UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS CUBRIENTES Y FIBRACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

SAMUEL RESTOY BERGANZA

DIRECTOR DE TESIS:
DOCTOR SERGEY ANTONYAN

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis sinodales, quienes se tomarón la molestia de leer y criticar objetivamente dicho trabajo para asi obtener un mejor resultado, desde la claridad de los enunciados hasta la estructura del trabajo.
Agradezco a mis condiscípulos, Jorge Ledesma, Daniel Ocampo, Jonathan Jiménez, fue una experiencia maravillosa el poder haber compartido los años de la carrera con ellos.
Luego me gustaría agradecer a los profesores Julio César Guevara y Francisco Larrión; ellos son profesores que me influenciaron mucho durante la carrera y les agradezco por todo, desde su empeño como acádemicos hasta su calidad como personas. Particularmente le agradezco a Julio César Guevara por haber leído la primer versión y darme su opinión; tambien al profesor Óscar Palmas por la ayuda tan desinteresada que le brindó a este trabajo.

La mayor parte de la motivación personal para realizar este trabajo fue obtenida durante el transcurso del cuarto año de mis estudios por lo que me gustaría agradecer principalmente de manera especial al siguiente conjunto de personas sin ningún orden particular. Primero al doctor Sergey Antonyan y al que fue su ayudante en sus cursos, Ellie Macario. Disfrute la topología gracias a ellos principalmente, les agradezco muy sinceramente por todo su tiempo y dedicación como académicos. Después me gustaría agradecer a Irving Hernández por haberme alentado a inscribir Topología con el doctor Antonyan; sinceramente no creo que la hubiese inscrito si no hubiese sido por él, y esto constituyó un cambio grande en mi vida. También a los compañeros con los que cursé Topología, de no ser por ellos el curso no hubiese sido tan ameno y retador. Por último, quiero agradecer a Annamaria Savarino, le agradezco el tiempo que compartimos ya que más que me motivara, fue lo que provocó que me diese cuenta de que mi apenas necesaria tenacidad era algo que no me permitia poder contemplar la gracilidad que tanto sentia que me faltaba.
Finalmente me gustaria agradecer a mis padres, Jonathan Restoy y Clementina del Carmén Berganza y al PAPIIT por la beca recibida para la elaboración de esta tesis.

Esto concluye los agradecimientos, sin embargo aun falta mencionar a quienes va dedicado este trabajo. Este trabajo esta dedicado a mis seres queridos ajenos a la carrera, amistades de la facultad y a mi familia; principalmente dedicado a mi tía Esperanza Madrigal y a mi abuelo Andres Restoy, que en paz descansen.

Investigación realizada gracias al Programa UNAM - PAPIIT IN-115717.

Introducción

El objetivo de esta tesis es trabajar con conceptos importantes de la topología algebraica y estudiar sus relaciones, nos centraremos en los espacios cubrientes y las fibraciones, ya que son relevantes en la teoría de homotopía, geometría diferencial, variable compleja y grupos de Lie. Además de que son herramientas importantes para el cálculo de grupos de homotopía de varios espacios; éstos juegan un papel clave en la axiomatización de la teoría de homotopía. Por lo anterior, se consideró importante que antes de estudiar el tema de grupos de homotopía, seria adecuado desarrollar algunas propiedades de los espacios cubrientes y las fibraciones.
En la teoría que se desarrollará se verá que la recta real es un espacio fibrado (también espacio cubriente) sobre el círculo con la función exponencial. Este ejemplo es muy importante ya que así se logran clasificar las funciones de un espacio topológico X al círculo. Se verá efectivamente que todo espacio cubriente es una fibración, que hay una relación entre los grupos fundamentales del espacio base y los del espacio total de una fibración con un único levantamiento de trayectoria, entre otros resultados.
Se considera que la teoría de espacios de funciones debe ser desarrollada ya que se usa fuertemente a lo largo de casi todo el trabajo, además de que se construyen definiciones y funciones de suma relevancia para el próximo capítulo.
Con base en todo lo anterior, se decidió realizar teoría de homotopía en la cual se estudiarán los espacios de funciones, los espacios cubrientes y distintos tipos de fibraciones.
La tesis se consiste en 4 capítulos divididos en 2 partes, siendo la primera de 2 capítulos donde se desarrolla la teoria que será fundamental para todo lo desarrollado posteriormente; en la segunda parte se estudian distintos tipos de fibraciones y sus relaciones junto con algunos resultados de éstas. Los temas que se abordan en este texto son:

1. El capítulo 1 inicia con la teoría de espacios de funciones, la cual sustentará la mayor parte de todo lo que se realiza en la segunda parte. El resultado más importante que se aborda es el de la ley exponencial para espacios de funciones.

2. El capítulo 2 muestra ejemplos de diversos espacios de funciones los cuales son más utilizados en la segunda parte. Particularmente se introducirá al concepto del espacio de los lazos, el cual tiene una relación importante con el grupo fundamental
3. El capítulo 3 trata las fibraciones de Hurewicz; la propiedad de levantamiento de trayectorias; recordaremos la noción de espacio cubriente para así ver la relación que tiene con las fibraciones de Hurewicz y tambien consideraremos algunas funciones que nacen naturalmente entre distintos espacios de funciones. Por último se estudiará el caso particular en el que las fibraciones poseen fibras discretas o levantamiento único de trayectorias.
4. El capítulo 4 empieza con el concepto de las fibraciones localmente triviales; se estudia la relación que posee con los espacios cubrientes y las fibraciones de Hurewicz; se extiende un poco la teoría de la relación entre las fibraciones de Hurewicz y las fibraciones localmente triviales y se aprovecha para definir las fibracones locales (en el sentido de Hurewicz). Por último se demuestran algunos teoremas importantes clásicos como el teorema de levantamiento que relaciona la existencia de una función entre espacios topológicos con la imagen del homomorfismo inducida entre grupos fundamentales; el teorema de equivalencia, el teorema de existencia y el teorema de clasificación, el cual nos relaciona a las clases de equivalencia de los espacios cubrientes sobre un espacio dado con las clases conjugadas de los subgrupos del grupo fundamental de dicho espacio.

Índice general

Parte 1

Conceptos fundamentales

Capítulo 1

Espacios de funciones

Sean X, Y espacios topológicos, denotemos por Y^X al conjunto que consta de todas las funciones $f : X \to Y$, es decir $Y^X = \prod_{x \in X} Y_x$ con $Y_x = Y$ para todo $x \in X$. Denotaremos al conjunto de todas las funciones continuas por

$$C(X, Y) \quad , \text{ éste también es denotado como } \Omega \text{ o } Y^X,$$

es importante remarcar como es denotado el conjunto de funciones continuas en otros textos ya que es lo que motiva el nombre de cierto teorema que se demostrará posteriormente el cual es de gran importancia, ya que nos permite una manipulación muy astuta, algebraicamente hablando.
Como se sabe de cursos de topología y análisis existen diversas maneras de dotar de una topología al conjunto $C(X, Y)$, pero para este estudio sólo nos interesará la *topología compacto-abierta*. Ésta también es conocida como la *k-topología* o la *topología de convergencia compacta*.

1.1. La topología compacto-abierta y la función evaluación

Definición 1.1.1. *Sean X, Y espacios topológicos , $K \subset X$ con K compacto en X y $U \subset Y$ con U abierto en Y. Denotaremos por $M(K, U)$ al subconjunto de $C(X, Y)$ dado por*

$$M(K, V) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

*La **topología compacto-abierta** de $C(X, Y)$ se define tomando como sub-base a todos los posibles conjuntos $M(K, U)$ con K compacto y U abierto.*
Si $C(X, Y)$ esta dotado con la topología compacto-abierta entonces lo denotaremos por $C_c(X, Y)$.

De acuerdo con la definición usual de sub-base, todo conjunto sub-básico es abierto en $C_c(X, Y)$, y todo abierto de $C_c(X, Y)$ es la unión de una colección de intersecciones finitas de conjuntos sub-básicos.

Siempre se usará para la topología de los espacios de funciones, la topología compacto-abierta, a menos que se diga lo contrario.

Lema 1.1.2. *Sea X un espacio Hausdorff y $\{U_j\}_{j \in J}$ una sub-base de Y, entonces los conjuntos $M(K, U)$ con K compacto de X y $U \in \{U_j\}_{j \in J}$, constituyen una sub-base para la topología compacto-abierta de $C(X, Y)$.*

Demostración.
Basta demostrar que si K es compacto, V es abierto en Y y $f \in M(K,V)$ entonces existen subconjuntos compactos $K_1,...,K_m$ de X y $U_1,...,U_m$ en $\{U_j\}_{j\in J}$ tales que

$$f \in M(K_1,U_1) \cap ... \cap M(K_m,U_m) \subset M(K,V).$$

Sea $x \in K$. Como $f(x) \in W$, entonces hay un numero finito de abiertos en $\{\mathbb{U}_j\}_{j\in J}$, digamos $U_1^x,...,U_{n_x}^x$ tales que

$$f(x) \in U_1^x \cap ... \cap U_{n_x}^x \subset V\ .$$

Como f es continua, existe una vecindad G_x de x en X tal que

$$f(G_x) \subset U_1^x \cap ... \cap U_{n_x}^x\ .$$

Como K es un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff , K es regular. Asi que existe una vecindad H_x de x en K tal que la cerradura $K_x = \overline{H_x}$ está contenida en G_x.
La colección $\{H_x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta del compacto K, por lo que hay un número finito de puntos en K, digamos $x_1,...,x_q$ tales que

$$K = H_{x_1} \cup ... \cup H_{x_q}\ .$$

Ahora remplazaremos (para no saturar la notación) los x_j por j, con $j = 1,...,q$.
Recordemos que los conjuntos $K_1,...,K_q$, satisfacen

$$f(K_j) \subset f(G_j) \subset U_1^j \cap ... \cap U_{n_j}^j \subset V, (j = 1,...,q)$$

Por lo que

$$f \in \cap_{j=1}^q [\cap_{i=1}^{n_j} M(K_j,U_i^j)].$$

Supongamos que $g \in C_c(X,Y)$ está contenido en el conjunto del lado derecho de la fórmula anterior. Si $x \in K$, entonces x está en algún H_j y por lo tanto está en K_j. Por lo que

$$g(x) \in U_1^j \cap ... \cap U_{n_j}^j \subset V$$

Entonces $g \in M(K,V)$ y

$$f \in \cap_{j=1}^q [\cap_{i=1}^{n_j} M(K_j,U_i^j)] \subset M(K,V) \text{ que es justo lo que queriamos demostrar.}$$

□

Dados dos espacios topológicos X, Y y el espacio de funciones continuas $C(X, Y)$, resulta natural poder proponer una función que le asigne al par constituido por una función de X en Y y un punto en X, un punto en Y. Más aún es natural preguntarnos cuál es la topología que le permite a dicha función ser continua.
En la próxima definición se formalizarán estos conceptos.

Definición 1.1.3. *Sean X, Y espacios topológicos. Sea ω la función*

$$\omega : C_c(X, Y) \times X \to Y$$

definida por $\omega(f, x) = f(x)$ para cada $f \in C(X, Y)$ y $x \in X$. Llamaremos a esta función ω ***la función evaluación*** *del espacio de funciones $C(X, Y)$. Además, se dirá que la topología de $C(X, Y)$ es* ***admisible*** *si la función evaluación es continua.*

La definición de admisible resulta ser no trivial como se verá en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.4. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces la función evaluación ω de $C_c(X, Y)$ es continua, es decir, la topología compacto-abierta es admisible.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $f \in C_c(X, Y)$, $x \in X$ y V una vecindad arbitraria en Y que contenga a $f(x)$. Por la continuidad de f, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto que contiene a x. Como X es Hausdorff y localmente compacto, entonces es regular y por lo tanto podemos asegurar la existencia de una vecindad W de x cuya cerradura $\overline{W}$ es compacta y está contenida en $f^{-1}(V)$, es decir

$$x \in W \subset \overline{W} \subset f^{-1}(V).$$

Notemos que el conjunto sub-básico $M(\overline{W}, V)$ es una vecindad de f en $C_c(X, Y)$ y proponiendo $U = M(\overline{W}, V) \times W$ tenemos una vecindad de $(f, x) \in C_c(X, Y) \times X$.
Sólo nos resta ver que $\omega(U) \subset V$, pero esto es fácil ya que si $(g, z) \in U$ entonces $z \in W \in \overline{W} \subset V$, por lo que $\omega(g, z) = g(z) \in V$, que es lo que se quería demostrar.

□

Sin la hipótesis de compacidad local, existen ejemplos de espacios donde la función evaluación no es continua, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.1. Sean $X = \mathbb{Q}$ y $Y = [0, 1]$ y la función $f \in C_c(X, Y)$ dada por $f(q) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}$.
Queremos demostrar que la evaluación ω no es continua en (f, r) para ningún punto $r \in \mathbb{Q}$. Si suponemos lo contrario, entonces existe una vecindad U de

r en $\mathbb{Q}$ y una vecindad básica $O = \bigcap_{i=1}^{n} M(A_i, U_i)$ de f en $C_c(X,Y)$, tal que

$$\omega(O \times U) \subset [0,1).$$

Como $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \mathbb{Q}$ es compacto y U es abierto en $\mathbb{Q}$, obtenemos que $U \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y por lo tanto, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p \in U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
Haciendo notar que $\mathbb{Q}$ es un espacio de Tychonoff, entonces podemos encontrar una función $g : \mathbb{Q} \to [0,1]$ tal que

$$g(p) = 1, \text{ y } g(q) = 0 \text{ para todo } q \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Como U_i es vecindad de 0, (recordando que $\{0\} = f(A_i) \subset U_i$) obtenemos que $g(A_i) = 0 \in U_i$, es decir, $g \in M(A_i, U_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego, $(g,p) \in O \times U$, pero

$$\omega(g,p) = g(p) = 1 \notin [0,1),$$

lo cual es una contradicción por nuestra elección de $O \times U$.

Hay una razón particular por la que siempre pensaremos que $C(X,Y)$ posee la topología compacto-abierta, y es la que describe la siguiente proposición, pero para demostrar dicha proposición, necesitamos el siguiente lema conocido como "lema del tubo".

Lema 1.1.5. *Sean X, Y espacios topológicos, $x_0 \in X$, $A \subset Y$ compacto y $W \subset X \times Y$ una vecindad de $\{x_0\} \times A$, entonces existe una vecindad $U \subset X$ de x_0, tal que $U \times A \subset W$.*

Demostración.
Para toda $a \in A$ existen vecindades $U_a \subset X$ y $V_a \subset Y$ de x_0 y de a, respectivamente, tales que $U_a \times V_a \subset W$. Entonces la colección $\{V_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta para A, por la compacidad de A podemos obtener una subcubierta finita $V_{a_1}, ..., V_{a_n}$. Consideremos

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}.$$

Entonces U es una vecindad de $x_0 \in X$, igualmente, para todo $a \in A$, $U \times \{a\} \subset W$ y por ende $U \times A \subset W$, como queriamos demostrar.

□

Proposición 1.1.6. *Toda topología admisible es más fina que la topología compacto-abierta.*

Demostración.
Sean X, Y espacios topológicos y τ una topología que sea admisible en $C(X,Y)$. Es suficiente demostrar que para todo sub-básico de la topología compacto-abierta está contenido en τ. Sea $A \subset X$ compacto, $V \subset Y$ abierto y $f \in M(A,V)$, entonces $f(A) \subset V$, por lo que $\omega(\{f\} \times A) \subset V$. Para seguir la demostración debemos tener en cuenta la admisibilidad de τ y el lema que se demostró previamente, ya que podemos encontrar una vecindad de f $U_f \in \tau$, tal que $\omega(U_f \times A) \subset V$.
Notemos que para todo $g \in U_f$, $g(A) = \omega(\{g\} \times A) \subset V$ y por ende $U_f \subset M(A,V)$. Por lo que

$$M(A,V) = \bigcup_{f \in M(A,V)} U_f \in \tau,$$

lo cual demuestra la proposición. $\square$

Es importante notar que la elección de la topología compacto-abierta para $C(X,Y)$ recae en las proposiciones anteriores, ya que por un lado sabemos que si X es Hausdorff y localmente compacto entonces la topología compacto-abierta es admisible, y por el otro que toda topología admisible es más fina que la topología compacto-abierta, por lo que si X es un Hausdorff localmente compacto, la topología compacto-abierta sera la topología admisible más gruesa. Obteniendo así que si $f : C_c(X,Y) \to Z$ es una función continua y τ es una topología mas fina para $C(X,Y)$, entonces $f : C_\tau(X,Y) \to Z$ también es continua.

Definición 1.1.7. *Para cada punto $y \in Y$, sea $j(y)$ la función constante en $C_c(X,Y)$ que manda X al singulete y. La asignación $y \to j(y)$ define la función*

$$j : Y \to C_c(X,Y)$$

*que llamaremos **el encaje natural** de Y en $C_c(X,Y)$. Se puede ver f'ácilmente que j es un homeomorfismo entre Y y el subespacio $j(Y)$ de $C_c(X,Y)$. Mas aun, si Y es un espacio de Hausdorff, entonces $j(Y)$ es cerrado en $C_c(X,Y)$.*

Definición 1.1.8. *Para cada $a \in X$,sea*

$$p_a : C_c(X,Y) \to Y$$

*la función definida por $p_a(f) = f(a)$ para cada $f \in C_c(X,Y)$. Es fácil ver que, p_a es una función continua y manda al subespacio $j(Y)$ de $C_c(X,Y)$ en Y. Llamaremos a p_a como **la proyección** de $C_c(X,Y)$ en Y determinada por $a \in X$.*

De la definición 1.1.7 podemos ver que $p_a \circ j$ es la función identidad en Y y $j \circ p_a$ es una retracción de $C_c(X, Y)$ al subespacio $j(Y)$. Así obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.9. *El encaje natural j mapea Y de manera homeomorfa al retracto $j(Y)$ en $C_c(X, Y)$.*

1.2. La ley exponencial para espacios de funciones

Definición 1.2.1. *Sean T, X y Y espacios topológicos, consideremos los siguientes espacios de funciones*

$$\Phi = C_c(X \times T, Y),\ \Psi = C_c(T, C_c(X, Y))$$

Para toda función en $C_c(X \times T, Y)$, $\phi : X \times T \to Y$ en Ψ , podemos definir una función $\theta(\phi) : T \to C_c(X, Y)$ tomando

$$[\theta(\phi)(t)](x) = \phi(x, t)\ ,\ (t \in T, x \in X).$$

$\theta(\phi)$ se dice que es ***asociada a*** *ϕ.*

Proposición 1.2.2. *La función asociada $\theta(\phi)$ de $\phi \in C_c(X, Y)$ es continua.*

Demostración.
Sea $\psi = \theta(\phi)$ y $U = M(K, W)$ un abierto sub-básico en $C_c(X, Y)$. Basta probar que $\psi^{-1}(U)$ es abierto en T. Sea t_0 un punto en $\psi^{-1}(U)$. Por definición, tenemos que

$$K \times \{t_0\} \subset \phi^{-1}(W)$$

La continuidad de ϕ implica que $\phi^{-1}(W)$ es un abierto de $X \times T$. Por lo que $\phi^{-1}(W)$ es la unión de una colección de abiertos de la forma $G_\mu \times H_\mu$, donde G_μ y H_μ son abiertos de X y T, respectivamente. Como K es compacto, $K \times \{t_0\}$ está contenido en la unión de un conjunto finito de abiertos, llamémoslos

$$G_1 \times H_1, G_2 \times H_2, ..., G_n \times H_n$$

con $t_0 \in H_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Entonces

$$H = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n$$

es un conjunto abierto en T que contiene a t_0 y está contenido en $\psi^{-1}(U)$. Por lo que $\psi^{-1}(U)$ es un conjunto abierto de T

□

Definición 1.2.3. *Como consecuencia inmediata, la asignación $\phi \to \theta(\phi)$ define una función*

$$\theta : \Phi \to \Psi$$

que cuando sea continua, llamaremos la ***función asociación****.*

Que de hecho es relativamente *común* que sea continua, como se verá en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.4. *Si T es un espacio Hausdorff, entonces la función asociación $\theta : \Phi \to \Psi$ es continua.*

Demostración.
Como T es un espacio de Hausdorff y todos los conjuntos $M(K, W)$ constituyen una sub-base de $C_c(X, Y)$, entonces por el lema 1.1.2. obtenemos que los subconjuntos

$$M[L, M(K, W)] = \big\{\psi \in \Psi \mid \psi(L) \subset M(K, W)\big\}$$

forman una sub-base para Ψ, donde L es un subconjunto compacto de T, K es un subconjunto compacto de X, y W es un abierto sub-básico de Y. Por la definición de θ tenemos que

$$\theta^{-1}\big\{M[L, M(K, W)]\big\} = M(K \times L, W)$$

Como $K \times L$ es compacto, $M(K \times L, W)$ es abierto en Φ y como $\big\{M[L, M(K, W)]\big\}$ es una sub-base de Ψ, entonces θ es continua.

