



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Caracterización de
Digráficas Bi-Transitivas**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

P R E S E N T A:

Montserrat Sancho Certucha



**DIRECTOR DE TESIS:
Dra. Hortensia Galeana Sánchez**

Ciudad Universitaria, CD.MX., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Sancho
Certucha
Montserrat
5535514074
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
413012287

2. Datos del tutor

Dra.
Hortensia
Galeana
Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Mat.
Laura
Pastrana
Ramírez

4. Datos del sinodal 2

Dra.
María del Rocío
Sánchez
López

5. Datos del sinodal 3

M. en C.
Narda
Cordero
Michel

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Loiret Alejandría

Dosal

Trujillo

7. Datos del trabajo escrito.

Caracterización de Digráficas Bi-Transitivas

47 p

2018

Agradecimientos

Gracias a mis padres por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, por siempre estar para mí, porque sin ellos nada de esto hubiera sido posible.

A mi asesora Hortensia Galeana por haberme aceptado como su tesista y permitirme participar en un tema tan especial, con el cual pude descubrir lo que se siente hacer investigación en matemáticas. Gracias, también, por todo el apoyo que me brindaste durante el tiempo que estuve realizando mi tesis, por las palabras de aliento y motivación y por preocuparte por mí y mi futuro. Ha sido un privilegio haber trabajado contigo.

A mis sinodales Laura Pastrana, María del Rocío Sánchez, Narda Cordero y Loiret Alejandría Dosal, por tomarse el tiempo de leer mi tesis y aportar ideas a ésta.

Gracias a mi amigo Andrew Shaw, mi profesor favorito definitivamente, por enseñarme matemáticas y ayudarme en momentos difíciles de mi carrera. Y, sobre todo, por ser muy paciente conmigo y nunca perder la fe en mí.

A la UNAM, especialmente a la Facultad de Ciencias, y a todos mis profesores por haber colaborado en mi educación y formación.

A mis amigos de la Facultad de Ciencias por su amistad, por estar al pendiente de mí, interesarse y emocionarse por mi tesis.

Investigación realizada gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) bajo el proyecto CB-2013/219840 Estructuras y funciones en gráficas y digráficas. Agradezco al CONACyT la beca recibida.

Índice general

Índice General	3
Introducción	4
1. Terminología básica, notación y resultados previos	7
1.1. Digráficas	7
1.2. Digráficas 2-coloreadas	15
1.3. Digráficas Bi-transitivas	18
2. Trayectorias en digráficas bi-transitivas	21
2.1. Trayectorias en digráficas bi-transitivas	21
3. Ciclos en digráficas bi-transitivas	28
3.1. Ciclos en digráficas bi-transitivas	28
4. Digráficas bi-generadas por ciclos monocromáticos	33
4.1. Comportamiento de los ciclos monocromáticos	33
4.2. Digráficas bi-completas	38
4.3. Digráficas cíclicamente k-partitas	41
Conclusión	45
Bibliografía	47

Introducción

En el presente trabajo introducimos una nueva clase de digráficas nunca antes estudiada; se trata de las digráficas 2-coloreadas por flechas con la propiedad de que si existe una trayectoria monocromática de longitud 2, que empieza en un vértice u y acaba en un vértice v , entonces existe la flecha de u a v del otro color. A estas digráficas les dimos el nombre de digráficas bi-transitivas.

Este concepto tiene una gran similitud con el concepto de digráfica transitiva; las digráficas transitivas se definen de la siguiente manera: Una **digráfica transitiva** es una digráfica tal que, si hay flecha de u a v y hay flecha de v a w entonces existe flecha de u a w , para tres vértices distintos u, v y w (véase [1]), por lo cual resulta natural preguntarse qué propiedades de las digráficas transitivas se pueden encontrar en estas nuevas digráficas.

¿Por qué nos interesa estudiar a las digráficas bi-transitivas? Tenemos dos extremos de estudio; por un lado, las digráficas transitivas de las cuales ya se sabe mucho, las propiedades más importantes sobre éstas se conocen bien, y por el otro lado tenemos la unión de dos digráficas transitivas, éste por el contrario es un mundo oscuro, casi no se sabe nada y es muy complicado, lo único que se conoce es que la unión de dos digráficas transitivas tiene núcleo (consultar [2]), como consecuencia del teorema de Sands-Sauer-Woodrow (ver [13]) el cual dice que toda digráfica 2-coloreada por flechas tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Sin embargo la prueba es muy larga y muy complicada. Las digráficas bi-transitivas son un mundo intermedio entre las digráficas transitivas y la unión de dos digráficas transitivas, las percibimos como digráficas que se parten en dos subdigráficas, las cuales están transitivamente enlazadas, ya que se cierra la transitividad con el otro color. Este tipo de digráficas se porta muy bonito y surgen propiedades interesantes, podemos obtener muchos más resultados sobre estas digráficas que sobre la unión de dos transitivas.

A continuación, hablaremos de las digráficas transitivas, algunos resultados conocidos sobre éstas y aplicaciones. Las definiciones pertinentes que utilizaremos en esta sección se pueden encontrar en el Capítulo 1.

Recordamos que un **orden parcial** consiste de un conjunto X y una relación binaria ' \prec ' la cual es reflexiva ($x \prec x$), antisimétrica (si $x \prec y$ y $y \prec x$ entonces $x = y$) y transitiva (si $x \prec y$ y $y \prec z$ entonces $x \prec z$). Podemos observar que una aplicación de gran importancia de las digráficas transitivas son los órdenes parciales (revisar[1]), pues al hacer corresponder a los elementos de un conjunto X con los vértices de una digráfica D y hacer que haya una flecha del vértice u al vértice v , si el elemento correspondiente u está relacionado con el elemento correspondiente v ($u \prec v$), entonces la digráfica asociada a un orden parcial será transitiva. De hecho si una digráfica es transitiva, asimétrica y con un lazo en cada vértice, ésta corresponde a un orden parcial. Así, los órdenes parciales son una clase particular de

digráficas transitivas y por lo tanto podemos estudiar a los órdenes parciales a través de las digráficas transitivas. Los órdenes parciales son muy estudiados e importantes dentro de las matemáticas, ya sólo con este hecho vale la pena estudiar a fondo esta clase de digráficas.

Un torneo es una digráfica tal que para cualquier par de vértices u y v , se tiene que existe una flecha de u a v o existe una flecha de v a u , pero no ambas. Un torneo transitivo es un torneo el cual a la vez es una digráfica transitiva (ver [5]). Se conocen ya varios resultados en la rama de digráficas transitivas, varios de ellos en torneos transitivos.

Recordamos que un **orden total** es un orden parcial en el que cualquier par de elementos se relacionan entre sí, por lo que los órdenes totales son una clase particular de los torneos transitivos. Para saber más acerca del papel que juegan las gráficas en la teoría de órdenes, consultar [11].

En [10],[7],[3],[12],[4],[8],[6] y [9], se encuentran los artículos más relevantes sobre órdenes de los últimos 10 años según la revista Order: “A Journal on the Theory of Ordered Sets and its Applications ”.

Es fácil mostrar que un torneo T es transitivo si y sólo si es acíclico (véase [5]), también sabemos que toda digráfica acíclica tiene al menos un pozo. Se sigue que si T es transitivo entonces tiene al menos un pozo, de hecho, un torneo T es transitivo si y sólo si tiene exactamente un pozo. Otro resultado que conocemos sobre torneos transitivos dentro de la rama de núcleos en digráficas, es que un torneo T es núcleo-perfecto si y sólo si T es transitivo.

Entrados en el tema de núcleos en digráficas, se sabe que toda digráfica transitiva tiene núcleo (revisar [2]), el resultado se sigue directo del hecho de que cualquier digráfica tiene cuasinúcleo.

Otro resultado importante es que una digráfica fuertemente conexa es transitiva si y sólo si es completa (ver [1]).

Las digráficas transitivas son una clase de digráficas que tienen propiedades similares a las de los torneos. Debido a su definición, tienen una estructura muy importante, y muchas propiedades que se cumplen para los torneos también se cumplen para las transitivas. Por ejemplo, se sabe que un torneo fuertemente conexo es hamiltoniano (ver [1]) y también se sabe que una digráfica transitiva fuertemente conexa es hamiltoniana (pues es completa). Se sabe que todo torneo es unilateralmente conexo y además contiene una trayectoria hamiltoniana, y también una digráfica transitiva unilateralmente conexa tiene una trayectoria hamiltoniana (consultar [2]).

En [1], se da una caracterización de las digráficas transitivas, la cual es equivalente a:

Teorema 1. *Sea D una digráfica con un ordenamiento acíclico de sus componentes fuertemente conexas H_1, H_2, \dots, H_p . La digráfica D es transitiva si y sólo si cada H_i es completa, la digráfica de condensación $H = H^*(D)$ es una digráfica transitiva, y D es la composición $H[H_1, H_2, \dots, H_p]$.*

(Para conocer la definición de composición, consulte [1]).

El resultado principal de esta tesis es la caracterización de digráficas bi-transitivas con al menos una clase de color fuertemente conexa:

Toda digráfica bi-transitiva con al menos una clase de color fuertemente conexa es bi-completa o cíclicamente 3-partita bi-completa.

Sería interesante poder estudiar a las digráficas bi-transitivas tal que ninguna clase de color es fuertemente conexa, ¿cómo serían estas digráficas?, ¿cómo serían sus componentes fuertemente conexas por color ?, ¿se podrá obtener un resultado similar al Teorema 1? Todavía queda mucho trabajo por hacer.

La estructura de este escrito será la siguiente: empezaremos con definiciones, tanto de conceptos generales de digráficas como definiciones que tienen que ver directamente con digráficas bi-transitivas, introduciremos notación y probaremos algunos resultados útiles relacionados con digráficas. Es importante tener en cuenta que todos los caminos, trayectorias y ciclos con los que estaremos trabajando son dirigidos por lo que no cargaremos con la palabra “dirigido”. En el segundo y tercer capítulo, estudiaremos trayectorias y ciclos, respectivamente, tanto monocromáticos como alternantes, dentro de digráficas bi-transitivas. En el último capítulo analizaremos las digráficas bi-generadas por ciclos monocromáticos, para finalmente concluir con la caracterización de las digráficas bi-transitivas con al menos una clase de color fuertemente conexa. Todas las proposiciones enunciadas son probadas dentro de éste mismo escrito.

Capítulo 1

Terminología básica, notación y resultados previos

En este capítulo, introduciremos ciertos conceptos básicos de digráficas, así como las demostraciones de algunos resultados importantes. Comenzaremos estudiando aquellos relacionados con digráficas sin color en sus flechas (o equivalentemente de un solo color), y posteriormente introduciremos los conceptos pertinentes para digráficas a cuyas flechas se les asigna uno de dos colores disponibles. Por último, daremos las definiciones relacionadas con digráficas bi-transitivas que utilizaremos en este trabajo. Con el fin de facilitar la comprensión de las definiciones introducidas en este capítulo, incluiremos dibujos.

1.1. Digráficas

Una **digráfica** D consiste de un conjunto finito no vacío $V(D)$ de objetos llamados **vértices**, junto con una colección $F(D)$ de pares ordenados de vértices llamados **flechas**. Para una flecha $f = (u, v)$, diremos que u y v son **adyacentes**; que u **incide hacia** v y que v **incide desde** u ; u es el **vértice inicial** de f y v es el **vértice final** de f . Una flecha con el mismo vértice inicial y final, es decir, una flecha de la forma (u, u) es llamada un **lazo** en u . Denotaremos por $u \rightarrow v$ si $(u, v) \in F(D)$. Decimos que existe una **flecha simétrica** entre dos vértices distintos u y v si $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow u$. Decimos que una digráfica es **asimétrica** si no contiene flechas simétricas.

Las digráficas tienen una representación geométrica en el plano, los vértices suelen ser representados con puntos, y una flecha (u, v) es representada con una flecha que sale desde el punto u y llega al punto v . Por ejemplo, en la Figura 1.1, se muestra una digráfica D , con $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $F(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_5)\}$. Observamos que hay un lazo en v_5 y existe flecha simétrica entre v_1 y v_2 .

Una **subdigráfica** D' de D , es una digráfica tal que $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$, en este caso diremos que D' está contenida en D . Si cada vez que $\{u, v\} \subseteq V(D')$ y $(u, v) \in F(D)$ implica que $(u, v) \in F(D')$, decimos que D' es una **subdigráfica inducida** por $X = V(D')$ y lo denotamos por $D' = D\langle X \rangle$. Decimos que D' es una **subdigráfica inducida por flechas** si existe $F' \subseteq F(D)$ tal que $F(D') = F'$ y $V(D') = \{v \in V(D) \mid v \text{ es vértice inicial o vértice final de } f \text{ para alguna } f \text{ en } F'\}$, en este caso decimos que D' es inducida por F' y lo denotamos por $D' = D\langle F' \rangle$. Si $V(D') = V(D)$, entonces decimos que D' es una **subdigráfica generadora** de

D.

En la Figura 1.2 se muestra la subdigráfica inducida por $X = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ de la digráfica en la Figura 1.1.

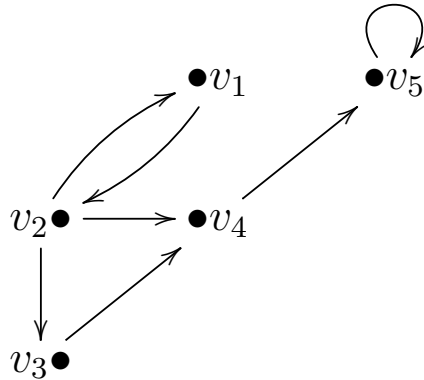


Figura 1.1: Ejemplo de una digráfica.

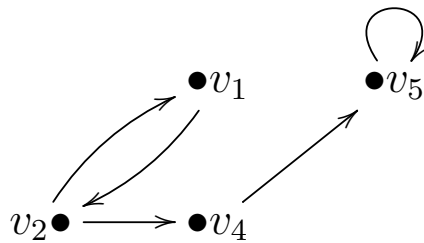


Figura 1.2: Subdigráfica inducida.

El **exgrado** de un vértice v , es el número de flechas con vértice inicial v , exceptuando lazos. Un vértice de exgrado cero es llamado **pozo**. Por ejemplo, en la digráfica de la Figura 1.1, el vértice v_2 tiene exgrado tres y el vértice v_5 tiene exgrado cero.

Una digráfica D es **completa** si para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq V(D)$ se tiene que $u \rightarrow v$ y $v \rightarrow u$. Un **torneo** es una digráfica asimétrica T tal que para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq V(T)$ se tiene que $u \rightarrow v$ ó $v \rightarrow u$.

Un **camino** W en una digráfica D es una sucesión alternada de vértices y flechas $W = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, v_n, f_n, v_{n+1})$, tal que el vértice inicial de f_i es v_i y el vértice final de f_i es v_{i+1} para cada i en $\{1, \dots, n\}$. Diremos que W es un $v_1 v_{n+1}$ -camino, y W es **cerrado** si $v_1 = v_{n+1}$. Si W no repite vértices, entonces W es una **trayectoria**, y similarmente diremos que W es una $v_1 v_{n+1}$ -trayectoria. Si los vértices v_1, v_2, \dots, v_n son distintos dos a dos y $v_1 = v_{n+1}$, entonces W es un **ciclo**, no consideraremos a los lazos como ciclos, es decir, un ciclo tiene al menos dos vértices. En este caso, los subíndices son considerados módulo n , es decir, $v_i = v_j$ y $f_i = f_j$ si $i \equiv j \pmod{n}$. La **longitud** de W , denotada por $l(W)$, se define como n , es decir, $l(W) = n$. Decimos que dos flechas f y f' son **consecutivas** en W si, $f = f_i$ y $f' = f_{i+1}$, con i en $\{1, \dots, n\}$. Decimos que una digráfica D es **acíclica**, si no existen ciclos en D .

Un hecho que vale la pena mencionar, es que generalmente los caminos suelen definirse como sucesiones de vértices adyacentes $W = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1})$, es decir, las flechas se omiten de la notación. Cuando la digráfica no tiene flechas múltiples

no hay ambigüedad y W denota un único camino, de lo contrario W denota uno de varios posibles caminos. Sin embargo en algunos casos nos es útil incluir las flechas en la notación para definir algunos conceptos. Dicho esto, nos permitiremos usar la notación sin flechas cuando así nos convenga.

En la Figura 1.3, se muestra una v_1v_7 -trayectoria de longitud 6 y en la Figura 1.4, se muestra un ciclo de longitud 6.

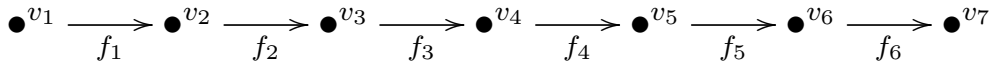


Figura 1.3: Ejemplo de una v_1v_7 -trayectoria.

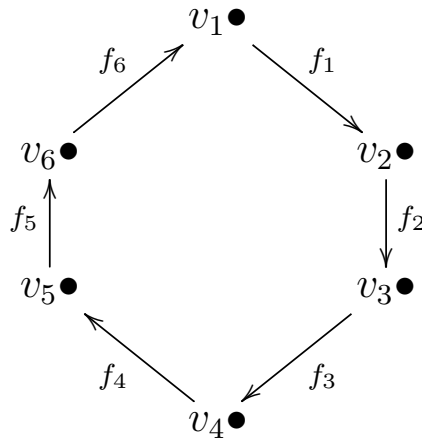


Figura 1.4: Ejemplo de un ciclo.

Sea D una digráfica, un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo contenido en D que pasa por cada vértice de D . Si D contiene un ciclo hamiltoniano se dice que D es **hamiltoniana**.

