



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis perturbativo en gravitación extendida astrofísica
relativista

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Milton Jair Santibáñez Armenta

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Sergio Mendoza Ramos

Ciudad Universitaria, CDMX., 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno Santibáñez Armenta Milton Jair halocell23@gmail.com Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física
2. Datos del tutor Dr. Sergio Mendoza
3. Datos del sinodal 1 Dr. Roberto Sussman
4. Datos del sinodal 2 Dr. Xavier Hernández
5. Datos del sinodal 3 Dr. Jorge Cervantes
6. Datos del sinodal 4 Dr. Juan Carlos Hidalgo
7. Datos del trabajo escrito Análisis perturbativo en gravitación extendida astrofísica relativista Deflexión de un haz de luz en una métrica estacionaria 47 p 2018

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por ser mi segundo hogar estos últimos años.

A la Facultad de Ciencias de la UNAM y sus profesores, por brindarme los conocimientos básicos necesarios para mi formación académica.

Al Instituto de Astronomía de la UNAM, por brindarme apoyo dentro de sus instalaciones para la elaboración de esta tesis.

Al Dr. Sergio Mendoza Ramos, mi asesor y director de tesis, por su dedicación, apoyo y paciencia que permitieron la elaboración de este trabajo.

A mis sinodales: Dr. Xavier Hernández, Dr. Roberto Sussman, Dr. Juan Carlos Hidalgo y Dr. Jorge Cervantes por el tiempo y apoyo dedicado a la revisión de este trabajo así como sus correcciones para mejorarlo.

Tesis realizada con apoyos del proyecto de DGAPA-UNAM (PAPIIT IN112616) de la UNAM y de CONACyT (CB-2014-1 # 240512).

Dedicatorias

Esta tesis está dedicada en gran parte a mi madre María Concepción Armenta Valenzuela† y a mi padre Rolando Santibáñez Escobar por el apoyo incondicional que me han dado toda la vida y el cual a sido clave para la culminación de dicho trabajo, mostrándome que si es posible tener una familia unida y alegre junto con Joao Alexis Santibáñez Armenta, con quien comprendí que tener un hermano es una de las mejores cosas que se pueden tener en la vida.

A mi tía Teresita de Jesús Armenta Valenzuela, por ser prácticamente una segunda madre para mi y brindarme todo su apoyo siempre desde tan lejos.

A mi familia materna, por mostrarme el significado de la humildad y siempre ser un hogar al cual llegar.

A mi familia paterna, por enseñarme que el trabajo duro y bien hecho siempre dará buenos frutos.

A Leticia Cuevas Alvarado y Ana Clara Cadena Irizar, por ser las mejores amigas y confidentes que podré tener jamás.

A Déborah Patricia Hernández Nagay y Leonel David de León Juarez, por mostrarme la línea tan delgada que hay entre un(a) amigo(a) y un(a) hermano(a).

A Sebastián Adame González, Andrea Muñoz Gutiérrez y Melody Geraldine Hernández Manterola Ortiz, por mostrarme que un buen amigo(a) lo puedes encontrar en cualquier lugar y de la forma menos esperada.

A los "Guardianes de la Galaxia" por ser el grupo de amigos que siempre estuvo conmigo durante la carrera y que se que seguirán ahí en el resto de mi camino, así como yo estaré para ellos.

Índice general

Agradecimientos	V
Dedicatorias	VII
Notación	XIII
Resumen	XV
1. Introducción	1
§1.1. Relatividad general y el perihelio de mercurio.	1
§1.2. Eddington y la deflexión de la luz.	3
§1.3. Hipótesis y postulados de relatividad general	5
§1.4. Ecuación geodésica.	7
§1.5. Ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein	8
§1.6. La métrica tridimensional y otras definiciones útiles	10
§1.7. Materia oscura y lentes gravitacionales	11
§1.8. Dinámica newtoniana modificada (MOND)	14
2. Parametrización Post-Newtoniana (PPN)	15
§2.1. Aproximaciones post-newtonianas	15
§2.2. Sistema coordenado	17
§2.3. Potenciales post-newtonianos	19
§2.4. Tensor métrico post-newtoniano	20
3. Deflexión de rayos de luz en el espacio-tiempo curvo	23
§3.1. Principio de Fermat	23

§3.1.1. Principio de Fermat en un espacio-tiempo conforme y estacionario	24
§3.2. Resultados previos para la deflexión de la luz	25
§3.3. Formula general para la deflexión de la luz	28
§3.4. Simetría esférica	30
§3.5. Espacio-tiempo de Kerr	32
§3.6. Aplicaciones con perfiles de densidades	35
4. Conclusiones	39
A. Apéndice	41

Índice de figuras

1.1. Descripción gráfica de la precesión δ del perihelio de Mercurio.	3
1.2. Deflexión de trayectorias de luz que pasan cerca del Sol	4
1.3. Eclipse solar de 1919	4
1.4. Curva de rotación galáctica	12
1.5. Imagen de lente gravitacional ‘Gato de Cheshire’	13
3.1. Esquema de la deflexión de un rayo de luz ‘1’	25
3.2. Esquema de la deflexión de un rayo de luz ‘2’	26
3.3. Trayectorias de rayos de luz usando el perfil de densidad NFW	36
3.4. Trayectorias de rayos de luz usando el perfil de un halo isoterma	37

Notación

En las teorías de gravitación existentes la notación empleada es diversa, por lo que no existe una convención universal de la misma. Por lo tanto, a continuación se describe la notación que se utilizará a lo largo de este texto.

El tensor métrico 4-dimensional del espacio-tiempo se denotará como $g_{\mu\nu}$ con signatura $(+, -, -, -)$ y el espacio de Minkowski como $\eta_{\mu\nu}$.

Índices que toman valores de 0 a 3 se denotarán con letras griegas e índices que vayan de 1 a 3 se denotarán con letras latinas.

En el caso de tener objetos matemáticos tridimensionales en un plano, no habrá distinción entre subíndices y supraíndices, i.e., $x^k = x_k$.

El elemento de volumen tridimensional en coordenadas cartesianas es $d^3x = dx dy dz$.

Los operadores gradiente y divergencia en el espacio tridimensional serán ∇ y $\nabla \cdot$ respectivamente.

Resumen

Este trabajo se da una introducción breve sobre la relatividad general, sus postulados, sus ecuaciones más emblemáticas y su formalismo matemático, así como algunas de sus implicaciones astronómicas más conocidas, tales como la precesión del perihelio de órbitas y la deflexión de la luz por efecto de campos gravitacionales.

Se introduce el formalismo de Parametrización Post-Newtoniana (PPN), el cual describe una pequeña corrección relativista a cualquier teoría gravitacional que satisfaga el principio de equivalencia de Einstein. Dicho formalismo requiere de un sistema coordinado en particular y potenciales escalares y vectoriales generando así un tensor métrico para dicho formalismo.

Utilizando el principio de Fermat se encontró una ecuación general para la deflexión de un rayo de luz aplicable a cualquier teoría métrica de gravitación estacionaria, en función solo de las componentes espaciales del tensor métrico del espacio-tiempo sin ninguna aproximación de campo débil o PPN. Se aplicó este resultado para dos casos particulares: 1) un tensor métrico simétricamente esférico y 2) un tensor métrico en el espacio-tiempo de Kerr. También se analizó dicha ecuación general de deflexión de la luz para una métrica PPN esféricamente simétrica, con dos perfiles de densidad distintos.

Capítulo 1

Introducción

Una de las teorías más importantes dentro de la física actual es la relatividad general de Einstein. En el área de la astronomía es esencial para entender un gran número de las observaciones que se hacen. En este capítulo se introducirá un breve resumen histórico sobre su origen, así como las observaciones que dieron pie a su aceptación por toda la comunidad científica. Posteriormente se mencionará lo que es la ecuación geodésica, las ecuaciones de campo de Einstein-Hilbert así como una opción alterna a las mismas y algunas otras definiciones necesarias con respecto a la métrica tridimensional en el espacio-tiempo. También se introducirá el concepto de materia oscura, las implicaciones que llevan a la suposición de su existencia y algunas de sus implicaciones, para finalmente mencionar una teoría alterna a esta última, conocida como MODified Newtonian Dynamics (MOND).

§1.1. Relatividad general y el perihelio de mercurio.

Desde la época de Newton la gravedad como fenómeno físico era regida por su ley de gravitación universal publicada en 1687 (Newton, 1969), en la cuál se entendía a la fuerza de gravedad entre dos cuerpos masivos en el espacio como un efecto instantaneo de atracción entre ellos, directamente proporcional al producto de las masas M_1 , M_2 e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d que los separa:

$$F_g = -G \frac{M_1 M_2}{d^2},$$

donde $G = 6.6738 \times 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$ la constante de gravitación universal, la cual es calibrada

mediante mediciones terrestres y del sistema solar. Bajo esta ley se entendió la influencia gravitacional sobre masas de prueba en la tierra y sobre la interacción de ésta sobre la luna, del sol con los planetas y de los planetas entre ellos mismos.

Una aplicación astronómica de esta ley, fue el descubrimiento del planeta Neptuno con base las observaciones en la trayectoria de la órbita de Urano. Dicha órbita publicada por Alexis Bouvard en 1821 no era la predicha teóricamente tomando en cuenta sus interacciones gravitacionales con el sol y el resto del sistema solar, sino que tenía grandes perturbaciones que no se lograban explicar. En 1843 John Couch Adams propuso y calculó la trayectoria de un octavo planeta más lejano que Urano, el cual causaría dichas perturbaciones. Independientemente en 1846 Urbain Le Verrier hizo los mismos cálculos, para que finalmente Neptuno fuera descubierto el 23 de septiembre de 1846.

En términos generales, hasta finales del siglo XIX las leyes de Newton fueron consideradas absolutas y estaban basadas en el principio de relatividad de Galileo. Fue entonces cuando de manera matemática la teoría del electromagnetismo representada por las ecuaciones de Maxwell resultó no respetar las transformaciones de Galileo entre sistemas de referencia, sino que satisfacía las después conocidas como transformaciones de Lorentz (Schutz, 2009). En estas últimas se considera a la velocidad de la luz como una constante fundamental que tiene que aparecer dentro de la representación matemática de las mismas, dando como resultado el carácter no absoluto del tiempo.

Además, durante varios años se creyó que la luz se desplazaba a través de un “fluido” invisible e indetectable denominado aether, hecho que en términos generales contradice los resultados experimentales de 1887 de Michelson & Morley (Freire, 1994), en el cual se mostró que la velocidad de la luz es invariante bajo el movimiento relativo de la tierra con el supuesto aether.

Éste hecho motivó en 1905 a Albert Einstein a formar su teoría de la relatividad especial, el cual es el principio de relatividad especial de Galileo más la suposición de que la velocidad de la luz es la máxima velocidad de transmisión de información de interacciones físicas. De aquí se sigue entonces que la velocidad de la luz ($c = 299\,792\,458$ m/s) es la misma en cualquier sistema de referencia inercial en el que se mida, en completo acuerdo con las mediciones realizadas por Michelson & Morley.

La existencia de la velocidad de la luz como una cota máxima de rapidez contradecía el hecho de que la gravedad, desde el punto de vista Newtoniano, fuera una fuerza de interacción instantánea. Ésto llevó a Einstein en 1915 a formular una teoría relativista de la gravedad, conocida como relatividad general, cuyos principios y ecuaciones se discutirán

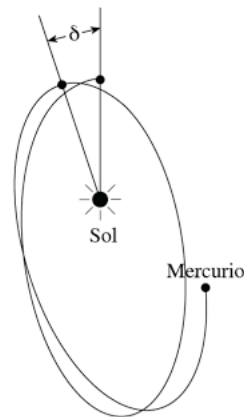


Figura 1.1: Descripción gráfica de la precesión δ del perihelio de Mercurio. La imagen fué obtenida de: http://www.physicsoftheuniverse.com/topics_relativity_general.html

más adelante.