□

La definición de $\theta : \Phi \to \Psi$ nos garantiza que θ es inyectiva, pero generalmente no es suprayectiva. Pasaremos a caracterizar la suprayectividad de dicha función.

Proposición 1.2.5. *La función evaluación ω de $C_c(X, Y)$ es continua si y solo si, para todo espacio topológico T, la función asociación $\theta : \Phi \to \Psi$ es suprayectiva*

Demostración.

Continuidad de $\omega \Rightarrow \theta : \Phi \to \Psi$ es suprayectiva

Sea $\psi \in \Psi$ y $\chi : X \times T \to C_c(X, Y) \times X$ definida por

$$\chi(x, t) = (\psi(t), x),\ (x \in X, t \in T)$$

Ahora definamos $\phi = \omega\chi \in \Phi$. Ya que

$$[\theta(\phi)(t)](x) = \phi(x, t) = \omega\chi(x, t) = \omega[\psi(t), x] = [\psi(t)](x)$$

para todo $t \in T$ y $x \in X$, obtenemos que $\theta(\phi) = \psi$. Por lo que θ es suprayectiva.

$\theta : \Phi \to \Psi$ es suprayectiva $\Rightarrow$ Continuidad de ω

Supongamos que para todo espacio T, θ es continua. Si tomamos como $T = C_c(X, Y)$ y $\psi \in \Psi$ que sea la identidad en $C_c(X, Y)$. Entonces hay un $\phi \in \Phi$ con $\theta(\phi) = \psi$. Ya que

$$\phi(x, f) = [\psi(f)](x) = f(x) = \omega(f, x)$$

para todo $x \in X$ y $f \in C_c(X,Y)$, la continuidad de ϕ implica la de ω.

□

Entre las proposiciones 1.1.4. y 1.2.5. obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.6. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto, entonces la función asociación $\theta : \Phi \to \Psi$ es suprayectiva.*

Proposición 1.2.7. *Si X, T son espacios Hausdorff, entonces la función asociación $\theta : \Phi \to \Psi$ es un homeomorfismo entre Φ y un subespacio de Ψ.*

Demostración.
θ es inyectiva y continua por la proposición 1.2.4. , por lo que resta probar que θ^{-1} es continua en $\theta(\Phi) \subset \Psi$. Notemos que basta probar que si J es un subespacio compacto de $X \times T$ y W es un abierto de Y, entonces la imagen $\theta[M(J,W)]$ es un conjunto abierto en $\theta(\Psi)$. Sea $\psi \in [M(J,W)]$, tomemos $\phi \in M(J,W)$ con $\theta(\phi) = \psi$. Sean J_X y J_T las proyecciones de J en X y T respectivamente. Si $z = (x,t) \in J$, toma una vecindad U_z de x en J_X y una vecindad V_z de t en J_T, tal que

$$\phi(U_z \times V_z) \subset W$$

Como J_X y J_T son espacios de Hausdorff compactos, entonces son regulares. Por lo que nos tomaremos K_z y L_z un *poco mas chicos* que U_z y V_z, de tal manera que

$$\phi(K_z \times L_z) \subset W$$

donde K_z es la cerradura de U_z en J_X y L_z es la de V_z en J_T. Notemos que $\big\{(U_z \times V_z) \cap J \mid z \in J\big\}$ es una cubierta abierta de nuestro espacio compacto J, por lo que hay un numero finito de puntos en J, digamos $z_1, \ldots, z_n$ tales que

$$J \subset (U_{z_1} \times V_{z_1}) \cup ... \cup (U_{z_n} \times V_{z_n})$$

Ahora para facilitar la notación remplazaremos z_i con $i = 1, \ldots, n$. Recordemos que los conjuntos K_i y L_i con $i = 1, ..., n$ son compactos. Mas aun

$$[\psi(L_i)](K_i) = \phi(K_i \times L_i) \subset W$$

para cada $i = 1, ..., n$. Por lo que

$$\psi \in \theta(\Phi) \cap \big\{ \cap_{i=1}^{n} M[L_i, M(K_i, W)]\big\}$$

Supongamos que $\chi \in \Psi$ está contenido en el conjunto del lado derecho de la fórmula anterior. Como $\chi \in \theta(\Phi)$, hay un $\xi \in \Phi$ tal que $\chi = \theta(\xi)$. Si $z = (x,t) \in J$, entonces z está contenido en algun $U_i \times V_i$ y por ende también en $K_i \times L_i$. Como $\chi \in M[L_i, M(K_i, W)]$ y $x \in K_i, t \in L_i$, obtenemos que

$$\xi(z) = \xi(x,t) = [\chi(t)](x) \in W$$

Por lo que $\xi(J) \subset W$, lo cual implica que $\xi \in M(J,W)$ y $\chi = \theta(\xi) \in \theta[M(J,W)]$, obteniendo asi que

$$\psi \in \theta(\Phi) \cap \left\{ \cap_{i=1}^{n} M[L_i, M(K_i, W)] \right\} \subset \theta[M(J,W)]$$

Esto prueba que $\theta[M(J,W)]$ es un conjunto abierto en $\theta(\Phi)$.

□

Juntando el Corolario 1.2.6. y la Proposición 1.2.7. obtenemos el siguiente teorema de gran importancia.

Teorema 1.2.8 (La ley exponencial para espacios de funciones)**.**

Sean X, T espacios Hausdorff y Y cualquier espacio topológico. Si X es localmente compacto, entonces la función asociación $\theta : \Phi \to \Psi$ es un homeomorfismo.

De ahora en adelande si se cumplen las hipótesis del teorema 1.2.8., identificaremos ambos espacios de funciones en términos del homeomorfismo. Es decir

$$\Phi = C_c(X \times T, Y) = C_c(T, C_c(X,Y)) = \Psi$$

Para ver mas claramente el motivo por el que el teorema es llamado así, es mas visible si se usa la otra notación que no corresponde a la que usamos en este texto. Ya que si recordamos que en esta notación $C_c(Y,X) := Y^X$, se traduce el teorema y se identifican los espacios de funciones en términos del homeomorfismo, obtenemos

$$\Phi = C_c(X \times T, Y) = Y^{X \times T} = (Y^X)^T = C_c(T, C_c(X,Y)) = \Psi$$

la cual es una expresión que resulta más familiar.

Recordando la proposición 1.1.8, pasaremos a dar cuando $j(Y)$ es un retracto por deformación fuerte.

Proposición 1.2.9. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto y fuertemente contraible a un punto $a \in X$, entonces $j(Y)$ es un retracto por deformación fuerte de $C_c(X,Y)$.*

Demostración.
Sabemos por la proposición 1.1.4. que la función evaluación $\omega : C_c(X,Y) \times X \to Y$ es continua. Como X es contraible a un punto $a \in X$ entonces existe una función $h : X \times I \to X$ tal que

$$h(x,0) = x \ , \ h(x,1) = a \ , \ x \in X$$
$$h(a,t) = t \ , \ (t \in I)$$

Ahora definamos la función $\phi : X \times C_c(X,Y) \times I \to Y$ tomando

$$\phi(x,f,t) = \omega[f, h(x,t)] \ , \ x \in X, f \in C_c(X,Y), t \in I$$

Por la proposición 1.2.2., la función asociada

$$\psi = \theta(\phi) : C_c(X,Y) \times I \to C_c(X,Y)$$

es continua. Sea la homotopía $\chi_t : C_c(X,Y) \to C_c(X,Y), (0 \leq t \leq 1)$, dada por

$$\chi_t(f) = \psi(f,t) \ , \ (f \in C_c(X,Y), t \in I)$$

Es fácil ver que χ_0 es la función identidad, que $\chi_1 = jp_a$ y que $\chi_t(f) = f$ para toda $f \in j(Y)$ y $t \in I$.

$\square$

Usando la proposición anterior se puede verificar facilmente que

$$\chi[p_a^{-1}(y)] \subset p_a^{-1}(y), \ (y \in Y, t \in I)$$

y por ende obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.10. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto y contraible a un punto $a \in X$, entonces para cada $y \in Y$, el subespacio $p_a^{-1}(y)$ es contraible al punto $j(y)$.*

Capítulo 2

El espacio de las trayectorias y el espacio Λ_y

2.1. Algunos espacios de funciones

Definición 2.1.1. *Sea Y un espacio topológico,* ***una trayectoria (o camino)*** *en Y es una función continua $\sigma : I := [0,1] \to Y$. Los puntos σ(0) y σ(1) son llamados respectivamente* ***punto inicial*** *y* ***punto terminal****.*
La relación definida al relacionar dos puntos si existe una trayectoria que empieza en uno y termina en el otro, claramente es de equivalencia, ya que es transitiva, simétrica y reflexiva. Por lo que induce una partición en Y, la cual es llamada en componentes de conexidad por trayectorias de Y. C_y sera la ***componente de conexidad por trayectorias que contiene al punto*** *y.*
Se dice que Y es ***conexo por trayectorias*** *si para cualesquiera y_1 y y_2 se pueden unir por un camino ($\exists f : I \to Y$ tal que $\sigma(0) = y_1$ y $\sigma(1) = y_2$).*

Definición 2.1.2. *Al conjunto de trayectorias en Y con la topología compacto-abierta se le denotará como $C_c(I, Y) := \Omega$*

Definición 2.1.3. *Sea Y un espacio topológico y $A, B \subset Y$ tales que A y B no son ajenos. Denotaremos a $[Y; A, B]$ al subespacio de Ω que consiste en* ***todos los caminos*** *σ* ***en*** *Y tal que $\sigma(0) \in A$ y $\sigma(1) \in B$.*

Definición 2.1.4. *Sea $y \in Y$, denotaremos a $[Y; Y, \{y\}]$ por Ω_y y el cual es* ***el espacio de trayectorias en*** *Y* ***que terminan en*** *y.*

Definición 2.1.5. *Un* ***lazo*** *en Y es una función continua $\sigma : I := [0,1] \to Y$ tal que σ(0)=σ(1), al punto σ(0)=σ(1) se le conoce como* ***punto básico del lazo*** *σ.*
El conjunto de todos los lazos en Y ***forma el subespacio*** *Λ de Ω que se le conocerá como* ***el espacio de lazos en*** *Y.*

Definición 2.1.6. *Sea $y \in Y$, denotaremos al espacio de los lazos con punto base y ,$[Y; \{y\}, \{y\}]$, como Λ_y.*

Claramente se tiene que $\Lambda_y = \Lambda \cap \Omega_y$. (el espacio de lazos en Y con punto básico son los lazos que terminan en y).

Definición 2.1.7. *Las proyecciones $\rho_0, \rho_1 : \Omega \to Y$ seran las funciones determinadas al evaluar la función $f \in \Omega$ en 0 y 1 respectivamente,*

$$\rho_i(f) = f(i) \text{ con } i = 0 \text{ o } i = 1$$

A estas funciones se les conocerá como ***la proyección inicial y la proyección terminal*** *respectivamente.*

Vale la pena notar que si Y es Hausdorff y ρ_0 y ρ_1 son continuas, entonces $\Lambda, \Lambda_y, \Omega$ y Ω_y son cerrados respecto a la topología compacto-abierta $C_c(I, Y)$

Definición 2.1.8. *Denotaremos a δ_y como el lazo de Y que manda todo el $[0,1]$ en y.*

Proposición 2.1.9. *Ω_y es contraible al punto δ_y.*

Si consideramos la proposición 1.2.10 y el que podemos realizar una contracción de Ω_y a δ_y, contrayendo todas las trayectorias respecto a si mismas al punto y, obtenemos el resultado.

2.2. Λ_y, el espacio de los lazos

Sea Y un espacio topológico y $y \in Y$ un punto dado. El espacio Λ_y de los lazos en Y con y como punto básico tiene un papel fundamental en el estudio de grupos de homotopía. Podemos proponer una multiplicación *natural* en Λ_y, la cual consiste en tomar dos lazos basados en el mismo punto y *concatenarlos* (intuitivamente, concatenación de lazos, es lazo). Pasaremos a dar la definición formal de esta idea que estamos presentando

Definición 2.2.1. *Sean $f, g \in \Lambda_y$, el producto $(fg) \in \Lambda_y$ es un lazo en Y definido por*

$$(fg)(t) := \begin{cases} f(2t) & 0 \leq x \leq 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Intuitivamente, fg es el lazo en Y que recorre el lazo f con el doble de velocidad mientras t sea menor o igual a $1/2$; despues fg recorre al lazo g con el doble de la velocidad mientras t sea mayor o igual a $1/2$.

Definición 2.2.2. *La correspondencia $(f, g) \to \mu(f, g) = (fg)$ define la función $\mu : \Lambda_y \times \Lambda_y \to \Lambda_y$, la cual llamaremos la* ***multiplicación natural en*** *Λ_y.*

Proposición 2.2.3. *La multiplicación natural en Λ_y $\mu : \Lambda_y \times \Lambda_y \to \Lambda_y$ es continua.*

Demostración.
Sea $U = M(K, W) \cap \Lambda_y$ un abierto sub-básico no vacio en Λ_y.

Basta con demostrar que la imagen inversa de $\mu^{-1}(U)$ es abierto en $\Lambda_y \times \Lambda_y$. Sean ϕ,$\psi : I \to I$ las funciones que definiremos como

$$\phi(t) = t/2,\ \psi(t) = \frac{(t+1)}{2} \text{ para cada } t \in I$$

Sea $A = \phi^{-1}(K)$ y $B = \psi^{-1}(K)$; entonces A y B son compactos en I. Ahora consideremos los conjuntos sub-básicos de Λ_y

$$F = M(A, W) \cap \Lambda_y\ ,\ G = M(B, W) \cap \Lambda_y$$

Para cualesquiera dos lazos $f, g \in \Lambda_y$, es fácil ver que $fg \in M(K, W)$ si y sólo si $f \in M(A, W)$ y $g \in M(B, W)$. Por lo que $\mu^{-1}(U) = F \times G$. Esto prueba que $\mu^{-1}(U)$ es abierto.

□

Corolario 2.2.4. *Todo lazo $f \in \Lambda_y$, determina dos funciones*

$$L_f, R_f : \Lambda_y \to \Lambda_y$$

definidas como $L_f(g) = fg$ y $R_f(g) = gf$ para todo $g \in \Lambda_y$.

Proposición 2.2.5. *Sea $\delta_y \in \Lambda_y$ el lazo degenerado $\delta_y(I) = y$, entonces L_{δ_y} y R_{δ_y} son deformaciones de Λ_y. De hecho, existe una homotopía $h_t : \Lambda_y \to \Lambda_y$ $(0 \leq t \leq 1)$, tal que $h_0 = L_{\delta_y}$, h_1 es la identidad de Λ_y y $h_t(\delta_y) = \delta_y$ para todo $t \in I$; y analogamente R_{δ_y}.*

Demostración.

Por la proposición 1.1.4. sabemos que $\omega : \Lambda_y \times I \to Y$ es una función continua y esto nos permite garantizar la continuidad de la función definida por

$$\phi : I \times \Lambda_y \times I \to Y$$

$$\phi(s, f, t) := \begin{cases} f((2\text{s})/(1\text{+t})) & f \in \Lambda_y, t \in I, 0 \leq s \leq (1+t)/2 \\ y & f \in \Lambda_y, t \in I, (1+t)/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Por la proposición 1.2.2. tenemos que la función asociada $\psi = \theta(\phi)$ es continua. Se puede ver facilmente que ψ manda $\Lambda_y \times I$ en el subespacio Λ_y de Ω y , por definición, ψ satisface

$$[\psi(f, t)](s) = \phi(s, f, t)$$

Por lo que definiremos una homotopía $k_t : \Lambda_y \to \Lambda_y$ $(0 \leq t \leq 1)$, con

$$k_t(f) = \psi(f, t) \text{ con } f \in \Lambda_y \text{ y } 0 \leq t \leq 1.$$

Es fácil ver que $k_0 = R_{\delta_y}$, k_1 es la función identidad y $k_t(\delta_y) = \delta_y$ para cada $t \in I$. Por lo que R_{δ_y} es una deformación de Λ_y. Análogamente se prueba lo mismo para L_{δ_y}.

□

Estas propiedades de Λ_y nos muestran que pertenece a la clase de los H-espacios, los cuales procederemos a definir.

Definición 2.2.6. *Por una **multiplicación continua** en un espacio X, nos referimos a una función continua $\mu : X \times X \to X$.*
*Sea μ una multiplicación continua en X. Para cualesquiera dos puntos a y b en X, denotaremos a $\mu(a, b)$ o como ab al **producto** de a y b. Para cualquier punto dado $a \in X$, las funciones $x \to ax$ y $x \to xa$ determinan respectivamente las funciones de X en X, L_a y R_a, llamadas **la traslación derecha y la traslación izquierda de X por** a.*

Definición 2.2.7. *Un punto $a \in X$ se dice que es una **unidad de homotopía izquierda** si a es un idempotente, esto quiere decir que $aa = a$ y L_a es homotópico a la identidad relativa para a. Similarmente se define la **unidad de homotopía derecha**,R_a.*
*Un idempotente $a \in X$ se dice que es **unidad de homotopía** si es una unidad de homotopía derecha e izquierda.*

Definición 2.2.8. *Por un H-espacio nos referimos un espacio X con una multiplicación continua μ la cual posee una unidad de homotopía.*

Proposición 2.2.9. *Si X es un H-espacio con x_0 una unidad de homotopía, entonces el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano.*

Demostración.
Sean α y β dos elementos de $\pi_1(X, x_0)$ y sean f y g: $I \to X$ sean los lazos que representan a α y β respectivamente. Como x_0 es un elemento idempotente, nosotros podemos definir el lazo $h : I \to X$ en x_0 tomando

$$h(t) = fg(t)$$

para cada $t \in I$. Este lazo h representa un elemento γ de $\pi_1(X, x_0)$ que depende solamente de α y β. Notemos que basta demostrar que $\gamma = \alpha\beta$ y que $\gamma = \beta\alpha$.
Para probar que $\gamma = \alpha\beta$, tomaremos por hecho que los lazos representantes f, g han sido escogidos de tal manera que $f(t) = x_0$ si t es mayor o igual $1/2$ y $g(t) = x_0$ si t es menor o igual a $1/2$. Por lo que

$$h(t) = \begin{cases} f(t)x_0 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ x_0 g(t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como x_0 es una unidad de homotopía de X, entonces existen dos homotopías $\phi_s, \psi_s : X \to X (0 \leq s \leq 1)$. tales que $\phi_0(x) = x_0 x$, $\phi_1(x) = x$, $\psi_0(x) = x x_0$ y $\psi_1(x) = x$ para todo $x \in X$ y $\phi_s(x_0) = x_0 = \psi_s(x_0)$ para toda $s \in I$. Asi definimos una homotopía $h_s : I \to X, (0 \leq x \leq 1)$, por

$$h_s(t) = \begin{cases} \psi_s f(t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \phi_s g(t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por lo que tenemos que $h_0 = h$y $h_s(0) = x_0 = h_s(1)$ para cada $s \in I$. Como h_1 satisface la relación

$$h_1(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

entonces representa el elemento $\alpha\beta$. Esto implica que $\gamma = \alpha\beta$. Similarmente se puede probar que $\gamma = \beta\alpha$ pero esta vez escogiendo f y g tal que $f(t) = x_0$ si t es menor o igual a $1/2$ y $g(t) = x_0$ si t es mayor o igual a $1/2$.

