UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA EN COMPUTACIÓN

Análisis de la distribución de color y textura en obras de arte.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:

FAUSTO VINCENZO CARRILLO DE ALBORNOZ CARRANZA

Director de Tesis:

Dr. Jorge Alberto Márquez Flores

Facultad de ciencias, UNAM

Ciudad Universitaria, CD. MX. Febrero, 2018

Agradecimientos

Agradezco especialmente a mi padre Fausto y a mi madre Leticia por brindarme todo su apoyo y cariño incondicional, por confiar siempre en mí.

A mi hermana Andrea, por aconsejarme, apoyarme y darme ánimos en los momentos más complicados. Por ser la mejor hermana, gracias.

Al Dr. Jorge Márquez por la paciencia, la asesoría, los conocimientos y materiales que me brindó para realizar este trabajo de manera satisfactoria.

Gracias a Raúl, Jonathan, Fabián, y Cristóbal; amigos que muy pronto se convirtieron en mis hermanos, gracias a todos ustedes.

Agradezco al Posgrado de Ciencia e Ingeniería en Computación por permitirme realizar estudios de posgrado, a todos los profesores y personal del mismo por su apoyo, conocimiento, y paciencia.

A los miembros del jurado, los doctores Boris, Miguel, Patrice y Ernesto por el tiempo invertido en las correcciones de la tesis.

Agradezco enormemente a la Universidad Nacional Autónoma de México por todo el conocimiento y experiencias que me ha otorgado. Por todo eso y más, muchas gracias.

Muchas gracias a Maya por ser la mejor perrita del mundo, por levantarme el ánimo y siempre estar conmigo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar mis estudios de posgrado.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

En el siguiente trabajo se presentan las herramientas que fueron desarrolladas para analizar las pinturas de artistas como **Leonardo Da Vinci**, **Salvador Dalí**, **Diego Rivera**, **Claude Monet**, **Pablo Picasso**, **Pierre-Auguste Renoir** y, **Vincent Van Gogh**, a partir de la distribución de color y textura.

Utilizando análisis de componentes principales, y con ayuda de *OpenGL*, se calculan y visualizan los ejes principales, así como el elipsoide que mejor ajusta a cada distribución de color. Además, se muestra también, la superficie generada a partir de la distribución de color, a la cual se le asigna un mapa de color que varía entre color azul y rojo, dependiendo de su posición respecto al elipsoide que mejor ajusta.

En el apartado de *análisis de textura* se calculó la matriz de co-ocurrencia de niveles de gris y, a partir de los descriptores de **Haralick** se generaron imágenes paramétricas, las cuales recibieron tratamiento similar al de la distribución de color. Aprovechando el cálculo de algunos de los descriptores de **Haralick**, se evaluó qué tan presentes se encuentran en cada pintor estudiado.

Para finalizar, a cada pintura se le calculó el histograma de patrones binarios locales (LBP por sus siglas en inglés) para tratar de determinar si existen similitudes entre pinturas pertenecientes a un mismo pintor y, al mismo tiempo, observar las diferencias entre pinturas de artistas diferentes.

1.1. Antecedentes

El arte ha estado presente en la vida del ser humano desde tiempos prehistóricos. El hombre de las cavernas expresaba y, de cierta manera, documentaba sus ideas, experiencias y emociones a través escenarios simples o complejos que pintaba en los muros de las cavernas. Con el paso del tiempo, las técnicas y estilos de pintura, los materiales utilizados y los lugares donde los artistas plasmaban sus ideas fueron cambiando. Tablas, telas, paredes y muros; cualquier lugar funcionaba como lienzo para que los pintores pudiesen expresar y plasmar sus obras. Como ejemplo se tiene el techo de la Capilla Sixtina pintado por **Miguel Ángel**; los muros de Palacio Nacional en la Ciudad de México pintados por **Diego Rivera** e incluso, los *graffitis* callejeros pueden ser considerados una expresión artística.

Con la disponibilidad de grandes colecciones *en línea*, algunos investigadores se han interesado en aplicar técnicas y metodologías científicas, particularmente de procesamiento digital de imágenes y algunos métodos estadísticos, que les permitan tratar de entender y cuantificar la estructura y composición de las pinturas. Lo anterior con el objetivo de reducir la brecha existente entre el arte y la ciencia.

Por otra parte, con dichas galerías disponibles, surge la necesidad de desarrollar sistemas multimedia para archivar y consultar las colecciones, para que las galerías en línea puedan mostrar pinturas contemporáneas, además de desarrollar sistemas de recomendación automatizada que puedan recuperar pinturas con características similares para exhibirlas a compradores potenciales. Lo anterior enaltece la necesidad de investigar métricas de similitud visual entre pinturas digitalizadas (Saleh and Elgammal, 2015).

Para analizar y estudiar los elementos de las artes visuales, se han abordado distintos enfoques. Éstos incluyen tratar de identificar a los pintores, autentificación de pinturas, así como encontrar conexiones significativas entre diferentes artistas (Cetinic and Grgic, 2013).

La clasificación y análisis de pinturas se encomienda normalmente a expertos en arte aunque trabajos recientes han propuesto la idea de automatizar dicho proceso.

Los expertos en arte clasifican las pinturas de acuerdo a un conjunto de atributos conocidos como estilo de pintura[1].

Las pinturas pueden analizarse de acuerdo a dos tipos de características (Widjaja et al., 2003)

Semanticas: Iconografía y tema.

Sintácticas: Color, textura y composición en general.

La mejor forma para iniciar el análisis de una obra de arte desde la perspectiva computacional es concentrándose en elementos como color, textura y forma (Cetinic and Grgic, 2013)

1.2. Estado del arte

En (Saleh and Elgammal, 2015) se evalúan métricas de aprendizaje que permitan determinar el estilo, género de una pintura e, incluso al artista. La metodología consistió en extraer características de las pinturas tales como bordes e identificar objetos en la pintura (características visuales). Posteriormente asociaron métricas de aprendizaje optimizado a cada uno de los elementos por determinar (artista, género, estilo). Con la información obtenida de las características y las métricas obtenidas se generó un vector de características final que fue utilizado para entrenar clasificadores como **máquinas de soporte vectorial** y **redes neuronales convolucionales** para realizar la clasificación.

(Puthenputhussery and Liu, 2016) motivados por campos como Visión Computacional y Psicología Cognitiva, desarrollaron una serie de características para analizar obras de arte desde diferentes perspectivas, a su vez, complementarias. En su

[1]Combinación de características técnicas, composicionales e iconográficas que proporcionan a la pintura cierto carácter y permiten atribuirla a una escuela particular o periodo (Widjaja et al., 2003)

trabajo codificaron un descriptor que incorporaba información local y espacial sobre el color, así como información sobre la intensidad relativa y orientación de su gradiente.

Para resolver dicha problemática, desarrollaron diversos vectores de rasgos, basándose en el vector de Fisher y combinándolo con descriptores de SIFT, DAISY y Weber. Con dichos vectores lograron obtener resultados satisfactorios para clasificar pinturas, descubrir la influencia del artista y de estilo.

(Condorovici et al., 2013) propone utilizar histogramas de color en 3D, los cuales permiten caracterizar la paleta de color de las pinturas, y una serie de filtros de Gabor para caracterizar el nivel de detalle. Con los rasgos obtenidos y el apoyo de clasificadores logró reconocer pinturas pertenecientes a ciertos autores.

(Culjak et al., 2011) considera 6 géneros artísticos: *realismo*, *cubismo*, *impresionismo*, *fovismo*, *puntillismo* y *arte naíf* (Naive Art). Su objetivo principal es encontrar las características que permitan mejorar la clasificación de géneros sin tomar en cuenta la semántica de la pintura. Dichas características las obtiene de la distribución de color de la pintura y del análisis textural realizado a la misma. Para el análisis de color, genera y utiliza el histograma de color. De dicho histograma obtiene máximos locales, máximos absolutos así como razones o tasas de concentración de pixeles que le permiten caracterizar qué tan oscura o brillante es una pintura, ya que de acuerdo a lo que se menciona en su artículo, una de las principales diferencias entre los distintos géneros artísticos se encuentra en la luminosidad de las pinturas. En el análisis textural (Culjak et al., 2011) utilizó filtros como *blur filters, sharpen filters* y filtros detectores de bordes. De la misma forma que en el análisis de color, generó tasas o razones de aparición de bordes en las pinturas, que utilizó como un descriptor más de la pintura. Finalmente, para clasificar las pinturas (Culjak et al., 2011) utilizó los clasificadores incluidos en el software WEKA [2].

En (Zujovic et al., 2009) se clasificaron pinturas por género artístico. La metodología propuesta consiste en dos etapas: **extracción de características** y **clasificación**. Para caracterizar el color de la pintura, genera histogramas para cada componente en el espacio **HSV**. Utiliza también, **filtros de Canny** para detectar bordes bajo diferentes umbrales, debido a que ciertos estilos poseen bordes sútiles, como el *impresionismo* y otros estilos, tales como el arte pop, presentan bordes pronunciados. Similar a (Culjak et al., 2011), (Zujovic et al., 2009) genera una razón o proporción de bordes dentro de una pintura. Esta razón es igual al número de pixeles que pertenecen a un borde entre el total de pixeles que componen a la pintura.

Para concluir el análisis, utiliza la información obtenida de los histogramas y la proporción de bordes para alimentar clasificadores provistos por WEKA.

(Marchenko et al., 2005) utilizó un enfoque diferente a los revisados previamente para analizar el color de las pinturas. Extrae regiones homogéneas y utiliza técnicas de *Machine Learning* y procesamiento digital de imágenes para caracterizar regiones de la pintura en términos de conceptos de color artísticos como **temperatura**, **paleta de colores** y **contraste**. Divide su análisis en 3 etapas: Segmentación, análisis de conceptos color a nivel región y análisis de conceptos de color para toda la imagen.

Primero segmenta la imagen, debido a que para analizar temperatura y contraste necesita tomar en cuenta la localización espacial de los colores en la pintura.

[2]https://www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka/

Posteriormente, analiza regiones y obtiene características geométricas tales como normalización de la región, el rectángulo mínimo que la engloba, el centro y la excentricidad. Con ayuda de una **máquina de soporte vectorial probabílistica** asigna a cada región cierta temperatura, ya sea neutral, fría o cálida. En el caso del **contraste**, modela dos regiones como un conjuto de pares de color basándose en el color predominante de cada región. Con lo anterior calcula 4 tipos de **contraste** los cuales son: contraste de valor, de temperatura, complementario y, claro-oscuro.

Finalmente, para caracterizar la pintura bajo dichos conceptos, toma en cuenta los valores calculados para cada región para determinar el valor de la imagen en general.

Muchos trabajos han presentado estudios referentes a la clasificación de pinturas por **género**, sin embargo, éstos realmente clasifican pinturas por movimiento artístico o estilo. El término **género** se refiere al contenido que presenta cada pintura, como puede ser historia, religión, paisajes y retratos (Cetinic and Grgic, 2016). El trabajo de (Cetinic and Grgic, 2016) se enfoca en clasificar pinturas de acuerdo al género.

Para lograr dicho objetivo, (Cetinic and Grgic, 2016) basó su análisis en cinco descriptores: **SIFT** (Scale Invariant Feature Transform), características basadas en **redes neuronales convolucionales**, **GIST**, **HOG** (Histogram of Oriented Gradients) y la **mtariz de co-ocurrencia de niveles de gris** (GLCM por sus siglas en inglés). Al final, descubrió que las características basadas en **redes neuronales convolucionales** mostraron mejor desempeño sobre el resto de los descriptores para la tarea de clasificar pinturas de acuerdo a su género.

En (Yang and Xu, 2011) se propone un algoritmo que permite distinguir con precisión entre el estilo *Sumi e* [3] y arte extranjero. El método se basa en 3 características de las pinturas: contraste de color, espacios en blanco en la pintura y uniformidad de la iluminación.

(Cetinic and Grgic, 2013) propone un método para reconocer pintores de una obra de arte concentrándose solamente en los elementos cuantificables de las pinturas. Dichos elementos se clasifican en tres tipos:

Características estadísticas: Media, varianza, rango de intensidades de niveles de gris, kurtosis, energía y entropía.

Características de color: Histograma en HSV y medidas estadísticas que puedan extraerse de dicho histograma.

Textura: GLCM (Gray-Level Co-Ocurrence Matrix), detección y proporción de bordes, *wavelets*.

Para la clasificación (Cetinic and Grgic, 2013) utilizó cinco clasificadores utilizando la herramienta WEKA. Los clasificadores utilizados fueron: Perceptrón multicapa, SMO (sequential minimal optimization for support vectorial machines), *Naive Bayes*, *Random Forest* y *Ada Boost M1*. Al final, reporta un 75 por ciento de precisión en sus resultados.

[3] Técnica japonesa de dibujo en tinta.

(Kim et al., 2014) estudia el color y las estructuras espaciales de pinturas a lo largo de diez periodos históricos entre los que destacan el periodo *medieval*, *renacimiento*, *manerismo*, *barroco*, *neoclasicismo*, romanticismo y realismo. En el estudio, analizan el uso de cada color, la variedad de colores utilizados, y consideran qué tan rugoso o suave es la imagen respecto al brillo de la misma. Finalmente miden la dimensión fractal de los colores que se utilizan en las pinturas de cada periodo.

1.3. Justificación del problema

La utilidad de realizar un estudio como el que se propone, es mostrar al público en general información cuantitativa sobre el comportamiento del color y la textura en alguna o varias pinturas. Asimismo, dicha información puede complementar el análisis hecho por algún experto en arte y tal vez, ayudar a tener mejor entendimiento de la composición de la pintura. Por otra parte, este tipo de aplicaciones servirán como base para el desarrollo de sistemas en línea que permitan recuperar pinturas con características similares, ya sea en color y/o textura, que puedan interesarle al público en general o a compradores potenciales.

Otra aplicación es caracterizar la influencia posible en ciertas obras de arte contemporáneas e inclusive apoyar estudios de autenticidad y autoría. Además, el análisis textural per-se tiene aplicaciones en terrenos distintos al de las obras de arte, como en ciencias del suelo, metalurgia y biomedicina.

1.4. Objetivos

Diseñar y programar herramientas que permitan analizar de manera cuantitativa el color y textura de diversas obras de arte. Tratar caracterizar el estilo de cada pintor seleccionado analizando algunas de sus pinturas. Comparar los resultados obtenidos entre los diversos autores estudiados. Observar diferencias y semejanzas entre los estilos de pintura.

1.5. Contribución de la tesis

Desarrollo de herramientas de análisis y visualización para obtener información cuantitativa de una o varias obras de arte, con la finalidad de mostrar que es posible analizarlas utilizando herramientas científicas. Asimismo, encontrar y mostrar las técnicas o metodologías más eficaces para efectuar dicho análisis y sentar las bases para estudios más profundos.

1.6. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se presenta información relevante de los pintores como lugar de nacimiento, estilo de pintura y, corriente artística a la que pertenecieron.

En el capítulo 3 se describen de manera detallada los conceptos, técnicas y, herramientas utilizadas para efectuar el análisis de la distribución de color de las pinturas.

El capítulo 4 presenta conceptos, técnicas y metodologías necesarias para realizar el análisis de texturas a las pinturas elegidas.

En el capítulo 5 se muestra la metodología y las tareas que se llevaron a cabo para analizar la textura y la distribución de color de las pinturas.

En el capítulo 6 se discuten los resultados obtenidos para cada pintor y, se exponen tablas y gráficas que permiten comparar los resultados.

En el apéndice A se exponen antecedentes y contexto histórico desde el punto de vista artístico. Se describen de manera concisa las características de las corrientes artísticas a las que pertenecieron cada uno de los pintores estudiados.

En el apéndice B se describe el proceso para cambiar la media y desviación estándar de un conjunto de datos así como algunas propiedades útiles.

El apéndice C se describen de manera breve los modelos de iluminación utilizados en graficación por computadora, así como las técnicas de sombreado.

Capítulo 2

Pintores y obras estudiados

2.1. Leonardo Da Vinci (1452-1519)

Fue entrenado como pintor y escultor en Florencia, Italia, dentro del taller de Andrea del Verrocchio (1435-1488). Como pintor, dibujaba lo que observaba en el mundo que lo rodeaba incluyendo anatomía humana, vida silvestre, el movimiento del agua y, el vuelo de las aves (Bambach, 2002). Motivado por la curiosidad, Leonardo trataba constantemente de explicar lo que veía.

2.1.1. Perspectiva

Leonardo se dio cuenta que una forma de pintar escenas de manera realista era observar con mucho cuidado como los animales, personas y, paisajes realmente lucían. Solía escribir notas detalladas sobre sus observaciones e incluía bocetos de las cosas que observó a lo largo de su vida.

Leonardo vivió durante el período de *Renacimiento* en Italia. Fue en este periodo que arquitectos y artistas investigaban como dibujar objetos tridimensionales en una superficie plana. Comenzaron a pensar en la pintura como una **ventana abierta** a través de la cual el observador podía ver el mundo. Se desarrolló un sistema de reglas matemáticas, conocidas como **perspectiva lineal**, para ayudar a los pintores a pintar de forma realista. Leonardo aprendió dichas reglas de perspectiva y practicó utilizando la ventana como un artefacto que le permitió dibujar la perspectiva de los objetos de manera correcta mientras era aprendiz en el taller de Andrea del Verrocchio (*Da Vinci - The Artist*, n.d.).

2.2. Salvador Dalí (1904-1989)

Salvador Dalí nació el 11 de mayo de 1904, en el pequeño pueblo de Figueras, una región de Cataluña, España. El trabajo de Dalí explora 3 temas: El universo y la sensación humana, simbolismo sexual, y pictografía. Salvador Dalí es considerado como uno de los grandes representantes de *Surrealismo*[1] (*Salvador Dalí*, n.d.).

[1] Movimiento del siglo XX que procuraba liberar el potencial creativo del inconsciente a través de imágenes extrañas y oníricas.

2.3. Diego Rivera (1886-1957)

Nació el 8 de diciembre de 1886 en Guanajuato, Guanajuato.
Fue considerado uno de los grandes artistas en el ámbito mundial. Rivera ingresó en la Academia de San Carlos a los diez años de edad. Entre 1913 y 1917 creó un importante número de obras cubistas, aunque también exploró otros estilos pictóricos. En 1921 se integró al programa cultural del gobierno de México, encabezado por José Vasconcelos.
Con el tema *La creación*, en 1922, Rivera creó su primer mural en la Escuela Nacional Preparatoria. Con el paso del tiempo crearía 15 murales más, realizados en México y Estados Unidos. De su obra destacan su magna producción mural, sus más de tres mil cuadros, centenares de dibujos, obras gráficas e ilustraciones (*Diego Rivera*, n.d.).

2.4. Claude Monet (1840-1926)

Claude Monet nació el 14 de noviembre de 1840, en París, Francia. Es conocido por sus aportaciones al movimiento artístico denominado como *Impresionismo*. En las composiciones de este período, Monet aplica el color con pinceladas cortas y vigorosas. Lo anterior, debido a la espontaneidad e inmediatez que exige la pintura al aire libre a la hora de capturar una impresión de la naturaleza (*Claude Monet. Obra y biografía*, n.d.).

2.5. Pablo Picasso (1881-1973)

Pablo Picasso nació el 25 de octubre de 1881 en Málaga España. Junto con Georges Braque, fue uno de los creadores del *Cubismo*. En 1896 ingresa en la Real Academia de Bellas Artes, y allí comienza su formación artística dentro del realismo académico. A partir de 1900, realiza una serie de obras que constituyen un corpus homogéneo que será calificado más tarde como **etapa azul**, caracterizada por el alargamiento del cano, la utilización de gamas frías de color y el tono melancólico y ascético de las Figuras. Aproximadamente en 1904, inicia la denominada **etapa rosa**, en la que desarrolla composiciones con formas clásicas y colores más cálidos. En 1907 realiza *Les demoiselles dÁvignon*, obra considerada como el origen del *cubismo*, en la que plantea una nueva relación entre volumen, espacio, Figura y fondo.

2.6. Pierre-Auguste Renoir (1841-1919)

Nació el 25 de febrero de 1841 en Limoges, Francia. Renoir fue una de las Figuras principales del movimiento impresionista. Desde el año 1861, asistió a las clases de dibujo de Charles Gleyre, y finalmente fue admitido en la École des Beaux-Arts en 1862. Sin embargo, continuó ligado al estudio de Gleyre, donde conicidió con Claude Monet, Alfred Sisley y Fréderic Bazille. Pasó temporadas junto a Monet en Argenteuil [2], donde ambos realizaron paisajes que se convertirían en ejemplos paradigmáticos del estilo impresionista (*Pierre-Auguste Renoir*, n.d.).

2.7. Vincent Van Gogh (1853-1890)

Nació el 30 de marzo de 1853 en Groot-Zundert, Holanda. Fue entre 1860 y 1880 que decidió convertirse en artista. En 1886 fue a París, para unirse con su hermano Theo. En París, conoció a Pissarro, Monet y Gauguin. A partir de ese momento, Van Gogh comenzó a dar más luz a su paleta, bastante oscura, y a pintar con cortes impresionistas. Las obras más finas de Van Gogh fueron producidas en menos de tres años por una técnica que crecía con el transcurso del tiempo. El artista estaba absorto completamente en el esfuerzo para explicar su lucha contra la locura o en la comprensión de la esencia espiritual de hombre y naturaleza (*Vincent van Gogh: Biografía*, n.d.).

2.8. Adquisición de pinturas

Las pinturas que fueron estudiadas al realizar este trabajo fueron obtenidas de diversas fuentes electrónicas, las cuales se mencionan a continuación:

- http://art-gallery.com/
- http://art-monet.com/
- http://art-picasso.com/
- http://art-renoir.com/
- https://www.dalipaintings.com/
- https://www.diegorivera.org/
- https://www.leonardodavinci.net/

2.8.1. Características de las pinturas

Las pinturas elegidas se encuentran en formato **.jpg**. El tamaño de las pinturas puede variar según el sitio de donde fue descargada. Sin embargo, se trataron de elegir a las pinturas con mayor resolución, teniendo al menos 500 pixeles por lado.

Debido a la dificultad para encontrar las versiones digitalizadas de las pinturas en buena calidad, la cantidad de pinturas utilizadas para estudiar a cada pintor puede variar. Se consideraron al menos diez pinturas por autor. A continuación se mencionan, clasificadas por autor, las pinturas que fueron utilizadas en este trabajo:

[2] Comuna de Francia situada en el departamento de Valle del Oise y de la región de Isla de Francia.

Salvador Dalí

1. *Bacchanale (1939).*
2. *Cristo de San Juan de la Cruz (1951) .*
3. *Crucifixión (1954).*
4. *Sueño causado por el vuelo de una abeja alrededor de una granada un segundo antes de despertar (1944).*
5. *Gala contemplando el Mediterráneo (1976).*
6. *Niño geopolítico observando el nacimiento del nuevo hombre (1943).*
7. *Cabeza rafaelesca estallando (1951).*
8. *La tentación de San Antonio (1946).*
9. *La última cena (1955).*
10. *Metamorfosis de Narciso (1937).*
11. *El sueño (1937).*
12. *La araña de la noche (1940).*
13. *Cisnes que se reflejan como elefantes (1937).*
14. *Los elefantes (1948).*
15. *El gran masturbador (1929).*
16. *Cisnes que se reflejan como elefantes (1937).*
17. *La gabineta antropomórfica (1936).*
18. *Jirafa en llamas (1937).*
19. *La desintegración de la persistencia de la memoria (1952-1954).*
20. *La Madonna de Port Lligat (1950).*
21. *Reloj blando en el momento de su primera explosión (1955).*
22. *Pesca del Atún (1967).*

Leonardo Da Vinci

1. *Baco (1510-1515).*
2. *Retrato de Ginebra de Benci (1474-1476).*
3. *Cabeza de muchacha (1508).*
4. *La dama del armiño (1490).*
5. *Leda y el cisne (1515-1520).*
6. *Madonna Litta (1490).*
7. *Virgen de la rueca (1499-1507).*
8. *La Gioconda (1503-1519).*
9. *San Juan Bautista (1508-1513).*
10. *Anunciación (1472).*
11. *La última cena (1495–1498).*
12. *La Virgen, el Niño Jesús y Santa Ana (1510-1513)*

Diego Rivera

1. *Zapata líder Agrario (1931).*
2. *Cruzando la barranca (1930).*
3. *El Cargador de Flores (1935).*
4. *Festival de las flores (1925).*
5. *Vendedora de flores (1941).*
6. *Fondos congelados (1931).*
7. *Guerrero indio (1931).*
8. *Jacques Lipchitz (1914).*
9. *Hombre en la encrucijada (1933).*
10. *Desnudo con alcatraces (1944).*
11. *Retrato de Lupe Marín (1938).*
12. *Retrato de Natasha Gelman (1943).*
13. *Desnudo con girasoles (1946).*
14. *La abundante tierra (1946).*

Claude Monet

1. *A corner of the studio (1861).*
2. *Boatyard near Honfleur (1864).*
3. *By the sea (1864).*
4. *Farm near Honfleur (1864).*
5. *Hauling a Boat Ashore, Honfleur (1864).*
6. *Lighthouse at the Hospice (1864) .*
7. *Road to the Saint-Simeon farm (1864).*
8. *Seacoast at Saint-Adresse, Sunset (1864).*
9. *Spring Flowers (1864).*
10. *Still life with bottles (1863).*
11. *Trophies of the hunt (1862).*

Pablo Picasso

1. *A rooster (1938).*
2. *Great bather reading (1937).*
3. *Head of a Woman No. 1, Portrait of Dora Maar .*
4. *Head of a Woman No. 2, Portrait of Dora Maar (1939).*
5. *Head (1938).*
6. *Leaning woman (1938).*
7. *Man with a straw hat (1938).*
8. *Minotaur is wounded (1937).*
9. *Portrait of Dora Maar (1937).*
10. *Portrait of Dora Maar (1937).*
11. *Portrait of Dora Maar (1937).*
12. *Portrait de Lee Miller en Arlésienne (1937).*
13. *Portrait of Marie-Thérèse Walter with garland (1937).*
14. *Portrait of Marie-Thérèse Walter (1937).*
15. *Portrait of Marie-Thérèse Walter (1937).*

16. *Portrait of Marie-Thérèse Walter (1937).*
17. *Portrait of Nusch Éluard (1937).*
18. *The imploring (1937).*
19. *Untitled (1937).*
20. *Untitled (1937).*

Pierre-Auguste Renoir

1. *Colonel Barton Howard Jenks (1865).*
2. *Crown of roses (1858).*
3. *Diana the Huntress (1867).*
4. *Lisa Sewing (1866).*
5. *Portrait of Mademoiselle Sicotg.*
6. *Reclining nude (1863).*
7. *Mademoiselle Romaine Lacaux (1864).*
8. *Sleeping Cat (1862).*
9. *Spring flowers (864).*
10. *The artist's mother (1860).*
11. *The Inn Of Mother Anthony (1866).*
12. *The Painter Jules Le Coeur Walking His Dogs in the Forest of Fontainebleau (1866).*
13. *The Return of the Boating Party (1862).*
14. *Two figures in a landscape (1866).*
15. *Portrait of William Sisley (1864).*

Vincent Van Gogh

1. *Garden with courting couples: square Saint-Pierre.*
2. *The garden of the hospital (1889).*
3. *Gate in the Paris Ramparts (1887).*
4. *Irises (1890).*
5. *Landscape with a Stack of Peat and Farmhouses (1883).*

6. *Old Vineyard with Peasant Woman (1890).*
7. *Pollard Willow (1882).*
8. *Sunflowers (1888).*
9. *The bedroom (1889).*
10. *The potato eaters (1885).*
11. *The sower (1888).*
12. *Tree roots (1890).*
13. *View from Vincent's Studio (1886).*
14. *Weaver (1884).*
15. *Wheatfield with a Reaper (1889).*
16. *Wheatfield under Thunderclouds (1890)*

Capítulo 3

Herramientas para el análisis de Color

En este capítulo se presentan antecedentes, fundamentos y herramientas que permitirán, más adelante, entender la metodología utilizada para caracterizar una pintura a través de su color.

3.1. Antecedentes

En 1666, Sir Isaac Newton descubrió que cuando un rayo de luz solar atraviesa un prisma de cristal, el haz de luz resultante no era blanco si no que consistía en un espectro de colores que iban desde violeta a un extremo y rojo al otro tal como se observa en la Figura 3.1.

Figura 3.1: Prisma de Newton. Imagen tomada de (Pérez, 2015).

Los colores que los humanos y algunos animales perciben en un objeto están determinados por la luz que dicho objeto refleja. Por ejemplo, los objetos verdes reflejan luz con longitud de onda entre 500 a 570 nm mientras que absorben la mayor parte de la energía de otras longitudes de onda.

Los conos son sensores en el ojo sensibles al color. Éstos pueden ser divididos en tres categorías sensitivas: luz roja, luz verde y luz azul. De acuerdo a estas características de absorción del ojo humano, los colores son percibidos como una combinación de los llamados colores primarios rojo, verde y azul.

Las características utilizadas generalmente para distinguir un color de otro son el brillo (*brightness*), la saturación (*saturation*) y tono o matiz (*hue*). El brillo se refiere a la noción de intensidad. El matiz representa el color dominante percibido por el observador. La saturación se refiere a la pureza o la cantidad de luz blanca que contiene dicho color.

3.2. Modelos de color

El propósito de un modelo de color es facilitar la especificación de colores en algún estándar. Un modelo de color es una especificación de un sistema de coordenadas y un subespacio dentro de dicho sistema donde cada color se representa por un solo punto.

3.2.1. Modelo RGB

Este modelo está basado en el sistema de coordenadas cartesiano. Los colores primarios rojo, verde y azul, se encuentran en tres esquinas del cubo que se muestra en la Figura 3.2; los colores secundarios cyan, magenta y amarillo se encuentran en las tres esquinas restantes; el color negro se encuentra en el origen del sistema de coordenadas mientras que el color blanco está en la esquina más alejada del origen. En este modelo, la escala de grises [1] se extiende desde negro hasta blanco a lo largo de la línea que une esos dos puntos. Los diferentes colores en este modelo son los puntos que están dentro o sobre el cubo.

[1]Puntos con el mismo valor en los ejes R, G, B

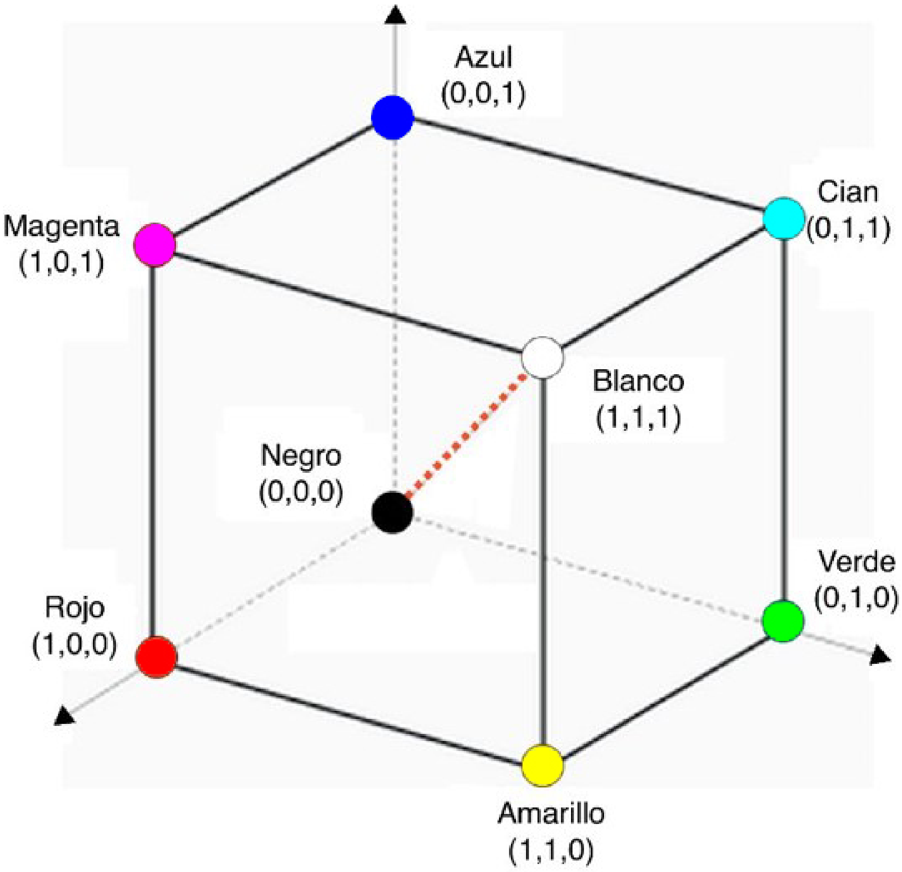


Figura 3.2: Cubo que representa al espacio RGB. Imagen tomada de (Pacifici, 2012)

3.2.2. Modelo HSI

Cuando los seres humanos perciben el color de un objeto, lo describen a través de su **matiz** (*hue*), **saturación**, (*saturation*) y **brillo** (*brightness*). Como se mencionó anteriormente, el matiz es un atributo que describe un color puro (amarillo puro, naranja puro, rojo puro, etc); la saturación se refiere a la cantidad de luz blanca que tiene el color puro. Por otro lado, el brillo es un descriptor subjetivo que es casi imposible de medir. Sin embargo, involucra la noción acromática de intensidad, la cual es uno de los descriptores más útiles de las imágenes monocromáticas.

El modelo HSI separa la componente de intensidad de las componentes que tienen información sobre el color. El espacio HSI está representado por un eje vertical asociado a la intensidad y el conjunto de puntos que representan al color se encuentra en planos perpendiculares a dicho eje. La Figura 3.3 muestra la representación gráfica del espacio HSI.

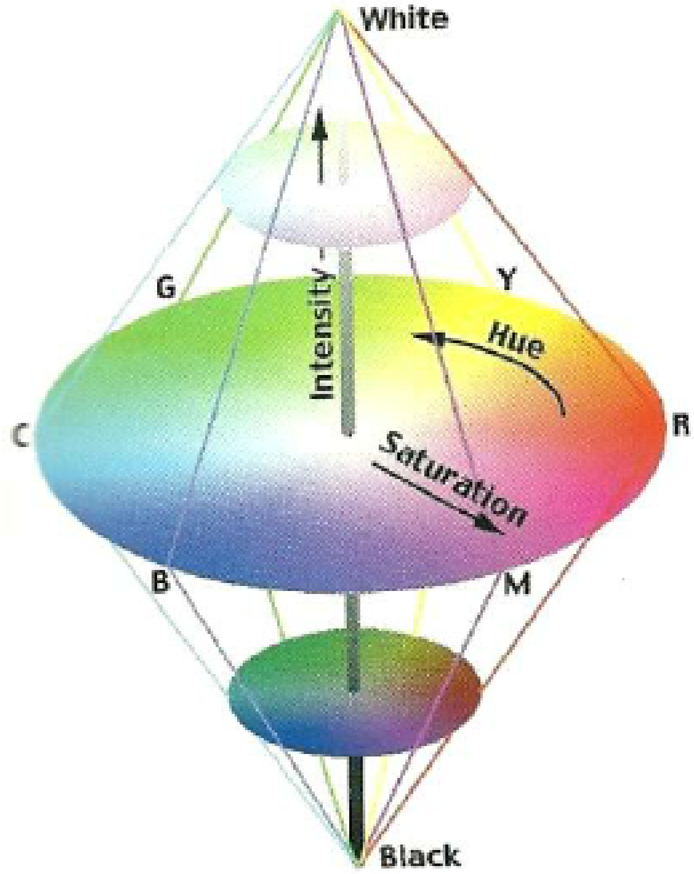


Figura 3.3: Espacio HSI. Imagen tomada de (Blotta et al., 2011).

3.2.3. Conversión entre el modelo RGB y HSI

Dado cierto punto p(r,g,b) en el espacio RGB, este se relaciona con el sistema HSI en una forma similar, aunque no idéntica, a la forma en que las coordenadas cilíndricas se relacionan al sistema cartesiano. Por lo anterior, la transformación entre un sistema y otro se puede considerar como una rotación del cubo RGB, seguido por una transformación del cubo rotado a las coordenadas cilíndricas (modificadas) HSI (Ledley et al., 1990)

Dada una imagen en RGB, la componente H de cada pixel RGB se obtiene usando la siguiente ecuación:

$$H = \begin{cases} \theta \text{ si } B \leq G \\ 360 - \theta \text{ si } B > G \end{cases} \tag{3.1}$$

Donde :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}[(R-G)+(R-B)]}{[(R-G)^2+(R-B)(G-B)]^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{3.2}$$

El componente de la saturación está dada por:

$$S = 1 - \frac{3}{R+G+B}(min(R,G,B)) \tag{3.3}$$

La componente de intensidad está dada por:

$$I = \frac{1}{3}(R+G+B) \tag{3.4}$$

3.3. Análisis de componentes principales

Análisis de componentes principales (PCA por sus siglas en inglés) es una técnica estadística que analiza la estructura de la covarianza de datos multivariados. A su vez, determina las direcciones a lo largo de las cuales la variación de los datos ocurre y su respectiva importancia. El primer componente principal otorga la dirección donde se observa la varianza máxima de datos. El segundo componente principal, describe la dirección de la segunda máxima varianza que se presenta en el conjunto de datos, además, es ortogonal al vector que representa la dirección del primer componente principal (Wijewickrema and Paplinski, 2005).

En (Smith, 2002) PCA se define como un procedimiento matemático ideado para reemplazar cierto número de variables correlacionadas con un nuevo conjunto de variables que no estén correlacionadas. Dicho cambio de variables se logra al aplicar una transformación ortogonal. Para realizar análisis de componente principales, es necesario efectuar los siguientes pasos:

1. Calcular media y varianza para cada variable o dimensión.
2. Calcular la matriz de covarianza.
3. Calcular los *eigenvectores* y *eigenvalores* correspondientes a la matriz de covarianza.

3.3.1. Media, Varianza y desviación estándar

De acuerdo a (Muñoz, 2004), las medidas de dispersión central de un conjunto de datos se definen como sigue:

Media

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \tag{3.5}$$

Varianza

$$var(X) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{N} \tag{3.6}$$

Desviación estándar La desviación estándar se calcula a partir de la varianza, y se define como sigue:

$$\sigma = \sqrt{var(X)} \tag{3.7}$$

3.3.2. Covarianza

La covarianza entre dos variables Aleatorias o conjuntos de datos y (Muñoz, 2004) la define de la siguiente manera:

$$covar(X, Y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{N} \tag{3.8}$$

Donde X y Y son dos variables Aleatorias o conjuntos de datos.

3.3.3. Matriz de covarianza

La matriz de covarianza es una representación ordenada de las varianzas y covarianzas de las dimensiones o variables aleatorias estudiadas (Ojeda, 2007).

Entonces, la matriz de covarianza para un conjunto de datos con n dimensiones se define como:

$$C^{nxn} = (c_{i,j}, c_{i,j} = cov(Dim_i, Dim_j)) \tag{3.9}$$

Donde C^{nxn} es una matriz con n columnas y n renglones.
Cada elemento de la matriz resulta de calcular la covarianza entre dos dimensiones. Por ejemplo, el elemento (2,3) de la matriz es el resultado de calcular la covarinza entre la segunda y tercera dimensión del conjunto de datos.
Ejemplo:
Supongamos un conjunto de tres dimensiones X, Y y Z. La matriz de covarianza tendrá entonces 3 dimensiones y sus elementos son los siguientes:

$$C = \begin{pmatrix} cov(X, X) & cov(X, Y) & cov(X, Z) \\ cov(Y, X) & cov(Y, Y) & cov(Y, Z) \\ cov(Z, X) & cov(Z, Y) & cov(Z, Z) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Eigenvectores y Eigenvalores

Conocidos también como valores y vectores propios, los *eigenvalores* y *eigenvectores* son útiles en diversas aplicaciones de física e ingeniería tales como: circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, entre otros.

Definición: Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Un escalar λ se llama **eigenvalor** de A si existe un vector X distinto de cero, tal que $AX = \lambda X$. Tal vector X es el **eigenvector** asociado a A (Poole, 2011).

3.4. Histograma

El histograma de una imagen con niveles de intensidad que van de [0, L-1] es una función discreta $h(r_k) = n_k$, donde r_k es el $k-\acute{e}simo$ valor de intensidad y n_k es el número de pixeles en la imagen con esa intensidad (González and Woods, 2007). Suele ser común normalizar los histogramas dividiendo cada uno de sus componentes entre el total de pixeles existentes en la imagen.

3.4.1. Histograma en escala de grises

En una imagen de 8 bits existen 256 diferentes intensidades. El histograma asociado a una imagen con dichas características, mostrará la frecuencia en que ocurren ciertos valores de intensidad dentro de la imagen. La Figura 3.4 muestra una imagen en escala de grises y el histograma asociado.

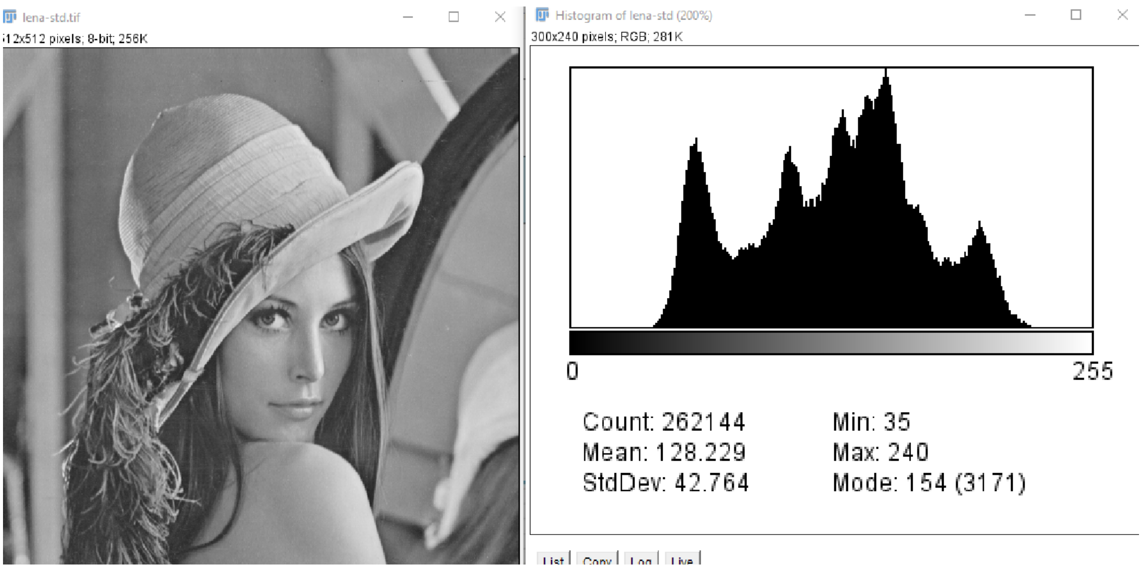


Figura 3.4: Imagen en escala de grises e histograma asociado. Histograma generado utilizando el software **ImageJ**.

3.4.2. Histograma 3D

Un histograma 3D o histograma de color se puede generar a partir de una imagen a color (32 bits). Se tienen 3 ejes que representan a cada componente de color, en este caso en el espacio RGB. Se consideran pixeles iguales a aquellos que tienen los mismos valores en cada una de las componentes. La Figura 3.5 muestra una imagen a color y el histograma 3D de la misma.

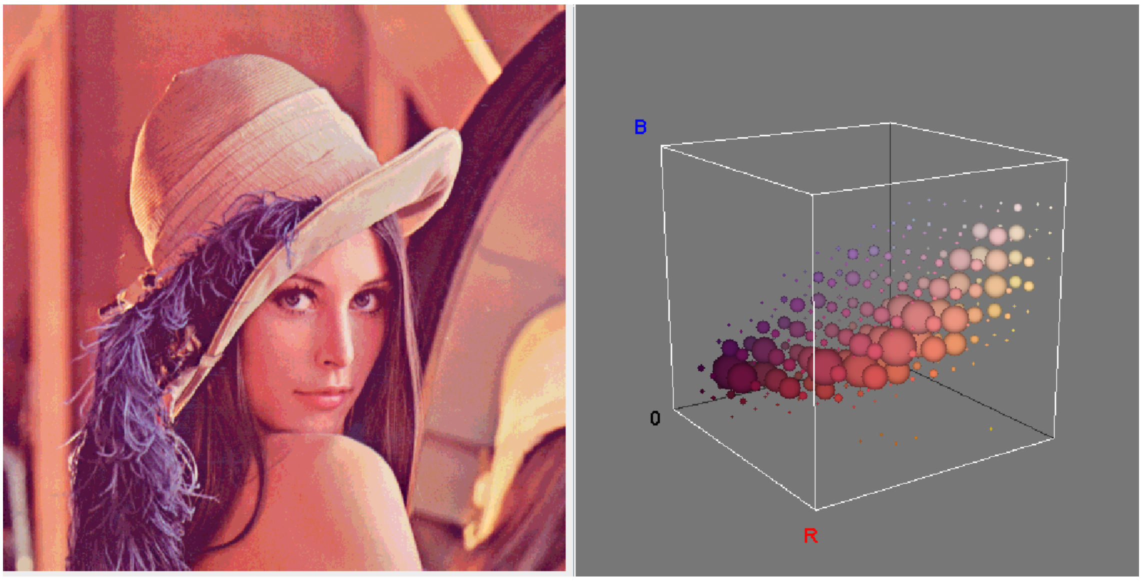


Figura 3.5: Imagen a color e histograma 3D asociado. Imagen generada utilizando el software **ImageJ** y el *plug-in* **Color Inspector 3D.**

El histograma 3D será de utilidad para visualizar la distribución de color en el espacio RGB. También es necesario para obtener el **centro de masa** de la distribución de color así como el tensor de inercia para efectuar el **análisis de componentes principales**.

3.5. Centro de masa de la distribución de color

El centro de masa en dinámica de partículas, es un punto que se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la masa total del sistema. En (Knudsen and Hjorth, 2000) el centro de masa de un sistema de partículas se define como:

$$CM = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i}{M} \tag{3.12}$$

donde m_i y r_i son la masa y el vector de posición de la $i-\acute{e}sima$ partícula, y $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema.

Considerando a la distribución de color de una pintura en el espacio RGB similar a un sistema de partículas, donde el total de ocurrencias de un pixel se considera como la masa m_i de la partícula, la posición r_i está dada por las coordenadas del pixel en el espacio RGB y, la masa total M del sistema es el total de pixeles contenidos en la imagen. Entonces, el centro de masa de la distribución de color se define como:

$$(r_c, g_c, b_c) = \frac{\sum\limits_{(r,g,b)\in VOI} (r,g,b)(Histo(r,g,b))}{\sum\limits_{(r,g,b)\in VOI} Histo(r,g,b)} \tag{3.13}$$

Donde (r,g,b) es el color RGB, $Histo(r,g,b)$ es el número de ocurrencias de ese color y VOI es el volumen de interés.

3.5.1. Tensor de Inercia

El tensor de inercia proporciona una idea general de cómo está distribuida la masa en un un cuerpo rígido (Peraire and Widnall, 2008).
El tensor de inercia alrededor del centro de masa de la distribución de color en el espacio RGB se define mediante la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} I_{rr} & -I_{rg} & -I_{rb} \\ -I_{gr} & I_{gg} & -I_{gb} \\ -I_{br} & -I_{bg} & I_{bb} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Donde:

$$I_{rr} = \frac{1}{card(VOI)} \sum_{r,g,b \in VOI} Histo(r,g,b) \left((g-g_c)^2 + (b-b_c)^2 \right) \tag{3.15}$$

$$I_{rg} = \frac{1}{card(VOI)} \sum_{r,g,b \in VOI} Histo(r,g,b) \left((r-r_c)^2 + (b-b_c)^2 \right) \tag{3.16}$$

$$I_{rb} = \frac{1}{card(VOI)} \sum_{r,g,b \in VOI} Histo(r,g,b) \left((g-g_c)^2 + (r-r_c)^2 \right) \tag{3.17}$$

$$I_{rg} = I_{gr} = \frac{1}{card(VOI)} \sum_{r,g,b \in VOI} Histo(r,g,b)(r-r_c)(g-g_c) \tag{3.18}$$

$$I_{rb} = I_{br} = \frac{1}{card(VOI)} \sum_{r,g,b \in VOI} Histo(r,g,b)(r-r_c)(b-b_c) \tag{3.19}$$

$$I_{gb} = I_{bg} = \frac{1}{card(VOI)} \sum_{r,g,b \in VOI} Histo(r,g,b)(g-g_c)(b-b_c) \tag{3.20}$$

Donde (r_c, g_c, b_c) son las coordenadas del centro de masa de la distribución de color y $card(VOI)$ es la cardinalidad.
Para realizar el análisis de componentes principales a la distribución de color, el tensor de inercia tomará el lugar de la matriz de covarianza. Lo anterior tiene como objetivo otorgar mayor peso a los pixeles con mayor número de ocurrencias.

3.6. Transformada de distancia

El campo de distancia o transformada de distancia (DT) es un operador geométrico fundamental con grandes aplicaciones en campos como graficación por computadora, visión computacional, análisis de forma, reconocimiento de patrones, y geometría computacional (Fabbri et al., 2008).

3.6.1. Definición

Sea $I : \Omega \subset \mathbb{Z}^{\nvDash} \to \{0, 1\}$ una imagen binaria donde el dominio Ω es convexo y, en particular, $\Omega = \{1, ..., n\}X\{1, ..., n\}$, a menos que se diga lo contrario. Por convención, el valor 0 se asocia a negro y el valor 1 se asocia a blanco. Tenemos entonces un objeto $\mathcal{O}$ representado por todos los pixeles blancos como sigue:

$$\mathcal{O} = \{p \in \Omega \mid I(p) = 1\}$$

El conjunto $\mathcal{O}$ se conoce como objeto o frente (*foreground*) y se compone de cualquier subconjunto del dominio de la imagen, incluyendo conjuntos disjuntos. Por otro lado, los elementos de su complemento, $\mathcal{O}^c$ el conjunto de pixeles negros en Ω se conocen como fondo (*background*).

Definición La transformada de distancia (DT) es aquella transformación que genera un mapa D cuyo valor en cada pixel p es la distancia más corta de dicho pixel a $\mathcal{O}^c$ (Fabbri et al., 2008):

$$D(p) := min\{d(p, q) \mid q \in \mathcal{O}^c\} = min\{d(p, q) \mid I(q) = 0\} \tag{3.21}$$

D se conoce como el *mapa de distancia* de I. Se asume que $\mathcal{O}^c$ contiene al menos un pixel.
La distancia *d(p,q)*, generalmente la distancia euclidiana, está dada por:

$$d(p, q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2} \tag{3.22}$$

En la Figura 3.6 a) se muestra una imagen binaria. En 3.6 b) se muestra el mapa de distancia de dicha imagen.

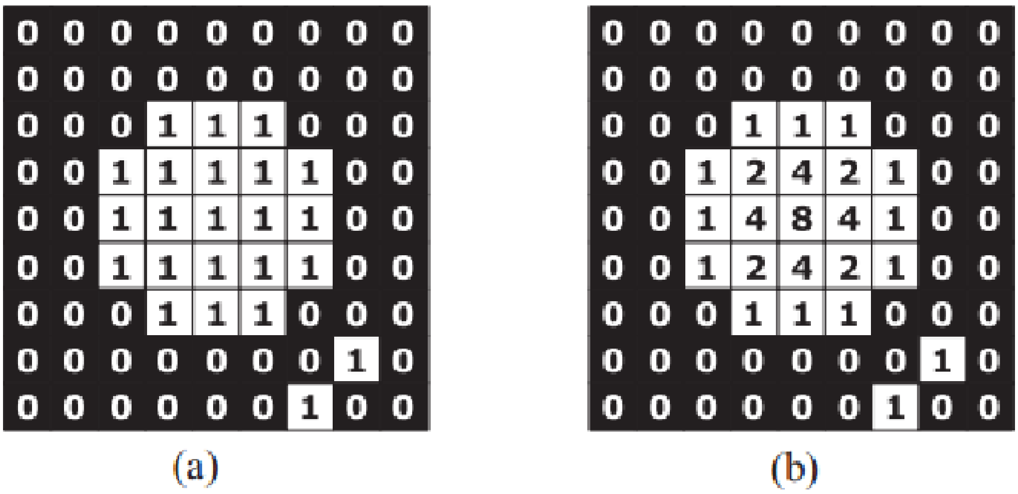


Figura 3.6: a) Imagen binaria. (b) Transofrmada de distancia. Muestra las distancias en enteros al pixel 0 más cercano. Imagen Tomada de (Fabbri et al., 2008).

3.6.2. Transformada de distancia con signo

Dada una imagen binaria que consiste en uno o más objetos y un fondo, se define a la transformada de distancia con signo como una transformación que asigna a cada pixel la distancia de ese pixel particular al pixel con valor cero más cercano. El signo de la distancia asignada indica si el punto está fuera (positivo) o dentro (negativo) del objeto (Grevera, 2004).

La Figura 3.7 muestra un ejemplo de una transformada de distancia con signo.

