



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA CONVECCIÓN NATURAL DE CALOR EN EL  
INTERIOR DE MÚLTIPLES ÁNULOS ESFÉRICOS CONCÉNTRICOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ANTONIO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

TUTOR PRINCIPAL  
DR. RUBÉN ÁVILA RODRÍGUEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA

Ciudad Universitaria, CD. MX.

enero 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Jurado asignado

Presidente: DR. CERVANTES DE GORTARI JAIME G.  
Secretario: DR. SOLORIO ORDAZ FRANCISCO JAVIER  
1<sup>er</sup>. Vocal: DR. ÁVILA RODRÍGUEZ RUBÉN  
2<sup>do</sup>. Vocal: DR. VICENTE Y RODRÍGUEZ WILLIAM  
3<sup>er</sup>. Vocal: DR. NAUDE DE LA LLAVE JORGE L.

Lugar donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**  
DR. RUBÉN ÁVILA RODRÍGUEZ

-----  
**FIRMA**

# Agradecimientos

Al Dr. Rubén Ávila Rodríguez por la dirección de esta tesis.

Investigación realizada gracias al patrocinio del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN117314 "Transferencia de calor en un sistema esférico (fluido-sólido) con campo magnético y movimientos de rotación y precesión". Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

# Dedicatorias

A la Dra. Linda Leslye Hernández Zúñiga, con tu amor me haces mejorar como persona.

A mis padres Jesús Sánchez Morales y Leticia Sánchez Villareal.

En memoria de  
Josefa Sánchez Chicas

# Índice general

<b>Jurado asignado</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Dedicatorias</b>	<b>IV</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo Físico</b>	<b>7</b>
<b>3. Modelo Matemático</b>	<b>11</b>
3.1. Principio de balance energía . . . . .	11
3.2. Ecuación general de conducción de calor . . . . .	13
<b>4. Algoritmo Numérico</b>	<b>14</b>
4.1. Método de los elementos espectrales . . . . .	14
4.2. La Esfera-Cubada . . . . .	17
4.3. Región anular esférica de trabajo . . . . .	18
<b>5. Resultados</b>	<b>23</b>
5.1. a) Conducción de calor debido a diferencia de temperatura. . . . .	24
5.2. b) Conducción de calor debido a término fuente homogéneo y diferencia de temperatura. . .	31
5.3. c) Conducción de calor debido sólo a término fuente homogéneo. . . . .	33
5.4. d) Conducción de calor debido sólo a término fuente no homogéneo, caso unidimensional. . . . .	35
5.5. e) Conducción de calor debido sólo a términos fuente no homogéneos, caso tridimensional.	39
<b>6. Conclusiones</b>	<b>41</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
<b>7. Trabajo a futuro</b>	<b>42</b>
<b>A. Ecuación general de conducción de calor en coordenadas esféricas</b>	<b>43</b>
<b>B. Adimensionalización</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>

# Nomenclatura

<b>A</b>	Campo tensorial
<i>a</i>	Lado de un cubo [m]
<b>b</b>	Fuerza de cuerpo por unidad de masa $\left[\frac{\text{N}}{\text{kg}}\right]$
<i>c</i> <sub>1</sub> , <i>c</i> <sub>2</sub>	Constantes de integración
<i>c</i> <sub>p</sub>	Capacidad térmica específica a presión constante $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}\right]$ o $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right]$
<i>e</i>	Elementos debidos a la aproximación tipo <i>h</i>
<i>e</i> <sub>g</sub>	Razón de generación de calor por unidad de volumen $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$
<i>f</i>	Función conocida de las variables independientes
<i>H</i>	Razón de generación de calor [W]
<i>h</i>	Razón de generación de calor por unidad de masa $\left[\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right]$
<i>h</i> <sub>p</sub> ( <i>ξ</i> )	Modos de expansión locales para una expansión nodal en la aproximación tipo <i>p</i>
<i>K</i>	Energía cinética [J]
<i>k</i>	Conductividad térmica $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}\right]$ o $\left[\frac{\text{W}}{\text{m K}}\right]$
<i>N</i>	Número de funciones de expansión
<i>N</i> <sub>el</sub>	Número de elementos <i>e</i>
<i>NP</i>	Orden polinomial
<b>n</b>	Vector unitario normal a la superficie <i>S</i>
<i>Q</i>	Razón de transferencia de calor [W]
<b>q</b>	Flujo de calor $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$
<i>R</i>	Radio de una esfera [m]
<i>R</i> ( <b>x</b> )	Función residual
<i>r</i>	Coordenada radial
<i>r</i> <sup>*</sup>	Coordenada radial adimensional
<i>S</i>	Superficie [m <sup>2</sup> ]
<b>s</b>	Fuerza de superficie por unidad de área $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$

$T$	Temperatura [°C] o [K]	$\alpha$	Difusividad térmica $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$
$T^*$	Temperatura adimensional	$\eta$	Relación de radios
$t$	Tiempo [s]	$\theta$	Coordenada polar
$t^*$	Tiempo adimensional	$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	Coordenadas locales
$U$	Energía interna [J]	$\rho$	Densidad $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
$\mathbf{u}$	Campo tensorial	$\sigma$	Tensor de esfuerzos
$\hat{u}$	Energía interna específica $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right]$	$\phi$	Coordenada azimutal
$\check{u}(t)$	Coefficientes desconocidos	$\hat{\theta}$	Función escalar
$u(\mathbf{x}, t)$	Solución exacta	$\Phi_i(\mathbf{x})$	Funciones de expansión
$u^\delta(\mathbf{x}, t)$	Solución aproximada	$\Phi_j(\mathbf{x})$	Modos de expansión globales
$V$	Volumen $[\text{m}^3]$	$\Phi_p(\xi_i)$	Modos de expansión locales
$\mathbf{v}$	Velocidad $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	$\chi^e$	Transformación de coordenadas
$v_i(\mathbf{x})$	Funciones de ponderación	$\Omega$	Dominio de solución
$v_{ana}$	Valor analítico	$\Omega^e$	Dominio elemental
$v_{num}$	Valor numérico	$\Omega_{st}$	Dominio estándar
$x_1, x_2, x_3$	Coordenadas globales		
$\Delta$	Incremento	$\nabla$	Vector nabra o gradiente
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material	$\mathbb{L}$	Operador diferencial

En la figura (1.2) Diagrama esquemático del modelo analizado por Jain (2010) considerar

$h$	Coefficiente de convección $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°C}}\right]$ o $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}\right]$	$\alpha$	Difusividad térmica $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$
$i$	$i$ -ésima capa $i = 1, 2, 3$	$\theta$	Coordenada azimutal
$k$	Conductividad térmica $\left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{°C}}\right]$ o $\left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}\right]$		
$r$	Coordenada radial		
$s$	Magnitud de la fuente de calor volumétrica $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$		
$T$	Temperatura [°C] o [K]		
$t$	Tiempo [s]		

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo se realiza la simulación numérica de la transferencia de calor por conducción en el interior de esferas concéntricas. Se obtiene la solución de la ecuación de conducción de calor aplicando el *Método de los Elementos Espectrales* (SEM), además se trabaja la geometría esférica en coordenadas cartesianas mediante el algoritmo de la *Esfera Cubada* (Cubed Sphere), con el fin de evitar el conocido “problema del polo”<sup>1</sup> común al trabajar en coordenadas esféricas.

El desarrollo de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales en geometrías esféricas tiene mucha importancia para el campo de la meteorología, dinámica de la atmósfera y en aplicaciones dentro de la ingeniería nuclear. Por ejemplo, el reactor nuclear modular de lecho de esferas (pebble bed modular reactor o PBMR)[14] del tipo de reactores de muy alta temperatura (VHTR) utiliza esferas del tamaño de pelotas de tenis que a su vez contienen miles de partículas esféricas de combustible llamadas partículas TRISO, adicionalmente, el reactor nuclear de átomos por la paz (AFPR) del tipo de reactores de agua ligera (LWRs) utilizan un concepto modificado de TRISO [21, 11].

En estos reactores se utiliza la idea de combustible esférico de la siguiente manera: la unidad más pequeña del núcleo son las partículas TRISO o TRISO modificado, las cuales son empaquetadas en una cobertura esférica de grafito o circonio (figura 1.1a), según sea el caso, a su vez estas esferas llamadas “pebbles” son empacadas en las varillas de combustible (figuras 1.1b y 1.1c) que pueden introducirse y sacarse del reactor mediante ensambles. Finalmente el núcleo del reactor esta compuesto de varios conjuntos de varillas (figura 1.1d), algunas son de control y algunas tienen diferente calidad de combustible en ellas, en otras el enriquecimiento varía de la parte superior de la varilla a la parte inferior de la misma.

---

<sup>1</sup>En la discretización de esferas utilizando el sistema coordenado esférico, las líneas de longitud constante convergen en los polos, por lo que la longitud tiene múltiples valores en los polos.

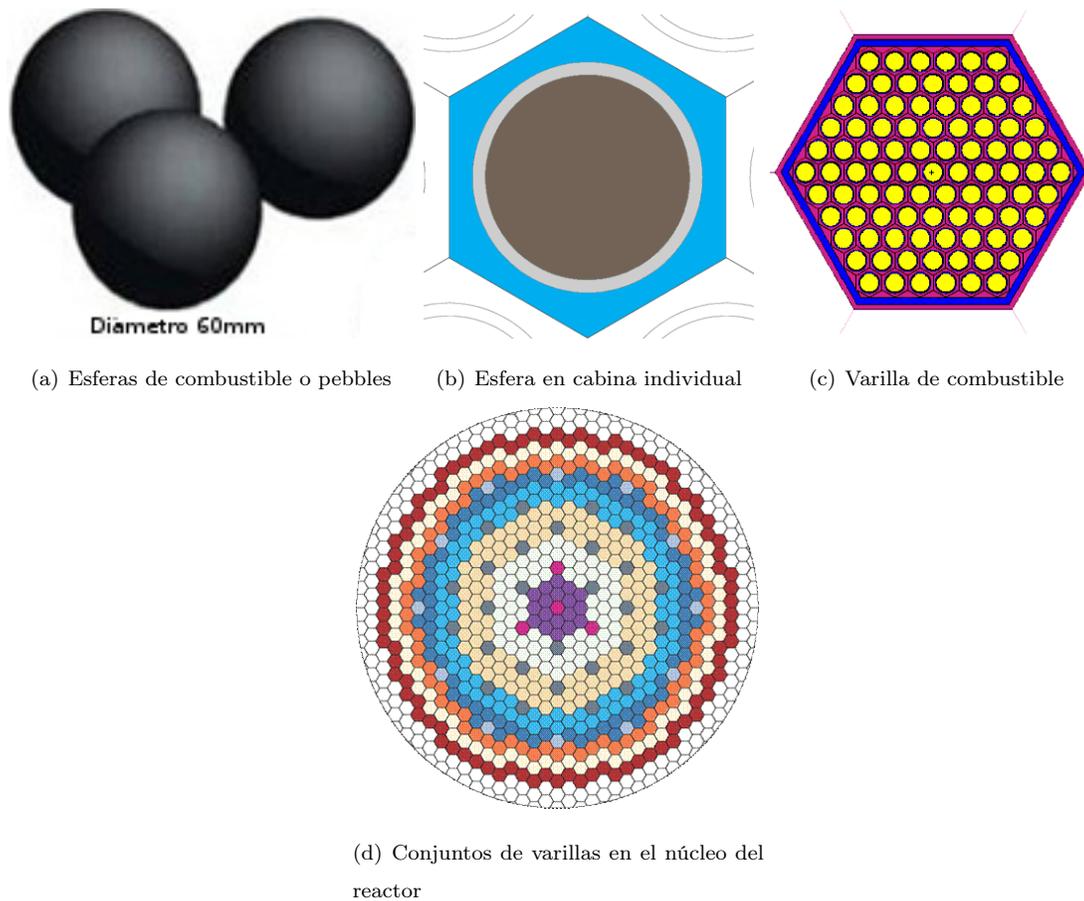


Figura 1.1: Organización de un núcleo de reactor con combustible esférico.

Ya que la conductividad térmica del combustible es un parámetro clave en la seguridad y rendimiento de este tipo de reactores, se han desarrollado códigos de modelado para el cálculo de la temperatura del combustible durante la irradiación. En los códigos computacionales se toma en cuenta la no uniformidad de la generación de calor debido al consumo del combustible y la consecuente formación de productos de fisión [18].

Además, con esos códigos numéricos se puede realizar una estimación de los principales fenómenos que ocurren en una varilla de combustible nuclear a lo largo de su vida, fenómenos como la expansión térmica, deformaciones elásticas y plásticas, la fluencia, la interacción mecánica entre “pebbles” y el revestimiento y la liberación de gases de fisión.

Aunque estos códigos toman en cuenta varias configuraciones para las varillas de combustible (circulares, hexagonales), un modelado específico del comportamiento térmico de cada partícula TRISO juega un papel muy importante hacia una mayor eficiencia del combustible.

En este sentido la transferencia de calor involucrada en una geometría tal como es el espacio interior entre dos esferas concéntricas o “ánulo esférico”<sup>2</sup>, no ha sido extensamente estudiada. Carslaw [9] reporta un número importante de problemas en una dimensión (dirección radial) sobre la esfera hueca considerando condiciones de frontera homogéneas dependientes y no dependientes del tiempo, condiciones iniciales uniformes y términos de generación de calor uniformes en el espacio así como constantes y no constantes en el tiempo.

Se ha utilizado una amplia variedad de métodos matemáticos para resolver analíticamente la conducción de calor en coordenadas esféricas, por ejemplo Astafieva [5] obtuvo una solución en series para una partícula de aerosol sólida de tres capas calentada por radiación láser. Xiaoshu [33] presentó una solución, aplicable solamente a la esfera completa, utilizando una combinación de los métodos de Separación de Variables y la Transformada de Laplace. Pourmohamadian [22] reportó la conducción de calor en esferas, con dimensiones en micrómetros o nanómetros, de dos capas de distinta fase sin generación interna de calor utilizando Análisis de Fourier. Ozisik [19] abordó el problema con los métodos de Separación de Variables y las Funciones de Legendre.

Surkov [30] resolvió el problema de conducción de calor en estado transitorio, unidimensional, en esferas huecas con frontera interior en movimiento utilizando el método de Transformada Finita Integral. El caso bidimensional y condiciones de frontera periódicas aplicando el Teorema de Duhamel fue reportado por Abdous [1]. Cuando el material del que está hecho el ánulo esférico es un material aislante cuya conductividad térmica depende de la temperatura se puede utilizar la Transformación de Kirchhoff [2].

Singh [27] presentó una solución analítica al problema de la conducción de calor en estado transitorio y multidimensional en coordenadas polares con múltiples capas en la dirección radial. Jain [12] reportó la conducción de calor asimétrica en anillos multicapas. En el año 2010 [13] Prashant propuso una solución analítica en series para el problema de conducción de calor en coordenadas esféricas, multicapas con condiciones de frontera dependientes del tiempo con fuente de calor volumétrica, espacialmente no uniforme pero independiente del tiempo.

---

<sup>2</sup>Annulus es el latín para “anillo pequeño”. Por ánulo esférico se hace referencia, precisamente, a una región limitada por dos superficies esféricas concéntricas.

A continuación se muestra el modelo analizado por Jain el año 2010. Este modelo trata de un hemisferio que se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme igual a cero, ver figura 1.2.

La región hemisférica de tres capas se encuentra a una temperatura uniforme inicial igual a cero. Para un tiempo  $t > 0$  la base y la superficie esférica interna del hemisferio permanecen a una temperatura uniforme y constante (cero), al tiempo que una fuente de calor uniformemente distribuida genera calor en la segunda capa, esta fuente es encendida en el tiempo  $t = 0$ . Entonces sucede una transferencia de calor por convección hacia el ambiente, a temperatura cero.

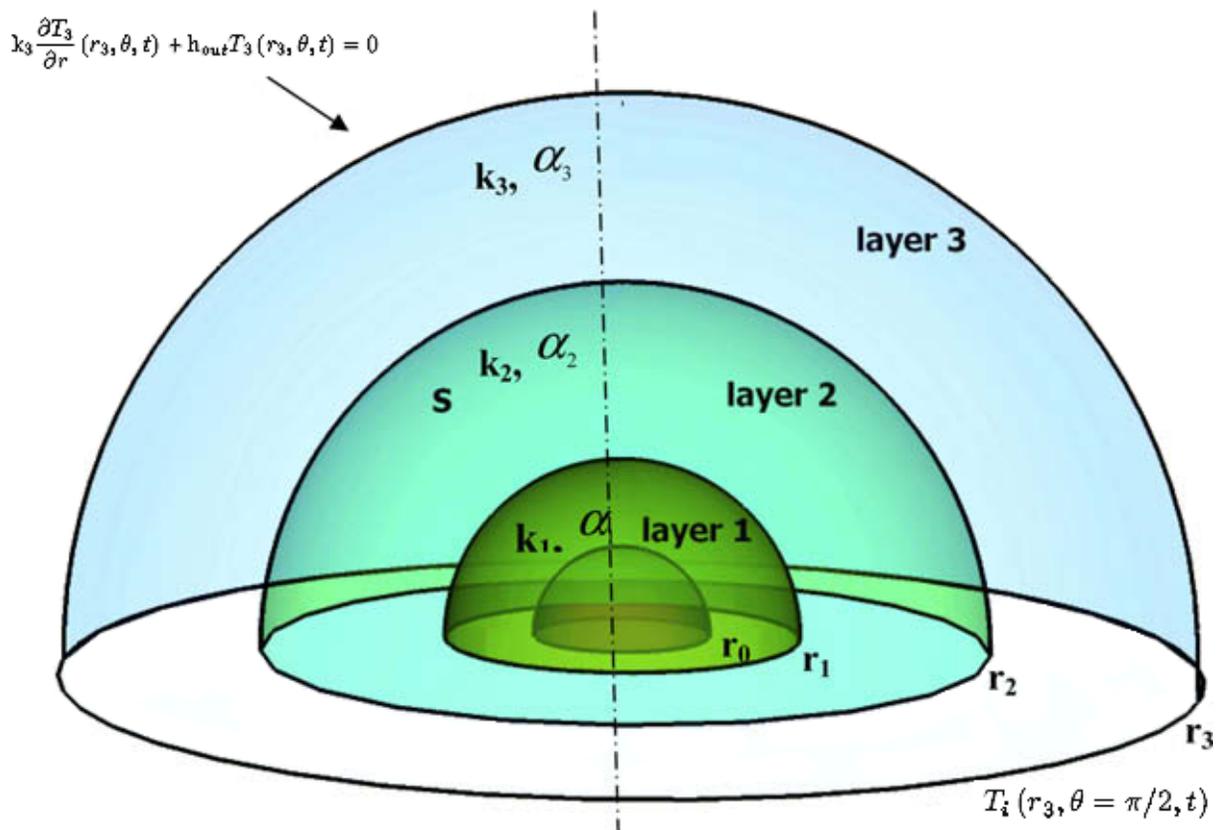


Figura 1.2: Diagrama esquemático del modelo analizado por Jain (2010).