□

Por lo que obtenemos gracias a la prueba de la Proposición 2.2.9, el siguiente corolario.

Corolario 2.2.10. *Sea X es un H-espacio con x_0 unidad de homotopía, si dos elementos α y $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ son representados por los lazos $f, g : I \to X$ en x_0, entonces el elemento $\alpha\beta$ esta representado por el producto de funciones $h : I \to X$ de f y g , definido por*

$$h(t) = fg(t) \text{ con } t \in I.$$

Recordando el espacio Λ_y de los lazos y considerando sus componentes de conexidad, sabemos por el teorema 1.2.8 (La ley exponencial para espacios de funciones) que *"Si X es un espacio localmente compacto, tanto X como T son espacios Hausdorff y Y es un espacio topológico, entonces la función asociación θ que va de $\Phi := C_c(X \times T, Y)$ a $\Psi := C_c(T, C_c(X, Y)$ es un homeomorfismo"*, por lo que las componentes de conexidad por trayectorias de Λ_y son exactamente las clases de equivalencia de los lazos de Λ_y (que es como esta definido el grupo fundamental). Por lo que obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.11. *Sea Y un espacio conexo por trayectorias, bajo la multiplicación natural de Λ_y, las componentes de conexidad por trayectorias de Λ_y forman un grupo que es en esencia el grupo fundamental $\pi_1(Y, y)$.*

Parte 2

Espacios fibrados

Capítulo 3

Fibraciones de Hurewicz

3.1. La propiedad de levantamiento de homotopía y las fibraciones

Los espacios fibrados son el tema central de trabajo, en el cálculo de grupos de homotopía son una gran herramienta y suelen ser utiles en aplicación de teoria de homotopía a problemas geométricos. Se desarrolló en el primer cápitulo la teoría de espacios de funciones y en el siguiente capítulo, unas cuantas definiciones y teoría de estas ya que en este capítulo el uso de estas resulta bastante cotidiano.
Particularmente el teorema 1.2.8.(La ley exponecial para espacios de funciones) nos será de mucha utilidad ya que permite definir funciones de una manera muy astuta, algebraicamente hablando.

Definición 3.1.1. *Sea $p : E \to B$ una función continua entre dos espacios topológicos, al espacio E se le llamará el **espacio total** y a B, el **espacio base**.*

Definición 3.1.2. *Sea X un espacio topológico, $f : X \to B$ una función continua, y $f_t : X \to B, (0 \leq t \leq 1)$, una homotopía de f. Se dice que $f^* : X \to E$ es un **levantamiento** de f relativa a p (f se levanta en f^*) si $pf^* = f$.*
*Similarmente, una homotopía $f_t^* : X \to E, (0 \leq t \leq 1)$, de f se dice que es un **levantamiento** de la homotopia f_t relativa a p (o que f_t se levanta en f_t^*) si $pf_t^* = f_t$.*

Definición 3.1.3. *La función $p : E \to B$ se dice que tiene la **propiedad de levantamiento de homotopía** o también conocida como propiedad de homotopía cubriente **(abreviada PLH)** para el espacio X si, para toda función $f^* : X \to E$ y toda homotopia $f_t : X \to B, (0 \leq t \leq 1)$ de la función $f := pf^* : X \to B$, existe una homotopía $f_t^* : X \to E, (0 \leq t \leq 1)$ de f^* que levanta a la homotopía f_t.*
*Se dice que la función $p : E \to B$ tiene la **propiedad absoluta de levantamiento de homotopía** o tambien conocida como la propiedad absoluta de homotopía cubriente **(abreviada PALH)** si tiene la propiedad de levantamiento de homotopía (PLH) para todo espacio topológico X.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, Rightarrow, "f^*"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "f_t"'] \arrow[ur, dotted, "\exists f_t^*"] & B
\end{tikzcd}$$

La siguiente definición es esencial en el tema central de capítulo

Definición 3.1.4. *Una función $p : E \to B$ se dice que es una* ***fibración*** *(en el sentido de Hurewicz) si tiene la propiedad absoluta de levantamiento de homotopía (PALH). En este caso se dirá que el espacio E es un espacio fibrado sobre el espacio base B con proyección $p : E \to B$. Para cada punto $b \in B$, el subespacio $p^{-1}(b)$ de E se le conocerá como la* ***la fibra sobre*** *b.*

A continuación veremos algunos ejemplos de fibraciones

Ejemplo 3.1.1. Si B es un singulete, entonces toda función $p : E \to B$ es una fibración.

Ejemplo 3.1.2. Si $p : E \to B$ y $q : B \to C$ son fibraciones, entonces $qp : E \to C$ es una fibración.

Ejemplo 3.1.3. Si $p : E \to B$ y $q : C \to D$ son fibraciones, entonces $p \times q : E \times C \to B \times D$ es una fibración.

Ejemplo 3.1.4. Sea $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ el triangulo de $\mathbb{R}^2$ con vertices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, entonces $p : T \to I$ definida como $p(x, y) = x$ es una fibración.

Se espera que el lector este familiarizado con el concepto de **espacio cubriente**, aunque en este texto se dará por completez.

Definición 3.1.5. *Se dice que E es un* ***espacio cubriente*** *sobre B relativo a $p : E \to B$ (o que $p : E \to B$ es una función cubriente) si satisface las siguientes condiciones*
(EC1) La función $p : E \to B$ es suprayectiva

(EC2) Para cada $b \in B$, existe una vecindad conexa U_b de b tal que cada componente de conexidad de $p^{-1}(U)$ es abierta en E y la restricción de p a dicha componente, es un homeomorfismo.

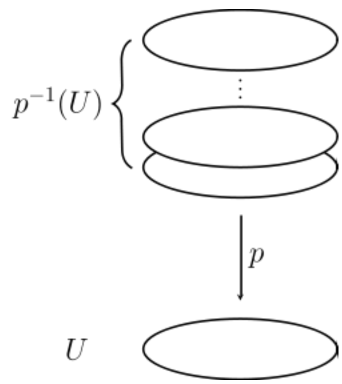

FIGURA 1. La preimagen de U se puede descomponer en componentes de conexidad que uno a uno son homeomorfas a U.

Siempre que se traten con espacios cubrientes, pensemos que B es conexo y localmente conexo por trayectorias. Notemos que como consecuencia inmediata de la condición (EC2) y de las propiedas asignadas al espacio base, se siguen las siguientes 2 condiciones:
(EC3) E es localmente conexo por trayectorias.
(EC4) $p : E \to B$ es una función abierta.

Ejemplo 3.1.5. La recta real $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente sobre $\mathbb{S}^1$ relativo a la función exponencial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ con $p(x) = e^{ix}$

Ejemplo 3.1.6. Si $p : E \to B$ es un homeomorfismo entre E y B, entonces E es un espacio cubirente sobre B relativo al homeomorfismo p.

Ejemplo 3.1.7. Si E es homeomorfo a B producto a algún espacio discreto, entonces E es un espacio cubriente sobre B relativo a la proyección compuesta con el homeomorfismo p.

Ejemplo 3.1.8. El espacio $\mathbb{S}^1$ y el espacio $\mathbb{C} - \{0\}$ son espacios cubrientes sobre si mismos relativos a la función p_n con $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n(z) = z^n$ (pensamos a $\mathbb{S}^1$ como el subconjunto de $\mathbb{C}$ que tienen norma 1).

Ejemplo 3.1.9. Si consideramos la n-esfera unitaria $\mathbb{S}^{\mathrm{n}}$ en el espacio euclidiano $n+1$-dimensional $\mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}$,y despues identificamos los puntos antipodales de $\mathbb{S}^{\mathrm{n}}$, obtenemos el plano proyectivo real n-dimensional $\mathbb{RP}^n$ con proyección natural $p : \mathbb{S}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{RP}^n$. Es facil ver que $\mathbb{S}^{\mathrm{n}}$ es un espacio cubriente sobre $\mathbb{RP}^n$ relativo a p y las fibras son los pares de puntos antipodales en $\mathbb{S}^{\mathrm{n}}$.

Ejemplo 3.1.10. Si G es un grupo topológico conexo por trayectorias y H un subgrupo normal de G, entonces G es un espacio cubriente sobre G/H relativo a la función $p : G \to G/H$ donde p es el homomorfismo natural.

A pesar de la falta de ejemplos de espacios fibrados, resulta ser que los espacios cubrientes serán ejemplos de espacios fibrados, pero para ver esto requeriremos del siguiente lema.

Lema 3.1.6. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente y $f, g : X \to E$ dos levantamientos de la misma función (es decir, $p \circ f = p \circ g$). Si X es conexo y f coincide con g en al menos un punto de X, entonces $f = g$.*

Demostración.
Sea $X_1 = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ y $X_2 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$, queremos ver que X_1 y X_2 son abiertos en X ya que si lo fueran, $X_1 \cup X_2 = X$ pero como X es conexo entonces X_1 o X_2 seria vacio, X_1 no es vacio por hipotesis, entonces X_2 lo es y asi obtenemos que $X_1 = X$, lo cual concluiría la demostración.
Primero veremos que X_1 es abierto, para ello, fijémonos en cualquier punto $x \in X_1$, sea U la vecindad abierta de $pf(x)$ que cumple (EC2) y V una vecindad abierta en E que contiene $f(x)$ y que es homeomorfa a U. Entonces notemos que $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X que contiene a x y esta contenido en X_1. Notemos que esta contenido en X_1 ya que sino, existiria un $x_0 \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, sin embargo $p \mid V$ es un homeomorfismo entre V y U , $f(f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)) \subset V$ entonces $pf(x_0) \neq pg(x_0)$ pero por hipotesis $pf(x) = pg(x)$ para todo $x \in X$, obteniendo asi una contradicción.
Por último para ver que X_2 es abierto, fijémonos en cualquier punto $x \in$

X_2 y la vecindad abierta U de $pf(x)$ que cumple la (EC2) para p. Como $f(x) \neq g(x)$, existen dos abiertos disjuntos en X , V_1 y V_2 , en los que $f(x) \in V_1$, $g(x) \in V_2$ y aparte V_1 y V_2 son homeomorfos a U. Analogamente $f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$ es un subconjunto abierto en X que contiene a x y que esta contenido en X_2. □

Con el resultado anterior ya podemos probar que las funciones cubrientes efectivamente poseen la propiedad absoluta de levantamiento de homotopias. Esta propiedad que satisfacen los espacios cubrientes tambien es conocida como *propiedad de levantamiento único* .

Teorema 3.1.7. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente, entonces $p : E \to B$ es una fibración.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $p : E \to B$ una función cubriente, queremos demostrar que dados $f^* : X \to E$ y $F : X \times I \to B$ (la cual es una homotopía que en $F(x, 0)$ es un levatamiento de $f = p \circ f^*$) , existe un levantamiento de F. Sean $f^* : X \to E$ y $F : X \times I \to B$ como fueron enunciados previamente, queremos que para toda $x \in X$ existe una vecindad abierta N_x de $x \in X$ y una función $F_x^* : N_x \times I \to E$ para la cual $F_{x^*}^* = f^*(x^*)$ donde $x^* \in N_x$ y $pF_x^* = F \mid (N_x \times I)$. Supongamos que tenemos dicha vecindad abierta N_x y función F_x^*. Si $x^{**} \in N_x \cap N_{x'}$, entonces $F_x^* \mid (\{x^{**}\} \times I)$ y $F_{x^*}^* \mid (\{x^{**}\} \times I)$ son dos funciones del espacio conexo $\{x^{**}\} \times I$ en el espacio total E que para toda $t \in I$ cumplen

$$p \circ (F_x^* \mid (\{x^{**}\} \times I))(x^{**}, t) = F(x^{**}, t) = p \circ (F_{x^*}^* \mid (\}x^{**}\} \times I))(x^{**}, t)$$

y

$$(F_x^* \mid (\{x^{**}\} \times I))(x^{**}, 0) = f^*(x^{**}) = (F_{x^*}^* \mid (\{x^{**}\}) \times I(x^{**}, 0)$$

Por el lema pasado obtenemos que $F_x^* \mid (\{x^{**}\} \times I) = F_{x^*}^* \mid (\{x^{**}\} \times I)$, como esto se cumple para todos los $x^{**} \in N_x \cap N_{x^*}$ obtenemos que

$$F_x^* \mid ((N_x \cap N_{x^*}) \times I) = F_{x^*}^* \mid ((N_x \cap N_{x^*}) \times I)$$

, por lo que hay una función continua $F^* : X \times I \to E$ tal que $F^* \mid (N_x \times I) = F_x^*$ y F^* es un levantamiento de F tal que $F^*(x, 0) = f^*(x)$ con $x \in X$. Ahora tenemos que construir la vecindad N_x y función F_x^*. Por la compacidad de I y el hecho de que $p : E \to B$ es una función cubriente, para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta N_x de x y una partición de I

$$0 = t_0 < t_1 ... < t_{n-1} < t_n = 1, I_i = [t_i, t_{i+1}]$$

tal que para todo $i < n$, $F(N_x, I_i)$ esta contenido en algun subconjunto abierto de X el cual cumple la condición (EC2). Pasaremos a mostrar que efectivamente hay una función continua $F_x^* : N_x \times I \to E$ que cumple las propiedades buscadas. Basta definir funciones continuas

$$G_i : N_x \times I_i \to E \text{ con } i < n$$

tales que

$$p \circ G_i = F \mid (N_x \times I_i)$$
$$G_0(x^*, 0) = f^*(x^*) \text{ con } x^* \in N_x$$
$$G_{i-1}(x^*, t_{i-1}) = G_i(x^*, t_{i-1}) \text{ con } x^* \in N_x \text{ , } 0 < i < n$$

porque si tuviesemos dichas funciones, entonces hay una función continua $F_x^* : N_x \times I \to E$ tal que $F_x^* \mid (N_x \times I_i) = G_i$ con $0 < i < n$ y estas son las propiedades deseadas.

Construiremos dichas funciones G_i por inducción sobre i. Para definir G_0, usaremos la vecindad U que cumple (EC2) para p con $F(N_x \times I_0) \subset U$. Sean $\{U_j\}$ la colección de abiertos disjunta de X tal que $p^{-1}(U) = \bigcup U_j$ y p es un homeomorfismo entre U_j y U para toda j. Sea $V_j = {f^*}^{-1}(U_j)$, entonces tenemos que la colección de conjuntos abiertos disjuntos $\{V_j\}$ cubre a N_x y G_0 está definida por ser la única función continua tal que para cada j, G_0 manda a $V_j \times I_0$ en U_j y es un levantamiento de $F \mid V_k^* \times I_0$. Por lo que ya tenemos la base inductiva.

Supongamos que G_{i-1} esta definida para toda $0 < i < k$. Sea U^* la vecindad abierta en X que cumple la (EC2) y que cumple que $F(N_x \times I_{i-1}) \subset U^*$. Sean U_k^* la colección de abiertos disjuntos de E tales que $p^{-1}(U^*) = \bigcup U_k^*$ y p es un homeomorfismo entre U^* y U_k^* para toda k y sea

$$V_k^* = \{x^* \in N_x \mid G_{i-1}(x^*, t_{i-1}) \in U_k^*\}$$

entonces $\{V_k^*\}$ es una colección de abiertos disjuntos que cubren a N_y, y G_i está definida siendo la única función continua tal que para cada k, G_i manda $V_k^* \times I_{i-1}$ en U_k^* y es un levantamiento de $F \mid (V_k^* \times I_{i-1})$. Por lo que ya tenemos definido G_i como queríamos. □

3.2. La propiedad de levantamiento de trayectorias

Definición 3.2.1. *Sean E y B espacios topológicos, denotaremos por Fp al subespacio del producto $E \times C_c(I, B)$ definido por*

$$Fp = \{(e, f) \in E \times C_c(I, B) \mid p(e) = f(0)\}$$

Fp es el conjunto de las trayectorias en B y puntos en E , tales que dicha trayectoria empieza en e y se le conocerá como el producto de fibras (en inglés es Fiber product).

Definiremos la función $q : C_c(I, E) \to Fp$ tomando como regla de correspodencia $q(g) = (g(0), pg)$ para cada $g : I \to E$ en $C_c(I, E)$.

*Diremos que $p : E \to B$ tiene la **propiedad de levantamiento de trayectorias (abreviado PLT)** si existe una función $r : Fp \to C_c(I, E)$ tal* *que qr es la función identidad en Fp. En este caso, r es un homeomorfismo de Fp a un retracto de $C_c(I,E)$.*

La función r asigna a cada $e \in E$ y a cada trayectoria f de B que empieza en $p(e)$, una trayectoria en E que levanta a f. En otros textos si $p : E \to B$ tiene la PLT, se dice que $r : Fp \to C_c(I,E)$ es un levantamiento para p o que r es una función levantamiento de la función cubriente p. Tambien en otros textos como [**2**], [**6**] al conjunto Fp se le denota por Z, $X^I \times_X E$ o $\bar{B}$ y se le conoce por el producto fibrado (fiber product, Fp) [**8**].
A pesar de parecer una definición poco familiar, resulta que si una función $p : E \to B$ posee la propiedad absoluta de levantamiento de homotopias, entonces posee la propiedad de levantamiento de trayectorias y mas aun, estas propiedades se implican entre ellas, como veremos en la próxima proposición.

Proposición 3.2.2. *Una función $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de trayectorias (PLT) si y sólo si tiene la propiedad absoluta de levantamiento de homotopías (PALH).*

Demostración.
En esta demostración se hará gala un poco de lo útil que es el teorema 1.2.8 (La ley exponencial para espacios de funciones)

PLT $\Rightarrow$ PALH
Sea $g : X \to E$ una función continua de X en E y $f_t : X \to B, (0 \leq t \leq 1)$, una homotopia de la función $f = pg$. Notemos que esta homotopía f_t define una función $h : X \to C_c(I,B)$ definida por

$$[h(x)](t) = f_t(x),\ x \in X, t \in I$$

Sea $k : X \to Fp$ la función definida por

$$h(x) = (g(x), h(x)),\ x \in X$$

Por lo que la composición rk es una función entre X a $C_c(I,E)$. En virtud del teorema 1.2.8 (La ley exponencial para espacios de funciones), podemos definir la homotopia $g_t : X \times I \to E, (0 \leq t \leq 1)$, tomando

$$g_t = [rk(x)](t), (x \in X, t \in I).$$

Uno puede ver que $g_0 = g$ y que $pg_t = f_t$ para cada $t \in I$, por lo que se cumple PALH.

PALH $\Rightarrow$ PLT
Sea $\eta : Fp \to E$ la proyección natural definida por $\eta(e,f) = e$ para cada $(e,f) \in Fp$. Definiremos la homotopía $\xi_t : Fp \to B, (0 \leq t \leq 1)$ tomando

$$\xi_t(e,f) = f(t), ((e,f) \in Fp, t \in I).$$

Entonces $\eta_0 = pm$. Por tener la PALH, entonces existe una homotopía $\eta_t : Fp \to E, (0 \leq t \leq 1)$, tal que $\eta_0 = \eta$ y $p\eta_t = \xi_t$ para cada $t \in I$. Tenemos que η_t induce una función $r : Fp \to C_c(I, E)$ definida por

$$[r(z)](t) = \eta_t(z), (z \in Fp, t \in I).$$

Por lo que se puede ver que $qr(z) = z$ para todo $z \in Fp$ y concluimos que $p : E \to B$ tiene la PLT.

□

De aquí obtenemos los siguientes resultados inmediatos.

