



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOFÍSICA
Modelación Matemática y Computacional

**"Modelación y Simulación Numérica de Fallas y Almacenamiento
Variable en Yacimientos Naturalmente Fracturados de Triple Porosidad y
Doble Permeabilidad."**

TESIS
que para optar por el grado de
Maestro en Ciencias de la Tierra

Presenta:

Gabriel Ramos Román

Jurado:
Dra. Susana Gómez, Directora
IIMAS, UNAM
Dr. Ernesto Rubio
IIMAS, UNAM
Dr. Eric Morales
Instituto de Geología, UNAM
Dr. Rodolfo Camacho
Facultad de Ingeniería, UNAM
Dr. Guillermo Ramírez
Instituto de Matemáticas, UNAM

Ciudad Universitaria, Ciudad de México
Enero 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen:

Se explica el modelo de flujo con triple porosidad doble permeabilidad (TPDP) para fluidos de una fase y se presenta su solución analítica en coordenadas cilíndricas como se introduce en Camacho et al. [4] para ser usado con el método de imágenes, para modelar una falla geológica o una frontera en el yacimiento. Pero surgen problemas para aplicar el método a una doble permeabilidad.

Por tanto, se desarrolla en este trabajo, una solución analítica en tiempo de Laplace en coordenadas cartesianas, para el modelo de flujo con TPDP, con una falla geológica o una frontera, junto con el efecto de almacenamiento variable. Se usan transformadas de Fourier para resolver el sistema cartesiano. Se modelan dos casos: una falla tipo sellante o frontera de no flujo; o puede ser falla o frontera a presión constante cero. Se usan condiciones en el pozo en coordenadas cilíndricas.

Posteriormente, se toma en cuenta el efecto de almacenamiento variable, debido a la redistribución de fases del fluido, basado en el modelo de Fair et al. [6].

Se compara el método aquí planteado con el método de imágenes, se generan diversas soluciones usando este último, encontrando que usando un promedio ponderado por κ es una buena opción para emplear el método de imágenes en TPDP.

Se comprueba, que los valores obtenidos en este trabajo son similares a los de Fair et al. [6] y Agawal et al. [1] cuando consideramos nuestra solución en el caso de un modelo de porosidad simple.

Finalmente, se muestran curvas tipo de presión contra tiempo y la curva denominada log-derivada, donde se observa el efecto causado en las curvas por la existencia de

una falla y de almacenamiento variable, para distintos valores de los parámetros más importantes: distancia a la falla, coeficiente de almacenamiento aparente y el parámetro de presión por redistribución de fase. Se presentan las curvas para los dos tipos de fallas.

Conejos y conejeras...

...a mi papá.

Aquí está cumplida la promesa realizada en tu lecho de muerte.

Te amo, siempre tendré una parte de ti en mi ser.

Agradecimientos

Quiero agradecer a la dra. Susana Gómez cuyo apoyo y paciencia me hizo llegar a donde estoy. Siempre estuvo a mi lado y me mantuvo bajo la protección de su cálida sombra.

Especialmente quiero agradecer al MC Gustavo Ramos, quien propuso la manera de modelar la TPDP en coordenadas cartesianas con deltas de dirac para el pozo, con dos funciones q y por resolver las integrales en la frontera interna. Todo eso fue idea y trabajo suyo. Me siento muy agradecido de haber obtenido su ayuda tan importante.

Agradezco a mis sinodales dr. Ernesto Rubio y dr. Eric Morales, por apoyarme durante los estudios y siempre darme su opinión para llegar a los resultados de la tesis. También al dr. Rodolfo Camacho, quien siempre me tendió una mano cálida para cualquier duda que tenía en el mundo de la modelación de yacimientos petroleros.

Agradezco a La Fuerza llevarme a poder pararme sobre los hombros de estos gigantes y de los que vinieron antes que ellos.

Declaro conocer el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, plasmado en la Legislación Universitaria. Con base en las definiciones de integridad y honestidad ahí especificadas, aseguro mediante mi firma al calce que el presente trabajo es original y enteramente de mi autoría. Todas las citas de, o referencias a, la obra de otros autores aparecen debida y adecuadamente señaladas, así como acreditadas mediante los recursos editoriales convencionales

Contenido

1	Introducción.	1
2	Triple Porosidad Doble Permeabilidad.	5
2.1	Modelo TPDP.	5
2.2	Condiciones Inicial y de Frontera.	8
2.3	Solución Analítica.	9
2.3.1	Almacenamiento en el Pozo.	13
2.4	Algoritmo de Stehfest.	13
2.5	Método de Imágenes.	14
2.5.1	Aplicación al modelo TPDP.	16
3	Modelo TPDP con falla vertical	19
3.1	Las Fallas.	19
3.2	Línea fuente y Propiedades del Yacimiento.	20
3.2.1	Rango de Aplicación.	21
3.3	Modelo TPDP en coordenadas cartesianas.	22
3.3.1	Resolviendo en el tiempo de Laplace.	24
3.3.2	Desacoplamiento de las Ecuaciones.	26
3.3.3	Transformando al Eje X con Fourier.	28
3.3.4	Cambio de Dominio en el Eje Y	30
3.3.5	Transformando el Eje Y con Fourier Seno y Fourier Coseno.	31
3.3.6	Transformada Inversa de Fourier	35
3.3.7	Reacoplamiento de las Ecuaciones.	36
3.3.8	Cálculo en la Frontera del Pozo.	37
3.3.9	Presión en la Parte Externa del Pozo (<i>sandface</i>).	43
4	Efecto de Almacenamiento Variable en el Pozo	46
4.1	Redistribución de Fase en el Pozo.	46
4.2	Modelo de Fair et al. Para el Efecto de Almacenamiento Variable.	48
4.3	Cálculo de la Presión en el Pozo.	50
4.4	Regreso al Tiempo Real con Algoritmo de Stehfest.	51

5	Resultados.	52
5.1	Pruebas Numéricas a la Solución del Modelo.	52
5.1.1	Comparación del Método Propuesto con el Método de Imágenes. . .	52
5.1.2	Efecto de Almacenamiento Variable.	62
5.2	Curvas Tipo.	65
5.2.1	Curvas Tipo para Fallas Geológicas.	65
5.2.2	Curvas Tipo para Almacenamiento Variable.	67
5.2.3	Curvas Tipo para Fallas con Almacenamiento Variable.	71
6	Conclusiones.	76
7	Nomenclaturas.	78
8	Referencias	82
A	Comprobaciones.	84
A.1	m_f y m_v son positivas.	84
A.2	d_{11} y d_{22} son negativas	85

Capítulo 1

Introducción.

El estudio de los procesos del flujo de petróleo en reservorios carbonatados con vórgulos naturalmente fracturados, recientemente ha recibido considerable atención debido a que las mejores reservas mundiales se encuentran en este tipo de yacimientos. El flujo de petróleo en este tipo de yacimientos debe ser modelado considerando la triple porosidad que puede representar mejor su complejidad. En esta tesis trabajaremos con el modelo de Camacho et al. [4] que considera el flujo primario dentro de las fracturas y los vórgulos, usando un modelo de triple porosidad-doble permeabilidad (TPDP).

Por otro lado, una falla geológica es un elemento que tiene mucha influencia en el comportamiento del yacimiento. Dependiendo de sus características una falla puede beneficiar o perjudicar el proceso de explotación. Las fallas pueden ser impermeables, cuando impiden el paso del fluido; semipermeables, cuando ofrecen cierta resistencia al flujo; conductivas, cuando permiten el flujo a través y a lo largo de ellas. Es importante la detección y evaluación de fallas geológicas, para predecir su comportamiento, reducir la

incertidumbre y evitar que dificulten la explotación del yacimiento.

El objetivo de la tesis es modelar y resolver analítica y numericamente las ecuaciones de flujo de los yacimientos con TPDP añadiendo fallas y coeficiente de almacenamiento variable, para generar curvas tipo que muestren el comportamiento de la presión en el pozo en éste tipo de yacimientos.

Debido a que se supone fluido de una sola fase, se puede modelar yacimientos petroleros o acuíferos. Además, de la misma forma en que se modela una falla se puede modelar una frontera, como puede ser debido a patrones de estratificación, magmatismo, lagos, etc.

El modelo TPDP de Camacho et al. [4] depende de dos coeficientes de almacenamiento, de las fracturas y de los vórgulos, tres parámetros de interacción entre los medios que toman en cuenta la transferencia de flujo entre matriz, fracturas y vórgulos. También depende del coeficiente de permeabilidad de fracturas sobre la permeabilidad total que nos permite pasar los datos de tiempo real al tiempo de Laplace. Existen otros coeficientes relacionados con el pozo, que aparecen en las condiciones de frontera.

Basado en éste modelo se aplicó el método de imágenes para simular una falla o frontera por medio de pozos imagen sintéticos. El método está planeado para modelos de simple permeabilidad, por lo que se presentan problemas para implementarlo en doble permeabilidad. El problema se analizará en el capítulo 2.

En esta tesis se presenta una manera alternativa al método de imágenes al modelar la falla usando coordenadas cartesianas. El capítulo 3 presenta el método, donde se emplearon transformadas integrales para resolver el modelo: transformada de Laplace para el

tiempo, transformada de Fourier para el eje X y para el eje Y se emplearon transformadas Fourier seno y coseno, dependiendo de si la falla es a presión constante cero o sin flujo, respectivamente. Con lo que se obtiene una solución analítica en el tiempo de Laplace.

Para obtener la presión en el pozo se transforma la solución analítica obtenida en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas que cumplen las condiciones de frontera en el pozo, tomando en cuenta la solución de línea fuente y la falta de simetría angular debida a la presencia de la falla.

La presión que se obtiene es del yacimiento en la parte externa del pozo (*sandfase*). Para obtener la presión de pozo en la superficie se contempla el efecto de almacenamiento variable. Este efecto es debido a que cuando el fluido asciende por el pozo ocurre una redistribución de fases, esto es, las burbujas de gas y ciertos flujos de aceite (*slugs*) alteran la presión, produciendo un efecto de almacenamiento variable, el cual es analizado a más detalle en el capítulo 4. Se emplea el modelo de Fair et al. para la presión debida a la redistribución de fase y posteriormente el método numérico de Stehfest para volver del tiempo de Laplace. Se comparan los valores obtenidos en la presente tesis con los obtenidos por Agarwal et al. [1] y Fair et al. [6] para simple porosidad, encontrando que los valores son del mismo orden.

En el capítulo 5 se presentan curvas tipo de presión vs tiempo y la curva denominada log-derivada (la derivada de la presión con respecto al logaritmo del tiempo), donde se observa el efecto causado en las curvas por la existencia de una falla y de almacenamiento variable, para distintos valores de los parámetros más importantes: distancia a la falla, coeficiente de almacenamiento aparente y el parámetro de presión por redistribución de fase.

Se presentan las curvas para los dos tipos de fallas.

Las conclusiones se presentan en el capítulo 6.

Capítulo 2

Triple Porosidad Doble Permeabilidad.

En 2002, Camacho et al. [4] propusieron un nuevo modelo que considera la porosidad de los vóculos en yacimientos naturalmente fracturados. Su trabajo propone un modelo de triple porosidad considerando una aproximación con flujo de interporosidad pseudoestacionaria, i.e. la transferencia de fluido entre el sistema de matriz, vóculos y fracturas es directamente proporcional a la diferencia en el volumen promedio debido a la presión macroscópica en matriz, vóculos y fracturas. La solución es calculada para el periodo transitorio en un yacimiento infinito (apendice B en Camacho et al. [4]).

2.1 Modelo TPDP.

El modelo de Camacho et al. [4] supone lo siguiente:

⇒ Las propiedades de la roca son constantes en cada medio.

⇒ El reservorio tiene espesor uniforme, con fronteras impermeables arriba y abajo.

⇒ El fluido es ligeramente compresible con viscosidad constante y el flujo del fluido es de una fase e isotérmico.

⇒ El pozo es de penetración total. El flujo del fluido dentro del pozo es radial, el cual es alimentado por fracturas y vóculos.

⇒ El sistema se encuentra en equilibrio al tiempo inicial, es decir, la presión es la misma en los sistemas de matriz, fracturas y vóculos.

El modelo de triple porosidad doble permeabilidad (TPDP), en variables adimensionales (etiquetadas con subíndice D), es el siguiente:

$$\omega_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \lambda_{mf} p_{Df} - (\lambda_{mf} + \lambda_{mv}) p_{Dm} + \lambda_{mv} p_{Dv} \quad (2.1)$$

$$\omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \kappa \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) = -(\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) p_{Df} + \lambda_{mf} p_{Dm} + \lambda_{vf} p_{Dv}$$

$$\omega_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_D} - (1 - \kappa) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) = \lambda_{vf} p_{Df} + \lambda_{mv} p_{Dm} - (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) p_{Dv} \quad (2.2)$$

se supone simetría radial, penetración total del pozo y que la permeabilidad en la matriz es despreciable a comparación con la permeabilidad en los sistemas de fracturas o vóculos.

Al final del documento (página 78) se enlista el nombre, dimensiones y unidades de todas las variables.

Las variables adimensionales están dadas por

$$p_{Dj} = \frac{2\pi h (k_f + k_v) (p_{ini} - p_j)}{q\mu B} \quad (2.3)$$

donde p_{Dj} es la presión en el sistema j . Usando en j el índice f para fracturas, v para vóculos y m para la matriz. Y p_{ini} es la presión inicial del yacimiento.

Las definiciones de los parámetros del modelo son dados con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 t_D &= \frac{(k_f + k_v) t}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v) \mu r_w^2} \\
 r_D &= \frac{r}{r_w} \\
 \kappa &= \frac{k_f}{k_f + k_v} \\
 \lambda_{mf} &= \frac{\sigma_{mf} k_m r_w^2}{k_f + k_v} \\
 \lambda_{mv} &= \frac{\sigma_{mv} k_m r_w^2}{k_f + k_v} \\
 \lambda_{vf} &= \frac{\sigma_{vf} k_v r_w^2}{k_f + k_v}
 \end{aligned}$$

con $k_{vf} = k_v$ si $p_v > p_f$ ó $k_{vf} = k_f$ de otra manera. λ_{ij} es el factor de forma del flujo interporoso entre el medio i y el medio j , κ es el cociente de permeabilidad y ω_j son los cocientes de almacenamiento. Se debe tomar en cuenta que en las definiciones de λ_{mf} y λ_{mv} se empleó k_m debido a que en ausencia de fuerzas capilares, se espera que bajo condiciones de producción primaria, el fluido vaya de la matriz al sistema de vórgulos y fracturas. Los cocientes de almacenamiento se dan por

$$\begin{aligned}
 \omega_f &= \frac{\phi_f c_f}{\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v} \\
 \omega_v &= \frac{\phi_v c_v}{\phi_f c_f + \phi_m c_m + \phi_v c_v}
 \end{aligned}$$

por lo tanto ω_m , ω_f y ω_v varían entre cero y uno, además $\omega_m + \omega_f + \omega_v = 1$.

Para el caso del modelo de triple porosidad simple permeabilidad, i.e. cuando solo hay flujo primario por la red de fracturas o por la red de vórgulos, la permeabilidad en vórgulos y en fracturas, respectivamente, debe ser puesta a cero en las definiciones antes

mencionadas, excepto en el numerador de λ_{vf} . Para estos casos $\kappa = 1$ y 0 , respectivamente. Entonces, el parámetro κ toma valores entre cero y uno.

La solución analítica a las ecuaciones (2.1 – 2.2) para diferentes condiciones inicial y de frontera puede ser obtenida en el tiempo de Laplace, posteriormente se usa un método de inversión de la transformada de Laplace descrito por Camacho et al. [4]. Entonces es posible obtener p_{Df} , p_{Dv} y p_{Dm} en tiempo real. En esta tesis se usa el método de Stehfest [11] para poder regresar el valor de la presión del tiempo de Laplace al tiempo real.

2.2 Condiciones Inicial y de Frontera.

Las condiciones inicial y de frontera, en variables adimensionales, vienen dadas por

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Di}(r_D, t_D) = 0 \quad (2.4)$$

$$\left[\kappa r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} + (1 - \kappa) r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = -1 \quad (2.5)$$

$$\left[p_{Df} - s_f r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = \left[p_{Dv} - s_v r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} \quad (2.6)$$

$$p_{Di}(r_D, t_D)|_{t_D=0} = 0 \quad (2.7)$$

donde en i el índice f para fracturas, v para vóculos y m para la matriz.

Considerando el efecto de almacenamiento en el pozo, la presión en el pozo en el tiempo de Laplace:

$$\hat{p}_{wD} = \frac{1}{\tau^2 C_D + \frac{1}{\hat{p}_{wD}} \Big|_{C_D=0}} \quad (2.8)$$

2.3 Solución Analítica.

A continuación se muestra como se obtiene la solución analítica al modelo, tal y como es planteado en Camacho et al [4] para su modelo TPDP en periodo transitorio.

Aplicando transformada de Laplace:

$$\omega_m \tau \widehat{p}_{Dm} = \lambda_{mf} \widehat{p}_{Df} - (\lambda_{mf} + \lambda_{mv}) \widehat{p}_{Dm} + \lambda_{mv} \widehat{p}_{Dv} \quad (2.9)$$

$$\omega_f \tau \widehat{p}_{Df} - \kappa \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) = -(\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) \widehat{p}_{Df} + \lambda_{mf} \widehat{p}_{Dm} + \lambda_{vf} \widehat{p}_{Dv} \quad (2.10)$$

$$\omega_v \tau \widehat{p}_{Dv} - (1 - \kappa) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right) = \lambda_{vf} \widehat{p}_{Df} + \lambda_{mv} \widehat{p}_{Dm} - (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) \widehat{p}_{Dv} \quad (2.11)$$

con condiciones de frontera:

$$\widehat{p}_{Di}(r_D, t_D)|_{r_D \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.12)$$

$$\left[\kappa r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} + (1 - \kappa) r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = \frac{-1}{\tau} \quad (2.13)$$

$$\left[\widehat{p}_{Df} - s_f r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = \left[\widehat{p}_{Dv} - s_v r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.9) se puede escribir la presión en la matriz en términos de las demás presiones

$$\widehat{p}_{Dm} = \frac{\lambda_{mf} \widehat{p}_{Df} + \lambda_{mv} \widehat{p}_{Dv}}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \quad (2.15)$$

sustituyendo lo anterior en las ecuaciones (2.10) y (2.11), y haciendo un poco de álgebra:

$$0 = \kappa \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) + \left(\begin{array}{c} \left(-\omega_f \tau - (\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) + \frac{\lambda_{mf}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right) \widehat{p}_{Df} \\ + \left(\frac{\lambda_{mf} \lambda_{mv}}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} + \lambda_{vf} \right) \widehat{p}_{Dv} \end{array} \right)$$

$$0 = (1 - \kappa) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right) + \left(\begin{array}{c} \left(\lambda_{vf} + \frac{\lambda_{mv} \lambda_{mf}}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right) \widehat{p}_{Df} \\ + \left(-\omega_v \tau - (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) + \frac{\lambda_{mv}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right) \widehat{p}_{Dv} \end{array} \right)$$

si definimos las siguientes constantes positivas (comprobación en el anexo A página 84).

$$m_f = \omega_f \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{vf} - \frac{\lambda_{mf}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \quad (2.16)$$

$$m_v = \omega_v \tau + \lambda_{vf} + \lambda_{mv} - \frac{\lambda_{mv}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \quad (2.17)$$

$$m = \lambda_{vf} + \frac{\lambda_{mv} \lambda_{mf}}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \quad (2.18)$$

se simplifica, obteniendo

$$0 = \kappa \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{Df}}{\partial r_D} \right) - m_f \hat{p}_{Df} + m \hat{p}_{Dv} \quad (2.19)$$

$$0 = (1 - \kappa) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right) + m \hat{p}_{Df} - m_v \hat{p}_{Dv} \quad (2.20)$$

Se propone una solución de la forma:

$$\hat{p}_{Df}(r_D, \tau) = AK_0(\alpha r_D)$$

$$\hat{p}_{Dv}(r_D, \tau) = BK_0(\alpha r_D)$$

donde las constantes A , B y α deben obtenerse de tal modo que se satisfagan las ecuaciones (2.19 – 2.20) y las condiciones de frontera (2.12 – 2.14).

Sustituyendo

$$\begin{aligned} A\kappa \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial K_0(\alpha r_D)}{\partial r_D} \right) - m_f AK_0(\alpha r_D) + m BK_0(\alpha r_D) &= 0 \\ B(1 - \kappa) \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial K_0(\alpha r_D)}{\partial r_D} \right) + m AK_0(\alpha r_D) - m_v BK_0(\alpha r_D) &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando el primer término de cada ecuación por $\frac{\alpha^3}{\alpha^3}$:

$$\begin{aligned} A\kappa \alpha^2 \frac{1}{\alpha r_D} \frac{\partial}{\partial \alpha r_D} \left(\alpha r_D \frac{\partial K_0(\alpha r_D)}{\partial \alpha r_D} \right) - m_f AK_0(\alpha r_D) + m BK_0(\alpha r_D) &= 0 \\ B(1 - \kappa) \alpha^2 \frac{1}{\alpha r_D} \frac{\partial}{\partial \alpha r_D} \left(\alpha r_D \frac{\partial K_0(\alpha r_D)}{\partial \alpha r_D} \right) + m AK_0(\alpha r_D) - m_v BK_0(\alpha r_D) &= 0 \end{aligned}$$

por definición, la función modificada de Bessel satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial K_0(x)}{\partial x} \right) = K_0(x)$$

si $x = \alpha r_D$, podemos simplificar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (A\kappa\alpha^2 - m_f A + mB) K_0(\alpha r_D) &= 0 \\ (B(1 - \kappa)\alpha^2 + mA - m_v B) K_0(\alpha r_D) &= 0 \end{aligned}$$

como $K_0(\alpha r_D) \neq 0$, para todo α y r_D reales

$$\begin{aligned} A\kappa\alpha^2 - m_f A + mB &= 0 \\ B(1 - \kappa)\alpha^2 + mA - m_v B &= 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

escrito en forma de matricial

$$\begin{pmatrix} \kappa\alpha^2 - m_f & m \\ m & (1 - \kappa)\alpha^2 - m_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para una solución no-trivial, el determinante debe ser cero

$$\begin{aligned} [\kappa\alpha^2 - m_f] [(1 - \kappa)\alpha^2 - m_v] - m^2 &= 0 \\ \kappa(1 - \kappa)\alpha^4 + [-m_f(1 - \kappa) - m_v\kappa]\alpha^2 + m_f m_v - m^2 &= 0 \end{aligned}$$

resolviendo para α^2

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{m_f(1 - \kappa) + m_v\kappa \pm \sqrt{[-m_f(1 - \kappa) - m_v\kappa]^2 - 4\kappa(1 - \kappa)(m_f m_v - m^2)}}{2\kappa(1 - \kappa)}$$

Se cambia algebraicamente el discriminante para hacerlo estable.