En la figura 1.3 se muestra el resultado de la solución analítica del problema de conducción de calor analizado por Jain (2010). Debido a las condiciones del problema se tiene un caso bidimensional (en las direcciones radial y azimutal) de transferencia de calor por conducción, por lo que el campo de temperatura resultante presenta simetría en la dirección polar.

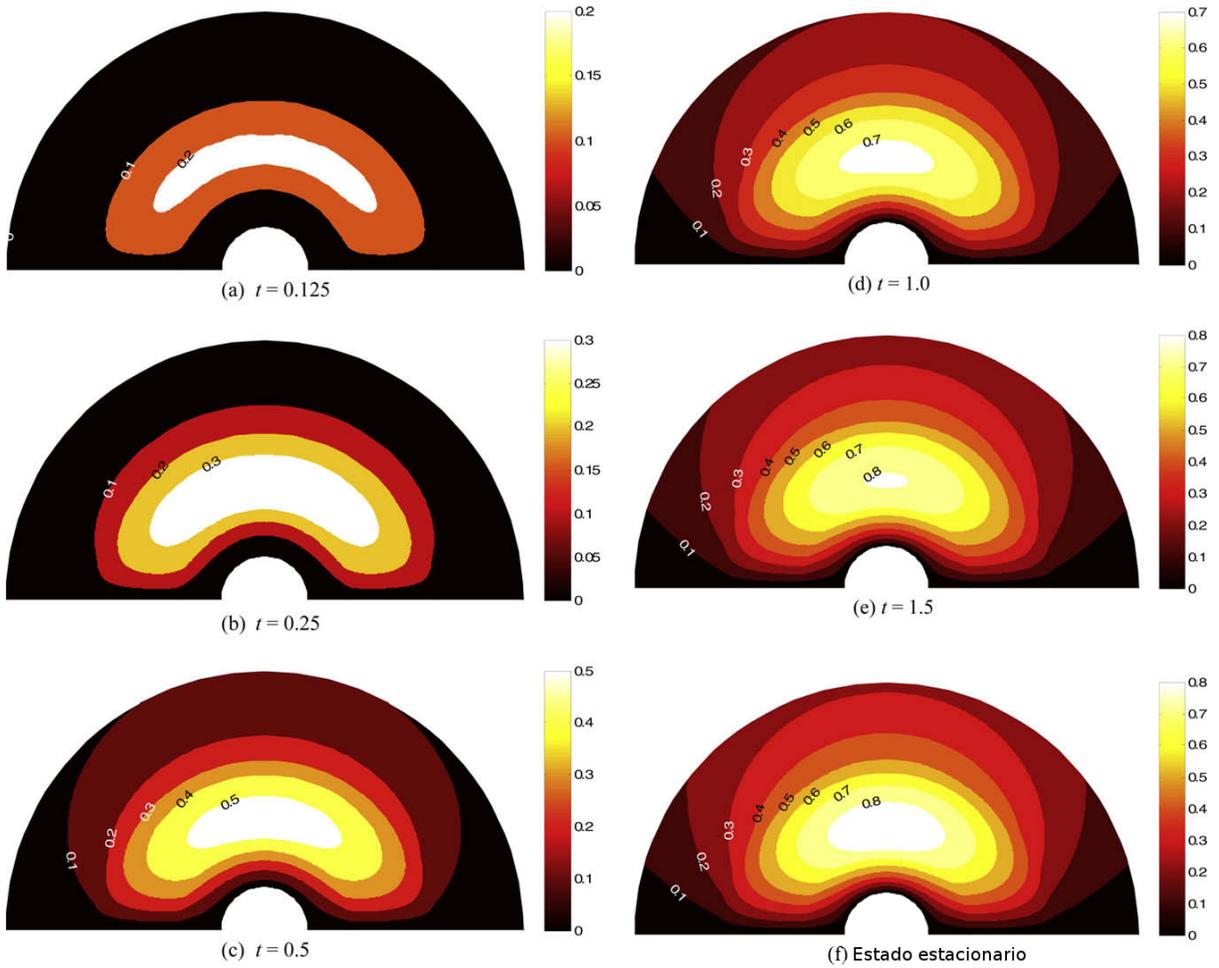


Figura 1.3: Isotermas de la región hemisférica de tres capas para distintos instantes de tiempo. Contornos bidimensionales para un plano meridional del hemisferio. Tomada de Jain (2010)[13].

Por otra parte, si se acepta que un conjunto de esferas concéntricas puede considerarse como un modelo simplificado de la estructura de la Tierra, idealmente esférica, encontramos que la solución de la conducción de calor en ámulos esféricos multicapas tiene utilidad en el campo de estudio de la física terrestre.

En el análisis de patrones de flujo convectivo dentro de cavidades esféricas [3, 10, 6] se reportan características del flujo relacionadas con la razón de radios  $r_i/r_e$ , donde  $r_i$  es el radio de la esfera interna y  $r_e$  es el radio de la esfera externa. Una relación de radios donde  $r_i/r_e = 0,35$  es útil si el flujo está representando el núcleo externo de hierro fundido del modelo simplificado de la estructura de la Tierra [32, 24, 7, 8, 17].

Aunque las soluciones exactas proveen una mejor percepción dentro de la física gobernante del problema, su no disponibilidad o alta complejidad matemática hacen que en la práctica las soluciones numéricas sean preferidas. Sin embargo las soluciones analíticas tienen una importante aplicación en la validación y comparación de los algoritmos numéricos ya sea para determinar su grado de precisión o para mejorar la eficiencia computacional de estos códigos que se basan en técnicas numéricas.

Por tales razones el objetivo de este trabajo es validar el *Método de los Elementos Espectrales* aunado a la *Esfera Cubada* como un algoritmo numérico útil para la solución de la ecuación de conducción de calor en ámulos esféricos multicapas mediante la comparación de los resultados obtenidos contra soluciones analíticas, simulaciones numéricas o datos experimentales reportados en la literatura.

En el segundo capítulo se presentan dos modelos de fenómenos físicos (elementos de combustible nuclear y la estructura de la Tierra en capas esféricas) que pueden ser analizados mediante el empleo del algoritmo numérico desarrollado en este trabajo de tesis.

En el tercer capítulo se presenta el planteamiento matemático del problema de conducción de calor en ámulos esféricos multicapas, con generación volumétrica de calor no homogénea.

En el cuarto capítulo se describe brevemente el *Método de los Elementos Espectrales* usado para resolver la ecuación general de difusión de calor y se muestra el empleo de la *Esfera Cubada* para generar la malla computacional con geometría esférica del ámulos multicapa en coordenadas cartesianas, al cual se le realizará el análisis térmico.

En el quinto capítulo se presentan los resultados del método numérico para la difusión de calor en el ámulos esférico multicapa para distintas situaciones, donde varían las condiciones de frontera y el término fuente cambia de homogéneo a no homogéneo. Se realiza la comparación de los resultados numéricos y analíticos para un caso de difusión de calor unidimensional. Finalmente, se estudian algunos casos tridimensionales de conducción de calor para los cuales no existe solución analítica, y se presenta la animación y visualización del campo de temperaturas en forma gráfica con el empleo del paquete de visualización AVIZO.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Avizo 5.1.0 (c) 1999-2008 Mercury Computer System, Inc.

## Capítulo 2

# Modelo Físico

En este capítulo se describen los dos fenómenos físicos que se analizan en el presente trabajo. Primero trataremos el comportamiento térmico de las partículas de elementos de combustible nuclear TRISO y TRISO modificado. Posteriormente se describirán las interacciones térmicas de las capas de la Tierra.

En el caso TRISO original cada partícula esférica de combustible (dióxido de uranio,  $UO_2$ ) está cubierta de una serie de capas concéntricas de carbono pirolítico poroso, carbono pirolítico isotrópico y carburo de silicio, y una gran cantidad de éstas está embebida en una matriz de carbono contenida en una esfera hueca de grafito pirolítico de 60mm de diámetro y 5mm de espesor, ver figura 2.1.<sup>1</sup>

El dióxido de uranio sufre un proceso de fisión<sup>2</sup> (además de otros procesos como envejecimiento y formación de productos de fisión) que libera energía, entonces, se presenta un flujo de calor que emana de este núcleo y se conduce a través de cada una de las capas de cobertura llegando hasta la matriz de carbono. Se puede considerar que la energía generada por el núcleo de dióxido de uranio, provoca que la superficie interna de la primera capa de cobertura (buffer de carbono pirolítico poroso) se encuentre a una temperatura constante y uniforme.

También se puede considerar que la matriz de carbono que contiene las partículas cubiertas se encuentra a una temperatura constante y uniforme, por lo tanto la superficie exterior de la última capa de cobertura (carbono pirolítico isotrópico exterior) se encuentra a una temperatura constante y uniforme.

---

<sup>1</sup>Tomada de: <http://www.megagraphite.com/products/byapplication/nuclearr> Traducción de Antonio Sánchez

<sup>2</sup>Fisión es la división del núcleo de algunos átomos pesados, como uranio y plutonio, en dos partes, cada una de las cuales constituye un nuevo núcleo; va acompañada por la emisión de una gran cantidad de radiactividad y calor.

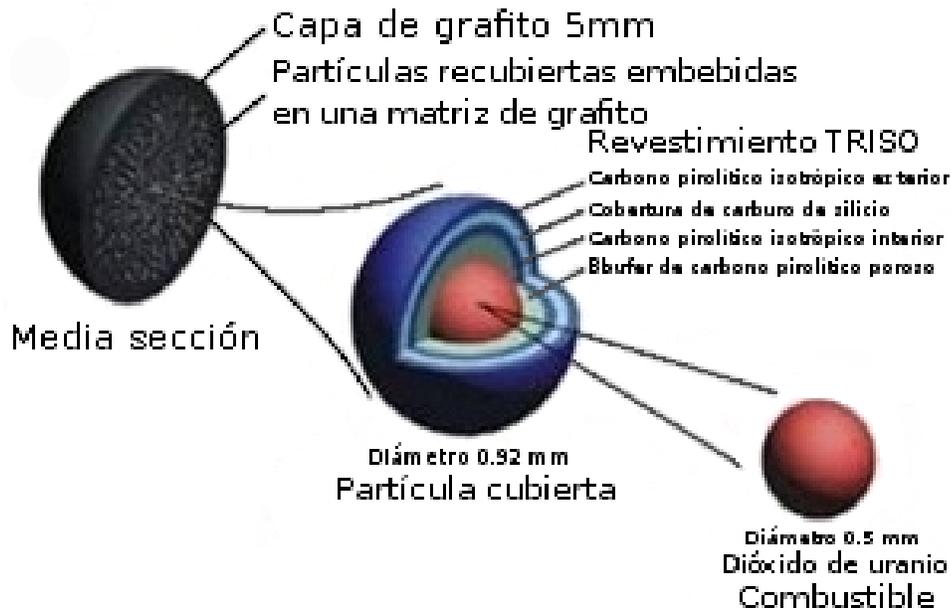


Figura 2.1: Partículas cubiertas de los elementos de combustible “pebbles” utilizados en reactores modulares de lecho de esferas PBMR.

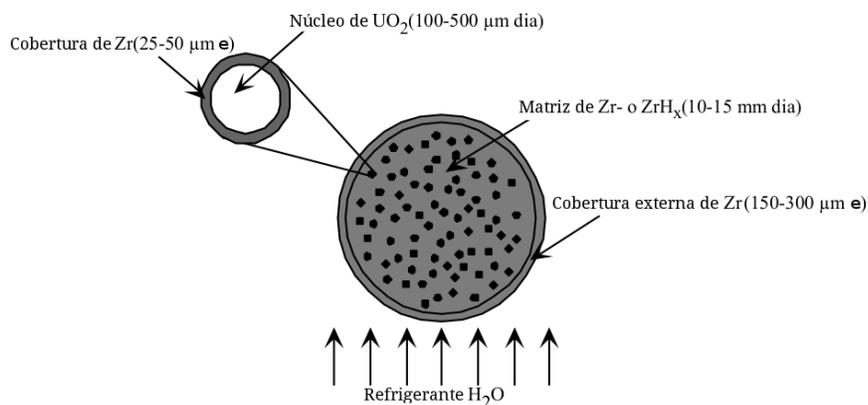


Figura 2.2: Pebbles de combustible del tipo TRISO modificado.

En el caso de las partículas tipo TRISO modificado se eliminan, para los núcleos de combustible, las coberturas de grafito y cerámica y se incorpora una única cobertura de circonio. Mezclando varias de estas partículas cubiertas con una apropiada cantidad de polvo de circonio y comprimiendo en caliente se forma un ladrillo cerámico esférico de 10 – 15mm de diámetro, este ladrillo lleva una cobertura de circonio de 150 – 300 $\mu m$  de espesor, la cual ofrece protección a la corrosión, ver figura 2.2<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Tomada de PNNL, 2007 [21] Traducción de Antonio Sánchez

El comportamiento térmico de esta partícula cubierta es similar al de la TRISO original, existe generación de energía en un núcleo esférico que ocasiona que un flujo de calor se transporte a través de una sola capa de cobertura hasta llegar a una matriz de cerámica. Se considera que las superficies interna y externa de la capa de cobertura anular se encuentran a una temperatura constante y uniforme, dándose por entendido que la temperatura de la superficie interior es mayor que la temperatura de la superficie exterior.

En cuanto a las interacciones térmicas de las capas de la Tierra, por estudios de la geofísica [28] sabemos que la estructura interior de la Tierra es un conjunto de capas, compuesta de un núcleo sólido interno de metales pesados a muy alta temperatura, un núcleo externo constituido fundamentalmente de hierro fundido, un manto inferior y un manto superior de rocas de silicatos, una corteza compuesta por rocas maficas (silicatos de hierro y magnesio) y la misma corteza oceánica, ver figura 2.3<sup>4</sup>. Por otro lado, la Federación Aeronáutica Internacional<sup>5</sup> acepta que el límite entre atmósfera y espacio exterior es aproximadamente 100 km sobre el nivel del mar, esta línea imaginaria se conoce con el nombre de “Línea de Kármán”.

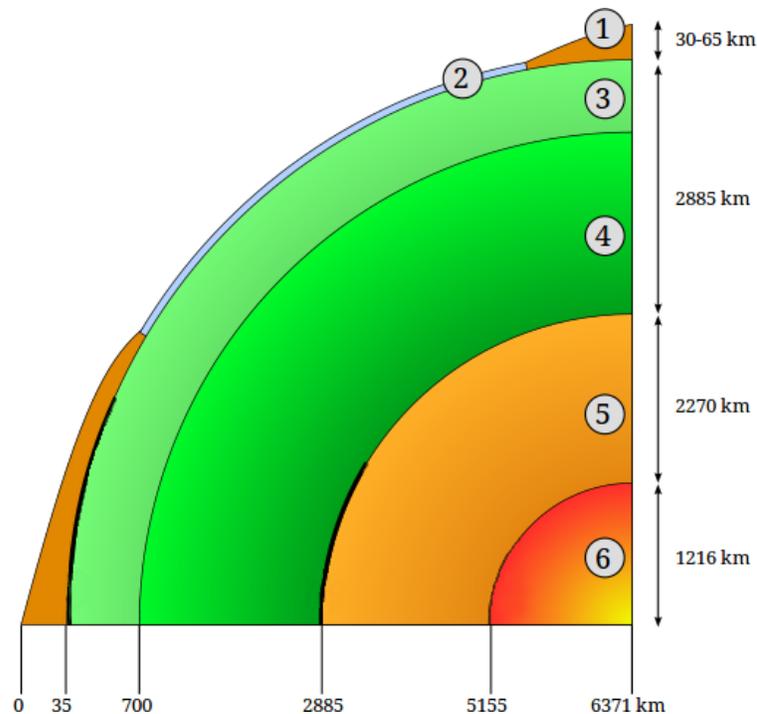


Figura 2.3: Vista esquemática del interior de la Tierra. 1.Corteza continental- 2.Corteza oceánica - 3.Manto superior - 4.Manto inferior - 5.Núcleo externo - 6.Núcleo interno.

<sup>4</sup>Tomada de: [http://en.wikipedia.org/wiki/Structure\\_of\\_the\\_Earth](http://en.wikipedia.org/wiki/Structure_of_the_Earth)

<sup>5</sup>La Federación Aeronáutica Internacional es un organismo que se dedica a la elaboración de normas y el mantenimiento de registros para la aeronáutica y la astronáutica. Portal web <http://www.fai.org/>

---

Las capas de la Tierra siempre han estado en movimiento convectivo debido al proceso de transferencia de calor desde el núcleo a alta temperatura hacia la superficie, con la probable excepción del núcleo interior. Como consecuencias de la convección se tienen los terremotos, la tectónica de placas y el campo geomagnético.

En un primer intento por entender la física terrestre se puede tomar en cuenta una escala de tiempo humana, considerar que todas las capas de la Tierra se encuentran estáticas, que el núcleo interno a alta temperatura ocasiona que la superficie interior de la capa del núcleo externo se encuentre a una temperatura uniforme dada, que dentro de la capa del núcleo externo, debido a la forma del patrón convectivo se tiene una generación de calor no uniforme, y que en las demás capas de la Tierra (manto inferior, manto superior, corteza y atmósfera) sólo ocurre una transferencia de calor por conducción hacia la capa exterior de la atmósfera.

Ya que el comportamiento térmico de ambos fenómenos físicos descrito con anterioridad puede ser analizados mediante una representación en esferas concéntricas multicapas con generación de calor no uniforme, según sea el caso, entonces se puede utilizar el *Método de los Elementos Espectrales* combinado con la *Esfera Cubada* presentado en este trabajo.

## Capítulo 3

# Modelo Matemático

A continuación se presenta el planteamiento matemático del problema de conducción de calor con término fuente.

### 3.1. Principio de balance energía

Este principio establece que la razón de cambio de la energía total del material de un cuerpo es igual a la suma de la tasa del total de trabajo hecho por las fuerzas externas y la tasa de cantidad de calor neta en el volumen.

