

$$\exists! a((a \in \mathbb{N} \wedge \forall n(n \in \mathbb{N} \wedge n \neq a)) \rightarrow a < n).$$

Del mismo modo que no existe un hecho que sea reportado por la oración,

Pegaso vuela a quinientos kilómetros por hora.

La no existencia de estos hecho parece razón suficiente para afirmar que las proposiciones no son verdaderas. Frente a esta sensata observación surge una de las corrientes antirrealistas más fuertes de las últimas décadas: el ficcionalismo. Pero antes de discutir con mayor detalle esta postura, vale la pena decir algo acerca del nominalismo con el fin de motivar la actitud de presuponer que los objetos matemáticos–en particular los números–no existen.

Recordemos que el platonismo–la postura realista por antonomasia–se compromete con tres atributos de las entidades que ocupan la realidad matemática. Estos atributos son, la cualidad de ser abstractas, de ser objetivas, y de existir independientemente de la actividad humana. La objetividad y la independencia pueden requerir de consideraciones muy profundas para poder ser determinadas. En contraste, se determina fácilmente que algo es abstracto cuando no es concreto, y esto se reduce a la ausencia de propiedades físicas. Así (aunque como siempre, hay sus excepciones) los filósofos aceptarán normalmente que de existir los objetos matemáticos, éstos serían abstractos. Aquí empieza la controversia porque aceptar que existen cosas que no podemos ver, o tocar, o rastrear las huellas que dejaron a su paso, genera mucha resistencia por parte de la tradición filosófica con claras tendencias cientificistas.

Entonces tenemos que si existen las entidades matemáticas, éstas son abstractas. Pero aceptar la existencia de objetos cuyas propiedades no podemos comprobar mediante los populares mecanismos de percepción puede generar reticencia. Por esta razón, el terreno más amplio compartido por aquéllos que dudan de una realidad matemática es el del nominalismo. Dado el condicional del principio de este párrafo [si existen las entidades matemáticas, éstas son abstractas], negar la existencia de objetos abstractos implica necesariamente la no existencia de las entidades matemáticas. Desde luego, se puede sostener que existen otras entidades abstractas pero no las de la matemática. Por ejemplo para el caso de la ciencia, en particular de la física, hay otras entidades que tendrían esta cualidad–como las leyes de la naturaleza–. La cuestión aquí es que es difícil imaginar objeciones que apliquen para los casos de objetos abstractos matemáticos pero no para objetos abstractos de otra índole. Además de esto, muchos de los candidatos a ser objetos abstractos en ciencia involucran ellos mismos a objetos matemáticos. En cualquier caso, la negación tajante de la existencia de objetos abstractos aniquila una buena parte las vías disponibles para defender el realismo matemático.

1.4.1. Nominalismo

El nominalismo como lo describen Burgess y Rosen (Burgess y Rosen, 1997) es la postura filosófica que niega la existencia de objetos abstractos,

> Finalmente [...] es tu turno de cuestionar al Oráculo de la filosofía. [...] '¿Qué es lo que hay? ¿Qué tipo de cosas existen?'
>
> A esto el Oráculo responde ¡Qué? ¡Quieres toda la lista? Mira, no tengo todo el día. Pero te diré una cosa: todo lo que hay es concreto; nada de lo que hay es abstracto [...] Ahora te has convertido en un firme creyente de la existencia únicamente de entidades concretas; te has convertido en un creyente de la no existencia de entidades abstractas. Te has convertido en un **nominalista** [...]

Pero, ¿qué tan esotérico es creer en la existencia de abstractos? ¿Qué genera ese aire de misticismo que parece haber alrededor de la creencia en una realidad donde no todo lo existente es concreto? Aquí lo que hay, entre otras cosas, es el temor de que al abrir la puerta a la existencia de objetos abstractos no haya evidencia para discriminar ciertos abstractos existentes de otros que no lo son. Por ejemplo, el mismo condicional parece aceptable para el siguiente caso: si Dios existe entonces es abstracto. ¿Cómo sabríamos, de todas las entidades que pudieran habitar la realidad abstracta, cuáles son reales y cuáles no?

Mi impresión es que ésta no es razón suficiente para negar la existencia de entidades abstractas. La evidencia relacionada con dichas entidades vendrá de diferentes fuentes. Pensemos en entidades de algún tipo diferente a las matemáticas. ¿Negaríamos la existencia, por ejemplo, de novelas, instituciones o estados mentales? Por ejemplo, ¿alguien diría que la novela 'Cien años de soledad' es inexistente? Creo que difícilmente. Tampoco debería generar mucha controversia que una novela es una entidad abstracta. Cuando hablamos de 'Cien años de soledad' no nos referimos a algunos, o a todos, sus ejemplares. Tampoco nos referimos al manuscrito original escrito por Gabriel García Márquez. No nos referimos a un tiraje o a una edición: leer dos ejemplares distintos–incluso de ediciones diferentes–de la novela no es leer dos novelas, es leer dos veces la misma novela. ¿La novela existe? Sí, en tanto que tiene ejemplares que pueden ser leídos, tiene un autor, tiene ciertas propiedades

–en contraste con otras novelas–, etc. ¿La novela es abstracta? Sí, en tanto que no es concreta.

Estos ejemplos me servirán para mostrar lo que yo considero un prejuicio epistémico. Tenemos muy claros casos en los que la naturaleza de aquello que conocemos determina cómo lo conocemos. Conocemos el sabor de un platillo en virtud de que éste tiene la propiedad de tener su sabor; y la propiedad de tener un sabor es una que se conoce mediante el sentido del gusto. Sabemos que degustar el platillo nos dará conocimiento sobre su sabor. Ejemplos así son muy fáciles de imaginar para el mundo de lo concreto pero no parece ser así en el caso de lo abstracto. La disanalogía parece tan dramática porque se asume como condición necesaria de existencia de un objeto el que seamos capaces de determinar a primera vista–a partir de la existencia de dicho objeto–el modo en el que éste puede ser conocido. Pero que no sea obvio el modo en el que podemos conocer algo no es razón suficiente para dudar de su existencia. Determinar el modo en el que podemos conocer una cierta entidad puede requerir un poco más de investigación. Éste es justamente el caso de las entidades abstractas.

Pensemos por ejemplo en cómo adquirimos conocimiento de una institución. La explicación no es clara a primera vista, pero esto no quiere decir que no haya formas de conocerla. La respuesta no será del tipo *viéndola, tocándola, leyéndola, etc.*, pero podemos tener algunas ideas al respecto. Podríamos por ejemplo, revisar cuáles son sus funciones, en qué contexto fue en el que se originó, cuáles son las partes que las constituyen, qué se establece en sus estatutos, etc. Esto dependerá también de qué aspectos nos interesa conocer de la institución. Lo cierto es que, *cómo hemos de conocer a una institución* no es una cuestión de meros mecanismos perceptuales; seguramente será algo más complejo, pero no tanto para impedirnos acceso epistémico. ¿La existencia de una novela determina de manera contundente cómo debe ser el acceso epistémico a ella? No. La novela sugiere los modos en los que podemos conocerla: leer uno de sus ejemplares es nuestra primera opción. Pero qué pasaría si todos los ejemplares resultan destruidos, ¿se pierde toda posibilidad de conocer la novela? No necesariamente. Si alguien memorizó la historia, un modo de conocerla es que esa persona nos la relate. No es inmediato, a partir de la existencia de la novela, el modo en el que ésta puede ser conocida pero esto no nos imposibilita adquirir conocimiento de ella. De hecho tenemos este acceso a ella en muchos sentidos. Al igual que en el caso de la institución, diferentes intereses determinarán diferentes vías de conocimiento. Podemos tener conocimiento teórico literario, histórico, conocimiento puramente de su contenido, etc. El hecho de no poder ubicarla en una cadena causal no la convierte en inaccesible. Con los objetos matemáticos ocurre algo parecido. No tenemos explicaciones inmediatas sobre cómo es nuestro acceso a ellos, pero esto no es razón suficiente para negar su existencia. Sobre todo cuando los enunciados que hablan sobre estos objetos forman parte de una ciencia que ha sido crucial en el conocimiento humano. Cuando eliminar la historia matemática resulta difícil incluso de concebir: en contraste con cualquier historia de ficción, de la que fácilmente podemos imaginar un mundo en el que nunca hubiera existido. Ciertamente existe una disanalogía metafísica y ésta se refleja en la forma de conocer, pero la disanalogía por sí misma no muestra la no existencia de los objetos abstractos. Ésta simplemente muestra que se requiere de un análisis filosófico más profundo y de una teoría epistémica más robusta.

El caso de la novela y la institución reflejan que del condicional *Si X existe entonces X es abstracto*, no se sigue que *X* no existe. Simplemente porque hay cosas que son abstractas en tanto que es evidente que existen y que no son concretas. Soy consciente de que afirmar la existencia de las entidades que mencioné como ejemplo genera menos controversia que la misma afirmación para las entidades matemáticas. La diferencia en niveles de aceptación tiene que ver con la facilidad de explicar algunos aspectos de la entidad correspondiente (por ejemplo, su origen). Esta facilidad parece estar relacionada con la dependencia de las entidades hacia la actividad humana. Podemos afirmar–con un alto nivel de seguridad–que de no haber existido Gabriel García Márquez no hubiera existido tampoco 'Cien años de soledad'. Algo parecido ocurre para el caso de las instituciones o los estados mentales.

Una respuesta del antirrealista matemático puede ser que el caso de las instituciones y las novelas no es realmente complicado. Puede ser que no sea tan claro el modo en el que obtenemos conocimiento de estas entidades. Sin embargo, estos ejemplos son de entidades claramente dependientes de la mente humana. Esta dependencia arroja guías hacia los modos de conocer. Por ejemplo, toda novela tiene autor (incluso si la identidad de éste es desconocida sabemos que lo tiene). Esto nos da una línea para rastrear cuestiones propias de la novela. El problema es que el platonista también quiere defender la independencia de las entidades de la mente humana, y si esto es así, no ubicamos en la mente del matemático–o en su actividad–una guía hacia los objetos del mismo modo que lo hacemos para las novelas o en las instituciones. Ahora el problema ya no es que los objetos sean abstractos, sino que sean abstractos e independientes de la mente humana. Creo que esta nueva complicación sugiere que el análisis requiere de una profundidad mayor que la que se requeriría para explicar nuestro conocimiento de instituciones o de novelas. Sin embargo, si no nos quedamos atorados en que sólo existen los objetos concretos–como pretende el nominalista–, la cuestión de la independencia tampoco debería llevarnos a negar *prima facie* la realidad matemática. Después de todo, en la realidad concreta también hay cosas dependientes y cosas independientes de la actividad humana.

Pero si el platonista típicamente se ve obligado a dar una explicación que cierre la aparente brecha epistémica entre la realidad matemática y los matemáticos (quienes presuntamente poseen conocimiento acerca de dicha realidad), el nominalista tiene sus propios retos teóricos. El lenguaje y las teorías de las ciencias naturales y sociales están saturadas de afirmaciones que involucran entidades abstractas: en particular, números. Existe un amplio espectro de teorías, incluyendo muchas de sentido común, la mayoría de las científicas y prácticamente todas las matemáticas a las que, en principio, un nominalista no podría darles credibilidad. Para el realista el reto es prominente epistémico. No es necesario decir mucho más acerca del lenguaje: el lenguaje es tal y como aparenta ser, por lo que la única interpretación disponible es la literal. En contraste (volviendo a los dos hechos no controvertidos que mencioné al comienzo de la sección), el nominalista, que considera las oraciones falsas, tiene que explicar por qué éstas tienen la forma que tienen, y cómo es que de estas oraciones se obtienen los beneficios que normalmente atribuimos a las virtudes epistémicas. Es decir, beneficios que consideramos relacionados con la verdad de dichas oraciones. Estos retos nominalistas son los que motivan el ficcionalismo en su forma más tradicional.

1.4.2. Ficcionalismo

El ejemplo paradigmático de ficcionalismo en filosofía de las matemáticas es el trabajo que realizó Hartry Field durante la década de los 80. Como ya he mencionado varias veces, las opciones del antirrealista se limitan a, o bien proponer teorías alternativas que expliquen la verdad de los enunciados–para los nominalistas que defiendan la verdad de las proposiciones–, o a negar dicha verdad. El ficcionalismo de Field toma esta última opción. El lenguaje de la matemática se constituye por oraciones falsas que estamos acostumbrados a tomar como verdaderas. Pero a pesar de que estas oraciones sean falsas deben de tener alguna característica que las distinga de otras. Por ejemplo, aun cuando la proposición $2+2=4$ sea falsa (por el hecho de que no existen referentes que la satisfagan), deberá serlo de un modo diferente al modo en el que la proposición $2+2=5$ lo es. La característica que diferencia a estas dos proposiciones es la de ser *acorde con la historia estándar de la matemática*. Del mismo modo que, el que Oliver Twist naciera en Londres es acorde con la historia *Oliver Twist*, que $2+2$ sea 4 es acorde con la historia estándar de la matemática. En contraste, que Oliver Twist nazca en París, o que $2+2$ sea 5 no cumple con dicha concordancia (Field, 1989). Tenemos entonces una teoría que asume que la verdad está dada en términos de la satisfacción de los referentes y las propiedades denotados por los enunciados. El lenguaje de la matemática no es más que un lenguaje de ficción. Como los objetos matemáticos no existen, los enunciados de la matemática no son satisfechos y en consecuencia, no pueden ser verdaderos. La restricción de *acorde con la historia estándar de la matemática* discrimina enunciados que–por alguna razón–no pertenecen a la clase de enunciados que los matemáticos consideran verdaderos.

Esta postura ha recibido fuertes críticas. En su libro de 1989 Field reconoce el conocido argumento de la indispensabilidad (atribuido a Putman y Quine) como la única objeción seria al ficcionalismo. Este argumento parte de la idea de Quine de que las teorías científicas conforman una red que constituye nuestra mejor explicación del mundo. Los números–y otros objetos matemáticos como los conjuntos–constituyen una parte de dicha red aun cuando las teorías matemáticas queden aisladas de revisión inmediata (debido a su distancia de las observaciones empíricas) (Quine, 1980). Putnam modifica el argumento de Quine sosteniendo que no sólo nuestras mejores teorías cuantifican sobre entidades matemáticas, sino que de hecho, las entidades matemáticas son indispensables para las ciencias naturales (en el sentido de que no hay manera de formular tales teorías sin cuantificar sobre ellas) (Putnam, 1979). Putnam también acepta las propiedades de los objetos matemáticos basado en que éstas son necesarias en la propia formulación de las leyes naturales. De hecho, son las propiedades las que nos proveen de explicaciones satisfactorias en cuanto a medidas físicas, relaciones causales, funciones biológicas y reducción interteórica. Aceptando el reto de mostrar que las teorías científicas pueden prescindir de la referencia a objetos abstractos, Field elabora una reconstrucción de la mecánica clásica utilizando lenguaje puramente nominalsta. Mark Balaguer, por su parte, intentó una labor paralela para el caso de la mecánica cuántica (Balaguer, 1998). Las traducciones son complicadas y resultan poco accesibles incluso para los expertos en estas teorías, quienes están preparados para el análisis de fenómenos de la física más que para el manejo de lenguajes construidos en un sofisticado vocabulario lógico.

Aunque concediéramos la validez de estas traducciones eso únicamente mostraría que la referencia a objetos abstractos es prescindible en estas teorías en particular. En conclusión, al ficcionalista le toca una larga tarea que no ha sido resuelta, y que no da señas de estar cerca de resolverse. El ficcionalista necesita, primero, demostrar que la referencia a objetos abstractos no es indispensable–esta tarea es para cualquier nominalista–. Segundo, explicar si no es en virtud de la verdad de sus enunciados, en qué se basa la aplicabilidad y éxito del lenguaje de la matemática. Tercero, dar cuenta de las disanalogías que hay entre el lenguaje de la matemática y cualquier otro lenguaje de ficción. Por su parte, respecto al lenguaje, el realista matemático tiene poco que hacer. La función de las oraciones es justamente la que parece ser: describir correctamente la realidad matemática.

Negar la existencia de los objetos matemáticos, ante la incomodidad de admitir la existencia de objetos abstractos, no es una cuestión fácil. No se puede desestimar una teoría matemática como si ésta fuera mitología del mismo modo que uno desestimaría una teoría astronómica por estar basada en antiguas leyendas mayas. Ningún filósofo diría que el astrónomo debe renunciar a sus teorías por presuponer la existencia de números o funciones sobre la misma base de que debería renunciar a ellas por presuponer alguna vieja leyenda. En términos metafísicos y epistémicos, el realismo tiene su propia tarea. Pero en términos del lenguaje–en el que se basa de manera esencial la práctica del matemático–el realismo en matemáticas tiene una ventaja clara y contundente.

1.5. Conclusión

Cualquier postura realista o antirrealista en matemáticas deberá decir algo respecto al aspecto lingüístico, epistémico, y ontológico de la aritmética. Mi objetivo central en el trabajo es mostrar que los números existen. Esta existencia me permitirá tomar el modelo más intuitivo para explicar el contenido y la verdad de las oraciones aritméticas. Finalmente, espero estar en posición de dar cuenta de nuestro acceso epistémico al contenido de estas oraciones.

Considero que una explicación de tipo realista es más plausible que cualquier teoría antirrealista. Lo que sugiere esta plausibilidad es que, una teoría realista cubre (potencialmente) todos los aspectos filosóficos, teniendo una gran ventaja sobre cualquier postura antirrealista en el aspecto semántico–dando con esto respaldo a una idea de genuino conocimiento de la practica matemática actual–. Una teoría realista atiende a la explicación más intuitiva sobre el contenido de las proposiciones: las proposiciones aritméticas hablan acerca de lo que parecen hablar. '2+3=5' habla de los números dos, tres y cinco, de la relación aritmética de la suma y de la relación de identidad que estas entidades pueden mantener. La oración 'Dos es el menor número primo' habla del número dos, la propiedad que éste porta de ser un número primo, y un modo en la que la porta–siendo el menor de los números que portan la propiedad–. También las proposiciones que involucran entidades físicas resultan ser genuinas: 'El número de lunas de Marte es dos' habla de las lunas de Marte y su relación con el número dos. Esto es congruente con que las proposiciones de un buen fragmento del lenguaje (dejando de lado contenidos figurativos, implicaturas, presuposiciones) hablan acerca de lo que parecen hablar: mesas, lunas, nieve, propiedades, etc. Si el contenido de las proposiciones es el que parece ser, entonces la verdad de las proposiciones está dada en términos de este contenido (del modo en el que está expresado en el esquema que presento al comienzo de la sección). Con una explicación exitosa del acceso epistémico al contenido de estas proposiciones, quedará cubierta la tarea, y no hay razón para negar una postura realista. Tendremos una teoría que ofrezca mucho más que otras al momento de atender de manera simultánea a nuestras intuiciones más naturales y a los requisitos teóricos que una buena explicación filosófica debe satisfacer.

Si el realismo es correcto, dado que la labor matemática no es inventar sino descrubir, el matemático no tiene por qué restringirse a métodos o axiomas constructivos. Esto permite la justificación de métodos alternativos así como de útiles axiomas en la práctica (por ejemplo, el Axioma de elección). Esto motiva la búsqueda de nuevos axiomas para responder a preguntas abiertas (tales como la verdad de la Hipótesis del Continuo).

Vale la pena señalar que el realismo también respalda la idea de que la existencia de la práctica matemática es independientemente de los diferentes paradigmas metodológicos. La matemática va más allá de sus formas de estudio y ha estado presente siempre de algún modo: había matemática previa a las distintas etapas de formalización, previa a la teoría de conjuntos, e incluso previa al más primitivo de los sistemas axiomáticos.

Capítulo 2

El esquema de Benacerraf

2.1. Introducción

A lo largo de las últimas décadas las discusiones en torno al realismo en matemáticas han tomado como una importante consideración las objeciones que Benacerraf presentó en sus artículos *Mathematical Truth* y *What the numbers could not be*. Las teorías que afirman que las proposiciones de la aritmética describen alguna parte de la realidad se han visto comprometidas a atender a estas consideraciones. Mi propósito en este capítulo es analizar con detalle los requisitos que Benacerraf establece en *Mathematical Truth*, con la finalidad de obtener una reformulación de ellos. El replanteamiento de estos requisitos deberá rescatar las partes filosóficamente relevantes contenidas en el trabajo de Benacerraf, y agregar los elementos que hagan falta para determinar las condiciones deseables que una explicación sobre la verdad aritmética debería satisfacer.

Una de las razones por las que el trabajo de Benacerraf trascendió en el debate sobre realismo en matemáticas es que éste organiza la discusión de tal manera que distingue entre aspectos relevantes a la cuestión de diferente naturaleza filosófica. En primer lugar, el problema se presenta en forma de dilema. Esto permite separar el camino que conduce a la postura antirrealista del que conduce a la postura realista y en este proceso, distinguir las cuestiones semánticas y metafísicas de las epistémicas. En segundo lugar–y de mayor importancia para los propósitos de este capítulo–para que el problema sea establecido en su forma original (y en algunas de sus derivaciones) es necesario asumir ciertos supuestos teóricos hechos por Benacerraf. La aceptación o el rechazo de estos supuestos servirá para clarificar cuestiones sobre la naturaleza del objeto de estudio de la aritmética. Así pues, mi expectativa es que el análisis de este planteamiento sirva de guía para mostrar el camino hacia mi explicación sobre la naturaleza de los enunciados de la aritmética y en consecuencia, de aquello de lo que dichos enunciados hablan.

2.2. El problema para el platonista

Para comprender el problema de Benacerraf, hacer evidente el dilema asociado y mostrar sus consecuencias, voy a partir de las dos preocupaciones que según Benacerraf, motivan las explicaciones acerca de la verdad matemática. Estas preocupaciones son:

a. La preocupación por disponer de una teoría semántica homogénea entre las proposiciones del lenguaje natural y las del lenguaje matemático.

b. La preocupación por que la explicación acerca de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable que haga inteligible cómo es que adquirimos el conocimiento matemático.

Así, una teoría para explicar la verdad matemática será satisfactoria sólo si cumple con una semántica homogénea (en el sentido del inciso a.) y con una epistemología razonable (en el sentido de b.). Benacerraf divide las explicaciones existentes de la verdad matemática en dos, y cada una de ellas desatiende a una de las dos condiciones presentadas en los incisos a. y b. Los dos tipos de explicación sobre cómo obtienen su verdad las proposiciones matemáticas que reconoce Benacerraf son:

i. La explicación combinatoria: se construye por medio de concepciones que asignan valores de verdad a los enunciados (en particular de la aritmética) sobre la base de ciertos hechos sintácticos.

ii. La explicación estándar: es una explicación semántica y se da en términos de la referencia de los nombres y el rango de los cuantificadores que pueden contener las proposiciones.

Si aceptamos una explicación de la verdad matemática combinatoria, no tendremos una semántica homogénea (desatendiendo a la preocupación en a.). Esto debido a que las condiciones de verdad de las proposiciones en el lenguaje natural están determinadas por cuestiones semánticas de tipo estándar como la referencia de los nombres y el rango de los cuantificadores, mientras que las de los enunciados matemáticos–aritméticos–estarían basadas en hechos meramente sintácticos. Por otro lado, si aceptamos una explicación del tipo estándar, no podremos dar una epistemología razonable que explique cómo es que obtenemos conocimiento matemático. Más adelante desarrollaré detalladamente las consideraciones que acabo de sintetizar. En conclusión, ninguna de las explicaciones sobre la verdad matemática será satisfactoria debido a que cualquier explicación existente cae en el tipo i. o en el tipo ii., impidiendo así, que se cumplan las condiciones a. y b. respectivamente. El dilema determina de esta manera, un problema que quedará planteado por el tipo de explicación sobre la verdad matemática que uno pretenda defender.

Las posturas que sostienen que las entidades matemáticas son reales típicamente se identifican con una explicación de la verdad del tipo estándar: si estas entidades existen, deben ser ellas las que hagan verdaderas a las proposiciones de la matemática. Así, un realista en matemáticas se encuentra ubicado en el segundo cuerno del dilema; el reto se traduce en ofrecer una epistemología razonable que explique cómo adquirimos conocimiento matemático.

Desde luego podemos preguntarnos qué es lo que hace que la explicación semántica determine la explicación epistemológica. La respuesta es que Benacerraf cuestiona la conexión entre la semántica y la epistemología matemáticas en virtud de una conexión teórica que asume entre una semántica para el lenguaje natural–considerando por defecto la semántica de Tarski–y la epistemología que en la década de los años setenta predominó en aceptabilidad: la epistemología causal. En esta tradición nuestro conocimiento acerca del mundo está dado por relaciones causales que tenemos con los hechos. Estas relaciones son las que posibilitan el conocimiento de la verdad de las proposiciones en el lenguaje natural. Por ejemplo, la oración 'La nieve es blanca' es verdadera en virtud de que la nieve es blanca, y conocemos la verdad de esta proposición debido a que nuestras relaciones causales con el mundo nos permiten saber que el objeto denotado por el término 'nieve' pertenece a la clase de los objetos que cumplen la propiedad de ser blancos. El problema para el realista es que, debido a que son abstractas, no hay relación causal con las entidades matemáticas y tenemos conocimiento acerca del valor de verdad de las proposiciones matemáticas. Bajo estos supuestos, no es posible que sean estas entidades las que dan las condiciones de verdad de las proposiciones, ya que al no haber relaciones causales con ellas, no tendríamos manera de explicar nuestro conocimiento de la verdad matemática.

Al igual que una gran cantidad de posturas filosóficas, el problema planteado por Benacerraf no es concluyente. Burgess por ejemplo, rechaza el problema como tal. Para defender la realidad matemática, Burgess retoma el programa de Quine para construir un marco en el que podemos ver que el dilema de Benacerraf es descartable. El problema resulta inaplicable al naturalismo quineano, en el que las creencias acerca de objetos abstractos están justificadas dentro del holismo como parte de nuestras mejores teorías científicas. Simplemente no necesitamos justificar creencias individuales acerca de objetos abstractos particulares [1]. Sin embargo, además de la útil esquematización que nos proporciona Benacerraf, cabe señalar que vistos de un modo más general –no relativos a las teorías particulares que Benacerraf tenía en mente–, los *desiderata* del dilema de Benacerraf resultan bastante razonables. En las siguientes secciones defenderé la aceptabilidad de estos requisitos.

2.3. Homogeneidad semántica

La primera preocupación que presenta Benacerraf es la de disponer de una teoría homogénea en la cual la semántica para las proposiciones de la matemática sea análoga a la semántica para el resto del lenguaje. Notemos que tenemos aquí dos cuestiones; una de ellas es la homogeneidad y otra es la pretendida analogía. Benacerraf está pidiendo algo más que homogeneidad en la semántica; está pidiendo que esta homogeneidad sea provista por medio de una analogía con la semántica para el resto del lenguaje. Es decir que el punto de partida para el análisis es tener una teoría satisfactoria para el lenguaje natural. De este modo, uno de los supuestos básicos es que *de hecho* disponemos de una teoría semántica satisfactoria para el resto del lenguaje a la cual, una teoría satisfactoria de la verdad matemática sería análoga. Lo que Benacerraf tiene en mente es la teoría de Tarski. Yo no voy a discutir en este trabajo si la teoría de Tarski es o no una teoría satisfactoria para el lenguaje natural; y justamente no lo voy a discutir porque, como argumentaré

[1] Burgess, John P., 1990, "Epistemology and Nominalism", publicado en A. Irvine, ed., *Physicalism in Mathematics* (Dordrecht: Kluwer), pp. 1-16.

en la siguiente sección, la posibilidad de dar una teoría satisfactoria para la verdad matemática es completamente independiente de este hecho. En realidad Benacerraf tampoco está demasiado comprometido con este supuesto, en un pie de página de *Mathematical Truth* señala,

> Me permito la ficción de que *disponemos* de una semántica para el *resto del lenguaje*, o para ser más preciso, de que los seguidores de las concepciones que toman su impulso en esta preocupación, piensan en ellos mismos como si estuvieran en posesión de tal semántica, al menos para partes del lenguaje filosóficamente importantes.

Sin embargo, de no hacerse esta concesión el dilema no puede establecerse de la manera precisa como él lo formuló. Benacerraf considera obvio que cualquier explicación filosóficamente satisfactoria de la verdad, la referencia, el significado y el conocimiento debe abarcar todos estos conceptos y ser adecuada para todas las proposiciones a las que estos conceptos aplican. Lo cierto es que resulta difícil concebir una explicación sobre el lenguaje que no dé cuenta de cada una de estas nociones. Una teoría que no dijera nada acerca del significado de los términos, de la referencia, o de la verdad de las proposiciones, simplemente no sería una teoría acerca del lenguaje. La teoría de Tarski está desarrollada en estos términos, pero esto de ninguna manera es suficiente para considerarla una teoría satisfactoria para el lenguaje natural. A mi parecer Benacerraf ofrece buenas razones por las que debería darse una proximidad en cuanto a la explicación de la verdad en el lenguaje natural y la de la verdad en el lenguaje matemático. Pero no parece haber mayor razón para que deba fijarse la teoría de Tarski como satisfactoria y a partir de ella, constreñir cómo debería de ser una explicación satisfactoria para la verdad matemática.

Dejando un poco de lado la cuestión de si contamos con una explicación semántica satisfactoria para el lenguaje natural y centrándonos en la condición de homogeneidad, me gustaría plantear la siguiente pregunta.

¿Qué tanto puede distanciarse una explicación sobre la verdad en el lenguaje matemático de una explicación sobre la verdad en el lenguaje natural? En primer lugar, no debemos perder de vista que el lenguaje matemático forma parte del lenguaje natural. Los términos del *matematés* son todos términos pertenecientes al lenguaje natural. Incluso aquellas palabras que sólo existen dentro del vocabulario matemático. Si no aceptamos esto, querría decir que tampoco el vocabulario filosófico, ni el vocabulario de la medicina, ni el de cualquier disciplina que tenga términos técnicos, pertenecen a nuestro vocabulario usual. Los enunciados tienen la misma estructura sintáctica y cualquier hablante competente del lenguaje está en condiciones de comprender una oración matemática. En este sentido, el lenguaje matemático es parte del lenguaje natural.

Negar que los enunciados de la aritmética forman parte del lenguaje natural nos llevaría a cuestionar también si los lenguajes de las diferentes disciplinas, o incluso los lenguajes en otros idiomas, forman parte del lenguaje natural. Entonces por principio, como el lenguaje matemático está contenido en el lenguaje natural, una teoría que explique el segundo deberá explicar –en alguna medida– también el primero. Desde luego que esta teoría podrá tener diferentes explicaciones para los conceptos (verdad, referencia, significado, conocimiento) en cada uno de los fragmentos del lenguaje. Pero, ¿qué tan diferentes? Pensemos por ejemplo en una teoría en biología sobre animales. Es claro que la misma teoría –si es una teoría *sobre* animales– deberá explicar los fenómenos relacionados con los mamíferos y con los anfibios, ya que los mamíferos y los anfibios son subclases de la clase de los animales. Esto no quiere decir que la teoría vaya a dar la misma explicación sobre la respiración en los mamíferos y la respiración en los anfibios. La explicaciones serán diferentes. Pero de nuevo, ¿qué *tan* diferentes pueden ser dado que la teoría general está constreñida por la clase de los animales a la que pertenecen ambas subclases? No pueden ser radicalmente diferentes dado que hay un sentido claro en el que el fenómeno es el mismo. Soy consciente de las diferencias entre un fenómeno abstracto como la verdad y uno físico como la respiración. Sin embargo mi intención por ahora es simplemente hacer una consideración metodológica: es de esperarse que un mismo fenómeno que se presenta en diferentes instancias tenga un análisis similar–en algún nivel–para cada una de ellas.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, tenemos que como parte de una misma teoría acerca de los fragmentos del lenguaje en consideración podemos aceptar una explicación diferente–en algún grado–pero homogénea sobre los conceptos propios de la teoría. En particular, mi interés está en la explicación para el concepto de verdad en un cierto fragmento del lenguaje matemático: el fragmento en el que las oraciones toman a los términos numéricos como singulares y cuyos predicados y cuantificadores actúan sobre éstos. Es importante dejar en claro que mi propuesta no excluye la posibilidad de explicaciones diferentes y quizá mucho más complejas para otras ramas de la matemática–como también las hay para otro tipo de oraciones en el lenguaje cotidiano–.

La idea central es que una teoría de la verdad debe proporcionar condiciones similares para enunciados similares. Por ejemplo, las condiciones de verdad para dos enunciados con cuantificadores deben reflejar de manera significativamente similar la contribución de los cuantificadores. Retomando la analogía con la teoría en biología, una explicación sobre el fenómeno de la respiración en dos distintas clases deberá dar cuentas similares del papel que el oxígeno juega en este proceso para cada una de ellas. Cualquier distanciamiento sustantivamente radical entre ambas explicaciones tendría que estar fuertemente motivado. Dicho de otra manera, la carga de la prueba está del lado de quien pretenda dar una teoría no homogénea para un mismo fenómeno que se presenta en distintas instancias.