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{m_f(1 - \kappa) + m_v\kappa \pm \sqrt{[m_v\kappa - m_f(1 - \kappa)]^2 + 4\kappa(1 - \kappa)m^2}}{2\kappa(1 - \kappa)}$$

despejando de la ecuación (2.21) :

$$A_{1,2} = B \frac{-[(1 - \kappa) \alpha_{1,2}^2 - m_v]}{m}$$

Usando $B = 1$, se escriben las ecuaciones en términos de A y C .

$$\widehat{p}_{Df}(r_D, \tau) = A_1 C_1 K_0(\alpha_1 r_D) + A_2 C_2 K_0(\alpha_2 r_D)$$

$$\widehat{p}_{Dv}(r_D, \tau) = C_1 K_0(\alpha_1 r_D) + C_2 K_0(\alpha_2 r_D)$$

Aplicando la condición de frontera (2.13)

$$\left[\begin{array}{c} \partial \left(\begin{array}{c} A_1 C_1 K_0(\alpha_1 r_D) \\ + A_2 C_2 K_0(\alpha_2 r_D) \end{array} \right) \\ \kappa r_D \frac{\partial}{\partial r_D} + (1 - \kappa) r_D \frac{\partial}{\partial r_D} \end{array} \right]_{r_D=1} \left(\begin{array}{c} C_1 K_0(\alpha_1 r_D) \\ + C_2 K_0(\alpha_2 r_D) \end{array} \right) = \frac{1}{\tau}$$

$$[\kappa A_1 + (1 - \kappa)] C_1 \alpha_1 K_1(\alpha_1) + [\kappa A_2 + (1 - \kappa)] C_2 \alpha_2 K_1(\alpha_2) = \frac{1}{\tau}$$

$$C_1 = \frac{1 - [\kappa A_2 + (1 - \kappa)] \alpha_2 K_1(\alpha_2) \tau C_2}{[\kappa A_1 + (1 - \kappa)] \alpha_1 K_1(\alpha_1) \tau} \quad (2.22)$$

$$C_2 = \frac{1 - [\kappa A_1 + (1 - \kappa)] \alpha_1 K_1(\alpha_1) \tau C_1}{[\kappa A_2 + (1 - \kappa)] \alpha_2 K_1(\alpha_2) \tau} \quad (2.23)$$

y la condición de frontera (2.14)

$$\begin{aligned} & A_1 C_1 K_0(\alpha_1) + A_2 C_2 K_0(\alpha_2) + s_f (A_1 C_1 \alpha_1 K_1(\alpha_1) + A_2 C_2 \alpha_2 K_1(\alpha_2)) \\ &= C_1 K_0(\alpha_1) + C_2 K_0(\alpha_2) + s_v (C_1 \alpha_1 K_1(\alpha_1) + C_2 \alpha_2 K_1(\alpha_2)) \\ & \left(\begin{array}{c} (A_1 - 1) K_0(\alpha_1) \\ + (s_f A_1 - s_v) \alpha_1 K_1(\alpha_1) \end{array} \right) C_1 = \left(\begin{array}{c} (1 - A_2) K_0(\alpha_2) \\ + (s_v - s_f A_2) \alpha_2 K_1(\alpha_2) \end{array} \right) C_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Sustituyendo la ecuación (2.23) en (2.24) para obtener C_1

$$C_1 = \frac{1}{\tau K_0(\alpha_1)} \frac{(1 - A_2) + \alpha_2 \frac{K_1(\alpha_2)}{K_0(\alpha_2)} (s_v - s_f A_2)}{\left(\begin{array}{l} \alpha_1 \frac{K_1(\alpha_1)}{K_0(\alpha_1)} (\kappa A_1 + 1 - \kappa) \left((1 - A_2) + \alpha_2 \frac{K_1(\alpha_2)}{K_0(\alpha_2)} (s_v - s_f A_2) \right) \\ + \alpha_2 \frac{K_1(\alpha_2)}{K_0(\alpha_2)} (\kappa A_2 + 1 - \kappa) \left((A_1 - 1) + \alpha_1 \frac{K_1(\alpha_1)}{K_0(\alpha_1)} (s_f A_1 - s_v) \right) \end{array} \right)}$$

Sustituyendo la ecuación (2.22) en (2.24) para obtener C_2

$$C_2 = \frac{1}{\tau K_0(\alpha_2)} \frac{(A_1 - 1) + \alpha_1 \frac{K_1(\alpha_1)}{K_0(\alpha_1)} (s_f A_1 - s_v)}{\left(\begin{array}{l} \alpha_1 \frac{K_1(\alpha_1)}{K_0(\alpha_1)} (\kappa A_1 + 1 - \kappa) \left((1 - A_2) + \alpha_2 \frac{K_1(\alpha_2)}{K_0(\alpha_2)} (s_v - s_f A_2) \right) \\ + \alpha_2 \frac{K_1(\alpha_2)}{K_0(\alpha_2)} (\kappa A_2 + 1 - \kappa) \left((A_1 - 1) + \alpha_1 \frac{K_1(\alpha_1)}{K_0(\alpha_1)} (s_f A_1 - s_v) \right) \end{array} \right)}$$

2.3.1 Almacenamiento en el Pozo.

La presión en el pozo en el tiempo de Laplace, sin contar el efecto de almacenamiento

$$[\widehat{p}_{wD}(\tau)]_{C_D=0} = C_1 K_0(\alpha_1) + C_2 K_0(\alpha_2) + s_v [C_1 \alpha_1 K_1(\alpha_1) + C_2 \alpha_2 K_1(\alpha_2)]$$

y ahora empleamos la ecuación (2.8) para adicionar el efecto de almacenamiento

$$\widehat{p}_{wD} = \frac{1}{\tau^2 C_D + \frac{1}{\widehat{p}_{wD}} \Big|_{C_D=0}}$$

2.4 Algoritmo de Stehfest.

El algoritmo de Stehfest [11] es un método sencillo y muy conocido pasar una función en el tiempo de Laplace al tiempo real, de manera numérica. La presión se calcula con

$$p_a(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \widehat{p} \left(i \frac{\ln 2}{t} \right)$$

donde los coeficientes

$$V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+i} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, \frac{N}{2})} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{(\frac{N}{2} - k)! k! (k - 1)! (i - k)! (2k - i)!}$$

El algoritmo es rápido y da mejores resultados cuando la función es suave. τ debe ser real. El número de Stehfest N debe ser par. Los coeficientes V_i pueden calcularse una sola vez y en un preprocesado debido a que solo dependen del número N , el cual puede ser elegido por prueba y error (en éste trabajo se usa $N = 10$), en teoría entre mayor N mayor la exactitud, pero al aumentar N se crean más errores de redondeo que se van acumulando.

2.5 Método de Imágenes.

El método de imágenes es un método sencillo, donde se modela una falla sellante o a presión constante cero por medio de introducir más pozos sintéticos en el modelo matemático.

El caso más sencillo es el de modelar una sola falla. Esto se hace con un solo pozo sintético que se debe poner a una distancia de $2L$ del pozo real, donde L es la distancia del pozo real a la falla. Lo anterior se ilustra en la figura 2.1.

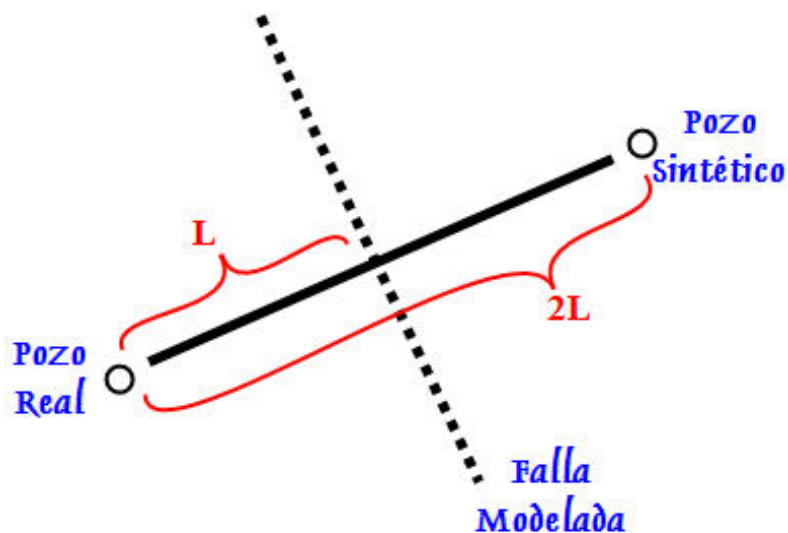


Figura 2.1. Método de imágenes. Modelación de una falla por medio de un pozo sintético.

El método es brevemente descrito por Brett [3]. El pozo sintético es en todos aspectos similar al pozo real excepto por su posición, por lo tanto el campo de presiones de ambos pozos deben ser iguales excepto que al pozo sintético le vamos dar el signo igual o contrario, dependiendo del tipo de falla que deseamos simular. Por lo tanto, en el lugar equidistante a ambos pozos (con forma de plano) se espera:

- a) Si los pozos tienen distinto signo, se crea una zona con presión igual a cero.
- b) Si los pozos tienen el mismo signo, la derivada normal de la presión en la línea equidistante a ambos pozos tiene signo contrario, por lo tanto su suma es cero, que es la condición de la falla sin flujo.

Entonces la presión en el pozo se genera con

$$p_{Dtotal}(1, t) = p_D(1, t) \pm p_D(2L, t)$$

donde el signo " \pm ", se emplea "+" para la solución a la falla sin flujo y "-" para la solución

a la falla a presión constante cero.

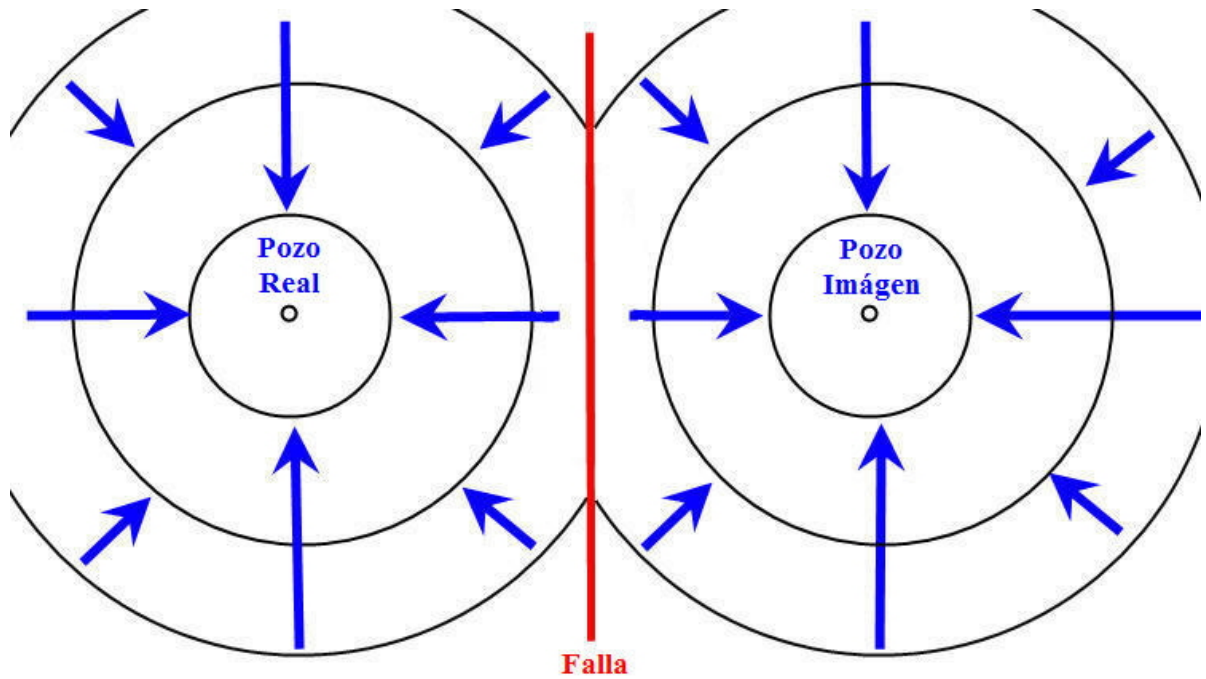


Figura 2.2. Se muestra como con cierto tiempo las isobaras

de cada pozo se juntarían creando el efecto de una falla.

2.5.1 Aplicación al modelo TPDP.

Para la presión en el pozo que se va a emplear en el método de imágenes, para el modelo de TPDP de Camacho et al. [4] y su solución ahí mostrada para el periodo transitorio.

La ecuación (2.6) sin daño en el pozo ($s_f = s_v = 0$), se simplifica a

$$p_{wD} = p_{Df}|_{r_D=1} = p_{Dv}|_{r_D=1} \quad (2.25)$$

donde el método de imágenes dice que cada presión se calcula con lo siguiente

$$p_{Df}^{imag} = p_{Df}(1, t) \pm p_{Df}(2L, t)$$

$$p_{Dv}^{imag} = p_{Dv}(1, t) \pm p_{Dv}(2L, t)$$

sustituyendo en la ecuación (2.25)

$$p_{wD}^{imag} = p_{Df}(1, t) \pm p_{Df}(2L, t) = p_{Dv}(1, t) \pm p_{Dv}(2L, t)$$

donde la misma ecuación (2.25) dice que $p_{Df}(1, t) = p_{Dv}(1, t)$, entonces para poder calcular una presión p_{wD}^{imag} se debe cumplir, más no se garantiza, que

$$p_{Df}(2L, t) = p_{Dv}(2L, t) \tag{2.26}$$

lo que significa que en la distancia $2L$ las presiones tanto en el sistema de fracturas como de vógelos debe ser igual.

Para verificar la ecuación (2.26), se modelaron 10 mil yacimientos sintéticos con diferentes valores de parámetros ω_m , ω_f , ω_v , κ , λ_{mf} , λ_{mv} , λ_{vf} y L dados aleatoriamente. Se evaluó la presión para el sistema de fracturas y se comparó con la presión para sistema de vógelos.

Se encontró que un 20% de los yacimientos no cumplían con la igualdad en cierto intervalo de tiempo, de los cuales:

→ 15% tenían un error de similitud de entre 5 al 10%.

→ 5% tenían un error de similitud de entre 10 al 30%.

No se logró identificar que el error de igualdad entre las dos presiones evaluadas coincidiera con ciertos valores específicos en los parámetros, en cambio, en ciertos casos los

valores de ciertos parámetros suman sus efectos creando ese intervalo donde las fracturas y los vórgulos se comportan diferente. Por ejemplo, los almacenamientos ω_j que influyen en la derivada temporal coinciden con cierto valor κ y λ_{ij} .

En la sección 5.1.1, página 52, se presentarán ejemplos de los yacimientos que no cumplen la ecuación (2.26) en cierto intervalo, se va a discutir el efecto de los parámetros según las ecuaciones de balance y el significado físico, así como nuevas alternativas para mejorar el método de imágenes y probar si efectivamente debe descartarse para el caso de doble permeabilidad.

A continuación, se presenta un método diferente para modelar fallas geológicas.

Capítulo 3

Modelo TPDP con falla vertical

A continuación se propone un modelo de Triple Porosidad Doble Permeabilidad, basado en el modelo de Camacho et al. [4] en el que se incorporan fallas verticales, tanto de tipo sellante como de presión constante cero, en coordenadas cartesianas. Se hacen las mismas suposiciones en cuanto al flujo, parámetros y variables adimensionales (ver página 5).

3.1 Las Fallas.

Una falla geológica es un elemento que tiene mucha influencia en el comportamiento del yacimiento. Dependiendo de sus características una falla puede beneficiar o perjudicar el proceso de explotación. Las fallas pueden ser impermeables, cuando impiden el paso del fluido; semipermeables, cuando ofrecen cierta resistencia al flujo; y conductivas, cuando permiten el flujo a través y a lo largo de ellas.

Es importante la detección y evaluación de fallas geológicas, para predecir su com-

portamiento, reducir la incertidumbre y evitar que dificulten la explotación del yacimiento. Se pueden usar datos sísmicos, información estructural y microestructural del análisis de núcleos, datos de pozo y producción.

Para poder identificar los efectos de una falla geológica en los datos de producción, una posibilidad es modelar de manera matemática como se comportaría un pozo que tiene una falla en la proximidad.

En la presente tesis se incorpora una falla en el modelo matemático, ubicada verticalmente y paralela al eje Y . Será introducida al modelo por medio de la condición de frontera en $y_D = L$, donde L es la distancia del pozo a la falla.

Se contemplan dos tipos de fallas: sin flujo (impermeable) con la condición de frontera:

$$\left[\frac{\partial p_{Df}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = \left[\frac{\partial p_{Dv}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = 0$$

y a presión constante cero (conductiva) de condición de frontera

$$[p_{Df}]_{y_D=L} = [p_{Dv}]_{y_D=L} = 0$$

3.2 Línea fuente y Propiedades del Yacimiento.

La forma más sencilla de modelar el pozo es formularlo tan delgado que se pueda aproximar con una línea.

Se supone el fluido de una sola fase, ligeramente compresible.

Mientras que el pozo es vertical, de penetración total en un reservorio infinito, el yacimiento tiene espesor uniforme por lo que el flujo es únicamente horizontal, no hay componente vertical.

El yacimiento es isotrópico y homogéneo, con propiedades constantes que no varían con la presión. Inicialmente tiene una presión uniforme. El fluido es bombeado a un ritmo constante.

3.2.1 Rango de Aplicación.

La aproximación de línea fuente supone que el pozo tiene radio cero, cuando en la realidad siempre es diferente de cero.

Podemos usar la aproximación siempre que el "radio de penetración" del pulso de presión sea mayor que el radio del pozo.

Según Zimmerman [13], el parámetro que gobierna el ritmo en que la presión en el fluido se difunde a través de la masa de roca se llama difusividad hidráulica y es definida por

$$D_H = \frac{k}{\phi\mu c_t}$$

Aproximadamente la distancia λ en la que la perturbación en la presión va a viajar durante el tiempo t es

$$\lambda = \sqrt{4D_H t} = \sqrt{\frac{4kt}{\phi\mu c_t}}$$

Despejando, podemos encontrar el tiempo t en que la perturbación en la presión viaja la distancia λ

$$t = \frac{\phi\mu c_t \lambda^2}{4k}$$

el pulso de presión obedece a la ecuación de difusión, no a la ecuación de onda. En vez de viajar a una velocidad constante, su velocidad decrece con el tiempo.

Volviendo a la aplicación de la línea fuente, el tiempo en el que el pulso de presión viaja al menos hasta la pared del pozo es

$$t_w = \frac{\phi \mu c t r_w^2}{4k}$$

Para ejemplificarlo, tomamos algunos "valores típicos" (Zimmerman [13]) como son $\phi = 0.20$, $\mu = 0.001 [Pa\ s]$, $c = 10^{-10} [Pa^{-1}]$, $r_w = 0.1 [m]$, $k = 10^{14} [m^2]$, entonces la aproximación de línea fuente va a ser válida tan sólo después de $0.005 [s]$. En término de variables adimensionales la aproximación será válida para

$$t_{wD} > 0.25$$

3.3 Modelo TPDP en coordenadas cartesianas.

La forma más sencilla de modelar los pozos de penetración total es en coordenadas cilíndricas y suponiendo simetría angular, por lo que las variables son r_D y t . Por otro lado, debido a que la falla es un plano, se puede simular por una condición de frontera en coordenadas cartesianas. No encontramos bibliografía al respecto, por lo que tuvimos que encontrar la manera de resolverlo, de preferencia de forma analítica.

A continuación se presenta el modelo de triple porosidad doble permeabilidad, sin dimensiones, para pozos de penetración total en coordenadas cartesianas, con aproximación línea fuente:

$$\begin{aligned} \omega_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} &= -(\lambda_{mf} + \lambda_{mv}) p_{Dm} + \lambda_{mv} p_{Dv} + \lambda_{mf} p_{Df} \\ \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \kappa \left(\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial y_D^2} \right) + \delta(x_D, y_D) q_1 &= \lambda_{mf} p_{Dm} - (\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) p_{Df} + \lambda_{vf} p_{Dv} \\ \omega_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_D} - (1 - \kappa) \left(\frac{\partial^2 p_{Dv}}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 p_{Dv}}{\partial y_D^2} \right) + \delta(x_D, y_D) q_2 &= \lambda_{mv} p_{Dm} + \lambda_{vf} p_{Df} - (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) p_{Dv} \end{aligned}$$

donde q_1 y q_2 son funciones del tiempo desconocidas por ahora, que tienen que ver con el gasto de aceite en el pozo. La unidades adimensionales son las mismas que en la página 6. Al final del documento (página 78) se enlista el nombre, dimensiones y unidades de todas las variables.

Condiciones iniciales y de frontera:

$$p_{Di}(x_D, y_D, t_D)|_{t_D=0} = 0$$

$$\lim_{x_D \rightarrow \pm\infty} p_{Di}(x_D, y_D, t_D) = 0$$

$$\lim_{y_D \rightarrow -\infty} p_{Di}(x_D, y_D, t_D) = 0$$

donde el subíndice i indica el medio: m para matriz, f para el sistema de fracturas y v para el sistema de vóculos.

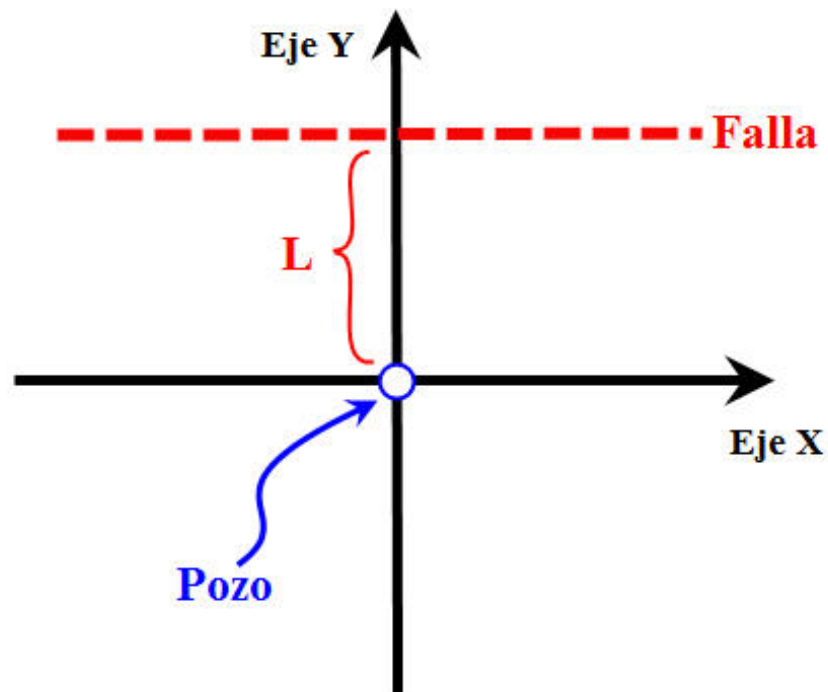


Figura 3.1. Se muestra la distribución del pozo y la falla en el presente trabajo.

Las condiciones de frontera, para falla sin flujo:

$$\left[\frac{\partial p_{Df}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = \left[\frac{\partial p_{Dv}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = 0$$

para falla con presión constante cero:

$$[p_{Df}]_{y_D=L} = [p_{Dv}]_{y_D=L} = 0$$

Para calcular q_1 y q_2 se aplicarán las condiciones de frontera en el pozo ($r_D = 1$) en coordenadas cilíndricas, debido a que no existe una simetría angular y por simplicidad.