Corolario 3.2.3. *Si $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de trayectorias, entonces E es una espacio fibrado sobre B relativo a p.*

Corolario 3.2.4. *Si $p : E \to B$ es una función cubriente, entonces p tiene la propiedad de levantamiento de trayectorias.*

3.3. Algunos teoremas de fibraciones

Definición 3.3.1. *Se dice que un subconjunto A de X es un **retracto de vecindad** de X si A es retracto para algun subespacio abierto U de X.*
*Un espacio métrico Y se dice que es un **retracto absoluto (abreviado AR)**, si la imagen de Y es un subconjunto cerrado Z_0 de un espacio métrico Z es necesariamente un retracto de Z.*
*Un espacio métrico Y se dice que es un **retracto absoluto de vecindad (abreviado ANR)** si cuando la imagen de Y es como un subconjunto cerrado Z_0 de un espacio métrico Z es necesariamente una retracto de vecindad de Z.*

Definición 3.3.2. *Sea X un espacio localmente compacto ANR y A un subespacio cerrado de X que tambien es ANR y Y un espacio topológico. Consideremos los espacios de funciones*

$$E = C_c(X, Y) \ , \ B = C_c(A, Y)$$

y la función natural $p : E \to B$ tomando $p(f) = f \mid A$ para toda $f : X \to Y$.

Ahora pasaremos a probar que E es un espacio fibrado sobre B con p como proyección; de hecho probaremos algo aun mas fuerte.

Proposición 3.3.3. *La función natural $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de trayectorias.*

Demostración.
Consideremos el subespacio $Fp = \{(e, f) \in E \times C_c(I, B) \mid p(e) = f(0)$ de $E \times C_c(I, B)$ y la función $q : C_c(I, E) \to Fp$ descrita en el inicio de la sección previa. Construiremos $r : Fp \to C_c(I, E)$ de tal manera que qr sea la identidad.

Consideremos el subespacio cerrado $T = (X \times 0) \cup (A \times I)$ de $X \times I$ (donde A es un subespacio cerrado de X que es ANR) . Este es un retracto de $X \times I$. Sea $\rho : (X \times I) \supset T$ dicha retracción.
Ahora pensemos en el espacio de funciones $C_c(T, Y)$. Para cada $g : T \to Y$ en $C_c(Y, T)$, definimos dos funciones $e : X \to Y$ y $f : I \to C_c(A, Y)$ como sigue:

$$e(x) = g(x, 0), (x \in X)$$
$$[f(t)](a) = g(a, t), (t \in I, a \in A)$$

La continuidad de esta última función sigue de que la función asociada es continua por la proposición (1.2.2). Por lo que la asignación $g \to \theta(g) = (e, f)$ determina una función

$$\theta : C_c(T, Y) \to Fp$$

La demostración de la ley exponencial para espacios de funciones del primer capítulo se puede usar aqui para ver que θ es un homeomorfismo entre $C_c(T, Y)$ y Fp.
Usando el inverso de θ, podemos definir la función $r : Fp \to C_c(I, E)$ tomando

$$\big\{[r(z)](t)\big\}(x) = [\theta^{-1}(z)]p(x, t)$$

para cada $t \in I$ y $x \in X$. Como p es una retracción, se sigue que $qr(z) = z$ para toda $z \in Fp$. $\square$

Nota. La condición de que X es localmente compacto no es esencial. De hecho, el teorema aun funciona sin esta condición, se verá que basta con que X y T son espacios de Hausdorff primero numerables.

Ahora consideremos $\big\{A_\mu \mid \mu \in M\big\}$ y $\big\{Y_\mu \mid \mu \in M\big\}$ familias de subespacios de A y Y respectivamente, ambos indexados por elemenentos del conjunto M. Sea B' el subespacio de B que consiste en las funciones $g \in B$ tal que $g(A_\mu) \subset Y_\mu$ para cada $\mu \in M$. Sea $E' = p^{-1}(B')$ entonces E' es el subespacio de E que consiste en las funciones $f : X \to Y$ tal que $f(A_\mu) \subset Y_\mu$ para cada $\mu \in M$. Usando el Corolario 3.2.3 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.4. *La función $p' : E' \to B'$ es una fibración.*

De hecho, tambien se puede ver facilmente que $p' : E' \to B'$ tiene la PLT. Y esto generaliza la proposición anterior.

Ejemplo 3.3.1. Un ejemplo importante surge al tomar X como el intervalo unitario I. Primero tomemos a A como el singulete $\big\{1\big\}$ en I. En este caso, el espacio E es el espacio Ω de todos las trayectorias en Y, y el espacio B

se puede identificar con el espacio Y de manera fácil. Mas aun, la proyección natural es esencialmente la proyección terminal $p_1 : \Omega \to Y$. Por lo que $p_1 : \Omega \to Y$ tiene PLT por el teorema anterior. Sea Z un subespacio de Y, entonces

$$p_1^{-1}(Z) = [Y; Y, Z]$$

Por el Corolario 3.3.4., obtenemos

Corolario 3.3.5. *Para cualquier subespacio Z de un espacio Y, $[Y; Y, Z]$ es un espacio fibrado sobre Z relativo a la proyección terminal. Similarmente, el espacio $[Y; Z, Y]$ es un espacio fibrado sobre Z relativo a la proyección inicial.*

Ejemplo 3.3.2. Si tomamos $X = I$ y A un subespacio de I que consiste en los puntos frontera 0 y 1 de I. Sea M el conjunto de índices que contiene a un solo elemento μ. Tomaremos A_μ y Y_μ como $1 \in A$ y $y \in Y$, donde y es un punto dado. En este ejemplo, E' se puede identificar con el espacio Ω_y que consiste en todas las trayectorias en Y con punto terminal y como punto terminal, y el espacio B' resulta identificable con la componente de conexidad por trayectorias C_y de Y de manera obvia. Mas aun, la proyección natural p' resulta ser en esencia la proyección inicial p_0.

Obteniendo el siguiente resultado importante.

Corolario 3.3.6. *El espacio Ω_y es espacio fibrado sobre Y relativo a la proyección inicial. La fibra sobre un punto dado $y \in Y$ es el espacio Λ_y de todos los lazos en Y con y punto básico.*

Sea Z un subespacio de Y. Entonces obtenemos el siguiente resultado por el corolario pasado.

Corolario 3.3.7. *Para cualquier subespacio Z del espacio Y y cualquier $y \in Y$, el espacio $[Y; Z, \{y\}]$ es un espacio fibrado sobre Z relativo a la proyección inicial.*

Ahora pasaremos a ver que entre espacios de funciones en los cuales el dominio de las funciones sea el mismo y haya una función entre los espacios rango, existe una función inducida la cual es de cierta manera natural.

Definición 3.3.8. *Sean X, Y, Z espacios topológicos y $\phi : Y \to Z$ una función continua. Para cada $f \in C_c(X, Y)$, la composición $\phi \circ f$ esta en $C_c(X, Z)$. La asignación $f \to \phi \circ f$ define una función*

$$\phi^X : C_c(X,Y) \to C_c(X,Z)$$

que es continua y le llamaremos la ***función inducida*** *ϕ de $C_c(X,Y)$ a $C_c(X,Z)$. (La notación de la función ϕ^X cobra mas sentido si recordamos que $C_c(X,Y)$ en otros textos se denota como Y^X)*

Aquí usaremos un resultado de [**3**, p.110] que no se desarrollará porque la teoria para desarrollarlo es un poco extensa el cual nos dice que:

(**Teorema**) Sea C la categoria compuesta de todos los espacios topológicos y todas las funciones. La operación $Y \to C_c(X,Y)$ y $\phi \to \phi^X$, donde X es un espacio dado, define un functor covariante de C en si mismo.

Mas aun, si tomamos la inyección natural j y la proyección p_a determinada por algún punto $a \in X$, las relaciones de commutatividad

$$j\phi = \phi^X j \ , \ \phi p_a = p_a \phi^X$$

se cumplen en los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\phi"'] \arrow[d, "j"'] & Z \arrow[d, "j"] \\
C_c(X,Y) \arrow[r, "\phi^X"'] & C_c(X,Z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_c(X,Y) \arrow[r, "\phi^X"'] \arrow[d, "p_a"'] & C_c(X,Z) \arrow[d, "p_a"] \\
Y \arrow[r, "\phi"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Como recordatorio, nuestro enfoque va hacia el caso especial e importante de $X = I$.

Sea $\phi : Y \to Z$. Sea $y \in Y$ un punto dado y denotemos con $z = \phi(y) \in Z$. Ahora adoptaremos la siguiente notación:

$$\Omega_y = [Y; Y, y] \ , \ \Lambda_y = [Y; y, y]$$
$$\Omega_z = [Z; Z, z] \ , \ \Lambda_z = [Z; z, z]$$

Y como observación, la función asociación ϕ^I tiene que mandar Ω_y en Ω_z y Λ_y en Λ_z. En general, ϕ^I manda $[Y; A, B] = [Z; \phi(A), \phi(B)]$ para cualesquiera A y B subespacios de Y.

Por lo visto en la sección 2.2, hay multiplicaciones naturales definidas en Λ_y como en Λ_z. Se sigue de la definición que

$$\phi^I(fg) = \phi^I(f)\ \phi^I(g) \ . \ . \ . \ . \ . \ (*)$$

para cada $f \in \Lambda_y$ y $g \in \Lambda_y$. Como ϕ^I es una función continua, esta manda componentes de conexidad por trayectorias de Λ_y en componentes de conexidad por trayectorias de Λ_z. Por la igualdad pasada (*), notemos que ϕ^I induce un homomorfismo del grupo de componentes de conexidad por trayectorias de Λ_y al de Λ_z que es el homomorfismo inducido ϕ_* de $\pi_1(Y,y)$ a $\pi_1(Z,z)$.

Sean Y, Z espacios topológicos, $A \in Y$, $B \in Z$ subespacios, $y_0 \in A$ y $z_0 \in B$. Sean

$$U = [Y; Y, y_0] \ , \ C = [Y; A, y_0]$$
$$V = [Z; Z, z_0] \ , \ D = [Z; B, z_0]$$

llamaremos a $u_0 \in C$ y $v_0 \in D$ los lazos degenerados $u_o(I) = y_0$ y $v_0(I) = z_0$ de cada espacio y sean

$$p : U \to Y \ , \ q : V \to Z$$

las proyecciones iniciales. Nos encaminaremos a establecer el *teorema de la función cubriente*, el cual se demostrará en la siguiente sección.

Teorema 3.3.9. *Sean U, V, C, D, B, Z como fueron definidos anteriormente, si $\psi : U \to Z$ es una función continua tal que $\psi(C) \subset B$ y $\psi(u_0) = z_0$, entonces existe una función $\psi^* : U \to V$ tal que $q\psi^* = \psi$, $\psi^* \subset D$ y $\psi^*(u_0) = v_0$.*

Demostración.
Por la proposición 1.1.4, sabemos que la funcion $\omega : U \times I \to Y$ es continua. Definiremos la función $\sigma : I \times I \times U \to Y$ tomando

$$\sigma(s, t, f) = \omega(f, s + t - st) \ , \ (s \in I, t \in I, f \in U)$$

Por la proposición 1.2.2, la función asociada $\chi : I \times U \to U$ definida por

$$[\chi(t, f)](s) = \sigma(s, t, f) \ , \ (t \in I, f \in U, s \in I)$$

es continua. Sea $\xi = \psi\chi : I \times U \to Z$, por la proposición 1.2.2, la función asociada $\psi^* : U \to V$ definida por

$$[\psi^*(f)](t) = \xi(t, f) \ , \ (t \in I, f \in U)$$

es continua. Ahora nos resta verificar las relaciones $q\psi^* = \psi$, $\psi^*(C) \subset D$ y $\psi^*(u_0)$.
Por la definición de χ, podemos ver que $\chi(0, f) = f$ para todo $f \in U$. Por lo que tenemos que

$$q\psi^*(f) = [\psi^*(f)](0) = \psi\chi(0, f) = \psi(f)$$

para cada $f \in U$. Esto prueba que $q\psi^* = \psi$. $\psi^*(C) \subset D$ es de hecho inmediato a partir de $q\psi^* = \psi$ y $\psi(C) \subset B$. Para ver que $\psi^*(u_0) = v_0$, notemos que $\chi(t, u_0) = u_0$ para cada $t \in I$. Por lo que tenemos

$$[\psi^*(u_0)](t) = \xi(t, u_0) = \psi\chi(t, u_0) = \psi(u_0) = z_0$$

para cada $t \in I$. Esto implica que $\phi^*(u_0) = v_0$. $\square$

Notemos que si se removiera la condición $\psi^*(u_0) = v_0$ en la conclusión del teorema anterior, entonces el teorema pasado se podria demostrar facilmente. Por la proposición 3.3.3., la función $q : V \to Z$ tiene la PLT y por ende, tambien la PALH. Como U es contraible, la aplicación de la PLH para U nos define un levantamiento $\psi^* : U \to V$ de la función $\psi : U \to Z$. Que $\psi^*(C) \subset D$ es obvio pero que $\psi^*(u_0) = v_0$ no ocurre necesariamente.

Definición 3.3.10. *El levantamiento ψ^* construido previamente en la prueba del teorema 3.3.9., se le conocerá como el **levantamiento canónico** de ψ.*

3.4. Fibraciones con fibras discretas

Recordando la importancia de la función exponencial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, pasaremos a establecer algunos resultados similares para espacios fibrados con *fibras discretas*, i.e. funciones en las que todas las fibras son discretas. Sea E un espacio fibrado sobre B relativo a $p : E \to B$.

Lema 3.4.1. *Para cada trayectoria $\sigma : I \to B$ que une a b_0 con b_1 y para cada $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, entonces existe una única trayectoria $\sigma^* : I \to E$ tal que $\sigma^*(0) = e_0$ y $p\sigma^* = \sigma$.*

Demostración.
La trayectoria σ puede ser considerada como una homotopía de la función definida parcialmente $\sigma \mid \{0\}$; por lo que la existencia de σ^* es una consecuencia inmediata de propiedad absoluta de levantamiento de homotopía.

Para probar la unicidad, supongamos que $\sigma^*, \sigma^+ : I \to E$ son dos trayectorias en E tal que $p\sigma^* = \sigma = p\sigma^+$ y que $\sigma^*(0) = e_0 = \sigma^+(0)$. Nos hace falta ver que $\sigma^*(s) = \sigma^+(s)$. Para esto definiremos la siguiente función continua $g : I \to E$ tomando

$$g(t) = \begin{cases} \sigma^*(s - 2st) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \sigma^+(2st - s) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces la función $f = pg : I \to B$ tiene una homotopía $f_r : I \to B$, $(0 \leq r \leq 1)$, definida por

$$g(t) = \begin{cases} \sigma^*(s - 2st + 2rst) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \sigma^+(2st - s + 2rs - 2rst) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como $f_r(0) = \sigma(s) = f_r(1)$ para toda $r \in I$, se sigue por la propiedad absoluta de levantamiento de homotopías que g tiene una $g_r : I \to E$, $(0 \leq r \leq 1)$, tal que

$$pg_r = f_r \ , \ g_r(0) = \sigma^*(s) \ , \ g_r(1) = \sigma^+(s)$$

para cada $r \in I$. Como $f_1(I) = \sigma(s)$, $pg_1 = f_1$ implica que el conjunto $g_1(I)$, que es conexo, está contenido en una fibra sobre $\sigma(s)$ que es discreta. Por lo que, $g_1(I)$ debe de ser un punto singulete. Y se sigue que $\sigma^*(s) = \sigma^+(s)$.

□

Recordemos que dos trayectorias $\sigma, \tau : I \to B$, que unen a b_0 con b_1 son equivalentes $\sigma \sim \tau$ si son homotópicas y la homotopía mantiene fijos los puntos iniciales y finales. Las trayectorias en B que unen a b_0 con b_1 por ende están divididas en clases de equivalencia que son de hecho las componentes por trayectorias de $[B; b_0, b_1]$.

Lema 3.4.2. *El punto terminal $\sigma^*(1)$ de la trayectoria cubriente $\sigma^* : I \to E$ en el lema pasado 3.4.1 depende únicamente de $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ y de la clase de equivalencia del camino $\sigma : I \to B$.*

Demostración.
Supongamos que $\sigma, \tau : I \to B$ son trayectorias equivalentes que unen a b_0 a b_1 y $\sigma^*, \tau^* : I \to E$ son las trayectorias cubrientes con punto inicial común $e_0 = p^{-1}(b_0)$. Basta probar que $\sigma^*(1) = \tau^*(1)$.
Como $\sigma \sim \tau$, entonces existe una homotopía $h_t : I \to B$, $(0 \leq t \leq 1)$, tal que $h_0 = \sigma$, $h_1 = \tau$ y $h_t(0) = b_0, h_t(1) = b_1$, para cada $t \in I$. Por la propiedad absoluta de levantamiento de homotopías, entonces existe un a homotopía $h_t : I \to B$, $(0 \leq t \leq 1)$ tal que $h_0^* = \sigma^*$, $ph_t^* = h_t$, $h_t^*(0) = e_0$ y $h_t^*(1) = \sigma^*(1)$ para cada $t \in I$. Como $h_1^*(0) = e_0$ y $ph_1^* = h_1 = \tau$, se sigue de la unicidad del lema pasado 3.4.1 que $h_1^* = \tau^*$. Por lo que tenemos que

$$\tau^*(1) = h_1^*(1) = \sigma^*(1).$$

□

Lema 3.4.3. *Para cada $b_0 \in B$ y cada $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, la proyección $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ induce un monomorfismo*

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

Demostración.
Sea $\alpha \in \pi_1(E, e_0)$ y $p_*(\alpha) = 1$. Sea $g : I \to E$ un lazo representante de α. Como el lazo $f = pg : I \to B$ representa al elemento $p_*(\alpha) = 1$, entonces existe una homotopía $f_t : I \to B$, $(0 \leq t \leq 1)$, tal que $f_0 = f$, $f_1(I) = b_0$ y $f_t(0) = b_0 = f_t(1)$ con $t \in I$. Por la propiedad absoluta de levantamiento de homotopías, existe una homotopía $g_t : I \to E$, $(0 \leq t \leq 1)$, tal que $g_0 = g$, $pg_t = f_t$ y $g_t(0) = e_0 = g_t(1)$ para cada $t \in I$. Como $f_1(I) = b_0$ y $pg_1 = f_1$,

el conjunto $g_1(I)$ es conexo y está contenido en la fibra $p^{-1}(b_0)$ la cual es discreta. Por ende, $g_1(I)$ debe ser un singulete. Esto implica que $g_1(I) = e_0$ y $\alpha = 1$. $\square$

Entonces tenemos que $\pi_1(E, e_0)$ es isomorfo a un subgrupo $p_*[\pi_1(E, e_0)]$ de $\pi_1(B, b_0)$ que claramente depende de la elección de e_0. En general, no hay relación entre los subgrupos de $p_*[\pi_1(E, e_0)]$ para distintas elecciones de $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ a menos que puedan ser unidos por una trayectoria en E. Por lo que de ahora en adelante, supondremos que E es conexo por trayectorias. Se sigue que B también debe ser conexo por trayectorias.
Sea e_1 otro punto en $p^{-1}(b_0)$. Como E es conexo por trayectorias, entonces existe una trayectoria $\sigma : I \to E$ que une a e_0 con e_1. Y este determina un isomorfismo

$$\sigma_* : \pi_1(E, e_1) \approx \pi_1(E, e_0)$$

Por otro lado, $p\sigma : I \to B$ es un lazo en b_0 y por ende representa un elemento ω en $\pi_1(B, b_0)$. Por las definiciones de p_* y σ_*, se puede ver facilmente que

$$p_*\sigma_*(\alpha) = \omega * p_*(\alpha) * \omega^{-1}$$

para cada $\alpha \in \pi_1(E, e_1)$. Esto implica que $p_*[\pi_1(E, e_1)]$ es la imagen de la función $\omega^{-1} * p_*[\pi_1(E, e_0)] * \omega$ para $p_*[\pi_1(E, e_0)]$.
Por el otro lado, dado ω un elemento de $\pi_1(B, b_0)$, tomemos el lazo representativo $\tau : I \to B$ para ω. Por el lema 3.4.2, el punto $e_1 = \sigma(1)$ en $p^{-1}(b_0)$ depende unicamente del elemento ω. Notemos que $e_0 = e_1$ si y solo si ω esta en el subgrupo $p_*[\pi_1(E, e_0)]$, por lo que obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4.4. *Si E es un espacio fibrado conexo por trayectorias sobre B relativo a $p : E \to B$ con fibras discretas, entonces para cada $b_0 \in B$, las imágenes $p_*[\pi_1(E, e_0)]$ de los monorfismos inducidos*

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

constituyen una clase de subgrupos conjugados de $\pi_1(B, b_0)$ para todo $e_0 \in p^{-1}(b_0)$.