La **distancia** de u hacia v en D , denotada por $d(u, v)$, se define como sigue: $d(u, v) = \min\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}$ cuando existe al menos una uv -trayectoria, en otro caso $d(u, v) = \infty$. Notemos que $d(u, v)$ no necesariamente es igual a $d(v, u)$, por ejemplo en la digráfica de la Figura 1.1, $d(v_1, v_5) = 3$ y $d(v_5, v_1) = \infty$. El **diámetro** de D , denotado por $diám(D)$, se define como sigue: $diám(D) = \max\{d(u, v) \mid \{u, v\} \subseteq V(D)\}$.

Sea $T = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, f_{n-1}, v_n)$ un camino. El camino (la trayectoria) $(v_i, f_i, \dots, f_{k-1}, v_k)$ con $\{i, k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ y $i < k$, es llamado un **v_iv_k -subcamino** (una **v_iv_k -subtrayectoria**) de T y se denota por (v_i, T, v_k) . Para definir un v_iv_k -subcamino (una v_iv_k -subtrayectoria) con $\{v_i, v_k\} \subseteq V(T)$ y $i > k$, en caso de que el camino sea cerrado, reetiquetamos los vértices y las flechas de T de tal forma que $v_i = v_{i'}$, $v_k = v_{k'}$ y $i' < k'$, y hacemos $(v_i, T, v_k) = (v_{i'}, f_{i'}, \dots, f_{k-1}', v_{k'})$.

Sean \mathcal{C} un ciclo y $\{u, v\} \subseteq V(\mathcal{C})$, definimos la **distancia de u a v en \mathcal{C}** como; $d_{\mathcal{C}}(u, v) = l((u, \mathcal{C}, v))$. Si $d_{\mathcal{C}}(u, v) = k$, diremos que una flecha (u, v) es un **salto** de longitud k . Por ejemplo, en la Figura 1.4, $d_{\mathcal{C}}(v_1, v_3) = 2$ y $d_{\mathcal{C}}(v_3, v_1) = 4$.

Sean $T = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, f_{n-1}, v_n)$ y $T' = (v_n, f_{n+1}, v_{n+1}, \dots, f_{l-1}, v_l)$ caminos, denotaremos por $T \bullet T'$ a la **concatenación** de T y T' , esto es:

$$T \bullet T' = (v_1, f_1, v_2, \dots, f_{n-1}, v_n, f_{n+1}, v_{n+1}, \dots, f_{l-1}, v_l).$$

Teorema 2. Sean D una digráfica y $\{u, v\} \subseteq V(D)$, con $u \neq v$, todo uv -camino en D contiene una uv -trayectoria.

Demostración. Sea W un uv -camino y consideremos un uv -camino $T = (u = v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, f_{n-1}, v_n = v)$ contenido en W con:

$$l(T) = \text{mín}\{l(W') \mid W' \text{ es un } uv\text{-camino contenido en } W\}.$$

Si existen $\{v_i, v_j\} \subseteq V(T)$, con $v_i = v_j$ y $i < j$, entonces el camino $(u, T, v_i) \bullet (v_j, T, v)$ es un uv -camino contenido en W de longitud menor que $l(T)$, contradiciendo la minimalidad de $l(T)$. Por lo tanto, T no repite vértices, lo que implica que T es una uv -trayectoria. \square

Lema 1. Sean D una digráfica, W un camino cerrado en D con $l(W) > 1$ y $v \in V(W)$, entonces existe un ciclo \mathcal{C} contenido en W tal que $v \in V(\mathcal{C})$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(W)$.

Base de inducción. Si $l(W) = 2$ entonces $W = (v, u, v)$ para algún $u \in V(D)$. Por lo tanto, $\mathcal{C} = W$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para cada camino cerrado W' con $l(W') < n$, se tiene que existe un ciclo \mathcal{C} contenido en W' tal que $v \in V(\mathcal{C})$.

Paso inductivo. Sean W un camino cerrado y $v \in V(W)$. Como W es un camino cerrado, podemos iniciar en v , es decir, $W = (v = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v)$. Podemos suponer que W no es un ciclo por lo que existen $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, n-1\}$, con $i < j$, tales que $v_i = v_j$. Entonces $W' = (v, W, v_i) \bullet (v_j, W, v)$ es un camino cerrado de longitud menor que $l(W)$, con $v \in V(W')$, y por hipótesis de inducción se tiene que existe un ciclo \mathcal{C} contenido en W' tal que $v \in V(\mathcal{C})$.

Por lo tanto, W contiene un ciclo \mathcal{C} tal que $v \in V(\mathcal{C})$. \square

Teorema 3. Toda digráfica acíclica D tiene al menos un pozo, mas aún para todo $u \in V(D)$, existe un pozo v tal que existe una uv -trayectoria.

Demostración. Sea $u \in V(D)$, podemos suponer que u no es un pozo. Sea $T = (u = v_1, v_2, \dots, v_n)$ una trayectoria de longitud máxima entre todas las ux -trayectorias con $x \in V(D)$. Probaremos que v_n es un pozo. Procediendo por contradicción, supongamos que v_n tiene exgrado mayor que cero, por lo tanto existe $w \in V(D) - \{v_n\}$ tal que $f = (v_n, w) \in F(D)$.

Si $w \in V(T)$, entonces $w = v_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n-1\}$, por lo tanto $(w = v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, w)$ es un ciclo en D , contradiciendo que D es acíclica.

En otro caso, si $w \in V(D) - V(T)$, entonces $T \bullet f$ es una uv -trayectoria de longitud mayor que $l(T)$, lo cual contradice la maximalidad de $l(T)$. Por lo tanto, v_n es un pozo. \square

Una digráfica D es **fuertemente conexas**, si para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq V(D)$ existe un uv -camino y un vu -camino. Por ejemplo, la digráfica en la Figura 1.1 no es fuertemente conexas, pues no existe un v_5v_1 -camino, pero la digráfica en la Figura 1.5 sí lo es.

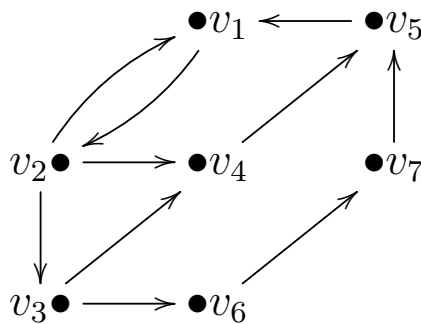


Figura 1.5: Ejemplo de una digráfica fuertemente conexa.

Teorema 4. *Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si D contiene un camino cerrado que pasa por todos los vértices de D .*

Demostración. Supongamos que D es fuertemente conexa. Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ un camino cerrado en D que contiene la máxima cantidad de vértices de D . Procediendo por contradicción, supongamos que existe $v \in V(D) - V(W)$. Como D es fuertemente conexa, se tiene que existen W' un v_0v -camino y W'' un vv_0 -camino. Entonces el camino $W \bullet W' \bullet W''$ es un camino cerrado que pasa por más vértices que W , contradiciendo la maximalidad de W .

Ahora supongamos que D contiene un camino cerrado $W = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ que pasa por todos los vértices de D . Sean $\{u, v\} \subseteq V(D)$ arbitrarios, tenemos que (u, W, v) es un uv -camino y (v, W, u) es un vu -camino. Por lo tanto D es fuertemente conexa. □

Corolario 1. *Si D es una digráfica fuertemente conexa y $v \in V(D)$, entonces D contiene un ciclo C tal que $v \in V(C)$.*

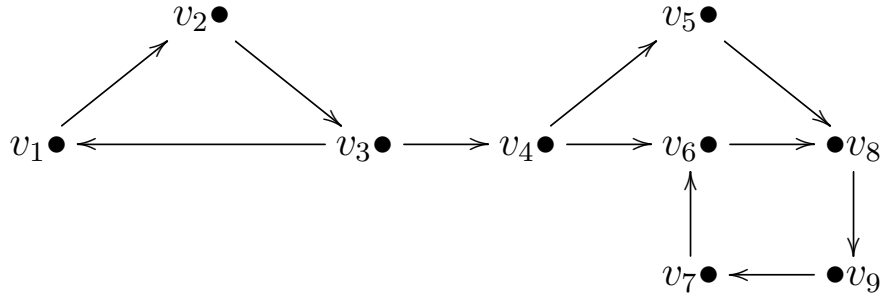
Demostración. Se sigue del Teorema 4 y del Lema 1. □

Corolario 2. *Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq V(D)$, existe un uv -camino que pasa por todos los vértices de D .*

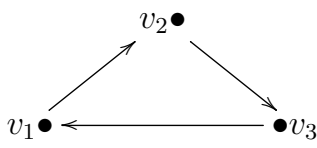
Demostración. Supongamos que D es fuertemente conexa. Por el Teorema 4 tenemos que D contiene un camino cerrado $W = (v_1, \dots, v_n = v_1)$ que pasa por todos los vértices de D . Entonces $(u, W, v_1) \bullet (v_1, W, u) \bullet (u, W, v_1) \bullet (v_1, W, v)$ es un uv -camino que pasa por todos los vértices de D .

Ahora supongamos que para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq V(D)$, existe un uv -camino que pasa por todos los vértices de D . En particular, existe un uu -camino que pasa por todos los vértices de D , es decir, un camino cerrado que pasa por todos los vértices de D , por el Teorema 4 tenemos que D es fuertemente conexa. □

Sea D una digráfica, decimos que H es una **componente fuertemente conexa**, si H es una subdigráfica inducida de D y H es máxima con la propiedad de ser fuertemente conexa. En la Figura 1.6 se muestra una digráfica D y sus componentes fuertemente conexas H_1, H_2, H_3 y H_4 .



(a) Digráfica D .



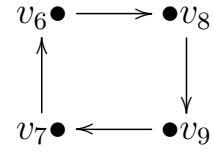
(b) H_1



(c) H_2



(d) H_3



(e) H_4

Figura 1.6: Digráfica D con componentes fuertemente conexas H_1, H_2, H_3 y H_4 .

Definimos a la **digráfica de condensación** de D , denotada por $H^*(D)$, como sigue:

$$V(H^*(D)) = \{H \mid H \text{ es una componente fuertemente conexas de } D\},$$

$$F(H^*(D)) = \{(H_1, H_2) \mid \text{existe } (u, v) \in F(D) \text{ con } u \in H_1 \text{ y } v \in H_2\}.$$

De tal forma que en $H^*(D)$ no haya multiflechas ni lazos.

A la componente fuertemente conexas H , tal que H es un pozo en $H^*(D)$, se le conoce como **componente terminal** de D .

En la Figura 1.7 se muestra la digráfica de condensación de la digráfica D de la Figura 1.6.

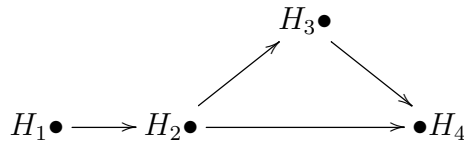


Figura 1.7: Digráfica de condensación de D .

Teorema 5. $H^*(D)$ es acíclica para toda digráfica D .

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe una digráfica D tal que $H^*(D)$ tiene un ciclo $\mathcal{C} = (V_1, V_2, \dots, V_n, V_{n+1} = V_1)$. Entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe $f_i = (x_i, y_i) \in F(D)$ con $x_i \in V_i$ y $y_i \in V_{i+1}$. Como V_i es fuertemente conexas en D , se sigue del Corolario 2 que existe un $y_{i-1}x_i$ -camino W_i que pasa por todos los vértices de V_i . Entonces $(y_n, W_1, x_1) \bullet f_1 \bullet (y_1, W_2, x_2) \bullet f_2 \bullet \dots \bullet (y_{n-1}, W_n, x_n) \bullet f_n$ es un camino cerrado que pasa por todos los vértices de $V^* := V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$ en D , se sigue del Teorema 4 que la subdigráfica inducida por

V^* en D es una componente fuertemente conexa o está contenida en una componente fuertemente conexa de D , contradiciendo que cada V_i es una componente fuertemente conexa en D . \square

Corolario 3. *Para toda digráfica D , $H^*(D)$ tiene al menos un pozo.*

Demostración. Se sigue del Teorema 3 y del Teorema 5. \square

Corolario 4. *Toda digráfica tiene al menos una componente terminal.*

Demostración. Sea D una digráfica, se sigue del Corolario 3 que $H^*(D)$ tiene al menos un pozo H , lo que implica que H es una componente terminal de D . \square

Corolario 5. *Para toda digráfica D y para cada $u \in V(D)$, existe una componente terminal H tal que hay una uv -trayectoria para cada $v \in H$.*

Demostración. Sea $u \in V(D)$ y H' la componente fuertemente conexa tal que $u \in H'$, ya que $H^*(D)$ es acíclica, tenemos por el Teorema 3 que existe un pozo H en $H^*(D)$ tal que existe una $H'H$ -trayectoria en $H^*(D)$. Como H' y H son fuertemente conexas, tenemos que existe uv -trayectoria para cada $v \in H$ con H componente terminal de D . \square

Un **núcleo por trayectorias** en una digráfica D , es un conjunto $\mathcal{K} \subseteq V(D)$ tal que:

- Para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq \mathcal{K}$ con $u \neq v$, no existe una uv -trayectoria ni una vu -trayectoria.
- Para cualquier $u \in V(D) - \mathcal{K}$, existe $v \in \mathcal{K}$ tal que hay una uv -trayectoria.

En la Figura 1.8 se muestra un ejemplo de una digráfica con núcleo por trayectorias, a saber $\{v_5, v_6\}$.

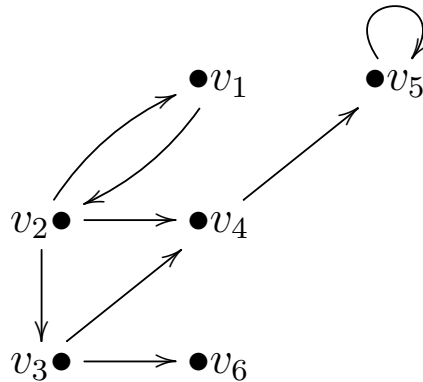


Figura 1.8: Digráfica con núcleo por trayectorias $\{v_5, v_6\}$.

Teorema 6. *Toda digráfica tiene núcleo por trayectorias.*

Demostración. Sean una digráfica D y H_1, \dots, H_n las componentes terminales de D , cuya existencia se sigue del Corolario 4. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tomemos $v_i \in V(H_i)$ y consideremos el conjunto $\mathcal{K} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Sea $u \in V(D) - \mathcal{K}$, se sigue del Corolario 5 que existe $v \in \mathcal{K}$ tal que existe una uv -trayectoria. Además, como para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que H_i es una componente terminal, entonces tenemos que para cualesquiera $\{v_j, v_k\} \subseteq \mathcal{K}$ con $v_j \neq v_k$, no existe una $v_j v_k$ -trayectoria ni una $v_k v_j$ -trayectoria. Por lo tanto, \mathcal{K} es un núcleo por trayectorias. \square

Una digráfica D es **bipartita** si existe una partición (A, B) de $V(D)$ tal que no existe flecha con vértice inicial y vértice final en el mismo conjunto, en este caso llamamos a (A, B) una bipartición de $V(D)$.

Lema 2. *Todo camino cerrado de contiene un ciclo de longitud impar o un lazo.*

Demostración. Sea W un camino cerrado de longitud impar. Procederemos por inducción sobre $l(W)$.

Base de inducción. Si $l(W) = 1$, entonces el resultado es inmediato, pues la única flecha en W es un lazo.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para cada camino cerrado de longitud impar W' , con $l(W') \leq n - 1$ y $n \geq 2$, se tiene que W' contiene un ciclo de longitud impar o un lazo.

Paso inductivo. Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ un camino cerrado de longitud impar. Si W no repite vértices, salvo el primero y el último, entonces W es un ciclo de longitud impar. En otro caso, sea $j \in \{1, \dots, n - 1\}$ tal que $v_j = v_k$ con $j < k \leq n$. Consideremos los caminos cerrados $W' = (v_0, W, v_j) \bullet (v_k, W, v_0)$ y $W'' = (v_j, W, v_k = v_j)$, entonces $l(W) = l(W') + l(W'')$ y como W tiene longitud impar entonces W' o W'' tiene longitud impar. Supongamos sin pérdida de generalidad que W' tiene longitud impar, por hipótesis de inducción se tiene que W' contiene un ciclo de longitud impar o un lazo y por lo tanto W contiene un ciclo de longitud impar o un lazo. \square

Teorema 7. *Toda digráfica fuertemente conexa sin ciclos de longitud impar, sin lazos y con al menos dos vértices es bipartita.*

Demostración. Sean D una digráfica fuertemente conexa sin ciclos de longitud impar, $v \in V(D)$, $B = \{y \in V(D) \mid \text{existe } vy\text{-camino de longitud par}\}$ y $C = \{y \in V(D) \mid \text{existe } vy\text{-camino de longitud impar}\}$. Probaremos que (B, C) es una bipartición de $V(D)$.

Notemos que $B \neq \emptyset$ pues $v \in B$ y como D es fuertemente conexa y $|V(D)| \geq 2$, $C \neq \emptyset$ y $B \cup C = V(D)$.

Ahora veamos que $B \cap C = \emptyset$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe $w \in B \cap C$. Sean W un vw -camino de longitud par y W' un vw -camino de longitud impar. Como D es fuertemente conexa, existe un wv -camino W^* .

Tenemos dos opciones:

- Si W^* es par, entonces $W' \bullet W^*$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar y se sigue del Lema 2 que $W' \bullet W^*$ contiene un ciclo de longitud impar o un lazo, lo cual es una contradicción.
- En otro caso, W^* es impar y $W \bullet W^*$ es un camino dirigido cerrado de longitud impar y se sigue del Lema 2 que $W \bullet W^*$ contiene un ciclo de longitud impar o un lazo, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $B \cap C = \emptyset$.

Así, (B, C) es una partición de $V(D)$.

Por último, si existe $f = (x, y) \in F(D)$ con x y y en el mismo conjunto, digamos $\{x, y\} \subseteq B$, entonces existe un vx -camino W_1 de longitud par, se sigue que $W_1 \bullet f$ es un vy -camino de longitud impar, por lo tanto $y \in C$. Entonces $y \in B \cap C$, lo cual es una contradicción. Si $\{x, y\} \subseteq C$, el argumento es análogo.