Si consideramos que la energía total de un cuerpo es la suma de la energía cinética  $K = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV$  y la energía interna  $U = \int_V \rho \hat{u} dV$  donde  $\hat{u}$  es conocida como la energía interna por unidad de masa o energía interna específica. El total de la tasa de trabajo hecho por las fuerzas externas  $P$  es igual a la suma de las fuerzas de cuerpo actuando  $f_{(cuerpo)} = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV$  donde  $\mathbf{b}$  es la fuerza de cuerpo por unidad de masa, y las fuerzas actuando sobre la superficie orientada del cuerpo  $f_{(superficie)} = \int_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} dS$ , donde  $\mathbf{s}$  es la fuerza de superficie por unidad de área o vector de esfuerzo. Y, por último, que la cantidad de calor neta contenida en el volumen depende de la cantidad de calor generada dentro del volumen por unidad de tiempo  $H = \int_V \rho h dV$  donde  $h$  es la fuente de calor con unidades  $[\frac{W}{kg}]$ , y la cantidad de calor que atraviesa la superficie del cuerpo por unidad de tiempo  $Q = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$  donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario exterior normal a la superficie, podemos escribir el principio de conservación de energía  $\frac{D}{Dt} (K + U) = P + (H - Q)$  como una ecuación:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV + \int_V \rho \hat{u} dV \right) = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} dS + \left( \int_V \rho h dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \right) \quad (3.1)$$

### 3.1. PRINCIPIO DE BALANCE ENERGÍA

Ajustando el lado izquierdo de esta ecuación como  $\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \hat{u} \right] dV$  identificamos el término  $\frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \hat{u} = \hat{\phi}$  como un escalar arbitrario, entonces podemos utilizar la fórmula de transporte

$$\frac{D}{Dt} \int_V \hat{\phi} dV = \int_V \left( \frac{D\hat{\phi}}{Dt} + \hat{\phi} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad (3.2)$$

y se puede demostrar que este lado de la ecuación se escribe como

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \hat{u} \right) dV = \int_V \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{D\hat{u}}{Dt} \right) dV$$

Para el lado derecho de la ecuación 3.1, en las fuerzas de superficie utilizamos la relación que conecta el vector de esfuerzos con el tensor de esfuerzos y que es conocida como la hipótesis de Cauchy  $\mathbf{s} = \sigma^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}$ , entonces  $f_{(superficie)} = \int_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} dS = \int_S (\sigma^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS$ , y usamos  $(\sigma^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{v})$  para acomodar el término dentro de la integral de superficie y tenerlo de la forma del teorema de la divergencia

$$\int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV \quad (3.3)$$

$$\int_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} dS = \int_S (\sigma^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS = \int_V \nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{v}) dV$$

usando la propiedad de un campo tensorial  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \cdot \nabla \mathbf{u}$

$$\int_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} dS = \int_V (\mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \sigma^{\mathbf{T}} + \sigma^{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV$$

Se puede aplicar el teorema de la divergencia 3.3 directamente a la integral del calor que atraviesa la superficie del cuerpo

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV$$

Ahora la ecuación 3.1 está completamente en términos de un volumen arbitrario V

$$\int_V \rho \left( \mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{D\hat{u}}{Dt} \right) dV = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V (\mathbf{v} \cdot \nabla \sigma^{\mathbf{T}} + \sigma^{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV + \left( \int_V \rho h dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \right)$$

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV + \int_V \rho \frac{D\hat{u}}{Dt} dV &= \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b} dV - \int_V \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \sigma^{\mathbf{T}} dV + \int_V \sigma^{\mathbf{T}} \cdot \sigma \mathbf{v} dV \\ &\quad + \int_V \rho h dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \end{aligned}$$

$$\int_V \left[ \rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \left( \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{b} - \nabla \cdot \sigma^{\mathbf{T}} \right) - \sigma^{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho h \right] dV = 0$$

aquí está presente la ecuación de movimiento de Cauchy

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \sigma^{\mathbf{T}} \quad (3.4)$$

entonces la ecuación se reduce a

$$\int_V \left[ \rho \frac{D\hat{u}}{Dt} - \sigma^{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho h \right] dV = 0$$

por el teorema de localización

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} - \sigma^{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho h = 0$$

usando la simetría del tensor de esfuerzos  $\sigma$  llegamos a la ecuación de la energía

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \sigma \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho h$$

$$\boxed{\rho \left( \frac{d\hat{u}}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{u} \right) = \sigma \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho h} \quad (3.5)$$

### 3.2. Ecuación general de conducción de calor

En la ecuación 3.5, si  $\hat{u} \approx c_p T$  donde  $c_p$  es el calor específico a presión constante, además  $\rho = cte$  y despreciamos tanto el término de trabajo mecánico  $[\sigma \cdot (\nabla \mathbf{v})]$  así como el término advectivo  $(\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{u})$ , puesto que estamos interesados en el análisis térmico y las características del problema (no hay fuerza de gravedad ni velocidad de rotación o traslación) permiten omitir el análisis dinámico, entonces

$$\rho \frac{\partial c_p T}{\partial t} = \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

reconocemos  $\rho h = e_g$  como la razón constante de generación de calor por unidad de volumen  $\left[ \frac{W}{m^3} \right]$

Si consideramos que la tasa de conducción de calor en una dirección es proporcional al gradiente de temperatura en esa misma dirección, es decir, usamos la Ley de Fourier de conducción de calor

$$\rho \frac{\partial c_p T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T + e_g$$

como  $\rho = cte$ ,  $k = cte$  y  $c_p = cte$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla \cdot \nabla T + e_g$$

donde  $k$  es la conductividad del medio con unidades  $\left[ \frac{W}{m \cdot ^\circ C} \right]$  o  $\left[ \frac{W}{m K} \right]$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \nabla T + \frac{e_g}{k}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{e_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (3.6)$$

donde  $\alpha$  es la difusividad térmica del medio definida como  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  con unidades  $\left[ \frac{m^2}{s} \right]$

Esta es la ecuación general de conducción de calor, con término fuente, en coordenadas cartesianas. También se puede obtener a partir de un balance de energía sobre un elemento de volumen en coordenadas cartesianas de forma semejante a como se obtiene la ecuación general de conducción de calor en coordenadas esféricas en el Apéndice A. Se pueden obtener una de la otra usando las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.

## Capítulo 4

# Algoritmo Numérico

En este trabajo de tesis se ha seguido una serie de pasos indicados por el uso del método numérico de los *Elementos Espectrales* para resolver la ecuación general de conducción de calor en coordenadas cartesianas en una geometría esférica anular multicapa empleando la Esfera Cubada.

Se eligió utilizar este método numérico aunado a la esfera cubada puesto que el problema de conducción de calor con término fuente no homogéneo en esta geometría no tiene solución analítica salvo en algunas situaciones simplificadas y en el mejor de los casos es muy difícil de obtener.

En este capítulo se describe brevemente el *Método de los Elementos Espectrales* y se muestra el empleo de la *Esfera Cubada* para generar la malla computacional.

### 4.1. Método de los elementos espectrales

Se considera que el método de Galerkin (también conocido como el método Bubnov-Galerkin) es un caso particular del método de los residuos pesados en el que la solución de la ecuación diferencial parcial es aproximada por una expansión en serie truncada cuyas funciones base son funciones de expansión (o de ensayo). Cuando se sustituye esta solución aproximada en la ecuación diferencial se obtiene una función residual distinta de cero la cual puede ser minimizada mediante el empleo de funciones de ponderación (o de prueba). La relación entre las funciones de ensayo y las funciones de ponderación y la naturaleza de éstas últimas es lo que da origen a los diferentes métodos de discretización espectral [31]. En el método de Galerkin las funciones de ponderación son idénticas a las funciones de ensayo.

Al utilizar una expansión en serie truncada para aproximar numéricamente una solución exacta, generalmente, no se llegará a obtener una función residual  $R(\mathbf{x})$  igual a cero, esto es:

$$\mathbb{L}(u^\delta) + f = R(u^\delta) \neq 0 \quad (4.1)$$

La solución aproximada  $u^\delta(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^N \check{u}_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \approx u(\mathbf{x}, t)$  se ajusta mejor a la solución exacta  $u(\mathbf{x}, t)$  conforme  $N \rightarrow \infty$ .  $u_0(\mathbf{x}, t)$  se selecciona para satisfacer las condiciones iniciales y de frontera. Al incrementar los términos de la expansión la función residual tiende a cero.

Las funciones base  $\Phi(\mathbf{x})$  utilizadas en este trabajo de tesis son los polinomios Gauss-Lobatto-Legendre  $GLL_p(x)$  que son ortogonales con respecto al producto interno en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ .

Es posible determinar los coeficientes desconocidos  $\check{u}_i(t)$  estableciendo la restricción de que el producto interno de la función residual con un conjunto de funciones de ponderación  $v_i(\mathbf{x})$  sea igual a cero.

$$(v_j(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} v_j(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

Este tipo de restricción sobre la función residual permite reducir la ecuación 4.1 a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando  $u = u(\mathbf{x}, t)$  y a un sistema de ecuaciones algebraicas cuando  $u = u(\mathbf{x})$ .

En el método de Galerkin se tiene que  $v_j = \Phi_j$  por lo que la restricción se escribe como:

$$(v_j(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})) = (\phi_j(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} \phi_j(\mathbf{x}) R(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

En el método de Galerkin, siendo uno de los métodos de elementos espectrales/hp [15], se emplean características de los métodos de elementos finitos y las técnicas espectrales por lo que el dominio de solución  $\Omega$  es dividido en  $N_{el}$  subdominios  $\Omega^e$  (o elementos) que no se superponen y cuya unión es el mismo dominio de solución. En cada elemento se utiliza una expansión polinomial, esto es, la solución exacta se aproxima por un número finito de funciones locales.

Esta es la aproximación tipo  $h$  del método de Galerkin, donde el parámetro  $h$  es el tamaño característico de un elemento, y tal descomposición elemental constituye la base para la aproximación tipo  $p$  en la cual se mantiene fija la malla y se varía el orden polinomial.

#### 4.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS ESPECTRALES

---

Si empleamos un dominio estándar  $\Omega_{st}$  para un conjunto de coordenadas locales  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  donde  $-1 < \xi_1, \xi_2, \xi_3 < 1$  en cada elemento, podemos representar los modos de expansión globales  $\Phi_i(\mathbf{x})$  en términos de modos de expansión locales elementales  $\phi_p(\xi_i)$  mapeando el elemento estándar en cada dominio elemental usando la transformación  $x_i = \chi^e(\xi_i)$  que expresa las coordenadas globales  $x_1, x_2, x_3$  en términos de las coordenadas locales para cada elemento  $e$ . Por lo tanto, también podemos representar la solución aproximada en términos de estos modos de expansión locales elementales:

$$u^\delta(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i(\mathbf{x}) \check{u}_i = \sum_{e=1}^{N_{el}} \sum_{p=0}^{NP} \phi_p^e(\xi) \check{u}_p^e \quad (4.4)$$

donde son requeridas algunas restricciones extras para equiparar el número de coeficientes locales desconocidos y el número de coeficientes globales desconocidos.

Si usamos una expansión de Lagrange a través de los ceros de polinomios [20]<sup>1</sup> Gauss-Lobatto-Legendre tenemos una expresión para los modos de expansión locales de la forma:

$$\phi_p(\xi) \mapsto h_p(\xi) = \frac{(\xi - 1)(\xi + 1)L_P'(\xi)}{P(P + 1)L_P(\xi_p)(\xi - \xi_p)} \quad (4.5)$$

Retomando la restricción sobre la función residual, vemos que es necesario llevar a cabo una integración en cada dominio elemental  $\Omega^e$  de la forma:

$$\int_{-1}^1 u(\xi) d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i) \quad (4.6)$$

donde  $w_i$  son los pesos y  $\xi_i$  representa la abscisa de  $Q$  diferentes puntos en el intervalo  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

Para llevar a cabo esta integración numérica se emplea la *Cuadratura Gaussiana* en la cual se representa al integrando  $u(\xi)$  como polinomios de Legendre usando el total de los puntos  $\xi_i$ , y los pesos  $w_i$  están en términos de integrales de polinomios de Legendre, esto es  $w_i = \int_{-1}^1 h_i(\xi) d\xi$ .

La cuadratura gaussiana empleada es aquella que incluye ambos extremos del intervalo ( $\xi = \pm 1$ ) y, por lo tanto, las abscisas y los pesos están definidos como:

$$\xi_i = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ \xi_{i-1, Q-2}^{1,1} & i = 1, \dots, Q-2 \\ 1 & i = Q-1 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$w_i^{0,0} = \frac{2}{Q(Q-1)[L_{Q-1}(\xi_i)]^2} \quad i = 0, \dots, Q-1 \quad (4.8)$$

donde  $L_Q(\xi)$  es el polinomio de Legendre  $L_Q(\xi) = P_Q^{0,0}(\xi)$ .

---

<sup>1</sup>En la primera versión del método de los elementos espectrales los polinomios fueron del tipo Chebyshev [15].

## 4.2. La Esfera-Cubada

La esfera cubada (Cubed Sphere) [25] es una proyección gnomónica, o proyección central, de un poliedro regular de seis caras cuadradas congruentes circunscrita por la superficie de una esfera cuya intersección sucede en los ocho vértices del cubo, propuesta originalmente por Sadourny en 1972 [26], mejorada por Stairus en 1977 [29] al utilizar una variación del método de malla compuesta para acoplar los seis sistemas de coordenadas obtenidos por la aplicación de la proyección gnomónica del cubo.

Existe una pequeña variedad de proyecciones de la esfera cubada y modificaciones a la malla o, incluso aún, mallas generadas numéricamente [23] ver figura 4.1<sup>2</sup>. En este trabajo utilizamos una proyección gnomónica equidistante que produce una malla cuasi-uniforme, altamente no-ortogonal y no conforme, esto es, está presente una fuerte discontinuidad aguda a través de los bordes de las caras del cubo, ver figura 4.2.

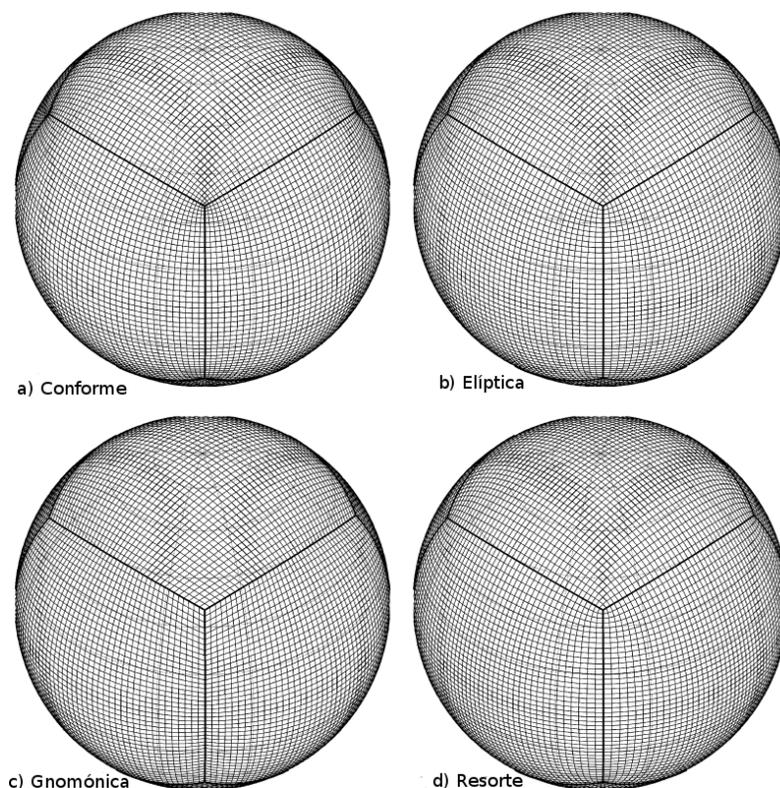


Figura 4.1: Cuatro mallas basadas en la esfera cubada, cada lado del cubo proyectado se divide en 44 celdas: (a) mapeo conforme, (b) malla gnomónica generada por un solucionador elíptico, (c) mapeo gnomónico equiangular y (d) malla gnomónica producida con la técnica del resorte dinámico.

<sup>2</sup>Tomada de Putman, 2007 Traducción de Antonio Sánchez

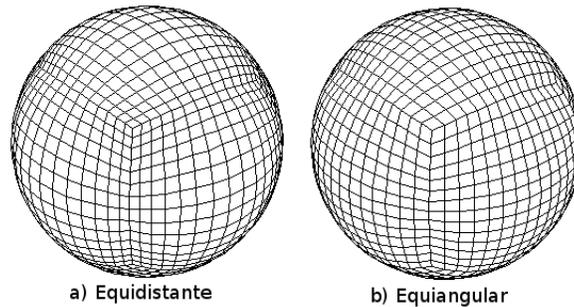


Figura 4.2: Mallas gnomónicas de la esfera cubada, cada lado del cubo proyectado se divide en 14 celdas: (a) proyección equidistante y (b) proyección equiangular. Note que el mapeo equidistante conduce a una abrupta transición a través de los bordes de las caras del cubo.

### 4.3. Región anular esférica de trabajo

A continuación se muestra el empleo de la *Esfera Cubada* para manipular la geometría esférica del ánulo multicapa en coordenadas cartesianas.

La *Esfera Cubada* proyecta las caras de un cubo en una superficie esférica, y cada cara del cubo mantiene un posición relativa a la esfera, ver figura 4.3, donde se tiene la relación  $a = R/\sqrt{3}$  para las magnitudes del cubo y la esfera,  $a$  es el lado del cubo y  $R$  es el radio de la esfera.

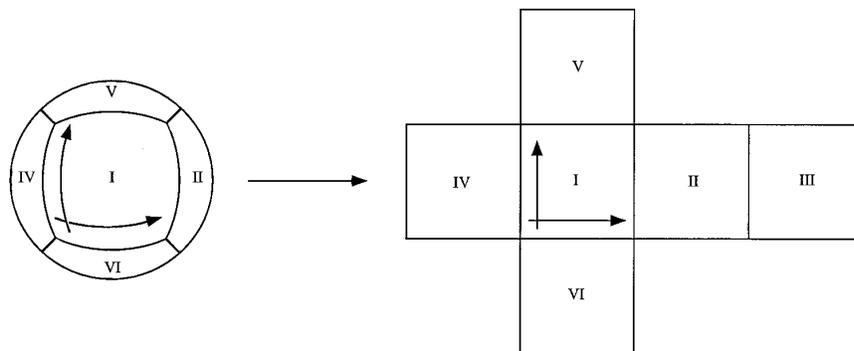
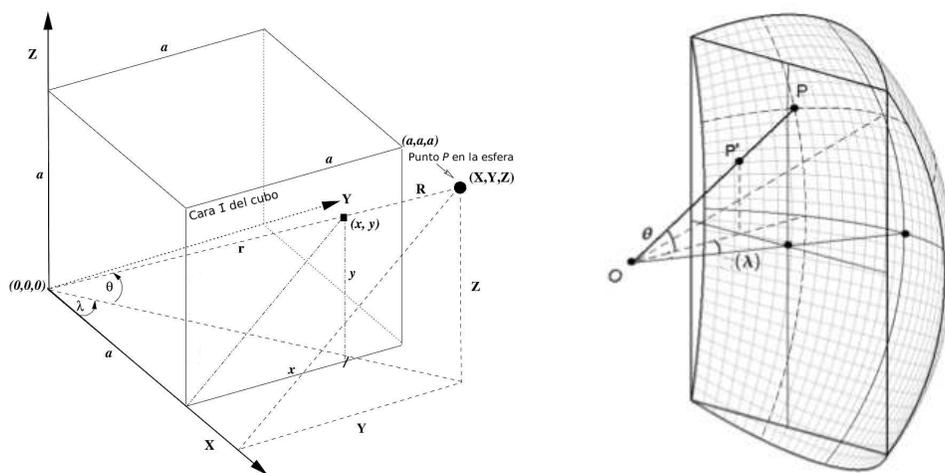


Figura 4.3: Posición relativa de los lados del cubo con la esfera.

