UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS A LA VALUACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

ELÍAS NOÉ GONZÁLEZ VILLA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO GUERRERO POBLETE
2018

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2018

1. Datos del alumno.
   González
   Villa
   Elías Noé
   5527149903
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   305160274

2. Datos del tutor.
   Dr.
   Fernando
   Guerrero
   Poblete

3. Datos de Sinodal 1.
   Dr.
   Sergio Iván
   López
   Ortega

4. Datos sinodal 2.
   Dr.
   Héctor Alonso
   Olivares
   Aguayo

5. Datos Sinodal 3.
   M en B. M.F.
   Aurora Cbeta
   Moreno
   Cortés

6. Datos Sinodal 4.
   M en C.
   Pedro
   Reyes
   Pérez

7. Datos del trabajo escrito.
   Aplicación de procesos estocásticos a la valuación de opciones europeas
   85 p.
   2018

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

Estar en la facultad de ciencias contrario a lo que se esperaría me ha convencido de que existe un creador que ha establecido las leyes matemáticas del universo. Es a quien he adoptado como mi Dios cuyo nombre es Jehová a quien quiero agradecer primeramente.

Quiero agradecer a mi madre quien siempre me ha dado lo mejor de si y con su amor y ejemplo me han guiado en toda mi vida. Nunca podre olvidar todas las atenciones que tuvo durante mi estancia en la Universidad.

A mi padre quien con esfuerzos me ayudo económicamente durante toda mi educación.

A mi hermano que siempre me ha dado buenos consejos, como por ejemplo estudiar la carrera de Actuaría.

A Jazmin que de forma inconsciente me motivo a retomar mi tesis y poder terminarla.

A mi tutor el Dr. Fernando Guerrero Poblete que me tuvo paciencia en este proyecto, y por ser un excelente profesor que siempre resolvió las dudas que tuve en clase y eso origino mi interés por los procesos estocásticos.

A los sinodales que con sus valiosos comentarios me ayudaron a presentar este trabajo.

A mi facultad por haberme dado la formación matemática. A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme ser miembro de la máxima casa de estudios del país.

OBJETIVO

En 1994 fue fundado Long Term Capital Managment L.P. (LTCM) el fondo de inversiones más importante de la década de los noventas que en su mayor apogeo llegó a manejar el 5 % de la renta fija mundial, aunque la historia lo recordará por provocar uno de los mayores colapsos de la economía a escala internacional, tras perder en menos de cuatro meses más de 4,500 millones de dólares a consecuencia de la crisis Rusa en 1997. Dentro de su junta directiva se encontraban Myron Scholes y Rober C. Merton, si los mismos que compartieron el premio Nobel de economía en 1997 por la famosa fórmula que permite la valuación de instrumentos financieros. Myron Scholes comento lo siguiente *"Yo no estaba manejando la empresa, permítanme ser muy claro al respecto. No existía la capacidad para soportar el choque que se produjo en el mercado en el verano y otoño de finales de 1998. Así que fue sólo una cuestión de como se asumieron los riesgos. No fue una cuestión de modelos".* Muchos cuestionaron y culparon la caída de LTCM a la implementación de nuevos modelos matemáticos.

Una década después, ocurre la caída de Lehman Brother, uno de los bancos más importantes en Estados Unidos y en con gran influencia el mundo, ocasionó una de las crisis económicas más grandes en los últimos años al llevar acabo operaciones de "Collateralized Debt Obligations"(CDO's) uno de los productos financieros que se situaron en el epicentro de la burbuja crediticia que acabó en la crisis económica del 2008.

Esto hizo plantearse nuevamente la pregunta en discusión ¿Cómo pudieron las matemáticas fallar tan estrepitosamente? Muchos artículos de revistas y periódicos especializados en temas de finanzas y economía realizaron esta pregunta después de la crisis que comenzó en 2007 y se agudizó en 2008 y que hasta este momento seguimos padeciendo.

El sueño de utilizar métodos matemáticos para predecir los mercados financieros es muy antiguo. Si podemos predecir la trayectoria de una bala o de un meteorito, ¿por qué no poder predecir el comportamiento de una acción bursátil? El mundo financiero creyó haber encontrado la respuesta a sus sueño en 1973 cuando Fisher Black y Myron Scholes publicaron una ecuación que permitía estimar los precios de instrumentos financieros derivados como lo son los Futuros y las Opciones. En pocas décadas el mercado de estos instrumentos financieros movió miles de millones de dólares no solo en los Estados Unidos sino en todo el mundo. Los banqueros e inversionistas en su afán de obtener más ganancias incentivarón la creación de modelos matemáticos cada vez más sofisticados, para ello necesitaban el talento de matemáticos y físicos que fueran capaces de modelar esos nuevos instrumentos financieros.

Hasta mediados de 2007, todo el mundo parecía feliz. Los bancos de inversión anunciaban cada trimestre beneficios de miles de millones de dólares. Hoy sabemos que aquella ilusión terminó con el mayor descalabro del sistema financiero, lo cuál no se había visto en tales dimensiones desde la Gran Depresión de 1929; dicho sistema colapsó de tal manera que los bancos centrales de todo el mundo tuvieron que intervenir para que el desastre no pasara a mayores. Bancos internacionales como Lehman Brothers ya mencionado anteriormente, literalmente terminaron desapareciendo en cuestión de días.

Varios factores influyeron en esta crisis. Entre de los cuáles encontramos la incapacidad de gestionar los riesgos de los nuevos instrumentos que se creaban, la poca regulación a nivel mundial para estos instrumentos y un hecho, importante y preocupante, es que políticos y financieros que contaban con mayor entendimiento de estos instrumentos tomaron ventaja en el mercado para enriquecerse a escalas impresionantes, generando las llamadas burbujas financieras, las cuáles explotaron en 2008, debido a su gran egoísmo y avaricia por el dinero no les importo dañar la economía de la clase media trabajadora.

Entonces ¿realmente fallo la matemática que hay detrás de los modelos para valuación de instrumentos financieros? El objeto de este trabajo es mostrar parte de la matemática en la construcción de la formula de Black and Scholes y se analizará sus supuestos básicos. Se comienza con una revisión de algunos aspectos importantes del cálculo estocástico como lo son el Movimiento Browniano, la Integral de Itô, el teorema de Radon-Nikodym y el teorema de la representación Martingala.

Se verá como una trasformación del Movimiento Browniano nos lleva a lo que en la literatura económica se conoce como el Movimiento Browniano Geométrico y su parecido con el comportamiento de las acciones y algunos índices bursátiles. Nos encontraremos que el comportamiento de los bienes subyacentes (acciones, precios, etc.) se representan con una ecuación diferencial estocástica, que no puede ser calculada mediante las reglas usuales del cálculo diferencial e integral, por lo que se usara la Integral de Itô. Una vez definida de manera formal la integral estocástica de Itô, se usará para resolver la ecuación diferencial estocástica que representa la dinámica del precio de un bien subyacente.

La relación entre el teorema de Radon- Nikodym y el teorema de Girsanov permitirá cambiar de medida de probabilidad, lo que a su vez nos permite pasar de un Movimiento Browniano con tendencia a un Movimiento Browniano sin tendencia. El teorema de la representación martingala nos dice que este nuevo proceso es una martingala. Se verá que esto es importante en la valuación de instrumentos derivados (Opciones), bajo el supuesto de un mundo neutral al riesgo.

Al final del trabajo usaremos estos tópicos para explicar la fórmula de Black and Scholes y su uso en la valuación de Opciones Europeas. Se presentaran definiciones básicas de derivados para poder entender el contexto en el que se construye esta fórmula. Mostraremos un ejemplo clásico de la valuación de Opciones Europeas de la literatura financiera. Se hará una valuación de una Opción de la vida real. Para concluir se analiza algunos de los supuestos básicos del modelo Black and Scholes que se pasaron por alto durante la pasada crisis financiera.

PRELIMINARES

0.1. Introducción

Las matemáticas han jugado un papel importante en el desarrollo de los temas centrales de la Economía Financiera como lo son aquellos relacionados con los mercados financieros, la valoración y cobertura de activos y la medición y gestión de riesgos.

En esta sección se presentan varios de los conceptos de probabilidad que se utilizan en la teoría financiera. Se enuncian los conceptos de proceso estocástico, propiedad de Markov, esperanza condicional y teoría de la medida entre otros.

0.1.1. Probabilidad

Definición 0.1.1. ***(σ-álgebra, Espacio medible, Evento)***. *Una colección de $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones.*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

2. *Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.*

3. *Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.*

A la dupla $(\Omega, \mathcal{F})$, siendo Ω un conjunto, se le conoce como espacio medible.

Definición 0.1.2. ***(Medida de Probabilidad)***. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una medida de probabilidad es una función $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ que satisface*

1. $P(\Omega) = 1$.

2. *$P(A) \geq 0$, para cuálquier elemento de $A \in \mathcal{F}$.*

3. *Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ son ajenos entonces $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.*

Definición 0.1.3. ***(Espacio de Probabilidad)***. *Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega,\mathcal{F},P)$, en donde Ω es un conjunto arbitrario, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$.*

0.1.2. Conjuntos de Borel

Definición 0.1.4. ***(σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$).*** *Sea $\{(a,b) : a \leq b\}$ la colección de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ en donde $a \leq b$. A la σ-álgebra generada por esta familia se le denota por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es decir*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a \leq b\}.$$

A los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama conjuntos de Borel, Borelianos o conjuntos Borel medibles. De esta forma se puede asociar al conjunto de números reales la σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y obtener así al espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Proposición 0.1.5. *Para cuáles quiera números reales $a < b$, los intervalos $[a,b], (a,\infty), (-\infty,b)$, $[a,b), (a,b]$ y $\{a\}$, son todos elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Demostración. La demostración de la proposición es general y se encuentra en libros de probabilidad avanzada. Véase por ejemplo [14] pág. 11. $\square$

0.1.3. Procesos estocásticos

Definición 0.1.6. ***(Proceso Estocástico).*** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$ parametrizadas por un conjunto T llamado espacio parametral, y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados.*

Los espacios parametrales que se usarán en este trabajo son: el conjunto $T = \{0, 1, 2, ..\}$ y $T = [0, \infty)$, estos valores se interpretan como tiempos. En el primer caso se dice que el proceso es a *tiempo discreto*, y en general este tipos de procesos de denotarán por $\{X_n : n = 0, 1, 2, ...\}$; mientras que en el segundo caso el proceso es a *tiempo continuo* y se denotará por $\{X_t : t \geq 0\}$.

Proceso de Markov.

Los procesos de Markov son de suma importancia y son modelos en donde a groso modo suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en el comportamiento futuro del mismo.

Definición 0.1.7. *Dado un proceso estocástico; con espacio parametral $t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} \in T$ y conjuntos $A_0 \cdots A_{n+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se dice que el proceso estocástico es de Markov (o que tiene la propiedad de Markov) si*

$$P(X_{n+1} \in A_{n+1} | X_0 \in A_0, ..., X_n \in A_n) = P(X_{n+1} \in A_{n+1} | X_n \in A_n).$$

Definición. 0.1.8. ***(Procesos con incrementos independientes).*** *Se dice que un proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes si para cuáles quiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes entre si.*

Definición. 0.1.9. ***(Procesos Gaussianos).*** *Se dice que un proceso a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano si para cuáles quiera colección finita de tiempos $t_1, ..., t_n$, el vector $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ tiene distribución normal o Gaussiana.*

0.1.4. Esperanza condicional

En esta sección se presenta de forma breve el concepto de esperanza condicional de una variable aleatoria respecto a una σ-álgebra, y se menciona algunas de su propiedades elementales. Se considerará que se cuenta con un espacio de probabilidad base $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y que $\mathcal{G}$ es una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Es importante hacer notar que la esperanza condicional, en su forma general, a pesar de su nombre no es un número, aunque puede serlo, sino una variable aleatoria.

Definición. 0.1.10. *(**Esperanza Condicional**). Sea X una variable aleatoria con esperanza finita, y sea $\mathcal{G}$ una subσ-álgebra de $\mathcal{F}$. La esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$ es una variable aleatoria denotada por $E(X|\mathcal{G})$, que cumple las siguientes tres propiedades.*

1. *Es $\mathcal{G}$-medible.*

2. *Tiene esperanza finita.*

3. *Para cuálquier evento G en $\mathcal{G}$*

$$\int_G E(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP.$$

Proposición. 0.1.11. *Sean X y Y variables aleatorias con esperanza finita y sea c una constante. Entonces*

1. *Si $X \geq 0$, entonces $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$.*

2. *$E(cX + Y|\mathcal{G}) = cE(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G})$.*

3. *Si $X \leq Y$, entonces $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$.*

4. *$E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$.*

5. *Si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $E(X|\mathcal{G}) = X$ c.s. En particular $E(c|\mathcal{G}) = c$.*

6. *Si $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, entonces $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$.*

Demostración. La demostración de las proposiciones son generales y puede encontrase en cuálquier libro de probabilidad avanzada. Véase por ejemplo [14] pág. 221. □

Lema. 0.1.12. *Sea X una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma)$. Entonces para cuáles quiera números reales a, b ocurre*

$$E[e^{aX}|X \geq b] = e^{a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2} N(d),$$

en donde $d = \frac{-b+(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$.