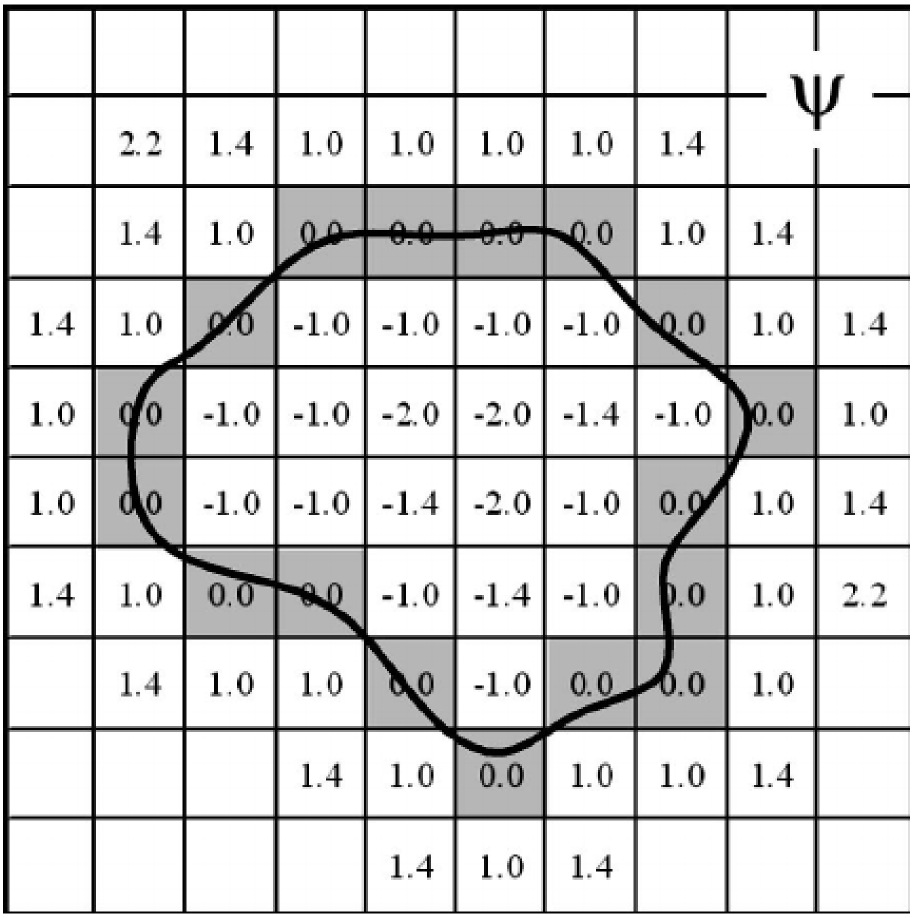


Figura 3.7: Ejemplo de la transformada de distancia con signo. Imagen Tomada de (Yan and Kassim, 2004).

3.6.3. Aplicaciones

La transformada de distancia (DT) tiene numerosas aplicaciones algunas de las cuales se mencionan a continuación:

- Separación de objetos que se traslapan.
- Esqueletonización (*Skeletonization*) o transformada del eje medio (*medial axis transform*).
- Diagramas de Voronoi.
- Dimensión fractal.
- Uso de *SKIZ* (*Skeleton by influence zones*) en la navegación de robots. Permiten encontrar la ruta más corta de un lugar a otro sorteando obstáculos.
- Análisis de datos multidimensionales (clasificación y clustering).
- Registro (alineación generalizada) de objetos en dos y tres dimensiones.
- Cálculo del espesor de un cráneo o de la corteza cerebral, radio local de redes arteriovenosas y ancho local de surcos y de circunvoluciones.

La transformada de distancia con signo, en la versión de tres dimensiones, será de utilidad para generar el **mapa de color** de la superficie generada a partir de la distribución de color de una pintura. Con su ayuda, se podrá conocer la distancia que existe entre un punto de dicha superficie y elipsoide que mejor ajusta la distribución. Lo anterior permitirá asignar cierto color a la superficie dependiendo de la distancia encontrada.

3.7. Transformaciones geométricas en tres dimensiones

Para poder orientar correctamente el **elipsoide que mejor ajusta** respecto al sistema de ejes principales de la distribución de color, es necesario conocer las transformaciones geométricas que se enumeran a continuación:

3.7.1. Traslación

La traslación consiste en mover un objeto (línea, punto, polígono) en el espacio 3D una distancia determinada. La matriz que define la traslación en 3D es la siguiente:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Donde x, y, z son las distancias que se trasladará dicho objeto en la dirección de cada uno de los ejes coordenados.

En la Figura 3.8 se muestra de manera gráfica el procedimiento de traslación de un objeto en el espacio tridimensional.

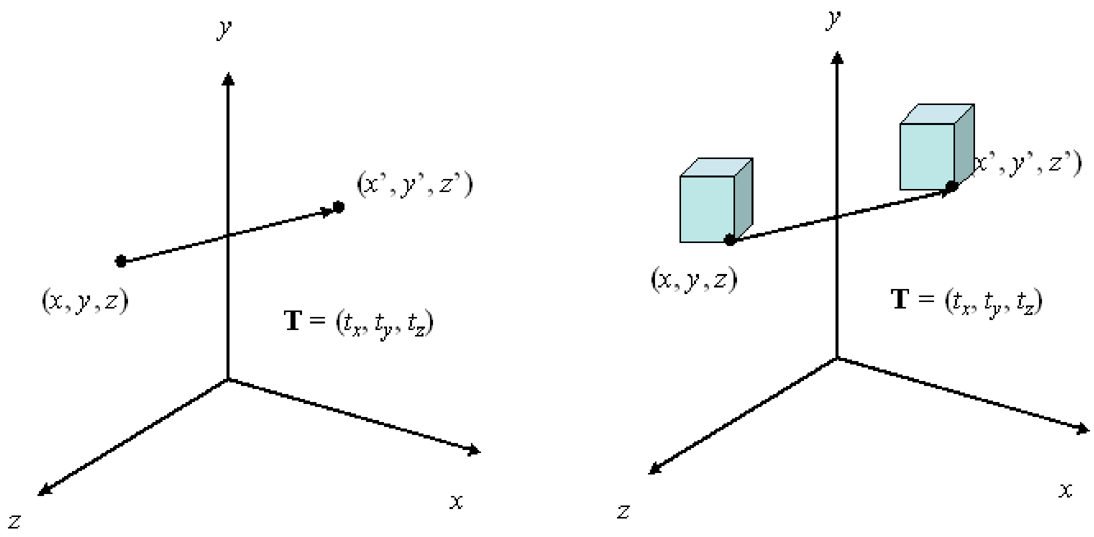


Figura 3.8: Ejemplo de la traslación de un objeto en 3D. Imagen tomada de (Medellin, n.d.).

3.7.2. Cambio de escala

El escalamiento o cambio de escala consiste en cambiar el tamaño de un objeto en el espacio 3D en una o varias direcciones. La matriz que define esta transformación es la siguiente:

$$T = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

En la figura 3.9 se muestra un ejemplo del proceso de escalamiento de un objeto en el espacio tridimensional.

3.7.3. Rotación

Las matrices de rotación en 3D representan una rotación en sentido antihorario, cierto ángulo θ alrededor de un eje fijo. De manera general, una matriz de rotación en tres dimensiones puede denotarse como $R(\hat{n}, \theta)$. Donde $\hat{n}$ es el eje de rotación y θ el ángulo. Por convención, una rotación positiva corresponde a una rotación en sentido antihorario (*Three-Dimensional Rotation Matrices*, 2012).

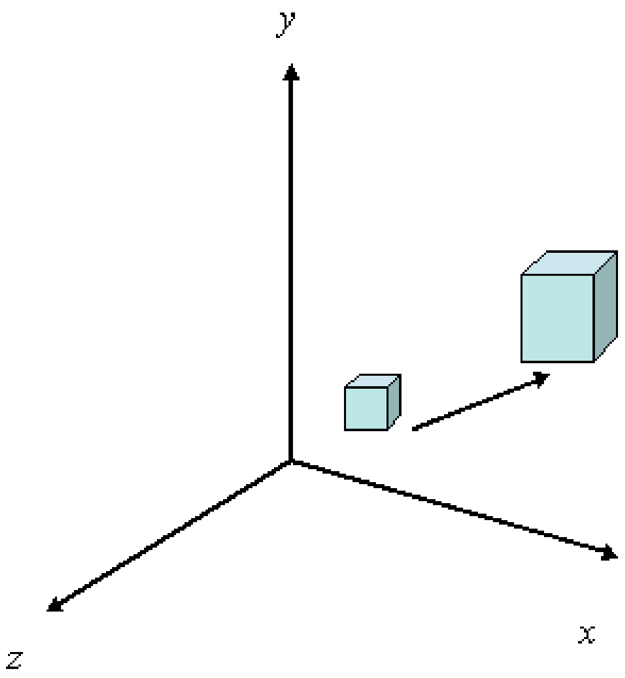


Figura 3.9: Ejemplo del cambio de escala de un objeto en 3D. Imagen tomada de (Medellin, n.d.).

Propiedades (Gruber, 2000)

1. Las matrices de rotación son ortogonales, es decir, $RR^T = I$ donde R^T es la matriz transpuesta de R e I es la matriz identidad. Es conveniente mencionar, que el producto punto de cualquier par de filas es igual a 0.

2. R está normalizada. Los cuadrados de los elementos de cualquier fila o columna suman un total de 1.

Rotación respecto al eje X

La rotación de uno o más puntos alrededor del eje X se define a través de la siguiente matriz:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Sea p un punto cualquiera en el espacio 3D con coordenadas x_p, y_p, z_p. Para rotar a p cierto ángulo α alrededor del eje X, se multiplica a p por la matriz R_x como sigue.

$P' = R_x P$ donde P' es el punto P rotado y P puede expresarse en forma de vector columna como sigue:

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

El mismo proceso de rotación de puntos puede aplicarse con las matrices de rotación respecto al eje Y y al eje Z

Rotación respecto al eje Y

La matriz que describe la rotación respecto al eje coordenado Y es la siguiente:

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Rotación respecto al eje Z

Matriz que describe la rotación respecto al eje coordenado Z:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Rotación respecto a un eje arbitrario (Kovacs, 2012)

Para rotar un objeto o una serie de puntos alrededor de un eje arbitrario, diferente a cualquiera de los ejes coordenados, es necesario seguir el procedimiento que se describe a continuación:

1. Trasladar el objeto de forma que el eje de giro pase por el origen del sistema de coordenadas. Sean $P(x, y, z)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$ dos puntos que pertenecen al eje de giro $\vec{v}$ y sea $\vec{u}$ el vector unitario que tiene la dirección de $\vec{v}$. Se aplicara una traslación $T(-x, -y, -z)$ para que el eje pase justamente por el origen del sistema de coordenadas.

2. Girar el objeto de tal manera que dicho eje coincida con alguno de los ejes coordenados.

3. Realizar el giro θ deseado.

4. Utilizar las matrices de giro inversas, y en orden inverso a como se realizo en el punto número 2, para devolver el eje de giro a su orientación original.

5. Aplicar una transformación de traslación inversa a la utilizada en primer lugar, para devolver el eje de giro, y al objeto, a su posición original.

Traslación del eje de giro Se debe trasladar el eje de giro y hacerlo pasar por el origen del sistema de coordenadas. Para efectuar la traslación, se define la siguiente matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

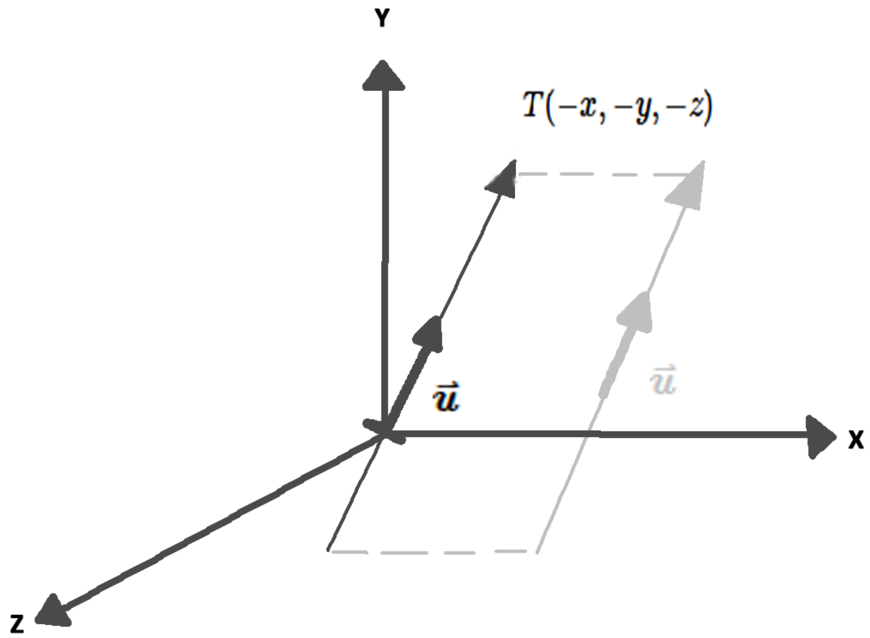


Figura 3.10: Traslación del eje arbitrario para que pase por el origen del sistema de coordenadas.

La Figura 3.10 ilustra la traslación del eje de giro y el vector unitario $\vec{u}$ asociado.

Alinear el eje de giro con uno de los ejes coordenados Después de realizar la traslación, se debe alinear el eje de giro $\vec{u}$ con uno de los ejes coordenados. En este caso se alineará a $\vec{u}$ con el eje coordenado Z.
El proceso anterior se divide en dos partes:

a) Girar a $\vec{u}$ alrededor del eje coordenado X hasta que coincida con el plano XZ.

La Figura 3.11 muestra a $\vec{u}(a, b, c)$ y a $\vec{u}'(0, b, c)$ que es la proyección de $\vec{u}$ sobre el plano YZ. Se observa que girar a $\vec{u}$ alrededor del eje X hasta que coincida con el plano XZ requiere el mismo ángulo φ que girar a $\vec{u}'$ hasta que coincida con el eje Z. De la Figura 3.11 se puede observar también que $\|\vec{u}\| = d$. Donde d se define de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{b^2 + c^2} \tag{3.30}$$

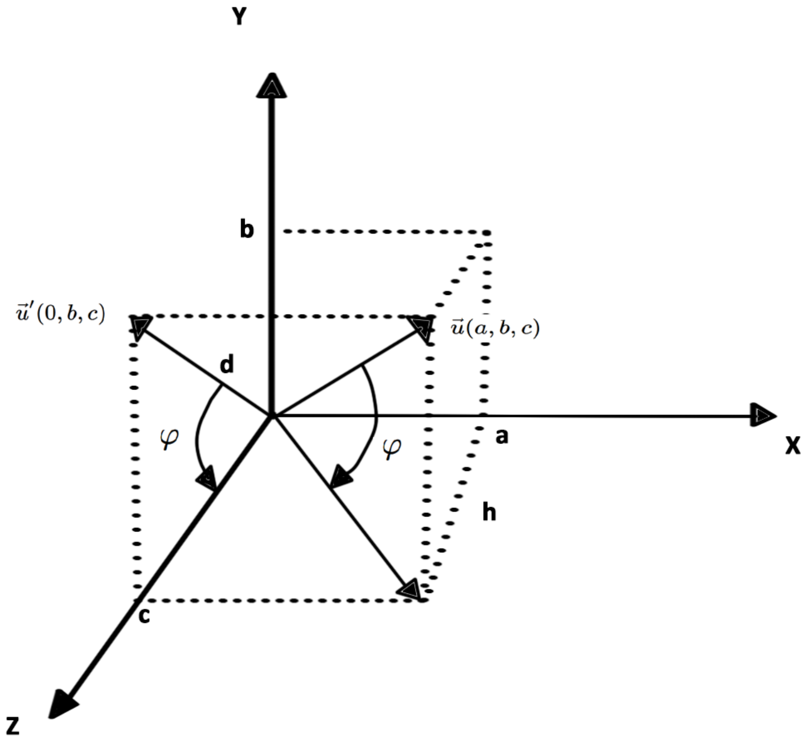


Figura 3.11: Rotación de $\vec{u}$ para hacerlo coincidir con el plano XZ.

También se concluye a partir de la Figura 3.11 que $\cos(\varphi) = \frac{c}{\|\vec{u}'\|} = \frac{c}{d}$ y $\sin(\varphi) = \frac{b}{d}$. por lo tanto, la matriz de rotación respecto al eje X resulta de la siguiente forma:

$$G_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{d} & \frac{b}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{d} & \frac{c}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

Finalmente, al aplicar la matriz G_x a $\vec{u}$, este se encontrará contenido en el plano XZ.

b) Girar a $\vec{u}$ respecto al eje coordenado Y hasta que coincida con el eje Z. El $\vec{u}$ que ahora se encuentra en el plano XZ, deberá ser girado alrededor del eje coordenado Y hasta que coincida con el eje coordenado Z. Debido a que el giro a realizarse, es en sentido horario, se considera un giro negativo.

En la Figura 3.12 se aprecia a $\vec{u}(a, 0, h)$ tras aplicar la primera rotación (respecto al eje coordenado X), donde h es desconocida. Al ser $\vec{u}$ un vector unitario se tiene que $\left\|\vec{u}^2\right\| = 1$, pero,

$$\left\|\vec{u}^2\right\| = a^2 + b^2 + c^2 \tag{3.32}$$

De la Figura 3.12 se observa que:

$$\left\|\vec{u}^2\right\| = a^2 + h^2 \tag{3.33}$$

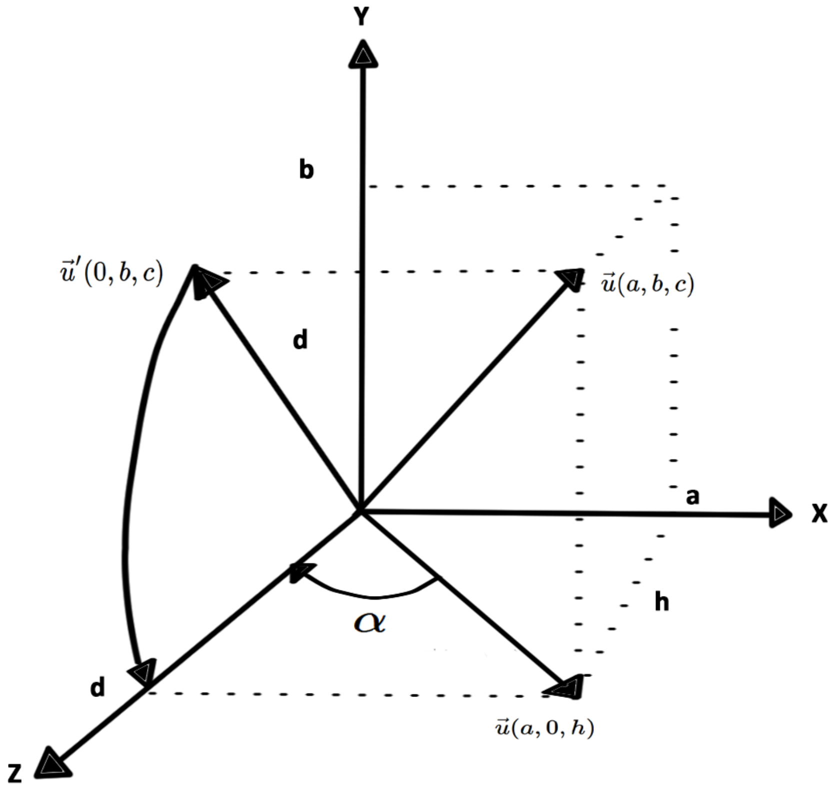


Figura 3.12: Rotación de $\vec{u}$ para hacerlo coincidir con el plano XZ.

De las ecuaciones 3.32 y 3.33 se concluye que:

$$h^2 = b^2 + c^2 \tag{3.34}$$

Sin embargo, en la ecuación 3.30 se define a $d^2 = b^2 + c^2$ entonces:

$$h = d \tag{3.35}$$

Con las ecuaciones anteriores se obtienen los elementos necesarios para construir la matriz de giro alrededor del eje coordenado Y:

$\cos(-\alpha) = \frac{d}{1}$ pero $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ entonces

$-\sin(\alpha) = -\frac{a}{1}$.

La matriz de giro G_y queda definida como:

$$G_y = \begin{pmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Aplicar el giro deseado Una vez que el eje de giro $\vec{u}$ se encuentra alineado con el eje coordenado Z, se debe aplicar el giro θ con respecto a dicho eje, siendo la matriz de giro G_z con respecto a Z la siguiente:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Aplicar transformaciones inversas Es necesario aplicar las transformaciones inversas para devolver al eje de giro a su orientación original.
Con lo anterior, la ecuación para girar a un objeto alrededor de un eje arbitrario $\vec{v}$ queda definida como:

$$G(\theta) = T^{-1}G_x^{-1}G_y^{-1}G_zG_xT \tag{3.38}$$

Donde $T^{-1}, G_x^{-1}, G_y^{-1}$ son las transformaciones inversas.

3.8. Dimensión fractal

En este trabajo se realizaron cálculos similares a los propuestos por (Kim et al., 2014) referente a la dimensión fractal de la distribución de color, la cual permite establecer qué tan homogénea o heterogénea es la distribución. Debido a lo anterior, parece pertinente definir la dimensión fractal y, presentar el algoritmo utilizado para calcularla.
Se dice que una línea es unidimensional, un cuadrado es bi-dimensional y que un cubo posee tres dimensiones. La pregunta es, ¿por qué éstos objetos geométricos poseen dichas dimensiones?
Los tres objetos mencionados poseen una característica importante en común: son autosimilares. Por ejemplo, la línea puede ser dividida en 4 segmentos, cada uno de la misma longitud; cada uno puede ser amplificado por un factor de 4 para producir el segmento original. De la misma manera, se puede dividr al segmento en 7 partes iguales, cada uno con un factor de amplificación de 7; también es posible dividirlo en 20 partes con un factor de amplificación de 20. En general, una línea puede ser divida en **N** segmentos similares con un factor de amplificación de **N**.
El caso del cuadrado es distinto. Se puede dividir al cuadrado en cuatro cuadrados autosimilares y el factor de amplificación para producir a la Figura original es de 2. Si se divide en 9 cuadrados, el factor de amplificación es de 3. En el caso de dividirlo en 25 cuadrados, el factor de amplificación es de 5. En resumen, el cuadrado puede ser dividido en $\mathbf{N}^2$ elementos con un factor de amplificación de **N**. Para finalizar, un cubo puede ser dividio en $\mathbf{N}^3$ elementos autosimilares con un factor de amplificación de **N**.

La **dimensión** de un objeto se puede definir como el exponente del número de elementos autosimilares con factor de amplificación **N** en los cuales puede dividirse dicho objeto (Devaney, 1995).

$$dimension = \frac{\log(numero\ de\ elementos\ autosimilares)}{\log(factor\ de\ amplificacion)} \tag{3.39}$$

Al aplicar la ecuación 3.39 a un cuadrado se tiene:

$$dimension = \frac{\log(N^2)}{N} = \frac{2\log N}{N} = 2 \tag{3.40}$$

Estudiar la distribución de color en el espacio de color RGB permite determinar si dicha distribución es homogénea o heterogénea y fractal. Si la distribución es homogénea, la dimensión será igual a tres. En caso de que sea menor que tres, significa que la distribución de color en el espacio de color se concentra sobre algún eje específico o existe un color predominante. En otras palabras, al medir la dimensión fractal, se cuantifica la uniformidad espacial o fractalidad de los colores utilizados (Kim et al., 2014).

3.8.1. Algoritmo Box-counting

El algoritmo *box-counting* es un método que permite determinar si una estructura presenta o no propiedades de autosimilaridad. A continuación se describe de manera breve el proceso para llevar a cabo el método de *box-counting*. El proceso se muestra en dos dimensiones, sin embargo la transición a la versión de tres dimensiones es bastante directa.

1. Generar una caja que englobe a la Figura que se desea analizar.
2. Dividir la caja en n cajas iguales con longitud de lado r.
3. Contar las cajas no vacías. Es decir, aquellas que contienen, al menos, una parte de la Figura a analizar.
4. Duplicar el tamaño de las cajas, por lo tanto, la longitud del lado r de cada caja se reduce a la mitad.
5. Repetir el proceso con distinto número de cajas.
6. Graficar $log(\frac{1}{r})$ vs $\log(ne)$ y ajustar una una línea recta a la serie de puntos obtenidos.
   Donde ne es el número de cajas no vacías.
7. La pendiente de la recta ajustada será la dimensión fractal del objeto.

La Figura 3.13 muestra como se aplica el algoritmo de **box-counting**.

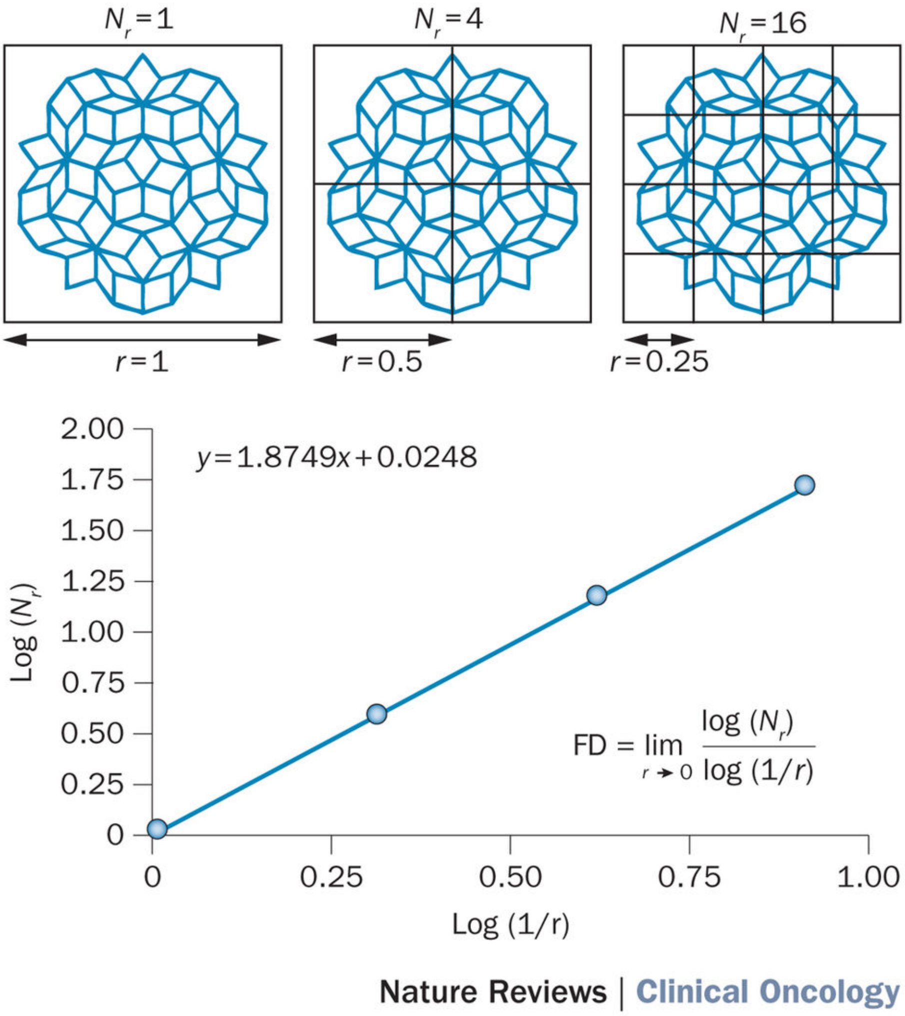


Figura 3.13: Algoritmo de box-counting. Imagen tomada de (Lenon et al., 2015).

3.9. Voxelización

El mapa de color de la superficie asociada a la distribución de color será generado con ayuda del proceso de voxelización. Para poder calcular la transformada de distancia de un objeto en 3D, es necesario recurrir a una versión voxelizada del mismo. A continuación, se define el proceso de voxelizado:

El proceso de voxelización consiste en convertir objetos geométricos desde su representación geométrica continua a un conjunto de voxeles que mejor aproximen la forma del objeto continuo (Kaufman et al., 1993). La voxelización es un similar al proceso de rasterización (algoritmo de *scan-conversion*), el cual permite representar, un objeto continuo en 2 dimensiones, de manera discreta, a través de un conjunto de pixeles.

Dependiendo de las necesidades de cada aplicación, el objeto puede ser voxelizado solamente del contorno, resultando hueco al interior, o este puede presentarse también como un objeto completamente sólido. La Figura 3.14 muestra dos versiones de voxelizado para un mismo modelo. del lado derecho, se observa un modelo que fue voxelizado únicamente del contorno, manteniendo el interior vacío. El modelo a la derecha es sólido, es decir, el interior del modelo también fue llenado con voxeles.

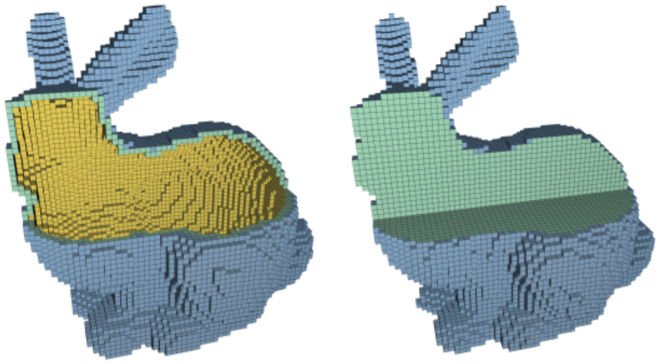


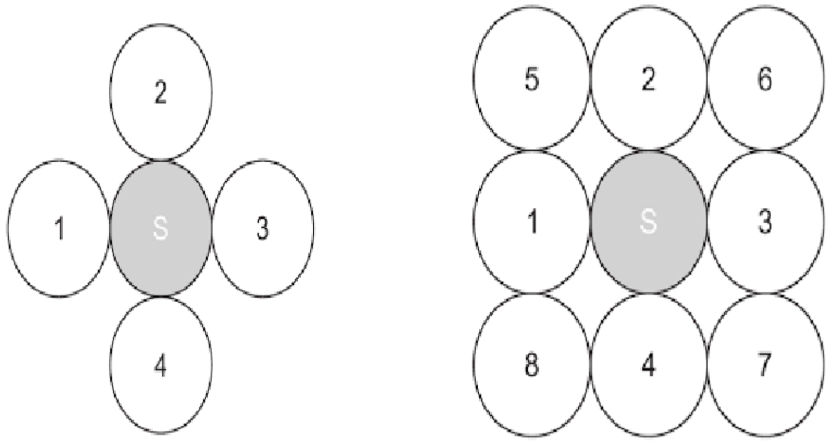
Figura 3.14: Modelo voxelizado, interior vacío (izquierda). Modelo voxelizado, interior sólido (derecha). Imagen tomada de (Schwarz and Seidel, 2010).

3.10. Algoritmo Flood-fill

Con la ayuda de la versión 3D de este algoritmo, se rellenará el interior de la versión voxelizada del elipsoide que mejor ajusta la distribución de color de una pintura. Lo cual permitirá calcular la transformada de distancia con signo y, finalmente, generar el mapa de color.

El propósito del algoritmo **Flood-fill** es rellenar o pintar de un mismo color un área determinada por ciertos pixeles interconectados, dejando los bordes y los pixeles fuera de dicha área intactos (Bhatia, 2008).

Este tipo de algoritmos se basan en métodos recursivos, inician con un pixel semilla al interior de la región a rellenar y pintan los pixeles vecinos, que no hayan sido pintados, considerando una vecindad 8-conectados o 4-conectados (fig 3.15) , según las necesidades del problema. Los vecinos, a su vez, se convierten en nuevas semillas, continuando así, el proceso recursivo hasta que la región haya sido completamente llenada o pintada. El algoritmo puede modificarse para crear una versión que funcione en tres dimensiones, rellenando voxeles en lugar de pixeles.



(a) 4-vecindad (b) 8-vecindad

Figura 3.15: Tipos de vecindad que se pueden considerar en un pixel. Imagénes tomadas de (Bhatia, 2008).

Pseudocódigo del algoritmo Flood-fill Como ya se había mencionado, el algoritmo *Flood-fill* se basa en la recursión. Es bastante fácil de implementar, sin embargo, debido a la naturaleza de la recursión puede causar un desbordamiento de memoria, en caso de que se requieran rellenar o pintar grandes áreas. En el algoritmo 3.10.1 se puede observar lo simple que es este algoritmo.

La Figura 3.16 muestra el resultado de aplicar el algoritmo **Flood-fill** a cierta región.

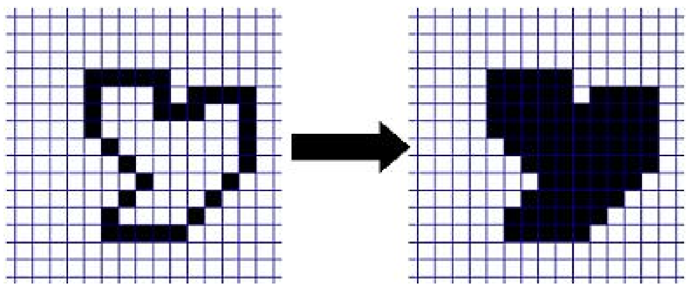


Figura 3.16: Resultado de aplicar el algoritmo **Flood-fill** a una región.

Algorithm 3.10.1: Pseudocódigo del algoritmo Flood-fill recursivo

```
Function floodFill
    Input: Imagen a rellenar, semilla(x,y)
    Output: Imagen rellenada
    pixel ←getPixel (imagen,semilla);
    /* El pixel ya está pintado                                   */
    if pixel ==1 then
        return;
    end
    else
        /* Genera nuevas semillas, en este caso se utiliza
           4-vecindad                                             */
        /* vecino oeste                                           */
        floodfill (imagen,semilla.x+1,semilla.y);
        /* vecino este                                            */
        floodfill (imagen,semilla.x-1,semilla.y);
        /* vecino norte                                           */
        floodfill (imagen,semilla.x,semilla.y+1);
        /* vecino sur                                             */
        floodfill (imagen,semilla.x,semilla.y-1);
    end
end
```

Capítulo 4

Herramientas para el análisis de texturas

4.1. Antecedentes

De acuerdo a (Hajek et al., 2006) una textura se define como una serie de patrones complejos, compuestos de entidades organizadas espacialmente, las cuales poseen brillo, color, forma y tamaño característico. Por otro lado, (Jain and Schunk, 1995) define a la textura como patrones repetitivos de variaciones locales en una imagen de intensidades los cuales son demasiado finos para ser distinguidos como objetos separados a la resolución observada. Cabe mencionar que existen texturas que no presentan patrones regulares o repetitivos por lo que las definiciones mencionadas anteriormente no logran englobar totalmente el universo de texturas existentes.

La textura de algunas imágenes se caracteriza parcialmente por la distribución espacial de los niveles de gris en un vecindario (Jain and Schunk, 1995) (Taji and Gore, 2013).

4.1.1. Métodos de análisis de texturas

Existen ciertos métodos con diversos enfoques que permiten extraer información característica de la textura de una imagen, como son: estadísticos, estructurales, basados en modelos, y de procesamiento de señales.

Método estructural

Representan a la textura como un conjunto de elementos texturales (texones). La textura se define a través de microtextura y macrotextura, la cual, está compuesta de un arreglo de micro-texturas. La ventaja de este enfoque es que provee buena descripción simbólica de la imagen. Este método ha probado ser útil en medicina, especialmente para la detección de cambios en la microestructura ósea (Taji and Gore, 2013).

Método estadístico

La textura se representa indirectamente por propiedades no determinísticas que gobiernan las distribuciones y relaciones entre los niveles de gris de una imagen. La textura se describe como una colección de características estadísticas que pueden ser de primer orden, si se aplica sobre los valores de niveles de gris de un pixel, o de segundo orden, si se calcula la diferencia de iluminación entre dos pixeles a una distancia d. Los descriptores más comunes de segundo orden se obtienen a través de la matriz de co-ocurrencia (GLCM) (Taji and Gore, 2013).

Método basado en modelos

Este método trata de caracterizar la textura al determinar un modelo analítico de la imagen que se analiza. Dichos modelos tienen un conjunto de parámetros que determinan las propiedades de la textura, la cual, puede ser sintetizada al aplicar el modelo (Jain and Schunk, 1995). Por ejemplo, los campos aleatorios de Markov (MRF por sus siglas en inglés) han sido utilizados como modelos de textura.

Métodos de transformadas

Involucran técnicas como las transformadas de Fourier, Gabor y ondeleta. Estas técnicas representan una imagen en un espacio cuyo sistema de coordenadas tiene una interpretación relacionada cercanamente a las características de la textura, por ejemplo, la frecuencia. Los métodos basados en la transformada de Fourier se desempeñan pobremente debido a la falta de localización espacial. Los filtros de Gabor tienen utilidad limitada debido a que no existe una sola resolución de filtros a la cual se puedan encontrar estructuras espaciales en texturas naturales. Finalmente, la desventaja de utilizar ondeletas radica en que la transformada no es invariante a la traslación (Materka and Strzelecki, 1998).

4.2. Matriz de co-ocurrencia de niveles de gris

La matriz de co-ocurrencia de niveles de gris (GLCM por sus siglas en inglés) fue introducida por Robert Haralick.

La GLCM es una matriz de dos dimensiones, que se construye de acuerdo a la probabilidad conjunta de que ocurran los niveles de gris i y j, para dos pixeles con relación espacial definida en términos de una distancia d y un ángulo θ (Sharma and Singh, 2001).

Definición Sea $I(f,c)$ una imagen con f filas y c columnas, d un vector de desplazamiento (d_f, d_c) donde d_f es el desplazamiento de las filas y d_c es el desplazamiento de las columnas. Sea L el conjunto de niveles de gris que componen a $I(f,c)$, la matriz de co-ocurrencia de niveles de gris $G(L_i, L_j)$, donde $G(L_i, L_j) = 0 \; \forall \; L_i, L_j$, para la imagen $I(f,c)$ se define como sigue:

$$G(L_i, L_j) = G(L_i, L_j) + 1 \text{ si } I(f,c) = L_i \text{ y } I(f+df, c+dc) = L_j \tag{4.1}$$

La Figura 4.1 ilustra el cálculo de tres matrices de co-ocurrencia utilizando tres vectores de desplazamiento distintos para una imagen de 4x4 con tres niveles de gris.

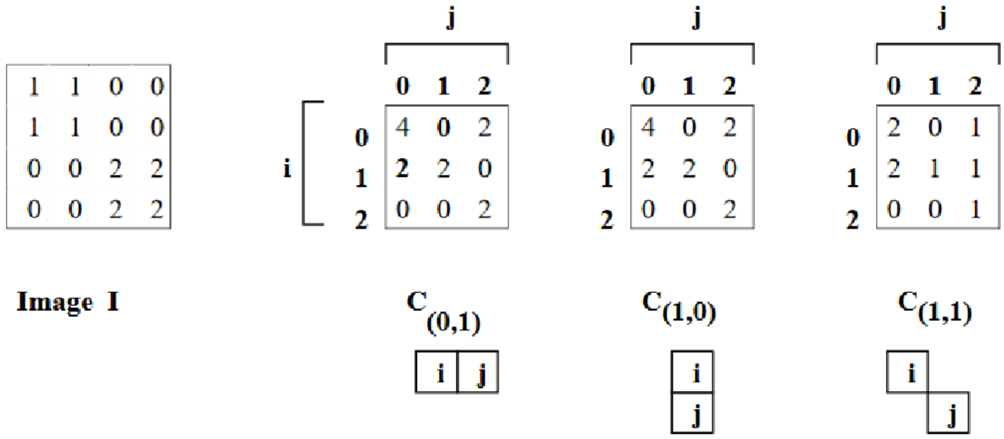


Figura 4.1: Tres matrices de co-ocurrencia para una imagen en niveles de gris. Imagen tomada de (Shapiro and Stockman, 2001).

4.2.1. GLCM normalizada

La matriz de co-ocurrencia normalizada, contiene valores que se encuentran solamente entre cero y uno. Lo anterior, permite visualizar a la matriz como una matriz de probabilidades (Shapiro and Stockman, 2001). La GLCM normalizada se define como sigue:

$$G_n(L_i, L_j) = \frac{G(L_i, L_j)}{\sum_{L_i} \sum_{L_j} G(L_i, L_j)} \tag{4.2}$$

4.2.2. GLCM simétrica

Como su nombre sugiere, la matriz de co-ocurrencia de niveles de gris es simétrica respecto a la diagonal principal. Esta se define a continuación:

$$G_s(L_i, L_j) = G(L_i, L_j) + G(L_j, L_i) \tag{4.3}$$

donde $G(L_i, L_j)$ se calcula con el vector de desplazamiento $d(d_f, d_c)$ y $G(L_j, L_i)$ se calcula con el vector de desplazamiento $-d(d_f, d_r)$.

El algoritmo 4.2.1 muestra de manera detallada cómo generar la matriz de co-ocurrencia normalizada y simétrica, posterior a la cuantización de imagen.

4.2.3. Descriptores estadísticos obtenidos a partir de la GLCM

Para lograr estimar la similitud entre distintas matrices de co-ocurrencia, Haralick propuso 14 descriptores estadísticos que podrían ser extraídos de las matrices.

Algorithm 4.2.1: Algoritmo para calcular la matriz de co-ocurrencia de niveles de gris.

```
Function CalculaGLCM
    Input: Imagen cuantizada, vector dirección
    Output: GLCM
    total ←0;
    for filas in imagen do
        for columnas in imagen do
            /* Valida que no se excedan las dimensiones de la
               imagen                                              */
            if filas +vectorDir.filas ≥ imagen.filas || columnas
             +vectorDir.columnas ≥ imagen.columnas then
            end
            /* Procede a la siguiente iteración                    */
            continue;
            /* obtiene el valor del pixel de referencia o pivote y
               el valor del pixel dado por el vector dirección     */
            referencia ←imagen (filas,columnas);
            vecino ←imagen (filas +vectorDir.filas,columnas
             +vectorDir.columnas);
            /* Al ser iguales, cuenta una sola vez                 */
            if referencia ==vecino then
                GLCM (referencia,vecino)+=1;
                total +=1;
            end
            /* Para volver simétrica a la matriz cuenta doble y en
               posiciones invertidas                               */
            else
                GLCM (referencia,vecino)+=1;
                GLCM (vecino,referencia)+=1;
                total +=2;
            end
            /* Normaliza la GLCM para que tenga valores entre 0 y 1
               */
            GLCM / =total;
        end
    end
end
```

Dichos descriptores se obtienen a partir de una GLCM normalizada y simétrica. Para los siguientes descriptores, se considera a $p(i,j)$ el valor en el (i,j)-ésimo elemento de la matriz de co-courrencia de niveles de gris.

Contraste

Es una medida de la intensidad o de las variaciones de niveles de gris que ocurren entre el pixel de referencia y su vecino (Zayed and Elnerm, 2015).

$$Contraste = \sum_i \sum_j (i-j)^2 p(i,j) \tag{4.4}$$

Homogeneidad (Inverse Difference Moment)

Mide qué tan cercanos son los elementos de la GLCM a su diagonal (Zayed and Elnerm, 2015). Muestra valores altos para imágenes homogéneas y valores pequeños para imágenes no homogéneas.

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{1+(i-j)^2} p(i,j) \tag{4.5}$$

Entropía

Es el grado de desorden o aleatoriedad presente en una imagen. Este valor es el mayor cuando todos los elementos de la matriz son iguales y pequeño cuando todos los elementos son distintos (Zayed and Elnerm, 2015).

$$Entropia = -\sum_i \sum_j p(i,j) \ln(p(i,j)) \tag{4.6}$$

Segundo Momento Angular

Mide la uniformidad local de los niveles de gris. Cuando los pixeles son muy similares, el valor obtenido sera grande (Zayed and Elnerm, 2015).

$$ASM = \sum_i \sum_j (p(i,j))^2 \tag{4.7}$$

Correlación

Muestra la dependencia lineal de los niveles de gris en la matriz de co-ocurrencia.

$$Correlacion = \sum_i \sum_j p(i,j) \frac{(i-\mu_x)(j-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{4.8}$$

Donde $\mu_x = \sum_i \sum_j ip(i,j)$

$\mu_y = \sum_i \sum_j jp(i,j)$

$\sigma_x = \sqrt{\sum_i \sum_j (i-\mu_x)^2 p(i,j)}$

$\sigma_y = \sqrt{\sum_i \sum_j (i-\mu_y)^2 p(i,j)}$

Disimilitud

$$\sum_i \sum_j p(i,j)|i-j| \tag{4.9}$$

4.3. Patrones binarios locales

Patrones locales binarios (LBP por sus siglas en inglés) son un método robusto para describir la textura de una imagen (Khorsheed and Yurtkan, 2016). Este operador utiliza los ocho vecinos que rodean a un pixel y compara el valor de intensidad de cada pixel vecino con el pixel central. Asigna el valor de cero al vecino si el valor de intensidad que posee es menor que el valor del pixel central, en caso contrario, asigna el valor uno. Finalmente, se genera una etiqueta para el pixel central al interpretar los valores asignados a los vecinos como un número binario de 8 bits, para posteriormente, convertirlo a su equivalente decimal.

La Figura 4.2 muestra una imagen de 3x3 conformada por un pixel central y sus ocho vecinos. Muestra también, los valores asignados a cada vecino tras comparar los valores de intensidad de cada uno con el del pixel central. Por último, se interpreta a la combinación de valores asignados a los vecinos como un número binario, y se obtiene la etiqueta decimal que se asignará al pixel central.

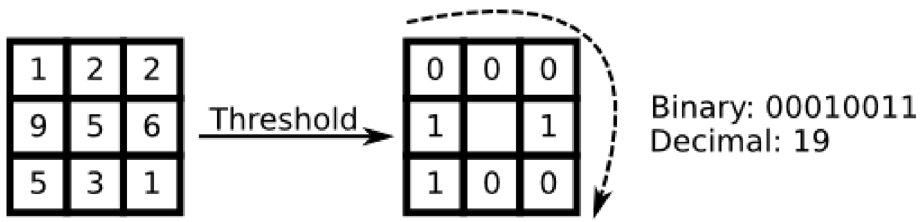


Figura 4.2: Cálculo de la etiqueta para un pixel central, tomando en cuenta a sus ocho vecinos. Imagen tomada de (Wagner, n.d.).

De manera formal, dado un pixel central $pix(x_c, y_c)$, el valor de LBP que se asigna a dicho pixel expresado en foma decimal se define como sigue (Huang et al., 2011):

$$LBP(x_c, y_c) = \sum_{p=0}^{p-1} s(i_p - i_c)2^p \tag{4.10}$$

Donde: i_c e i_p son los valores de intensidad de gris del pixel central y de los pixeles vecinos respectivamente. $s(x)$ se define como:

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

4.3.1. Patrones binarios locales uniformes

Los patrones binarios locales uniformes o **ULBP** (*Uniform Local Binary Patterns*) son una variante de los LBP, solo que en el caso de ULBP, se consideran como patrones uniformes a aquellos que tienen como máximo dos transiciones de 0-1 ó 1-0 (Lahdenoja et al., 2013). Por ejemplo, los patrones 00111000, 11111111, y 11011111 son uniformes. Por otro lado, 01010000, 01001110 ó 10101100 se consideran como patrones no uniformes.

Durante el cálculo del histograma, se genera un bin[1] para cada patrón uniforme, mientras que los patrones no uniformes se consideran en un solo bin. El número de bins o etiquetas requeridos para el histograma ULBP está dado por la siguiente fórmula:

$$bins = p(p-1) + 3 \tag{4.12}$$

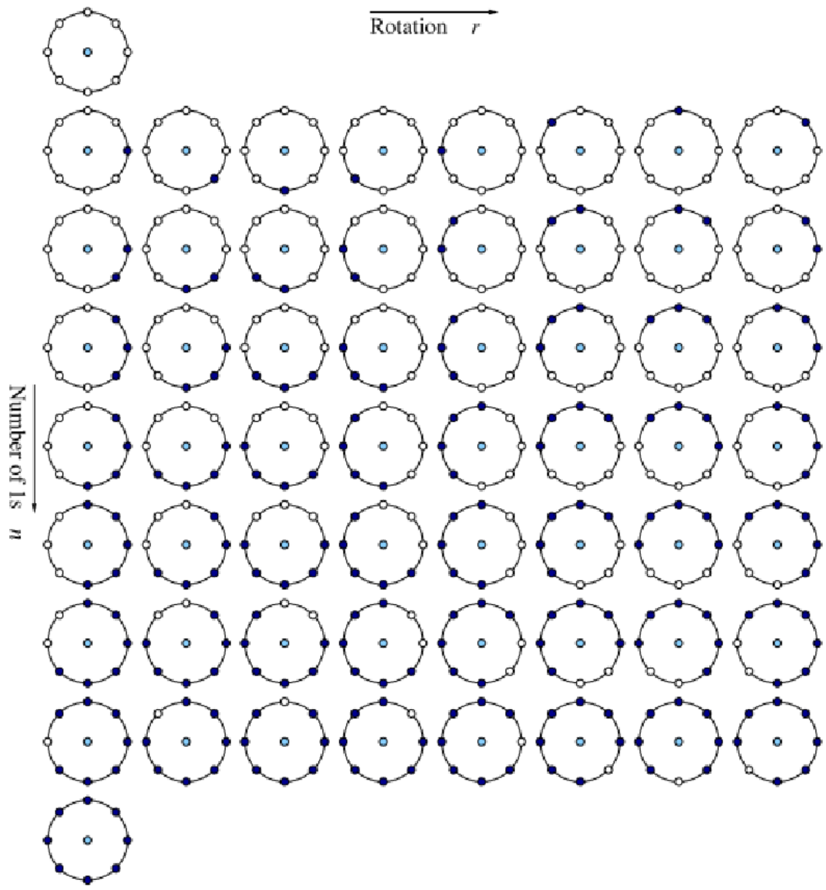


Figura 4.3: Patrones uniformes considerados para ULBP considerando 8 pixeles vecinos. Imagen tomada de (Pietikäinen et al., 2011).

Donde, p es le número de vecinos considerados.

En la Figura 4.3 cada par $U_p(n, r)$ denota un patrón uniforme, donde n es el número de bits con valor igual a uno en el patrón (filas de la Figura 4.3), y r es

[1]Categoría o clase donde se agrupan patrones con características similares.

la rotación del patrón (columnas en la Figura 4.3). Si el vecindario tiene P puntos de muestreo, n varía de 0 a $P + 1$, cuando $n = p + 1$ se considera el bin o etiqueta especial para todos los patrones no uniformes.

Para obtener los patrones uniformes se sigue un procedimiento similar al mostrado en LBP. La diferencia radica en que al calcular el patrón se determina si es o no uniforme. En caso de que sea un patrón uniforme, se asigna a un bin característico, en caso contrario, todos los patrones no uniformes se asignan a un solo bin.

Las razones para no utilizar los patrones no uniformes son las siguientes: Primero, la mayoría de los LBP en imágenes naturales son uniformes, teniendo una presencia de hasta el 90 % respecto a todos los patrones encontrados en una imagen. Segundo, se ha demostrado que los patrones uniformes son más estables, es decir, son menos sensibles a ruido (Pietikäinen et al., 2011).

4.3.2. Patrones binarios locales dominantes

En (Liao et al., 2009) se presenta el concepto de patrones binarios locales dominantes o **DLBP** (*dominant local binary patterns*). De acuerdo a (Liao et al., 2009), la técnica de *dominant local binary patterns* considera los patrones que ocurren con mayor frecuencia al analizar la textura de una imagen. Asimismo (Liao et al., 2009) considera a los **DLBP** como aquellos que representan alrededor del 80 % del total de ocurrencias de los patrones encontrados en una imagen. A diferencia del enfoque tradicional con LBP o ULBP, al usar **DLBP**, el número de patrones no está limitado a un número fijo ya que para dos imagenes distintas, los patrones dominantes pueden ser también distintos (Liao et al., 2009).
Para obtener el histograma de *dominant local binary patterns*, se calcula de manera tradicional el histograma de **LBP**. Posteriormente, este histograma se ordena de forma decreciente, hasta alcanzar el 80 por ciento de ocurrencias del total de ocurrencias de los patrones.