Para cada cara del cubo proyectado corresponde una ecuación de transformación gnomónica, según la elección del sistema coordenado cartesiano absoluto  $(X, Y, Z)$  normal a las caras del cubo con origen en el centro de la esfera y el sistema coordenado cartesiano local  $(x, y)$  centrado sobre las superficies de las caras de cada lado del cubo, ver figura 4.4<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Tomada de Nair, 2005 [16].

### 4.3. REGIÓN ANULAR ESFÉRICA DE TRABAJO



(a) Sistemas coordenados cartesianos absoluto y (b) Proyección completa del lado I del cubo local en la cara I del cubo. dividido en 32 celdas.

Figura 4.4: Proyección del lado I del cubo sobre la esfera.

Utilizando las ecuaciones de transformación gnomónica para cada cara del cubo proyectado podemos manipular la geometría anular esférica multicapa tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas esféricas.

Cara	Transformaciones básicas	Cubo-esfera	Esfera-cubo
I	$x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \sec \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(a, x, y)$	$(x, y) = a\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)$
II	$x = -a \cot \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-x, a, y)$	$(x, y) = a\left(\frac{-X}{Y}, \frac{Z}{Y}\right)$
III	$x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-a, -x, y)$	$(x, y) = a\left(\frac{Y}{X}, \frac{-Z}{X}\right)$
IV	$x = -a \cot \lambda$ $y = -a \tan \theta \csc \lambda$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(x, -a, y)$	$(x, y) = a\left(\frac{-X}{Y}, \frac{-Z}{Y}\right)$
V	$x = a \sec \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-y, x, a)$	$(x, y) = a\left(\frac{Y}{Z}, \frac{-X}{Z}\right)$
VI	$x = -a \sec \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$	$(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(y, x, -a)$	$(x, y) = a\left(\frac{-Y}{Z}, \frac{-X}{Z}\right)$

### 4.3. REGIÓN ANULAR ESFÉRICA DE TRABAJO

---

Para formar una región esférica anular basta con aplicar la *Esfera Cubada* a dos cubos de distinta magnitud, ver figura 4.5. Cada espacio anular formado de esta manera se llamará “Macroelemento” y el espacio anular completo formado por los seis lados de los cubos proyectados se llamará “Espacio Anular”.

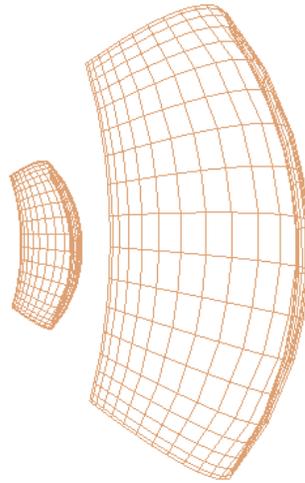


Figura 4.5: Cara I de dos cubos de distinta magnitud proyectados sobre dos superficies esféricas, cada lado dividido en 20 celdas.

Para generar una malla en este espacio anular se puede realizar una serie de proyecciones de cubos con magnitud entre los dos cubos que forman el espacio anular, ver figura 4.6.

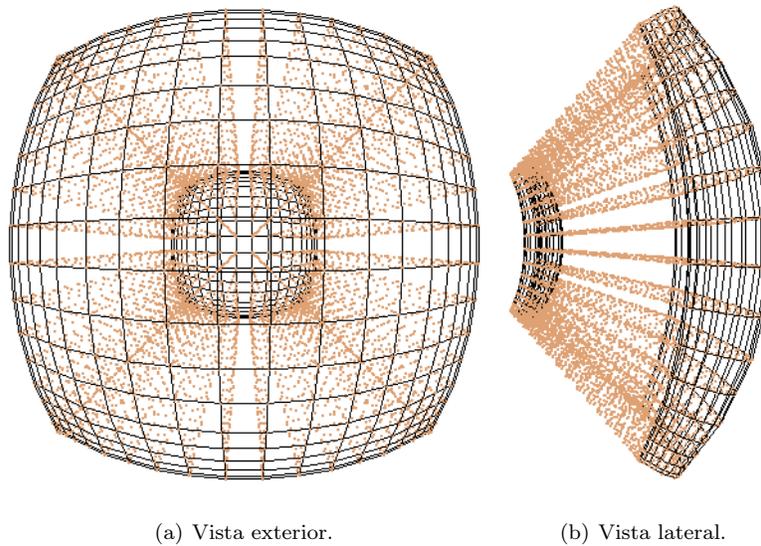
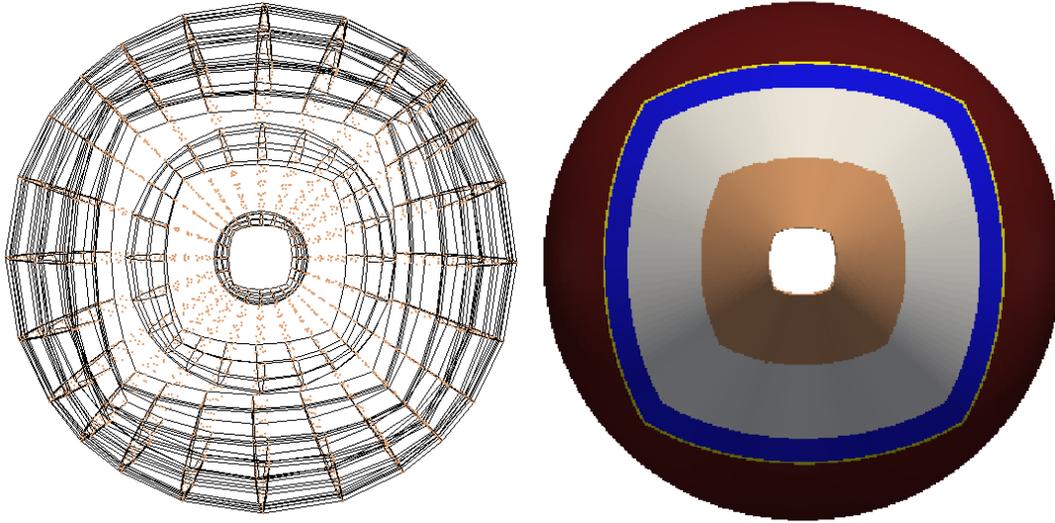


Figura 4.6: Distintas vistas de la malla de un macroelemento.

### 4.3. REGIÓN ANULAR ESFÉRICA DE TRABAJO

Para nuestro análisis de conducción de calor trabajaremos con una malla anular esférica de cinco capas, cada capa está formado por seis macroelementos por lo que tendremos un total de 30 macroelementos que forman cinco espacios anulares generados de la proyección de seis cubos.

Considerando que esta malla sirve de base para la colocación de los puntos del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre (GLL), se ha escogido una malla donde cada macroelemento se ha generado mapeando siete cubos hacia siete esferas concéntricas y dividiendo cinco veces cada lado del cubo para tener un total de 343 puntos por macroelemento, ver figura 4.7.



(a) Superficies de cada ánulo en marco de alambre, malla interior en puntos.

(b) Malla en superficie y color sólido.

Figura 4.7: Distintas representaciones gráficas de la región anular multicapas de trabajo, se han omitido los macroelementos de los casquetes, observe que la malla esférica tiene reminiscencia del cubo que le dio origen.

Las seis esferas con que se han formado los espacio anulares guardan la siguiente relación de radios:

$\frac{r_1}{r_2} = 0,3488$	$\frac{r_1}{r_3} = 0,2129$	$\frac{r_1}{r_4} = 0,1908$	$\frac{r_1}{r_5} = 0,1889$	$\frac{r_1}{r_6} = 0,1860$
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Asignando un valor, por ejemplo, para el radio  $r_6 = 1$  se puede obtener la magnitud de los radios de las esferas interiores, y también se pueden obtener los lados de los correspondientes cubos proyectados empleando la relación  $a = R/\sqrt{3}$ .

Los puntos del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre pueden visualizarse en el dominio físico con ayuda del algoritmo de la esfera cubada, ver figura 4.8, sin embargo es en el dominio estándar  $\Omega^e$  donde se realiza la expansión y se calcula la temperatura.

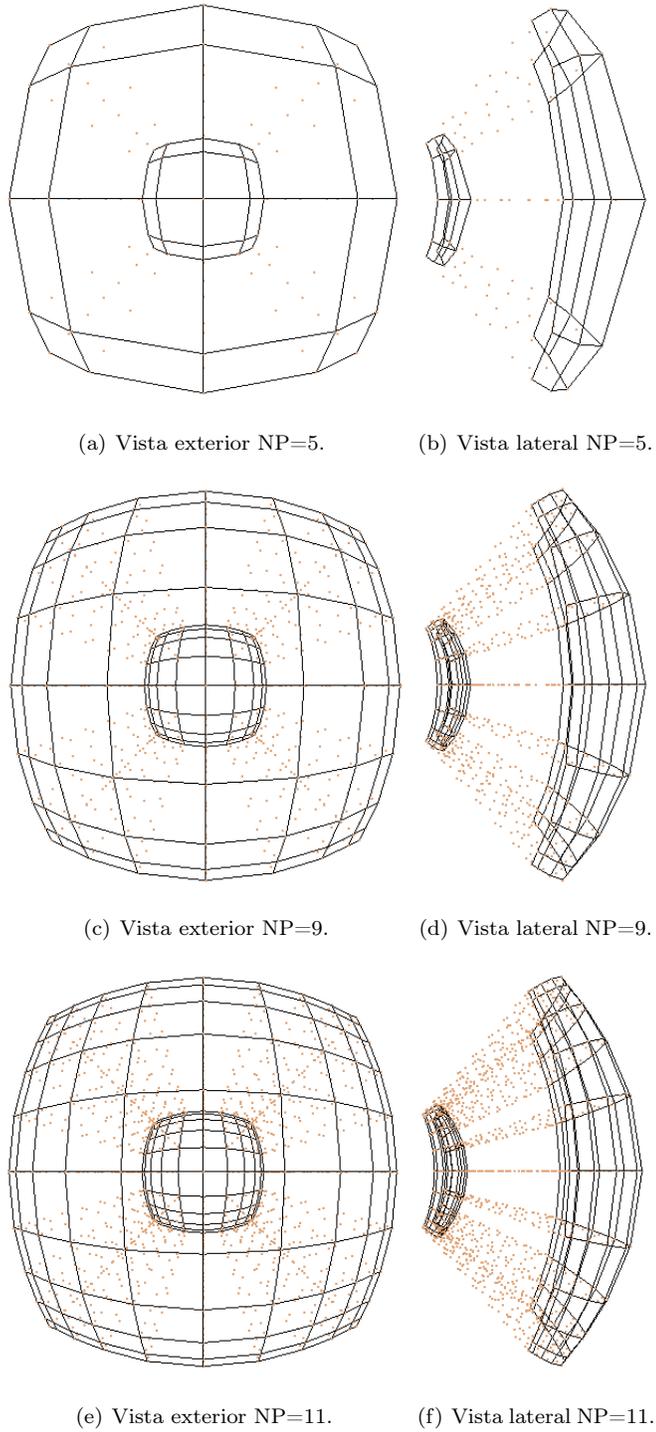


Figura 4.8: Macroelemento I del primer espacio anular, para distintos grados (NP) del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre. Observe la distribución de puntos característica de este polinomio, hay una tendencia de agrupar los puntos en los extremos conforme aumenta el grado del mismo.

## Capítulo 5

# Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del *Método de los Elementos Espectrales* empleado para analizar la difusión de calor en un anulo esférico multicapa para distintas situaciones, donde varían las condiciones de frontera y el término fuente cambia de homogéneo a no homogéneo. Los casos que se estudiaron en este trabajo de tesis son:

- a) Conducción de calor debido a diferencia de temperatura.
- b) Conducción de calor debido a término fuente homogéneo y diferencia de temperatura.
- c) Conducción de calor debido sólo a un término fuente homogéneo.
- d) Conducción de calor debido sólo a un término fuente no homogéneo, caso unidimensional.
- e) Conducción de calor debido sólo a términos fuente no homogéneos, caso tridimensional.

Deseamos encontrar el campo de temperaturas en anulos esféricos multicapas. En general la temperatura  $T$  está en función de las tres direcciones (radial, polar y azimutal) y del tiempo  $T = T(r, \theta, \phi, t)$ . En nuestro análisis existe transferencia de calor en las direcciones radial, polar y azimutal, no hay efectos multidimensionales debido a condiciones iniciales o de frontera, no hay heterogeneidad del material en ninguna dirección y la fuente de calor es espacialmente uniforme (en cada macroelemento) e independiente del tiempo. Se considera que la conductividad térmica del material no depende de la temperatura del mismo, esto es, la conductividad térmica es constante,  $k = cte$ .

Así pues, tenemos:

Ecuación gobernante

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{e_g(r, \theta, \phi)}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.1)$$

Condiciones de frontera

Superficie interna de la primera capa

$$T(r_1) = T(r_{int}) = cte \quad (5.2)$$

Superficie externa de la última capa

$$T(r_6) = T(r_{ext}) = cte \quad (5.3)$$

Condición inicial ( $r_1 \leq r \leq r_6$ )

$$T(r, \theta, \phi, t = 0) = 0 \quad (5.4)$$

Las ecuaciones 5.1 - 5.4 describen un problema tridimensional, dependiente del tiempo, con condiciones de frontera del primer tipo (Dirichlet), que no tiene solución analítica.

### 5.1. a) Conducción de calor debido a diferencia de temperatura.

La descripción concreta de este caso es: para el tiempo  $t < 0$  todo el sistema se encuentra a una temperatura  $T_0 = 0$ . En un tiempo  $t = 0$  la superficie interior del Espacio Anular 1 adquiere una temperatura uniforme  $T(r_1) = T_{int}$  y la superficie exterior del Espacio Anular 5 adquiere una temperatura uniforme  $T(r_6) = T_{ext}$ . Se impone que  $T_{int} > T_{ext}$ . Para un tiempo  $t > 0$  las condiciones de frontera se mantienen y sucede transferencia de calor en el sistema, pasando por un estado transitorio hasta un estado estacionario en el que el campo de temperatura deja de cambiar con el tiempo. Dadas estas condiciones se tiene transferencia de calor sólo en la dirección radial. La ecuación diferencial particular del caso es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.5)$$

Para este caso de transferencia de calor unidimensional en una región anular esférica se cuenta con la solución analítica del campo de temperaturas en estado transitorio y estado estacionario. Soluciones analíticas que se utilizan para validar el algoritmo numérico empleado.

5.1. A) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO A DIFERENCIA DE TEMPERATURA.

---

Para obtener la solución analítica del estado estacionario se resuelve la ecuación diferencial lineal homogénea

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0 \quad (5.6)$$

que puede resolverse mediante el método de separación de variables.

Integrando una vez

$$r^2 \frac{dT(r)}{dr} = c_1$$

separando variables e integrando una vez más

$$\begin{aligned} \frac{dT(r)}{dr} &= \frac{c_1}{r^2} \\ T(r) &= -\frac{c_1}{r} + c_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

que es la solución explícita, para encontrar la solución particular usamos las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \text{en } r = r_1 = r_{int} \quad T &= T_{int} \\ \text{en } r = r_6 = r_{ext} \quad T &= T_{ext} \end{aligned}$$

que utilizamos en la ecuación rexplicita a y obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} T_{int} &= -\frac{c_1}{r_{int}} + c_2 \\ T_{ext} &= -\frac{c_1}{r_{ext}} + c_2 \end{aligned}$$

que se resuelve para obtener las constantes de integración

$$c_1 = \frac{r_{int} r_{ext} (T_{ext} - T_{int})}{r_{ext} - r_{int}} \quad (5.8)$$

$$c_2 = \frac{r_{ext} T_{ext} - r_{int} T_{int}}{r_{ext} - r_{int}} \quad (5.9)$$

usamos 5.8 y 5.9 en 5.7 para llegar finalmente a la solución particular

$$T(r) = \frac{r_{int} r_{ext} (T_{int} - T_{ext})}{r(r_{ext} - r_{int})} + \frac{r_{ext} T_{ext} - r_{int} T_{int}}{r_{ext} - r_{int}}$$

ecuación que también se puede escribir como

$$T(r) = \frac{1}{r} \frac{T_{ext} - T_{int}}{\frac{1}{r_{ext}} - \frac{1}{r_{int}}} + T_{int} - \frac{T_{ext} - T_{int}}{\frac{r_{int}}{r_{ext}} - 1} \quad (5.10)$$

5.1. A) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO A DIFERENCIA DE TEMPERATURA.

---

La solución analítica de la parte transitoria de la ecuación 5.5 la tomamos de (Carslaw, 1959)

$$\begin{aligned}
 T(r, t) &= \frac{r_{int}T_{int}}{r} + \frac{(r_{ext}T_{ext} - r_{int}T_{int})(r - r_{int})}{r(r_{ext} - r_{int})} \\
 &+ \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{ext}T_{ext}\cos n\pi - r_{int}T_{int}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_{int})}{r_{ext} - r_{int}} e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{(r_{ext} - r_{int})^2}} \\
 &+ \frac{2}{r(r_{ext} - r_{int})} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_{int})}{r_{ext} - r_{int}} e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{(r_{ext} - r_{int})^2}} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} r' f(r') \operatorname{sen} \frac{n\pi(r' - r_{int})}{r_{ext} - r_{int}} dr'
 \end{aligned}$$

donde  $f(r)$  es la temperatura inicial de todos los espacios anulares que en nuestro caso es igual a cero por lo que el último término se anula quedando la ecuación como

$$\begin{aligned}
 T(r, t) &= \frac{r_{int}T_{int}}{r} + \frac{(r_{ext}T_{ext} - r_{int}T_{int})(r - r_{int})}{r(r_{ext} - r_{int})} \\
 &+ \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{ext}T_{ext}\cos n\pi - r_{int}T_{int}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_{int})}{r_{ext} - r_{int}} e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{(r_{ext} - r_{int})^2}}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Las ecuaciones 5.10 y 5.11 son dimensionales con unidades en Kelvin [K] y se grafican estas mismas soluciones pero de forma adimensional considerando los parámetros:

Temperatura adimensional

$$T^* = \frac{T - T_{ext}}{T_{int} - T_{ext}}$$

Radio adimensional

$$r^* = \frac{r - r_{int}}{r_{ext} - r_{int}}$$

Tiempo adimensional

$$t^* = \frac{\alpha t}{r_{ext}^2}$$

Relación de radios

$$\eta = \frac{r_{int}}{r_{ext}} \tag{5.12}$$

Las ecuaciones 5.5 y 5.10 se escriben, respectivamente (ver Apéndice B)

$$\frac{1}{(\eta + r^*(1 - \eta))^2} \frac{\partial}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \left( (\eta + r^*(1 - \eta))^2 \frac{\partial T^*}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \right) = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \tag{5.13}$$

$$T^*(r^*) = \frac{\eta(1 - r^*)}{\eta + r^*(1 - \eta)} \tag{5.14}$$

### 5.1. A) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO A DIFERENCIA DE TEMPERATURA.

---

Para analizar la precisión de la solución numérica utilizamos el porcentaje de error definido como:

$$\%error = \frac{|v_{num} - v_{ana}|}{|v_{ana}|} (100)$$

donde  $v_{num}$  = *valor numérico* y  $v_{ana}$  = *valor analítico*

Se comparó la solución obtenida por el método numérico al utilizar distintos grados del polinomio GLL (NP=5, 7, 9 y 11) contra la solución analítica en estado transitorio para distintos instantes de tiempo ( $t^* = 0.04, 0.06, 0.12$  y  $0.36$ ), ver figura 5.1.