Demostración. Se tiene que

$$E[e^{aX}|X \geq b] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} e^{ax - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Obsérvese la siguiente identidad

$$a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 - \frac{[x-(\mu+a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} = ax - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Entonces

$$E[e^{aX}|X \geq b] = e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_b^\infty e^{\frac{-[x-(\mu+a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Si se hace $u = \frac{x-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$ la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned} e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}}^\infty e^{\frac{-u^2}{2}} du &= e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}\Big[1 - N\Big(\frac{b-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}\Big)\Big] \\ &= e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} N\Big(\frac{-b+(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}\Big). \end{aligned}$$

Haciendo $d = \frac{-b+(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$, se tiene el resultado. □

Lema. 0.1.13. *Sea X una variable aleatoria con distribución $N(\mu,\sigma)$. Entonces para cuáles quiera números reales a, b ocurre*

$$E[e^{aX}|X \leq b] = e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} N(d),$$

en donde $d = \frac{-b+(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$.

Demostración. Se tiene que

$$E[e^{aX}|X \leq b] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\infty^b e^{ax-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Se utiliza de nuevo la siguiente identidad

$$a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 - \frac{[x-(\mu+a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} = ax - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Entonces

$$E[e^{aX}|X \leq b] = e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\infty^b e^{\frac{-[x-(\mu+a\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Si se hace $u = \frac{x-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$ la expresión anterior se convierte en

$$e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}}^\infty e^{\frac{-u^2}{2}} du = e^{a\mu+\frac{1}{2}a^2\sigma^2}\Big[N\Big(\frac{b-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}\Big)\Big]$$

Haciendo $d = \frac{b-(\mu+a\sigma^2)}{\sigma}$, se tiene el resultado. □

0.1.5. Filtraciones

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Suponga ahora que se consideran dos sub σ-álgebras $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tales que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Entonces $\mathcal{F}_2$ contiene más información que $\mathcal{F}_1$ en el sentido de que, en general, un mayor número de conjuntos son considerados como eventos, más generalmente puede considerarse una sucesión no decreciente de sub σ-álgebras $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$. Estas consideraciones llevan a la definición de filtración.

Definición. 0.1.14. ***(Filtración)***. *Una filtración es una colección de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, cuando $0 < s < t$. La filtración natural o canónica de un proceso a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ es la colección de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ dadas por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$, esto es, $\mathcal{F}_t$ es la mínima σ-álgebra que hace que cada una de las variables X_s, para valores de s en el intervalo $[0, t]$, sean medibles.*

A la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ se le puede pensar como la historia del proceso hasta el tiempo t.

Definición. 0.1.15. ***(Proceso adaptado)***. *Se dice que un proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ para cada $t \geq 0$ si la variable X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

Se sabe que cada X_t es $\mathcal{F}$-medible por ser variable aleatoria. La condición de adaptabilidad requiere que X_t sea también una variable aleatoria respecto de la sub σ-álgebra $\mathcal{F}_t$.

Definición. 0.1.16. ***(Proceso predecible)***. *Se dice que un proceso es $\{X_t : t \geq 0\}$ es predecible respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si para cada $0 < s < t$ la variable X_t es $\mathcal{F}_s$-medible.*

Definición 0.1.17. ***(Martingala)***. *Se considera un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ equipado con una filtración $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Se dice que un proceso estocástico $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala con respecto de $\mathcal{F}$ si:*

1. *$\{M_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso adaptado a la filtración $\mathcal{F}$, es decir, para cada $t \geq 0$ la función $M_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $M_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in \mathbb{R}$.*
2. *$E(|M_t|) < \infty$.*
3. *Si $s < t$, entonces $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$.*

0.1.6. Transformaciones

Teorema 0.1.18. *Sea X una variable aleatoria continua con valores dentro de un intervalo $(a, c) \subseteq \mathbb{R}$, y con función de densidad $f_X(x)$. Sea $\varphi : (a, c) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que admite la descomposición*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x \in (a, b] \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in (b, c), \end{cases} \tag{0.1.1}$$

donde $a < b < c$, y cada una de las funciones $\varphi_1(x) : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi_2(x) : (b, c) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, estrictamente creciente o decreciente, y con inversa diferenciable. Entonces la variable aleatoria $Y = \varphi(X)$ tiene función de densidad

$$f_Y(y) = f_X(\varphi_1^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}\varphi_1^{-1}\right|1_{\varphi_{1(a,b]}}(y) + f_X(\varphi_2^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}\varphi_2^{-1}\right|1_{\varphi_{2(b,c)}}(y).$$

Demostración. La demostración puede verse en [14] pág. 221. $\square$

Proposición. 0.1.19. *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$. Considere la transformación $\varphi(x) = x^2$, la cual es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$, y estrictamente creciente en $(0, \infty)$. Sean las funciones monótonas $\varphi_1(x) = x^2$ sobre $(-\infty, 0)$ y $\varphi_2(x) = x^2$ sobre $(0, \infty)$ con inversas $\varphi_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ y $\varphi_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, respectivamente. Entonces la variable $Y = X^2$ tiene función de densidad*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases} \tag{0.1.2}$$

Corolario 0.1.20. *Si X es una variable aleatoria simétrica entonces*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases} \tag{0.1.3}$$

Definición. 0.1.21. ***(Función Gamma)****. Sea X una variable aleatoria no negativa, decimos que X tiene distribución Gamma con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si su función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{0.1.4}$$

y se denota $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ donde el término $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma definida como sigue

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \text{ para } \alpha - 1 > 0. \tag{0.1.5}$$

Proposición 0.1.22. *La función Gamma satisface las siguientes propiedades*

a) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

b) $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$.

c) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$ *para α entero positivo.*

d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Demostración.

a) $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$. Integrando por partes siendo $u = x^\alpha$, $du = \alpha x^{\alpha-1} dx$ y $dv = e^{-x}$, $v = -e^{-x}$. Se tiene que

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

b) Se ve primeramente que $\Gamma(2) = \int_0^\infty x e^{-x} dx$. Integrando por partes siendo $u = x$, $du = dx$ y $dv = e^{-x}$, $v = -e^{-x}$. Se tiene que

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = -x e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Por otro lado

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

Por lo tanto $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$.

c) Se sabe que $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, entonces de manera recursiva por los encisos *a)* y *b)* se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha\Gamma(\alpha) &= \alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots 2\cdot\Gamma(1)\\ &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)\cdots 2\cdot 1=\alpha!\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$

d) Se tiene que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx$. Haciendo el siguiente cambio de variable, $\frac{1}{2}u^2=x$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx. &= \int_0^\infty \sqrt{2}u^{-1}e^{-\frac{1}{2}u}udu=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u}du. \text{ Por ser una función par se sigue}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}u}du=\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{\sqrt{2\pi}}du.=\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

La ultima igualdad se da ya que en la integral se tiene una función de distribución normal estándar.

□

Proposición. 0.1.23. *Si $X\sim N(0,\sigma^2)$ entonces $X^2\sim Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sigma^2}\right)$.*

Demostración. Se sabe que

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}.$$

Usando el teorema de cambio de variable y el Corolario (0.1.20) se tiene que

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\pi}}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

Por tanto $X^2\sim Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sigma^2}\right)$. □

Lema 0.1.24. *Si X tiene distribución Gamma (α,β) entonces*

$$E(X^n)=\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}E(X^n) &= \int_0^\infty \frac{x^n\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}dx=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{x^n x^{\alpha-1}\beta^{n+\alpha}e^{-\beta x}}{\beta^{n+\alpha}}dx\\ &= \frac{\beta^\alpha\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\beta^{n+\alpha}}=\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\beta^n}.\end{aligned}$$

□

Observación 0.1.25. *Si* $X \sim N(0, \sigma^2)$

$$E(X^n) = \begin{cases} E(X^2)^k & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Del lema (0.1.24) y la observación (0.1.25) se tiene en particular

$$E(X^4) = E(Y^2) \quad = \quad \frac{\Gamma(2+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2\sigma^2})^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}4\sigma^4 = 3\sigma^4.$$

0.1.7. Teoría de la medida

En esta sección se muestra las definiciones de teoría de la medida que serán de importancia en este trabajo.

Definición. 0.1.26. *Se denota como* $\mathcal{L}_2(P)$ *al espacio vectorial de variables aleatorias* X *que son cuadrado integrables, es decir, que cumplen la condición*

$$||X||_{\mathcal{L}_2(P)} = (E|X|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

La función $||\cdot||_{\mathcal{L}_2(P)}$ *define una norma en* $\mathcal{L}_2(P)$*, es decir es una función real definida sobre este espacio lineal que cumple las siguientes cuatro condiciones:*

a) $||X|| \geq 0.$

b) $||X|| = 0$ *si y sólo si* $X = 0$ *c.s.*

c) $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||.$

d) $||\alpha X|| = |\alpha|||X||$, α *constante.*

Definición. 0.1.27. *Se denota* $\mathcal{L}_2(P \times dt)$ *al espacio lineal de todos los procesos* $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$*, que cumplen la condición*

$$||X||_{\mathcal{L}_2(P\times dt)} = E\left(\int_0^t |X_t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Por ejemplo el Movimiento Browniano pertenece a este espacio. Sea $W_t = W_t : 0 \leq t \leq T$, entonces

$$||W_t||_{\mathcal{L}_2(P\times dt)} = E\left(\int_0^T |W_t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T E|W_t|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T t dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{T}{\sqrt{2}}.$$

Definición. 0.1.28. *Se denota* $\mathcal{H}^2$ *al espacio que consiste en todas las funciones* f *medibles adaptables que satisfacen*

$$E\left(\int_0^t f^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Se observa que $\mathcal{H}^2$ es un sub-espacio cerrado de $\mathcal{L}^2(P \times dt)$.

Definición. 0.1.29. *Sea* $0 \leq t_0 < \cdots < t_n = T$ *una partición finita del intervalo* $[0, T]$*. Un proceso estocástico simple es un proceso de la forma*

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \cdot 1_{(t_k, t_{k+1})}(t),$$

en donde $X_0 \ldots X_{n-1}$ *es una colección de variables aleatorias adaptadas a la filtración* $\{\mathcal{F}_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$ *y que son cuadrado integrables. Se denota por* $\mathcal{H}_0^2$ *al espacio de todos los procesos simples.*

Observación. 0.1.30. *Se puede ver que* $\mathcal{H}_0^2$ *es un subconjunto de* $\mathcal{H}^2$*.*

CAPÍTULO 1

MOVIMIENTO BROWNIANO

1.1. Introducción

En este capítulo se presenta una introducción del modelo matemático llamado Movimiento Browniano. Se trata del ejemplo más importante de un proceso de Markov a tiempo continuo y con espacio de estados continuo. Tal proceso recibe el nombre de Movimiento Browniano en honor del botánico R. Brown quien en 1827 observó el comportamiento aleatorio de los granos de polen en un recipiente de agua, a este fenómeno lo denominó Movimiento Browniano. Ochenta años más tarde A. Einstein desarrolló sus propiedades matemáticas.

1.2. Breve historia del Movimiento Browniano

El poema científico "*Sobre la Naturaleza de las cosas*" del romano Lucrecio (60 a.C.) incluye la notable descripción de un Movimiento Browniano de partículas de polvo. El autor presentó este hecho como prueba de la existencia de los átomos:

> *Observa lo que acontece cuando rayos de sol son admitidos dentro de un edificio y como arroja la luz sobre los lugares oscuros.*
> *Puedes ver la multitud de pequeñas partículas moviéndose en un sin número de caminos... su baile es una indicación de movimientos*
> *subyacentes de materia que son escondidos por nuestra vista... eso origina el movimiento*
> *de los átomos en sí mismos (p.e. espontáneamente). Entonces los pequeños organismos que son eliminados del impulso de los átomos son puestos*
> *en marcha por golpes invisibles y a su vez en contra de unos diminutos cañones.*
> *Así el movimiento de los átomos emerge gradualmente de un nivel del sentido, que estos cuerpos están en movimiento como vemos en el rayo de sol, movidos por soplos que parecen invisibles. Sobre la naturaleza de las cosas, Lucrecio.*

Otro investigador que se interesó en este tipo de movimiento fue Jan Ingenhousz quien describió el movimiento irregular de partículas de carbón pulverizadas en la superficie del alcohol en 1785. No obstante, el descubrimiento del fenómeno se atribuye tradicionalmente a Robert

Brown en 1827. Se cree que Brown estuvo estudiando al microscopio partículas de polen flotando en el agua. Dentro de las vacuolas de los granos de polen observó diminutas partículas con movimientos nerviosos. Al repetir el experimento con partículas de polvo concluyó que el movimiento no se debía a que las partículas de polen estuvieren 'vivas' aunque tampoco explicó el origen del movimiento.