Definición 3.4.5. *A la clase $\chi(E; b_0)$ de subgrupos conjugados*

$$\{p_*[\pi_1(E, e_0)] \mid e_0 \in p^{-1}(b_0)\}$$

de $\pi_1(B, b_0)$ se le llamara la ***clase característica*** *de E en b_0. Cada grupo en $\chi(E; b_0)$ es isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(E)$ de E. $\chi(E; b_0)$ consistirá de un solo grupo si y solo si $p_*[\pi_1(E, e_0)]$ es un subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$, y tambien esto ocurre para cualquier $\chi(E, b_1)$ con $b_1 \in B$. En este caso se dice que el fibrado (E, p, B) es* ***regular****.*
Para un punto dado $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, la correspondencia natural uno a uno se define como sigue: la clase lateral derecha de $p_*[\pi_1(E, e_0)]$ en $\pi_1(B, b_0)$ correspondiente a $e_1 \in p^{-1}(b_0)$ es la que contiene al elemento $\omega \in \pi_1(B, b_0)$

representada por el lazo $p\sigma : I \to B$, donde $\sigma : I \to E$ es cualquier trayectoria que une a e_0 con e_1.

Nota: Las afirmaciones como tanto sus pruebas son validas para espacios con fibras totalmente disconexas por trayectorias. Aqui, se dice que *totalmente disconexo por trayectorias* si los únicos subespacios conexos por trayectorias son singuletes.

Definición 3.4.6. *Sea $p : E \to B$ una función, se dirá que p tiene levantamiento único de trayectorias si para cualesquiera σ y ω trayectorias en E con mismo punto inicial tales que $p \circ \sigma = p \circ \omega$, entonces $\sigma = \omega$.*

En virtud del lema 3.1.6. obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.4.7. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente, entonces p tiene levantamiento único de trayectorias.*

Lema 3.4.8. *Sea $p : E \to B$ una función que tiene levantamiento único de trayectorias, entonces esta tiene la propiedad de levantamiento único para espacios conexos por trayectorias.*

Demostración.
Sea $p : E \to B$ una función que tiene levantamiento único de trayectorias y $f, g : X \to E$ dos funciones tales que $p \circ f = p \circ g$ y $f(x_0) = g(x_0)$ para algún $x_0 \in X$ donde X es un espacio conexo por trayectorias. Sea $x \in X$ y σ una trayectoria en X que una a x_0 con x, entonces $(f \circ \sigma)$ y $(g \circ \sigma)$ son dos trayectorias en E que son levantamientos de la misma función con el mismo origen. Como p tiene levantamiento único de trayectorias, entonces $f \circ \sigma = g \circ \sigma$. Por lo que $f \circ \sigma(1) = g \circ \sigma(1)$ y $f(y) = g(y)$.

$\square$

En el teorema 3.1.7. se concluyo que las proyecciones cubrientes son ejemplos de fibraciones, por lo que nace la pregunta natural por responder de bajo que hipótesis una fibración es una función cubriente. En [**4**, Teorema 10, Sección 4, Capítulo 2], se demuestra que bajo una inocente hipotesis adicional a la de que una fibración posea levantamiento único de trayectorias, entonces es una función cubriente. Ahora caracterizaremos cuando una fibración posee levantamiento único de trayectorias.

Teorema 3.4.9. *Sea $p : E \to B$ una fibración. $p : E \to B$ tiene levantamiento único de trayectorias si y solo si la fibra$p^{-1}(b)$ de cualquier $b \in B$ no tiene trayectorias no constantes.*

Demostración.

p posee LUT $\Rightarrow$ La fibra no tiene trayectorias no constantes
Sea σ una trayectoria en la fibra $p^{-1}(b)$ y sea ω la trayectoria constante en

$p^{-1}(b)$ tal que $\omega(0) = \sigma(0)$. Como $p \circ \omega = p \circ \sigma$, entonces por la hipotesis, $\omega = \sigma$.

La fibra no tiene trayectorias no constantes $\Rightarrow$ p posee LUT
Sean σ y ω trayectorias en E tales que $p \circ \sigma = p \circ \omega$ y $\sigma(0) = \omega(0)$. Definiremos una nueva trayectoria para toda $t \in [0,1]$, η_t en E como

$$\eta_t(s) = \begin{cases} \sigma((1-2s)(t)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \omega((2s-1)(t)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que η_t es una trayectoria en E que une a $\sigma(t)$ con $\omega(t)$, y $p \circ \eta_t$ es un lazo en B que es homotópica a la trayectoria $p\sigma(t)$ relativa al $\big\{\{0\},\{1\}\big\}$. Por la propiedad absoluta de levantamiento de homotopias (PALH) de p, existe una función $f : I \times I \to E$ tal que $f(s,0) = \eta_t(s)$ y f mande $(\big\{0\big\} \times I) \cup (I \times \big\{1\big\}) \cup (\big\{1\big\} \times I)$ en la fibra $p^{-1}(p\omega(t))$. Como $p^{-1}(p\omega(t))$ no tiene trayectorias no constantes, entonces nuestra función obtenida por la PALH, f tiene que mandar el conjunto $(\big\{0\big\} \times I) \cup (I \times \big\{1\big\}) \cup (\big\{1\big\} \times I)$ en un solo punto, por lo que $f(0,0) = f(1,0)$ y por último, $\eta_t(0) = \eta_t(1)$ y $\omega = \sigma$.

$\square$

Lema 3.4.10. *Sea $p : E \to B$ una fibración con levantamiento único de trayectorias y σ y ω trayectorias en E tal que $p \circ \sigma = p \circ \omega$ y $\sigma(0) = \omega(0)$, entonces σ y ω son homotópicas.*

Demostración.

Sea $f : I \times I \to B$ una homotopía relativa al $\big\{\{0\},\{1\}\big\}$ con $f(t,0) = p\sigma(t), f(t,1) = p\omega(t), f(0,t) = p\sigma(0)$ y $f(1,t) = p\sigma(1)$, por la propiedad absoluta de levantamiento de homotopias, existe una función $f^* : I \times I \to E$ tal que $p \circ f^* = f$ y $f^*(t,0) = \sigma(t)$. Por lo que $f^*(0 \times I)$ y $f^*(1 \times I)$ son subconjuntos de $p^{-1}(p\sigma(0))$ y de $p^{-1}(p\sigma(1))$ respectivamente. Por el teorema pasado, los dos conjuntos que son subconjuntos de los anteriores respectivamente, deben ser singuletes. Por lo que f^* es una homotopía relativa al $\big\{\{0\},\{1\}\big\}$ que empieza en σ y termina en algúna trayectoria η tal que $p \circ \sigma = p \circ \eta$ y $\sigma(0) = \eta(0)$. Como tambien $\sigma(0) = \omega(0)$, se sigue por el único levantamiento de trayectorias de p que $\omega = \eta$ y que f^* es una homotopia relativa al $\big\{\{0\},\{1\}\big\}$ que empieza en σ y termina en ω. $\square$

El Teorema 3.4.4. es de gran relevancia ya que nos presenta intuitivamente el motivo detras de las hipótesis para cuando una fibración es un espacio cubriente. Las funciones cubrientes son funciones en las que la fibra es un espacio discreto, como en el teorema se vio que las fibras no poseen trayectorias

no constantes, eso nos permite deducir que la fibra es un espacio totalmente disconexo por trayectorias. Se sabe que los espacios discretos son espacios totalmente disconexos, sin embargo hay espacios totalmente disconexos que no son espacios discretos, como los racionales $\mathbb{Q}$, los irracionales $\mathbb{I}$ o el conjunto de Cantor. Lo que separa a los espacios discretos de estos es que uno es localmente conexo y el otro no, *intuitivamente* los elementos estan muy *pegados*. Por lo que la condición adicional que buscamos al menos nos tiene que separar lo suficiente la fibra, esta condición se introducira a finales del próximo capítulo.
A pesar de los problemas que parecen que podrian aparecer para fibraciones con levantamiento único, resulta ser que particularmente los resultados descritos en el teorema 3.4.4. y definición 3.4.5. se pueden extender para fibraciones con levantamiento único de trayectorias (donde la fibra no es necesariamente discreta, sino totalmente disconexa por trayectorias), la motivación necesaria para esto es obtenida en el siguiente teorema, sin embargo para llegar a estos resultados y el proximo teorema, se requiere desarrollar teoria de categorias, no se desarrollara esta ya que se cree que esta un poco alejado del objetivo de la tesis, sin embargo el resultado que usaremos para la próxima prueba se puede checar en [**4**][Lema 3, Sección 4 ,Capítulo 2], el resultado nos afirma que usando el lema pasado, para cualesquiera dos elementos e_0, e_1 del grupo fundamental del espacio E, entonces p_* mapea $hom(e_0, e_1)$ en $hom(p(e_0), p(e_1))$ de manera inyectiva, particularmente si $e_0 = e_1$, entonces obtenemos la generalización conceptual deseada.

Teorema 3.4.11. *Sea $p : E \to B$ una fibración con levantamiento único de trayectorias. Para cualquier $e_0 \in E$, el homomorfismo*

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

es un monomorfismo.

Capítulo 4

Fibraciones localmente triviales y algunos teoremas

En este capítulo desarrollaremos el concepto de las fibraciones localmente triviales o tambien conocidos como haces fibrados, los cuales generalizan a los espacios cubrientes ya que estos son localmente el producto del espacio base y un espacio discreto, mientras que en las fibraciones localmente triviales, el espacio total es localmente el producto de su espacio base y su fibra.

4.1. Fibraciones localmente triviales

Definición 4.1.1. *Una **fibración localmente trivial** (o también conocido como **haz fibrado**) ξ consiste en una cuaterna $\xi = (E, B, F, p)$, donde E,B, F son espacios topológicos, $p : E \to B$ es una función continua y suprayectiva tal que para todo $b \in B$, existe una vecindad abierta U de b y un homeomorfismo $\phi_U : U \times F \to p^{-1}(U)$ entre $U \times F$ y $p^{-1}(U)$ tales que*

$$p \circ \phi_U(u, f) = u$$

para todo $u \in U$ y $f \in F$. En este caso, llamaremos a E el espacio total, a B el espacio base, a $p^{-1}(b)$ con $b \in B$ se le llamará la fibra de b, a F la fibra y por último a p la proyección.

La idea principal de las fibraciones localmente trivales es que el espacio total tiene estructura de producto local sobre cada punto del espacio base.

Ejemplo 4.1.1. Sean B y F espacios topológicos ,hay una fibración localmente trivial dada por $(B \times F, B, F, p)$ donde p es la proyección del primer factor.

Ejemplo 4.1.2. Sea M una variedad de dimensión n diferenciable y $T(M)$ el conjunto de todos los vectores tangentes a M, hay una fibración localmente trivial dada por $(T(M), M, \mathbb{R}^n, p)$, donde $p : T(M) \to M$ le asigna a cada vector tangente su origen. Este ejemplo es conocido como el haz tangente y es denotado por $\tau(M)$.

Ejemplo 4.1.3. Un ejemplo particularmente util e importante son las llamadas *fibraciones de Hopf* (descubiertas por Hopf en 1935), dichas funciones consisten en 3 fibraciones entre esferas de distintas dimensiones, las cuales son

$$p : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^n \text{ con } n = 2, 4, 8$$

Constuiremos el caso para $n = 2$, para ello, pensaremos a $\mathbb{S}^3$ como la esfera unitaria en el espacio complejo de dos variables $\mathbb{C}^2$, es decir

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2 \mid z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 1 \right\}$$

ahora pensaremos a $\mathbb{S}^2$ como las lineas en el plano proyectivo complejo, es decir, como pares de complejos $[z_1, z_2]$ donde al menos uno es no cero con la relación de equivalencia tal que $[z_1, z_2]$ esta relacionado con $[\lambda z_1, \lambda z_2]$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{ 0 \right\}$. La fibración de Hopf para el caso $n = 2$, $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, viene definida por la regla de correspondencia $p(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3$.

Esta idea es particularmente parecida a la del espacio cubriente, de hecho resulta ser que toda fibración localmente trivial con fibras discretas es un espacio cubriente, sin embargo no todo espacio cubriente es una fibración localmente trivial. Curiosamente, la hipotesis que hace lo suficientemente fuerte al espacio cubriente para ser una fibración localmente trivial, resulta ser muy natural, como veremos a continuación.

Teorema 4.1.2. *Todo espacio cubriente E sobre B con respecto a $p : E \to B$ con B conexo, es una fibración localmente trivial.*

Demostración.
La prueba usa esencialmente la conexidad de B y la propiedad $(EC2)$ de la definición de espacio cubriente.
Notemos que como $p : E \to B$ es una función cubriente, entonces por la condición $(EC2)$, tenemos que para cada $b \in B$, existe una vecindad conexa V_b de b tal que cada componente de conexidad de $p^{-1}(V)$ es abierta en E y la restricción de p a dicha componente, es un homeomorfismo. Proponemos al espacio discreto $F = \left\{ p^{-1}(b) \right\}$ para toda $b \in B$ como el espacio de puntos disjuntos en el que la cardinalidad del conjunto de puntos es igual a la cardinalidad del conjunto de componentes de conexidad de $p^{-1}(V)$ (esto se vale ya que por la conexidad de B, la preimagen de toda vecindad tiene la misma cardinalidad).

Por lo que veremos que $\xi = (E, B, F, p)$ efectivamente es una fibración localmente trivial. Por definición p es continua y suprayectiva, y para todo $b \in B$ por la condición $(EC2)$, existe una vecindad abierta U (que de hecho es conexa) de b. Tomamos como homeomorfismo ϕ_U la restricción de p^{-1} a la vecindad obtenida por $(EC2)$, que por hipotesis, es homeomorfismo. Y claramente tenemos que

$$p \circ \phi_U(u, f) = u \text{ para todo } u \in U \text{ y } f \in F$$

□

Como mencionamos anteriormente, es natural pedir que B sea un espacio topológico conexo dentro de la definición de espacio cubriente, ya que esto nos permite evitar casos patológicos como el siguiente.

Ejemplo 4.1.4. Sea $E = \{a, b, c\}$ y $B = \{ab, c\}$, ambos dotados con la topología discreta y p la función que tiene la regla de correpondencia $p(a) = p(b) = ab$ y $p(c) = c$. Esta función claramente es cubriente pero no puede ser una fibración localmente trivial ya que la cardinalidad de la fibra de ab y la de c son distintas y por ende no puede existir el espacio topológico F.

Pasaremos a ver la relación entre las fibraciones localmente triviales y las fibraciones de Hurewicz, pero para ello, tendremos que construir un poco de teoria usando la propiedad de levantamiento de trayectorias la cual como se vio, es equivalente al ser fibración de Hurewicz.

Definición 4.1.3. *Sea $p : E \to B$ una función, diremos que p es una fibración local (en el sentido de Hurewicz) si existe una cubierta $\{U_j\}_{j \in J}$ de B para la cual la función restringida a $p^{-1}(U_j)$*

$$p\mid_{p^{-1}(U_j)} : p^{-1}(U_j) \to U_j$$

es una fibración (de Hurewicz) para toda $U_j \in \{U_j\}_{j \in J}$.

Claramente tenemos que toda fibración es una fibración local y que toda fibración localmente trivial es una fibración local.

Definición 4.1.4. *Sea $p : E \to B$ y $F \subset C_c(B, I)$, definiremos el conjunto $\tilde{F} = \{(e, f, s) \in E \times F \times I \mid f(s) = p(e)\}$. Un **levantamiento extendido sobre** F es una función $\Upsilon : \tilde{F} \to C_c(I, E)$ que cumple*

$$p(\Upsilon(e, f, s)(t)) = f(t) \text{ y } \Upsilon(e, f, s)(s) = e$$

Observemos que un levantamiento extendido es una función que levanta trayectorias en trayectorias que pasan por algún punto de E dado un parámetro.

Pasaremos a ver el siguiente lema que relaciona la propiedad previa con la propiedad de levantamiento de trayectorias.

Lema 4.1.5. *Una función $p : E \to B$ posee la propiedad de levantamiento de trayectorias (PLT) si y solo si existe un levantamiento extendido sobre $C_c(I, B)$.*

Demostración.
Levantamiento extendido sobre $C_c(I, B) \Rightarrow p : E \to B$ posee la PLT
Si Υ es un levantamiento extendido sobre $C_c(I, B)$, podemos definir una función r como $r(e, f) = \Upsilon(e, f, 0)$

$p : E \to B$ posee la PLT $\Rightarrow$ Levantamiento extendido sobre $C_c(I, B)$
Para toda trayectoria f de B definiremos las siguientes trayectorias $f_s(t)$ y $f^s(t)$ de B como

$$f_s(t) = \begin{cases} f(s-t) & 0 \leq t \leq s \\ f(0) & s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$f^s(t) = \begin{cases} f(s+t) & 0 \leq t \leq 1-s \\ f(1) & 1-s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Y las funciones que al par (f, s) le asigna f^s o f_s claramente son funciones continuas entre $C_c(I, B) \times I \to C_c(B, I)$ por el lema del pegado y como fueron definidas. Sea $r : Fp \to C_c(I, E)$ tal que r es el inverso derecho de $g : C_c(I, E) \to Fp$, definiremos el levantamiento extendido Υ sobre $C_c(I, B)$ como

$$\Upsilon(e, f, s)(t) = \begin{cases} r(e, f_s)(s-t) & 0 \leq t \leq s \\ r(e, f^s)(t-s) & s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\square$

Para ver que una fibración local es una fibración de Hurewicz, necesitamos acomodar varios levantamientos extendidos sobre distintos abiertos de $C_c(B, I)$. Sin embargo, requerimos pedirle algo a estos abiertos que cubriran a nuestro espacio, por lo que requerimos de la siguiente definición.

Definición 4.1.6. *Una cubierta U de un espacio topológico X se dice **numerable** si es localmente finita (esto es que para todo punto solo hay un número finito de elementos de la cubierta que contienen dicho punto) y existe una función continua de $f_U : X \to [0, 1]$ tal que $U = \{x \in X \mid f_U(x) \neq 0\}$.*

Lema 4.1.7. *Sea $p : E \to B$ una función. Si existe una cubierta numerable $\{U_j\}_{j\in J}$ de $C_c(I, B)$ tal que existe un levantamiento extendido sobre U_j para toda $j \in J$, entonces $p : E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de trayectorias.*

DEMOSTRACIÓN.
Para todo $j \in J$ sea la función $f_j : C_c(I, B) \to I$ tal que $U_j = \{f \in C_c(I, B) \mid f_j(f) \neq 0\}$. Para todo subconjunto $\alpha \subset J$, sea $U_\alpha = \bigcup_{j\in\alpha} f_j(f)$ y la función $f_\alpha : C_c(B, I) \to \mathbb{R}$ como

$$f_\alpha(f) = \sum_{j\in\alpha} f_j(f)$$

tenemos que notar que esta función es continua y esta bien definitda porque es una suma finita de funciones continuas ya que la cubierta $\{U_j\}_{j\in J}$ es una cubierta numerable. Por lo que para toda función $f \in C_c(B, I)$ tenemos que $f_\alpha(f) \geq 0$ y que $U_\alpha = \{f_\alpha(f) \neq 0\}$. Pasaremos a definir $Fp_\alpha = \{(e, f) \in Fp \mid f \in U_\alpha\}$, para poder considerar el conjunto de pares (α, λ_α), donde $\alpha \subset J$ y $\lambda_\alpha : Fp_\alpha \to C_c(E, I)$ es una función tal que $\lambda_\alpha(e, f)(0) = e$ y $p\lambda_\alpha(e, f)(t) = f(t)$ (λ_α es un levantamiento sobre Fp_α).