Por lo tanto D es bipartita. \square

1.2. Digráficas 2-coloreadas

Estaremos trabajando con digráficas tales que a cada flecha se le asigna uno de k posibles colores, y serán llamadas **k -coloreadas**, en particular estudiaremos digráficas 2-coloreadas, y podrán existir flechas distintas $f_1 = (u, v)$ y $f_2 = (u, v)$ siempre y cuando estas flechas sean de distinto color, como se muestra en la Figura 1.9, y serán llamadas **multiflechas**. Para propósitos de ilustrar las digráficas 2-coloreadas, usaremos en cada dibujo, al color rojo como el color c_1 y al color azul como el color c_2 .

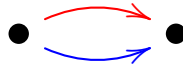


Figura 1.9: Multiflecha.

Denotaremos por $u \xrightarrow{c} v$ si existe la flecha (u, v) de color c , $c(f)$ al color de una flecha f , es decir, si f es una flecha de color c entonces $c(f) = c$.

Decimos que una flecha (u, v) es **simétrica c -monocromática** si $u \xrightarrow{c} v$ y $v \xrightarrow{c} u$. En la Figura 1.10, se muestra una flecha c_1 -monocromática. Así mismo, diremos que una flecha (u, v) es **simétrica bi-color** si $u \xrightarrow{c} v$ y $v \xrightarrow{\bar{c}} u$ con $\bar{c} \neq c$, como se muestra en la figura Figura 1.11.



Figura 1.10: Flecha simétrica c_1 -monocromática.



Figura 1.11: Flecha simétrica bi-color.

Una **trayectoria alternante** es una trayectoria $T = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, f_{n-1}, v_n)$ tal que $c(f_i) \neq c(f_{i+1})$ para cada $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Una **trayectoria monocromática** es una trayectoria $T = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, f_{n-1}, v_n)$ tal que, $c(f_i) = c(f_{i+1})$ para cada $i \in \{1, \dots, n-2\}$, y decimos que T es **c -monocromática** si, $c(f_i) = c(f_{i+1}) = c$ para cada $i \in \{1, \dots, n-2\}$. En las Figuras 1.12 y 1.13, se muestran una trayectoria alternante y una trayectoria c_2 -monocromática, respectivamente.



Figura 1.12: Trayectoria alternante.



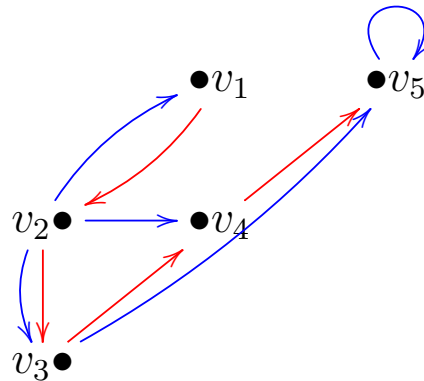
Figura 1.13: Trayectoria c_2 -monocromática.

Un **núcleo por trayectorias alternantes** en una digráfica D , es un conjunto $\mathcal{K} \subseteq V(D)$ tal que:

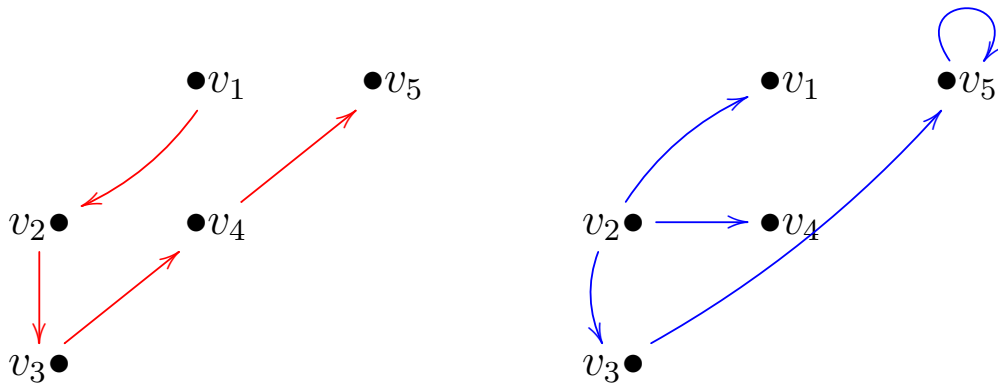
- Para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq \mathcal{K}$ con $u \neq v$, no existe una uv -trayectoria alternante ni una vu -trayectoria alternante.
- Para cualquier $u \in V(D) - \mathcal{K}$, existe $v \in \mathcal{K}$ tal que existe una uv -trayectoria alternante.

Sea D una digráfica k -coloreada, y sea c uno de los k posibles colores, definimos a la **clase de color** C , correspondiente al color c , de la siguiente manera: $C = \{f \in F(D) \mid c(f) = c\}$. Decimos que la clase de color C es **c -fuertemente conexa**, si la subdigráfica inducida por C , $D\langle C \rangle$, es fuertemente conexa y además $D\langle C \rangle$ es generadora. En este caso, decimos que la clase es fuertemente conexa. Decimos que C es **c -unilateralmente conexa** si $D\langle C \rangle$ es unilateralmente conexa y además $D\langle C \rangle$ es generadora. En este caso, decimos que la clase es unilateralmente conexa.

En la Figura 1.14, se muestra un ejemplo de una digráfica D y las subdigráficas inducidas por ambas clases de color, respectivamente. Observamos que la clase de color C_1 es c_1 -unilateralmente conexa, pues $D\langle C_1 \rangle$ es unilateralmente conexa y la clase de color C_2 no es c_2 -unilateralmente conexa, pues $D\langle C_2 \rangle$ no es unilateralmente conexa.



(a) Digráfica D , cuya clase de color C_1 es c_1 -unilateralmente conexa.



(b) $D\langle C_1 \rangle$

(c) $D\langle C_2 \rangle$

Figura 1.14

Un **ciclo alternante** es un ciclo $\mathcal{C} = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, f_{n-1}, v_n, f_n, v_1)$ tal que $c(f_i) \neq c(f_{i+1}) \pmod{n}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Un **ciclo monocromático** es un ciclo $\mathcal{C} = (v_1, f_1, v_2, f_2, \dots, f_{n-1}, v_n, f_n, v_1)$ tal que $c(f_i) = c(f_{i+1})$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Decimos que \mathcal{C} es **c -monocromático** si, $c(f_i) = c$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. En las figuras 1.15 y 1.16, se muestran un ciclo alternante y un ciclo c_2 -monocromático, respectivamente.

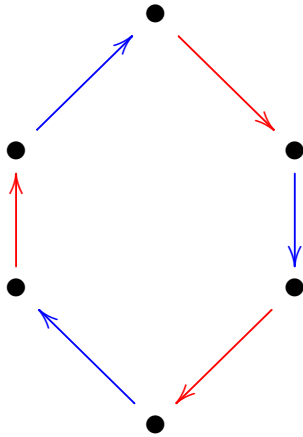


Figura 1.15: Ciclo alternante.

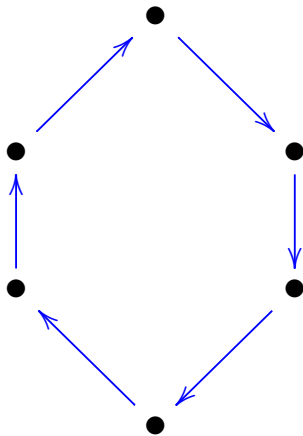


Figura 1.16: Ciclo c_2 -monocromático.

Para indicar el color de una flecha f dentro de una trayectoria T o dentro de un ciclo \mathcal{C} , usaremos $c_T(f)$ o $c_{\mathcal{C}}(f)$, respectivamente.

A partir de ahora, omitiremos las flechas en la notación de trayectoria y ciclo, y solamente usaremos $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ para denotar una v_1v_n -trayectoria y un ciclo respectivamente, y explicaremos aparte de qué color son las flechas correspondientes.

1.3. Digráficas Bi-transitivas

A continuación, daremos a conocer la definición más importante del presente trabajo, presentaremos a las digráficas bi-transitivas.

Definición 1. Sea D una digráfica 2-coloreada con colores c_1 y c_2 . Decimos que D es **bi-transitiva** siempre que, para cualesquiera vértices $\{u, v, w\} \subseteq V(D)$, con al menos dos de ellos distintos, se cumple que si $u \xrightarrow{c_i} v$ y $v \xrightarrow{c_i} w$ con $i \in \{1, 2\}$ entonces $u \xrightarrow{c_j} w$, con $j \neq i$, $j \in \{1, 2\}$ (ver Figura 1.17).



Figura 1.17

Las siguientes observaciones se siguen inmediatamente de la Definición 1:

- Si $u = w$, entonces $u \xrightarrow{c_i} v$ y $v \xrightarrow{c_i} u$ y se sigue de la Definición 1 que $u \xrightarrow{c_j} u$, es decir, existe un lazo en u de color c_j (ver Figura 1.18).

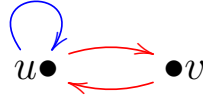


Figura 1.18

- Si $u = v$ entonces $u \xrightarrow{c_i} u$ y $u \xrightarrow{c_i} w$ y se sigue de la Definición 1 que $u \xrightarrow{c_j} w$ (ver Figura 1.19a) y si $v = w$ entonces $u \xrightarrow{c_i} w$ y $w \xrightarrow{c_i} w$ y se sigue de la Definición 1 que $u \xrightarrow{c_j} w$ (ver Figura 1.19b).



Figura 1.19

Definición 2. Sea D una digráfica 2-coloreada. La digráfica **bi-generada** por D es la digráfica D' obtenida desde D al unir recursivamente pares de vértices u y v , tales que existe una uv -trayectoria c -monocromática de longitud 2, con una flecha (u, v) de color \bar{c} , con $\bar{c} \neq c$, hasta que no exista tal par de vértices. En este caso diremos que D **bi-genera** a D' .

Observamos que toda digráfica bi-generada es bi-transitiva.

En la Figura 1.20 tenemos un ejemplo de una digráfica D y la digráfica que ésta bi-genera, D' .

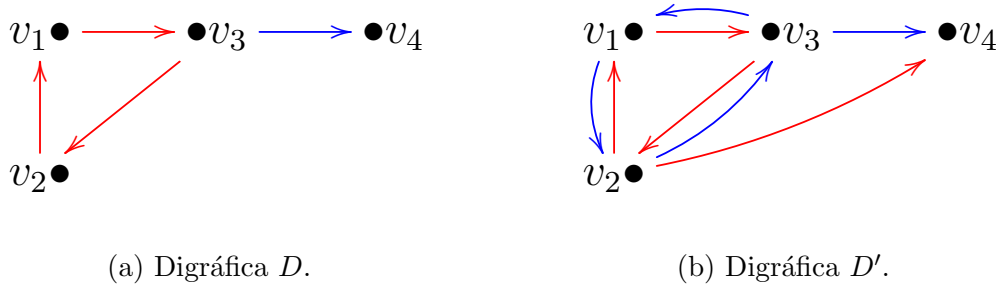


Figura 1.20: Ejemplo de digráfica bi-generada.

De lo observado anteriormente, obtenemos el siguiente resultado:

Lema 3. *Sea D una digráfica bi-transitiva. Una flecha simétrica c -monocromática (u, v) , con $c \in \{c_1, c_2\}$, bi-genera lazos de color \bar{c} , con $\bar{c} \neq c$, $\bar{c} \in \{c_1, c_2\}$, en cada uno de los extremos u y v . Más aún, si existe $w \in V(D) - \{u, v\}$ tal que $w \rightarrow v$ o $w \rightarrow u$ entonces $w \xrightarrow{c_i} u$ y $w \xrightarrow{c_i} v$ para cada $i \in \{1, 2\}$ y si $u \rightarrow w$ o $v \rightarrow w$ entonces $u \xrightarrow{c_i} w$ y $v \xrightarrow{c_i} w$ para cada $i \in \{1, 2\}$ (ver Figura 1.21).*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c = c_1$, entonces por la Definición 1 tenemos que $u \xrightarrow{c_2} u$ y $v \xrightarrow{c_2} v$, es decir, existe un lazo de color c_2 en u y en v .

Supongamos que existe $w \in V(D) - \{u, v\}$ tal que, $v \rightarrow w$ o $u \rightarrow w$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v \rightarrow w$.

Si $v \xrightarrow{c_1} w$, entonces como $u \xrightarrow{c_1} v$, por la Definición 1, tenemos que $u \xrightarrow{c_2} w$. Como $u \xrightarrow{c_2} u$, se sigue de la Definición 1 que $u \xrightarrow{c_1} w$. Finalmente, como $v \xrightarrow{c_1} u$, de nuevo por la Definición 1, tenemos que $v \xrightarrow{c_2} w$.

Si $v \xrightarrow{c_2} w$, entonces como $v \xrightarrow{c_2} v$, por la Definición 1, tenemos que $v \xrightarrow{c_1} w$. Como $u \xrightarrow{c_1} v$, se sigue de la Definición 1, que $u \xrightarrow{c_2} w$. Finalmente, como $u \xrightarrow{c_2} u$, de nuevo por la Definición 1, tenemos que $u \xrightarrow{c_1} w$.

En cualquier caso, tenemos que $u \xrightarrow{c_i} w$ y $v \xrightarrow{c_i} w$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

De manera análoga, se prueba que si existe $w \in V(D) - \{u, v\}$ tal que $w \rightarrow u$ o $w \rightarrow v$, entonces $w \xrightarrow{c_i} u$ y $w \xrightarrow{c_i} v$ para cada $i \in \{1, 2\}$. \square

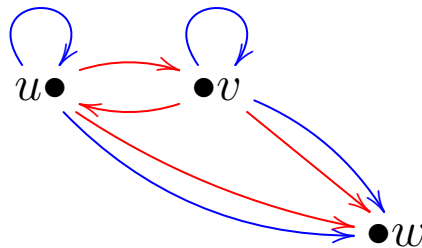


Figura 1.21

Definición 3. Sea D una digráfica bi-transitiva. Diremos que D es **bi-completa** si para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq V(D)$, (incluyendo el caso donde $v = u$), se tiene que $u \xrightarrow{c_i} v$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

En la Figura 1.22 tenemos un ejemplo de una digráfica bi-completa con 3 vértices.

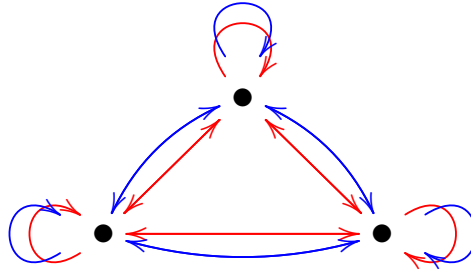


Figura 1.22: Ejemplo de una digráfica bi-completa.

Capítulo 2

Trayectorias en digráficas bi-transitivas

A continuación, veremos algunas propiedades que tienen las trayectorias en una digráfica bi-transitiva.

Varios resultados importantes de esta tesis se deducen de la congruencia módulo 3 que tenga la longitud de una trayectoria monocromática, en este capítulo estudiaremos el comportamiento de las trayectorias monocromáticas y encontraremos varias características interesantes. También podremos observar que las digráficas bi-transitivas tienen núcleo por trayectorias alternantes, y que si una digráfica bi-transitiva tiene al menos una clase de color fuertemente conexa entonces el diámetro es a lo más 2.

2.1. Trayectorias en digráficas bi-transitivas

Lema 4. Sean D una digráfica bi-transitiva, $\{u, v\} \subseteq V(D)$ y supongamos que existe una uv -trayectoria alternante $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ en D y $w \in V(D) - V(T)$. Si $v \xrightarrow{c} w$ y $c = c_T((v_{n-1}, v))$, entonces para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, se tiene que $v_i \xrightarrow{\bar{c}} w$ con $\bar{c} \neq c_T((v_i, v_{i+1}))$ (ver Figura 2.1).

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(T)$.

Base de inducción. Si $l(T) = 1$, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $c_T((u, v)) = c_1$. Por hipótesis tenemos que $v \xrightarrow{c_1} w$ y se sigue de la Definición 1 que $u \xrightarrow{c_2} w$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Lema 4 se cumple para cada trayectoria alternante T' con $l(T') = n-1$, $n \geq 2$.

Paso inductivo. Sean $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ una trayectoria alternante en D , $w \in V(D) - V(T)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $c_T((v_{n-1}, v)) = c_1$. Por hipótesis $v \xrightarrow{c_1} w$. Así que $v_{n-1} \xrightarrow{c_1} v$ y $v \xrightarrow{c_1} w$. Ahora, por la Definición 1, $v_{n-1} \xrightarrow{c_2} w$.

Sea $T' = (u, T, v_{n-1})$, notemos que $c_{T'}((v_{n-2}, v_{n-1})) = c_2$, pues T es alternante. Se sigue de la hipótesis de inducción que para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $v_i \xrightarrow{c} w$ con $c \neq c_{T'}((v_i, v_{i+1}))$. Por lo tanto, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $v_i \xrightarrow{c} w$ con $c \neq c_T((v_i, v_{i+1}))$. \square

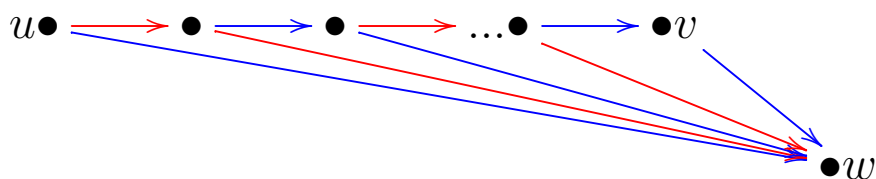


Figura 2.1

Teorema 8. Sean D una digráfica bi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Si existe una uv -trayectoria en D , entonces existe una uv -trayectoria alternante.

Demostración. Sea T una uv -trayectoria en D . Procederemos por inducción sobre $l(T)$.