Entonces, las condiciones en el pozo son:

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\kappa r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} + (1 - \kappa) r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} d\theta \\ p_{Ds_f} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[p_{Df} - s_f r_D \frac{\partial p_{Df}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[p_{Dv} - s_v r_D \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta \end{aligned}$$

3.3.1 Resolviendo en el tiempo de Laplace.

Aplicando transformada de Laplace $\widehat{p}_{Di} = \mathcal{L}\{p_{Di}\}$, el modelo se transforma a:

$$\omega_m \tau \widehat{p}_{Dm} + (\lambda_{mf} + \lambda_{mv}) \widehat{p}_{Dm} = \lambda_{mf} \widehat{p}_{Df} + \lambda_{mv} \widehat{p}_{Dv} \quad (3.1)$$

$$\omega_f \tau \widehat{p}_{Df} - \kappa \nabla^2 \widehat{p}_{Df} + \delta(x_D, y_D) \widehat{q}_1 = \lambda_{mf} \widehat{p}_{Dm} - (\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) \widehat{p}_{Df} + \lambda_{vf} \widehat{p}_{Dv} \quad (3.2)$$

$$\omega_v \tau \widehat{p}_{Dv} - (1 - \kappa) \nabla^2 \widehat{p}_{Dv} + \delta(x_D, y_D) \widehat{q}_2 = \lambda_{mv} \widehat{p}_{Dm} + \lambda_{vf} \widehat{p}_{Df} - (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) \widehat{p}_{Dv} \quad (3.3)$$

con condiciones de frontera:

$$\lim_{x_D \rightarrow \pm\infty} \widehat{p}_{Di}(x_D, y_D, t_D) = 0$$

$$\lim_{y_D \rightarrow -\infty} \widehat{p}_{Di}(x_D, y_D, t_D) = 0$$

para falla sin flujo:

$$\left[\frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = \left[\frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = 0$$

para falla con presión constante cero:

$$[\widehat{p}_{Df}]_{y_D=L} = [\widehat{p}_{Dv}]_{y_D=L} = 0$$

De la ecuación (3.1) se puede escribir la presión en la matriz en términos de las demás presiones

$$\widehat{p}_{Dm} = \frac{\lambda_{mf}\widehat{p}_{Df} + \lambda_{mv}\widehat{p}_{Dv}}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}}$$

sustituyendo lo anterior en las otras dos ecuaciones:

$$0 = \left[\begin{aligned} &\kappa \left(\frac{\partial^2}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_D^2} \right) \widehat{p}_{Df} + \left(-\omega_f\tau - (\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) + \frac{\lambda_{mf}^2}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right) \widehat{p}_{Df} \\ &\quad + \left(\lambda_{vf} + \frac{\lambda_{mf}\lambda_{mv}}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right) \widehat{p}_{Dv} - \delta(x_D, y_D) \widehat{q}_1 \end{aligned} \right]$$

$$0 = \left[\begin{aligned} &(1 - \kappa) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_D^2} \right) \widehat{p}_{Dv} + \left(-\omega_v\tau - (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) + \frac{\lambda_{mv}^2}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right) \widehat{p}_{Dv} \\ &\quad + \left(\lambda_{vf} + \frac{\lambda_{mf}\lambda_{mv}}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right) \widehat{p}_{Df} - \delta(x_D, y_D) \widehat{q}_2 \end{aligned} \right]$$

si definimos

$$m_f = \omega_f\tau + (\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) - \frac{\lambda_{mf}^2}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \quad (3.4)$$

$$m_v = \omega_v\tau + (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) - \frac{\lambda_{mv}^2}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \quad (3.5)$$

$$m = \lambda_{vf} + \frac{\lambda_{mv}\lambda_{mf}}{\omega_m\tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \quad (3.6)$$

que son positivas en todo momento (demostración en anexo A, página 84). Las ecuaciones

se simplifican, obteniendo

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_D^2} \right) \widehat{p}_{Df} - \frac{m_f}{\kappa} \widehat{p}_{Df} + \frac{m}{\kappa} \widehat{p}_{Dv} - \frac{\widehat{q}_1}{\kappa} \delta(x_D, y_D) \quad (3.7)$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_D^2} \right) \widehat{p}_{Dv} + \frac{m}{1 - \kappa} \widehat{p}_{Df} - \frac{m_v}{1 - \kappa} \widehat{p}_{Dv} - \frac{\widehat{q}_2}{(1 - \kappa)} \delta(x_D, y_D) \quad (3.8)$$

3.3.2 Desacoplamiento de las Ecuaciones.

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) se pueden escribir en forma matricial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_D^2} \right) \begin{bmatrix} \widehat{p}_{Df} \\ \widehat{p}_{Dv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{m_f}{\kappa} & \frac{m}{\kappa} \\ \frac{m}{1-\kappa} & -\frac{m_v}{1-\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p}_{Df} \\ \widehat{p}_{Dv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\widehat{q}_1}{\kappa} \delta(x_D, y_D) \\ \frac{\widehat{q}_2}{(1-\kappa)} \delta(x_D, y_D) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 \widehat{P} + M \widehat{P} = Q \quad (3.9)$$

Para descomponer la matriz M por medio de su forma de Jordan, debemos usarla de la manera más sencilla posible, esto es:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m_f}{\kappa} & \frac{m}{\kappa} \\ \frac{m}{1-\kappa} & -\frac{m_v}{1-\kappa} \end{bmatrix}$$

de otra manera, la división entre κ ó entre $1-\kappa$ se repite muchas veces, generando errores numéricos de redondeo, sobretodo en tiempos cortos.

Entonces, la matriz M se va a descomponer

$$M = RDR^{-1}$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2m_{12}}(m_{11} - m_{22} + \gamma) & \frac{1}{2m_{12}}(m_{22} - m_{11} + \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} - \gamma) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} + \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{m_{22} - m_{11}}{\gamma} + 1 \right) & -\frac{m_{12}}{\gamma} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{\gamma} + 1 \right) & \frac{m_{12}}{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{-11} & r_{-12} \\ r_{-21} & r_{-22} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

y también:

$$\gamma = \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}} \quad (3.13)$$

Donde d_{11} y d_{22} son negativas (demostración en Anexo A, página 86).

La ecuación (3.9), entonces se convierte en:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{P} + RDR^{-1} \hat{P} &= Q \\ \nabla^2 RR^{-1} \hat{P} + RDR^{-1} \hat{P} &= Q \end{aligned}$$

si definimos

$$\hat{F} = R^{-1} \hat{P} \quad (3.14)$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla^2 R\hat{F} + RD\hat{F} &= Q \\ R^{-1} (\nabla^2 R\hat{F} + RD\hat{F}) &= R^{-1}Q \\ \nabla^2 \hat{F} + D\hat{F} &= R^{-1}Q \end{aligned}$$

donde en forma explícita

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_D^2} \right) \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{-11} & r_{-12} \\ r_{-21} & r_{-22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\hat{q}_1}{\kappa} \delta(x_D, y_D) \\ \frac{\hat{q}_2}{(1-\kappa)} \delta(x_D, y_D) \end{bmatrix}$$

Volviendo a escribir en ecuaciones separadas:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{f}_1 + d_{11} \hat{f}_1 &= \left(\frac{r_{-11} \hat{q}_1}{\kappa} + \frac{r_{-12} \hat{q}_2}{(1-\kappa)} \right) \delta(x_D, y_D) \\ \nabla^2 \hat{f}_2 + d_{22} \hat{f}_2 &= \left(\frac{r_{-21} \hat{q}_1}{\kappa} + \frac{r_{-22} \hat{q}_2}{(1-\kappa)} \right) \delta(x_D, y_D) \end{aligned}$$

Para simplificar las ecuaciones definimos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{r_{-11}\hat{q}_1}{\kappa} + \frac{r_{-12}\hat{q}_2}{(1-\kappa)} \\ c_2 &= \frac{r_{-21}\hat{q}_1}{\kappa} + \frac{r_{-22}\hat{q}_2}{(1-\kappa)} \end{aligned}$$

entonces

$$\nabla^2 \hat{f}_1 + d_{11}\hat{f}_1 = c_1\delta(x_D, y_D) \quad (3.15)$$

$$\nabla^2 \hat{f}_2 + d_{22}\hat{f}_2 = c_2\delta(x_D, y_D) \quad (3.16)$$

3.3.3 Transformando al Eje X con Fourier.

Aplicando la transformada de Fourier, $\mathcal{F}\{\hat{f}_i\} = \hat{F}_i$.

$$\begin{aligned} -\varpi^2 \hat{F}_1 + \frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial y_D^2} + d_{11}\hat{F}_1 &= c_1\delta(y_D) \\ -\varpi^2 \hat{F}_2 + \frac{\partial^2 \hat{F}_2}{\partial y_D^2} + d_{22}\hat{F}_2 &= c_2\delta(y_D) \end{aligned}$$

si definimos $\alpha_1 = d_{11} - \varpi^2$, $\alpha_2 = d_{22} - \varpi^2$, como d_{11}, d_{22} son negativos, entonces α_1, α_2 deben ser negativos. No confundir la variable de Fourier ϖ en el presente trabajo con el coeficiente de almacenamiento ω_i .

$$\frac{\partial^2 \hat{F}_1}{\partial y_D^2} + \alpha_1 \hat{F}_1 = c_1\delta(y_D) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{F}_2}{\partial y_D^2} + \alpha_2 \hat{F}_2 = c_2\delta(y_D) \quad (3.18)$$

que son ecuaciones diferenciales no-homogéneas, por lo tanto tienen una solución homogénea más una solución particular.

Se deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera

$$R^{-1}\hat{P}\Big|_{y_D \rightarrow -\infty} = \hat{F}\Big|_{y_D \rightarrow -\infty} = 0$$

con falla sin flujo:

$$\left[\frac{\partial R^{-1} \hat{P}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = \left[\frac{\partial \hat{F}}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = 0$$

y con falla con presión constante cero:

$$\left[R^{-1} \hat{P} \right]_{y_D=L} = \left[\hat{F} \right]_{y_D=L} = 0$$

Primero se resolverá para \hat{F}_1 , ya que de manera similar se puede resolver para \hat{F}_2 .

Como $\alpha_1 < 0$, la solución homogénea tiene la forma:

$$\hat{F}_{1H} = A_1 \exp(\sqrt{-\alpha_1} y_D) + A_2 \exp(-\sqrt{-\alpha_1} y_D)$$

donde A_1 y A_2 son constantes.

Aplicando la condición de frontera en $y_D \rightarrow -\infty$

$$\hat{F}_1 \Big|_{y_D \rightarrow -\infty} = 0 = \lim_{y_D \rightarrow -\infty} [A_1 \exp(\sqrt{-\alpha_1} y_D) + A_2 \exp(-\sqrt{-\alpha_1} y_D)]$$

con lo cual encontramos que A_2 debe valer cero.

Buscamos la solución para dos tipos de fallas, para la primera, usando la condición de frontera en $y_D = L$, para falla sin flujo

$$\left[\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial y_D} \right]_{y_D=L} = 0 = \sqrt{-\alpha_1} A_1 \exp(\sqrt{-\alpha_1} L)$$

como ni α_1 ni la exponencial del lado derecho pueden valer cero, entonces A_1 debe valer cero.

Para la segunda, si aplicamos la condición de frontera en $y_D = L$ de falla a presión constante cero

$$\left[\hat{F}_1 \right]_{y_D=L} = 0 = A_1 \exp(\sqrt{-\alpha_1} L)$$

A_1 también debe valer cero.

En resumen, no existe solución homogénea, por lo tanto la solución particular debe cumplir con las condiciones de frontera. Se necesita un método diferente, como las transformadas Fourier seno y coseno.

3.3.4 Cambio de Dominio en el Eje Y

Para poder usar las transformadas Fourier seno y coseno debemos tener el dominio de 0 a ∞ . En este caso la condición de frontera en $y_D = L$ nos lo impide. Así que debemos hacer un cambio de variable para mover el dominio:

$$y' = L - y_D \quad (3.19)$$

las condiciones de frontera se recorren a

$$\widehat{F} \Big|_{y' \rightarrow \infty} = 0$$

en la falla sin flujo:

$$\left[\frac{\partial \widehat{F}}{\partial y'} \right]_{y'=0} = 0$$

para falla con presión constante cero:

$$\left[\widehat{F} \right]_{y'=0} = 0$$

ahora el pozo se encuentra en $y' = L$ y la ecuación a resolver para \widehat{F}_1 es

$$\frac{\partial^2 \widehat{F}_1}{\partial y'^2} + \alpha_1 \widehat{F}_1 = c_1 \delta(L - y') \quad (3.20)$$

3.3.5 Transformando el Eje Y con Fourier Seno y Fourier Coseno.

Ya que movimos el dominio, podemos usar las transformadas de 0 a ∞ , como la transformada Fourier coseno. La cual se define como

$$\begin{aligned} f^C(\varsigma) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(y') \cos(y'\varsigma) dy' \\ f(y') &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f^C(\varsigma) \cos(y'\varsigma) d\varsigma \end{aligned}$$

donde $\varsigma > 0$, y existe una condición de frontera tipo Neumann en $y' = 0$, como en el caso de la falla sin flujo. La transformada Fourier seno es muy similar

$$\begin{aligned} f^S(\sigma) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(y') \sin(y'\sigma) dy' \\ f(y') &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f^S(\sigma) \sin(y'\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

con $\sigma > 0$, y requiere una condición de frontera tipo Dirichlet en $y' = 0$, como la falla a presión constante cero.

Aplicando las definiciones, se calculan las transformaciones necesarias. Si $\mathcal{F}^C \{f(x)\}$ es la transformada Fourier coseno de $f(x)$ y $\mathcal{F}^S \{f(x)\}$ es la transformada Fourier seno de $f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^C \{f(y')\} &= f^C(\varsigma) \\ \mathcal{F}^C \left\{ \frac{d^2 f(y')}{dy'^2} \right\} &= -\varsigma^2 g(\varsigma) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \\ \mathcal{F}^C \{\delta(L - y')\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(L\varsigma) \\ \mathcal{F}^S \{f(y')\} &= f^S(\sigma) \\ \mathcal{F}^S \left\{ \frac{d^2 f(y')}{dy'^2} \right\} &= -\sigma^2 g(\sigma) - \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \\ \mathcal{F}^S \{\delta(L - y')\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(L\sigma) \end{aligned}$$

Transformando la ecuación (3.20), usando la transformada coseno para la falla sin flujo y la transformada seno para la falla a presión constante cero (con el superíndice c y s respectivamente, para diferenciarlos):

$$\begin{aligned} -\varsigma^2 \widehat{F}_1^c + \alpha_1 \widehat{F}_1^c &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1 \cos(L\varsigma) \\ -\sigma^2 \widehat{F}_1^s + \alpha_1 \widehat{F}_1^s &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1 \sin(L\sigma) \end{aligned}$$

entonces a partir de ellas podemos encontrar las soluciones en el dominio de las transformadas:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1^c(\varsigma) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c_1 \cos(L\varsigma)}{\alpha_1 - \varsigma^2} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1 \frac{\cos(L\varsigma)}{a^2 + \varsigma^2} \\ \widehat{F}_1^s(\sigma) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c_1 \sin(L\sigma)}{\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\sigma^2} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1 \frac{\sin(L\sigma)}{a^2 + \sigma^2} \end{aligned}$$

donde $a = \sqrt{-\alpha_1}$. Como α_1 es negativo, a es una constante real (prueba en anexo A, página 86).

Aplicando la transformada inversa coseno y seno, la solución \widehat{F}_1^{sf} para la falla sin flujo y la solución \widehat{F}_1^{pc} para la falla a presión constante cero, sería:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1^{sf}(y') &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1 \frac{\cos(L\varsigma)}{a^2 + \varsigma^2} \right) \cos(y'\varsigma) d\varsigma \\ &= -c_1 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\cos(L\varsigma)}{a^2 + \varsigma^2} \right) \cos(y'\varsigma) d\varsigma \\ \widehat{F}_1^{pc}(y') &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1 \frac{\sin(L\sigma)}{a^2 + \sigma^2} \right) \sin(y'\sigma) d\sigma \\ &= -c_1 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin(L\sigma)}{a^2 + \sigma^2} \right) \sin(y'\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Buscando en las tablas, encontramos la solución a la integral, (Erdélyi [4] pp. 21

ec.(18) y pp. 78 ec. (5)) si tenemos:

$$f(x) = \frac{\cos(bx)}{a^2 + x^2}$$

entonces

$$\int_0^\infty f(x) \cos(xy) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2a} e^{-ab} \cosh(ay) & \text{para } 0 < y < b \\ \frac{\pi}{2a} e^{-ay} \cosh(ab) & \text{para } b < y < \infty \end{cases}$$

en cambio si tenemos:

$$g(x) = \frac{\sin(bx)}{a^2 + x^2}$$

entonces

$$\int_0^\infty g(x) \sin(xy) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2a} e^{-ab} \sinh(ay) & \text{para } 0 < y < b \\ \frac{\pi}{2a} e^{-ay} \sinh(ab) & \text{para } b < y < \infty \end{cases}$$

por lo que las soluciones aun en el espacio de Fourier y Laplace son:

$$\widehat{F}_1^{sf} = -\frac{c_1}{a} \begin{cases} \exp(-aL) \cosh(ay') & \text{para } 0 < y' < L \\ \exp(-ay') \cosh(aL) & \text{para } L < y' < \infty \end{cases}$$

$$\widehat{F}_1^{pc} = -\frac{c_1}{a} \begin{cases} \exp(-aL) \sinh(ay') & \text{para } 0 < y' < L \\ \exp(-ay') \sinh(aL) & \text{para } L < y' < \infty \end{cases}$$

Ahora, volviendo al dominio de y_D

$$\widehat{F}_1^{sf} = -\frac{c_1}{a} \begin{cases} \exp(-aL) \cosh[a(L - y_D)] & \text{para } 0 < y_D < L \\ \exp[-a(L - y_D)] \cosh(aL) & \text{para } -\infty < y_D < 0 \end{cases}$$

$$\widehat{F}_1^{pc} = -\frac{c_1}{a} \begin{cases} \exp(-aL) \sinh[a(L - y_D)] & \text{para } 0 < y_D < L \\ \exp[-a(L - y_D)] \sinh(aL) & \text{para } -\infty < y_D < 0 \end{cases}$$

con un poco de algebra

$$\begin{aligned}\widehat{F}_1^{sf} &= -\frac{c_1}{2a} \begin{cases} \exp(-ay_D) + \exp[a(y_D - 2L)] & \text{para } 0 < y_D < L \\ \exp(ay_D) + \exp[a(y_D - 2L)] & \text{para } -\infty < y_D < 0 \end{cases} \\ \widehat{F}_1^{pc} &= -\frac{c_1}{2a} \begin{cases} \exp(-ay_D) - \exp[a(y_D - 2L)] & \text{para } 0 < y_D < L \\ \exp(ay_D) - \exp[a(y_D - 2L)] & \text{para } -\infty < y_D < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Para simplificar la escritura, las dos soluciones para los dos tipos de fallas serán abreviadas por el signo " \pm ", donde "+" será la solución a la falla sin flujo y "-" será la solución a la falla a presión constante cero.

$$\widehat{F}_1 = -\frac{c_1}{2a} \begin{cases} \exp(-ay_D) \pm \exp[a(y_D - 2L)] & \text{para } 0 < y_D < L \\ \exp(ay_D) \pm \exp[a(y_D - 2L)] & \text{para } -\infty < y_D < 0 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de a y luego de α_1 .

$$\begin{aligned}\widehat{F}_1 &= -\frac{c_1}{2\sqrt{-\alpha_1}} \begin{cases} \exp(-\sqrt{-\alpha_1}y_D) \pm \exp[\sqrt{-\alpha_1}(y_D - 2L)] & \text{para } 0 < y_D < L \\ \exp(\sqrt{-\alpha_1}y_D) \pm \exp[\sqrt{-\alpha_1}(y_D - 2L)] & \text{para } -\infty < y_D < 0 \end{cases} \\ &= -\frac{c_1}{2\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}} \begin{cases} \begin{pmatrix} \exp(-\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}y_D) \\ \pm \exp[\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}(y_D - 2L)] \end{pmatrix} & \text{para } 0 < y_D < L \\ \begin{pmatrix} \exp(\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}y_D) \\ \pm \exp[\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}(y_D - 2L)] \end{pmatrix} & \text{para } -\infty < y_D < 0 \end{cases} \quad (3.21)\end{aligned}$$

Se puede observar que las soluciones de ambas fallas en la ecuación (3.21), están divididas en dos regiones que se empalman de manera continua. La diferencia entre regiones es el signo del argumento en la primera exponencial, ese signo va a desaparecer en el próximo paso debido a que el argumento se elevará al cuadrado, uniendo ambas regiones en una sola.

3.3.6 Transformada Inversa de Fourier

El siguiente paso es usar la transformada inversa de Fourier al eje x_D . En este caso y_D se toma como una constante y la variable es ϖ (No confundir con el coeficiente de almacenamiento ω_i). Para simplificar el análisis de la solución podemos unir todas las constantes y ver que las soluciones \widehat{F}_1 y \widehat{F}_2 tienen la siguiente forma:

$$k_1 \left(\frac{\exp\left(-k_2\sqrt{d^2 + \varpi^2}\right)}{\sqrt{d^2 + \varpi^2}} \pm \frac{\exp\left(-k_3\sqrt{d^2 + \varpi^2}\right)}{\sqrt{d^2 + \varpi^2}} \right)$$

Se puede suponer que la solución va a ser simétrica respecto a x_D , dado que el dominio se extiende de $-\infty$ a ∞ , y el pozo de extracción se encuentra en $x_D = 0$. Entonces podemos usar una propiedad de la transformada de Fourier que dice que si una función es simétrica ($f(x) = f(-x)$), entonces

$$F(\varpi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ix\varpi) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(x\varpi) dx$$

Con lo anterior, por medio de tablas podemos encontrar las soluciones a las integrales (Erdélyi [5] pp. 117 ec. (1) y (3), pp. 17 ec. (27)). Si

$$f(x) = K_0 \left[a\sqrt{b^2 + x^2} \right]$$

entonces la integral tiene como solución:

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx = 2\pi \frac{\exp\left(-b\sqrt{a^2 + y^2}\right)}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Aplicamos a las soluciones la transformada inversa de Fourier, tomando en cuenta

la simetría en x_D :

$$\widehat{F}_1(\varpi) = -\frac{c_1}{8\pi} \frac{4\pi}{\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \exp(-\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}y_D) \\ \pm \exp[\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}(y_D - 2L)] \end{array} \right) \text{ para } 0 < y_D < L \\ \left(\begin{array}{l} \exp(\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}y_D) \\ \pm \exp[\sqrt{\varpi^2 - d_{11}}(y_D - 2L)] \end{array} \right) \text{ para } -\infty < y_D < 0 \end{array} \right.$$

$$\widehat{f}_1(x_D) = -\frac{c_1}{8\pi} \left(\begin{array}{l} K_0\left(\sqrt{-d_{11}}\sqrt{y_D^2 + x_D^2}\right) \\ \pm K_0\left(\sqrt{-d_{11}}\sqrt{(y_D - 2L)^2 + x_D^2}\right) \end{array} \right)$$

Entonces las soluciones para \widehat{f}_2 se pueden obtener fácilmente cambiando c_1 por c_2 y d_{11} por d_{22} . Además para este caso definamos

$$r_D = \sqrt{y_D^2 + x_D^2}$$

$$ri_D = \sqrt{(y_D - 2L)^2 + x_D^2}$$

entonces, para observar de manera más sencilla

$$\widehat{f}_1 = -\frac{c_1}{8\pi} \left[K_0\left(\sqrt{-d_{11}}r_D\right) \pm K_0\left(\sqrt{-d_{11}}ri_D\right) \right] \quad (3.22)$$

$$\widehat{f}_2 = -\frac{c_2}{8\pi} \left[K_0\left(\sqrt{-d_{22}}r_D\right) \pm K_0\left(\sqrt{-d_{22}}ri_D\right) \right] \quad (3.23)$$

3.3.7 Reacoplamiento de las Ecuaciones.

Para continuar debemos acoplar las ecuaciones y volver a las funciones de las presiones. Según la ecuación (3.14) tenemos

$$R\widehat{F} = \widehat{P}$$

entonces

$$\begin{aligned} \widehat{P} &= R\widehat{F} \\ \begin{bmatrix} \widehat{p}_{Df} \\ \widehat{p}_{Dv} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{f}_1 \\ \widehat{f}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{Df} &= \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2 \\ &= -\frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} c_1 [K_0(\sqrt{-d_{11}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}ri_D)] \\ +c_2 [K_0(\sqrt{-d_{22}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}ri_D)] \end{pmatrix} \\ \widehat{p}_{Dv} &= r_{21}\widehat{f}_1 + r_{22}\widehat{f}_2 \\ &= -\frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} r_{21}c_1 [K_0(\sqrt{-d_{11}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}ri_D)] \\ +r_{22}c_2 [K_0(\sqrt{-d_{22}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}ri_D)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde el signo \pm depende del tipo de falla que estamos calculando.