Capítulo 5

Metodología

5.1. Normalización de medias y desviación estándar

Con el propósito de disminuir las variación provocadas durante la adquisición y digitalización de las pinturas, se pretende ajustar los valores de media y desviación estándar de cada pintura al valor promedio de dichos parámetros de las pinturas analizadas. Dado un conjunto Ω de pinturas, se pretende ajustar la media y desviación estándar de cada pintura P_i a la media y desviación estándar promedio de Ω. Sean $\bar{X}_\Omega$ y σ_Ω la media y desviación estándar promedio de Ω respectivamente, se definen de la siguiente forma:

$$\bar{X}\Omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{\bar{X}_i}{N} \tag{5.1}$$

Donde $N = card(\Omega)$ y $\bar{X}_i$ es la media de cada pintura $p_i \in \Omega$

$$\sigma_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i}{N} \tag{5.2}$$

Donde $N = card(\Omega)$ y σ_i es la media de cada pintura $p_i \in \Omega$

5.1.1. Pseudocódigo para ajustar la media y desviación estándar de un conjunto de Imágenes

Algorithm 5.1.1: Algoritmo para calcular la media y desviación estándar promedio de las pinturas estudiadas.

```
Function calc_adjusted_DevMean
    Input: Imagenes a analizar
    Output: Desviación estándar promedio, media promedio para cada canal
            R,G,B
    for i ← 1 to NUM_IMAGENES do
        /* separa la imagen en los canales R,G B                     */
        RGB_channels ←Split(imagen_i);
        /* Acumula la media de cada canal                            */
        meanR ← Mean(RGB_channels.red)+meanR;
        meanG ← Mean(RGB_channels.green)+meanG;
        meanB ← Mean(RGB_channels.blue)+meanB;
        /* Acumula la desviación estándar de cada canal              */
        devR ← std (RGB_channels.red)+devR;
        devR ← std (RGB_channels.green)+devG;
        devR ← std (RGB_channels.blue)+devB;
    end
    /* Calcula los promedios                                         */
    meanR ← meanR/NUM_IMAGENES;
    meanG ← meanG/NUM_IMAGENES;
    meanB ← meanB/NUM_IMAGENES;
    devR ← devR/NUM_IMAGENES;
    devG ← devG/NUM_IMAGENES;
    devB ← devB/NUM_IMAGENES;
end
```

Algorithm 5.1.2: Algoritmo para ajustar las media y desviación estándar de cada canal de las pinturas estudiadas.

```
Function Normailze_images
    Input: Imagenes a normalizar, media y desviación estándar promedio por
           cada canal de color
    Output: Imagenes normalizadas
    for i ← 1 to NUM_IMAGENES do
        /* Separa la imagen en los 3 canales de color R,G,B                */
        RGBChannels ← split (Imagen_i);
        /* Calcula las constantes por las cuales se debe
           multiplicar cada canal para obtener la desviación
           estándar deseada, de acuerdo a lo visto en B.18                  */
        K_r ← avStd.red/std (RGBChannels.red);
        K_g ← avStd.green/std (RGBChannels.green);
        K_b ← avStd.blue/std (RGBChannels.blue);
        normalized_r ← RGBChannels.red*K_r;
        normalized_g ← RGBChannels.green*K_g;
        normalized_b ← RGBChannels.blue*K_b;
        /* Ajusta las medias de cada canal                                  */
        /* Sustrae la media del canal ajustado y agrega la media
           deseada                                                          */
        normalized_r ←normalized_r-mean (nR)+avMeans.red;
        normalized_g ←normalized_g-mean (nG)+avMeans.green;
        normalized_b ←normalized_b-mean (nB)+avMeans.blue;
        /* Combina nuevamente, los tres canales normalizados                */
        normalized_image ← merge (normalized_r, normalized_g,normalized_b);
    end
end
```

(a) San juan Bautista.

(b) Ginevra.

(c) Mujer con Ermiño.

(d) Leda y el Cisne.

Figura 5.1: Ejemplo de pinturas antes de ajustar sus valores de media y desviación estándar.

(a) San juan Bautista.

(b) Ginevra.

(c) Mujer con Ermiño.

(d) Leda y el Cisne.

Figura 5.2: Pinturas después de ajustar media y desviación estándar.

5.2. Generación del elipsoide que mejor ajusta la distribución de color

5.2.1. Visualización de la distribución de color

El algoritmo para calcular el histograma de color de una pintura se presenta a continuación.

Algorithm 5.2.1: Algoritmo para generar el histograma de una imagen a color.

```
Function GeneraHistograma3D
    Input: Imagen
    Output: Histograma de la imagen
    foreach pixel ∈ Imagen do
        pixel =readPixel (Imagen);
        Histograma[pixel.red][pixel.green][pixel.blue] +=1;
    end
end
```

5.2.2. Cálculo y visualización de ejes principales

En lugar de utilizar la matriz de co-ocurrencia, como normalmente se hace al realizar análisis de componentes principales sobre un conjunto de datos, en esta ocasión se decidió utilizar el centro de masa de la distribución de color y el tensor de inercia asociado a la misma. Lo anterior tiene como objetivo otorgar mayor peso a los pixeles que aparecen con mayor frecuencia en la pintura.

Centro de Masa y tensor de inercia

En el capítulo 3 (ecuaciones 3.13 y 3.14) se discutió el cálculo del tensor de inercia y el centro de masa de la distribución de color de una pintura. Con ayuda de **openCV** se extraen del tensor de inercia los valores y vectores propios asociados (*eigenvalores* y *eigenvectores*). Los valores propios del tensor de inercia se expresan a través de una matriz de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

5.2.3. Factores de escala para el elipsoide

Los semiejes del elipsoide de inercia que ajusta a la distribución de color se definen a continuación:
$a = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad b = \frac{2}{\sqrt{\lambda_2}}, \quad c = \frac{2}{\sqrt{\lambda_1}}$

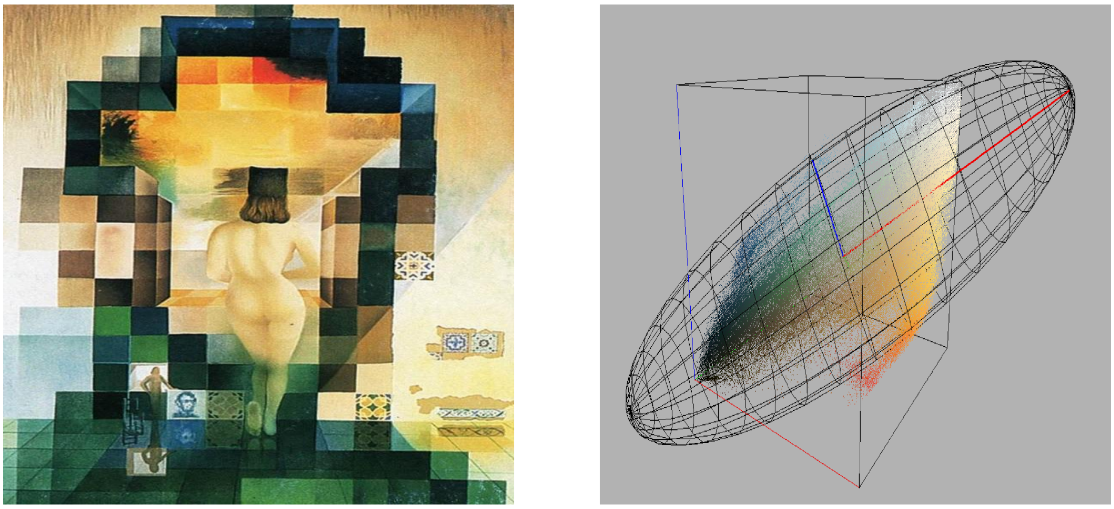
Dado que el elipsoide rara vez ajusta al objeto original o volumen de interés, este requiere ser escalado de alguna manera. Un criterio de ajuste es que el volumen del elipsoide concuerda con el volumen del objeto original, obteniendo así:

$$escala = \left(\frac{3Volumen(O)}{4\pi abc} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{5.4}$$

Donde O es el objeto original.

5.2.4. Visualización del elipsoide que mejor ajusta y ejes principales

Tras calcular el centroide y los ejes principales de la distribución de color de una pintura, se procede a visualizarlos. En la Figura 5.3 se muestran los ejes principales y el elipsoide que mejor ajusta a la distribución de color. Cabe mencionar, que el origen del sistema de ejes principales se encuentra en el punto definido por el centro de la distribución.



(a) *Gala contemplando el Mediterráneo.* (1976)

(b) Distribución de color, ejes principales y elipsoide que mejor ajusta

Figura 5.3: *Gala contemplando el Mediterráneo* y distribución de color con ejes principales y elipsoide que mejor ajusta.

Alineación del elipsoide con los ejes principales

Debido a que se desconocen inicialmente las rotaciones necesarias para ir del sistema XYZ al sistema definido por los ejes principales de la distribución de color de la pintura, se cuenta de inicio, con un elipsoide centrado en el origen y orientado respecto a alguno de los ejes coordenados. La Figura 5.4 muestra al elipsoide asociado a la distribución de color sin estar alineado con los ejes principales.

Para obtener los ángulos de rotación necesarios para alinear el elipsoide correctamente, se realiza un procedimiento similar al visto en el capítulo 3, en el apartado de **Rotación respecto a un eje arbitrario** 3.7.3. En la Figura 5.4 se observa que

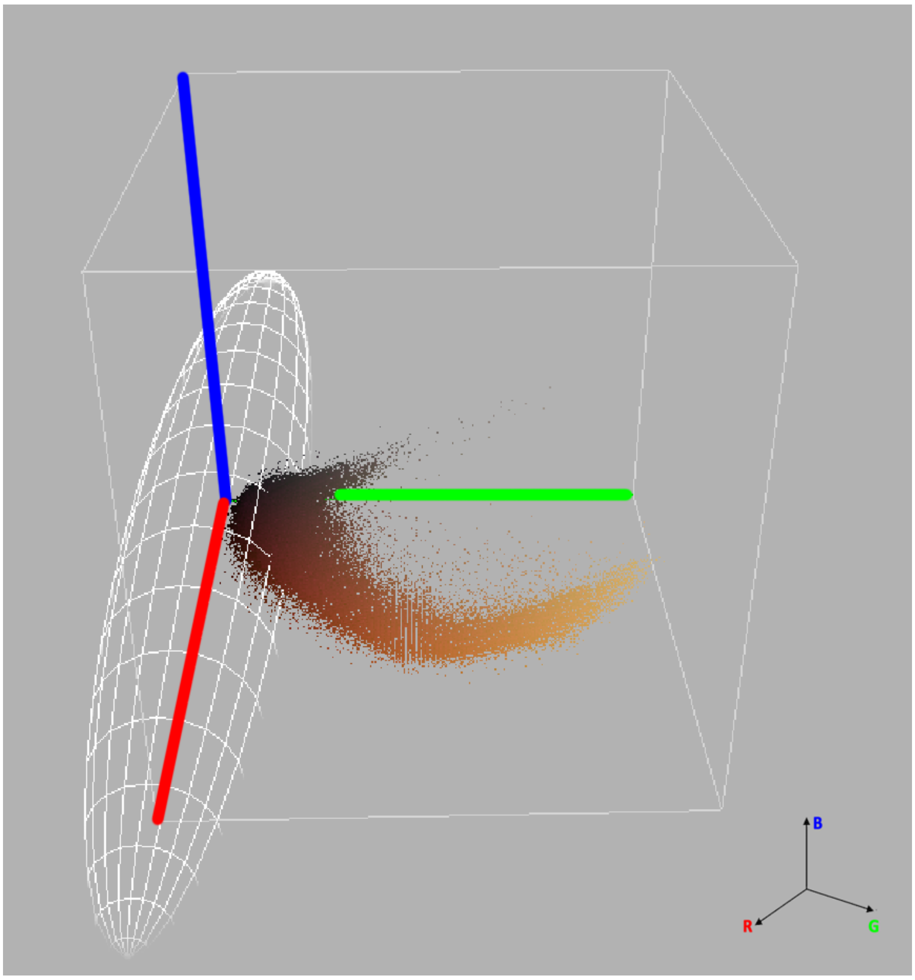


Figura 5.4: Elipsoide centrado en el origen.

el semieje mayor del elipsoide está alineado con el eje coordenado Z. Por está razón, el *eigenvector* mayor del sistema de ejes principales será alineado con el eje coordenado Z para el cálculo de las rotaciones. El procedimiento utilizado se describe a continuación:

Traslación del origen del sistema formado por los ejes principales al origen del sistema XYZ Se aplica una traslación $t = (-x_c, -y_c, -z_c)$, donde x_c, y_c, z_c son las coordenadas del origen del sistema formado por los vectores propios asociados a la distribución de color.

Cálculo de la rotación respecto al eje coordenado X Se toma al *eigenvector* de mayor longitud y se hace coincidir con el plano XZ, a través de una rotación respecto al eje coordenado X, de la misma forma que en **Rotación respecto a un eje arbitrario** 3.7.3. De la ecuación 3.31, se sabe que la matriz para alinear un vector unitario con dirección cualquiera al plano XZ es la siguiente:

$$G_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{d} & \frac{b}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{d} & \frac{c}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Donde b y c son la segunda y tercera componentes del vector unitario y $d = \sqrt{b^2 + c^2}$. Se tiene entonces que $\cos(\varphi) = \frac{c}{d}$, por lo tanto, el ángulo de rotación respecto a X se define como:

$$rot_x = \arccos(\frac{c}{d}) \tag{5.6}$$

Alineación con el eje coordenado Z El *eigenvector* que ahora yace en el plano XZ, debe ser alineado con el eje coordenado Z. Para esto, es necesario aplicar un giro con respecto al eje coordenado Y. Dicha matriz se definió en 3.36 y luce como sigue:

$$G_y = \begin{pmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde a es el primer componente del vector que se va a alinear. En el caso de esta matriz se tiene que $\cos(\alpha) = d$, entonces el ángulo de rotación rot_y necesario para alinear el vector contenido en el plano XZ esta definido como:

$$rot_y = \arccos(d) \tag{5.7}$$

Después de realizar las transformaciones anteriores se obtiene al *eigenvector* con mayor valor perfectamente alienado con el eje coordenado Z, sin embargo, los dos ejes restantes aún no coinciden con el sistema coordenado XYZ. Se observó que el segundo eje principal se quedó contenido en el plano XZ. Es necesaria una rotación más con respecto al eje Z para que los ejes restantes queden alineados. El ángulo de rotación rot_z se calcula como sigue: Sea $pa2$ el vector unitario que contiene la dirección del segundo eje principal asociado a la distribución de color y sea, $rotPA2$ el mismo vector unitario tras aplicarle las rotaciones rot_x y rot_y, es decir,

$$rotPA2 = rot_y rot_x pa2 \tag{5.8}$$

Para calcular el ángulo θ que existe entre el segundo eje principal y el eje coordenado Y se obtienen las componentes del segundo eje principal sobre el eje X y el eje Y. Se tiene entonces que:
$\tan(rot_z) = \tan(\frac{componenteY}{componenteX})$ por lo tanto:

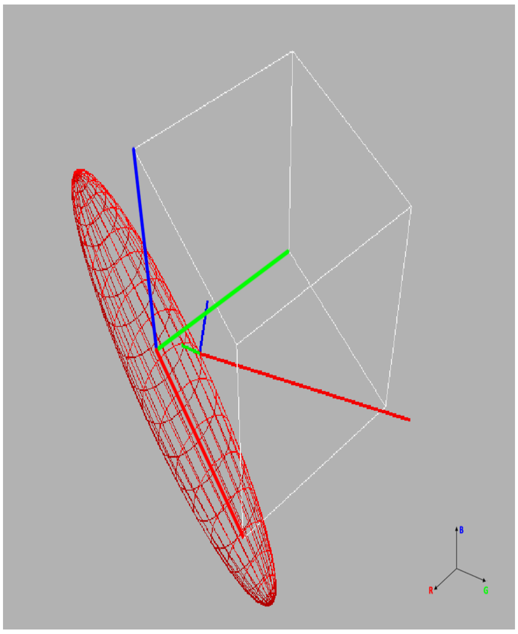
$$rot_z = \arctan(\frac{componenteY}{componenteX}) \tag{5.9}$$

Tras la última rotación rot_z el sistema de ejes principales queda alineado al sistema coordenado XYZ.

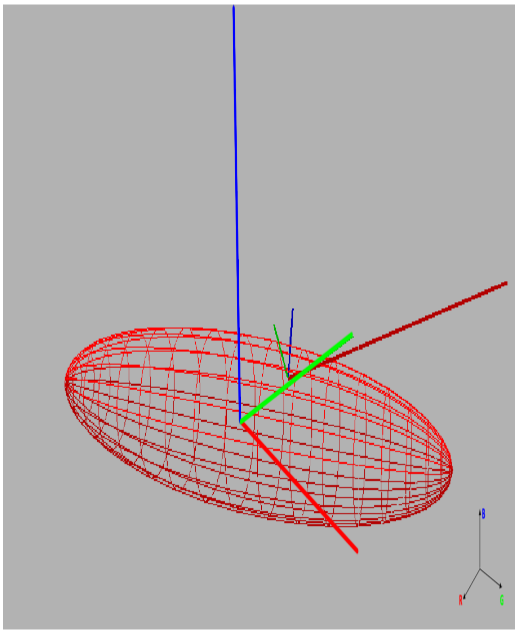
Aplicar rotaciones al elipsoide Finalmente, para obtener el elipsoide como se desea, se aplican las rotaciones en sentido inverso y ángulos invertidos, resultando de la siguiente manera:

$$elipsoideRotado = (traslacion)^{-1}(-rot_x)(-rot_y)(-rot_Z)elipsoideOriginal \quad (5.10)$$

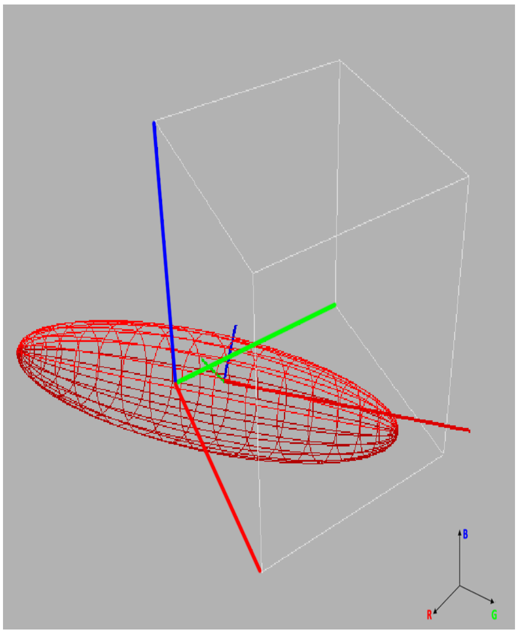
La Figura 5.5 muestra las rotaciones aplicadas al elipsoide sobre cada eje coordenado para alinearlo con lo ejes principales obtenidos a partir de la distribución de color. Se muestra también la traslación efectuada para llevar al elipsoide desde el origen del sistema XYZ al origen del sistema de ejes principales. Se omitió a propósito la visualización de la distribución de color, para observar con mayor facilidad el proceso seguido para alinear el elipsoide con el sistema de ejes principales.



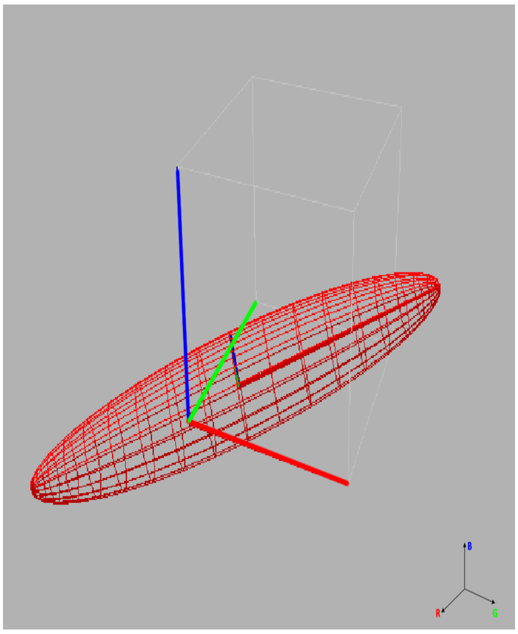
(a) Elipsoide en origen del sistema XYZ tras aplicarle la rotación $rotZ$ alrededor del eje Z.



(b) Elipsoide en el origen del sistema XYZ tras aplicarle la rotació $rotY$ alrededor del eje Y.



(c) Elpisoide en el origen del sistema tras aplicarle la rotacion $RotX$ al rededor del eje X.



(d) Traslación del elipsoide desde el origen del sistema XYZ al origen del sistema de ejes principales.

Figura 5.5: Inicialmente se muestra al elipsoide ubicado en el origen del sistema XYZ y se muestra también, al sistema de ejes principales de la distribución de color. A lo largo de las subFiguras se muestra el proceso que se sigue para alienar el elipsoide con el sistema de ejes principales de la distribución de color. Las subFiguras a), b) y c) muestran el orden de las rotaciones aplicadas . La subFigura d) muestra la traslación desde el origen del sistema XYZ al origen del sistema de ejes principales

5.3. Mapa de color de la superficie generada a partir de la distribución de color

Para generar el mapa de color de la superficie asociada a la distribución de color, se requiere conocer la posición de cada vértice de la superficie respecto al elipsoide ajustado. Si el vértice se encuentra fuera del elipsoide, este será pintado color azul. Al contrario, si el vértice se encuentra dentro del elipsoide, el color adquirido será rojo. Los puntos sobre la superficie, serán pintados de color blanco.
Ya sea que el vértice esté dentro o fuera del elipsoide, mientras más alejado de la superficie se encuentre, el color asignado será más intenso. Por otro lado, mientras más cercano se encuentre al contorno, el color asignado será degradado gradualmente hacia el color blanco. El proceso para generar el mapa de color se describe a continuación:

1. **Voxelizar el elipsoide**: almacenar la información del voxelizado en una matriz. Calcular el complemento de dicha matriz. Como se mencionó en el capítulo 3, voxelizar el elipsoide que mejor ajusta permite calcular el campo de distancia, el cual permitirá asignar el color a la superficie generada a partir de la distribución de color.

2. Calcular el **campo de distancia con signo** a partir de la matriz de voxelizado y la matriz de voxelizado complemento.

3. Con la información contenida en el campo de distancia con signo, **asignar colo**r rojo a los vértices de la superficie que se encuentren dentro del elipsoide. Mientras más se alejen de la superficie y se acerquen al centro del elipsoide, el color deberá ser más intenso. Los elementos que se encuentren en la superficie serán color blanco. Pintar de color azul los elementos que se encuentren fuera del elipsoide, mientras mas alejados de la superficie, el color deberá ser más intenso.

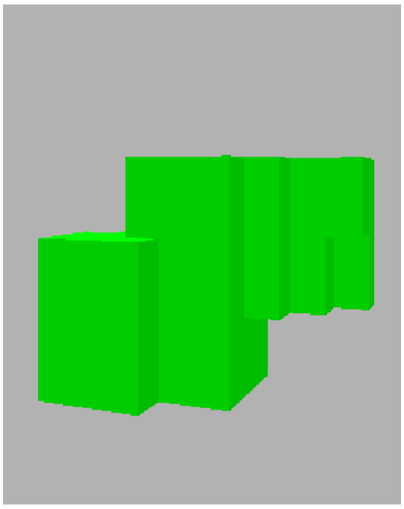
4. **Visualizar** la superficie con el mapa de color correspondiente.

5.3.1. Voxelizado del elipsoide

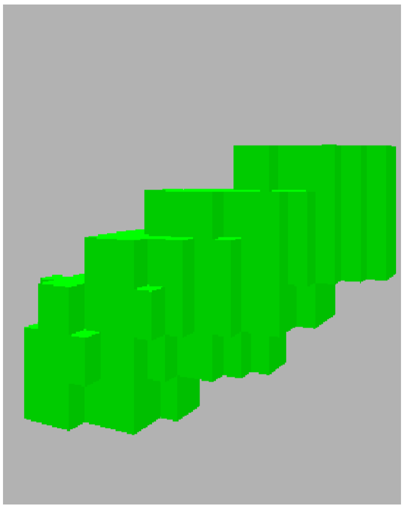
El pseudocódigo del algoritmo empleado para voxelizar al elipsoide se muestra a continuación:

En el algoritmo 5.3.1 se genera una caja englobante por cada triángulo perteneciente al elipsoide. Posteriormente, se detectan a aquellos voxeles que coinciden, al menos, parcialmente con la caja englobante del triángulo. Dichos voxeles se consideran como parte del elipsoide.

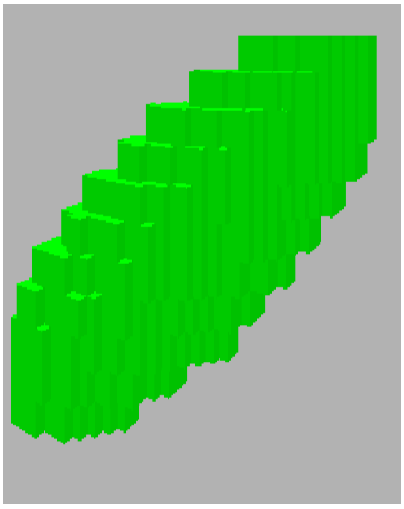
La Figura 5.6 muestra el resultado de *voxelizar* el elipsoide a diferentes resoluciones.



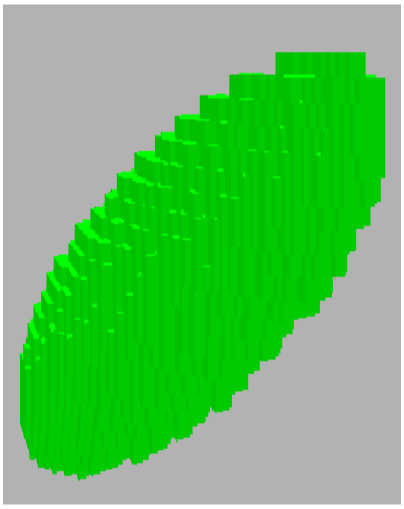
(a) 8 subdivisiones.



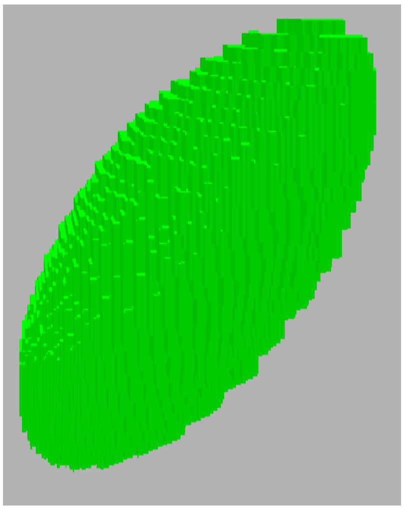
(b) 16 subdivisiones.



(c) 32 subdivisiones.



(d) 64 subdivisiones.



(e) 128 subdivisiones.

Figura 5.6: a) Elipsoide voxelizado utilizando 8 subdivisiones. b) Elipsoide voxelizado utilizando 16 subdivisiones. c) Elipsoide voxelizado utilizando 32 subdivisiones. d) Elipsoide voxelizado utilizando 64 subdivisiones. e) Elipsoide voxelizado utilizando 128 subdivisiones.

Algorithm 5.3.1: Algoritmo para voxelizar una malla de triángulos

```
Function voxelizado
    Input: Matriz para representar al objeto voxelizado inicializada en ceros,
           malla de traingulos del modelo a voxelizar
    Output: Matriz que representa al objeto voxelizado
    foreach triangle in list-of-triangles do
        /* Calcula la caja englobante para cada triángulo que
           compone la malla                                      */
        triangleBoundingBox ←calcTriangleBoundingBox (triangle);
        /* Calcula los voxeles con los cuales se traslapa la caja
           englobante de cada triángulo                          */
        VoxelsToPaint ←calcIntersectedVoxels (triangleBoundingBox);
        /* pinta los voxeles con los que se traslapa la caja
           englobante de cada triángulo                          */
        paintVoxels (VoxelsToPaint);
    end
end
```

Algoritmo para rellenar el interior del elipsoide voxelizado

Para rellenar el interior del elipsoide voxelizado se utilizará una versión en tres dimensiones del algoritmo 3.10.1. Para evitar problemas asociados a la recursión, el algoritmo 5.3.3 utiliza una pila independiente para simular la recursión.

5.3.2. Campo de distancia

El campo de distancia con signo *signedEdt* se calcula de la siguiente manera: Sea MV la matriz que contiene la información sobre los voxeles del elipsoide, y sea, MV^c la matriz complemento de MV. El campo de distancia *signedEdt*, está dado por:

$$signedEdt = bwdist(MV) - bwdist(MV_c) \tag{5.11}$$ [1]

5.3.3. Cálculo del mapa de color

Antes de calcular el mapa de color, es necesario generar la superficie que será pintada, a partir de los puntos que conforman la distribución de color de la pintura. Con ayuda del software **Amira**, se genera la superficie como se observa en la Figura 5.7. Posteriormente, dicha superficie se exporta y es cargada al programa principal.

[1] Función de MatLab que permite calcular el campo de distancia.

Algorithm 5.3.3: Algoritmo flood fill 3D que utiliza una pila para simular la recursión

```
Function floodFill
    Input: Matriz de voxeles a rellenar, semilla(x,y,z)
    Output: Matriz rellenada
    matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y,semilla.z)=1;
    pila.push(semilla);
    while !pila.vacia do
        semilla ←pila.pop();
        /* Utilizando 6-vecindad, revisa a los 6 vecinos que no
           están pintados                                        */
        /* vecino izquierda                                      */
        if matrizVoxeles (semilla.x-1,semilla.y,semilla.z)==0 then
            matrizVoxeles (semilla.x-1,semilla.y,semilla.z)←1;
            pila.push(semilla (x-1,y,z));
        end
        /* vecino derecha                                        */
        if matrizVoxeles (semilla.x+1,semilla.y,semilla.z)==0 then
            matrizVoxeles (semilla.x+1,semilla.y,semilla.z)←1;
            pila.push(semilla (x+1,y,z));
        end
        /* vecino arriba                                         */
        if matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y+1,semilla.z)==0 then
            matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y+1,semilla.z)←1;
            pila.push(semilla (x,y+1,z));
        end
        /* vecino abajo                                          */
        if matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y-1,semilla.z)==0 then
            matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y-1,semilla.z)←1;
            pila.push(semilla (x,y-1,z));
        end
        /* vecino frente                                         */
        if matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y,semilla.z+1)==0 then
            matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y,semilla.z+1)←1;
            pila.push(semilla (x,y,z+1));
        end
        /* vecino atras                                          */
        if matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y,semilla.z-1)==0 then
            matrizVoxeles (semilla.x,semilla.y,semilla.z-1)←1;
            pila.push(semilla (x,y,z-1));
        end
    end
end
```

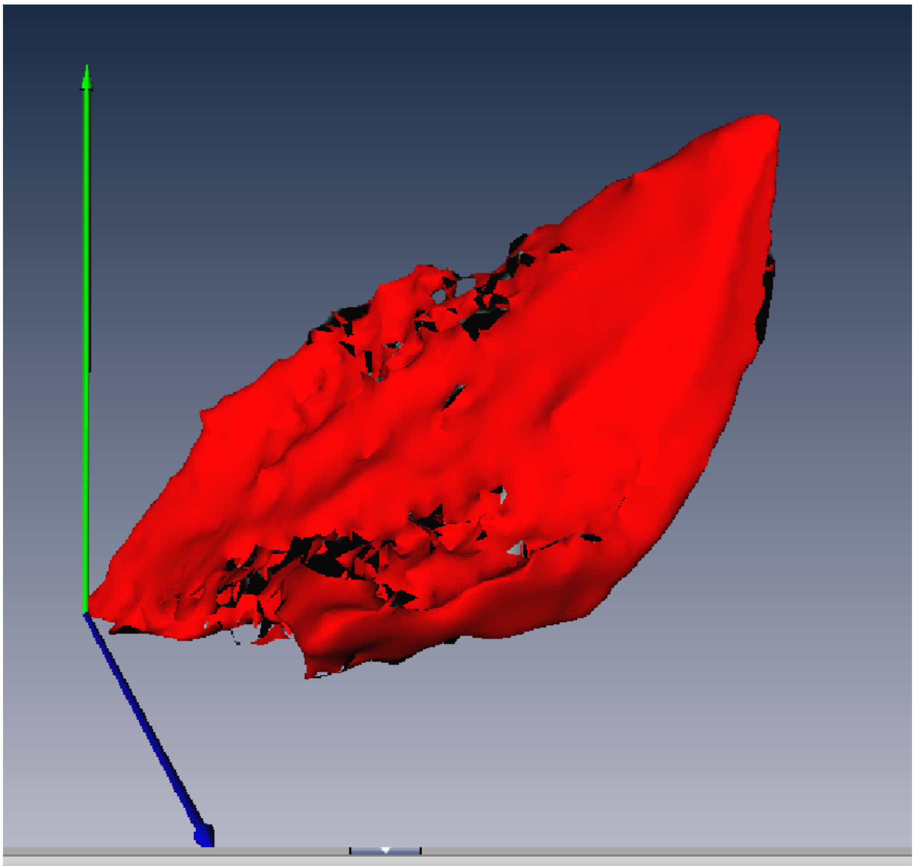


Figura 5.7: Superficie generada a partir de la distribución de color utilizando el software Amira.

En el algoritmo 5.3.4 los colores fueron calculados por vértice. Para asignar el color al resto del triángulo se utiliza un *shader* que se encarga de interpolarlos.

La Figura 5.8 muestra la pintura *Gala contemplando el Mediterráneo* (1976) a la cual se le calculará el mapa de color. Las Figuras 5.9 y 5.10 muestran, desde diferentes perspectivas, el proceso que se sigue para asignar el mapa de color a la superficie generada a partir de la distribución de color de la pintura. Primero, en ambas Figuras se muestra la distribución de color con los ejes principales. En segundo lugar, se muestra la distribución de color rodeada por el elipsoide que mejor ajusta. Finalmente aparece la superficie con el mapa de color y el elipsoide que mejor se ajusta.

Algorithm 5.3.4: Algoritmo para calcular el color por vértice

```
Function calcMapaColor
    Input: Vertices de la superfice, campo de distancia del elipsoide
    Output: color por vértice
    /* Obtiene los valores máximo y mínimo de la matriz de
       distancias                                               */
    max-val ←distanceTransformMatrix.min;
    max-val ←distanceTransformMatrix.min;
    /* Por cada vértice en el modelo de la superficie           */
    foreach vertex ∈ bananoidModel do
        /* Transforma las coordenadas del vértice a su equivalente
           en coordenadas de la matriz de distancia             */
        VoxCoord ←transformInVoxelCoords (vertex);
        distance ←distanceTransformMatrix (VoxCoord);
        /* Si la distancia al elipsoide es cero, asigna color
           blanco                                               */
        if distance ==0 then
            color =color (1.0,1.0,1.0)
        /* Si la distancia es mayor a cero, se encuentra fuera del
           elipsoide, asigna color azul                         */
        else if distance >0 then
            atenuacion ←distance/max-val;
            /* Mientras más alejado esté el vértice del elipsoide
               más intenso será el tono azul                    */
            color ←color (1-atenuacion,1-atenuacion,1.0)
        /* el vértice está dentro del elipsoide,asigna color rojo
           */
        else if distance <0 then
            atenuacion ←distance/max-val;
            /* Mientras más hacia el centro del elipsoide esté el
               vértice, más intenso será el tono rojo           */
            color ←color (1.0,1-atenuacion,1-atenuacion)
    end
end
```

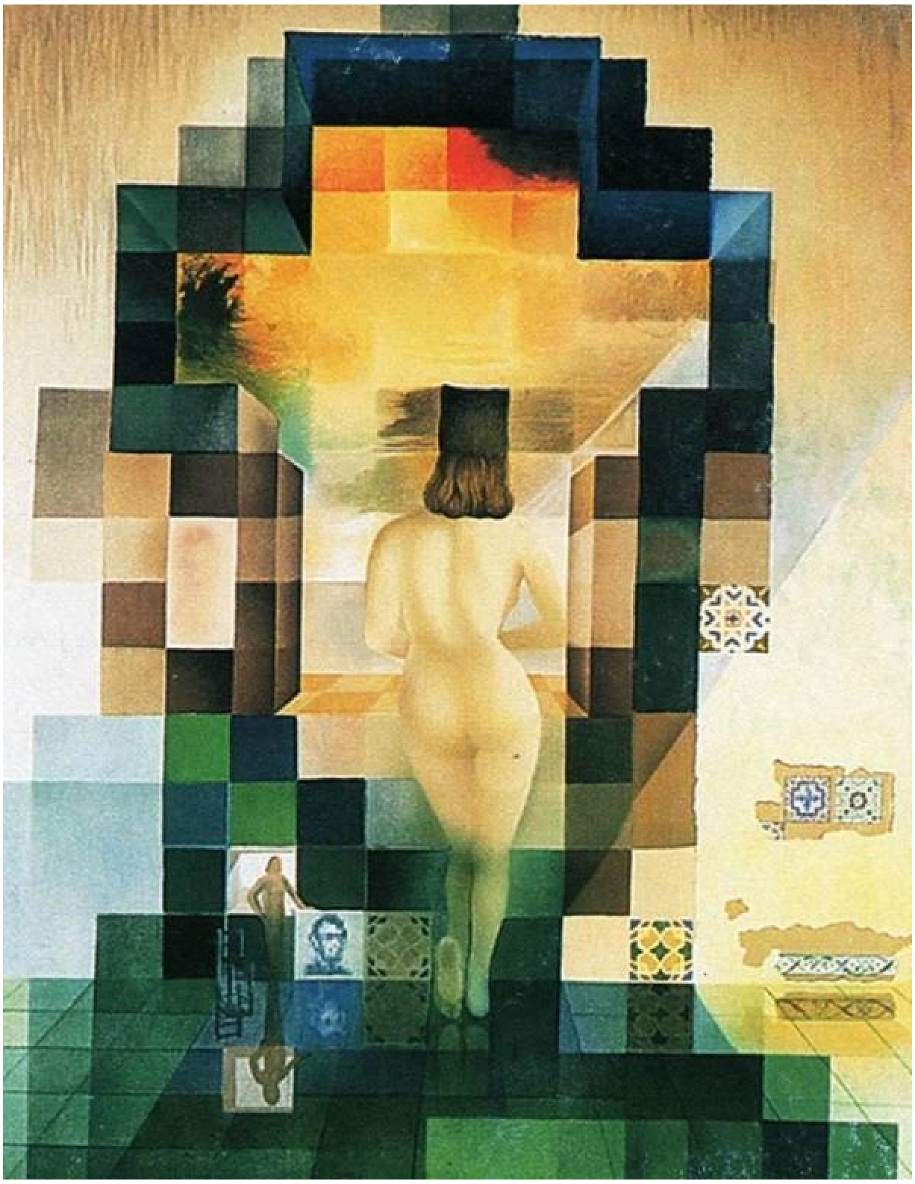
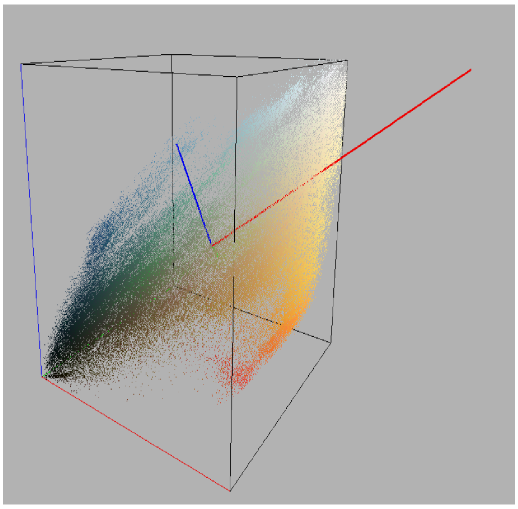
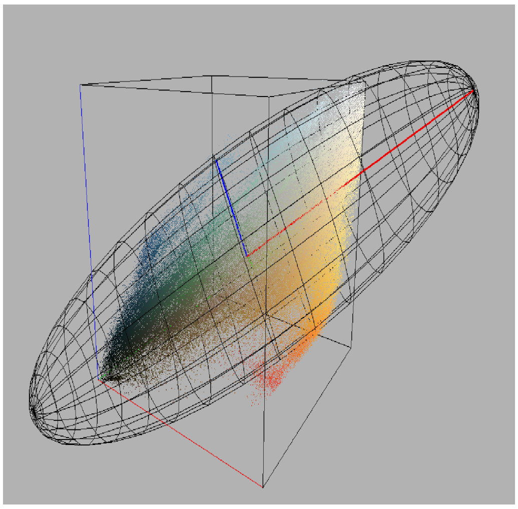


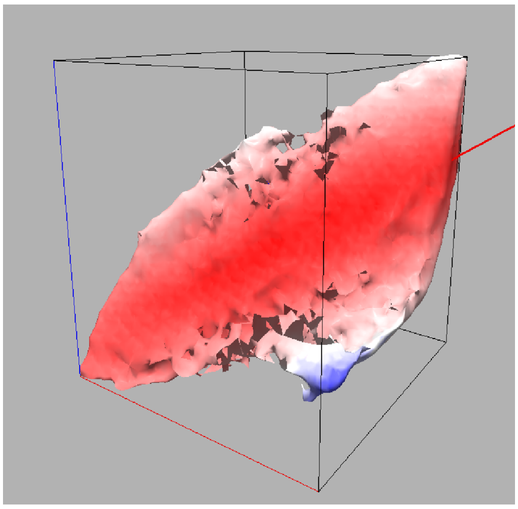
Figura 5.8: *Gala contemplando al Mediterráneo* (1976).



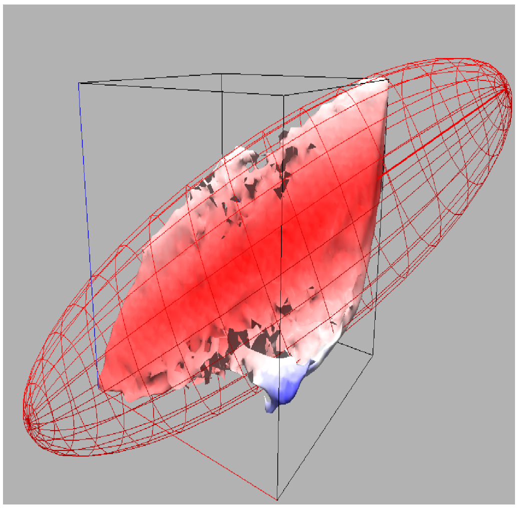
(a) Distribución de color y ejes principales de la pintura en el espacio RGB.



(b) Distribución de color y elipsoide que mejor ajusta.

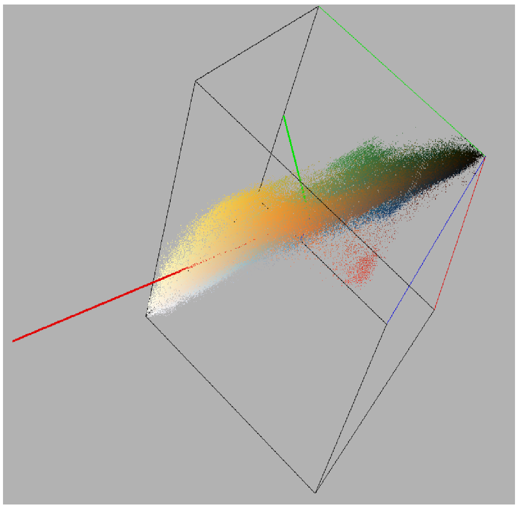


(c) Mapa de color de la superficie generada a partir de la distribución de color.

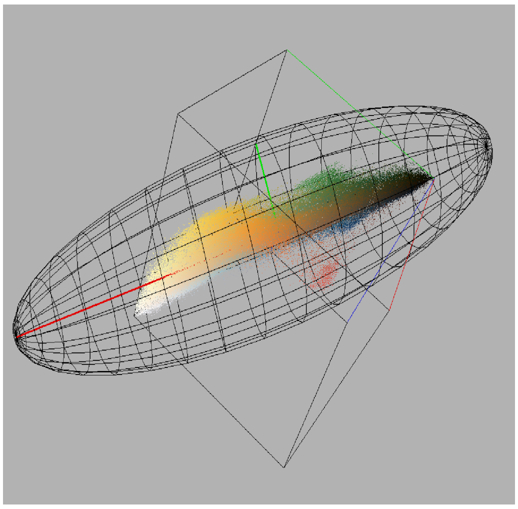


(d) Mapa de color de la superficie generada a partir de la distribución de color y elipsoide que mejor ajusta.

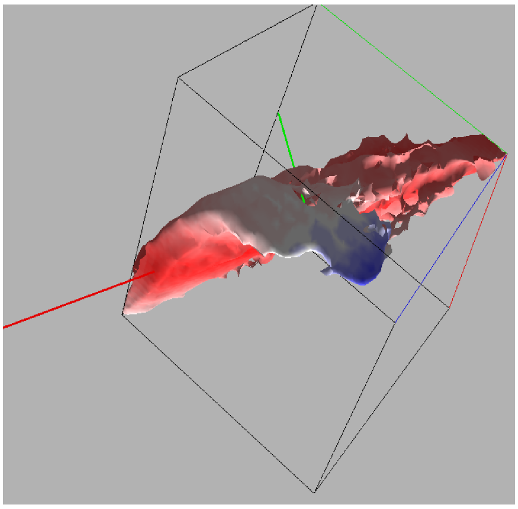
Figura 5.9: Proceso de cálculo del mapa de color para la pintura *Gala contemplando el Mediterráneo* (1976).



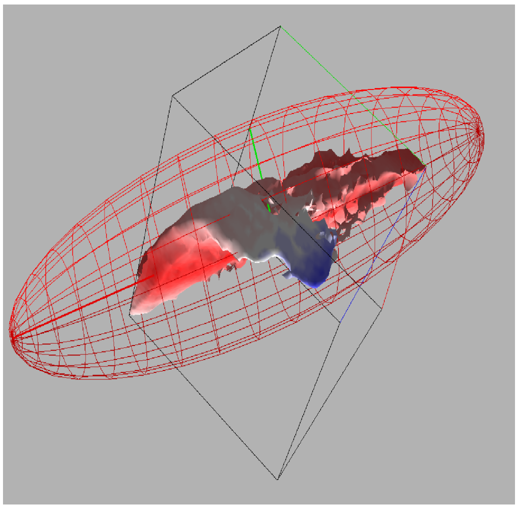
(a) Distribución de color y ejes principales de la pintura en el espacio RGB.



(b) Distribución de color y elipsoide que mejor ajusta.



(c) Mapa de color de la superficie generada a partir de la distribución de color.



(d) Mapa de color de la superficie generada a partir de la distribución de color y elipsoide que mejor ajusta.

Figura 5.10: Proceso de cálculo del mapa de color para la pintura *Gala contemplando el Mediterráneo* (1976).

5.3.4. Características asociadas a la distribución de color y al elipsoide ajustado

Además de generar el elipsoide ajustado y el mapa de color a cada superficie a partir de la distribución de color, es posible calcular ciertas características o descriptores que podrían ayudar a describir con mayor precisión o detalle la distribución de color de una pintura. Éstos descriptores se enumeran a continuación:

Esfericidad del elipsoide

La esfericidad mide qué tan redonda es una forma. La esfericidad es una razón, por lo tanto carece de dimensiones. Esta puede ser calculada para cualquier objeto tridimensional mientras se conozca el área y el volumen de la misma (Robinson, 2017).
La esfericidad se define como sigue:

$$\psi = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}(6V_p)^{\frac{2}{3}}}{A_p} \tag{5.12}$$

Donde V_p es el volumen del objeto y A_p es el área.

Dimensión fractal

Utilizando la versión 3D del algoritmo *Box Counting* que se mencionó en el capítulo 3, se calcula la dimensión fractal de la distribución de color[2].

Distancia al centroide promedio

Para cada pintura se calcula el centroide o centro de masa de la distribución de color. Al analizar un grupo de pinturas, se calcula el centroide promedio y posteriormente la distancia euclidiana de cada centroide al centroide promedio, con la finalidad de observar qué tanto varían los centroides de las pinturas estudiadas.

Ángulos de desviación respecto al eje principal promedio

Para todas las pinturas se calculan tres ejes principales, al aplicar la técnica de **análisis de componentes principales** a la distribución de color. Para cada pintura se detecta al eje principal con mayor *eigenvalor* (aquel en el que existe mayor varianza) y se calcula el eje principal promedio para cada grupo de pinturas. Finalmente, se obtiene el ángulo existente entre el **eje principal promedio** y el eje principal con mayor *eigenvalor* de cada pintura. El objetivo de este descriptor es tratar de observar si un pintor varía el uso de color en direcciones similares o direcciones completamente diferentes.

5.3.5. Histograma de 64 colores

Para tratar de caracterizar el uso de color en cada pintura, en lugar de utilizar un histograma de 256^3 colores, se generó un histograma con solo 64 colores al dividir al cubo que define el espacio de color RGB en cuatro partes equidistantes por cada dimensión, resultando en 4^3 colores.
La Figura 5.11 muestra 4 cortes realizados al espacio RGB. La Figura 5.12 presenta de manera detallada la subdivisión de cada corte mostrado en la Figura 5.11, para obtener las 64 regiones mencionadas.

[2]El algoritmo comienza con un tamaño de caja=256 y finaliza con un tamaño de caja =2.

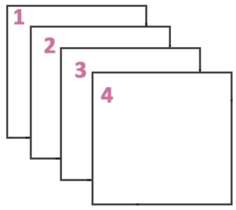


Figura 5.11: División del espacio RGB en 64 regiones.

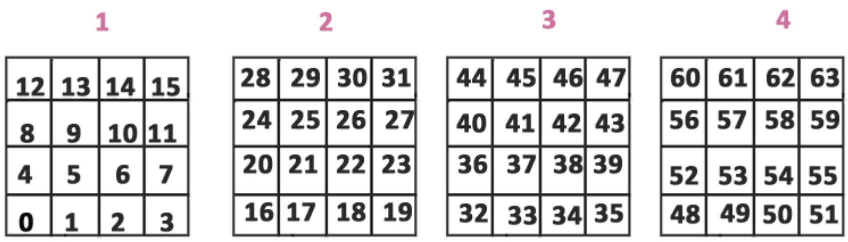


Figura 5.12: Descripción detallada de la división del espacio RGB en 64 regiones.

5.3.6. Brillo y oscuridad en una pintura

Con el objetivo de tratar determinar si un artista utiliza tonos claros, medios u obscuros en sus pinturas, a partir del canal *value* del espacio **HSV** se generó un histograma de 5 *bins*: **región muy oscura** [0-50], **región oscura** [51-101], **región media** [102-152], **región brillante** [153-203], **región muy brillante** [204-255].

5.3.7. Error cuadrático medio

El error cuadrático medio es una métrica que permite medir qué tan bien se ajusta un modelo a la realidad. Utilizando este concepto y con ayuda del campo de distancia se calcula el **RSME** *(root square mean error)* para cada superficie generada a partir de la distribución de color respecto al elipsoide ajustado. Lo anterior permite cuantificar qué tan bien se ajusta el modelo a cada superficie y puede mostrar diferencias significativas entre los pintores estudiados. El **RSME** se define como sigue:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - Y_i)^2}{n}} \tag{5.13}$$

Donde $\hat{Y}$ es el valor de la predicción y Y es el valor real.

5.4. Imágenes basadas en los descriptores de GLCM

En (Hall-Beyer, 2017) se describe la metodología para generar una imagen basada en alguno los descriptores [3] obtenidos a partir de la matriz de co-ocurrencia. Generar esta imagen permite obtener la descripción textural por cada pixel en cierta región o vecindario.

El proceso para generar las imágenes a partir de los descriptores se presenta a continuación:

1. Reducir los niveles de gris presentes en la imagen a analizar (re-cuantización).
2. Definir una ventana o región de interés y sus dimensiones. Para facilitar los cálculos, se recomienda que las dimensiones de la ventana sean impares.
3. Hacer coincidir una de las esquinas de la ventana con el origen de la imagen a analizar.
4. Calcular la matriz de co-ocurrencia considerando solo los pixeles que están dentro de la región definida por la ventana.
5. Calcular los descriptores asociados a la matriz de co-ocurrencia.
6. Asignar el valor del descriptor al pixel central de la región de interés.
7. Desplazar la ventana un pixel y repetir el proceso desde el punto número dos hasta recorrer la imagen completa.

La Figura 5.13 ilustra de manera sencilla el procedimiento anterior.

[3] También conocida como imagen paramétrica, dado que en la literatura un descriptor suele denominarse "parámetro". Sim embargo, al convertirse en atributo local se puede decir que juega el rol de un parámetro cuya variación se visualiza.