A este conjunto le podemos dotar un orden parcial $\leq$ considerando que $(\alpha, \lambda_\alpha) \leq \beta, \lambda_\beta$ cuando $\alpha \subset \beta$ y $\lambda_\alpha(e, f) = \lambda_\beta(e, f)$ cuando $(e, f) \in Fp_\alpha$ y $f_\alpha(f) = f_\beta(f)$. Notemos que si $(e, f) \in Fp_\alpha$ y $\lambda_\alpha(e, f) \neq \lambda_\beta(e, f)$ entonces $f \in U_j$ con $j \in \beta - \alpha$. Ahora veremos que todo subconjunto simplemente ordenado $\{\alpha_i, \lambda_{\alpha i}\}$ tiene una cota superior, sea $\beta = \bigcup_{i\in I} \alpha_i$, definiremos $\lambda_\beta : Fp_\beta \to C_c(I, E)$ de tal manera que $(\alpha, \lambda_{\alpha i}) \leq (\beta, \lambda_{\beta i})$ para toda $i \in I$. Sea V cualquier subconjunto abierto de U_β que se interseca con solo un número finito de de U_j con $j \in \beta$, llamemoslos $U_{j_1}, ..., U_{j_r}$, U_β puede cubrirse con dichos subconjuntos abiertos V. Tomemos $i \in I$ de tal manera que todos los $j_1, ..., j_r$ esten en α_i. Entonces si $\alpha_i \subset \alpha_k$, entonces las restricciones sobre V de f_{α_i} y f_{α_k} son iguales. Se sigue de $(\alpha_i, \lambda_{\alpha i}) \leq (\alpha_k, \lambda_{\alpha k})$ que $\lambda_{\alpha_i}(e, f) = \lambda_{\alpha_k}(e, f)$ para toda $(e, f) \in Fp_{\alpha i}$ con $f \in V$. Por lo que existe una función $f_\beta : Fp_\beta \to C_c(I, E)$ tal que $\lambda_\beta(e, f) = \lambda_{\alpha_i}(e, f)$ con una α_i lo suficientemente grande. Lo que queremos ver es que efectivamente hay un elemento maximal (α, λ_α), para ello usaremos el lema de Zorn el cual nos dice que

(Lema de Zorn) *Sea P un conjunto parcialmente ordenado que tiene la propiedad de que toda cadena tiene una cota superior en P. Entonces existe al menos un elemento maximal en P*

por lo que nos falta ver que efectivamente $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}) \leq (\beta, \lambda_\beta)$. Para esto si $(e,f) \in Fp_{\alpha_i}$ y $\lambda_{\alpha_i}(e,f) \neq \lambda_\beta(e,f)$, entonces existe α_k tal que $(\alpha_{i,\lambda_{\alpha_i}}) \leq (\alpha_k, \lambda_{\alpha_k})$ por lo que $\lambda_{\alpha_i}(e,f) \neq \lambda_{\alpha_k}(e,f)$. Por lo que f debe estar en algun U_j con $j \in \alpha_k - \alpha_i$, de aqui se sigue que $f \in U_j$ para algún $j \in \beta - \alpha$, por lo que $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}) \leq (\beta, \lambda_\beta)$.

Para terminar la prueba solo nos falta ver que $\alpha = J$. Supongamos que no, entonces hay un elemento $j_0 \in J - \alpha$, sea $\beta = \alpha \cup \{j_0\}$, definiremos $g : U_\beta \to \mathbb{R}$ con la regla de correspondencia $g(f) = \dfrac{f_\alpha(f)}{f_\beta(f)}$. Entonces $0 \leq g(f) \leq 1$, $g(f)$ es distinto de 0 si y solo si $f \in U_\alpha$ y $g(f)$ es distinto de 1 si y solo si $f \in U_{j_0}$. Definimos la siguiente función $\mu : Fp_{j_0} \to E$ por

$$\mu(e,f) = \begin{cases} e & 0 \leq g(f) \leq \frac{1}{3} \\ \lambda_\alpha(e,f)(2g(f) - \frac{2}{3}) & \frac{1}{3} \leq g(f) \leq \frac{2}{3} \\ \lambda_\alpha(e,f)(g(f)) & \frac{2}{3} \leq g(f) \leq 1 \end{cases}$$

Como μ fue definida, es continua. Sea Υ el levantamiento extendido sobre U_{j_0} y definamos $\lambda_\beta : Fp_\beta \to C_c(I,E)$ como

$$\lambda_\beta(e,f)(t) = \begin{cases} \Upsilon(e,f,0)(t) & 0 \leq g(f) \leq \frac{1}{3} \\ \lambda_\alpha(e,f)(t) & (\frac{1}{3} \leq g(f) \leq \frac{2}{3}) \wedge (0 \leq t \leq 2g(f) - \frac{2}{3}) \\ \Upsilon(\mu(e,f), f, 2g(f) - \frac{2}{3})(t) & (\frac{1}{3} \leq g(f) \leq \frac{2}{3}) \wedge (2g(f) - \frac{2}{3} \leq t \leq 1) \\ \lambda_\alpha(e,f)(t) & (\frac{2}{3} \leq g(f) \leq 1) \wedge (0 \leq t \leq g(f)) \\ \Upsilon(\mu(e,f), f, g(f))(t) & (\frac{2}{3} \leq g(f) \leq 1) \wedge (g(f) \leq t \leq 1) \end{cases}$$

Entonces λ_β es una función levantamiento bien definida sobre U_β. Mas aun, para todo $(e,f) \in Fp_\alpha$ si $\lambda_\alpha(e,f) \neq \lambda_\beta(e,f)$, entonces $g(f) \neq 1$ y $f \in U_{j_0}$. Como $j_0 \in \beta - \alpha$ eso significa que $(\alpha, \lambda_\alpha) < (\beta, \lambda_\beta)$, lo que contradice la maximalidad de (α, λ_α) y concluye la prueba. $\square$

Lema 4.1.8. *Sea $p : E \to B$ una función continua. Si existen subconjuntos $U_1, ..., U_k$ de B tales que existe un levantamiento extendido sobre $C_c(I,U_1), ..., C_c(I,U_k)$, entonces existe un levantamiento extendido sobre el siguiente subconjunto de $C_c(I,B)$*

$$V = \left\{ f \in C_c(I,B) \mid f([\tfrac{i-1}{k}, \tfrac{i}{k}]) \subset U_i \text{ con } i = 1, ..., k \right\}$$

Demostración.

Sea Υ_i el levantamiento extendido sobre $C_c(I,U_i)$ con $i = 1, ..., k$, si $f \in V$, definiremos f_i la trayectoria en B como

$$f_i(t) = \begin{cases} f(\frac{i-1}{k}) & t \in [0, \frac{i-1}{k}] \\ f(t) & t \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}] \\ f(\frac{i}{k}) & [\frac{i}{k}, 1] \end{cases}$$

Dados $(e, f, s) \in \tilde{F}$ tal que $\frac{n-1}{k} \leq s\frac{n}{k}$, definiremos $e_i \in E$ para $i = 0, ..., 1$ inductivamente de tal manera que

$$e_{n-1} = \Upsilon_n(e, f_n, s)(\tfrac{n-1}{k})$$
$$e_n = \Upsilon_n(e, f_n, s)(\tfrac{n}{k})$$
$$e_{n-1} = \Upsilon_i(e_i, f_i, \tfrac{i}{k})(\tfrac{i-1}{k}) \ 0 < i < n-1$$
$$e_{i+1} = \Upsilon_{i+1}(e_i, f_{i+1}, \tfrac{i}{k})(\tfrac{i+1}{k})$$

Un levantamiento extendido Υ sobre V se puede definir por

$$\Upsilon(e, f, s)(t) = \begin{cases} \Upsilon_i(e_i, f_i, \frac{i}{k})(t) & \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k} \leq \frac{n-1}{k} \\ \Upsilon_n(e, f_n, s)(t) & \frac{n-1}{k} \leq t \leq \frac{n}{k} \\ \Upsilon_{i+1}(e_i, f_{i+1}, \frac{i}{k}) & \frac{n}{k} \leq \frac{i}{k} \leq t \leq \frac{i+1}{k} \end{cases}$$

□

Ahora probaremos el resultado principal en el camino entre las fibraciones locales (no las fibraciones localmente triviales) y las fibraciones de Hurewicz.

Teorema 4.1.9. *Sea $p : E \to B$ y $\{U_j\}_{j\in J}$ una cubierta numerable de B tal que para todo $U_j \in \{U_j\}_{j\in J}$, $p \mid p^{-1}(U_j) : p^{-1}(U_j) \to U_j$ es una fibración de Hurewicz, entonces p es una fibración de Hurewicz.*

Demostración.
Sea $k \leq 1$, e indices $j_1, ..., j_k$, definiremos el subconjunto de $C_c(I, B)$, $V_{j_1,j_2,...,j_k}$ como

$$V_{j_1,j_2,...,j_k} = \{f \in C_c(I, B) \mid f([\tfrac{i-1}{k}, \tfrac{i}{k}]) \subset U_{j_i}, i = 1, ..., k\}$$

Notemos que la colección de $\{V_{j_1,j_2,...,j_k}\}$ donde k varia, es una cubierta abierta de $C_c(I, B)$, y por el lema pasado, cada conjunto $V_{j_1,...,j_k}$ tiene una función que funciona como levatamiento extendido sobre aquel conjunto. Para k fijo la colección $\{V_{j_1,j_2,...,j_k}\}$ es localmente finita. Mas aun para cada $f \in C_c(I, B)$ y $i = 1, ..., k$, hay una vecindad W_i de $f([\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}])$ que interseca a solo un número finito de U_j. Por lo que $[\bigcap_{1\leq i\leq k}([\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}], W_i)$ es una vecindad de f que solo interseca a un número finito de $\{W_{j_1,j_2,...,j_k}\}$.
Para cada $j \in J$, definiremos la función continua $f_j : B \to I$, de tal manera que $f_j(b) \neq 0$ si y solo si $b \in U_j$. Pasaremos a definir la función continua $\overline{f}_{j_1,...,j_k} : C_c(I, B) \to I$

$$\overline{f}_{j_1,...,j_k}(f) = \text{ínf}\left\{f_{j_i}f(t) \mid \tfrac{i-1}{k} \leq t \leq \tfrac{i}{k}, i = 1, ..., k\right\}$$

Entonces $f_{j_1,...,j_k}(f) \neq 0$ si y solo si $f \in V_{j_1,...,j_k}$. Esta colección $\left\{V_{j_1,...,j_k}\right\}$ no es localmente finita por lo que tendremos que modificar ligeramente los conjuntos $V_{j_1,...,j_k}$. Dado m, la colección $\left\{V_{j_1,...,j_k}\right\}_{k<m}$ es localmente finita, la suma de las funciones $\overline{f}_{j_1,...,j_k}$ con $k < m$ es una función real continua g_m en $C_c(I, B)$. Pasaremos a definir $f'_{j_1,...,j_m} : C_c(I, B) \to I$ como

$$f'_{j_1,...,j_m} = \text{ínf}(\sup(0, \overline{f}_{j_1,...,j_m} - mg_m), 1)$$

Y definiremos el conjunto $V'_{j_1,...,j_m} = \left\{f \in C_c(I, B) \mid f'_{j_1,...,j_m}(f) \neq 0\right\}$. Notemos que $V'_{j_1,...,j_m} \subset V_{j_1,...,j_m}$, por lo que hay un levantamiento extendido sobre este conjunto $V'_{j_1,...,j_m}$. Notemos que para acabar, por el lema 4.1.7 lo que falta es ver que la colección $\left\{V'_{j_1,...,j_k}\right\}$ es una cubierta localmente finita de $C_c(I, B)$.
Sea $f \in C_c(I, B)$, sea m el entero mas pequeño para el cual $\overline{f}_{j_1,...,j_m}(f) \neq 0$ para algun $j_1, ..., j_m$. Entonces $g_m(f) = 0$ y $f'_{j_1,...,j_m}(f) = \overline{f}_{j_1,...,j_m} \neq 0$. Por lo que $f \in V'_{j_1,...,j_m}$, por lo que efectivamente la colección $V_{j_1,...,j_m}$ es una cubierta $C_c(I, B)$. Para mostrar ques es localmente finita, escojamos una n de tal manera que $m < n$ y $\frac{1}{n} < \overline{f}_{j_1,...,j_m}$.Entonces $\frac{1}{n} < g_n(f)$ y $1 < ng_n(f)$. Por lo que $1 < ng_n(f')$ para todo f' en una vecindad W de f. Por lo que todas las funciones $f'_{j_1,...,j_k}$ se vuelven cero si $k \geq n$ en V. Esto significa que el conjunto $V'_{j_1,...,j_k}$ tiene intersección vacia con V. Como la colección $\left\{V'_{j_1,...,j_k}\right\}$ con $k < n$ es localmente finito, la colección $\left\{V'_{j_1,...,j_k}\right\}$ para toda k es localmente finita.

□

Por lo que obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.10. *Si B es un espacio Hausdorff paracompacto, entonces la función $p : E \to B$ es una fibración de Hurewicz si y solo si es una fibración local.*

Demostración.
Para ver que si $p : E \to B$ es una fibración local, entonces tambien es una fibración de Hurewicz, notemos que toda cubierta abierta de un espacio Hausdorff paracompacto tiene un refinamiento numerable, por lo que por el Teorema 4.1.9., p es una fibración de Hurewicz.
Para la ida, toda fibración de Hurewicz es una fibración local, por lo que queda demostrado. □

Particularmente toda fibración localmente trivial es una fibración local (¡buen uso de notación!), por lo que obtenemos el resultado al que se queria llegar.

Corolario 4.1.11. *Si (E, B, F, p) es una fibración localmente trivial con espacio base B Hausdorff paracompacto, entonces p es una fibración de Hurewicz.*

4.2. Algunos teoremas y aplicaciones importantes de la teoría

Antes de anunciar el teorema de levantamiento, daremos la motivación necesaria.
En topología algebraica, cuando se estudia el grupo fundamental, se estudia principalmente el levantamiento de trayectorias en E a un espacio cubriente suyo B. Analogamente nosotros pensamos el problema para cualquier espacio X, no solo el caso $X = I := [0, 1]$. Con $f : X \to B$ y $p : E \to B$,la pregunta que surge naturalmente es ¿bajo que condiciones existe una función $g : X \to E$ tal que el siguiente diagrama de funciones

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\exists g?"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo? O planteado de otra manera, ¿ cuando hay una p tal que levanta a f via p?.

Una condición necesaria es facil de obtener si consideramos el grupo fundamental y las funciones inducidas en estas. Ya que si dicha función g existe entonces obtenemos el siguiente diagrama de grupos y morfismos

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(E) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(X) \arrow[ur, "g_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(B) \end{tikzcd}$$

La existencia del homomorfismo $g_* : \pi_1(X) \to \pi_1(E)$ que hace el diagrama conmutar, es exactamente equivalente como p_* es monorfismo a que la imagen de f_* este contendia en la imagen de p_* . Lo que es sorprendente de esta condición es que no solo es necesaria, sino que tambien es suficiente, como lo probaremos en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 (El teorema de levantamiento).
Sea $p : E \to B$ una función cubriente y $f : X \to B$ una función continua. Existe una única función $g : X \to E$ tal que $g : (X, x_0) \to (E, e_0)$ tal que

$$g(x_0) = e \text{ y } pg = f$$

si y solo si la imagen de $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ *esta contenido en la imagen de* $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$

Demostración.

$\Rightarrow$) La necesidad es facil ya que si $g : (X, x_0) \to (E, e_0)$ y existe f tal que $pg = f$, entonces tenemos que $p_* g_* = f_*$ por lo que la imagen de f_* queda contenida en la de p_*.

$\Leftarrow$) Para construir una función g, sea x un punto arbitrario de X. Entonces existe un camino $\pi : I \to X$ con $\pi(0) = x_0$ y $\pi(1) = x$. La función que es la composición de f y π, $\sigma = f\pi : I \to B$ es un camino en B con $\sigma(0) = f(x_0)$ y $\sigma(1) = f(x)$. Usando el lema 3.4.1., entonces existe un único $\tau : I \to E$ tal que $\tau(0) = e_0$ y $p\tau = \sigma$.
Nosotros afirmamos que el punto $\tau(1)$ de E no depende de la elección del camino $pi : I \to X$. Para probar esto, sea $\pi' : I \to X$ otra trayectoria en X que une a x_0 con x y sea $\tau' : I \to E$ el único camino tal que $\tau'(0) = e_0$ y $p\tau' = f\pi'$. Tenemos que probar que $\tau(1) = \tau'(1)$. El lazo $\lambda = \pi * \pi'^{-1} : I \to X$ representa un elemento $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ y tambien el lazo $f\lambda : I \to B$ representa un elemento $f_*(\alpha)$ de $\pi_1(B, b_0)$. Por nuestra condición , este elemento esta contenido en $p_*\pi_1(B, b_0)$. Por lo que existe un lazo $\mu : I \to E$ en e_0 tal que $p\mu = f\lambda$. Como $\lambda = \pi * \pi'^{-1}$, se sigue de la unicidad de la trayectoria en (3.4.1) que $\tau(t) = \mu(t/2)$ y que $\tau'(t) = \mu(1 - t/2)$ para cada $t \in I$. En particular $\tau(1) = \mu(1/2) = \tau'(1)$, quedando asi demostrada nuestra afirmación.
Por la pasada afirmación, pasaremos a definir una función $g : X \to E$ tomando $g(x) = \tau(1)$ para cada $x \in X$. Por la construcción del punto $\tau(1)$, es obvio que $g(x_0) = e_0$ y $pg = f$.
Sea $x_1 \in X$, para probar la continuidad de g, basta probar que es continua en x_1, para esto veamos que g coincide con una función continua en alguna vecindad continua x_1 en X. Sea $b_1 = f(x_1)$ y $W = B \setminus b_1$ y J la componente de conexidad de $p^{-1}(W)$ que contiene a $g(x_1) = e_1$, la componente de conexidad J es abierta, denotemos con $q : W \to J$ el homeomorfismo tal que $pq(b) = b$, $\forall b \in W$.
Sea $X \supset U = f^{-1}(W)$, tomemos la función continua $h : U \to E$, tomando $h(x) = qf(x)$ con $x \in U$. Obtenemos que $h(x_1) = e_1$ y $ph = f \mid_U$. Probaremos que g coincide con h en una vecindad abierta de x_1 en X.
Como X es localmente conexo por trayectorias y U es una vecindad abierta de x_1 en X, entonces existe una vecindad $V \subset U$ de x_1 en X tal que todo punto de V puede ser unido con x_1 por una trayectoria en U.
Probaremos que $g(x) = h(x)$ $\forall x \in V$, para esto sea $x \in V$, como X es conexo por trayectorias existe $\eta : U \subset X \to I$ tal que $\eta(0) = x_1$ y $\eta(1) = x$ y tambien existe $\xi : I \to X$ tal que $\xi(0) = x_0$ y $\xi(0) = x_1$. Sea $\pi = \xi * \eta : I \to X$ la trayectoria definida de manera natural , sea $\rho = f\xi$ y $\sigma = f\pi$, tomemos

$\theta : I \to E$ la única trayectoria tal que $\theta(0) = e_0$ y $p\theta = \rho$. Por la construcción de g tenemos que $\theta(1) = g(x_1) = e_1$ y por otro lado $h(x_1) = e_1$. Definiremos la trayectoria $\tau : I \to E$ como

$$\tau(t) = \begin{cases} \theta(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ h\eta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces $\tau(1) = h(x)$, por otro lado $p\theta = \rho = f\xi$ y $ph\eta = f\eta$ por lo que $p\tau = \sigma$, mas aun $\tau(0) = \theta(0) = e_0$, por la construcción que tenemos de g tenemos que $\tau(1) = g(x)$. Entonces $g(x) = h(x)$ $\forall x \in V$ y asi queda demostrada la continuidad de g ya que h lo es y coinciden en V es una vecindad abierta de x_1 en X.
Para probar la unicidad, sean g y g' dos funciones continuas de X en E tal que

$$pg = f = pg' \ , \ g(x_0) = r_0 = g'(x_0).$$

Probaremos que $g = g'$. Sea $x \in X$ un punto arbitrario, basta probar que $g(x) = g'(x)$. Hay un camino $\pi : I \to X$ conectando x_0 con x. $\sigma = f\pi$, $\tau = g\pi$, $\tau' = g'\pi$. Por lo que tenemos que

$$p\tau = \sigma = p\tau' \ , \ \tau(0) = e_0 = \tau'(0)$$

Por el lema (3.4.2) entonces $\tau = \tau'$. En particular,

$$g(x) = \tau(1) = \tau'(1) = g'(x)$$

Por lo que la unicidad de la función queda demostrada.