3.3.8 Cálculo en la Frontera del Pozo.

Ya tenemos la solución de la presión en el sistema de fracturas y en el sistema de vóculos, pero sin calcular las funciones \widehat{q}_1 y \widehat{q}_2 que dependen del gasto en el pozo. Para calcularlas, crearemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a partir de las condiciones de frontera en el pozo, las cuales son más fáciles de integrar en coordenadas cilíndricas, dichas ecuaciones en el tiempo de Laplace son:

$$-\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\kappa r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} + (1 - \kappa) r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} d\theta \quad (3.24)$$

$$\widehat{p}_{Ds f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\widehat{p}_{Df} - s_f r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\widehat{p}_{Dv} - s_v r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta \quad (3.25)$$

Para el siguiente paso, conviene definir nuevas constantes que faciliten el manejo de las funciones. Sustituyendo los valores de c_1 y c_2

$$\begin{aligned}\widehat{p}_{Df} &= -\frac{1}{8\pi} \left(\begin{aligned} &\left(\frac{r_{-11}}{\kappa} \widehat{q}_1 + \frac{r_{-12}}{(1-\kappa)} \widehat{q}_2 \right) [K_0(\sqrt{-d_{11}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}ri_D)] \\ &+ \left(\frac{r_{-21}}{\kappa} \widehat{q}_1 + \frac{r_{-22}}{(1-\kappa)} \widehat{q}_2 \right) [K_0(\sqrt{-d_{22}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}ri_D)] \end{aligned} \right) \\ \widehat{p}_{Dv} &= -\frac{1}{8\pi} \left(\begin{aligned} &r_{21} \left(\frac{r_{-11}}{\kappa} \widehat{q}_1 + \frac{r_{-12}}{(1-\kappa)} \widehat{q}_2 \right) [K_0(\sqrt{-d_{11}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}ri_D)] \\ &+ r_{22} \left(\frac{r_{-21}}{\kappa} \widehat{q}_1 + \frac{r_{-22}}{(1-\kappa)} \widehat{q}_2 \right) [K_0(\sqrt{-d_{22}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}ri_D)] \end{aligned} \right)\end{aligned}$$

si definimos

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{r_{-11}}{8\pi\kappa} & B_1 &= r_{21}A_1 \\ A_2 &= -\frac{r_{-12}}{8\pi(1-\kappa)} & B_2 &= r_{21}A_2 \\ A_3 &= -\frac{r_{-21}}{8\pi\kappa} & B_3 &= r_{22}A_3 \\ A_4 &= -\frac{r_{-22}}{8\pi(1-\kappa)} & B_4 &= r_{22}A_4\end{aligned}$$

entonces las presiones se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\widehat{p}_{Df} &= (A_1\widehat{q}_1 + A_2\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{11}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}ri_D)] \\ &\quad + (A_3\widehat{q}_1 + A_4\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{22}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}ri_D)] \\ \widehat{p}_{Dv} &= (B_1\widehat{q}_1 + B_2\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{11}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}ri_D)] \\ &\quad + (B_3\widehat{q}_1 + B_4\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{22}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}ri_D)]\end{aligned}$$

Conversión a coordenadas cilíndricas.

Para usar estas condiciones debemos escribir \widehat{p}_{Df} y \widehat{p}_{Dv} en función de las variables r_D y θ . La variable ri_D necesita ser convertida, usaremos el cambio de variable $x_D = r_D \cos \theta$, $y_D = r_D \sin \theta$, entonces

$$ri_D = \sqrt{(r_D \sin \theta - 2L)^2 + (r_D \cos \theta)^2}$$

también necesitamos

$$\frac{\partial r_{iD}}{\partial r_D} = \frac{r_D - 2L \sin \theta}{\sqrt{(r_D \sin \theta - 2L)^2 + (r_D \cos \theta)^2}}$$

valuando en el pozo, esto es en $r_D = 1$

$$r_{iD} = \sqrt{(\sin \theta - 2L)^2 + (\cos \theta)^2}$$

$$\frac{\partial r_{iD}}{\partial r_D} = \frac{1 - 2L \sin \theta}{r_{iD}}$$

Suponiendo que la distancia a la falla es muy grande en comparación con el ancho del pozo, entonces $L \gg 1$, con lo que podemos simplificar

$$r_{iD} \approx 2L$$

$$\frac{\partial r_{iD}}{\partial r_D} \approx \frac{1}{2L} - \sin \theta$$

Cálculo de las integrales necesarias.

Para poder usar la ecuación (3.25), primero calculamos la integral de las presiones.

Primero para el sistema de fracturas:

$$\int_0^{2\pi} [\widehat{p}_{Df}]_{r_D=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\begin{array}{l} (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{11}} r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}} r_{iD})] \\ + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{22}} r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}} r_{iD})] \end{array} \right]_{r_D=1} d\theta$$

$$= \left[\begin{array}{l} (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{11}}) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}} 2L)] \\ + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{22}}) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}} 2L)] \end{array} \right] \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\widehat{p}_{Df}]_{r_D=1} d\theta = (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) K d_1 + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) K d_2$$

si definimos

$$K d_1 = K_0(\sqrt{-d_{11}}) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}} 2L)$$

$$K d_2 = K_0(\sqrt{-d_{22}}) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}} 2L)$$

tambi3n, para el sistema de v3gulos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} [\widehat{p}_{Dv}]_{r_D=1} d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\begin{array}{l} (B_1\widehat{q}_1 + B_2\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{11}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}ri_D)] \\ + (B_3\widehat{q}_1 + B_4\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{22}}r_D) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}ri_D)] \end{array} \right]_{r_D=1} d\theta \\
&= \left[\begin{array}{l} (B_1\widehat{q}_1 + B_2\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{11}}) \pm K_0(\sqrt{-d_{11}}2L)] \\ + (B_3\widehat{q}_1 + B_4\widehat{q}_2) [K_0(\sqrt{-d_{22}}) \pm K_0(\sqrt{-d_{22}}2L)] \end{array} \right] \int_0^{2\pi} d\theta \\
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\widehat{p}_{Dv}]_{r_D=1} d\theta &= (B_1\widehat{q}_1 + B_2\widehat{q}_2) Kd_1 + (B_3\widehat{q}_1 + B_4\widehat{q}_2) Kd_2
\end{aligned}$$

Para calcular las integrales con derivada respecto al radio, usamos la identidad

$$\frac{dK_0(z)}{dz} = -K_1(z). \text{ Para el sistema de fracturas:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} &= (A_1\widehat{q}_1 + A_2\widehat{q}_2) \sqrt{-d_{11}} \left[-K_1(\sqrt{-d_{11}}r_D) \mp K_1(\sqrt{-d_{11}}ri_D) \frac{\partial ri_D}{\partial r_D} \right] \\
&\quad + (A_3\widehat{q}_1 + A_4\widehat{q}_2) \sqrt{-d_{22}} \left[-K_1(\sqrt{-d_{22}}r_D) \mp K_1(\sqrt{-d_{22}}ri_D) \frac{\partial ri_D}{\partial r_D} \right]
\end{aligned}$$

valuando en la frontera del pozo

$$\begin{aligned}
\left[r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} &= (A_1\widehat{q}_1 + A_2\widehat{q}_2) \sqrt{-d_{11}} \left[-K_1(\sqrt{-d_{11}}) \mp K_1(\sqrt{-d_{11}}2L) \left(\frac{1}{2L} - \sin \theta \right) \right] \\
&\quad + (A_3\widehat{q}_1 + A_4\widehat{q}_2) \sqrt{-d_{22}} \left[-K_1(\sqrt{-d_{22}}) \mp K_1(\sqrt{-d_{22}}2L) \left(\frac{1}{2L} - \sin \theta \right) \right]
\end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left[r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} d\theta &= \int_0^{2\pi} (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{11}} \left[\begin{array}{c} -K_1(\sqrt{-d_{11}}) \\ \mp K_1(\sqrt{-d_{11}}2L) \left(\frac{1}{2L} - \sin \theta \right) \end{array} \right] d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{22}} \left[\begin{array}{c} -K_1(\sqrt{-d_{22}}) \\ \mp K_1(\sqrt{-d_{22}}2L) \left(\frac{1}{2L} - \sin \theta \right) \end{array} \right] d\theta \\
&= (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{11}} \left[\begin{array}{c} -2\pi K_1(\sqrt{-d_{11}}) \\ \mp K_1(\sqrt{-d_{11}}2L) \left(\frac{2\pi}{2L} - \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) \end{array} \right] \\
&+ (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{22}} \left[\begin{array}{c} -2\pi K_1(\sqrt{-d_{22}}) \\ \mp K_1(\sqrt{-d_{22}}2L) \left(\frac{2\pi}{2L} - \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) \end{array} \right] \\
&= (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{11}} \left[-2\pi K_1(\sqrt{-d_{11}}) \mp \frac{\pi}{L} K_1(\sqrt{-d_{11}}2L) \right] \\
&+ (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{22}} \left[-2\pi K_1(\sqrt{-d_{22}}) \mp \frac{\pi}{L} K_1(\sqrt{-d_{22}}2L) \right]
\end{aligned}$$

si definimos

$$\begin{aligned}
Kd_3 &= \sqrt{-d_{11}} \left[-K_1(\sqrt{-d_{11}}) \mp \frac{1}{2L} K_1(\sqrt{-d_{11}}2L) \right] \\
Kd_4 &= \sqrt{-d_{22}} \left[-K_1(\sqrt{-d_{22}}) \mp \frac{1}{2L} K_1(\sqrt{-d_{22}}2L) \right]
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} d\theta = (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) Kd_3 + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) Kd_4$$

De manera similar se puede calcular la integral de la derivada para la presión en

los vugulos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} d\theta &= (B_1 \widehat{q}_1 + B_2 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{11}} \left[-2\pi K_1 \left(\sqrt{-d_{11}} \right) \mp \frac{\pi}{L} K_1 \left(\sqrt{-d_{11}} 2L \right) \right] \\ &\quad + (B_3 \widehat{q}_1 + B_4 \widehat{q}_2) \sqrt{-d_{22}} \left[-2\pi K_1 \left(\sqrt{-d_{22}} \right) \mp \frac{\pi}{L} K_1 \left(\sqrt{-d_{22}} 2L \right) \right] \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} d\theta &= (B_1 \widehat{q}_1 + B_2 \widehat{q}_2) K d_3 + (B_3 \widehat{q}_1 + B_4 \widehat{q}_2) K d_4 \end{aligned}$$

Uso de las condiciones de frontera en el pozo.

Con las condiciones de frontera en el pozo (ecuaciones (3.24) y (3.25)) se formara un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Suponiendo que s_f y s_v no varían angularmente en el pozo. La ecuación (3.25) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\widehat{p}_{Df}]_{r_D=1} d\theta - \frac{s_f}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\widehat{p}_{Dv}]_{r_D=1} d\theta - \frac{s_v}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta \end{aligned}$$

sustituyendo los resultados obtenidos en las integrales:

$$\begin{aligned} &(A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) K d_1 + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) K d_2 - s_f \left[\begin{array}{l} (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) K d_3 \\ + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) K d_4 \end{array} \right] \\ &= (B_1 \widehat{q}_1 + B_2 \widehat{q}_2) K d_1 + (B_3 \widehat{q}_1 + B_4 \widehat{q}_2) K d_2 - s_v \left[\begin{array}{l} (B_1 \widehat{q}_1 + B_2 \widehat{q}_2) K d_3 \\ + (B_3 \widehat{q}_1 + B_4 \widehat{q}_2) K d_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

expandiendo los términos, factorizando y despejando \widehat{q}_1 hasta obtener:

$$\widehat{q}_1 = \widehat{q}_2 \xi$$

donde

$$\xi = \frac{-A_2(Kd_1 - s_f Kd_3) - A_4(Kd_2 - s_f Kd_4) + B_2(Kd_1 - s_v Kd_3) + B_4(Kd_2 - s_v Kd_4)}{A_1(Kd_1 - s_f Kd_3) + A_3(Kd_2 - s_f Kd_4) - B_1(Kd_1 - s_v Kd_3) - B_3(Kd_2 - s_v Kd_4)}$$

Por otro lado, la ecuación (3.24) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\kappa r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r_D} + (1 - \kappa) r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} d\theta \\ -\frac{1}{\tau} &= \kappa \begin{bmatrix} (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) Kd_3 \\ + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) Kd_4 \end{bmatrix} + (1 - \kappa) \begin{bmatrix} (B_1 \widehat{q}_1 + B_2 \widehat{q}_2) Kd_3 \\ + (B_3 \widehat{q}_1 + B_4 \widehat{q}_2) Kd_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sustituyendo $\widehat{q}_1 = \widehat{q}_2 \xi$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau} &= \kappa \widehat{q}_2 [(A_1 \xi + A_2) Kd_3 + (A_3 \xi + A_4) Kd_4] \\ &\quad + (1 - \kappa) \widehat{q}_2 [(B_1 \xi + B_2) Kd_3 + (B_3 \xi + B_4) Kd_4] \\ \widehat{q}_2 &= -\frac{1}{\tau} \left\{ \begin{array}{l} \kappa [(A_1 \xi + A_2) Kd_3 + (A_3 \xi + A_4) Kd_4] \\ + (1 - \kappa) [(B_1 \xi + B_2) Kd_3 + (B_3 \xi + B_4) Kd_4] \end{array} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

Ya con \widehat{q}_1 y \widehat{q}_2 , recordemos que \widehat{p}_{Dsf} esta definido en la ecuación (3.25).

3.3.9 Presión en la Parte Externa del Pozo (*sandface*).

En resumen, la presión en la orilla del pozo se calcula con:

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{Dsf} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\widehat{p}_{Df} - s_f r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Df}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta \\ &= (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) Kd_1 + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) Kd_2 - s_f \begin{bmatrix} (A_1 \widehat{q}_1 + A_2 \widehat{q}_2) Kd_3 \\ + (A_3 \widehat{q}_1 + A_4 \widehat{q}_2) Kd_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o también puede calcularse con:

$$\begin{aligned}\widehat{p}_{Dsf} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\widehat{p}_{Dv} - s_v r_D \frac{\partial \widehat{p}_{Dv}}{\partial r} \right]_{r_D=1} d\theta \\ &= (B_1 \widehat{q}_1 + B_2 \widehat{q}_2) K d_1 + (B_3 \widehat{q}_1 + B_4 \widehat{q}_2) K d_2 - s_v \left[\begin{array}{l} (B_1 \widehat{q}_1 + B_2 \widehat{q}_2) K d_3 \\ + (B_3 \widehat{q}_1 + B_4 \widehat{q}_2) K d_4 \end{array} \right]\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{r_{-11}}{8\pi\kappa} & B_1 &= r_{21}A_1 \\ A_2 &= -\frac{r_{-12}}{8\pi(1-\kappa)} & B_2 &= r_{21}A_2 \\ A_3 &= -\frac{r_{-21}}{8\pi\kappa} & B_3 &= r_{22}A_3 \\ A_4 &= -\frac{r_{-22}}{8\pi(1-\kappa)} & B_4 &= r_{22}A_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{q}_2 &= -\frac{1}{\tau} \left\{ \begin{array}{l} \kappa [(A_1 \xi + A_2) K d_3 + (A_3 \xi + A_4) K d_4] \\ + (1-\kappa) [(B_1 \xi + B_2) K d_3 + (B_3 \xi + B_4) K d_4] \end{array} \right\}^{-1} \\ \widehat{q}_1 &= \widehat{q}_2 \xi\end{aligned}$$

$$\xi = \frac{-A_2 (K d_1 - s_f K d_3) - A_4 (K d_2 - s_f K d_4) + B_2 (K d_1 - s_v K d_3) + B_4 (K d_2 - s_v K d_4)}{A_1 (K d_1 - s_f K d_3) + A_3 (K d_2 - s_f K d_4) - B_1 (K d_1 - s_v K d_3) - B_3 (K d_2 - s_v K d_4)}$$

$$K d_1 = K_0 \left(\sqrt{-d_{11}} \right) \pm K_0 \left(\sqrt{-d_{11}} 2L \right)$$

$$K d_2 = K_0 \left(\sqrt{-d_{22}} \right) \pm K_0 \left(\sqrt{-d_{22}} 2L \right)$$

$$K d_3 = \sqrt{-d_{11}} \left[-K_1 \left(\sqrt{-d_{11}} \right) \mp \frac{1}{2L} K_1 \left(\sqrt{-d_{11}} 2L \right) \right]$$

$$K d_4 = \sqrt{-d_{22}} \left[-K_1 \left(\sqrt{-d_{22}} \right) \mp \frac{1}{2L} K_1 \left(\sqrt{-d_{22}} 2L \right) \right]$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2m_{12}}(m_{11} - m_{22} + \gamma) & \frac{1}{2m_{12}}(m_{22} - m_{11} + \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} - \gamma) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} + \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{m_{22} - m_{11}}{\gamma} + 1 \right) & -\frac{m_{12}}{\gamma} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{\gamma} + 1 \right) & \frac{m_{12}}{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{-11} & r_{-12} \\ r_{-21} & r_{-22} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m_f}{\kappa} & \frac{m}{\kappa} \\ \frac{m}{1-\kappa} & -\frac{m_v}{1-\kappa} \end{bmatrix}$$

$$m_f = \omega_f \tau + (\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) - \frac{\lambda_{mf}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}}$$

$$m_v = \omega_v \tau + (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) - \frac{\lambda_{mv}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}}$$

$$m = \lambda_{vf} + \frac{\lambda_{mv} \lambda_{mf}}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}}$$

Capítulo 4

Efecto de Almacenamiento

Variable en el Pozo

El efecto de almacenamiento en un pozo proviene de que cuando se inicia la extracción, el flujo de petróleo proviene principalmente del líquido contenido en el interior del pozo. En la mayoría de los casos, el líquido almacenado no se va a reponer por el yacimiento con la misma velocidad con que se extrae en la superficie, produciendo una aparente caída en la presión del pozo.

4.1 Redistribución de Fase en el Pozo.

El fenómeno de la redistribución de fase ocurre cuando en el pozo entra líquido y gas simultáneamente por la tubería. Stegemier y Matthews [12], demostraron que la gravedad produce que el líquido baje y el gas suba. Debido a la relativa incompresibilidad del líquido y a que el gas no logra expandirse en un sistema cerrado, esta redistribución de

fases provoca un incremento neto en la presión del pozo.

En un pozo donde ocurre almacenamiento, sus efectos pueden ser descritos por

$$\frac{q_{sf}}{q} = 1 - C_D \frac{dp_{wD}}{dt} \quad (4.1)$$

$$\frac{dp_{wD}}{dt_D} = \frac{1}{C_D} \left(1 - \frac{q_{sf}}{q} \right) \quad (4.2)$$

Podemos modificar la ecuación (4.2) para reflejar el cambio de presión debido a la redistribución de fases ($p_{\phi D}$)

$$\begin{aligned} \frac{dp_{wD}}{dt_D} &= \frac{1}{C_D} \left(1 - \frac{q_{sf}}{q} \right) + \frac{dp_{\phi D}}{dt_D} \\ \frac{q_{sf}}{q} &= 1 - C_D \left(\frac{dp_{wD}}{dt_D} - \frac{dp_{\phi D}}{dt_D} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

También se puede definir un pseudo coeficiente de almacenamiento

$$C_{eD} = C_D \left(1 - \frac{\frac{dp_{\phi D}}{dt_D}}{\frac{dp_{wD}}{dt_D}} \right) \quad (4.4)$$

para analizar de manera sencilla el comportamiento del pozo cuando influye la redistribución de fases (no confundir al subíndice ϕ para la redistribución de fases, con la variable porosidad ϕ). Si $\frac{dp_{\phi D}}{dt_D} \geq 0$ entonces $C_{eD} \leq C_D$, lo que implica una aparente disminución en el coeficiente de almacenamiento. Incluso cuando $\frac{dp_{wD}}{dt_D} < \frac{dp_{\phi D}}{dt_D}$ causará que el pseudo coeficiente sea negativo, lo que implica revertir el sentido del flujo.

Se puede inferir el comportamiento de la presión debida a la redistribución de fase.

Debe iniciar de cero cuando se inicie la extracción y con el tiempo debe casi detenerse hasta

llegar a un valor máximo y constante. Esto es

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} p_\phi &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_\phi &= C_\phi \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dp_\phi}{dt} &= 0\end{aligned}$$

a continuación buscaremos definir p_ϕ y C_ϕ , así como sus versiones adimensionales.

4.2 Modelo de Fair et al. Para el Efecto de Almacenamiento Variable.

Según Fair et al. [6], considerando los efectos de las burbujas de gas y flujos de aceite (*slugs*) subiendo por la columna de fluido, cuando la primera burbuja o flujo llega a la superficie, la presión en el pozo debe aumentar en alguna medida. Este incremento causa una disminución en el volumen y una mayor densidad de otras burbujas y flujos de aceite. Estos dos efectos causan que baje la velocidad de ascenso del resto del gas, así que la razón de cambio en la presión debe disminuir. El mismo argumento puede ser válido para burbujas y flujos que llegan a la superficie en tiempos largos. Además, en un pozo real las burbujas y flujos pueden ser de una gran variedad de tamaños, sus velocidades de ascenso deben tener un espectro considerablemente amplio. Por lo tanto, se espera que la presión por redistribución de fases primero aumente rápidamente y después lentamente mientras se aproxime a su valor máximo C_ϕ .

Fair entonces propone la siguiente función exponencial que satisface las condiciones

de frontera antes mencionadas

$$p_{\phi} = C_{\phi} [1 - \exp(-t/\alpha)] \quad (4.5)$$

donde α representa el tiempo donde el 63% del cambio total ha ocurrido. C_{ϕ} puede ser estimado por

$$C_{\phi} = \frac{p_{gef} - p_{whf}}{\ln\left(\frac{p_{gef}}{p_{whf}}\right)}$$

donde p_{gef} es la presión de flujo en el punto de entrada de gas y p_{whf} es la presión de flujo en la boca del pozo. Se debe cumplir:

- ⇒ El cociente de gas/aceite se supone constante.
- ⇒ Los efectos de la temperatura son despreciables.
- ⇒ El líquido se supone incompresible y el gas es ideal, sin peso.
- ⇒ Se aplica un incremento lineal en la presión del pozo con la profundidad.