El primero en describir matemáticamente el Movimiento Browniano fue Thorvald N. Thiele en 1880, en un documento el cuál trataba sobre el método de los mínimos cuadrados. De manera independiente fue estudiado por el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) que en 1900 en su tesis doctoral ***"La teoría de la especulación"***, trata de explicar el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París, sin embargo su trabajo no fue reconocido como una contribución relevante por sus profesores y compañeros en la "Sorboone" de París. La relevancia del trabajo de Bachelier no fue reconocida sino hasta 1960, después de su muerte.

Fue el estudio independiente de Albert Einstein en su artículo de 1905 (Über die von der molekularischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen (Sobre el Movimiento requerido por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario) el que mostró la solución a los físicos, como una forma indirecta de conformar la existencia de átomos y moléculas. En esa época la naturaleza atómica de la materia aún era una idea controvertida. Einstein y Marian Smoluchowski dedujeron que si la teoría cinética de los fluidos era correcta entonces las moléculas de agua tendrían movimientos aleatorios. Por lo tanto las partículas pequeñas podrían recibir un número aleatorio de impactos, de fuerza aleatoria y de direcciones aleatorias, en cortos períodos de tiempo. Este bombardeo aleatorio por las moléculas del fluido podría ser suficiente para que las partículas pequeñas se moviesen de la manera exacta que Brown había descrito. Theodor Svedberg hizo importantes demostraciones del Movimiento Browniano en coloides, así como Felix Ehrenhaft lo hizo con partículas de plata en la atmósfera terrestre. Jean Perrin también realizó experimentos para verificar los modelos matemáticos y al publicar sus resultados finales se puso fin a dos mil años de disputa sobre la realidad de las moléculas y los átomos.

La explicación de este Movimiento como se mencionó fue dada por Einstein en 1905, y constituyó la prueba de la teoría molecular además de establecer el carácter gaussiano de las variables implicadas; sin embargo una formulación matemática rigurosa del mismo no fue dada sino hasta una década más tarde por N. Wiener. En consecuencia este proceso estocástico es conocido en la literatura moderna por el nombre de proceso de Wiener o Movimiento Browniano.

Importancia del Movimiento Browniano en las finanzas

El Movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos y prácticos, son objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de las finanzas. Sin lugar a dudas, el Movimiento Browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos.

1.3. Definición y propiedades básicas del Movimiento Browniano

Las observaciones reales del movimiento de granos de polen a través del microscopio sugieren que el fenómeno satisface las siguientes propiedades:

1. Es continuo.
2. Parece tener desplazamientos independientes en intervalos de tiempos disjuntos.
3. Debido al gran número de colisiones del grano de polen con las moléculas circundantes en longitudes de tiempo no pequeños, y teniendo en cuenta el teorema central del límite, los incrementos pueden modelarse como variables aleatorias Gaussianas.

La estructura matemática de un proceso estocástico a tiempo continuo $\{W_t : t > 0\}$, ha resultado adecuada para modelar este tipo de fenómenos. La variable W_t puede representar la posición de la partícula al tiempo t. La definición matemática, en el caso unidimensional, es la siguiente:

Definición 1.3.1. *Un proceso estocástico* $\{W_t : t \geq 0\}$, *de parámetro* σ^2 *con valores en* $\mathbb{R}$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. $W_0 = 0$ *c.s. es decir, el proceso empieza en 0 con probabilidad uno.*
2. *Las trayectorias* $t \mapsto W_t$ *son continuas c.s. esto es,* $P[W \in C[0,\infty)] = 1$.
3. *El proceso* $\{W_t\}$ *tiene incrementos independientes.*
4. *Las variables* $W_t - W_s$ *tienen distribución* $\mathbf{N}\big(0, \sigma^2(t-s)\big)$ *para cuáles quiera tiempos* $0 \leq s \leq t$.

Se llama Movimiento Browniano.

La propiedad *1.* es simplemente una normalización y es conveniente, más no un requerimiento básico. La propiedad *3.* muestra que el comportamiento de incremento en un intervalo no afecta el comportamiento de incremento en otro intervalo disjunto. Si el proceso W_t satisface *1* a *4* y además $\sigma^2 = 1$, decimos que W_t es un Movimiento Browniano Estándar.

En 1923 el matemático norteamericano Norber Wiener demostró la existencia de un proceso con tales condiciones. Es por esta razón que a menudo a este proceso también se le llama proceso de Wiener. En sentido estricto, el Movimiento Browniano es el fenómeno físico, mientras que su modelo matemático es el proceso de Wiener, aunque es común llamar a ambas cosas por el mismo nombre: Movimiento Browniano.

1.3.1. Propiedades del Movimiento Browniano

En el Movimiento Browniano Estándar cada variable aleatoria W_t tiene distribución normal N(0,t) y por lo tanto $E(W_t) = 0$ y $Var(W_t) = E(W_t^2) = t$. En particular $E(W_t - W_s)^2 = t - s$ para $0 < s < t$.

Proposición 1.3.2. *Sea $W_t : t \leq 0$ un Movimiento Browniano unidimensional de parámetro σ con valores en $\mathbb{R}$. Para cuáles quiera conjuntos de Borel $A_1, A_2, ..., A_n$ y $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$, ocurre que*

$$P(W_{t_1} \in A_1, ..., W_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) \cdot p(t_2 - t1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1}) dx_n \cdots dx_1, \tag{1.3.1}$$

en donde

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{(y-x)^2/2\sigma^2 t}.$$

A la ecuación (1.3.1) se le llama *función de probabilidad de transición* del Movimiento Browniano de parámetro σ^2. En particular, la probabilidad de que un Movimiento Browniano que inicia en x se encuentre en el conjunto A después de t unidades de tiempo es

$$p(t, x, A) = \int_A p(t, x, y) dy.$$

Proposición 1.3.3. *El Movimiento Browniano es un proceso de Markov, es decir para cuáles quiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ y para cualquier $X_1, \ldots . X_n$, $A \in \mathbb{R}$.*

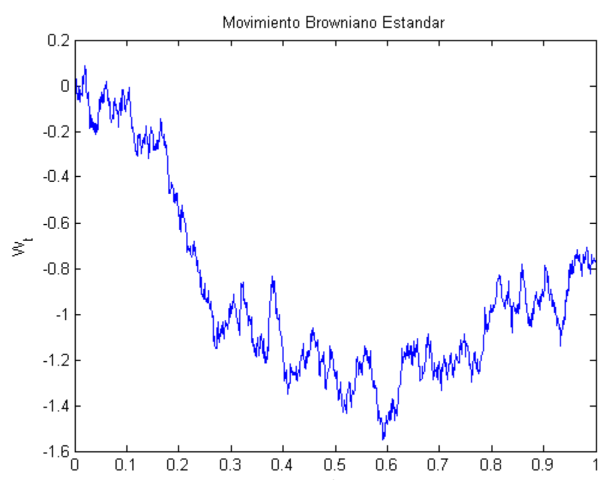
$$P[W_{t_{n+1}} \in A \mid W_{t_1} = x_1, ..., W_{t_n} = x_n] = P[W_{t_{n+1}} \in A \mid W_{t_n} = x_n].$$

Proposición 1.3.4. *El Movimiento Browniano es una martingala continua respecto a la filtración natural.*

Demostración. Cada variable aleatoria W_t es integrable y el proceso es adaptado a su filtración natural. Para cuáles quiera tiempos $0 \leq s \leq t$ ocurre

$$\begin{aligned} E(W_t \mid \mathcal{F}_s) &= E(W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s) \\ &= E(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) + E(W_s \mid \mathcal{F}_s) \\ &= E(W_t - W_s) + W_s \\ &= W_s. \end{aligned}$$

□



1.3.2. Propiedades de las trayectorias del Movimiento Browniano

Antes de enunciar las siguientes propiedades, se recuerda la definición de variación de una función. Sea $a = t_0 < t_1 < t_2, ..., t_n = b$ una partición del intervalo [a,b], defínase $\Delta t = \max\{|t_{i+1} - t_i| : i = 0, 1, ..., n-1\}$. La variación de una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es el número

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

Cuando este número es finito se dice que la función tiene variación finita en dicho intervalo.

Análogamente la variación cuadrática se define como

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|^2.$$

Se demuestra que la variación cuadrática del Movimiento Browniano sobre [a,b] es finita, de hecho, es la longitud del intervalo en cuestión.

Por otro lado se puede demostrar que sobre un intervalo de tiempo acotado [a,b] casi todas las trayectorias del Movimiento Browniano tienen variación no acotada, esto es

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty \quad c.s.$$

Esta propiedad es particularmente importante ya que tiene como consecuencia el hecho de que no se pueden usar las trayectorias Brownianas como funciones integradoras en el sentido de Riemann-Stieltjes. En el siguiente capítulo se definirá una integral con respecto al Movimiento Browniano y se revisará los conceptos de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Proposición. 1.3.5. *La variación cuadrática de una trayectoria del Movimiento Browniano sobre el intervalo $[a, b]$ es la longitud del intervalo, es decir*

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = b - a.$$

Proposición. 1.3.6. *(Variación del Movimiento Browniano). La variación de una trayectoria del Movimiento Browniano sobre el intervalo $[a, b]$ es infinita, casi seguramente, es decir*

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = \infty \quad c.s.$$

Demostración. Seguiremos la demostración de [15] pág. 214. Para cada n natural sea $\{P_n\}$ la partición uniformé del intervalo $[a, b]$ en n sub intervalos, es decir cada incremento $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ tiene longitud $(b - a)/n$ y sea ΔW_i la diferencia $W_{t_i+1} - W_{t_i}$. Entonces se tiene la estimación

$$\sum_{i}^{n-1} |\Delta W_i|^2 \leq \max_{0 \leq i \leq n} |\Delta W_i| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta |W_i|. \tag{1.3.2}$$

Sea $\{P_n\}$ sub-sucesiones de particiones uniformes tales que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} (|\Delta W_i|^2) = b - a \quad c.s.$$

Por otro lado, como las trayectorias del Movimiento Browniano son continuas casi seguramente, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} (\max_{0\leq i\leq n_k} |\Delta W_i|) = 0 \quad c.s.$$

Substituyendo los últimos dos resultados en (1.3.2) se obtiene que, respecto de la subsucesión de particiones,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta W_i| = \infty \quad c.s.$$

De donde se sigue que el límite superior es infinito casi seguramente. Se puede ver además que para cualquier tiempo $t_0 > 0$ fijo pero arbitrario, con probabilidad uno, la trayectoria $t \mapsto W_t$ no es diferenciable en t_0. □

Proposición. 1.3.7. *Sea $t_0 > 0$ fijo pero arbitrario. Con probabilidad uno el Movimiento Browniano W_t no es diferenciable en t_0.*

Demostración. Se puede demostrar que $W_{t+t_0} - W_{t_0}$ es también un Movimiento Browniano por lo que se demuestra la diferenciabilidad de W_t en $t = 0$. Siguiendo nuevamente [15] se demuestra que con probabilidad igual a uno, para cada número natural n existe t en el intervalo $[0, \frac{1}{n^2}]$ tal que $|\frac{1}{t}W_t| > n$, lo cuál implicaría que W_t no es diferenciable en $t = 0$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el evento $A_n = \{|\frac{1}{t}W_t| > n$ para algún $t \in [0, \frac{1}{n^2}]\}$, así se habrá construido una sucesión decreciente de eventos de la forma $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, tal que

$$\begin{aligned}
P(A_n) &\geq P\left(\left|\frac{1}{1/n^4} W_{\frac{1}{n^4}}\right| > n\right) \\
&= P\left(\left|W_{\frac{1}{n^4}}\right| > \frac{1}{n^3}\right) \\
&= P\left(\left|n^2 W_{\frac{1}{n^4}(1)}\right| > \frac{1}{n}\right) \\
&= P\left(|W_1| > \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1 \text{ cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Esto es porque $\frac{1}{c}W_{c^2t}$ también es un Movimiento Browniano para cualquier $c > 0$. Por lo tanto $P(A_1) \geq P(A_2) \geq \cdots \geq 1$, es decir, $P(A_n) = 1$ para cualquier $n \geq 1$. Por consiguiente para cada $t_0 \geq 0$, el conjunto de trayectorias $t \longmapsto W_t$ que no son diferenciable en t_0 tiene probabilidad uno. □

1.3.3. Movimiento Browniano Geométrico

Como se mencionó antes, desde 1900 con su *Théorie de la spéculation*, Louis Bachelier comenzó a comparar los precios de los activos de la Bolsa de Valores Parisina con un proceso continuo, del *Movimiento Browniano*. Realmente el parecido entre ellos de manera local era impresionante. Ambos despliegan un comportamiento de tipo zigzag muy parecido, abrupto a la misma similitud ante cambios de escala (el comportamiento de tipo zigzag no se suaviza al incrementar la escala). Desafortunadamente, a un nivel global la similitud se desvanece en algunos aspectos, al mismo nivel el precio del activo se vuelve más *ruidoso* o *volátil* con el tiempo, además nunca se vuelve negativo. Otro factor a considerar es que el Movimiento Browniano tiene media cero mientras que el precio de activo normalmente crece a una cierta tasa.