Base de inducción. Si $l(T) = 1$, entonces $T = (u, v)$, y se sigue que T es una uv -trayectoria alternante.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 8 se cumple para cada trayectoria T' con $l(T') = n - 1$, $n \geq 2$.

Paso inductivo. Sean $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ una uv -trayectoria y $T' = (u, T, v_{n-1})$. Se sigue de la hipótesis de inducción que existe una uv_{n-1} -trayectoria alternante, digamos $T^* = (u, \dots, w, v_{n-1})$. Si $v \in V(T^*)$, entonces (u, T^*, v) es una uv -trayectoria alternante. Supongamos que $v \notin V(T^*)$. Si $c_{T^*}((w, v_{n-1})) \neq c_T((v_{n-1}, v))$ entonces $T^* \bullet (v_{n-1}, v)$ es una uv -trayectoria alternante. De lo contrario, se sigue del Lema 4 que existe una flecha de u hacia v , la cual es una uv -trayectoria alternante. \square

Corolario 6. Toda digráfica bi-transitiva tiene núcleo por trayectorias alternantes, más aún un conjunto de vértices es núcleo por trayectorias si y sólo si es núcleo por trayectorias alternantes.

Demostración. Sean D una digráfica bi-transitiva y $\mathcal{K} \subseteq V(D)$. Supongamos que \mathcal{K} es un núcleo por trayectorias. Sean $\{u, v\} \subseteq \mathcal{K}$, con $u \neq v$, entonces por la definición de núcleo por trayectorias tenemos que no existe una uv -trayectoria ni una vu -trayectoria, esto implica que no existe una uv -trayectoria alternante ni una vu -trayectoria alternante. Ahora, sea $u \in V(D) - \mathcal{K}$, se sigue por la definición de núcleo por trayectorias que existe $v \in \mathcal{K}$ tal que hay una uv -trayectoria y por el Teorema 8, tenemos que existe una uv -trayectoria alternante. Por lo tanto, \mathcal{K} es un núcleo por trayectorias alternantes.

Se sigue del Teorema 6 que D tiene núcleo por trayectorias y por lo tanto D tiene núcleo por trayectorias alternantes.

Ahora supongamos que \mathcal{K} es un núcleo por trayectorias alternantes, sea $u \in V(D) - \mathcal{K}$, se sigue por la definición de núcleo por trayectorias alternantes que existe $v \in \mathcal{K}$ tal que hay una uv -trayectoria alternante y por lo tanto existe una uv -trayectoria. Ahora, sean $\{u, v\} \subseteq \mathcal{K}$, con $u \neq v$, entonces por la definición de núcleo por trayectorias alternantes tenemos que no existe una uv -trayectoria alternante ni una vu -trayectoria alternante. Si existiera una uv -trayectoria o una vu -trayectoria, entonces se sigue del Teorema 8 que existiría una uv -trayectoria alternante o una vu -trayectoria alternante, lo cual es una contradicción. Por lo tanto \mathcal{K} es un núcleo por trayectorias. \square

Observemos que la hipótesis de ser digráfica bi-transitiva es indispensable, en la Figura 2.2 se muestra un ejemplo de una digráfica que no es bi-transitiva y tiene núcleo por trayectorias alternantes $\{v_5, v_6\}$, sin embargo el conjunto $\{v_5, v_6\}$ no es un núcleo por trayectorias, pues existe una v_6v_5 -trayectoria.

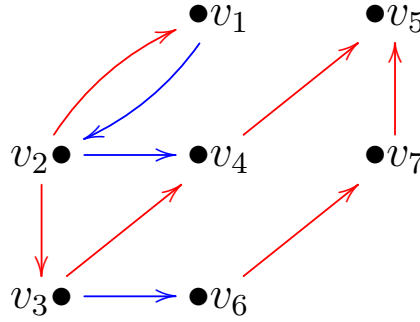


Figura 2.2: Digráfica con núcleo por trayectorias alternantes = $\{v_5, v_6\}$.

Teorema 9. Sean D una digráfica bi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Si existe una uv -trayectoria c_1 -monocromática T en D , entonces $d(u, v) \leq 2$.

Mas aún,

- Si $l(T) \equiv 0 \pmod{3}$, entonces existe una uv -trayectoria alternante de longitud 2 tal que, la primera flecha es de color c_1 y la segunda flecha es de color c_2 , y existe una uv -trayectoria alternante de longitud 2 tal que, la primera flecha es de color c_2 y la segunda flecha es de color c_1 .
- Si $l(T) \equiv 1 \pmod{3}$, entonces $u \xrightarrow{c_1} v$.
- Si $l(T) \equiv 2 \pmod{3}$, entonces $u \xrightarrow{c_2} v$,

(ver Figura 2.3).

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(T)$.

Base de inducción. Si $l(T) = 1$, entonces claramente $u \xrightarrow{c_1} v$ y $d(u, v) = 1 \leq 2$. Si $l(T) = 2$, se sigue de la Definición 1 que $u \xrightarrow{c_2} v$ y además $d(u, v) = 1 \leq 2$. Si $l(T) = 3$, sea $T = (u, w, z, v)$, entonces por la Definición 1 tenemos que $u \xrightarrow{c_2} z$ y $w \xrightarrow{c_2} v$. Sean $T_1 = (u, T, w) \bullet (w, v)$ con $c((w, v)) = c_2$ y $T_2 = (u, z) \bullet (z, T, v)$ con $c((u, z)) = c_2$, entonces T_1 y T_2 son uv -trayectorias alternantes de longitud 2 con las propiedades requeridas en el Teorema 9.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 9 se cumple para cada trayectoria T' c_1 -monocromática con $l(T') = n - 1$, $n \geq 2$.

Paso inductivo. Sea $T = (u = v_1, v_2, \dots, v_{n+1} = v)$ una uv -trayectoria c_1 -monocromática.

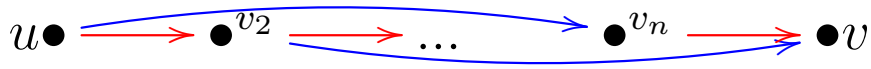
Caso (1) Si $n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces $n - 1 \equiv 2 \pmod{3}$, y por hipótesis de inducción sobre las trayectorias (u, T, v_n) y (v_2, T, v) se tiene que $u \xrightarrow{c_2} v_n$ y $v_2 \xrightarrow{c_2} v$. Sean $T_1 = (u, T, v_2) \bullet (v_2, v)$ con $c((v_2, v)) = c_2$ y $T_2 = (u, v_n) \bullet (v_n, T, v)$ con $c((u, v_n)) = c_2$, entonces T_1 y T_2 son uv -trayectorias alternantes de longitud 2 con las propiedades requeridas en el Teorema 9.

Caso (2) Si $n \equiv 1 \pmod{3}$, entonces $n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, y por hipótesis de inducción sobre la trayectoria (u, T, v_n) tenemos que existe una uv_n -trayectoria alternante de longitud 2 tal que, la primera flecha es de color c_2 y la segunda flecha es de color c_1 , digamos (u, z, v_n) . Entonces, ya que $c_T((v_n, v)) = c_1$, tenemos por la Definición 1 que $z \xrightarrow{c_2} v$ y de esto se sigue, también por la Definición 1, que $u \xrightarrow{c_1} v$.

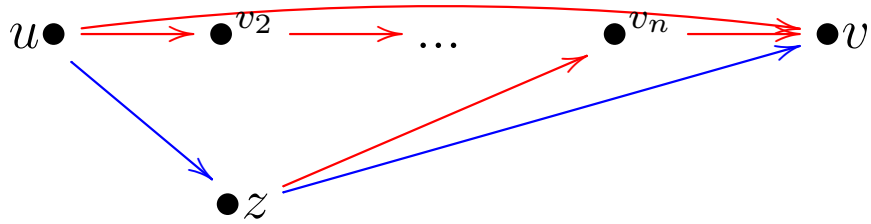
Caso (3) Si $n \equiv 2 \pmod{3}$, entonces $n - 1 \equiv 1 \pmod{3}$, y por hipótesis de inducción sobre la trayectoria (u, T, v_n) tenemos que $u \xrightarrow{c_1} v_n$, y como $c_T((v_n, v)) = c_1$, se sigue de la Definición 1 que $u \xrightarrow{c_2} v$.

En cualquiera de los tres casos, tenemos que existe una uv -trayectoria de longitud 1 o 2, y por lo tanto $d(u, v) \leq 2$. \square

Caso(1)



Caso(2)



Caso(3)

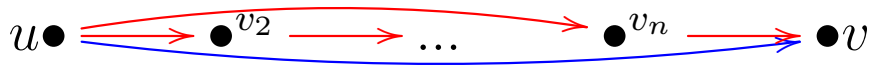


Figura 2.3

Corolario 7. Toda digráfica bi-transitiva con al menos una clase de color fuertemente conexa, tiene diámetro a lo más 2.

Demostración. Sean D una digráfica bi-transitiva con la clase de color C c -fuertemente conexa y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Entonces existe una uv -trayectoria c -monocromática y una vu -trayectoria c -monocromática. Se sigue del Teorema 9 que $d(u, v) \leq 2$ y $d(v, u) \leq 2$. Por lo tanto $\text{diám}(D) \leq 2$. \square

Teorema 10. Sean D una digráfica bi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Si existe una uv -trayectoria c -monocromática T , con $l(T) \geq 6$ y $l(T) \equiv 0 \pmod{3}$ en D , entonces existe una uv -trayectoria c_i -monocromática de longitud 3 para cada $i \in \{1, 2\}$ (ver Figura 2.4).

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(T)$.

Base de inducción. Si $l(T) = 6$, entonces sean $T = (u = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 = v)$, $T_1 = (u, T, v_4)$ y $T_2 = (v_4, T, v)$. Como $l(T_1) = l(T_2) = 3$, se sigue del Teorema 9 que existe una uv_4 -trayectoria alternante de longitud 2 tal que, la primera flecha es de color c_1 y la segunda flecha es de color c_2 , digamos $T' = (u, v_i, v_4)$, y existe una v_4v -trayectoria alternante de longitud 2 tal que, la primera flecha es de color c_2 y la segunda flecha es de color c_1 , digamos $T^* = (v_4, v_j, v)$. Ahora, ya que $v_i \xrightarrow{c_2} v_4$ y $v_4 \xrightarrow{c_2} v_j$, por la Definición 1 se tiene que $v_i \xrightarrow{c_1} v_j$. La trayectoria $(u, T', v_i) \bullet (v_i, v_j) \bullet (v_j, T^*, v)$ con $c((v_i, v_j)) = c_1$ es una uv -trayectoria c_1 -monocromática de longitud 3. De manera análoga se prueba que existe una uv -trayectoria c_2 -monocromática de longitud 3.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 10 se cumple para cada trayectoria c -monocromática T' con $6 \leq l(T') < n$, $n > 6$ y $l(T') \equiv 0 \pmod{3}$.

Paso inductivo. Sean $T = (u = v_1, v_2, \dots, v_{n+1} = v)$ una uv -trayectoria c -monocromática con $l(T) \equiv 0 \pmod{3}$ y $T' = (u, T, v_{n-2})$. Se sigue de la hipótesis de inducción que existe una uv_{n-2} -trayectoria c_1 -monocromática de longitud 3, digamos (u, v_i, v_j, v_{n-2}) y se sigue del Teorema 9 que existe una $v_{n-2}v$ -trayectoria alternante de longitud 2 tal que, la primera flecha es de color c_1 y la segunda flecha es de color c_2 , digamos $T^* = (v_{n-2}, v_k, v)$. Ahora, por la Definición 1, $u \xrightarrow{c_2} v_j$ y $v_j \xrightarrow{c_2} v_k$. La trayectoria $(u, v_j) \bullet (v_j, v_k) \bullet (v_k, T^*, v)$ con $c((u, v_j)) = c((v_j, v_k)) = c_2$ es una uv -trayectoria c_2 -monocromática de longitud 3. De manera análoga se prueba que existe una uv -trayectoria c_1 -monocromática de longitud 3. \square

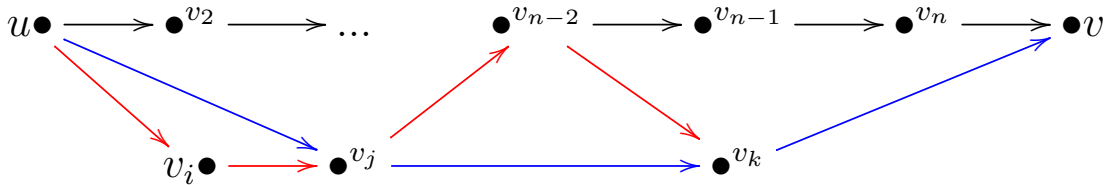


Figura 2.4

Teorema 11. Sean D una digráfica bi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Si existe una uv -trayectoria c -monocromática T , con $l(T) \geq 4$ y $l(T) \equiv 1 \pmod{3}$ en D , entonces existe una uv -trayectoria \bar{c} -monocromática de longitud 2 con $\bar{c} \neq c$.

Demostración. Si $l(T) = 4$, entonces sea $T = (u = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 = v)$. Se sigue de la Definición 1 que existen las flechas $f = (u, v_3)$ y $f' = (v_3, v)$ de color \bar{c} . Entonces $f \bullet f'$ es una uv -trayectoria \bar{c} -monocromática de longitud 2.

En otro caso, $l(T) \geq 7$. Sean $T = (u = v_1, v_2, \dots, v_n = v)$ una uv -trayectoria c -monocromática con $l(T) \equiv 1 \pmod{3}$ y $T' = (u, T, v_{n-1})$. Entonces $l(T') \equiv 0 \pmod{3}$ y $l(T') \geq 6$, se sigue del Teorema 10 que existe una uv_{n-1} -trayectoria c -monocromática de longitud 3, digamos T^* . Entonces $T^* \bullet (v_{n-1}, T, v)$ es una uv -trayectoria c -monocromática de longitud 4 y procediendo como al principio de esta demostración, obtenemos que existe una uv -trayectoria \bar{c} -monocromática de longitud 2. \square

Teorema 12. Sean D una digráfica bi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$. Si existe una uv -trayectoria c -monocromática T , con $l(T) \equiv 2 \pmod{3}$ en D , entonces existe una uv -trayectoria c -monocromática de longitud 2.

Demostración. Sean $T = (u = v_1, v_2, \dots, v_n = v)$ una uv -trayectoria c -monocromática con $l(T) \equiv 2 \pmod{3}$ y $T' = (u, T, v_{n-1})$. Entonces $l(T') \equiv 1 \pmod{3}$ y se sigue del Teorema 9 que existe la flecha $f = (u, v_{n-1})$ de color c . Entonces $f \bullet (v_{n-1}, T, v)$ es una uv -trayectoria c -monocromática de longitud 2. \square

Como consecuencia de los teoremas anteriores tenemos el siguiente corolario, el cual describe la longitud mínima de una trayectoria monocromática, dependiendo si queremos un color específico o no.

Corolario 8. Sean D una digráfica bi-transitiva y $\{u, v\} \subseteq V(D)$ tales que existe una uv -trayectoria c -monocromática. Entonces,

- $\min\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria monocromática}\} \in \{1, 3\}$
- $\min\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria } c\text{-monocromática}\} \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. Sean $a = \min\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria monocromática}\}$ y $b = \min\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria } c\text{-monocromática}\}$.

Sea T una uv -trayectoria c -monocromática con $l(T) = b$. Procediendo por contradicción, supongamos que $b \geq 4$.

Si $b \equiv 0 \pmod{3}$, entonces $b \geq 6$ y se sigue del Teorema 10 que existe una uv -trayectoria c -monocromática de longitud 3, contradiciendo la minimalidad de b .

Si $b \equiv 1 \pmod{3}$, tenemos por el Teorema 9 que $u \xrightarrow{c} v$, contradiciendo la minimalidad de b .

Si $b \equiv 2 \pmod{3}$, tenemos por el Teorema 12 que existe una uv -trayectoria c -monocromática de longitud 2, de nuevo contradiciendo la minimalidad de b .

Por lo tanto $b \in \{1, 2, 3\}$.

Ahora, sea T' una uv -trayectoria monocromática con $l(T') = a$. Procediendo por contradicción, supongamos que $a \notin \{1, 3\}$.

Si $a = 2$, tenemos por la Definición 1 que $u \rightarrow v$, contradiciendo la minimalidad de a .

Si $a \geq 4$, la demostración es análoga al caso donde la trayectoria es c -monocromática.

Por lo tanto $a \in \{1, 3\}$. \square

Lema 5. Sean D una digráfica bi-transitiva y $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ una uv -trayectoria monocromática de longitud al menos 2. Si existe una flecha simétrica monocromática entre u y v_1 , entonces para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, se tiene que $u \xrightarrow{c} v_i$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$ (ver Figura 2.5).

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(T)$.

Base de inducción. Si $l(T) = 2$, entonces el resultado se sigue del Lema 3.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Lema 5 se cumple para cada trayectoria monocromática T' con $2 \leq l(T') < n$, $n > 2$.

Paso inductivo. Sea $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ una uv -trayectoria monocromática. Por hipótesis de inducción sobre la trayectoria (u, T, v_{n-1}) tenemos que, para cada

$i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, se tiene que $u \xrightarrow{c} v_i$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$. Entonces tenemos que $u \xrightarrow{c} v_{n-1}$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$ y $v_{n-1} \xrightarrow{c} v$ para algún $c \in \{c_1, c_2\}$, se sigue de la Definición 1 que $u \rightarrow v$. Se sigue del Lema 3 que $u \xrightarrow{c} v$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$. Por lo tanto, para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, se tiene que $u \xrightarrow{c} v_i$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$. \square

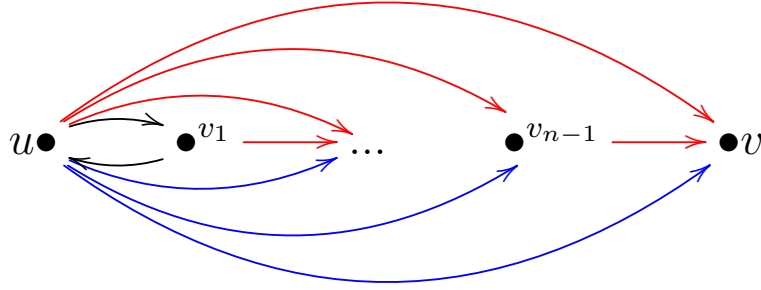


Figura 2.5

Sean D una digráfica y $f = (u, v) \in F(D)$, al **invertir la flecha** f nos referimos a que reemplazamos la flecha (u, v) por la flecha (v, u) . La **digráfica inversa** de D es la digráfica obtenida al invertir todas las flechas de D . En el contexto de digráficas 2-coloreadas, la inversión de las flechas preserva colores, es decir, al invertir una flecha (u, v) de color c , obtenemos la flecha (v, u) de color c .