Una de las predicciones hechas por la teoría de la relatividad general es la explicación de la precesión en el perihelio de la órbita elíptica de mercurio, Figura 1.1. Todos los planetas interactúan entre sí gravitacionalmente, cuando esta interacción se elimina se observa que sus órbitas tienen una precesión en su órbita casi nula, excepto en el caso de mercurio. Anteriormente ya había sido observado algo similar en el caso de la órbita de urano, fué así como se descubrió neptuno. Así que se trató de explicar de una forma similar el caso de mercurio, suponiendo que había un planeta entre el sol y mercurio para que afectara solo a este último de forma significativa, dicho planeta (vulcano) nunca se observó.

Por otro lado, en base a la nueva teoría de Einstein esto era efecto de que el sol curva el espacio-tiempo a su alrededor, mayormente a distancias más cercanas, similar a la forma en la que un mantel estirado (inicialmente plano), se deforman cuando un cuerpo masivo se coloca sobre él.

Gracias a esto Einstein encontró que la precesión δ para la órbita de mercurio es de $43''$ por siglo (Roseveare, 1979).

§1.2. Eddington y la deflexión de la luz.

Como ya se mencionó, la teoría de la relatividad general nos dice que el sol curva el espacio-tiempo a su alrededor, pero no es un efecto exclusivo del sol, sino que todos los objetos masivos provocan una deformación o curvatura en el espacio-tiempo, a mayor masa

mayor curvatura.

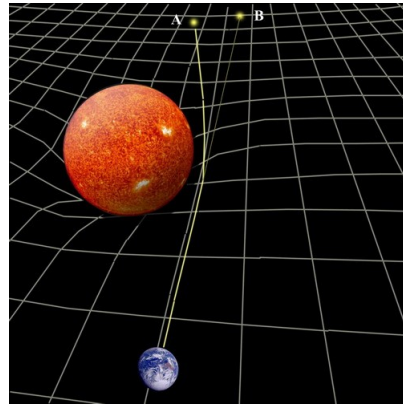


Figura 1.2: Animación que muestra la deflexión de trayectorias de luz que pasan cerca del sol, observadas desde la tierra. Imagen tomada de: http://www.physicsoftheuniverse.com/topics_relativity_general.html/

Así pues, una distribución de materia lo suficientemente grande genera una curvatura tal que, los rayos de luz que pasen suficientemente cerca de la distribución de materia modifican su trayectoria dejando de ser rectas, Figura 1.2. Este efecto de ‘curvar’ las trayectorias de los rayos de luz se denomina *deflexión de la luz por campos gravitacionales*, y fue predicho por la teoría de la relatividad general de Einstein en 1915 (Poisson & Will, 2014).

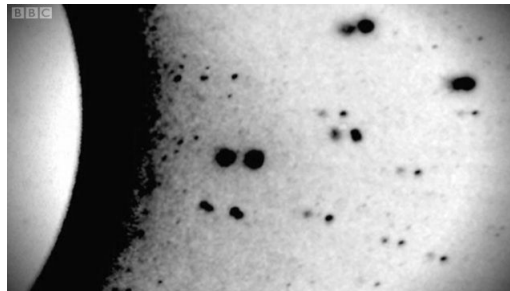


Figura 1.3: Fotografía tomada por Eddington del eclipse solar de 1919 superpuesta a una imagen de la misma zona del cielo 6 meses después. Se ve como la posición de las estrellas ‘cercanas’ al sol es diferente en ambos casos. Imagen tomada de: <https://briankoberlein.com/2014/05/19/einsteineddington/>

En 1919, Arthur Eddington, viajó a la Isla de Príncipe en África para fotografiar un eclipse total de sol, con el cual pudo ver la posición de las estrellas cercanas a la corona solar

sin el problema de tener sobreexposición debida normalmente al mismo sol. La luz de estas estrellas seguía una trayectoria que pasaba muy cerca del sol para poder ser observada desde la tierra en el momento del eclipse. Al comparar la posición de estas estrellas en el cielo con la posición de las mismas 6 meses después (para poder verlas de noche sin interferencia del Sol), Eddington se dió cuenta de que había discrepancia, Figura 1.3. Esta fue considerada la prueba definitiva de que la teoría de Einstein era válida. Aunque las mediciones de Eddington tenían mucha incertidumbre de por medio, con el paso de los años se hicieron mejores experimentos con mayor precisión, para probar de manera más certera la veracidad de sus observaciones.

El ángulo al que los rayos de luz son desviados de su trayectoria inicial es llamado *ángulo de deflexión* y bajo las aproximaciones de que la luz pasa cerca de una masa puntual M , este ángulo es conocido como el ángulo de Einstein:

$$\alpha_E = \frac{4GM}{c^2 b}, \quad (1.1)$$

Donde b es el parámetro de impacto (Poisson & Will, 2014).

§1.3. Hipótesis y postulados de relatividad general

A lo largo de la historia no solo han evolucionado las teorías de la física. También lo han tenido que hacer las teorías matemáticas, el ejemplo más claro es el cálculo, sobre el cuál se sostiene toda la teoría de Newton.

El formalismo matemático utilizado en el presente trabajo es el propuesto por Robert H. Dicke (Will, 1993), en el cuál se formulan cuatro puntos importantes:

- i)* El espacio-tiempo es una variedad diferenciable 4-dimensional, donde cada evento físico corresponde a un punto dentro de la variedad. La variedad no necesita a priori una conexión métrica o afín. Se espera que los experimentos y/u observaciones obliguen a concluir que tiene ambos. Particularmente en este trabajo se supondrá que existe una conexión afín.
- ii)* Todas las ecuaciones deben estar escritas de forma covariante, i.e., deben ser independientes del sistema de coordenadas.
- iii)* La gravedad está asociada con uno o más campos de carácter tensorial de cualquier rango.

- iv) Las ecuaciones dinámicas que gobiernan la gravedad deben ser derivables de un principio de mínima acción invariante.

Estos puntos restringen fuertemente las teorías de gravitación, muchas de ellas solo cumplen los primeros 3 o incluso solo los primeros 2. Por esta razón se ha formulado un conjunto de 4 criterios fundamentales a, b, c y d, que en conjunto con los puntos *i* e *ii* (excluyendo *iii* y *iv*), cualquier teoría de la gravedad debería satisfacer para que sea viable (Will, 1993):

- a) **ser completa**, es decir, debe ser capaz de analizar desde los “primeros principios” el resultado de cualquier experimento de interés. No es suficiente que la teoría postule que cuerpos de distintas composiciones caen con la misma aceleración. La teoría debe incorporar un conjunto completo de leyes electrodinámicas y mecánicas cuánticas, que se pueden usar para calcular el comportamiento detallado de los cuerpos en campos gravitacionales. Sin embargo, esta demanda no debe extenderse demasiado a áreas tales como la teoría de la interacción débil y fuerte, la gravedad cuántica, las teorías de campo unificado, las singularidades del espacio-tiempo y las condiciones iniciales cósmicas. Incluso la relatividad especial y general no se consideran como completas o completamente desarrolladas.
- b) **ser auto consistente** en su predicción para el resultado de cada experimento, es decir, debe ser única cuando se calculan las predicciones por dos métodos diferentes pero equivalentes y así obtener los mismos resultados.
- c) **ser relativista** en el límite cuando la gravedad es “mucho menor” en comparación con otras interacciones físicas. Justo en este límite las leyes de la física no gravitacionales deben reducirse a las leyes de la relatividad especial.
- d) **tener un correcto límite newtoniano**. En otras palabras, en el límite de campos gravitacionales débiles y movimientos lentos con velocidades $v \ll c$, debe reproducir las leyes de la mecánica de Newton.

El primer postulado de la relatividad general es el *Principio de Equivalencia de Einstein* (PEE). Esta es la base de todas las teorías métricas de gravitación.

Para poder enunciar el PEE correctamente hace falta enunciar primero el *Principio de Equivalencia Débil* (PED), el cual establece que si un cuerpo de prueba lo suficientemente

pequeño, como para que se pueda ignorar su acoplamiento a las inhomogeneidades en campos externos y electricamente neutro se coloca en un evento inicial en el espacio-tiempo y se le da una velocidad inicial distinta de cero, entonces su trayectoria posterior será independiente de su estructura interna y composición. También es útil definir un ‘experimento de prueba local no gravitacional’ mediante las siguientes proposiciones: *i)* es un experimento realizado en un laboratorio que cae libremente y que es lo suficientemente pequeño como para ignorar las inhomogeneidades en los campos externos en todo su volumen y *ii)* en este experimento los efectos autogravitacionales son insignificantes.

Por lo que el PEE finalmente se postula como:

1. PED es válido.
2. El resultado de cualquier experimento de prueba local no gravitacional (o que cae libremente) es independiente de la velocidad del aparato de medición.
3. El resultado de cualquier experimento de prueba local no gravitacional es independiente de dónde y cuándo se realiza en el universo.

La teoría de gravitación relativista de Einstein está basada en el PEE y supone que el principio de relatividad de Einstein es válido.

§1.4. Ecuación geodésica.

Una trayectoria geodésica en el espacio-tiempo de 4 dimensiones es la línea de menor ‘longitud’ sobre una hipersuperficie que une dos puntos o eventos físicos, y está contenida en la hipersuperficie. Su equivalente en un espacio tridimensional euclidiano es una línea recta. La distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie Terrestre es una curva, que corresponde a un segmento de círculo máximo entre dichos puntos.

Para poder encontrar la ecuación correspondiente a un movimiento geodésico hace falta parametrizar las coordenadas x^ν bajo un parámetro λ , para poder así minimizar el valor del intervalo ds , dado por:

$$ds^2(\lambda) := g_{\mu\nu} dx^\mu(\lambda) dx^\nu(\lambda), \quad (1.2)$$

así pues, la condición de mínima ‘longitud’ es:

$$0 = \delta s = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda, \quad (1.3)$$

donde $[\dot{\quad}] = d/d\lambda$.

Haciendo la variación sobre todas las coordenadas se obtiene que (Landau, 2013):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (1.4)$$

donde $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ representa la conexión del tensor métrico, también conocido como los *símbolos de Christoffel*, y que se relacionan con la métrica $g_{\mu\nu}$ de la siguiente forma (Landau, 2013):

$$\Gamma_{\sigma\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (1.5)$$

La ecuación geodésica (1.4) es la que obedece cualquier partícula de prueba que se mueve en un espacio-tiempo y depende completamente de la métrica misma. Su interpretación geometrodinámica puede interpretarse como que es “*la curvatura del espacio-tiempo le dice a las partículas de prueba masivas y no masivas como moverse*”.

§1.5. Ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein

Las ecuaciones de campo de la relatividad general fueron encontradas primeramente por David Hilbert, quien leyó el trabajo de Einstein y utilizando sus conocimientos matemáticos en mecánica lagrangiana y hamiltoniana encontró funciones que fueron invariantes bajo transformaciones de Lorentz y produjeron dichas ecuaciones de campo. Mientras que Einstein las encontró poco después e independientemente por ‘fuerza bruta’.