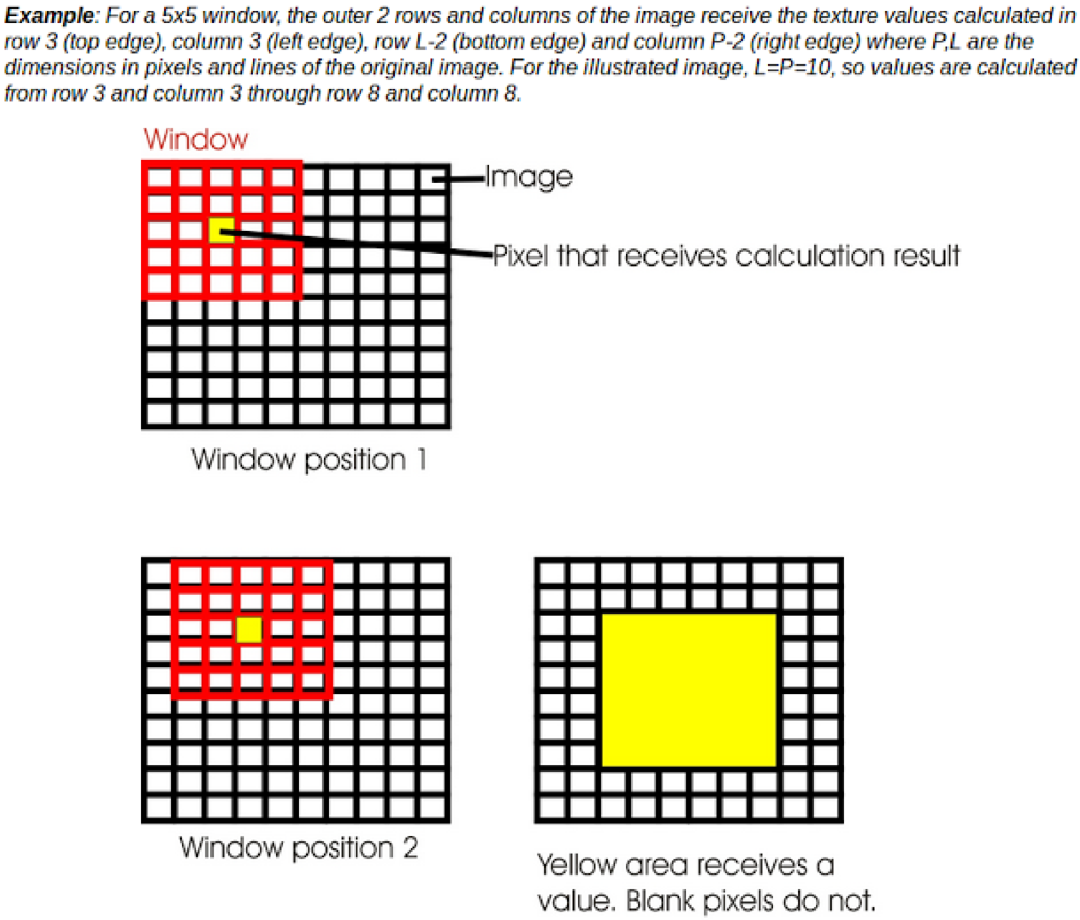
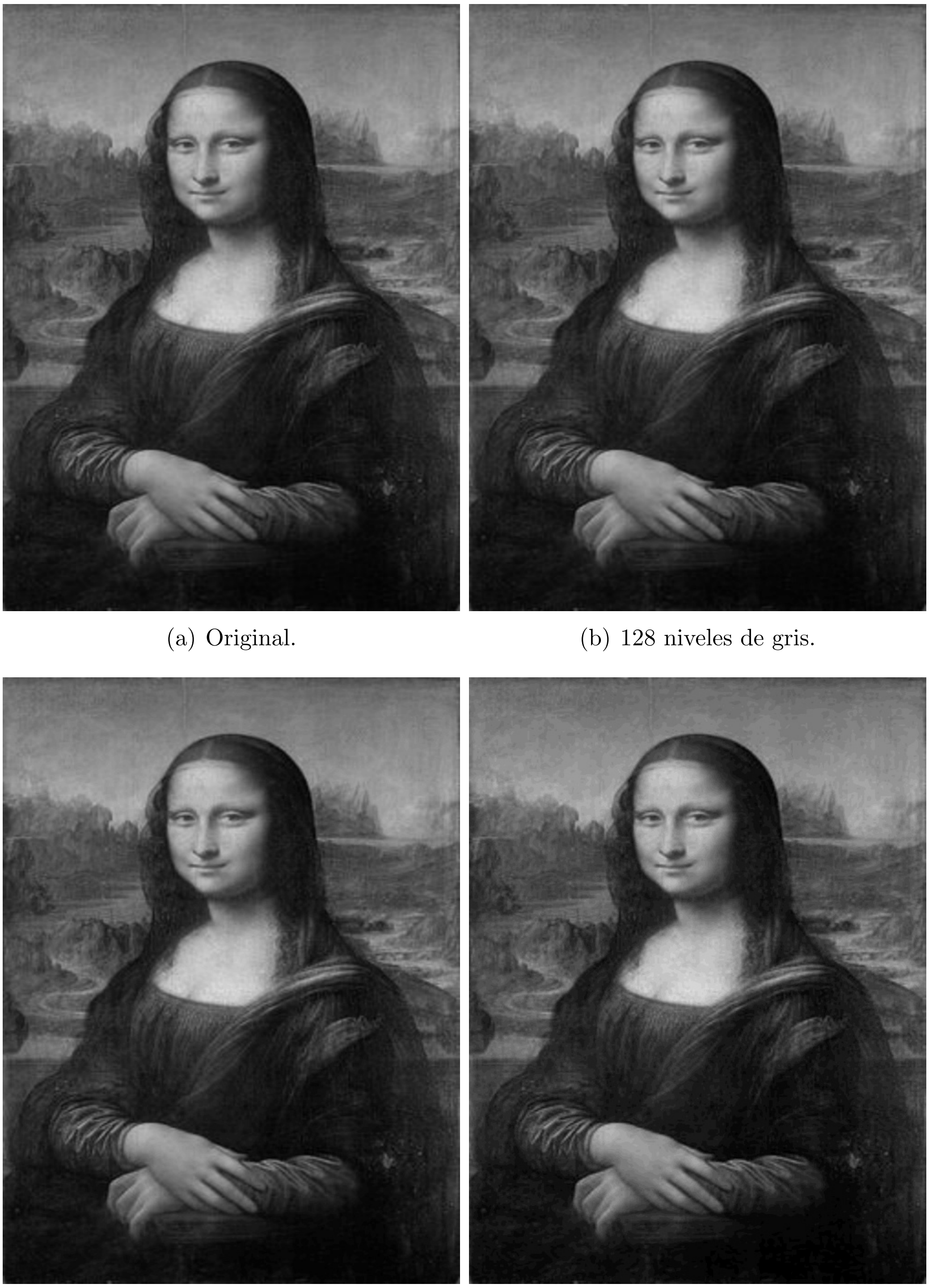


Figura 5.13: Cálculo de una imagen basada en los descriptores asociados a la GLCM. Imagen tomada de (**?**).

5.4.1. Recuantización

En el caso particular de una **imagen en niveles de gris**, el proceso de recuantización se refiere a disminuir dichos niveles. Realizar el proceso de recuantización a una imagen antes de calcular la matriz de co-ocurrencia es una práctica común, ya que mientras mayor sea el número de niveles de gris utilizado, los cambios en la textura, son más difíciles de identificar (Renzetti and Zortea, 2011).
Otro aspecto a considerar, es que mientras mayor sea la cantidad de niveles de gris, el análisis será más sensible al ruido y el costo computacional de crear matrices con elevados niveles de gris es bastante alto.
Comúnmente se utilizan 16 niveles de gris para calcular la matriz de co-ocurrencia.

Las Figuras 5.14 y 5.15 muestran el proceso de recuantización de una imagen, en este caso, la *Monalisa*. En la Figura 5.14 se aprecia la pintura original y la reducción de niveles de gris en 128, 64 y 32 niveles de gris. A simple vista es complicado apreciar diferencias notables entre las distintas versiones. A diferencia de la Figura 5.15 donde se muestran las versiones de 16, 8, 4 y 2 niveles de gris. En este caso, se aprecian con mayor facilidad las diferencias respecto a la pintura original, debido al reducido número de niveles de gris utilizados para representar los valores de cada pixel.



(a) Original.

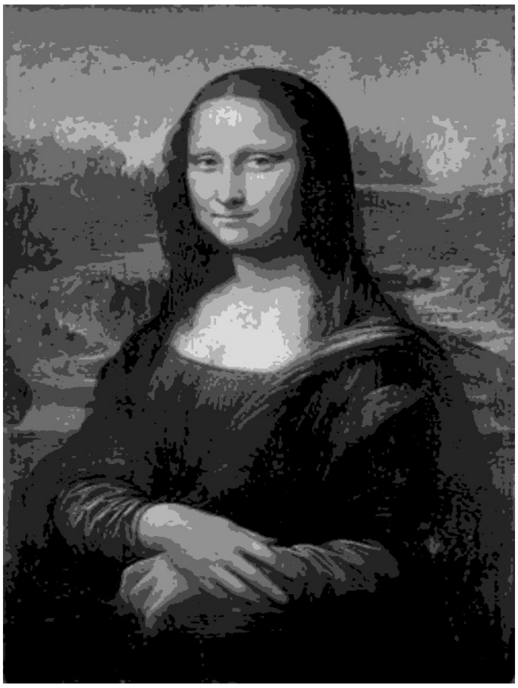
(b) 128 niveles de gris.

(c) 64 niveles de gris.

(d) 32 niveles de gris.

Figura 5.14: Pintura original y reducciones a 128, 64 y 32 niveles de gris.

(a) 16 niveles de gris.



(b) 8 niveles de gris.

(c) 4 niveles de gris.

(d) 2 niveles de gris.

Figura 5.15: Pintura original y reducciones a 128, 64 y 32 niveles de gris.

Algorithm 5.4.1: Algoritmo que reduce los niveles de gris de una imagen.

```
Function ReduceNivelesdeGris
    Input: Imagen a cuantizar, niveles de gris deseados (potencia de 2)
    Output: Imagen cuantizada
    /* Calcula los bits de desplazamiento para calcular el nuevo
       valor                                                      */
    bitsDesplazados ← 8 − log(grayLevels)/ log(2);
    grayLevels ←grayLevels-1;
    foreach pixel in Imagen do
        valorActual ←Imagen (pixel);
        /* Realiza un corrimiento de bits hacia la izquiera y un
           AND a nivel de bits. Vuelve a realizar un corrimiento
           hacia la derecha para obtener el nuevo nivel de gris  */
        nuevoValor ←(valorActual &(grayLevels
         <<bitsDesplazados))>>bitsDesplazados;
        Imagen (pixel)←nuevoValor;
    end
end
```

5.4.2. Cálculo de la imagen basada en los descriptores de la GLCM

En el algoritmo 5.4.2 se muestra cómo crear una imagen de textura a partir de cualquiera de los descriptores obtenidos de la **GLCM**. Primero se reducen los niveles de gris de la imagen original como se muestra en el algoritmo 5.4.1. Se define una ventana de análisis y se extraen, de la imagen que ha sido cuantizada, los pixeles correspondientes a la región demarcada por la ventana. Se calcula la **GLCM** sobre dicha región y se obtiene el descriptor deseado de esa matriz de co-ocurrencia en particular. Se asigna el valor del descriptor al pixel central de la región de interés. Finalmente, se repite el proceso para toda la imagen, deslizando la ventana un pixel a la vez.

La Figura 5.16 muestra la pintura original y las imágenes de textura basada en tres descriptores: contraste, correlación y entropía. La firguar 5.17 muestra los descriptores restantes: correlación, ASM y, contraste.

Algorithm 5.4.2: Algoritmo que la imagen de textura basada en los descriptores obtenidos a partir de la GLCM.

```
Function createImageTexture
    Input: Tamaño de ventana, imagen original, vector de dirección,
           descriptor deseado
    Output: Imagen creada a partir de los descriptores
    /* Cuantiza la imagen original a los niveles de gris deseados
       */
    ImagenCuantizada ←ReduceNivelesdeGris (imagenOriginal,nivelesGris);
    /* por cada pixel en la imagen cuantizada, extraer la región
       de interés definida por la ventana. Calcula la GLCM y el
       descriptor deseado                                         */
    foreach pixel in ImagenCuantizada do
        /* Obtiene la región de interés a traves de las
           dimensiones definidas para la ventana de análisis,
           teniendo como punto central las coordenadas del pixel
           actual                                                 */
        ROI ←ImagenCuantizada (ventana.x,ventana.y, pixel);
        /* Calcula la GLCM solo para los pixeles definidos en ROI,
           con la dirección de dir                                */
        GLCM ←calcGLCM (ROI,dir);
        /* Calcula el descriptor elegido para la GLCM             */
        descriptor ←calcDescriptor (GLCM,nombreDescriptor);
        /* Asigna el valor del descriptor a una matriz con las
           mismas dimensiones que la imagen original, en la
           coordenada de pixel                                    */
        ImagenTextura (pixel)←descriptor;
    end
end
```

(a) Portrait of Mademoiselle Sicotg (1865).

(b) Textura creada a partir de la homogeneidad.

(c) Textura creada a partir de la entropía.

(d) Textura creada a partir de la disimilitud.

Figura 5.16: Pintura original e imágenes de textura obtenidas a partir de los descriptores calculados a la GLCM.

(a) *Portrait of Mademoiselle Sicotg* (1865).

(b) Textura creada a partir de la correlación.

(c) Textura creada a partir del segundo momento angular (ASM).

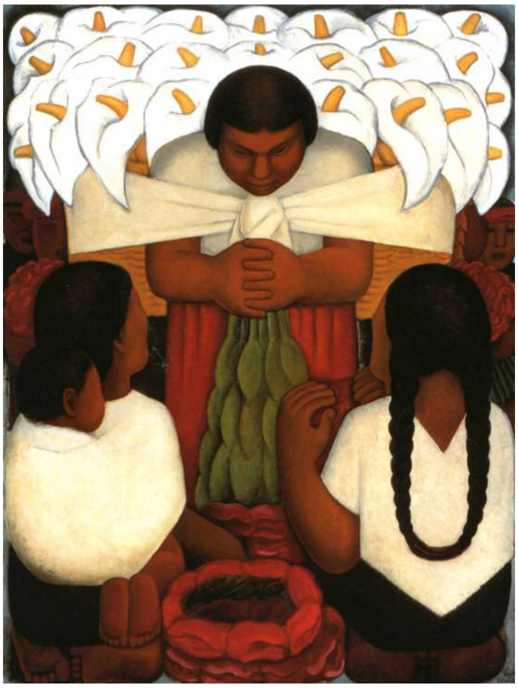
(d) Textura creada a partir del contraste.

Figura 5.17: Pintura original e imágenes de textura obtenidas a partir de los descriptores calculados a la GLCM.

5.5. Imágenes parámetricas

Como si se tratarán de los canales que componen a una imagen a color, las imágenes de textura creadas en la sección anterior, se unirán mediante combinaciones diversas, dando como resultado imágenes de textura a color. Con lo anterior, se podrá efectuar un análisis similar al que se realizó para la distribución de color de cada pintura. Además, se tiene como objetivo tratar de determinar cuáles son los descriptores menos correlacionados entre sí, lo que permitirá escoger a aquellos descriptores que mejor describan la **distribución textural.**

La Figura 5.18 muestra la pintura original y tres imágenes de textura obtenidas a partir de la combinación de tres imágenes de textura basadas en descriptores diferentes.



(a) *Festival de las flores* (1925).

(b) Imagen paramétrica creada a partir de la disimilitud, entropía y homogeneidad.

(c) *Araña de la noche..Esperanza* (1940).

(d) Imagen paramétrica creada a partir de la disimilitud, entropía y homogeneidad.

Figura 5.18: Pintura original y texturas a color obtenidas de la combinación de disimilitud, entropía y homogeneidad.

5.6. Histogramas basados en patrones binarios locales

Es posible calcular un histograma al contar las ocurrencias de los distintos **LBP** calculados para una imagen. Si se calculan **LBP** para diversas imágenes, y al mismo tiempo, se obtienen los histogramas de **LBP** de cada imagen, es posible comparar las imágenes a través de métricas que permiten conocer la similitud entre dos histogramas distintos.
El propósito de calcular histogramas de **Local Binary Patterns** en pinturas, es compararlas y determinar si para las obras elaboradas por un solo pintor, existe similitud entre los histogramas obtenidos a partir de cada pintura estudiada.

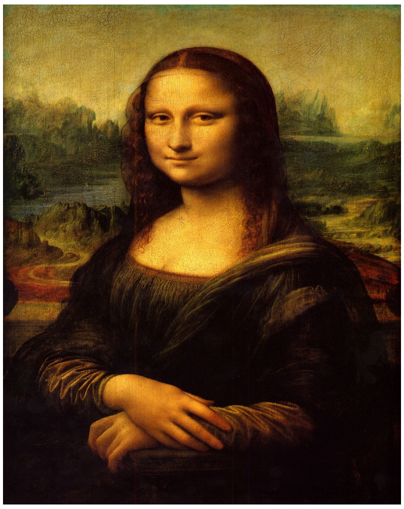
5.6.1. Histograma de patrones binarios locales

El algoritmo 5.6.1 muestra el proceso para calcular el histograma de patrones.

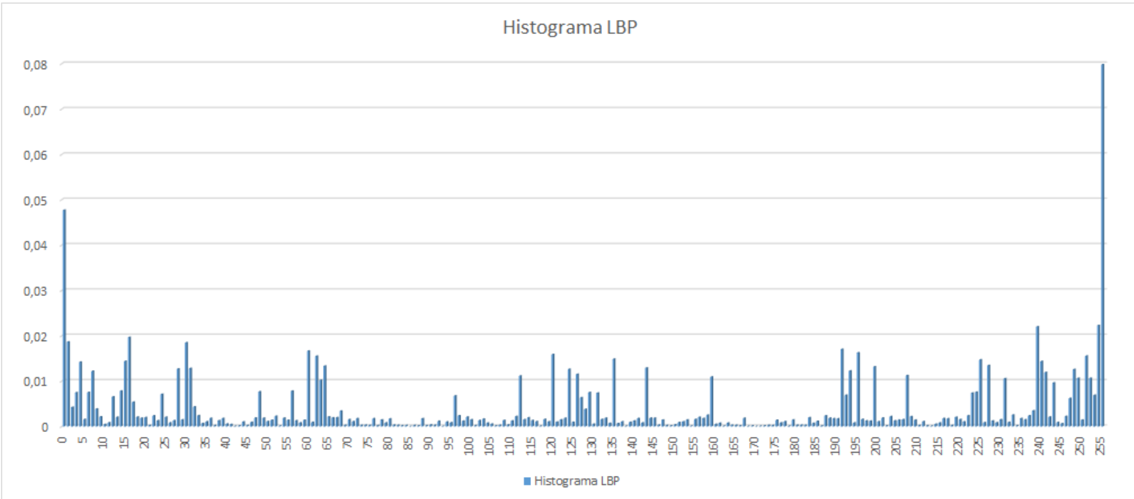
La Figura 5.19 muestra a la *Monalisa* y al histograma de **LBP** asociado. En el algoritmo 5.6.1 que fue utilizado para generar los histogramas de todas las pinturas analizadas, se consideraron solamente **ocho vecinos** con un **radio=1**.

Algorithm 5.6.1: Algoritmo que el histograma LBP para una imagen imagen.

```
Function CalculaLBP
    Input: Imagen
    Output: Histograma LBP
    foreach pixel in imagen do
        /* Variable que contendrá el código LBP, inicializada en
           cero                                                  */
        codigo ←0;
        /* Obtiene los ocho vecinos que reodean al pixel        */
        vecino 0←imagen (vecinoSur);
        vecino 1←imagen (vecinoSureste);
        vecino 2←imagen (vecinoEste);
        vecino 3←imagen (vecinoNoreste);
        vecino 4←imagen (vecinoNorte);
        vecino 5←imagen (vecinoNoroeste);
        vecino 6←imagen (vecinoOeste);
        vecino 7←imagen (vecinoSurOeste);
        /* a través de corrimientos de bits y una operación
           Ó'lógica con cada vecino, genera el código del patrón
           */
        codigo ←(pixel ≥vecino 0)<<0|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 1)<<1|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 2)<<2|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 3)<<3|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 4)<<4|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 5)<<5|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 6)<<6|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 7)<<7|codigo;
        /* Cuenta cada ocurrencia de codigo                     */
        Histograma (codigo)+=1;
    end
end
```



(a) Monalisa.



(b) Histograma LBP.

Figura 5.19: Monalisa e histograma de LBP asociado. Para calcular este histograma se consideraron 8 vecinos con un radio=1.

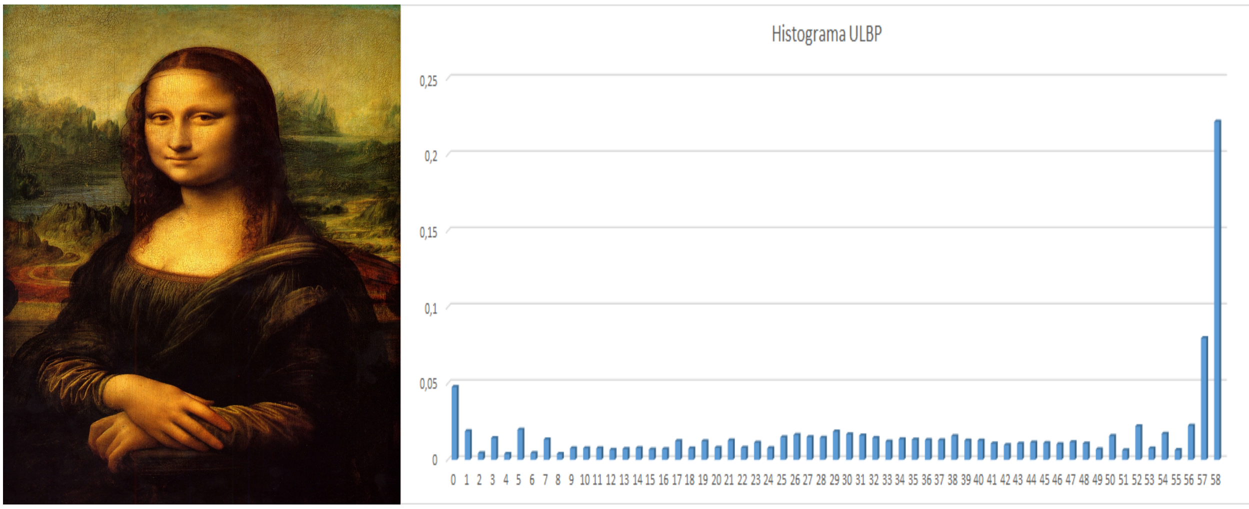
5.6.2. Histograma de patrones binarios locales uniformes

Con la finalidad de explorar versiones distintas y tal vez, de obtener resultados más precisos se consideró también el cálculo del histograma de ULBP. El algortimo para calcular este histograma es bastante similar al algoritmo 5.6.1. La diferencia radica en que el histograma para ULBP contiene únicamente 59 bins, 58 de ellos para los patrones uniformes y el número 59 para los patrones no uniformes. El algoritmo 5.6.2 fue utilizado para calcular el histograma de ULBP, considerando **ocho vecinos** y **radio=1**.

En la Figura 5.20 se observa a la *Monalisa* y al histograma ULBP que fue generado a partir de la misma.

Algorithm 5.6.2: Algoritmo que el histograma ULBP para una imagen imagen.

```
Function CalculaULBP
    Input: Imagen
    Output: Histograma ULBP
    foreach pixel in imagen do
        /* Variable que contendrá el código LBP, inicializada en
           cero                                                      */
        codigo ←0;
        /* Obtiene los ocho vecinos que reodean al pixel             */
        vecino 0←imagen (vecinoSur);
        vecino 1←imagen (vecinoSureste);
        vecino 2←imagen (vecinoEste);
        vecino 3←imagen (vecinoNoreste);
        vecino 4←imagen (vecinoNorte);
        vecino 5←imagen (vecinoNoroeste);
        vecino 6←imagen (vecinoOeste);
        vecino 7←imagen (vecinoSurOeste);
        /* a través de corrimientos de bits y una operación
           Ó'lógica con cada vecino, genera el código del patrón
           */
        codigo ←(pixel ≥vecino 0)<<0|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 1)<<1|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 2)<<2|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 3)<<3|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 4)<<4|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 5)<<5|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 6)<<6|codigo;
        codigo ←(pixel ≥vecino 7)<<7|codigo;
        /* Si el código es uniforme, elige el bin al que pertenece
           */
        if codigo es uniforme then
            bin←selectBin (code);
        end
        /* Si el código es no uniforme, se elige al bin 58 para
           almacenarlo                                               */
        else
            bin←58;
        end
        HistogramaULBP [bin]←+=1;
    end
end
```



(a) Monalisa. (b) Histograma ULBP.

Figura 5.20: Monalisa e histograma de ULBP asociado.

5.6.3. Histograma de patrones binarios locales dominantes

En el algoritmo 5.6.3 se muestra el proceso para obtener a los patrones dominantes.

Algorithm 5.6.3: Algoritmo que obtiene los *DLBP* de una imagen.

```
Function CalculaDLBP
    Input: Imagen
    Output: Vector que contiene los DLBP
    totalOcurrencias ←0;
    index ←0;
    /* Primero calcula de manera tradicional el histograma LBP
       como se vio en el algoritmo 5.6.1                        */
    histogramaLBP ←calculaLBP (imagen);
    /* ordena de manera decreciente el histograma de LBP        */
    histogramaOrdenado leftarrowordenaHistograma (histogramaLBP);
    /* Obtiene los patrones que conforman el 80% del total de
       ocurrencias de patrones                                  */
    while totalOcurrencias ¡=0.8 do
        /* obtiene el patron                                    */
        patron ←histogramaOrdenado [index ];
        /* obtiene y acumula la ocurrencia del patron           */
        totalOcurrencias +=histogramaLBP [patron ];
        /* agrega el patron al vector DLBP                      */
        DLBPvector.push(patron);
    end
end
```

Capítulo 6

Experimentos y Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos tras analizar las pinturas de artistas como **Diego Rivera**, **Salvador Dalí**, **Leonardo Da Vinci**, **Pablo Picasso**, **Vincent Van Gogh**, **Claude Monet** y, **Pierre-Auguste Renoir**. Para determinar si los pintores estudiados conservan características similares en cada una de sus pinturas, las pinturas fueron agrupadas por autor para su análisis. Como ya se había mencionado, las características calculadas fueron **esfericidad del elipsoide ajustado**, **dimensión fractal de la distribución de color**, **eigenvalores y eigenvectores de la distribución de color**, **centroide de la distribución de color**, entre otras. Se presentan gráficas con los promedios por pintor de cada característica, así como la desviación estándar con la finalidad de tener un número que los represente a y funcione como referencia para compararlos.

Para tratar de caracterizar la paleta de colores utilizada de cada pintor estudiado, el espacio RGB fue dividido en 64 regiones. A partir de estas regiones se genera un histograma para cada pintura revisada. Al graficar los histogramas, y compararlos. se puede observar si un pintor tiende a utilizar colores similares o muy distintos al elaborar sus pinturas.

En el caso del análisis textural, se presentan los valores promedio de los descriptores calculados a partir de la **matriz de co-ocurrencia** para cada pintor así como las desviaciones estándar. Los datos obtenidos serán de ayuda para tratar de caracterizar a los pintores estudiados, además servirán también, para compararlos entre ellos. Se consideró también el uso de **local binary patterns** y dos varientes de los mismos: **unifom local binary Patterns** y **dominant local binary patterns**. Para el caso de **LBP** y **ULBP** se generaron histogramas de los patrones y, utilizando métricas de comparación de histograma (**chi cuadrada**) se compararon los histogramas de cada pintura. Se muestran el promedio de dichas comparaciones y la desviación estándar de las mismas.

Como se detalló en el capítulo 4 los **DLBP** son aquellos que tienen mayor número de ocurrencias y representan el 80 por ciento de los patrones presentes en una imagen. En este capítulo se presenta el número de patrones promedio que requiere cada autor para realizar su trabajo, así como las desviaciones estándar respectivas.

Además de los pintores, se formaron dos grupos de pinturas e imágenes para tener puntos de comparación. El primer grupo, llamado **Imágenes Aleatorias** se conforma de 22 imágenes (no pinturas) elegidas al azar. En este grupo aparecen fotografías de paisajes, retratos, fotografías de animales, gradientes de color e incluso imágenes con ruido a color. El objetivo de este grupo es tener imágenes con poca o nula relación entre ellas. El segundo grupo, llamado **Pinturas Combinadas** consta de 14 pinturas. Para este grupo se eligieron dos pinturas por cada pintor estudiado. El propósito de este grupo es similar al del primer grupo, observar el comportamiento de obras de distintos pintores y comparar los resultados con los obtenidos para cada artista.

6.1. Resultados análisis de color

6.1.1. Descriptores promedio

En el cuadro 6.1 se muestran las características promedio calculadas para cada pintor. También se incluyen los grupos de **Aleatorias** y **Combinadas**. En el cuadro 6.2 se muestran las desviaciones estándar de cada característica promedio calculada.

	Esfericidad	Dimensión Fractal	Distancia al centroide	Ángulo de desviación	RSME
Aleatorias	0.908649	2.41082	0.27997	19.0015802	4.7836
Dalí	0.839501	2.32852095	0.2237	9.4631777	3.3034
Da Vinci	0.713459	2.207994	0.124406	8.1139	5.3964
Diego Rivera	0.770383143	2.2889	0.144422	6.5099	4.7368
Combinadas	0.794805	2.337982	0.211798	10.3854	4.7767
Claude Monet	0.756061	2.3405	0.226527	8.1494	4.8212
Picasso	0.860328	2.4661	0.16981	8.465702	5.5971
Renoir	0.779686	2.301	0.180666	6.305831	4.5217
Van Gogh	0.8161	2.22	0.214513	19.9804	7.1885

Cuadro 6.1: Características promedio de cada grupo de pinturas.

Las Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 muestran los diagramas de caja asociados a cada parámetro calculado y permiten observar las diferencias o similitudes que existen entre los pintores.

Esfericidad Al observar las distintas pinturas estudiadas y los resultados mostrados en la Figura 6.1 se notó lo siguiente: mientras mayor sea el índice de esfericidad del elipsoide ajustado asociado a cada distribución de color, los colores utilizados en las pinturas serán más saturados, debido a que los colores utilizados se alejan de la diagonal del cubo RGB. Lo anterior explica porqué las pinturas de **Leonardo Da Vinci** son las que presentan menor índice de **esfericidad**, ya que su paleta de colores no suele incluir colores muy saturados. Por otro lado, se puede ver en la

	Esfericidad	Dimensión Fractal	Distancia al centroide	Ángulo de desviación	RSME
Aleatorias	0,070025	0.231711	0.17773185	16.403	1.411
Dalí	0.0754823	0.113673	0.12377	7.252408	1.06079
Da Vinci	0.0653785	0.09084	0.080484	6.7441459	1.768
Diego Rivera	0.045161	0.087801	0.107767	6.5947	1.04299
Combinadas	0.08774	0.10363	0.12564	6.8173	2.4319
Monet	0.0793	0.1264	0.11537	4.4436	2.1898
Picasso	0.07781	0.09457	0.10608	5.9899	2.5604
Renoir	0.064603	0.1108	0.09009	3.498053	1.7472
Van Gogh	0.12577	0.207218	0.14908	23.86267	4.2839

Cuadro 6.2: Desviaciones estándar de los descriptores calculados a cada grupo de pinturas.

gráfica de la Figura 6.1 que **Salvador Dalí** y **Pablo Picasso** presentan los mayores valores de **esfericidad**, esto se debe a que en sus trabajos, generalmente, utilizan colores más saturados en comparación con **Leonardo Da Vinci**. Es interesante observar también las desviaciones estándar de cada pintor. En el cuadro 6.2 es claro que **Diego Rivera** es quien presenta menor desviación estándar entre todos los pintores y grupos de pintura estudiados, mientras que la mayor desviación estándar se presenta con **Vincent Van Gogh**, lo cual también puede verse de manera gráfica en la Figura 6.1. De acuerdo a lo anterior, se puede concluir que en la mayoría de las pinturas analizadas, **Diego Rivera** se muestra constante en el grado de saturación que utiliza en sus colores, mientras que **Vincent Van Gogh** puede tener pinturas con colores saturados así como pinturas con baja saturación.

Leonardo Da Vinci y **Pierre-Auguste Renoir** también presentan valores pequeños de desviación estándar, y eso se puede observar en el grado de saturación de color que utilizan en sus distintos trabajos.

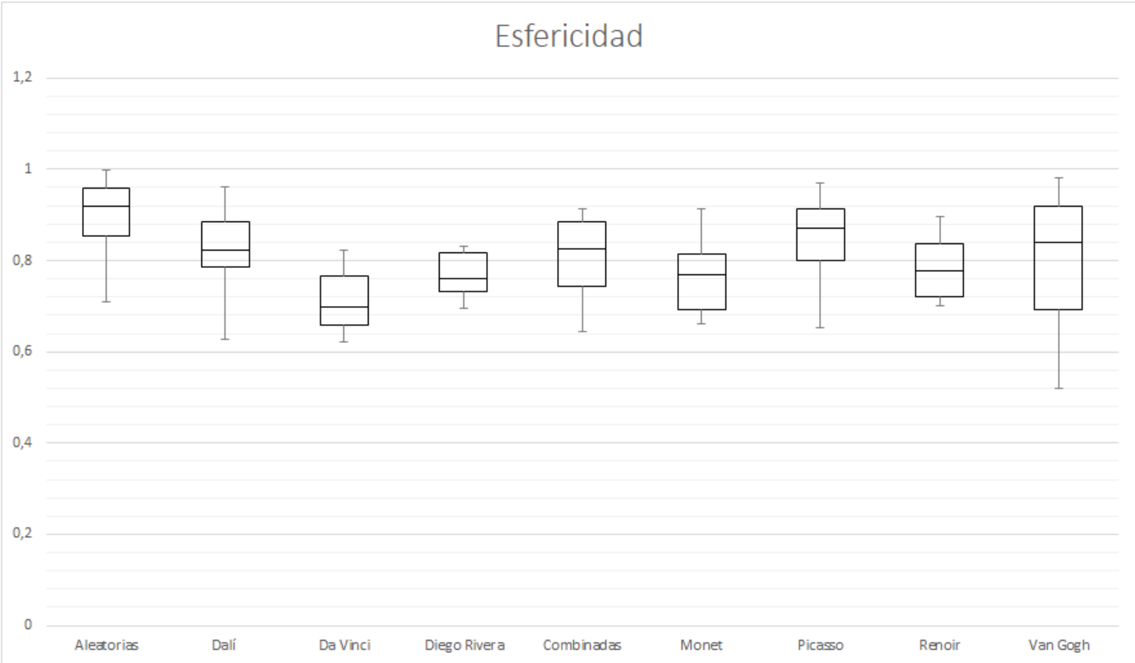


Figura 6.1: Gráfica de cajas asociada al parámetro esfericidad.

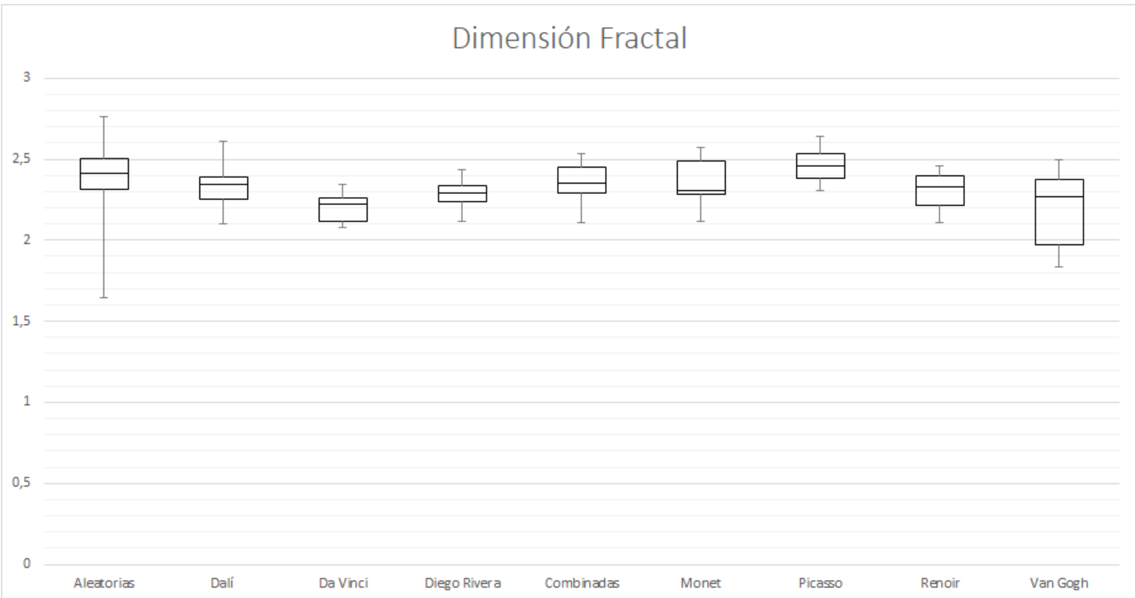


Figura 6.2: Gráfica de cajas asociada a la dimensión fractal.

Dimensión fractal En el cuadro 6.2 se aprecia que el grupo **Aleatorias** presenta la mayor desviación estándar entre todos los grupos estudiados. Dado que las imágenes en este grupo no son pinturas y no existe relación entre ellas es normal que existan variaciones tan grandes.

Por otro lado, el bajo valor de **dimensión fractal** presente en los trabajos de **Da Vinci** así como la poca variación de la misma a lo largo de su trabajo, es probable que se deba al uso de técnicas como el *claroscuro*[1] y *esfumado*[2] ; a que la mayoría de sus trabajos son retratos o muestran a la Figura humana, por lo que **Da Vinci** se limitaba al uso de ciertos colores. **Diego Rivera** es el pintor que presenta el menor valor de desviación estándar, lo cual puede observarse gráficamente en la Figura 6.2.

Con un valor similar de **dimensión fractal** aparece **Vincent Van Gogh**, sin embargo, es el que mayores variaciones de este parámetro presenta en sus pinturas. Lo que significa que **Van Gogh** puede presentar pinturas en donde exista preferencia a ciertos colores o puede presentar pinturas con distribución de color más uniforme.

Caso contrario es el de **Pablo Picasso**, quien presenta la **dimensión fractal** más elevada de todos los grupos de pintura estudiados, así como poca variabilidad de la misma. Se puede decir entonces, que la paleta de colores utilizada por **Picasso** es bastante uniforme, no muestra preferencia de un color sobre otro en su trabajo y, mantiene ese estilo en la mayoría de sus pinturas.

Cabe destacar, que al contrario de **Da Vinci** y **Diego Rivera**, **Vincent Van Gogh** ha mostrado el valor más alto de variabilidad, lo que demuestra que no existe mucha relación entre las paletas de color utilizadas para cada una de sus pinturas.

Distancia al centroide El objetivo de este parámetro es tratar de caracterizar el uso de color de cada pintor. Es decir, se trata de comprobar si la selección de colores es similar en los trabajos de un pintor.

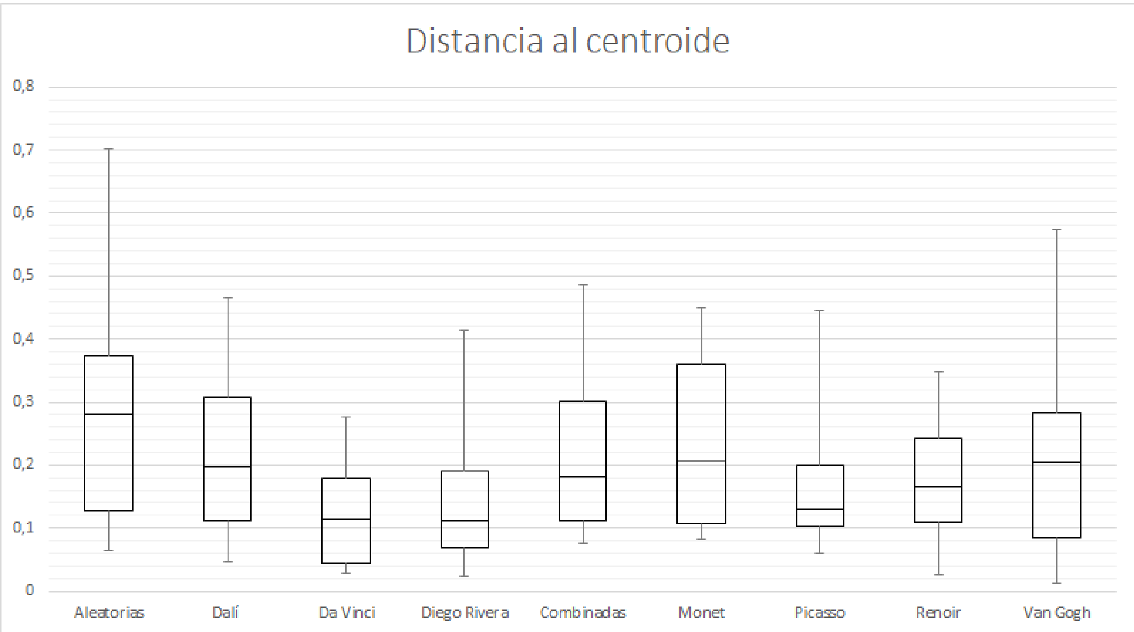


Figura 6.3: Gráfica de cajas asociada a la distancia promedio al centroide promedio.

En el cuadro 6.2 se observa que el grupo **Aleatorias** es el que presenta la mayor

[1] *Chiaroscuro.* Técnica de pintura renacentista que permite plasmar profundidad a través de gradaciones de luz y sombra (*Chiaroscuro*, n.d.)

[2] *Sfumato.* Técnica de sombreado, que permite transiciones sutiles entre diferentes lineas, colores y tonos (*Chiaroscuro*, n.d.).

distancia al centroide y la mayor desviación estándar. Al ser un grupo *control*, resulta un comportamiento esperado. El segundo grupo *control*, **Combinadas**, también muestra un valor de distancia alto, respecto al resto. Sin embargo, es comparable al mostrado por **Monet**, **Dalí** y **Van Gogh**. Nuevamente, **Da Vinci** presenta los valores más pequeños, tanto de distancia al centroide como de desviación estándar. Esto podría significar que **Da vinci**, debido a su estilo, y al uso de técnicas como *claroscuro* y*esfumado*, utiliza colores similares en cada una de sus pinturas. Por otra parte, el resto de los artistas estudiados, muestran comportamientos más flexibles respecto a la elección de colores que componen cada una de sus pinturas.

Ángulo de desviación En el cuadro 6.2 se observa que en el grupo **Aleatorias** y **Van Gogh** son los que presentan mayor desviación respecto al eje principal promedio así como mayor varianza. Para **Van Gogh**, esto significa que la manera en que el color de sus obras se encuentra distribuido en el espacio de color cambia radicalmente de una pintura a otra. El grupo **Combinadas** también presenta un valor alto respecto al resto de los pintores, lo cual es normal ya que está conformado por pinturas de diverso artistas. Por otra parte **Diego Rivera** y **Renoir** son los que muestran menor ángulo de desviación respecto al eje principal promedio. Esto significa que la dirección en que se distribuye el color en el espacio RGB para estos dos pintores es bastante similar en cada una de sus pinturas. Comportamiento parecido presentan el resto de los pintores, aunque con ángulos de desviación ligeramente mayores.

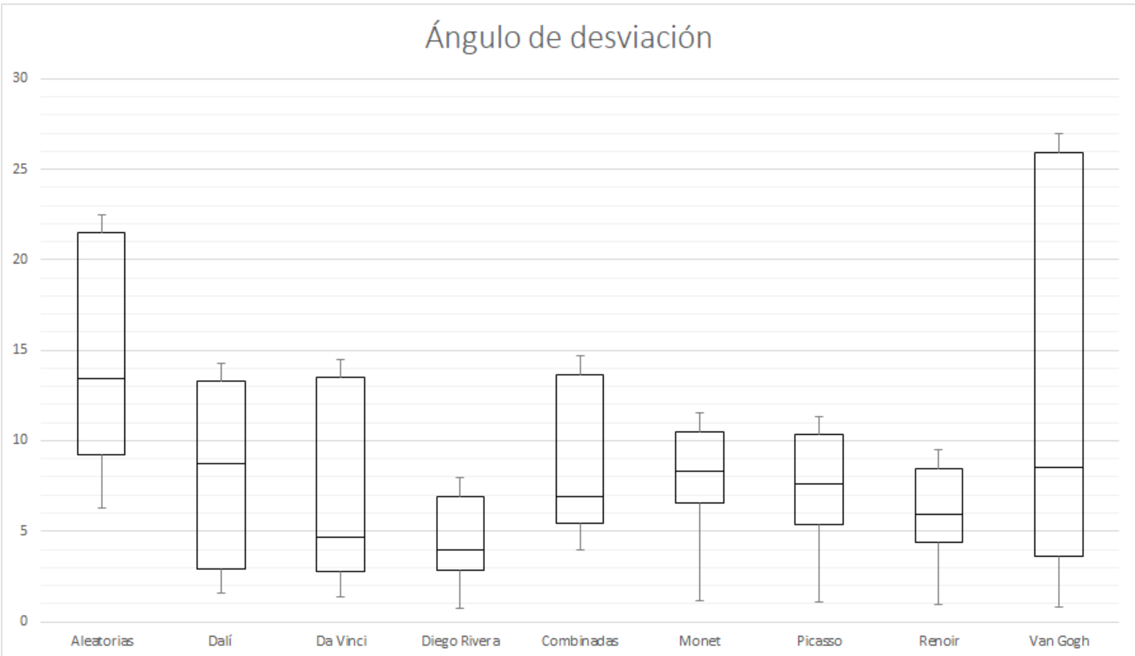


Figura 6.4: Gráfica de cajas asociada al ángulo de desviación promedio respecto al eje principal promedio.

RSME Como se vio en el capítulo 5, se calculó el RSME para cada pintura y se obtuvo el promedio de cada pintor, los resultados obtenidos se muestran el la gráfica de la Figura 6.5

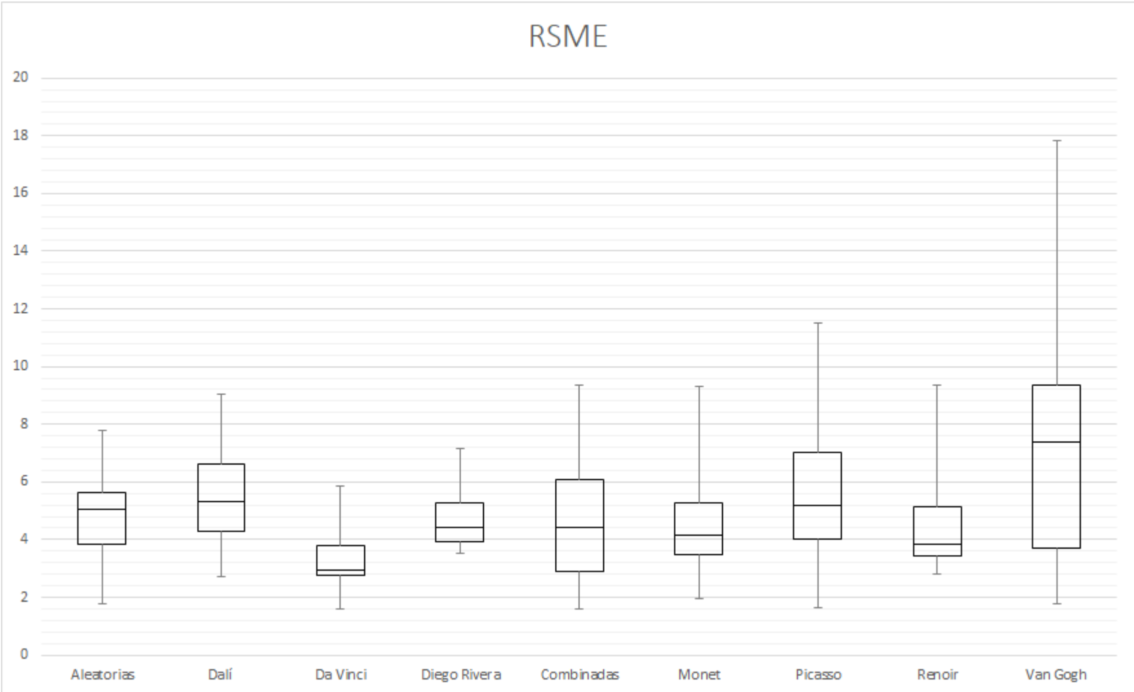


Figura 6.5: Gráfica de cajas asociada a RMSE .

Para este descriptor se observa nuevamente que **Van Gogh** destaca y presenta el valor más alto. Esto significa que debido a la naturaleza y forma de la distribución de color de sus pinturas, el elipsoide se ajusta en menor medida respecto al resto de los pintores, considerando un ajuste ideal, el valor de RSME sería igual a cero. De la gráfica, se puede observar que el resto de los pintores muestran comportamiento similar entre ellos, mientras que **Salvador Dalí** es el que mejor ajuste tiene.

6.1.2. Colores más usados

A continuación se presentan los histogramas obtenidos para cada pintor tras dividir el espacio RGB en 64 regiones. Se muestran los histogramas de todas las pinturas o imágenes pertenecientes a cada grupo o pintor en una sola gráfica. El objetivo es tratar de observar si cada pintor utiliza el color de manera similar en cada una de sus obras o, por el contrario, los colores son distintos en cada una de ellas. Los grupos *control*, **Aleatorias** y **Combinadas** servirán para observar los resultados en imágenes que parecen no tener nada en común.

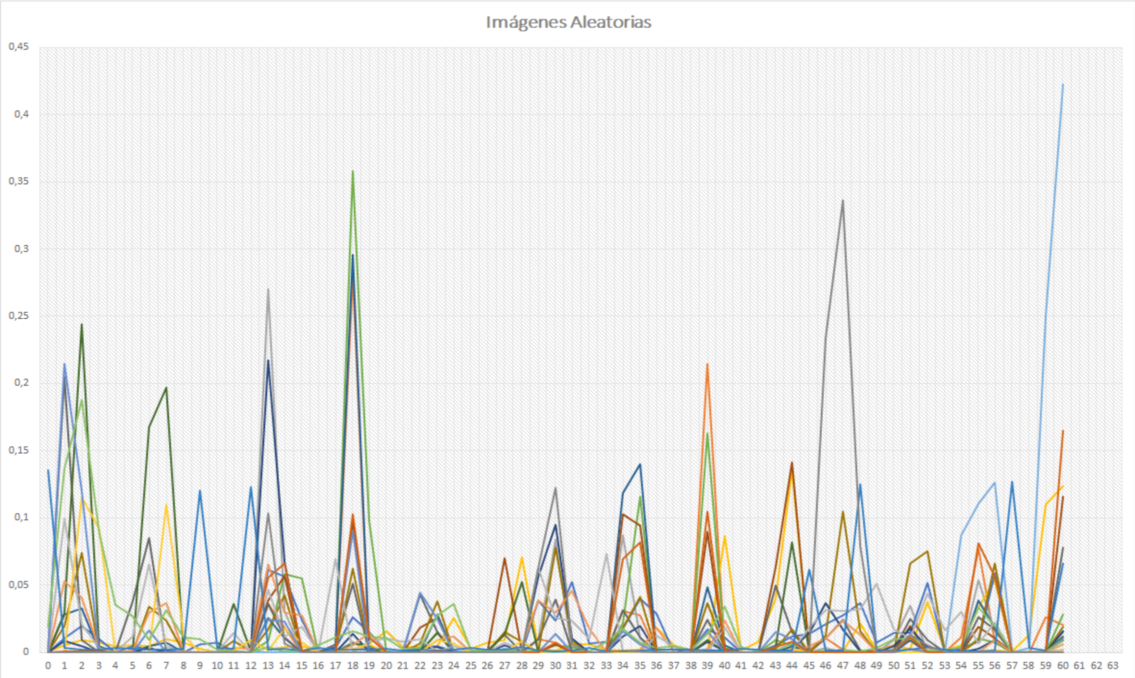


Figura 6.6: Histogramas de las imágenes pertenecientes a Aleatorias.

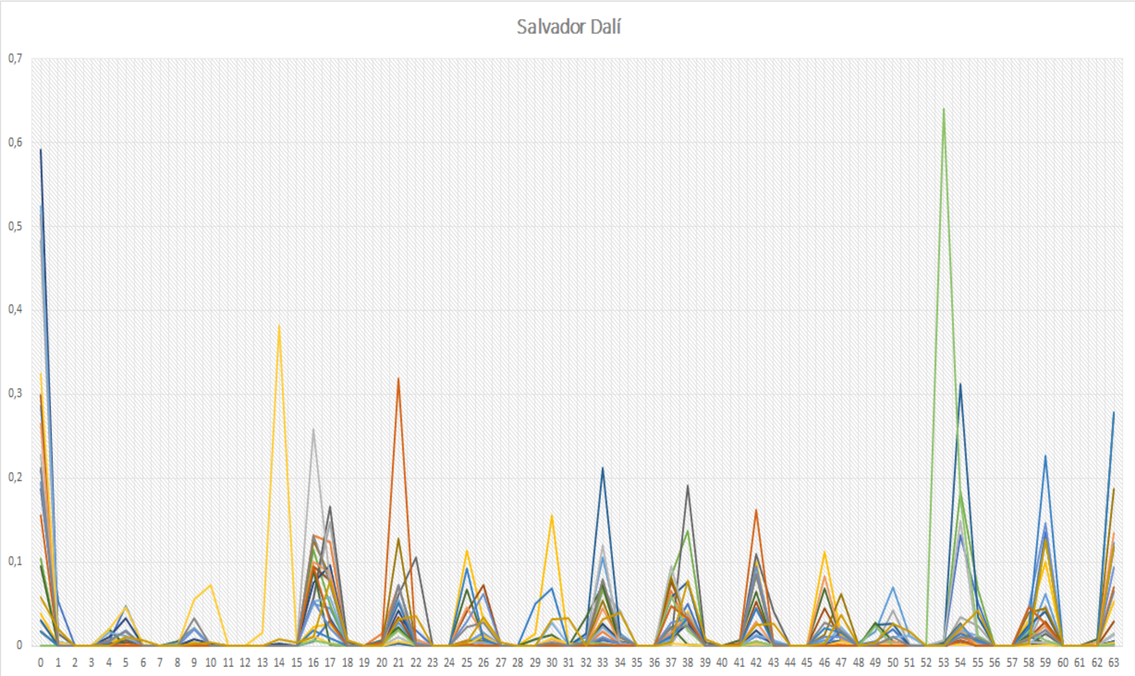


Figura 6.7: Histogramas de las pinturas de Salvador Dalí.