El ejemplo más representativo de una teoría que proporciona una explicación distinta de la contribución de los cuantificadores al razonamiento matemático, es la explicación provista por Hilbert. Benacerraf toma las ideas que Hilbert presentó en 1925 en el congreso en Münster en honor a Weierstrass [2]. La razón para considerar precisamente este trabajo es porque en él resulta muy clara la motivación más ulterior de Hilbert; la preocupación por explicar la noción de infinito evitando las temidas paradojas. Esto permite que en el análisis filosófico se adquiera una visión más amplia del estado resultante al asumir una explicación combinatoria. Lo que hace la explicación de Hilbert es separar los enunciados de *la matemática intuitiva* como aquéllos que no necesitan más justificación. Podemos pensar que estos enunciados son los finitamente verificables (en algún sentido no especificado). Los enunciados de la aritmética que no pertenecen a esta clase (aquéllos que contienen cuantificadores) resultan ser instrumentos para pasar de unos enunciados reales (de nuevo, los finitamente verificables) a otros. Estos instrumentos teóricos de la matemática son los elementos ideales. Su introducción es análoga a los *puntos al infinito* de la geometría proyectiva. Éstos son simplemente recursos

[2]Hilbert, David, 1926, "Über das Unendliche", Mathematische Annalen, 95: 161 - 190. Conferencia en Münster, 4 de junio de 1925. Traducción al inglés en van Heijenoort (1967, 367 - 392).

teóricos que permiten explicar aquello que de algún modo *está ahí* y que constituye lo que nos interesa estudiar. Si no llevan a contradicciones y además tienen otros usos, entonces su introducción está justificada. Esta justificación es la que impone la necesidad de una prueba de consistencia para el sistema completo de la aritmética de primer orden.

Si esta interpretación es correcta, la teoría de Hilbert no da una explicación satisfactoria sobre la naturaleza de la verdad matemática debido a que no considera por igual–en términos semánticos–a todos los enunciados cuantificados. Esta brecha resulta contundente en la teoría dada y no se ve cómo podríamos encontrar su forma análoga en el lenguaje natural. La pretendida homogeneidad no ha sido satisfecha. En otras explicaciones del mismo estilo, las condiciones de verdad para los enunciados de la aritmética son entendidas a modo de derivabilidad formal a partir de un cierto conjunto de axiomas. Además de lo que he señalado en el párrafo anterior, estas teorías tienen un problema adicional. Una teoría satisfactoria debería ser capaz de atribuir un valor de verdad para cada enunciado de la aritmética. Sin embargo, los teoremas de incompletud de Gödel nos muestran que en cualquier sistema formal S con la expresividad suficiente para reconstruir la aritmética, vamos a encontrar proposiciones tales que ni ellas ni su negación son demostrables en S.

Si queremos atender a la manera más natural de pensar en el concepto de verdad, la explicación deberá implicar condiciones de verdad para las proposiciones de la aritmética que sean condiciones de *su* verdad de manera evidente, y no condiciones para ser teorema en algún sistema formal. Desde luego se puede sostener que ser un teorema es una condición de verdad para una proposición, pero entonces habrá que dar una explicación entre la verdad y la propiedad de ser un teorema, ¿de dónde obtendríamos esta explicación? Parece que necesitaríamos de algo como una teoría de teorías de la verdad que diera cuenta de cómo la propiedad de ser un teorema y la propiedad de que una proposición sea verdadera en el lenguaje no matemático convergen ambas en concepto de verdad. Esto lo tendríamos que hacer para cualquier explicación que desatienda al requisito de homogeneidad. No poder dar esta explicación sería tanto como asumir que por un lado, las oraciones cotidianas tienen sus condiciones de verdad–dadas de la manera *estándar*–, y por el otro, la matemática tiene las suyas. Es decir que tendríamos al menos dos tipos de verdad: la verdad matemática y la verdad no matemática. No sería claro cuál es el sentido de oraciones como 'Es tan verdadero como que dos más dos es igual a cuatro', que reflejan la intuición de los hablantes de que la verdad es un fenómeno–relativo a las oraciones–que no deja de ser el mismo cuando se presenta en instancias aritméticas, que cuando se presenta en instancias no matemáticas.

Volviendo al ejemplo de la respiración (para enfatizar mi punto pero reconociendo que éste es un fenómeno de distinta naturaleza) suena muy extraño decir que cuando hablamos de la respiración en los anfibios hablamos de una respiración y cuando hablamos de la respiración en los mamíferos hablamos de otra respiración. Los procesos pueden ser diferentes y puede haber ciertas variaciones en las explicaciones pero en ambos casos nos referimos a la misma cosa cuando hablamos de respiración. Lo mismo ocurre para el caso de la verdad de las oraciones; puede que haya diferencias, pero éstas deberán surgir en el nivel del análisis de la referencia de los términos singulares y los predicados.

2.3.1. Una teoría satisfactoria de la verdad

Hasta aquí he dado razones por las que una teoría sobre la verdad matemática no debería estar demasiado alejada de una teoría sobre la verdad en el lenguaje natural. Al menos para fragmentos de ambos lenguajes que resulten semejantes. Esta idea es la que Benacerraf plantea en el *desideratum* a. Pero como ya mencioné anteriormente, lo que nos encierra en el dilema es la suposición de que este requisito implica asumir la teoría tarskiana para explicar la naturaleza de la verdad–asumiendo de una vez su conexión con la teoría causal de justificación para el conocimiento–. Lo que quiero hacer ahora es plantear el *desideratum* a. sin suponer la teoría de Tarski–o cualquier otra teoría en particular–. Argumentaré que una teoría satisfactoria para el lenguaje natural es una teoría de la verdad que da cuenta de una adecuada relación entre las proposiciones y los hechos a las que éstas refieren.

Uno podría asumir teorías distintas a la de Tarski y satisfacer los requisitos relevantes que impone Benacerraf. Mi intención es abrir el espectro de alternativas para obtener las características de lo que sería una teoría satisfactoria para explicar la verdad en el lenguaje natural pero conservar el espíritu benacerrafiano de homogeneidad para nuestra explicación de la verdad matemática. Así, mi objetivo será mantener a. modificando el supuesto de que la teoría satisfactoria a la que hay que analogar nuestra teoría para la verdad es la teoría de Tarski.

La idea de la verdad como un fenómeno que refleja cierta relación entre hechos y proposiciones es la más natural. Esto no debiera ser algo muy controversial. Simplemente debemos apartarnos un poco de la sobrecarga teórica y atender al sentido común. Cuando reprochamos a alguien por decir algo falso, usualmente queremos decir que la oración proferida no se corresponde de alguna manera con los hechos. El problema es que cuando volvemos a la teoría y decimos algo como que la verdad es un tipo de correspondencia con los hechos, surgen todo tipo de cuestionamientos filosóficos y puede parecer que no tenemos mucho más que una fuerte intuición. En cualquier caso, las alternativas tradicionales (e.g. igualar la verdad con la pertenencia a un algún sistema coherente de creencias; pensarla como lo que podría ser verificado en condiciones ideales; o como una base adecuada para la acción) parecen no haber funcionado precisamente porque ellas no encajan con la intuición de *correspondencia*. La cuestión es que el predicado, 'es verdadero' no es utilizado de la forma usual para atribuir una propiedad no correspondentista a cierto tipo de entidades (creencias, enunciados, etc.). Éste más bien expresa una característica cuya naturaleza subyacente será explicada por la relación que estas entidades mantengan con otros aspectos de la realidad [3].

Cuando menciono la correspondencia, no busco defender una teoría correspondentista como las que se han dado anteriormente sino rescatar la intuición detrás de estas teorías y que, a mi parecer, es una intuición bastante natural. No es necesario pensar en la verdad como una fuerte correspondencia entre proposiciones y hechos (como lo hubiera pensado el primer Wittgenstein) en la que una oración es una entidad que expresa–como lo haría una pintura–un hecho cuyos elementos constitutivos son los referentes de los elementos constitutivos de la oración y la oración es verdadera si y sólo si tal hecho existe[4]. En una teoría que atienda a las intuiciones que menciono en el párrafo anterior, tenemos que la verdad de una oración depende de cómo sus elementos constitutivos están organizados entre sí y cuáles entidades están por ellos. No es difícil imaginar que si Benacerraf hubiera escrito su artículo en 1930 y no en 1973, bien pudo haber tomado la wittgensteniana como

[3]Horwich, Paul., 1998. *Truth*, Oxford: Blackwell (segunda edición).

[4]Wittgenstein, Ludwig., 1922. *Tractatus Logico-Philosophicus*, London: Routledge & Kegan Paul.

'una explicación satisfactoria sobre la verdad en el lenguaje natural' –quizá usando un pie de página similar al que presenta para aclarar que él no está convencido de su propia suposición–.

Atender a las intuiciones de que la verdad captura ciertas relaciones apropiadas entre hechos y proposiciones no requiere necesariamente de una metafísica del lenguaje tan radical. Otra forma de hacerlo es definir verdad en términos de referencia y de satisfacción de predicados sin tener en consideración las nociones de *hecho* o de *estructura* (e.g. Austin, 1950; Tarski, 1958; Davidson, 1969). En el caso de Tarski podemos prescindir de la categoría ontológica de *los hechos*, y tenemos que la verdad de una oración o proposición se construye directamente a partir de las relaciones de referencia y satisfacción entre sus partes y varios objetos externos. En otras palabras, la verdad de una entidad es engendrada por los objetos a los cuales corresponde cada uno de sus constituyentes. Esta descripción resalta la utilidad que tiene asumir la teoría de Tarski como parte del *desideratum* a. para generar el dilema.

La teoría de Tarski es una teoría que rescata intuiciones correspondentistas acerca de la verdad puesto que nos permite derivar todos los bicondicionales del tipo: *'La nieve es blanca' si y sólo si la nieve es blanca.* En este marco la verdad de un enunciado es explicada en términos de las propiedades semánticas de sus constituyentes. Su diferencia con otras teorías, basadas en intuiciones similares, es que ésta es una teoría primordialmente composicional y no refiere explícitamente a hechos o estructuras lógicas.

Consideremos por ejemplo, la siguiente reconstrucción que hace Paul Horwich de la explicación wittgeinsteniana:

i Una secuencia de términos (o sentidos) S, *refiere* a una secuencia de entidades O, cuando S y O tienen la misma longitud y el n-ésimo miembro de S refiere al n-ésimo miembro de O.

ii Una oración (o proposición Fregeana) x, corresponde a una proposición russeliana $y \leftrightarrow$ existen una secuencia S y una secuencia O tales que

- x está compuesto por los miembros de S;
- y está compuesto por los miembros de O;

- x y y tienen la misma forma lógica;
- S refiere a O.

iii $y =$ la proposición ruselliana expresada por p

iv x es verdadera $\leftrightarrow$ existe una proposición russelliana y, tal que

- x corresponde a y;
- y es un hecho.

La teoría de Tarski no requiere de este tipo de esquemas para especificar para cada proposición cuándo ésta expresa un hecho. Lo que hace es dar una teoría donde la verdad de cada oración se deriva a partir de los referentes de sus partes. Tenemos una explicación recursiva que finalmente resulta en una definición explícita de verdad:

p es verdadera en un lenguaje L si y sólo si

(i) p tiene la forma '$P(x)$' y existe un objeto, x, tal que el predicado de p es verdad en L (respecto a x) y el sujeto de p refiere en L a x; o

(ii) p tiene la forma '$\phi \wedge \psi$' y cada miembro de la conjunción p es verdadero en L; o

(iii) p tiene la forma '$\neg\phi$' y lo que es negado en u no es verdadero en L; o

(iv) $p = \ldots;$

Por diversas razones esta teoría gozó de una alto nivel de aceptación. Por esas mismas razones, no parece descabellado que Benacerraf la asuma como parte del *desideratum* a. Pero prescindir del supuesto de que la teoría de Tarski brinda una explicación satisfactoria para la verdad en el lenguaje natural tampoco tiene nada de absurdo. De hecho, cuando Tarski presentó esta teoría lo hizo para un cierto lenguaje simple L, donde se puede definir el predicado 'verdadero en L' cuya extensión son justamente las verdades de L. Sin embargo, algunos filósofos como Davidson[5] han sostenido que para lenguajes complejos, el predicado 'verdadero en L' puede definirse en términos

[5] Davidson, Donald, (1969) 'True to the Facts', Journal of Philosophy, 66: 748-64, reimpreso en Davidson (1984).

de 'refiere en L' y 'satisface en L'. El problema es que esto no ha podido demostrarse. Más aun, se han dado buenas razones para pensar que no es posible. Por ejemplo, una crítica común es que la estrategia tarskiana sólo aplica a aquellos lenguajes cuyas formas lógicas pueden expresarse en lógica de primer orden. Es decir que sólo aplica para oraciones cuyo valor de verdad está determinado por los valores de verdad de las proposiciones atómicas. Pero no hay razón para suponer que toda verdad concebible tiene esta estructura. Pensemos por ejemplo, en los condicionales contrafácticos; las afirmaciones probabilísticas, las leyes de la naturaleza; o las aseveraciones modales de diferentes tipos. Todas estas construcciones parecen resistirse a la formalización en el lenguaje de predicados, entonces no es claro que la teoría de Tarski alcance para cubrirlos. Sin embargo, esto no impide que también para estos fragmentos del lenguaje puedan darse explicaciones que rescaten de alguna forma nuestras intuiciones de la verdad como una cierta relación entre oraciones y hechos.

Como ya dije anteriormente, mi intención no es rechazar el dilema de Benacerraf negando sus supuestos sino rescatar de sus preocupaciones las condiciones relevantes para determinar cuándo una teoría sobre la verdad matemática –en particular sobre la verdad aritmética– es satisfactoria.

Lo que he intentado mostrar es que no hay mayor razón para comprometernos con la teoría de la verdad de Tarski. No necesitamos garantizar tampoco la existencia de una teoría de la verdad satisfactoria para el lenguaje natural. Para que una teoría de la verdad sea satisfactoria no requiere ser análoga a la teoría de Tarski. Ni siquiera tiene que satisfacer sus requisitos –como lo diría Benacerraf–. Lo que hará a esta teoría satisfactoria es que cumpla con la condición general de reflejar una adecuada relación entre hechos y oraciones. En particular, este requisito resulta satisfecho por la teoría de Tarski, pero de igual forma puede ser satisfecho por toda una gama de teorías de la verdad. Si queremos atender a nuestras intuiciones y al requisito de homogeneidad, la afirmación de que una oración es verdadera deberá garantizar que hay una adecuada relación entre las oraciones y aquello de lo que éstas hablan. Dicho esto, el primero de los requisitos que propongo para determinar cuándo una explicación sobre la verdad en el fragmento del lenguaje matemático en el que estoy interesada (los enunciados aritméticos) es satisfactoria es el siguiente.

- **Requisito de homogeneidad semántica:**

  Nuestra semántica para ambos tipos de lenguaje debe preservar la intuición de que la verdad es algo que expresa una cierta relación entre las oraciones y los hechos que éstas reportan.

2.4. Homogeneidad epistémica

La segunda preocupación que Benacerraf presenta en *Mathematical Truth* es la que anteriormente indiqué con el inciso b. Ésta es, que la explicación de la verdad matemática se combine con una epistemología razonable. Defendiendo mi posición ontológica replantearé este requisito como la necesidad de tener una explicación, que dada la homogeneidad de ambos contextos dentro de un marco realista, explique el conocimiento tanto en dominios matemáticos como en dominios no matemáticos. Nuevamente cabe señalar que esto no supone que hay un sólo tipo de conocimiento. Así como en los dominios no matemáticos podemos distinguir diferentes tipos de conocimiento (práctico, proposicional, inferencial, modal, etc.) la matemática es suficientemente amplia para presentar sus propias variaciones. Sin ir muy lejos, típicamente se ha hecho la distinción entre el conocimiento geométrico y el aritmético. Mi preocupación aquí es la de tener explicaciones homogéneas para el conocimiento de hechos que son capturados por un mismo tipo de oraciones: oraciones –naturales y aritméticas– compuestas por referentes sobre los que se predica y cuantifica. Por ejemplo,

1.a. El (número) dos es el menor de los números primos.

1.b. El (monte) Everest es el más alto de los montes del Himalaya.

2.a. Doce es combinación lineal de dieciocho y veinticuatro.

2.b. Nancy es prima de Laura y Martín.

3.a. Para todo n número natural, n es congruente con 0 módulo 2 o n es congruente con 1 módulo 2.

3.b. Para todo habitante x del edificio Morelos, x vive enfrente de la señora Martha o x vive arriba del señor Venancio.

4.a. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + a^3 = \left(\frac{a(a+1)}{2}\right)^2$.

4.b. La reina de Inglaterra es Isabel II.

En su formulación original Benacerraf presupone que tenemos conocimiento matemático. Además de esto, se declara explícitamente partidario de una explicación causal del conocimiento en la que, para que X sepa que S es verdadero se requiere que haya alguna relación causal entre X y los referentes de los nombres, predicados y cuantificadopres de S. Aunque Benacerraf está justificado en la exigencia de una epistemología razonable para el conocimiento matemático, parece haber un sesgo en lo que él considera *razonable*. Su compromiso con una teoría causal de la referencia–adherida a la teoría de Tarski– y con una epistemología donde el elemento causal juega un papel central en la justificación de las creencias, conduce a un marco sumamente constreñido para la explicación de la verdad matemática. Este constreñimiento culmina en el famoso dilema. Pero una vez que los requisitos hayan sido analizados, la nueva organización de los elementos filosóficos en juego permitirá replantear el papel de las relaciones causales disolviendo así el dilema.

Compartiendo el punto de partida de Benacerraf, comenzaré con la presuposición de que poseemos conocimiento aritmético. Por otra parte, en el mismo espíritu del desideratum semántico, pretendo defender el requisito epistémico en términos de homogeneidad. Esto quiere decir explicar el conocimiento de las verdades del lenguaje natural y de manera homogénea, explicar también las del lenguaje aritmético. Mi motivación para perseguir dicha homogeneidad es que una gran parte de los históricos prejuicios contra el realista matemático han provenido de la aparente lejanía entre la forma en la que adquirimos conocimiento sobre entidades fuera del dominio matemático, y la forma en la que conocemos las verdades matemáticas.

¿Por qué deberíamos esperar cierta concordancia entre nuestras explicaciones del conocimiento matemático (en particular del aritmético) y del conocimiento no matemático? La primera razón es que, como ya defendí en párrafos anteriores, la verdad es un cierto tipo de relación entre oraciones y hechos. Dado que tenemos el mismo tipo de oraciones–pertenecientes a cada uno de los fragmentos relevantes en su respectivo lenguaje–verdaderas, no es de extrañar que haya también similitud–a un cierto nivel–entre los *tipos* de hechos que estas oraciones expresan. Si tenemos hechos similares en algún sentido, podemos esperar una explicación unificadora que permita satisfacer para ambos casos las mismas condiciones y que den cuenta del conocimiento que tenemos acerca de estos hechos.

Otra razón es que las variaciones radicales entre explicaciones de fenómenos no tan radicalmente diferentes suelen generar cierta desconfianza. En este sentido Benacerraf sostiene que hay poca flexibilidad para que la explicación sobre el conocimiento de distintas cosas pueda variar y esto no parece ser algo sospechoso. Lo que yo presento como *homogeneidad*, Benacerraf lo toma como parte de las condiciones que una teoría filosóficamente satisfactoria debe cumplir:

> Una explicación del conocimiento que parece funcionar para ciertas proposiciones empíricas sobre objetos físicos de tamaño medio, pero que falla a la hora de explicar el conocimiento más teórico, es insatisfactoria; no sólo porque sea incompleta, sino porque también puede ser incorrecta, incluso como una explicación de las cosas que parece abarcar de manera bastante adecuada. [Benacerraf 1973, p.162]

Si bien Benacerraf no presenta explícitamente la condición de homogeneidad, el pasaje anterior me permite pensar que él aceptaría–o al menos no rechazaría–dicha condición.

En otras reformulaciones podemos encontrar también compatibilidad con dicho requisito. Por ejemplo, en la reformulación del problema de Benacerraf que Hartry Field presenta en *Realism, Mathematics, and Modality* [6]:

P.1 Los matemáticos son fiables, en el sentido de que para casi cualquier oración matemática S, si los matemáticos aceptan S, entonces S es verdadera.

[6] Field, H. 1989. 'Realism, Mathematics and Modality'. Oxford: Blackwell. P.68

P.2 Para que una creencia en matemáticas esté justificada, debe ser posible, al menos en principio, explicar la fiabilidad descrita en P.1.

P.3 Si el platonismo en matemáticas está en lo correcto, entonces esta fiabilidad no puede ser explicada de forma alguna.

Si estas tres premisas son verdaderas, entonces el platonismo en matemáticas socava la justificación de nuestras creencias.

La idea detrás de esta reformulación es evitar que el problema sea descartado por medio de negar que la epistemología causal es nuestra mejor explicación para el conocimiento. En lugar de asumir la suposición original de Benacerraf, Fied plantea el problema *mostrando* que el platonismo no permite explicar la justificación de nuestras creencias en el marco de alguna epistemología de tipo fiabilista [7].

Que Field presuponga una epistemología –o un tipo de epistemologías– que hoy en día goza de un alto grado de aceptación evidencia la expectativa de que una explicación satisfactoria para el conocimiento matemático preserve cierta homogeneidad con lo que sería una explicación satisfactoria para el resto del conocimiento. De esta manera, espero haber motivado suficientemente lo que será mi segundo requisito de homogeneidad:

- **Requisito de homogeneidad epistémica:**

  Una explicación satisfactoria del conocimiento aritmético tiene que ser homogénea con nuestras explicaciones para el conocimiento en dominios no matemáticos.

2.4.1. Conocimiento de propiedades

Como ya he venido diciendo, estoy de acuerdo en muchos de los puntos que conducen al problema de Benacerraf. Sin embargo, las cuestiones en las que discrepo merecen especial énfasis porque resultan cruciales para mi propuesta positiva de solución al problema de la tensión metafísica-epistemológica que Benacerraf ha interpretado bajo sus propios términos. Pero distanciarse de los fuertes compromisos de la formulación original no es nada nuevo:

[7]Goldman, A. 1979. “What is Justified True Belief?” En G.S. Pappas (ed.), Justification and Knowledge. Dordrecht: D. Reidel: 1-23.

ya anteriormente mencioné la reformulación de Field. En ésta se ha abandonado el compromiso con la epistemología causal y se ha adquirido uno nuevo con las epistemologías de tipo confiabilista. Lo que hizo Field con esta reformulación fue *actualizar* el problema a un marco teórico vigente, a mi parecer, conservando el más arraigado supuesto que tenía Benacerraf: que las relaciones causales desempeñan un papel central en nuestra justificación del conocimiento. Desde luego que Field no menciona explícitamente el requisito causal. La idea de este replanteamiento es salvar al problema de las críticas que lo atacan por el lado de la epistemología causal. Si en vez de en la causalidad, la imposibilidad del conocimiento matemático descansa en la confiabilidad de los matemáticos acerca de sus creencias, no parece haber una exigencia de mantener relaciones causales con los objetos en juego. De esta manera, tampoco se puede responder simplemente que las relaciones causales con los objetos no son una condición necesaria para adquirir conocimiento de ellos. Pero he aquí las razones por la que considero que en la reformulación de Field subyace nuevamente el requisito de una conexión causal con los objetos matemáticos. Primero, vale la pena recordar que Goldman presenta el confiabilismo a modo de refinamiento de su teoría causal del conocimiento (Goldman, 1975). Segundo, la inquietud de Field bien puede resumirse como,

De existir los objetos matemáticos, ¿cómo estarían éstos conectados a los procesos generadores de creencias matemáticas de tal modo que sea posible determinar la confiabilidad de dichos procesos?

Dado que los procesos generadores de creencias son procesos primordialmente cognitivos, ¿cómo podría ser la conexión–si no es causal–entre ellos y los objetos acerca de los que son las creencias? Por estas razones me atrevo a decir que hay un supuesto de fondo de que la confiabilidad de los procesos generadores de creencias se determina mediante mecanismos causales. Nuevamente, el *bloqueo epistémico* para el realista está dirigido a la imposibilidad de mantener relaciones causales con las entidades matemáticas. En mi propuesta pretendo mostrar que no hay tal aislamiento causal. Podemos responder positivamente a Benacerraf y también a otros refinamientos del argumento como el de Field.

Algo que tanto Benacerraf como otros filósofos han pasado por alto es que un requisito que una buena epistemología debería cumplir, sea matemático su dominio o no, es el de dar cuenta del conocimiento de propiedades. Las propiedades (bajo prácticamente cualquier forma en la que se les entienda) son abstractas, sin embargo, resulta bastante extraño decir que no tenemos ningún tipo de conocimiento de ellas. Nuestros ejemplos más sencillos de conocimiento[8] involucran propiedades. Sin ir más lejos, para que sea posible el conocimiento de objetos, incluso de los más simples y cotidianos, es necesario tener conocimiento de propiedades. ¿Por qué? Simplemente porque conocemos objetos vía sus propiedades. Aquí la cuestión es que las relaciones epistémicas que mantenemos con las propiedades no son tan claras como las que mantenemos con los objetos concretos. Queda mucho por explicar.

Bajo el uso que se le da a la expresión 'estar relacionados causalmente' nosotros no estamos causalmente relacionados con las propiedades en sí. Pero justo ésta es la cuestión que me interesa resaltar: ciertamente yo no estoy causalmente relacionada con la esfericidad, ni con la propiedad *rojo*. Sin embargo, soy competente en el uso de los términos, tengo un cierto conocimiento de estas propiedades que me permite distinguir, aun cuando no sea infalible, entre objetos esféricos y objetos no esféricos. Sería raro decir que mi estado es de completo aislamiento causal de estas propiedades. Lo único que puede afirmarse es que no estamos en contacto directo con la propiedad en sí misma (vista por ejemplo, como universal), pero es un hecho que todas esas relaciones que guardamos con los portadores en cierta manera nos ponen en contacto con sus propiedades. Conocimiento de proposiciones como,

(1) Juan es alto.

(2) La altura es una propiedad de longitud.

requiere de cierto conocimiento de propiedades. De esta manera atendiendo a los puntos que ya he explicado de las preocupaciones de Benacerraf, pero distanciándome de algunos prejuicios construidos en torno a la idea de *estar causalmente relacionados*, pondré en reconsideración el papel que las relaciones causales han desempeñado en los argumentos en contra de las posturas realistas para la justificación del conocimiento aritmético.

Con base en los argumentos que he presentado, agregaré un pequeño señalamiento al requisito de homogeneidad epistémica,

[8] Una vez más quiero precisar que cuando hablo de cosas como *ejemplos sencillos de conocimiento*, lo que tengo en mente son casos en los que el conocimiento puede ser expresado por oraciones simples del tipo 'La nieve es blanca'.

- **Requisito de homogeneidad epistémica**:

  Una epistemología satisfactoria tiene que ser homogénea con nuestras explicaciones para el conocimiento en dominios no matemáticos y,

  debe dar cuenta del conocimiento de propiedades.

Hasta aquí me he enfocado en preparar el terreno hacia una explicación realista acerca de la naturaleza de los números que responda a las preocupaciones relacionadas con la verdad matemática, acotadas a los enunciados pertenecientes a la aritmética, que Benacerraf plantea en su trabajo de 1973. El análisis que realicé evidencia que algunas de las suposiciones que hace Benacerraf son completamente prescindibles. Esas mismas suposiciones son las que generaron el dilema que, entre otras cosas, tiene como consecuencia la imposibilidad de sostener una postura filosófica de tipo platonista respecto a los objetos matemáticos. Renunciar a estas ideas, que en gran parte fueron motivadas por el éxito que tuvieron las teorías filosóficas en las que están basadas, nos motiva a dar un paso atrás; a revisar una vez más el problema desde el principio y a buscar explicaciones que en lugar de rendir cuentas a dichas tradiciones, atiendan a nuestras intuiciones más naturales.

Teniendo en mente el objetivo que describo en el párrafo anterior, he partido del planteamiento original del problema de Benacerraf y he llegado a la formulación de un esquema, cuyas condiciones conducirán a que una explicación sobre la verdad matemática sea satisfactoria respecto a las consideraciones filosóficas relevantes que se han planteado. Dicho esquema está constituido por el requisito de homogeneidad semántica y el requisito de homogeneidad epistémica.

Capítulo 3

Los números como propiedades

3.1. Introducción

Este capítulo presenta las bases sobre las que descansa mi postura acerca de los números como propiedades. Si bien es cierto que difícilmente podré dar una caracterización completa, intentaré dar una buena aproximación a la noción del tipo de propiedades que los números son. Con esto en mente, lo que haré será comenzar con una somera introducción acerca de cuestiones teóricas muy generales conocidas sobre las propiedades. Para mis propósitos basta con decir que la forma en la que entiendo la naturaleza de las propiedades es como entidades susceptibles de ser ejemplificadas (ya sea por objetos o por otras propiedades). Además de esto, comentaré algunas preguntas que diferentes teorías se hacen acerca de las propiedades (dónde se localizan, si existen de forma independiente a otras entidades, si siempre deben encontrarse ejemplificadas, etc.) Teniendo esta idea muy general de propiedad, defenderé la existencia de propiedades plurales, entre las cuales se encuentran los números. Para identificar a los números será necesario analizar el modo en el que las propiedades numéricas se ejemplifican en contraste con otras propiedades plurales. Este análisis conduce a la conclusión de que las propiedades numéricas se ejemplifican de manera estricta respecto a la multiplicidad de una pluralidad: esto quiere decir que la propiedad *ser n* tiene la propiedad de ser ejemplificada por pluralidades de estrictamente n elementos). Basada en algunas ideas de Byeong-uk Yi y otras de Mario Gómez Torrente llego a una aproximación hacia la identificación del número n como:

El número n es la entidad susceptible de ser ejemplificada (por objetos o propiedades); que será portada por pluralidades estrictamente de multiplicidad n; y que tiene como propiedad, el mantener una relación esencial propiedad-argumento con cualquier pluralidad de n individuos.

Otra cosa que será especificada es que la condición de tener multiplicidad n es la única que deben cumplir las pluralidades para ejemplificar la propiedad *ser* n, dejando así abierta la posibilidad de que los individuos de las pluralidades sean entidades de cualquier naturaleza. Esta flexibilidad en el tipo de cosas que serán las que constituyan las pluralidades portadoras de las propiedades numéricas refleja que éstas son independientes de la existencia de una vasta cantidad de entidades. Por ejemplo, no podría ocurrir que los números dependieran de los objetos físicos; o de la existencia de conceptos, digamos, como representaciones mentales. Es claro que se requiere algo del mundo: deberán existir al menos propiedades para garantizar la existencia de los números. La cuestión a resaltar aquí es que como propiedades, los números tienen un grado de aplicación muy general y en ese sentido, un gran nivel de independencia con respecto a la existencia de otras entidades. Contrastemos por ejemplo con la propiedad *ser hijo de Hitler*, esta propiedad es dependiente de la existencia de Hitler. Las propiedades numéricas que llamaremos *impuras* también muestran esta dependencia; la naturaleza de la propiedad *ser cinco vocales* depende de la naturaleza de la pluralidad de las vocales. Por ejemplo, dicha propiedad tendrá ejemplos siempre que haya cinco o más vocales. No así la propiedad *ser cinco* (que es una propiedad numérica *pura*); ésta no depende de la pluralidad de las cinco vocales ni de ninguna otra pluralidad en particular. De esta forma las propiedades numéricas puras (los números) son independientes en el sentido señalado. Esto nos permite hablar sin remordimientos de la aritmética pura sin tener que preocuparnos por la existencia de un mundo físico, de una infinidad de objetos individuales, o de conceptos de algún tipo particular. En la sección final del capítulo presentaré una propuesta de traducción para reconstruir los enunciados usuales de la aritmética pura en el marco de las ideas defendidas en el presente trabajo.

3.2. Propiedades

Tradicionalmente las propiedades han representado un enigma para la filosofía. Por un lado pareciera que estas entidades son prominentemente familiares a nosotros: las hay temporales, lógicas, científicas, espaciales, etc. Van de la mano con cualquier objeto o evento–de cualquier índole–y no se necesita de ningún andamiaje teórico para ser capaces de pensar en propiedades particulares. Por otro lado, resulta muy complicado obtener algunas regularidades (ya no digamos una caracterización) que nos permitan la comprensión de su naturaleza. Dada esta falta de regularidades, cada aspecto en torno a las propiedades ha dado origen a controversia filosófica: en dónde se localizan, cómo se originan, dependen o no de sus portadores, etc. Es importante para los objetivos de este trabajo dejar en claro que mi intención no es dar una teoría metafísica de las propiedades. Por supuesto, dado que la tesis central aquí defendida es que los números son propiedades, tendré que decir algunas cosas al respecto. Mi objetivo es mostrar que si los números son propiedades, dada alguna teoría plausible sobre propiedades, es viable una explicación realista de la aritmética que responda satisfactoriamente a los retos que he presentado y desarrollado en los dos capítulos anteriores. Dicho esto, comenzaré por algunas consideraciones muy generales sobre las propiedades y más adelante me concentraré detalladamente en aspectos del tipo de propiedades que los números podrían ser.