El punto de partida fue buscar una ecuación tensorial que en la aproximación de campo débil y bajas velocidades respetara la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.6)$$

Utilizando el principio variacional de mínima acción se puede construir una acción de tal manera que al anular la variación de la misma, y bajo la aproximación de campo débil, se obtenga la ecuación (1.6). Dicha acción se puede construir como la suma de otras dos: S_g , que contiene información del campo gravitacional a través de la curvatura del espacio y S_{mat} , que es una descripción sobre la materia y la energía de los objetos que curvan al

espacio.

Por lo tanto la variación nula de la acción total $S_g + S_{mat}$ está dada por:

$$\delta S_g + \delta S_{mat} = 0, \quad (1.7)$$

y por lo tanto la ecuación de campo resultante $\delta S_g = -\delta S_{mat}$ es interpretada justo como Einstein lo imaginó geometridinámicamente hablando: "la presencia de las masas y energía le dice al espacio como curvarse".

Para obtener un término tensorial equivalente a $\nabla^2 \Phi$ hace falta recordar que $g_{\mu\nu} \sim \Phi/c^2$, por lo que la acción S_g debe tener términos con primeras derivadas de $g_{\mu\nu}$ para que al hacer la variación se obtengan términos con segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$.

Lo primero que pensó Hilbert fue en tomar a los símbolos de Christoffel, pero estos al no ser tensores existe un sistema de referencia donde se pueden anular, así que no funcionan como acción. Su siguiente opción fué una función escalar del tensor de Riemann, de tal manera que:

$$S_g = \int f(R_{\beta\mu\nu}^\alpha) \sqrt{-g} \, d\Omega, \quad (1.8)$$

donde $\sqrt{-g} \, d\Omega$ es el elemento de hipervolumen 4-dimensional, con $g := \det(g_{ik})$ y $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Solo que hay una infinidad de posibles funciones f , por lo que tomó una con la cuál el mismo Riemann ya había trabajado, el escalar de curvatura de Ricci, obteniendo que:

$$S_g = \int R \sqrt{-g} \, d\Omega. \quad (1.9)$$

Con esto es algo complicado pero se puede demostrar que (Landau, 2013):

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d\Omega, \quad (1.10)$$

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \, d\Omega, \quad (1.11)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, describe el flujo de energía y momento lineal del sistema, y en su límite newtoniano va como $\sim \rho c^2$.

Aplicando esto a la ecuación (1.7) se obtienen finalmente las ecuaciones de campo gravitacionales de Hilbert-Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

La cual en su aproximación de campo débil y bajas velocidades coincide con la ecuación (1.6) (Landau, 2013).

Un punto importante es ver que pasa cuando tomamos una $f(R_{\beta\mu\nu}^\alpha)$ distinta de R . Existe una teoría en la cual se supone que $f(R_{\beta\mu\nu}^\alpha) = f(R)$ (Capozziello & Faraoni, 2010), lo cual matemática y físicamente tiene sentido y da como resultado las ecuaciones de campo:

$$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)} \left[\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) + g_{\mu\nu} \frac{f(R) - f'(R)R}{2} \right]. \quad (1.13)$$

Las ecuaciones de campo de Hilbert-Einstein (1.12) son un caso particular de esta teoría más amplia de gravitación. En esta tesis no se profundizará más al respecto en el tema.

§1.6. La métrica tridimensional y otras definiciones útiles

Hasta este momento se ha mencionado mucho a la métrica $g_{\mu\nu}$ 4-dimensional, pero las mediciones físicas se realizan en el espacio de 3 dimensiones a un tiempo dado. Por lo tanto es útil escribir las ecuaciones de la métrica dependientes del intervalo de distancia tridimensional dl . Para esto escribamos el intervalo ds de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ik} dx^i dx^k, \\ &= \left(\sqrt{g_{00}} dx^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i \right)^2 + \left(g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^i dx^k, \\ &= \left(\sqrt{g_{00}} dx^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i \right)^2 - dl^2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde la longitud de arco Euclidiana es (Landau, 2013):

$$dl^2 := \left(-g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^i dx^k = \gamma_{ik} dx^i dx^k, \quad (1.15)$$

con γ_{ik} el tensor métrico 3-espacial dado por:

$$\gamma_{ik} := \left(-g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right). \quad (1.16)$$

Aprovechando dicha definición mencionaremos que al analizar trayectorias de luz requieren ser nulas, i.e. $ds^2 = 0$, por lo que de la ecuación (1.14) se obtiene:

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \pm \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} dl = \frac{1}{g_{00}} \left[-g_{0i} \frac{dx^i}{dl} \pm \sqrt{g_{00}} \right] dl. \quad (1.17)$$

Definiendo el vector tangente a la trayectoria del haz de luz $e^i = dx^i/dl$ y el índice de refracción efectivo:

$$n := \frac{c}{dl/dt} = \frac{1}{g_{00}} \left[-g_{0i} e^i + \sqrt{g_{00}} \right], \quad (1.18)$$

tomando el signo positivo de la ecuación (1.17), i.e., intervalos en el tiempo hacia el ‘futuro’, entonces la ecuación (1.17) toma la forma:

$$dx^0 = n dl. \quad (1.19)$$

Por último, notemos que $e_i = \gamma_{ik} e^k$, por lo que:

$$e_i e^i = \gamma_{ik} e^k e^i = \gamma_{ik} \frac{dx^k}{dl} \frac{dx^i}{dl} = \frac{\gamma_{ik} dx^k dx^i}{dl^2} = 1, \quad (1.20)$$

de tal forma que el vector e^i es unitario.

§1.7. Materia oscura y lentes gravitacionales

La materia oscura no-bariónica se define como materia que existe en el universo y que interactúa con la materia barionica unicamente de forma gravitacional. En específico no lo hace electromagnéticamente, por lo que no emite radiación. A la fecha esta materia oscura ha sido indetectable (Mayet et al., 2016) y por lo tanto solo puede ser considerada como una hipótesis de trabajo independientemente de sus logros para explicar diversas fenomenologías astrofísicas y cosmológicas (Arun et al., 2017) (Sanders, 2010).

El origen del concepto de materia oscura como la conocemos hoy en día en el contexto de astronomía se originó cuando Zwicky (1933), observó que la velocidad radial de varias galaxias individuales en el cúmulo de Coma parecían moverse demasiado rápido para la cantidad de materia visible (Sanders, 2010). Sumando la masa en el cúmulo asumiendo que cada galaxia tiene una relación masa-luminosidad de alrededor de uno en unidades solares, entonces las galaxias individuales se mueven tan rápido que deberían escapar rápidamente,

en otras palabras, el conjunto de galaxias en el cúmulo debió haberse dispersado desde hace mucho tiempo.

Otro hecho importante que le dió fuerza a la idea de materia oscura fueron las curvas de rotación de las galaxias. La curva de rotación de una galaxia es la velocidad de rotación alrededor del centro de la misma, trazada como una función del radio, la cual por el teorema del virial debería ser:

$$v^2 = \frac{GM(r)}{r}, \quad (1.21)$$

con $M(r)$ la masa al radio r . Al comparar la curva de rotación teórica con la obtenida por las observaciones, a mayor distancia al centro galáctico la diferencia entre ambas es mayor, como puede verse en la Figura 1.4. Este hecho se solucionó suponiendo que todas las galaxias tienen un halo de materia oscura en el cual esta inmersa toda la materia barionica que nosotros vemos, así, se explica esa masa faltante en los resultados teóricos.

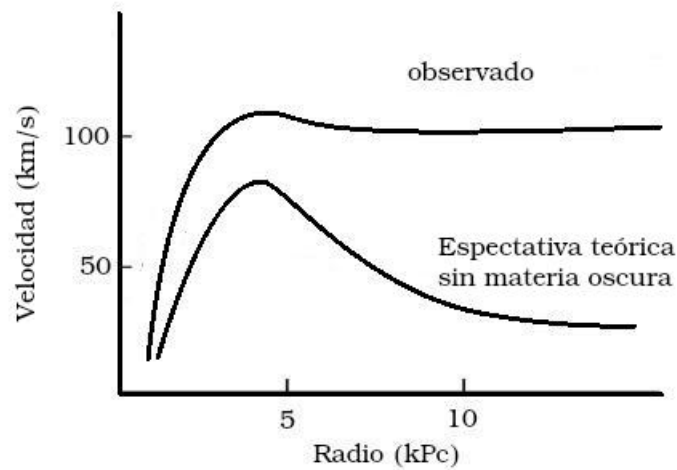


Figura 1.4: Comparación entre una curva de rotación galáctica teórica que debería respetar la ecuación (1.21) y una obtenida mediante observaciones astronómicas, para una galaxia espiral genérica.

Cuando un conjunto de rayos de luz pasa cerca de una cantidad de materia suficientemente concentrada es posible que el observador vea anillos o fragmentos de luz enfocados en el plano del cielo. A esto se le conoce como lente gravitacional y se debe a la deflexión de los rayos de luz en conjunto provocada por el campo gravitacional de la materia concentrada.

Este efecto se observa en una galaxia aislada o un grupo de galaxias produciendo ima-

genes múltiples o alargadas como en la Figura 1.5. En 1979 Dennis Walsh, Bob Carswell y Ray Weymann, descubrieron el primer ejemplo de lente gravitacional, dos imágenes del mismo cuásar debido a los espectros idénticos y el patrón de líneas espectrales, separadas por 5.7 arcsec. Este efecto sucede ya que el cuásar estaba prácticamente detrás de una galaxia intermedia, la cual produjo dos imágenes del mismo. Años después en 1986 dos grupos, uno en Arizona y otro en Toulouse, descubrieron que en varios cúmulos de galaxias parecía haber arcos luminosos alargados en un patrón aproximadamente circular sobre el centro del grupo. Este efecto se debe a lentes gravitacionales ya que los espectros de los arcos estaban en un corrimiento al rojo mucho mayor que los cúmulos, i.e., son en realidad imágenes de galaxias distantes de fondo que son fragmentos de anillos de Einstein formados por el campo gravitatorio de un grupo intermedio de galaxias.



Figura 1.5: Grupo de galaxias distantes denominado el ‘gato de Cheshire’ cuya luz ha sido estirada y doblada por las grandes cantidades de masa contenidas en las galaxias de primer plano. La imagen fue tomada de: <http://chandra.harvard.edu/photo/2015/cheshirecat/>

Gracias al patrón de distorsión en las imágenes de las galaxias de fondo, es posible reconstruir la distribución de densidad superficial de masa en el sistema que provoca el lente. Al hacerlo, y suponiendo que la teoría de la relatividad general de Einstein es la teoría correcta de la gravedad a estas escalas, dicha masa resulta ser mucho mayor que la masa observada por radiación, i.e., mayor a la masa bariónica y fotones. La explicación más aceptada de este hecho es que hay grandes cantidades de materia oscura no-bariónica distribuida a lo largo de galaxias individuales, grupos y cúmulos de las mismas, lo cual sumado a la masa que vemos por radiación resulta ser la masa necesaria para generar los lentes gravitacionales observados.

Por otro lado, el modelo cosmológico más aceptado es el $\Lambda - \text{CDM}$ ‘Cold Dark Matter’, en el cual la materia barionica en el universo constituye solo un $\sim 3.5\%$, mientras que la materia oscura ocupa $\sim 26\%$, y más aún el $\sim 70\%$ restante se le asocia a algo más desconocido, la ‘energía oscura’.