En la tabla 5.1 se presenta el porcentaje de error en el radio  $r_2$ , esto es, en la interfase del primer y segundo espacio anulares. Utilizamos este radio ya que considerando la distribución de los puntos GLL para distintos grados del polinomio y para todos los macroelementos del dominio de solución, donde siempre se dispone de datos de temperatura calculada es en los radios de interfase de los espacios anulares.

Para los resultados numéricos se considera que el estado estacionario sucede cuando el valor de la temperatura ha dejado de cambiar y se mantiene por un lapso de tiempo de  $\Delta t^* = 0,02$  por lo tanto se considera que se ha alcanzado el estado estacionario en el tiempo  $t^* = 0,36$ .

Tabla 5.1: Error de la solución numérica con respecto a las soluciones analíticas en estado transitorio y estado estacionario, considerando varios ordenes polinomiales y distintos instantes de tiempo.

		Solución analítica transitoria				Solución analítica estacionaria
NP	$t^*$	0.04	0.06	0.12	0.36	0.36
	5		1.05	0.87	0.59	0.04
7		1.41	1.41	1.23	1.78	2.27
9		0.50	0.50	0.45	0.73	1.24
11		1.73	1.73	1.39	1.70	2.19

Se utiliza, también, la disponibilidad de la solución analítica en estado estacionario, ver figura 5.2, para seleccionar el grado (NP) del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre a utilizar en los demás análisis con base en la precisión de los resultados numéricos obtenidos contra los resultados analíticos.

5.1. A) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO A DIFERENCIA DE TEMPERATURA.

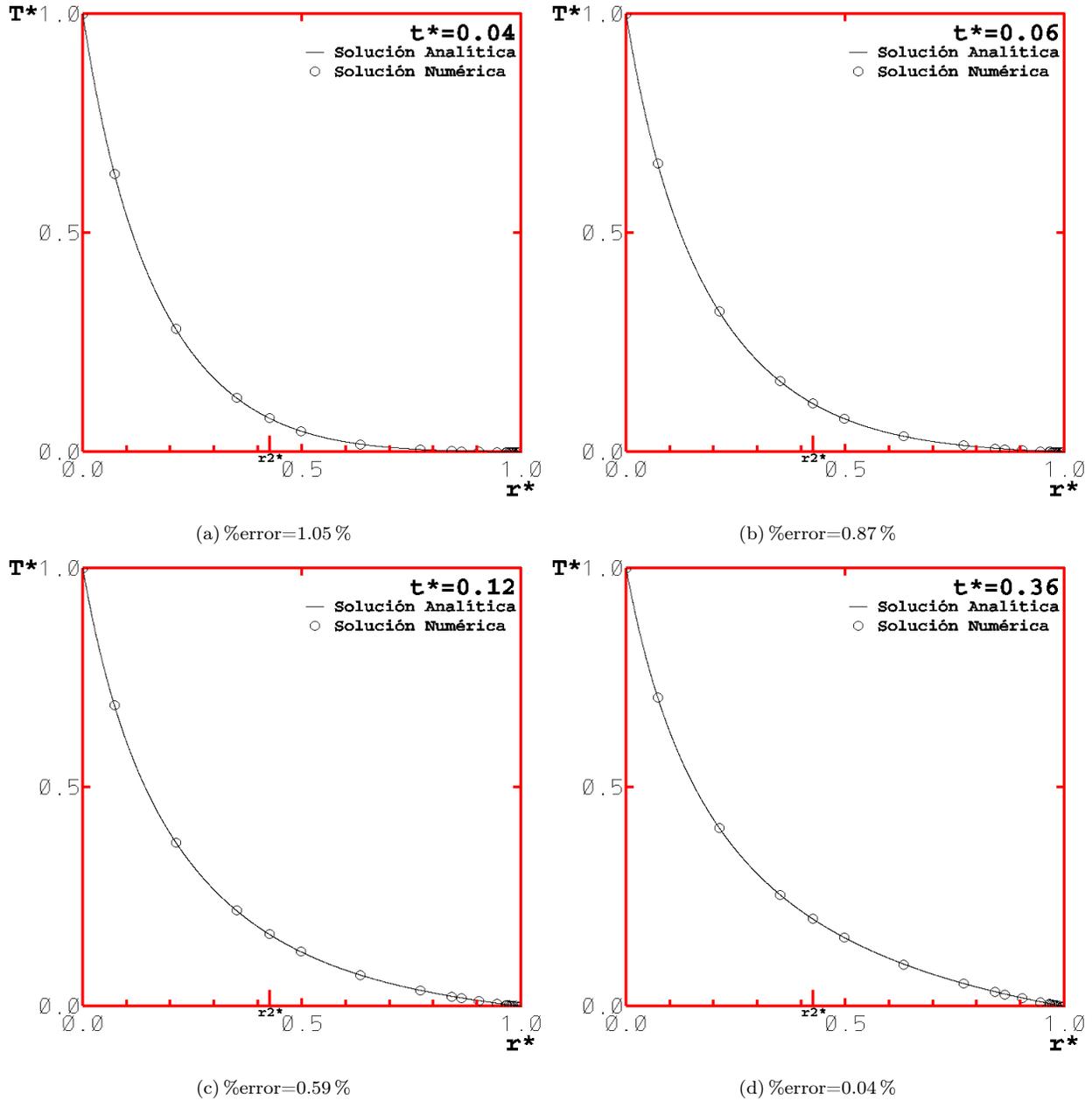
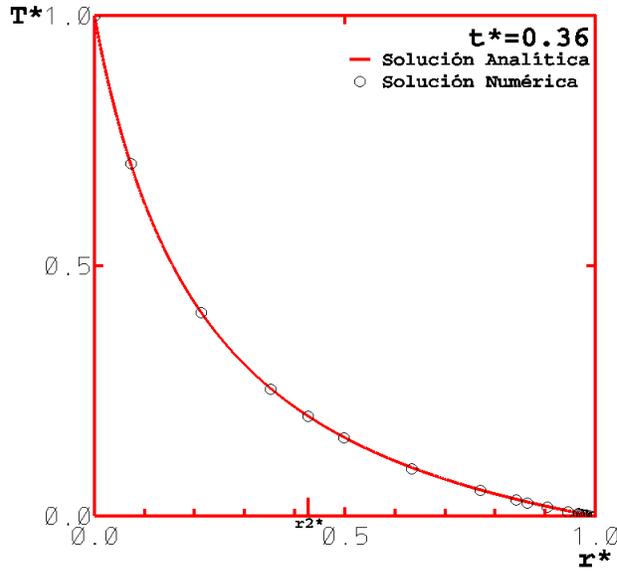
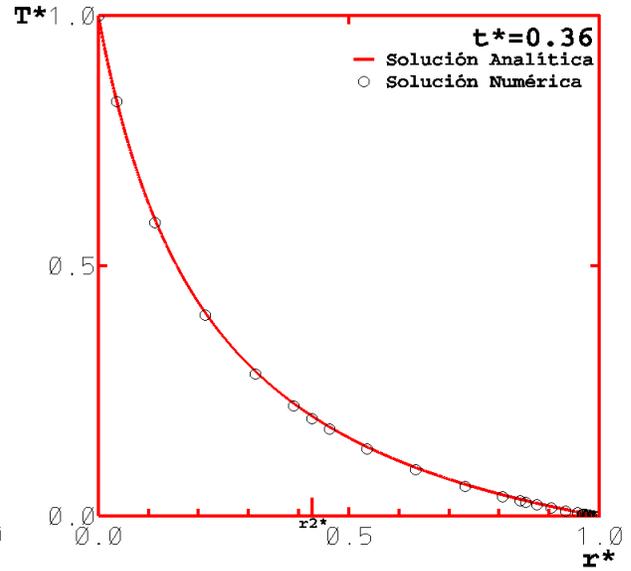


Figura 5.1: Comparación de la solución numérica contra la solución analítica en estado transitorio. Gráficas de temperatura adimensional vs radio adimensional ( $T^*$  vs  $r^*$ ) para distintos instantes de tiempo adimensional  $t^*$ . Grado de polinomio NP=5. %error para  $r^* = 0,42$ .

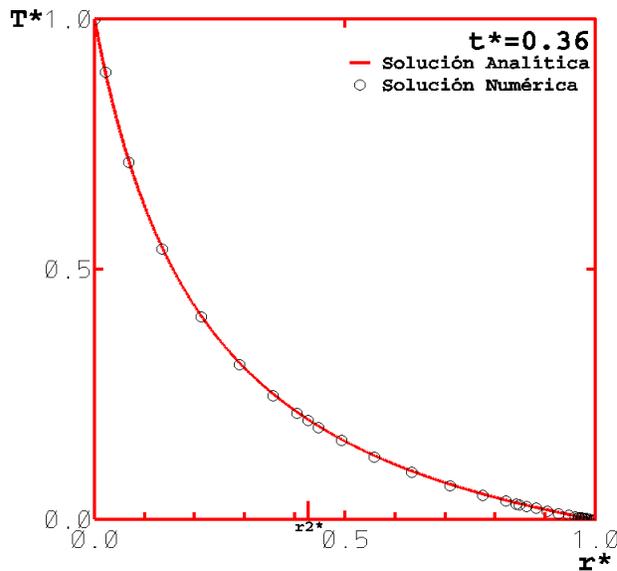
5.1. A) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO A DIFERENCIA DE TEMPERATURA.



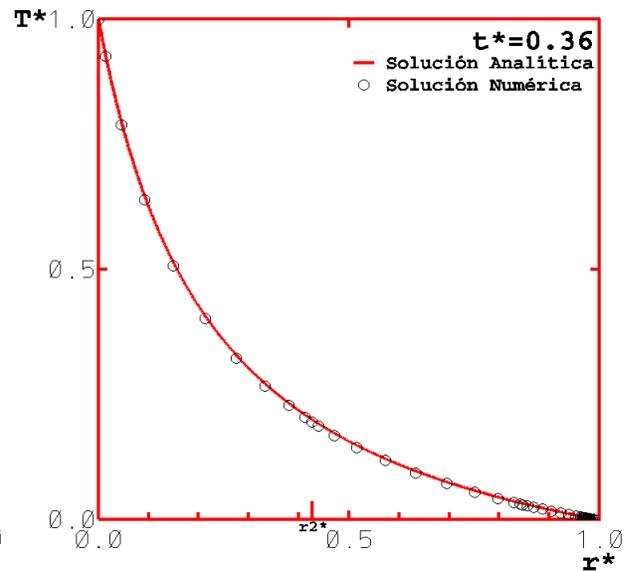
(a) NP=05, %error=0.46 %



(b) NP=07, %error=2.27 %



(c) NP=09, %error=1.24 %



(d) NP=11, %error=2.19 %

Figura 5.2: Comparación de la solución numérica contra la solución analítica en estado estacionario. Gráficas de temperatura adimensional vs radio adimensional ( $T^*$  vs  $r^*$ ) para distintos grados de polinomio. Tiempo adimensional  $t^* = 0,36$ . %error para  $r^* = 0,42$ .

5.1. A) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO A DIFERENCIA DE TEMPERATURA.

---

Cabe mencionar al tiempo de cómputo del empleo del método numérico como parámetro de eficiencia del mismo. Observamos en la figura 5.2 que al emplear un orden de 5 para el polinomio GLL obtenemos la mejor exactitud con respecto a la solución analítica, entonces, si tomamos el tiempo de cómputo del método numérico con  $NP=5$  como base y lo comparamos contra el tiempo de cómputo pero usando distintos grados del polinomio (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), ver figura 5.3, encontramos que el tiempo de cómputo aumenta de forma exponencial conforme aumenta el orden del polinomio GLL.

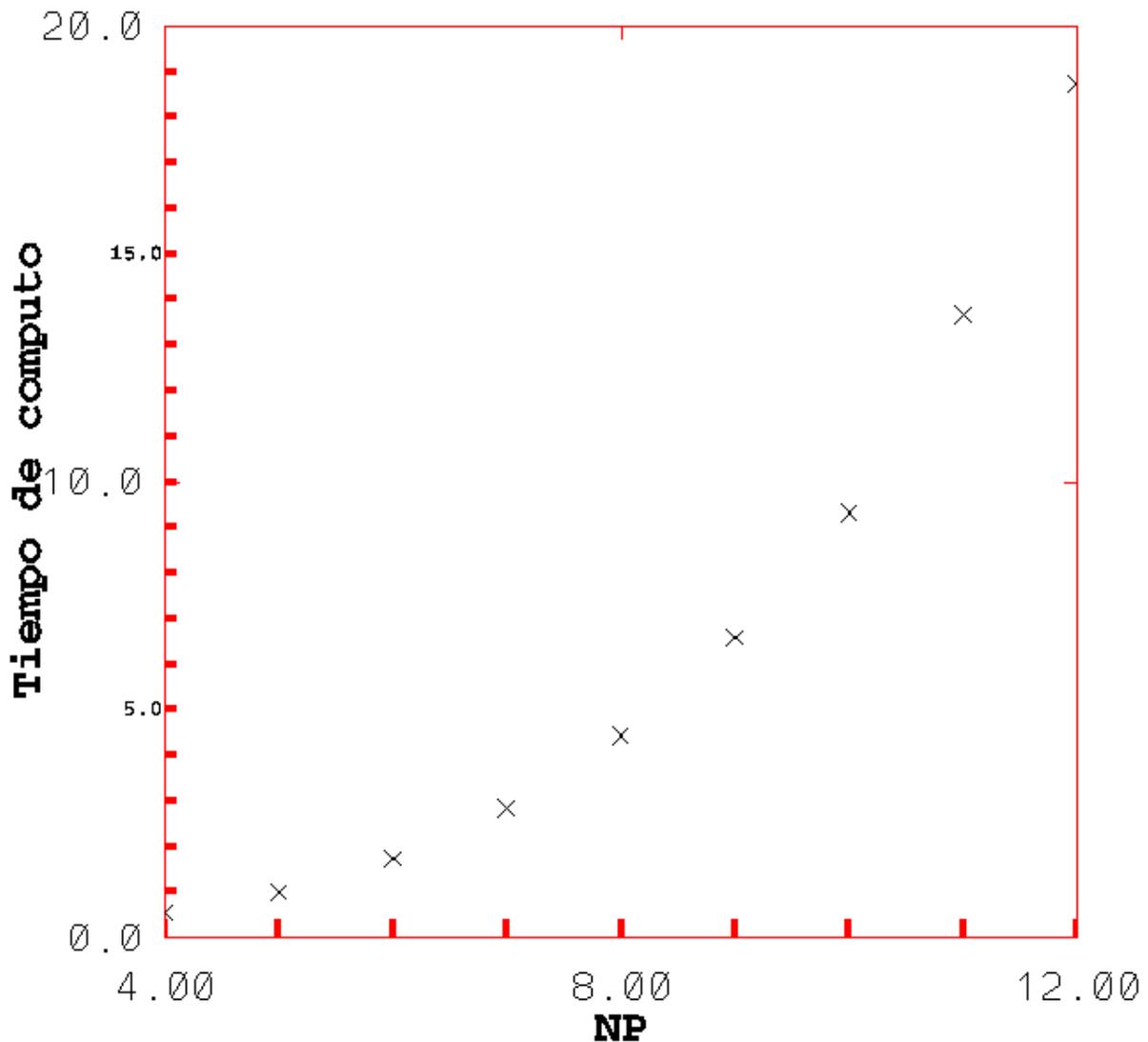


Figura 5.3: Orden del polinomio (NP) del método numérico *vs* Tiempo de computo. Se ha tomado al tiempo de cómputo cuando  $NP=5$  como base.

Considerando los resultados anteriores se decide que es útil y suficiente utilizar un orden de 5 ( $NP = 5$ ) para el polinomio GLL en los siguientes casos analizados.

## 5.2. b) Conducción de calor debido a término fuente homogéneo y diferencia de temperatura.

La descripción de este caso: para el tiempo  $t < 0$  todo el sistema se encuentra a una temperatura  $T_0 = 0$ . En un tiempo  $t = 0$  se activa un término fuente homogéneo en todo el sistema, la superficie interior del Espacio Anular 1 adquiere una temperatura uniforme  $T(r_1) = T_{int}$  y la superficie exterior del Espacio Anular 5 adquiere una temperatura uniforme  $T(r_6) = T_{ext}$ . Se impone que  $T_{int} > T_{ext}$ . Para un tiempo  $t > 0$  las condiciones de frontera se mantienen y la magnitud del término fuente permanece constante en el tiempo. Bajo estas condiciones sucede transferencia de calor unidimensional en la dirección radial.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) + \frac{e_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.15)$$

Se puede obtener la solución analítica de la parte estacionaria de este caso de transferencia de calor unidimensional con término fuente homogéneo en una región anular esférica resolviendo la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\kappa}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) + e_g = 0$$

puesto que la tasa de generación de calor es espacialmente uniforme e independiente del tiempo, ésta es una ecuación diferencial homogénea que se puede resolver de forma similar a la ecuación diferencial del caso a). Con el método de variables separables, se obtiene la solución explícita

$$T(r) = -\frac{r^2}{6\kappa} e_g - \frac{c_1}{r} + c_2$$

aplicamos la condiciones de frontera

$$\text{en } r = r_1 = r_{int} \quad T = T_{int}$$

$$\text{en } r = r_6 = r_{ext} \quad T = T_{ext}$$

para obtener las constantes de integración que utilizamos en la solución explícita para llegar a la solución particular

$$T(r) = T_{int} + \frac{e_g}{6\kappa} (r_{int}^2 - r^2) + \frac{(r - r_{int}) r_{ext}}{(r_{ext} - r_{int}) r} \left[ (T_{ext} - T_{int}) + \frac{e_g}{6\kappa} (r_{ext}^2 - r_{int}^2) \right] \quad (5.16)$$

5.2. B) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO A TÉRMINO FUENTE HOMOGÉNEO Y DIFERENCIA DE TEMPERATURA.

De forma similar al caso anterior, las ecuaciones 5.15 y 5.16 son dimensionales con unidades en Kelvin, pero la solución analítica 5.16 se grafica (ver fig. 5.4) de forma adimensional considerando los mismos parámetros adimensionales de radio y tiempo, sin embargo, el parámetro de temperatura adimensional toma en cuenta la presencia de una fuente de calor [4], esto es:

Temperatura adimensional

$$T^* = \frac{T - T_{ext}}{\frac{e g r_{ext}^2}{6k}}$$

Empleando dichos parámetros adimensionales en las ecuaciones dimensionales 5.15 y 5.16 podemos escribirlas como (ver Apéndice B)

$$\frac{1}{(\eta + r^*(1 - \eta))^2} \frac{\partial}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \left( (\eta + r^*(1 - \eta))^2 \frac{\partial T^*}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \right) + 6 = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (5.17)$$

$$T^* = T_1^* \frac{\eta(1 - r^*)}{\eta + r^*(1 - \eta)} - (\eta + r^*(1 - \eta))^2 + \frac{\eta^3 + r^*(1 - \eta^3)}{\eta + r^*(1 - \eta)} \quad (5.18)$$