A la pregunta *¿Qué es x?* la respuesta más precisa que podemos dar es la definición de x. Posteriormente, ciertas dudas particulares podrían demandar más información sobre x, por ejemplo, para qué sirve, o de qué forma podríamos dar con ella. Con frecuencia la respuesta comienza por determinar alguna clase (posiblemente muy amplia) a la que pertenece x. Por ejemplo, un carro es un objeto que pertenece a la clase de los aparatos con automotores que sirven para transportación; un vector es un elemento de un espacio vectorial V, el cual tiene la propiedad de relacionarse con el resto de los elementos de V de alguna forma inducida por las características de V. De este modo, las propiedades son un recurso que nos permite caracterizar a un objeto delimitando cada vez más la clase a la que dicho objeto pertenece hasta llegar al caso ideal en el que logramos individuar al objeto. Pero, ¿qué ocurre cuando lo que pretendemos identificar es una propiedad? ¿Cómo encontramos esa clase *más amplia* que contiene a las propiedades y que iremos delimitando hasta llegar a la individuación de la entidad en cuestión? Este desafío ha llevado a la respuesta recurrente de que las propiedades son universales. Y no es que haya mucha claridad acerca de lo que significa ser un universal, pero al menos esto parece agregar cierta inteligibilidad a la cuestión. Un universal es aquello que cosas particulares tienen en común, pueden ser ciertas características o cualidades. Los universales son entidades recurrentes que pueden ser ejemplificadas por varias cosas particulares. Por ejemplo, dada la pluralidad de bancas negras en un salón de clases, éstas comparten la cualidad *ser banca* (la *banqueidad*, dicho de otro modo), así como la cualidad *ser negro*. Las bancas comparten un universal. Los ejemplos paradigmáticos de universales son los tipos (o clases), las propiedades y las relaciones. Si consideramos a las propiedades como universales, no hay un compromiso por seguir buscando una clase más amplia que las contenga de manera propia. Además de esto, vista como universal, una propiedad puede ser ejemplificada en dos lugares completamente diferentes al mismo tiempo y esto pareciera ser una gran ventaja al querer explicar el comportamiento de las propiedades.

Uno de los recursos más inmediatos para rastrear información acerca de las propiedades es analizar la relación que hay entre ellas y sus posibles portadores. Por esta razón, hablar de propiedades sugiere hablar de ejemplificación. Las condiciones de ejemplificación de una propiedad pueden resultar muy informativas. La pregunta sobre *en dónde se ejemplifica una propiedad*–si es que ésta se ejemplifica–parece mucho más adecuada que la pregunta sobre *en dónde se localiza una propiedad*. De hecho, a la segunda pregunta se le puede buscar una respuesta basada en la primera. Hay quienes sostienen que las propiedades se localizan exactamente en donde éstas se ejemplifican. Esta respuesta trae consigo muchas dificultades pero, como muchas otras respuestas, supone de forma básica que las propiedades son entidades que son susceptibles de ser ejemplificadas.

En una explicación estándar la manera en la que se presenta la ejemplificación es mediante un estado de cosas (Armstrong, 1997). Un estado de cosas es una entidad compleja constituida por un objeto y una propiedad que *ocurre* dentro del estado al ser ejemplificada por dicho objeto. El estado de cosas es un recurso teórico que permite, de algún modo, ubicar en el discurso metafísico por un lado los objetos y por otro lado las propiedades. Dado un estado de cosas, por ejemplo, podemos hablar de él en términos lingüísticos utilizando la predicación, en donde la función que corresponde al objeto corresponde al sujeto, y la que corresponde a la propiedad corresponde al elemento predicativo de una oración. Algunos filósofos consideran que a cada estado mental representacional se le puede asociar una proposición. Típicamente un estado de cosas se considera el hacedor de verdad de la oración (o de la proposición) asociada a él.

No todas las propiedades pueden ser ejemplificadas, por ejemplo la propiedad de ser redondo y cuadrado. Alguien podría decir que una propiedad que no puede ser ejemplificada no existe. Pero entonces surge la duda de cómo podríamos, del total de las propiedades, determinar cuáles de ellas pueden ser ejemplificadas y cuáles no. La pregunta misma parece asumir que las propiedades existen independientemente de su ejemplificación. Si queremos condicionar la existencia de las propiedades a su ejemplificación, hay que ir en el sentido contrario y decir algo como que una propiedad es aquello que está *de hecho* ejemplificado por algún objeto actual. Aunque hay quienes han dicho cosas parecidas a esto, es una idea difícil de aceptar. Imaginemos que el día de hoy desaparecieran todos los objetos morados del universo, ¿desaparecería la propiedad de ser morado? Si es así, las propiedades no sólo resultarían contingentes, sino completamente arbitrarias, habría manera de crearlas o desaparecerlas a gusto (entre otras cosas, esto significa que tendrían relaciones causales directas). Todo lo que se necesitaría para *crear* nuevamente la propiedad de ser morado es mezclar una lata de pintura roja con una de azul, y tendríamos que en el momento y lugar justos de la mezcla, se localizaría la propiedad de ser morado. Este no parece ser el comportamiento de una propiedad pensada de la forma usual en que lo hacemos.

Las teorías metafísicas son capaces de brindar herramientas que permitan hablar sobre propiedades sin tener que garantizar la existencia de los portadores. Por ejemplo, Zalta distingue entre dos formas en que las propiedades pueden relacionarse. La primera es la ejemplificación y la segunda es la codificación. Mientras que la propiedad de tener masa es *portada* por cualquier objeto físico, la propiedad de ser un caballo alado es *codificada* por Pegaso. Otra observación acerca de la ejemplificación es que las propiedades también pueden ser portadas por propiedades. Las propiedades también tienen propiedades: una predicación como 'Rojo es un color primario' es perfectamente aceptable. El portador de la propiedad de ser un color primario no es un objeto. Entiendo entonces por propiedad–en contraste con un objeto–una entidad que es susceptible de ser ejemplificada, aunque no necesariamente lo es.

Con lo anterior no pretendo negar la diferencia entre las propiedades que son ejemplificadas y las que no; por principio de cuentas, una propiedad ejemplificada de algún modo mostrará algo de sí a través de su portador. Estas consideraciones deberán refinarse según lo requiera el caso. El punto importante aquí es que la relación entre propiedades y portadores resulta informativa; no sólo en cuanto al conocimiento de los portadores como típicamente se percibe, sino también relativa al conocimiento acerca de las propiedades mismas. Aunque esta relación de ejemplificación es una importante fuente de información, hay que tener en mente que la existencia de una propiedad no implica necesariamente la existencia de un portador que la ejemplifique.

3.3. Propiedades plurales

Las propiedades son entidades susceptibles de ser ejemplificadas. A través de esta relación de ejemplificación entre propiedades y portadores podemos conocer características de las propiedades mismas. Por esta razón una de las cuestiones más importantes en este trabajo es señalar quién o quiénes pueden ser los portadores de estas propiedades que, presumiblemente, son los números. La respuesta es que los números son propiedades susceptibles de ser portadas por pluralidades *como tales*. Este paso requiere motivar y explicar la existencia de propiedades plurales. Para lograr este propósito seguiré en buena medida la propuesta sobre propiedades plurales que presenta Byeong-uk Yi en su artículo *Is Two a Property?* (Yi, 1999). Intentaré a continuación ilustrar la relación de ejemplificación dada entre las propiedades y sus correspondientes pluralidades.

Es claro que cualquier teoría del lenguaje natural tiene que proporcionar una explicación acerca de la predicación plural. La diferencia sustancial que hay entre una teoría de tipo estándar y una como la que suscribo es que, mientras que en las del tipo estándar se piensa que todas las relaciones y propiedades pueden expresarse en términos de propiedades singulares, en las del segundo tipo defendemos la existencia de ciertas relaciones y propiedades que no son reducibles a otras de tipo singular. Esto se traduce en el hecho de que en la concepción estándar–en contraste con una teoría del segundo tipo–, una propiedad no puede ser ejemplificada por muchas cosas *como tales*. En esta concepción decir que cierta colección de cosas ejemplifica una propiedad no es mas que decir que la propiedad en cuestión es ejemplificada por cada uno de los elementos de la colección. Pero una aproximación no estándar como la defendida aquí, nos permite describir la ejemplificación de propiedades plurales de una forma más clara. Podemos distinguir entre propiedades que al ser ejemplificadas por una pluralidad, son ejemplificadas por cada uno de los miembros que la constituyen, y propiedades que son ejemplificadas por las pluralidades *como tales*. Por ejemplo, tenemos que la propiedad de ser mujer–ejemplificada por Thelma y Louise–es ejemplificada por cada una de ellas. En contraste, la propiedad de ser dos–ejemplificada también por Thelma y Louise–no es ejemplificada por cada una de ellas sino por la pluralidad *como tal*.

La mencionada distinción se refleja de manera inmediata en la cualidad que se piensa (de nuevo, de acuerdo a la concepción estándar) que tienen las propiedades de distribuirse entre cada uno de los miembros de una colección dada. Recordaremos que éste es un argumento de Frege en contra de los números como propiedades. Este argumento, cuya conclusión es que los números no pueden ser propiedades de objetos físicos, presenta dos objeciones centrales. La primera es simplemente que éstos (los números) no se distribuyen de la forma en la que regularmente se distribuyen las propiedades de objetos físicos: mientras que, el que un bosque sea verde se debe a que algunos de los árboles que lo conforman son verdes, el que un bosque tenga la propiedad de tener 21 árboles no se debe de ningún modo a que *la propiedad 21* esté relacionada con alguno de los árboles que conforman el bosque. La otra objeción relacionada con la distributividad es un problema de arbitrariedad que puede presentarse como la cuestión de definir cómo atribuir una propiedad numérica a un objeto: supongamos que tenemos un libro y a éste le corresponde una cierta propiedad numérica, ¿cuál sería esta propiedad? ¿Sería la propiedad de tener 5 capítulos? ¿La de tener 100 páginas? ¿O la de tener 3 secciones? Con frecuencia, sólo a la primera objeción se le identifica como *el* problema de la distributividad de las propiedades. Pero el problema de cómo atribuir un número a un objeto (los ejemplos de Frege del libro y de la baraja) puede ser visto también como un problema de distributividad. Mientras que el ejemplo del bosque muestra que la propiedad numérica no se distribuye hacia sus árboles, en el ejemplo de la baraja podríamos decir que el número 104 (o el número 2) no se *factoriza* hacia el montón de cartas que tiene el sujeto en la mano. El problema real con la segunda objeción no es que nos lleve a alguna clase de confusión el intentar atribuir números a colecciones de objetos. La cuestión importante que está en juego es la de la arbitrariedad en la determinación de un número. Dado un cierto objeto (como un libro o una pila de cartas), la forma en la que le atribuimos *su* número parece arbitraria. De este hecho Frege deriva la consecuencia de que aquello a lo que le atribuimos números no pueden ser objetos y que por lo tanto, tienen que ser conceptos.

Si bien es cierto que existe la mencionada arbitrariedad en la atribución de un número a un objeto, no queda claro que no haya también arbitrariedad en la atribución de números a conceptos. Para que no hubiera esta arbitrariedad, por principio, los conceptos tendrían que estar siempre bien determinados, en el sentido de que uno debería siempre ser capaz de especificar una propiedad que unifique a sus elementos (para entonces poder atribuirles *su* número). Pero no siempre podemos hacer esto, de modo que la atribución numérica a conceptos es susceptible de incurrir también en la arbitrariedad que le preocupaba a Frege. Por otro lado, si las entidades a los cuales atribuimos estas propiedades numéricas son pluralidades *como tales* no hay esta indeterminación, pues la pluralidad puede ser especificada independientemente de los conceptos que agrupen a sus miembros. De este modo, a la pluralidad formada por una pila de cartas le corresponde–sin arbitrariedad alguna–el número uno; a la pluralidad formada por dos barajas *como tales* le corresponde el número dos, y a la pluralidad de las cartas de dos barajas le corresponde el número 104.

Frege asume en las objeciones anteriores que las propiedades que aplican a objetos son distributivas. Al mostrar que los números no se distribuyen entre los objetos, concluye que los números no pueden ser propiedades de objetos físicos. Esta idea de distributividad está profundamente arraigada a una lógica que reduce las propiedades de pluralidades a propiedades de individuos.

El rechazo de la concepción estándar y la introducción de las propiedades plurales–con sus correspondientes predicados–eliminan los problemas asociados a las distributividad. Primero, la propiedad de ser verde es una propiedad que es portada por la pluralidad que constituye el bosque en virtud de que es portada también por al menos algunos de sus elementos–como la propiedad de ser mujeres en el caso de Thelma y Louise–. Por otro lado, la propiedad de ser 21 se relaciona con el bosque en la medida en la que ésta es portada por la pluralidad *como tal* de los árboles que constituye el bosque. Al igual que *ser dos* no es portada por ni por Thelma ni por Louise de manera individual, la propiedad *ser 21* no es susceptible de ser portada por cada uno de los árboles del bosque. Precisaré esta distinción más adelante. El punto central es que, de entre la gran variedad de propiedades que pueden ser ejemplificadas por pluralidades, hay ciertas propiedades que únicamente pueden ser ejemplificadas por pluralidades *como tales*.

Existen propiedades cuya naturaleza parece claramente plural, pero esto no quiere decir que no puedan ser ejemplificadas también por los individuos que conforman las pluralidades en cuestión. Por ejemplo, consideremos la propiedad de ser una o más mujeres. Esta propiedad es ejemplificada por la pluralidad *Thelma y Louise*, pero además, cada una de las constituyentes de esta pluralidad ejemplifica la propiedad. Cualquiera de Thelma y Louise, quienes son una o más mujeres (específicamente dos mujeres), es una o más mujeres (específicamente una mujer). Pero la concepción estándar excluye también esta propiedad. Esto se debe a una característica que comparte con la propiedad de ser dos, y que distingue a ambas de las propiedades estándar. Ser una mujer debe ocurrir más de una vez para ser ejemplificada por Thelma y Louise, ya sea para formar dos diferentes hechos, tal como el hecho de que Thelma es una mujer y el hecho de que Louise es una mujer, o como diferentes componentes de un hecho de tipo complejo. Podemos capturar esta idea de la concepción estándar con el siguiente principio:

> *Principio de ejemplificación singular*: No existe una propiedad que pueda ocurrir sólo una vez siendo ejemplificada por varias cosas (esto es, por más de una cosa).

Dadas las dificultades que presenta el discurso sobre propiedades es muy importante ser cuidadosos al momento de describir la ejemplificación. El principio de ejemplificación singular implica que dada una colección de objetos y una propiedad ejemplificada por ellos, existe una ejemplificación por cada uno de los objetos. Esto implica una individuación de eventos que no se ve de manera clara en virtud de qué sería dada. Por ejemplo, dada la pluralidad a, b, c y la propiedad P portada por dicha pluralidad, tenemos tres distintas ejemplificaciones $P(a), P(b)$ y $P(c)$, pero $P(a)$ no está en principio separada temporalmente de $P(b)$ ni de $P(c)$ (la propiedad es portada por la pluralidad en un tiempo dado t). Los eventos $P(a), P(b)$ y $P(c)$ tampoco tienen por qué estar separados espacialmente, esto es presuponer cosas acerca de la pluralidad a, b, c y de la forma en la que se ejemplifica P. No hay razones en principio para suponer que esta individuación es posible. A lo largo de este capítulo presentaré casos que ejemplifican las dificultades con las que se enfrenta una teoría de propiedades que defienda el principio de ejemplificación singular.

Una forma de pensar a las propiedades es como relaciones con un sólo argumento. Visto de esta manera, la diferencia entre una propiedad y una relación con dos lugares de argumento no es mayor que la que hay entre una relación con dos lugares de argumento, y una relación con tres lugares. Esto me permite utilizar el término 'relación' en un sentido amplio que comprende también a las propiedades (persistiendo todo lo dicho anteriormente respecto a la ejemplificación).

El siguiente paso es buscar respuestas a la pregunta ¿Qué tipo de cosas pueden ocupar los lugares de argumento en una relación dada? Hay que tener presente que esta pregunta es diferente a la pregunta sobre qué cosas ejemplifican la relación. Para marcar la diferencia, diré que una relación R *admite* como argumentos a ciertas entidades si intuitivamente, no hay imposibilidad en que estas entidades ocupen los lugares de argumento de R o de su complemento. Consideremos nuevamente la propiedad de ser una mujer refiriéndonos a ella como φ. Como ya dije, el lugar de esta relación (unaria) *admite* a Thelma como argumento. Esto no quiere decir que únicamente una mujer pueda ocupar dicho lugar de argumento. México (denotado más adelante por m), por ejemplo, puede ser el argumento de la propiedad. Incluso podemos predicar verdaderamente con este argumento gracias a que México está en en el complemento de la relación. Tenemos la oración falsa 'México es una mujer' y podemos construir la oración verdadera 'México no es una mujer' gracias a que, si bien, México no está en la relación sí está en su complemento. El predicado 'es una mujer' *admite* al sustantivo 'México' como sujeto. La verdad de la oración construida con la negación de este predicado acerca del mismo sujeto, revela que la propiedad de ser una mujer *admite* a México como argumento pues de hecho tenemos que $\neg\varphi(m)$. Por otro lado, Thelma y Louise no podrían ocupar el lugar de argumento de esta relación. La propiedad *ser una mujer* no admite a Thelma y Louise como argumento. Si consideramos la oración 'Thelma y Louise es una mujer' o su negación 'Thelma y Louise no es una mujer' vemos que éstas más que falsas son incorrectas. Desde luego, la razón evidente es que estas oraciones no son gramaticales porque tienen un predicado singular sobre un sujeto plural. Pero más allá de lo gramatical, lo que tenemos es una imposibilidad de la pluralidad Thelma y Louise de ocupar el lugar del argumento de la propiedad *ser una mujer*.

Si bien la gramática no da un criterio determinante, sí proporciona una primera guía para distinguir cuando una cierta propiedad admite a una entidad como argumento. Aunque no es claro qué tanta información metafísica obtenemos de la evidencia lingüística, la idea es que esta última proporcione cierta iluminación que guíe nuestras intuiciones sobre de las cuestiones metafísicas. Es fácil ver que no podemos utilizar los criterios gramaticales como determinantes de las relaciones metafísicas entre objetos y propiedades. Regresemos una vez más a Frege y pensemos en los conceptos azules. La oración 'El concepto C es azul' es perfectamente gramatical (al igual que lo es 'El concepto C no es azul'). Podemos decir que el predicado 'es azul' *admite* a la expresión 'El concepto C' como sujeto, pero de aquí no se sigue que la propiedad de ser azul *admite* conceptos como portadores. Es evidente que la propiedad *ser azul* no es ejemplificada por ningún concepto (como tampoco lo es la propiedad *no ser azul*). Pero la propiedad *ser azul* no sólo no es ejemplificada por ningún concepto, la cuestión es que esta propiedad no *admite* conceptos; sin embargo, en este ejemplo la gramática no nos dice nada.

Es difícil dar una definición más precisa de lo que quiere decir que una propiedad admita una entidad como argumento. Un intento podría ser decir que la propiedad φ admite a α como argumento si existe algún mundo posible en el que α ejemplifique φ, pero esto no funciona: no hay ningún mundo posible en el que un país fuera una mujer (considerando lo que significa *ser un país* y *ser una mujer* en el mundo actual). Para concluir que *ser una mujer* admite a México como argumento, la estrategia fue mostrar que México está en el complemento de la relación: 'México no es una mujer' no sólo es gramatical sino que incluso es verdadera. De este modo, saber cuándo una propiedad φ admite una entidad dada α, es una cuestión primordialmente intuitiva pero que, de algún modo, permitirá ser iluminada por evidencia lingüística o consideraciones metafísicas. Notemos que en el primer ejemplo tenemos dificultades para asignar un valor de verdad a la oración 'Thelma y Louise es una mujer' o a su negación–en contraste con la oración 'México es una mujer'–debido a que las expresiones no son gramaticalmente correctas.

Por su parte, con la oración 'El concepto C es azul' y su negación también tenemos dificultad con la asignación de valores de verdad (a pesar de que ambas oraciones son gramaticales). Parece que el problema en este caso tiene que ver con la naturaleza de los conceptos y de la propiedad *ser azul*. Algo intrínseco a estas entidades parece impedir que se encuentren en la relación *admite a*.

Vale la pena señalar que el problema con la asignación de valores de verdad en el ejemplo del párrafo anterior es diferente a un típico caso de oraciones con nombres vacíos. La cuestión de si una oración como 'Santaclós viste de rojo' es verdadera es una cuestión distinta que no se relaciona de la misma manera con la relación de *admisión* entre propiedades y portadores. La consideración aquí es la siguiente: dada una entidad α y una propiedad φ, tenemos que φ puede admitir o no a α como argumento. Si φ es de hecho ejemplificada por α, entonces claramente φ admite a α como argumento. Si φ no es ejemplificada por α aún tiene sentido preguntarse si φ *admite* a α como argumento. Para dar una respuesta podemos apelar a consideraciones metafísicas (como en el ejemplo de los conceptos azules) o a consideraciones lingüísticas (como en el caso de México y la propiedad de ser una mujer).

La estructura gramatical nos da un criterio de predicación que es sensible a la distinción entre sujetos individuales y plurales: no se predican propiedades plurales (como *ser dos mujeres*) de sujetos individuales (como Thelma) ni viceversa. Este fenómeno gramatical acerca de la predicación parece proyectar un fenómeno metafísico acerca de la ejemplificación. El predicado 'es una mujer' *admite a* 'Thelma' como sujeto, las reglas gramaticales indican que el predicado 'son dos mujeres' no *admite a* 'Thelma' como sujeto. Siguiendo la línea trazada por las observaciones gramaticales, tenemos que la propiedad *ser una mujer* es una propiedad que *admite* como argumento a Thelma pero que no admite como argumento a la pluralidad constituida por Thelma y Louise. El criterio gramatical nos permite distinguir las propiedades que admiten entidades singulares de aquéllas que admiten pluralidades de multiplicidad distinta a uno. Sin embargo, este criterio deja de ser útil cuando queremos distinguir entre predicaciones de distintas cardinalidades. Por ejemplo, la oración 'Thelma y Louise son tres mujeres' es gramaticalmente correcta (aunque falsa) y a partir de ella podemos construir la oración 'Thelma y Louise no son tres mujeres' que, en principio, podría ser verdadera. ¿Se sigue de aquí que la propiedad *ser tres mujeres* admite a Thelma y

Louise como argumento? Me parece que no; las consideraciones semánticas (al igual que las gramaticales) también pueden ser informativas (como en los ejemplos del párrafo anterior) pero no tienen por qué ser determinantes. Aunque existe una relación entre la predicación y la ejemplificación, las condiciones de verdad no siempre son suficientemente evidentes para asegurar que proporcionan la información necesaria para determinar las relaciones que hay entre los portadores y sus propiedades.

Como dije antes, es difícil caracterizar propiedades pero vale la pena destacar la información disponible sobre las propiedades que una cierta propiedad tiene. Una propiedad φ tiene la propiedad de admitir α para toda α en la clase de los αs que están el la relación *admite a* con φ. En el caso de la propiedad *ser tres mujeres*, tenemos que ésta tiene como propiedad que en su dominio de *admisión* no están las pluralidades de cardinalidad distinta a tres. Esto se debe a que la propiedad numérica *ser tres mujeres* se puede analizar en términos de las propiedades plurales *ser tres* y *ser mujeres*; y la propiedad *ser tres* sólo admite pluralidades de multiplicidad tres. Veremos esto con detalle más adelante.

La idea de que las relaciones plurales admiten pluralidades como argumento no es mas que decir que las propiedades deben poder ocurrir una sola vez–el lugar del argumento admitirá sólo una cosa–individual o plural–. La pregunta acerca de qué cosas no podrían ser el argumento de estas relaciones continúa motivando la descripción e identificación de propiedades plurales. Estas consideraciones no parecen haber sido tomadas muy en cuenta en la concepción estándar. Esto queda expresado en el principio de singularidad que cualquier teoría que defienda la existencia de relaciones que sólo admiten pluralidades *como tales* deberá de rechazar.

> *Principio de singularidad*: Un lugar de argumento de una relación no admite varias cosas *como tales*.[1]

Consideremos un ejemplo:

(1) Thelma y Louise son amigas.

En (1), 'son amigas' es predicado de algo que parece ser plural: Thelma *y* Louise. Pero el principio de singularidad dice que cualquier aparente plurali-

[1]Ligeramente modificado de (Yi, 1999, p. 169).

dad que haya aquí, es únicamente superficial. Podemos analizar (1) simplemente como:

(2) Thelma es amiga de Louise y Louise es amiga de Thelma.

En (2) la aparente pluralidad ha desaparecido. En lugar de predicar una *única* ocurrencia de la propiedad (o relación) de amistad mantenida por una pluralidad, hemos analizado (1) diciendo que la relación *ser amiga* ocurre *dos veces* entre diferentes *individuos*.

El principio de singularidad tiene éxito analizando (1) en términos de (2), pero no es claro que el análisis correcto de todos los hechos sea de este estilo. Consideremos por ejemplo:

(3) Jorge y Pedro *coprotagonizan* 'Dos tipos de cuidado'.

(4) Holly y Fred *viven juntos en* Manhattan.

De acuerdo al principio de singularidad, ¿cómo analizaríamos (3) y (4)? La estrategia estándar es decir que aun cuando 'coprotagonizan' y 'viven juntos en' aparece una sola vez en (3) y en (4) respectivamente, el análisis correcto nos dice que éstas son relaciones que ocurren dos veces, (una por Jorge y una por Pedro en el caso de (3) y análogamente, una por Holly y una por Fred en el caso de (4)). Pero, ¿qué relaciones serían éstas? Consideremos (3) y propongamos el análisis obvio de acuerdo al principio de singularidad:

(5) Jorge *coprotagoniza* 'Dos tipos de cuidado' y Pedro *coprotagoniza* 'Dos tipos de cuidado' .

En (5) estamos diciendo que Jorge está en la relación de *cooprotagonizar* con 'Dos tipos de cuidado' y también que Pedro está en la relación de *cooprotagonizar* con 'Dos tipos de cuidado'. Es decir que,

(6) $[(J, F) \in R]$ & $[(P, F) \in R]$

Donde J está por Jorge, P está por Pedro, F por 'Dos tipos de cuidado' y R por la relación *coprotagoniza*. Aplicando la regla de eliminación de la conjunción a (6) obtenemos en particular que,

(7) $(J, F) \in R$

Es decir, derivamos el hecho de que Jorge coprotagoniza 'Dos tipos de cuidado', lo cual no parece correcto. En la oración 'Jorge coprotagoniza *Dos tipos de cuidado*' parece haber una falla en la predicación de esta propiedad sobre el sujeto 'Jorge'. La relación *coprotagonizar* no admite a Jorge como argumento. Pero el defensor del principio de singularidad podría decir que no es (6) el análisis correcto de (5), sino algún análisis alternativo que preserve su principio. Para ilustrar esto consideremos ahora (4). Si la relación en cuestión es *vive junto(a) en* tendríamos que,

(8) Holly *vive junta en* Manhattan y Fred *vive junto en* Manhattan.

la cual parece un sinsentido. Como aparentemente es el adjetivo 'junto' lo que genera el conflicto, podríamos pensar que la relación (singular) en cuestión es simplemente *vive en*:

(9) Holly *vive en* Manhattan y Fred *vive en* Manhattan.

Éste no es un sinsentido pero es claramente un hecho distinto al reportado en (4). No hay duda de que el partidario del principio de singularidad podría decir algo más con la finalidad de hacer posible el análisis singular. Sin embargo, no parece que para ciertas relaciones ésta vaya a ser una tarea simple. Por ejemplo,

(10) Holly *vive junto a Fred en Manhattan* y Fred *vive junto a Holly en Manhattan*.

En este análisis de (4), la propiedad *vivir juntos en Manhattan* ejemplificada por Holly y Fred se describe como la propiedad *vivir junto a Fred* ejemplificada por Holly y la propiedad *vivir junto a Holly* ejemplificada por Fred. Este análisis logra pasar el filtro gramatical y el filtro semántico: (10) es gramaticalmente correcta y además, mantiene las mismas condiciones de verdad que (4). Aun así, (10) no parece decir exactamente lo mismo que (4) y la relación *vivir juntos en* que hay entre Holly y Fred, y Manhattan no parece ser equivalente a la conjunción de las propiedades *vivir junto a Fred en Manhattan* y *vivir junto a Holly en Manhattan*. En principio porque el dominio de aplicabilidad de la relación *viven juntos en*, e incluso de la propiedad *viven juntos en Manhattan*, es diferente al dominio de parejas (x, y) que pueden ser argumento de la propiedad x *vive junto a Fred en Manhattan* y y *vive junto a Holly en Manhattan*. Vale la pena recalcar que es nuevamente el principio de singularidad el que bloquea la posibilidad de que este análisis sea correcto: el lugar del argumento de la propiedad *viven juntos en Manhattan* admite únicamente pluralidades, mientras que, tanto *vive junto a Fred en Manhattan*, como *vive junto a Holly en Manhattan* admiten únicamente objetos individuales. La propiedad *viven juntos en Manhattan* admite a Holly, Fred y Mr. Yunioshi como argumento: obtenemos la oración (gramatical y sujeta a valor de verdad) 'Holly, Fred y Mr. Yunioshi viven juntos en Manhattan' mientras que cualquier intento de incluir 'Mr. Yunioshi' como parte del sujeto de (10), preservando la propiedad expresada, resultará no ser gramaticalmente correcto. Aunque el interlocutor podría seguir proponiendo análisis gobernados por el principio de singularidad, parece que estos análisis serán cada vez más rebuscados, y por lo mismo, más distantes de la forma original del enunciado original. Si el análisis arroja una oración radicalmente diferente a la original, lo más probable es que ésta exprese una propiedad distinta a la propiedad expresada por el predicado original. Esto nos muestra que el análisis más natural es uno que acepte relaciones plurales. Por ejemplo en (4) tenemos que la relación *viven juntos en* ocurre una vez entre Holly y Fred–como una pluralidad–y Manhattan. Espero con estos ejemplos haber dado un primer paso en la motivación para introducir la siguiente definición.

Definición 3.3.1 Llamamos al lugar de un argumento de una relación *plural* si éste admite varias cosas *como tales*; será *singular* en cualquier otro caso. Llamaremos *singular* a una relación si todos sus lugares de argumento son singulares, y será *plural* en cualquier otro caso. (Yi, 1999, p. 169)

El principio de singularidad es simplemente la tesis de que no hay relaciones plurales. Pero como sugiere (4) sí las hay. Presento a continuación otros ejemplos. Notemos que *coprotagonizar* y *viven juntos en* son relaciones (binarias) plurales. Los siguientes son ejemplos de relaciones plurales monádicas, es decir, de *propiedades plurales*.

(11) Thelma y Louise *son dos mujeres.*

(12) Thelma y Louise *son dos.*

(13) Jorge y Pedro *son coprotagonistas.*

(14) Holly y Fred *viven juntos.*

(15) México y Canadá *cooperan.*

(16) Ana, Beto, Carlos y Diana *realizan la obra* '*A puerta cerrada*' [2] .

[2] *A puerta cerrada* es una obra de teatro existencialista creada por Jean-Paul Sartre.

Veamos cómo sería el análisis de (16) de acuerdo al principio de singularidad. Sea P la propiedad *realizar la obra* '*A puerta cerrada*' y sean A, B, C y D, Ana, Beto, Carlos y Diana respectivamente. El análisis sería el siguiente:

(17) $P(A)$ & $P(B)$ & $P(C)$ & $P(D)$

Si (17) fuera el análisis correcto de (16) entonces, de acuerdo a la ley de la eliminación de la conjunción, podemos concluir (por ejemplo) $P(A)$. Es decir, podríamos concluir que,

(18) Ana *realiza la obra* '*A puerta cerrada*'.

Lo cual es falso pues si bien Ana, Beto, Carlos y Diana realizan la obra *A puerta cerrada*, Ana actúa (o realiza) únicamente su papel en la obra: no hay forma de que ella realice *como tal* la obra. La propiedad de realizar la obra *A puerta cerrada* no es algo que concierna a Ana *per se*. *A puerta cerrada* es una obra que simplemente no puede ser actuada por una sola persona. Ésta es la razón por la que no podemos analizar (16) en términos de cada una de las personas que conforman la pluralidad que realiza *A puerta cerrada*. En otras palabras, esto es por lo que (17) no puede ser el análisis correcto de (16). Contrario al principio de singularidad, el análisis correcto de (16) es que la propiedad de realizar la obra *A puerta cerrada* es una propiedad plural, propiedad que es ejemplificada por la pluralidad *como tal* de Ana, Beto, Carlos y Diana.

No pretendo asumir que he establecido de forma concluyente la existencia de propiedades plurales. Aún hay mucho que decir, por ejemplo, en contra de otros posibles análisis[3] de los hechos, que como he argumentado, se explican en términos de propiedades plurales (ver Yi). Sin embargo, espero haber dado evidencia que sirva de respaldo para esta teoría de las propiedades plurales.

Me pareció un ejemplo adecuado debido a que esta obra en particular está conformada por cuatro personajes que aparecen simultáneamente en una habitación. El que todos aparezcan simultáneamente en escena y la misma trama de la obra (que gira en trono a las interacciones entre distintos individuos) imposibilitan que la obra sea interpretada por menos de cuatro actores. También cabe observar que el ejemplo puede ser visto como la propiedad plural *realizan la obra* '*A puerta cerrada*' o como la relación binaria plural *realizan la obra* que se da entre Ana, Beto, Carlos y Diana, y la obra *A puerta cerrada*.

[3] Por ejemplo, aquéllos que sostienen que en casos como los que presento, el *individuo* portador de la propiedad es el conjunto o colección formado por los elementos de la pluralidad.

En adelante, daré por hecho que existen estas propiedades. (Vale la pena señalar que aunque he seguido muy de cerca el argumento de Yi respecto a la existencia de propiedades, lo que presento aquí es una especie de extensión de sus ideas. Yi no dice nada acerca de la naturaleza de las propiedades mismas, o cómo ellas se relacionan con los números naturales. Su principal objetivo es desarrollar una lógica de plurales para regimentar el lenguaje de pluralidades sin reducir (erróneamente) el lenguaje sobre pluralidades a un lenguaje de individuos.)

3.3.2. Números como propiedades plurales estrictas

Los números son propiedades plurales de un tipo particular (a las que llamaré plurales estrictas). Para decir qué tipo de propiedades son los números, necesitamos distinguir dos tipos de propiedades plurales. Consideremos:

(19) Thelma y Louise son mujeres.