Se puede tomar como base al Movimiento Browniano y añadir una tendencia (drift) de manera artificial, para modelar el precio de un activo, por ejemplo, si se representa al precio del activo al tiempo t

$$P_t := W_t + \mu t,$$

para alguna constante μ que refleja el crecimiento nominal. El proceso $\{P_t\}_{t\geq 0}$ es llamado Movimiento Browniano con tendencia. Aún más: se puede escalar este proceso con otro factor, por ejemplo

$$P_t^* = \sigma W_t + \mu t$$

para alguna constante σ. Se pueden estimar lo valores más adecuados para μ y σ y obtener algo muy similar a lo visto en los mercados con un crecimiento con tendencia a largo plazo. Aún así, el problema que persiste es que el proceso pueda volverse negativo lo cual no puede suceder para el valor de un precio. Para evitar esto se toma la siguiente transformación del proceso

$$e^{P_t^*} = exp\{\sigma W_t + \mu t\}.$$

El Movimiento Browniano Geométrico se obtiene por una trasformación exponencial del Movimiento Browniano Estándar, es decir, si W_t es un Movimiento Browniano Estándar, μ es una constante (tendencia, drift), σ es una constante positiva (volatilidad) y S_0 es un precio inicial conocido, entonces el proceso

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t + \sigma W_t\right\} \tag{1.3.3}$$

es llamado Movimiento Browniano Geométrico el cuál se utiliza para describir el rendimiento de un activo. Si a la ecuación (1.3.3) se le aplica el logaritmo natural se tiene que

$$E[\ln(S_t)] = E\left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t + \sigma W t\right],$$

por propiedades de la esperanza y del Movimiento Browniano se sigue

$$E[\ln(S_t)] = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t.$$

Por otra parte se tiene también por propiedades de la varianza y del Movimiento Browniano que

$$Var(\ln(S_t)) = Var\left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t + \sigma W t\right] = \sigma^2 t.$$

Figura 1.1: Historial de precios de una acción bursátil

1.3.4. Aplicación del Movimiento Browniano Geométrico en los rendimientos de Activos e índices bursátiles

Se da una idea intuitiva del concepto de Movimiento Browniano Geométrico en el modelado del comportamiento de los rendimientos de una acción.

Rendimientos Normales

Considere un registro histórico de los precios mensuales de un activo, $S_0, S_1, \ldots, S_N$. Los rendimientos mensuales del activo son:

$$R_t := \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}, \quad t = 1, \ldots, N.$$

equivalentemente,

$$R_t\Big(\frac{1}{t}\Big) = \Big(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\Big)\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t = 1, ..., N. \tag{1.3.4}$$

Es importante enfatizar que la unidad de tiempo en cuestión es un mes y que los rendimientos son calculados por esta unidad de tiempo. El valor medio mensual de los rendimientos del activo está dado por:

$$\mu = \left(\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N} R_t\right)\frac{1}{t} \tag{1.3.5}$$

y la varianza mensual de los rendimientos del activo es

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}(R_t - \mu)^2\right)\frac{1}{t}; \tag{1.3.6}$$

la desviación estándar σ, es conocida como volatilidad del activo. Si se estandarizan los rendimientos, es decir, si se define $\widetilde{R}_t = (R_t - \mu)/\sigma$ y el histograma de frecuencias de $\widetilde{R}_t$ coincide con la función de densidad de una variable aleatoria $\varepsilon \sim \mathbf{N}(0, 1)$, entonces se podría pensar que los rendimientos tiene una distribución normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$. En este caso, se puede escribir

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N} R_t + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}(R_t - \mu)^2\varepsilon} = \mu t + \sqrt{\sigma^2 t)}\varepsilon,$$

donde $\varepsilon \sim \mathbf{N}(0,1)$. Noté que

$$E\Big(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\Big) = \mu.$$

y

$$Var\Big(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}\Big) = \sigma.$$

Si Δt denota un mes y denota la unidad de tiempo que separa las observaciones S_t, $t = 1, 2, ..., N$. Se tiene que

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon,$$

donde $\varepsilon \sim \mathbf{N}(0,1)$. Equivalentemente,

$$\frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} = \mu\Delta t + \sigma\Delta W_t,$$

donde $\Delta W_t \sim \mathbf{N}(0, \Delta t)$, es decir, ΔW_t tiene distribución normal con $E(\Delta W_t) = 0$ y $Var(\Delta W_t) = \Delta t$. Si se supone ahora que Δt se hace cada vez más pequeño (de meses a semanas, de semanas a días, de días a horas, de horas a segundos, etc), entonces en el límite se tiene que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{1.3.7}$$

donde $dW_t \sim \mathbf{N}(0, \Delta t)$. En este caso, se dice que μ es el rendimiento (anualizado) medio esperado y σ es la volatilidad (anualizada) del activo en cuestión. La variable dW_t modela el riesgo de mercado, es decir, las fluctuaciones en los rendimientos que se observan todos los días. Se observa ahora que S_t es función de la variable continua t. Se nota también que la ecuación diferencial contiene un término aleatorio. En el siguiente capítulo se analiza que este tipo de ecuaciones no siguen las reglas generales del cálculo determinista, por lo que es necesario construir la herramienta matemática que resuelva esta ecuación diferencial estocástica (EDE) y se demuestra que la solución a (1.3.7) es precisamente el Movimiento Browniano Geométrico.

CAPÍTULO 2

INTEGRAL DE ITÔ

2.1. Introducción

En términos estrictos, el objeto inicial de estudio del cálculo estocástico, es poder definir el concepto de una integral estocástica en el sentido en que el término con respecto al que se integra, sea un proceso estocástico. Este trabajo se restringe al caso en que el integrando es un Movimiento Browniano. Una de las herramientas matemáticas más útiles en las matemáticas financieras es precisamente el cálculo estocástico o cálculo de Itô, sobre el cuál descansa la teoría económica y el análisis financiero en tiempo continuo y en ambiente estocástico. El hecho que el Movimiento Browniano es de variación no acotada, nos lleva a que no se pueda interpretar dicha integral en el sentido usual de una integral de Riemann-Stieltjes.

Históricamente, el concepto de integral para el caso en que el integrador es un Movimiento Browniano fue desarrollado por K. Itô en 1944 en un artículo titulado "Stochastic Integral"publicado en los "Proceedings de la Academia Imperial de Tokio", aunque como Shiryaev constata y el propio Itô reconoce, el primero en definir la integral estocástica fue N. Wiener en 1934 para integrandos no aleatorios suaves y de cuadrado integrable. La manera de definir la integral estocástica, en palabras de Mandelbrot:

> "... si [el integrador] estuviera reducido a un número de saltos, tal integral sería simplemente una suma de variables aleatorias. De otra manera [la integral estocástica] se construye con la suma de variables aleatorias auxiliares de la misma manera que una integral ordinaria se construye con la ayuda de sumas auxiliares."

Por tanto una integral estocástica se define como el límite (en cierto sentido) de una suma de variables aleatorias. La integral estocástica una vez definida, es una integral que conserva las propiedades de una integral ordinaria. Por ejemplo: es un operador lineal (abre sumas y saca escalares) es decir la integral estocástica de una combinación lineal de funciones, es la combinación lineal de las integrales estocásticas de las funciones. Se resalta que los resultados de una integral estocástica son procesos estocásticos. Íntimamente relacionado con este concepto está el concepto de ecuación diferencial estocástica la cual es básicamente una generalización del concepto de ecuación diferencial ordinaria. Es un modelo en el que la variación en tiempo continuo del proceso solución o variable dependiente de la ecuación diferencial estocástica, se descompone en la parte de variación debida a la variación del tiempo (lo que correspondería a una ecuación diferencial ordinaria), y por otro lado, a la parte debida a la variación en tiempo continuo de un Movimiento Browniano, lo que le confiere el calificativo de estocástico a este tipo de ecuaciones.

2.2. Motivación de la Integral Estocástica

El siguiente ejemplo constituye la regla esencial del cálculo estocástico. Considérese el Movimiento Browniano estándar $\{W_t\}_{t\geq 0}$, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y una partición uniforme del intervalo $[0,t]$ tal que $0 = t_0 \leq t1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = t$ y $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Denotaremos $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$ y $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Considérese además la siguiente sucesión de variables aleatorias

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i^2.$$

Se quiere encontrar V_t tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\big[(V_n - V_t)^2\big] = 0. \tag{2.2.1}$$

Considérese a

$$V_t = E\Bigg[\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i^2\Bigg],$$

es decir, $V_t = E(V_n)$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
E(V_n) &= E\Bigg(\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i^2\Bigg) = \sum_{i=1}^{n} E(\Delta W_i^2) = \sum_{i=1}^{n} E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = t.
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
E\big[(V_n - t)^2\big] &= E\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t\Bigg)\Bigg]^2 \\
&= E\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\Bigg)^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 + t^2\Bigg] \\
&= E\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n} \Delta W_{t_i}^2\Bigg)^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} \Delta W_{t_i}^2 + t^2\Bigg] \\
&= E\Bigg[\sum_{i=1}^{n} \Delta W_{t_i}^4 + 2\sum_{i<j} \Delta W_{t_i}^2 \Delta W_{t_j}^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} \Delta W_{t_i}^2 + t^2\Bigg] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\Delta W_{t_i}^4 + 2E\sum_{i<j} \Delta t_i^2 \Delta t_j^2 - t^2.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Se sabe por (0.1.24) que si $X \sim N(0,\sigma)$ entonces $E(X^4) = 3\sigma^4$. Además como tenemos una partición uniforme del intervalo $[0,t]$ tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$ para toda $i = 1, 2..., n$, se sigue que la ecuación (2.2.2) es igual a

$$\begin{aligned}
E\big[(V_n - t)^2\big] &= 3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{n}\right)^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{t}{n}\right) - t^2 \\
&= \frac{3t^2}{n} + 2\binom{n}{2}\left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{t}{n}\right) - t^2 \\
&= \frac{3t^2}{n} + \frac{2n(n-1)t^2}{2n^2} - t^2 \\
&= \frac{3t^2}{n} + \frac{(n-1)t^2}{n} - t^2.
\end{aligned}$$

Luego tomando el limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3t^2}{n} + \frac{(n-1)t^2}{n} - t^2 = t^2 - t^2 = 0.$$

Ahora bien, se puede escribir

$$\int_0^t dW_s^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_{t_i}^2 = t, \tag{2.2.3}$$

donde la convergencia es en media cuadrática, es decir en $\mathcal{L}_2(P)$. Abusando de la notación, la ecuación (2.2.3) se puede reescribir como $dW_s^2 = ds$. En términos estrictos, los objetos de estudio del cálculo estocástico son integrales y no diferenciales. Cuando se escribe una ecuación estocástica, realmente se está pensando en una integral estocástica.

2.3. Definición y propiedades básicas de la integral de Itô

En esta sección se enuncia la definición y las propiedades básicas de la integral de Itô.

Definición 2.3.1. *La integral estocástica o integral de Itô de f, es el proceso estocástico*

$$V_t \equiv \int_0^t f(s)dW_s,$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{t=1}^{n}(f_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - V_t\Big]^2 = 0,$$

donde $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ es un Movimiento Browniano Estándar y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = t$ es una partición en el intervalo $[0,t]$.

Como antes, la convergencia es en media cuadrática, es decir en $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Es sumamente importante enfatizar que el integrando f está evaluado en el extremo izquierdo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Esta elección es muy natural en finanzas, ya que con ello se asegura que el futuro no intervenga en las acciones presentes. Un ejemplo típico de la función f es que $f(s) = g(W_s)$, en este caso se supondrá que el valor de $f(s)$ depende sólo de los valores de W_u con $u < s$. Así mismo, se supondrá que $\int_0^t f(s)ds < \infty$ casi donde quiera y $\int_0^t E[f^2(s)]ds < \infty$. La condición sobre la primera integral garantiza que la integral de Itô $\int_0^t f(s)dW_s$ está bien definida y la condición sobre la segunda integral asegura que la varianza de $\int_0^t f(s)dW_s$ se mantenga finita. Evidentemente, si f es determínista, las dos condiciones anteriores coinciden.