Teorema 13. *La digráfica inversa de una digráfica bi-transitiva es bi-transitiva.*

Demostración. Sean D una digráfica bi-transitiva, D' su digráfica inversa y $\{u, v, w\} \subseteq V(D')$ tales que $u \xrightarrow{c} v$ y $v \xrightarrow{c} w$ en D' . Entonces por la definición de digráfica inversa tenemos que $v \xrightarrow{c} u$ y $w \xrightarrow{c} v$ en D , como D es bi-transitiva se sigue que $w \xrightarrow{\bar{c}} u$, con $\bar{c} \neq c$, en D . Entonces se sigue de la definición de digráfica inversa que $u \xrightarrow{\bar{c}} w$ en D' . Por lo tanto, D' es bi-transitiva. \square

Lema 6. *Sean D una digráfica bi-transitiva y $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ una uv -trayectoria monocromática de longitud al menos 2. Si existe una flecha simétrica monocromática entre v_{n-1} y v , entonces para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, se tiene que $v_i \xrightarrow{c} v$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$.*

Demostración. Consideremos la digráfica inversa D' de D . Reetiquetemos los vértices de T en D' de la siguiente forma: $v_i' = v_{n-i}$, $u' = v$ y $v' = u$. Entonces $T = (u' = v_0', v_1', \dots, v_n' = v')$ es una $u'v'$ -trayectoria monocromática en D' y hay flecha simétrica monocromática entre u' y v_1' en D' . Como D' también es bi-transitiva, se sigue del Lema 5 que para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, se tiene que $u' \xrightarrow{c} v_i'$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$, en D' . Por la definición de digráfica inversa tenemos que para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, se tiene que $v_i' \xrightarrow{c} u'$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$ en D , es decir, para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, se tiene que $v_i \xrightarrow{c} v$ para cada $c \in \{c_1, c_2\}$, en D . \square

Capítulo 3

Ciclos en digráficas bi-transitivas

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades interesantes de los ciclos en digráficas bi-transitivas, particularmente en digráficas bi-transitivas asimétricas. Veremos que todo ciclo en una digráfica de este tipo tiene longitud par y es alternante, además si ésta no tiene lazos es bipartita, por otro lado si ambas clases de color son unilateralmente conexas entonces la digráfica es acíclica.

3.1. Ciclos en digráficas bi-transitivas

Teorema 14. *Sea D una digráfica bi-transitiva asimétrica. Todo ciclo de longitud par en D es alternante (ver Figura 3.1).*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{C})$, donde \mathcal{C} es un ciclo de longitud par.

Claramente $l(\mathcal{C}) > 2$, pues no existen flechas simétricas en D .

Base de inducción. Si $l(\mathcal{C}) = 4$, entonces sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$. Procediendo por contradicción, supongamos que \mathcal{C} no es alternante, entonces al menos dos flechas consecutivas en \mathcal{C} son del mismo color, supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_1, v_2)) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_2, v_3)) = c_1$. Se sigue de la Definición 1 que $v_1 \xrightarrow{c_2} v_3$.

Si $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_3, v_4)) = c_2$, entonces por la Definición 1, se tiene que $v_1 \rightarrow v_4$, y por lo tanto, existe una flecha simétrica entre v_1 y v_4 , contradiciendo que D es asimétrica.

En otro caso, $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_3, v_4)) = c_1$. Si $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_4, v_1)) = c_2$, entonces por la Definición 1, se tiene que $v_4 \rightarrow v_3$, y por lo tanto existe una flecha simétrica entre v_3 y v_4 , contradiciendo que D es asimétrica. De lo contrario, $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_4, v_1)) = c_1$ y, de nuevo por la Definición 1, se tiene que $v_3 \rightarrow v_1$, por lo tanto existe una flecha simétrica entre v_3 y v_1 , lo cual contradice que D es asimétrica. Podemos concluir que \mathcal{C} es alternante.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 14 se cumple para cada ciclo de longitud par \mathcal{C}' , con $4 \leq l(\mathcal{C}') < n$, $n > 4$.

Paso inductivo. Sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo de longitud par. Procediendo por contradicción, supongamos que \mathcal{C} no es alternante. Sea T una trayectoria monocromática de longitud máxima en \mathcal{C} . Supongamos sin pérdida de generalidad que T es c_1 -monocromática.

Si $l(T) \geq 4$, entonces sea $(v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4})$ una subtrayectoria de T , se sigue de la Definición 1 que $v_i \xrightarrow{c_2} v_{i+2}$ y $v_{i+2} \xrightarrow{c_2} v_{i+4}$.

Sea $\mathcal{C}' = (v_{i+4}, \mathcal{C}, v_i) \bullet (v_i, v_{i+2}) \bullet (v_{i+2}, v_{i+4})$ con $\mathbf{c}((v_i, v_{i+2})) = \mathbf{c}((v_{i+2}, v_{i+4})) = c_2$. Se sigue de la hipótesis de inducción que \mathcal{C}' debe ser alternante, sin embargo \mathcal{C}' tiene

dos flechas consecutivas del mismo color, a saber $\mathbf{c}_{\mathcal{C}'}((v_i, v_{i+2})) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}'}((v_{i+2}, v_{i+4})) = c_2$, lo cual es una contradicción.

Si $l(T) = 3$, entonces sea $T = (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3})$, se sigue de la maximalidad de $l(T)$, que $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i-1}, v_i)) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i+3}, v_{i+4})) = c_2$. Ahora, por la Definición 1, tenemos que $v_i \xrightarrow{c_2} v_{i+2}$ y de esto se sigue, también por la Definición 1, que $v_{i-1} \xrightarrow{c_1} v_{i+2}$.

Sea $\mathcal{C}' = (v_{i+2}, \mathcal{C}, v_{i-1}) \bullet (v_{i-1}, v_{i+2})$ con $\mathbf{c}((v_{i-1}, v_{i+2})) = c_1$. Se sigue de la hipótesis de inducción que \mathcal{C}' debe ser alternante, sin embargo \mathcal{C}' tiene dos flechas consecutivas del mismo color, a saber $\mathbf{c}_{\mathcal{C}'}((v_{i-1}, v_{i+2})) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}'}((v_{i+2}, v_{i+3})) = c_1$, lo cual es una contradicción.

Finalmente si $l(T) = 2$, sea $T = (v_i, v_{i+1}, v_{i+2})$. Se sigue de la maximalidad de $l(T)$, que $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i-1}, v_i)) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i+2}, v_{i+3})) = c_2$. Ahora, por la Definición 1, tenemos que $v_i \xrightarrow{c_2} v_{i+2}$ y de esto se sigue, también por la Definición 1, que $v_{i-1} \xrightarrow{c_1} v_{i+2}$. Consideremos el ciclo $\mathcal{C}' = (v_{i+2}, \mathcal{C}, v_{i-1}) \bullet (v_{i-1}, v_{i+2})$ con $\mathbf{c}((v_{i-1}, v_{i+2})) = c_1$. Por hipótesis de inducción tenemos que \mathcal{C}' es alternante, por lo que $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i-2}, v_{i-1})) = c_2$. Se sigue de la Definición 1 que $v_{i-2} \xrightarrow{c_1} v_i$.

Ahora consideremos el ciclo $\mathcal{C}'' = (v_{i+2}, \mathcal{C}, v_{i-2}) \bullet (v_{i-2}, v_i) \bullet (v_i, v_{i+2})$ con $\mathbf{c}((v_{i-2}, v_i)) = c_1$ y $\mathbf{c}((v_i, v_{i+2})) = c_2$. Se sigue de la hipótesis de inducción que \mathcal{C}'' debe ser alternante, sin embargo \mathcal{C}'' tiene dos flechas consecutivas del mismo color, a saber $\mathbf{c}_{\mathcal{C}''}((v_i, v_{i+2})) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}''}((v_{i+2}, v_{i+3})) = c_2$, lo cual es una contradicción. Podemos concluir que \mathcal{C} es alternante. □

A continuación, veremos que no puede haber ciclos de longitud impar en una digráfica bi-transitiva asimétrica.

Teorema 15. *Todo ciclo en una digráfica bi-transitiva asimétrica tiene longitud par (ver Figura 3.2).*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{C})$, donde \mathcal{C} es un ciclo en D .

Claramente $l(\mathcal{C}) > 2$, pues no existen flechas simétricas en D .

Base de inducción. Procediendo por contradicción, supongamos que $l(\mathcal{C}) = 3$, sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_1)$, entonces al menos dos flechas consecutivas en \mathcal{C} son del mismo color, supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_1, v_2)) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_2, v_3)) = c_1$. Se sigue de la Definición 1 que $v_1 \xrightarrow{c_2} v_3$. Por lo tanto existe una flecha simétrica entre v_1 y v_3 , lo cual contradice que D es asimétrica.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 15 se cumple para cada ciclo \mathcal{C}' , con $3 \leq l(\mathcal{C}') < n$, $n > 3$.

Paso inductivo. Sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo en D . Procediendo por contradicción, supongamos que $l(\mathcal{C})$ es impar. Entonces al menos dos flechas consecutivas en \mathcal{C} son del mismo color, supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i-1}, v_i)) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_i, v_{i+1})) = c_1$. Se sigue de la Definición 1 que $v_{i-1} \xrightarrow{c_2} v_{i+1}$.

Consideremos el ciclo $\mathcal{C}'' = (v_{i+1}, \mathcal{C}, v_{i-1}) \bullet (v_{i-1}, v_{i+1})$, con $\mathbf{c}((v_{i-1}, v_{i+1})) = c_2$. Como $l(\mathcal{C}'')$ es par, se sigue del Teorema 14 que \mathcal{C}'' es alternante. Por lo tanto $\mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i-2}, v_{i-1})) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}}((v_{i+1}, v_{i+2})) = c_1$. Se sigue de la Definición 1 que $v_{i-2} \rightarrow v_i$ y $v_i \rightarrow v_{i+2}$. El ciclo $\mathcal{C}' = (v_{i+2}, \mathcal{C}, v_{i-2}) \bullet (v_{i-2}, v_i) \bullet (v_i, v_{i+2})$ tiene longitud impar, contradiciendo la hipótesis de inducción. Podemos concluir que $l(\mathcal{C})$ es par. □

Corolario 9. *Todo ciclo en una digráfica bi-transitiva asimétrica tiene longitud par y es alternante.*

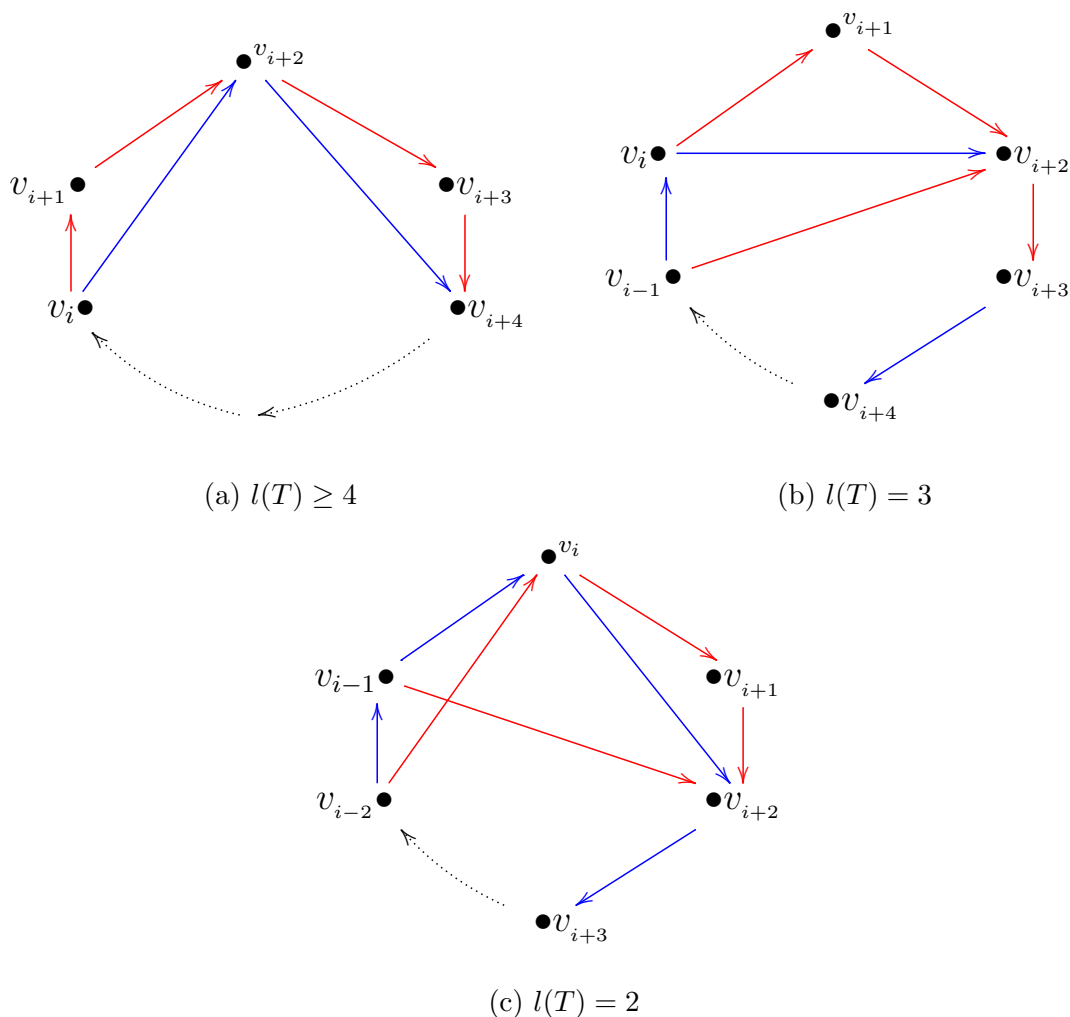


Figura 3.1

Demostración. Se sigue de los Teoremas 14 y 15. □

Corolario 10. *Toda digráfica bi-transitiva asimétrica sin lazos y fuertemente conexa es bipartita.*

Demostración. Se sigue del Corolario 9 y del Teorema 7. □

Teorema 16. *Si D es una digráfica bi-transitiva asimétrica con ambas clases de color C_1 y C_2 , unilateralmente conexas, entonces D es acíclica (ver Figura 3.3).*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un ciclo $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ en D . Sean $\{v_i, v_j\} \subseteq V(\mathcal{C})$ con $v_i \neq v_j$. Como la clase de color C_1 es c_1 -unilateralmente conexa, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una $v_i v_j$ -trayectoria c_1 -monocromática.

Se sigue del Corolario 8 que existe una $v_i v_j$ -trayectoria c_1 -monocromática T tal que $l(T) \in \{1, 2, 3\}$.

Primero supongamos que $l(T) \neq 1$.

Observemos que existe un vértice $v \in V(T) - \{v_i, v_j\}$ tal que $v \in (v_j, \mathcal{C}, v_i)$, de lo contrario el ciclo $T \bullet (v_j, \mathcal{C}, v_i)$ es un ciclo que no es alternante, contradiciendo al Corolario 9.

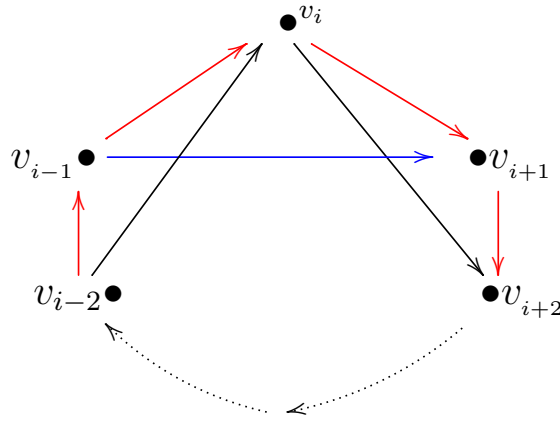


Figura 3.2

Si $l(T) = 2$, se sigue de la Definición 1 que $v_i \xrightarrow{c_2} v_j$. Sea $T = (v_i, x, v_j)$. Por lo observado anteriormente tenemos que $x \in (v_j, \mathcal{C}, v_i)$. Se sigue del Corolario 9 que los ciclos $(x, T, v_j) \bullet (v_j, \mathcal{C}, x)$ y $(v_i, T, x) \bullet (x, \mathcal{C}, v_i)$ tienen longitud par, y de esto se sigue que las trayectorias (v_j, \mathcal{C}, x) y (x, \mathcal{C}, v_i) tienen longitud impar. Por lo tanto la trayectoria (v_j, \mathcal{C}, v_i) tiene longitud par. El ciclo $(v_j, \mathcal{C}, v_i) \bullet (v_i, v_j)$ con $c((v_i, v_j)) = c_2$ es un ciclo de longitud impar, contradiciendo al Corolario 9 (ver Figura 3.3a).