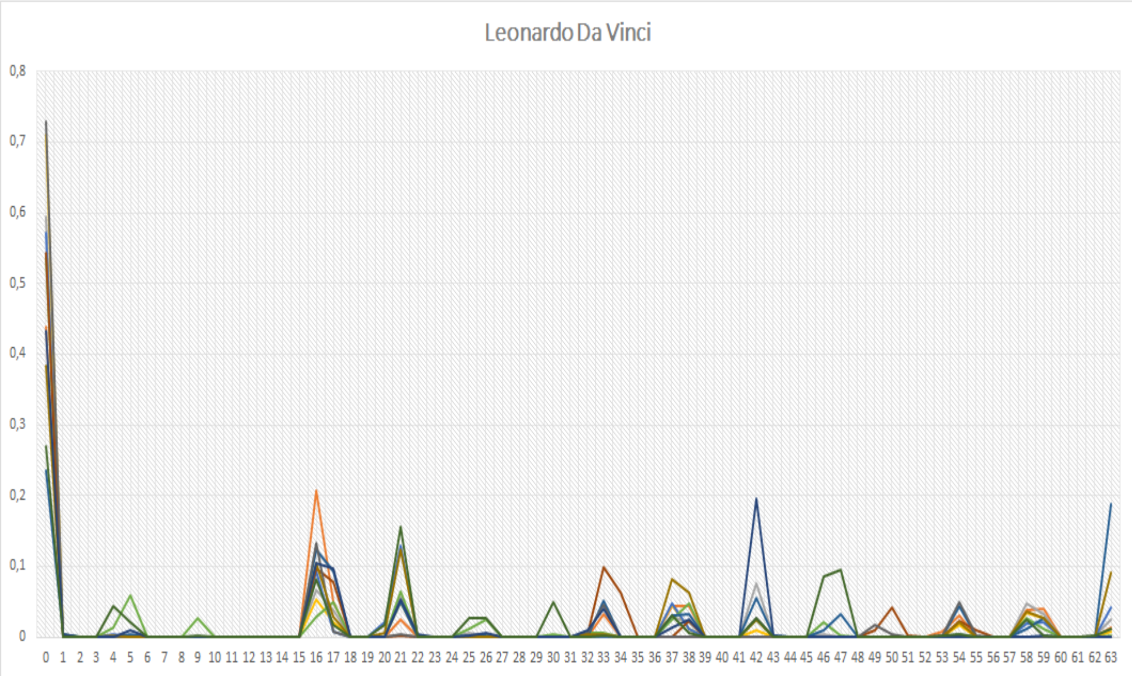


Figura 6.8: Histogramas de las pinturas de Leonardo Da Vinci.

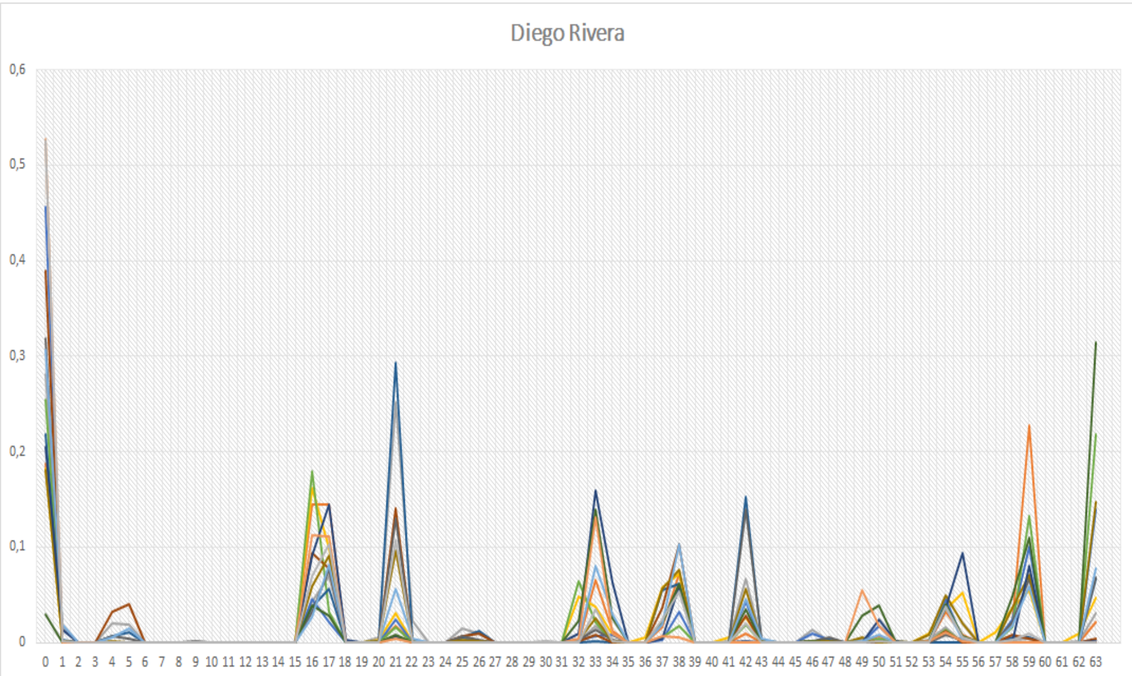


Figura 6.9: Histogramas de las pinturas de Diego Rivera.

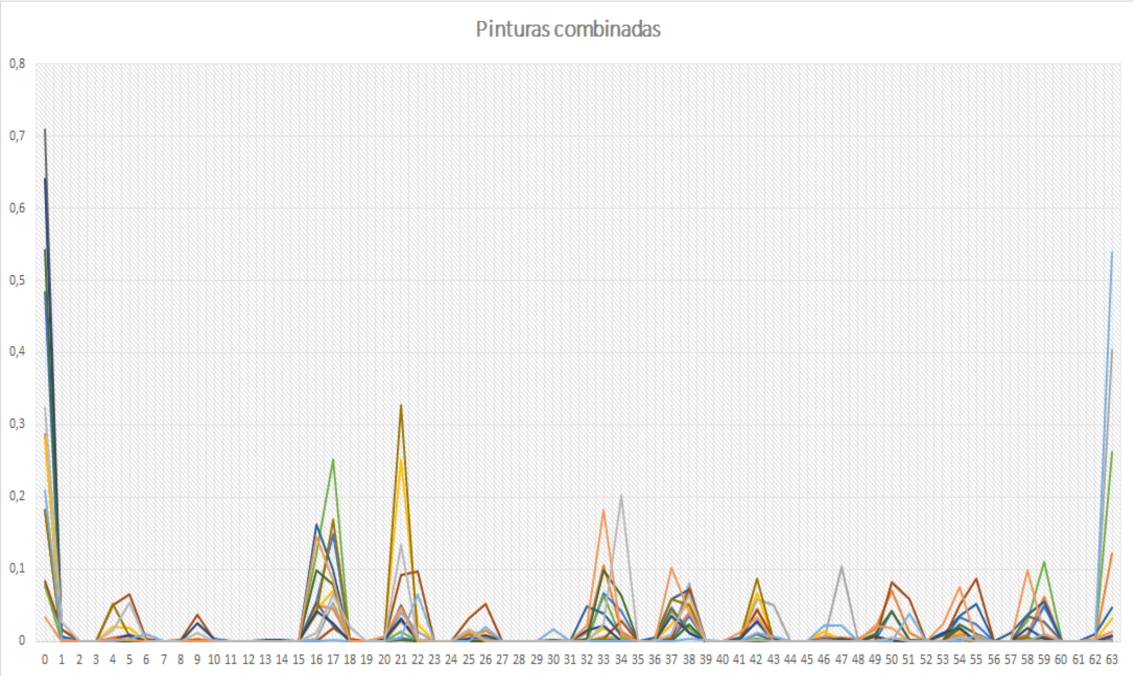


Figura 6.10: Histogramas de pinturas de los diferentes artistas estudiados.

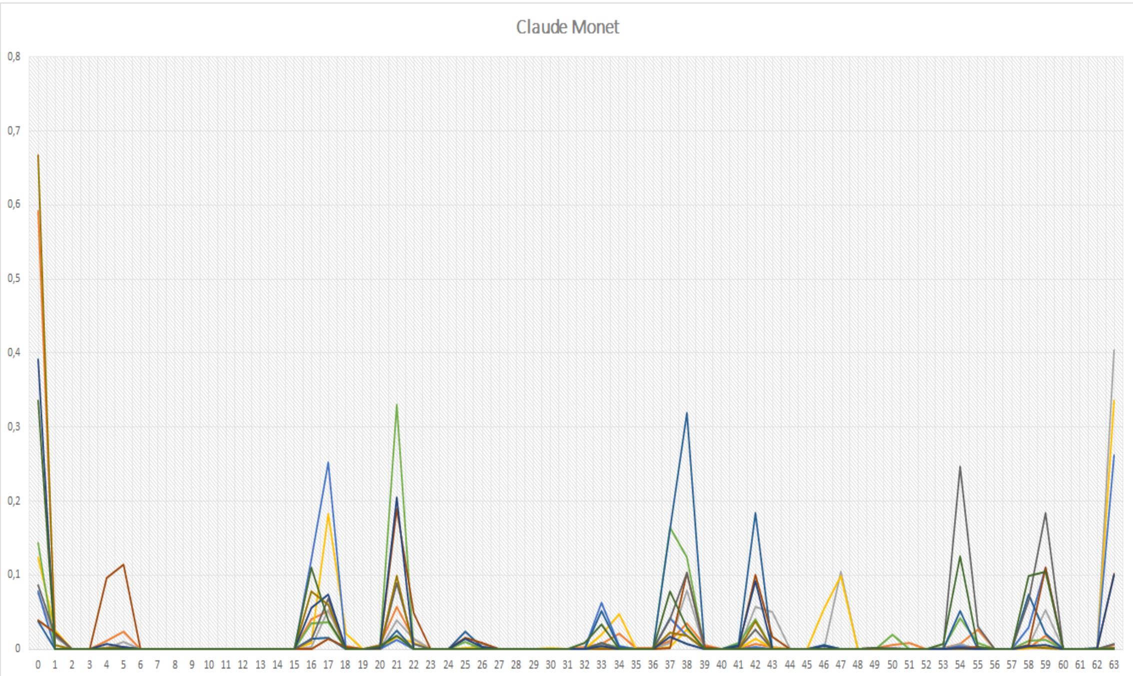


Figura 6.11: Histogramas de pinturas de Claude Monet.

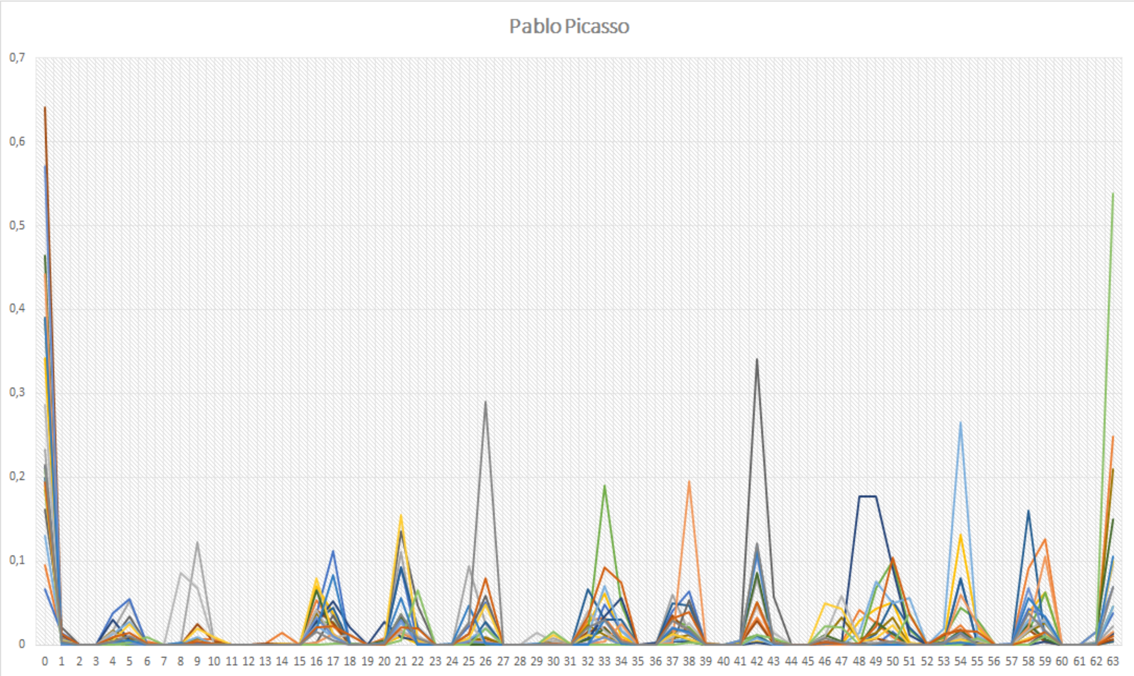


Figura 6.12: Histogramas de pinturas de Pablo Picasso.

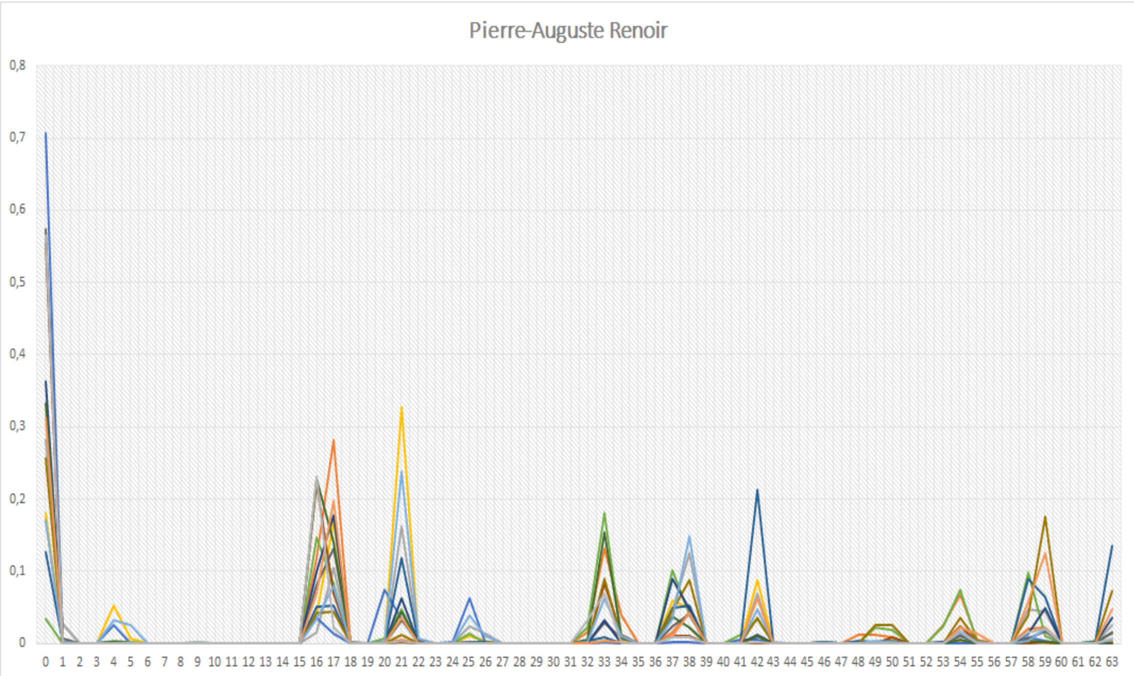


Figura 6.13: Histogramas de pinturas de Pierre-Auguste Renoir.

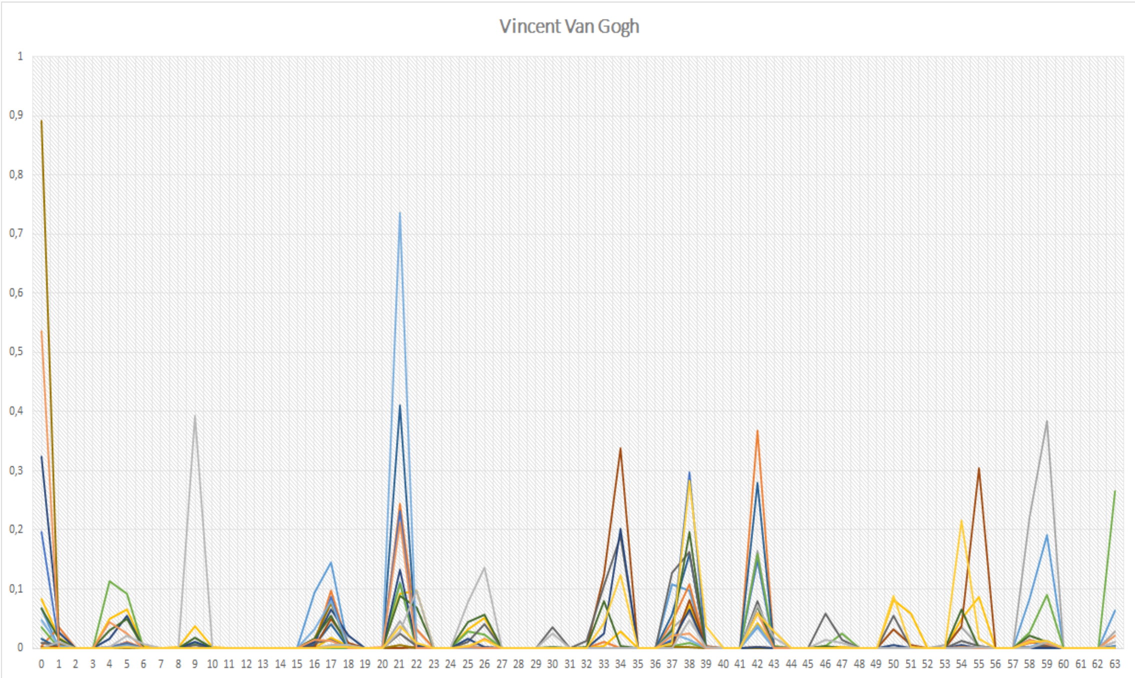


Figura 6.14: Histogramas de pinturas de Vincent Van Gogh.

Al observar los histogramas de **Aleatorias** (Figura 6.6) e incluso, el de **Combinadas** (Figura 6.10) se perciben desordenados, sin mostrar algún patrón repetitivo en los colores que las componen. **Picasso**, **Van Gogh** y **Dalí** también muestran histogramas bastante desordenados, por lo que se puede concluir que no eran constantes en el uso de color cuando creaban cada una de sus pinturas. Por otra parte, los histogramas de **Da Vinci** (Figura 6.8), **Renoir** (Figura 6.13) y, **Diego Rivera** (Figura 6.9) parecen seguir cierto patrón en el uso de color, por lo que se puede afirmar que estos pintores solían utilizar colores similares cuando creaban cada una de su obras.

6.1.3. Brillo y oscuridad de una pintura

En la siguientes Figuras se muestran los histogramas del parámetro *value*[3] de las pinturas asociadas a cada autor y de las que los grupos de comparación **Aleatorias** y **Combinadas**.

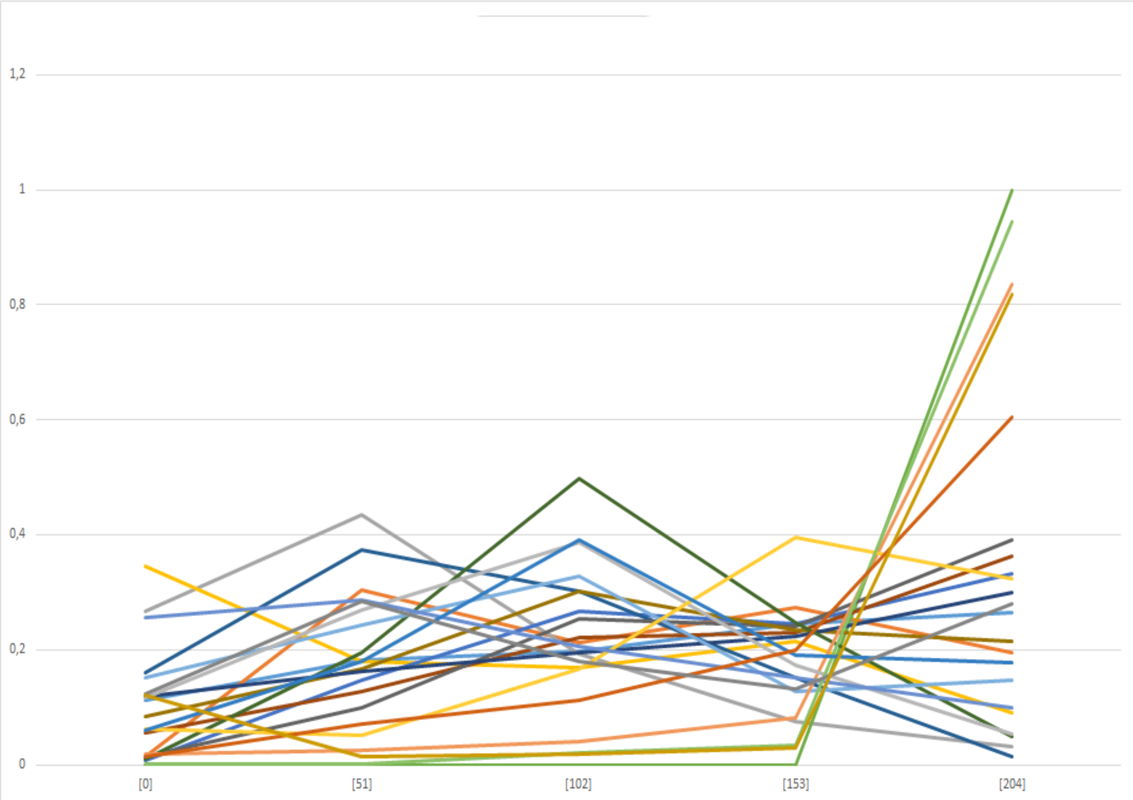
Para generar dichos histogramas se consideraron 5 clases únicamente:

- Muy oscuro [0-50].
- Oscuro [51- 101].
- Medio [102-152].
- Claro [153-203].

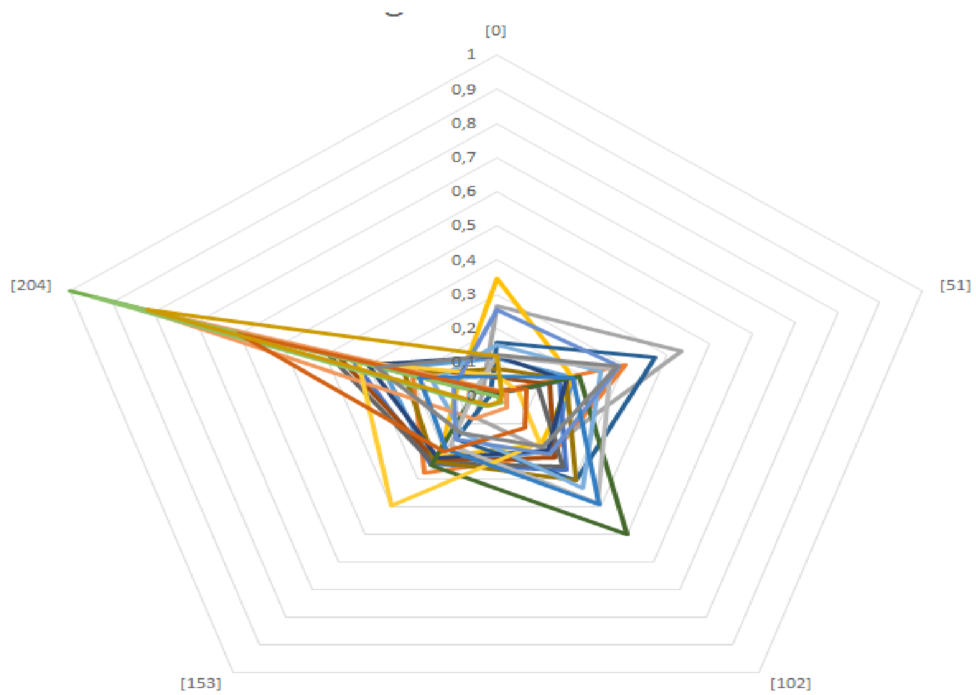
[3]El parámetro value pertenece al espacio de color HSV.

- Muy claro [204-255].

Los histogramas pertenecientes a cada pintor fueron sobrepuestos en una sola gráfica de líneas, con la finalidad de tratar de observar alguna tendencia o comportamiento similar entre las pinturas. Además, se incluyeron gráficas radiales, con el objetivo de visualizar los histogramas de manera distinta a la convencional y tratar de percibir similitudes entre las pinturas estudiadas.

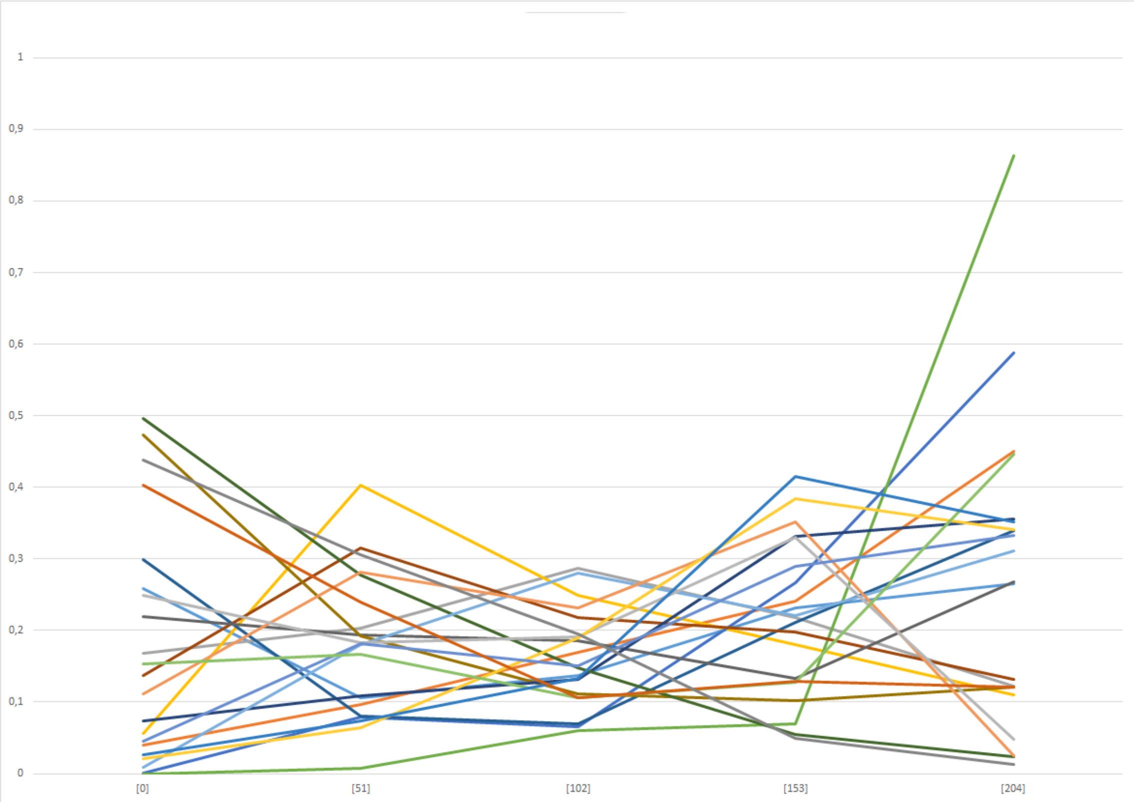


(a) Gráfica de líneas.

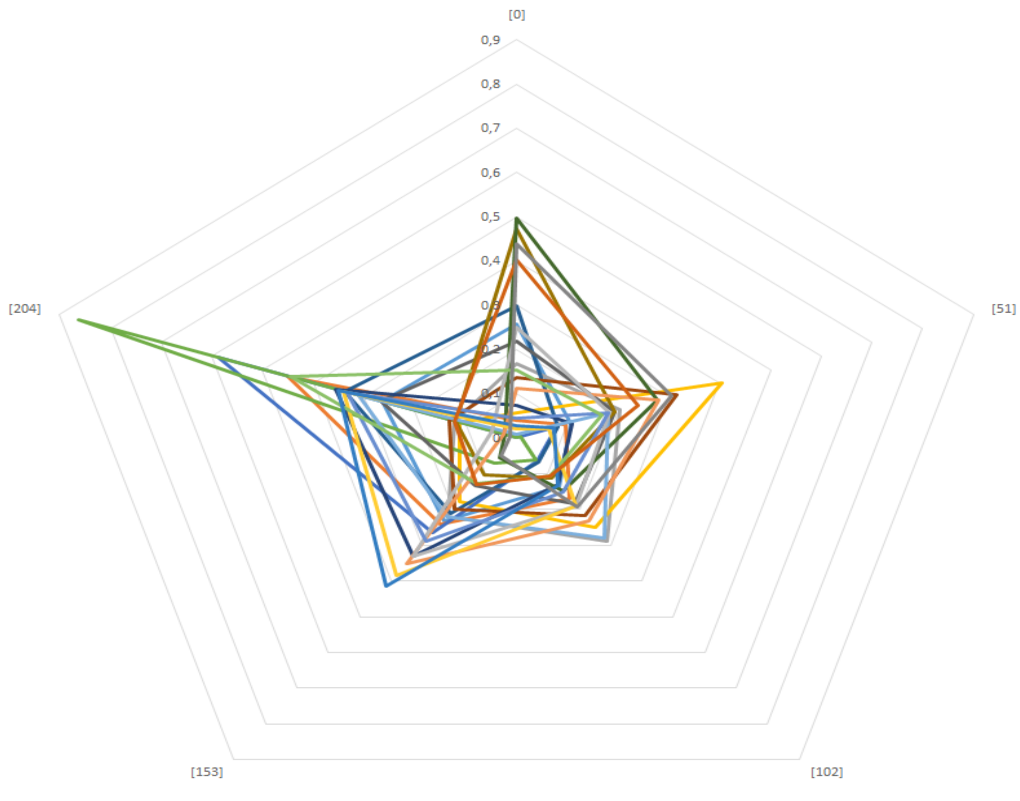


(b) Gráfica radial.

Figura 6.15: Histograma del parámetro *value* de Aleatorias.

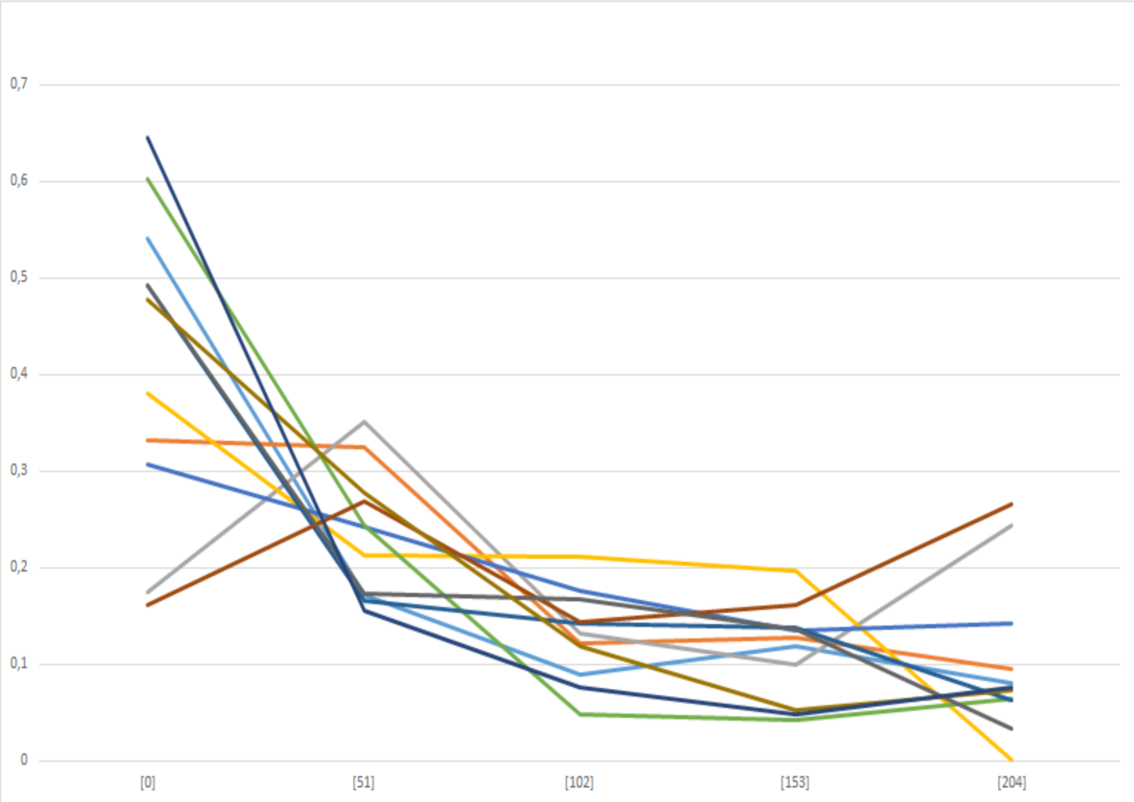


(a) Gráfica de líneas.

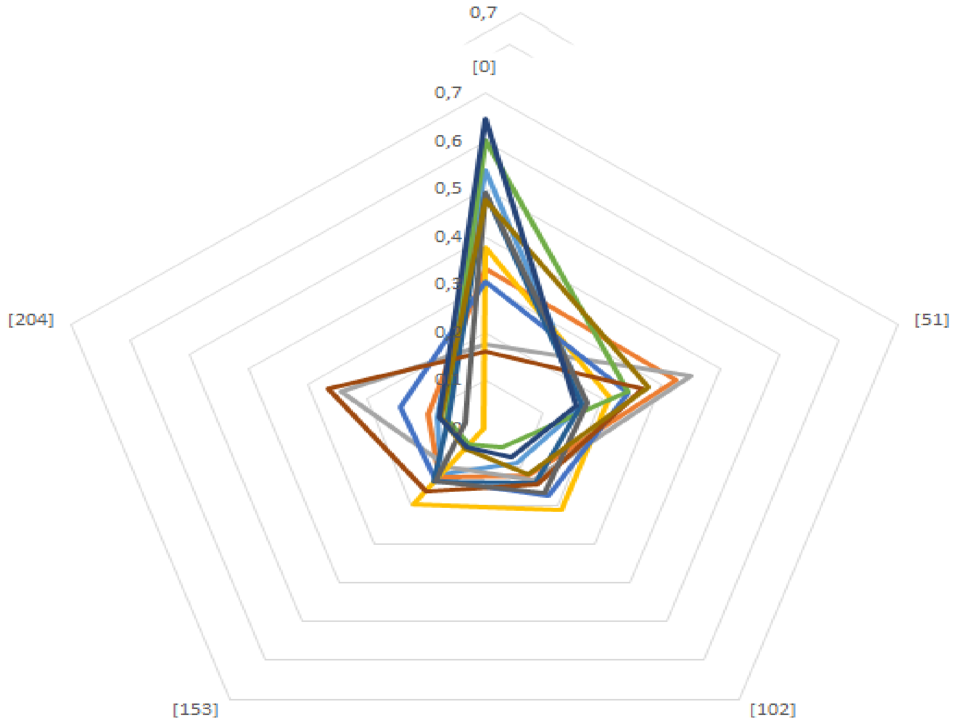


(b) Gráfica radial.

Figura 6.16: Histograma del parámetro *value* de las pinturas de Salvador Dalí.

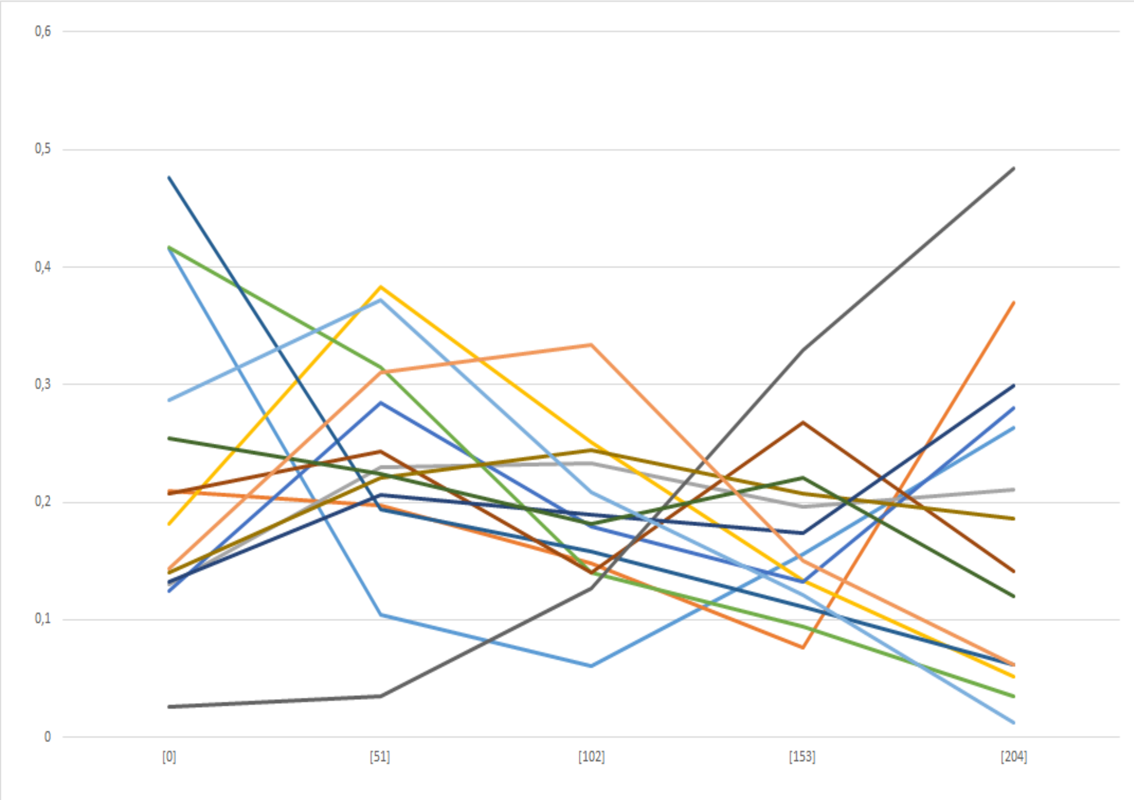


(a) Gráfica de líneas.

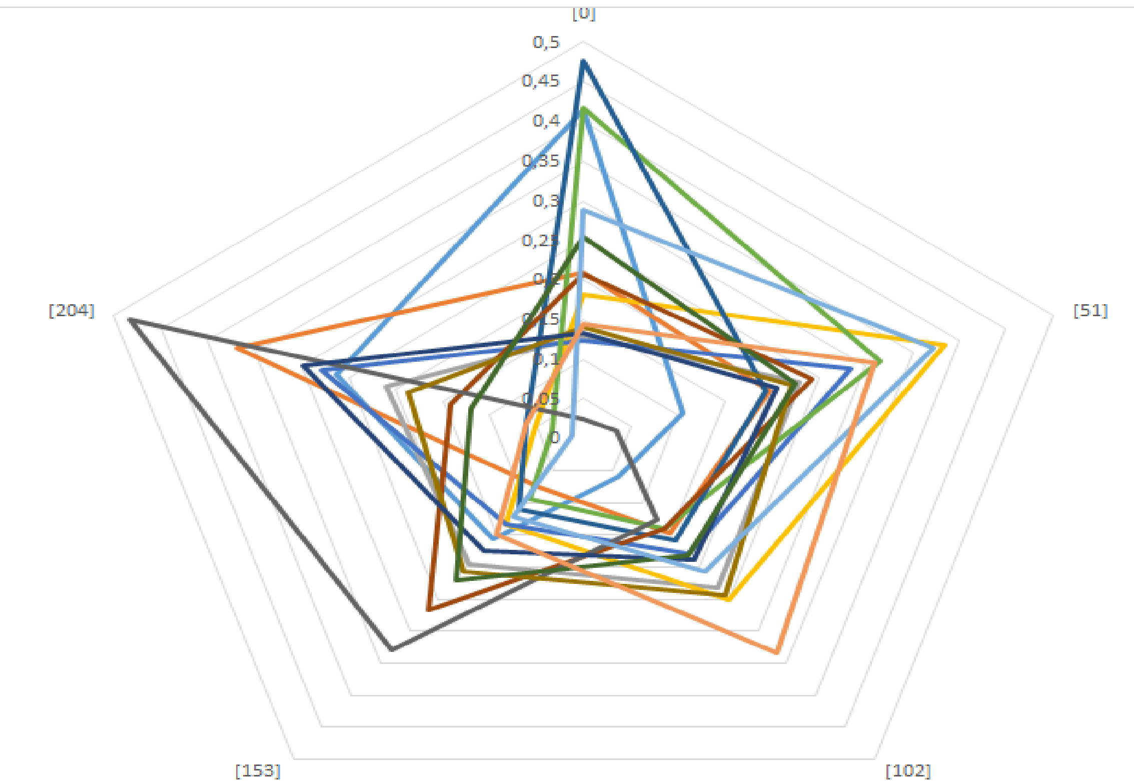


(b) Gráfica radial.

Figura 6.17: Histograma del parámetro *value* de las pinturas Leonardo Da Vinci.

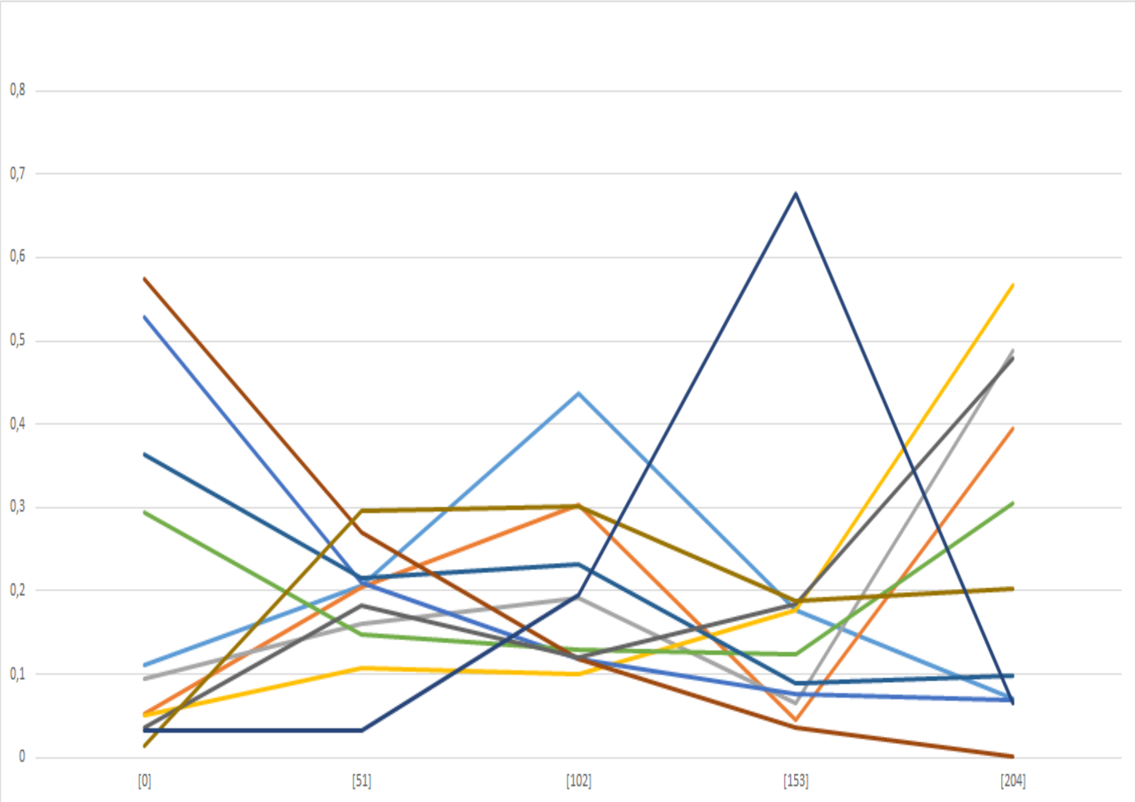


(a) Gráfica de líneas.

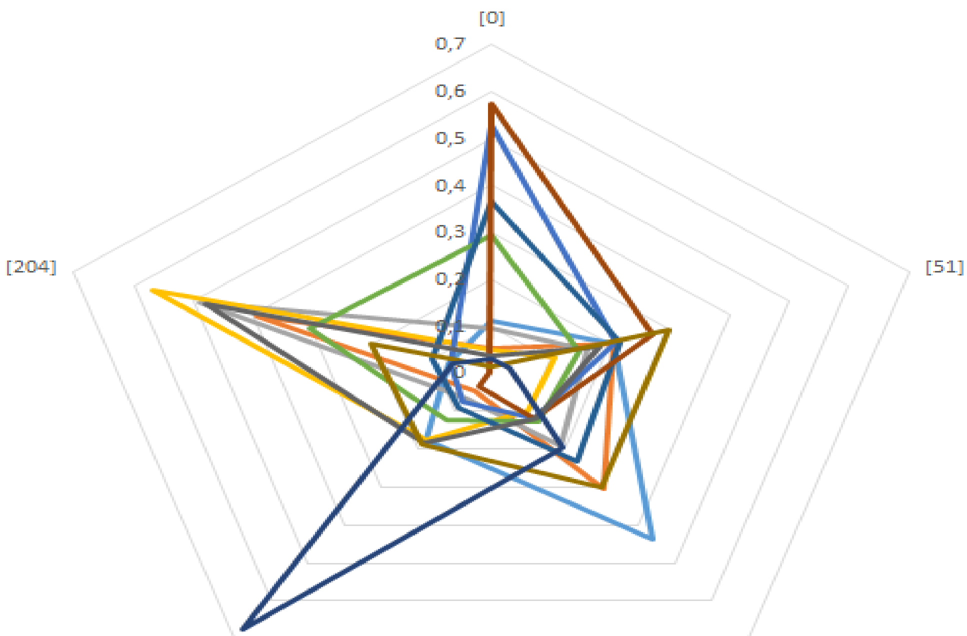


(b) Gráfica radial.

Figura 6.18: Histograma del parámetro *value* de las pinturas de Diego Rivera.

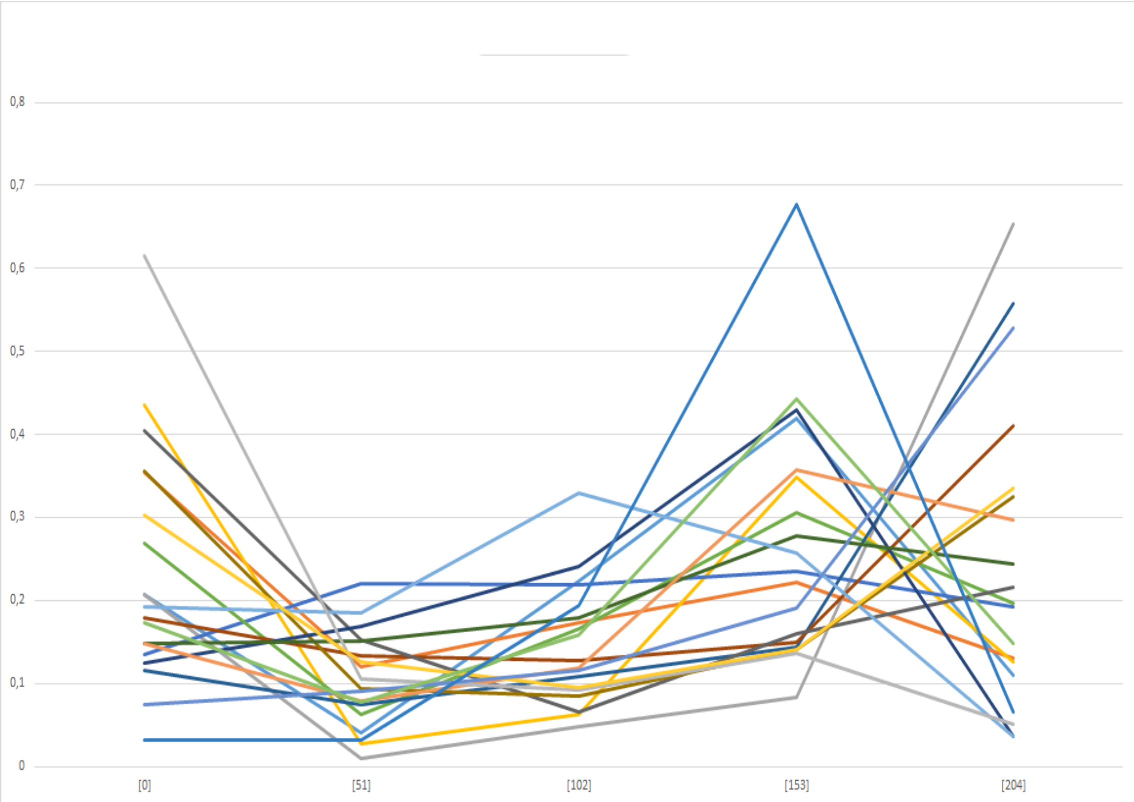


(a) Gráfica de líneas.

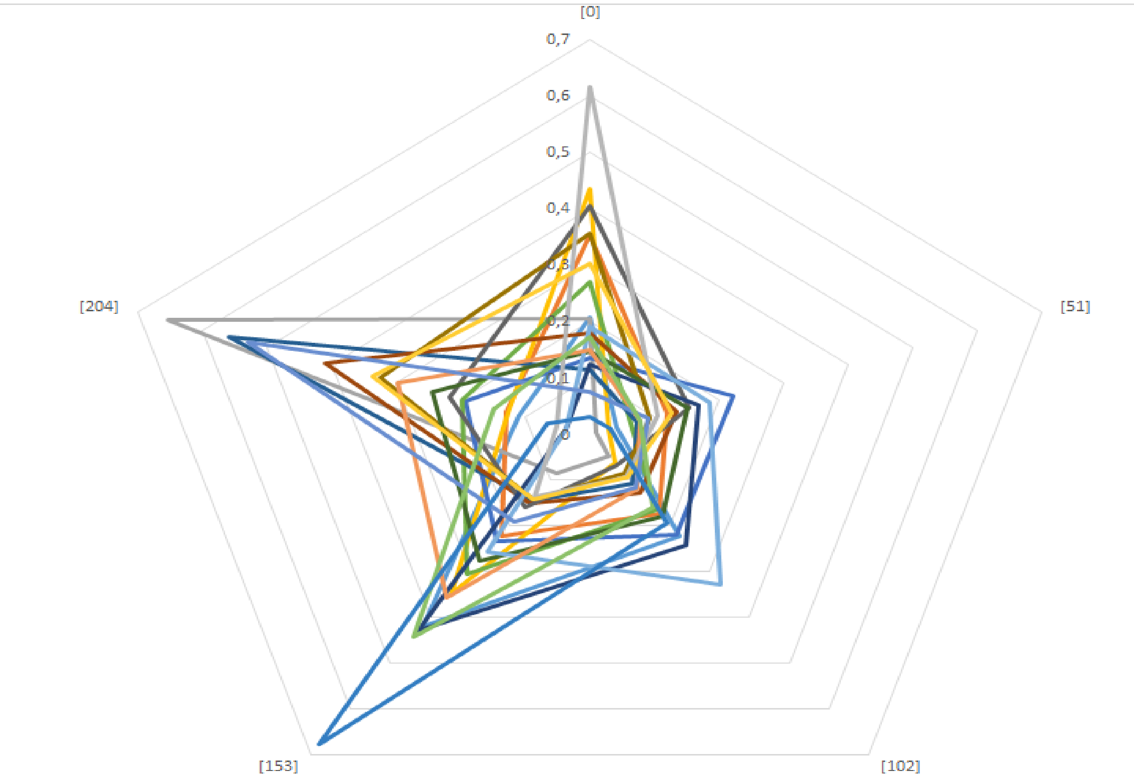


(b) Gráfica radial.

Figura 6.19: Histograma del parámetro *value* de las pinturas de Claude Monet.

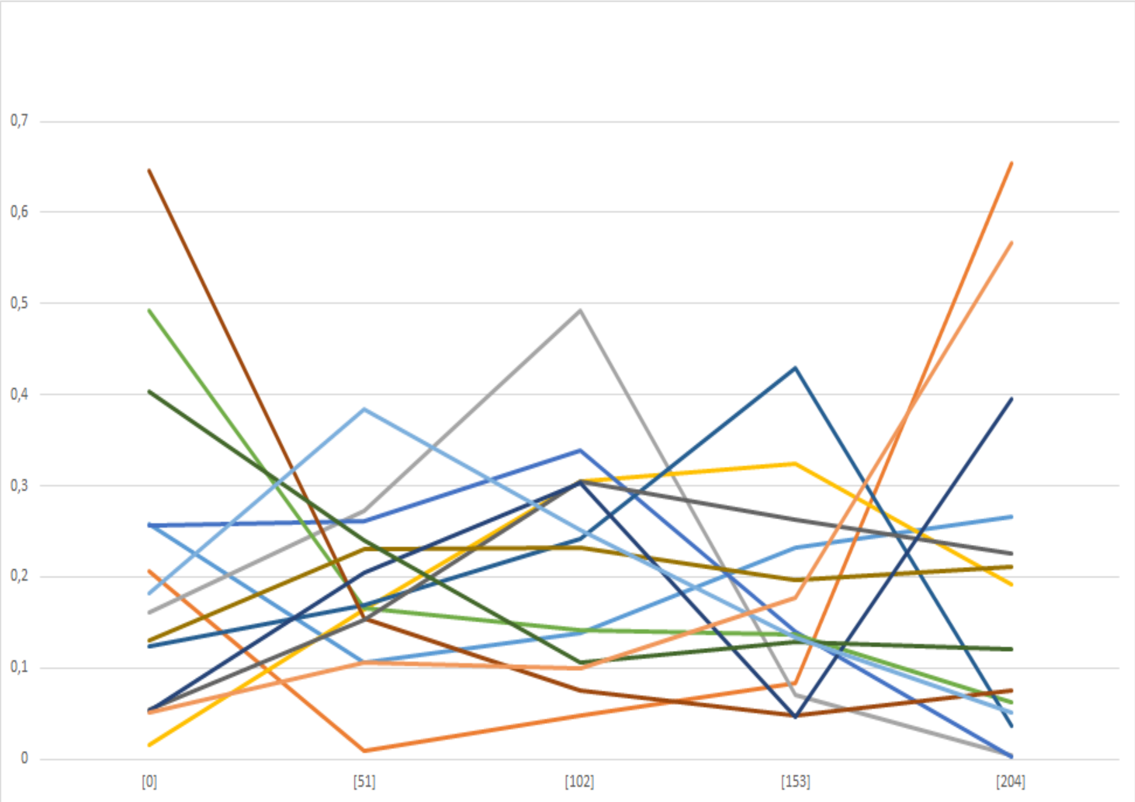


(a) Gráfica de líneas.