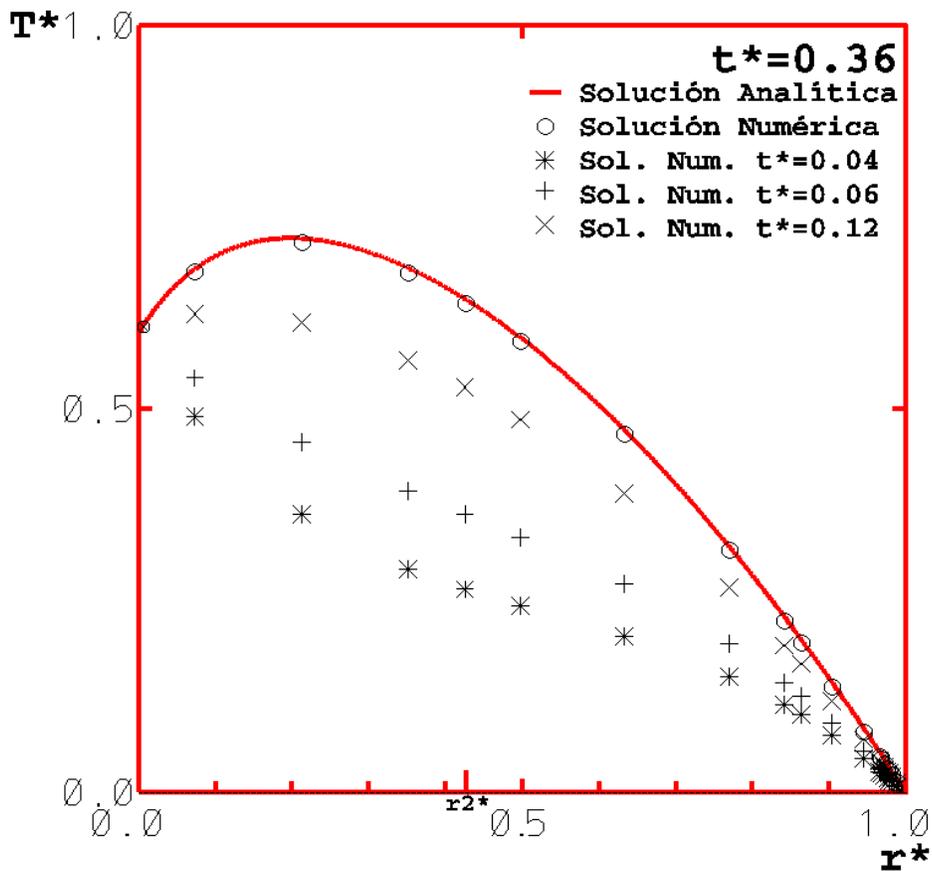


Figura 5.4: Desarrollo transitorio de la temperatura en distintos instantes de tiempo  $t^*$  y comparación de la solución numérica contra la solución analítica en estado estacionario,  $\%error(r^* = 0,42) = 0.75$ .

### 5.3. c) Conducción de calor debido sólo a término fuente homogéneo.

Este caso es similar al anterior sólo que las temperaturas adquiridas por la superficie interior del Espacio Anular 1 y la superficie exterior del Espacio Anular 5 son iguales y de valor cero, es decir,  $T_{int} = T_{ext} = 0$ . Estas condiciones de frontera se mantienen en todo el tiempo  $t > 0$ . Las demás características del caso b) se mantienen.

El campo de temperaturas en la parte estacionaria se describe analíticamente por la ecuación 5.16 de forma dimensional o por la ecuación 5.18 de forma adimensional, aunque se tiene que  $T_1^* = 0$  por lo que

$$T^* = -(\eta + r^*(1 - \eta))^2 + \frac{\eta^3 + r^*(1 - \eta^3)}{\eta + r^*(1 - \eta)} \quad (5.19)$$

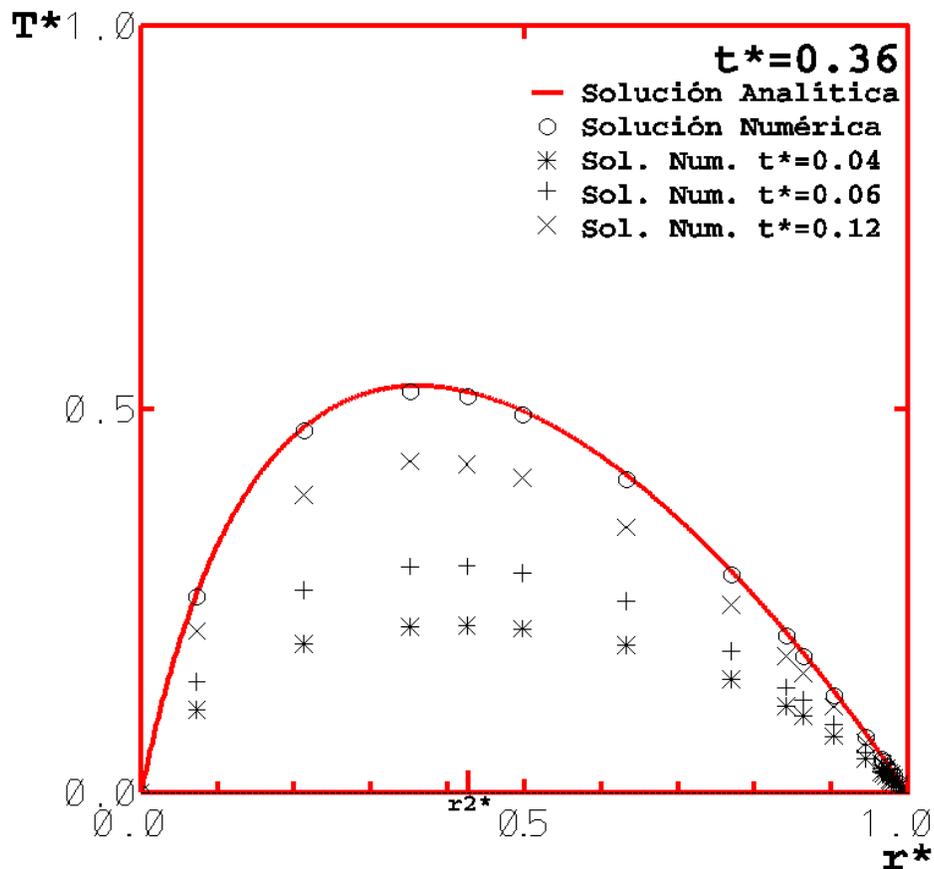


Figura 5.5: Desarrollo transitorio de la temperatura en distintos instantes de tiempo  $t^*$  y comparación de la solución numérica contra la solución analítica en estado estacionario,  $\%error(r^* = 0,42) = 0,97$ .

### 5.3. C) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO SÓLO A TÉRMINO FUENTE HOMOGÉNEO.

---

Como se mencionó en el capítulo 1, la alta complejidad matemática para obtener una solución analítica o incluso aún la imposibilidad de conseguirla provoca que, en la práctica, las soluciones numéricas sean preferidas.

En los casos a), b) y c) presentados anteriormente se disponía de soluciones analíticas que fueron usadas para evaluar la solución numérica arrojada por el método de los elementos espectrales y se concluyó que la precisión del método era satisfactoria para el grado de discretización de la malla y el orden del polinomio GLL utilizados.

A continuación se presenta un caso d) con 2 variantes y un caso e) con 4 variantes de los cuales no se dispone de solución analítica pero se muestran para hacer evidente la utilidad del método numérico empleado, esto es, se resuelven casos de transferencia de calor por conducción en una región anular esférica multicapa con términos fuente no homogéneos y constantes en el tiempo, que puede representar el fenómeno de interés en un elemento de combustible nuclear esférico (Pebble), o bien servir como parte de un análisis térmico de la transferencia de calor del núcleo interno de la Tierra hacia la atmósfera pasando por el manto y la corteza terrestre considerando la variación espacial de sus propiedades.

El realizar un análisis de conducción de calor considerando términos fuente no homogéneos es una característica particular de este trabajo de tesis.

En los siguientes casos se muestra la conducción de calor en la región anular multicapa considerando variaciones en la colocación de los términos fuente. Debe notarse que los términos fuente no son no-homogéneos de forma puntual sino que son homogéneos en cada macroelemento y pueden ser diferentes en cada macroelemento o pueden no existir en algunos macroelementos en cada simulación. En otras palabras, los términos fuentes no son homogéneos en todo el dominio de solución pero sí lo son en cada dominio elemental  $\Omega^e$ .

En el caso d) se considera un sistema con términos fuentes no homogéneos que llevan a una conducción de calor unidimensional en la dirección radial, y el caso e) presenta un sistema con términos fuente no homogéneos que llevan a una conducción de calor tridimensional.

### 5.4. d) Conducción de calor debido sólo a término fuente no homogéneo, caso unidimensional.

En este caso para el tiempo  $t < 0$  todo el sistema se encuentra a una temperatura  $T_0 = 0$ . En un tiempo  $t = 0$  se activa un término fuente uniformemente distribuido sólo en el Espacio Anular 1, las temperaturas adquiridas por la superficie interior del Espacio Anular 1 y la superficie exterior del Espacio Anular 5 son iguales y de valor cero, es decir,  $T_{int} = T_{ext} = 0$ . Para un tiempo  $t > 0$  las condiciones de frontera se mantienen y la magnitud del término fuente permanece constante en el tiempo. Este caso también se trata de transferencia de calor unidimensional en la dirección radial. En la figura 5.6 se muestran los resultados obtenidos.

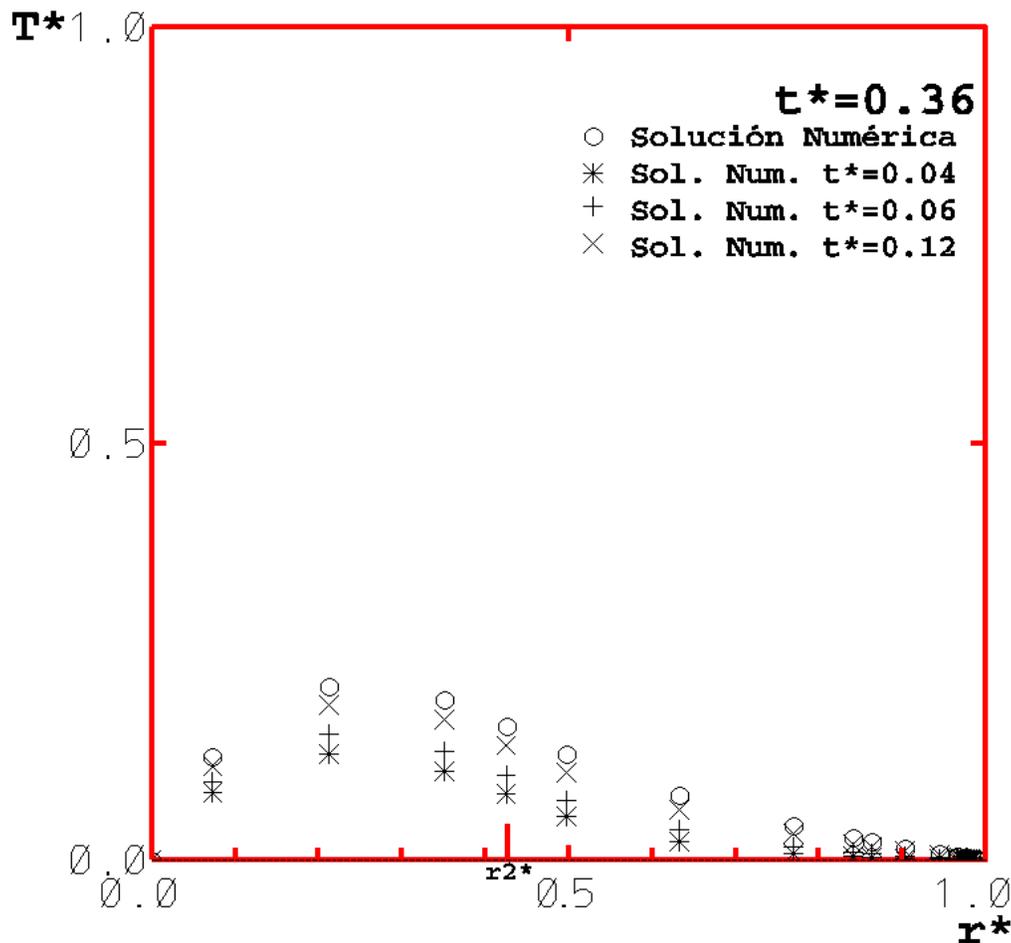


Figura 5.6: Desarrollo de la temperatura en la dirección radial, se ha indicado el radio  $r_2^*$  que junto con el radio  $r_1^*$  delimitan el Espacio Anular 1 donde se ha activado el término fuente. No se cuenta con solución analítica para comparar contra la solución numérica.

5.4. D) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO SÓLO A TÉRMINO FUENTE NO HOMOGÉNEO, CASO UNIDIMENSIONAL.

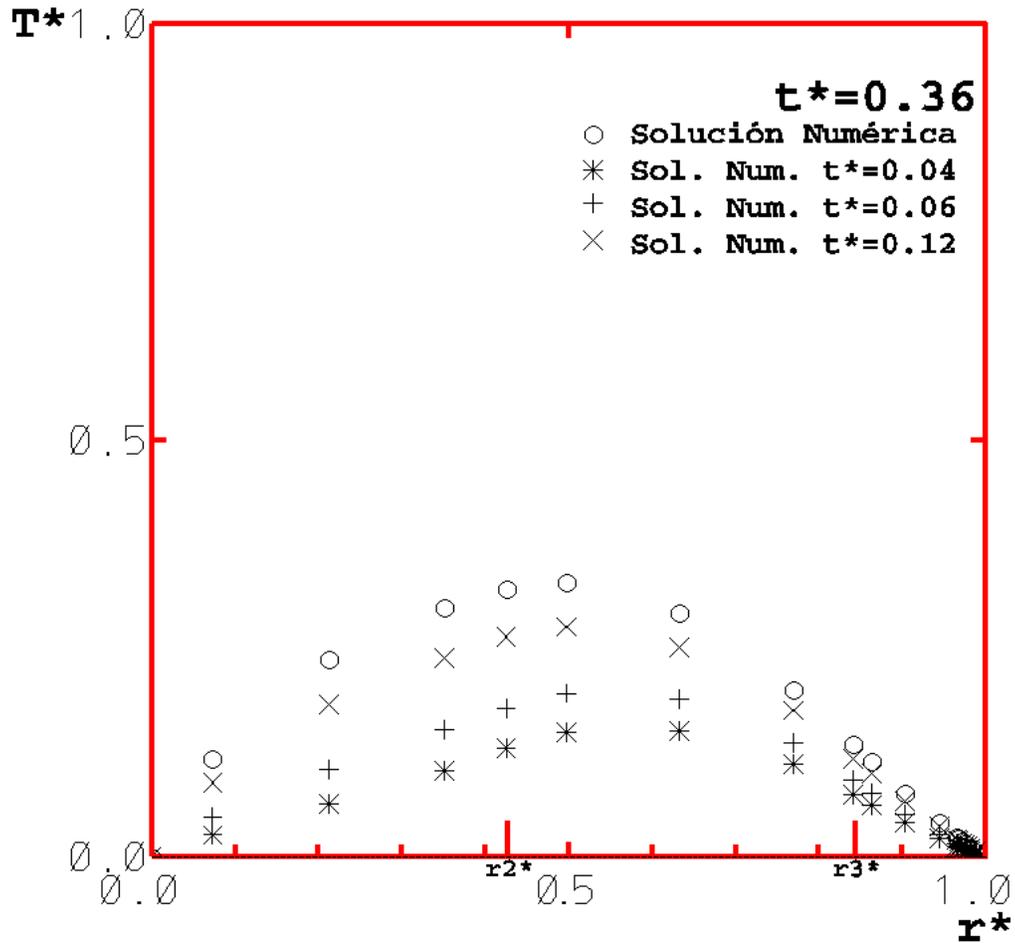
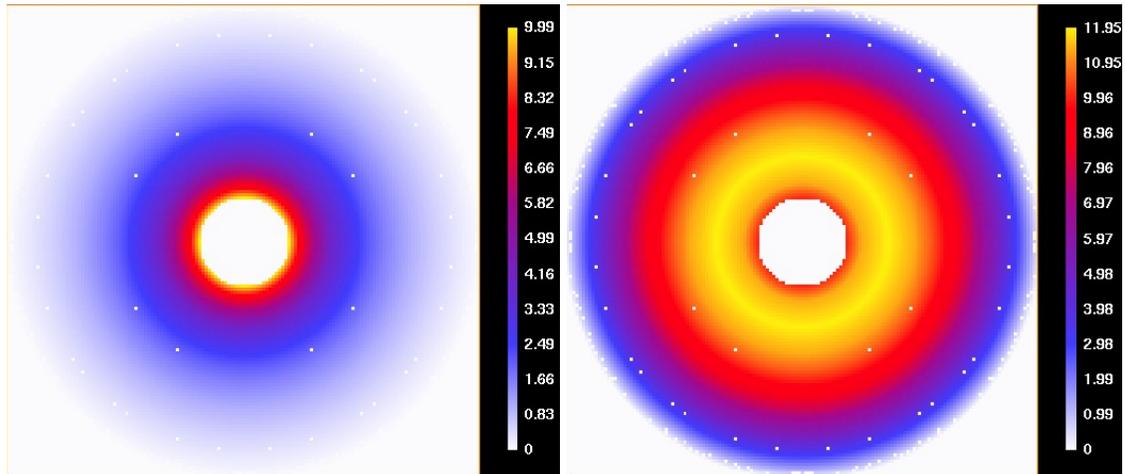


Figura 5.7: Desarrollo de la temperatura en la dirección radial, se han indicado los radios  $r_2^*$  y  $r_3^*$  que delimitan el Espacio Anular 2 donde se ha activado el término fuente. No se cuenta con solución analítica para comparar contra la solución numérica.