Si $l(T) = 3$, entonces sea $T = (v_i, x, y, v_j)$, se sigue de la Definición 1 que $v_i \xrightarrow{c_2} y$ y $x \xrightarrow{c_2} v_j$. Tenemos las siguientes posibilidades:

- (i) Si $x \in (v_j, \mathcal{C}, v_i)$ y $y \notin (v_j, \mathcal{C}, v_i)$, entonces el ciclo $(x, T, v_j) \bullet (v_j, \mathcal{C}, x)$ es un ciclo que no es alternante, contradiciendo al Corolario 9. De manera análoga, podemos ver que si $x \notin (v_j, \mathcal{C}, v_i)$ y $y \in (v_j, \mathcal{C}, v_i)$, entonces se obtiene una contradicción (ver Figura 3.3b).
- (ii) Si $\{x, y\} \subseteq (v_j, \mathcal{C}, v_i)$, entonces se sigue del Corolario 9 que los ciclos $(x, \mathcal{C}, v_i) \bullet (v_i, T, x)$ y $(y, \mathcal{C}, x) \bullet (x, T, y)$ tienen longitud par, y de esto se sigue que las trayectorias (y, \mathcal{C}, x) y (x, \mathcal{C}, v_i) tienen longitud impar. Por lo tanto la trayectoria (y, \mathcal{C}, v_i) tiene longitud par. El ciclo $(y, \mathcal{C}, v_i) \bullet (v_i, y)$ con $c((v_i, y)) = c_2$ es un ciclo de longitud impar, contradiciendo al Corolario 9 (ver Figura 3.3c).

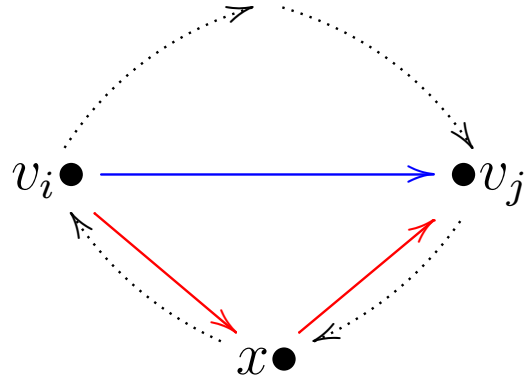
Por lo tanto, podemos concluir que $l(T) = 1$, es decir, $v_i \xrightarrow{c_1} v_j$.

Se sigue del Corolario 9 que el ciclo $(v_j, \mathcal{C}, v_i) \bullet T$ es alternante, por lo que $c_{\mathcal{C}}((v_j, v_{j+1})) = c_2$.

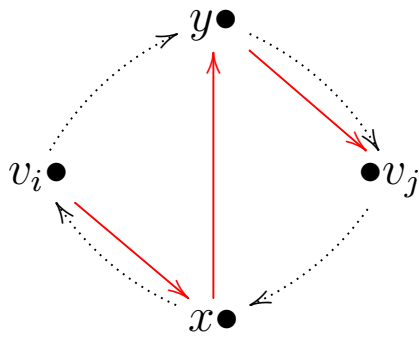
Como la clase de color c_2 es c_2 -unilateralmente conexa, entonces de manera similar se prueba que $v_i \xrightarrow{c_2} v_j$ o $v_j \xrightarrow{c_2} v_i$. Pero D es asimétrica y ya sabemos que $v_i \xrightarrow{c_1} v_j$, por lo tanto $v_i \xrightarrow{c_2} v_j$.

El ciclo $(v_j, \mathcal{C}, v_i) \bullet (v_i, v_j)$ con $c((v_i, v_j)) = c_2$ no es alternante, lo que contradice al Corolario 9 (ver Figura 3.3d).

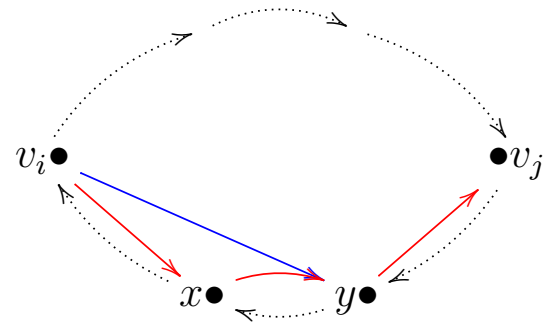
Por lo tanto, no existe tal ciclo \mathcal{C} . □



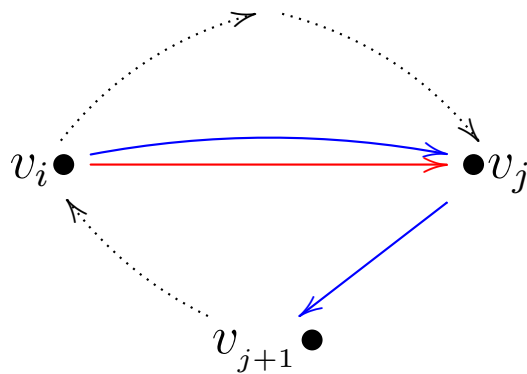
(a) $l(T) = 2$.



(b) $l(T) = 3$ (i).



(c) $l(T) = 3$ (ii).



(d) $l(T) = 1$.

Figura 3.3

Capítulo 4

Digráficas bi-generadas por ciclos monocromáticos

En este capítulo nos centraremos en ciclos monocromáticos dentro de digráficas bi-transitivas y las digráficas que éstos bi-generan. Veremos que la congruencia (*mód* 3) de la longitud de los ciclos monocromáticos es fundamental para la teoría de digráficas bi-transitivas.

Comenzaremos observando a los ciclos monocromáticos de longitud 2, es decir, flechas simétricas monocromáticas. Más adelante probaremos que los ciclos de longitud $\not\equiv 0 \pmod{3}$ bi-generan digráficas con todas las flechas posibles de cada color, es decir, digráficas bi-completas. También veremos que las subdigráficas de cada color son totalmente simétricas una con respecto a la otra. Demostraremos que basta con que exista una flecha simétrica monocromática en un ciclo monocromático para que se bi-genera una digráfica bi-completa y que toda digráfica bi-transitiva, con al menos una clase de color fuertemente conexa y con al menos un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{3}$ o un lazo, es bi-completa.

Por último, introduciremos el concepto de digráfica cíclicamente k -partita y cíclicamente k -partita bi-completa, veremos algunas propiedades sobre éstas y probaremos que toda digráfica bi-transitiva sin lazos y con al menos una clase de color fuertemente conexa tal que todo ciclo tiene longitud $\equiv 0 \pmod{3}$ es cíclicamente 3-partita bi-completa.

Concluiremos que toda digráfica bi-transitiva con al menos una clase de color fuertemente conexa es bi-completa o cíclicamente 3-partita bi-completa.

4.1. Comportamiento de los ciclos monocromáticos

Lema 7. *Sea D una digráfica bi-transitiva. Un ciclo c -monocromático \mathcal{C} , con $l(\mathcal{C}) = 2$, bi-genera lazos de color \bar{c} , con $\bar{c} \neq c$, en cada uno de los vértices de \mathcal{C} (ver Figura 1.18).*

Demostración. Se sigue del Lema 3. □

Lema 8. *Si D es la digráfica bi-generada por un ciclo c -monocromático \mathcal{C} con $l(\mathcal{C}) > 4$, entonces existen todos los saltos de longitud 4 de color c en D .*

Demostración. Sean $\{u, v\} \subseteq V(\mathcal{C})$ tales que $d_{\mathcal{C}}(u, v) = 4$. Sea $T = (u, \mathcal{C}, v)$. Como T es una trayectoria c -monocromática y $l(T) = 4 \equiv 1 \pmod{3}$, se sigue del Teorema 9 que $u \xrightarrow{c} v$, es decir, existe el salto de longitud 4 (u, v) de color c en D . \square

Lema 9. Si D es la digráfica bi-generada por un ciclo c -monocromático $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n = v_1)$ con $l(\mathcal{C}) \geq 5$ y $v_i \in V(\mathcal{C})$, entonces existe el ciclo c -monocromático $\mathcal{C}' = (v_i, v_{i+4}) \bullet (v_{i+4}, \mathcal{C}, v_i)$ con $c_{\mathcal{C}'}((v_i, v_{i+4})) = c$ y $l(\mathcal{C}') \equiv l(\mathcal{C}) \pmod{3}$.

Demostración. Se sigue del Lema 8 y de que $l(\mathcal{C}') = l(\mathcal{C}) - 3$. \square

Teorema 17. Un ciclo monocromático \mathcal{C} con $l(\mathcal{C}) \geq 4$ y $l(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \pmod{3}$, bi-genera una digráfica bi-completa.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{C})$.

Base de inducción. Si $l(\mathcal{C}) = 4$, entonces sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que \mathcal{C} es c_1 -monocromático. Se sigue de la Definición 1 que $v_1 \xrightarrow{c_2} v_3$, $v_2 \xrightarrow{c_2} v_4$, $v_3 \xrightarrow{c_2} v_1$, y $v_4 \xrightarrow{c_2} v_2$, es decir, existen flechas simétricas c_2 -monocromáticas entre v_1 y v_3 y entre v_2 y v_4 , respectivamente. Se sigue del Lema 3 que existen los lazos de color c_1 en cada uno de los cuatro vértices del ciclo y que $v_i \xrightarrow{c_j} v_{i+1}$ y $v_{i+1} \xrightarrow{c_j} v_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y para cada $j \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, tenemos flechas simétricas c_1 -monocromáticas entre v_i y v_{i+1} para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, por el Lema 3 tenemos que existen los lazos de color c_2 en cada uno de los cuatro vértices del ciclo y que $v_i \xrightarrow{c_1} v_{i+2}$ y $v_{i+2} \xrightarrow{c_1} v_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Con esto concluimos que la digráfica bi-generada por \mathcal{C} es bi-completa.

Si $l(\mathcal{C}) = 5$, sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que \mathcal{C} es c_1 -monocromático. Se sigue de la Definición 1 que existe el ciclo c_2 -monocromático $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1)$. De esto y de la Definición 1, tenemos que existe el ciclo c_1 -monocromático $(v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$. Ahora, por la Definición 1, tenemos que existe el ciclo c_2 -monocromático $(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3, v_1)$. Por el Lema 3 y la existencia de las flechas simétricas c_1 -monocromáticas entre v_i y v_{i+1} , tenemos que existen los lazos de color c_2 en cada uno de los cinco vértices del ciclo y que existen los ciclos c_1 -monocromáticos $(v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1)$ y $(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3, v_1)$. Finalmente, por el Lema 3 y la existencia de las flechas simétricas c_2 -monocromáticas entre v_i y v_{i+2} , tenemos que existen los lazos de color c_1 en cada uno de los cinco vértices del ciclo y que existen los ciclos c_2 -monocromáticos $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ y $(v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$. Con esto concluimos que la digráfica bi-generada por \mathcal{C} es bi-completa.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 17 se cumple para cada ciclo monocromático \mathcal{C}' con $7 \leq l(\mathcal{C}') < n$ y $l(\mathcal{C}') \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Paso inductivo. Sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo c -monocromático con $l(\mathcal{C}) \equiv l \pmod{3}$, $l \in \{1, 2\}$.

Se sigue del Lema 9 que existe el ciclo c -monocromático $\mathcal{C}' = (v_i, v_{i+4}) \bullet (v_{i+4}, \mathcal{C}, v_i)$ con $c_{\mathcal{C}'}((v_i, v_{i+4})) = c$ y $l(\mathcal{C}') \equiv l(\mathcal{C}) \pmod{3}$. Por hipótesis de inducción tenemos que \mathcal{C}' bi-genera una digráfica bi-completa. Por lo tanto $v_{i+4} \xrightarrow{c} v_i$. El ciclo $\mathcal{C}'' = (v_{i+4}, v_i) \bullet (v_i, \mathcal{C}, v_{i+4})$ con $c_{\mathcal{C}''}((v_{i+4}, v_i)) = c$, es un ciclo monocromático de longitud 5, y por la base de inducción se tiene que \mathcal{C}'' es bi-completa.

Esto se puede para hacer, para cualesquiera $\{u, v\} \subseteq V(\mathcal{C})$ tales que $d_{\mathcal{C}}(u, v) = 4$, por lo que podemos concluir, que la digráfica bi-generada por \mathcal{C} es bi-completa. \square

El caso de las digráficas bi-generadas por ciclos de longitud congruente con 0 módulo 3 es especial, pues éstas no son bi-completas, pero sí podemos asegurar la existencia de algunas de sus flechas. A continuación veremos que todo salto de longitud no congruente con 0 módulo 3 existe.

Teorema 18. *Si \mathcal{C} es un ciclo c -monocromático y $\{u, v\} \subseteq V(\mathcal{C})$ tales que $d_c(u, v) \equiv k \pmod{3}$ con $k \in \{1, 2\}$, entonces $u \rightarrow v$. Más aún,*

- Si $k = 1$ entonces $u \xrightarrow{c} v$.
- Si $k = 2$ entonces $u \xrightarrow{\bar{c}} v$ con $\bar{c} \neq c$,

(ver Figura 4.1).

Demostración. Se sigue del Teorema 9. □

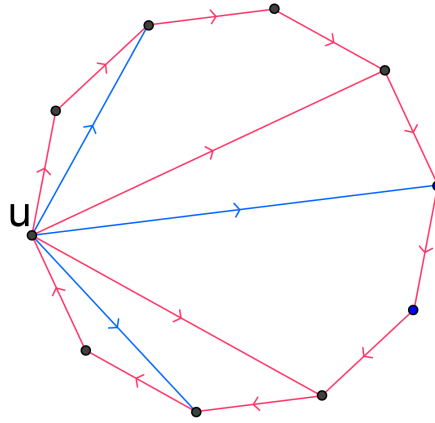


Figura 4.1

En el caso en que la longitud del ciclo \mathcal{C} sea congruente con 0 módulo 3, la subdigráfica de color c_1 de la digráfica bi-generada por el ciclo \mathcal{C} , será la misma que la subdigráfica de color c_2 , pero en sentido contrario. Esto es una observación del siguiente teorema.

Un ciclo monocromático de color c_1 bi-genera el ciclo monocromático de color c_2 que consiste de los mismos vértices que el ciclo original pero recorrido en sentido contrario.

Lema 10. *Si $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ es un ciclo c -monocromático con $n \geq 3$, entonces el ciclo \bar{c} -monocromático $\mathcal{C}' = (v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1)$, con $\bar{c} \neq c$, existe en la digráfica bi-generada por \mathcal{C} (ver Figura 4.2).*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $c = c_1$ y $\bar{c} = c_2$.

Si la longitud de \mathcal{C} es congruente con 1 o 2 módulo 3, el resultado se sigue de inmediato del Teorema 17.

En otro caso, si $l(\mathcal{C}) = k \equiv 0 \pmod{3}$, entonces sea $v_i \in V(\mathcal{C})$ arbitrario. La trayectoria c_1 -monocromática $(v_i, \mathcal{C}, v_{i-1})$ tiene longitud $k - 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Se sigue del Teorema 9 que $v_i \xrightarrow{c_2} v_{i-1}$. Por lo tanto, $v_i \xrightarrow{c_2} v_{i-1}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, de lo que se sigue el resultado. □

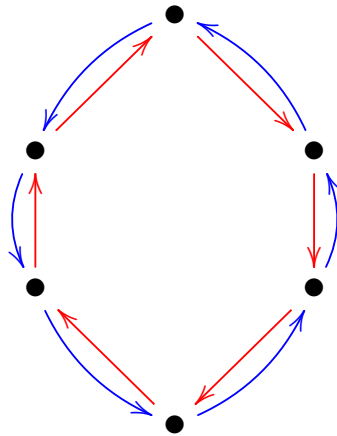


Figura 4.2

Teorema 19. Sean D una digráfica bi-transitiva, \mathcal{C} un ciclo monocromático en D con $l(\mathcal{C}) \geq 3$, D' la digráfica bi-generada por \mathcal{C} y $\{u, v\} \subseteq V(\mathcal{C})$. Si $f_1 = (u, v) \in F(D')$ con $c(f_1) = c$, entonces $f_2 = (v, u) \in F(D')$ con $c(f_2) = \bar{c}$ y $\bar{c} \neq c$. Es decir, toda flecha en la digráfica bi-generada por \mathcal{C} , es simétrica bi-color.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{C})$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $c = c_1$ y $\bar{c} = c_2$.

Base de inducción. Si $l(\mathcal{C}) = 3$, el resultado se sigue del Lema 10.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 19 se cumple para cada ciclo monocromático \mathcal{C}' con $l(\mathcal{C}') < n$.

Paso inductivo. Sean $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo monocromático, D' la digráfica bi-generada por \mathcal{C} y $\{u, v\} \subseteq V(\mathcal{C})$ tales que $f_1 = (u, v) \in F(D')$ con $c(f_1) = c_1$.

Si \mathcal{C} es c_1 -monocromático y $f_1 \in F(\mathcal{C})$, entonces por el Lema 10, tenemos que $f_2 = (v, u) \in F(D')$ con $c(f_2) = c_2$. De lo contrario, $f_1 \notin F(\mathcal{C})$ y el ciclo $\mathcal{C}' = f_1 \bullet (v, \mathcal{C}, u)$ es un ciclo monocromático de longitud menor que n y por hipótesis de inducción tenemos que $f_2 = (v, u) \in F(D')$ con $c(f_2) = c_2$.

Si \mathcal{C} es c_2 -monocromático, entonces por el Lema 10 existe el ciclo c_1 -monocromático $\mathcal{C}^* = (v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1)$. Si $f_1 \in F(\mathcal{C}^*)$ habremos acabado, de lo contrario, el ciclo $\mathcal{C}' = f_1 \bullet (v, \mathcal{C}^*, u)$ es un ciclo monocromático de longitud menor que n y por hipótesis de inducción tenemos que $f_2 = (v, u) \in F(D')$ con $c(f_2) = c_2$. Por lo tanto, toda flecha en la digráfica bi-generada por \mathcal{C} , es simétrica bi-color. \square

A continuación veremos que toda trayectoria monocromática de longitud 2 en la digráfica bi-generada por un ciclo monocromático bi-genera un ciclo de longitud 3 monocromático.