§1.8. Dinámica newtoniana modificada (MOND)

Esta teoría tuvo sus inicios en la década de los 80’s (Sanders, 2010), cuando Mordehai Milgrom propuso que en las curvas de rotación de las galaxias, la ley de gravitación de Newton debía ser modificada cuando las aceleraciones que actúan sobre masas orbitantes son suficientemente grandes (cf. Mendoza, 2003), i.e., si la aceleración \mathbf{a} satisface que $|\mathbf{a}| = a \ll a_0 = 1.2 \times 10^{-10} \text{m/s}^2$ debería cumplirse que:

$$a = -\frac{\sqrt{GM(r)a_0}}{r}, \quad (1.22)$$

con a_0 la *constante de Milgrom*. Este resultado no tiene claros sus fundamentos físicos pero empíricamente da buenos resultados. Uno de ellos es la curva de rotación de galaxias, las cuales se explican sin necesidad de tomar en cuenta a la materia oscura.

Esta es solo una de las teorías que busca tener explicaciones a distintos fenómenos astronómicos sin necesidad de utilizar la materia oscura, ya que esta misma no se ha detectado aún, y hasta que eso suceda bien puede no existir aunque sea un complemento perfecto para prácticamente toda la astronomía galáctica, extragaláctica y cosmología.

Cabe mencionar que MOND se puede obtener en el límite de campo débil de la teoría de gravitación $f(\chi) = \chi^{3/2}$, la cual es una de las teorías $f(R)$ mencionadas en la Sección §1.5, una explicación alterna a los lentes gravitacionales (Mendoza et al., 2013). Esta teoría tiene una expresión para la componente g_{00} a segundo orden de aproximación que se puede posteriormente utilizar en una formula de deflexión de la luz en simetría esférica (Keeton & Petters, 2005), y encontrar la expresión de g_{11} a segundo orden. Más adelante veremos por que son importantes dichos componentes de la métrica a ese orden.

Capítulo 2

Parametrización Post-Newtoniana (PPN)

Como se mencionó en la sección §1.5, a partir del camino seguido para obtener las ecuaciones de campo de Einstein-Hilbert se mencionó que estas no tendrían por que ser la única propuesta relativista de la gravitación newtoniana, podrían existir en principio otras teorías métricas capaces de recuperar la teoría de la gravedad de Newton en el límite de campo débil. En este capítulo se construirá un formalismo el cual permite de manera experimental validar o no a diferentes teorías de gravitación. Esto consiste en tomar como base la teoría de gravitación de Newton y el principio de equivalencia, para poder incluir pequeñas correcciones relativistas a esta descripción y así calibrar los resultados obtenidos con mediciones precisas de por ejemplo el sistema solar. Se introducirá brevemente la definición del espacio-tiempo en el que se trabaja y sus coordenadas, así como lo que son los potenciales y los parámetros post-newtonianos, para terminar con la expresión explícita del tensor métrico resultante general de esta parametrización.

§2.1. Aproximaciones post-newtonianas

Se conoce como aproximación post-newtoniana a un análisis de los fenómenos físicos donde se hace uso de la teoría de la relatividad general, en su aproximación de campo débil y bajas velocidades, lo cual es un paso más allá de la gravitación newtoniana que considera a la fuerza de gravedad como una interacción instantánea (Will, 1993). Esta aproximación es suficientemente precisa para abarcar pruebas dentro del sistema solar u otro sistema

astrofísico que posea un potencial gravitacional débil ($\Phi/c^2 \ll 1$) partículas de prueba que experimenten bajas velocidades ($v \ll c$).

Para comprender mejor este concepto veremos cuales son las escalas de las magnitudes físicas, para entender en que punto empezamos a hablar de un límite post-newtoniano. A escala del sistema solar se cumple que:

$$\frac{\Phi}{c^2} \sim \frac{v^2}{c^2} \sim \frac{\Pi}{c^2} \sim O(2), \quad (2.1)$$

donde Φ es el potencial newtoniano del sistema (sol para el solar), v la velocidad de las partículas de prueba, Π densidad de energía específica (densidad de energía/densidad de materia en reposo) del sistema y el $O(n)$ hace referencia a cantidades que tienen términos en c^{-n} con n un número entero. Todas estas cantidades están asociadas con un orden de ‘pequeñez’ (Will, 1993). De hecho, la mecánica newtoniana es la aproximación a segundo orden de la métrica $g_{\mu\nu}$. Para empezar a hablar de una mecánica post-newtoniana debemos tomar términos de orden mayor en la métrica.

Tomemos la expresión del lagrangiano de una partícula aislada dentro de un campo gravitatorio con métrica $g_{\mu\nu}$ (Will, 1993):

$$L = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = (-g_{00} - 2g_{0j}v^j/c - g_{ij}v^i v^j/c^2)^{1/2}, \quad (2.2)$$

su límite newtoniano es

$$L = (1 - 2\Phi/c^2 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.3)$$

y sabemos que $g_{00} \simeq -1 + 2\Phi/c^2$, por lo que podemos decir que la física newtoniana toma términos en el lagrangiano hasta $O(2)$, por lo que la física post-newtoniana involucra términos más elevados, de $O(4)$.

Es importante mencionar que la conservación de la masa en reposo y la conservación de la energía en el límite newtoniano provoca que los términos de orden $O(1)$ y $O(3)$ no aparezcan. Mientras que los términos de orden mayor serán o no tomados en cuenta según cada teoría métrica (Will, 1993).

Lo que nos lleva a que el lagrangiano post-newtoniano debe considerar todos los términos de $O(4)$ en la métrica, por lo que apoyándonos en las ecuaciones (2.2) y (2.3), el lagrangiano queda:

$$L = (1 - 2\Phi/c^2 - v^2/c^2 - g_{00}[O(4)] - 2g_{0j}[O(3)]v^j/c - g_{ij}[O(2)]v^i v^j/c^2)^{1/2}, \quad (2.4)$$

concluyendo así que para la aproximación post-newtoniana de partículas masivas, las componentes del tensor métrico deben estar escritas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g_{00} & a O(4), \\ g_{0j} & a O(3), \\ g_{jk} & a O(2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

En el caso de una trayectoria de un haz de luz $d\tau = 0$, el lagrangiano newtoniano a primer orden es:

$$L = (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.6)$$

con $v = c$, por lo que su aproximación post-newtoniana es (Will, 1993):

$$L = (1 - 2\Phi/c^2 - v^2/c^2 - g_{ij}[O(2)]v^i v^j/c^2)^{1/2}, \quad (2.7)$$

donde se ve que para la propagación de rayos de luz basta con tener:

$$\begin{aligned} g_{00} & a O(2), \\ g_{jk} & a O(2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

§2.2. Sistema coordenado

Para analizar el límite post-newtoniano correctamente, debemos especificar el sistema de coordenadas, el cual se llama “*coordenadas locales cuasi-cartesianas*” (Will, 1993).

Imaginamos un universo isotrópico y homogéneo en el que reside un sistema post-newtoniano aislado. Elegimos un sistema de coordenadas cuyas regiones exteriores lejos del sistema aislado están en caída libre con respecto al modelo cosmológico circundante, y están en reposo con respecto a un marco en el que el universo parece isótropo. En estas regiones externas, se espera que la métrica física sea de tipo Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker más una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$ debida al sistema local (Will, 1993):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (1 - kr^2)^{-2} \delta_{ij} dx^i dx^j + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.9)$$

donde r es la distancia medida desde el sistema aislado.

La métrica post-newtoniana general se encuentra anotando términos métricos compuestos de los funcionales post-newtonianos posibles de las variables de la materia, cada uno multiplicado por un coeficiente que depende de las condiciones de frontera cosmológicas y otras constantes (Will, 1993). Estos términos se agregan a la métrica de Minkowski para obtener la métrica física. Desafortunadamente, el número de estos funcionales en principio es infinito, por lo que se deben imponer algunas restricciones sobre dichos términos a considerar, tomando en cuenta principalmente un sentido de ‘racionalidad’ obtenida por la evidencia de las teorías de la gravitación conocidas, entre las cuales estan (Will, 1993):

- i) Los términos del tensor métrico deben ser solamente de orden newtoniano o post-newtoniano.
- ii) Los términos “post-newtonianos” del tensor métrico deben tender a cero entre más lejos se esté de la distribución de masa.
- iii) La métrica debe ser adimensional.
- iv) El cero del sistema coordenado cuasi-cartesiano, i.e., el origen espacial y el momento inicial de tiempo, son completamente arbitrarios por lo que la métrica no debe contener ninguna referencia explícita a estas cantidades.
- v) Las correcciones métricas h_{00} , h_{0j} y h_{ij} deben construirse a partir de cantidades apropiadas al sistema físico en cuestión. Se pueden tomar variables asociadas con la distribución de materia pero para variables asociadas con la estructura de las ecuaciones de campo o con las condiciones cosmológicas, solo hay dos cantidades disponibles: parámetros escalares de compatibilidad cosmológica o coeficientes numéricos; y el tensor δ_{ij} .
- vi) Los funcionales del tensor métrico deben generarse por la masa en reposo, la energía, la presión y la velocidad, y no por sus gradientes.
- vii) Los funcionales deben ser simples.

§2.3. Potenciales post-newtonianos

Tomando en cuenta las condiciones post-newtonianas mencionadas en la sección anterior y el hecho de que queremos un tensor métrico que cumpla las ecuaciones (2.5), así como los funcionales construidos sean ‘simples’, podemos entonces construir los llamados “*Potenciales post-newtonianos*”:

• Para g_{ij} necesitamos términos hasta $O(2)$ además de que deben ser tensores 3-3, por lo que todos los términos posibles (Will, 1993) son $\delta_{ij}\Phi$ y χ_{ij} donde:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) := -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x', \quad (2.10)$$

es el potencial Newtoniano ‘clásico’ y:

$$\chi_{ij} := \delta_{ij}\Phi - \Phi_{ij}, \quad (2.11)$$

con

$$\Phi_{ij} := -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) (x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3x', \quad (2.12)$$

y el *super potencial* χ definido por:

$$\chi(\mathbf{r}, t) := -G \int \rho(\mathbf{r}', t) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d^3x'. \quad (2.13)$$

• Para g_{0j} necesitamos términos hasta $O(3)$ y deben ser vectores de 3 entradas, por lo que tenemos dos opciones (Will, 1993), V_i y W_i donde:

$$\begin{aligned} V_i &:= G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) v'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x', \\ W_i &:= G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') (x_i - x'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3x'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

• Finalmente, para g_{00} necesitamos componentes hasta $O(4)$ y que sean escalares, así que las opciones son muchas más:

$$\begin{aligned}
\Phi_W &:= G \int \rho(\mathbf{r}', t) \rho(\mathbf{r}'', t) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} \right) d^3x' d^3x'', \\
\Phi_1 &:= G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) v'^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x', & \Phi_2 &:= G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) U'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x', \\
\Phi_3 &:= G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) \Pi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x', & \Phi_4 &:= G \int \frac{p'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x', \\
\mathcal{A} &:= G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t) [\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3x', & \mathcal{B} &:= G \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \frac{d\mathbf{v}'}{dt} d^3x'.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

§2.4. Tensor métrico post-newtoniano

Una vez teniendo los potenciales falta ver como introducirlos en el tensor métrico, para esto se hace una restricción y calibración bajo varias versiones propuestas del marco PPN, además de tomar en cuenta las propiedades de los mismos potenciales (Will, 1993).