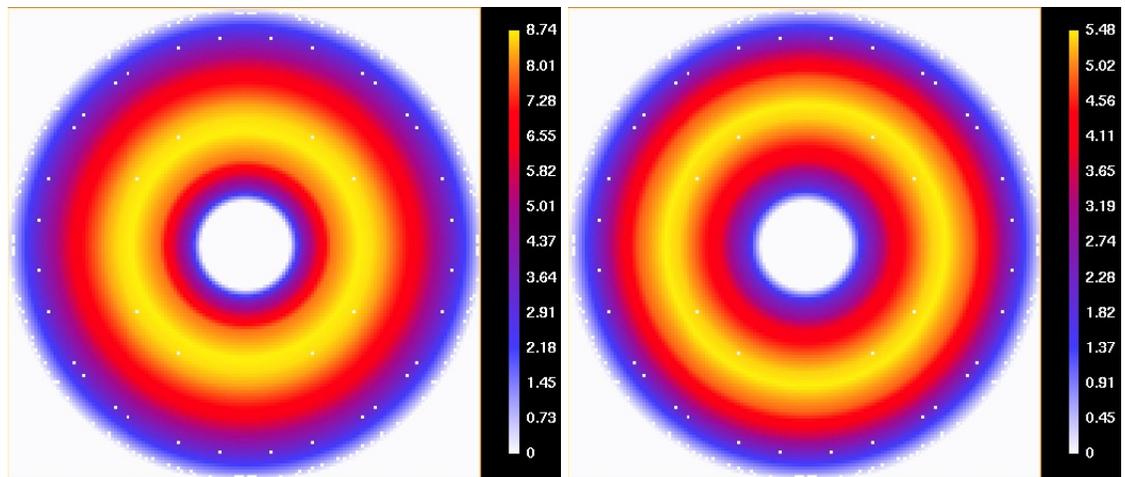
La figura 5.7 corresponde a una ligera modificación del caso, a saber, en lugar de activar el término fuente en el Espacio Anular 1 se activa en el Espacio Anular 2 delimitado por los radios  $r_2^*$  y  $r_3^*$  indicados. Todas las demás condiciones se mantienen.

En la figura 5.8 se muestran los isocontornos bidimensionales de temperatura de los casos a), b) c) y la segunda variante del caso d) en estado estacionario donde se puede apreciar el efecto de activar un término fuente en todo el sistema, o bien, en algunos espacios anulares particulares en combinación con distintas condiciones de frontera.

5.4. D) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO SÓLO A TÉRMINO FUENTE NO HOMOGÉNEO, CASO UNIDIMENSIONAL.



(a) Caso a. Diferencia de temperatura  $T_{int} > T_{ext}$ . (b) Caso b. Término fuente en todo el sistema y  $T_{int} > T_{ext}$ .



(c) Caso c. Término fuente en todo el sistema y  $T_{int} = T_{ext} = 0$ . (d) Segunda variante del caso d. Término fuente en el segundo espacio anular y  $T_{int} = T_{ext} = 0$ .

Figura 5.8: Distintas combinaciones de aplicar términos fuente y diferencia de temperatura. Las circunferencias punteadas indican el límite de cada espacio anular.

En la figura 5.8: (a,b) y (c,d) tienen las mismas condiciones de frontera. En (a,b) se tiene o no un término fuente en todo el sistema. En (c,d) se activa un término fuente en todo el sistema o en una parte de éste.

La segunda variante del caso d) corresponde a una forma similar al modelo analizado por Jain (2010) (capítulo 1) sólo que aquí el sistema anular esférico cuenta con 5 capas y las condiciones de frontera en las superficies interior  $r_1$  y exterior  $r_6$  son del primer tipo, ver figura 5.9.

5.4. D) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO SÓLO A TÉRMINO FUENTE NO HOMOGÉNEO, CASO UNIDIMENSIONAL.

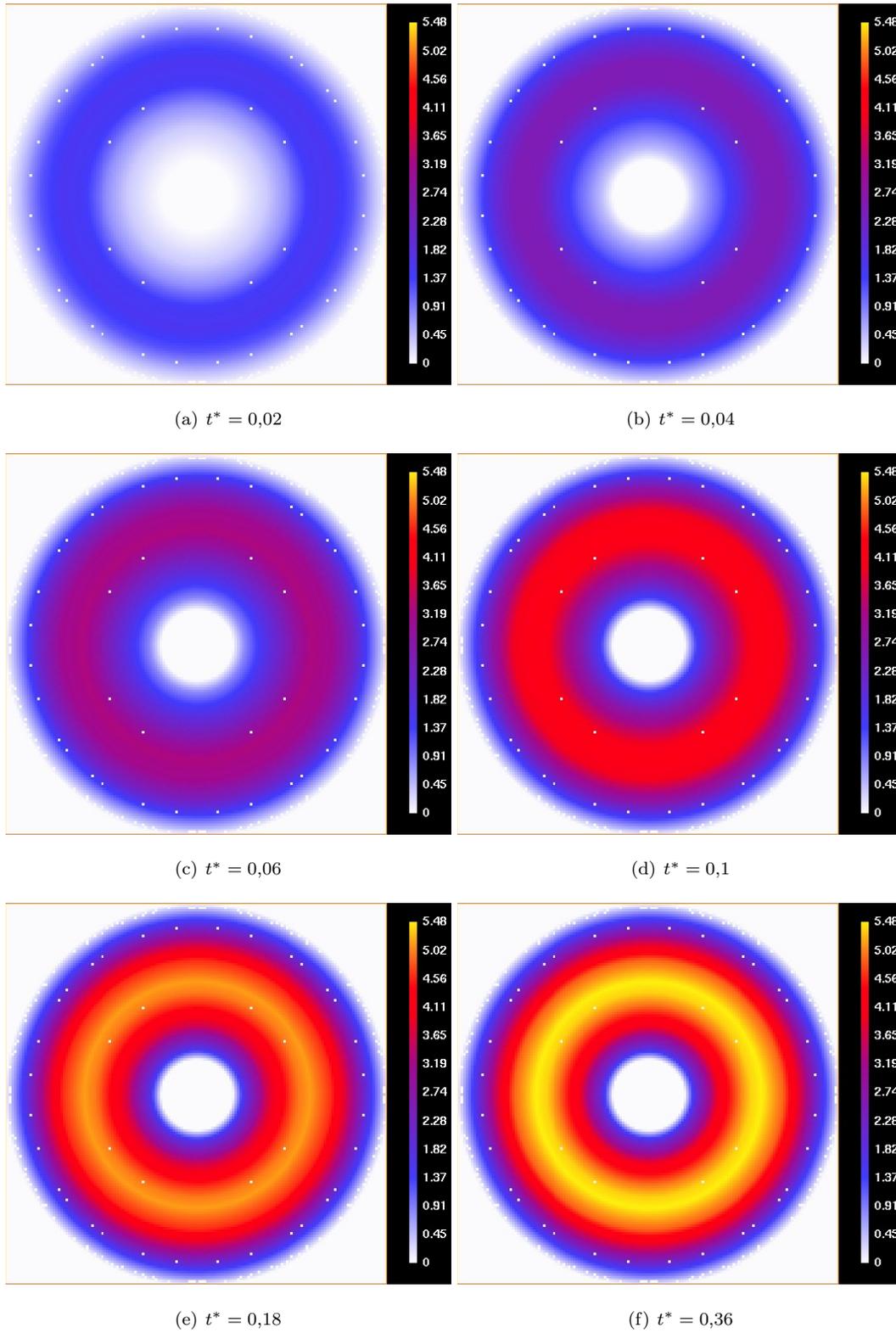
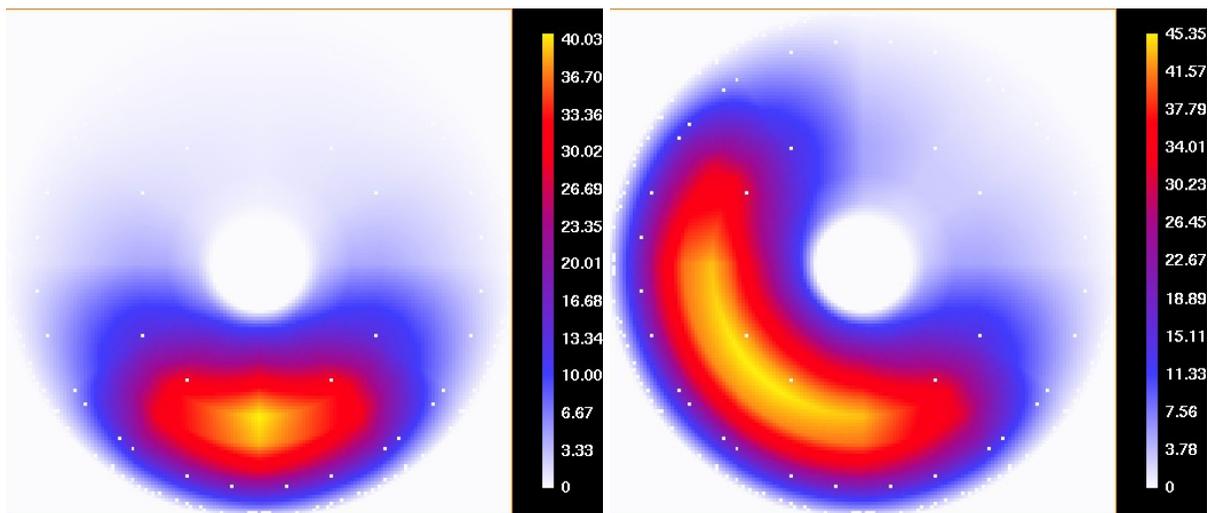


Figura 5.9: Desarrollo transitorio de la segunda variante del caso d).  $T_{int} = T_{ext} = 0$ . Las circunferencias punteadas indican el límite de cada espacio anular.

### 5.5. e) Conducción de calor debido sólo a términos fuente no homogéneos, caso tridimensional.

En este caso se tiene: para el tiempo  $t < 0$  todo el sistema se encuentra a una temperatura  $T_0 = 0$ . En un tiempo  $t = 0$  se activan términos fuentes en los macroelementos (1), (1 y 2), (1, 2 y 3) y (1 y 3) del Espacio Anular 2, cada uno corresponde a una variante del caso. Las temperaturas adquiridas por la superficie interior del Espacio Anular 1 y la superficie exterior del Espacio Anular 5 son iguales y de valor cero, es decir,  $T_{int} = T_{ext} = 0$ . Para un tiempo  $t > 0$  las condiciones de frontera se mantienen y las magnitudes de los términos fuente permanecen constantes en el tiempo y de igual magnitud.

En la primer variante se tiene sólo un término fuente en la segunda capa, en la segunda variante se activa otro término fuente contiguo al del variante anterior.

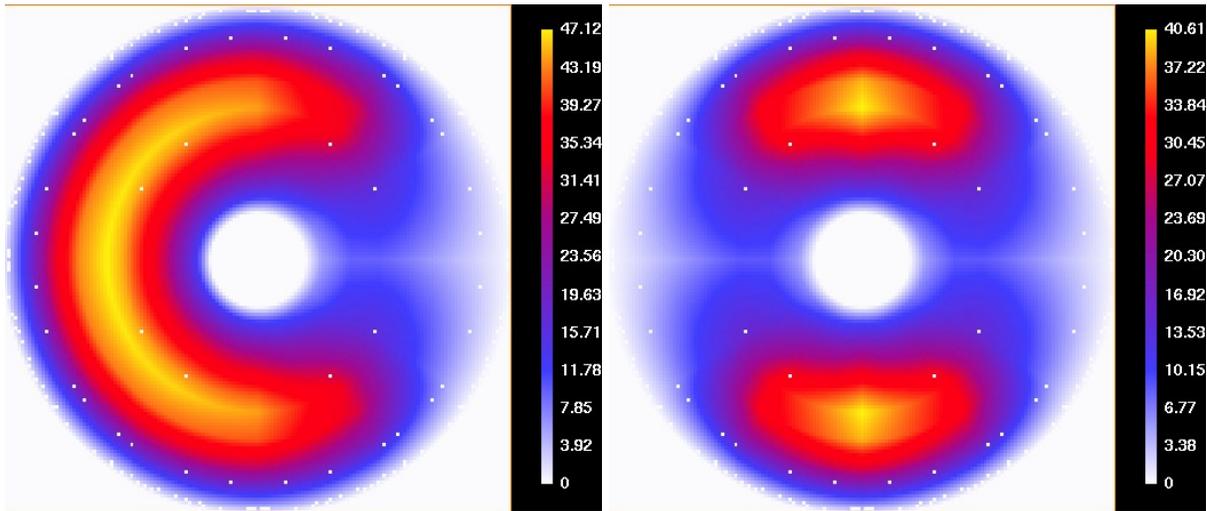


(a) Variante uno: Término fuente activado en el macroelemento 1. (b) Variante dos: Términos fuente activados en los macroelementos 1 y 2.

Figura 5.10: Se presentan los isocontornos de temperatura en los cinco espacios anulares. Figuras mostradas cuando se ha alcanzado el estado estacionario.  $T(r_{int}) = T(r_{ext}) = 0$ . Las circunferencias punteadas indican el límite de cada espacio anular.

5.5. E) CONDUCCIÓN DE CALOR DEBIDO SÓLO A TÉRMINOS FUENTE NO HOMOGÉNEOS, CASO TRIDIMENSIONAL.

En la tercer variante se activa otro término fuente contiguo a los dos términos del caso anterior y en la cuarta variante se activan dos términos fuente en posición opuesta dentro de la segunda capa, esto es, están en "polos opuestos".



(a) Variante tres: Términos fuente activados en los macroelementos 1, 2 y 3.

(b) Variante cuatro: Términos fuente activados en los macroelementos 1 y 3.

Figura 5.11: Se presentan los isocontornos de temperatura en los cinco espacios anulares. Figuras mostradas cuando se ha alcanzado el estado estacionario.  $T(r_{int}) = T(r_{ext}) = 0$ . Las circunferencias punteadas indican el límite de cada espacio anular.

Las variantes dos y tres muestran el comportamiento esperado, esto es, al agregar un término fuente contiguo a otro(s) el campo de temperatura se extiende en la región donde se activó el nuevo término fuente. La influencia del nuevo término fuente también se ve reflejada en el incremento de la magnitud de la temperatura máxima alcanzada, teniendo presente que los términos fuente tienen la misma magnitud.

En la variante cuatro podemos ver una perfecta simetría que indica que el método numérico está trabajando bien con términos fuente independientemente de su posición en el sistema.

No se encuentran anomalías en las simulaciones, anomalías como incrementos de temperatura donde no deberían de existir, es decir, donde no existe término fuente o debido a condiciones de frontera o aún debido a alguna heterogeneidad del material.

Con base en los resultados mostrados en las figuras 5.10 y 5.11 podemos decir que el método de los elementos espectrales empleado funciona bien cuando se quiere estudiar el efecto de términos fuente en distintos elementos del sistema anular esférico.

## Capítulo 6

# Conclusiones

El uso del algoritmo de la esfera cubada fue apropiado para discretizar el dominio anular esférico y manipularlo en coordenadas cartesianas evitando así el “problema del polo” que se presenta comúnmente al utilizar coordenadas esféricas. Aunque existen distintas formas para generar la esfera cubada, en este trabajo se utilizó la proyección gnomónica equidistante que produce una malla cuasi-uniforme útil para la colocación de los puntos del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre. Observe que como los puntos de la malla sirven de base para colocar los puntos del polinomio GLL en el dominio estándar, también se pudo haber generado la malla con otros procedimientos, como la proyección gnomónica equiangular, y se llegaría a obtener resultados prácticamente iguales.

Con base en los resultados obtenidos para el caso a) en relación a los distintos grados de polinomio (NP=5, 7, 9 y 11) utilizados, se eligió usar en los demás casos presentados un grado de polinomio de 5 porque con este orden polinomial se obtuvo el menor error numérico con respecto a la solución analítica. Esta situación va en contra de la idea de la *convergencia espectral* o exponencial de los métodos espectrales pero no se obtiene aquí debido a la relación de aspecto de las superficies esféricas que forman el espacio anular, su grado de discretización y a la característica de dispersión de puntos del polinomio utilizado, como se mostró, el polinomio GLL tiende a agrupar los puntos en los extremos conforme aumenta el orden polinomial (ver figura 4.8).

Emplear el método de los elementos espectrales aunado a la esfera cubada es útil para resolver la ecuación general de conducción de calor en coordenadas cartesianas en geometrías esféricas anulares multicapas donde la presencia de términos fuente homogéneos o no homogéneos conducen a situaciones de conducción de calor unidimensional, bidimensional o tridimensional para los cuales puede o no contarse con soluciones analíticas.

## Capítulo 7

# Trabajo a futuro

Aunque la discretización del dominio utilizada en este trabajo es suficiente para realizar el análisis de la conducción de calor en geometrías esféricas anulares multicapas no es útil si se desea realizar un análisis dinámico de fluidos, esto es, si algún ánulo que forma parte de la geometría está representando un fluido este grado de aproximación tipo  $h$  no permite determinar características del fluido como son velocidad y presión.

Además, las funciones de aproximación utilizadas, que son los polinomios Gauss-Lobatto-Legendre, tienen la inconveniencia de que agrupan los puntos en los extremos de los dominios elementales, provocando que no exista suficiente información al centro de los elementos que permitan una continuidad en el cálculo las de propiedades del fluido.

Por lo que, a modo de trabajo a futuro, queda resolver tales problemas realizando por ejemplo una discretización más exhaustiva de la malla, esto es, disminuir el tamaño característico  $h$  de los elementos que implica que aumente el número de los mismos, o bien cambiar las funciones de ensayo por alguna otra (puede ser otro conjunto de polinomios ortogonales de la familia de polinomios de Jacobi) que no presente la característica mencionada de los polinomios Gauss-Lobatto-Legendre, aunque se estaría perdiendo ventaja en los que respecta a la integración numérica.

Con el fin de mejorar el análisis de conducción de calor en un elemento de combustible nuclear esférico se propone considerar que los términos fuente varíen en el tiempo (de forma decreciente en magnitud) pues con ello se estaría representado el fenómeno de consumo o agotamiento del combustible nuclear.

## Apéndice A

# Ecuación general de conducción de calor en coordenadas esféricas

Para desarrollar la ecuación de difusión de calor en coordenadas esféricas ( $r > 0$ ;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ;  $0 \leq \phi \leq \pi$ ) consideraremos un elemento de volumen esférico y realizemos un balance de energía tomando en cuenta, para cada dirección, la cantidad de calor que atraviesa la superficie entrando y saliendo del elemento, la razón de generación de calor en el elemento y la razón de cambio del contenido de energía del elemento.