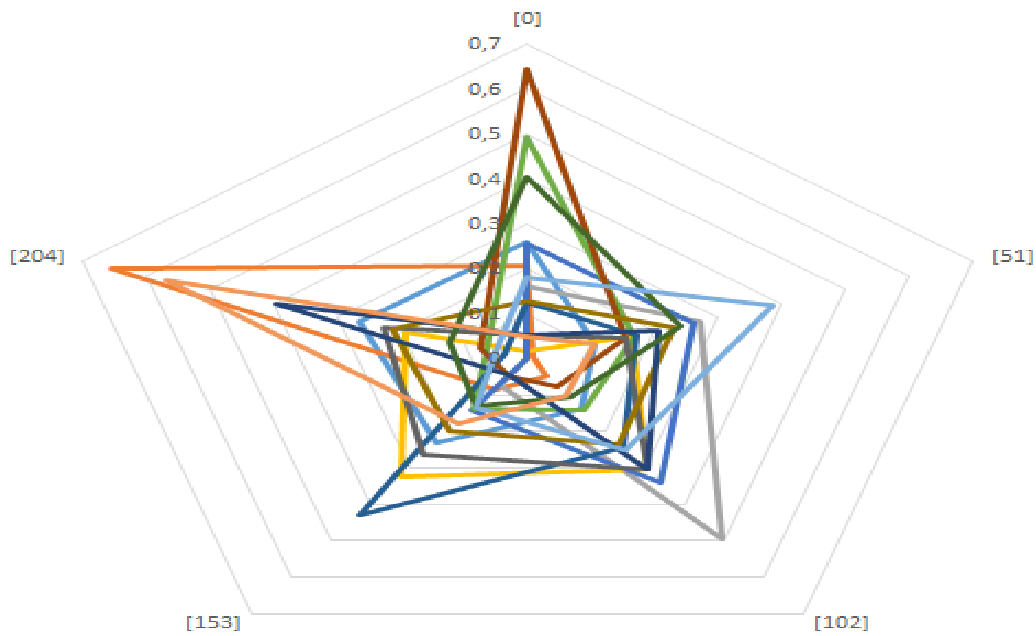


(b) Gráfica radial.

Figura 6.20: Histograma del parámetro *value* de las pinturas de Pablo Picasso.

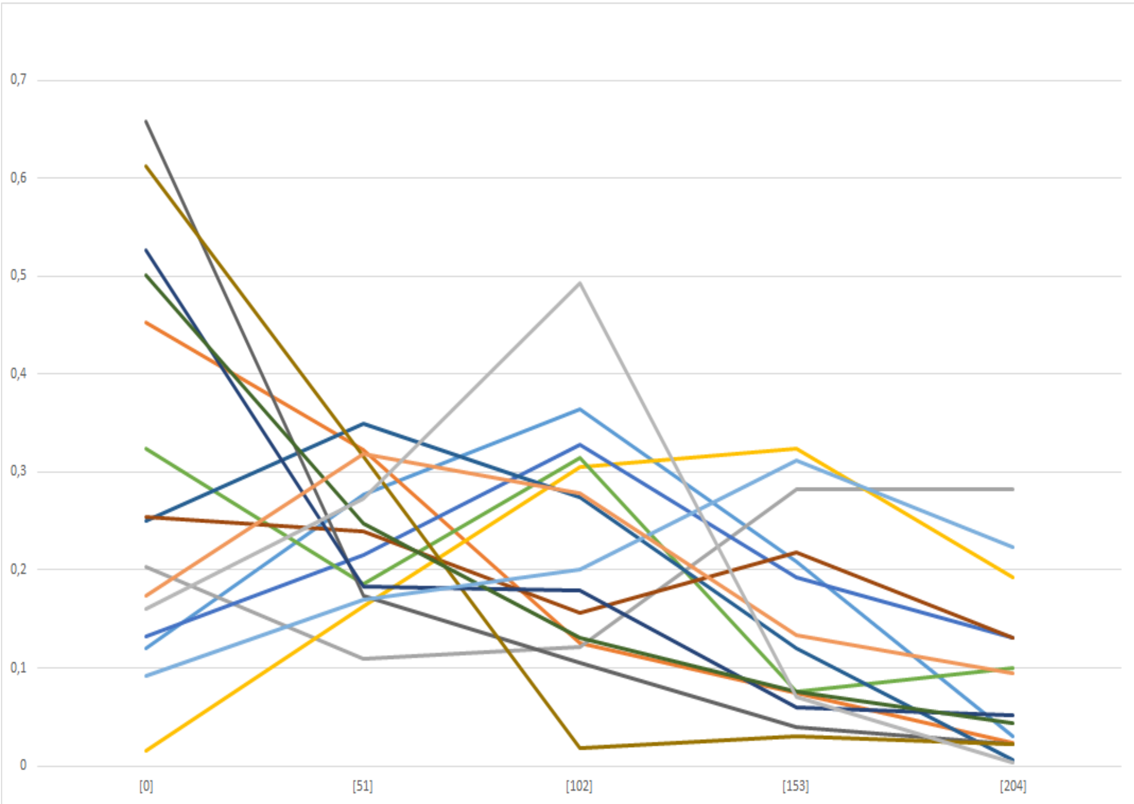


(a) Gráfica de líneas.

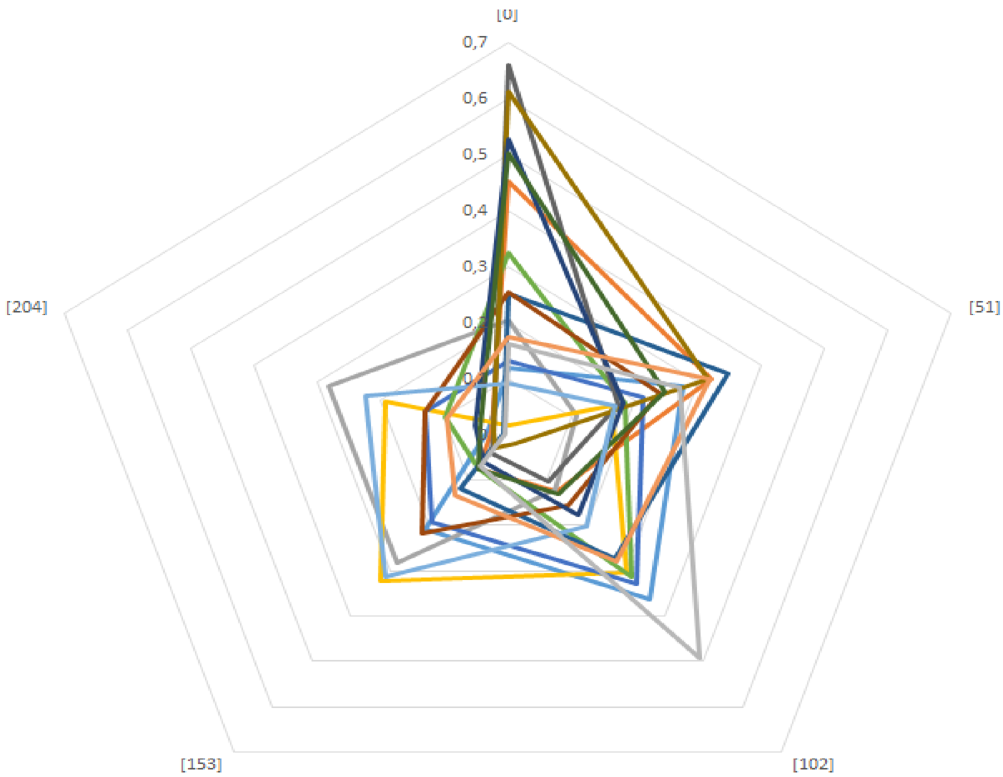


(b) Gráfica radial.

Figura 6.21: Histograma del parámetro *value* de las pinturas de **Combinadas**.

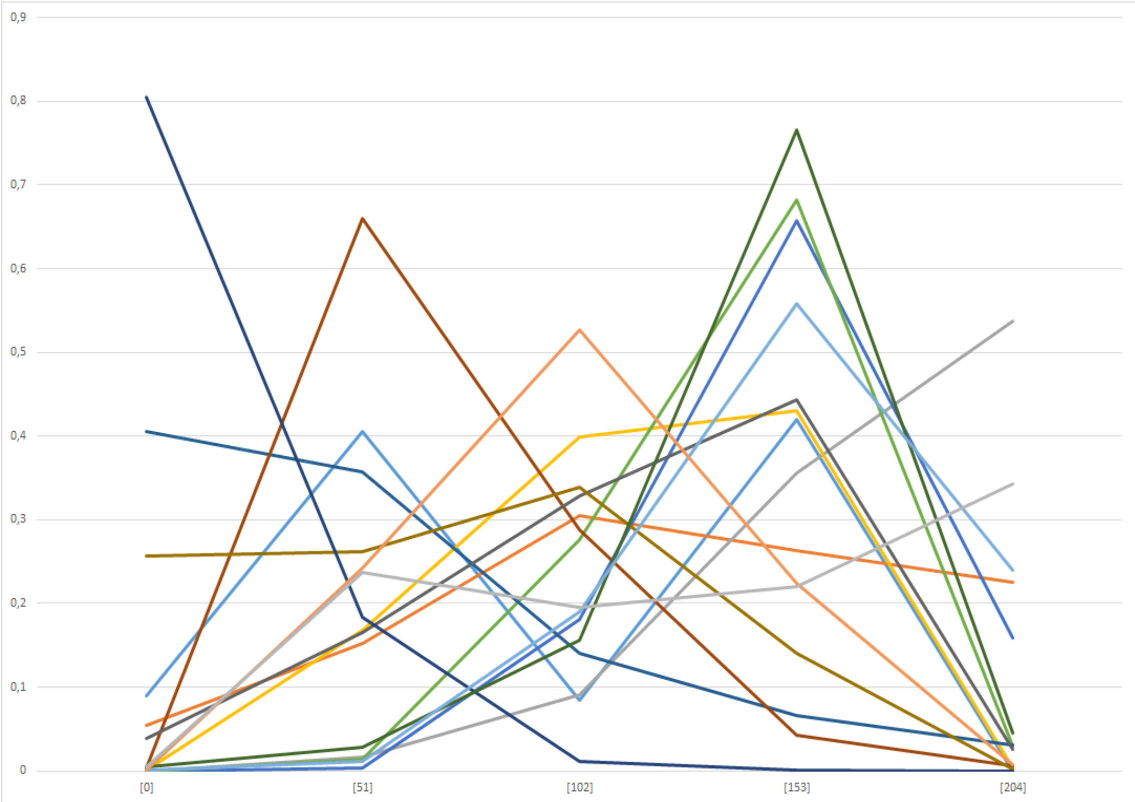


(a) Gráfica de líneas.

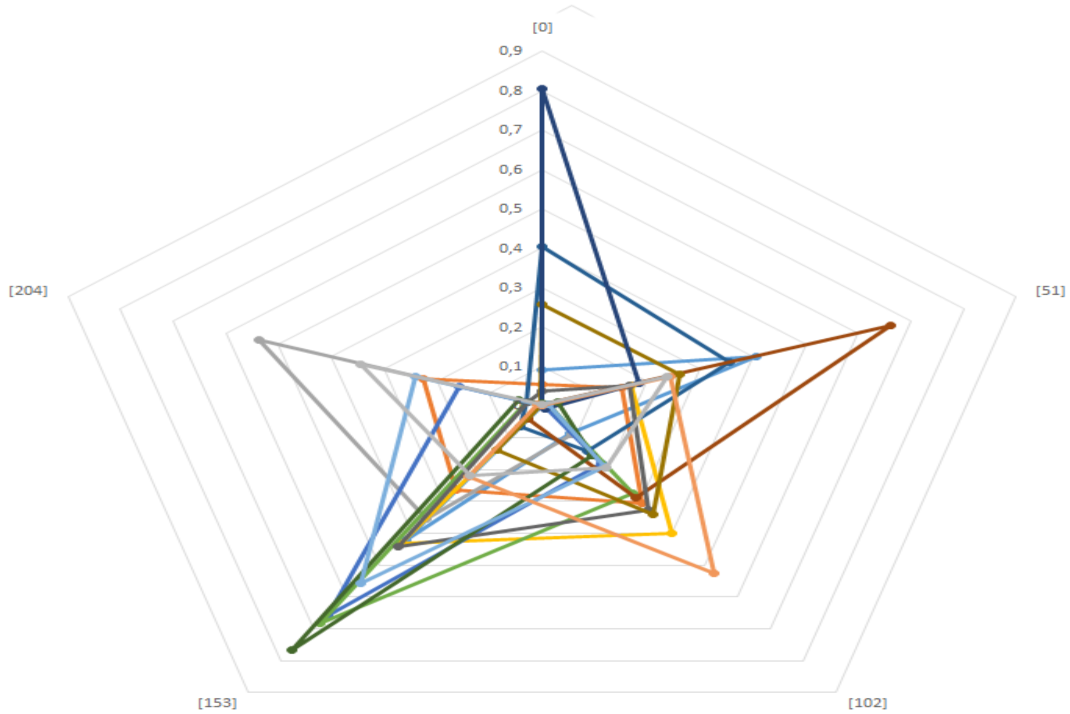


(b) Gráfica radial.

Figura 6.22: Histograma del parámetro *value* de las pinturas de Pierre-Auguste Renoir.



(a) Gráfica de líneas.



(b) Gráfica radial.

Figura 6.23: Histograma del parámetro *value* de las pinturas de Vincent Van Gogh.

En la Figura 6.17 se muestran los histogramas generados a partir de las pinturas de **Leonardo Da Vinci**. En 6.17 a) se puede observar que los colores oscuros abundan en las pinturas **Da Vinci** , ya que es ahí donde se tiene el mayor número de ocurrencias, disminuyendo de manera gradual hacia los tonos más claros. En 6.17 b) se aprecia que **Da Vinci** muestra estilo similar en la mayoría de sus pinturas. Este comportamiento, como se había mencionado anteriormente, es muy probable que se deba al uso del *chiaroscuro*.

De los histogramas mostrados en la Figura 6.16 se observan picos en los tonos muy oscuros y en los tonos claros y muy claros. Esto hace suponer que el **contraste** es uno de los elementos presentes en las pinturas de **Dalí**. Sin embargo, los histogramas generados por la pinturas de **Dalí** no muestran que tuviera algún estilo definido respecto al uso de colores brillantes y oscuros.

En el caso de **Diego Rivera**, sí se observa comportamiento similar en algunas de sus pinturas (Figura 6.18) b). Las formas observadas en los histogramas sugieren que **Rivera** solía utilizar tonos oscuros y tonos muy claros en sus pinturas, logrando efectos contrastantes. **Renoir**, muestra comportamiento similar al de **Da Vinci** (6.22 a), en donde algunas de sus pinturas destacan por el uso de tonalidades oscuras y tonos medios; los tonos claros y muy claros son poco frecuentes en algunas de sus pinturas.

La Figura 6.20 muestra el comportamiento de **Picasso**, se observa la tendecia al uso de colores claros y muy claros, con poca presencia de tonos oscuros.

Los casos de **Dalí**, **Van Gogh** y **Monet** son más complejos. En las Figuras 6.16, 6.23 y, 6.19 no se observa algún patrón o comportamiento característico.

6.2. Resultados análisis textural

6.2.1. Matriz de Co-ocurrencia de niveles de gris

Por cada pintura estudiada se generaron seis imágenes basadas en los descriptores de la **GLCM**. Estos descriptores fueron: **segundo momento (ASM)**, **contraste**, **correlación**, **disimilitud**, **entropía** y, **homogeneidad**. Para tratar de determinar qué tan presente está cada uno de los descriptores anteriores en el trabajo de cada pintor, se obtuvo el promedio[4] y la desviación estándar de cada descriptor generado. Los promedios obtenidos se muestran en el cuadro 6.3 y las desviaciones estándar respectivas se muestran en el cuadro 6.4.

Los parámetros utilizados para llevar a cabo el cálculo de la **GLCM** y los experimentos, fueron los siguientes:

- Ocho niveles de gris. Como se menciona en (Hall-Beyer, 2017) calcular la matriz de co-ocurrencia con pocos niveles de gris reduce la aparición de ceros en las celdas de la matriz y otorga mayor validez estadística al método, a diferencia de calcularla con un número elevado de niveles de gris.

- Relación espacial. Se consideraron tres relaciones con distancia de un pixel: 0

[4] Los valores de todos los descriptores fueron normalizados al intervalo [0-1] para facilitar las comparaciones.

(0,1), 45(1,1) y 90 (1,0) grados. Los resultados obtenidos no mostraron diferencias significativas, por esta razón, se presentan solamente los resultados de la relación 0 (0,1) grados.

- Tamaño de la ventana deslizante. Se eligió una ventana deslizante de 7x7 pixeles. Dicho tamaño permite describir con mayor detalle las características presentes en la textura, a diferencia de una ventana con mayor tamaño.

	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
Aleatorias	0.42	0.9298	0.1163	0.6877	0.2308	0.415
Dalí	0.4989	0.9417	0.0615	0.7647	0.1483	0.3237
Da Vinci	0.5159	0.9644	0.0685	0.7685	0.1732	0.3065
Diego Rivera	0.4143	0.9567	0.0891	0.7173	0.2132	0.3886
Combinadas	0.4487	0.9398	0.0909	0.7133	0.2038	0.3674
Monet	0.4074	0.9563	0.0884	0.6888	0.2198	0.3885
Picasso	0.4133	0.9613	0.0807	0.6799	0.2047	0.3843
Renoir	0.4731	0.9702	0.0883	0.7343	0.2028	0.3371
Van Gogh	0.3787	0.9668	0.1253	0.6511	0.262	0.4509

Cuadro 6.3: Descriptores promedio por pintor.

	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
Aleatorias	0.208	0.1349	0.0934	0.1672	0.1416	0.1825
Dalí	0.1322	0.047	0.0243	0.0909	0.051	0.0964
Da Vinci	0.08	0.0309	0.0178	0.0446	0.0374	0.0662
Diego Rivera	0.1335	0.0528	0.0344	0.101	0.0589	0.1064
Diversas	0.142	0.111	0.0491	0.0894	0.0795	0.1079
Monet	0.0748	0.0446	0.0289	0.065	0.0474	0.055
Picasso	0.1194	0.0956	0.028	0.0723	0.0544	0.0891
Renoir	0.1374	0.0404	0.0446	0.0836	0.0668	0.0963
Van Gogh	0.1554	0.0354	0.0571	0.1211	0.08442	0.1349

Cuadro 6.4: Desviaciones estándar de los descriptores calculados por pintor.

Segundo momento angular (ASM)

El descriptor ASM mide el orden de los pixeles estudiados. Si los pixeles son idénticos, el valor máximo que pude alcanzar el descriptor es uno.

En el cuadro 6.3 se observa que el mayor promedio lo presentan **Da Vinci** y **Salvador Dalí** mientras que los promedios más pequeños aparecen en **Aleatorias** y **Van Gogh**. En el cuadro 6.4 se puede ver que **Aleatorias** es el grupo con mayor desviación estándar. Lo anterior es muy probable que se deba a que son imágenes sin relación alguna entre ellas.

El resto de los grupos, a excepción de Da Vinci y Monet, presentan desviaciones estándar superiores a 0.1, destacan **Van Gogh** y **Combinadas** con valores cercanos a 0.15. En el caso de **Da Vinci** y **Monet**, considerando los pequeños valores de desviación estándar que presentan, se puede afirmar que este descriptor es persistente en sus obras, es decir, el valor promedio de ASM en una pintura no varía mucho respecto a otra.

La Figura 6.24 contiene los diagramas de cajas que fueron obtenidos para cada uno de los grupos estudiados. Este tipo de gráficas permite observar la dispersión de los datos obtenidos alrededor de la mediana.

q

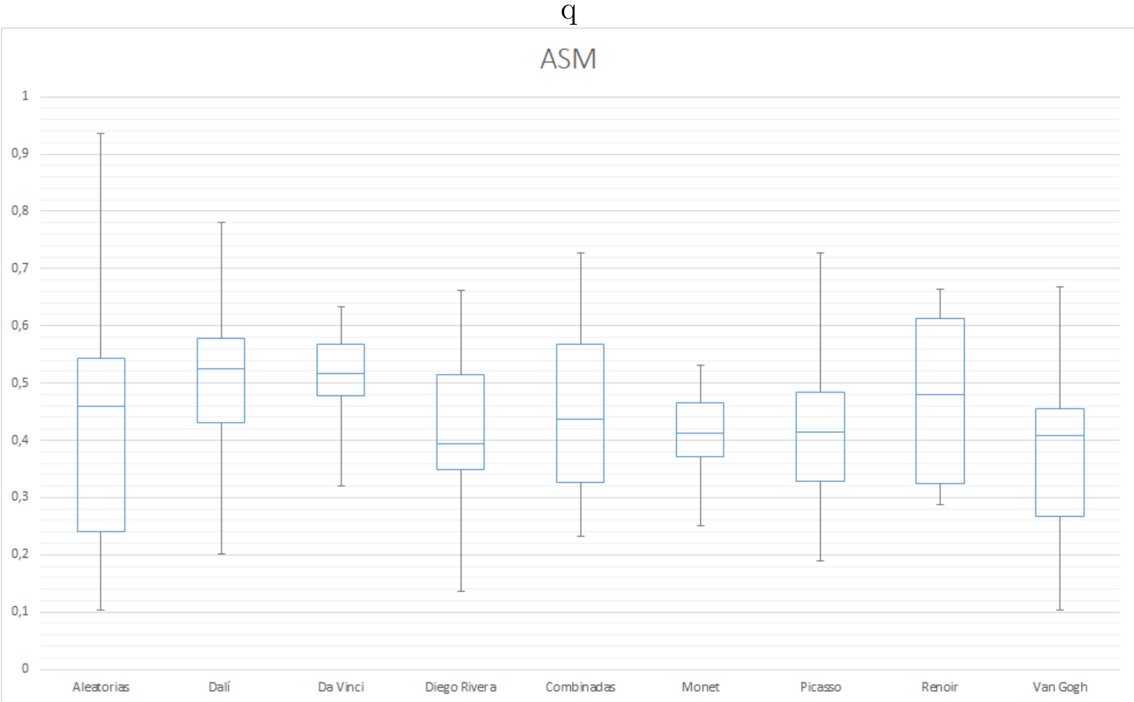


Figura 6.24: Diagrama de cajas asociada al descriptor ASM.

Correlación

La correlación es un descriptor que ofrece valores altos para ventanas de tamaño reducido, su valor tiende a disminuir para ventanas de mayor tamaño. Es por la razón anterior, que los promedios para la mayoría de los pintores superan el **0.95** (ver cuadro 6.3). Sin embargo, en **Aleatorias** se observa el menor promedio correlación entre las imágenes que componen al grupo, seguido por **Combinadas**. Si se observa el cuadro de desviaciones estándar (Figura 6.4), se nota que la correlación es una característica que comparten la mayoría de los pintores, a excepción de **Picasso** y, los grupos **Aleatorias** y **Combinadas**.

La Figura 6.25 muestra los diagramas de cajas asociado a los resultados obtenidos para cada pintura. En la Figura se observa que los grupos con mayor dispersión alrededor de la mediana son **Picasso**, **Aleatorias** y **Combinadas**.

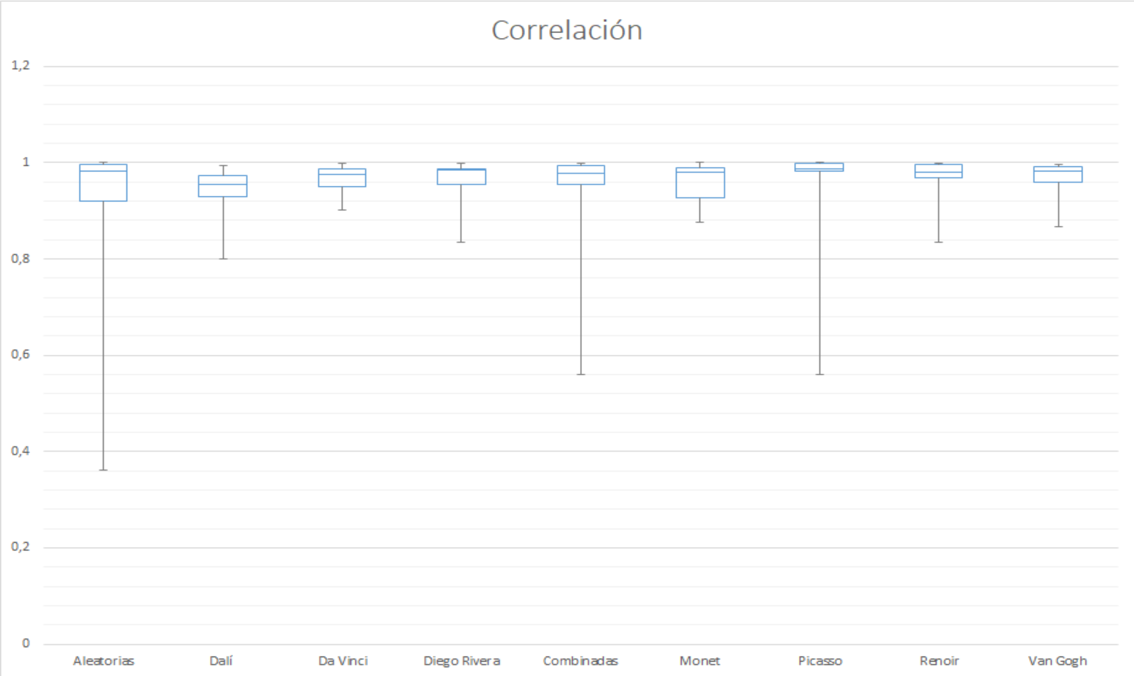


Figura 6.25: Gráfica de cajas asociada al descriptor correlación.

Contraste

Dicho de manera sencilla, el contraste mide las diferencias de entre los pixeles de un vecindario. Mientras mayor sea la diferencia, mayor será el contraste.

El cuadro 6.3 muestra a a**Aleatorias** con el mayor promedio de contraste, seguido de **Van Gogh** y **Combinadas**. Sin embargo, no existen diferencias considerables respecto a los promedios más bajos (**Da Vinci** y **Dalí**). La tabla de desviaciones estándar tampoco muestra diferencias importantes, a excepción de **Aleatorias** que destaca sobre el resto.

Cabe destacar que aunque los pintores comparten valores de desviación estándar similares, **Da Vinci** aparece nuevamente con el valor más pequeño.

La Figura 6.26 muestra los diagramas de cajas obtenidos a partir de los promedios de cada pintura analizada. Se puede observar que **Aleatorias** tiene la mayor dispersión de datos alrededor de la mediana. Considerando solamente a los pintores, **Van Gogh** presenta los datos más dispersos, y **Da Vinci** aparece como el pintor con datos más concentrados alrededor de la mediana.

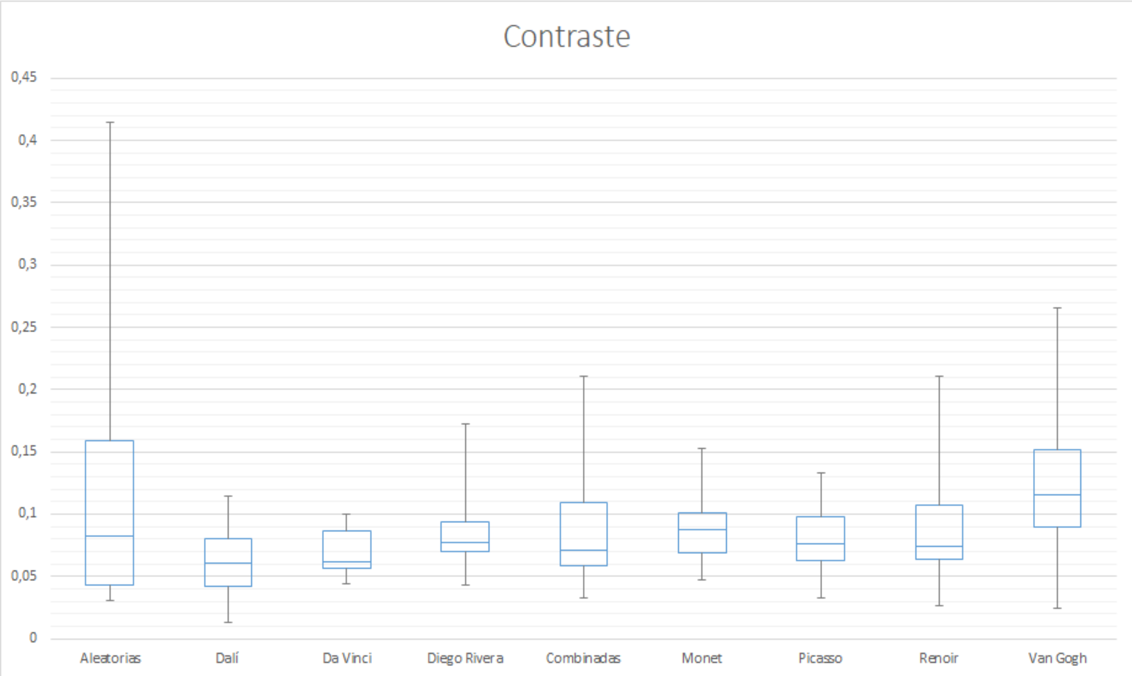


Figura 6.26: Diagrama de cajas asociada al descriptor contraste.

Homogeneidad

La homogeneidad incrementa su valor mientras menos contraste exista en el vecindario analizado. En el cuadro 6.3 destaca sobre el resto **Dalí** y **Da Vinci** con los promedios más altos. Al contrario, **Aleatorias** y sobretodo **Van Gogh**, presentan los promedios más pequeños.

Respecto a las desviaciones estándar (cuadro 6.4), **Da Vinci** aparece nuevamente con el valor más pequeño, seguido por **Monet** y **Picasso**. Por otra parte, **Aleatorias** aparece con el mayor valor, seguido de **Van Gogh**. Con los resultados expuestos, se pude decir que la homogeneidad es otra característica persistente en los trabajos de **Da Vinci**.

La Figura 6.27 muestra los diagramas de cajas obtenidos a partir de los resultados de homogeneidad para cada pintura. En estos diagramas so observa **Da Vinci** con la menor dispersión de datos, seguido de **Monet**. Por otro lado, **Aleatorias** es el grupo con mayor dispersión.

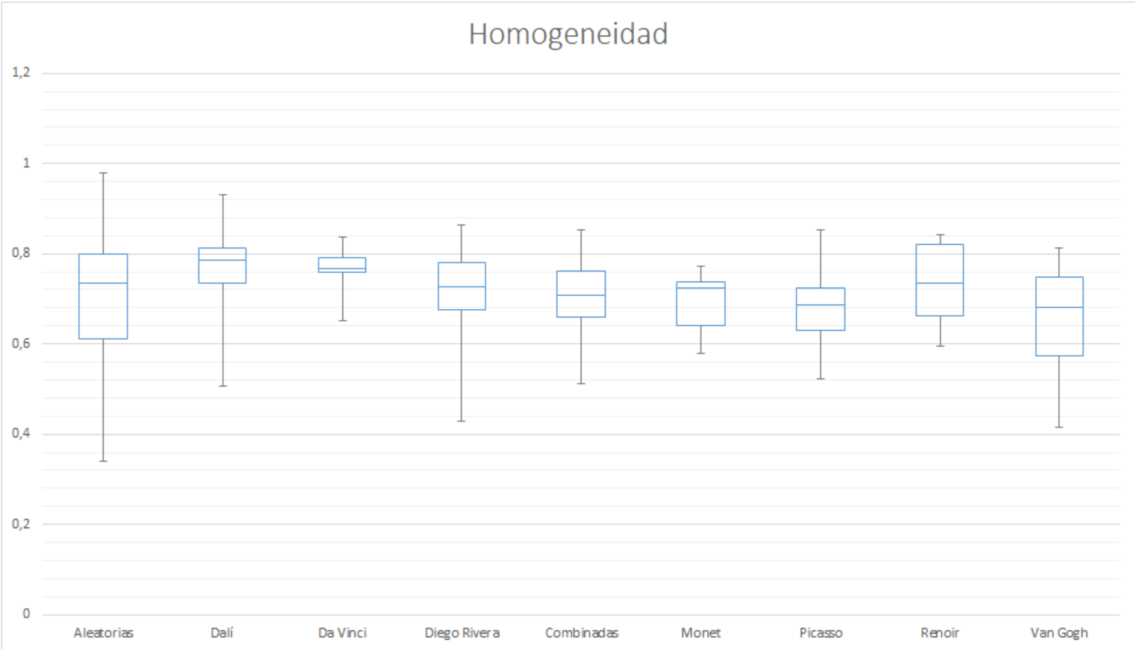


Figura 6.27: Diagrama de cajas asociado al descriptor homogeneidad.

Disimilitud

Es un descriptor similar al contraste, solo que en este caso se miden las diferencias absolutas de los valores de intensidad de los pixeles vecinos.

El cuadro 6.3 muestra a **Van Gogh** con el promedio más alto, seguido de **Aleatorias**. Los promedios más pequeños aparecen en **Dalí** y **Da Vinci**.

En el caso de las desviaciones estándar (cuadro 6.4) destaca **Aleatorias** con el valor más elevado. Por otra parte, **Da Vinci** aparece nuevamente con la desviación estándar más baja, aunque no existen diferencias considerables con los valores presentados por el resto de los artistas.

La Figura 6.28 muestra los diagramas de cajas asociados al descriptor *disimilitud*. Similar a lo mostrado en las desviaciones estándar, **Aleatorias** es le grupo con la mayor dispersión de datos. Los datos menos dispersos se presentan nuevamente en **Da Vinci** y también, en las pinturas de **Monet**.

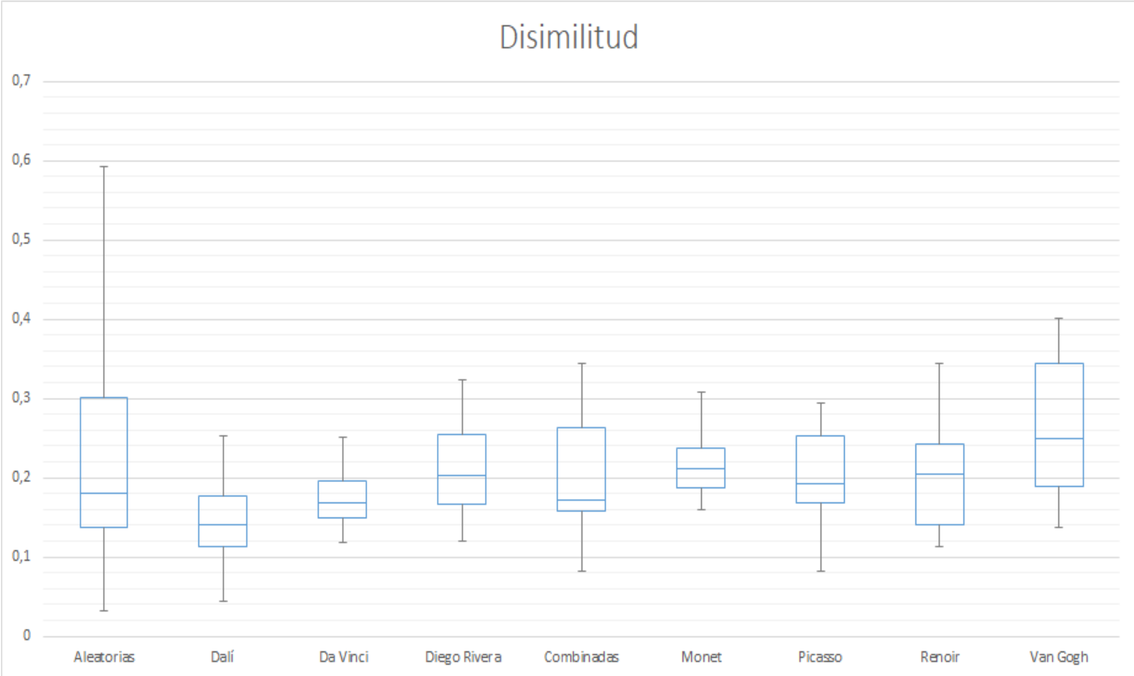


Figura 6.28: Diagrama de cajas asociada al descriptor disimilitud.

Entropía

La entropía es una medida de desorden de los pixeles. El mayor promedio se observa en **Van Gogh** y **Aleatorias**. Los promedios más bajos los tienen **Dalí** y **Da Vinci**, el resto de los grupos poseen promedios similares que oscilan entre 0.35 y 0.4.

Se observa en el cuadro 6.4 donde aparecen las desviaciones estándar, que **Aleatorias** aparece con el valor más alto, seguido de **Van Gogh**. **Monet** y **Da Vinci** son los pintores con desviaciones más pequeñas, los cuales muestran diferencia considerable con el resto de los artistas. Con lo anterior se puede afirmar que el índice de entropía encontrado en pinturas tanto de **Da Vinci** como de **Monet** es poco variable a lo largo de sus trabajos.

La Figura 6.29 muestra los diagramas de cajas obtenidos de las pinturas analizada. Como se pudo ver en el cuadro de desviaciones estándar, **Aleatorias** es el grupo con mayor dispersión de datos, mientras que **Da vinci** y **Monet** aparecen con la menor dispersión de datos.

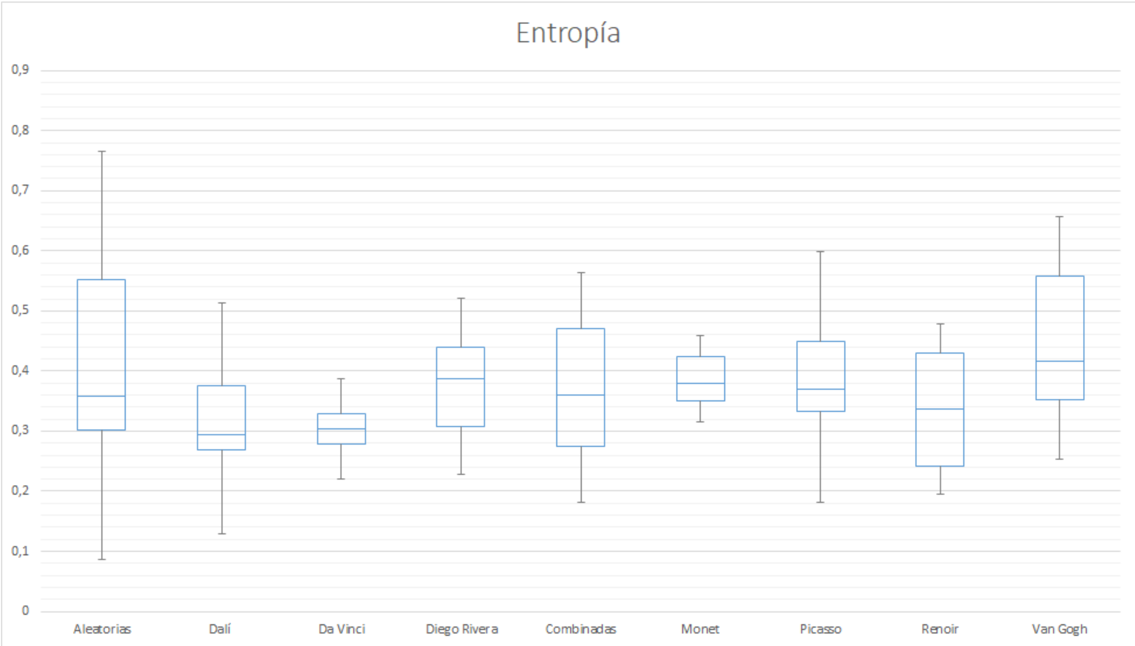
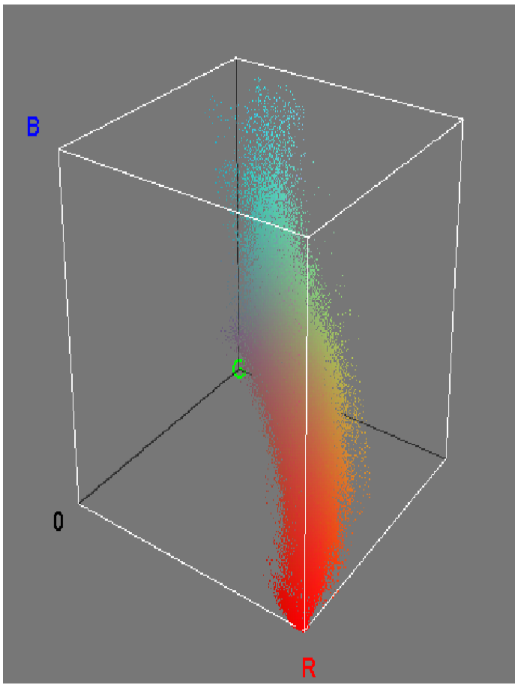


Figura 6.29: Diagrama de cajas asociada al descriptor entropía.

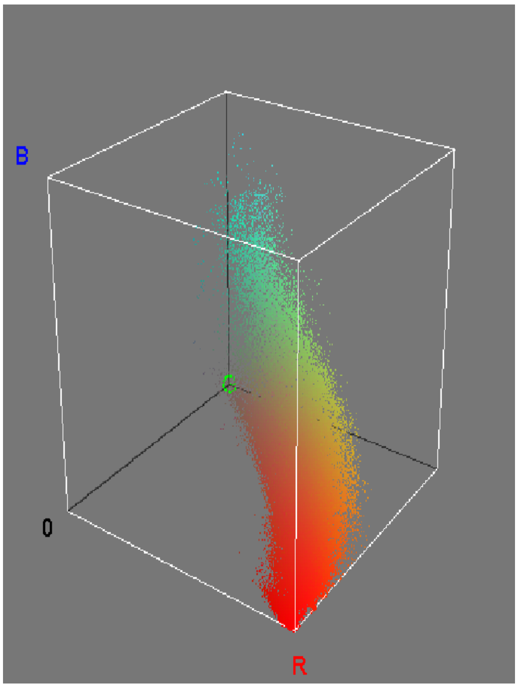
6.2.2. Imágenes paramétricas

Para decidir qué descriptores utilizar para crear las imágenes paramétricas se realizó análisis de componentes principales a los seis descriptores calculados, considerando solo los tres primeros componentes, con la meta de tratar de identificar a aquellos descriptores menos correlacionados. Los vectores propios que resultaron de este análisis se muestran en el apéndice D.

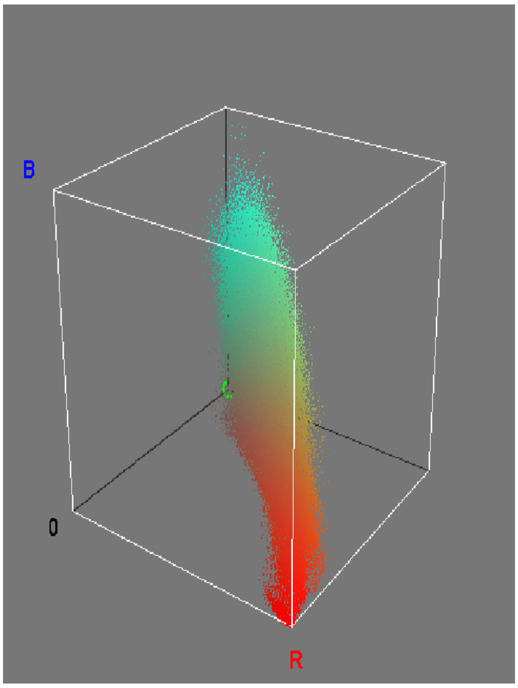
De acuerdo a lo observado en los vectores propios, se concluyó que los descriptores más correlacionados en el primero componente son **homogeneidad** y **correlación**. En el segundo componente, la **entropía** fue el descriptor con mayor peso en la mayoría de las pinturas; para el tercer componente, la **disimilitud** apareció con mayor peso en la gran mayoría de las pinturas. Por lo expuesto anteriormente, se eligieron dichos descriptores para generar imágenes paramétricas.



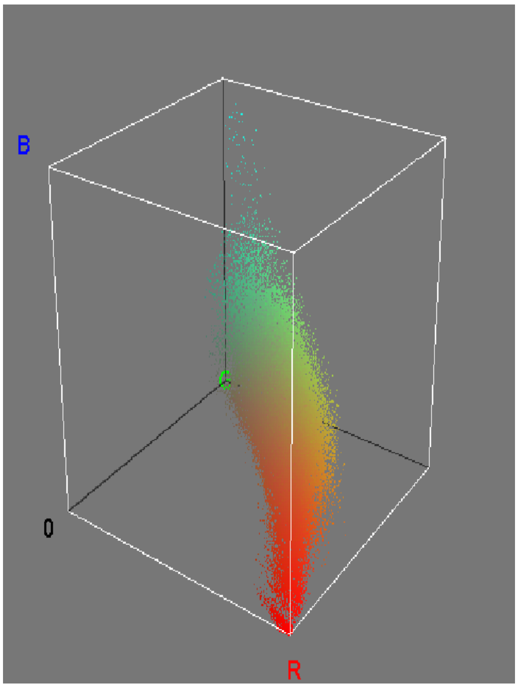
(a) Diego Rivera



(b) Renoir

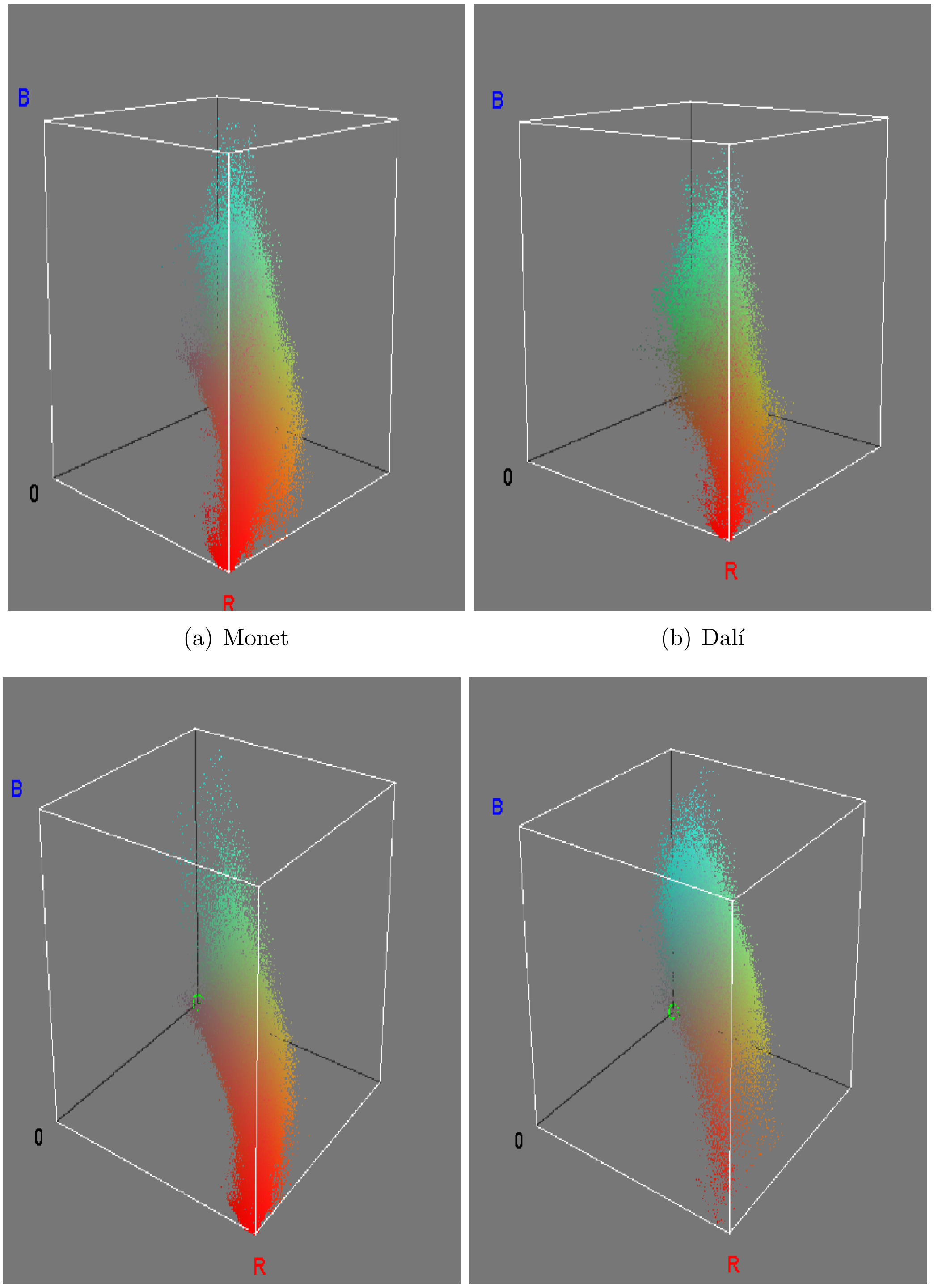


(c) Picasso



(d) Van Gogh

Figura 6.30: Distribuciones de imágenes paramétricas utilizando los descriptores disimilitud, homogeneidad y entropía.



(a) Monet

(b) Dalí

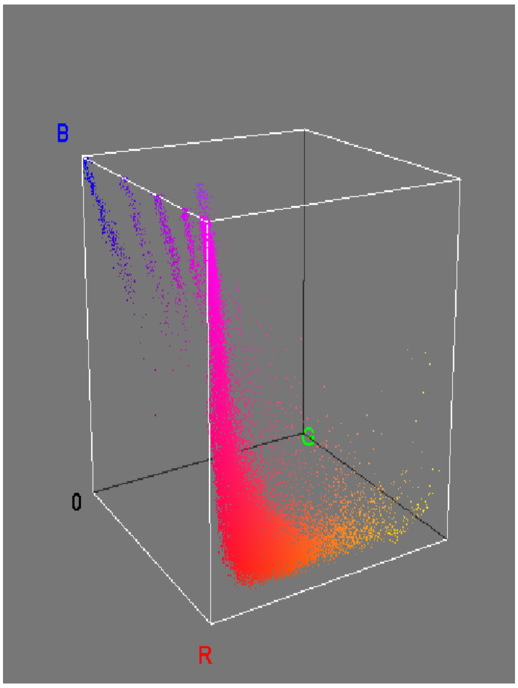
(c) Da Vinci

(d) Aleatorias

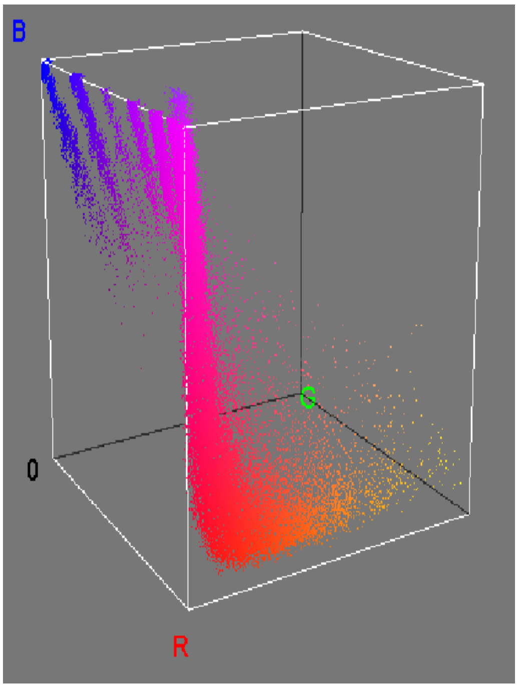
Figura 6.31: Distribuciones de imágenes paramétricas utilizando los descriptores disimilitud, homogeneidad y entropía.

En las Figuras 6.30 y 6.31 se observa el comportamiento de la distribución formada por los descriptores disimilitud, entropía y homogeneidad. Se puede ver que a pesar de que las pinturas pertenecen a distintos artistas, las distribuciones resultan bastante similares. No se logran detectar diferencias considerables entre los distintos pintores. Por esta razón, se decidió elegir dos combinaciones de descriptores adicionales: ASM, correlación, contraste y ASM, disimilitud y entropía.