Esto nos lleva a que se necesitan 10 *Parámetros PPN*: $\gamma, \beta, \xi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ y ζ_4 para construir un tensor métrico general, el cual está dado por (Will, 1993):

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} + 2\beta \frac{\Phi^2}{c^4} + 2\xi \frac{\Phi_W}{c^2} - (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi) \frac{\Phi_1}{c^2} \\
&\quad - 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi) \frac{\Phi_2}{c^2} - 2(1 + \zeta_3) \frac{\Phi_3}{c^2} - 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi) \frac{\Phi_4}{c^2} \\
&\quad + (\zeta_1 - 2\xi) \frac{\mathcal{A}}{c^2} + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \frac{w^2 \Phi}{c^4} + \alpha_2 \frac{w^i w^j \Phi_{ij}}{c^4} - (2\alpha_3 - \alpha_1) \frac{w^i V_i}{c^3}, \\
g_{0j} &= \frac{1}{2} (4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi) \frac{V_j}{c^2} + \frac{1}{2} (1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi) \frac{W_j}{c^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\alpha_1 - 2\alpha_2) \frac{w_i \Phi}{c^3} + \alpha_2 \frac{w^j \Phi_{ij}}{c^3}, \\
g_{ij} &= \left(1 - \frac{2\gamma \Phi}{c^2} \right) \delta_{ij},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

con \mathbf{w} la velocidad del sistema coordinado con respecto al original en caso de estar en uno, sino $\mathbf{w} = 0$.

Todos estos parámetros y potenciales PPN se pueden o no tomar en cuenta en diferentes teoría métricas, pero específicamente para analizar movimientos de rayos de luz por la condición (2.8), el tensor métrico solo toma en cuenta un parámetro PPN (Will, 1993):

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 - \frac{2\Phi}{c^2}, \\g_{ij} &= \left(1 - \frac{2\gamma\Phi}{c^2}\right) \delta_{ij},\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde por distintas observaciones en el sistema solar $\gamma \sim 1$ (Will, 1993).

Capítulo 3

Deflexión de rayos de luz en el espacio-tiempo curvo

En este capítulo se introduce el principio de Fermat, bajo el cual se traza la trayectoria de un rayo de luz. Después se hace mención de dos formas distintas en las que se ha abordado el tema de la deflexión de rayos de luz con una métrica conforme y con una métrica simétricamente esférica. Posteriormente se propone una forma de encontrar una ecuación general para la deflexión de haces de luz, se encuentra y se compara con resultados previos. Inmediatamente se hacen análisis de esta fórmula general para dos casos de tensores métricos generados por un espacio tiempo esféricamente simétrico general y por el espacio tiempo de Kerr. Finalmente, se utiliza una métrica PPN para encontrar trayectorias de haces de luz para dos perfiles de densidad conocidos: el perfil de Navarro–Frenk–White (NFW) y el de un halo isoterma.

§3.1. Principio de Fermat

El principio de Fermat se puede expresar de manera simple como ‘*El mínimo tiempo posible que tarda la luz en recorrer una trayectoria entre dos puntos en el espacio*’. Esto se interpreta entonces como un principio relativista extremal en el tiempo de la siguiente manera:

Principio §3.1.1. *Consideremos un evento A donde se emite la radiación y una línea de universo l como-tiempo para la cual $ds^2 > 0$. Un rayo de luz es una curva suave γ y nula*

24 3. DEFLEXIÓN DE RAYOS DE LUZ EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO

que se propaga de A hacia l si y solo si el tiempo de llegada t sobre l es estacionario bajo variaciones de primer orden de γ dentro del conjunto de curvas nulas suaves de A hacia l (Schneider et al., 2012).

En otras palabras la variación:

$$\delta t = 0. \quad (3.1)$$

Utilizando entonces la ecuación (1.19) la relación anterior es equivalente a la nulidad de la siguiente variación:

$$\delta \int n dl = 0. \quad (3.2)$$

La relación anterior expresa de manera matemática el principio de Fermat y la curva que se obtiene de dicha variación representa la trayectoria de un rayo de luz.

§3.1.1. Principio de Fermat en un espacio-tiempo conforme y estacionario

Un espacio-tiempo con métrica física $\tilde{d}s^2$ conforme a una métrica estacionaria (independiente del tiempo) ds^2 se ve de la siguiente forma:

$$\tilde{d}s^2 = \Omega^2 ds^2, \quad \Omega > 0, \quad (3.3)$$

$$ds^2 = e^{2U} (dt - \omega_i dx^i)^2 - e^{-2U} dl^2, \quad (3.4)$$

donde U , ω_i son funciones dependientes solamente de las coordenadas espaciales x^i , dl es la longitud de arco euclidiana (1.15) y el factor conforme Ω depende de las cuatro coordenadas x^μ (Schneider et al., 2012).

Los rayos de luz se mueven en trayectorias nulas $ds^2 = 0$, por lo que en este caso:

$$t = \int (\omega_i dx^i + e^{-2U} dl) = \int \left(\omega_i \frac{dx^i}{dl} + e^{-2U} \right) dl, \quad (3.5)$$

y por el principio de Fermat (3.2) se deduce que:

$$n = e^{-2U} + \omega_i \frac{dx^i}{dl}. \quad (3.6)$$

§3.2. Resultados previos para la deflexión de la luz

Como se mencionó en el la sección §1.2, la deflexión de la luz es un fenómeno físico bien conocido, existen diversos formalismos para su escritura matemática, cada uno con sus suposiciones y aproximaciones en la teoría de gravitación.

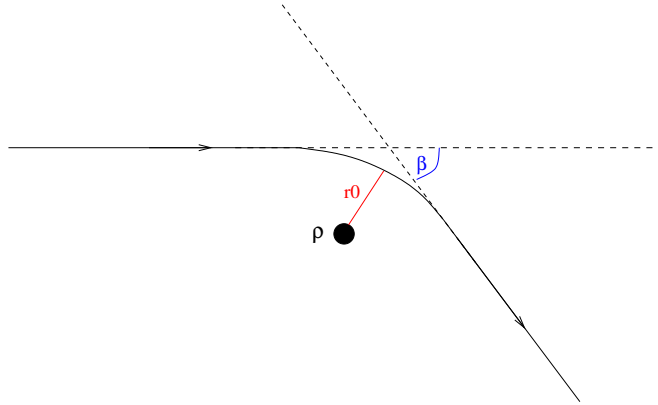


Figura 3.1: Esquema de la deflexión de un haz de luz generado por una fuente en el infinito y que pasa cerca de una distribución de masa ρ . Dicho haz experimenta una desviación con respecto de su trayectoria inicial de un ángulo β . Su trayectoria se supone simétrica antes y después de la distancia mínima a la distribución de masa, $r = r_0$.

Un resultado interesante es el obtenido por Keeton & Petters (2005) para el ángulo de deflexión de la luz en un espacio-tiempo simétricamente esférico como se ve en la Figura 3.1, el cual es:

$$\beta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr - \pi, \quad (3.7)$$

donde r_0 es la distancia mínima de aproximación del haz de luz al centro de la distribución de masa.

Este resultado se obtiene con un formalismo Lagrangiano aprovechando la simetría en la trayectoria del haz de luz, obteniendo finalmente:

$$\beta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{[-g_{00}(r)g_{11}(r)]^{1/2}}{r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 g_{00}(r_0) - g_{00}(r) \right]^{1/2}} dr - \pi. \quad (3.8)$$

Otro formalismo es le propuesto por Schneider et al. (2012), el cual se detallará a

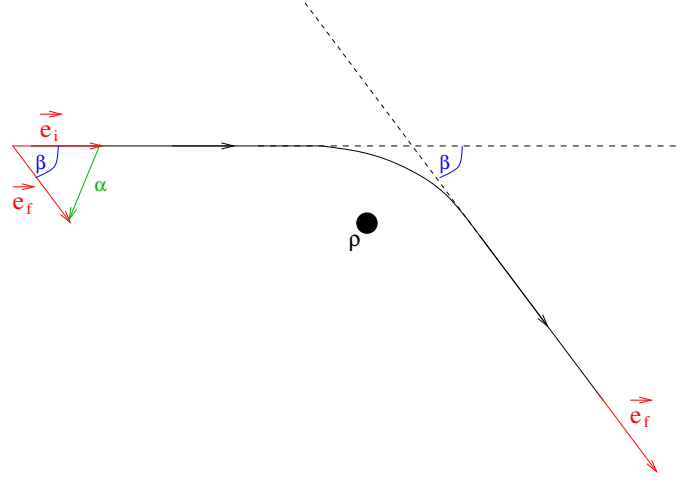


Figura 3.2: Esquema de la trayectoria de un haz de luz deflectado por una distribución de masa ρ , mostrando los vectores tangentes a su trayectoria antes y después de ser deflectada. Se puede observar la relación vectorial que hay entre el vector α y el ángulo β

continuación. Estos autores utilizan una métrica conforme de materia no compacta y aislada

$$ds^2 \approx \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - 8cdt \frac{\mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}}{c^3} - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) d\mathbf{x}^2, \quad (3.9)$$

donde U y \mathbf{V} son dos potenciales retardados (Schneider et al., 2012), asumiendo bajas velocidades y $|P| \ll \rho c^2$, por lo que el tensor de energía-momento de un fluido perfecto $T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$, con ρ la densidad de masa, p la presión y $u^\alpha := dx^\alpha/d\tau$ la 4-velocidad, toma la siguiente forma:

$$T^{00} \approx \rho c^2, \quad T^{0i} \approx c\rho v^i, \quad T^{ij} \approx \rho v^i v^j + p\delta^{ij}, \quad (3.10)$$

donde $v^i := dx^i/dt$ (Schneider et al., 2012).

Utilizando lo obtenido en la ecuación (3.6), se ve que el índice de refracción es:

$$n = 1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{4}{c^3} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}. \quad (3.11)$$

Haciendo uso del principio de Fermat (3.2) y definiendo el vector de deflexión como $\alpha := -\int d\mathbf{e} \sim \mathbf{e}_{inicial} - \mathbf{e}_{final}$ como se ve en la Figura 3.2, obtienen que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \int_0^\infty \left[-\frac{2}{c^2} \nabla U + \frac{4}{c^3} \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}) + \frac{2}{c^2} (\nabla U \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} - \frac{4}{c^3} (\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \right] dl. \quad (3.12)$$

Ahora bien, por el Teorema §A.0.1 del apéndice, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e}[\mathbf{e} \cdot (\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}))] &= \mathbf{V} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{e} + \mathbf{e} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) + (\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{V} \\ &\quad - \mathbf{e} \{ \mathbf{e} \cdot [\mathbf{V} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e})] \} - \mathbf{e} \{ \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{e}] \} \\ &\quad - \mathbf{e} \{ \mathbf{e} \cdot [\mathbf{e} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V})] \} - \mathbf{e} \{ \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{V}] \}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

y así, utilizando los Teoremas §A.0.2 y §A.0.3, la identidad:

$$\mathbf{e} \cdot [\mathbf{e} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V})] = 0,$$

y dado que los vectores \mathbf{e} y $\mathbf{e} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V})$ son ortogonales entre si entonces la relación (3.12) se simplifica como:

$$\boldsymbol{\alpha} = \int \left[-\frac{2}{c^2} [\nabla U - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \nabla U)] + \frac{4}{c^3} \mathbf{e} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) \right] dl. \quad (3.14)$$

Este es el resultado final para el ángulo de deflexión encontrado por (Schneider et al., 2012). Sin embargo no es una fórmula general.

Para aclarar notación y evitar confusiones, veamos que relación hay entre los ángulos $\alpha := |\boldsymbol{\alpha}|$ y β suponiendo que se cumplen las condiciones necesarias para que ambas formulas puedan ser aplicables, por ejemplo bajo la aproximación de simetría esférica. Para esto recordemos las definiciones de \mathbf{e} , $\boldsymbol{\alpha}$ y que β es el ángulo de deflexión de la luz visto desde el plano de la trayectoria del haz como se muestra en la Figura 3.2, en donde se puede ver que:

$$|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \alpha^2 = \mathbf{e}_f^2 + \mathbf{e}_i^2 - 2|\mathbf{e}_f| \cdot |\mathbf{e}_i| \cos \beta. \quad (3.15)$$

Debido a la unitariedad del vector \mathbf{e} , la relación anterior toma la forma:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (3.16)$$

En el caso en que $\beta \ll 1$ entonces $\cos \beta = 1 - \beta^2/2$ y por lo tanto $\alpha = \beta$. Sin embargo,

28 3. DEFLEXIÓN DE RAYOS DE LUZ EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO

para deflexiones grandes ambas formulaciones difieren y es necesaria la construcción de un resultado general como haremos a continuación.