El tiempo α no puede ser determinado fácilmente y depende de los factores que afectan el ascenso de las burbujas de gas y los flujos de lodo.

En variables adimensionales:

$$p_{\phi D} = C_{\phi D} [1 - \exp(-t_D/\alpha_D)] \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} p_{\phi D} &= \frac{kh p_{\phi}}{141.2qB\mu} \\ C_{\phi D} &= \frac{kh C_{\phi}}{141.2qB\mu} \\ t_D &= \frac{0.000264kt}{\phi\mu c_t r_w^2} \\ \alpha_D &= \frac{0.000264k\alpha}{\phi\mu c_t r_w^2} \end{aligned}$$

4.3 Cálculo de la Presión en el Pozo.

Varios autores (Agarwal et al. [1], Fair et al. [6], Hegeman et al. [9]) proponen una integral de convolución que expresa la presión en el pozo causada por la razón de cambio en la producción que resulta de la condición de almacenamiento en el pozo:

$$p_{wD}(t_D) = \int_0^{t_D} \left\{ 1 - C_D \left[\frac{dp_{sfD}(\xi)}{dt_D} - \frac{dp_{\phi D}(\xi)}{dt_D} \right] \right\} \frac{dp_D(t_D - \xi)}{dt_D} d\xi$$

donde la parte entre llaves representa la producción en la frontera del pozo en cualquier tiempo.

La convolución puede ser resuelta por medio de la transformada de Laplace y resulta en

$$\widehat{p}_{wD} = \frac{1 + C_D \tau^2 \widehat{p}_{\phi D}}{\widehat{p}_{sfD} + C_D \tau^2} \quad (4.7)$$

donde, para usar el modelo de Fair, la transformada de Laplace de la ecuación (4.6) es:

$$\widehat{p}_{\phi D}(\tau) = \frac{C_{\phi D}}{\tau} - \frac{C_{\phi D}}{\tau + \frac{1}{\alpha_D}} \quad (4.8)$$

Para tiempos cortos ($t \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$) la ecuación (4.7) junto con (4.8) se reduce a

$$\widehat{p}_{wD} = \frac{1}{C_D \tau^2} + \frac{C_{\phi D}}{\tau^2 \alpha_D}$$

que al de-transformar del tiempo de Laplace al tiempo real obtenemos

$$p_{wD} = \frac{t_D}{C_{aD}}$$

lo que significa que en tiempos cortos, el pozo va a actuar como un pozo con almacenamiento constante, pero con coeficiente de almacenamiento C_{aD} . Si definimos al coeficiente de almacenamiento efectivo C_{aD} como

$$\frac{1}{C_{aD}} = \frac{1}{C_D} + \frac{C_{\phi D}}{\alpha_D}$$

el cual es más fácil de calcular que α_D , por lo que para usar la ecuación (4.8) se plantea α_D en función de C_{aD} , C_D y $C_{\phi D}$:

$$\alpha_D = \frac{C_{\phi D}}{\frac{1}{C_{aD}} - \frac{1}{C_D}}$$

4.4 Regreso al Tiempo Real con Algoritmo de Stehfest.

La presión en el pozo se obtiene en tiempo de Laplace con la ecuación (4.7) junto con (4.8), para volver al tiempo real, como se mencionó en la página 13, se usa el algoritmo de Stehfest [11] para destransformar una función del tiempo de Laplace al tiempo real, de manera numérica. La presión se calcula con

$$p_a(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \widehat{p}\left(i \frac{\ln 2}{t}\right)$$

donde

$$V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+i} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min\left(i, \frac{N}{2}\right)} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}$$

Capítulo 5

Resultados.

5.1 Pruebas Numéricas a la Solución del Modelo.

5.1.1 Comparación del Método Propuesto con el Método de Imágenes.

Nos parece interesante realizar una comparación entre la solución encontrada en coordenadas cartesianas y la solución encontrada con el método de imágenes, en los caso sintéticos en los que este último no funcionó, ya que se tienen valores diferentes en la presión en el sistema de fracturas (MI-PF) y la presión en el sistema de vóculos (MI-PV).

Se analizará también el caso en el que se aplica el método de imágenes al promedio de ambas presiones (MI-PROM).

Observando el comportamiento de las curvas tipo y cotejando con los valores de κ , se observa que:

→ Cuando κ es cercano a uno, la curva de la solución obtenida con coordenadas cartesianas se acerca a la solución MI-PF

→ Cuando κ es cercano a cero, se acerca a la solución MI-PV.

Con lo anterior se tiene otra opción, que consiste en usar el método de imágenes sobre una presión obtenida de un promedio ponderado por κ (MI-POND) de la siguiente manera:

$$p_{wD}^{imag} = [\kappa p_{Df} + (1 - \kappa) p_{Dv}]_{r_D=1} \pm [\kappa p_{Df} + (1 - \kappa) p_{Dv}]_{r_D=2L}$$

ó también de esta forma:

$$p_{wD}^{imag} = \kappa [p_{Df}(1, t) \pm p_{Df}(2L, t)] + (1 - \kappa) [p_{Dv}(1, t) \pm p_{Dv}(2L, t)]$$

A continuación se presentan las tablas con los valores de los parámetros que definen cada yacimiento sintético:

Yacimiento 1:

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.028172255 & \lambda_{mf} &= 6.221E - 06 \\ \omega_f &= 0.341779698 & \lambda_{mv} &= 2.45167E - 09 & L &= 845.9984064 \\ \omega_v &= 0.020741579 & \lambda_{vf} &= 4.71024E - 09 \end{aligned}$$

Yacimiento 2:

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.328742266 & \lambda_{mf} &= 1.88704E - 07 \\ \omega_f &= 0.45612529 & \lambda_{mv} &= 1.085E - 08 & L &= 620.1956749 \\ \omega_v &= 0.005197558 & \lambda_{vf} &= 2.86808E - 09 \end{aligned}$$

Yacimiento 3:

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.647964716 & \lambda_{mf} &= 4.4609E - 09 \\ \omega_f &= 0.014960929 & \lambda_{mv} &= 6.58359E - 08 & L &= 742.7145004 \\ \omega_v &= 0.851731879 & \lambda_{vf} &= 7.53844E - 09 \end{aligned}$$

Yacimiento 4:

$$\kappa = 0.916172504 \quad \lambda_{mf} = 4.63693E - 09$$

$$\omega_f = 0.012858547 \quad \lambda_{mv} = 2.061E - 05 \quad L = 580.1320076$$

$$\omega_v = 0.213129929 \quad \lambda_{vf} = 4.94211E - 09$$

A continuación se presentan las gráficas de presión y de log-derivada que se obtienen para los cuatro yacimientos y para los dos tipos de fallas en el pozo. No se tomó en cuenta el efecto de almacenamiento del pozo ni el daño. Se comparan las curvas generadas por:

Azul - Método coordenadas cartesianas (Coord. Cartesianas).

Marrón - Método de imágenes con presión en sistema de fracturas (MI-PF).

Roja - Método de imágenes con presión en sistema de vóculos (MI-PV).

Negra punteada - Método de imágenes con presión promedio (MI-PROM).

Verde punteada - Método de imágenes con promedio ponderado por κ (MI-POND).

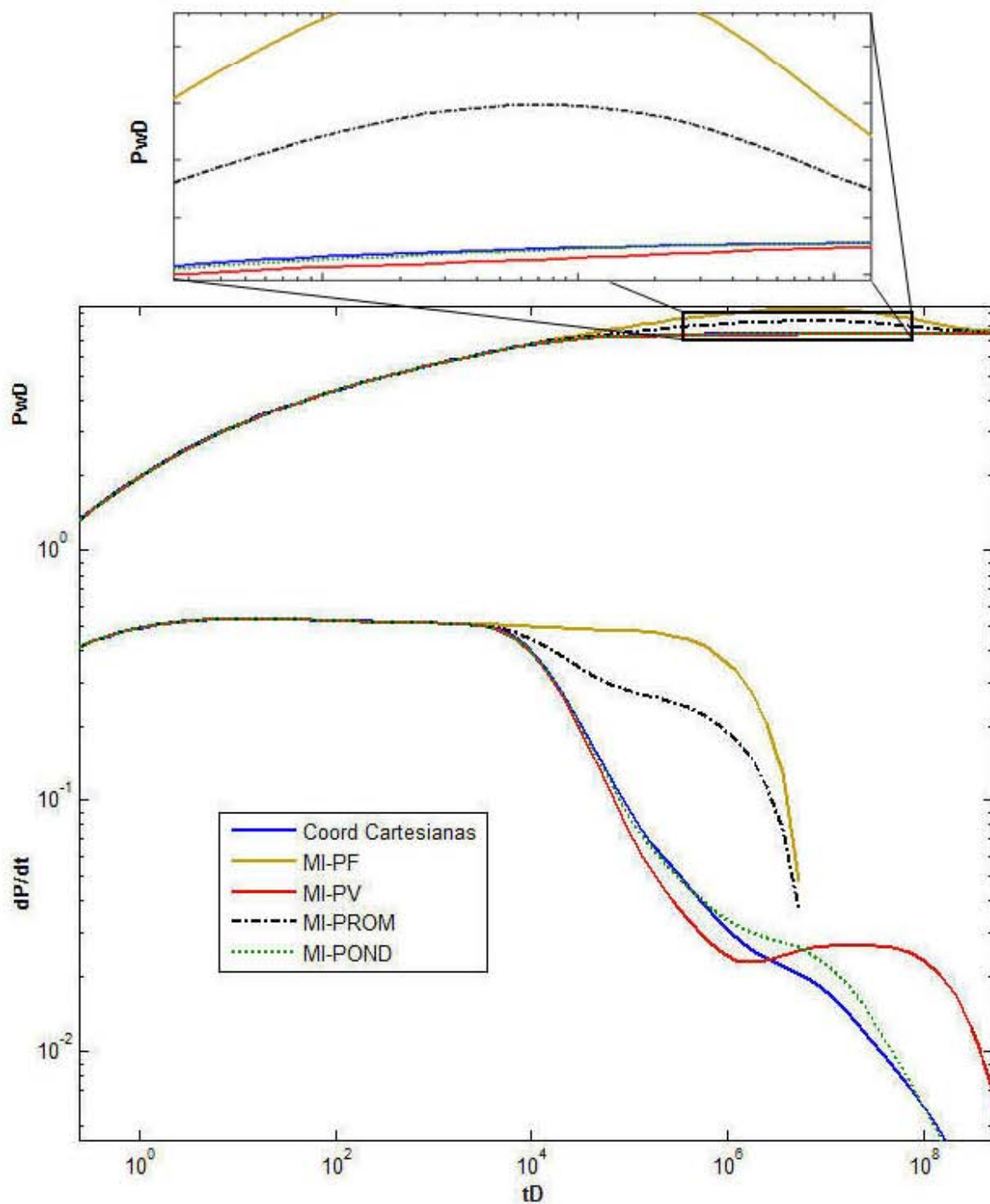


Figura 5.1.1. Yacimiento 1. Falla o frontera a presión constante cero. Curva de presión y log-derivada en pozo. Comparación de los métodos de imágenes vs el método en coordenadas cartesianas.

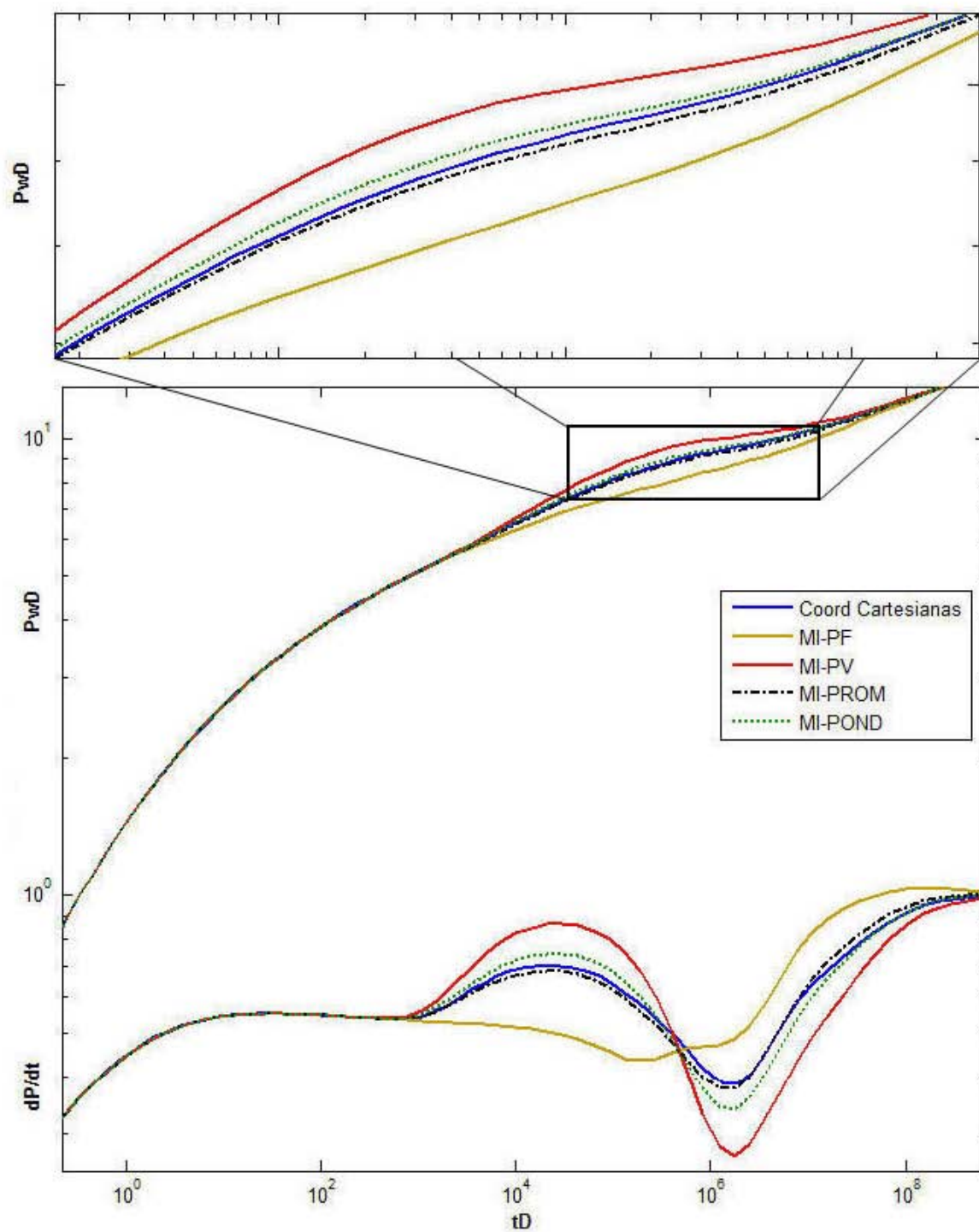


Figura 5.1.2. Yacimiento 2. Falla o frontera sin flujo. Curva de presión y log-derivada en pozo.

Comparación de los métodos de imágenes vs el método en coordenadas cartesianas.

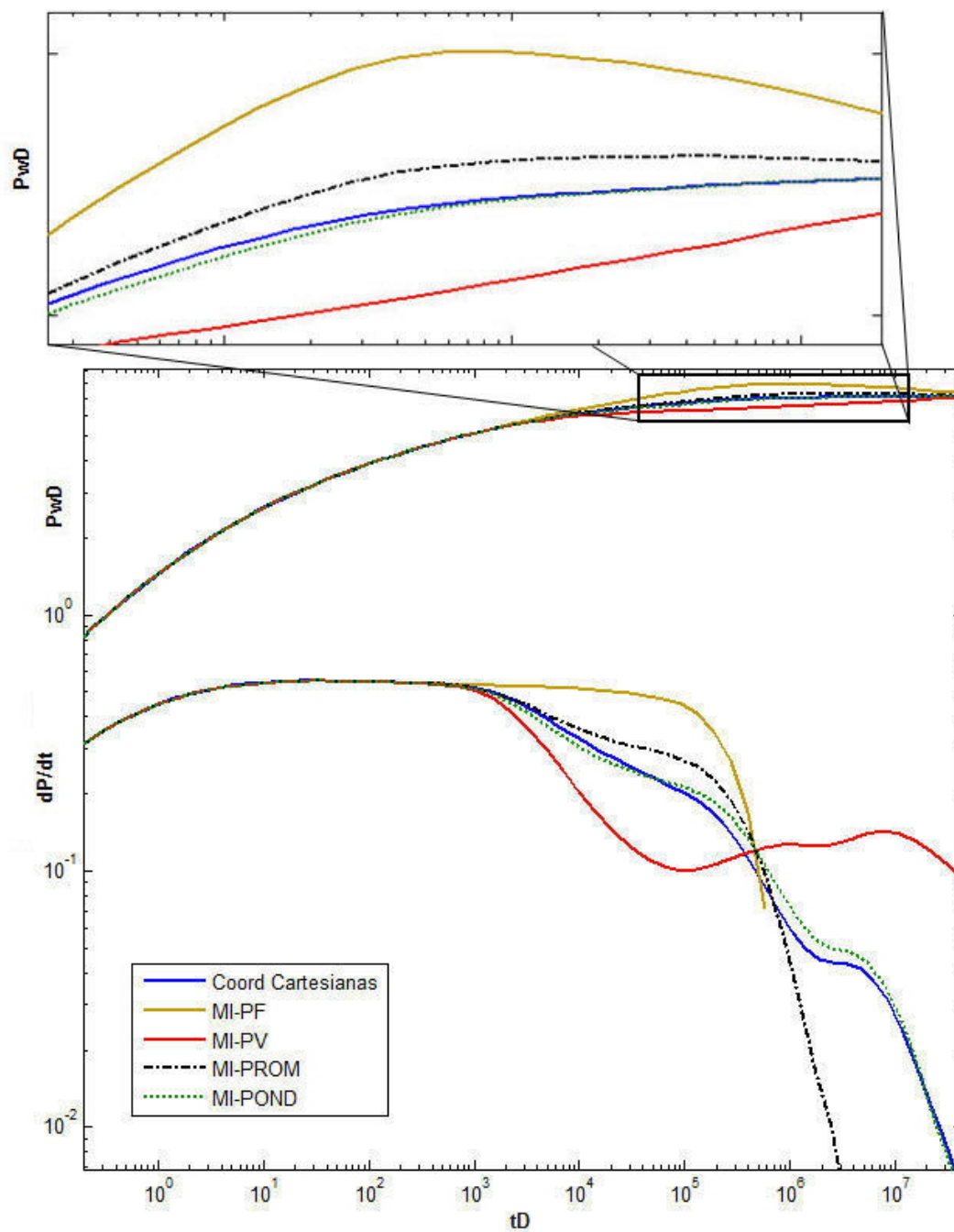


Figura 5.1.3. Yacimiento 2. Falla o frontera a presión constante cero. Curva de presión y log-derivada en pozo. Comparación de los métodos de imágenes vs el método en coordenadas cartesianas.

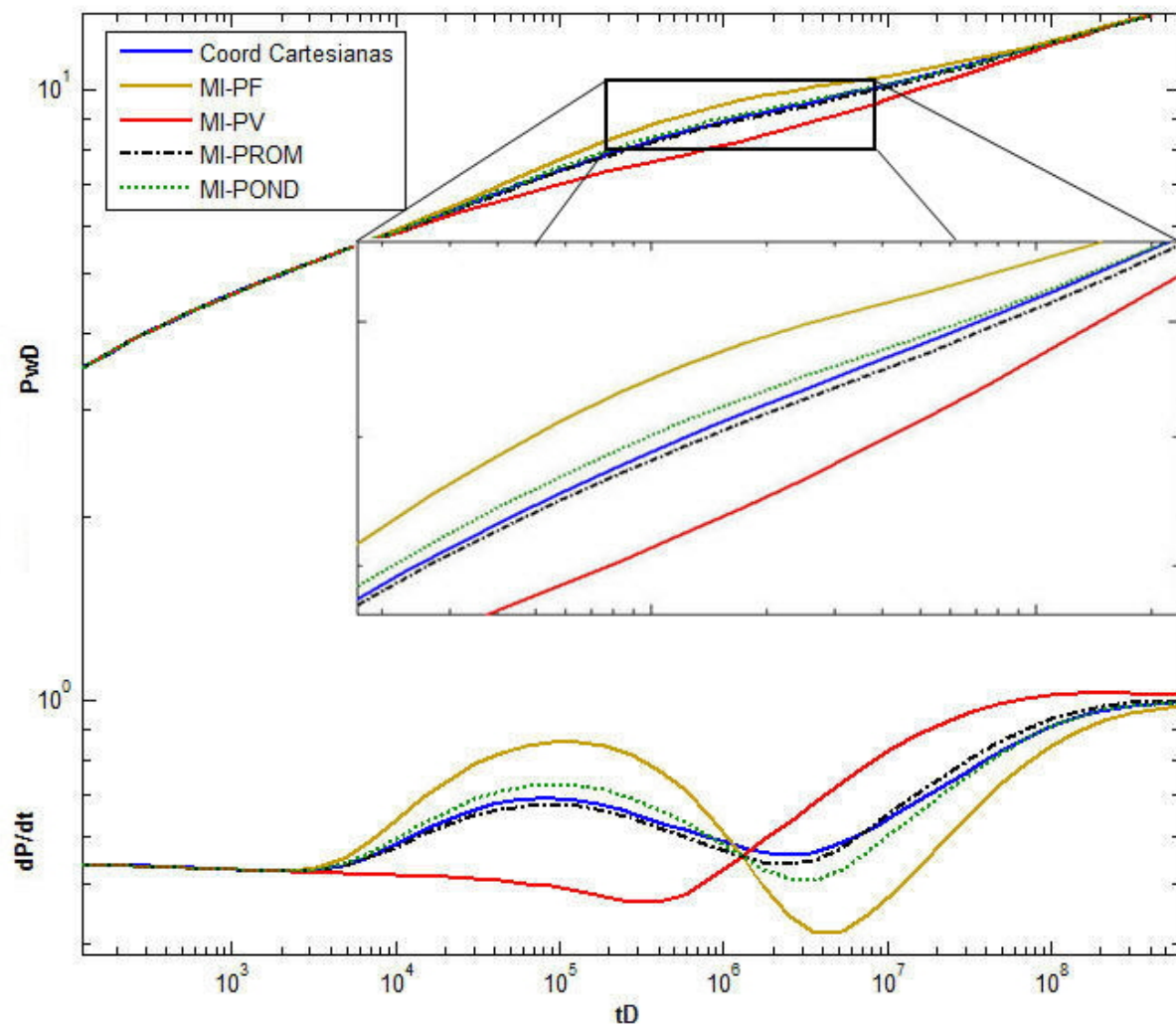


Figura 5.1.4. Yacimiento 3. Falla o frontera sin flujo. Curva de presión y log-derivada en pozo.

Comparación de los métodos de imágenes vs el método en coordenadas cartesianas.