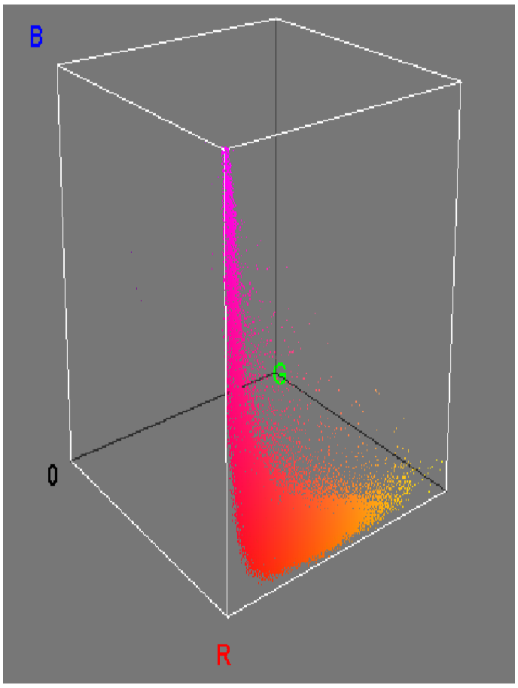
Las Figuras 6.32 y 6.33 muestran las distribuciones de la combinación ASM, correlación y contraste.



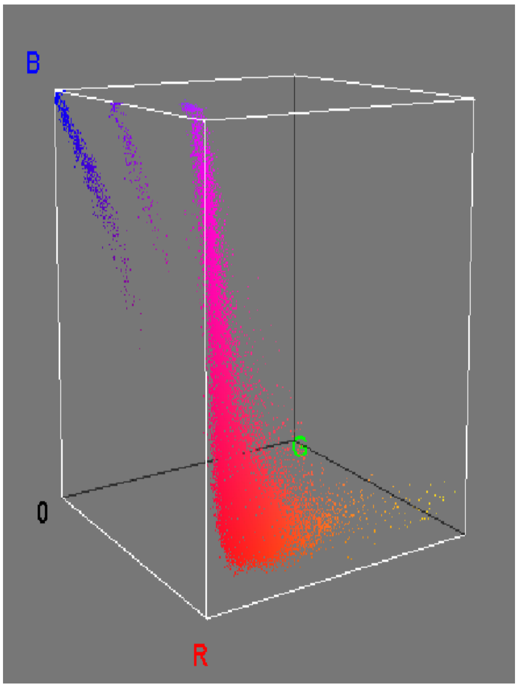
(a) Diego Rivera



(b) Renoir

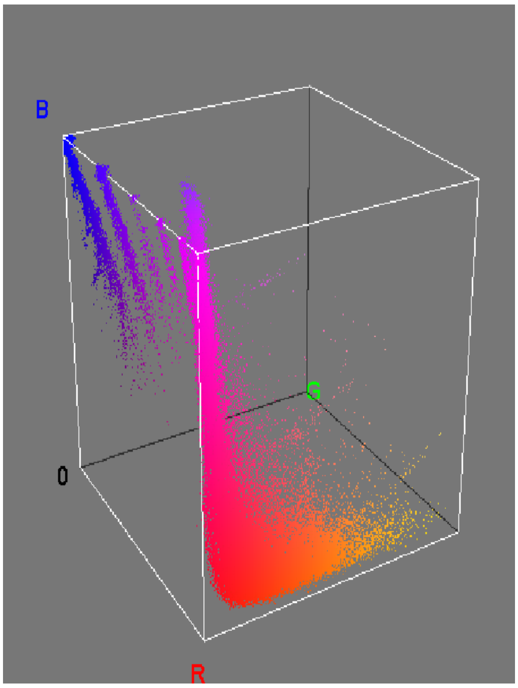


(c) Picasso

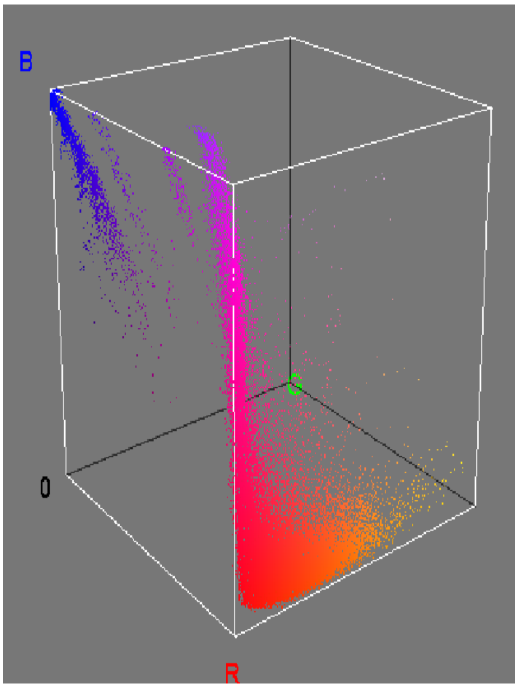


(d) Van Gogh

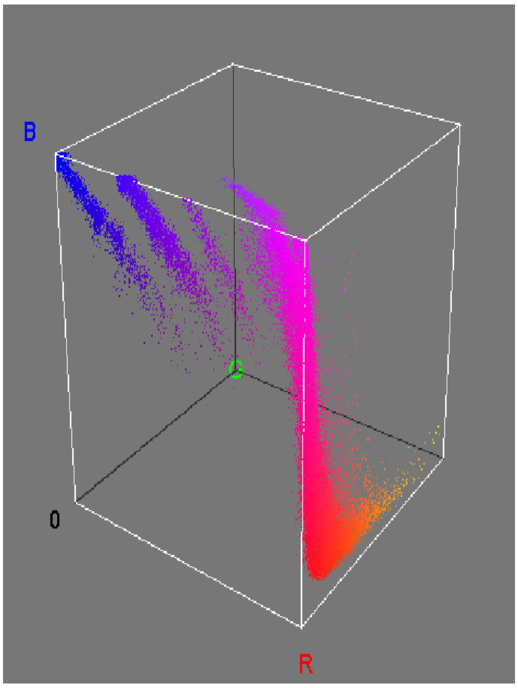
Figura 6.32: Distribuciones de imágenes paramétricas utilizando los descriptores ASM, correlación y contraste.



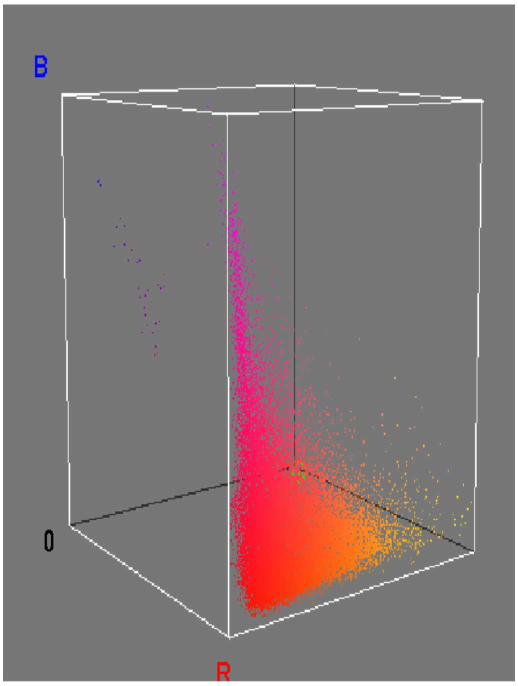
(a) Monet



(b) Dalí



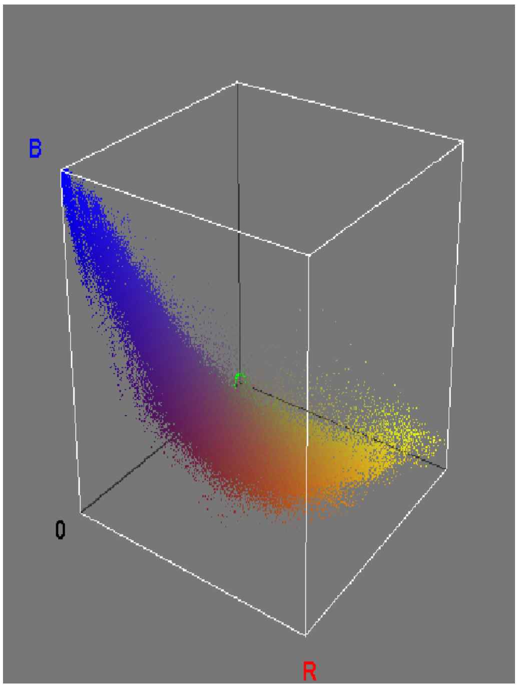
(c) Da Vinci



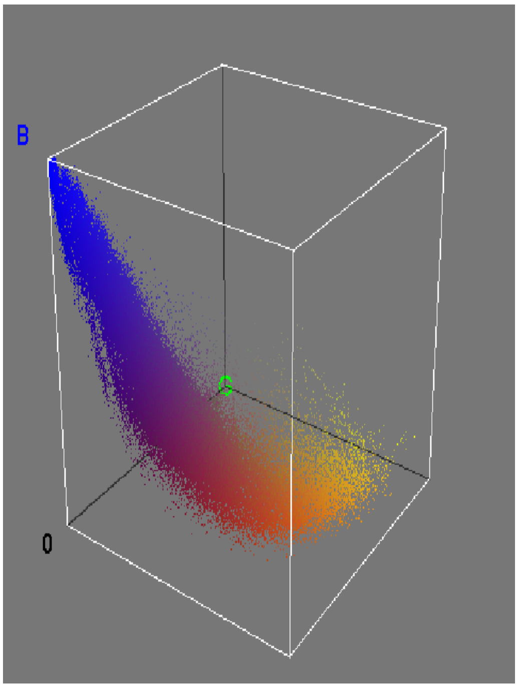
(d) Aleatorias

Figura 6.33: Distribuciones de imágenes paramétricas utilizando los descriptores ASM, correlación y contraste.

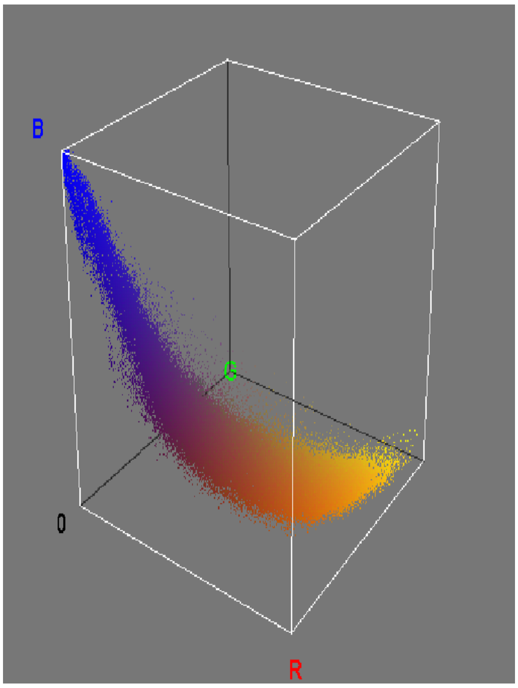
Las Figuras 6.34 y 6.2.2 muestran las distribuciones de la combinación de descriptores ASM, disimilitud y entropía.



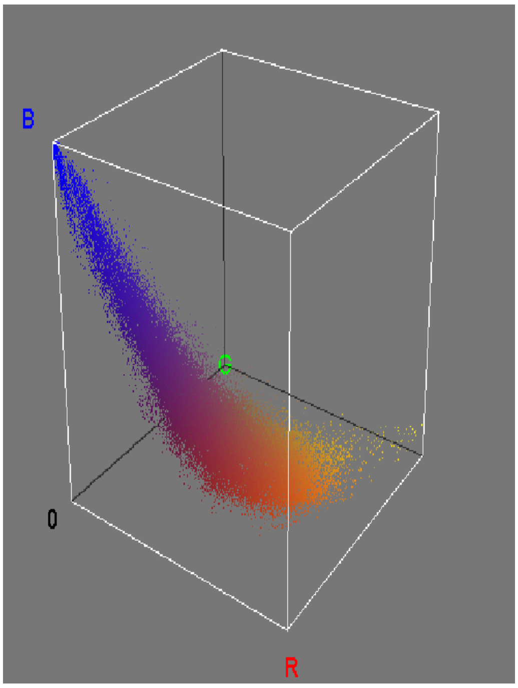
(a) Diego Rivera



(b) Renoir

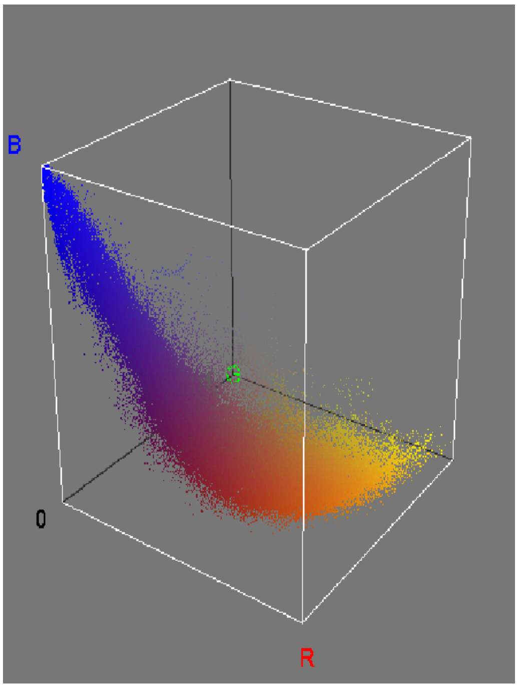


(c) Picasso

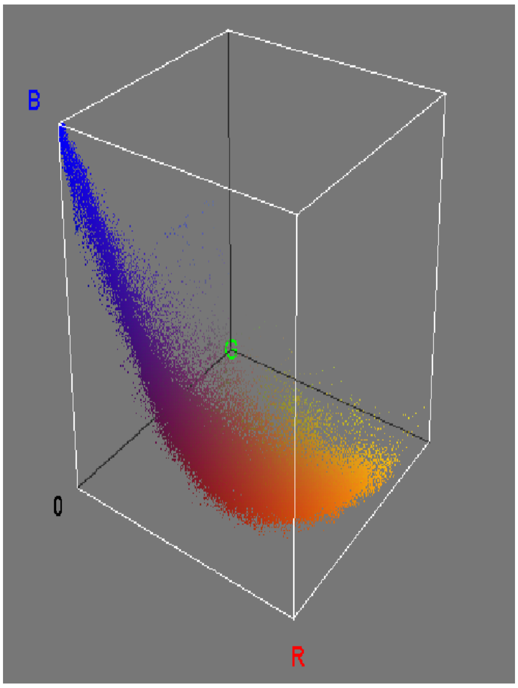


(d) Van Gogh

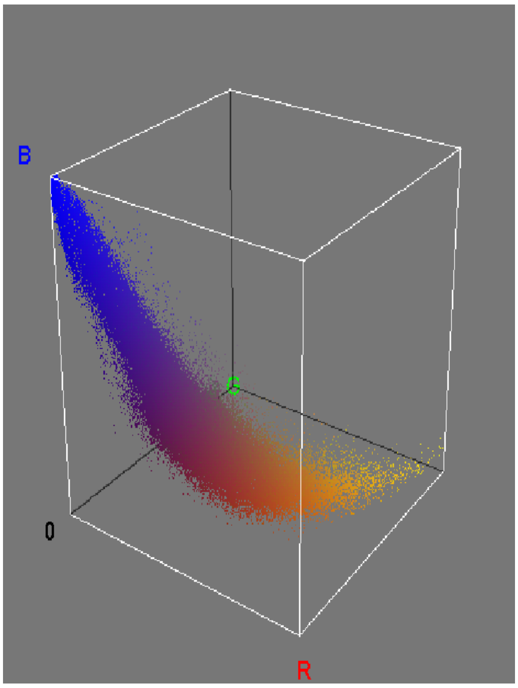
Figura 6.34: Distribuciones de imágenes paramétricas utilizando los descriptores ASM, disimilitud y entropía.



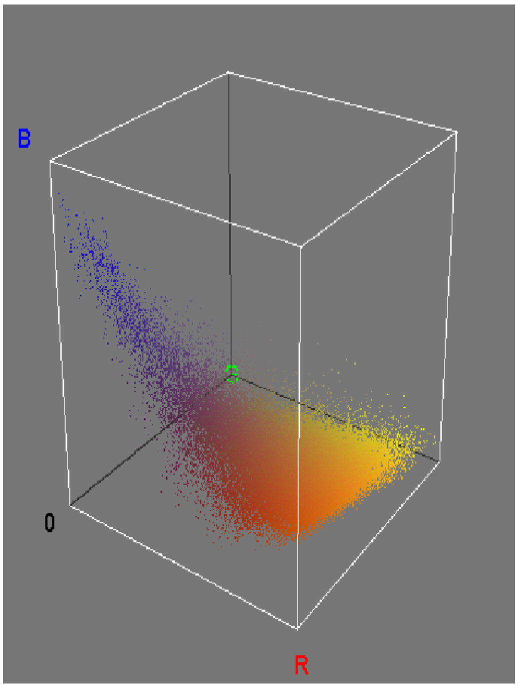
(a) Monet



(b) Dalí



(c) Da Vinci



(d) Aleatorias

Figura 6.35: Distribuciones de imágenes paramétricas utilizando los descriptores ASM, disimilitud y entropía.

Las distribuciones texturales de las dos nuevas combinaciones de descriptores muestran comportamientos similares, a pesar de que se examinaron pinturas de diferentes artistas. En algunas de las distribuciones se pueden observar ligeras diferencias. Sin embargo, no se lograron detectar elementos o características específicos que permitan distinguir entre los diversos pintores estudiados.

Estos resultados pueden deberse a los parámetros utilizados para calcular la matriz de co-ocurrencia, podrían obtenerse resultados distintos si se aumenta el tamaño deslizante y se realizan pruebas con distintas relaciones espaciales para el calculo de la GLCM, además de probar con diferentes niveles de gris.

6.2.3. Patrones binarios locales

Se utilizó radio=1 y se consideraron ocho vecinos para generar los histogramas de LBP y ULBP. Se compararon los histogramas, tanto de LBP como de ULBP de todas las pinturas pertenecientes al mismo artista. Cabe mencionar que mientras más pequeño sea el número arrojado tras la comparación más parecido existe entre los histogramas. Se promediaron los valores obtenidos después de aplicar la métrica de comparación y se calcularon las desviaciones estándar respectivas.
La métrica utilizada para comparar histogramas se conoce como **chi cuadrada** y se define como sigue:

$$d(H_1, H_2) = \sum_{i}^{bins} \frac{(H_{1i} - H_{2i})^2}{(H_{1i} + H_{2i})} \tag{6.1}$$

El cuadro 6.5 muestra los datos obtenidos al calcular el promedio de las comparaciones y las desviaciones estándar. Las Figuras 6.36 y 6.37 muestran las gráficas de los resultados de dichas comparaciones.

	Promedio ULBP	Desviación estándar	Promedio LBP	Desviación estándar
Aleatorias	0.413	0.3587	0.4528	0.391
Dalí	0.126373	0.20792	0.147291	0.132338
Da Vinci	0.063585	0.04012	0.0768	0.0466
Diego Rivera	0.0829	0.107057	0.122103	0.0881514
Diversas	0.1801	0.19124	0.20132	0.189276
Monet	0.106047	0.0996505	0.133392	0.118267
Picasso	0.0740757	0.065366	0.10156	0.0844885
Renoir	0.124663	0.166157	0.138824	0.166985
Van Gogh	0.1161112	0.0925035	0.131	0.098104

Cuadro 6.5: Valor promedio de las comparaciones entre histogramas de un mismo pintor y desviaciones estándar respectivas.

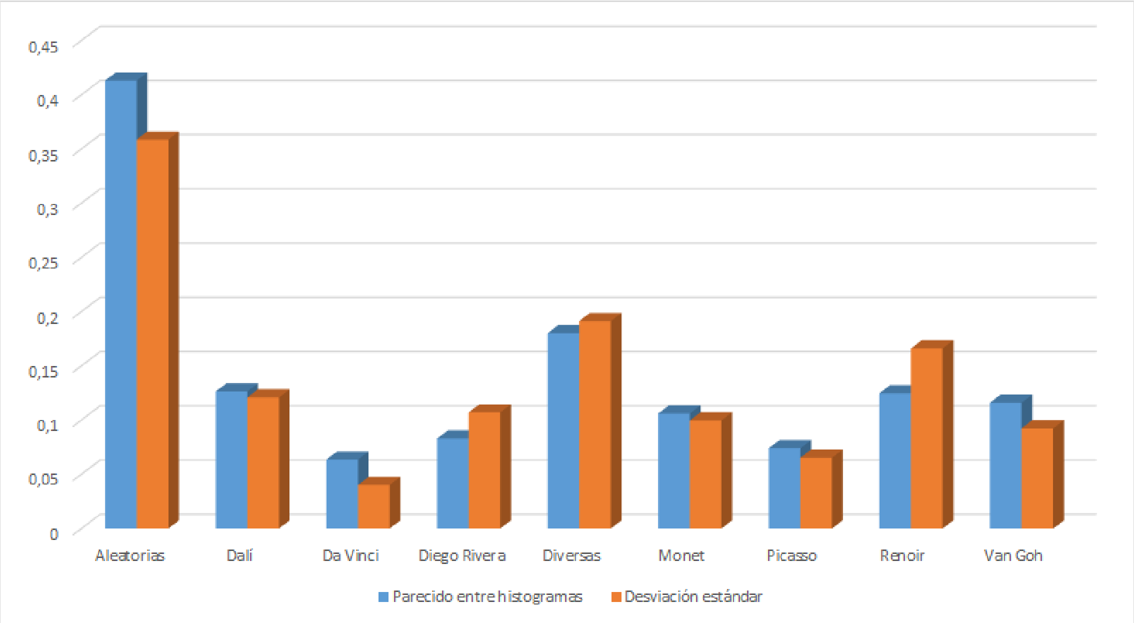


Figura 6.36: Gráfica que muestra los valores promedio al comparar histogramas utilizando ULBP y desviaciones estándar de la comparación.

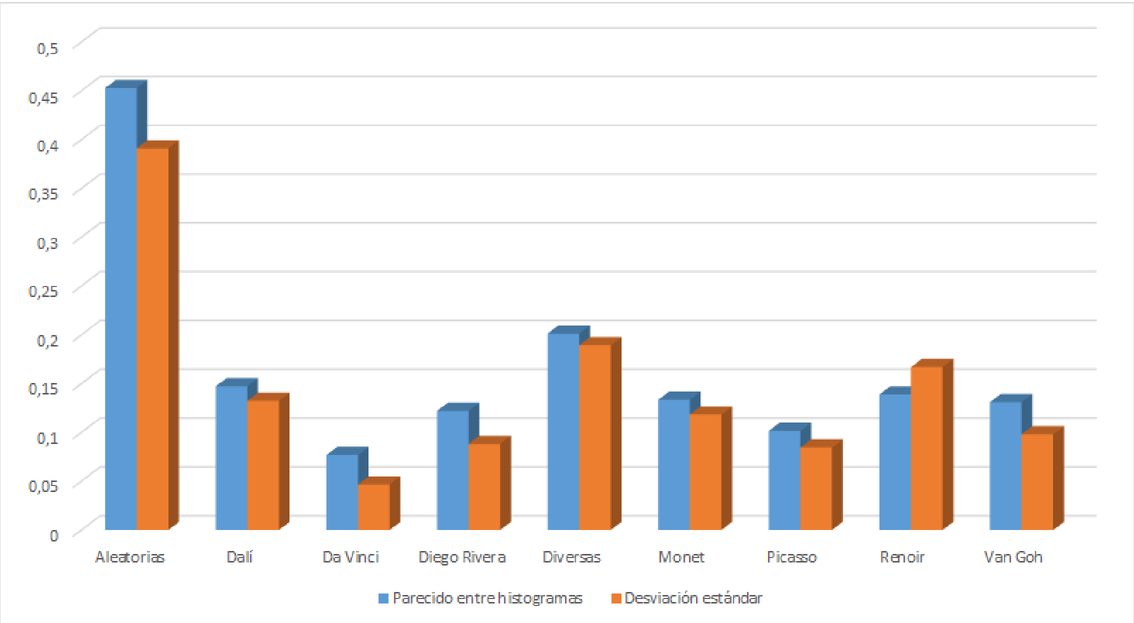


Figura 6.37: Gráfica que muestra los valores promedio al comparar histogramas utilizando ULBP y desviaciones estándar de la comparación.

En la gráfica se puede observar que las comparaciones entre los histogramas de los grupos control, **Aleatorias** y **Combinadas** muestran que las imágenes pertenecientes a esos grupos tienen histogramas de **LBP** bastante diferentes entre ellas,

sobre todo en el grupo Aleatorias. De acuerdo a la gráfica, **Da vinci** y **Picasso** son los que tienen pinturas que generan los histogramas de **LBP** más parecidos entre ellos. Sin embargo, el resto de los pintores tampoco presentan muchas diferencias entre los histogramas de **LBP** asociados a sus pinturas.
De la misma forma que en secciones anteriores, se utiliza la desviación estándar de cada promedio calculado para observar las variaciones que existen de pintura a pintura de cada pintor estudiado. En las gráficas presentadas en la Figura **??** se observa que es **Da Vinci** es quien presenta los histogramas más parecidos, tomando como referencia los valores de desviación estándar. A excepción de **Monet** y **Dalí**, que presentan variaciones más significativas, el resto de los pintores analizados tiene valores de desviación estándar pequeños, comparados con los grupos control ya mencionados.

6.2.4. Patrones binarios locales dominantes

El cuadro 6.6 muestra el número de **DLBP** promedio para cada pintor, así como las desviaciones estándar asociadas.
Se observa que **Aleatorias** es el grupo que presenta la menor cantidad de patrones dominantes. Esto puede deberse a que las imágenes que integran al grupo no son pinturas y pueden resultar menos complejas, a nivel de texturas.
El resto de los grupos contienen solo imágenes de pinturas, muestran en promedio 60 patrones dominantes. Destacan sobre el resto **Picasso** y **Van Gogh** quienes presentan en promedio, 84 y 73 patrones dominantes respectivamente. La gráfica de desviaciones estándar (Figura 6.38) muestra que **Da Vinci** es el pintor con menor variabilidad de patrones, lo que quiere decir que suele mantener un estilo similar en cada una de sus obras.

	Patrones promedio	Desviación estándar
Aleatorias	51.2727	29.4868
Dalí	63.6818	20.9054
Da Vinci	62.0833	14.2036
Diego Rivera	63.2143	20.8196
Diversas	68.2857	21.7303
Monet	66.9091	19.2889
Picasso	83.5	20.4267
Renoir	62.35	18.87
Van Gogh	74.0625	18.2053

Cuadro 6.6: Número de patrones dominantes promedio y desviaciones estándar

La Figura 6.38 muestra los diagramas de caja obtenidos a partir de los patrones dominantes de cada pintura que fue analizada. Como en la mayoría de los resultados obtenidos, se observa que los pintores que mostraron los datos menos dispersos son **Da Vinci** y **Monet**

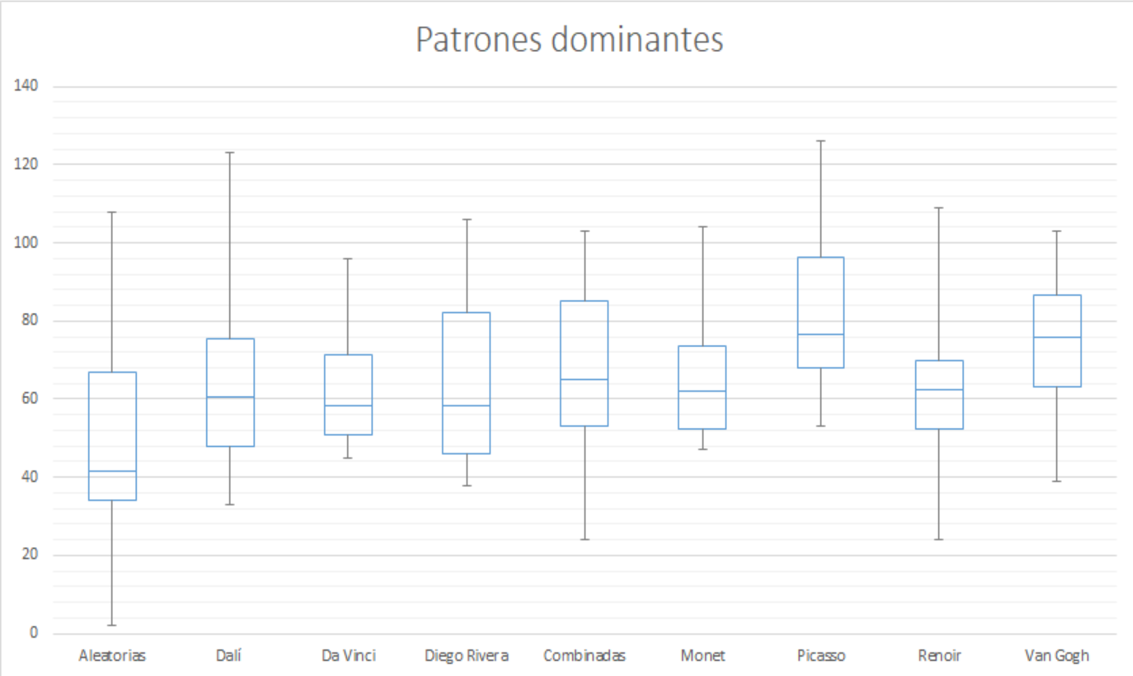


Figura 6.38: Diagrama de cajas asociado al número de patrones dominantes obtenidos para cada pintura analizada.

Capítulo 7

conclusiones

En este trabajo se presentó el análisis de la distribución de color en el espacio **RGB** y el análisis textural de pinturas pertenecientes a diversos artistas. El objetivo del análisis, fue tratar de caracterizar el estilo de cada uno de estos pintores utilizando a través del uso de técnicas y herramientas para el análisis de color y textura.

En el apartado de análisis de color no se lograron identificar características únicas que ayuden a distinguir a todos los pintores estudiados, algunos de ellos presentaron valores muy parecidos en los descriptores utilizados para tratar de caracterizarlos. Sin embargo, los resultados obtenidos, mostraron que hay algunos pintores que sí muestran diferencias importantes respecto al resto. Por ejemplo, **Pablo Picasso** presenta el mayor promedio de dimensión fractal y **Da vinci** el menor promedio, ambos con poca variación de la misma a lo largo de su trabajo. Con lo establecido anteriormente, se puede decir que es probable que las obras de **Picasso** presenten valores similares (cercanos a 2.4) de dimensión fractal entre ellas. De la misma manera, es probable encontrar valores similares (cercanos a 2.2) al estudiar la dimensión fractal en las obras de **Da Vinci**.

Un caso bastante interesante fue **Van Gogh**, quien siempre mostró los valores más altos de desviación estándar en la mayoría de las características revisadas, y también, los histogramas más desordenados. Lo anterior caracteriza su obra como poco predecible y muy cambiante de una pintura a otra, al menos en características y elección de color.

El grupo **Aleatorias**, que está conformado por imágenes que no tienen relación entre ellas, y **Combinadas**, que está compuesto por pinturas de los diversos pintores estudiados, mostraron diferencias considerables con el resto de los grupos compuestos solamente por las pinturas de cada artista. Mostraron también, grandes variaciones en las características promedio que les fueron calculadas, por lo que se concluye que la mayoría del trabajo de los pintores preserva cierta relación.

El mapa de color que se calculó a las superficies generadas a partir de la distribución de color permitió visualizar qué tan bien se ajusta el modelo del elipsoide a la distribución de color. Para cuantificar dicho ajuste, se utilizó el RSME (root-squared mean error).Casi todos los pintores mostraron promedios de ajuste similares. En este rubro destacó nuevamente **Van Gogh** con el peor ajuste.

En el caso del análisis textural se trató de caracterizar a los pintores utilizando descriptores obtenidos de la matriz de de co-ocurrencia de niveles de gris. Se probaron tres diferentes relaciones espaciales para el cálculo de la misma, pero no se encontraron diferencias significativas. En el caso de la **correlación**, todos los grupos obtuvieron promedios bastante altos, sin embargo, esto se debió al tamaño de la ventana utilizada para calcular las imágenes basadas en la textura. En el **contraste** también se observaron promedios similares entre los distintos pintores.

Similar a como ocurrió en el análisis de color, **Da Vinci** apareció en con los valores más pequeños de desviación estándar y destacó en descriptores como segundo momento angular y homogeneidad. Al contrario, **Van Gogh** se mostró nuevamente, muy difícil de caracterizar, apareciendo con los mayores valores de desviación estándar y los promedios más bajos de homogeneidad así como los mas altos de entropía y disimilitud.

El comportamiento mostrado por **Da Vinci**, tanto en el caso de análisis de color como en el de textura, es probable que se deba a el uso de técnicas como el *esfumado* y *claroscuro* que le daban ese estilo tan particular, además de que la mayoría de las pinturas que se revisaron son de Figuras humanas.

Los resultados obtenidos a partir de las imágenes paramétricas no fueron satisfactorios, ya que no se lograron detectar diferencias entre las distribuciones texturales de las diferentes combinaciones que se realizaron, a pesar, de que se trató de elegir a los descriptores con menor correlación entre ellos, para formar las imágenes. Es probable que si se cambia el tamaño de la ventana deslizante y los niveles de gris utilizados para calcular la GLCM puedan obtenerse resultados distintos.

Los histogramas de **LBP** y **ULBP**, sí mostraron diferencias entre los diversos pintores. Se observa en los grupos control, **Aleatorias** y **Combinadas**, que la distancia entre histogramas es bastante amplia, mientras que en los grupos de pintores, la distancia entre histogramas se reduce considerablemente. Para este descriptor, se observa que existe sí relación entre las pinturas pertenecientes a un solo artista, por lo que este tipo de métricas se podrían utilizar para reconocimiento o clasificación . Por último, en el caso de los **DLBP** se encontró que las imágenes que no son pinturas, parecen ser menos complejas que las pinturas, ya que fueron el grupo que menos patrones dominantes requirió para representar a sus imágenes. Destacaron sobre el resto **Picasso** y **Van Gogh**, ya que fueron los pintores que presentan mayor número de patrones, en promedio, a lo largo de sus obras.

7.1. Trabajo a futuro

Sería interesante observar las características de los pintores estudiados en otros espacios de color, los cuales podrían revelar información significativa para caracterizar a cada artista. Además, utilizar los datos obtenidos para realizar un análisis estadístico comparativo, y también, probar las herramientas desarrolladas con copias no auténticas.

Un tema que quedo pendiente por explorar es el análisis de forma y contornos de las pinturas, de dicho análisis se podrían extraer otro tipo de descriptores que ayuden a la caracterizar los trabajos de los pintores.

Parece pertinente profundizar el análisis textural, estudiando los descriptores de la matriz de co-ocurrencia como las imágenes paramétricas utilizando diferentes distribuciones espaciales para calcular la matriz, así como diferentes tamaños de ventanas deslizantes para generar las imágenes basadas en los descriptores y distintos niveles de gris.

Otro tema por explorar sería la inclusión de herramientas de inteligencia artificial, como los clasificadores, que reciban como parámetros de entrada los valores de los descriptores obtenidos en este trabajo y observar si son capaces de clasificar de manera correcta las pinturas por autor.

Por último, en lugar de estudiar a autores de forma individual, sería interesante agrupar pinturas por periodo o corriente artística y caracterizar cada uno de ellos.

Apéndice A

En este capítulo se explora de manera breve la vida y obra de cada uno de los pintores estudiados. Asimismo, se presentan las características de los movimientos artísticos a los cuales pertenecieron, con la finalidad de tener mejor entendimiento de sus obras y de acuerdo al contexto histórico y cultural en el que fueron creadas.

A.1. Movimientos artísticos

Un movimiento artístico es un conjunto de títulos que se otorgan a obras de arte que comparten los mismos ideales artísticos, estilo, técnicas o marco temporal (*what is an art movement?*, n.d.).

No existe una regla que determina qué constituye un movimiento artístico. Los movimientos permiten agrupar artistas de cierto periodo o estilo para que puedan ser estudiados dentro del contexto adecuado (*what is an art movement?*, n.d.).

A.1.1. Renacimiento (1400-1600)

El *Renacimiento* se refiere a un periodo de la historia en Europa, entre los años 1400 y 1600. El *Renacimiento* se asocia principalmente con Italia, donde comenzó en el siglo XIV, aunque países como Alemania, Inglaterra y Francia atravesaron por los mismos cambios culturales (Szalay, 2016).

Los pensadores del *Renacimiento* consideraban que el periodo del Medioevo había sido un declive cultural. Por esta razón, el *Renacimiento* se caracterizó por un renovado interés en las antigüedades clásicas. Ellos buscaban revitalizar su cultura a través de re-enfatizar filosofías y textos clásicos (Szalay, 2016).

Algunos de los mayores descubrimientos que ocurrieron durante el *Renacimiento* están relacionados con astronomía, filosofía, la imprenta, técnicas de pintura y escultura, la exploración del mundo, y finalmente, en el *Renacimiento* tardío, los trabajos de Shakespeare. Fue durante el *Renacimiento*, que el matemático y astrónomo polaco **Nicolás Copérnico** publicó, en la década de 1530, la teoría de un sistema solar heliocéntrico.

Galileo Galilei fue también, una de las grandes mentes del *Renacimiento*, aunque fue perseguido por la iglesia debido a sus experimentos. Galileo mejoró la idea del telescopio, descubrió nuevos cuerpos celestiales y fundamentó la teoría de Copérnico con sus descubrimientos.

Alto renacimiento (1490-1527)

El *alto Renacimiento* gira en torno a tres Figuras fundamentales: **Leonardo Da Vinci**, **Miguel Ángel** y **Rafael**. Cada uno de ellos representó un importante aspecto del periodo: Leonardo fue la representación perfecta del hombre renacentista; Miguel Ángel, emanaba poder creativo; Rafael creó trabajos que expresaban perfectamente el espíritu clásico (*Renaissance*, n.d.).

Arte Renacentista

El arte renacentista estuvo fuertemente influenciado por el arte clásico. Los artistas buscaron inspiración en la escultura griega y romana, así como en la pintura y artes decorativas (Szalay, 2016). Tanto el arte clásico como el arte renacentista se inspiraron en la belleza humana y la naturaleza.

El arte renacentista fue considerado un medio para explorar la naturaleza, así como un registro de descubrimientos. Estaba basado en la observación y se practicaba de acuerdo a principios matemáticos de balance, armonía, y perspectiva, que se desarrollaron durante ese tiempo .

Características de la pintura renacentista

En las pinturas renacentistas se pueden observar las siguientes características (McKay and McKay, 2010) :

Perspectiva: Agrega un aspecto tridimensional a las pinturas. Los artistas del *Renacimiento* re-descubrieron y expandieron las ideas sobre perspectiva lineal, línea de horizonte, y punto de fuga.

- **Perspectiva lineal:** Una pintura con perspectiva lineal es como mirar a través de una pintura y pintar exactamente lo que se ve en la ventana. Los objetos más lejanos se dibujan más pequeños, mientras que los objetos cercanos aparecen de mayor tamaño.
- **Línea de horizonte:** Se refiere al punto en la distancia donde los objetos se vuelven infinitamente pequeños, que quedan reducidos al tamaño de una línea.
- **Punto de fuga:** Es el punto, muy lejano, en el que las líneas paralelas parecen converger, frecuentemente sobre la línea de horizonte.

Realismo y naturalismo: Los objetos, especialmente las personas, lucían más reales. Los artistas del *Renacimiento* estudiaron anatomía, midieron proporciones, en búsqueda del la forma humana ideal.

A.1.2. Surrealismo (1924-1966)

Floreció en Europa entre la primera y segunda guerra mundial. El movimiento representaba una reacción en contra de la destrucción forjada por el *racionalismo* que había guiado a la cultura Europea en el pasado y, que había culminado en los horrores de la primera guerra mundial (?). Los surrealistas creían que el arte era creado en la mente inconsciente. Muchos artistas trabajan con técnicas visuales fantásticas y técnicas psicológicas, basaban su arte en memorias, sentimientos y, sueños. Usualmente utilizaban hipnotismo y drogas para aventurase al mundo onírico, donde buscaban imágenes del inconsciente (Moffat, 2011).

Los artistas del surrealismo adoptaron las ideas de **Sigmund Freud**, quién inspiró a muchos de ellos. Sin embargo, surgieron dos interpretaciones de dichas ideas: el surrealista automático y el surrealista verístico. Los automáticos o automatistas, creían que el arte abstracto, era la única forma de llevar imágenes del subconsciente aunque estas no debían ser interpretadas. Por otro lado, los verísticos, creían que las imágenes del subconsciente sí tenían un significado (Moffat, 2011).

Características del arte surrealista

El *Surrealismo* tomó elementos del *cubismo* y del *expresionismo* además de algunas técnicas del *dadaísmo.*

Algunos elementos característicos del *surrealismo* incluyen: levitación, cambios de escala en los objetos, transparencia, y repetición (Moffat, 2011). La yuxtaposición es otra característica, donde se encuentran elementos que rara vez aparecerían juntos en una situación típica. Por ejemplo, una sombrilla y una máquina de coser sobre una mesa para disección. La yuxtaposición se usaba para mostrar una metáfora o expresar cierto mensaje.

A pesar de que las pinturas son los elementos más representativos del movimiento, también son los más complicados de clasificar, ya que cada artista recurría a sus propias motivaciones, presentes en sus sueños o mente inconsciente. En su forma más básica, las imágenes surrealistas son extravagantes, confusas, e incluso, misteriosas. Sin embargo, la naturaleza es uno de los temas más recurrentes. Por ejemplo, los trabajos de **Salvador Dalí** frecuentemente incluyen hormigas o huevos (*Surrealism*, n.d.).

A.1.3. Cubismo (1907-1922)

Desarrollado por **Pablo Picasso** y **George Braques** alrededor de 1907 en la ciudad de París. Fue le primer estilo de arte abstracto que evolucionó a principios del siglo XX en repuesta a un mundo que cambiaba a una velocidad sin precedentes. Los cubistas retaron las formas convencionales de representación, tales como la perspectiva, que había sido la regla desde el *Renacimiento.* Su objetivo principal era desarrollar una nueva forma de ver lo que el mundo moderno reflejaba (*Cubism - The First Style of Abstract Art*, n.d.).

Un pintura cubista típica muestra personas, lugares u objetos reales, pero no desde un punto de vista fijo. En cambio, mostraban muchas partes de un sujeto u objeto a la vez; visto desde diferentes ángulos, y reconstruido en una composición de planos, formas y colores.

Cubismo analítico (1907-1912)

El *Cubismo* presentó dos fases, una de ellas fue el *Cubismo analítico.* Aquí, los artistas analizaban a los objetos desde muchos puntos de vista y eran reconstruidos dentro de un marco geométrico. La **paleta de colores** se limita a tonos terrosos y grises apagados.

Cubismo sintético 1912-1922

La otra fase, que inició alrededor de 1912 fue el *cubismo sintético*. Este fue un intento para revitalizar el estilo del *cubismo* y rescatarlo de la abstracción total. A diferencia del las superficies monocromáticas del *cubismo analítico*, el *cubismo sintético* introdujo un estilo más decorativo y colorido.

Características de la pintura cubista (*Cubism*, n.d.)

- Los artistas abandonaron la idea de un punto de vista fijo, en su lugar, utilizaban múltiples puntos de vista. De esta manera diferentes vistas de un objeto se mostraban en la misma pintura.
- El estilo cubista se concentraba en imágenes de dos dimensiones. Rechazaba técnicas como la perspectiva lineal, el claroscuro y la idea tradicional de imitar la naturaleza .

A.1.4. Impresionismo

Movimiento que surge a finales del Siglo XIX en Francia. El término fue utilizado por primera vez en 1874. Fue usado con sentido irónico para describir las obras de una nueva generación de pintores como **Monet**, **Renoir**, **Pissarro** y**Degas**.

Características de la pintura impresionista (*Impresionismo*, n.d.)

Paisaje como tema principal: El paisaje ofrece elementos que los impresionistas buscan plasmar en sus cuadros: el aire libre, contacto con la naturaleza, los efectos de la luz.

Técnica: Los impresionistas se caracterizan por una técnica rápida y pinceladas largas.

Color: Eliminan el color negro de su paleta de colores. Lo anterior se debe a que los pintores nunca observan sombras totalmente negras, sino coloreadas. El blanco puro tampoco existe, sino que la luz está cargada de matices. Apuestan por colores puros.

Perspectiva Desaparece el punto de fuga. Se inclinan por una pintura plana y bi-dimensional.

Apéndice B

En este apéndice se presentan algunas propiedades útiles de la media y desviación estándar así como el procedimiento seguido para modificarlas.

Propiedades de la media de un conjunto de datos

Multiplicación por un escalar Sea $\bar{X}$ la media de un conjunto ω de datos cualquiera y definida como se mostró en la ecuación 3.5.
Si se multiplica a cada $x_i \in \omega$ por un escalar f, la media $\bar{X}_f$ del conjunto $\omega' = f\omega$ queda definida de la siguiente manera:

$$\bar{X}_f = \sum_{i=0}^{N} \frac{f x_i}{N} = f \sum_{i=0}^{N} \frac{x_i}{N} \tag{B.1}$$

pero $\bar{X} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$ entonces:

$$\bar{X}_f = f\bar{X} \tag{B.2}$$

De la ecuación B.2 se puede concluir que al multiplicar un conjunto de datos ω por un escalar f cualquiera, la media $\bar{X}_f$ del nuevo conjunto ω' es igual a la media $\bar{X}$ del conjunto ω multiplicada por dicho escalar.

Adición de una constante Sea $\bar{X}$ la media de un conjunto ω de datos cualquiera y definida como en la ecuación 3.5.
Si se suma a cada $x_i \in \omega$ una constante C, la media $\bar{X}_c$ del conjunto $\omega' = \omega + C$ queda definida de la siguiente manera:

$$\bar{X}_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i + C}{N} \tag{B.3}$$

$$\bar{X}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} C}{N} \tag{B.4}$$

$$\bar{X}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} + \frac{NC}{N} \tag{B.5}$$

$$\bar{X}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} + C \tag{B.6}$$

pero $\bar{X} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$ entonces:

$$\bar{X}_c = \bar{X} + C \tag{B.7}$$

De la ecuación B.7 se puede concluir que al sumar una constante C cualquiera a un conjunto de datos ω, la media $\bar{X}_c$ del nuevo conjunto ω' es igual a la media $\bar{X}$ del conjunto ω más dicha constante.

Propiedades de la desviación estándar de un conjunto de datos

Multiplicación por un escalar Sea σ la desviación estándar de un conjunto de datos ω cualquiera definida como en la ecuación 3.7.
Si se multiplica a cada $x_i \in \omega$ por un escalar f cualquiera, la desviación estándar σ_f del nuevo conjunto de datos $\omega' = f\omega$ se define como:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(fx_i - f\bar{X})^2}{N}} \tag{B.8}$$

De la ecuación B.2 se sabe que la media de ω' es igual a la media de ω por el escalar f.

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(f(x_i - \bar{X}))^2}{N}} \tag{B.9}$$

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{f^2(x_i - \bar{X})^2}{N}} \tag{B.10}$$

$$\sigma_f = f\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{N}} \tag{B.11}$$

pero $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{N}}$ entonces:

$$\sigma_f = f\sigma \tag{B.12}$$

De la ecuación B.12 se concluye que al multiplicar un conjunto de datos ω cualquiera por un escalar f cualquiera, la desviación estándar σ_f del nuevo conjunto ω' es igual a la desviación estándar σ del conjunto ω por el escalar f.

Adición de una constante Sea σ la desviación estándar de un conjunto de datos ω cualquiera definida como en la ecuación 3.7.
Si se le suma una constante C cualquiera a cada elemento $x_i \in \omega$, la desviación estándar ω_c del nuevo conjunto de datos $\omega' = \omega + C$ se define como:

$$\sigma_C = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{((x_i + C) - (\bar{X} + C))^2}{N}} \tag{B.13}$$

De la ecuación B.7 se sabe que la media resultante de sumar una constante a un conjunto de datos, es igual a la media del conjunto original más la constante.

$$\sigma_C = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i + C - \bar{X} - C)^2}{N}} \tag{B.14}$$

$$\sigma_C = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{N}} \tag{B.15}$$

pero $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{X})^2}{N}}$ entonces:

$$\sigma_C = \sigma \tag{B.16}$$

De la ecuación B.16 se concluye que la desviación estándar σ de un conjunto de datos no cambia cuando se suma una constante C cualquiera, a dicho conjunto.

Cambio de la desviación estándar de un conjunto de datos

Sea σ_d la desviación estándar deseada y sea σ_a la desviación estándar de una imagen o conjunto de datos I. Se desea cambiar el valor de σ_a para que tenga el valor de σ_d.
De la ecuación B.12 se sabe que la desviación estándar de un conjunto de datos multiplicado por cierto escalar es igual a la desviación estándar original por dicho escalar. Con lo anterior, se define la siguiente relación:

$$\sigma_d = K\sigma_a \tag{B.17}$$

$$K = \sigma_d/\sigma_a \tag{B.18}$$

donde K es el factor o constante por el cual se debe multiplicar a I para que tenga como desviación estándar a σ_d.

B.0.1. Cambio de la media de un conjunto de datos

Sea $\bar{X}_a$ la media de una imagen o conjunto de datos I y sea $\bar{X}_d$ la media que se desea que tenga I.
A partir de la ecuación B.16 se sabe que la desviación estándar de un conjunto de datos no cambia al sumar una constante a dicho conjunto. Por otra parte, se sabe que la media del conjunto analizado es igual a la media original más la constante, de acuerdo a lo descrito por la ecuación B.7.
Para lograr que la $media(I)$ sea igual a la media deseada, $\bar{X}_d$, se sigue el siguiente proceso:
Sea I' una imagen con media igual a cero dada por:

$$I'(x, y) = I(x, y) - \bar{X}_a \tag{B.19}$$

Donde $I(x, y)$ e $I'(x, y)$ son los valores de intensidad de cada pixel y $\bar{X}_a$ es la media de I .
Sea I'' una segunda imagen con media=$\bar{X}_d$ (media deseada), dada por:

$$I''(x, y) = I'(x, y) + \bar{X}_d \tag{B.20}$$

Se tiene entonces:

$$I''(x, y) = I(x, y) - \bar{X}_a + \bar{X}_d \tag{B.21}$$

Se concluye, a partir de la ecuación B.21, que para tener una imagen con la media deseada, $\bar{X}_d$, se debe sustraer de la imagen I la media original, $\bar{X}_a$, y añadir la media deseada, $\bar{X}_d$.

Apéndice C

En este apéndice se describen de manera breve los modelos de iluminación utilizados en graficación por computadora, así como las técnicas de sombreado.

C.1. Iluminación y sombreado

C.1.1. Modelo de iluminación

Un modelo de iluminación permite cuantificar la luz reflejada en cierto punto de una superficie de acuerdo a las características de la luz y de dicha superficie. El modelo de iluminación, es un método que permite calcular la intensidad de luz en las superficies de manera simplificada y veloz (**?**).
Para determinar los efectos de la luz sobre cierta superficie, se deben tener en cuenta las siguientes variables (**?**)

- Parámetros de la fuente de luz:
    - Posición.
    - Forma
- Parámetros de la superficie:
    - Posición.
    - Propiedades de reflexión.
- Cámara:
    - Posición.

Modelo de iluminación de Phong (Throne, n.d.).

El modelo de iluminación de Phong está determinado por 3 parámetros de la luz:

Componente ambiental: Iluminación de fondo.

Componente difusa: Iluminación sin brillo y sombras.

Componente especular: Reflexiones brillantes.

Iluminación ambiental

La intensidad de luz I_{amb} reflejada en cualquier punto de una superficie está determinada por la siguiente ecuación:

$$I_{amb} = K_a I_a \tag{C.1}$$

Donde I_a es la intensidad de la componente ambiental de la luz yK_a es la propiedad de reflexión de luz ambiental de la superficie.

Reflexión difusa

La iluminación en un punto p de una superficie depende de el ángulo θ entre el vector normal $\vec{N}$ en ese punto de la superficie y el vector $\vec{v}$ que va del punto p hasta la posición de la fuente de luz.
La reflexión difusa se define a través de la siguiente ecuación:

$$I_{diff} = I_p k_{diff} \cos(\theta) \tag{C.2}$$

Donde I_p es la intensidad la fuente de luz.
k_{diff} es la propiedad de reflexión difusa de la superficie.
θ el ángulo entre los vectores $\vec{N}$ y $\vec{v}$.

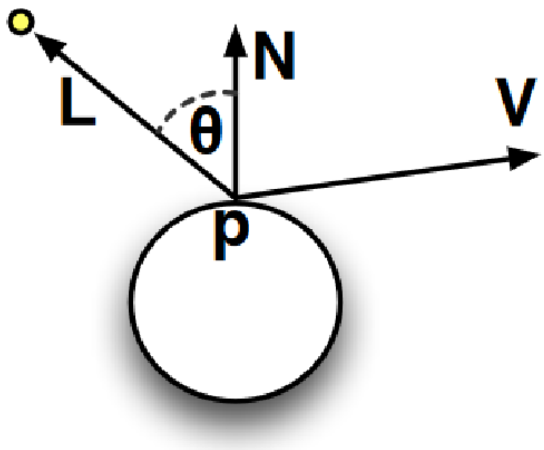


Figura C.1: Reflexión difusa. Imagen tomada de (Throne, n.d.).

Reflexión especular

Con ayuda de este modelo se pueden modelar objetos brillantes como el metal o el plástico. La intensidad de luz reflejada depende de la dirección del vector de reflexión $\vec{R}$.
La reflexión especular se define como sigue:

$$I_{spec} = I_p k_s \cos(\alpha)^n \tag{C.3}$$

Donde I_p es la intensidad de la componente especular. k_s es la propiedad de reflexión especular de la superficie. n es un parámetro de intensidad especular que depende del material de la superficie. α es el ángulo entre el vector $\vec{R}$ y el vector $\vec{v}$ que va del punto de incidencia a la cámara.