§3.3. Formula general para la deflexión de la luz

Comencemos por poner la ecuación (3.2) utilizando el índice de refracción general para cualquier tensor métrico, en este caso estacionario, dado por la ecuación (1.18) de la siguiente manera:

$$\delta x^0 = \int \left[\frac{\partial n}{\partial x^k} \delta x^k dl + n \delta(dl) \right]. \quad (3.17)$$

La variación δdl del segundo término del lado derecho de la ecuación anterior es:

$$\begin{aligned} \delta(dl) &= \delta \sqrt{\gamma_{ik} dx^i dx^k}, \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{ik} dx^i dx^k}} \left[\delta(\gamma_{ik}) dx^i dx^k + \gamma_{ik} \delta(dx^i) dx^k + \gamma_{ik} \delta(dx^k) dx^i \right], \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{ik} dx^i dx^k}} \left[\frac{\partial(\gamma_{ik})}{\partial x^j} \delta x^j dx^i dx^k + 2 dx_k d(\delta x^k) \right], \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(\gamma_{ij})}{\partial x^k} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl} \right] \delta x^k dl + \frac{dx_k}{dl} d(\delta x^k), \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(\gamma_{ij})}{\partial x^k} e^i e^j \right] \delta x^k dl + e_k d(\delta x^k), \end{aligned} \quad (3.18)$$

y por lo tanto, al integrar por partes y eliminar los términos frontera en la variación, la ecuación (3.17) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= \int \frac{\partial n}{\partial x^k} \delta x^k dl + \left[\frac{n}{2} \frac{\partial(\gamma_{ij})}{\partial x^k} e^i e^j \right] \delta x^k dl - \left[\frac{\partial n}{\partial x^i} e^i e_k + n \frac{de_k}{dl} \right] dl \delta x^k, \\ &= \int \left[\frac{\partial n}{\partial x^k} + \frac{n}{2} \frac{\partial(\gamma_{ij})}{\partial x^k} e^i e^j - \frac{\partial n}{\partial x^i} e^i e_k - n \frac{de_k}{dl} \right] dl \delta x^k. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Al igualar a cero la variación obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{de_k}{dl} &= \frac{1}{n} \left[\frac{\partial n}{\partial x^k} + \frac{n}{2} \frac{\partial(\gamma_{ij})}{\partial x^k} e^i e^j - \frac{\partial n}{\partial x^i} e^i e_k \right], \\ &= \frac{\partial [\ln(n)]}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\gamma_{ij})}{\partial x^k} e^i e^j - \frac{\partial [\ln(n)]}{\partial x^i} e^i e_k. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La relación anterior es vectorial y dado que:

$$\begin{aligned} \frac{de_k}{dl} &= \frac{d}{dl} [\gamma_{kp} e^p] = \frac{d\gamma_{kp}}{dl} e^p + \gamma_{kp} \frac{de^p}{dl} = \frac{\partial \gamma_{kp}}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dl} e^p + \gamma_{kp} \frac{de^p}{dl}, \\ &= \frac{\partial \gamma_{kp}}{\partial x^m} e^m e^p + \gamma_{kp} \frac{de^p}{dl}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

entonces:

$$\gamma_{kp} \frac{de^p}{dl} = \left[\frac{\partial \ln(n)}{\partial x^k} - \frac{\partial \ln(n)}{\partial x^i} e^i e_k \right] + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} e^i e^j - \frac{\partial \gamma_{kp}}{\partial x^m} e^m e^p \right]. \quad (3.22)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{de^q}{dl} &= \gamma^{kq} \gamma_{kp} \frac{de^p}{dl}, \\ &= \left[\gamma^{kq} \frac{\partial \ln(n)}{\partial x^k} - \frac{\partial \ln(n)}{\partial x^i} e^i e^q \right] + \gamma^{kq} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} e^i e^j - \frac{\partial \gamma_{kp}}{\partial x^m} e^m e^p \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Con esta expresión podemos obtener el cambio del vector \mathbf{e} entre dos puntos a lo largo de la trayectoria de un haz de luz, como función de las componentes de la métrica solamente. Un haz de luz que pasa por un campo gravitacional se deflecta y sale de él en una dirección generalmente distinta de la dirección original. Siempre que la dirección inicial y final de los vectores tridimensionales del haz de luz no sean paralelas, se puede definir un plano que los contenga a ambos. Por consiguiente, se pueden definir unas coordenadas esféricas donde el plano generado por los vectores final e inicial se puede elegir como el plano ecuatorial con origen en cualquier punto de este plano.

Con estas coordenadas esféricas r, θ, φ podemos utilizar la expresión encontrada para \mathbf{e} , donde solo nos interesa la componente $e^3 = \varphi$, ya que el ángulo de deflexión en la ecuación (3.7), está relacionado con el ángulo φ de dichas coordenadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\beta &:= \int_0^\infty \left(\int \frac{de^3}{dl} dl \right) dl - \pi, \\ &= \int_0^\infty \left(\int \left\{ \left[\gamma^{3q} \frac{\partial \ln(n)}{\partial x^3} - \frac{\partial \ln(n)}{\partial x^i} e^i e^q \right] + \gamma^{3q} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^3} e^i e^j - \frac{\partial \gamma_{3p}}{\partial x^m} e^m e^p \right] \right\} dl \right) dl - \pi.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Ésta relación es una fórmula completamente general para la deflexión de la luz, bajo cualquier teoría métrica estacionaria de gravitación y en coordenadas espaciales únicamente, i.e. el tiempo ya no aparece como una coordenada gracias al principio de Fermat. El único problema son las ecuaciones resultantes las cuales, en general de acuerdo a la ecuación (3.23), son 3 ecuaciones acopladas de hasta segundo orden en las coordenadas.

Como veremos a continuación, para algunas aplicaciones con suficiente simetría, resultados analíticos son posibles de encontrar. La ecuación (3.24) es el resultado mas importante obtenido en este trabajo y representa una completa descripción y generalización del ángulo de deflexión de la luz para cualquier teoría métrica estacionaria de gravitación.

§3.4. Simetría esférica

Analicemos el resultado obtenido en la sección anterior para una distribución de masa esféricamente simétrica dada por la siguiente métrica:

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 + g_{rr} dr^2 - r^2 d\Omega,\tag{3.25}$$

Con g_{00} y g_{rr} dependientes solo de r . Escojamos la trayectoria del haz de luz sobre el plano $\theta = \pi/2$ para simplificar la relación anterior como:

$$\begin{aligned}ds^2 &= g_{00}c^2 dt^2 + g_{rr} dr^2 - r^2 d\varphi^2, \\ &= g_{00}c^2 dt^2 - dl^2,\end{aligned}\tag{3.26}$$

en donde $dl^2 = -(g_{rr} dr^2 - r^2 d\varphi^2)$, por lo que $\gamma_{rr} = -g_{rr}$ y $\gamma_{\varphi\varphi} = r^2$ son las únicas componentes distintas de cero del tensor métrico en tres dimensiones γ_{ij} , además de que $\gamma^{rr} = -1/g_{rr}$, $\gamma^{\varphi\varphi} = 1/r^2$ y $n = 1/\sqrt{g_{00}}$.

De esta manera:

$$\frac{de^3}{dl} = \frac{de^\varphi}{dl} = -e^r e^\varphi \left[\frac{\partial \ln(n)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \right] = -e^r e^\varphi \left[\frac{\partial \ln(n)}{\partial r} + \frac{\partial \ln(r^2)}{\partial r} \right], \quad (3.27)$$

y por lo tanto:

$$\frac{d[\ln(e^\varphi)]}{dl} = -\frac{dr}{dl} \left[\frac{\partial \ln(nr^2)}{\partial r} \right] = \frac{d[\ln(nr^2)^{-1}]}{dl}. \quad (3.28)$$

Integrando la ecuación anterior desde la distancia mínima r_0 de aproximación del haz de luz al centro de masa que produce el campo gravitatorio, hasta un valor r obtenemos:

$$\frac{e^\varphi}{e^\varphi|_{r_0}} = \frac{\frac{d\varphi}{dl}}{\left[\frac{d\varphi}{dl} \right]_{r_0}} = \frac{\frac{\sqrt{g_{00}}}{r^2}}{\frac{\sqrt{g_{00}(r_0)}}{r_0^2}}. \quad (3.29)$$

Tomando en cuenta que en r_0 , $dr = 0$ podemos ver que $[d\varphi/dl]_{r_0} = 1/r_0$, y dado que el parámetro de impacto $b = r_0/\sqrt{g_{00}(r_0)}$ (Keeton & Petters, 2005) para este caso específico, resulta que:

$$\frac{d\varphi}{dl} = b \frac{\sqrt{g_{00}}}{r^2}. \quad (3.30)$$

Ahora bien, usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dl} = \frac{1}{\sqrt{-g_{rr} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2}} \frac{d}{dr}, \quad (3.31)$$

por lo que la relación (3.30) es:

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{rr} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2}} \frac{d\varphi}{dr} = b \frac{\sqrt{g_{00}}}{r^2}, \quad (3.32)$$

y así:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{-g_{00}g_{rr}}{\frac{1}{b^2} - \frac{g_{00}}{r^2}} \right]^{1/2}. \quad (3.33)$$

32 3. DEFLEXIÓN DE RAYOS DE LUZ EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO

Sustituyendo esto en la ecuación (3.7) se obtiene la relación (3.8) de Keeton & Petters (2005).

§3.5. Espacio-tiempo de Kerr

Ahora, analicemos que sucede si rompemos una de las simetrías tomando como ejemplo la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer Lindquist:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma}\right) c^2 dt^2 + \frac{4aGMr \sin^2 \theta}{c^3\Sigma} c dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a^2GMr \sin^2 \theta}{c^4\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.34)$$

Con:

$$\Sigma := r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta, \quad \Delta := r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}, \quad (3.35)$$

Donde $a := J/M$ es la rapidez relativa de rotación, con J el momento angular y M un parámetro que dentro de la relatividad general es la masa de un agujero negro.