□

Es importante notar que si se omite la condición $g(x_0) = e_0$ del teorema pasado, obtenemos el resultado de que existe una función $g : X \to E$ con $pg = f$ si y solo si f_* manda $\pi_1(X, x_0)$ en un grupo de la clase característica $\chi(E, e_0)$.

Sea E un espacio cubriente sobre B relativo a $p : E \to B$, E' es un espacio cubriente sobre B' relativo a $p' : E' \to B'$, sea $f' : B \to B'$ una función dada. Sean $e_0 \in E$, $b_0 \in B$, $e'_0 \in E'$ y $b'_0 \in B'$ puntos tal que

$$p(e_0) = b_0 \ , \ p'(e'_0) = b'_0 \ , \ f(b_0) = b'_0$$

Las funciones continuas p, p' y f inducen homomorfismos indicados en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(E,e_0) \arrow[r, "g_*"'] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(E',e_0') \arrow[d, "p'_*"] \\ \pi_1(B,b_0) \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(B',b_0') \end{tikzcd}$$

Teorema 4.2.2 (Teorema de la función fibrada)**.**
Existe una única función continua $g : E \to E'$ tal que $g(e_0) = e_0'$ y $p'g = fp$ si y solo si f_* lleva la imagen de p_* en la de p'_*.

Demostración.
Si consideramos la función $fp : E \to B'$ y el teorema de levantamiento 4.2.1 , obtenemos el resultado.

$\square$

Es importante notar que todo espacio topológico X es espacio cubriente de si mismo trivialmente, por lo que el Teorema de levantamiento 4.2.1 es un caso especial del Teorema de la función fibrada 4.2.2., pero como vimos en la demostración del teorema de la función fibrada, el teorema de levantamiento implica el teorema dela función fibrada.
El teorema de la función fibrada tiene consecuencias importantes que se estudiaran en lo que resta del texto.
Si suponemos que $B = B'$ y f es la función identidad en B, obtenemos el siguiente teorema

Teorema 4.2.3 (Teorema de cubrimiento)**.**
Sean E y E' dos espacios cubrientes sobre el mismo espacio B relativo a $p : E \to B$ y $p' : E' \to B$ respectivamente, y sea $b_0 \in B$. Si $e_0 \in E$ y $e_0' \in E'$ son tales que

$$p(e_0) = b_0 = p'(e_0') \ , \ p_*[\pi_1(E,e_0)] \subset p'_*[\pi_1(E',e_0')]$$

entonces existe una única función continua $g : E \to E'$ tal que

$$g(e_0) = e_0' \ , \ p'g = p$$

Mas aun, E es un espacio cubriente sobre E' relativo a g.

Demostración.
La primera afirmación es un caso especial del Teorema de la función fibrada 4.2.2 . Por lo que nos queda probar que E es un espacio cubriente sobre E' relativo a g.
Para ello, verifiquemos la condición **(EC1)**. Sea $e \in E$, $b = p(e)$ y $e' = g(e)$. Escojamos una vecindad abierta conexa V de b en B tal que la condicion **(EC2)** se cumpla tanto para E como para E' sobre B. Sea W la componente

de conexidad de $p^{-1}(V)$ que contiene a e y W' la de $p'^{-1}(V)$ que contiene a e'. Por lo que las restricciones

$$q = p\mid_W \ , \ q' = p'\mid_{W'}$$

son homeomorfismos en V. Como $p'g = p$ tenemos que $g\mid_W = q'^{-1}q$. Por lo que g es un homeomorfismo de W en W'. Esto implica que $g(E)$ es tanto abierto como cerrado en un espacio conexo E'; por lo que entonces la función mapea E en E'.
Ahora verificaremos la condición **(EC2)**. Sea $e' \in E'$ y $b' = p'(e')$. Escojamos una vecindad abierta V de b en B tal que la condición **(EC2)** se cumpla para ambos espacios cubrientes E y E' sobre B. Denotemos con W' la componente de conexidad de $p^{-1}(V)$ que contiene a e'. Entonces W' es una vecindad conexa de e' en E y $g^{-1}(W')$ es la union de conjunto de componentes de $p^{-1}(V)$. Se sigue que cada componente de $g^{-1}(W')$ es un conjunto abierto en E y que es mapeado de manera homeomorfa en W por g.

□

Para dar una aplicación relativamente importante del teorema y luego enunciar el próximo teorema importante, necesitamos de las siguientes definiciones.

Definición 4.2.4. *Se dice que un espacio cubriente E sobre B relativo a la función $p : E \to B$ es una* ***cubriente universal*** *si para todo espacio cubriente E' sobre B relativo a $p' : E' \to B$, existe una función $g : E \to E'$ tal que $p'g = p$ y que E es un espacio cubriente sobre E' relativo a g.*

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ E \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.2.1.

Como se sabe $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$ relativo a la función exponencial, mas aun $\mathbb{R}$ es una cubriente universal de $\mathbb{S}^1$ relativa a la función exponencial ya que como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, su grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R})$ es trivial y por el Teorema de cubrimiento 4.2.3, tenemos el resultado.

Mas aun, notemos que si E es simplemente conexo, entonces el Teorema de cubrimiento 4.2.3 implica que E es una cubriente universal sobre B relativo a $p : E \to B$.

Definición 4.2.5. *Sean E y E' espacios cubrientes sobre el mismo espacio base B relativo a las proyecciones $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$. Se dice que E y E' son **equivalentes** si existe un homeomorfismo $g : E \to E'$ de E en E' con $p'g = p$.*

Es importante recordar que las clases caracteristicas $\chi(E, b_0)$ estan definidas para cada $b_0 \in B$ por el Teorema de levantamiento 4.2.1 y el teorema 3.4.4 .

Teorema 4.2.6 (Teorema de equivalencia)**.**
Para todo punto $b_0 \in B$, dos espacios cubrientes E y E' sobre B relativos a las proyecciones $p : E \to B$ y $p : E' \to B$ son equivalentes si y solo si $\chi(E, b_0) = \chi(E', b_0)$.

Demostración.
E y E' son equivalentes $\Rightarrow \chi(E, b_0) = \chi(E', b_0)$.
Sea $g : E \to E'$ un homeomorfismo entre E y E' tal que $p'g = p$. Sea $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ y $e'(0) = g(e_0)$. Entonces g induce un homeomorfismo g_* de $\pi_1(E, e_0)$ a $\pi_1(E', e'_0)$. En la otra mano, $p'g = p$ nos da que $p'_* g_* = p_*$. Esto implica que $p_*[\pi_1(E, e_0)] = p'_*[\pi_1(E', e'_0)]$ y por ende $\chi(E, b_0) = \chi(E', b_0)$.

$\chi(E, b_0) = \chi(E', b_0) \Rightarrow E$ y E' son equivalentes .
Supongamos que $\chi(E, b_0) = \chi(E', b_0)$. Entonces hay puntos $e_0 \in E$ y $e'_0 \in E'$ tal que

$$p(e_0) = b_0 = p'(e'_0)\ ,\ p_*[\pi_1(E, e_0)] = p'_*[\pi_1(E', e'_0)]$$

Por el Teorema de la función fibrada 4.2.2, existe una función $g : E \to E'$ tal que $g(e_0) = e'_0$ y $p'g = p$. Similarmente, existe una función $h : E' \to E$ tal que $h(e'_0) = e_0$ y $ph = p'$. Ahora consideremos composición $hg : E \to E$. Como $hg(e_0) = e_0$ y $phg = p'g = p$, por la unicidad del Teorema de cubrimiento 4.2.3, obtenemos que hg es la función identidad en E. Análogamente, gh es la función identidad en E'. Por lo que g es un homeomorfismo y los espacios cubrientes E y E' son equivalentes.

□

Notemos que particularmente cualesquiera dos espacios simplemente conexos sobre el mismo espacio base son equivalentes.

Definición 4.2.7. *Un espacio cubriente E sobre un espacio base B relativo a $p : E \to B$ se dice que es **regular** si la fibración $p : E \to B$ es regular, es decir que para todo $b_0 \in B$, $\chi(E, b_0)$ consiste de un solo subgrupo normal de $\pi_1(B, b_0)$.*

Si ahora tomamos E un espacio cubriente regular sobre B relativo a $p : E \to B$ y b_0 en B. Como $\chi(E, b_0)$ es un grupo invariante de $\pi_1(B, b_0)$, el grupo cociente

$$W = \pi_1(B, b_0)/\chi(E, b_0)$$

esta bien definido. Es facil verificar que de hecho como grupo algebraico, W no depende de la elección de $b_0 \in B$. Por lo que tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.8. *El grupo W opera en el lado derecho del espacio cubriente regular E. Mas precisamente, para cada elemento w en el grupo W y para cada punto e del espacio E, le corresponde un único punto en E tal que*

$$(ew_1)w_2 = e(w_1w_2)$$

y, para cada $w \in W$, la correspondencia $e \mapsto ew$ define un homeomorfismo w^* de E en si mismo. Mas aun, la operación tiene las siguientes dos propiedades:
(i) $p(ew) = p(e)$ para cada $e \in E$ y $w \in W$
(ii) Para un $e \in E$ dado, $ew = e$ implica que $w = Id$.

Demostración.
Tomemos un punto $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Por el teorema 3.4.4, hay una correspondencia natural uno a uno $v : W \to p^{-1}(b_0)$ en W hacia $p^{-1}(b_0)$ con $v(1) = e_0$. Para un elemento arbritrario $w \in W$, sea $e_1 = v(w)$. Como E es un espacio cubriente regular sobre B, tenemos

$$p_*[\pi_1(E, e_0)] = p_*[\pi_1(E, e_1)]$$

Por lo que, como en la prueba del Teorema de equivalencia 4.2.6, existe un único homeomorfismo w^* de E en si mismo tal que $w^*(e_0) = e_1$ y $pw^* = p$. Por la construcción de v y w^*, uno puedo verificar que

$$(w_1w_2)^* = w_2^*w_1^* \ , \ (w_1, w_2 \in W)$$

Si el homeomorfismo w^* de E admite un punto fijo $e \in E$, entonces se sigue de la unicidad del Teorema de la función fibrada 4.2.2, que w^* debe ser la función identidad en E. Esto implica que $e_1 = w^*(e_0) = e_0$ por lo que $w = v^{-1}(e_0) = 1$.
De este teorema se sigue de inmediato si tomamos $ew = w^*(e)$ para cada $e \in E$ y $w \in W$.

□

En particular, si E es un espacio cubriente simplemente conexo sobre un espacio B, el grupo fundamental $\pi_1(B)$ actua libremente en E.
En la teoria clásica, a los homeomorfismos w^* en el teorema pasado se les conoce como *deslizamientos* o *transformaciones cubrientes* (del inglés Deck transformations [**9**] o del alemán Deckbewegungen [**6**]) del espacio cubriente regular E. Pasaremos a ver la razón de por la que optaremos por nombrarlos

asi, deslizamientos.

Definición 4.2.9. *Sea E un espacio cubriente sobre B relativo a la función $p : E \to B$, un deslizamiento de E es un homeomorfismo*

$$h : E \to B \text{ con } ph = p$$

Se denota a $D(p)$ como el conjunto de todos los deslizamientos de E (el cual es un subconjuntos de los homeomorfismos de E en si mismo). Mas aun, es facil ver que $D(p)$ es un grupo respecto a la composición como operación.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

La intuición detrás del nombre de deslizamiento es de que uno de estos homeomorfismos desliza (o lleva) un elemento de $p^{-1}(b_0)$ a otro del mismo conjunto sin cambiar la estructura del espacio total.

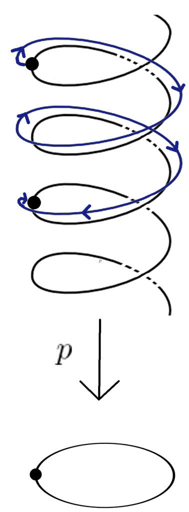

Figura 1. Un elemento de la preimagen del punto es *deslizado* hacia otro elemento de la preimagen.

De la definición de deslizamientose sigue que si h es un deslizamiento, entonces para todo $e \in p^{-1}(b)$ entonces $h(e)$ tambien esta en $p^{-1}(b)$.
Es importante notar que en la literatura matemática al grupo de los deslizamientos $D(p)$ tambien se le conoce como el grupo de las auto-equivalencias

de una fibración de Hurewicz $p : E \to B$, $G(E \mid B)$ (una auto-equivalencia de un espacio es un homeomorfismo del espacio en si mismo que hace que al componer esta función con la fibración sea lo mismo que la función original). Sin embargo por el teorema 3.1.7 como toda función cubriente es una fibración de Hurewicz, optamos por la nomenclatura previa.
Recordando la demostración del teorema 4.2.8, se describe una correspondencia implicitamente entre W y $D(p)$, por lo que entre W y $D(p)$ existe un monomorfismo. Sin embargo un resultado importante que suele demostrarse en cursos de Topologia Algebraica (no se realizara una demostración de este hecho ya que se considera un poco alejado del objetivo de la tesis, para una prueba se puede checar [**2**][p.504] , [**9**][p.72], y [**4**][p.85)]) es el siguiente

(**Teorema**) Sea E un espacio cubriente conexo sobre un espacio B conexo, localmente conexo por trayectorias, entonces el grupo de los deslizamientos $D(p)$ es isomorfo a $N_{\pi_1(B,b_0)}p_*(\pi_1(E,e_0))/\pi_1(E,e_0)$

Por lo que si nuestro espacio cubriente es regular, obtenemos que

$$N_{\pi_1(B,b_0)}p_*(\pi_1(E,e_0)) = \pi_1(B,b_0)$$

y por ende nuestro siguiente corolario

Corolario 4.2.10. *Los grupos W y $D(p)$ son isomorfos.*

Sabemos que los deslizamientos siempre mandan un punto de $p^{-1}(b)$ en otro, por lo que una pregunta natural surge la cual es si dados dos puntos en $p^{-1}(b)$, existirá algún deslizamiento $h \in D(p)$ que lleve un punto al otro (hagase notar que es equivalente esto ya que si tenemos el deslizamiento que lleva un punto a otro, por la estructura de grupo de $D(p)$, hay un deslizamiento el cual es su inverso que lleva el otro punto al original).

En cursos de topología se define que si $p : E \to B$ responde afirmativamente la pregunta anterior para cualesquiera dos puntos en $p^{-1}(b)$, entonces se dice que $p : E \to B$ es normal. Luego se pasa a caracterizar la normalidad de la función en base a si el grupo fundamental del espacio total al mandarlo bajo la función inducida de la función entre el espacio total y el espacio base es normal (como grupo) en el grupo fundamental del espacio base. Como las definiciones de normalidad y regularidad coinciden para esto, obtenemos el siguiente corolario. Notemos que la importancia de la normalidad de ese grupo es lo que nos permite definir correctamente el grupo W ya que es el cociente de dos grupos.

Corolario 4.2.11. *Si B es un espacio localmente conexo por trayectorias, E un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces $p : E \to B$ es regular si y solo si es normal.*

Si juntamos lo anterior con el teorema 4.2.8 , obtenemos el siguiente corolario

Corolario 4.2.12. *Sea E un espacio cubriente sobre B relativo a $p : E \to B$, si E es un espacio regular, conexo, localmente conexo por trayectorias, simplemente conexo y B un espacio localmente conexo por trayectorias, entonces el grupo fundamental $\pi_1(B)$ es isomorfo a $D(p)$ y dicho grupo actua libremente en E.*

En la literatura matemática ([**9**], [**6**]), a las funciones regulares tambien se les conoce como funciones normales o de Galois. Al menos en este texto se distingue para como ahora, entender porque se le conoce por lo mismo. Para el siguiente teorema requeriremos de una hipotesis adicional para el espacio B, la cual definiremos ahora.

Definición 4.2.13. *Se dice que un espacio B es* ***localmente simplemente conexo*** *si para todo $b \in B$ y toda vecindad abierta V_b de b en B, existe una vecindad U_b de b contenida en V_b tal que para cualesquiera $u_0, u_1 \in U_b$, cualesquiera dos trayectorias con punto inicial u_0 y punto final u_1 fuesen homotópicas.*

Definición 4.2.14. *Si una vecindad V_b que cumple lo descrito en la definición pasada particularmente es el espacio B se dice que un espacio B es* ***semi-localmente simplemente conexo****.*

En otros textos como [**4**], a esta condición se le conoce como semi-localmente 1-conexo. Y es equivalente a pensar que todo punto de nuestro espacio posee una vecindad para la cual la función inducida de la inclusión entre el grupo fundamental de la vecindad al grupo fundamental del espacio, es trivial.
Existen muchos ejemplos importantes de espacios semi-localmente simplemente conexo, como todas las variedades y los CW-complejos. En variedades al menos es relativamente facil de intuirlo ya que localmente las variedades son homeomorfas al espacio euclidiano n-dimensional y aqui es facil encontrar dicha vecindad. Sin embargo, hay importantes ejemplos de espacios no semi-localmente simplemente conexos como el arete hawaiano (el cual consiste en la union de círculos de radio $\frac{1}{n}$ con centro en $(0, \frac{1}{n})$) en el plano real o el complemento de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ en el plano real, es facil ver que el arete hawaiano no es semilocalmente simplemente conexo ya que el origen no posee una vecindad que no contenga a ningun circulo y de hecho el grupo fundamental de ambos espacio es no numberable, mas aun el del arete hawaiano particularmente es no contablemente-generado por este motivo, ya que uno puedo definir para toda sucesión $s = (a_n)$ en $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$, un lazo α_s en el arete hawaiano el cual es constante en $[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$ si $a_n = 0$, y α_s ser l_n en $[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}]$ si $a_n = 1$. Tambien definimos $\alpha_s(1) = x_0$, por lo que obtenemos una familia no numerable de clases de homotopía $[\alpha_s]$ en el grupo fundamental del arete hawaiano, resta ver

que ninguna de estas familias son iguales, y esto es una cuenta sencilla por la manera de haber constuido los lazos; que el grupo fundamental del segundo espacio sea no numerable se puede checar en [**1**][Ejemplo 1.2.5]. Tambien es interesante para el primer ejemplo, notar el teorema en [**10**][p.627-632] que enuncia

(**Teorema**) Sea X un espacio topológico, conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias, métrico y compacto. Entonces $\pi_1(X)$ es finitamente generado o es no numerable.

Si recordamos el problema de pensar cuando una función que sea una fibración con único levantamiento de trayectorias, esta propiedad para el espacio total es la propiedad deseada. Intuitivamente el hecho de que los puntos de la fibra posean vecindades cuya función inducida de la inclusión del grupo fundamental de la vecindad al grupo fundamental del espacio total sea trivial, es lo que nos permite *separar* los puntos de la fibra, ya que al existir estas vecindades, no puede ser que los puntos de la fibra esten tan pegados por lo que esto hace que se *discretice* la fibra del espacio. Para una prueba se requiere mucha teoria la cual no se desarrollara en este texto pero se puede encontrar en [**4**][Lema 9, Sección 4, Capítulo 2].

Notemos que todo espacio localmente simplemente conexo es semi-localmente simplemente conexo. Para lo que resta de este escrito, se pensará que B es conexo, localmente conexo por trayectorias y semi-localmente simplemente conexo.