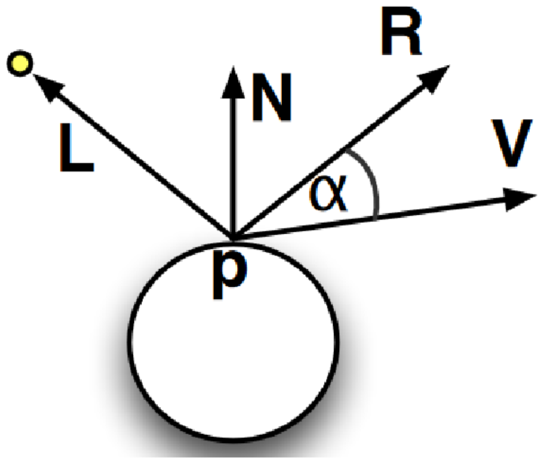


Figura C.2: Reflexión especular. Imagen tomada de (Throne, n.d.).

$$\vec{R} = 2\vec{N}(\vec{N} \cdot \vec{L}) - \vec{L} \tag{C.4}$$

Finalmente, el modelo de iluminación de Phong queda definido de la siguiente manera:

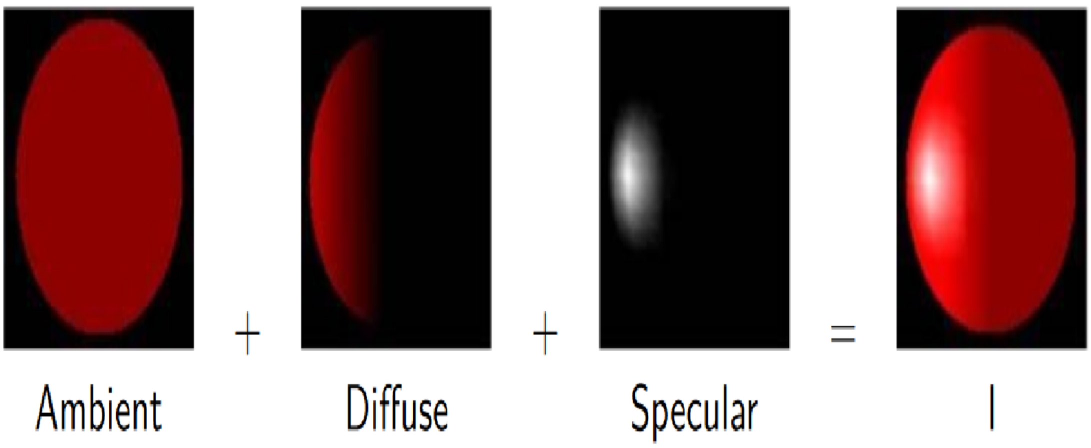


Figura C.3: Modelo de Phong que resulta de combinar las 3 componentes del modelo de iluminación (ambiental, difusa y especular). Imagen tomada de (Throne, n.d.).

$$I = I_{amb} + I_{diff} + I_{spec} \tag{C.5}$$

C.1.2. Modelos de Sombreado

Los modelos de sombreado son técnicas o metodologías que permiten iluminar o colorear cada punto en un modelo 3D . Se tienen 3 tipos de técnicas:

1. *Flat shading (Sombreado plano)*
2. *Gouraud shading (sombreado de Gouraud)*
3. *Phong shading (sombreado de Phong)*

C.1.3. Flat shading

En este método se realiza el cálculo de la iluminación por cada polígono que compone al modelo.

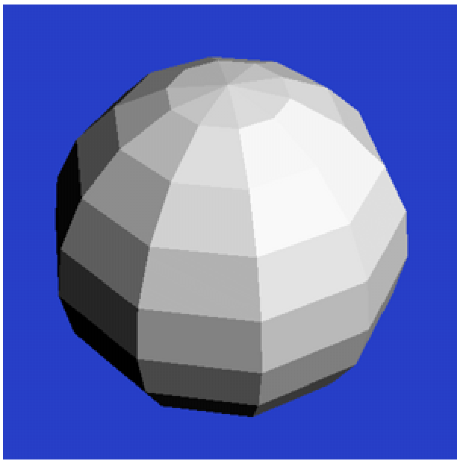


Figura C.4: Flat shading aplicado a un modelo 3D. Imagen tomada de (*Shading*, n.d.).

C.1.4. Gouraud shading

El color se calcula por cada vértice que compone al modelo 3D. El algoritmo que describe esta técnica de sombreado es el siguiente:

1. Calcular la normal de cada vértice, promediando las normales de cada polígono al que cada vértice pertenece.
2. Aplicar un modelo de iluminación a cada vértice para calcular la intensidad en ese punto.
3. Interpolar las intensidades de los vértices que componen a un polígono para obtener los colores sobre la superficie del mismo.

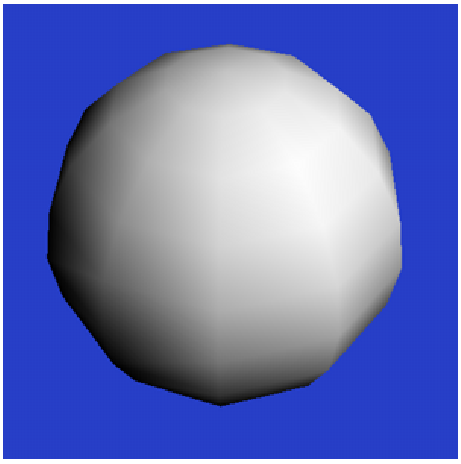


Figura C.5: Gouraud shading aplicado a un modelo 3D. Imagen tomada de (*Shading*, n.d.).

C.1.5. Phong shading

Esta técnica es similar al **Gouraud shading**, solo que en este caso, la intensidad de la luz se calcula por cada pixel. En lugar de interpolar colores, utilizando está técnica se interpolan las normales asociadas a cada vértice.
El algoritmo que describe el método es el siguiente:

1. Calcular las normales por cada vértice de un polígono.
2. Interpolar las normales a lo largo de la superficie del polígono.
3. Aplicar el modelo de iluminación a cada pixel que compone al polígono para obtener la intensidad en ese punto.

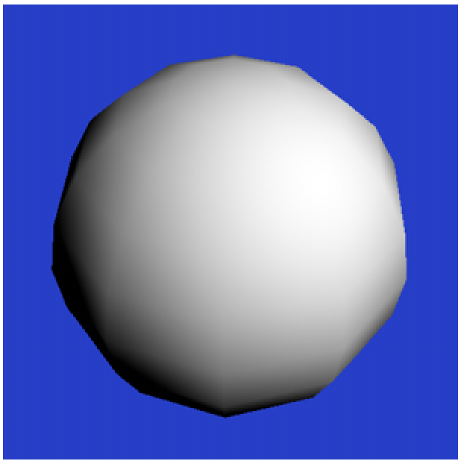


Figura C.6: Phong shading aplicado a un modelo 3D. Imagen tomada de (*Shading*, n.d.).

Apéndice D

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.508	**0.602**	0.001	**0.612**	0.00582	0.0536
1	-0.101	0.0173	0.00251	-0.0196	0.0127	**0.994**
	-0.0125	0.00390	0.0033	-0.00165	**0.999**	-0.0142
	0.481	**0.613**	0.00157	**0.620**	0.0089	0.0845
2	-0.189	0.0285	0.00446	-0.0150	0.0246	**0.980**
	-0.0257	0.00724	0.00483	0.00243	**0.999**	-0.0303
	0.44	**0.628**	0.00110	**0.628**	0.00885	0.096
3	-0.245	0.0297	0.00271	-0.0039	0.0207	**0.968**
	-0.0301	0.00729	0.00304	0.00451	**0.999**	-0.0292
	0.0817	**0.649**	0.0312	**0.553**	0.147	0.492
4	**0.980**	-0.0119	-0.0329	0.00323	-0.167	-0.0981
	0.154	-0.0375	-0.023	-0.142	**0.970**	-0.106
	0.0356	**0.65**	0.118	0.255	0.342	**0.606**
5	-0.084	-0.019	**0.974**	-0.190	-0.0759	-0.040
	0.994	-0.00530	0.0750	-0.0280	-0.0638	-0.0193
	0.0866	**0.655**	0.00638	**0.588**	0.0527	0.461
6	**0.990**	-0.0221	-0.00551	-0.0198	-0.0484	-0.123
	0.0414	-0.0147	0.00147	-0.040	**0.996**	-0.0496
	0.533	**0.588**	0.00122	**0.606**	0.00755	0.0372
7	-0.0677	0.0110	0.00280	-0.0126	0.0198	**0.997**
	-0.0150	0.0040	0.00297	-0.00185	**0.999**	-0.0210
	0.405	**0.640**	0.00362	**0.63**	0.0281	0.129
8	-0.3	0.0315	0.00944	-0.00182	0.0956	**0.930**
	-0.0572	0.010	0.00627	0.00704	**0.99**	-0.12
	0.401	**0.632**	0.00511	**0.637**	0.0332	0.173
9	**-0.50**	0.0637	0.0130	0.018	0.103	**0.853**
	-0.0970	0.0249	0.00905	0.0341	**0.978**	-0.179
	0.426	**0.63**	0.0135	**0.623**	0.0431	0.162
10	-0.44	0.0847	0.0347	-0.0190	0.142	**0.87**
	-0.0786	0.0276	0.0249	0.0105	**0.975**	-0.202
	0.138	**0.643**	0.0798	**0.543**	0.227	0.462
11	**0.951**	-0.0148	-0.0917	0.0150	-0.254	-0.141
	-0.0010	0.000712	**0.938**	0.000844	-0.345	0.00583
	0.172	**0.64**	0.0509	**0.557**	0.178	0.453

12

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.948	-0.0294	-0.0531	0.00868	-0.179	-0.25
	0.140	-0.0370	-0.0312	-0.183	**0.960**	-0.148
13	0.384	**0.652**	0.0150	**0.632**	0.0523	0.153
	-0.395	0.0183	0.0342	-0.013	0.189	**0.897**
	-0.0548	0.00599	0.0177	0.00194	**0.971**	-0.229
14	**0.69**	0.202	0.00103	**0.689**	0.00103	0.00807
	-0.15	**0.976**	0.00355	-0.12	0.00355	0.0697
	0.00386	-0.069	0.000953	0.00496	0.000953	**0.997**
15	0.275	**0.667**	0.00404	**0.644**	0.0585	0.246
	0.857	-0.0736	-0.00667	-0.0941	-0.113	-0.487
	-0.00278	0.0013	0.00177	-0.00016	**0.972**	-0.231
16	0.457	**0.628**	0.0268	**0.601**	0.0984	0.150
	-0.3	0.0135	0.0607	-0.0521	**0.500**	**0.798**
	-0.00640	0.00215	0.00959	-0.00290	**0.845**	**-0.533**
17	0.406	**0.646**	0.005	**0.632**	0.03	0.127
	-0.311	0.0129	0.0106	-0.0105	0.117	**0.94**
	-0.0650	0.00647	0.0073	0.00340	**0.987**	-0.144
18	0.344	**0.639**	0.0224	**0.612**	0.10	0.289
	0.735	-0.0584	-0.0429	-0.0108	-0.264	**-0.620**
	0.0474	-0.00613	0.00588	-0.0253	**0.937**	-0.342
19	0.0219	**0.618**	0.232	0.160	0.424	**0.597**
	0.998	-0.00236	-0.0533	-0.00226	-0.0112	-0.00480
	-0.0232	-0.00299	-0.458	**0.886**	-0.0542	-0.0179
20	0.0175	**0.658**	0.0686	0.314	0.267	**0.62**
	-0.0193	-0.014	**0.994**	-0.0822	-0.0601	-0.0265
	0.998	-0.00167	0.0161	0.000182	-0.0520	-0.00582
21	0.326	**0.660**	0.00256	**0.628**	0.0276	0.246
	0.73	-0.0916	-0.00462	-0.0203	-0.0536	**-0.669**
	-0.0777	0.0281	0.00429	0.0340	**0.981**	-0.168
22	0.0346	**0.651**	0.0786	0.310	0.337	**0.598**
	-0.696	-0.00602	**0.71**	-0.0750	-0.00223	-0.00679
	0.715	-0.0126	**0.688**	-0.0928	-0.0697	-0.0306

Cuadro D.1: Vectores propios de **Aleatorias**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
1	0.286	**0.656**	0.00768	**0.634**	0.0416	0.285
	0.835	-0.0744	-0.0134	-0.0523	-0.0710	**-0.537**
	-0.0444	0.0148	0.0118	0.0321	**0.97**	-0.2
2	**0.537**	**0.596**	0.000146	**0.596**	0.00161	0.0147
	-0.0211	-0.000400	0.000306	-0.00521	0.00334	**0.999**
	-0.0024	0.000168	0.000339	-0.000554	**0.999**	-0.00339
3	0.459	**0.630**	0.00139	**0.620**	0.0136	0.0779
	-0.168	0.0117	0.00313	-0.0113	0.0315	**0.984**
	-0.0311	0.00477	0.00344	0.000986	**0.998**	-0.0374

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
4	0.423	**0.639**	0.00479	**0.626**	0.0316	0.135
	-0.384	0.0535	0.0118	0.00169	0.0831	**0.917**
	-0.0912	0.0221	0.0125	0.0170	**0.986**	-0.129
5	0.43	**0.64**	0.00759	**0.617**	0.0333	0.117
	-0.302	0.0428	0.0211	-0.0185	0.109	**0.94**
	-0.064	0.015	0.0208	0.00182	**0.988**	-0.136
6	0.351	**0.651**	0.00558	**0.635**	0.044	0.21
	-0.64	0.068	0.0120	0.0238	0.109	**0.753**
	-0.0802	0.021	0.00835	0.0267	**0.97**	-0.213
7	0.213	**0.656**	0.0228	**0.616**	0.115	0.360
	0.920	-0.0517	-0.0288	-0.0282	-0.165	-0.348
	0.0927	-0.0237	-0.00570	-0.0681	**0.971**	-0.205
8	**0.508**	**0.607**	0.00094	**0.607**	0.00568	0.0534
	-0.0893	0.00477	0.00182	-0.0177	0.0102	**0.995**
	-0.0106	0.00182	0.00233	-0.00127	**0.999**	-0.0112
9	0.273	**0.656**	0.015	**0.630**	0.0801	0.298
	0.801	-0.0416	-0.0360	-0.0122	-0.176	**-0.568**
	0.0356	-0.00413	0.0104	-0.0157	**0.967**	-0.250
10	0.320	**0.661**	0.00991	**0.643**	0.049	0.205
	-0.671	0.0577	0.0251	0.032	0.135	**0.724**
	-0.0602	0.0135	0.0167	0.0172	**0.96**	-0.239
11	0.429	**0.637**	0.00199	**0.629**	0.0163	0.108
	-0.279	0.0237	0.00455	0.00102	0.039	**0.95**
	-0.0493	0.00896	0.00482	0.00830	**0.997**	-0.0552
12	0.435	**0.641**	0.00146	**0.622**	0.0141	0.104
	-0.239	0.0205	0.00409	-0.0172	0.0343	**0.969**
	-0.033	0.00611	0.00462	0.0017	**0.998**	-0.043
13	0.420	**0.637**	0.00240	**0.631**	0.0154	0.134
	-0.390	0.0478	0.00612	0.0151	0.0405	**0.918**
	-0.0659	0.0161	0.00732	0.0188	**0.994**	-0.0731
14	0.355	**0.649**	0.0100	**0.627**	0.0566	0.234
	-0.693	0.0884	0.0213	0.027	0.134	**0.701**
	-0.0766	0.0239	0.0156	0.0304	**0.960**	-0.265
15	0.476	**0.621**	0.00144	**0.616**	0.0129	0.078
	-0.171	0.0183	0.00309	-0.0128	0.0279	**0.984**
	-0.0318	0.00637	0.00345	0.00160	**0.998**	-0.033
16	0.478	**0.61**	0.00325	**0.617**	0.0206	0.0878
	-0.202	0.0256	0.00733	-0.00942	0.0545	**0.977**
	-0.0507	0.0111	0.00766	0.00426	**0.996**	-0.0664
17	0.145	**0.658**	0.0136	**0.598**	0.0793	0.424
	0.96	-0.0295	-0.016	-0.0210	-0.0948	-0.236
	0.0726	-0.0179	0.00337	-0.0635	**0.990**	-0.092
18	**0.519**	**0.597**	0.00393	**0.607**	0.0189	0.0613
	-0.107	0.0138	0.00784	-0.0234	0.0474	**0.992**
	-0.032	0.00711	0.00838	-0.0051	**0.998**	-0.051

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.474	**0.629**	0.0059	**0.602**	0.0253	0.120
19	-0.342	0.10	0.0160	-0.029	0.0707	**0.930**
	-0.0932	0.0448	0.0222	0.0077	**0.987**	-0.114
	0.444	**0.633**	0.00273	**0.624**	0.0218	0.104
20	-0.241	0.0224	0.00607	-0.01	0.06	**0.968**
	-0.0481	0.00923	0.00512	0.00254	**0.995**	-0.0745
	0.390	**0.642**	0.00556	**0.636**	0.0288	0.168
21	**-0.534**	0.0693	0.0139	0.0322	0.0770	**0.83**
	-0.11	0.0309	0.0161	0.0391	**0.977**	-0.167
	0.0774	**0.664**	0.0183	0.465	0.128	**0.564**
22	**0.991**	-0.0216	-0.0108	0.00960	-0.0772	-0.1
	0.0729	-0.0225	0.0159	-0.194	**0.976**	-0.045

Cuadro D.2: Vectores propios de **Dalí**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.377	**0.654**	0.0116	**0.633**	0.0538	0.160
1	-0.443	0.027	0.0294	-0.00310	0.182	**0.876**
	-0.0666	0.00928	0.0171	0.00716	**0.969**	-0.235
	0.439	**0.635**	0.00233	**0.624**	0.019	0.114
2	-0.287	0.0299	0.00554	-0.00518	0.0469	**0.956**
	-0.0571	0.0114	0.00576	0.00983	**0.996**	-0.0663
	0.340	**0.660**	0.00815	**0.644**	0.049	0.171
3	-0.48	0.016	0.0227	0.000262	0.259	**0.831**
	0.00844	0.000390	0.00231	-0.000275	**0.95**	-0.292
	0.429	**0.642**	0.00432	**0.625**	0.0379	0.10
4	-0.254	0.0149	0.00940	-0.00845	0.118	**0.959**
	-0.0697	0.007	0.00737	0.00345	**0.987**	-0.140
	0.41	**0.645**	0.00280	**0.629**	0.0321	0.129
5	-0.35	0.0315	0.00632	0.00352	0.0935	**0.929**
	-0.0725	0.012	0.00487	0.0104	**0.988**	-0.127
	0.490	**0.621**	0.00384	**0.60**	0.0209	0.0555
6	-0.101	0.00423	0.00762	-0.0149	0.0628	**0.992**
	-0.0347	0.00323	0.00761	-0.00360	**0.997**	-0.066
	0.364	**0.667**	0.0123	**0.615**	0.0731	0.195
7	**-0.613**	0.0823	0.0250	0.00833	0.208	**0.756**
	-0.0741	0.0186	0.0127	0.0136	**0.943**	-0.322
	0.481	**0.62**	0.011	**0.604**	0.0540	0.0973
8	-0.203	0.0129	0.0235	-0.0250	0.220	**0.953**
	-0.0645	0.00717	0.0153	-0.00457	**0.968**	-0.238
	0.493	**0.623**	0.00437	**0.601**	0.0289	0.0646
9	-0.104	-0.000332	0.00729	-0.0249	0.100	**0.989**
	-0.0370	0.00155	0.00572	-0.00779	**0.993**	-0.104
	0.192	**0.666**	0.013	**0.594**	0.115	0.389
10	**0.937**	-0.0516	-0.0144	-0.0108	-0.13	-0.315

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.0786	-0.0234	0.00169	-0.0651	**0.976**	-0.188
	0.445	**0.63**	0.00335	**0.61**	0.0173	0.124
11	-0.303	0.0384	0.00641	-0.0137	0.0358	**0.951**
	-0.0547	0.0147	0.00862	0.00741	**0.996**	-0.0555
	0.393	**0.655**	0.00549	**0.62**	0.044	0.143
12	-0.411	0.039	0.0115	0.00150	0.129	**0.901**
	-0.0838	0.0140	0.00819	0.0100	**0.979**	-0.180

Cuadro D.3: Vectores propios de **Da Vinci**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.315	**0.663**	0.0135	**0.640**	0.0684	0.213
1	**-0.711**	0.0691	0.0334	0.034	0.214	**0.663**
	-0.0043	0.00314	0.00935	0.00114	**0.949**	-0.312
	0.138	**0.659**	0.0414	**0.60**	0.157	0.391
2	**0.960**	-0.0235	-0.0536	-0.0189	-0.200	-0.184
	0.105	-0.0253	**-0.567**	-0.073	**0.80**	-0.143
	0.236	**0.658**	0.020	**0.620**	0.122	0.331
3	**0.873**	-0.0486	-0.0319	-0.011	-0.256	-0.408
	0.144	-0.0283	-0.00884	-0.0633	**0.946**	-0.278
	0.508	**0.614**	0.00316	**0.599**	0.0161	0.0623
4	-0.114	0.0177	0.00646	-0.0250	0.0417	**0.992**
	-0.0303	0.00837	0.00692	-0.00500	**0.998**	-0.0458
	0.427	**0.645**	0.0058	**0.620**	0.0333	0.122
5	-0.324	0.0430	0.0153	-0.0121	0.114	**0.937**
	-0.0680	0.0162	0.011	0.00548	**0.986**	-0.14
	0.215	**0.664**	0.00593	**0.644**	0.0652	0.303
6	**0.902**	-0.0511	-0.0101	-0.0458	-0.14	-0.399
	0.0850	-0.0162	0.000336	-0.0367	**0.982**	-0.157
	0.194	**0.661**	0.0147	**0.625**	0.11	0.347
7	**0.926**	-0.0348	-0.0233	-0.0400	-0.198	-0.314
	0.130	-0.0237	-0.013	-0.0676	**0.965**	-0.212
	0.2	**0.664**	0.00943	**0.640**	0.0608	0.273
8	**0.851**	-0.0674	-0.017	-0.0543	-0.114	**-0.504**
	-0.000242	0.00163	0.00723	8.98172e-05	**0.975**	-0.221
	0.0310	**0.664**	0.056	0.330	0.194	**0.638**
9	**0.993**	-0.00632	-0.0451	0.0378	-0.0887	-0.0303
	0.0556	-0.00986	**0.982**	-0.169	0.0549	-0.00813
	0.257	**0.657**	0.0107	**0.624**	0.105	0.3
10	**0.862**	-0.0512	-0.017	-0.035	-0.208	-0.456
	0.0871	-0.0164	-0.00112	-0.0441	**0.958**	-0.26
	0.425	**0.653**	0.00270	**0.609**	0.0252	0.138
11	-0.401	0.0817	0.00613	-0.016	0.0597	**0.910**
	-0.085	0.0295	0.00738	0.0108	**0.990**	-0.105
	0.374	**0.650**	0.00823	**0.633**	0.0547	0.181

12

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	-0.48	0.0273	0.0189	-0.00170	0.163	**0.858**
	-0.0646	0.00909	0.0111	0.00832	**0.972**	-0.222
13	0.475	**0.625**	0.00615	**0.613**	0.0275	0.0766
	-0.154	0.0081	0.0118	-0.0154	0.0797	**0.98**
	-0.0487	0.00544	0.0111	-0.00158	**0.994**	-0.0884
14	0.318	**0.655**	0.0133	**0.635**	0.105	0.231
	0.726	-0.0506	-0.0275	-0.0387	-0.335	**-0.596**
	0.0656	-0.00877	-0.00198	-0.0189	**0.902**	-0.425

Cuadro D.4: Vectores propios de **Diego Rivera**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
1	0.286	**0.656**	0.00768	**0.634**	0.0416	0.285
	0.835	-0.0744	-0.0134	-0.0523	-0.0710	**-0.537**
	-0.0444	0.0148	0.0118	0.0321	**0.97**	-0.2
2	0.319	**0.661**	0.00744	**0.620**	0.0547	0.269
	0.792	-0.10	-0.0118	-0.0289	-0.0910	**-0.592**
	-0.158	0.0576	0.0139	0.0990	**0.909**	-0.367
3	0.138	**0.659**	0.0414	**0.60**	0.157	0.391
	0.960	-0.0235	-0.0536	-0.0189	-0.200	-0.184
	0.105	-0.0253	**-0.567**	-0.073	**0.80**	-0.143
4	0.459	**0.630**	0.00139	**0.620**	0.0136	0.0779
	-0.168	0.0117	0.00313	-0.0113	0.0315	**0.984**
	-0.0311	0.00477	0.00344	0.000986	**0.998**	-0.0374
5	0.393	**0.653**	0.00400	**0.61**	0.042	0.183
	-0.597	0.111	0.00857	0.0222	0.0978	**0.787**
	-0.16	0.0552	0.0101	0.0574	**0.949**	-0.253
6	0.236	**0.658**	0.020	**0.620**	0.122	0.331
	0.873	-0.0486	-0.0319	-0.011	-0.256	-0.408
	0.144	-0.0283	-0.00884	-0.0633	**0.946**	-0.278
7	0.107	**0.649**	0.0457	0.47	0.221	**0.542**
	0.974	-0.0142	-0.0423	0.034	-0.171	-0.13
	0.042	-0.00837	**0.99**	-0.077	-0.0105	-0.0108
8	0.429	**0.642**	0.00432	**0.625**	0.0379	0.10
	-0.254	0.0149	0.00940	-0.00845	0.118	**0.959**
	-0.0697	0.007	0.00737	0.00345	**0.987**	-0.140
9	0.475	**0.623**	0.0047	**0.615**	0.020	0.0835
	-0.148	0.00263	0.00769	-0.0238	0.0449	**0.98**
	-0.0344	0.00314	0.00752	-0.00306	**0.99**	-0.050
10	0.467	**0.62**	0.00650	**0.610**	0.0340	0.152
	-0.389	0.0567	0.0144	0.00752	0.0865	**0.915**
	-0.115	0.0284	0.0180	0.0404	**0.981**	-0.144
11	0.481	**0.62**	0.011	**0.604**	0.0540	0.0973
	-0.203	0.0129	0.0235	-0.0250	0.220	**0.953**
	-0.0645	0.00717	0.0153	-0.00457	**0.968**	-0.238

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.616	0.498	0.00103	**0.607**	0.00689	0.038
12	-0.458	**0.844**	0.00277	-0.235	0.0178	0.139
	0.0318	-0.14	0.0007	0.0201	0.00462	**0.989**
	0.181	**0.654**	0.0797	**0.576**	0.211	0.394
13	**0.933**	-0.0262	-0.111	-0.00721	-0.27	-0.206
	0.0220	-0.00354	**0.953**	-0.0116	-0.300	-0.0187
	0.178	**0.659**	0.0171	**0.592**	0.112	0.410
14	**0.943**	-0.0316	-0.0278	-0.0402	-0.223	-0.239
	0.177	-0.0274	-0.0458	-0.0815	**0.962**	-0.178

Cuadro D.5: Vectores propios de **Combinadas**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.282	**0.642**	0.0130	**0.599**	0.103	0.369
1	**0.876**	-0.06	-0.0156	-0.0368	-0.132	-0.456
	0.0402	-0.00789	0.00401	-0.0553	**0.977**	-0.201
	0.319	**0.661**	0.00744	**0.620**	0.0547	0.269
2	**0.792**	-0.10	-0.0118	-0.0289	-0.0910	**-0.592**
	-0.158	0.0576	0.0139	0.0990	**0.909**	-0.367
	0.320	**0.662**	0.017	**0.587**	0.0935	0.323
3	**0.825**	-0.12	-0.022	0.00824	-0.13	**-0.532**
	-0.10	0.0424	0.0177	0.0773	**0.910**	-0.391
	0.393	**0.653**	0.00400	**0.61**	0.042	0.183
4	**-0.597**	0.111	0.00857	0.0222	0.0978	**0.787**
	-0.16	0.0552	0.0101	0.0574	**0.949**	-0.253
	0.307	**0.658**	0.0149	**0.640**	0.072	0.237
5	**-0.725**	0.0479	0.0345	0.0326	0.199	**0.654**
	-0.000444	0.00132	0.00894	-0.000863	**0.956**	-0.29
	0.29	**0.665**	0.00341	**0.649**	0.0430	0.214
6	**-0.695**	0.0420	0.00870	0.0337	0.130	**0.704**
	-0.0133	0.00278	0.00242	0.00283	**0.980**	-0.195
	0.126	**0.657**	0.0257	**0.552**	0.185	0.459
7	**0.971**	-0.0226	-0.0238	-0.00368	-0.167	-0.161
	0.130	-0.0366	-0.136	-0.157	**0.953**	-0.17
	0.204	**0.659**	0.0433	**0.589**	0.172	0.380
8	**0.919**	-0.0371	-0.0583	-0.00797	-0.23	-0.303
	0.140	-0.0301	-0.112	-0.0997	**0.936**	-0.28
	0.433	**0.635**	0.00635	**0.622**	0.049	0.13
9	-0.315	0.0198	0.0127	-0.0162	0.155	**0.935**
	-0.0761	0.0103	0.00837	0.0051	**0.979**	-0.188
	0.379	**0.647**	0.0151	**0.631**	0.0851	0.176
10	**-0.568**	0.0518	0.0347	0.0343	0.281	**0.770**
	-0.0754	0.0136	0.0164	0.0168	**0.916**	-0.392
	0.378	**0.652**	0.0110	**0.621**	0.0618	0.202
11	**-0.609**	0.0751	0.023	0.0242	0.1	**0.774**

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	-0.121	0.0317	0.0199	0.039	**0.948**	-0.286

Cuadro D.6: Vectores propios de **Monet**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.442	**0.635**	0.00303	**0.621**	0.0328	0.10
1	-0.305	0.0357	0.00701	0.00891	0.0908	**0.947**
	-0.0889	0.0162	0.00684	0.016	**0.987**	-0.124
	0.305	**0.65**	0.0161	**0.610**	0.132	0.291
2	**0.807**	-0.0655	-0.0270	-0.0278	-0.272	**-0.51**
	0.056	-0.00993	-0.00108	-0.0297	**0.917**	-0.392
	0.422	**0.634**	0.0101	**0.621**	0.0693	0.166
3	-0.496	0.061	0.0240	0.0265	0.212	**0.838**
	-0.132	0.0274	0.0161	0.0426	**0.936**	-0.319
	0.347	**0.651**	0.00774	**0.631**	0.048	0.230
4	**-0.70**	0.0711	0.0157	0.0555	0.101	**0.692**
	-0.136	0.0334	0.0186	0.0722	**0.944**	-0.287
	0.234	**0.663**	0.00992	**0.631**	0.0677	0.318
5	**0.881**	-0.0486	-0.0159	-0.0349	-0.10	-0.456
	0.0208	-0.00378	0.00598	-0.0145	**0.981**	-0.187
	0.457	**0.632**	0.00150	**0.616**	0.0245	0.096
6	-0.220	0.0188	0.00311	-0.00985	0.0593	**0.973**
	-0.0578	0.00906	0.00332	0.00560	**0.995**	-0.0739
	0.616	0.498	0.00103	**0.607**	0.00689	0.038
7	-0.458	**0.844**	0.00277	-0.235	0.0178	0.139
	0.0318	-0.14	0.0007	0.0201	0.00462	**0.989**
	0.357	**0.645**	0.00875	**0.630**	0.0511	0.236
8	**-0.694**	0.0735	0.0187	0.0454	0.10	**0.705**
	-0.227	0.056	0.0219	0.139	**0.886**	-0.373
	0.359	**0.65**	0.00533	**0.635**	0.0448	0.20
9	**-0.572**	0.0448	0.0125	0.0131	0.113	**0.810**
	-0.0844	0.016	0.00996	0.0243	**0.976**	-0.197
	0.154	**0.656**	0.0137	**0.600**	0.106	0.416
10	**0.958**	-0.0282	-0.0178	-0.0245	-0.157	-0.233
	0.125	-0.0258	0.000968	-0.0864	**0.97**	-0.131
	0.0725	**0.65**	0.0316	0.489	0.172	**0.542**
11	**0.990**	-0.0109	-0.029	-0.00825	-0.112	-0.0743
	0.0209	-0.00456	**0.997**	-0.027	-0.063	-0.0109
	0.188	**0.64**	0.0255	**0.57**	0.12	0.448
12	**0.947**	-0.041	-0.0241	-0.0104	-0.116	-0.292
	0.0909	-0.02	0.0183	-0.142	**0.981**	-0.0876
	0.467	**0.62**	0.00650	**0.610**	0.0340	0.152
13	-0.389	0.0567	0.0144	0.00752	0.0865	**0.915**
	-0.115	0.0284	0.0180	0.0404	**0.981**	-0.144
	0.276	**0.658**	0.00956	**0.629**	0.0871	0.291

14

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	0.832	-0.0543	-0.0165	-0.0442	-0.190	**-0.515**
	0.0514	-0.00897	-0.00138	-0.0218	**0.961**	-0.268
15	0.388	**0.645**	0.00425	**0.633**	0.0351	0.172
	-0.494	0.0494	0.00974	0.0127	0.0870	**0.863**
	-0.0883	0.0186	0.00905	0.0217	**0.984**	-0.151
16	0.233	**0.653**	0.0214	**0.605**	0.125	0.368
	0.903	-0.0514	-0.0261	-0.0196	-0.16	-0.39
	0.0755	-0.0183	-0.00368	-0.0680	**0.967**	-0.231
17	0.430	**0.637**	0.00597	0.6	0.0556	0.169
	-0.453	0.0734	0.011	-0.0130	0.143	**0.87**
	-0.109	0.0306	0.00915	0.0171	**0.969**	-0.217
18	0.129	**0.654**	0.0264	**0.580**	0.140	0.444
	0.965	-0.0223	-0.0306	0.00163	-0.165	-0.196
	0.134	-0.0339	-0.0112	-0.110	**0.97**	-0.150
19	0.396	**0.636**	0.00875	**0.627**	0.0490	0.203
	-0.637	0.0852	0.0194	0.0619	0.121	**0.753**
	-0.18	0.0476	0.0203	0.0976	**0.923**	-0.318
20	0.23	**0.646**	0.0329	**0.590**	0.147	0.392
	0.910	-0.0515	-0.0377	-0.0194	-0.17	-0.368
	0.105	-0.0272	0.00168	-0.129	**0.967**	-0.189

Cuadro D.7: Vectores propios de **Picasso**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
1	0.417	**0.638**	0.00627	**0.629**	0.0378	0.143
	-0.427	0.050	0.014	0.0212	0.103	**0.896**
	-0.11	0.0237	0.0153	0.0282	**0.978**	-0.168
2	0.181	**0.654**	0.0797	**0.576**	0.211	0.394
	0.933	-0.0262	-0.111	-0.00721	-0.27	-0.206
	0.0220	-0.00354	**0.953**	-0.0116	-0.300	-0.0187
3	0.249	**0.668**	0.00734	**0.627**	0.0696	0.302
	0.868	-0.060	-0.0115	-0.0371	-0.112	-0.478
	0.00348	0.000271	0.00330	-0.00266	**0.974**	-0.222
4	0.42	**0.640**	0.00871	**0.61**	0.0695	0.132
	-0.342	0.0214	0.0176	-0.00889	0.289	**0.893**
	-0.0662	0.00746	0.00763	0.00308	**0.94**	-0.331
5	0.190	**0.663**	0.0175	**0.626**	0.108	0.344
	0.929	-0.0340	-0.0269	-0.0396	-0.176	-0.318
	0.104	-0.0206	-0.0257	-0.0553	**0.967**	-0.220
6	0.475	**0.623**	0.0047	**0.615**	0.020	0.0835
	-0.148	0.00263	0.00769	-0.0238	0.0449	**0.98**
	-0.0344	0.00314	0.00752	-0.00306	**0.99**	-0.050
7	0.364	**0.650**	0.0243	**0.626**	0.0842	0.211
	-0.583	0.041	0.0597	0.000189	0.270	**0.762**
	-0.0287	0.00562	0.0194	0.00432	**0.934**	-0.354

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
8	0.307	**0.666**	0.00787	**0.636**	0.0822	0.223
	-0.725	0.053	0.0176	0.0378	0.244	**0.639**
	0.00737	2.85796e-05	0.00200	-0.00200	**0.937**	-0.349
9	0.181	**0.654**	0.0226	**0.593**	0.133	0.409
	0.945	-0.0349	-0.0265	-0.0203	-0.158	-0.280
	0.113	-0.0275	-0.00323	-0.115	**0.973**	-0.156
10	0.481	**0.628**	0.000824	**0.607**	0.0147	0.0625
	-0.114	0.0037	0.00131	-0.0161	0.0296	**0.992**
	-0.0270	0.002	0.00127	-0.00181	**0.999**	-0.0330
11	**0.503**	**0.619**	0.00197	**0.601**	0.0165	0.0404
	-0.0661	0.000330	0.00333	-0.0132	0.0466	**0.996**
	-0.0252	0.00118	0.0031	-0.0042	**0.998**	-0.0484
12	**0.512**	**0.616**	0.0134	**0.593**	0.0379	0.0617
	-0.112	0.0135	0.0264	-0.0324	0.222	**0.967**
	-0.0402	0.00702	0.0168	-0.0113	**0.972**	-0.229
13	0.199	**0.657**	0.0284	**0.607**	0.159	0.363
	0.929	-0.0361	-0.036	-0.0331	-0.221	-0.288
	0.137	-0.0316	-0.0609	-0.0999	**0.947**	-0.262
14	0.478	**0.626**	0.00251	**0.611**	0.0162	0.0662
	-0.119	0.0027	0.00422	-0.0175	0.0339	**0.992**
	-0.029	0.00254	0.00447	-0.00227	**0.998**	-0.037

Cuadro D.8: Vectores propios de **Renoir**.

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
1	0.017	**0.663**	0.0390	0.293	0.247	**0.641**
	0.997	-0.00184	-0.0340	0.0127	-0.0530	-0.00789
	0.0333	-0.00607	**0.996**	-0.0747	-0.0299	-0.00948
2	0.135	**0.647**	0.0785	**0.516**	0.232	0.484
	0.960	-0.0163	-0.116	0.00394	-0.220	-0.125
	0.0749	-0.0114	**0.981**	-0.0425	-0.167	-0.0392
3	0.300	**0.667**	0.0145	**0.60**	0.0684	0.305
	0.794	-0.0850	-0.0236	0.00942	-0.118	**-0.588**
	-0.0354	0.0136	0.0125	0.0166	**0.968**	-0.245
4	0.107	**0.649**	0.0457	0.47	0.221	**0.542**
	0.974	-0.0142	-0.0423	0.034	-0.171	-0.13
	0.042	-0.00837	**0.99**	-0.077	-0.0105	-0.0108
5	**0.523**	**0.600**	0.0174	**0.597**	0.0469	0.0802
	-0.128	0.00903	0.0337	-0.0454	0.245	**0.959**
	-0.038	0.00548	0.020	-0.013	**0.966**	-0.254
6	0.0285	**0.652**	0.124	0.312	0.272	**0.621**
	0.886	0.0085	-0.429	0.152	-0.0824	-0.00418
	0.447	-0.0243	**0.869**	-0.190	-0.0719	-0.041
7	0.365	**0.652**	0.0116	**0.636**	0.0508	0.179
	-0.503	0.0376	0.0275	-0.00213	0.164	**0.84**

Pintura	ASM	Correlación	Contraste	Homogeneidad	Disimilitud	Entropía
	-0.0536	0.00926	0.0145	0.00606	**0.973**	-0.221
8	0.270	**0.657**	0.0221	**0.607**	0.148	0.32
	0.841	-0.0413	-0.0399	-0.0243	-0.328	-0.424
	0.157	-0.022	-0.0373	-0.0661	**0.907**	-0.380
9	0.35	**0.650**	0.00965	**0.628**	0.0539	0.226
	-0.643	0.0644	0.0200	0.0177	0.126	**0.751**
	-0.075	0.0178	0.0141	0.0239	**0.969**	-0.230
10	0.484	**0.622**	0.00863	**0.606**	0.0332	0.0967
	-0.165	0.00341	0.014	-0.0329	0.0820	**0.982**
	-0.0489	0.00448	0.0141	-0.00	**0.994**	-0.0917
11	0.178	**0.659**	0.0171	**0.592**	0.112	0.410
	0.943	-0.0316	-0.0278	-0.0402	-0.223	-0.239
	0.177	-0.0274	-0.0458	-0.0815	**0.962**	-0.178
12	0.0806	**0.647**	0.0654	0.461	0.253	**0.541**
	0.979	-0.00891	-0.0715	0.0329	-0.167	-0.0764
	0.0633	-0.0119	**0.99**	-0.0750	-0.0569	-0.0246
13	0.445	**0.630**	0.000798	**0.617**	0.025	0.146
	-0.269	0.00520	0.00118	-0.0412	0.0499	**0.960**
	-0.0396	0.00402	0.000967	-0.00121	**0.997**	-0.0630
14	0.326	**0.655**	0.00788	**0.649**	0.053	0.195
	-0.681	0.0604	0.01	0.0541	0.171	**0.706**
	-0.0376	0.00908	0.00882	0.0115	**0.961**	-0.271
15	0.314	**0.64**	0.0250	**0.623**	0.101	0.28
	0.759	-0.0547	-0.0470	-0.0106	-0.245	**-0.598**
	0.0379	-0.00493	0.00241	-0.0140	**0.940**	-0.336
16	0.287	**0.655**	0.0305	**0.598**	0.148	0.326
	0.773	-0.0371	-0.0594	0.00725	-0.493	-0.391
	0.301	-0.0350	-0.0810	-0.0685	**0.836**	-0.443

Cuadro D.9: Vectores propios de **Van Gogh**.

Bibliografía

Bambach, C. (2002), 'Leonardo da vinci'. Consultado el 3 de mayo de 2017, de http://www.metmuseum.org/toah/hd/leon/hd_leon.htm.

Bhatia, P. K. (2008), *Computer Graphics*, 3 edn, I.K international Publishing House Pvt. Ltd., New Dheli, India.

Blotta, E., Bouchet, A., Ballarin, V. and Pastore, J. (2011), 'Enhancement of medical images in hsi color space', *Journal of Physics: Conference Series. 332* .

Cetinic, E. and Grgic, S. (2013), 'Automated painter recognition based on image feature extraction', *ELMAR, 2013 55th International Symposium* .

Cetinic, E. and Grgic, S. (2016), 'Genre classification of paintings', *2016 International Symposium ELMAR* .

Chiaroscuro (n.d.). Consultado el 25 de septiembre de 2017, de https://www.artsy.net/gene/chiaroscuro.

Claude Monet. Obra y biografía (n.d.). Consultado el 4 de mayo de 2017 de, http://www.arteespana.com/monet.htm.

Condorovici, R., Florea, C. and Vertan, C. (2013), 'Author identification for digitized painting collections', *Signals, Circuits and Systems (ISSCS), 2013 International Symposium on* .

Cubism (n.d.). Consultado el 7 de mayo de 2017, de http://www.visual-arts-cork.com/history-of-art/cubism.htm.

Cubism - The First Style of Abstract Art (n.d.). Consultado el 6 de mayo de 2017, de http://www.artyfactory.com/art_appreciation/art_movements/cubism.htm.

Culjak, M., Mikus, B., Jez, K. and Hadjic, S. (2011), 'Classification of art paintings by genre', *MIPRO, 2011 Proceedings of the 34th International Convention* .

Da Vinci - The Artist (n.d.). Consultado el 3 de mayo de 2017, de la página web del Museo de ciencia de Boston https://www.mos.org/leonardo/artist.

Devaney, R. L. (1995), 'Fractal dimension'. Consultado el 30 de agosto de 2017, de http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node6.html.

Diego Rivera (n.d.). Consultado el 4 de mayo de 2017, de la página web del museo Anahuacalli en México http://museoanahuacalli.org.mx/diegorivera/index.html.

Fabbri, R., Costa, L. D., Torelli, J. and Bruno, O. (2008), '2d euclidean distance transform algorithms: A comparative survey', *ACM Computing Surveys, Vol. 40, No. 1, Article 2* .

González, R. and Woods, R. C. (2007), *Digital Image Processing*, tercera edn, Pearson education. pp. 142.

Grevera, G. (2004), 'The "dead reckoning"signed distance trannsform', *Computer Vision an Image Understanding 95* .

Gruber, D. (2000), 'The mathematics of the 3d rotation matrix'. Consultado el 23 de abril de 2017, de https://www.fastgraph.com/makegames/3drotation/.

Hajek, M., Dezertpva, M., Materka, A. and Lerski, R. (2006), 'Texture analysis for magnetic resonance imaging', *Med4 publishing* .

Hall-Beyer, M. (2017), Glcm texture: A tutorial v. 3.0, Technical report, University of Calgary.

Huang, D., Shan, C., Ardebilian, M., Wang, Y. and Chen, L. (2011), 'Local binary patterns and its application to facila image analysis: A survey', *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)* .

Impresionismo (n.d.). Consultado el 7 de mayo de 2017, de http://www.spanisharts.com/history/del_impres_s.XX/impresionismo/impresionismo.html.

Jain, R. and Schunk, R. K. B. G. (1995), *Machine Vision*, McGrawHill.

Kaufman, A., Cohen, D. and Yagel, R. (1993), 'Volume graphics', *Computer* .

Khorsheed, J. A. and Yurtkan, K. (2016), 'Analysis of local binary patterns for face recognition under varying facial expressions', *Signal Processing and Communication Application Conference (SIU)* .

Kim, D., Son, S.-W. and Jeong, H. (2014), 'Large-scale quantitative analysis of painting arts', *Scientific Reports 4* .

Knudsen, J. M. and Hjorth, P. G. (2000), *The Center-of-Mass Theorem*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 193–218.

Kovacs, E. (2012), 'Rotation about an arbitrary axis and reflection through an arbitrary plane', *Annales Mathematicae et Informaticae* .

Lahdenoja, O., Poikionen, J. and Laiho, M. (2013), 'Towards understanding the formation of uniform local binary patterns', *ISRN Machine Vision* .

Ledley, R. S., Buas, M. and Golab, T. (1990), 'Fundamentals of true-color image processing', *Pattern Recognition, 1990. Proceedings., 10th International Conference on* .

Lenon, F. E., Cianci, G. C., Cipriani, N. A., Hensing, T. A., Zhang, H. J., Chen, C.-T., Murgu, S. D., Vokes, E. E., Vannier, M. W. and Salgia, R. (2015), 'Lung cancer -a fractal viewpoint', *Nature Reviews Clinical Oncology 12* .

Liao, S., Law, M. W. K. and Chung, A. C. (2009), 'Dominant local binary patterns for texture classification', *IEEE Transactions on Image Processing* .

Marchenko, Y., Chua, T.-S. and Aristarkhova, I. (2005), 'Analysis and retrieval of paintings using artistic color concepts', *Multimedia and Expo, 2005. ICME 2005. IEEE International Conference on* .

Materka, A. and Strzelecki, M. (1998), 'Texture analysis methods - a review', *COST B11 report* .

McKay, B. and McKay, K. (2010), 'The basics of art: The renaissance'. Consultado el 6 de mayo de 2017 de, http://www.artofmanliness.com/2010/07/16/man-knowledge-the-basics-of-art-the-renaissance/.

Medellin, H. (n.d.), 'Transformaciones 3d'. Consultado el 1 de mayo de 2017 de http://galia.fc.uaslp.mx/ medellin/Applets/Trans3D/transformaciones_en_3d.htm.

Moffat, C. (2011), 'The origins of surrealism'. Consultado el 6 de mayo de 2017 de, http://www.arthistoryarchive.com/arthistory/surrealism/Origins-of-Surrealism.html.

Muñoz, D. R. (2004), *Manual de estadística.* pp. 17-19.

Ojeda, L. R. (2007), *Probabilidad y estadística básica para ingenieros*, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Instituto de Ciencias Matemáticas. pp. 171.

Pacifici, S. (2012), 'Análisis de densidades mamográficas en espacio rgb', *Imagen diagnóstica* .

Peraire, J. and Widnall, S. (2008), Lecture l26-3d rigid body dynamics: The inertia tensor. Consultado el 22 de febrero de 2017 de, https://pdfs.semanticscholar.org/d2b5/e126c3d4bd54e39ee134b1cc28227b99a2b8.pdf.

Pierre-Auguste Renoir (n.d.). Consultado el 5 de mayo de 2017, de la página web del museo nacional Thyssen Bornemisza en España: https://www.museothyssen.org/coleccion/artistas/renoir-pierre-auguste.

Pietikäinen, M., Hadid, A., Zhao, G. and Ahonen, T. (2011), *Local Binary Patterns for Still Images*, Springer London, London, chapter 2, pp. 13–47.

Poole, D. (2011), *Algebra lineal. Una Introducción moderna*, tercera edn, Cengage learning. pp. 265.

Pérez, R. (2015), 'Los diez experimentos de la física que cambiaron la historia'. Consultado el 2 de enero de 2018 de https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2015-08-09/los-diez-experimentos-fisicos-que-cambiaron-el-mundo_956989/.

Puthenputhussery, A. and Liu, Q. L. C. (2016), 'Color multi-fusion fisher vector feature for fin art painting categorization and influence analysis', *Applications of Computer Vision (WACV), 2016 IEEE Winter Conference on* .

Renaissance (n.d.). Consultado el 6 de mayo de 2017, de https://www.britannica.com/event/Renaissance.

Renzetti, F. and Zortea, I. (2011), 'Use of a gray level co-ocurrence matriz to characterize duplex stainless steel phases microstructure', *Frattura ed Integrità Strutturale* .

Robinson, A. (2017), 'How to calculate sphericity'. Consultado el 11 de septiembre de 2017, de http://sciencing.com/calculate-sphericity-5143572.html.

Saleh, B. and Elgammal, A. (2015), 'A unified framework for painting classification', *2015 IEEE International Conference on Data Mining Workshop (ICDMW)* .

Salvador Dalí (n.d.). Consultado el 4 de mayo de 2017, de la página web del museo Moco en Ámsterdam https://www.mocomuseum.com/dali.

Schwarz, M. and Seidel, H.-P. (2010), 'Fast paraller surface voxelization on gpus', *ACM Transactions on Graphics* .

Shading (n.d.), http://ruh.li/GraphicsShading.html consultado el 2 de mayo de 2017.

Shapiro, L. G. and Stockman, G. C. (2001), *Computer Vision*, Pearson.

Sharma, M. and Singh, S. (2001), 'Evaluation of texture methods for image analysis', *Intelligent Information Systems Conference, The Seventh Australian and New Zealand 2001* .

Smith, L. I. (2002), 'A tutorial on principal components analysis', http://faculty.iiit.ac.in/ mkrishna/PrincipalComponents.pdf Consultado el 29 de enero de 2017.

Surrealism (n.d.). Consultado el 6 de mayo de 2017, de http://www.theartstory.org/movement-surrealism.htm.

Szalay, J. (2016), 'The renaissance: The 'rebirthóf science & culture', http://www.livescience.com/55230-renaissance.html consultado el 6 de mayo de 2017.

Taji, T. S. and Gore, D. V. (2013), 'Overview of texture image segmentation techniques', *International Journal of Advanced Reasearch in Computer Science and software Engineering* .

Three-Dimensional Rotation Matrices (2012). Consultado el 23 de abril de 2017, de http://scipp.ucsc.edu/ haber/ph216/rotation_12.pdf.

Throne, T. (n.d.), 'Illumination and shading', http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/cg/lectures/slides5.pdf consultado el 2 de mayo de 2017.

Vincent van Gogh: Biografía (n.d.). Consultado el 5 de mayo de 2017, de http://www.vangoghgallery.com/es/misc/biografia.html.

Wagner, P. (n.d.), 'Local binary patterns'. Consultado el 23 de agosto de 2017, de http://bytefish.de/blog/local_binary_patterns/.

what is an art movement? (n.d.). Consultado el 6 de mayo de 2017, de http://www.artyfactory.com/art_appreciation/art_movements/art_movements.htm.

Widjaja, I., Leow, K. W. and Wu, F.-C. (2003), 'Identyfing painters from color profiles of skin patches in painting images', *Image Processing, 2003. ICIP 2003. Proceedings. 2003 International Conference o* .

Wijewickrema, S. and Paplinski, A. (2005), 'Principal component analysis for the approximation of an image as an ellipse', *WSCG POSTER proceedings* .

Yan, P. and Kassim, A. (2004), 'Medical image segmentation using minimal path deformable models with implicit shape priors', *IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION TECHNOLOGY IN BIOMEDICINE, VOL. 10, NO. 4* .

Yang, B. and Xu, D. (2011), 'Learning to recognize the art style of paintings using multi-cues', *Information Technology, Computer Engineering and Management Sciences (ICM), 2011 International Conference on* .

Zayed, N. and Elnerm, H. A. (2015), 'Statistical analysis of haralick texture features to discriminate lung abnormalities', *International Journal od Biomedical Imaging* .

Zujovic, J., Gandy, L., FriedMan, S., Pardo, B. and Pappas, T. (2009), 'Classifying paintings by artistic genre: An analysis of features & classifiers', *MMSP* .