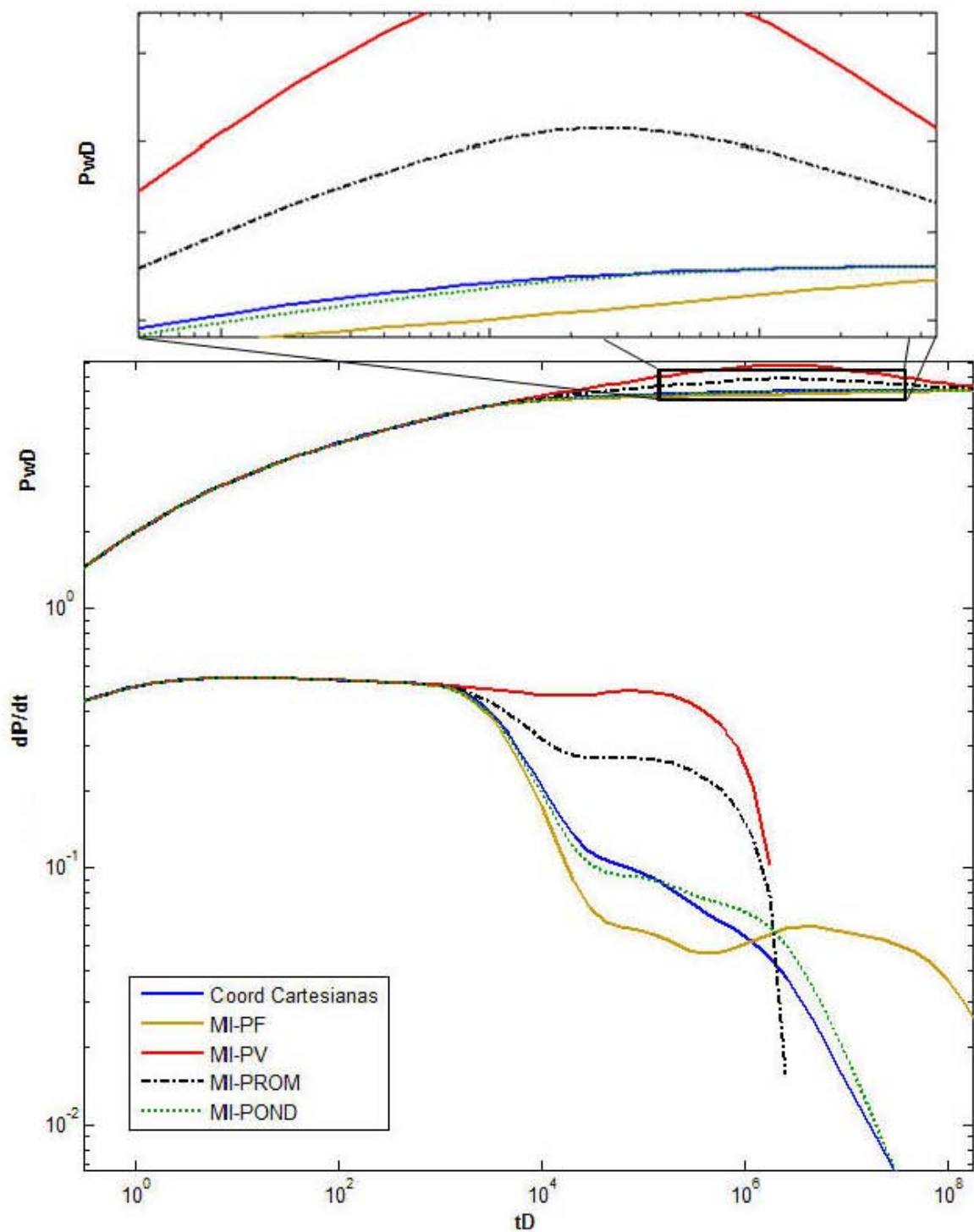


Figura 5.1.5. Yacimiento 4. Falla o frontera a presión constante cero. Curva de presión y log-derivada en pozo. Comparación de los métodos de imágenes vs el método en coordenadas cartesianas.

En las figuras 5.1.1, 5.1.3 y 5.1.5, las cuales son con falla a presión constante cero, se observa que algunas presiones con el método de imágenes causan que la curva log derivada sea negativa al empezar el efecto de la falla, por lo que la curva se corta en ese punto, esto ocurre porque la presión baja en el sistema antes de obtener la recarga de fluido de la falla o frontera a presión constante, cuando la recarga ocurre la presión aumenta, creando una pendiente negativa en la curva de presión adimensional.

Se debe recordar que en la definición de las presiones adimensionales (ecuación (2.3)), las presiones en matriz y los sistemas de fracturas y vóculos son definidas como la diferencia entre la presión inicial y la presión del yacimiento en tiempos posteriores, por lo tanto la presión adimensional aumenta cuando la presión dimensional disminuye y se aleja del valor inicial.

En las ecuaciones del modelo TPDP, tanto en coordenadas cilíndricas como cartesianas, los almacenamientos ω_i son coeficientes de las derivadas temporales, entonces el comportamiento de las ecuaciones tiende cada vez más de parabólicas a elípticas (sin llegar a serlo) cuando su valor disminuye, lo que provoca un aumento en la sensibilidad de los efectos de la falla o frontera en el sistema i . Por otro lado, el parámetro κ , al variar de cero a uno, nos indica si la permeabilidad es mayor en vóculos o en fracturas, respectivamente.

Juntando lo anterior se puede explicar lo que ocurre en los 4 ejemplos de yacimientos aquí mostrados. Se observa que ω_v es muy pequeño cuando κ vale 0.028 y 0.32, por lo tanto existe mayor permeabilidad en vóculos y mayor sensibilidad a la falla, pero en fracturas no hay tanta sensibilidad produciendo una desigualdad en las presiones por un intervalo de tiempo. Se observa que ω_f es pequeño cuando κ vale 0.64 y 0.91, ocurriendo

lo mismo que en los casos antes nombrados, pero esta vez con mayor permeabilidad y sensibilidad en fracturas.

Los almacenamientos ω_i y κ no son los únicos parámetros que causan la desigualdad en las presiones. En los ejemplos aquí presentados los parámetros interporosidad λ son pequeños, causando una lenta comunicación entre sistemas. De manera experimental se observó que en los 10 mil yacimientos sintéticos mencionados en la página 16, cuando ω_v es pequeño con κ cercana a cero o ω_f es pequeño con κ cercana a uno, si λ_{mv} ó λ_{mf} respectivamente son grandes (mayores a 10^{-3}) o bien λ_{vf} es grande, entonces la desigualdad en las presiones es despreciable. Para definir cuantitativamente las palabras "grande" o "pequeño" en los parámetros κ , ω_i ó λ_{ij} se requiere de un mayor análisis.

En todas las gráficas se observa que la curva generada por Coord. Cartesianas permanece entre las curvas MI-PV y MI-PF, mientras que la curva MI-PROM permanece en el centro de las curvas. Esta última, no muestra el comportamiento de la curva Coord. Cartesianas ocultando datos que se pueden obtener del modelo de TPDP.

Se observa que la curva MI-POND se acerca mucho y aproxima bien el comportamiento de la curva generada por Coord. Cartesianas, por lo que es una buena simplificación. Con lo esto se comprueba que el promedio ponderado por κ es efectivo, pero aun existen diferencias debido a que no se toman en cuenta otros parámetros como los coeficientes de almacenamiento ω_i .

Comparando los dos métodos para modelar fallas geológicas:

→ El método de imágenes es sencillo de usar para modelar una o más fallas, por medio de pozos sintéticos que se sumen o resten. Pero tiene problemas con la doble perme-

abilidad al no poder garantizar la igualdad de las presiones en el pozo en todo momento.

→ El método desarrollado en este trabajo en coordenadas cartesianas es más complejo y únicamente se desarrolló para una sola falla. Para modelar más de una falla es posible que se vuelva demasiado complicado para ser utilizado.

→ La solución aquí encontrada con coordenadas cartesianas es la más exacta debido a que está calculada específicamente para una falla dentro del modelo TPDP.

→ Comparando las cuatro soluciones propuestas con el método de imágenes, la de MI-POND presenta mucha cercanía a la solución en coordenadas cartesianas, siendo mucho más sencilla de utilizar y es posible generalizarla para varias fallas alrededor del yacimiento.

5.1.2 Efecto de Almacenamiento Variable.

Para probar la validez del modelo, tomando en cuenta el efecto de almacenamiento variable, se compararon los resultados usando nuestro método de solución y considerando valores de los parámetros que reproducen el caso de porosidad simple, con dos artículos importantes sobre el tema: Agarwal et al. [1] que muestra casos con almacenamiento constante y Fair et al. [6] que muestra casos con almacenamiento constante y variable.

Ambos artículos están planteados para una ecuación de flujo con porosidad simple, por lo que se esperan pequeñas variaciones en los resultados.

Se simuló un yacimiento con parámetros $\omega_f = \omega_v = 0.4$, $\omega_m = 0.2$, $\lambda_{mf} = \lambda_{mv} = \lambda_{fv} = 10^{-5}$, $\kappa = 0.5$. Se piensa que esos valores simulan un yacimiento de porosidad simple al proponer el mismo almacenamiento ω en vóculos y fracturas, permeabilidades iguales y parámetros interporosidades iguales. Se decidió un valor de ω_m diferente de cero para que la matriz actúe como comunicación entre los sistemas de vóculos y fracturas, ayudando a

simular una única porosidad.

No se proponen valores de $\kappa = 0$ ó $\kappa = 1$ debido a que en los cálculos de la solución en coordenadas cartesianas éstos valores producen divisiones entre cero.

		Presión en pozo (P_{wD})			
		t_D	Fair	Agarwal	TPDP
$C_D = 100$	$S = 0$	100	0.7938	0.7938	0.8058
		1000	3.2639	3.2640	3.3430
		10000	4.9563	4.9564	4.9570
		100000	6.1548	6.1548	6.1349
		1000000	7.3116	7.3116	7.3089
		10000000	8.4635	8.4635	8.4631
$C_D = 10,000$	$S = 0$	100	0.0100	0.0100	0.0100
		1000	0.0984	0.0984	0.0985
		10000	0.8925	0.8925	0.8939
		100000	4.6771	4.6772	4.6628
		1000000	7.2307	7.2309	7.2288
		10000000	8.4550	8.4550	8.4546
$C_D = 100$	$S = 20$	100	0.9776	0.9776	0.9778
		1000	8.1212	8.1212	8.1326
		10000	24.2420	24.2421	24.2483
		100000	26.1340	26.1340	26.1164
		1000000	27.3100	27.3100	27.3079
		10000000	28.4630	28.4630	28.4630
$C_D = 10,000$	$S = 20$	100	0.0100	0.0100	0.0100
		1000	0.0998	0.0998	0.0998
		10000	0.9797	0.9797	0.9798
		100000	8.2698	8.2698	8.2708
		1000000	26.2860	26.2860	26.2467
		10000000	28.4340	28.4340	28.4316

Tabla 5.1.6. Comparación de modelos de Fair et al., Agarwal et al. y TPDP. Almacenamiento constante.

En la tabla 5.1.6 se muestran los resultados de Fair et al., Agarwal et al. y el modelo TPDP aquí mostrado, para almacenamiento constante. Se encuentra que los resultados de

presión en el pozo del modelo TPDP varían tan sólo en unas milésimas de los valores de ambos artículos.

CD = 1,000, CaD = 20, CφD = 10						
S = 0		S = 10		S = 20		
Presión en pozo (P _{wD})						
td	Fair	TPDP	Fair	TPDP	Fair	TPDP
100	0.9370	0.9387	0.9566	0.9567	0.9585	0.9585
200	1.7690	1.7737	1.8320	1.8320	1.8390	1.8387
500	3.7600	3.7773	4.0390	4.0417	4.0760	4.0779
1,000	5.8470	5.8900	6.6460	6.6558	6.7680	6.7766
2,000	7.4740	7.5263	9.4570	9.4570	9.8230	9.8184
5,000	7.0180	7.0854	11.7000	11.7136	12.9200	12.9156
10,000	5.8760	5.9097	12.6600	12.6967	15.1700	15.1895
20,000	5.5140	5.4653	13.8600	13.8598	18.4200	18.4306
50,000	5.8110	5.7727	15.3600	15.3233	23.3100	23.2839
100,000	6.1520	6.1321	16.0100	15.9930	25.5600	25.5210
200,000	6.5000	6.4898	16.4400	16.4359	26.3700	26.3680
500,000	6.9620	6.9569	16.9400	16.9369	26.9200	26.9147
1,000,000	7.3100	7.3073	17.3000	17.2977	27.2900	27.2864
2,000,000	7.6580	7.6560	17.6500	17.6514	27.6500	27.6462
5,000,000	8.1160	8.1157	18.1100	18.1139	28.1100	28.1119
10,000,000	8.4630	8.4628	18.4600	18.4620	28.4600	28.4610

Tabla 5.1.7. Comparación del modelo TPDP con Fair et al. $C_D = 1,000$, $C_{\phi D} = 10$.

En las tablas 5.1.7 y 5.1.8 se compara el modelo TPDP con los resultados obtenidos por Fair et al. tomando en cuenta el almacenamiento variable. Se encuentra que la mayor diferencia en los resultados de la presión en el pozo es apenas de unas décimas.

En las tres gráficas se observa que conforme crece C_D el modelo TPDP se acerca más a los resultados de Fair et al., Agarwal et al. debido a que domina el efecto de almacenamiento del pozo sobre los efectos de la triple porosidad simulando ser porosidad simple.

CD = 10,000, CaD = 20, C _{φD} = 100						
S = 0		S = 10		S = 20		
Presión en pozo (P _{wD})						
td	Fair	TPDP	Fair	TPDP	Fair	TPDP
100	0.0997	0.0997	0.0999	0.0999	0.1000	0.1000
200	0.1989	0.1991	0.1996	0.1997	0.1997	0.1998
500	0.4946	0.4948	0.4981	0.4981	0.4985	0.4985
1,000	0.9802	0.9809	0.9922	0.9923	0.9938	0.9939
2,000	1.9280	1.9298	1.9690	1.9695	1.9760	1.9757
5,000	4.6010	4.6072	4.8130	4.8132	4.8490	4.8493
10,000	8.5620	8.5750	9.2740	9.2740	9.4090	9.4086
20,000	14.9500	14.9755	17.2400	17.2350	17.7200	17.7213
50,000	25.7400	25.7333	34.7400	34.7806	37.1500	37.1779
100,000	29.3900	29.2129	49.0900	49.1584	55.9500	56.0523
200,000	22.5500	22.3642	51.1300	50.7719	65.9400	65.7247
500,000	9.9310	10.1372	28.1200	28.4223	47.0500	47.0553
1,000,000	7.9280	7.8639	18.5700	18.7173	31.0900	31.4551
2,000,000	7.9140	7.8853	17.9100	17.7573	27.9400	27.8058
5,000,000	8.2050	8.2103	18.1900	18.1997	28.1800	28.1650
10,000,000	8.5060	8.5073	18.5000	18.5025	28.4900	28.4974

Tabla 5.1.8. Comparación del modelo TPDP con Fair et al. $C_D = 10,000$, $C_{\phi D} = 100$.

5.2 Curvas Tipo.

Las curvas tipo son representaciones gráficas de la presión obtenida a través de la solución de las ecuaciones de flujo y de la curva denominada log-derivada que grafica la derivada de la presión con respecto al logaritmo del tiempo. Estas soluciones se presentan en función de variables adimensionales.

5.2.1 Curvas Tipo para Fallas Geológicas.

Variando los parámetros del modelo de TPDP con falla vertical, se crearon las siguientes gráficas de curvas tipo.

En las figuras 5.2.1 y 5.2.2 se muestra como varían las curvas al cambiar la distancia a la falla (L), para una falla o frontera sin flujo y una falla o frontera a presión constante cero, respectivamente.

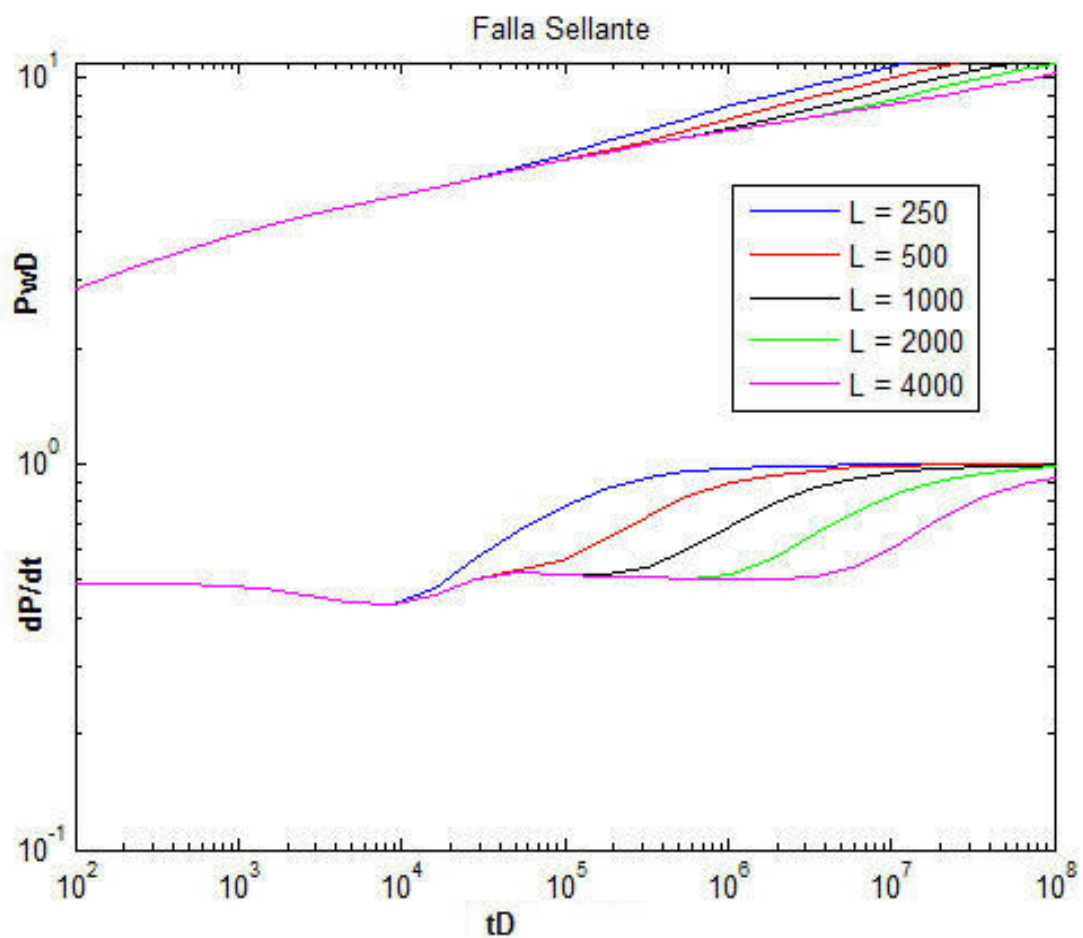


Figura 5.2.1. Curva de presión y log-derivada en pozo para una falla o frontera sin flujo con diversos valores de distancia al pozo (L).

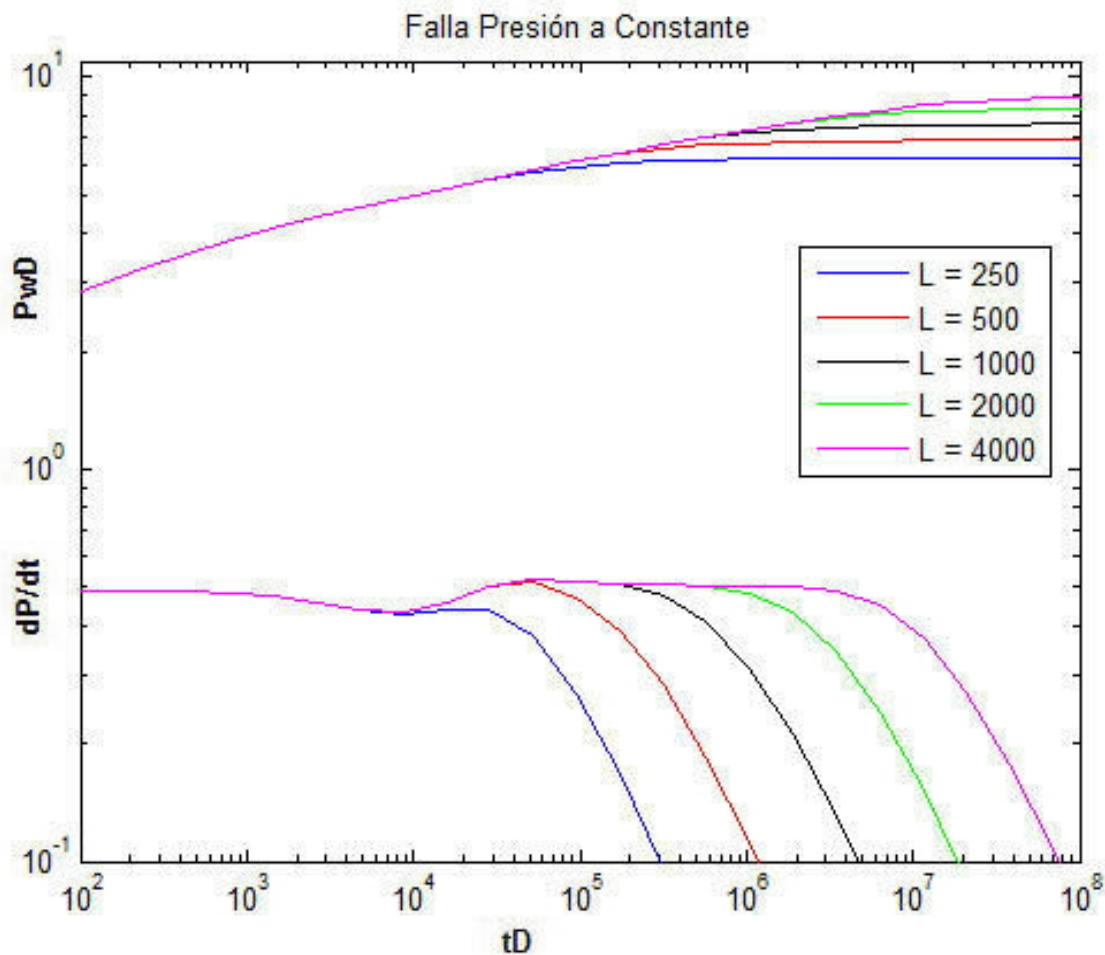


Figura 5.2.2. Curva de presión y log-derivada en pozo para una falla o frontera a presión constante cero con diversos valores de distancia al pozo (L).

5.2.2 Curvas Tipo para Almacenamiento Variable.

Variando los parámetros para el modelo TPDP y para los parámetros del almacenamiento constante y variable (C_D , C_{aD} , $C_{\phi D}$), se crearon las siguientes curvas tipo.

Las figuras 5.2.3 y 5.2.4 muestran las curvas tipo variando el valor de $C_{\phi D}$ y de C_{aD} , con $C_D = 100$ y $C_D = 1,000$ respectivamente. Se puede observar que la curva llamada

log-derivada se corta en ciertos puntos debido a que sus valores son negativos en una gráfica logarítmica. Por lo que en la figura 5.2.4 no se dibuja dicha curva para mostrar mejor la curva de presión en pozo.