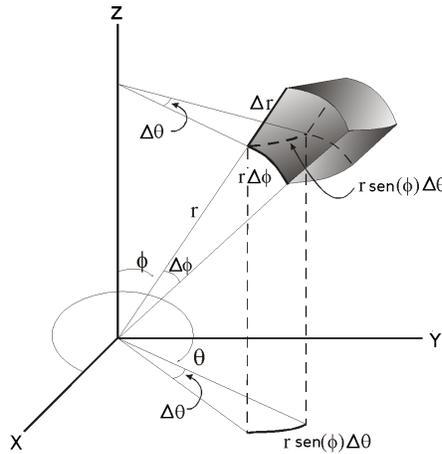


Figura A.1: Elemento de volumen esférico con las direcciones, magnitudes y ángulos involucrados en el análisis. El área de las caras del elemento y su volumen:  $A_r = r^2 \text{sen } \phi \Delta\phi \Delta\theta$ ,  $A_\theta = r \Delta\phi \Delta r$ ,  $A_\phi = r \text{sen } \phi \Delta r \Delta\theta$ ,  $\Delta V = r^2 \text{sen } \phi \Delta r \Delta\theta \Delta\phi$

$$Q_r + Q_\theta + Q_\phi - Q_{r+\Delta r} - Q_{\theta+\Delta\theta} - Q_{\phi+\Delta\phi} + e_g r^2 \text{sen } \phi \Delta r \Delta\theta \Delta\phi = \frac{E_{t+\Delta t} - E_t}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

considerando que  $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_{t+\Delta t} - E_t}{\Delta t} = \frac{\Delta m c_p (T_{t+\Delta t})}{\Delta t}$  y que  $\Delta m = \rho \Delta V$ , acomodamos y dividimos ambos lados de la ecuación entre  $\Delta V$

$$-\frac{Q_{r+\Delta r} - Q_r}{\Delta r} \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi} - \frac{Q_{\theta+\Delta \theta} - Q_\theta}{\Delta \theta} \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta r \Delta \phi} - \frac{Q_{\phi+\Delta \phi} - Q_\phi}{\Delta \phi} \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta r \Delta \theta} + e_g = \frac{\rho c_p (T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (\text{A.2})$$

Antes de continuar debemos de conocer las expresiones para la cantidad de calor que atraviesa la superficie del cuerpo por unidad de tiempo para cada dirección del sistema coordenado esférico, utilizado la Ley de Fourier de conducción de calor

dirección radial	$Q_r = -k r^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi \frac{\partial T}{\partial r}$
dirección ángulo polar	$Q_\theta = -\frac{k \Delta r \Delta \phi}{\sin \phi} \frac{\partial T}{\partial \theta}$
dirección ángulo azimutal	$Q_\phi = -k \sin \phi \Delta r \Delta \theta \frac{\partial T}{\partial \phi}$

Ahora usamos la definición de derivada y estas expresiones en la ec. A.2

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{Q_{r+\Delta r} - Q_r}{\Delta r} \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi} = \frac{\partial}{\partial r} Q_r \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{Q_{\theta+\Delta \theta} - Q_\theta}{\Delta \theta} \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta r \Delta \phi} = \frac{\partial}{\partial \theta} Q_\theta \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta r \Delta \phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{Q_{\phi+\Delta \phi} - Q_\phi}{\Delta \phi} \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta r \Delta \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} Q_\phi \frac{1}{r^2 \sin \phi \Delta r \Delta \theta} = -\frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

con estos resultados la ecuación queda como

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + e_g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

si la conductividad térmica  $k = cte$  y la difusividad térmica  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{e_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

Ésta es la ecuación general de conducción de calor, con término fuente, en el sistema coordenado esférico.

## Apéndice B

# Adimensionalización

Para obtener la solución analítica (5.10) de forma adimensional se puede proceder de dos formas, una forma es adimensionalizar la misma solución analítica (5.10) y la otra es adimensionalizar la ecuación diferencial (5.5), realizar las consideraciones pertinentes (estado estacionario) y resolverla en esta forma hasta obtener la solución analítica adimensional.

Consideremos los parámetros:

Temperatura adimensional

$$T^* = \frac{T - T_{ext}}{T_{int} - T_{ext}}$$

Radio adimensional

$$r^* = \frac{r - r_{int}}{r_{ext} - r_{int}}$$

Tiempo adimensional

$$t^* = \frac{\alpha t}{r_{ext}^2}$$

Relación de radios

$$\eta = \frac{r_{int}}{r_{ext}}$$

Serán útiles las variables dimensionales despejadas en función de los parámetros adimensionales

$$T = T^* (T_{int} - T_{ext}) + T_{ext} \tag{B.1}$$

$$r = r^* (r_{ext} - r_{int}) + r_{int} \tag{B.2}$$

$$t = \frac{t^* r_{ext}^2}{\alpha} \tag{B.3}$$

Adimensionalizando la solución analítica dimensional (5.10)

$$T(r) = \frac{1}{r} \frac{T_{ext} - T_{int}}{\frac{1}{r_{ext}} - \frac{1}{r_{int}}} + T_{ext} - \frac{T_{ext} - T_{int}}{\frac{r_{int}}{r_{ext}} - 1} \quad (\text{B.4})$$

$$T = (T_{ext} - T_{int}) \left[ \frac{1}{r} \frac{1}{\left(\frac{1}{r_{ext}} - \frac{1}{r_{int}}\right)} - \frac{1}{\frac{r_{int}}{r_{ext}} - 1} \right]$$

$$T = (T_{ext} - T_{int}) \frac{r_{ext}(-r_{int} + r)}{r(-r_{int} + r_{ext})} + T_{int}$$

aquí empleamos (B.1) y despejamos la temperatura adimensional  $T^*$

$$T^*(T_{int} - T_{ext}) + T_{ext} = (T_{ext} - T_{int}) \frac{r_{ext}(-r_{int} + r)}{r(-r_{int} + r_{ext})} + T_{int} \quad (\text{B.5})$$

$$T^* = -\frac{(-r_{ext} + r)r_{int}}{r(-r_{int} + r_{ext})}$$

utilizamos (B.2) para que (B.5) quede en términos del radio adimensional  $r^*$

$$T^* = \frac{r_{int}(1 - r^*)}{r_{int} + r^*(r_{ext} - r_{int})}$$

entonces, utilizamos la relación de radios  $\eta$  de la forma

$$T^* = \frac{r_{int}(1 - r^*)}{r_{int} + r^* \left( \frac{r_{int} - r_{int}\eta}{\eta} \right)}$$

$$\boxed{T^* = \frac{\eta(1 - r^*)}{\eta + r^*(1 - \eta)}} \quad (\text{B.6})$$

(B.6) es la solución analítica adimensional. Resultado que se puede comprobar resolviendo la ecuación diferencial (5.5) de forma adimensional

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.7})$$

Utilizamos la relación de radios en (B.2)

$$r = (\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext} \quad (\text{B.8})$$

(B.8) junto con (B.1) y (B.3) en (B.7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext}} \frac{\partial}{\partial ((\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext})} \left( ((\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext})^2 \frac{\partial (T^*(T_{int} - T_{ext}) + T_{ext})}{\partial ((\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext})} \right) \\ & = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial (T^*(T_{int} - T_{ext}) + T_{ext})}{\partial \left( \frac{r_{ext}^2}{\alpha} \right)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(\eta + r^*(1 - \eta))^2} \frac{\partial}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \left( (\eta + r^*(1 - \eta))^2 \frac{\partial T^*}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \right) = \frac{\partial T^*}{\partial t^*}$$

---

Para obtener la solución analítica adimensional de la parte estacionaria se resuelve la siguiente ecuación diferencial con el método de variables separables

$$\frac{1}{(\eta + r^*(1 - \eta))^2} \frac{\partial}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \left( (\eta + r^*(1 - \eta))^2 \frac{\partial T^*}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \right) = 0$$

se obtiene la solución explícita

$$T^* = -\frac{c_1}{\eta + r^*(1 - \eta)} + c_2$$

aplicando las condiciones de frontera adimensionales

$$\text{en } r = r_1 = r_{int}^* = 0 \quad T = T_{int}^* = 1$$

$$\text{en } r = r_6 = r_{ext}^* = 1 \quad T = T_{ext}^* = 0$$

obtenemos las dos constantes de integración

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\eta}{1 - \eta} \\ c_1 &= c_2 \end{aligned}$$

que utilizamos en la solución explícita para llegar a la solución particular adimensional

$$\boxed{T^* = \frac{\eta(1 - r^*)}{\eta + r^*(1 - \eta)}} \quad (\text{B.9})$$

como (B.9)=(B.6) se comprueba que se llega al mismo resultado adimensionalizando la solución analítica dimensional que resolviendo la ecuación diferencial adimensional aplicando, en ambos casos, los mismos parámetros adimensionales.

Cuando un término fuente está presente en el sistema debe ser considerado en la definición del parámetro de la temperatura adimensional

$$T^* = \frac{T - T_{ext}}{\frac{e_g r_{ext}^2}{6k}} = \frac{(T - T_{ext}) 6k}{e_g r_{ext}^2} \quad (\text{B.10})$$

la variable dimensional de temperatura en función de la temperatura adimensional

$$T = \frac{e_g r_{ext}^2 T^*}{6k} + T_{ext} \quad (\text{B.11})$$

podemos emplear (B.10), (B.2), (B.3) y la relación de radios  $\eta$  para comprobar que se llega a la misma solución si se adimensionaliza la solución dimensional (5.16) que si se resuelve la ecuación diferencial (5.15) de forma adimensional.

Adimensionalizando la solución analítica (5.16)

$$T(r) = T_{int} + \frac{e_g}{6\kappa} (r_{int}^2 - r^2) + \frac{(r - r_{int}) r_{ext}}{(r_{ext} - r_{int}) r} \left[ (T_{ext} - T_{int}) + \frac{e_g}{6\kappa} (r_{ext}^2 - r_{int}^2) \right] \quad (\text{B.12})$$

si utilizamos (B.8) en (B.12) y esto a su vez en (B.10)

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{6k(T_{int} - T_{ext})}{e_g r_{ext}^2} + \frac{6k}{e_g r_{ext}^2} \frac{e_g}{6k} \left( r_{ext}^2 \eta^2 - (\eta + r^*(1 - \eta))^2 r_{ext}^2 \right) \\ &\quad + \frac{6k}{e_g r_{ext}^2} \frac{[\eta + r^*(1 - \eta) r_{ext} - r_{ext} \eta] r_{ext}}{(r_{ext} - r_{ext} \eta) (\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext}} \left[ (T_{ext} - T_{int}) + \frac{e_g}{6k} (r_{ext}^2 - r_{ext}^2 \eta^2) \right] \\ T^* &= \frac{6k(T_{int} - T_{ext})}{e_g r_{ext}^2} \frac{\eta(1 - r^*)}{\eta + r^*(1 - \eta)} - (\eta + r^*(1 - \eta))^2 + \frac{\eta^3 + r^*(1 - \eta^3)}{\eta + r^*(1 - \eta)} \end{aligned}$$

donde reconocemos el término  $\frac{6k(T_{int} - T_{ext})}{e_g r_{ext}^2} = T_{int}^*$  como un término constante que ya es adimensional, así

$$\boxed{T^* = T_{int}^* \frac{\eta(1 - r^*)}{\eta + r^*(1 - \eta)} - (\eta + r^*(1 - \eta))^2 + \frac{\eta^3 + r^*(1 - \eta^3)}{\eta + r^*(1 - \eta)}} \quad (\text{B.13})$$

Ahora resolvemos la ecuación diferencial (5.15) en forma adimensional

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right) + \frac{e_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{B.14})$$

(B.8), (B.10) y (B.3) en (B.14)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{((\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext})^2} \frac{\partial}{\partial ((\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext})} \left( ((\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext})^2 \frac{\partial \left( \frac{e_g r_{ext} T^*}{6k} + T_{ext} \right)}{\partial ((\eta + r^*(1 - \eta)) r_{ext})} \right) + \frac{e_g}{k} \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \left( \frac{e_g r_{ext}^2 T^*}{6k} + T_{ext} \right)}{\partial \left( \frac{r_{ext}^2 t^*}{\alpha} \right)} \\ &\frac{1}{(\eta + r^*(1 - \eta))^2} \frac{\partial}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \left( (\eta + r^*(1 - \eta))^2 \frac{\partial T^*}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \right) + 6 = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

Obtenemos la solución adimensional de la parte estacionaria resolviendo la siguiente ecuación diferencial con el método de variables separables

$$\frac{1}{(\eta + r^*(1 - \eta))^2} \frac{\partial}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \left( (\eta + r^*(1 - \eta))^2 \frac{\partial T^*}{\partial (\eta + r^*(1 - \eta))} \right) + 6 = 0 \quad (\text{B.16})$$

llegamos a la solución explícita

$$T^* = -(\eta + r^*(1 - \eta))^2 - \frac{c_1}{\eta + r^*(1 - \eta)} + c_2 \quad (\text{B.17})$$

---

aplicamos las condiciones de frontera adimensionales

$$\begin{aligned} \text{en } r = r_1 = r_{int}^* = 0 \quad T = T_{int}^* &= \frac{6k(T_{int} - T_{ext})}{e_g r_{ext}^2} \\ \text{en } r = r_6 = r_{ext}^* = 1 \quad T = T_{ext}^* &= 0 \end{aligned}$$

para obtener las dos constantes de integración

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{e_g r_{ext}^2 \eta - (T_{int} - T_{ext}) 6k\eta - e_g r_{ext}^2 \eta^3}{e_g r_{ext}^2 (1 - \eta)} \\ c_2 &= \frac{e_g r_{ext}^2 - (T_{int} - T_{ext}) 6k\eta - e_g r_{ext}^2 \eta^3}{e_g r_{ext}^2 (1 - \eta)} \end{aligned}$$

que utilizamos en la solución explícita para llegar a la solución particular adimensional

$$\boxed{T^* = T_{int}^* \frac{\eta(1 - r^*)}{\eta + r^*(1 - \eta)} - (\eta + r^*(1 - \eta))^2 + \frac{\eta^3 + r^*(1 - \eta^3)}{\eta + r^*(1 - \eta)}} \quad (\text{B.18})$$

donde se utilizó que  $T_{int}^* = \frac{6k(T_{int} - T_{ext})}{e_g r_{ext}^2}$

Como (B.13)=(B.18) hemos comprobado que cuando está presente un término fuente en el sistema se llega al mismo resultado de adimensionalizar la solución analítica dimensional que resolviendo la ecuación diferencial adimensional.

# Bibliografía

- [1] Abdous, M.A., Barzegar, H.A., Ahmadi, P., Moallemi, N., Dincer, I. (2012). Analysis of Transient Heat Conduction in a Hollow Sphere Using Duhamel Theorem, *Int. J. Thermophys*, Vol. 33, páginas 143-159.
- [2] Abdulameer, M.A. (2014). Analytical Solution of Transient Heat Conduction through a Hollow Spherical Thermal Insulation Material of a Temperature Dependant Thermal Conductivity, *Journal of Engineering*, No.1, Vol. 20, páginas 78-97.
- [3] Al-Shamali, F.M., Heimpel, M.H., Aurnou, J.M. (2004). Varying the spherical shell geometry in rotating thermal convection, Vol. 98, No.2, páginas 153-169.
- [4] Angiano-Orozco, G., Ávila, R.R., Raza, S.S. (2013). Convective Motion and Heat Transfer in a Slow Rotating Fluid Quasi-Sphere With Uniform Heat Source and Axial Gravity, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 135, 10 páginas.
- [5] Astafieva, L.G., Prishivalko, A.P. (1998). Heating of solid aerosol particles exposed to intense optical radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 41, No.2, páginas 489-199.
- [6] Bishop, E.H., Marck, L.R., Scanlan, J.A. (1966), Heat transfer by natural convection between concentric spheres, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 9, No.7, páginas 649-652.
- [7] Cabello, A.G. (2009). Simulación numérica del flujo en el interior de esferas concéntricas con rotación y cambio de fase, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [8] Cabello, A.G. (2011). Transferencia de calor en un fluido confinado entre esferas concéntricas con rotación, Tesis de Maestría en Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [9] Carslaw, H.S., Jaeger, J.C. (1959). *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, 2a ed.
- [10] Dumas, G. (1990). Study of Spherical Couette Flow via 3-D Spectral Simulations: Large and Narrow-Gap Flows and their Transitions, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- [11] Geelhood, K., Matson, D., Senior, D., Painter, C. (2008). Spherical fuel element concept for small reactor desing, *American Nuclear Society, Nuclear Technology*, Vol. 164, No.2. páginas 255-264.

- [12] Jain, P.K., Singh, S., Rizwan-uddin. (2009). Analytical Solution to Transient Asymmetric Heat Conduction in a Multilayer Annulus, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 131, 7 páginas.
- [13] Jain, P.K., Singh, S., Rizwan-uddin. (2010). An exact analytical solution for two-dimensional, unsteady, multilayer heat conduction in spherical coordinates, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 53, páginas 2133-2142.
- [14] Kadak, A.C. (2005). A future for nuclear energy: pebble bed reactors, *Int. J. Critical Infrastructures*, Vol.1, No.4, páginas 330-345.
- [15] Karniadakis, G.E., Sherwin, S.J. (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press.
- [16] Nair, R.D., Thomas, S.J., Loft, R.D. (2005). A Discontinuous Galerkin Transport Scheme on the Cubed Sphere, *Monthly Weather Review*, Vol. 133, páginas 814-828.
- [17] Olson, P. (2011). Laboratory experiments on the dynamics of the core, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 18 páginas.
- [18] Owaki, M., Ikatsu, N., Ohira, K., Itagaki, N. (2001). Development of a fuel rod thermal-mechanical analysis code for high burnup fuel, Nuclear Fuel Industries, Ltd, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki, Japan, Nuclear fuel behaviour modelling at high burnup and its experimental support, International Atomic Energy Agency.
- [19] Özisic, M.N. (1993). *Heat Conduction*, John Wiley & Sons, Inc.
- [20] Patera, A.T. (1984). A Spectral Element Method for Fluid Dynamics: Laminar Flow in a Channel Expansion, *Journal of Computational Physics*, Vol. 54, páginas 468-488.
- [21] PNNL-16647. (2007). A New Innovative Spherical Cermet Nuclear Fuel Element to Achieve an Ultra-Long Core Life for use in Grid-Appropriate LWRs, Pacific Northwest National Laboratory Operated by Batelle for the U.S. Department of Energy.
- [22] Pourmohamadian, H., Basirat, H.T. (2007). Transient Heat Conduction for Micro Sphere, 4th WSEAS International Conference on Heat and Mass Transfer, Gold Coast, Queensland, Australia, páginas 116-120.
- [23] Putman, W.M., Shian-Jiann L. (2007). Finite-volume transport on various cubed-sphere grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, páginas 55-78.
- [24] Rodríguez, D.A. (2009). Convección natural en un fluido confinado entre esferas concéntricas (gravedad laboratorio), Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

- [25] Ronchi, C., Iacono, R., Paolucci, P.S. (1996). The “Cubed Sphere”: A new Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry, *Journal of Computational Physics*, Vol. 124, páginas 93-114.
- [26] Sadourny, R. (1972). Conservative Finite-Difference Approximations of the Primitive Equations on Quasi-Uniform Spherical Grids, *Monthly Weather Review*, Vol. 100, No.2., páginas 136-144.
- [27] Singh, S., Jain, P.K., Rizwan-uddin. (2007). Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 47, páginas 261-273.
- [28] Stacey, F.D., Davis, P.M. (2008). *Physics of the Earth*, Cambridge University Press, 4th ed.
- [29] Starius, G. (1977). Composite Mesh Difference Methods for Elliptic Boundary Value Problems, *Numerische Mathematik*, Vol. 28, páginas 243-258.
- [30] Surkov, G.A. (1986). Transient heat conduction in hollow spheres with a moving inner boundary, *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, Vol. 8 No.4., páginas 473-478.
- [31] van de Vosse, F.N., Mineev, P.D. (1996). *Spectral Element Methods: Theory and Applications*, Faculty of Mechanical Engineering, Eindhoven University of Technology The Netherlands.
- [32] Vidal, J.J.A. (2008). Convección natural en un fluido confinado entre esferas concéntricas (Bajo número de Rayleigh), Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [33] Xiaoshu Lu, Viljanen, M. (2006). An analytical method to solve heat conduction in layered spheres with time-dependent boundary conditions, *Physics Letters A*, Vol. 351, páginas 274-282.