Por lo que las componentes no-nulas de la métrica son:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GMr}{c^2\Sigma}, \quad g_{rr} = -\frac{\Sigma}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = -\Sigma, \quad (3.36)$$

$$g_{0\varphi} = \frac{4aGMr \sin^2 \theta}{c^3\Sigma}, \quad g_{\varphi\varphi} = -\left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a^2GMr \sin^2 \theta}{c^4\Sigma}\right) \sin^2 \theta.$$

Para analizar el ángulo de deflexión nos centraremos en el plano $\theta = \pi/2$ y así:

$$\gamma_{rr} = -g_{rr} = \frac{r^2}{\Delta}, \quad \gamma_{\theta\theta} = -g_{\theta\theta} = r^2, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\theta\varphi} = 0, \quad (3.37)$$

$$\gamma_{\varphi\varphi} = -g_{\varphi\varphi} + \frac{g_{0\varphi}^2}{g_{00}} = r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a^2GM}{c^4r} + \frac{\left(\frac{4aGM}{c^3r}\right)^2}{1 - \frac{2GM}{c^2r}}.$$

Así, y utilizando el hecho de que todas las componentes de la métrica son solo funciones de la coordenada r , por lo tanto:

$$\frac{de^k}{dl} = \gamma^{rk} \frac{d\ln(\eta)}{dr} - \frac{d\ln(\eta)}{dr} e^r e^k + \gamma^{rk} \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{ij}}{dr} e^i e^j - \gamma^{kp} \frac{d\gamma_{pj}}{dr} e^r e^j. \quad (3.38)$$

Se obtiene entonces para la componente $k = \varphi$

$$\frac{de^\varphi}{dl} = -\frac{d\ln(\eta)}{dr} e^r e^\varphi - \gamma^{\varphi\varphi} \frac{d\gamma_{\varphi\varphi}}{dr} e^r e^\varphi \quad (3.39)$$

y por lo tanto:

$$\frac{d[\ln(e^\varphi)]}{dr} = \frac{d\left[\ln\left(\frac{1}{\eta \gamma_{\varphi\varphi}}\right)\right]}{dr}. \quad (3.40)$$

Ahora integramos esta expresión desde el punto de máximo acercamiento del haz de luz a la distribución de masa r_0 hasta cualquier punto r para obtener

$$\ln\left[\frac{e^\varphi}{e^\varphi|_{r_0}}\right] = \ln\left[\frac{(\eta \gamma_{\varphi\varphi})|_{r_0}}{\eta \gamma_{\varphi\varphi}}\right]. \quad (3.41)$$

Por otro lado, debido a que $\theta = \pi/2$ entonces:

$$\begin{aligned} dl^2 &= \gamma_{rr} dr^2 + \gamma_{\varphi\varphi} d\varphi^2, \\ &= \left(\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \right) dr^2, \end{aligned} \quad (3.42)$$

y además, como r_0 es un mínimo en r entonces $dr = 0$ en dicho punto. Por lo tanto:

$$e^\varphi|_{r_0} = \frac{d\varphi}{dl}|_{r_0} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}|_{r_0}}}. \quad (3.43)$$

Sustituyendo esto último en la ecuación (3.41) obtenemos que:

$$e^\varphi = \frac{(\eta \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}})|_{r_0}}{\eta \gamma_{\varphi\varphi}}, \quad (3.44)$$

Ahora toca analizar el índice de refracción η , el cuál se define como:

$$\eta = \frac{1}{g_{00}} (-g_{0i} e^i + \sqrt{g_{00}}),$$

Recordando que solamente $g_{0\varphi} \neq 0$:

$$\eta \gamma_{\varphi\varphi} = \frac{\gamma_{\varphi\varphi}}{g_{00}} (-g_{0\varphi} e^\varphi + \sqrt{g_{00}}), \quad (3.45)$$

Por lo que:

34 3. DEFLEXIÓN DE RAYOS DE LUZ EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_{\varphi\varphi}}{g_{00}} \left(-g_{0\varphi} (e^\varphi)^2 + \sqrt{g_{00}} e^\varphi \right) - (\eta \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}) |_{r_0} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\gamma_{\varphi\varphi} g_{0\varphi}}{g_{00}} (e^\varphi)^2 - \frac{\gamma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{00}}} e^\varphi + (\eta \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}) |_{r_0} = 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \therefore e^\varphi &= \frac{\frac{\gamma_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{00}}} \pm \sqrt{\frac{\gamma_{\varphi\varphi}^2}{g_{00}} - 4 \frac{\gamma_{\varphi\varphi} g_{0\varphi}}{g_{00}} (\eta \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}) |_{r_0}}}{2 \frac{\gamma_{\varphi\varphi} g_{0\varphi}}{g_{00}}} \\ &= \frac{\sqrt{g_{00}} \pm \sqrt{g_{00} - 4 \frac{g_{00} g_{0\varphi}}{\gamma_{\varphi\varphi}} (\eta \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}) |_{r_0}}}{2 g_{0\varphi}}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

Recordando la definición de e^φ y lo que vale dl en este caso, obtenemos:

$$\begin{aligned} e^\varphi &= \frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2}} \frac{d\varphi}{dr} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 &= \left(\gamma_{rr} + \gamma_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right) \frac{h(r)^2}{4g_{0\varphi}^2}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

Donde:

$$h(r) = \sqrt{g_{00}} \pm \sqrt{g_{00} - 4 \frac{g_{00} g_{0\varphi}}{\gamma_{\varphi\varphi}} (\eta \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}) |_{r_0}}, \quad (3.49)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \left(1 - \gamma_{\varphi\varphi} \frac{h(r)^2}{4g_{0\varphi}^2} \right) &= \gamma_{rr} \frac{h(r)^2}{4g_{0\varphi}^2} \\ \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \left(\frac{4g_{0\varphi}^2}{h(r)^2} - \gamma_{\varphi\varphi} \right) &= \gamma_{rr}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{\gamma_{rr}}{\frac{4g_{0\varphi}^2}{h(r)^2} - \gamma_{\varphi\varphi}}}. \quad (3.51)$$

Esto podemos sustituirlo en la ecuación (3.7) para obtener el valor del ángulo de defle-

ción β .

$$\beta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \left| \sqrt{\frac{\gamma_{rr}}{4g_{0\varphi}^2}} \right| dr - \pi, \quad (3.52)$$

§3.6. Aplicaciones con perfiles de densidades

Para las aplicaciones de deflexión de rayos de luz utilizaremos el formalismo PPN descrito anteriormente en la sección 2, en el cuál el tensor métrico en coordenadas esféricas, cumpliendo con (2.17) es:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + \frac{2\Phi}{c^2}, & g_{\theta\theta} &= r^2, \\ g_{rr} &= -1 + \frac{2\gamma\Phi}{c^2}, & g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2(\theta). \end{aligned} \quad (3.53)$$

En donde el potencial newtoniano Φ para el caso de una distribución esféricamente simétrica está dado por (Mendoza, 2003):

$$\Phi(r) = -4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r dr' \rho(r') r'^2 + \int_r^{R(=\infty)} dr' \rho(r') r' \right\}. \quad (3.54)$$

Los potenciales se sustituirán en las expresiones (3.53) para encontrar con ayuda de la ecuación (3.33) la expresión para $d\varphi/dr$ y posteriormente obtener la trayectoria del haz de luz a lo largo del espacio. Para esto se hizo un código en el lenguaje de programación C, en el cual con ayuda de unas rutinas de la biblioteca GSL (<https://www.gnu.org/software/gsl>), se integró la función $d\varphi/dr$ en coordenadas esféricas haciendo el cambio de variable $u = 1/r$, a lo largo de todo el espacio, suponiendo que las trayectorias de los haces de luz son simétricas con respecto a r_0 . A los resultados pueden verse en las Figuras 3.3 y 3.4, con los siguientes perfiles de densidad para el caso newtoniano.

a) El perfil de densidad de Navarro-Frenk-White (Navarro et al., 1996):

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_*} \left(1 + \frac{r}{r_*} \right)}, \quad (3.55)$$

con ρ_0 y r_* parámetros de la distribución.

b) Un perfil de halo isoterma (Binney & Tremaine, 2011):

36 3. DEFLEXIÓN DE RAYOS DE LUZ EN EL ESPACIO-TIEMPO CURVO

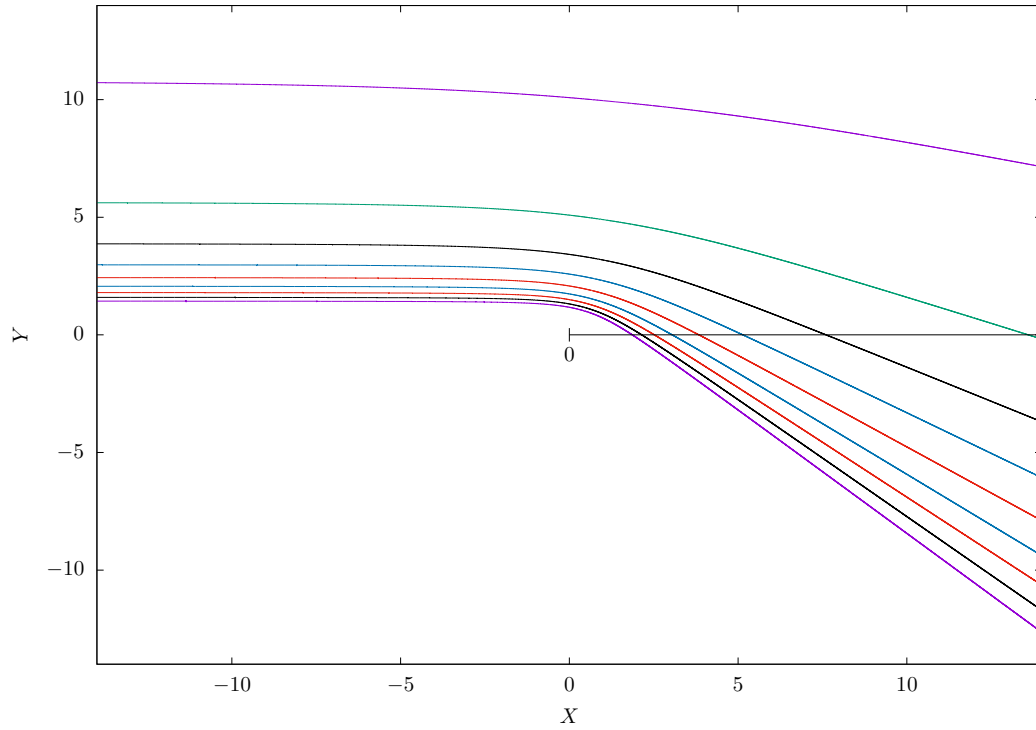


Figura 3.3: Trayectorias de rayos de luz usando el perfil de densidad NFW con $P_0 = -0.3$. La fuente del haz de luz está localizada a un ángulo $\varphi = -\pi$, $r \gg 1$ y el centro de la distribución en el origen. La figura muestra trayectorias de diferentes haces de luz contruidos de arriba hacia abajo utilizando valores para la distancia de aproximación más cercana al origen de 10, 5, $10/3$, $5/2$, 2, $5/3$, $10/7$, $5/4$ y $10/9$.

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^2}. \quad (3.56)$$

Ambas figuras se construyeron adimensionalizando las cantidades físicas de tal manera que $r/r_* \rightarrow r$, $\rho/\rho_* \rightarrow \rho$ y juntando las variables relevantes del problema en el parámetro adimensional $P_0 := -4\pi G\rho_0 r_*^2/c^2$ que es esencialmente el cuadrado de r_* entre una longitud de Jeans para la velocidad de la luz (en lugar de la velocidad del sonido) al cuadrado.