Las propiedades básicas de la integral de Itô son recopiladas en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. *La integral de Itô satisface*

a) *Linealidad*

$$\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s))dW_s = \alpha \int_0^t f(s)dW_s + \beta \int_0^\infty g(s)dW_s.$$

b) *Propiedad de martingala*

$$E\bigg(\int_0^t f(s)dW_s|\mathcal{F}_u \bigg) = \int_0^u f(s)dW_s, \;\; para\ u \leq t.$$

c) *Propiedad de isometría en $\mathcal{H}_0^2$*

$$||I(f)||_{\mathcal{L}^2(dP)} = E\Big[\big(\int_0^\infty f(s)dW_s \big)^2 \Big] = E\Big[\int_0^\infty f(s)^2 dW_s \Big] = ||f||_{\mathcal{L}^2(dP\times dt)}.^{1}$$

Demostración.

a) Linealidad

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s))dW_s &= \sum_{i=1}^n \Big[\alpha f(s_i)(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) + \beta g(s_i)(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) \Big] \\
&= \sum_{i=1}^n \Big[\alpha f(s_i)(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) \Big] + \sum_{i=1}^n \Big[\beta g(s_i)(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) \Big] \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n \Big[f(s_i)(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) \Big] + \beta \sum_{i=1}^n \Big[g(s_i)(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) \Big] \\
&= \alpha \int_0^t f(s)dW_s + \beta \int_0^\infty g(s)dW_s.
\end{aligned}$$

b) Propiedad de martingala

$$\begin{aligned}
E\bigg(\int_0^t f(s)dW_s|\mathcal{F}_u \bigg) &= E\bigg[\bigg(\int_0^u f(s)dW_s + \int_u^t f(s)dW_s \bigg) \Big| \mathcal{F}_u \bigg] \\
&= E\bigg[\bigg(\int_0^u f(s)dW_s \Big| \mathcal{F}_u \bigg) \bigg] + E\bigg[\bigg(\int_u^t f(s)dW_s \Big| \mathcal{F}_u \bigg) \bigg] \\
&= \int_0^u f(s)dW_s.
\end{aligned}$$

[1] Se define a la integral de Itô sobre $\mathcal{H}_0^2$ como $I(f)(w) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(w) \left\{ W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right\}$.

c) Isometría de Itô
Siguiendo la demostración de [20] pág. 20, se calculará las dos normas por separado y se verá que ambas llevan al mismo resultado. Se tiene que

$$f^2(w,t) = \sum_{i=0}^{n-1} = a_i^2 \cdot 1(t_i < t < t_{i+1}),$$

entonces

$$||I(f)||_{\mathcal{L}^2(dP)} = E\left[\Big(\int_0^\infty f(s)dW_s \Big)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} E\Big[(a_i^2)(t_{i+1} - t_i)\Big]. \tag{2.3.1}$$

Ahora calculamos la otra norma

$$||f||_{\mathcal{L}^2(dP\times dt)} = E[I(f)^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E\Big[a_i^2 \left\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right\}^2\Big] = \sum_{i=0}^{n-1} E\Big[(a_i^2)(t_{i+1} - t_i)\Big]. \tag{2.3.2}$$

Las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) son iguales. Por lo tanto $||I(f)||_{\mathcal{L}^2(dP)} = ||f||_{\mathcal{L}^2(dP\times dt)}$.

□

2.4. La Fórmula de Itô

Usualmente la integral de Riemann no se calcula a partir de su definición, en lugar de ello existen fórmulas o métodos bien conocidos para calcular integrales. La misma situación se presenta para integrales estocásticas. La fórmula de Itô es la herramienta fundamental para este tipo de integrales. Aún cuando una ecuación diferencial estocástica es la notación simplificada de una integral estocástica, las reglas que se establecen con la notación diferencial y los resultados que a partir de ellas se desprenden son consistentes con las propiedades de la integral estocástica. La diferencial estocástica permite, en muchos casos, obtener resultados de manera más rápida y sencilla sobre la integral estocástica.

Se enuncia a continuación una versión simple de la fórmula de Itô.

Teorema 2.4.1. ***(Fórmula de Itô)****. Sea $f(x)$ una función de de clase C^2. Entonces*

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds.$$

Demostración. [2] Una forma de obtener este resultado es usando el teorema de Taylor. Siguiendo la demostración de [15] pág. 248, para una función $f(x)$ suficientemente suave, se tiene que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x),$$

[2]Para ver una demostración detallada véase por ejemplo [21] pág. 196.

en donde el residuo $R(x)$ puede escribirse de la siguiente manera

$$R(x) = \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt,$$

haciendo un cambio de variable $t = x_0 + \theta(x - x_0)$ cuando $t = x_0$, $\theta = 0$ y $t = x$, $\theta = 1$. Se tiene que

$$R(x) = \int_0^1 (1-\theta) f''(x + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2 d\theta.$$

Por lo tanto si $0 = t_1 < \cdots < t_n = t$ es una partición de $[0, t]$, entonces

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= \sum_{k=1}^{n} [f(W_{t_k}) - f(W_{t_{k-1}})] \\ &= \sum_{k=1}^{n} f'(W_{t_{k-1}}) \Delta W_k \\ &\quad + \int_0^1 (1-\theta) \sum_{k=1}^{n} f''(W_{t_{k-1}} + \theta \Delta W_k)(\Delta W_k)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Se puede comprobarse que al tomar el limite cuando $n \longrightarrow \infty$ las sumas convergen casi seguramente y entonces se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \int_0^1 (1-\theta) \int_0^t f''(W_s) d_s d\theta \\ &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \int_0^t f''(W_s) d_s - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) d_s \\ &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} f''(W_s) ds. \end{aligned}$$

□

La fórmula anterior es una versión estocástica de la regla de la cadena del cálculo diferencial usual.

Ejemplo 2.4.2. *Considérese $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$. La fórmula de Itô establece que*

$$W_t^2 = W_0^2 + 2\int_0^t W_s dW_s + \frac{2}{2}\int_0^t 1 ds,$$

como $W_0^2 = 0$ por ser un Movimiento Browniano Estándar, se tiene que

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t,$$

donde

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{(W_t^2 - t)}{2}.$$

Proposición 2.4.3. *Se puede probar de forma general, que para* $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{1}{2}\int_0^t nW_s^{n-1}ds.$$

Demostración. Sea $x = W_t$. Entonces $f'(x) = x^n$ y $f''(x) = nx^{n-1}$. Usando la fórmula de Itô, teorema (2.4.1) se sigue que

$$\frac{1}{n+1}W_t^{n+1} = W_0^{n+1} + \int_0^t W_s^n + \frac{1}{2}\int_t^n nW_s^{n-1}ds.$$

$W_0^{n+1} = 0$ por ser un Movimiento Browniano Estandar. Entonces

$$\frac{1}{n+1}W_t^{n+1} = \int_0^t W_s^n + \frac{1}{2}\int_t^n nW_s^{n-1}ds.$$

Despejando se tiene el resultado

$$\int_0^t W_s^n = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{1}{2}\int_t^n nW_s^{n-1}ds.$$

□

Definición. 2.4.4. *Sea* $b(t, X_t)$ *y* $\sigma(t, X_t)$ *dos funciones de* $[0, T] \times \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$*. Una ecuación estocástica de la forma*

$$dX_t \quad = \quad b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)dW_t, \tag{2.4.1}$$

definida para valores de t *en el intervalo* $[0, T]$*, y con la condición inicial* X_0 *independiente del Movimiento Browniano. La ecuación anterior se interpreta como la ecuación integral*

$$X_t \quad = \quad X_0 + \int_0^t b(s, X_s)d_s + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{2.4.2}$$

en donde la primera integral es una integral de Riemann, mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. Al proceso X_t *se le llama el proceso de Itô.*

Los elementos conocidos de esta ecuación son los coeficientes $b(t, X_t)$ y $\sigma(t, X_t)$, además de la variable aleatoria inicial X_0, la incógnita es el proceso X_t. A la función $b(t, X_t)$ se le conoce cómo *coeficiente de tendencia (drift* en inglés o *deriva* en español). A la función $\sigma(t, X_t)$ se le conoce cómo el *coeficiente de difusión.* El proceso solución puede interpretarse cómo el estado de un sistema que evoluciona de manera determinista gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación (la tendencia), pero alterado por un ruido aditivo dada por la integral estocástica (la difusión).

Definición 2.4.5. ***(Tabla de Mckean)****. Se define la tabla de Mackean cómo*

$\times$	d_t	dW_t
d_t	*0*	*0*
dW_t	*0*	dt

Esto se debe a que por ejemplo, en el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal $(dt)^2$, es una cantidad despreciable, esto se debe a que

$$(dt)^2 = 0.$$

En otras palabras si algo es pequeño entonces su cuadrado es todavía más pequeño, de hecho se tiene que

$$(dt)^\alpha = 0, \quad \text{si } \alpha > 1.$$

La regla central del cálculo estocástico que hace la distinción con el cálculo de variables reales, es que el cuadrado de una cantidad infinitesimal es significante. En específico se tiene que si W_t es un Movimiento Browniano Estandarizado, entonces

$$(dW_t)^2 = dt. \tag{2.4.3}$$

Formalmente el cálculo estocástico da

$$\int_0^t (dW_s)^2 = \int_0^t ds = t, \tag{2.4.4}$$

lo cuál se denota de forma más simple en (2.4.3). Así mismo se puede observar que

$$(dW_t)(dt) = (dt)^{\frac{1}{2}}(dt) = (dt)^{\frac{3}{2}},$$

lo que nuevamente es una cantidad despreciable, por que

$$(dW_t)(d_t) = 0.$$

Teorema 2.4.6. ***(Fórmula de Itô II)****. Si $dX_t = h(X_t,t)dt + g(X_t,t)dW_t$ entonces $Y_t = f(X_t,t)$ satisface la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE).*

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dX_t dX_t \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + g\frac{\partial f}{\partial x}dW_t. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Demostración. Véase [6] pág. 58. □

Corolario 2.4.7. *Si $h = 0$ y $g = 1$ Se tiene que la ecuación (2.4.5) se reduce a*

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}dW_t. \tag{2.4.6}$$

Ejemplo 2.4.8. *Se presenta al Movimiento Browniano Geométrico como solución de la ecuación diferencial estocástica*

$$dS_t = \mu S_t d_t + \sigma S_t dW_t; \tag{2.4.7}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ *y* $\sigma > 0$. *Si* $y = \ln S_t$, *entonces*

$$\frac{\partial y}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \qquad y \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

Aplicando Fórmula de Ito (2.4.5) con $h(S_t, t) = \mu S_t =$ *y* $g(S_t, t) = \sigma S_t$ *se tiene*

$$d \ln S_t = \left(0 + \mu St\left(\frac{1}{S_t}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\left(\frac{1}{S_t^2}\right)\right)dt + \sigma dW_t. \tag{2.4.8}$$

Se observa que

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Es claro que si x *es una variable real,* $d \ln x = dx/x$, *sin embargo, si* S_t *sigue un Movimiento Browniano Geométrico, esta regla no se cumple ya que se tiene un término adicional a saber:* $\frac{1}{2}\sigma^2 dt$, *como se observa en (2.4.9). La correspondiente integral estocástica de (2.4.8) está dada por*

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \ln S_0 + \mu \int_0^t du - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t (dW_u)^2 + \sigma \int_0^t dW_u \\ &= \ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma)t + \sigma W_t, \end{aligned}$$

y la solución a la ecuación (2.4.8) es

$$S_t = S_0 exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)t + \sigma W_t\right\},$$

que es la expresión del Movimiento Browniano Geométrico.

Esto muestra que el precio de un activo sigue una distribución log-normal. Ahora se muestra como se comporta el precio futuro de un activo financiero.

Ejemplo 2.4.9. *(**Diferencial del precio futuro de un activo financiero**). Sea* S_t *el precio actual de una acción, suponga, como antes, que*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

es decir, el precio de la acción es log-normal o el rendimiento es normal. Sea r *una tasa de interés constante y defina el precio del futuro de la acción como*

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}. \tag{2.4.10}$$

Se observa primero que

$$\frac{\partial F_{t,T}}{\partial t} = -rS_t e^{r(T-t)}, \qquad \frac{\partial F_{t,T}}{\partial S_t} = e^{r(T-t)} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 F_{t,T}}{\partial S_t^2} = 0.$$

En este caso, la formula de Itô (2.4.5) produce

$$\begin{aligned} dF_{t,T} &= (-rS_te^{r(T-t)} + \mu S_te^{r(T-t)})dt + \sigma er(T-t)S_tdW_t \\ &= (-rF_{t,T} + \mu F_{t,T})dt + \sigma F_{t,T}dW_t \\ &= (\mu - r)F_{t,T}dt + \sigma F_{t,T}dW_t. \end{aligned}$$

La última expresión se puede reescribir como

$$dF_{t,T} = \frac{\lambda}{\sigma}F_{t,T}dt + \sigma F_{t,T}dW_t, \qquad (2.4.11)$$

donde $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ *es el premio al riesgo de mercado por unida de volatilidad.*

De esta forma, el precio futuro sigue también un Movimiento Browniano Geométrico con la misma volatilidad del activo subyacente, pero con parámetro de tendencia menor. Este cambio de tendencia se analizará de manera formal en el siguiente capítulo cuando se vea el ***teorema de Girsanov***.