(20) Thelma es una mujer.

(21) Louise es una mujer.

Existe únicamente una propiedad presente en estos tres hechos, esta propiedad es *ser mujer*. En (19), *ser mujer* es ejemplificada por la pluralidad de Thelma y Louise; en (20) ésta es ejemplificada por Thelma; en (21), por Louise. Cada una de estas formas (individuales o plurales) pueden ejemplificar la propiedad en cuestión. Ahora consideremos (16); existe una importante diferencia entre (19) y (16):

(16) Ana, Beto, Carlos y Diana *realizan la obra* '*A puerta cerrada*'.

Como ya vimos, cuando Ana, Beto, Carlos y Diana realizan la obra *A puerta cerrada*, ninguno de ellos está *realizando la obra* '*A puerta cerrada*' de forma individual, y de hecho, ninguno de ellos *podría* hacerlo. Sólo pluralidades pueden realizar la obra *A puerta cerrada*. En contraste, la propiedad *ser mujer* aunque es susceptible de ser portada por pluralidades, es también susceptible de ser portada por individuos. Esta distinción motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.3 Decimos que una propiedad plural P es *plural estricta* si su lugar de argumento admite exclusivamente pluralidades; P será *plural tolerante* en cualquier otro caso.

De este modo, *realizar* '*A puerta cerrada*' es una propiedad plural estricta, mientras que *ser mujer* es una propiedad plural tolerante. Las propiedades plurales estrictas generan otras propiedades plurales estrictas. Por ejemplo, podemos analizar ciertas propiedades plurales como una combinación de propiedades plurales estrictas con propiedades plurales tolerantes. El siguiente es un caso de una de estas combinaciones. Podemos analizar

(11) Thelma y Louise *son dos mujeres*.

en términos de, (i) la propiedad plural estricta *ser dos* y (ii) la propiedad plural tolerante *ser mujer*, de acuerdo a la siguiente definición, donde DM es la propiedad *ser dos mujeres*, Thelma y Louise *como tales* son la pluralidad βs, D es la propiedad *ser dos* y M es la propiedad *ser mujer*. Tenemos entonces,

(22) $$DM(\beta s) \equiv D(\beta s) \wedge M(\beta s)$$

Ahora estamos en posición de hablar de los números como propiedades. Estas propiedades (las numéricas) pueden ser combinadas con otras, como en el caso de *ser dos mujeres*, o pueden ser plurales estrictas, como *ser dos*. Podemos encontrar estas propiedades en hechos como:

(12) Thelma y Louise *son dos*.

Mi afirmación es que la propiedad *ser dos* es simplemente el *número dos*. De acuerdo a la definición 3.3.3 ésta es una propiedad plural estricta debido a que, no solamente admite pluralidades sino que, de hecho, no es tolerante a admitir individuos para generar hechos como el siguiente:

(23) Thelma *es dos*.

¿A qué se debe que Thelma no pueda ocupar el lugar del argumento de la propiedad *ser dos*? De acuerdo a (22), la propiedad DM se define en términos de dos propiedades plurales correspondientes a los dos tipos mencionados (estrictas y tolerantes). La propiedad *ser mujer* no es la que imposibilita que Thelma ejemplifique DM pues ésta es tolerante (incluso tenemos que Thelma porta esta propiedad). Lo que le imposibilita a DM ser ejemplificada por Thelma es la cualidad de la propiedad *ser dos* de ser plural en el sentido estricto.

Hemos visto hasta aquí que si una propiedad es plural estricta entonces sólo admite pluralidades *como tales*. Ahora quisiera mostrar que cuando las propiedades plurales son propiedades numéricas como *ser dos*, éstas no sólo son estrictas en el sentido de 3.3.3 sino que de hecho, lo son en un sentido más fuerte en el cual *únicamente* admiten pluralidades *como tales* de cardinalidades específicas.

Por un lado tenemos que el análisis de (12) como

(24) Thelma *es dos* y Louise *es dos*.

es incorrecto en virtud de que *ser dos* es una propiedad que no admite individuos como argumentos. Además de esto tenemos que los individuos no son el único tipo de argumento que no admite esta propiedad. Consideremos ahora el hecho

(25) Thelma, Louise y Annie son dos mujeres.

Sabemos que está excluido el análisis

(26) $DM(T)$ & $DM(L)$ & $DM(A)$

pues *ser dos mujeres* es plural estricta en virtud de ser la combinación de propiedades que incluyen una que es plural estricta. Nuevamente tenemos una propiedad que es plural de forma estricta (pues sólo admite a pluralidades como tales) pero por alguna razón–que no es la de no ser una pluralidad–Thelma, Louise y Annie no pueden ocupar el lugar del argumento de esta propiedad. Antes de continuar, vale la pena decir algo con la finalidad de señalar que la cuestión en juego no se limita a determinar las condiciones de verdad de un enunciado.

En general, las oraciones donde el numeral aparece como determinante numérico (como (25)) admiten una lectura intervalar de cantidad. Esto quiere decir que hay un intervalo numérico de objetos para el cual la oración será verdadera. Consideremos por ejemplo,

(27) Hay cinco manzanas en el frutero.

Claramente (27) es verdadera en el caso en el que hay exactamente cinco manzanas en el frutero. Pero éste no es el único caso. Si hay seis manzanas en el frutero, en particular sigue siendo verdadero que hay cinco manzanas en el frutero. La oración es verdadera en cualquier caso en el que haya cinco o más manzanas en el frutero. En contraste, la oración,

(28) El número de manzanas en el frutero es cinco.

admite sólo una lectura exacta (Geurts, 2010). Es decir que (28) es verdadera sólo en el caso en el que haya exactamente cinco manzanas en el frutero. Esto nos da razones para cuestionar la equivalencia de oraciones como (27) y (28), pues éstas pueden no coincidir en condiciones de verdad. Las consideraciones lingüísticas sobre los términos numéricos juegan un papel importante en la investigación de la naturaleza de los números, pero en este momento es necesario ir un poco más allá del lenguaje e intentar profundizar en los aspectos metafísicos.

Dadas las consideraciones anteriores, es claro que no estamos en posición de rechazar (25) en virtud de su estructura gramatical y tampoco en virtud de sus condiciones de verdad. Es plausible que el hecho de que Thelma, Louise y Annie sean tres mujeres haga verdadera a (25) (pues si hay tres mujeres, en particular hay dos mujeres). Pero en términos de las propiedades de las que estamos hablando, el caso es que, del mismo modo en que *ser dos* no admite individuos como argumentos, tampoco admite pluralidades de tres, o de cuatro, o de cualquier cardinalidad que sea distinta de dos. La pluralidad de Thelma, Louise y Annie *como tal* no es admitida por la propiedad *ser dos*. Una explicación sobre qué propiedad haría a (25) verdadera (dado que la pluralidad de Thelma, Louise y Annie no ejemplifica la propiedad predicada) es que esta pluralidad *sí* ejemplifica la propiedad plural *ser dos o más mujeres* (además de ejemplificar *ser tres mujeres*). El análisis de la lectura intervalar de (25) es complicado y se desvía ligeramente de los presentes objetivos.

En un sentido relevante, (25) es análogo al caso que mencionaba al principio de la sección, en el que Thelma y Louise no podían ocupar el lugar del argumento de la relación monádica *ser una mujer* (mientras que México, tan es susceptible de figurar como dicho argumento, que podemos encontrarlo en el complemento de la relación debido a que *México no es una mujer*). Si Thelma, Louise y Annie *como tales* no pueden ocupar el lugar de argumento de la propiedad *ser dos* (o *ser dos mujeres*) es porque parece haber una imposibilidad en que esta pluralidad ocupe este lugar de argumento. La propiedad *ser dos* no admite pluralidades de multiplicidad tres. Es plural estricta en un sentido aún más fuerte: no sólo admite únicamente pluralidades *como tales* sino que admite únicamente pluralidades de dos elementos.

Definición 3.3.4 El número natural n es la propiedad *ser n,* donde esta propiedad admite *de forma estricta* pluralidades *como tales* de n individuos. Esto quiere decir que n es una propiedad que es plural, y no es tolerante a pluralidades cuya multiplicidad sea distinta de n.

Recapitularé lo que he dicho hasta ahora acerca de la idea de que la propiedad *ser* n admite estrictamente pluralidades de n individuos. Sea $n \neq 1$ y sea e una entidad individual arbitraria. Si existen propiedades plurales–es decir, que *admiten* pluralidades *como tales*–las propiedades numéricas tienen que estar entre ellas. Estas propiedades bien pueden ser propiedades no puramente numéricas como *ser dos mujeres*. Éstas se pueden descomponer, obteniendo así propiedades plurales estrictas (como *ser dos*) y propiedades plurales tolerantes (como *ser mujeres*). Las propiedades estrictamente plurales no pueden reducirse a la ejemplificación de la propiedad por cada uno de los individuos de la pluralidad. Por lo tanto, la propiedad *ser* n no *admite* a e. La propiedad *ser dos* no admite a Thelma como argumento. En este caso, la gramática respalda nuestra intuición.

Sea $P_1, P_2, \ldots, P_n$ una pluralidad arbitraria. Afirmamos que la propiedad *ser* m, donde $m > n$, no admite a la pluralidad $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *como tal*. El argumento para defender esta afirmación es una extensión del argumento anterior. Si una propiedad numérica *ser* m admitiera pluralidades de menos de m individuos, en particular tendríamos que la propiedad *ser dos* admitiría a e como argumento. Pero como ya vimos, una propiedad como *ser dos mujeres* no admite un argumento como Thelma. De la misma forma que *ser dos* no admite un individuo como argumento; *ser tres* no admite una pluralidad de dos individuos (ni un individuo) como argumento; *ser cuatro* no admite pluralidades de tres, ni de dos individuos (ni un individuo) como argumento; etc. Si $n \neq 1$, las observaciones gramaticales no aportan nada a la intuición. La oración 'Thelma y Louise son tres' es gramatical (aunque falsa). Pero el solo hecho de que la oración sea falsa no implica que la propiedad *ser tres* no admita a la pluralidad Thelma y Louise como argumento. Sin embargo, esta reducción de una propiedad plural de cardinalidad mayor a una pluralidad menor es parte de las consecuencias de una teoría estándar que intentamos eliminar tras el rechazo del principio de singularidad. El rechazo de este principio que con lleva a la no distributividad de las propiedades plurales respalda nuestra intuición.

Sea $P_1, P_2, \ldots, P_n$ una pluralidad arbitraria. Afirmamos que la propiedad *ser* m, donde $m < n$, no admite a la pluralidad $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Como m es un número menor que n, de la pluralidad $P_1, P_2 \ldots, P_n$ podemos tomar $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ pluralidades de m individuos. La propiedad *ser* m admite a todas estas pluralidades pues, de hecho, es ejemplificada por cada una de ellas. Pero la pluralidad $P_1, P_2 \ldots, P_n$ a pesar de que comparte individuos con todas sus 'subpluralidades' de m individuos no ejemplifica *ser* m. Tampoco queda claro que $P_1, P_2 \ldots, P_n$ esté en el complemento de la relación; podemos afirmar que $P_1, P_2 \ldots, P_n$ no son *exactamente* m pero nuevamente la lectura intervalar nos hace dudar de la verdad de la oración $P_1, P_2 \ldots, P_n$ no son m. Estas razones apuntan a que *ser* m no admite a $P_1, P_2, \ldots, P_n$, pues si lo admitiera estaría dentro de la relación unaria (como todas las 'subpluralidades' de m elementos con las que comparte individuos) o en el complemento de esta relación. Aquí el argumento ya no es tan claro como en los casos anteriores. Los recursos que hemos venido utilizando ya no respaldan fuertemente las intuiciones, pero vale la pena notar que tampoco las contradicen. Como ya vimos, una oración como (25) es gramatical. Pero esto no dice mucho, las formas en las que se predica pueden variar entre lenguajes y tienen elementos de arbitrariedad. Tampoco contamos con una contundente evidencia semántica; la forma de la predicación admite una lectura intervalar en la que el hecho de que Thelma, Loiuse y Annie sean tres podría hacer la oración (25) verdadera. Las consideraciones para respaldar este punto tienen una naturaleza más cargada hacia las relación metafísica de ejemplificación entre una propiedad y sus posibles portadores.

El número cero no es mas que la propiedad de ser cero, que admite de forma estricta pluralidades de cero individuos. Consideremos el hecho

(29) Hay cero estudiantes en este salón.

La pluralidad que puede ocupar el lugar del argumento de la propiedad *ser cero estudiantes en el salón* tiene que ser una con cardinalidad cero. Ninguna pluralidad con cardinalidad diferente puede funcionar como argumento de la propiedad. Ana y Carlos *como tales*, por ejemplo, no podrían ser el argumento pues no hay lugar para el hecho

(30) Ana y Carlos son cero estudiantes en este salón.

Ni siquiera si Ana y Carlos de hecho sí están en el salón pero no son estudiantes, o si Ana y Carlos son estudiantes que no están en el salón (o desde luego, si no cumplen ninguna de las dos condiciones). El análisis de (29) está dado por

(31) $CES(\beta s) \equiv_{def} C(\beta s) \wedge E(\beta s) \wedge S(\beta s)$

donde C es la propiedad de ser cero, E es la propiedad de ser estudiante y S es la propiedad de estar en la habitación. CES es una propiedad plural, además es estrictamente plural ya que aunque E y S son propiedades plurales tolerantes, C es una propiedad plural estricta; y no sólo eso, como C es el número cero, βs tiene que ser una pluralidad de cero individuos.

Para el caso del número uno tenemos algo muy similar: el número uno es la propiedad que admite de forma estricta pluralidades de un elemento. Aquí puede parecer un abuso nombrar a algo *pluralidad de un solo elemento*. Desde luego que en este caso, el análisis de los hechos que involucren a uno va a coincidir con un análisis de la propiedad como una propiedad singular. Esto no me parece que sea un problema para mí, todo lo que yo tengo que decir es que la propiedad *ser uno* y todas aquéllas resultantes de combinarla con otras propiedades (*ser una mujer, ser un gato, etc.*) son propiedades cuyo lugar de argumento es susceptible de ser ocupado por un solo elemento (la descripción *pluralidad de un individuo como tal* puede omitirse o quedar simplemente implícita). Así, ha quedado establecido que la condición que una entidad debe cumplir para ser portadora de la propiedad numérica n es ser una pluralidad de multiplicidad n, la cual portará de manera estricta la propiedad *ser* n.

Otra cuestión relacionada con qué tipo de propiedades son los números es la de si son propiedades de algún orden en particular. Algunas teorías de propiedades son jerárquicas: organizan las propiedades en niveles y cuando describen a los números como propiedades, éstos quedan determinados en algún nivel de dicha jerarquía. La teoría que aquí defiendo es independiente de esta cuestión. Mencionaré algunos ejemplos del tipo de teoría que tengo en mente para ilustrar este punto.

Frege le atribuye a Mill la idea de que los números son propiedades de agregados de cosas físicas, es decir que las propiedades en la teoría de Mill serían propiedades de primer orden. Por otro lado, podemos considerar la teoría del mismo Frege como una teoría de propiedades[4] (dejando de lado la cuestión de las extensiones asociadas a estas propiedades). Los números de Frege-sin-extensiones serían propiedades que aplican únicamente a conceptos. Estos números serían entonces, propiedades de–al menos–segundo orden. A partir de su paradoja, Russell desarrolla una teoría jerárquica de propiedades. Los objetos básicos eran los individuos y los universales se encontraban en algún nivel más alto. Cada propiedad pertenece a un niveles determinado, y en cada uno de estos niveles, podemos encontrar a los números: tenemos *un cero* en el primer nivel, *un cero* en el segundo nivel, etc. Esto para cada número y para cada nivel. En literatura más reciente, encontramos por ejemplo, la tesis de Harold Hodes quien considera que los números codifican cuantificadores numéricos de objetos de los que se habla de manera disfrazada en la formalización de primer orden de la aritmética elemental. (Hodes, 1984). Chateubriand por su lado presenta a los números como propiedades de propiedades (nuevamente, propiedades de al menos segundo orden) (Chateubriand, 2001). La respuesta a la pregunta de a qué tipo de entidades aplican las propiedades numéricas, queda determinadas por las jerarquías que el autor tenga en mente en el caso de teorías jerárquicas de propiedades.

No todas las teorías sobre propiedades son jerárquicas. Existen una gama de teorías de propiedades (con diferentes compromisos respecto a la predicación) que no implican la existencia de tipos o jerarquías. Una ventaja de estas teorías es que permiten que una propiedad se ejemplifique a sí misma, lo cual desde luego, trae la preocupación por la consistencia. Estas teorías [*type-free theories*] pueden ir desde un realismo de universales ingenuo (el cual tiene el mencionado problema de la inconsistencia) hasta teorías más sofisticadas, que tratan de distintas maneras la cuestión de la predicación, con la finalidad de tratar con el problema de las paradojas (e.g. Gilmore [1974], Feferman [1975], Aczel [1980], Feferman [1984], Reinhardt [1985], Flagg y Myhill [1987], Turner [1987], etc.). Mi interés aquí es el de señalar que la propuesta que presento es compatible con cualquiera de estas teorías (que, desde luego, darán una

[4] Esta lectura de los números fregeanos como propiedades ha sido hecha en varios lados, por ejemplo en Maddy (1981) y Chateubriand (2004).

respuesta diferente a la cuestión de cómo los números pueden ejemplificar ellos mismos las propiedades numéricas). La única condición necesaria para ser un portador de la propiedad numérica n es ser una pluralidad de n individuos. La naturaleza de los individuos que conforman estas pluralidades es irrelevante para la cuestión. Las propiedades numéricas pueden ser portadas por pluralidades de objetos, por pluralidades de conceptos, por pluralidades de propiedades, de conjuntos, de propiedades de conjuntos de conceptos, etc. Al enmarcar esta propuesta en una teoría de propiedades no hay compromiso alguno de asumir a las propiedades numéricas como inherentes a algún nivel jerárquico. Será aceptable una explicación que diga que las propiedades numéricas están en el nivel más alto de la jerarquía y desde ahí se pueden aplicar a todos los niveles por debajo (teniendo presente que también deben poder aplicarse a este nivel *más alto*); o una que diga que éstas son propiedades que existen de forma independiente a la jerarquía dada y que se aplican a cualquier otra entidad sin importar el nivel en el que ésta se encuentre; o una que diga que no hay jerarquía alguna y que los números son propiedades que se aplican tanto a objetos como a propiedades de forma indistinta.

Una consecuencia de lo dicho en el párrafo anterior es que los números son propiedades que no dependen de la existencia de algún tipo de entidad particular (salvo de sí mismas). Los números pueden, desde luego, ser ejemplificados por pluralidades de objetos físicos pero esto no hace que la existencia de los números dependa de la existencia de objetos físicos. Un número muy grande (digamos m) es una propiedad susceptible de ser portada por cualquier pluralidad de m individuos. Si el número de cosas en el universo resultara ser menor que m, entonces la propiedad *ser m* no sería portada por una pluralidad de objetos físicos. Sin embargo, m seguiría siendo la propiedad esencial y susceptible de ser portada–de forma estricta–por pluralidades de m individuos; por ejemplo, por la pluralidad formada por un objeto cualquiera y por todas las propiedades numéricas desde 0 hasta $m - 1$. Dejando establecido el punto de que estas propiedades son independientes de la existencia de algún tipo de entidad en particular, podemos hablar sin remordimiento acerca de los enunciados (y de los hechos) puramente aritméticos.

3.4. Enunciados puramente aritméticos

Una de las principales ventajas de la propuesta de este trabajo es que nos permite dar una explicación homogénea entre los términos numéricos en sus usos cotidianos y en sus usos dentro del discurso de la aritmética pura. Del mismo modo que la palabra ‘dos’ está en la oración

(12) Thelma y Louise son dos.

por la propiedad *ser dos*, la palabra ‘dos’ está en

(32) Uno más uno son dos.

por la misma propiedad. Y claro, de aquí se sigue que ‘más’ está en (32) por una relación entre propiedades. También tenemos que en

(33) $2 + 2 = 4$

los numerales arábigos están por estas mismas propiedades y los signos de suma e identidad, por relaciones entre estas propiedades (para una propuesta sobre la referencia de los numerales arábigos–refiriendo éstos a propiedades– ver Gómez-Torrente (2017)). En enunciados como

(34) Dos es el menor de los números primos.

o como llegamos a decir en español,

(35) *El* dos es el menor de los números primos.[5]

[5] Me parece que cualquiera de los dos enunciados (34) y (35) suena bien español. A muchos hablantes les suena mal la segunda lectura, y de hecho, hay oraciones en las que suena más extraño usar el artículo (como ‘El dos más el dos es el cuatro’). Respecto a esto yo diría que la flexibilidad que estos términos muestran para permitir la introducción del artículo definido, no refleja de ningún modo que los términos numéricos sean expresiones con una naturaleza semántica distinta a la de los nombres propios. Es cierto que para los nombres propios de personas no suele utilizarse el artículo, pero en el caso de nombres propios para animales o lugares en ocasiones sí existe la posibilidad de introducirlo sin que esto suene raro: *la Titi, el Firulais, el Everest, el Nilo, el Popocatépet, etc.* Pareciera que ‘El dos’ no es sino una abreviación para ‘El número dos’, de la misma forma en la que ‘El Everest’ es una abreviación de ‘El monte Everest’. Desde luego, uno podría referirse a Juan con la expresión ‘El profesor Juan’ de lo cual no se sigue el uso de la abreviación ‘El Juan’. Pero de acuerdo a estos ejemplos y considerando que hay lenguas como el inglés en los que simplemente no se puede introducir el artículo definido para los numerales, creo que el uso de la expresión ‘El dos’ no introduce ningún problema a la idea de que los

'Dos' o 'El dos' están por la propiedad numérica pura (es decir, sin apelar a ningún portador particular) *ser dos*. La expresión 'los números primos' está por aquellas propiedades numéricas que tienen ellas mismas la propiedad de ser primos, es decir, que tienen la propiedad de no poder ser expresadas como el producto de otras propiedades numéricas distintas de ellas mismas y de la propiedad *ser uno*. Como es de esperarse, 'es el menor de' expresa la relación que hay entre *ser dos* y el conjunto de los números primos. En la siguiente sección presentaré una propuesta de traducción de los enunciados primitivos sobre los que se formaliza la aritmética, en un lenguaje que tenga sentido en el marco de la concepción de los números como propiedades.

3.4.1. El lenguaje

Lo primero que necesitamos es un lenguaje que permita llevar a cabo predicaciones plurales. Tomaré como base el sistema en el que Yi formaliza estas predicaciones (en principio, cualquier lógica de plurales tendría que funcionar). No voy a presentar el sistema completo [desarrollado en Yi (1999)], pero mencionaré algunos elementos que considero, son relevantes para mis propósitos. Empecemos con los constituyentes primitivos del sistema que nos permitirá expresar relaciones lógicas que involucren construcciones plurales.

El lenguaje plural de esta lógica (llamémosle $\mathcal{LP}$), a grandes rasgos, se construye como sigue.

1. Términos primitivos
   - Constantes singulares. Por ejemplo, 'Thelma' (que podemos denotar 't'), 'Louise' (que podemos denotar 'l').
   - Variables singulares. Por ejemplo, 'α', 'β'
   - Variables plurales. Por ejemplo, 'αs', 'βs'. (Las variables plurales corresponden a pronombres plurales como usadas anafóricamente en oraciones como 'Existen algunos humanos y *ellos* cooperan'.)
2. Un operador (conectivo)
   - '@' ('Y')

términos numéricos se comportan como nombres (al menos en sus usos como sustantivos).

En la notación de Yi, el símbolo '@' es una conjunción que tiene una lectura colectiva. Este operador nos permite construir un objeto complejo sobre el que no se distribuye la predicación como en la conjunción usual. Consideremos el ejemplo,

(36) La pizza y la cerveza me hacen daño.

En una lectura estándar (no colectiva) de la conjunción $D(p \wedge c)$, (36) es equivalente a:

(37) La pizza me hace daño y la cerveza me hace daño: $(D(p) \wedge D(c))$

En una lectura colectiva, la idea no es expresar como en (37) que *la pizza me hace daño* y por otro lado, que *la cerveza me hace daño.* La idea es expresar que la pizza y la cerveza *de forma conjunta* me hacen daño. Así, la pizza y la cerveza constituyen un objeto complejo $(p@c)$que si bien, se forma con una conjunción, únicamente admite una lectura colectiva.

(36) La pizza y la cerveza me hacen daño: $D\,(p@c)$

El operador '@' acepta cualesquiera dos ocurrencias de términos para formar un termino plural complejo. De este modo '[Cicerón@Tulio]' y '[Cicerón@Cicerón]' son términos plurales.

3. Predicados

   - Predicados singulares

     predicado lógico '=' ('es idéntico con')

     predicados no lógicos. Por ejemplo, 'es un humano' ('H'), 'admira' ('A'), 'es un miembro de' ('∈')

   - Predicados plurales

     predicado lógico 'H' ('Es-uno-de')

     predicados no lógicos. Por ejemplo, 'Cooperan', 'Coprotagonizan' , 'Conviven', etc.

Además del predicado '=', el lenguaje de plurales de Yi contiene otro predicado lógico: 'Es-uno-de'. Este predicado cuenta como lógico por la misma razón que '=' cuenta como lógico en un sistema lógico clásico: algunas relaciones lógicas descansan en la naturaleza específica del predicado. Por ejemplo, 'Cicerón *es uno de* Cicerón y César' [$H(\beta, \beta@\gamma)$] es una verdad lógica; 'Cicerón *es uno de* Tulio y César' y 'Cicerón *es uno de* los filósofos romanos' son equivalentes con 'Cicerón es Tulio o César' y 'Cicerón es un filósofo romano' respectivamente.

4. Conectivas oracionales
   - '$\sim$' ('no es el caso que')
   - '$\wedge$' ('y')
5. Cuantificadores
   - cuantificador existencial singular '$\exists$' ('existe algún... tal que')
   - cuantificador existencial plural 'Σ' ('existen algunos... tales que')

   En su formalización, Yi incluye únicamente los cuantificadores existenciales y dos conectivas proposicionales. Los cuantificadores universales '$\forall$' ('cualquier cosa... es tal que') y '$\prod$' ('cualesquiera cosas ... son tales que') se introducen vía las definiciones usuales.

Yi presenta también 13 esquemas válidos en su sistema divididos en cuatro grupos. En estos esquemas están, los esquemas familiares de la lógica elemental, su contraparte plural, algunos relativos al predicado 'H', y algunos más para los fines particulares del tipo de relaciones que le interesan a Yi.

Para dar una reconstrucción formal que permita formular enunciados aritméticos en un lenguaje que capture la idea de los números como propiedades, necesitaremos agregar un predicado plural extra que permita expresar la relación de ejemplificación y un operador de nominalización que al ponerlo delante de una fórmula, produce un término singular.

2*. Operador (de nominalización)

- '$\hat{\ }$'

Dado un predicado F, el término $\hat{}F$ denota como término singular la propiedad referida por el predicado F. Así, este operador nos permite convertir fórmulas complejas en expresiones del mismo tipo que las variables singulares y las constantes. Por ejemplo, fórmulas como,

$x = x$ y

$H(\beta, \alpha s)$

resultan, bajo los efectos de este operador, en los términos singulares,

$\hat{}(x = x)$ y

$\hat{}(H(\beta, \alpha s))$

3*. Predicado (plural)

- ‘ I ’ (‘Es ejemplificada por’)

Ahora podemos expresar la ejemplificación por pluralidades a modo de predicación sobre propiedades: $I(x, \alpha s)$ es la ejemplificación de la propiedad x por la pluralidad de αs. Vale la pena enfatizar nuevamente que x es ejemplificada por las αs tomando éstas como tales. Es decir, como una pluralidad en el sentido primitivo en el que las hemos venido considerando que incluye la pluralidad de cero elementos.

3.4.2. Una traducción para la aritmética formal

La traducción para los enunciados de la aritmética de primer orden será dada en términos de los elementos que se presentan a continuación.

- Signos lógicos: ‘$\neg$’, ‘$\wedge$’, ‘$\forall$’ y ‘$=$’ (Con su interpretación usual.)

- Signos no lógicos: ‘0’ (como una constante individual cuyo significado intuitivo es ‘cero’); y $S(x, y)$ (un predicado singular diádico, con el significado intuitivo ‘y es el sucesor de x’).

- El término que está por la propiedad que admite pluralidades arbitrarias estrictamente de cero elementos. Es decir '0', se traduce por [6]:

$$`\hat{\ }(\neg\exists\beta[H(\beta,\alpha s)])\ '$$

- El término que expresa la propiedad que tiene una propiedad numérica de ser el sucesor de otra, éste es '$S(x,y)$', se traduce por:
'$y=\hat{\ }(\exists\beta\sum\gamma s(I(x,\gamma s)\wedge H(\beta,\alpha s)\wedge\forall\delta[H(\delta,\gamma s)\leftrightarrow H(\delta,\alpha s)\wedge\delta\neq\beta]))$'
- Introduzcamos la abreviatura '$N(x)$' para la expresión

'$\prod\gamma\mathrm{s}(H(0,\gamma\mathrm{s})\wedge\forall\beta\forall\delta(H(\beta,\gamma\mathrm{s})\wedge S(\beta,\delta)\rightarrow H(\delta,\gamma\mathrm{s}))\rightarrow H(x,\gamma\mathrm{s}))$'

Podemos ver que la propiedad que identificamos como 0 satisface '$N(x)$': no puede ocurrir que si se satisface el antecedente del condicional principal en la expresión anterior, no se satisfaga el consecuente, pues una parte de la conjunción del condicional es que $H(0,\gamma s)$. Intuitivamente, vemos también que '$N(x)$' es satisfecha por la propiedad numérica 1:

$$1=\hat{\ }(\exists\beta\sum\gamma s(I(0,\gamma s)\wedge H(\beta,\alpha s)\wedge\forall\delta[H(\delta,\gamma s)\leftrightarrow H(\delta,\alpha s)\wedge\delta\neq\beta])),$$

la propiedad *ser cero* es uno de los γs, y tenemos que para cualquier propiedad numérica β (que sea parte de las γs) se tiene que también su sucesor es parte de las γs; siendo que $S(0,1)$, tenemos que $H(1,\gamma s)$. El mismo razonamiento intuitivo aplica para cada una de las propiedades que hemos identificado con los números naturales. La idea es la misma que en la explicitación de definiciones recursivas implícitas: la pluralidad (el conjunto) de las propiedades numéricas es la menor pluralidad (conjunto) que contiene a cero. Esta pluralidad está cerrada bajo la operación añadir el sucesor de los elementos que ya estaban previamente contenidos.

Con estos elementos a nuestro alcance, tenemos que dada una fórmula aritmética φ:

[6]La pluralidad de cero elementos es, como lo indica la definición, aquélla que no tiene elementos (desde luego hay muchos conceptos que determinan a esta pluralidad. Uno de ellos, por ejemplo, es el concepto de *ser distinto de sí mismo*).

- '$\forall x\varphi$' se traduce por '$\forall x(N(x) \rightarrow$' seguido de la traducción de φ.
- '$\neg\varphi$' se traduce por '$\neg$' seguido de la traducción de φ.
- '$\varphi \wedge \psi$' se traduce por la traducción de φ seguida de '$\wedge$' seguida de la traducción de ψ.

Las disyunciones, implicaciones y enunciados existenciales se traducen en términos de los anteriores de la forma usual.

Dada la interpretación anterior podemos observar que las traducciones de los axiomas de Peano son intuitivamente verdaderas:

1. $N(0)$
2. $\forall x\forall y(N(x) \wedge S(x,y) \rightarrow N(y))$
3. $\forall x\forall y\forall w\forall z(N(x) \wedge N(y) \wedge N(w) \wedge N(z) \wedge S(x,w) \wedge S(y,z) \rightarrow (x = y \leftrightarrow w = z))$
4. $\forall x\forall y(N(x) \wedge S(x,y) \rightarrow \neg\, y = 0)$
5. (Esquema de inducción) $(\varphi(0) \wedge \forall x\forall y(N(x) \wedge S(x,y) \wedge \varphi(x) \rightarrow \varphi(y))) \rightarrow \forall x(N(x) \rightarrow \varphi(x))$

Vale la pena mencionar que la traducción aquí propuesta tiene como objetivo atender a la preocupación de que esta teoría de los números como propiedades pudiera ser incompatible con el uso de los términos numéricos en la aritmética formal. Los enunciados que se toman como primitivos en una construcción estándar de los números naturales tienen una interpretación intuitiva bajo esta traducción. Por ejemplo, la interpretación sugerida en la siguiente paráfrasis. (Posteriormente diré algo más acerca de la precisión de esta traducción al expresar los enunciados aritméticos cuyos términos singulares refieren a cierto tipo de propiedades.)

PA.1 La propiedad numérica *ser cero* satisface la fórmula '$N(x)$'.

PA.2 La propiedad numérica m [donde $S(n,m)$] satisface la fórmula '$N(x)$' en virtud de que la propiedad n satisface la fórmula '$N(x)$'.

PA.3 Para cualquier propiedad numérica *ser m* si existe la propiedad *ser n* tal que $S(n, m)$, entonces la propiedad *ser m* no puede ser la propiedad *ser cero* (pues no existe una propiedad numérica x tal que $0 =\hat{} (\exists\beta \sum \gamma s(I(x, \gamma s) \wedge H(\beta, \alpha s) \wedge \forall\delta[H(\delta, \gamma s) \leftrightarrow H(\delta, \alpha s) \wedge \delta \neq \beta])))$. Esto se debe a que, al no poder determinar ninguna pluralidad de -1 individuos, no hay cabida para una propiedad plural con la característica de ser portada estrictamente por dicha pluralidad. [7]

PA.4 Si dadas las propiedades *ser n* y *ser m*, tenemos que *ser x* es la misma propiedad numérica que *ser y* (donde $S(n, x)$ y $S(m, y)$), entonces la propiedad *ser n* y la propiedad *ser m* son la misma propiedad.