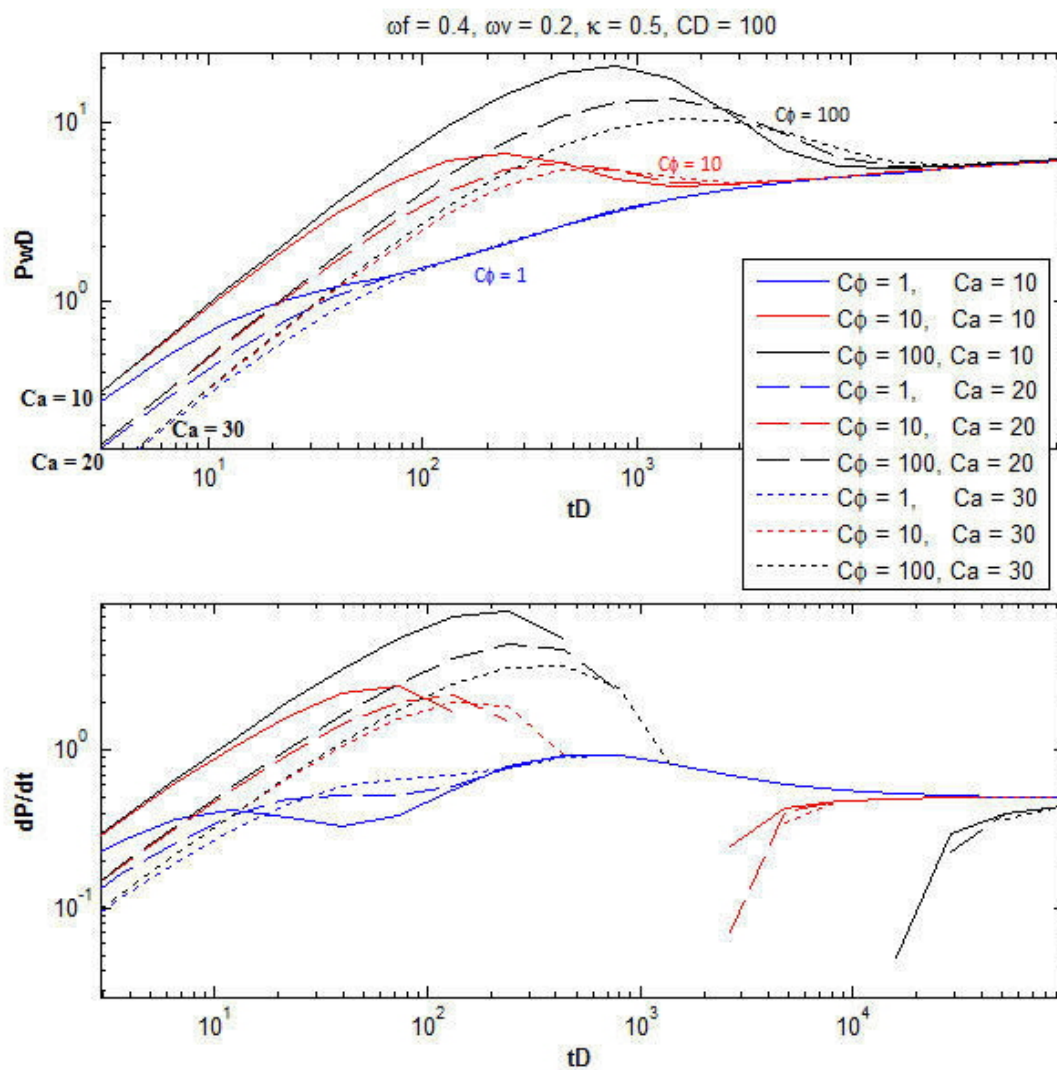


Figura 5.2.2. Curva de presión y log-derivada con diversos valores de $C_{\phi D}$ y C_{aD} .

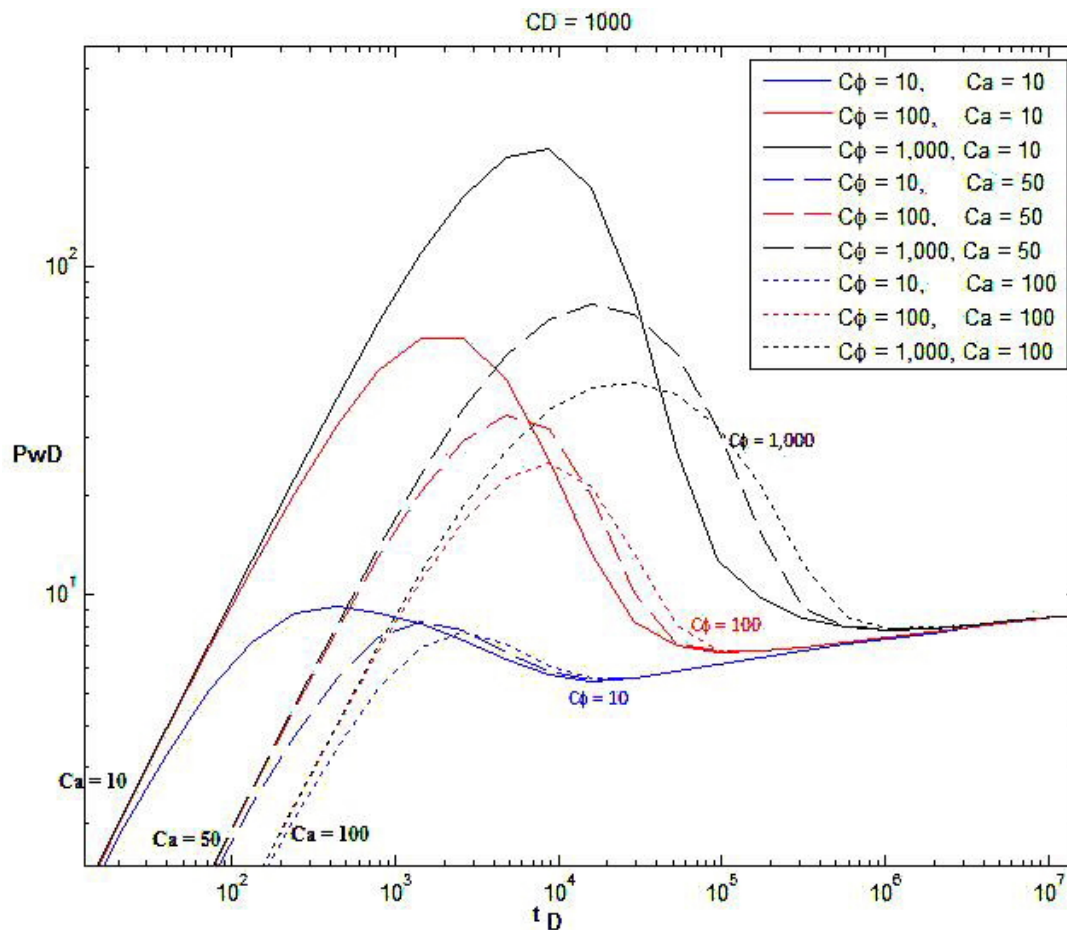


Figura 5.2.3. Curva de presión con diversos valores de $C_{\phi D}$ y C_{aD} .

Las figuras 5.2.4 y 5.2.5 muestran curvas con diversos valores de C_D y $C_{\phi D}$, manteniendo constante $C_{aD} = 20$. La figura 5.2.4 muestra como la curva los-derivada es discontinua donde se vuelve negativa debido al efecto de almacenamiento variable. También en dicha figura se muestran en azul las curvas donde $C_{\phi D} = 0$, esto es, el efecto de almacenamiento es constante y únicamente depende de C_D .

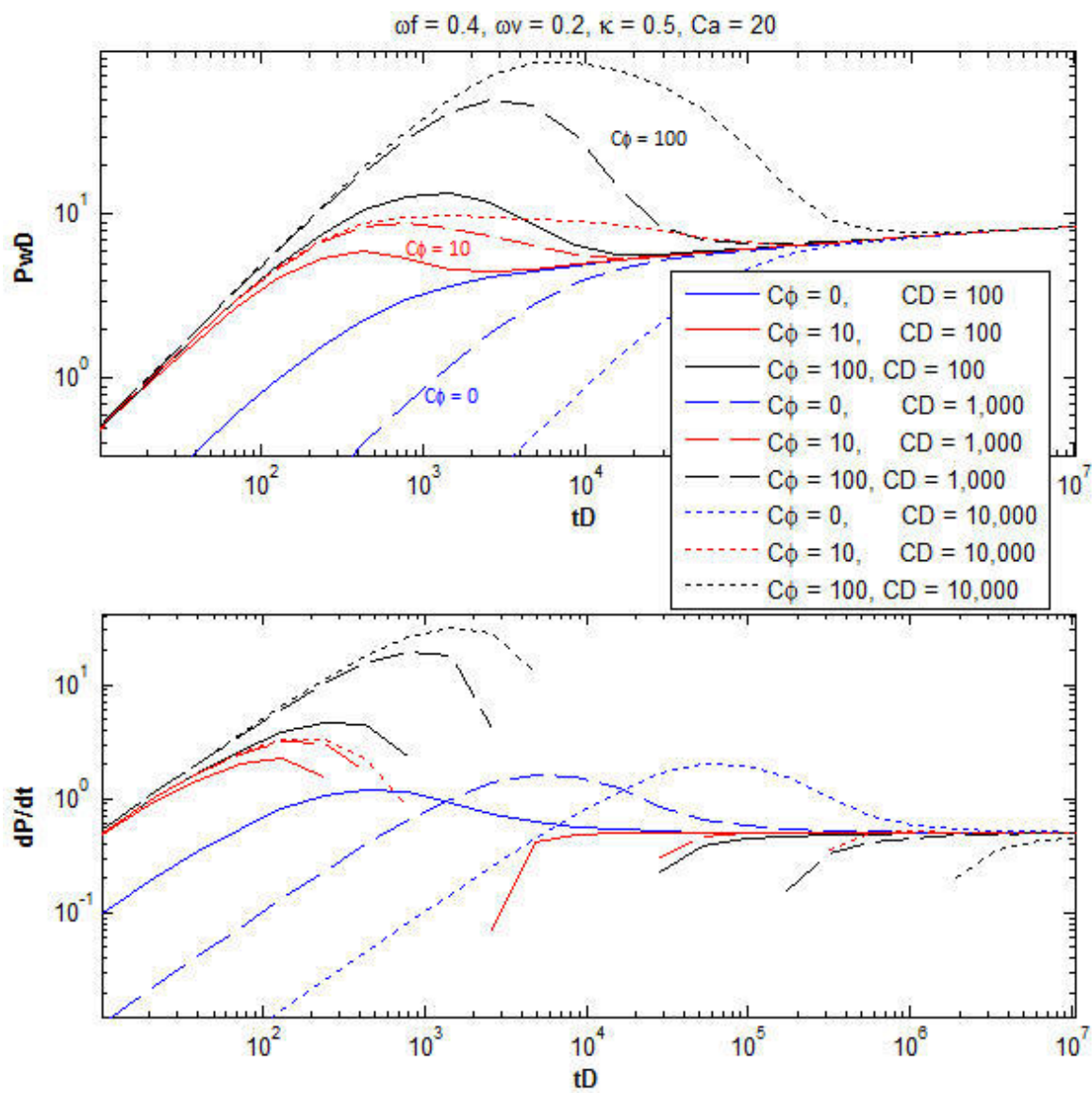


Figura 5.2.4. Curva de presión y log-derivada con diversos valores de $C_{\phi D}$ y C_D .

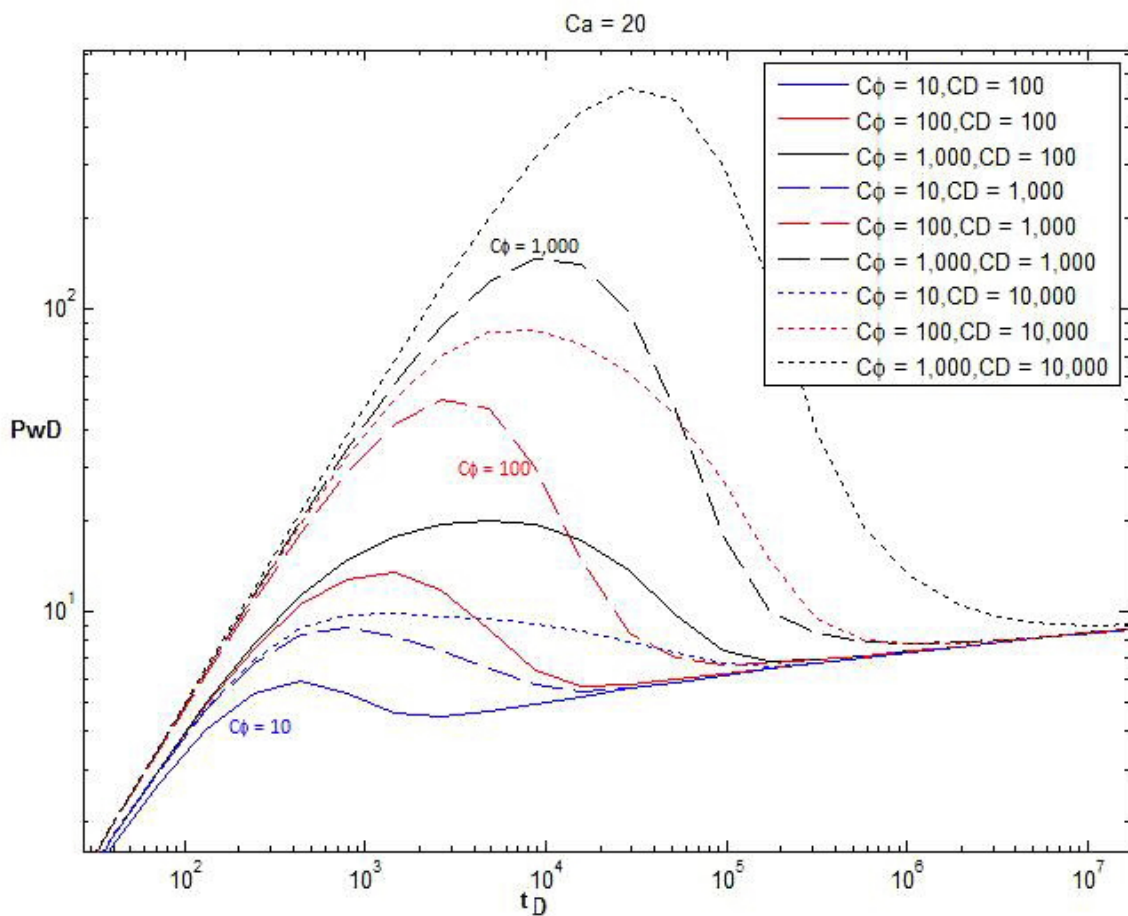


Figura 5.2.5. Curva de presión con diversos valores de $C_{\phi D}$ y C_D .

5.2.3 Curvas Tipo para Fallas con Almacenamiento Variable.

Primero se muestra el caso para un efecto de almacenamiento constante. Las figuras 5.2.6 y 5.2.7 muestran curvas de presión y log-derivada para falla sin flujo y falla a presión constante cero, respectivamente. Se varían los valores de la distancia a la falla (L) y de C_D . Se observa que las curvas log-derivada son continuas. Para tiempos cortos las líneas de mismo color (para un mismo C_D) se juntan y para tiempos largos las curvas dibujadas con un mismo tipo de línea (continuas, discontinuas o punteadas; mismo valor de

L) se juntan para los 3 colores.

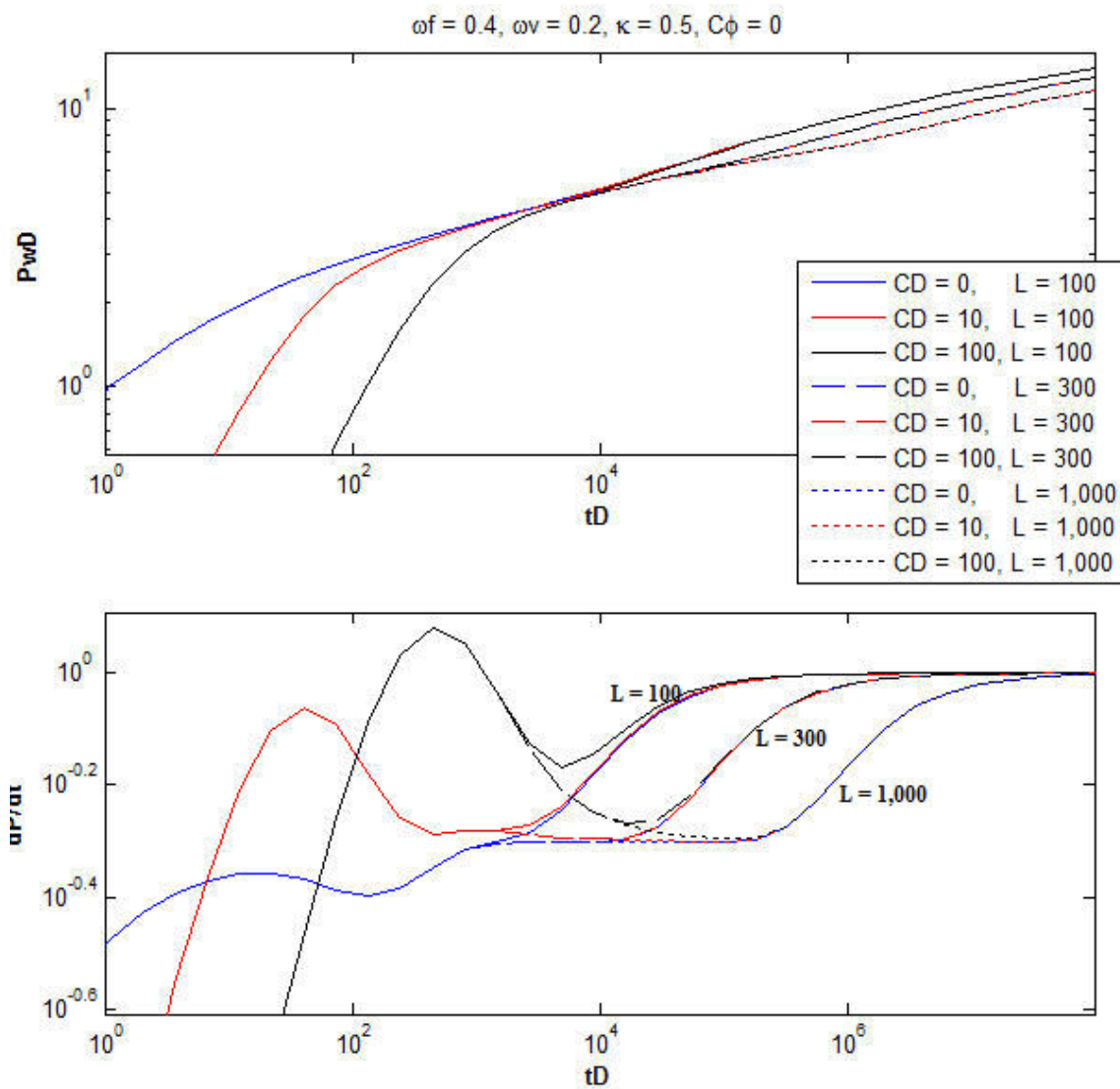


Figura 5.2.6. Curva de presión y log-derivada con diversos valores de L y C_D ,

para una falla o frontera sin flujo y efecto de almacenamiento constante.

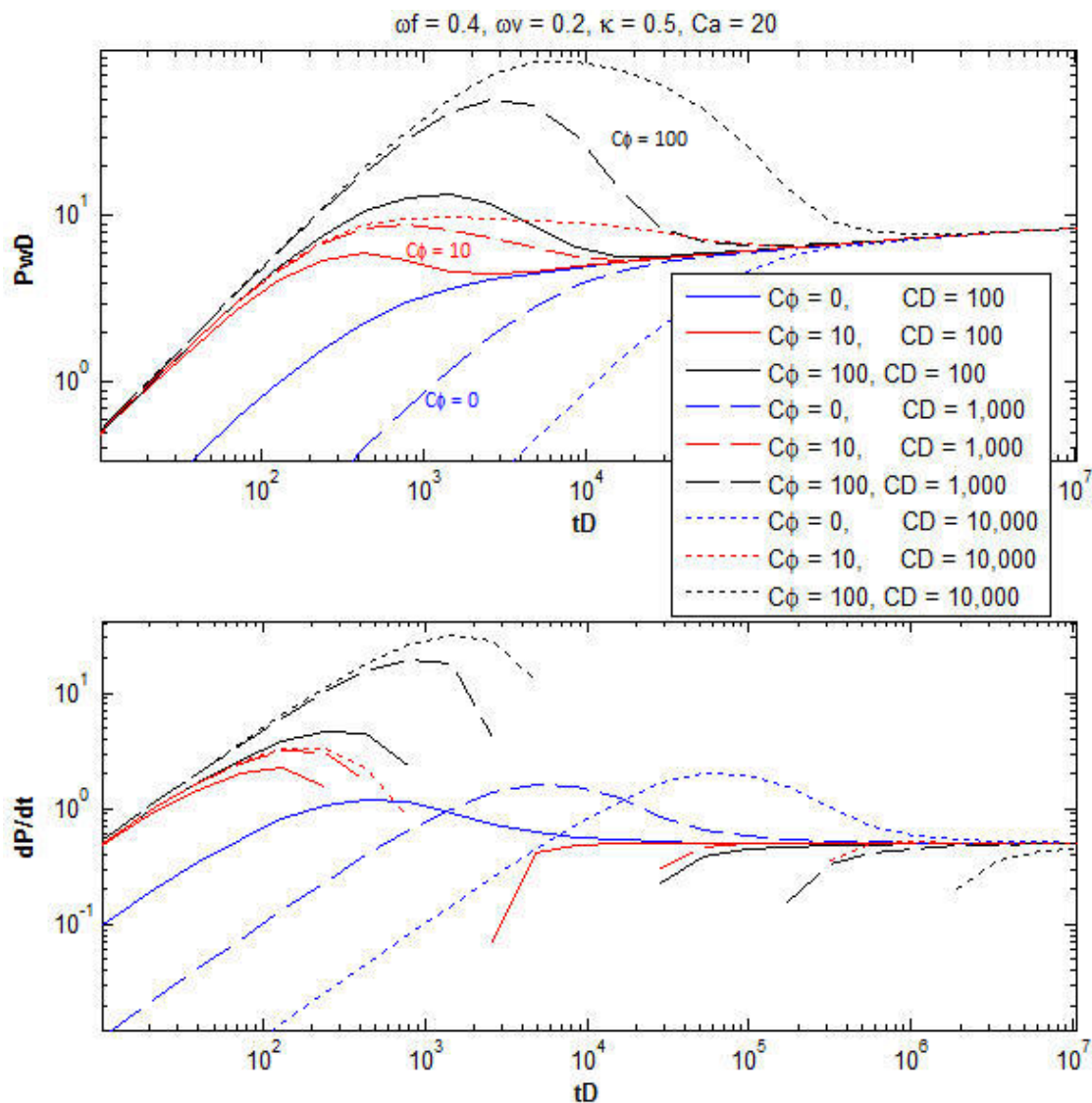


Figura 5.2.7. Curva de presión y log-derivada con diversos valores de L y C_D ,

para una falla o frontera a presión constante cero y efecto de almacenamiento constante.

En las figuras 5.2.8 y 5.2.9 se muestran curvas de presión y log-derivada para un $C_D = 100$, $C_{aD} = 20$ y diferentes valores de $C_{\phi D}$ y de L . La primera para una falla sin flujo y la segunda con falla a presión constante cero. Se observa la discontinuidad en la curva log-derivada por sus valores negativos debido al efecto de almacenamiento variable.