Corolario 11. Sean D una digráfica bi-transitiva, \mathcal{C} un ciclo monocromático en D con $l(\mathcal{C}) \geq 3$, D' la digráfica bi-generada por \mathcal{C} y $\{x, y, z\} \subseteq \mathcal{C}$. Si $f_1 = (x, y) \in F(D')$ y $f_2 = (y, z) \in F(D')$ con $c(f_1) = c(f_2) = c$, entonces $f_3 = (z, x) \in F(D')$ con $c(f_3) = c$ (ver Figura 4.3).

Demostración. Se sigue de la Definición 1 que $f_4 = (x, z) \in F(D')$ con $c(f_4) = \bar{c}$ y $\bar{c} \neq c$, entonces por el Teorema 19 tenemos que $f_3 = (z, x) \in F(D')$ con $c(f_3) = c$, formando el ciclo c -monocromático (x, y, z, x) . \square

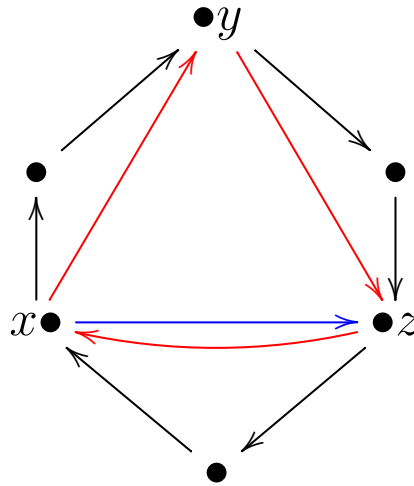


Figura 4.3

Corolario 12. Si D es una digráfica bi-transitiva, $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo c -monocromático en D , con $n \geq 3$ y D' la digráfica bi-generada por \mathcal{C} , entonces $f_1 = (v_i, v_j) \in F(D')$ con $c(f_1) = c$ si y sólo si $f_2 = (v_{j+1}, v_i) \in F(D')$ con $c(f_2) = c$ (ver Figura 4.4).

Demostración. Se sigue del Corolario 11. □

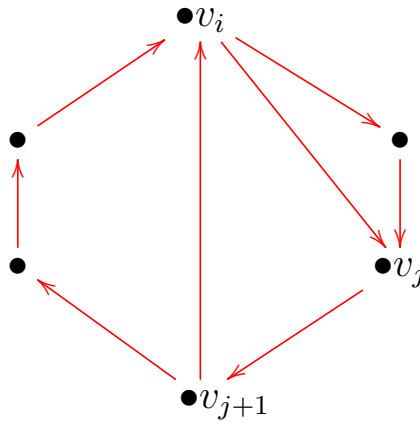


Figura 4.4

Corolario 13. Si D es una digráfica bi-transitiva, \mathcal{C} un ciclo c -monocromático en D con $l(\mathcal{C}) \equiv 0 \pmod{3}$, entonces \mathcal{C} bi-genera ciclos c -monocromáticos de longitud $k \equiv 0 \pmod{3}$ para toda $k \leq l(\mathcal{C})$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{C})$.

Base de inducción. Si $l(\mathcal{C}) = 3$, entonces el resultado es inmediato.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Corolario 13 se cumple para cada ciclo c -monocromático \mathcal{C}' con $l(\mathcal{C}') \equiv 0 \pmod{3}$ y $l(\mathcal{C}') < n$.

Paso inductivo. Sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo c -monocromático, el resultado se sigue del Lema 9 y de la hipótesis de inducción. □

En la Figura 4.5 se muestran por separado las subdigráficas inducidas por las clases de color C_1 y C_2 , de la digráfica bi-generada por un ciclo monocromático de longitud 12, y en la Figura 4.6 se muestran las subdigráficas inducidas por C_1 de las digráficas bi-generadas por los ciclos monocromáticos de longitud 6, 9 y 12, respectivamente.

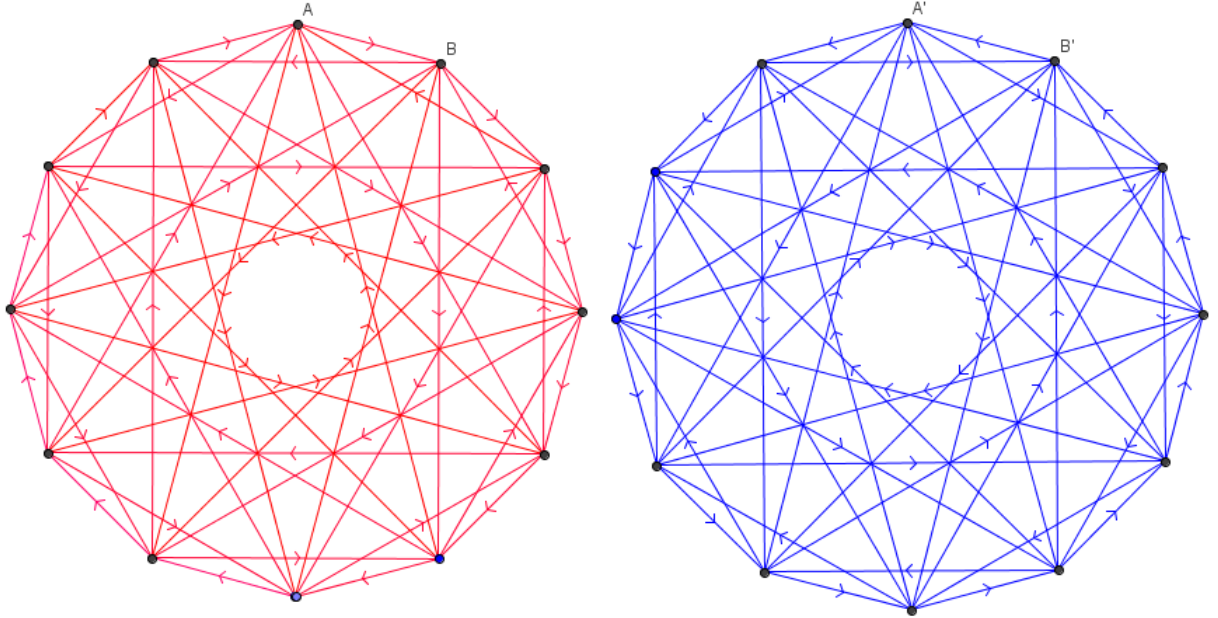


Figura 4.5: Subdigráficas inducidas por C_1 y C_2 de la digráfica bi-generada por un ciclo de longitud 12.

4.2. Digráficas bi-completas

Teorema 20. Sean D una digráfica bi-transitiva, \mathcal{C} un ciclo monocromático en D con $l(\mathcal{C}) \geq 3$ y D' la digráfica bi-generada por \mathcal{C} . Si existe una flecha simétrica monocromática en D' entonces D' es bi-completa.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{C})$.

Base de inducción. Si $l(\mathcal{C}) = 3$, entonces sea $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que existe una flecha simétrica c_1 -monocromática entre v_1 y v_2 en D' .

Se sigue del Lema 10 que \mathcal{C} es c_1 -monocromático o existe el ciclo c_1 -monocromático (v_1, v_3, v_2, v_1) . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que \mathcal{C} es c_1 -monocromático. Entonces por el Lema 10, tenemos que existe el ciclo c_2 -monocromático (v_1, v_3, v_2, v_1) .

Por el Lema 3, tenemos que existen los lazos de color c_2 en v_1 y v_2 y además $v_i \xrightarrow{c_j} v_3$ para cada $i \in \{1, 2\}$ y para cada $j \in \{1, 2\}$ y $v_3 \xrightarrow{c_j} v_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$ y para cada $j \in \{1, 2\}$. El ciclo c_1 -monocromático (v_1, v_3, v_2, v_1) implica, por el Lema 10, la existencia del ciclo c_2 -monocromático (v_1, v_2, v_3, v_1) . Entonces tenemos flechas simétricas monocromáticas de cada color entre cada par de vértices y esto bi-genera lazos de cada color en cada uno de los tres vértices. Por lo tanto D' es bi-completa.

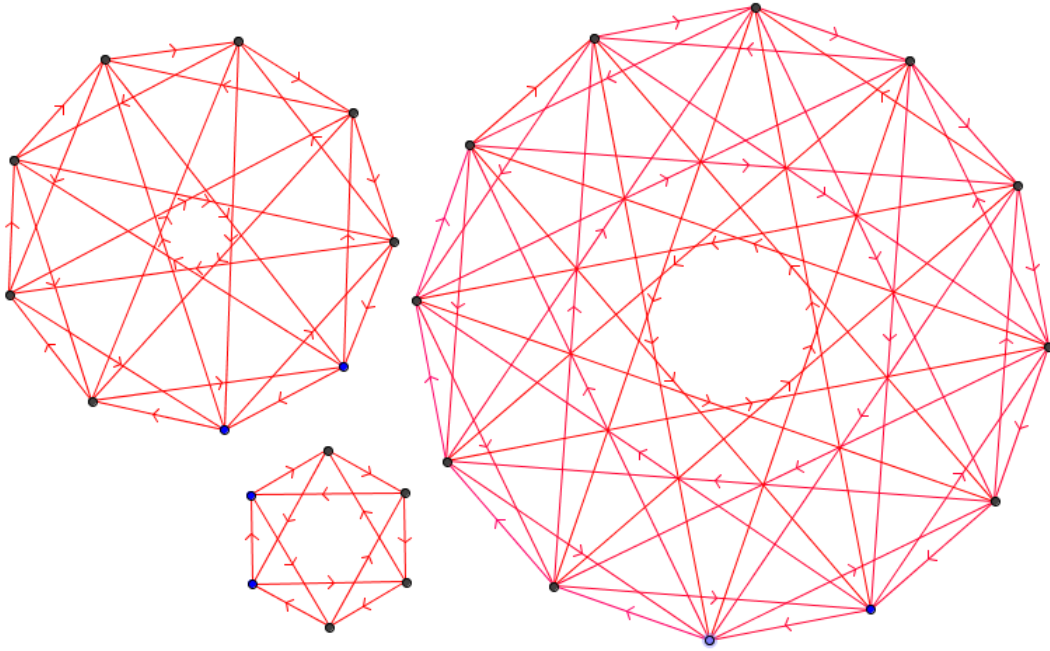


Figura 4.6: Subdigráficas inducidas por C_1 de las digráficas bi-generadas por los ciclos de longitud 6, 9 y 12, respectivamente.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Teorema 20 se cumple para cada ciclo monocromático \mathcal{C}' con $l(\mathcal{C}') < n$.

Paso inductivo. Sean $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo c -monocromático, D' la digráfica bi-generada por \mathcal{C} , $\{u, v\} \subseteq V(\mathcal{C})$ y supongamos que existe una flecha simétrica monocromática $f = (u, v)$ en D' . Sea $u = v_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

Supongamos primero que u y v no son consecutivos en \mathcal{C} . Si f es c -monocromática, entonces el ciclo $\mathcal{C}' = f \bullet (v, \mathcal{C}, u)$ es monocromático, tiene longitud menor que n y contiene la flecha simétrica monocromática f , por hipótesis de inducción tenemos que \mathcal{C}' bi-genera una digráfica bi-completa. Tenemos que el ciclo $\mathcal{C}'' = (v, u) \bullet (u, \mathcal{C}, v)$ con $c((v, u)) = c$ es monocromático, tiene longitud menor que n y contiene la flecha simétrica monocromática (v, u) , por hipótesis de inducción tenemos que \mathcal{C}'' bi-genera una digráfica bi-completa.

En particular existe la flecha simétrica c -monocromática $f' = (u, v_{i+2})$, entonces el ciclo $\mathcal{C}^* = f' \bullet (v_{i+2}, \mathcal{C}, u)$ es monocromático, tiene longitud menor que n y contiene la flecha simétrica monocromática f' , por hipótesis de inducción tenemos que \mathcal{C}^* bi-genera una digráfica bi-completa. La existencia de las flechas simétricas monocromáticas entre v_{i+1} y v_{i+2} y entre v_{i+2} y v_{i+3} , respectivamente, implica la existencia de la flecha simétrica c -monocromática $f'' = (v_{i+1}, v_{i+3})$ y por hipótesis de inducción el ciclo $f'' \bullet (v_{i+3}, \mathcal{C}, v_{i+1})$ bi-genera una digráfica bi-completa. Por lo tanto D' es bi-completa.

En otro caso, si f es \bar{c} -monocromática con $\bar{c} \neq c$, se sigue del Lema 10, que existe el ciclo \bar{c} -monocromático $(v_1, v_n, \dots, v_2, v_1)$ y podemos argumentar de manera análoga.

En caso de que u y v sean consecutivos en el ciclo, con $v = v_{i+1}$, si $l(\mathcal{C}) \not\equiv 0 \pmod{3}$ entonces del Teorema 17 se sigue el resultado. De lo contrario, por la Definición 1 tenemos que $v \xrightarrow{\bar{c}} v_{i+3}$ con $\bar{c} \neq c$ y además tenemos por el Lema 3 que $v \xrightarrow{c} v_{i+3}$, el ciclo $\mathcal{C}_1 = (v, v_{i+3}) \bullet (v_{i+3}, \mathcal{C}, v)$ con $c((v, v_{i+3})) = c$ es monocromático, tiene longitud menor que n y contiene la flecha simétrica monocromática f , por hipótesis

de inducción tenemos que \mathcal{C}_1 bi-genera una digráfica bi-completa. Podemos continuar la prueba como hemos hecho anteriormente. \square

Teorema 21. *Sean D una digráfica bi-transitiva tal que la clase de color C es c -fuertemente conexa y γ un ciclo monocromático en D con $l(\gamma) \geq 3$ tal que la digráfica bi-generada por γ es bi-completa. Si $V(\gamma) \subsetneq V(D)$, entonces existe $v \in V(D) - V(\gamma)$ tal que la digráfica bi-generada por $V(\gamma) \cup \{v\}$ es bi-completa (ver Figura 4.7).*

Demostración. Sea $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Como $V(\gamma) \subsetneq V(D)$ y la clase de color C es c -fuertemente conexa, existe $v \in V(D)$ con $v \notin V(\gamma)$ tal que $v \xrightarrow{c} v_i$ para algún $v_i \in \gamma$, sea $f_1 = (v, v_i)$ con $\mathbf{c}(f_1) = c$. Como la clase de color C es c -fuertemente conexa entonces existe una $v_{i-1}v$ -trayectoria c -monocromática y por Corolario 8 tenemos que existe una $v_{i-1}v$ -trayectoria monocromática de longitud 1 o existe una $v_{i-1}v$ -trayectoria monocromática de longitud 3. Probaremos que en cualquier caso $v_{i-1} \xrightarrow{c} v$.

Si existe $v_{i-1}v$ -trayectoria monocromática de longitud 1, se sigue del Lema 3 que $v_{i-1} \xrightarrow{c} v$.

De lo contrario, supongamos que existe una $v_{i-1}v$ -trayectoria monocromática de longitud 3, digamos $T = (v_{i-1}, u, w, v)$. Si $u, w \notin \{v_i\}$ y T es c -monocromática entonces el ciclo $\gamma' = T \bullet f_1 \bullet (v_i, v_{i-1})$ con $\mathbf{c}((v_i, v_{i-1})) = c$ es un ciclo c -monocromático de longitud 5 y el Teorema 17 implica que γ' bi-genera una digráfica bi-completa, en particular $v_{i-1} \xrightarrow{c} v$. Si T es \bar{c} -monocromática, se sigue de la Definición 1 y del Lema 3 que $v_{i-1} \xrightarrow{c} v$. En otro caso, si $u = v_i$ o $w = v_i$ por el Lema 5 tenemos que $v_{i-1} \xrightarrow{c} v$. En cualquier caso tenemos que $v_{i-1} \xrightarrow{c} v$.

Ya que γ bi-genera una digráfica bi-completa, tenemos que existe el ciclo $\gamma_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ c -monocromático. Entonces tenemos que $(v_i, \gamma_1, v_{i-1}) \bullet (v_{i-1}, v) \bullet f_1$, con $\mathbf{c}((v_{i-1}, v)) = c$, es un ciclo c -monocromático con flecha simétrica monocromática y por el Teorema 20 tenemos que la digráfica bi-generada por $V(\gamma) \cup \{v\}$ es bi-completa. \square

Teorema 22. *Sea D una digráfica bi-transitiva con al menos 3 vértices, tal que la clase de color C es c -fuertemente conexa, si D contiene un ciclo monocromático de longitud n con $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ o D contiene un lazo entonces D es bi-completa.*

Demostración. Supongamos primero que existe un ciclo monocromático γ de longitud n con $n \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Supongamos primero que $n = 2$, sea $\gamma = (u, v, u)$. Como $V(D) \geq 3$ y D es fuertemente conexa, existe $x \in V(D) - \{u, v\}$ tal que $x \rightarrow u$ o $x \rightarrow v$. Se sigue del Lema 3 que $x \xrightarrow{c_i} u$ y $x \xrightarrow{c_i} v$ para cada $i \in \{1, 2\}$. La clase de color C es c -fuertemente conexa y el Corolario 8 nos dice que existe una ux -trayectoria c -monocromática T tal que $l(T) \in \{1, 2, 3\}$. Supongamos que $l(T) = 3$, si γ es c -monocromático tenemos por el Lema 5 que $v \rightarrow x$. Si γ es \bar{c} -monocromático con $\bar{c} \neq c$, tenemos por el Teorema 9 que existe una ux -trayectoria de longitud 2 tal que la primera flecha es de color \bar{c} y la segunda es de color c , y a partir de esto se obtiene fácilmente que $v \rightarrow x$. Ahora, si $l(T) = 2$ entonces por la Definición 1 tenemos que $u \rightarrow x$. En cualquiera de los tres casos tenemos que $v \rightarrow x$ o $u \rightarrow x$. Por el Lema 3 tenemos que $u \xrightarrow{c_i} x$ y $v \xrightarrow{c_i} x$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Por lo tanto existe un ciclo monocromático $\gamma' = (u, v, x, u)$ con una flecha simétrica entre u y v y se sigue del Teorema 20 que éste bi-genera una digráfica bi-completa.