PA.5 Si la propiedad *ser cero* tiene la propiedad P (expresada en la formulación de arriba por ‘ φ’) y dada cualquier propiedad *ser n* con la propiedad P, se tiene que la propiedad *ser m* (donde $S(n, m)$) también tiene la propiedad P, entonces todas las propiedades que satisfacen la fórmula ‘$N(x)$’ tienen la propiedad P.

Utilizando los recursos sugeridos hasta aquí, podemos dar ahora una traducción para las definiciones recursivas de suma, producto y exponenciación; donde ‘$+$’, ‘$\times$’ y ‘e’ son predicados triádicos. Intuitivamente, también estas definiciones tienen sentido bajo la interpretación que ha sido propuesta.

- Suma:

  Para todo $x, +(x, 0, x)$

  Dados x, y, z, w y v, si $S(y, z)$, $+(x, y, w)$ y $S(w, v)$, entonces $+(x, z, v)$.

- Producto:

[7] Alguien podría argumentar que del mismo modo como estoy usando la imposibilidad de pluralidades de -1 individuos para expresar la idea de que el 0 no tiene predecesor, se podría decir que, dado que en sentido estricto tampoco *hay* pluralidades de cero individuos, el número 0 tampoco está bien definido. A esto yo respondería que a 0 lo estoy definiendo en términos de ser la propiedad numérica que porta la pluralidad que no tiene individuos: a esta pluralidad la podemos identificar mediante diversas propiedades. Por ejemplo, como la pluralidad de aquellos elementos con la propiedad de no ser idénticos a sí mismos. Esto podría ser controvertido, pero sin duda, está bien definido. Por otro lado, parece haber una especie de error categorial al intentar hablar de la propiedad que tiene una pluralidad de tener -1 individuos.

Para todo $x, \times(x, 0, 0)$

Dados x, y, z, w y v, si $S(y, z)$, $\times(x, y, w)$ y $+(w, x, v)$, entonces $\times(x, z, v)$.

- Exponenciación:

  Sea α tal que $S(0, \alpha)$. Para todo $x, e(x, 0, \alpha)$

  Dados x, y, z, w y v, si $S(y, z)$, $e(x, y, w)$ y $\times(x, w, v)$, entonces $e(x, z, v)$.

3.4.3. El problema de la arbitrariedad

Esta traducción trae a discusión una importante preocupación alrededor de nuestra propuesta. Esta preocupación la he abordado en otras secciones como un problema de arbitrariedad que ha sido central en varias teorías realistas sobre los números naturales. En la sección 3.3.2 mencionaba esta cuestión en Frege. Cuando Frege presenta sus objeciones en contra de que los números sean propiedades de objetos físicos, una de las preocupaciones es que hay arbitrariedad en la determinación del número (visto como propiedad) que le corresponde a un objeto dado: del mismo modo que podemos atribuirle el número 2 al mazo de cartas en la mano (teniendo en mente las barajas que conforman el mazo), podemos atribuirle también el número 104 (teniendo en mente las cartas que conforman el mazo). La objeción de Frege está bien fundada, pero no es claro que su propuesta no incurre también en arbitrariedad. Si hay arbitrariedad en la atribución de propiedades numéricas a objetos, ¿por qué no habría arbitrariedad en la atribución de propiedades numéricas a conceptos? Al fin y al cabo, no queda claro que siempre haya una propiedad que unifique a los individuos en la extensión de un concepto. Si no está garantizado para cada concepto que está bien definido, ¿cómo podría estarlo su numerosidad? Pensar en pluralidades parece dar una respuesta a la preocupación de Frege: las pluralidades quedan bien determinadas por el sólo hecho de tener a los individuos que tienen, independientemente de que haya una propiedad adicional que unifique a estos individuos. Pero aún no nos libramos del problema de la arbitrariedad; una vez que las entidades portadoras han quedado determinadas satisfactoriamente, todavía falta determinar cuáles de todas las propiedades que estas pluralidades ejemplifican son los números.

El problema de la arbitrariedad es recurrente en este debate. Otro ejemplo (que presentaré con detalle en el siguiente capítulo) es el problema que presentan las teorías de los números-como-conjuntos al momento de determinar exactamente *qué* conjuntos son los números, considerando que diferentes sistemas proponen para cada número natural diferentes conjuntos. Parece que cualquier teoría que sostenga que el lenguaje aritmético describe una parte de la realidad se verá obligada a considerar el problema de la arbitrariedad.

En el contexto del presente trabajo, la preocupación se presenta con la pregunta acerca de qué propiedades son los números. Al principio del capítulo dije que no daría una respuesta concluyente a esta pregunta pero que intentaría presentar una respuesta sustantiva a la pregunta de *qué tipo de propiedades son los números*. Es evidente es que al momento de proponer una traducción formal para los enunciados de la aritmética, se requiere de una mayor precisión que la utilizada en las secciones anteriores en la descripción de estas propiedades en los contextos lingüístico y metafísico. La necesidad de un lenguaje, para traducir enunciados formales, que utilice términos primitivos que refieran a propiedades nos ha llevado a elegir de una forma que podría parecer arbitraria, las propiedades y relaciones en cuyos términos fueron descritos los números. Mi objetivo ahora es disipar en la medida de lo posible esta preocupación filosófica y mostrar que no representa una objeción fulminante para nuestra teoría de los números como propiedades.

El oponente a la teoría podrá conceder que nuestra traducción no es un caso de absoluta arbitrariedad (como no lo son en general las teorías que mencioné al principio de esta sección). El análisis partió de la consideración de las propiedades cuya prominencia es perceptible a través de las intuiciones generadas por el comportamiento de los números y expresadas en los discursos que involucran a los numerales. Por ejemplo, la idea de presentar a cada número distinto de cero en términos de su antecesor es algo que se comparte con una gran mayoría de propuestas (tanto filosóficas como matemáticas). ¿Por qué es esto? Me parece que porque, independientemente de nuestras preferencias teóricas, es difícil ir en contra de la naturaleza recursiva de los números naturales. Así obtenemos una primera motivación para la introducción de la fórmula $N(x)$ como

$$\prod \gamma\mathrm{s}(H(0,\gamma\mathrm{s}) \wedge \forall\beta\forall\delta(H(\beta,\gamma\mathrm{s}) \wedge S(\beta,\delta) \rightarrow H(\delta,\gamma\mathrm{s})) \rightarrow H(x,\gamma\mathrm{s})).$$

Sin embargo esta expresión compleja se construyó a partir de otras más simples. En particular, se utilizó una expresión para la propiedad que es el número cero y otra para la relación de sucesor que se da entre dos propiedades numéricas. A la propiedad que es el número cero (expresada por '0') la traducimos como:

$$`\,\hat{}\,(\neg\exists\beta[H(\beta,\alpha s)])\,'$$

La crítica de la arbitrariedad de la determinación aquí diría algo como lo siguiente. *Supongamos que el número cero es una propiedad pero, ¿por qué esta propiedad es la propiedad de que no exista ninguna entidad β que pertenezca a una cierta pluralidad de αs. ¿Por qué ésta y no otra propiedad?*

Cabe recordar que anteriormente he mencionado que el tipo de entidades (en particular, abstractas) que son las propiedades dificulta la estrategia de determinación que utilizamos para los objetos. Esta estrategia es la de utilizar las propiedades del objeto para ir acotando las clases a las que éste pertenece tratando de llegar al caso ideal de determinar una clase cuyas condiciones sean todas satisfechas por el objeto en cuestión y sólo por él. Ante esta dificultad, la propuesta aquí ha sido buscar otras formas de aproximación a las propiedades, en particular, analizando la relación con sus posibles portadores y su relación con otras propiedades.

La pregunta *¿Qué propiedad es el cero?* es respondida en el marco presentado sobre propiedades plurales. En términos de sus portadores, *cero es la propiedad susceptible de ser portada por cualquier pluralidad con cero elementos*. Como la propiedad ha sido dada en términos de la (o las) entidad(es) que la ejemplificaría(n), quisiéramos saber cómo caracterizar a esta(s) entidad(es). En este punto la estrategia no es muy distinta a la que utiliza la Teoría de conjuntos para caracterizar al conjunto vacío: la pluralidad ejemplificadora de la propiedad plural *ser cero* (que se expresa en la fórmula de arriba con 'αs') es la pluralidad que no tiene elementos. La diferencia en nuestro caso es que en lugar del marco teórico que rodea al conjunto vacío, la existencia de la pluralidad que no tiene elementos descansa en nuestras intuiciones sobre las pluralidades mismas y sus propiedades. La propiedad (el número) cero es la propiedad plural numérica portada por la pluralidad caracterizada por la propiedad *ser cero*, que no es sino la propiedad de no tener elementos. La pluralidad αs puede ser identificada mediante muy diversas propiedades, por ejemplo, podemos decir que αs es la pluralidad formada por los individuos con la propiedad de no ser idénticos a sí mismos. Esto no me parece un problema pues como lo mencioné antes, para determinar una pluralidad no es necesaria la existencia de una propiedad unificadora entre sus elementos (y tampoco es un problema si existe más de una). Los individuos conjuntamente (bajo la noción plural de conjunción, que en particular, no admite su eliminación) son la pluralidad *como tal*. De aquí que la traducción propuesta para '0' derive de la forma en la que predicamos la propiedad *ser cero* de la pluralidad que no tiene elementos:

$$Ser\ cero(\alpha s) \equiv \neg\exists\beta[H(\beta, \alpha s)]$$

El primer paso ha sido dado, me parece que no hay arbitrariedad en la identificación de la propiedad que es el número cero. Quizá en este punto el lector pueda conceder que la traducción propuesta no es un caso de completa arbitrariedad. Sin embargo, es importante reconocer que aún queda espacio para la objeción.

Para los números distintos de cero la cuestión es más complicada. En particular, nuestra traducción sugiere el uso de la relación de sucesor. Aunque, como ya lo he mencionado, hay una motivación inicial para usar esta relación como un recurso identificador, ésta no es razón suficiente para garantizar que los números son exactamente las entidades que se corresponden con las propiedades específicas usadas en la traducción. En otras palabras, la naturaleza recursiva de los números naturales no implica que la propiedad que es el número n (para $n \neq 0$) sea exactamente la propiedad que se ejemplifica por pluralidades arbitrarias de n individuos y que está en la relación de sucesor con el número $n-1$ (que es la propiedad que se ejemplifica por pluralidades arbitrarias de $n-1$ individuos y que...). La traducción propuesta nos permite identificar a un número dado n, pero no nos da condiciones completas para decir con toda precisión *lo que es n*. En este sentido, sigue presente la cuestión de la arbitrariedad. Pero, ¿qué tan grave es esta arbitrariedad? ¿Acaso deberíamos darnos por vencidos? ¿Deberíamos concluir que no puede existir algo que no pueda determinarse de manera precisa mediante el uso de recursos primitivos que nos resulten familiares por su uso en otros contextos? ¿Es hora de arrojarnos al antirrealismo? Yo creo que no, mi intuición es que los números son cierto tipo de propiedades que son entidades primitivas. Es decir que no pueden reducirse a otras propiedades. Pero esta irreducibilidad metafísica no nos impide encontrar modos de identificarlas mediante el uso de otras propiedades diferentes.

Otra alternativa de propiedades de identificación de los números está en las relaciones entre los individuos que constituyen las pluralidades portadoras. Si las propiedades que son los números son propiedades de pluralidades, y las pluralidades están constituidas de individuos, tiene sentido preguntarse si estas pluralidades y sus propiedades (en particular las numéricas) pueden expresarse en términos de relaciones (lógicas por ejemplo) entre los individuos de la pluralidad. Este razonamiento nos conduce a que la traducción de los enunciados aritméticos podría ser diferente a la sugerida. Ésta podría explotar un modo de presentación diferente de los números. Por ejemplo, mientras que en la traducción propuesta el número 1 se identifica con ciertas propiedades, entre las que está la ejemplificación del predecesor de 1 por una pluralidad γs, otra propiedad para identificarlo podría ser la propiedad que tiene cualquier pluralidad que la ejemplifique de que sus elementos sean todos idénticos entre sí. Es decir:

$$Ser\ uno(\alpha s) \equiv \exists\beta\forall\delta[H(\delta,\alpha s) \leftrightarrow \delta = \beta]$$

Aquí, en contraste con el cero, ya hay una diferencia con las propiedades usadas en la traducción sugerida para la identificación del número. Las propiedades que aparecen del lado derecho de la identidad anterior no son las que aparecen en el lado derecho de la traducción sugerida para '1':

$$1 =\hat{}\, (\exists\beta \sum \gamma s(I(0,\gamma s) \wedge H(\beta,\alpha s) \wedge \forall\delta[H(\delta,\gamma s) \leftrightarrow H(\delta,\alpha s) \wedge \delta \neq \beta]))$$

Consideremos el caso análogo para el número 2. Podemos identificar la propiedad de ser dos en términos de relaciones lógicas entre los individuos de sus pluralidades portadoras (sin involucrar, como lo hicimos en la traducción, ninguna propiedad de su predecesor):

$$Ser\ dos(\alpha s) = \exists\beta\exists\gamma(\beta \neq \gamma \wedge \forall\delta[H(\delta,\alpha s) \leftrightarrow \delta = \beta \vee \delta = \gamma])$$

No es difícil ver la existencia de alternativas también para otros conceptos aritméticos como el concepto de sucesor. Así, resultan posibles diferentes traducciones con la capacidad de expresar los enunciados aritméticos considerando a los números como propiedades. Establecer cuál de todas ellas es la correcta parece ser la demanda del problema de la arbitrariedad. Una posible respuesta es decir que todas ellas son correctas, que si dos fórmulas refieren al mismo hecho aritmético es porque las propiedades expresadas son todas ellas *de hecho* la misma propiedad. Mi visión es distinta, considero que el número 3 no es sino la propiedad de cardinalidad que admite estrictamente pluralidades de tres individuos. Es decir, la propiedad que tiene cualquier pluralidad de tres individuos de ser tres. A esta propiedad le corresponde una predicación plural en enunciados como 'Hugo, Paco y Luis *son tres*'. Es una propiedad primitiva porque 3 es no es mas que la propiedad *ser tres*, y *ser tres* no es una propiedad compleja que se dé en términos de otras propiedades. Pero que la propiedad *ser tres* sea primitiva (en el sentido de ser atómica) no nos impide echar mano de otras propiedades para identificarla, como lo muestra la traducción sugerida.

Notemos que las propiedades que usamos para las traducciones ni siquiera son todas ellas el mismo tipo de propiedad. Los números son propiedades de cardinalidad, mientras que las propiedades usadas en el lado derecho de las identidades varían. Por ejemplo, en repetidas ocasiones aparecen entre estas propiedades relaciones lógicas entre individuos. Podrían aparecer muchos otros tipos de propiedades colaborando con la identificación de los números.

El proyecto hasta aquí ha consistido en buena medida en la búsqueda de propiedades que permitan la identificación de los números. En este camino he sugerido el análisis de propiedades de las propiedades numéricas (los números) que de algún modo resultan prominentes. Entre éstas están las características que tienen sus potenciales portadores; la relación de ejemplificación entre entre estos portadores y las propiedades numéricas; el comportamiento de los términos numéricos que las expresan en discursos informales y formales; sus propiedades aritméticas (por ejemplo, tener un sucesor) y las propiedades (por ejemplo, lógicas) que hay entre los individuos que constituyen las pluralidades portadoras. Espero con esto haber logrado el objetivo de proporcionar una aproximación hacia la respuesta a la pregunta de qué tipo de propiedades son los números. Muchas de las virtudes de la presente propuesta son compartidas por otras explicaciones realistas de los números naturales. Por esta razón dedicaré el siguiente capítulo a mostrar algunas ventajas filosóficas de nuestra propuesta de los números como propiedades sobre otras conocidas propuestas realistas.

Capítulo 4

Lo que los números no podrían ser

4.1. Introducción

Como ya argumenté en el primer capítulo, tenemos buenas razones para defender un realismo en la aritmética (y buenas razones para rechazar un antirrealismo). El debate, sin embargo, difícilmente dejará de generar controversia. La naturaleza misma de la cuestión hace de cierto modo inaccesible el escenario en el que se da una respuesta concluyente a la pregunta acerca de la existencia de los números. Por esta razón los argumentos negativos terminan teniendo un gran peso en el análisis de la cuestión y esto se refleja en el hecho de que en la literatura aparecen frecuentemente tesis cuyas ideas expresan cosas como lo que los números *no* podrían ser; cómo es que éstos *no* se podrían conocer; por qué *no* se debería de ser un nominalista, etc. El difícil acceso a cuestiones positivas que resulten concluyentes fuerza el debate a considerar con mucha seriedad las respuestas alternativas a las preguntas planteadas, para entonces, buscar argumentos tan poderosos como sea posible que descarten dichas alternativas. Le dedicaré este capítulo a analizar algunas propuestas alternativas, presentando sus ventajas, así como las razones por las que no resultan del todo satisfactorias. Estas consideraciones deberán aportar razones para favorecer una teoría de los números como propiedades susceptibles de ser portadas por pluralidades *como tales.*

Hasta aquí el esquema de lo que he presentado en el trabajo está formado por (i) razones que, si bien no son concluyentes, al menos espero que muestren una clara motivación para rechazar el antirrealismo; (ii) la idea (*el hecho*) de que la representación lingüística de las oraciones que incluyen términos aritméticos sugiere la existencia de los números y; (iii) especificar (tanto como sea posible) las características de las propiedades numéricas que nos permiten identificarlas como los números mismos. Aún queda la tarea de explicar cómo, en virtud de lo que este análisis ha revelado sobre la naturaleza de los números, se puede dar una respuesta satisfactoria a algunos de los retos filosóficos que han sido impuestos a las teorías realistas. En particular, al reto epistemológico de Benacerraf.

Con la finalidad de dotar de fuerza la propuesta positiva, es necesario hacer algunas consideraciones (primordialmente negativas) respecto a otras respuestas a la cuestión de *qué tipo de cosas los números podrían ser*. Como esta pregunta ya parte de un presupuesto realista, las teorías antirrealistas quedan fuera de estas consideraciones (éstas las discuto en las partes del trabajo más enfocadas al lenguaje). Las ideas centrales en este capítulo son, en primer lugar, defender que–contrario a lo que algunos matemáticos modernos piensan–la aritmética puede prescindir completamente del discurso sobre conjuntos (no así del de propiedades). En segundo lugar, que las teorías filosóficas sobre la aritmética cuya base es la Teoría de conjuntos se quedan cortas al momento de explicar los usos cotidianos de los números. Presentaré con detalle algunas críticas a las versiones conjuntistas de las teorías de Maddy y Kripke acerca de los números. Finalmente, presentaré un argumento de Mario Gómez Torrente defendiendo la idea de que los números no podrían ser otra cosa sino propiedades de pluralidades. Este argumento es esencial para el presente proyecto porque arroja como resultado la identificación (en el sentido metafísico fuerte de que son la misma cosa) de cada número con su correspondiente propiedad de numerosidad. El argumento muestra que para cualquier pluralidad dada, su propiedad de cardinalidad no puede ser otra cosa sino su número y su número no puede ser otra cosa sino su propiedad de cardinalidad. Como las pluralidades son arbitrarias, la existencia de los números resulta independiente de la existencia de una amplísima clase de entidades de otros tipos. Pensar a los números en términos de estas otras entidades (las pluralidades) no es algo que comprometa de forma sustantiva las ideas nucleares de una propuesta realista (como la independencia u objetividad de la existencia de los números). Adicionalmente, el argumento de Gómez Torrente aporta detalles a la cuestión, ampliamente discutida en el capítulo anterior, de *qué tipo de propiedades son los números*, revelando la propiedad–esencial a estas propiedades–de ser portadas por pluralidades con su correspondiente cardinalidad.

4.2. Los números como conjuntos

Una respuesta frecuente–tanto de filósofos como de matemáticos–a la pregunta de qué son los números es que éstos son conjuntos (o en su defecto que requieren de los éstos en algún sentido muy fuerte). Primero quiero hacer explícito algo que creo que no debería generar mucha controversia: sean lo que sean los conjuntos y sean lo que sean las propiedades hay una relación sumamente estrecha entre estos dos tipos de entidades. En la dirección de las propiedades hacia los conjuntos tenemos que, si bien Russell nos dejó como lección que no a toda propiedad le corresponde una extensión y Quine nos dejó como lección que las propiedades son entidades intensionales más que extensionales, no dejamos de asociar las propiedades con sus extensiones (incluso si la extensión es vacía), ¿por qué? Por las mismas razones que motivaron la metodología en el capítulo anterior: la noción de propiedad es escurridiza y la relación de ejemplificación que tenga con los posibles portadores es informativa; las extensiones de las propiedades pueden ser vistas (o al menos una gran parte de ellas) como conjuntos. En la otra dirección tenemos el hecho de que todo conjunto está determinado por una propiedad que es portada por sus elementos. Esta propiedad no tiene que ser única pero siempre hay alguna, por ejemplo, a cualquier conjunto A le podemos asociar la propiedad que tienen sus elementos de pertenecer a A.

Los últimos renglones del párrafo anterior pueden haber traído a la mente del lector la expresión *Axioma de comprehensión*, y claro, esto es más o menos lo que dice el axioma de comprehensión de la teoría de conjuntos. Este axioma dice que dado un conjunto A y una propiedad P tenemos el conjunto

$$X = \{x \in A | P(x)\}$$

Efectivamente, el axioma de comprehensión dice algo muy similar a la afirmación que hice de que todo conjunto está determinado por una propiedad. Pero la diferencia relevante es que mientras que en mi afirmación no hay ninguna especificación adicional que sea requerida, en el axioma de comprehensión tenemos que A tiene que ser ya en sí mismo un conjunto y P tiene que ser una propiedad expresada de forma precisa en el lenguaje. Esto me lleva a señalar que la palabra 'conjunto' con frecuencia es usada en reemplazo de palabras como 'agregado', 'colección', 'pluralidad'. Yo no veo ningún problema en principio con esto, el problema es que en este intercambio de términos ocurre que en ocasiones, las teorías echan mano de la naturalidad que tiene el 'ser una colección' para más adelante gozar de los beneficios teóricos de la teoría de conjuntos.

Las teorías más conocidas que dicen que los números son conjuntos (o que están en alguna relación fuerte de dependencia con los conjuntos, por ejemplo Maddy o Kripke) tienen en mente a los conjuntos como los objetos sobre los que trata la teoría de conjuntos, no a los conjuntos en su sentido más natural de agregado o pluralidad. Dado este panorama y antes de pasar a las consideraciones particulares, diré que mi intuición es que ninguna de estas explicaciones puede estar bien. Los conjuntos como agregados–como pluralidades–son muy naturales, podrían ser tan reales como los números naturales. Por otro lado, los conjuntos como objetos pertenecientes a la teoría de conjuntos son los objetos de una herramienta teórica. El papel central de la Teoría de conjuntos es el de crear y organizar dominios desde los cuales se pueden construir los objetos sobre los cuales hablan los enunciados de la práctica matemática clásica. Como tal, brimdan un apoyo importante para el discurso matemático (aritmético): una herramienta de formalización. Sé que la discusión sobre la ontología de los conjuntos es complicada y no pretendo defender mi postura en este espacio. Mi único propósito es señalar por qué las explicaciones sobre los números tienden a asociarlos con conjuntos y sentar las bases de mi argumento para defender que los números no son conjuntos, y de hecho, que la relación número-conjunto no va más allá de la que mantienen los números con cualquier otra entidad vista como pluralidad.

La razón por la que las repuestas de tipo conjuntista son tan populares no es difícil de imaginar: pareciera que en la práctica matemática *profesional* los enunciados de la aritmética hablan sobre conjuntos. Pero como lo dije en el párrafo anterior, parece que la aritmética habla sobre conjuntos por la misma razón por la que parece que todos los enunciados de la matemática *popular* hablan de conjuntos: ¡porque ése es justamente el papel de la Teoría de conjuntos! La Teoría de conjuntos proporciona dominios de discurso para construir los objetos matemáticos. Dada la gran carga teórica de la Teoría de conjuntos, si defendemos la posición de que los números son conjuntos (conjuntos de la Teoría de conjuntos) va a haber un hueco explicativo enorme que tendrá que ser llenado en virtud de explicar los usos cotidianos de las expresiones aritméticas. ¿Cómo se explica que los niños (que tienen intereses y contextos muy distintos a los de estos matemáticos profesionales) son capaces de desarrollar niveles de competencia aritmética desde muy temprana edad? En cualquier caso, la tendencia naturalista de la filosofía contemporánea conduce a privilegiar el discurso aritmético que concierne a los matemáticos por encima de los usos cotidianos. Mi parecer es que una buena explicación acerca de la naturaleza de los números naturales debería cubrir por igual ambos usos.

Los enunciados aritméticos que tienen en mente estos filósofos de los números-como-conjuntos son enunciados como los siguientes,

Definición 4.2.1 *Los números naturales están formados por* <u>*un conjunto*</u> $\mathbb{N}$ *que* <u>*tiene un elemento*</u> *distinguido* 0*–llamado el cero–junto con* <u>*una función*</u> *sucesor* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la cual satisface los siguientes axiomas:*

1. *S es inyectiva.*
2. $0 \notin S(N)$*, y*
3. *Si $M \subset \mathbb{N}$ es un conjunto que contiene al cero y satisface $S(M) \subset M$, entonces $M = \mathbb{N}$.*

La palabra 'conjunto' aparece más de una vez en la definición, pero no sólo eso, si preguntamos qué quiere decir que S es una función inyectiva, la respuesta es que es una relación $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Es decir, un conjunto que es subconjunto (donde '$\subseteq$' expresa una relación bien definida entre conjuntos) de otro conjunto (el producto cartesiano) formado por las dos ocurrencias del conjunto $\mathbb{N}$. Esta relación tiene la propiedad de que a cada elemento del dominio (que es el conjunto $\mathbb{N}$) le corresponde uno y solo uno del codominio ($\mathbb{N}$). Esta función (conjunto de parejas ordenadas) tiene la propiedad adicional de que no ocurre que varios elementos en el dominio estén relacionados bajo S con el mismo elemento en el codominio. ¿Y qué es una pareja ordenada? Pues *es* también un conjunto. Una pareja ordenada es un conjunto que nos permite distinguir entre el primero y el segundo elemento de la pareja. Podemos expresar esto de distintas maneras, por ejemplo $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \ldots$

Así pues, podemos ser tan prolijos como queramos en llevar nuestra definición acerca de la aritmética a un bonche de definiciones conjuntistas. ¿Quiere decir esto que la aritmética habla de conjuntos? ¿Quiere decir esto que los números son conjuntos? Desde luego que no, lo único que quiere decir esto es que los conjuntos facilitan mucho–para los propósitos del matemático–el discurso aritmético. Si esto se lo presentamos a cualquier otro hablante con intereses distintos a los de los matemáticos, no sólo no le vamos a facilitar nada, sino que es muy probable que ni siquiera vea cómo eso tiene alguna relación con los números que él utiliza de forma cotidiana.

La función sucesor lo que refleja es el proceso de conteo–el hablante no necesita saber lo que es una función inyectiva para saber lo que es contar. El axioma 1. equivale a que $a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$, que no es otra cosa mas que decir que–en el proceso de conteo–uno nunca encuentra al mismo número dos veces; el axioma 2. equivale a decir que el proceso de contar comienza por el 0, si esto no pareciera muy natural no hay problema alguno con comenzar por el número 1. El axioma 3. equivale al Principio de inducción completa[1], y no requiere en absoluto de ningún elemento de la Teoría de conjuntos. Todo lo que este principio requiere ¡son propiedades! Podemos prescindir absolutamente de la Teoría de conjuntos y expresar el axioma 3 en términos puramente de números–para los que ya he dado yo una definición en términos de propiedades–y propiedades de estas propiedades:

> **Principio de Inducción Completa.** Si una propiedad P se aplica al cero (base inductiva) y si para todo n que posee la propiedad P su sucesor $S(n)$ también la posee (paso inductivo) entonces esta propiedad la poseen todos los números naturales.

[1] **Teorema.** *El Principio de inducción completa y el axioma 3. son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que el Principio de inducción completa es válido. Tomemos como P a la propiedad *estar en* M. Tenemos de esta manera que 0 satisface P y que si n satisface P, entonces $S(n)$ también satisface P (pues por hipótesis tenemos que $S(M) \subseteq M$). Por el Principio de inducción completa, la propiedad P la poseen todos los números naturales; es decir que $\mathbb{N} \subseteq M$ implica que $M = \mathbb{N}$. Ahora supongamos válido el axioma 3. y sea Q una propiedad que se aplica al cero y que para toda n que satisface la propiedad Q, el sucesor $S(n)$ también satisface Q. Deseamos probar que todos los naturales satisfacen dicha propiedad. Para ello consideremos el conjunto $M = \{x \in \mathbb{N} | Q(x)\}$. Vemos inmediatamente que $0 \in M$ y que si $x \in M$ entonces $S(x) \in M$. Por el axioma 3. $M = N$, es decir, todo número natural ejemplifica la propiedad Q. ■

En otras palabras,

> **Principio de Inducción Completa.** Si una propiedad P se aplica a la propiedad *ser cero* (que es el inicio del *conteo*) y además, para cada propiedad *ser* n que posee la propiedad P, la propiedad susceptible de ser portada de manera estricta por cualquier pluralidad de $n+1$ individuos porta la propiedad P, entonces esta propiedad la poseen todas y cada una de las propiedades numéricas (del tipo *ser* n) a las que en su totalidad llamamos 'los números naturales'.

Probablemente, esta versión del principio de inducción le parecerá superflua al matemático y al hablante promedio le parecerá muy rebuscada. A pesar de esto, ambos están en perfecta posición de comprender el contenido de este enunciado sin ningún tipo de información adicional proveniente de otra teoría. Esto no es así para las versiones conjuntistas del enunciado.

Hasta aquí he presentado mis consideraciones preliminares en contra de la idea de que haya algún tipo de necesidad de considerar a los números como conjuntos. Ahora pasaré a algunas consideraciones particulares en contra de los números-como-conjuntos. El propósito de esto, mas que convencer al lector de que los números no son conjuntos, es–por contraste–señalar algunas virtudes (principalmente respecto a la naturalidad de mi explicación) que considero, favorecen la propuesta de que los números son propiedades plurales.

La objeción en contra de que los números son conjuntos que ha sido tomada con más seriedad en la literatura es la que presenta Benacerraf en su artículo *What Numbers Could Not Be* (Benacerraf, 1965). En realidad el interés de Benacerraf no es tanto dar un argumento en contra de que los números sean conjuntos, sino mas bien dar un argumento en contra de que los números sean objetos de cualquier tipo. Al centrar los argumentos en contra del que parece ser el mejor candidato a decir cuáles son *aquellos objetos que son los números*, Benacerraf pretendía establecer que los números no son objetos, de hecho, *ningún tipo de objeto*.

El núcleo del argumento de Benacerraf es presentar dos construcciones–en cierto sentido arbitrarias–que se hacen de los números naturales desde la teoría de conjuntos. En estas construcciones los números se definen de acuerdo a las siguientes listas:

1. Construcción de Von Neumann:

   $1 = \{\emptyset\}$,

   $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

   $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

   $\ldots$

2. Construcción de Zermelo:

   $1 = \{\emptyset\}$

   $2 = \{\{\emptyset\}\}$

   $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$

   $\ldots$

Haciendo un análisis de las expresiones que se encuentran del lado derecho de los signos de identidad *como objetos* (es decir, a partir de sus propiedades internas), Benacerraf resalta que,

- En 1., $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Es decir, $1 \in 3$.
- Mientras que en 2., $\{\emptyset\} \notin \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Es decir, $1 \notin 3$.

Si los números fueran conjuntos deberíamos ser capaces de identificar cada número a partir de las propiedades internas del correspondiente conjunto. El contraste entre 1. y 2. muestra que esto no es así. Luego, los números no pueden ser conjuntos. Después de presentar esto y tras contar una larga historia acerca de *qué es lo que es importante* en el estudio de los números, Benacerraf concluye que cualquier sistema de objetos, conjuntos o no, que forme una sucesión recursiva es adecuado para ser considerado como los números naturales. La teoría de los números no es más que el desarrollo de las propiedades de todas las estructuras del tipo de orden de los números. De esta forma, los términos numéricos no tienen referente único; la aritmética es la ciencia que elabora la estructura abstracta que todas las progresiones tienen en común por el solo hecho de ser progresiones. Finalmente, dar condiciones necesarias y suficientes para identificar a los números no es mas que caracterizar una estructura abstracta. A estas ideas ideas de Benacerraf con frecuencia se les atribuye ser la génesis del estructuralismo en filosofía de las matemáticas.

Una versión muy general, como la que presenta Benacerraf, del estructuralismo podemos pensarla también como una teoría de los números-como-propiedades. En este caso los números naturales estarían dados por las relaciones que hay entre las propiedades de orden correspondientes a cada número natural. Los números serían algo así como las relaciones que hay entre *ser el primer elemento de una sucesión recursiva* ξ y, *ser el segundo elemento de* ξ, *ser el tercer elemento de* ξ,... *ser el enésimo elemento de* ξ,... etc.; *ser el segundo elemento de* ξ y, *ser el primer elemento de* ξ, *ser el tercer elemento de* ξ,... *ser el enésimo elemento de* ξ,...; *ser el tercer elemento de* ξ y, ... etc. La diferencia evidente entre una teoría de éstas y una como la que yo defiendo aquí es que estos estructuralismos toman como privilegiadas las propiedades de ordinalidad de los números por encima de las propiedades de cardinalidad, multiplicidad, o numerosidad [2]).