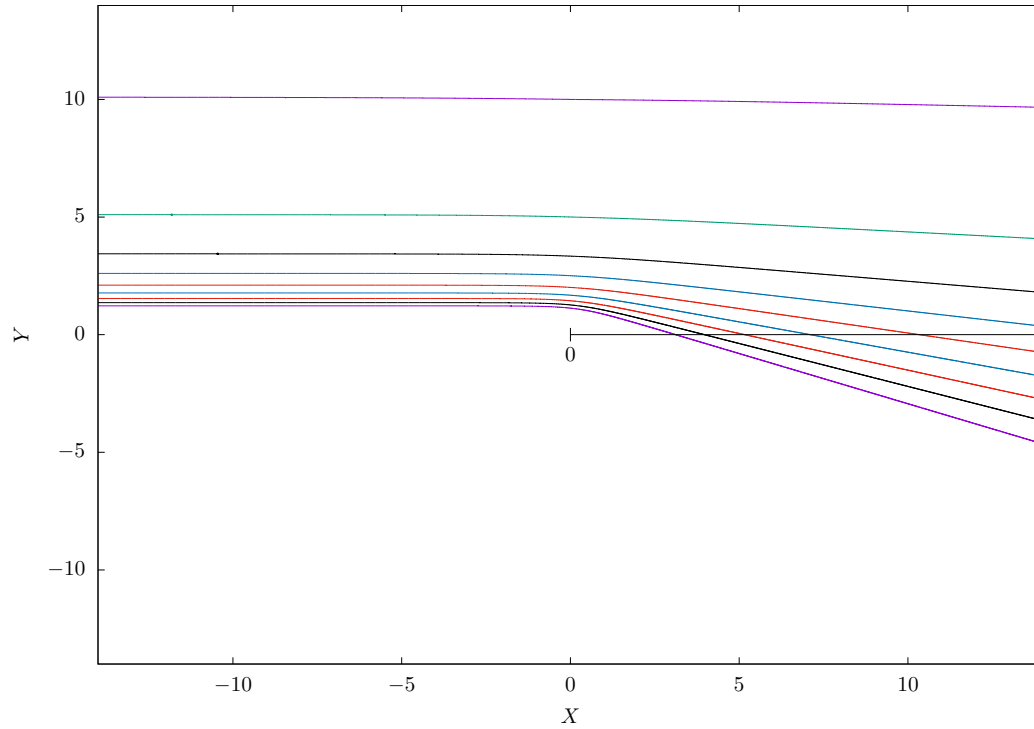


Figura 3.4: Trayectorias de rayos de luz usando el perfil de densidad isoterma con $P_0 = -0.3$. Suponiendo que la fuente del haz de luz está localizada a un ángulo $\varphi = -\pi$, $r \gg 1$ y el centro de la distribución en el origen. La figura muestra trayectorias de diferentes haces de luz construidos de arriba hacia abajo utilizando valores para la distancia de aproximación más cercana al origen de 10, 5, $10/3$, $5/2$, 2, $5/3$, $10/7$, $5/4$ y $10/9$.

Capítulo 4

Conclusiones

Utilizando el principio de Fermat se encontró una ecuación general para la deflexión de un rayo de luz aplicable a cualquier teoría métrica de gravitación estacionaria (3.24), en función solo de las componentes espaciales del tensor métrico del espacio-tiempo sin ninguna aproximación de campo débil o PPN.

Se aplicó este resultado para dos casos particulares: 1) un tensor métrico simétricamente esférico (conciendo con la fórmula anteriormente encontrada por Keeton & Petters (2005)) y 2) un tensor métrico en el espacio-tiempo de Kerr.

Se analizó dicha ecuación general de deflexión de la luz para una métrica PPN esféricamente simétrica, con dos perfiles de densidad distintos. Encontrando que el comportamiento del haz de luz es el ‘esperado’: a menor distancia del centro de la distribución, mayor deflexión.

Todos los resultados y aplicaciones obtenidos en esta tesis son aplicables a cualquier teoría métrica de gravitación, incluyendo la relatividad general y las recientes propuestas de gravitación extendida, como por ejemplo: se puede utilizar dicha fórmula para encontrar resultados óptimos en deflexión de luz bajo un enfoque MONDiano, donde el potencial gravitacional sería (Bernal et al., 2015):

$$\Phi(r) = (GM(r)a_0)^{1/2} \ln\left(\frac{r}{r_*}\right). \quad (4.1)$$

Esto también podría ayudar a un mejor entendimiento del fenómeno a grandes escalas, al seguir buscando una alternativa gravitacional a la materia oscura.

Apéndice A

Apéndice

Teorema §A.0.1. Sean $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ dos vectores tridimensionales entonces:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}.$$

Demostración. Debido a que el producto exterior $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a^i b^j \hat{e}^k$ donde \hat{e} es un vector unitario perpendicular a \mathbf{a} y \mathbf{b} , dada la identidad (cf. Mendoza, 2003):

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{mnk} = (\delta_i^m \delta_j^n - \delta_j^m \delta_i^n), \quad (\text{A.1})$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) &= \epsilon_{mkn} a^m \epsilon^{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x^i} = -\epsilon_{mnk} \epsilon^{ijk} a^m \frac{\partial b_j}{\partial x^i}, \\ &= -(\delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j) a^m \frac{\partial b_j}{\partial x^i} = a^j \frac{\partial b_j}{\partial x^n} - a^i \frac{\partial b_n}{\partial x^i}, \\ &= a_i \frac{\partial b^i}{\partial x^n} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{\partial (a_l b^l)}{\partial x^q} = a_l \frac{\partial b^l}{\partial x^q} + b^l \frac{\partial a_l}{\partial x^q} = a_l \frac{\partial b^l}{\partial x^q} + b_l \frac{\partial a^l}{\partial x^q},$$

y por lo tanto:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}.$$

□

Teorema §A.0.2. Sean $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y \mathbf{e} cualquier vector unitario, ambos vectores tridimensionales, entonces:

$$\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}) = \mathbf{e}[\mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}))].$$

Demostración. Dado que:

$$e^k v^a \frac{\partial e_k}{\partial x^a} - e^k v^a \frac{\partial e_a}{\partial x^k} = e^b v^a \frac{\partial e_b}{\partial x^a} - e^b v^a \frac{\partial e_a}{\partial x^b},$$

entonces multiplicando esta relación por e_k , se obtiene:

$$v^a \frac{\partial e_k}{\partial x^a} - v^b \frac{\partial e_b}{\partial x^k} = e_k e^b v^a \frac{\partial e_b}{\partial x^a} - e_k e^a v^b \frac{\partial e_b}{\partial x^a},$$

y por lo tanto:

$$\left(\delta_i^a \delta_k^b - \delta_k^a \delta_i^b \right) v^i \frac{\partial e_b}{\partial x^a} = \left(\delta_q^a \delta_p^b - \delta_p^a \delta_q^b \right) e_k e^p v^q \frac{\partial e_b}{\partial x^a}.$$

Así, utilizando la ecuación (A.1) se obtiene:

$$\epsilon_{ijk} v^i \epsilon^{abj} \frac{\partial e_b}{\partial x^a} = e_k e^p \epsilon_{qrp} v^q \epsilon^{abr} \frac{\partial e_b}{\partial x^a}.$$

El lado izquierdo de esta ecuación es:

$$\epsilon_{ijk} v^i \epsilon^{abj} \frac{\partial e_b}{\partial x^a} \hat{e}^k = \epsilon_{ijk} v^i (\nabla \wedge \mathbf{e})^j \hat{e}^k = \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}),$$

y el derecho:

$$e_k e^p \epsilon_{qrp} v^q \epsilon^{abr} \frac{\partial e_b}{\partial x^a} \hat{e}^k = e_k \hat{e}^k [e^p \epsilon_{qrp} v^q (\nabla \wedge \mathbf{e})^r] = e_k \hat{e}^k [e^p (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}))_p] = \mathbf{e}[\mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}))].$$

En otras palabras

$$\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}) = \mathbf{e}[\mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{e}))].$$

□

Teorema §A.0.3. *Dos vectores tridimensionales cualesquiera $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ satisfacen:*

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = \mathbf{e} \{ \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}] \},$$

para cualquier vector unitario \mathbf{e} .

Demostración. Dado que:

$$e_k a^n \frac{\partial b^k}{\partial x^n} = e_p a^q \frac{\partial b^p}{\partial x^q},$$

entonces la multiplicación de esta ecuación por e^k es:

$$a^n \frac{\partial b^k}{\partial x^n} = e^k e_p a^q \frac{\partial b^p}{\partial x^q}.$$

El lado derecho de esta ecuación es:

$$e^k e_p a^q \frac{\partial b^p}{\partial x^q} = e^k e_p ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b})^p = \mathbf{e} \{ \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}] \}.$$

Con lo cual se obtiene:

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = \mathbf{e} \{ \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}] \}$$

□

Bibliografía

- ARUN, K., GUDENNAVAR, S. B. & SIVARAM, C., 2017. Dark matter, dark energy, and alternate models: A review. *Advances in Space Research*, **60**, 166–186.
- BERNAL, T., LÓPEZ-CORONA, O. & MENDOZA, S., 2015. Dynamics of clusters of galaxies with extended $f(\chi) = \chi^{3/2}$ gravity.
- BINNEY, J. & TREMAINE, S., 2011. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press. ISBN 9781400828722. URL <https://books.google.com.mx/books?id=6mF4CKx1bLsC>.
- CAPOZZIELLO, S. & FARAONI, V., 2010. *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands. ISBN 9789400701656. URL <https://books.google.com.mx/books?id=eBFpiXXVcKkC>.
- FREIRE, J., 1994. *Experiment of Michelson-Morley and the original formula*. Vantage Press. ISBN 9780533108305. URL <https://books.google.com.mx/books?id=298WAQAAMAAJ>.
- KEETON, C. R. & PETERS, A. O., 2005. Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. I. Static, spherically symmetric case. *Phys. Rev.*, **D72**, 104006.
- LANDAU, L., 2013. *The Classical Theory of Fields*. COURSE OF THEORETICAL PHYSICS. Elsevier Science. ISBN 9781483293288. URL <https://books.google.com.mx/books?id=HudbAwAAQBAJ>.
- MAYET, F., GREEN, A., BATTAT, J., BILLARD, J., BOZORGNIA, N., GELMINI, G., GONDOLO, P., KAVANAGH, B., LEE, S., LOOMBA, D., MONROE, J., MORGAN, B., O'HARE, C., PETER, A., PHAN, N. & VAHSEN,

- S., 2016. A review of the discovery reach of directional Dark Matter detection. *Physics Reports*, **627**(Supplement C), 1 – 49. ISSN 0370-1573. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157316001022>. A review of the discovery reach of directional Dark Matter detection.
- MENDOZA, S., 2003. *Astrofísica Relativista*. URL <http://www.mendoza.org/sergio>.
- MENDOZA, S., BERNAL, T., HERNANDEZ, X., HIDALGO, J. C. & TORRES, L. A., 2013. Gravitational lensing with $f(\chi) = \chi^{3/2}$ gravity in accordance with astrophysical observations. , **433**, 1802–1812.
- NAVARRO, J. F., FRENK, C. S. & WHITE, S. D. M., 1996. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, **462**, 563–575.
- NEWTON, I., 1969. *Mathematical Principles of Natural Philosophy ...: The system of the world*. Mathematical Principles of Natural Philosophy. Greenwood Press. URL https://books.google.com.mx/books?id=3fg_AQAAIAAJ.
- POISSON, E. & WILL, C., 2014. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press. ISBN 9781107032866. URL <https://books.google.com.mx/books?id=PZ5cAwwAAQBAJ>.
- ROSEVEARE, N., 1979. Leverrier to Einstein: A review of the Mercury problem. *Vistas in Astronomy*, **23**(Part 2), 165 – 171. ISSN 0083-6656. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0083665679900035>.
- SANDERS, R., 2010. *The Dark Matter Problem: A Historical Perspective*. Cambridge University Press. ISBN 9781139485739. URL <https://books.google.com.mx/books?id=RpuAoqSOWQIC>.
- SCHNEIDER, P., EHLERS, J. & FALCO, E., 2012. *Gravitational Lenses*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer New York. ISBN 9781461227564. URL <https://books.google.com.mx/books?id=WB7nBwAAQBAJ>.
- SCHUTZ, B., 2009. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press. ISBN 9781139479004. URL <https://books.google.com.mx/books?id=GgRRt7AbdwQC>.

WILL, C., 1993. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press. ISBN 9780521439732. URL <https://books.google.com.mx/books?id=BhnUITA7sDIC>.