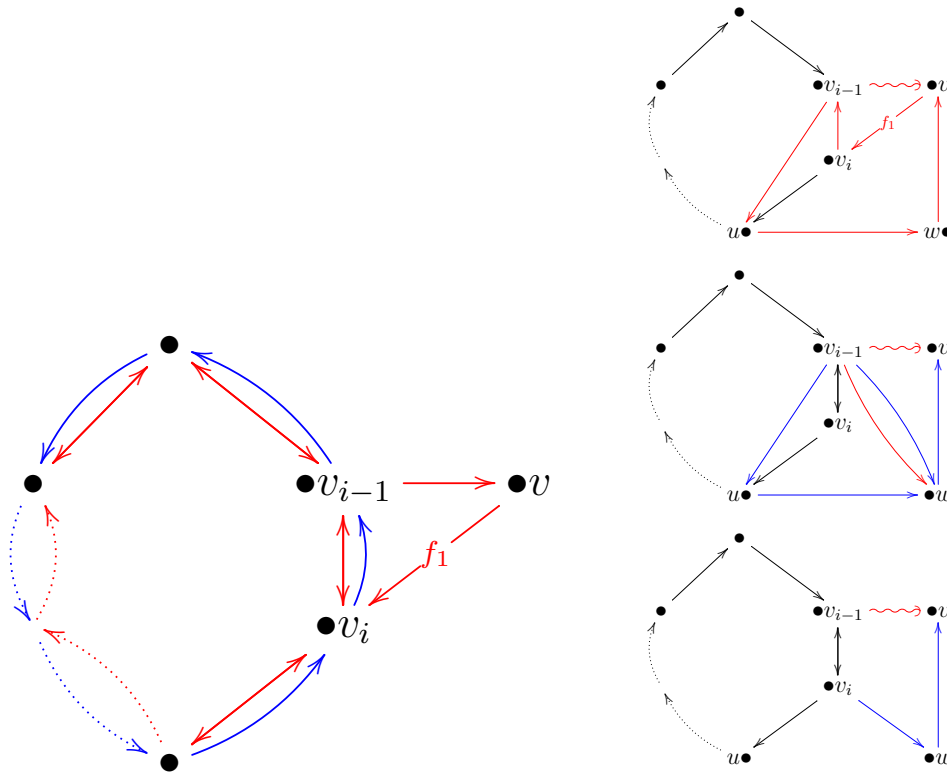


Figura 4.7

Ahora, si $n \geq 4$, se sigue del Teorema 17 que γ bi-genera una digráfica bi-completa.

A continuación veremos que si D contiene un lazo, entonces también obtenemos una digráfica bi-completa. Sean $v \in V(D)$ y $f \in F(D)$ un lazo en v . Como C es c -fuertemente conexa, tenemos por el Corolario 1 que existe un ciclo c -monocromático, digamos $\gamma'' = (v = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$. Se sigue del Lema 10 que existe el ciclo \bar{c} -monocromático $(v = v_0, v_{n-1}, \dots, v_1, v_0)$.

Ya sea que $c(f) = c$ o $c(f) = \bar{c}$, se sigue de la Definición 1 que $v \xrightarrow{\bar{c}} v_1$ o $v \xrightarrow{c} v_{n-1}$, respectivamente. En cualquier caso se tiene un ciclo monocromático que contiene una flecha simétrica monocromática, por el Teorema 20 tenemos que γ'' bi-genera una digráfica bi-completa.

Por lo tanto, D contiene una digráfica bi-completa. Sea D' la digráfica bi-completa con el máximo número de vértices contenida en D .

Supongamos que $V(D') \neq V(D)$, se sigue del Teorema 21 que existe $v \in V(D) - V(D')$ tal que $V(D') \cup \{v\}$ bi-genera una digráfica bi-completa, contradiciendo la maximalidad de D' .

Por lo tanto $V(D') = V(D)$, y se sigue que D es bi-completa. □

4.3. Digráficas cíclicamente k -partitas

Definición 4. Una digráfica D es **cíclicamente k -partita** ($k \geq 2$), si existe una partición $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_{k-1}\}$ de $V(D)$ tal que si una flecha f tiene vértice inicial

en V_i entonces f tiene vértice final en V_{i+1} (mód k). A \mathcal{V} la llamamos **k -partición cíclica** de $V(D)$. Decimos que D es **cíclicamente k -partita completa** si D es cíclicamente k -partita y para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, si $v \in V_i$ entonces $v \rightarrow x$ para cada $x \in V_{i+1}$ (ver Figura 4.8).

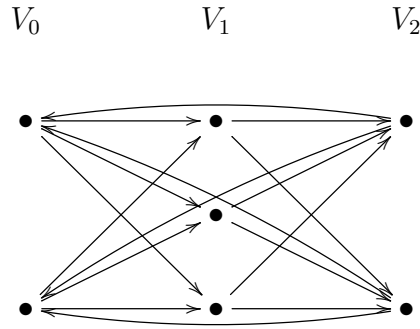


Figura 4.8: Ejemplo de una digráfica cíclicamente 3-partita completa.

Definición 5. Sea D una digráfica 2-coloreada. Decimos que D es **cíclicamente k -partita bi-completa** ($k \geq 2$), si la subdigráfica de color c es cíclicamente k -partita completa con k -partición cíclica $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_{k-1}\}$ y la subdigráfica de color \bar{c} con $\bar{c} \neq c$ es cíclicamente k -partita completa con k -partición cíclica $\mathcal{V}' = \{V_{k-1}, V_{k-2}, \dots, V_1, V_0\}$ (ver Figura 4.9).

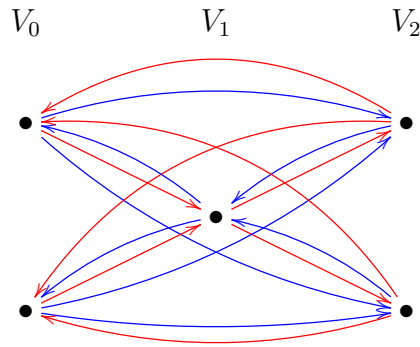


Figura 4.9: Ejemplo de una digráfica cíclicamente 3-partita bi-completa.

A continuación veremos una generalización del Lema 2 y del Teorema 7, respectivamente.

Lema 11. Sea $k \geq 2$, todo camino cerrado de longitud no congruente con 0 módulo k contiene un ciclo de longitud no congruente con 0 módulo k o un lazo.

Demostración. Sea W un camino cerrado de longitud no congruente con 0 módulo k . Procederemos por inducción sobre $l(W)$.

Base de inducción. Si $l(W) = 1$, el resultado es inmediato.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el Lema 11 se cumple para cada camino cerrado de longitud no congruente con 0 (mód k) W' con $l(W') \leq n-1$, $n \geq 2$.

Paso inductivo. Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_n = v_0)$ un camino cerrado de longitud no congruente con 0 (mód k). Si W no repite vértices, salvo el primero y el último,

entonces W es un ciclo de longitud no congruente con 0 (*mód* k). En otro caso, sea $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $v_j = v_i$ con $j < i \leq n$. Consideremos los caminos cerrados $W' = (v_0, W, v_j) \bullet (v_i, W, v_0)$ y $W'' = (v_j, W, v_i)$, entonces $l(W) = l(W') + l(W'')$ y como W tiene longitud no congruente con 0 (*mód* k), entonces W' o W'' tiene longitud no congruente con 0 (*mód* k). Supongamos sin pérdida de generalidad que W' tiene longitud no congruente con 0 (*mód* k), por hipótesis de inducción se tiene que W' contiene un ciclo de longitud no congruente con 0 (*mód* k) o un lazo y por lo tanto W contiene un ciclo de longitud no congruente con 0 (*mód* k) o un lazo. \square

Teorema 23. *Toda digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo tiene longitud congruente con 0 (*mód* k), sin lazos y con al menos dos vértices es cíclicamente k -partita.*

Demostración. Sean D una digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo tiene longitud congruente con 0 (*mód* k), sin lazos y $v \in V(D)$. Para cada $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ sea $A_i = \{y \in V(D) \mid \text{existe } vy\text{-camino de longitud congruente con } i \text{ (*mód* } k)\}$. Probaremos que $\mathcal{V} = \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ es una k -partición cíclica de $V(D)$.

Primero veamos que si $\{j, j'\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ y $j \neq j'$, entonces $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$. Procediendo por contradicción, supongamos que existen $\{j, j'\} \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ con $j \neq j'$, tales que existe $w \in A_j \cap A_{j'}$. Sean W un vw -camino de longitud congruente con j (*mód* k) y W' un vw -camino de longitud congruente con j' (*mód* k). Como D es fuertemente conexa, existe un wv -camino W^* .

Tenemos que $l(W \bullet W^*) \not\equiv l(W' \bullet W^*) \pmod{k}$, de lo contrario $l(W) + l(W^*) \equiv l(W') + l(W^*) \pmod{k}$ lo que implicaría que $l(W) \equiv l(W') \pmod{k}$, es decir, $j \equiv j' \pmod{k}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $W \bullet W^*$ o $W' \bullet W^*$ es un camino dirigido cerrado de longitud no congruente con 0 (*mód* k) y se sigue del Lema 11 que $W \bullet W^*$ o $W' \bullet W^*$, según sea el caso, contiene un ciclo de longitud no congruente con 0 (*mód* k) o un lazo, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por lo tanto $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$.

Además, $A_0 \neq \emptyset$ pues $v \in A_0$ y como D es fuertemente conexa, $A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ y $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{k-1} = V(D)$. Por lo tanto, \mathcal{V} es una partición de $V(D)$.

Ahora veamos que toda flecha f con vértice inicial en A_i , tiene vértice final en A_{i+1} (*mód* k). Si existiera $f = (x, y) \in F(D)$ con $x \in A_i$ y $y \in A_{i'}$ con $i' \neq i+1$ entonces $y \in A_j \cap A_{j'}$ con $j \neq j'$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto D es cíclicamente k -partita. \square

Lema 12. *Sean D una digráfica cíclicamente k -partita con k -partición cíclica \mathcal{V} , $\{V_i, V_j\} \subseteq \mathcal{V}$, $u \in V_i$ y $v \in V_j$. Todo uv -camino en D tiene longitud congruente con $j - i$ módulo k .*

Demostración. Sea $W = (u = v_0, v_1, \dots, v_n = v)$ un uv -camino en D . Tenemos que $u = v_0 \in V_i$, se sigue de la Definición 4 que $v_1 \in V_{i+1}$, lo que a su vez implica que $v_2 \in V_{i+2}$, continuando con este razonamiento tenemos que $v_n = v \in V_{i+n}$. Por lo tanto, $V_{i+n} = V_j$ y se sigue que $i + n \equiv j \pmod{k}$, concluyendo que $n \equiv j - i \pmod{k}$. \square

Teorema 24. *Sea D una digráfica bi-transitiva tal que la clase de color C es c -fuertemente conexa y tal que D no tiene lazos. Si todo ciclo monocromático en D tiene longitud $\equiv 0 \pmod{3}$, entonces D es cíclicamente 3-partita bi-completa.*

Demostración. Se sigue del Teorema 23 que la subdigráfica D_c de color c es cíclicamente 3-partita, sea $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, V_2\}$ una 3-partición cíclica de D_c . Sean $\{V_i, V_{i+1}\} \subseteq \mathcal{V}$, $u \in V_i$ y $v \in V_{i+1}$, como la clase de color C es c -fuertemente conexa tenemos que existe una uv -trayectoria c -monocromática, se sigue del Lema 12 que ésta tiene longitud $\equiv 1 \pmod{3}$, entonces por el Teorema 9, tenemos que $u \xrightarrow{c} v$. Por lo tanto la subdigráfica de color c es cíclicamente 3-partita completa con 3-partición cíclica \mathcal{V} . De esto se sigue que toda flecha de D_c está en algún ciclo c -monocromático y tenemos, por el Teorema 19, que si $u \xrightarrow{c} v$ entonces $v \xrightarrow{\bar{c}} u$ con $\bar{c} \neq c$. Además, todo ciclo \bar{c} -monocromático tiene longitud $\equiv 0 \pmod{3}$ y se sigue del Teorema 23 que la subdigráfica $D_{\bar{c}}$ de color \bar{c} es cíclicamente 3-partita. Por lo tanto $D_{\bar{c}}$ es cíclicamente 3-partita completa con 3-partición cíclica $\mathcal{V}' = \{V_2, V_1, V_0\}$. Podemos concluir que D es cíclicamente 3-partita bi-completa. \square

A continuación daremos el resultado principal de esta tesis.

Teorema 25. *Si D es una digráfica bi-transitiva con al menos una clase de color fuertemente conexa entonces D es bi-completa o D es cíclicamente 3-partita bi-completa.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 22 y 24. \square

Conclusión

Comenzamos el trabajo definiendo el concepto de digráfica bi-transitiva, en el cual radica la idea central de esta tesis; nuestro objetivo era descubrir qué propiedades tenía esta clase de digráficas. Nuestra intuición nos decía que con cierto tipo de conexidad las digráficas bi-transitivas serían hamiltonianas, pero descubrimos mucho más que eso.

Algunos conceptos nuevos relacionados con digráficas bi-transitivas, que introducimos en este escrito son los siguientes: el concepto de digráfica bi-generada (equivalentemente bi-generar una digráfica), digráfica bi-completa y digráfica cíclicamente k -partita bi-completa.

Empezamos analizando diferentes tipos de trayectorias en digráficas bi-transitivas, nos dimos cuenta que muchos resultados importantes se deducen de la congruencia módulo 3 que tenga la longitud de una trayectoria monocromática. También pudimos observar que toda digráfica bi-transitiva tiene núcleo por trayectorias alternantes, y que si una digráfica bi-transitiva tiene al menos una clase de color fuertemente conexa entonces el diámetro es a lo más 2.

Posteriormente estudiamos a los ciclos en las digráficas bi-transitivas asimétricas. Descubrimos que todo ciclo en una digráfica de este tipo tiene longitud par y es alternante, además si ésta no tiene lazos es bipartita, también vimos que si ambas clases de color son unilateralmente conexas entonces la digráfica es acíclica.

Más adelante, examinamos a los ciclos monocromáticos dentro de digráficas bi-transitivas y las digráficas que éstos bi-generan. Pudimos observar que, al igual que en el caso de las trayectorias, la congruencia módulo 3 de la longitud de los ciclos monocromáticos es fundamental para el desarrollo de la teoría de digráficas bi-transitivas. Probamos que los ciclos de longitud no congruente con 0 módulo 3, bi-generan digráficas con todas las flechas posibles de cada color, es decir, digráficas bi-completas. También notamos que se presenta una completa simetría entre las subdigráficas de cada color. Demostramos que basta con que exista una flecha simétrica monocromática en un ciclo monocromático para que se bi-generen una digráfica bi-completa, y que toda digráfica bi-transitiva con al menos una clase de color fuertemente conexa y con al menos un ciclo de longitud no congruente con 0 (mod 3) o un lazo, es bi-completa.

Por último, descubrimos que toda digráfica bi-transitiva sin lazos y con al menos una clase de color fuertemente conexa tal que todo ciclo tiene longitud congruente con 0 (mod 3) es cíclicamente 3-partita bi-completa.

Lo que nos lleva a la caracterización de digráficas bi-transitivas con al menos una clase de color fuertemente conexa:

Toda digráfica bi-transitiva con al menos una clase de color fuertemente conexa es bi-completa o cíclicamente 3-partita bi-completa.

Fue interesante trabajar con esta clase de digráficas, pues para empezar no sabíamos nada acerca de ellas, de su comportamiento y características, nos planteábamos algo y tratábamos de llegar a aquello, pero estábamos en la incertidumbre total, entre tratar de probar que se cumplía una propiedad, quitar o agregar hipótesis o encontrar contraejemplos. Al principio fue difícil, pero poco a poco fuimos viendo la luz, iban saliendo cosas que no imaginábamos y era muy emocionante. Primero no teníamos más que la pura definición y logramos caracterizar totalmente a las digráficas bi-transitivas con al menos una clase de color fuertemente conexas. Quedo satisfecha, me encantaría que se pudieran seguir estudiando, pues aún queda mucho por descubrir.

Bibliografía

- [1] Bang-Jensen, J. & Gutin, G. Z. , *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*, Springer Monographs in Mathematics (2009).
- [2] Berge, C., *Graphs*, North Holland (1985).
- [3] Bosek, B., Felsner, S., Kloch, K. et al. *Order* (2012) 29: 49. <https://doi.org/10.1007/s11083-011-9197-1>.
- [4] Canfield, E.R. & Williamson, S.G. *Order* (1995) 12: 57. <https://doi.org/10.1007/BF01108590>.
- [5] Chartrand, G., Lesniak, L. & Zhang, P. , *Graphs & Digraphs*, Chapman and Hall/CRC (1996).
- [6] Cvetko-Vah, K., Kinyon, M., Leech, J. et al. *Order* (2011) 28: 9. <https://doi.org/10.1007/s11083-010-9151-7>.
- [7] Ern e, M. & Stege, K. *Order* (1991) 8: 247. <https://doi.org/10.1007/BF00383446>.
- [8] Felsner, S., Gustedt, J. & Morvan, M. *Order* (1998) 15: 221. <https://doi.org/10.1023/A:1006211307442>.
- [9] Gouveia, M.J. & Priestley, H.A. *Order* (2014) 31: 189. <https://doi.org/10.1007/s11083-013-9296-2>.
- [10] McKenzie, R. *Order* (2003) 20: 185. <https://doi.org/10.1023/B:ORDE.0000026529.04361.f8>.
- [11] Rival, I., *Graphs and Order: The Role of Graphs in the Theory of Ordered Sets and Its Applications* , Springer Netherlands (1985).
- [12] Ronse, C. *Order* (2011) 28: 273. <https://doi.org/10.1007/s11083-010-9171-3>.
- [13] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow (1982) *On Monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, *J. Comb. Theory Ser. B*, 33. 271-275.