Proposición. 2.4.10. *Consideremos un activo financiero cuyo precio sigue una dinámica log-normal con tendencia* μ *y volatilidad* σ*, es decir, el precio es un Movimiento Browniano Geométrico. Supongamos que el precio presente es* S_0*, entonces se tiene que la media y varianza de* S_t *son*

1. $E(S_t) = S_0e^{\mu t}$.
2. $Var(S_t =)S_0^2e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Demostración. Usaremos el hecho de que la función generadora de momentos de la distribución $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ es $M(s) = \exp(\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2)$.

1. Para el cálculo la esperanza se tiene que

$$\begin{aligned} E(S_t) &= E(S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2})t + \sigma W_t\}) \\ &= S_0 \exp\{(\mu - \sigma 2)t\}E(\exp\{\sigma W_t\}) \\ &= S_0 \exp\{(\mu - \sigma 2)t\} \exp\{\frac{1}{2}t\sigma 2\} \\ &= S_0e^{\mu t}. \end{aligned}$$

2. Ahora calcularemos la varianza.

$$\begin{aligned} Var(S_t) &= Var(S_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\} \\ &= S_0^2 \exp\{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma)t\}Var(\exp\{\sigma W_t\}) \\ &= S_0^2 \exp\{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma)t\}(E(\exp\{2\sigma W_t\}) - E^2(\exp\{\sigma W_t\})) \\ &= S_0^2 \exp\{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma)t\}(\exp\{\frac{1}{2}t(2\sigma)^2\} - \exp\{2(\frac{1}{2}t\sigma^2)\}) \\ &= S_0^2e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.11. ***Fórmula de Itô para dos procesos estándar.*** *Si* $f \in C^2$,

$$X_t = \int_0^t \mu(w,s)ds + \int_0^t \sigma(w,s)dW_s$$

y

$$Y_t = \int_0^t \nu(w,s)ds + \int_0^t \rho(w,s)dW_s,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(X_t,Y_t) = f(0,0) \quad &+ \quad \int_0^t f_x(X_s,Y_s)dX_s + \int_0^t f_y(X_s,Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(X_s,Y_s)\sigma^2(w,s)ds \\ &+ \quad \int_0^t f_{xy}(X_s,Y_s)\sigma(w,s)\rho(w,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{yy}(X_s,Y_s)\rho^2(w,s)ds. \end{aligned}$$

Demostración. Para la demostración se puede ver [18] pág. 48 o [7] pág. 95.

□

A continuación se enuncia un corolario que será de importancia en el capítulo cuatro al construir la fórmula de Black-Scholes.

Corolario 2.4.12. *(**Regla del producto.**) Sean* X_t *y* Y_t *procesos que satisfacen*

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu_t d_t + \sigma_t dW_t, \\ dY_t &= \nu_t d_t + \rho_t dW_t, \end{aligned}$$

entonces

$$d(X_t \cdot Y_t) \quad = \quad X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \rho_t d_t. \tag{2.4.12}$$

Demostración. Sea $f(X_t,Y_t) = X_t \cdot Y_t$ entonces $f_x = Y_t$, $f_y = X_t$, $f_x x = 0$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 0$ y las condiciones iniciales $X_0 = 0$ y $Y_0 = 0$ utilizando el teorema (2.4.11) se tiene

$$X_t \cdot Y_t = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t \sigma \cdot \rho ds$$

entonces

$$d(X_t \cdot Y_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + \sigma\rho dt.$$

□

CAPÍTULO 3

CAMBIO DE MEDIDA

3.1. Introducción

Al manipular diferenciales del Movimiento Browniano implícitamente se tiene involucrada una medida, ya que en realidad, W no es un Movimiento Browniano *perse*, sino más bien un Movimiento Browniano con respecto a una medida P. A esto se le llama un "*P-Movimiento Browniano*". Hasta el momento no se tiene idea de como W_t permite que X_t cambie cuando su medida cambia. En este capítulo se presenta la *Derivada de Radon-Nikodym*, la cuál permite tener las condiciones necesarias y suficientes para poder hacer un cambio de media, se presenta también el *Teorema de Girsanov*, el cuál servirá más adelante para garantizar un cambio de medida.

3.2. Derivada de Radon-Nikodym

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $f : \omega \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa, entonces se tiene que

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad A \in \mathcal{F}, \tag{3.2.1}$$

define una medida sobre $\mathcal{F}$. A esta medida se le denota por f_μ para indicar la dependencia de f con respecto a la medida de μ, y se le llama medida de densidad f_μ. (Siempre que sea clara la dependencia se omitirá el subíndice).

El siguiente teorema nos presenta la relación existente entre la integración con respecto a μ y con respecto a ν.

Teorema 3.2.1. *Sea f una función medible no negativa, entonces*

a) *Para toda función medible, no negativa se satisface que*

$$\int_A g d\nu = \int_A g f d\mu. \tag{3.2.2}$$

donde ν es la función que está definida en (3.2.1).

b) *Una función medible $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es ν-integrable si y sólo si fg es μ-integrable.*

Demostración. Para la demostración véase [16] pág. 107. □

Teorema 3.2.2. *Sea f y g funciones medibles no negativas. Entonces se satisface*

1. *$f = g$ μ-c.s.*

2. *Si f y g son μ-integrables entonces $f\mu = g\mu$ implica que $f = g$ c.s.*

3. *Si μ es σ-finita entonces $f\mu = g\mu$ entonces f=g c.s.*

Demostración. Para la demostración véase [16] pág. 109. □

Teorema 3.2.3. *Sea $\nu = f\mu$ y si se supone que N es un conjunto μ-nulo, entonces N es un conjunto ν-nulo.*

Demostración.

$$0 \leq \nu(N) = \int_N f d\mu = 0.$$

□

Definición 3.2.1. *Se dice que una medida ν es absolutamente continua respecto a la medida μ denotado por $\nu \ll \mu$ si y sólo si para $A \in \mathcal{F}$ $\mu(A) = 0$, lo cual implica que $\nu(A) = 0$. Si ν está definida como en (3.2.1) se tiene naturalmente que $\nu \ll \mu$.*

Para el caso en que ν es finita se tiene la siguiente condición equivalente a la continuidad absoluta respecto de μ.

Teorema 3.2.2. *Si ν es finita, en particular si $\nu = P$ es una medida de probabilidad entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

a) *$\nu \ll \mu$.*

b) *Para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

Demostración. Para la demostración véase [16] pág. 110.

□

En el siguiente teorema se dan condiciones para demostrar que si dos medidas son absolutamente continuas (una respecto de la otra), se puede encontrar una densidad que relaciona a ambas medidas.

Teorema 3.2.3. ***(Radon-Nikodym)****. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Dadas μ y ν medidas en $\mathcal{F}$. Si μ es σ-finita entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *Existe una función $\mathcal{F}$ medible no negativa $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\nu(A) = \int_A g d\mu \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{F}.$$

2. *$\nu \ll \mu$.*

Si h es otra función que satisface (3.2.1) entonces h=g c.s. a esta función g se le llama la densidad de ν, también se le denota por $\frac{d\nu}{d\mu}$ y se le llama la derivada de **Radon-Nikodym**.

A continuación se da la versión de probabilidad de la derivada de *Radon-Nikodim*.

Definición 3.2.4. *Siguiendo la notación de [19] sea* $\mathbf{P}$ *una medida de probabilidad sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y sea* $\mathbf{Q}$ *una medida finita sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *i.e.* $\mathbf{Q}$ *toma valores en* $\mathbb{R}^+$ *y* $\mathbf{Q}(A) < \infty$ *para toda* $A \in \mathcal{F}$. *Decimos que* ***Q*** *es equivalente a* ***P*** *si* ***Q(A)****=0 si y sólo si* ***P(A)****=0 para cada* $A \in \mathcal{F}$. *El teorema de Radon-Nikodim establece que* ***Q*** *es equivalente a* ***P*** *si y solo si existe una variable aleatoria no negativa* X *tal que*

$$Q(A) = \int_A X d\mathbf{P} = E_P[1_A X] \textit{ para toda } A \in \mathcal{F}.$$

Además X *es única* ***P*** *c.s. y se denota*

$$X = \frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}},$$

X *es llamada la derivada de Radon-Nikodim de* ***Q*** *sobre* ***P****.*

Ejemplo 3.2.4. *Sea* X *es una variable aleatoria continua con función de densidad, es decir,* $f_X(x)$ *es una función no negativa Riemann integrable tal que*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

entonces por el teorema de Radon-Nikodym

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

Es más, si g *es una función tal que* $E(g \circ X)$ *está definida sobre el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, entonces*

$$E(g \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)dx$$

si X *tiene a* f *como función de densidad.*

Proposición 3.2.5. *Sean* ***P*** *y* ***Q*** *dos medidas de probabilidad en el espacio* $(\Omega, \mathcal{F})$ *equivalentes y sea* A *un evento en* $\mathcal{F}$. *Se define*

$$\boldsymbol{Q(A)} = \int_A X\, \boldsymbol{dP} \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

donde X *será la* derivada de Radon-Nicodym *y además se cumple lo siguiente*

- $\boldsymbol{Q}(\Omega) = \int_\Omega X\, \boldsymbol{dP} = E(X) = 1.$
- *Para cuálquier variable aleatoria* Y *se tiene que* $E_Q(Y) = E_P(XY)$.

Demostración. Sea Y una variable aleatoria tal que $Y \sim N(0,1)$ bajo la medida $\mathbf{P}$, entonces

$$\mathbf{P}(Y \leq \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta} \exp\Big\{ -\frac{y^2}{2} \Big\} dy.$$

Se define $Y^* = \theta + Y$, claramente Y^* es una variable aleatoria que se distribuye Norma Estándar. Ahora definamos la variable aleatoria X como

$$X = \exp\{-\theta Y - \frac{1}{2}\theta^2\}. \tag{3.2.3}$$

Se comprueba primeramente que $E_P(X) = 1$. En efecto

$$\begin{aligned}
E_P(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\theta y - \frac{1}{2}\theta^2\} \exp\Big\{ -\frac{y^2}{2} \Big\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{ -\frac{(y+\theta)^2}{2} \Big\} dy \\
&= 1.
\end{aligned}$$

También se comprueba fácilmente que bajo la medida $\mathbf{Q}$ la variable aleatoria $Y^* = Y + \theta$ es una variable aleatoria Normal Estándar. En efecto, sea $I_{\{Y \leq \delta - \theta\}}$ una variable aleatoria. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
E_P\Big(I_{\{Y \leq \delta-\theta\}} \underbrace{\exp\{-\theta y - \frac{1}{2}\theta^2\}}_{X} \Big) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta-\theta} \exp\{-\theta y - \frac{1}{2}\theta^2\} \exp\Big\{ -\frac{y^2}{2} \Big\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta-\theta} \exp\Big\{ -\frac{(y+\theta)^2}{2} \Big\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta} \exp\Big\{ -\frac{(y^*)^2}{2} \Big\} dy^*; \quad Y^* = Y + \theta.
\end{aligned}$$

Esto último es la función de densidad una variable aleatoria normal estándar. □

Se observa en la proposición anterior que se ha cambiado la media pero no la varianza. Esto es importante ya que al tener que describir el proceso que siguen los precios de los activos, se necesitará cambiar la tasa de rendimiento medio pero no la volatilidad.