El debate acerca de los números en su función de ordinales y los números en su función de cardinales es largo y complejo y aquí no cuento con el espacio suficiente para desarrollarlo. Pero sólo por presentar una razón (que para mí resulta contundente en el favorecimiento de una teoría de propiedades de numerosidad por encima de una de propiedades de ordinalidad), considero que los usos de los números vistos como propiedades de orden–identificándolos con la estructura abstracta que rige las las progresiones–explicarán, a lo mucho, los usos que hace *el matemático profesional*. Sin embargo, esta explicación se queda corta al momento de explicar los usos cotidianos de los números que hace un individuo en su vida cotidiana. En particular tenemos el caso de los niños, que presentan un cierto nivel de competencia aritmética en un momento en el que comprenden a los números únicamente en su papel de propiedades de numerosidad y no en su papel de propiedades de ordinalidad. Algunos comportamientos, como contar o realizar operaciones aritméticas básicas con el apoyo de objetos físicos (canicas, dedos, ábaco),

[2]Prefiero usar el término 'numerosidad' en lugar de 'cardinalidad'. La razón es la importancia que (para mi propuesta) tiene enfatizar que el tipo de entidades que portan las propiedades-número son pluralidades *como tales*. Así, al al hablar de *la numerosidad de una pluralidad* pretendo distanciarme de la idea de *la cardinalidad de un conjunto*, la cual se encuentra con frecuencia inmersa en la Teoría de conjuntos.

reflejan que el acceso al conteo–que refleja la ordinalidad de los números–se logra a partir de su capacidad, desarrollada previamente, de identificar la numerosidad de una cierta colección de objetos.

Existen habilidades que subyacen a una cognición completa de los enteros. Entre estas habilidades (primordialmente prelingüísticas) están algunas que les permiten a los infantes (de entre 0 y 4 años) identificar ciertas propiedades numéricas. A esta capacidad que tienen los niños de identificar ciertas numerosidades de objetos físicos se le asocia con algo que los neurocientíficos y psicólogos llaman 'el sentido del número'. Tatiana Arrigoni y Bruno Caprile dicen en su trabajo sobre adquisición de enteros,

> Los datos empíricos apoyan la idea de que "el sentido del número" incluye al menos dos sistemas representacionales activos desde muy temprano en la infancia. El llamado "sistema numérico aproximado" y el "sistema de monitorización de objetos" . El primero es descrito como un mecanismo para responder a grandes multiplicidades de elementos sensoriales por medio de la representación de los mismos como magnitudes similares a segmentos, que fluctúan en una línea numérica mental. El segundo es descrito como un mecanismo para responder a pequeñas multiplicidades (3-4 miembros) de elementos sensoriales por medio de la codificación de sus miembros con otros tantos símbolos mentales que se guardan en la memoria de trabajo. Como consecuencia de las representaciones obtenidas por estos sistemas, las multiplicidades grandes y pequeñas parecen ser procesadas de distinta forma por los humanos... [Las cantidades más grandes serían aprehendidas gracias a las capacidad de percibir las propiedades de tamaño y las más pequeñas a la capacidad de percibir propiedades de cardinalidad (como en el caso de la subitización)].... Los niños aproximadamente a los cuatro años [una vez que su competencia lingüística se ve enriquecida notablemente] llegan a comprender que esas cardinalidades dan lugar a un orden discreto que queda reflejado en el orden en que los numerales son recitados.... Los datos expuestos muestran que la teoría de los enteros de los preescolares no incluye ni el principio de sucesión ni la infinitud de los enteros... [condiciones asociadas directamente a las propiedades de ordinalidad de los enteros]. (Arrigoni y Caprile, 2016, pp. 55,

56, 63)

Estoy consciente de que las anteriores no son razones concluyentes para la afirmación filosófica de que los números son propiedades de numerosidad (que desde luego, tienen propiedades de ordinalidad). Sin embargo, sí creo que favorecen de manera importante mi postura, ya como lo he dicho en ocasiones anteriores, una explicación que tenga como consecuencia que los *números de los matemáticos* son unos y que *números de los no matemáticos* son otros me parece inaceptable.

Si bien el argumento de Benacerraf no es definitivo para probar que los números no son objetos, lo cierto es que para un defensor de los números-como-conjuntos se vuelve difícil sostener su posición cuando no es capaz de responder a la pregunta *Si los números son conjuntos, entonces dime, ¿cuáles, de entre estos distintos conjuntos, son?* Esto empuja a aquéllos que quieren otorgar a la Teoría de conjuntos un papel privilegiado a decir que si los números no son conjuntos, entonces lo que refleja la práctica matemática es que los números están muy estrechamente relacionados a los conjuntos. Aquí entran las propuestas de Maddy y Kripke, voy a tratar de describir brevemente ambas con el fin de presentar algunas consideraciones particulares y concluiré la sección con un argumento de Mario Gómez Torrente que, considero, es el mejor argumento de por qué los números no podrían ser algún tipo de entidad distinta a las propiedades.

4.2.2. Propiedades de conjuntos

Cuando Penelope Maddy escribió su trabajo *Sets and Numbers* (Maddy, 1981) tenía objetivos muy similares a los que tengo yo en el presente trabajo. Específicamente, Maddy quería dar respuesta a los retos de Benacerraf. El objetivo era dar respuesta a las siguientes preguntas. (i) Si los números son objetivos e independientes, ¿cómo obtenemos conocimiento de ellos? y (ii) Si los números son conjuntos, ¿qué tipo de conjuntos son? La pregunta (i) está relacionada con el reto epistémico de Benacerraf que presenté detalladamente en el capítulo 2, y la pregunta (ii) tiene que ver con el reto de la identificación que presenté en la sección anterior.

El punto de partida de Maddy es lo que ella llamó el realismo teórico conjuntista. Ella presenta esta postura como un realismo acerca del mundo externo (contrario a un fenomenalismo) con tendencias teóricos conjuntistas y toma como inspiración algunos escritos de Gödel. El realismo teorico-conjuntista afirma que los conjuntos son reales y tienen ubicación espacio temporal. Éste es el resultado de defender el realismo desde una vía naturalista: Maddy tiene un fuerte interés por que sus ideas se adecuen a la práctica matemática. Su propuesta, a grandes rasgos, consiste en que los números son propiedades de conjuntos de la misma forma que las longitudes son propiedades de objetos físicos. De esta manera la teoría de números es parte de la teoría de conjuntos, a saber, la parte de la teoría de conjuntos que concierne a las propiedades numéricas de conjuntos finitos. La analogía con las ciencias empíricas refleja nuevamente su naturalismo: la Teoría de conjuntos es el estudio de los conjuntos justo como la física es el estudio de los objetos físicos y el número se encuentra entre las cantidades estudiadas. ¿Cómo responde esta propuesta a los retos (i) y (ii)?

(i) (El reto epistémico). Dado que los números son propiedades de conjuntos, es necesario dividir el reto en dos partes: ¿cómo conocemos a los conjuntos? Y, ¿cómo conocemos sus propiedades? Recordemos que los conjuntos tienen ubicación espacio temporal. Entonces, presuponiendo alguna explicación sobre la percepción y la intuición matemáticas que justifique las creencias particulares acerca de conjuntos de objetos físicos de mediano tamaño y algunos axiomas básicos de la teoría de conjuntos–como extensionalidad y apareamiento–, es fácil ver que los principios teóricos de la Teoría de conjuntos han sido testados a través del tiempo por las exitosas técnicas de la ciencia física. De esta forma queda establecido cierto tipo de relaciones causales con conjuntos finitos de objetos de mediano tamaño, con lo que podemos explicar el conocimiento de las proposiciones de la teoría de conjuntos. Entre estas proposiciones están las proposiciones de la aritmética (pues éstas son *acerca de* conjuntos, específicamente de sus propiedades de medida). Teniendo en mente el reto de Benacerraf (para la aritmética), Maddy agrega un elemento más respecto a la epistemología de conjuntos. La justificación de las creencias acerca de conjuntos está dada por (a) la existencia de instancias de confirmación y la falta de instancias de desconfirmación y (b) por su poder explicativo. El poder explicativo de la Teoría de conjuntos para la aritmética sirve de fuente de justificación para nuestras creencias sobre números. El poder explicativo de la Teoría de conjuntos proporciona la conexión ontológica entre las propiedades-número y los conjuntos (con los que sí mantenemos relaciones causales) que da la respuesta positiva al reto de Benacerraf.

(ii) (El reto de la identificacion). Los números no son conjuntos sino propiedades de conjuntos y la teoría de números es la parte de la teoría de conjuntos acerca de las propiedades numéricas de conjuntos finitos. La razón de que haya múltiples interpretaciones de la teoría de números en la Teoría de conjuntos es que éstas son simplemente, reglas alternativas con las cuales las propiedades numéricas de los conjuntos pueden ser medidas. (Es decir, la diferencia entre los modelos de Zermelo y Von Neumann no es mayor que la diferencia que hay entre la escala Celsius y la escala Fahrenheit donde ambas arrojan distintos valores para una misma temperatura.)

En lo particular, estoy bastante de acuerdo con Maddy y es evidente la similitud entre mi estrategia y la suya para dar una respuesta al reto de Benacerraf. La diferencia relevante radica en la respuesta a la cuestión de propiedades *de qué* son los números. Aquí presento un par de objeciones (independientes de las que en su momento se le hicieron al realismo teórico conjuntista) a esta respuesta de los números como propiedades de conjuntos.

Primero, respecto al punto (ii) que se relaciona de forma directa con las cuestiones propias de la Teoría de conjuntos. Dice Maddy que los diferentes modelos (como el de Zermelo y Von Neumann) son algo así como escalas con la que se miden las propiedades de tamaño de los conjuntos: diferentes escalas dan diferentes resultados para una misma magnitud. Entonces ni los *números de Zermelo* ni los *números de Von Neumann* son en realidad *los* números. Por ejemplo, el número 3 es la propiedad que portan todos los conjuntos como $\{1, \pi, -8\}$, $\{\pitchfork, \triangleright, \circeq\}, \{\{A\}, \{\{\alpha\}\}, z\}$, por supuesto, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ (que es el 3 *de Von Neumann*), etc. Luego, esta propiedad (el 3) es arrojada por alguno de los modelos de la Teoría de conjuntos. Entonces, por ejemplo, $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ tiene la propiedad 3 y esto lo sabemos porque al medir A con el modelo Von Neumann, lo que obtenemos es $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Notemos que en este caso, tanto la propiedad expresada en *la escala Von Neumann* como el conjunto que la ejemplifica son el mismo conjunto A. Esto es algo que no ocurre cuando hablamos de objetos físicos, sus propiedades y las escalas con las que las medimos. No parece haber la analogía metafísica que Maddy pretende con las escalas de medida de la física. Este ejemplo con el conjunto A es como si la escala Celsius fuera en sí misma una temperatura. Entonces, utilizaríamos una temperatura para cuantificar una temperatura dada y, a veces, la temperatura (como escala) arrojaría a la misma temperatura que está siendo medida. La analogía con la física, que es una parte sustancial de la propuesta de Maddy, parece extraña y difícil de sostener.

Respecto a la cuestión (i) tenemos que para mostrar el poder explicativo de la teoría de conjuntos en la aritmética Maddy da el siguiente ejemplo:

Supongamos que alguien se pregunta por qué la multiplicación es conmutativa. Entonces uno podría demostrar la propiedad por inducción a partir de los axiomas de Peano demostrando que

1. $n \cdot 0 = 0 \cdot n$
2. Si $n \cdot m = m \cdot n$ entonces $(n+1) \cdot m = m \cdot (n+1)$

Hacer esto requerirá de algunos lemas [3]. Si tú estás convencido, dice Maddy, de la verdad de los axiomas de Peano y de la robustez del teorema, este ejercicio te convencerá de la conmutatividad de la multiplicación, pero ya que tú estabas convencido de estos elementos desde el principio, la cuestión era en realidad la de saber *por qué* la multiplicación es conmutativa, y la demostración no responde a esta pregunta. Supongamos que tomamos una perspectiva teórico conjuntista para dar respuesta a la pregunta de por qué la multiplicación es conmutativa. Tendríamos una respuesta como la siguiente:

Sean A y B conjuntos. Entonces existe una correspondencia biunívoca entre los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \qquad \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Un rectángulo de n filas cada una con m puntos contiene $n \cdot m$ puntos. Si giramos el rectángulo intercambiando filas por columnas, lo que tenemos es

[3] Mendelson E., 1979 *Introduction to Mathematical Logic*, segunda edición. (Van Nostrand)., pp 123-126.

un rectángulo con $m \cdot n$ puntos. Como el número de puntos del rectángulo no ha cambiado, concluimos que $n \cdot m = m \cdot n$. Este argumento explica por qué la multiplicación es conmutativa, y su capacidad para dar tal explicación da algún apoyo teórico para los axiomas de la teoría de conjuntos involucrados.

En general, el poder explicativo de la teoría de conjuntos para los hechos matemáticos da apoyo teórico para los axiomas de la teoría de conjuntos que se encuentren involucrados en las explicaciones. Maddy no precisa si cualquier hecho matemático es susceptible a estas explicaciones, pero en virtud de su ejemplo, señala que los hechos matemáticos para los que se requieren los principios teóricos de la Teoría de conjuntos, son los principios de la teoría de números.

Pero un ejemplo en el que el uso de elementos teórico conjuntistas explica de algún modo una propiedad aritmética no demuestra que esta estrategia esté disponible en todos los casos. Maddy no da un procedimiento sistemático de cómo dar con estas explicaciones (con la finalidad de brindar la epistemología requerida para los números). Para que esta epistemología fuera satisfactoria, Maddy tendría que decir algo más acerca de cómo obtener los recursos necesarios de la Teoría de conjuntos para brindar una explicación satisfactoria de cualquier propiedad aritmética. La sola relación entre una propiedad de aritmética y una propiedad conjuntista no basta para afirmar que la segunda tiene una función explicativa sobre la primera. Consideremos el siguiente ejemplo.

Definimos el conjunto de los enteros como,

$$\mathbb{Z} = \{[(a,b)]_\sim | (x,y) \sim (a,b) \text{ si y sólo si } x+b = y+a \text{ con } x,y,a,b \in \mathbb{N}\}$$

Definimos la suma ($\hat{+}$) en términos de las clases de equivalencia determinadas por la relación descrita en la condición del conjunto anterior. Así, dados dos enteros $z_1 = [(a,b)]$ y $z_2 = [(c,d)]$ definimos

$$z_1 \hat{+} z_2 = [(a,b)] \hat{+} [(c,d)] = [(a,b) + (c,d)]$$

Donde la suma ($+$) es la suma usual de parejas ordenadas en el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Así $z_1 + z_2 = [(a+c, b+d)]$. Como la suma de números naturales es conmutativa, tenemos que $(a+c, b+d) = (c+a, d+b)$ de donde

$z_1 + z_2 = [(c+a, d+b)] = z_2 + z_1$, con lo que queda demostrado (suponiendo algunos ingeniosos lemas, como diría Maddy) que la suma de números enteros es conmutativa.

De hecho, en un esquema muy simple se puede expresar esta prueba. Cada clase de equivalencia, es decir cada número entero, está representado por los puntos sobre cada diagonal paralela a la identidad en el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para sumar dos números $z_1 = [(a, b)]$ y $z_2 = [(c, d)]$, basta tomar un representante de cada clase y sumarlos: digamos (a, b) y (c, d). El resultado de esta suma será el representante $(a + c, b + d)$, que es el vértice del paralelogramo resultado de desplazar los segmentos imaginarios $\overrightarrow{(0,0)(a,b)}$ y $\overrightarrow{(0,0)(c,d)}$ (cada uno hasta el extremo del otro). Este punto claramente coincide con el vértice del paralelogramo resultado de sumar $(c, d) + (a, b)$, y la diagonal (la clase de equivalencia) $[(a + b, c + d)]$ tendrá exactamente a los puntos resultantes de sumar a los representantes de la clase z_1 con los representantes de la clase z_2.

El carácter de intuitivo o explicativo resulta mucho menos evidente en esta explicación de carácter conjuntista. Ciertamente, la propiedad demostrada es una propiedad de los números enteros (incluyendo a los números negativos). Pero no es que yo esté complicando innecesariamente la situación con la finalidad de contradecir a Maddy, la misma demostración sirve si nos restringimos únicamente a los enteros positivos dados por el siguiente conjunto,

$$\mathbb{Z}^+ = \{[(a, b)]_\sim | a > b\}$$

Donde '$\sim$' expresa la misma relación de equivalencia definida previamente. Claro, aquí la demostración es superflua porque los enteros positivos coinciden con los números naturales y hay demostraciones más directas (y que no requieren presuponer la conmutatividad de la suma en $\mathbb{N}$). Pero de nuevo, Maddy no nos dio un criterio para encontrar las demostraciones que sí cumplen su función explicativa y que están en la base de su epistemología para la aritmética.

Mi principal crítica a esta propuesta de Maddy tiene que ver nuevamente con la inquietud que me generan todas las explicaciones de los números-como-conjuntos (o como entidades dependientes de conjuntos): incluso si concedemos esta cuestión del poder explicativo de la Teoría de conjuntos sobre la aritmética, esta epistemología aplicaría únicamente para el conocimiento aritmético del *matemático profesional*. Es difícil imaginar el caso de un hablante promedio que considere más fácil de comprender un *hecho* de la Teoría de conjuntos que un hecho acerca de los números mismos. Como lo he dicho anteriormente, cualquier explicación que tome por separado los usos puramente matemáticos, de los usos cotidianos de la aritmética, me parece que debería de ser rechazada.

Concluyo esta sección señalando que con lo que me quedo del argumento de Maddy es con la idea de que los números son propiedades y que la justificación epistémica requerida por Benacerraf puede ser dada por las relaciones que, en principio, podemos mantener con sus portadores.

4.2.3. Sucesiones de conjuntos

Los números de Kripke (Kripke, 1992) son el resultado de buscar una respuesta a la pregunta de cómo podemos explicar nuestras actitudes *de re* hacia los números naturales. En otras palabras, Kripke trata de explicar cómo es que estamos en aparente contacto con los números, dejando nuevamente manifiesta la preocupación epistémica de dotar de justificación a nuestras creencias aritméticas. Después del análisis conceptual, Kripke presenta a los números como sucesiones ordenadas de objetos correspondientes a los dígitos en su representación en alguna base; las características de la notación numérica resultan relevantes para la cuestión acerca de los números mismos (la notación que Kripke tiene en mente por defecto es una notación decimal arábiga). La conexión entre la notación numérica y nuestro conocimiento del número está dada por una propiedad que, de acuerdo a Kripke, tienen las notaciones numéricas posicionales. Esta propiedad es la de ser inmediatamente reveladora. Aquí un ejemplo de cómo las notaciones numéricas son inmediatamente revelatorias del número. Consideremos el numeral '36,518'. Al ver este signo, gracias a la estructura que rige la notación arábiga-decimal (y al entrenamiento que hemos recibido sobre su uso), el número es aprehendido (revelado) de manera inmediata. Por ejemplo, que el dígito 3 esté en el quinto lugar de la sucesión (3,6,5,1,8) (contando de derecha a izquierda) expresa que '3' está ahí por el número de decenas de millares que corresponde al número 36,518; esta cuestión (estructural) del número no es así revelada por la expresión 'Treinta y seis mil quinientos dieciocho'. Entre mayores son los números, más claro es el contraste entre la revelación que obtenemos de un numeral arábigo y uno léxico (siendo la del numeral arábigo la más inmediata, con sus respectivas limitaciones para los números mucho más grandes).

Entonces, la tesis central de Kripke (y la respuesta al reto epistémico) es que la notación revela la estructura de los números que dicha notación denota. Diré algo más sobre los detalles de esta tesis para explicar cómo entra la Teoría de conjuntos en esta historia. La siguiente es mi interpretación de la definición de números de Kripke,

Definición 4.2.4 *Los números* denotados por un sistema finito de base n son *sucesiones finitas de objetos* (por ejemplo, *dígitos*) denotados por *'x_0'* hasta *'x_n'* ordenados por longitud y lexicográficamente, donde las sucesiones no pueden comenzar con la denotación de *'x_0'*.

Para que esta definición cobre sentido todo lo que hay que hacer es encontrar la manera de hablar de sucesiones y dígitos sin apelar a números (con la finalidad de evitar obtener una definición circular). Veamos cómo queda el modelo para la notación en base 10.

Definición 4.2.5 *Los números* denotados por el sistema decimal son *sucesiones finitas de objetos* denotados por *' 0_{10}' hasta ' 9_{10}'* ordenados por longitud y entonces lexicográficamente, donde ninguna sucesión comienza con la denotación de *' 0_{10}'*.

Pero, ¿cuáles son *esos objetos* denotados por los dígitos? Aquí es donde entra la Teoría de conjuntos.

Comenzamos con dos conjuntos I y J.

- $I = \{x, xx, xxx, \dots\}$
- $J = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots \{\{\{\{\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}\}\}\}\}\ \}$

I es cualquier conjunto bien ordenado, por su parte, J es cualquier conjunto que permita representar dígitos; esto es, un conjunto doblemente bien ordenado (lo que significa que J tiene únicos primer y último elemento). En este ejemplo tenemos que, en los numerales decimales arábigos:

‘ 0_{10}’ está por $\emptyset$,
‘ 1_{10}’ está por $\{\emptyset\}$,
$\ldots$, y
‘ 9_{10}’ está por $\{\{\{\{\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}\}\}\}\}$.

Ahora definimos una función $f : I \to J$ que asigne índices para cada objeto denotado por un dígito. Por ejemplo, el numeral ‘102_{10}’ denotaría a la función (es decir, a la sucesión) dada por,

$f : I_{|\{x,xx,xxx\}} \to J$, cuya imagen queda descrita como,

$f(x) = \{\emptyset\}$,
$f(xx) = \emptyset$ y
$f(xxx) = \{\{\emptyset\}\}$.

El numeral ‘102_{10}’ revela (inmediatamente) la estructura dada por el conjunto de parejas ordenadas $\{(x, \{\emptyset\}), (xx, \emptyset), (xxx, \{\{\emptyset\}\})\}$ o, expresado ya como estructura, $\langle\{\emptyset\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}\}\rangle_{10}$.

Esta propuesta tiene, a mi parecer dos fallas epistemológicas importantes (recordemos que el propósito de la teoría era el de ofrecer una explicación epistemológica). Primero, una consideración particular: nosotros sabemos que

$$102_{10} = 1100110_2$$

Según la teoría de Kripke estos dos numerales de hecho denotan deferentes cosas. Ya expliqué qué es lo que denota ‘102_{10}’, en este modelo tendríamos que 1100110_2 denotaría (y revelaría) algo como el conjunto,

$\{(x, \{\emptyset\}), (xx, \{\emptyset\}), (xxx, \emptyset), (xxxx, \emptyset), (xxxxx, \{\emptyset\}), (xxxxxx, \{\emptyset\}),$
$(xxxxxxx, \emptyset)\}$. Es decir, la estructura

$$\langle\{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\rangle_2$$

Donde tenemos una función indicadora distinta, con codominio el conjunto de los dígitos de esta base ($J' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$).

Kripke aduce que el fenómeno de la revelación inmediata (cuáles son los números que nos serán revelados) dependerá de en qué sistema hemos sido entrenados (en cualquier caso, todos esos *diferentes sistemas numéricos* sirven por igual para los propósitos de los números naturales). Aquí la cuestión es que no hay razón para suponer que todos hemos sido entrenados en un único sistema numérico que nos revele aquéllos que serán *nuestros números*. Pensemos en una persona que ha sido igualmente bien entrenada tanto en base 10 como en base 2. Esta persona cree que '102_{10}' y '1100110_2' tienen el mismo referente. Bajo la explicación de Kripke, ella está equivocada; cada numeral de éstos tiene un referente distinto. Es decir que la persona está en contacto directo (*acquainted*) con los números vía sus lenguajes numéricos, pero al mismo tiempo está equivocada al pensar que ambas expresiones denotan al mismo número.

En segundo lugar, quiero presentar la misma consideración general que he venido mencionando a lo largo de la sección: ¿Cómo podríamos dar una epistemología para *la aritmética* con base en *la Teoría de conjuntos*, cuando una gran mayoría de los hablantes muestra un nivel de competencia más inmediato respecto a la primera que respecto a la segunda? Es difícil creer que nuestra, aparentemente simple, práctica aritmética ordinaria es acerca de todo este complicado bagaje teórico. Creo que cualquier explicación de la práctica aritmética ordinaria debería reflejar su característica simplicidad.

La objeción respecto a la Teoría de conjuntos podría resolverse de distintas formas. Por ejemplo, diciendo que los dígitos están por propiedades numéricas de cardinalidad. Así, '0' está por la propiedad *ser cero*; '1' está por la propiedad *ser uno*, etc. Dado que la competencia para distinguir pluralidades de entre 0 y 9 individuos se desarrolla a muy temprana edad, y se puede explicar vía nuestro contacto directo con pluralidades pequeñas, podríamos decir que nuestra familiaridad con estas pluralidades nos brinda el acceso epistémico a los dígitos. Posteriormente, siguiendo la línea de Kripke, al desarrollar competencia en el uso de las secuencias de dígitos que constituyen los numerales, podemos explicar cómo tenemos conocimiento de números más grandes.

Señalar la notación como *el puente* que conecta al número con el hablante suena a una muy buena opción. Después de todo, la morfología de una notación numérica dada, parece reflejar que el número mismo está estrechamente conectado con el numeral que lo denota. Además, es la competencia en el uso de esta morfología la que le permite al usuario adquirir conocimiento sustancial acerca de los números. El problema, como ya vimos, es que esto tiene la muy implausible consecuencia de que diferentes notaciones denotan diferentes números. Suena a un defecto grave de la teoría el que un hablante igualmente entrenado en dos notaciones distintas, tenga pleno conocimiento de los números que cada notación denota, pero que a la vez esté equivocado en pensar que esas dos notaciones refieren a los mismos números. Este problema evidencia que la solución epistémica no ha resultado satisfactoria.

4.3. Sobre la esencia

Como ya lo mencioné al principio del capítulo, el argumento de Mario Gómez Torrente en 'On the Essence and Identity of Numbers' constituye una parte muy importante del presente proyecto. El artículo presenta varios resultados que favorecen la idea de que los números son propiedades atributivas de cardinalidad de pluralidades. Pero la principal idea (teniendo en mente mis propósitos) obtenida de este artículo es que un número natural n tiene de forma esencial la propiedad de ser tenido por cualquier pluralidad de n individuos.

Sabemos que las propiedades pueden ser más escurridizas que los objetos al momento de su identificación. El porqué de este contraste no es ningún misterio: la manera en la que identificamos objetos es a través de sus propiedades. Pero las propiedades son abstractas y también las tendremos que identificar vía sus propiedades. Entonces, para identificar una propiedad C primero hay que identificar las propiedades de C a las que podemos acceder con el propósito de obtener información sobre C misma (esto podría requerir de una reflexión más compleja que la que se require para la identificación de un objeto particular). De este modo, sosteniendo la idea de que los números son propiedades de cierto tipo, he propuesto como estrategia realizar un análisis en torno a los portadores de estas propiedades: quiénes serían estos potenciales portadores y cómo se daría el fenómeno de ejemplificación entre ellos y la propiedades que serían los números. Sobre la naturaleza de los portadores, la conclusión es que éstos tienen que ser pluralidades *como tales*. El camino para llegar a esta conclusión fue mostrar que hay relaciones (en particular propiedades) que son, en su naturaleza, plurales; si existen propiedades plurales entonces las propiedades numéricas tienen que estar entre ellas. El siguiente paso del análisis fue ver de qué manera se ejemplifican estas propiedades numéricas. Lo que nos llevó a la conclusión de que esta ejemplificación se da de manera estricta en pluralidades de n individuos: mientras que hay propiedades plurales que son tolerantes a la ejemplificación por pluralidades de distintas cardinalidades, las propiedad numérica n admite únicamente pluralidades de multiplicidad n. Los individuos de la pluralidad no tienen que tener ninguna característica en particular, pero la pluralidad *como tal* debe ser de multiplicidad n.

Hasta aquí el panorama se ve alentador: *ser* n es la propiedad plural susceptible de ser portada por pluralidades de estrictamente n individuos. Sin embargo, aún queda una brecha por llenar: ¿En virtud de qué identificamos al número n con la propiedad *ser* n (de acuerdo a la definición 3.3.4)? Aquí es donde entra el argumento de Gómez-Torrente (2015). La respuesta a esta pregunta proporciona por un lado, un elemento crucial en la aproximación (que ya he venido utilizando) a una especificación que nos permita identificar la propiedad que un número dado es. Por otro lado, el argumento muestra que otras propuestas no cumplen la propiedad de ser parte de lo que se requiere para dar una especificación de n, dando así razones (que se suman a las que presenté en las secciones anteriores) de por qué los números naturales no podrían ser los descritos en los modelos conjuntistas (como los de Von Neumann y Zermelo) ni los que proponen otras teorías filosóficas como la de Kripke o el estructuralismo fundado en las ideas del problema de la identificación de Benacerraf.

'Sean lo que sean los números, un número natural n debe–en virtud de su naturaleza–ser susceptible de *ser tenido* por cualquier pluralidad de n individuos'. Como lo señala Gómez Torrente, este principio es muy razonable. Esto queda manifiesto a partir de lo que quiere decir *ser tenido*. El verbo 'tener' puede ser utilizado para objetos o para propiedades, y con base en esto, su connotación es hacia la posesión o hacia la ejemplificación. Por ejemplo, hay hechos como *tengo una pelota* (o *tengo una multa*, para usar un objeto abstracto) y hechos como *tengo mal carácter*, o *tengo un metro y medio de altura*. En los ejemplos del segundo tipo, parece que 'tener' expresa la ejemplificación de una propiedad que, de algún modo, no es una propiedad externa al portador. Los ejemplos del primer tipo parecen respuestas adecuadas a la pregunta '¿*Qué tienes* (en la mano, en el expediente, en la bolsa)?' Mientras que los del segundo tipo, responden a otro tipo de pregunta, por ejemplo '¿Cómo es tu personalidad?' o '¿Cuál es tu estatura?' La idea de que el número n sea tenido por una cierta pluralidad P se refleja en que 'n' es la respuesta a pregunta '¿Cuál es el número de P?' Para usar el ejemplo que pone Gómez Torrente, '¿Cuál es el número de lunas de Júpiter?' El principio es evidente y apunta a que la propiedad de *ser tenido* está de algún modo relacionada con la propiedad de *ser ejemplificado* por una pluralidad. Mostrar que *ser tenido (por pluralidades) para el número* n es simplemente ser *ser ejemplificada (por pluralidades) para la propiedad ser* n, y que esta relación entre números y pluralidades es esencial (en un sentido que explicaré a continuación), cerrará la brecha mostrando que es adecuada la identificación de n como la propiedad *ser* n.

Llamemos R a la relación entre números y pluralidades dada por el siguiente criterio: $(n, P) \in R$ si n es tenido por P. La afirmación de Gómez Torrente es que el número n tiene de manera esencial la propiedad de estar relacionado bajo R con pluralidades arbitrarias de n individuos. La noción de propiedad esencial que está siendo usada es la de Kit Fine (1994,1995). En esta noción queda establecido que mientras que todas las propiedades esenciales son necesarias al individuo que las porta, el converso no se cumple. Es decir que hay propiedades que son necesarias pero no esenciales. El ejemplo típico para ilustrar esta distinción es el de la propiedad que tiene Sócrates de ser el único miembro del conjunto {Sócrates}. Esta propiedad es necesaria pues no hay forma de que Sócrates no sea el único miembro del conjunto singular que lo tiene como miembro. Pero la propiedad de ser el único miembro de {Sócrates} no es esencial a Sócrates, y aquí está la idea clave: *ésta no es una propiedad que Sócrates debe de tener en virtud de ser el objeto que de hecho es*. En contraste, una propiedad esencial a Sócrates (como *ser humano*) es una propiedad que Sócrates debe tener en virtud de ser el que él es. Esto se refleja en el hecho de que ser humano es una propiedad que deberá aparecer en una especificación de lo que Sócrates es. En contraste, la propiedad de pertenecer al conjunto singular {Sócrates} no tiene por qué aparecer en alguna especificación de lo que Sócrates es.

Estar relacionado bajo R con cualquier pluralidad arbitraria de n individuos debe aparecer en una especificación de los que el número n es (por ejemplo en la definición 3.3.4). Esto quiere decir que el número n no pudo haber sido el que es, si no fuera el caso que para cualquier pluralidad P de n individuos, n es el número de P. La propiedad que tiene n de ser el número de P para cualquier pluralidad arbitraria P de n individuos no sólo es una propiedad que es necesaria sino que además es una propiedad que n debe tener en virtud de ser lo que de hecho es.