También se observa que a tiempos cortos las curvas del mismo color (mismo $C_{\phi D}$) se juntan, en cambio para tiempos largos las curvas con mismo tipo de línea (continua, discontinua o punteada; mismo valor de L) se juntan para los 3 colores.

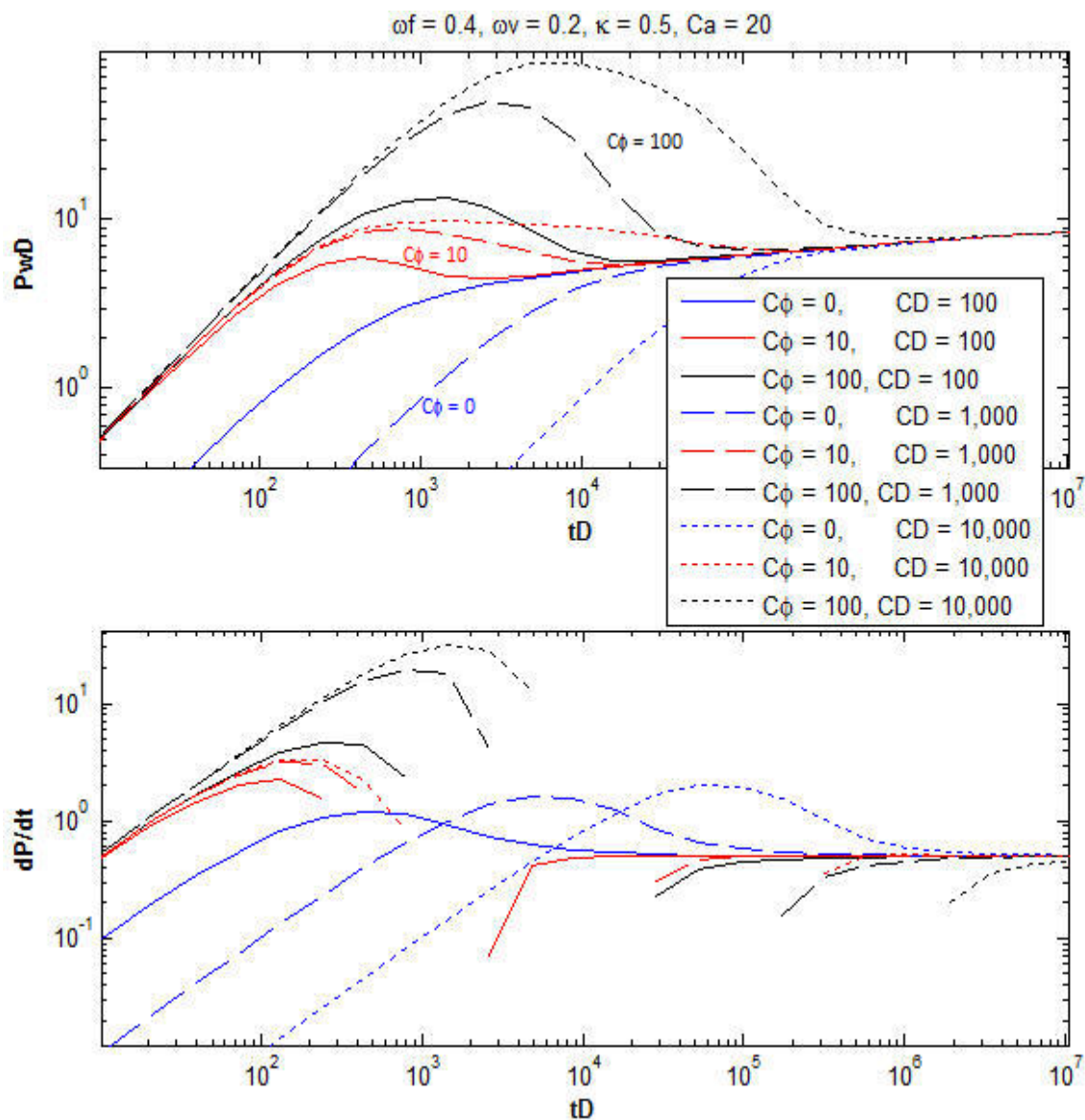


Figura 5.2.8. Curva de presión y log-derivada con diversos valores de L y $C_{\phi D}$,

para una falla o frontera sin flujo y efecto de almacenamiento variable.

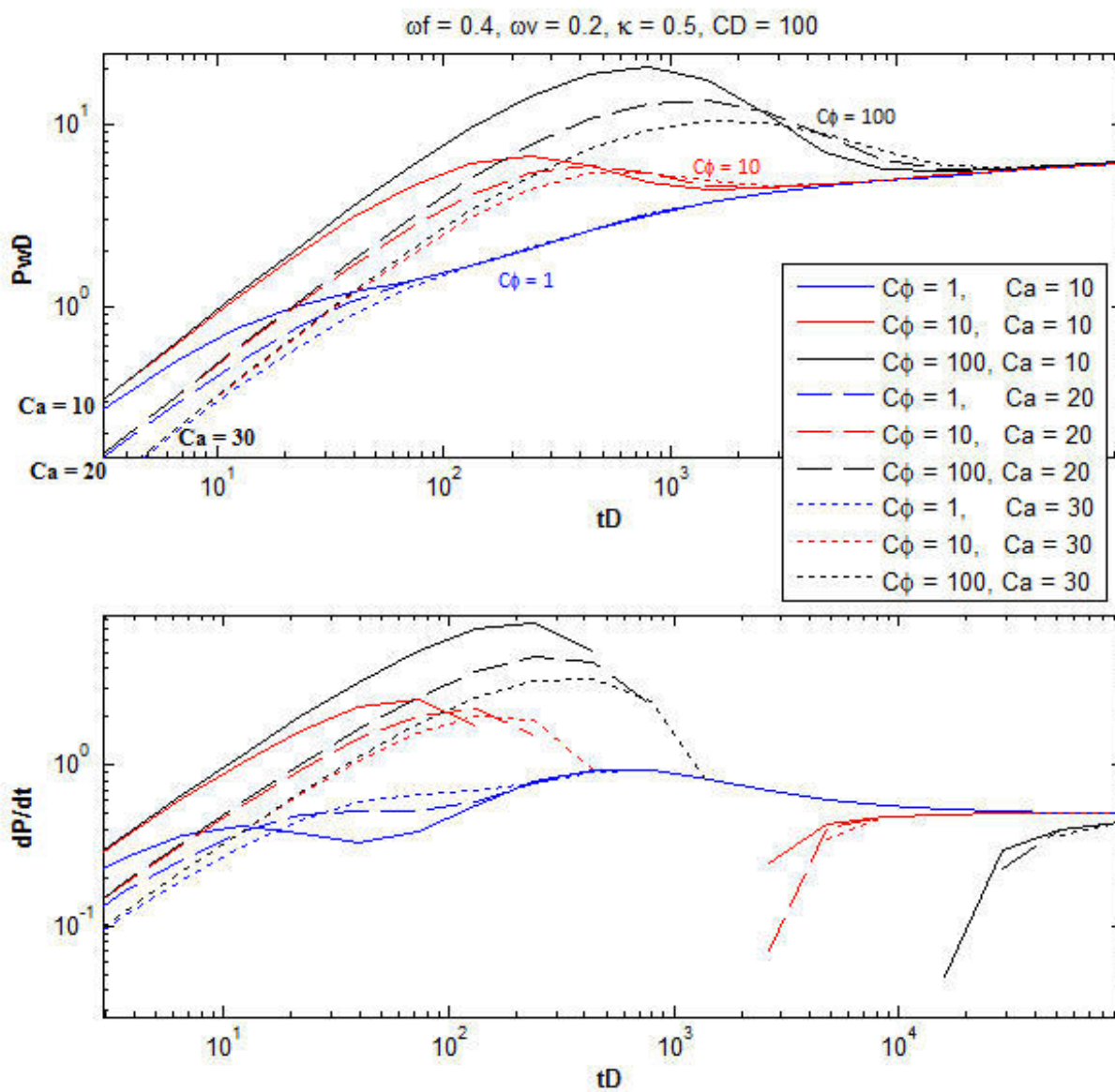


Figura 5.2.9. Curva de presión y log-derivada con diversos valores de L y $C_{\phi D}$, para una falla o frontera a presión constante cero y efecto de almacenamiento variable.

Capítulo 6

Conclusiones.

Se planteó el método de imágenes para simular la existencia de una falla geológica o una frontera por medio de pozos sintéticos, para el modelo de Camacho et al. [4] de TPDP con su solución para el periodo transitorio, encontrando que no satisface la condición de frontera en el pozo. Por lo que se buscó desarrollar e implementar un método diferente para modelar fallas y fronteras.

Basado en las ecuaciones del modelo (2.1) se desarrollaron ecuaciones en coordenadas cartesianas (y no cilíndricas como se planteó originalmente), usando deltas de Dirac para representar al pozo. Posteriormente se usaron condiciones de frontera en el pozo con coordenadas cilíndricas para garantizar una presión única en el exterior del pozo.

Se encontró una solución analítica en tiempo de Laplace usando transformadas integrales de Laplace y de Fourier.

A la solución analítica encontrada se le añadió el efecto de almacenamiento variable como lo plantea Fair et al. [6] encontrando que es posible extenderlo a un modelo de triple

porosidad doble permeabilidad.

Se obtuvieron diferentes soluciones con el método de imágenes y al compararlas contra la solución en coordenadas cartesianas, se encontró que si empleamos un promedio ponderado por κ de las presiones en fracturas y en vórgulos, se tiene una solución sencilla y suficientemente exacta. Con lo anterior se concluye que puede usarse este método para el caso de varias fallas cercanas al yacimiento.

Se comparó el modelo planteado en la presente tesis con artículos publicados con anterioridad sobre efecto de almacenamiento, encontrando que la variación en los resultados es mínima, por lo que se validan las curvas generadas por el modelo.

Se crearon curvas tipo para diversos yacimientos, tipos de falla, distancias a la falla y variaciones de los parámetros del almacenamiento (C_D , C_{aD} y $C_{\phi D}$).

Capítulo 7

Nomenclaturas.

Se presenta el nombre de la magnitud, sus dimensiones y sus unidades empleadas.

Alfabeto Latino:

B = factor de volumen de la formación de aceite [vol. en yacimiento / vol. a presión atm.] $[RB/ST]$

c = compresibilidad en condiciones iniciales $[Lt^2/m]$, $[psi^{-1}]$.

c_t = compresibilidad total en condiciones iniciales $[Lt^2/m]$, $[psi^{-1}]$.

C_a = coeficiente de almacenamiento aparente $[L^4t^2/m]$, $[bbl/psi]$.

C_{aD} = coeficiente de almacenamiento aparente adimensional.

C_D = constante de almacenamiento del pozo adimensional.

C_ϕ = valor máximo de efecto de almacenamiento debido a redistribución de fases
 $[m/Lt^2]$, $[psi]$.

$C_{\phi D}$ = valor adimensional máximo de efecto de almacenamiento debido a redistribución de fases.

D_H = difusividad hidráulica

d_{ij} = constante definida en ecuación (3.11).

\hat{f} = variable de las ecuaciones desacopladas, definida en ecuación (3.14).

h = espesor de la formación $[L]$, $[ft]$.

k = permeabilidad $[L^2]$, $[md]$.

K_0, K_1 = Función de Bessel.

L = distancia a la falla adimensional.

m, m_f, m_v = constantes definidas en ecuación (2.16)

p_D = presión adimensional.

p_{gef} = presión del flujo en el punto de entrada de gas $[m/Lt^2]$, $[psi]$.

p_{sf} = presión en la orilla del pozo $[m/Lt^2]$, $[psi]$.

p_{wD} = presión adimensional en el pozo.

p_{whf} = presión del flujo en la boca del pozo $[m/Lt^2]$, $[psi]$.

$p_{\phi D}$ = presión debida a la redistribución de fase.

q = gasto de aceite $[L^3/t]$, $[B/D]$.

q_{sf} = gasto de aceite a la orilla del pozo $[L^3/t]$, $[B/D]$.

r = distancia radial $[L]$, $[ft]$.

r_D = distancia radial adimensional.

r_{ij} = constante definida en ecuación (3.10), elemento de la matriz R .

r_{-ij} = constante definida en ecuación (3.12), elemento de la matriz R^{-1} .

s = daño (*skin*).

t = tiempo $[t]$, $[hrs]$.

t_D = tiempo adimensional.

V_i = coeficientes de Stehfest.

x = distancia en eje X [L], [ft].

x_D = distancia en eje X adimensional.

y = distancia en eje Y [L], [ft].

y_D = distancia en eje Y adimensional.

y' = cambio de variable en eje Y adimensional definida en ecuación (3.19).

Alfabeto griego:

α = parámetro de tiempo de redistribución de fase [t], [hrs].

α_1, α_2 = constante definida en ecuación (2.3).

γ = constante definida en ecuación (3.11).

κ = cociente de permeabilidad de fracturas entre permeabilidad total.

λ_{ij} = parámetro de interacción, adimensional.

μ = viscosidad del aceite [m/Lt], [cp].

σ_{ij} = factor de forma del flujo interporosidad.

σ = variable de Fourier Seno.

ς = variable de Fourier Coseno

τ = variable de Laplace.

ϕ = porosidad.

ω_i = cociente de almacenamiento.

ϖ = variable de Fourier.

Subíndices:

D = variable adimensional.

f = variable para el sistema de fracturas.

m = variable para la matriz.

sf = en la frontera del pozo (*sandfase*).

v = variable para el sistema de vóculos.

w = en el pozo (*well*).

Transformadas:

Laplace: $\hat{\square}$ arriba de la variable.

Fourier: Variable en mayúsculas.

Fourier seno: superíndice s .

Fourier coseno: superíndice c .

Capítulo 8

Referencias

- [1] **Agarwal R.G, Hussainy R. A. and Ramey H.J.:** "*An investigation of wellbore storage and skin effect in unsteady liquid flow: I. analytical treatment.*" SPE 2046, 1970. 8
- [2] **Bourdet D., Ayoub J.A., Pirard Y.M.:** "*Use of pressure derivative in well-test interpretation*", Soc. Petr. Eng. Journal, 1989.
- [3] **Brett C.:** "*Analysis of well test data influenced by multiple reservoir boundaries using pressure derivative and type curves*". Master of Science Thesis, Texas A&M University, 1991. 1, 4
- [4] **Camacho V. R., Vásquez C. M., Castrejón A. R., and Arana, O. V.:** "*Pressure Transient and Decline Curve Behavior in Naturally Fractured Vuggy Carbonate Reservoirs*" SPE Reservoir Evaluation & Engineering, (April 2005), 77689.
- [5] **Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F.:** "*Tables of Integrals Transforms Vol. 1*". Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology. McGraw

Hill 1954.

[6] **Fair, W.B.** "*Pressure buildup analysis with wellbore phase redistribution*". SPE-8206-PA, 1981.

[7] **Fuentes C.G., Camacho, V. R.G., and Vásquez C. M.:** "*Pressure Transient and Decline Curve Behaviors for Partially Penetrating Wells Completed in Naturally Fractured-Vuggy Reservoirs*" Paper SPE 92116, presented at the 2004 SPE International Petroleum Conference in Mexico, Puebla, Mexico, (November 2004), 8–9.

[8] **Gómez S., Ramos G., Fuentes G., Camacho R., Del Castillo N.:** "*Well test characterization of Naturally Fractured Vuggy Reservoirs, with a Global Optimization Method*". Reporte IIMAS (Septiembre 2012).

[9] **Hegeman P.S., Haliford D. L. and Joseph J.A.** "*Well-test analysis with changing wellbore storage*". SPE 21829, 1993. 8, 8.2

[10] **Posadas R., Samaniego F.:** "*Comportamiento de la presión en pozos de yacimientos naturalmente fracturados con efectos de fronteras, mediante pozos imagen*". Ingeniería Petrolera Vol. 55 No. 5 (Mayo 2015).

[11] **Stehfest H.:** "*Numerical Inversion of Laplace Transforms*" Communication of the ACM, (1970), 13.

[12] **Stegemeier, G.L. and Matthews, C.S.:** "*A Study of Anomalous Pressure Build-Up Behavior*" Trans., AI ME (1958) 213, 44-50.

[13] **Zimmerman R. W.:** "*Fluid Flow in Porous Media*" Earth Science & Engineering, Imperial College. Section 1 2002-2003.

Apendice A

Comprobaciones.

A.1 m_f y m_v son positivas.

En las ecuaciones (3.4) y (3.5) se define:

$$m_f = \omega_f \tau + (\lambda_{mf} + \lambda_{vf}) - \frac{\lambda_{mf}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}}$$

$$m_v = \omega_v \tau + (\lambda_{vf} + \lambda_{mv}) - \frac{\lambda_{mv}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}}$$

Se puede probar que m_f es positivo. Únicamente podría ser negativo sólo si cumple

con:

$$\begin{aligned} \omega_f \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{vf} &< \frac{\lambda_{mf}^2}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \\ (\omega_f \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{vf})(\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}) &< \lambda_{mf}^2 \\ \left(\begin{array}{l} \omega_f \omega_m \tau^2 + \omega_f \tau \lambda_{mf} + \omega_f \tau \lambda_{mv} + \omega_m \tau \lambda_{mf} + \lambda_{mf}^2 \\ + \lambda_{mf} \lambda_{mv} + \lambda_{vf} \omega_m \tau + \lambda_{vf} \lambda_{mf} + \lambda_{vf} \lambda_{mv} \end{array} \right) &< \lambda_{mf}^2 \\ \left(\begin{array}{l} \omega_f \omega_m \tau^2 + \omega_f \tau \lambda_{mf} + \omega_f \tau \lambda_{mv} + \omega_m \tau \lambda_{mf} \\ + \lambda_{mf} \lambda_{mv} + \lambda_{vf} \omega_m \tau + \lambda_{vf} \lambda_{mf} + \lambda_{vf} \lambda_{mv} \end{array} \right) &< 0 \end{aligned}$$

cosa que no es posible.

De igual manera se puede probar que m_v es únicamente positivo.

A.2 d_{11} y d_{22} son negativas

De la ecuación (3.11) se define

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} - \gamma) \\ d_{22} &= \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22} + \gamma) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\frac{m_f}{\kappa} \\ m_{12} &= \frac{m}{\kappa} \\ m_{22} &= -\frac{m_v}{1 - \kappa} \\ m_{21} &= \frac{m}{1 - \kappa} \end{aligned}$$

$$\gamma = \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{m_f}{\kappa} - \frac{m_v}{1-\kappa} - \gamma \right) \\ d_{22} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{m_f}{\kappa} - \frac{m_v}{1-\kappa} + \gamma \right) \end{aligned}$$

Donde d_{11} y d_{22} son negativas.

Para probarlo, veamos la condición que debe cumplir d_{22} para ser positiva:

$$\begin{aligned} \frac{m_f}{\kappa} + \frac{m_v}{1-\kappa} &< \gamma \\ \frac{m_f}{\kappa} + \frac{m_v}{1-\kappa} &< \sqrt{\left(-\frac{m_f}{\kappa} + \frac{m_v}{1-\kappa} \right)^2 + 4\frac{m}{\kappa} \frac{m}{1-\kappa}} \\ \left(\frac{m_f}{\kappa} + \frac{m_v}{1-\kappa} \right)^2 &< \left(\frac{m_v}{1-\kappa} - \frac{m_f}{\kappa} \right)^2 + \frac{4m^2}{\kappa(1-\kappa)} \end{aligned}$$

simplificando por medio de $\Lambda = \frac{m_v}{1-\kappa}$, $\Gamma = \frac{m_f}{\kappa}$

$$\begin{aligned} (\Lambda + \Gamma)^2 &< (\Lambda - \Gamma)^2 + \frac{4m^2}{\kappa(1-\kappa)} \\ (\Lambda + \Gamma)^2 &< (\Lambda - \Gamma)^2 + \frac{4m^2}{\kappa(1-\kappa)} \\ \Lambda^2 + 2\Lambda\Gamma + \Gamma^2 &< \Lambda^2 - 2\Lambda\Gamma + \Gamma^2 + \frac{4m^2}{\kappa(1-\kappa)} \\ 2\Lambda\Gamma &< \frac{4m^2}{\kappa(1-\kappa)} - 2\Lambda\Gamma \\ \Lambda\Gamma &< \frac{m^2}{\kappa(1-\kappa)} \\ \frac{m_f m_v}{\kappa(1-\kappa)} &< \frac{m^2}{\kappa(1-\kappa)} \\ m_v m_f &< m^2 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores de m , m_f y m_v .

$$\left(\frac{\omega_v \tau + \lambda_{vf} + \lambda_{mv}}{\lambda_{mv}^2} \right) \left(\frac{\omega_f \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{vf}}{\lambda_{mf}^2} \right) < \left(\lambda_{vf} + \frac{\lambda_{mv} \lambda_{mf}}{\omega_m \tau + \lambda_{mf} + \lambda_{mv}} \right)^2$$

$$\begin{bmatrix} \omega_v \omega_m \tau^2 + \omega_v \tau \lambda_{mf} \\ + \omega_v \tau \lambda_{mv} + \lambda_{mv} \omega_m \tau \\ + \lambda_{vf} \omega_m \tau + \lambda_{vf} \lambda_{mf} \\ + \lambda_{vf} \lambda_{mv} + \lambda_{mv} \lambda_{mf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_f \omega_m \tau^2 + \omega_f \tau \lambda_{mf} \\ + \omega_f \tau \lambda_{mv} + \lambda_{mf} \omega_m \tau \\ + \lambda_{vf} \omega_m \tau + \lambda_{vf} \lambda_{mf} \\ + \lambda_{vf} \lambda_{mv} + \lambda_{mf} \lambda_{mv} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \lambda_{vf} \omega_m \tau + \lambda_{vf} \lambda_{mf} \\ + \lambda_{vf} \lambda_{mv} + \lambda_{mv} \lambda_{mf} \end{bmatrix}^2$$

definiendo para simplificar:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \omega_v \omega_m \tau^2 + \omega_v \tau \lambda_{mf} \\ + \omega_v \tau \lambda_{mv} + \lambda_{mv} \omega_m \tau \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \omega_f \omega_m \tau^2 + \omega_f \tau \lambda_{mf} \\ + \omega_f \tau \lambda_{mv} + \lambda_{mf} \omega_m \tau \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \lambda_{vf} \omega_m \tau + \lambda_{vf} \lambda_{mf} \\ + \lambda_{vf} \lambda_{mv} + \lambda_{mv} \lambda_{mf} \end{bmatrix}$$

todas son positivas, entonces

$$(\Phi + \Omega)(\Psi + \Omega) < \Omega^2$$

$$\Phi\Psi + \Phi\Omega + \Psi\Omega + \Omega^2 < \Omega^2$$

$$\Phi\Psi + \Phi\Omega + \Psi\Omega < 0$$

que no es posible, por lo tanto d_{22} es negativa.

Por lo tanto,

$$\alpha_1 = d_{11} - \varpi^2$$

$$\alpha_2 = d_{22} - \varpi^2$$

como d_{11}, d_{22} son negativos, entonces α_1, α_2 deben ser negativos. Y también

$$a_1 = \sqrt{-\alpha_1}$$

$$a_2 = \sqrt{-\alpha_2}$$

las constantes a_1 y a_2 son reales.