Ejemplo. 3.2.5. ***La derivada de Radon-Nicodym y la regla de la cadena.*** *Sea* $\{W_t\}_{0 \leq t \leq t}$ *un Movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{0 \leq t \leq t}, \mathbf{P})$. *Supongamos que el siguiente proceso estocástico es conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica,*

$$dS_t = aS_t + \sigma S_t dW_t.$$

Suponga que se desea cambiar el parámetro de tendencia de a *a* b. *Así*

$$\begin{aligned}
dS_t &= bS_t dt + (a-b)S_t dt + \sigma S_t dW_t \\
&= bS_t dt + \sigma S_t \Big(\frac{a-b}{\sigma} dt + dW_t \Big) \\
&= bS_t dt + \sigma S_t (\lambda_{a,b} dt + dW_t) \\
&= bS_t dt + \sigma S_t \widehat{W}_t,
\end{aligned}$$

donde

$$\lambda_{a,b} = \frac{a-b}{\sigma}$$

y

$$\widehat{W}_t = \lambda_{a,b}dt + dW_t.$$

En este caso la derivada de Radon-Nikodym esta dada por

$$\frac{d\mathbf{Q}(\widehat{W}_t)}{d\mathbf{P}(W_t)} = \exp\{\lambda_{a,b}W_t - \frac{1}{2}\lambda_{a,b}^2 t\}.$$

Suponga ahora que se desea cambiar de nuevo la tendencia de b *a* c*, entonces*

$$\begin{aligned} dS_t &= cS_t dt + \sigma S_t(\lambda_{b,c}dt + d\widehat{W}_t) \\ &= cS_t dt + \sigma S_t \widetilde{W}_t, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_{b,c} = \frac{b-c}{\sigma}$$

y

$$\widetilde{W}_t = \lambda_{b,c}dt + \widehat{W}_t.$$

Por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{R}(\widetilde{W}_t)}{d\mathbf{Q}(\widehat{W}_t)} = \exp\{\lambda_{b,c}\widehat{W}_t - \frac{1}{2}\lambda_{b,c}^2 t\}.$$

El cambio en el parámetro de tendencia de a *a* c *en un solo paso se calcula mediante*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}(\widetilde{W}_t)}{d\mathbf{P}(W_t)} &= \frac{d\mathbf{R}(\widetilde{W}_t)}{d\mathbf{Q}(\widehat{W}_t)}\frac{d\mathbf{Q}(\widehat{W}_t)}{d\mathbf{P}(W_t)} \\ &= \exp\Big\{-\lambda_{b,c}\widehat{W}_t - \frac{1}{2}\lambda_{b,c}^2 t\Big\}\exp\Big\{-\lambda_{a,b}W_t - \frac{1}{2}\lambda_{a,b}^2 t\Big\} \\ &= \exp\Big\{-\lambda_{b,c}(\lambda_{a,b}t + W_t) - \frac{1}{2}\lambda_{b,c}^2 t\Big\}\exp\Big\{-\lambda_{a,b}W_t - \frac{1}{2}\lambda_{a,b}^2 t\Big\} \\ &= \exp\Big\{-(\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c})W_t - \frac{1}{2}(\lambda_{a,b}^2 t + 2\lambda_{a,b}\lambda_{b,c} + \lambda_{b,c}^2)t\Big\} \\ &= \exp\Big\{-(\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c})W_t - \frac{1}{2}(\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c})^2 t\Big\} \\ &= \exp\Big\{-(\lambda_{a,c}W_t - \frac{1}{2}\lambda_{a,c})^2 t\Big\}, \end{aligned}$$

Ya que

$$\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c} = \frac{a-b}{\sigma} + \frac{b-c}{\sigma} = \frac{a-c}{\sigma} = \lambda_{a,c}.$$

En la literatura financiera S_t representa el precio del subyacente de un activo.

3.3. Teorema de la Representación Martingala

Un aspecto interesante dentro de la matemática es el que un mismo objeto puede tener más de una representación, lo cual nos ayuda a conocer diferentes características que de alguna manera logran revelar características diferentes. En muchos casos elegir la representación correcta puede ser fantástico matemáticamente hablando.

Esta sección se centra en el teorema de representación martingala el cual es de suma importancia en el cálculo estocástico y que es de gran importancia en la valuación de los instrumentos financieros, en especial en la fijación de los precios de arbitraje de los derivados. El teorema nos dice cuando podemos representar una martingala continua como una integral estocástica en $\mathcal{H}^2$.

La idea intuitiva que se tiene de una martingala es que no tiene tendencia a subir ni bajar, en términos de juegos justos se dice que el jugador no pierde ni gana. Sin embargo, se tiene una definición técnica de tendencia a través de la formulación de diferenciales estocásticas. Se verá que los procesos estocásticos sin término de tendencia (sin drift) son siempre martingalas.

Teorema. 3.3.1. ***(Teorema de la representación en $\mathcal{H}^2$).*** *Sea X una variable aleatoria, y sea $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración natural del Movimiento Browniano. Si X tiene medida cero y $E(X^2) < \infty$, entonces existe una función $\phi(w,s) \in \mathcal{H}^2$ tal que*

$$X = \int_0^T \phi(w,s)dW_s. \tag{3.3.1}$$

Por otra parte, la representación en la ecuación (3.3.1) es única en el sentido de que si $\psi(w,s)$ es otro elemento de $\mathcal{H}^2[0,T]$ que satisface la ecuación (3.3.1), entonces tenemos que $\psi(w,s) = \phi(w,s)$ para todo $(w,s) \in \mathcal{H}^2$ salvo en un conjunto $dP \times dt$ de medida cero.

Demostración. Una prueba de este teorema se puede encontrar por ejemplo en [20] pág 196.
$\square$

La mayor aplicación del teorema (3.3.1) es realmente un corolario que hace la conexión con martingalas más explícito. Se presenta este resultado como un teorema debido a su gran importancia.

Teorema. 3.3.2. ***(Teorema de la representación Martingala).*** *Sea X una variable aleatoria, y sea $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración natural del Movimiento Browniano. Si existe T tal que $E(X_T^2) < \infty$ y si $X_0 = 0$, entonces existe una función $\phi(w,s) \in \mathcal{H}^2$ tal que*

$$X_t = \int_0^t \phi(w,s)dW_s \quad \textit{para todo } 0 \leq t \leq T \tag{3.3.2}$$

Demostración. Una prueba de este teorema puede verse en [20] pág. 197.
$\square$

Ahora llevaremos este resultado a un Movimiento Browniano siguiendo el procedimiento de [9] y las demostraciones de [6] pág. 90.

Teorema. 3.3.1. *Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t\in[0,\infty]}, \mathbf{P})$, si se define*

$$M_t = c + \sigma \int_0^t dW_u,$$

entonces $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala.

Demostración. Se puede ver que $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala si se demuestra que $\int_0^t dW_u$ es una martingala. En efecto,

$$\begin{aligned} E\bigg(\int_0^t dW_u|\mathcal{F}_s\bigg) &= E\bigg(\int_0^s dW_u + \int_s^t dW_u|\mathcal{F}_s\bigg) \\ &= \int_0^s dW_u + E(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) \\ &= \int_0^s dW_u + 0. \end{aligned}$$

□

A continuación se enuncia el resultado recíproco del teorema anterior.

Teorema. 3.3.2. *Sea $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un Movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ y sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}\}_{t\in[0,\infty]}$ su filtración aumentada. Si $\{M_t\}_{t\geq 0}$ es una **P** martingala con respecto de $\mathcal{F}$, entonces existe un proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ adaptado a $\mathcal{F}$ tal que*

$$M_t = M_0 + \sigma \int_0^t X_u dW_u$$

ó

$$dM_t = X_u dW_u.$$

Demostración. Observemos que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración aumentada $\mathcal{F}$, del Movimiento Browniano, entonces $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es la única fuente de incertidumbre del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$. En este caso, las trayectorias del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ son continuas.
Por último supóngase $dM_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, esto es

$$M_t = c + \int_0^t \mu_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u.$$

Si σ_t es adaptada (no anticipada) a la información $\mathcal{F}_t$ y $\{M_t\}_{t\geq 0}$, entonces $M_t \equiv 0$. En efecto, sea $0 < s < t$, entonces

$$\begin{aligned} E\bigg(\int_0^t \mu_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u \Big| \mathcal{F}_s\bigg) &= \int_0^t \mu_u du + \int_0^s \sigma_u dW_u + E\bigg(\int_s^t \sigma_u dW_u \Big| \mathcal{F}_s\bigg) \\ &= \int_0^t \mu_u du + \int_0^s \sigma_u dW_u + 0 \\ &= \bigg(\int_0^s \mu_u du + \int_0^s \sigma_u dW_u\bigg) + \int_s^t \mu_u du \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\int_s^t \mu_u du = 0 \quad \text{para toda } s < t,$$

por lo tanto $M_t \equiv 0$. □

Se puede enunciar los dos teoremas anteriores en uno solo:

Teorema. 3.3.3. *Si X es un proceso estocástico con volatilidad σ_t (es decir $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$), lo cuál satisface la condición técnica $E[(\int_0^T X_s \sigma_s ds)^{\frac{1}{2}}] < \infty$, entonces*

$$X \quad \textit{es una martingala si y sólo si } X \textit{ no tiene tendencia} \quad (\mu_t \equiv 0).$$

La condición técnica

$$E\left(\left(\int_0^T \sigma_s^2 X_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \infty$$

es difícil de verificar, pero para ejemplos exponenciales se puede demostrar que si $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$, para algún proceso $\mathcal{F}$-previsible σ_t entonces $E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s ds^2\right)\right) < \infty$ implica que X es una martingala. Esta condición se conoce como "*Condición de Novikov*", y se verá su importancia en la siguiente sección cuando veamos el teorema de Girsanov.

3.4. Teorema de Girsanov

En 1961 Igor V. Girsanov, de nacionalidad rusa, presentó bajo la dirección de Andrei Kolmogorov y de Eugene B. Dinkyn su tesis doctoral en la Universidad Estatal de Moscú.

El teorema de Girsanov construye explícitamente una medida de probabilidad que permite trasformar "un Movimiento Browniano con tendencia" en un Movimiento Browniano sin tendencia, este último definido en un espacio de probabilidad equivalente.

En particular podemos aplicar el teorema de Girsanov en el modelo de Black-Scholes, para encontrar una medida de probabilidad que haga el valor presente del subyacente en una martingala. Este teorema constituye entonces una herramienta fundamental en la valuación teórica de diversos productos derivados.

3.4.1. ¿Qué es el teorema de Girsanov?

En esta sección se plantean las ideas centrales del teorema de Girsanov. Para ello supongamos un Movimiento Browniano tal que $W_T \sim \mathbf{N}(0, T)$ y considere la variable aleatoria $W_T + \lambda T$, $\lambda \in \mathbb{R}$. El valor medio y la varianza de esta variable aleatoria están dados, respectivamente por

$$E(W_T + \lambda T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) \exp\left\{\frac{-w^2}{2T}\right\} dw = \lambda T$$

y

$$Var(W_T + \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} ((w + \lambda T) - \lambda T)^2 \exp\left\{\frac{-w^2}{2T}\right\} dw = T.$$

De lo anterior se desprende que si W_T es normal con media cero y varianza T, entonces $W_T + \lambda T$ es normal con media λT y varianza T. Es decir, al pasar de W_T a $W_T + \lambda T$, la media cambia de cero a T, pero la varianza se mantiene en T.

El problema que a continuación se presenta tiene toda la esencia del teorema de Girsanov: se desea determinar una función $\varphi = \varphi(W_T)$ que cumpla las siguientes dos condiciones

$$E\big[(W_T + \lambda)\varphi(W_T)\big] = 0,$$

y

$$E\big[(W_T + \lambda)^2\varphi(W_T)\big] = T,$$

equivalentemente,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)\varphi(w) \exp\Big\{\frac{-w^2}{2T}\Big\} dw = 0 \tag{3.4.1}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)^2\varphi(w) \exp\Big\{\frac{-w^2}{2T}\Big\} dw = T. \tag{3.4.2}$$

Si

$$\varphi(W_T) = \exp\{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\}. \tag{3.4.3}$$

Esta es la función que se busca para que se cumplan (3.4.1)y (3.4.2). Aún más se puede demostrar que esta función $\varphi(W_T)$ es única. Así pues se desea tener dos resultados importantes. El primero es que si $E(W_T + \lambda T) = \lambda T$, entonces $E[(W_T + \lambda T)\varphi(W_T]) = 0$. El segundo resultado es que si $Var(W_T) = T$ entonces $Var[(W_T + \lambda T)\varphi(W_T) = T$.

Se demuestra que la ecuación (3.4.3) es la derivada de Radon-Nikodym. Se verá ademas el nuevo espacio de probabilidad que induce el teorema de Girsanov y como se calcula los valores esperados en este nuevo espacio.

Sea $\{W_T : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$. La variable W_t se distribuye $N(0,T)$, se considera a la variable aleatoria $W_T + \lambda T$ y sea g una función de $W_T + \lambda T$, entonces

$$\begin{aligned} E_P[g(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} g(w + \lambda T)\varphi(w) e^{-w^2/2t} dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(w + \lambda T)\varphi(w) \mathbf{dP}, \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{dP} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-w^2/2t} dw.$$

Ahora se define $\widehat{W}_T$ que se distribuye $N(0,T)$, definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, \mathbf{Q})$. Entonces

$$\begin{aligned} E_Q[g(\widehat{W}_T)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\widehat{w}) e^{-\widehat{w}^2/2t} d\widehat{w} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\widehat{w}) \mathbf{dQ}, \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

donde

$$\mathbf{dQ} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\widehat{w}^2/2t} d\widehat{w}.$$

Si $\widehat{w}_T = W_T + \lambda T$ se tiene

$$\frac{\mathbf{dQ}}{\mathbf{dP}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\widehat{w}^2/2t} d\widehat{w}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-w^2/2t} dw} = \frac{e^{-(w+\lambda T)^2/2t} dw}{e^{-w^2/2t} dw} = e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} = \varphi(W_T).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} E_Q[g(\widehat{W_T})] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\widehat{w}_T) e^{-\widehat{w}^2/2t} d\widehat{w} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\widehat{w}_T)\mathbf{dQ} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\widehat{w}_T)\frac{\mathbf{dQ}}{\mathbf{dP}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(w + \lambda T)\varphi(W)\mathbf{dP} = E_P[g(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)]. \end{aligned}$$

Se concluye por tanto que $\varphi(W_T)$ es la*derivada de Radon-Nicodym.*

A continuación se enuncia de manera formal el teorema de Girsanov.