Teorema 4.2.15 (El teorema de existencia)**.**
Para cada subgrupo G del grupo fundamental $\pi_1(B, b_0)$, existe un espacio cubriente E sobre B relativo a $p : E \to B$ y un punto $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ tal que G es exactamente la imagen del homomorfismo inducido

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

Demostración.
Consideremos el espacio de trayectorias $[B; b_0, B]$, sea $p_1 : [B; b_0, B] \to B$ la proyección terminal definida como $p_1(f) = f(1)$ para toda $f \in [B; b_0, B]$. Definiremos una relación de equivalencia dependiente de G, $\simeq_G$, como sigue. Dos trayectorias σ, τ estarán relacionadas si $p_1(\sigma) = p_1(\tau)$ y el elemento que representa al lazo $\sigma \circ \tau^{-1}$ en el grupo fundamental de B, $\pi_1(B, b_0)$ tambien esta en G. Si σ y τ estan relacionadas por esta relación de equivalencia dependiente de G, $\sigma \simeq_G \tau$, diremos que σ y τ son equivalentes modulo G. Sea E el espacio cociente de $\dfrac{[B; b_0, B]}{\simeq_G}$, entonces los elementos de E son precisamente las clases de equivalencias módulo G de las trayectorias de $[B; b_0, B]$. Denotaremos a $[\sigma]$ por la clase que contiene a la trayectoria $\sigma \in [B; b_0, B]$.

Definiremos la función $p : E \to B$, tomando

$$p[\sigma] = p_1(\sigma) \text{ para todo } [\sigma] \in E$$

Por la manera en la que fue definida, p es continua. Como B es localmente conexa por trayectorias, se sigue p es suprayectiva.
Pasaremos a construir una base conveniente para los conjuntos abiertos de E. Sea $e \in E$ y una vecindad U de $p(e) \in B$, tomemos una trayectoria $\sigma \in e$ (en el sentido de que σ pertenece a la clase de equivalencia módulo G) y denotaremos por $N(e, U)$ al subconjunto de E que consiste en las clases que contienen a la trayectoria de la forma $\tau : I \to B$, tal que manera $\tau(t) = \sigma(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$ y $\tau(t) \in U$ si $t \geq \frac{1}{2}$. Claramente $N(e, U)$ no depende de la elección del lazo representativo σ de la clase $e \in E$. En vista de que nuestro espacio B es localmente conexo por trayectorias y semi-localmente simplemente conexo, se sigue que $N(e, U)$ es abierto en E. Por lo que podemos ver que la colección $\{N(e, U)\}$ con $e \in E$ y U vecindad abierta de $p(e)$ en B, es una base para los conjuntos abiertos en E. Por lo que se sigue que $p : E \to B$ es una función abierta.
Probaremos la condición $EC(2)$ para ver que $p : E \to B$ es una función cubriente, en vista de que ya teniamos la condición $EC(1)$ como la función es suprayectiva. Para elllo, supongamos que $b \in B$, sabemos que existe una vecindad conexa por trayectorias U de $b \in B$ tal que para cualesquiera $u_0, u_1 \in U$, cualquier par de trayectorias que unen dichos puntos son homotópicas. Por lo que basta ver que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos $\{N(e, U) \mid e \in p^{-1}(b)\} \subset E$ de tal manera que cada uno de dichos conjuntos abiertos es homeomorfo a U bajo p.
Primero probaremos que $N(e, U)$ es homeomorfo a U y que dicho homeomorfismo es p, para toda $e \in p^{-1}(b)$. Recordemos que por como fue definido $N(e, U)$, se sigue que p manda $N(e, U)$ en U. Como U es conexo por trayectorias, entonces existe una trayectoria $\theta : I \to U$ que une a b con u. Tomemos una trayectoria $\sigma \in [B; b_0, B]$, $[\sigma] = e$ y consideremos la trayectoria $\tau = \sigma\theta$. Notemos que $[\tau] \in N(e, U)$ y $p[\tau] = u$ por lo que esto muestra que p manda $N(e, U)$ en U. Supongamos que hay dos puntos e_0, e_1 en $N(e, U)$, tales que $p(e_0) = p(e_1)$. Notemos que hay dos trayectorias $\tau_0, \tau_1 \in [B; b_0, B]$, tales que $[\tau_i] = e_i$, $\tau_i(t) = \sigma(2t)$ cuando $t \leq \frac{1}{2}$, y $\tau_i(t) \in U$, cuando $t \geq \frac{1}{2}$ (con i=0,1). Como $p(e_0) = p(e_1)$, entonces $\tau_0(1) = \tau_1(1)$, llamaremos a este punto termincal que tienen en común $u \in U$. Denotemos por $\xi_0, \xi_1 : I \to U$ a las trayectorias definidas por

$$\xi_i(t) = \tau_i(\frac{1+t}{2}) \text{ con } i = 0, 1 \text{ y } t \in I$$

Entonces ξ_0 y ξ_1 son dos trayectorias en U que unen a b con v. Por la elección de U, las trayectorias ξ_0 y ξ_1 son homotópicas en B con puntos finales

fijos. Esto implica que τ_0 y τ_1 son homotópicas con puntos finales fijos, por lo que $e_0 = e_1$ y asi queda demostrado que la restricción de p en $N(e, U)$ es inyectiva. Como p es abierta y continua, se sigue que la función p restringida en $N(e, U)$ es un homeomorfismo entre $N(e, U)$ y U.
Ahora probaremos que los $N(e, U)$ con $e \in p^{-1}(b)$, son disjuntos, para ello, supongamos que no lo son, por lo que hay almenos un elemento en común entre $N(e_0, B)$ y $N(e_1, B)$ el cual llamaremos x, tomemos un par de trayectorias $\sigma_0, \sigma_1 \in [B; b_0, B]$ tales que $[\sigma_i] = e_i$ con $i = 0, 1$. Entonces hay un par de trayectorias $[B; b_0, B]$, tales que $[\tau_i] = x$, $\tau_i(t) = \sigma_i(2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$, y $\tau_i(t) \in U$ si $t \geq \frac{1}{2}$. Sean $\xi_0, \xi_1 : I \to U$ dos trayectorias en U que unen a b con $p(x)$, definidas como antes $(\xi_i(t) = \tau_i(\dfrac{1+t}{2})$ con $i = 0, 1$ y $t \in I)$. Por la elección de U, ξ_0 y ξ_1 son homotópicas en B con puntos finales fijos. Por lo que $\tau_0\tau_1^{-1}$ es homotópico a $\sigma_0\xi_0\xi_1^{-1}\sigma_1^{-1}$, pero este es homotópico a $\sigma_0\sigma_1$, entonces $\tau_0\tau_1^{-1}$ es homotópico a $\sigma_0\sigma_1^{-1}$. Como $[\tau_0] = x = [\tau_1]$, $\tau_0\tau_1^{-1}$ representa a un elemento en G, el cual tambien es representado por $\sigma_0\sigma_1$, pero esto implica que $e_0 = e_1$. Por lo que los conjuntos abiertos $N(e, U)$ con $e \in p^{-1}(b)$, son disjuntos.
Por lo que falta probar que $p^{-1}(U)$ es una la unión de los $N(e, U)$ con $e \in p^{-1}(b)$, para ver que E es un espacio cubriente sobre B reltivo a p. Para ello, sea $x \in p^{-1}(U)$ (consideramos este punto ya que como p manda $N(e, U)$ en U, entonces $N(e, U)$ esta contenido en $p^{-1}(U)$, probaremos que hay algún $e \in p^{-1}(b)$ tal que $x \in N(e, U)$. Tomemos una trayectoria $\tau \in [B; b_0, B]$, tal que $[\tau] = x$ y $u = p(x) = \tau(1)$, por la conexidad por trayectorias de U existe una trayectoria $\theta : I \to U$ que une a b con u. Sea $\sigma = \tau\theta^{-1}$ y $\xi = \sigma\theta$. Sea $e = [\sigma]$, como $\sigma(1) = \theta(0) = b$ entonces $e \in p^{-1}(b)$. Notemos que ξ y τ son homotópicas con puntos finales fijos por como fueron construidas, por lo que se obitene que $x = [\tau] = [\xi] \in N(e, U)$. Por lo que $p^{-1}(U)$ es la unión de los $N(e, U)$ con $e \in p^{-1}(b)$. Por lo que efectivamente p posee la propiedad *(EC2)*.
Notemos que al ser E la imagen continua de un espacio conexo por trayectorias $([B; b_0, B])$, entonces E tambien es conexo por trayectorias. Por lo que E es un espacio cubriente sobre B relativo a p.
Sea $\delta \in [B; b_0, B]$ la trayectoria que es constante en b_0, $\delta(I) = b_0$ y $e_0 = [\delta] \in E$. Entonces $p(e_0) = b_0$ y p induce el monorfismo

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

Lo que falta ver es que la imagen de p_* es exactamente dicho subgrupo G de $\pi_1(B, b_0)$. Para ello probaremos antes que si tenemos una trayectoria $\sigma : I \to B$ con $\sigma(0) = b_0$ y el único levantamiento de esta función $\sigma^* : I \to E$ con $\sigma^*(0) = e_0$ (este existe por el lema 3.4.1), entonces para cada $t \in I$, $\sigma^*(t)$ es la clase que contiene a $\sigma_t : I \to B$ siendo $\sigma_t(s) = \sigma(st)$ para toda $s \in I$. Esto se sigue del hecho de que la asignación $t \to \sigma_t$ define una trayectoria

$\tau : I \to [B; b_0, B]$ por la proposición 1.2.9. y que E es una espacio cociente de $[B; b_0, B]$.
Ahora, probaremos que la imagen de p_* es exacatamente G. Sea $\alpha \in \pi_1(E, e_0)$, tomemos algun lazo representante de α, $\sigma^* : I \to E$, por lo que $\sigma = p\sigma^*$ representa al elemento $p_*(\alpha) \in \pi_1(B, b_0)$. Por lo demostrado previamente, tenemos que

$$[\sigma] = \sigma^*(1) = e_0 = [\delta]$$

Por lo que $p_*(\alpha) \in G$.
Si $\beta \in G$, tomemos algun lazo representante de β, $\sigma : I \to B$. Analogamente por el lema 3.4.1, σ tiene un levantamiento único $\sigma^* : I \to E$ con $\sigma^*(0) = e_0$. Por lo demostrado previamente, tenemos que $\sigma^*(1) = [\sigma]$. Como σ representa a $\beta \in G$, entonces $\sigma^*(1) = e_0$. Por lo que σ^* representa une elemento $\alpha \in \pi_1(E, e_0)$. Por lo que $\beta = p_*(\alpha)$ y asi queda demostrado que la imagen de p_* es exactamente G. □

Particularmente, si G es el subgrupo trivial, entonces E es un espacio cubriente simplemente conexo sobre B. Por el teorema de cubrimiento 4.2.3, entonces E es una cubriente universal y por el lema 3.4.3, toda cubriente universal de B es simplemente conexa. Usando el teorema de equivalencia 4.2.6, concluimos que cualesquiera dos cubrientes universales sobre B son equivalentes. Por lo que E es en esencia único, por lo que E seria *el* espacio cubriente universal sobre B.

Teorema 4.2.16 (El teorema de clasificación)**.**
Sea B conexo, localmente conexo por trayectorias y semi-localmente simplemente conexo, entonces las clases de equivalencia de los espacios cubrientes sobre B estan en una relación uno a uno con las clases conjugación de los subgrupos del grupo fundamental $\pi_1(B)$.

Demostración.
Notemos que esto es una consecuencia inmediata del uso simultaneo del teorema de equivalencia 4.2.6 y el teorema de existencia 4.2.15.

□

Antes de ver los ejemplos, probaremos un lema un poco tecnico que nos ayudara a usar un teorema muy conocido.

Lema 4.2.17. *Sean X y Y espacios topológicos Hausforff, X conexo, Y compacto y $f : X \to Y$ un homeomorfismo local. Entonces $f : X \to Y$ es una función cubriente.*

Demostración.
Para ver que efectivamente f es una función cubriente, checaremos que cumple todas las propiedades (EC)
(EC1) Las funciones que son homeomorfismos locales son abiertas, por lo que

$f(X)$ es un conjunto abierto en Y. Como X es compacto y Y es Hausdorff, entonces $f(X)$ es un conjunto cerrado. Por lo que el complemento de $f(X)$ en Y es abierto, pero la unión de $f(X)$ con su complemento es nos proporciona una disconexión del espacio Y. Emtonces alguno de estos dos debe ser el vacio, sin embargo que $f(X)$ lo fuese es ridículo, por lo que su complemento debe ser vacio, y asi obtenemos que $f(X) = Y$, es decir que f es suprayectiva.

(EC2) Notemos que para toda $y \in Y$, el conjunto $\{x \in X \mid x = f^{-1}(y)\}$ es un conjunto finito. Como Y es Hausdorff, $\{\text{ y }\}$ es cerrado, entonces $f^{-1}(y)$ es un conjunto cerrado en X, el cual es Hausdorff, por lo que tambien es compacto. Como f es un homeomorfismo local , para todo $x \in f^{-1}(y)$ nos tomaremos U_x la vecindad tal que al restringirla, es un homeomorfismo la restricción de f a dicha vecindad de x. Por lo que obtenemos una cubierta abierta $\{U_x \mid x \in f^{-1}(y)\}$ es una cubierta de $f^{-1}(y)$, por lo que por la compacidad de $\{f^{-1}(y)\}$, podemos extraer una subcubierta finita $\{U_i\}_{i=1}^{n}$. La función f es inyectiva en cada U_i, por lo que solo hay un elemento de la preimagen de y en cada U_i y y tiene un número finito de preimagenes. Ahora definiremos la vecindad $V = \cap_{i=1}^{n} f(U_i)$ de y, la cual es abierta al ser intersección finita de abiertos. Notemos ahora que la colección $\{f^{-1}(V) \cap U_i\}$ es una colección disjunta de vecindades que son homeomorfas a V usando la restricción de f como homeomorfismo. Por lo que efectivamente se cumple la condición.

□

Los siguientes ejemplos ilustraran mas claramente el teorema de clasificación y el teorema de equivalencia.

Ejemplo 4.2.2. Los espacios cubrientes de $\mathbb{S}^1$. La recta real $\mathbb{R}$ es un espacio cubriente universal sobre $\mathbb{S}^1$ relativo a la función exponencial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. Como $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es un grupo abeliano, se sigue que todo espacio cubriente sobre $\mathbb{S}^1$ es regular. Como $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es un grupo libre cíclico, los subgrupos no triviales de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ son subgrupos libres cíclicos G_n con $n \in \mathbb{N}$, donde G_n es de indice n en $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. El espacio cubriente que corresponde a G_n es $\mathbb{S}^1$ sobre si mismo relativo a la proyección $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$p_n(z) = z^n \quad \text{con } z \in \mathbb{S}^1$$

Estos son esencia todos los espacios cubrientes sobre $\mathbb{S}^1$. Este ejemplo nos muestra que espacios cubrientes sobre el mismo espacio, homeomorfos entre ellos no necesariamente son equivalentes.

Ejemplo 4.2.3. Los espacios cubrientes de $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{RP}^n$ con $n > 1$. Como $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo (un teorema clásico nos dice que si un espacio topológico se puede ver como union de subconjuntos simplemente conexos los cuales poseen una intersección conexa por trayectorias, entonces el espacio topológico es simplemente conexo, y como para todo $\mathbb{S}^n$, si consideramos 2 puntos antipodales, sus complementos son 2 abiertos simplemente conexos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, el cual es simplemente conexo, y es intuitivamente que la intersección es conexa por trayectorias), entonces todo espacio cubriente sobre $\mathbb{S}^n$ es equivalente al espacio trivial cubriente, es decir $\mathbb{S}^n$ con respecto a la identidad. Por otro lado, $\mathbb{S}^n$ es una cubriente universal sobre $\mathbb{RP}^n$ relativo a la proyección natural $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$. Como las fibras de este espacio cubriente son los pares de puntos antipodales en $\mathbb{S}^n$, se sigue por el teorema 3.4.4. que $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ es el grupo cíclico de orden 2, por lo que por el teorema de clasificación 4.2.16 , tenemos que la cubriente universal $\mathbb{S}^n$ es esencialmente el único espacio cubriente no trivial sobre $\mathbb{RP}^n$.

Ejemplo 4.2.4.

Existe un mecanismo conocido como suspensión cardán, el cual es un mecanismo de suspensión consistente en dos aros concéntricos cuyos ejes son ortogonales, lo que permite mantener la orientación de un eje de rotación en un espacio aunque el soporte se mueva. Este mecanismo es usado para montar giróscopos sobre éste. En el problema que se describirá en vez de ser dos aros, son tres y la posición de cada aro se puede representar como $\mathbb{S}^1$, por lo que todas las posibles posiciones del mecanismo quedarian representadas por $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. En modelaje 3D y animación, generalmente al momento de rotar un objeto, al animador se le presentan 3 ejes del objeto que permiten cada uno rotarlo respecto a dicho eje, que también podemos pensar que las rotaciones que permite el software de dicho objeto pueden ser representadas como $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Generalmente en programación, modelaje 3D y animación si uno no es precavido, ocurre un problema relacionado con la afirmación del ejemplo pasado la cual es que $\mathbb{S}^n$ es esencialmente el único espacio cubriente no trivial sobre $\mathbb{RP}^n$. El problema es respecto es la perdida de un grado de libertad en un mecanismo de 3 gimbales, que ocurre una vez 2 de los 3 gimbales son puestos de manera paralela, y de esta manera se bloquea el *sistema* en rotaciones en un espacio degenerado bidimensional.

Esto se debe a que $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ no es un espacio cubriente de $\mathbb{RP}^3$ (claramente $\mathbb{T}^3$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^3$ ya que ni siquiera son homotópicos), por lo que particularmente por lo que se demostró en el teorema pasado, no puede existir una función que sea homeomorfismo local en todo punto, y si no es un homeomorfismo local, particularmente no puede ser un difeomorfismo local en todo punto, por lo que por un resultado clásico mencionado en [**5**][§3], el cual es el *teorema de la función inversa* que dice

(**Teorema de la función inversa**) Supongamos que $f : X \to Y$ es una transformación suave cuya derivada df_x en el punto x es un isomorfismo. Entonces la función f es un difeomorfismo local en x.

por lo que por la negación de este teorema, el rango de la función en algún punto debe reducirse a un número menor a tres, ocurriendo asi, dicho problema. Una manera en la que los que se enfrentan con este problema nace al considerar a la estructura de los cuaterniones ya que $\mathbb{S}^3$ es homeomorfo al conjunto de los cuaterniones que poseen norma 1.

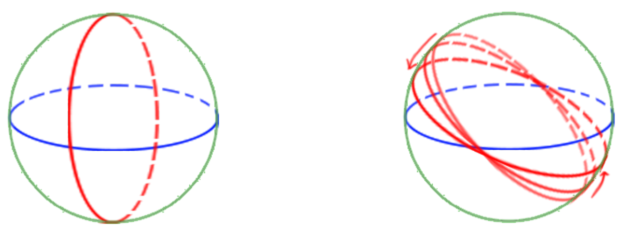

FIGURA 2. En la imagén de la izquierda se ven los 3 ejes de rotación usados, uno por el eje X,otro por el eje Y y el último eje Z. En la imagen de la derecha se observa como mediante una rotación se mueve uno de los circulos de rotación provocando que los circulos de rotación rojo y azul se vuelvan casi paralelos, siendo en el caso que estos dos quedan paralelos, donde ocurre el problema de perdida de grado de libertad.

Bibliografía

[1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2001)

[2] C. Prieto, *Topología básica*, Fondo de Cultura Económica (2003)

[3] Eilenberg and Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press (1952)

[4] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer (1994)

[5] Guillemin and Pollack, *Differential Topology*, American Mathematical Society; Reprint edition (2010)

[6] H. Sze-Tsen, *Homotopy Theory*, Academic Press (1959)

[7] J. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Westview Press (1996)

[8] J. Rotman, *An Introduction To Algebraic Topology*, Springer (1998)

[9] S. Massey, *Algebraic Topology, An Introduction*, Springer (1990)

[10] S. Shelah, *Can the fundamental group of a space be the rationals?*, Proc. A.M.S. 103 (1988)