Llamemos $\mathcal{P}_n$ a la propiedad del número n de ser tenido por pluralidades arbitrarias de n individuos. La propiedad $\mathcal{P}_n$ es esencial a n y por tanto, es parte de su especificación. Esto abre las vías a una explicación epistemológica que explique el conocimiento aritmético tanto en contextos matemáticos como no matemáticos. Como ya lo mostró Gómez Torrente, los números de Zermelo, los de Von Neumann, los de Kripke y otros más propuestos en la literatura, no poseen la propiedad $\mathcal{P}_x$. En cada una de las teorías mencionadas podemos ubicar una propiedad que, al igual que $\mathcal{P}_n$, sería parte de la especificación de n. Por ejemplo, en el modelo de Zermelo, la propiedad de n de tener a $n-1$ como miembro sería parte de su especificación. Claramente, tener a $\{\{\emptyset\}\}$ como elemento, no sólo es una propiedad necesaria de $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ sino también esencial. Así, parte de la especificación de 4 (que es simplemente el conjunto $\{\{\{\emptyset\}\}\}$) es la propiedad de tener a 3 (es decir, a $\{\{\emptyset\}\}$) como miembro. Si los números naturales fueran los números de Zermelo, entonces todo el conocimiento aritmético, en particular el que se da en contextos no matemáticos, sería acerca de estos números. De aquí se sigue que un usuario competente del número 4 es, de hecho, un usuario competente del conjunto $\{\{\{\emptyset\}\}\}$. Pero este usuario, pese a ser competente, es completamente ciego ante la propiedad esencial que tiene 4 de tener a 3 como miembro. En cualquier especificación que este usuario nos dé del número 4 (y tiene que ser capaz de darnos alguna, pues él *conoce* al número 4), difícilmente aparecerá la propiedad de tener 3 como miembro. Este *test* parece que será incluso más complicado de pasar para los números de Von Neumann, de Kripke, y otros más complicados.

El *test* enunciado en el párrafo anterior no quiere decir que cualquier usuario competente de los números debería ser capaz de brindar su definición, ni siquiera de identificar la mayoría de sus propiedades esenciales. Lo que trato de señalar es que, de alguna manera, tiene que haber una conexión entre las propiedades esenciales que posee una entidad y los hablantes que tienen conocimiento de ella. En el caso particular de los números, cabe recordar que la competencia numérica se comienza a adquirir desde muy temprana edad. Si le preguntamos a un niño (que ya haya desarrollado cierto nivel de competencia aritmética) qué es el número n, es claro que éste no va a señalar entre sus propiedades a $\mathcal{P}_n$. Pero tampoco parece que haya un aislamiento total entre las propiedades con las que el niño identifica a n y $\mathcal{P}_n$ (como sí lo hay con las propiedades que especifican al n de Zermelo).

La introducción de los números a los niños viene de la mano con la identificación de éstos con distintas pluralidades (como dedos, canicas, manzanas, ábacos, etc.). Así se van especificando los números en relación con la propiedad que tienen de ser tenidos por algunas pluralidades. Notemos que esta propiedad (la de *ser tenido por algunas pluralidades*) no es mas que una versión débil de $\mathcal{P}_n$. La introducción de un número, digamos 5, apela a esta propiedad de ser tenido por ciertas pluralidades: *Cinco es el numero de dedos en tu mano*; *cinco es el numero de dedos en tu pie*; *cinco es el numero de vocales en el abecedario, y de hecho, 5 es el número de cualesquiera cosas a, b, c, d y e que sean todas distintas entre sí.* Esto, me parece, es una gran virtud de la presente explicación. En contraste con muchas otras que parecieran tener como consecuencia el hecho, que ya he mencionado como inaceptable, de que los matemáticos tienen conocimiento de unos números y el resto de los hablantes tienen conocimiento de otros.

Además de que el número n tiene la propiedad esencial de estar relacionada bajo R con cualquier pluralidad de n individuos, también tenemos que es esencial a una pluralidad dada P de n individuos, el tener a n como su número. En palabras de Gómez Torrente,

> Dadas n cosas, la propiedad de tener a n como su número es parte de la esencia de esas cosas tomadas como una pluralidad; cualesquiera cosas que tengan a un número diferente de n como su número serán diferentes (como pluralidad) de las primeras cosas, y no meramente como una cuestión de lo que es necesariamente verdadero de esas cosas tomadas como una pluralidad, sino en virtud de lo que tomamos como la naturaleza de la pluralidad misma.

De esta forma, tenemos que P tiene (como parte de su especificación como pluralidad) la propiedad de tener a n como número. En el artículo, Gómez Torrente muestra que la naturaleza del número n de Zermelo nada tiene que ver con que P tenga (como parte de su especificación como pluralidad) la propiedad de tener a n como número (lo mismo ocurre con el resto de los ejemplos que aborda). Pero si tomamos a n como la propiedad *ser n* entonces ésta sí que está relacionada de manera adecuada con la pluralidad dada. La propiedad que esencialmente tiene una pluralidad P para ser lo que es (como pluralidad) es la de la de ser n individuos.

No es necesario que haya alguna propiedad compartida por los individuos de una pluralidad con el fin de que ésta sea la pluralidad que es. Entonces, P tiene, como parte de su especificación como pluralidad, la propiedad de tener a n como número. También tenemos que P tiene, como parte de su especificación como pluralidad, la propiedad de *ser n*. Bajo estas consideraciones, el mejor candidato para ser el número n es la propiedad *ser n*. El número n no es sino la propiedad de multiplicidad que porta cualquier pluralidad de n individuos.

En una sección previa ya había presentado algunas razones que favorecen la idea de los números como propiedades de cardinalidad por encima de la de los números como propiedades de orden. Sugerí que, por ejemplo, al estructuralismo se le puede ver como una teoría de los números-como-propiedades ordinales. Donde el número n es la propiedad *ser la enésima posición en cualquier sucesión que mantenga la estructura de los números naturales* (o *ser la* $(n+1)$-*ésima posición*, si consideramos al 0 en la primera posición). Puede que sea necesario dar una construcción completa de una teoría filosófica de los números como propiedades de orden para dar una objeción contundente. Sin embargo, no es difícil ver que el argumento que da Gómez Torrente en contra de que el número n sea el enésimo lugar en la estructura ω[4] se podría generalizar a cualquier teoría de los números como propiedades de orden. Simplemente porque cualquier teoría de este tipo será susceptible del señalamiento general de que una propiedad de orden (como *ser el enésimo lugar en la sucesión de números naturales*) no puede estar en la relación apropiada de acuerdo a la relación en la que se encuentra el número n con pluralidades arbitrarias de n individuos.

Siguiendo la línea de los ejemplos previos, Gómez Torrente señala que no existe una propiedad que relacione a la propiedad *ser la enésima posición en*

[4]En su artículo, Gómez Torrente describe la estructura ω como una propiedad que es satisfecha por un sistema de objetos siempre que éste constituya una progresión. Es decir, un sistema de objetos con un orden lineal discreto sobre ellos que tiene un primer elemento, no está acotado superiormente y dado cualquier elemento a del conjunto total, el conjunto de todos los que son menores que a es siempre finito.

la estructura ω con pluralidades arbitrarias de n individuos y que sea parte de la esencia de *ser la enésima posición en la estructura* ω. Ser parte de la relación que llamamos R no parece intuitivamente ser parte de la especificación de lo que es ser la enésima posición en la estructura ω. R no es parte de las propiedades que ser la enésima posición en la estructura ω debería de tener para ser lo que es. La propiedad *ser la enésima posición en la estructura* ω, a diferencia del número n (es decir, de la propiedad *ser* n) tiene su naturaleza determinada independientemente de sus relaciones potenciales con pluralidades arbitrarias de n individuos. Por otro lado, la propiedad *ser la enésima posición en la estructura* ω no es parte de la esencia de una pluralidad P (sea o no P una pluralidad de n individuos). Alguien podría tratar de defender que sí lo es, por ejemplo, diciendo que está en la esencia de P que el número de P es una posición anterior a la enésima posición cuando a P le quitamos un individuo. Este razonamiento es incorrecto, en primer lugar porque si P tiene un individuo menos, entonces ya no es la misma pluralidad como tal. Entonces tendríamos que otra pluralidad P' es a la que le corresponde *ser la (n-1)-ésima posición en la estructura* ω. Desde luego que hay una relación entre P y P', y de aquí podemos derivar que hay una relación entre la pluralidad P y las propiedades ordinales de la estructura ω. Sin duda la hay, pero es difícil creer que esta relación sea esencial en el mismo sentido que la hay entre P y *ser n*. A la pluralidad P le podemos asociar muchas propiedades ordinales, pero ninguna de ellas parece ser necesaria para una especificación de P, en el mismo sentido que no parece necesario ser miembro del conjunto $\{$*Sócrates*$\}$ para una especificación de lo que Sócrates es.

En conclusión, los números no son (ni podrían ser) los números de Zermelo, ni los de Von Neumann, ni los de Maddy. Los números son propiedades, y no son propiedades de orden, son propiedades plurales de cardinalidad. Esto, en conjunción con los resultados del capítulo anterior, brinda respaldo a la tesis de los números como propiedades de numerosidad del modo que lo sugerí en la definición 3.3.4. Con estos resultados en mente, el siguiente capítulo tiene como propósito mostrar que la presente propuesta da una respuesta satisfactoria al reto epistemológico (para el caso de la aritmética) al que están sometidas las teorías filosóficas realistas sobre las matemáticas.

Capítulo 5

Una epistemología para la aritmética

5.1. Introducción

La propuesta de los números como propiedades tiene variados beneficios teóricos; brinda respuestas satisfactorias a muchos de los enigmas filosóficos que tradicionalmente han rodeado a la aritmética. Uno de estos enigmas (el que me he propuesto resolver en este trabajo) es el epistemológico. El problema ha sido presentado desde diferentes perspectivas. Siendo, probablemente, la más conocida la de Benacerraf. El enigma surge a partir de un aparente contraste entre la naturaleza metafísica de las entidades sobre las que hablan los discursos sobre objetos concretos y las entidades sobre las que habla el discurso aritmético. La naturaleza de los objetos en el primer caso, nos permite interactuar con ellos de tal forma que podemos acceder a las verdades que de ellos hablan. La aparente disanalogía entre ésta y la naturaleza que supuestamente tendrían los números si existieran (siendo entidades abstractas) tendría como consecuencia la imposibilidad de acceder a las verdades aritméticas. Este razonamiento ha conducido a muchos filósofos a la conclusión de que los números no pueden existir.

La idea de que todo lo existe es concreto es difícil de sostener. En particular, los objetos concretos tienen propiedades y éstas son entidades abstractas. Nuestro conocimiento no puede limitarse al conocimiento de objetos concretos porque éste en sí mismo requiere del conocimiento de entidades abstractas (como las propiedades). Así, si los números son propiedades, *pese a su abstracción*, no hay tal brecha metafísica entre la realidad aritmética y la realidad no matemática. En consecuencia, el conocimiento aritmético no es más misterioso que el conocimiento sobre otras propiedades; y el conocimiento sobre propiedades es tan misterioso como lo puede ser cualquier otro tipo de conocimiento. En este capítulo presento el desarrollo de estas ideas, llegando a la conclusión de que el conocimiento de propiedades–en particular de las propiedades que son los números–se da en virtud de nuestra habilidad para atribuirlas correctamente y de encontrar otras propiedades definitorias que nos ayuden a identificar estas propiedades. Estas habilidades se desarrollan en último término mediante nuestras interacciones con las entidades que las propiedades admiten como argumento. Para decir algo más sobre el conocimiento aritmético, presentaré algunos recursos que desde las ciencias cognitivas apoyan la idea de que la adquisición de los humanos de los números comienza mediante las interacciones que tienen los niños–prominentemente, a través del conteo–con pequeñas pluralidades de objetos físicos.

5.2. Conocimiento de objetos y de propiedades

Tenemos conocimiento de objetos. Sabemos cosas como que Juan es alto, que el foco está caliente y que la mesa frente a mí está constituida por partículas. Las atribuciones de este conocimiento relativo a objetos, requieren tener cierto conocimiento sobre las propiedades involucradas con la finalidad de saber que las respectivas predicaciones son correctas. Tener conocimiento de objetos va de la mano con tener conocimiento de propiedades. Sabemos que la propiedad de ser bajo no tiene a Juan como ejemplo, que la propiedad que ejemplifica el foco constituye una razón para no tocarlo directamente y que estar constituido por partículas es una propiedad que la mesa que está enfrente de mí preservará siempre que ella exista. Tenemos conocimiento de objetos, y por tanto de propiedades, tanto necesario como contingente. Sabemos que Juan bien pudo no haber sido alto. De aquí se sigue que es contingente también de la propiedad *ser bajo* el no tener a Juan como ejemplo. Por otro lado, es necesario–en cualquier mundo que exista la mesa–de la propiedad *ser constituido por partículas* el ser portada por la mesa que está enfrente de mí.

Además de las observaciones anteriores, podemos ver que tenemos conocimiento sobre las propiedades que no está directamente relacionado con sus instancias particulares. Sabemos que la propiedad de ser alto puede ser relativa al contexto: se puede ser alto para ser un *jockey* pero no para ser jugador de baloncesto (aunque la propiedad de tener un altura dada x es independiente en este sentido). Sabemos también que el rojo es un color básico en la base de colores RGB, y que la sabiduría es una propiedad que involucra conocimiento e inteligencia. Es evidente que, debido a su abstracción, hay dificultad en explicar nuestro conocimiento de propiedades, pero resulta igualmente evidente que excluir el conocimiento de propiedades nos deja sin una explicación también para el conocimiento de los objetos concretos más comunes. Si los números son propiedades y ofrecemos una epistemología para las propiedades que los abarque, tomar una postura antirrealista para negar el conocimiento aritmético tendrá como consecuencia negar también conocimiento acerca de otras propiedades y con ello, negar incluso el conocimiento de objetos comunes introduciendo dificultades para casos en los que las adscripciones de conocimiento resultan mucho menos controvertidas.

Al revisar la literatura en epistemología uno encuentra que hay poco trabajo dirigido específicamente al conocimiento de propiedades. El acceso a particulares parece menos misterioso que el acceso a universales. Dada una oración P de la forma $P = F(x)$ (donde x es un objeto y F la propiedad predicada por P), la atribución del conocimiento de P a un cierto agente A, suele explicarse en términos del tipo de contacto que A tiene con x. Lo que parece perderse un poco de vista es que, al tener A algún tipo de contacto con x–que valida la atribución del conocimiento de P–, el agente tiene que estar también de algún modo relacionado con F (pues F es la propiedad de x que resulta involucrada en el conocimiento de P). En estos términos, conocer la proposición P no es mas que saber que $F(x)$. Entonces, el conocimiento de P involucra saber algo sobre x, saber algo sobre F y saber algo sobre la ejemplificación de F en x. Suponiendo que tenemos conocimiento de P podemos afirmar que sabemos algo relacionado con x y que sabemos algo relacionado con F. Es claro que en este punto no podemos asegurar que A conoce la propiedad F en su condición de universal, pues el conocimiento de P podría darse incluso con un somero entendimiento de algunas características de F.

En el párrafo anterior utilicé el término 'conocimiento' de dos formas distintas. En el caso de P estamos considerando el conocimiento proposicional. Por muy controvertido que sea este tipo de conocimiento, hay bastantes puntos de acuerdo sobre qué es de lo que estamos hablando. Si es conocimiento proposicional, se entiende que es acerca de proposiciones y aunque no haya consenso general sobre lo que es una proposición, hay una idea nuclear intuitiva que es compartida por la mayoría de los filósofos. En esta idea nuclear compartida están involucradas de algún modo nociones como la de valor veritativo. Por otro lado, también mencioné el conocimiento de objetos y el conocimiento de propiedades. Éste es un conocimiento de entidades (concretas o abstractas) que con frecuencia involucra conocimiento *de re*. En este caso se dificulta un poco el análisis; ya no parece haber una idea nuclear más o menos robusta teóricamente que sea compartida por las mayoría de las concepciones. En contraste con el conocimiento proposicional, al pensar en el conocimiento de *cosas* no se nos vienen a la mente, al menos de manera inmediata, elementos teóricos (como las nociones de creencia o de valor de verdad) que sirvan como guía del análisis. Para hablar sobre nuestro conocimiento de los números (como las entidades reales que creemos que son) habrá que empezar prácticamente desde cero. Es necesario clarificar por principio de cuentas lo que significa tener conocimiento de una entidad dada.

¿Cuándo conocemos un objeto? Esta pregunta no es fácil de responder, pues incluso para los objetos más simples es complicado dar descripciones exhaustivas, definiciones precisas o algún otro recurso que, junto con una buena epistemología, arrojen una respuesta completamente satisfactoria. El conocimiento que tenemos acerca de los objetos (y también de las propiedades) de algún modo se relaciona con nuestra capacidad de identificarlos. Sólo por poner un ejemplo, pensemos en el ejemplar concreto de una cierta planta. Hay mucho conocimiento que acerca de esa planta se puede tener: un botánico tendrá cierto tipo de conocimiento, un jardinero puede tener otro, una vendedora de plantas quizá tenga algún conocimiento diferente de los anteriores. ¿Cuándo *realmente* se conoce a la planta? Es una cuestión compleja, cada uno de los individuos se relaciona epistémicamente de forma distinta con ella. Pero hay un aspecto que se puede destacar de todas estas relaciones epistémicas: decimos que estas personas tienen conocimiento de la planta en la medida en que son capaces de identificar algunas (quizá una gran cantidad) de sus propiedades y distinguirla de los objetos que no son *esa* planta. El conocimiento de A de un objeto x se relaciona fuertemente con la capacidad de A de identificar a x. Esto involucra mucho conocimiento proposicional relacionado con x. Éste a su vez requiere que A tenga cierto conocimiento de las propiedades de x. Esto es, A tiene que estar en posición de identificar las propiedades para entonces, ser capaz de atribuirlas correctamente y de este modo, poder identificar a x. La cuestión ahora es cómo A identifica estas propiedades.

¿Cuándo conocemos una propiedad? Tomando como referencia el razonamiento del párrafo anterior, tenemos que, así como conocer un objeto tiene que ver con identificar qué propiedades podemos atribuirle, *conocer una propiedad tendrá que ver con nuestra capacidad de atribuirla correctamente a sus posibles portadores.* El conocimiento acerca de individuos está, de algún modo, predeterminado por el tipo de relaciones que podemos mantener con éstos, y estas relaciones se suelen dan en virtud de las propiedades que dichos individuos ejemplifican. Así, el proceso de adquisición de conocimiento acerca de un individuo involucra estar en algún tipo de relación con sus propiedades: el conocimiento de que la planta es verde requiere relacionarse de cierta forma con la propiedad *ser verde.* Aunque adquirir conocimiento sobre la propiedad *verde* (o *ser verde*) sea un fenómeno un tanto lejano al hecho de saber que una planta en particular es verde, estos dos estados epistémicos no pueden ser absolutamente independientes. Consideremos la siguiente oración,

(1) Mónica es sabia.

Esta oración tiene exactamente las mismas condiciones de verdad que la oración,

(2) La sabiduría es una propiedad que tiene Mónica.

aunque las oraciones hablen *acerca de* cosas distintas ((1) habla *acerca de* Mónica y (2) habla *acerca* de la sabiduría). El conocimiento de (1) no requiere nada más del mundo que lo que se requiere para tener conocimiento de (2). Desde luego, una exigente epistemóloga no va a conceder que conocemos la propiedad *ser sabia* por el solo hecho de que estas atribuciones sean correctas. Pero la insatisfacción no es menor para el caso de Mónica. Nuestra epistemóloga tampoco cree que, el que (1) exprese una atribución correcta, sea suficiente para decir que se conocemos a Mónica. ¿Por qué no basta la verdad de (1) para asegurar el conocimiento de Mónica? Básicamente, porque esta atribución es insuficiente para identificar al individuo: hay muchos individuos diferentes que cumplen esta propiedad. Conocer a Mónica tiene que ver con atribuirle correctamente propiedades que nos permitan identificarla. Estas propiedades pueden ir desde saber que Mónica es el referente de 'Mónica', hasta saber que Mónica es la chica alta que se sienta cada lunes a mi derecha en la clase de lógica. Tener conocimiento de (1) pone a nuestra disposición *ser sabio* como una de las propiedades que me permiten identificar a esta entidad. ¿Qué hace falta para conocer a Mónica? Estar en posición de atribuirle propiedades además (o en vez de) la sabiduría que nos permitan identificarla para los fines relevantes del contexto de nuestro interés. Ahora la cuestión es qué hace falta para conocer la propiedad *ser sabio*.

Si el mero conocimiento de (1) parece insuficiente para decir que conocemos a Mónica, el conocimiento de (2) se queda aún más corto para decir que conocemos la sabiduría (la propiedad de ser sabio). Pero la tradición cientificista, temerosa siempre del reconocimiento de entidades abstractas como los universales, dirá que (2) no sólo se queda corto para brindar conocimiento de la propiedad *ser sabio*, dirá que de hecho, no contribuye en nada. Si esto es así, y nuestro conocimiento de hechos como (1) y (2) en nada se relaciona con el conocimiento de la propiedad *ser sabio*, entonces es un completo misterio cómo es que somos capaces de hacer las atribuciones correctas a entidades como Mónica. De una forma inexplicable, nos relacionaríamos adecuadamente con las propiedades en virtud de ser capaces de atribuirlas correctamente a sus portadores.

El modo en el cual nos relacionamos con las propiedades, de tal forma que eventualmente adquirimos la capacidad de atribuirlas correctamente a los objetos, es mediante el contacto con sus instancias. La habilidad de atribuir correctamente una propiedad F a las entidades que la ejemplifican es la que nos conduce a un estado de conocimiento de F. Así como conocemos a Mónica en la medida en la que somos capaces de atribuirle correctamente propiedades como *ser mujer*, *ser alto*, *ser sabio*, etc., conocemos la propiedad *ser sabio* en la medida en la que somos capaces de atribuirla correctamente a las entidades que la ejemplifican. Conforme adquirimos la habilidad de atribuir correctamente una propiedad a sus instancias portadoras vamos teniendo conocimiento de ella. Una vez que sabemos que Mónica es sabia; que sabemos que Confucio era sabio; que los adolescentes rara vez son sabios, que Peña Nieto no es sabio, etc., vamos adquiriendo conocimiento sobre la sabiduría. Por ejemplo, algo que Mónica y Confucio tienen en común en virtud de ser sabios, es que además de inteligentes son sensatos. En contraste, los adolescentes no suelen ser sensatos; la información que adquirimos de Peña Nieto no apunta a que sea una persona sensata. Por supuesto, podríamos equivocarnos en muchas de estas atribuciones. El punto es que nuestra relación con los objetos que admite F (aunque no la ejemplifiquen de hecho) nos da acceso a sus condiciones de aplicación. El contacto con estas condiciones se refleja en nuestra habilidad de atribuir la propiedad correctamente a sus instancias. Finalmente, esto es lo que nos va conduciendo al conocimiento de F. A partir de nuestra exposición a Mónica, a Confucio, a los adolescentes, a Peña Nieto, etc., eventualmente, estamos en posición de saber que la sensatez es una propiedad relacionada con la sabiduría. Este conocimiento es parte de lo que tendremos a nuestro alcance cuando busquemos ser capaces identificar la propiedad *ser sabio*.

5.3. Conocimiento de números

De acuerdo a lo desarrollado en la sección anterior, tener conocimiento *de re* de una propiedad F es algo que tiene que estar asociado con la habilidad de atribuir F correctamente. Esta habilidad a su vez, involucra la atribución de ciertas propiedades de F que pueden ser, en algún sentido, más básicas y que conducen a identificar a F. El caso en el que F es una propiedad numérica no es una excepción. Si el número n es la propiedad numérica *ser* n podemos decir que conocemos a n cuando poseemos la habilidad de atribuirlo, en principio, a cualquier pluralidad de multiplicidad n. El conocimiento aritmético es el conocimiento de los números en el sentido mencionado junto con el conocimiento de las propiedades de estas propiedades que, nuevamente, es un fenómeno relacionado con nuestra capacidad de identificarlas y atribuirlas.

Una condición deseable para decir que tenemos conocimiento de la propiedad F es ser capaz de atribuirla correctamente. Esto sugiere un punto de partida para nuestra explicación epistemológica. ¿Cómo adquirimos esta habilidad de atribución? Como lo señalé en la sección anterior, esta habilidad se adquiere mediante el contacto que mantenemos con las entidades que F admite como argumento. En particular, con los objetos que ejemplifican F. Es decir que en el caso del número n, la habilidad de atribuirlo correctamente está dada por las relaciones que mantenemos con pluralidades–que no requieren de ninguna especificación adicional–de n individuos (principalmente mediante el conteo). Esto abarca el conocimiento inicial que tenemos de los números. Eventualmente, el conocimiento aritmético se torna más abstracto y no requiere de que estemos en contacto con las relaciones entre los números y sus instancias ejemplificadoras.

El objetivo de explicar la habilidad de atribución de propiedades numéricas a pluralidades dadas sugiere considerar la forma en la que los niños asignan significado a los numerales por primera vez (este proceso culmina alrededor de los 4 años). Existe una literatura muy amplia en ciencias cognitivas para explicar el fenómeno de adquisición de los números en los niños. Sin embargo, éste es aún bastante misterioso y las teorías varían de forma significativa: hay las que apelan a habilidades cognitivas innatas, las que sostienen que las capacidades lingüísticas subyacen a las aritméticas, las que dicen que estas capacidades (las lingüísticas y las aritméticas) son independientes, etc. Pero el interés del presente trabajo es dar una explicación epistemológica de la aritmética que en particular atienda a preocupaciones filosóficas como las de Benacerraf y Hartry Field que presenté en el segundo capítulo. Sea cual sea la explicación correcta sobre la adquisición de los números, ésta funcionará como base de nuestra epistemología. ¿Por qué? Porque independientemente de la naturaleza del fenómeno cognitivo de adquisición, el hecho es que el fenómeno existe. Los niños adquieren conocimiento básico aritmético a muy temprana edad y éste, bajo la lupa de prácticamente cualquier teoría, está relacionado con la identificación de las propiedades de cardinalidad de ciertas pluralidades. Es decir, con la asignación de medidas exactas de multiplicidad a pluralidades identificables mediante el conteo. Una vasta gama de teorías sobre adquisición de números funcionará como el elemento inicial de nuestra epistemología.

La competencia en la atribución de las propiedades numéricas a pluralidades pequeñas constituye un primer nivel en nuestro conocimiento aritmético. Para explicar este conocimiento juega un papel importante que la adquisición de los primeros números naturales se da en virtud del contacto que los niños tienen con pequeñas pluralidades de objetos físicos (o de sus representaciones). Notemos que el fenómeno de un niño atribuyendo correctamente una propiedad numérica a una pequeña pluralidad en virtud de su contacto con los individuos que la constituyen, es un caso particular del fenómeno de una persona atribuyendo correctamente propiedades numéricas a pluralidades arbitrarias de cualquier cardinalidad en virtud de sus relaciones con los individuos que constituyen estas pluralidades. Un niño sabe que los dedos que mira en su mano izquierda son 5; un usuario competente de los números en principio puede saber que una pluralidad constituida por cualesquiera entidades (ideas, conjuntos, números) de n individuos tiene la propiedad *ser n*. El niño se relaciona con la pluralidad de los dedos de su mano mediante sus sentidos y llega al número mediante la habilidad–que ya involucra un elemento lingüístico–de contar. En el segundo caso, la relación con los portadores deberá ser más de tipo intelectual. Pero al igual que en el caso del niño, esta habilidad involucra un elemento lingüístico. Esta habilidad llega más lejos en parte porque los recursos lingüísticos también son más poderosos. El manejo de una notación numérica, tal como la de los numerales arábigos o la de los numerales verbales juega un papel crucial en la posesión de dicha habilidad. Nuestras actitudes *de re* hacia los números se expresan a través de un lenguaje en el que los numerales juegan un papel de nombres dentro de un sistema específico de símbolos, como el sistema decimal posicional.

Como ya dije, mi propósito no es defender alguna teoría particular sobre adquisición de números. Lo que haré a continuación será tomar algunas consideraciones–no demasiado controvertidas–desde algunos trabajos relacionados en ciencias cognitivas, con la finalidad de mostrar como éstas entrarían en la presente propuesta. Para explicar el comienzo del proceso de desarrollo de las habilidades aritméticas algunos teóricos sostienen que los niños adquieren información que ya estaba tácita cuando se les expuso por primera vez a los numerales. Como fuente de esta información los teóricos apelan recurrentemente a algo que ellos llaman *el sentido del número*. El sentido del número es un sentido prelingüístico y tiene que ver con las formas en las que los animales humanos y no humanos pueden responder automáticamente a las características numéricas del mundo (Arrigoni y Caprile, 2016). Este sentido podría brindar las condiciones iniciales para que la interacción con ciertas pluralidades se refleje en la habilidad de atribuirles sus correspondientes propiedades numéricas. Los datos empíricos dan cuenta de dos sistemas representacionales activos desde muy temprana edad que se relacionan con el sentido del número. Éstos son el *sistema numérico aproximado* y el *sistema de monitorización de objetos*. El primer sistema incluiría las relaciones con la propiedad misma de numerosidad y el segundo, las relaciones con ciertas pluralidades de objetos físicos.

El sistema de monitorización de objetos es descrito como un mecanismo para responder a pequeñas multiplicidades (3-4 miembros) de elementos sensoriales por medio de la codificación de sus miembros con otros tantos símbolos mentales que se guardan en la memoria de trabajo (el fenómeno de subitización es un resultado de este mecanismo). El sistema numérico aproximado es descrito como un mecanismo para responder a grandes multiplicidades de elementos sensoriales por medio de la representación de los mismos como magnitudes similares a segmentos, que fluctúan en una línea numérica mental. En este sentido, podemos decir que la atribución de números pequeños (que es la primera sobre la que adquirimos competencia) está fuertemente arraigada al contacto sensorial con pluralidades pequeñas de objetos físicos. No así la atribución de propiedades numéricas mayores. Ésta se basará en la identificación de multiplicidades mediante el conteo. La habilidad en la atribución de números a pluralidades se refleja implícitamente en el uso de los numerales como adjetivos. La cognición humana de los números evoluciona significativamente una vez que la noción de cardinalidad es adquirida.

El punto de vista mayoritario es que la noción de cardinalidad que subyace al uso correcto de numerales por los niños está conectada a su interacción con multiplicidades de objetos espacio temporales. Sin embargo, razonando sobre estos objetos no se pueden inferir todas las propiedades aritméticas. Incluso, aparece cierta dificultad para razonar de este modo para el caso de números muy grandes. Eventualmente los usuarios competentes de los números dejan de tratarlos como cardinalidades de multitudes de objetos espacio temporales. Si los números son propiedades, una vez que tenemos una epistemología para las propiedades, la ejemplificación de propiedades por otras propiedades incrementa sustancialmente el espectro de *los hechos aritméticos que podemos conocer*.

5.4. Más propiedades aritméticas

Cuando hablamos de conocimiento aritmético es central ver a los números como una sucesión de elementos mostrando la siguiente estructura: la sucesión tiene un elemento inicial único; cada uno de sus elementos tiene un sucesor único y, todos los elementos (excepto por el inicial) tienen un único predecesor. Finalmente, la sucesión satisface la inducción matemática (de segundo orden), que prohibe ser un elemento de la sucesión de números a todo aquél que no sea o bien el elemento inicial, o su sucesor, o el sucesor de su sucesor,..., o el sucesor del sucesor... de su sucesor. Nuestra teoría de los números como propiedades no tiene dificultades particulares frente a esta consideración.

Una vez que entendemos el conocimiento de propiedades en términos de nuestra capacidad para determinar sus relaciones con las entidades que admiten como argumento (en particular, de atribuirlas correctamente a sus portadores), podemos hablar del conocimiento de propiedades de propiedades. Las propiedades numéricas que son los números tienen a su vez propiedades a las que tenemos acceso epistémico. Ahora estamos en posición de explicar este acceso en la misma línea que explicamos el conocimiento *de re* de los números.

La propiedad *ser el elemento inicial de la sucesión* es una propiedad que se atribuye al número cero (o en los modelos que no consideran al cero como un número natural, al número uno). Esta propiedad relaciona a la propiedad *ser cero* con el resto de las propiedades numéricas. Una propiedad definitoria es la que tiene la clase de las propiedades numéricas de no contener un número que sea el antecesor de cero (en un discurso aritmético que use Teoría de conjuntos: $\forall x \in \mathbb{N}(0 \leq x)$). (En el capítulo 3 mencionaba que esto no es más que decir que no hay una propiedad numérica que admita pluralidades de multiplicidad menor a cero.) De igual forma, conocer (*de re*) la relación de sucesor es tener la habilidad de atribuirla correctamente a pares de números y haber aprendido a atribuirle ciertas propiedades básicas o definitorias. El desarrollo de la habilidad de atribuir correctamente la relación de sucesor a pares de números no es misterioso. Como lo señalaba en la sección anterior, conocemos el número n (y también el número $S(n)$) mediante el desarrollo de la habilidad de contar. No es misterioso que se pueda desarrollar la habilidad de determinar que las habilidades correspondientes a n y a $S(n)$ están en una relación correspondiente a la relación de sucesor, e indirectamente, que n y $S(n)$ están en la relación de sucesor. La habilidad de contar hasta $S(n)$ puede determinarse como la habilidad de contar hasta un elemento más que los que se contarían por medio de la la habilidad de contar hasta n.

Respecto a las operaciones aritméticas tenemos la misma explicación. Conocer (*de re*) la relación de suma es tener la habilidad de atribuirla correctamente a tríos de números y haber aprendido a atribuirle ciertas propiedades básicas o definitorias. Podemos decir algo en la misma línea de lo que hemos trazado para las relaciones anteriores. La habilidad de atribuir correctamente la relación de suma a tríos de números [es decir, de determinar $+(n, m, p)$], se da en términos de la habilidad de determinar que m, n y p están en la relación de suma, que corresponde esencialmente a la habilidad de determinar que la habilidad de contar hasta p está en una relación correspondiente con la habilidad de contar hasta m y la habilidad de contar hasta n–la habilidad de contar hasta p es la habilidad de contar la unión de dos clases ajenas entre sí, una de los cuales se cuenta por medio de la habilidad de contar hasta m y la otra se cuenta por medio de la habilidad de contar hasta n. Es fácil ver que una explicación en la misma línea se puede desarrollar para el caso de las operaciones de multiplicación y exponenciación. El conocimiento de enunciados donde todas las cuantificaciones son acotadas es similar: determinar la propiedad que tiene un número de pertenecer a una cierta clase descansa en la habilidad que tenemos de atribuir a este número–y al resto de los que pertenecen a la clase en cuestión–la propiedad que determina esa clase; por su parte, los cuantificadores no son más que propiedades de dichas clases. El conocimiento de enunciados con cuantificaciones no acotadas podría parecer algo más misterioso, pero de nuevo será misterioso sólo en la misma medida en que sea misterioso nuestro conocimiento de generalizaciones sobre las habilidades de contar que corresponden a las propiedades que identificamos con los números.

Nuestra epistemología se basa en la ejecución de las habilidades de atribuir e identificar propiedades, así como en generalizaciones de la habilidad de contar. Las primeras habilidades son meramente intelectuales, por lo que no hay una tensión a primera vista entre éstas y el conocimiento aritmético. Pero la base del conocimiento propiamente aritmético está dada por las generalizaciones de las habilidades relacionadas con el conteo. Podría pensarse que un conocimiento que se basa en último término en una habilidad empírica (como la de contar) es empírico. Quizá el conocimiento de generalizaciones aritméticas no acotadas sea empírico, como sostienen algunos (Maddy (1981) , Quine (1980)); estos autores sostienen de hecho que todo el conocimiento aritmético es empírico). En ese caso el conocimiento de generalizaciones aritméticas no acotadas seria un conocimiento cuya base última sería la formación de hipótesis implícitas sobre las propiedades numéricas, hipótesis que sin embargo estarían fundadas empíricamente.

Aunque la cuestión de si el conocimiento aritmético es empírico o no no sea una que se deba decidir aquí, nuestra inclinación es hacia la idea de que es conocimiento a priori. Si el conocimiento propiamente aritmético es a priori, esto puede deberse a una variedad de posibilidades. Una de ellas, (hacia la cual nos inclinaríamos) es que las verdades aritméticas son verdades analíticas, es decir, verdades que conocemos en virtud de nuestro conocimiento de nuestros conceptos de las propiedades que estamos identificando con los números. Los axiomas de Peano, por ejemplo, son plausiblemente analíticos bajo esta interpretación. Si esto fuera así, podríamos apelar a alguna teoría del conocimiento analítico para complementar la nuestra, por ejemplo una teoría de las verdades analíticas del tipo de la que da Boghossian (1997), según la cual estas son definiciones implícitas–no convenciones arbitrarias, sino enunciados que se aceptan implícitamente y cuya verdad no es puramente convencional sino que depende de que consigan capturar o caracterizar objetos apropiados, que serían las propiedades numéricas y sus relaciones en este caso. Esas definiciones implícitas constituirían el conjunto de notas conocidas inicialmente de los conceptos de las propiedades numéricas. Pero, como he dicho, no son estas cuestiones que sea necesario resolver para los propósitos del presente trabajo.

En conclusión, si aceptamos que los números son propiedades, podemos explicar el conocimiento aritmético en términos del acceso a las relaciones que hay entre estas propiedades y sus portadores; así como entre estas propiedades y sus propiedades (y las propiedades de sus propiedades, las relaciones entre ellas, etc.). Así, tenemos una respuesta a la pregunta de en virtud de qué adquirimos conocimiento aritmético. En un primer plano, el conocimiento aritmético se da en virtud de nuestras relaciones con los portadores de estas propiedades. Posteriormente mediante el desarrollo de habilidades de atribución e identificación de las propiedades aritméticas. Estas habilidades también se presentan en contextos de conocimiento de otras propiedades. En el caso de la aritmética las habilidades de atribución e identificación van de la mano con el desarrollo de la habilidad de contar. Esta habilidad tiene un fuerte elemento lingüístico que se hace presente a través de las propiedades que caracterizan a las diferentes notaciones numéricas. La atribución de las relaciones que corresponden a la suma, la multiplicación y la exponenciación no es sino la habilidad de determinar ciertas propiedades relacionadas, en último término, con la habilidad de contar. El lenguaje aritmético, como cualquier otro, está equipado con las herramientas para hacer referencia a una entidad como portadora de atributos. Estos elementos en conjunción, explican nuestro acceso epistémico a las entidades denotadas por los numerales y sus propiedades.

5.5. Homogeneidad epistémica

En el capítulo 2 presenté la clásica objeción epistémica para el platonismo en matemáticas. Primero, la objeción original de Benacerraf y después una reformulación presentada posteriormente por Hartry Field. Estas objeciones están dirigidas a una postura estándar de platonismo:

> *Platonismo estándar.* Los números existen. Son objetos abstractos e independientes de la mente humana. Estos objetos y sus relaciones son los hacedores de verdad de las proposiciones aritméticas.

Para conocer la verdad de un enunciado aritmético necesitamos saber algo acerca de aquello que hace verdaderas a las oraciones de la aritmética. De acuerdo a la preocupación de Benacerraf, debido a que no estamos causalmente conectados con objetos abstractos no podemos saber que enunciados como

(3) Dos es el menor de los números primos.

son verdaderos *de la misma forma* en que sabemos que enunciados como

(4) Juan Villoro es el mayor de los hijos de Estela Ruiz.

lo son.

Sabemos que (4) es verdadera porque nuestras relaciones causales con Juan Villoro y con su familia nos permiten darnos cuenta que el objeto (Juan) pertenece a la clase de cosas con la propiedad de ser el mayor de los hijos de Estela Ruiz. Pero si los números son abstractos, entonces la vía causal para el conocimiento no es una alternativa. De este modo si el platonista tiene razón, no podemos tener conocimiento de los números. La reformulación de Field actualiza la conclusión a que, si el platonista tiene razón, queda socavada la justificación de nuestras creencias aritméticas debido a que no es posible explicar, ni siquiera en principio, la confiabilidad de los procesos que las generan. Sintetizando la preocupación de Benacerraf y de Field, podemos construir el siguiente argumento:

P1. Cualquier epistemología satisfactoria para dominios no matemáticos sostiene que el conocimiento requiere satisfacer una cierta condición Q.

P2. No podemos tener conocimiento de los números si el conocimiento requiere satisfacer la condición Q.

P3. Una explicación satisfactoria del conocimiento matemático debe de ser homogénea con una explicación satisfactoria del conocimiento en dominios no matemáticos.

C. Por lo tanto, no tenemos conocimiento aritmético.

Tanto Benacerraf como Field tienen posiciones particulares acerca de la condición Q (en ambos casos está involucrado un elemento de conexión causal) y de P2 (si existen los números, éstos son objetos que están causalmente aislados). Podemos permanecer neutrales ante estos supuestos teóricos particulares, conservando la forma general del argumento y especialmente la premisa 3. Esto nos conduce al siguiente requisito que una explicación satisfactoria sobre el conocimiento aritmético debería cumplir.

> **Requisito de homogeneidad epistémica**:
>
> *Una explicación satisfactoria del conocimiento aritmético tiene que ser homogénea con nuestras explicaciones para el conocimiento en dominios no matemáticos.*

La solución al problema de Benacerraf (y al de Field y otros del mismo tipo) que he desarrollado a lo largo del presente trabajo consiste en analizar la condición Q. Un análisis de Q podía conducirnos al rechazo de P2 y por lo tanto, de la conclusión de que no tenemos conocimiento aritmético.

Por las razones que presenté en las secciones anteriores, sea cual sea la condición Q para tener una teoría satisfactoria del conocimiento (en particular en los dominios no matemáticos) ésta tiene que dar cuenta del conocimiento de propiedades. De no ser así, no podemos explicar las adscripciones de conocimiento del tipo S *sabe que* P. Saber que P, para las proposiciones de la forma $P = F(x)$, implica aplicar correctamente el predicado que está por la propiedad F al sujeto que está por la entidad x. Esto es, atribuir correctamente la propiedad F a la entidad x. Para lograr esta atribución, es necesaria cierta familiaridad con la propiedad F. De acuerdo a estas observaciones, tenemos razones para pensar que, del mismo modo que adquirimos conocimiento *de re* de un objeto en la medida en la que somos capaces de atribuirle correctamente propiedades, adquirimos conocimiento *de re* de una propiedad en la medida en la que somos capaces de atribuirla correctamente. El conocimiento de propiedades ha pasado algo desapercibido al momento de determinar la condición Q, pero no considerarlo deja huecos explicativos en nuestra epistemología sobre los objetos más comunes.

Vale la pena señalar que muchas de las predicaciones que se hacen *sobre* objetos se pueden derivar en oraciones *sobre* propiedades con condiciones de verdad equivalentes. (Sería raro decir que tenemos conocimiento de que Michael Jordan es alto, pero no de que ser alto es una propiedad que tiene Michael Jordan.) Finalmente, tenemos conocimiento sobre propiedades que no está relacionado directamente con sus portadores: sabemos que el color morado no es un color básico en la escala decolores RGB, que la sabiduría no es lo mismo que la inteligencia, que la distancia es una propiedad relacional, etc.

Sea cual sea la condición Q, tiene que dar cuenta del conocimiento de propiedades. Si los números son propiedades, no hay razón para aceptar P2. Nuestra epistemología razonable para dominios no matemáticos considera el conocimiento de propiedades. En particular, el conocimiento de propiedades plurales, entre las cuales están las propiedades de cardinalidad (que son los números). La naturaleza de la condición Q va a determinar la justificación de nuestras creencias aritméticas. Por ejemplo, si Q es la condición impuesta por Benacerraf tenemos que:

> La justificación de nuestras creencias sobre x está dada por las relaciones causales que mantenemos con x.

Como Q incluye la condición de dar cuenta del conocimiento de propiedades, las propiedades tienen que jugar algún papel en las relaciones causales que mantenemos con x. Este papel podría ser, por ejemplo, el de posibilitar el acceso a los objetos portadores. El acceso a una pluralidad R de multiplicidad n puede incluir el conteo de sus individuos. Este conteo–que nos conecta con R–nos relaciona con la propiedad *ser n*, es decir, con el número n. Veamos ahora el ejemplo en la reformulación de Field de la objeción:

> De existir los números, ¿cómo estarían éstos conectados a los procesos generadores de creencias matemáticas de tal modo que sea posible determinar la confiabilidad de dichos procesos?

Los procesos generadores de creencias (en particular en dominios no matemáticos) tienen que darles un papel sustantivo a las creencias sobre propiedades. Determinar la confiabilidad de dichos procesos no puede no tener en consideración determinar algo acerca de las propiedades (por ejemplo, determinar que éstas son atribuidas correctamente). Si los números son propiedades, intervienen en los procesos generadores de creencias sobre pluralidades (de objetos o propiedades) y al igual que con cualquier otra propiedad, es posible determinar, en principio, nuestra confiabilidad acerca los procesos que los involucran.

Si los números son propiedades y la condición Q incluye dar cuenta del conocimiento de propiedades, tenemos una epistemología homogénea para los dominios aritméticos y los no matemáticos–razones como las de Field y Benacerraf no sirven para rechazar la existencia de los números. Desde luego, decir que nuestra epistemología en ambos dominios es homogénea no es decir que las explicaciones epistémicas son las mismas. Es evidente que hay diferencias entre nuestro conocimiento de hechos puramente aritméticos y nuestro conocimiento de hechos con los que mantenemos relaciones más empíricas. Pero una diferencia en las explicaciones para distintos tipos de propiedades no es suficiente para generar una división metafísica importante entre propiedades aritméticas y propiedades no matemáticas. Probablemente estas diferencias puedan llevarse meramente al nivel de distinciones entre el conocimiento de diferentes tipos de propiedades. No es difícil ver que las condiciones en las que se da el conocimiento de propiedades físicas son distintas a las condiciones en las que se da el conocimiento de propiedades lógicas. Quizá exista la distinción entre propiedades fundamentales y propiedades no fundamentales; de ser así, es probable que las relaciones epistémicas con ambos tipos de propiedades sean diferentes. Conocer propiedades que son dependientes de la mente humana parece un fenómeno distinto al de conocer aquéllas que son independientes. Nuestra conclusión es que, aunque pueda haber estas diferencias al nivel de clases de propiedades (o a algun otro nivel), una epistemología satisfactoria debe explicar de manera general el conocimiento de propiedades. Bajo nuestra propuesta de los números como propiedades el conocimiento aritmético no quedará excluido de cualquier epistemología satisfactoria en el sentido que he señalado.

Conclusiones

El debate entre realismo y antirrealismo acerca de las entidades matemáticas–en particular, de los números–es amplio y complejo. La dificultad de encontrar evidencia concluyente para defender cualquiera de las dos posturas ha cargado el debate hacia los aspectos negativos del lado contrario. El ganador parece que será aquél que muestre que las dificultades a las que se enfrenta su oponente son irresolubles, y en el mejor de los casos, que desde su posición dé algunas ideas acerca de cuestiones muy particulares que no resultan generalizables a todos los casos. Por un lado, los antirrealistas están representados por las teorías nominalistas que niegan la existencia de los números en tanto su condición de entidades abstractas. Estas posturas rechazan la existencia de los números motivadas básicamente por la percepción de una disanalogía metafísica entre la realidad de lo concreto y la realidad de lo abstracto. Por otro lado, están las teorías realistas, que presentan como una de sus mayores ventajas la defensa de una lectura literal de las oraciones de la aritmética. Si los enunciados aritméticos hablan de lo que parecen hablar, no hay que buscar rebuscadas teorías para explicar el contenido de estos enunciados y cómo, en virtud de este contenido, obtenemos los beneficios que generalmente le atribuimos a la verdad de las oraciones que contienen términos numéricos.

La disanalogía metafísica que enfrenta el realista (entre una realidad de entidades abstractas y una realidad de entidades concretas) y la disanalogía lingüística que enfrenta el antirrealista (entre el lenguaje aritmético y el lenguaje cotidiano) han llevado a una tensión entre las explicaciones semántica y epistémica sobre los enunciados aritméticos. Esta tensión ha sido señalada de forma muy esquemática y clara por el dilema de Benacerraf. En su famoso trabajo *Mathematical Truth*, Benacerraf habla de dos tipos de explicación sobre la verdad matemática. Cada una de estas explicaciones es el resultado de la posición metafísica que uno sostenga frente a los objetos matemáticos. Si uno es realista, la verdad matemática se da en virtud de la satisfacción por los objetos matemáticos de las condiciones que las oraciones predican. A este tipo de explicación Benacerraf le llama estándar. Por otro lado, están las explicaciones combinatorias de la verdad matemática. En estas explicaciones son las relaciones–principalmente sintácticas–de los enunciados dentro del sistema que los contiene son las que dan las condiciones de verdad. Estas explicaciones van de la mano con el antirrealismo bajo la idea de que, de existir los objetos matemáticos, no hay forma de que no sean ellos los que hacen verdaderos a los enunciados. Así, a cada postura metafísica le ha sido asignado un tipo de explicación sobre la verdad matemática, y a partir de ésta, le será asignado también un problema filosófico.

Si uno es realista, como ya vimos, está comprometido con una explicación de la verdad de tipo estándar. Esto quiere decir que cuando x conoce una proposición matemática P, lo que x sabe es que los objetos a los que refieran los términos que aparecen en P satisfacen las propiedades predicadas por P. Dada la disanalogía metafísica que mencioné en el primer párrafo de la sección, nuestro acceso a estos objetos matemáticos no puede ser como nuestro acceso a los objetos concretos. Esto nos despoja de la posibilidad de explicar cómo obtenemos conocimiento de P. El realista se encuentra en una dificultad epistémica. Por otro lado, si uno es antirrealista el tipo de explicación que le ha sido asignado lo enfrenta a un problema semántico. El antirrealista está dando condiciones de verdad en términos muy diferentes a los del resto del lenguaje natural: ¿en virtud de qué puede el combinatorio sostener que hay tal contraste entre la verdad matemática y el resto de las verdades del lenguaje natural? El antirrealista se encuentra en una dificultad semántica.

La notable simetría en el planteamiento de Benacerraf se debe al constreñido marco teórico que él utilizó para su artículo. Cada uno de los supuestos acota las posibilidades y así, la cuestión resulta en un dilema bien definido. Eliminar los supuestos de Benacerraf para disolver el dilema no es algo complicado. Primero, no es cierto, o al menos no es evidente, que sólo haya estos dos tipos de explicación sobre la verdad matemática. Por ejemplo, algunos ficcionalismos, o la teoría de Yablo de la que hablo en el capítulo 1, no parecen encajar claramente ni en la explicación estándar, ni en la explicación combinatoria en los términos de Benacerraf. Segundo, cuando Benacerraf usa el término 'estándar' apela a una explicación satisfactoria de la verdad en el lenguaje natural y menciona la explicación de Tarski como ejemplo. Hasta donde yo sé, no hay un consenso general entre los teóricos acerca de la existencia de una explicación satisfactoria para el lenguaje natural. Tercero, Benacerraf entiende por *una explicación satisfactoria de cómo conocemos las verdades*, una epistemología en la que la justificación de nuestras creencias está dada por las relaciones causales que mantenemos con los objetos sobre los que versan estas creencias. Algo que tampoco es ampliamente aceptado hoy en día.

Por las razones que he mencionado, el dilema de Benacerraf no es algo que hoy en día genere mucha preocupación. Pero lo cierto es que este trabajo pone a la vista importantes consideraciones filosóficas que deben tomarse en cuenta al tratar de defender una teoría sobre la ontología de la matemática y en particular, sobre la naturaleza de los números. El análisis del dilema de Benacerraf del capítulo 2 tuvo por objetivo extraer del trabajo original consideraciones relevantes que nos lleven a establecer los requisitos que una explicación satisfactoria sobre los números naturales debería cumplir. La conclusión que aquí he presentado es que los *desiderata* de Benacerraf culminan en dos requisitos de homogeneidad que cualquier teoría sobre la naturaleza de los números debería cumplir. Primero, está el requisito de homogeneidad semántico. Este requisito establece que, dado que es poco plausible que haya dos *verdades* diferentes (una para la aritmética y una para los dominios no matemáticos), la explicación para ambos fragmentos del lenguaje debe mantener una cierta homogeneidad. Esta homogeneidad debe lograrse preservando la intuición de que la verdad es un fenómeno que tiene que ver con la propiedad de las oraciones de reportar correctamente hechos acerca del mundo. Después está el requisito de homogeneidad epistémica. Este requisito establece que nuestra explicación del conocimiento aritmético debe ser homogénea con una buena epistemología para los dominios no matemáticos. Cumplir este requisito es disolver la tensión señalada por Benacerraf entre una metafísica realista y una buena explicación epistemológica.

Nuestra propuesta tiene como propósito general dar una teoría positiva realista sobre la existencia de los números naturales. Si esta propuesta da una respuesta satisfactoria a las preocupaciones epistemológicas que se le han impuesto al realista, no hay razón para adoptar el antirrealismo. Ser realistas nos permite quedarnos con una semántica homogénea: los enunciados aritméticos dicen exactamente lo que parecen decir; cuando los matemáticos hacen aritmética, sus creencias son exactamente acerca de lo que ellos creen que son; el contenido de las oraciones con términos numéricos en el lenguaje ordinario es su contenido literal (tanto en el papel de estos términos como determinantes o adjetivos, como en su papel de términos singulares), las actitudes *de re* que tienen los hablantes hacia los números quedan también explicadas. Resolver el problema epistemológico despoja al antirrealista de una de sus más fuertes motivaciones.

Los números como propiedades

Una vez que han quedado establecidas las ventajas de una postura realista acerca de los números y que hemos decidido enfrentar el reto epistemológico, la pregunta es qué tipo de entidades son los números. Nuestra respuesta es que los números son propiedades. El platonismo estándar apunta a la idea de que los números existen como entidades abstractas (causalmente aisladas) dentro de una realidad concreta (causalmente conectada). La brecha metafísica entre estas dos realidades genera suspicacia. Pero si los números son propiedades, siendo éstas entidades abstractas, no hay la mencionada brecha entre ellos y el resto de la realidad concreta. Las propiedades podrán parecer misteriosas pero no del mismo modo que lo son objetos en una realidad abstracta causalmente aislada de la realidad concreta. Las propiedades son universales, muchas son ejemplificadas por objetos concretos, incluso podemos decir que algunas de ellas son abstracciones de sus portadores. Hay propiedades de muchos tipos, las hay físicas, lógicas, temporales, etc. Sus conexiones causales con el mundo de los objetos concretos no es un gran misterio: los objetos concretos tienen propiedades y es, de hecho, en virtud de estas propiedades que interactuamos causalmente con ellos. Si los números son propiedades tenemos la esperada homogeneidad entre la realidad aritmética y la realidad no matemática (en contraste con los objetos abstractos).

Pero la respuesta satisfactoria a un problema teórico no es la única razón para pensar que los números son propiedades. Es claro que las pluralidades de objetos–concretos o abstractos–tienen propiedades de cardinalidad; la propiedad que tiene una pluralidad de *tener n individuos*, de *ser n* o de *tener a n como su número*, tiene que relacionar de algún modo a dicha pluralidad con el número n. La investigación sobre las propiedades que una pluralidad puede portar nos lleva a la conclusión de que existen propiedades plurales. Es decir, propiedades cuyos portadores son pluralidades *como tales*; propiedades que no pueden ser reducidas a propiedades individuales de los elementos de la pluralidad. Entre estas propiedades están las propiedades de cardinalidad. Así, la propiedad *ser dos* es una propiedad que es portada por Thelma y Louise *como tales* y que no admite pluralidades de diferente cardinalidad. En su artículo *On the Essence and Identity of Numbers*, Mario Gómez Torrente muestra que hay una relación esencial entre pluralidades arbitrarias de n individuos y el número n. Esta relación está dada, por un lado, por la propiedad *ser* n (o *tener a* n *como número*) de las pluralidades arbitrarias (es decir constituidas por cualquier tipo de entidades) de n individuos. Por el otro lado, la relación está dada por la propiedad del número n de ser tenido por cualquier pluralidad arbitraria de n individuos. Los argumentos presentados favorecen fuertemente la idea de que la relación entre la propiedad *ser* n y el número n es una relación de identidad. La relación esencial que las pluralidades de multiplicidad n mantienen con la propiedad *ser* n y con el número n (relación que no se da con otros buenos candidatos a ser el número n) dan un sólido respaldo a la idea de que el número n no es sino la propiedad *ser* n.

Una posible preocupación de pensar en los números como propiedades es que esta idea sólo encaje en los usos ordinarios de los términos numéricos en discursos cotidianos. Alguien podría dudar de que el uso de los números en el contexto de la matemática pura pueda ser explicado por una teoría de los números como propiedades. Ante esto, vale la pena mencionar que una de las mayores motivaciones detrás de este trabajo es dar una teoría que sea natural, que atienda a nuestras intuiciones compartidas acerca de los números y que sea homogénea entre los diferentes usos de los términos numéricos. El caso de la aritmética pura no presenta ningún problema para estos propósitos. Si bien, la forma más usual de formular los enunciados aritméticos actualmente es mediante el uso de la Teoría de conjuntos, hay que recordar que la axiomatización de la aritmética es previa. Los enunciados de la aritmética pueden ser formulados perfectamente bien en términos de propiedades. En el capítulo 3 presentamos una sugerencia de traducción para los enunciados de la aritmética que hace uso de un lenguaje en el que los términos están claramente por propiedades.

Dada la importancia de la Teoría de conjuntos en la práctica matemática, decidí analizar en el capítulo 4 algunas propuestas realistas que involucran a los conjuntos como parte de lo que constituye la realidad aritmética. Como lo mencioné anteriormente, parte del espíritu de este trabajo es no dejar de lado ninguno de los usos de los numerales. Las propuestas realistas que basan sus explicaciones en una realidad teórico conjuntista enfrentan el problema de explicar cómo los usuarios competentes tienen acceso a esta compleja realidad para poder hacer uso de los números en contextos cotidianos. Nuestra propuesta tiene una clara ventaja en términos de homogeneidad.

Requisitos cubiertos

Concluimos este trabajo presentando un bosquejo que les da a las propiedades (en particular a las propiedades que son los números) el lugar que les corresponde dentro de una buena explicación epistemológica. Las adscripciones de conocimiento se dan cuando estamos en posición de decir que un sujeto S sabe que P. En el caso de los enunciados de la forma $F(x)$, saber que P es tener conocimiento de que x y la propiedad F están en una relación de ejemplificación. Así, el conocimiento de P requiere saber algo de x (que tiene la propiedad F) y saber algo de F (que es ejemplificada por x). Todo el conocimiento proposicional que involucra a x está relacionado con x y por esta razón con el conocimiento *de re* de x. Conocemos *de re* a x en la medida en la que somos capaces de adscribirle correctamente propiedades de tal modo que estas adscripciones nos lleven a su identificación. Pero como ya dije, el conocimiento de P también está relacionado con el conocimiento de F. El conocimiento *de re* de F se da en la medida en la que somos capaces de identificar las relaciones de F con las entidades que admite como argumento. En particular, las relación de ejemplificación de F con sus portadores. Realizar adscripciones correctas de F nos pone en contacto con sus propiedades. De tal modo que eventualmente, identificamos suficientes propiedades de la propiedad F para ser capaces de identificarla.

De acuerdo a esta explicación, el conocimiento de los números como propiedades comienza con la adquisición de la habilidad de atribuirlos correctamente a sus respectivas pluralidades. Resultados en ciencias cognitivas respaldan esta idea, debido a que el fenómeno de adquisición de los números–bajo casi cualquier teoría–se relaciona con el contacto que tienen los niños con pequeñas pluralidades de objetos físicos. Mediante este contacto el niño desarrolla la habilidad de contar, y con ésta, la capacidad de inferir conocimiento aritmético más abstracto. Una vez que tenemos acceso epistémico a las propiedades, sabemos que podemos conocer propiedades de objetos, pero también de propiedades. Las propiedades que son los números tienen otras propiedades. Cada número tiene la propiedad de tener un sucesor; las operaciones aritméticas también pueden ser vistas como propiedades, el principio de inducción establece una propiedad que es satisfecha por conjuntos de números naturales, etc.

¿Hemos logrado una teoría que satisfaga los requisitos impuestos por el esquema de Benacerraf? En otras palabras, ¿podemos defender una metafísica realista sobre los números naturales disolviendo la tensión epistemológica que estas posturas tradicionalmente han generado? Mi respuesta a estas preguntas sería afirmativa, pero desde luego, la última palabra la tiene el lector. A modo de conclusión demos un último vistazo a los requisitos que, de acuerdo al análisis, una explicación sobre la verdad aritmética debería cumplir.

- **Requisito de homogeneidad semántica:**

  Nuestra semántica para ambos tipos de lenguaje (el lenguaje aritmético y el correspondiente fragmento del lenguaje no matemático) *debe preservar la intuición de que la verdad es algo que expresa una adecuada relación entre las oraciones y los hechos que éstas reportan.*

- **Requisito de homogeneidad epistémica:**

  Una explicación satisfactoria del conocimiento aritmético tiene que ser homogénea con nuestras explicaciones para el conocimiento en dominios no matemáticos.

En el presente trabajo nos enfocamos más en el aspecto epistémico que en el aspecto semántico del programa de los números como propiedades. Aunque yo no ofrecí una teoría semántica sobre ninguna parte del lenguaje, algo que sí puede verse aquí es que, si los números son propiedades, estamos en posición de dar una explicación de la verdad de las oraciones aritméticas en términos de las entidades a las que sus términos singulares refieren y de las propiedades por las que están sus predicados. Esta idea de verdad, intuitivamente, es la que debemos preservar para ambos fragmentos del lenguaje.

En Gómez-Torrente (2017), el autor desarrolla una teoría detallada sobre la referencia de los numerales (tanto arábigos, como verbales) y muestra que las propiedades de estos términos son compatibles con que los referentes sean propiedades.

Si los números son propiedades, considerando que las propiedades deben estar incluidas en cualquier epistemología satisfactoria, hemos conseguido la homogeneidad buscada. Las explicaciones sobre el conocimiento de oraciones deberán dar lugar al conocimiento de propiedades. Si las oraciones reportan un hecho aritmético (puro o aplicado a otros dominios) o reportan un hecho no matemático, en cualquier caso, el acceso a las propiedades involucradas quedará garantizado por nuestra epistemología. Ha desaparecido la tensión.

Bibliografía

D. Armstrong. *A World of States of Affairs*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

T. Arrigoni y B. Caprile. La cognición de los enteros: una nueva propuesta. In J. F. D. y Abel Lassalle Casanave, editor, *El Árbol de los números: cognición, lógica y práctica matemática*, pages 51–75. EUS, 2016.

J. L. Austin. Truth. *Aristotelian Society Supplement*, 24(1):111–29, 1950.

J. Azzouni. *Deflating Existential Consequence: A Case for Nominalism*. Oxford University Press, 2004.

M. Balaguer. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press, 1998.

P. Benacerraf. What numbers could not be. *Philosophical Review*, 74(1): 47–73, 1965.

P. Benacerraf. Mathematical truth. *Journal of Philosophy*, 70(19):661–679, 1973.

P. Boghossian. Analyticity. In B. Hale y C. Wright, editors, *A Companion to the Philosophy of Language*. Oxford: Blackwell, 1997.

O. Bueno. Modal epistemology and mathematical epistemology. In R. Fischer y F. León, editors, *Modal Epistemology After Rationalism*, pages ?–? Dordrecht: Springer, 2016.

J. Burgess. Epistemology and naturalism. In A. D. Irvine, editor, *Physicalism in Mathematics*, pages 1–15. Kluwer, 1990.

J. Burgess y G. Rosen. *A Subject With No Object.* Oxford University Press, 1997.

O. Chateubriand. *Logical Forms. Part I: Truth and Description.* Campinas, UNICAMP, Edições CLE., 2001.

O. Chateubriand. The logical character of number. *Respuesta a Abel Lassalle, Manuscrito*, (27):21–30, 2004.

D. Davidson. True to the facts. *Journal of Philosophy*, 66(21):748–764, 1969.

H. Field. *Science Without Numbers.* Princeton University Press, 1980.

H. Field. *Realism, Mathematics, and Modality.* Blackwell, 1989.

G. Frege. *Begriffsschrift: Eine Der Arithmetische Nachgebildete Formelsprache des Reinen Denkens.* L. Nebert, 1879.

G. Frege. *Foundations of Arithmetic.* L. Nebert, 1884.

B. Geurts. *Quantity Implicatures.* Cambridge University Press, 2010.

K. Gödel. Russell's mathematical logic. In P. B. y Hilary Putnam, editor, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pages 221–232. Prentice-Hall, 1944a. Publicado en 1983.

K. Gödel. What is cantor's continuum problem? In P. Benacerraf y H. Putnam, editors, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pages 258–273. Prentice-Hall, 1944b. Publicado en 1983.

A. Goldman. Innate knowledge. In in Stephen P. Stich, editor, *Innate Ideas*, page 111?120. Berkeley: University of California Press, 1975.

A. Goldman. What is justified belief? In G. Pappas, editor, *Justification and Knowledge*, pages 1–25. D. Reidel, 1979.

M. Gómez-Torrente. On the essence and identity of numbers. *Theoria*, 30 (3):317–329, 2015.

M. Gómez-Torrente. Arabic numerals and the problem of mathematical sophistication. *Inédito*, 2017.

D. Hilbert. über das unendliche. volume 95, pages 161–190. 1926. Translated into English in *From Frege to Gödel, A source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (1969), J. van Heijenoort, ed. Harvard University Press. pp. 372–392.

H. T. Hodes. Logicism and the ontological commitments of arithmetic. *Journal of Philosophy*, 81(3):123–149, 1984.

T. Hofweber. "quantification and non-existent objects". In A. E. y Tomas Hofweber, editor, *Empty Names, Fiction and the Puzzle of the Non-Existence*. Standford, CA: CSLI, 2000. Publicaciones, 249 - 73.

T. Hofweber. Number determiners, numbers, and arithmetic. *Philosophical Review*, 114(2):179–225, 2005.

P. Horwich. *Truth*. Clarendon Press, 1998.

S. Kripke. Logicism, wittgenstein, and *de re* beliefs about numbers. *Transcripción inédita de las cátedras Whitehead llevadas a cabo en la Universidad de Harvard.*, 1992.

P. Maddy. Perception and mathematical intuition. *Philosophical Review*, 89 (2):163–196, 1980.

P. Maddy. Sets and numbers. *Noûs*, 15(4):495–511, 1981.

E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, second edition, 1979.

B. Mundy. Mathematical physics and elementary logic. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1990: 289–301, 1990.

H. Putnam. Philosophy of logic. In *Philosophical Papers, Volume 1: Mathematics, Matter, and Method*, pages 323–357. Cambridge University Press, 1979.

W. Quine. *On What there Is*. From a Logical Point of View, second edition, 1980.

A. Rayo. On specifying truth-conditions. *Philosophical Review*, 117(3):385–443, 2008.

L. Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Routeledge & Kegan Paul, 1922.

S. Yablo. *Things: Papers on Objects, Events, and Properties*. Oxford University Press, 2010.

S. Yablo. *Aboutness*. Princeton University Press, 2014.

B. Yi. Is two a property? *Journal of Philosophy*, 96(4):163–190, 1999.