Teorema. 3.4.1. ***(Teorema de Girsanov.)*** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $\widehat{W_t}$ un proceso de Itô de la forma*

$$d\widehat{W_t} = dW_t + \lambda(t)dt \quad t \leq T, \quad y\widehat{W_0} = 0,$$

con $\lambda(\cdot)$ una función determinista y W_t un Movimiento Browniano con respecto de la medida $\boldsymbol{P}$ y sea

$$M_t = \exp\left\{ \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 ds \right\} \tag{3.4.5}$$

una martingala local (positiva) con respecto de $\mathcal{F}_t$. Se define la medida $\mathbf{Q}$ sobre $\mathcal{F}_t$ como la derivada de Radon-Nikodym

$$\left.\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = M_t.$$

Si M_t es una $\mathcal{F}_t$ martingala entonces $\mathbf{Q}$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}_t$ y $\widehat{W_t}$ es un Movimiento Browniano sobre $\mathbf{Q}$ para $0 < t < T$.

Demostración. Se tiene en cuenta el siguiente recordatorio. .

Recordatorio 3.4.2. ***(Condición de Novikov)****. Bajo la condición*

$$E\Bigg(\exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 ds \right\} \Bigg) < \infty \tag{3.4.6}$$

La martingala local (positiva) M_t dada por (3.4.5) es una martingala. Podemos dar una condición más débil

$$E\Big(\exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s ds \right\} \Big) < \infty. \tag{3.4.7}$$

Entonces siguiendo la demostración de [19] pág. 36, se demuestra que efectivamente $\mathbf{Q}$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}_t$. Primero veremos que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. En efecto observe que

$$dP(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{-w^2}{2T}}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\Omega) &= E(M_t 1_\Omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{\frac{-w^2}{2T}} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(w+\lambda T)^2}{2T}} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\varepsilon^2}{2T}} d\varepsilon \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon = w + \lambda T$. El resultado anterior se conoce en la literatura como la fórmula de Cameron-Martín. Por otro lado, trivialmente se cumple que $\mathbf{Q}(A) > 0$ para $A \in \mathcal{F}$ y $\mathbf{Q}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ para una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}$, ajenos (disjuntos) entre si.

Se verá ahora que, bajo $\mathbf{Q}$, el proceso $\{\widehat{W}_t\}_{t\geq 0}$ es un Movimiento Browniano. Observemos primero que $\widehat{W}_0 = 0$. Así mismo, la continuidad de la función $t \mapsto \widehat{W}_t(w)$ es inmediata, ya que W_t y λt son funciones continuas con respecto a t. Por otro lado, la independencia de los incrementos también está garantizada, ya que

$$\widehat{W}_t - \widehat{W}_s = W_t - W_s + \lambda(t-s) \quad \text{para toda } s \leq t,$$

y $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ con $\lambda(t-s)$ una función determinista. Por lo tanto $\widehat{W}_t - \widehat{W}_s$ es también independiente de $\mathcal{F}_s$.
Ahora bien, se observa que bajo $\mathbf{P}$, el proceso $\widehat{W}_t$ tiene una distribución normal con media λT y varianza T. Es decir,

$$d\mathbf{P}(\widehat{w}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\{-(\widehat{w} - \lambda T)/2T\} d\widehat{w},$$

$$E_{\mathbf{P}}(\widehat{W}_t) = E_{\mathbf{P}}(W_t + \lambda T) = \lambda T$$

y

$$Var_{\mathbf{P}}(\widehat{W}) = Var_{\mathbf{P}}(W_t + \lambda T) = T.$$

Sin embargo, bajo $\mathbf{Q}$, se remueve el término de tendencia de $\widehat{W}_T$. En efecto,

$$\begin{aligned}
E_{\mathbf{Q}}(\widehat{W}_t) &= E_{\mathbf{P}}\big((W_t + \lambda T) M_T\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) \exp\{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} \exp\{\frac{-w^2}{2T}\} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) \exp\{\frac{-(w+\lambda T)^2}{2T}\} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \exp\{\frac{-\varepsilon^2}{2T}\} d\varepsilon \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon = w + \lambda T$. De la misma manera

$$\begin{aligned} Var_{\mathbf{Q}}(\widehat{W}_t) &= E_{\mathbf{P}}\big[(W_t + \lambda T)^2 M_T\big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)^2 \exp\{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} \exp\{\frac{-w^2}{2T}\} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \exp\{\frac{-\varepsilon^2}{2T}\} d\varepsilon \\ &= T. \end{aligned}$$

Es decir, bajo $\mathbf{Q}$, $\widehat{W}_t$ es normal con media cero y varianza T. Como puede verse, bajo $\mathbf{Q}$, la medida cambia, pero la varianza permanece igual. En conclusión bajo $\mathbf{Q}$, $\widehat{W}_t$ sigue la ley de un Movimiento Browniano. □

Con esto se demuestra el teorema de Girsanov cuando la tendencia $\lambda(t)$ es constante, por lo que surge una pregunta de suma importancia. ¿Qué pasa cuando se tiene una tendencia variable? Se procede de la siguiente manera. Sea $\{W_t\}_{0 \le t \le T}$ un Movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \le t \le T}, \mathbf{P})$. Sea $\{\lambda_t\}_{0 \le t \le T}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}\}_{0 \le t \le T}$, es decir, para cada $t \in [0, T]$ y para toda $x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\{\lambda_t \le x\} \equiv \{\omega \in \Omega | \lambda_t(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}_t.$$

Se define un Movimiento Browniano con tendencia λ_t como:

$$\widehat{W}_t = \lambda_t t + W_t.$$

A continuación se construye una medida de probabilidad, $\mathbf{Q}$, definida en el espacio muestral original, Ω, bajo la cuál $\{\widehat{W}_t\}_{0 \le t \le T}$ es un Movimiento Browniano. Sea

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \exp\left(\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds \right) \\ &= \exp\left(\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} Var\Big[\int_0^t \lambda_s^2 dW_s \Big] \right) \end{aligned}$$

junto con

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \varphi_T d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{F}. \tag{3.4.8}$$

Esta última expresión debe cumplir la condición de *Novikov*. Afortunadamente, la situación que con más frecuencia se presenta en la valuación teórica de los productos derivados es cuando se desea construir una medida de probabilidad equivalente que transforme un Movimiento Browniano con tendencia constante en otro Movimiento Browniano sin tendencia.

Proposición. 3.4.3. ***Q*** *es una medida equivalente a* ***P****.*

Demostración. Observemos que la ecuación (3.4.8) puede reescribirse como:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \varphi_T. \tag{3.4.9}$$

Es decir φ_T es la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbf{Q}$ con respecto de $\mathbf{P}$. A si mismo dado que $\mathbf{Q}(A) = \int_A \varphi_T d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{F}$, se tiene que si $\mathbf{P}$(A)=0, $A \in \mathcal{F}$ entonces $\mathbf{Q}$(A)=0, lo cuál significa como ya hemos visto antes que $\mathbf{Q}$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbf{P}$ ($\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$). Dado que la relación (3.4.9) es invertible, es decir

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} = \varphi_T^{-1}, \tag{3.4.10}$$

equivalentemente, $\mathbf{P}(A) = \int_A \varphi_T^{-1} d\mathbf{Q}$, se tiene que $\mathbf{P}$(A)=0, $A \in \mathcal{F}$ implica que $\mathbf{Q}(A) = 0$, es decir $\mathbf{P}$ es absolutamente continua con respecto de $\mathbf{Q}$ ($\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$). Si $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$, es decir $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ tienen los mismo conjuntos de medida cero, entonces $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son medidas equivalentes y lo denotamos mediante $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$. □

Existe un teorema recíproco al teorema de Girsanov, que solamente se enunciará.

Teorema. 3.4.4. ***Recíproco de Girsanov***. *Sea W_t un $\mathbf{P}$-Movimiento Browniano Y $\mathbf{Q}$ una medida equivalente a $\mathbf{P}$, entonces existe un proceso $\mathcal{F}$-previsible λ_t tal que*

$$\widehat{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda ds$$

es un $\mathbf{Q}$ Movimiento Browniano. Es decir, W_t más la tendencia λ_t es un $\mathbf{Q}$ Movimiento Browniano. De manera adicional tenemos que la derivada de Radon-Nicodym $\mathbf{Q}$ con respecto a $\mathbf{P}$ (al tiempo T) es

$$\exp\left\{ \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 ds \right\}.$$

Demostración. Para una prueba del teorema véase por ejemplo [20] pág. 222. □

3.4.2. ¿Cuál es la utilidad del teorema de Girsanov en las finanzas?

Para generar ambientes de neutralidad al riesgo en la valuación de productos derivados, es decir, ambientes donde el precio de un producto derivado no depende de las preferencias al riesgo de los agentes, es necesario cambiar la tendencia del proceso que originalmente guía el precio del subyacente. En este caso, una simple aplicación del teorema de Girsanov proporciona el resultado deseado. Por otro lado al manipular Movimientos Brownianos en la valuación de diversos productos derivados, a menudo ésos adquieren tendencias. Si se desean mantener las propiedades del Movimiento Browniano para hacer más simple el proceso de valuación, entonces el teorema de Girsanov es la herramienta para remover dichas tendencias.

Ejemplo. 3.4.5. *Consideremos un Movimiento Browniano $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbf{P})$. Consideremos un proceso de la forma*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. A si mismo sea M_t una variable determinista tal que

$$dM_t = rM_t dt.$$

Si se supone que $M_0 = 1$, entonces es fácil ver que

$$M_t = e^{rt}.$$

Entonces el proceso

$$\widehat{S}_t = M_t^{-1} S_t = e^{-rt} S_t,$$

es una martingala. En efecto se observa que

$$\begin{aligned}
d\widehat{S}_t &= d(e^{-rt}S_t) \qquad\qquad \textit{Usando la fórmula de Itô} \\
&= e^{-rt}dS_t - re^{-rt}S_t dt \\
&= e^{-rt}dS_t - r\widehat{S}_t dt \\
&= e^{-rt}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - re^{-rt}S_t dt \\
&= e^{-rt}[(\mu - r)S_t dt + \sigma S_t dW_t] \\
&= e^{-rt}\sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right).
\end{aligned}$$

Si se denota

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

y se hace la siguiente transformación

$$\widehat{W}_t = W_t + \int_0^t ds = W_t + \lambda t,$$

entonces

$$d\widehat{S}_t = \widehat{S}_t \sigma d\widehat{W}_t.$$

Por el teorema de Girsanov existe una medida de probabilidad $\mathbf{Q}$ *equivalente a* P *bajo la cuál* $\{\widehat{W}_t\}_{t\geq 0}$ *es un Movimiento Browniano Estándar y, en virtud del teorema de representación martingala,* $\widehat{S}_t$ *es una martingala.*

CAPÍTULO 4

INSTRUMENTOS DERIVADOS

4.1. Introducción

Los mercados de Futuros y Opciones tienen una importancia en el mundo de las finanzas y las inversiones. En este capítulo se hablará en forma breve de la historia de las Opciones. Se enuncian las definiciones de algunos de sus conceptos básicos.

4.2. Historia de los Derivados

La historia de las Opciones puede remontarse a la Grecia del siglo VI a.c. La posibilidad de la abundante cosecha de aceitunas motivó a *Tales de Mileto*[1] para reservar el uso exclusivo de las prensas locales. En este caso el bien subyacente[2] del contrato fue el pago por el alquiler de las prensas; posteriormente encontramos en la edad media acuerdos comerciales para satisfacer las demandas de los agricultores.

En Inglaterra en el siglo XVIII se iniciaron las negociaciones con Opciones sobre acciones de las compañías más importantes. La creciente especulación mediante Opciones y la caída del precio de las acciones en 1720 propiciaron que el mercado de las Opciones fuera cerrado y declarado ilegal.

La historia moderna de los derivados comienza durante la segunda mitad del siglo XIX en la ciudad de Chicago que en ese entonces era el centro de comercio de grano de los Estados Unidos. Los agricultores y procesadores de grano se enfrentaban al enorme *riesgo* de variaciones inesperadas en los precios. A menudo los agricultores, cosechaban sus productos y los enviaban por ferrocarril a Chicago, para después descubrir que la oferta en el mercado era de tal magnitud que no podían venderlo al precio necesario para cubrir los costos, de hecho, cuando la oferta superaba ampliamente la demanda, el grano era arrojado al lago Michigan. Por otra parte, los compradores de grano descubrían con frecuencia que los precios estaban muy por encima de lo

[1] El mismo Tales de Mileto (640-550 a.c.), filósofo, matemático y astrónomo griego quien fundó la escuela de Mileto y quien expuso el famoso y conocido Teorema de Tales.

[2] Bien o índice de referencia, objeto del contrato del derivado.

que esperaban pagar.

Ante la necesidad de eliminar los *riesgos* producidos en la variación de los precios en la compra y venta de grano se establecieron el Chicago Board of Trade y el Chicago Produce Exchange -posteriormente llamado Chicago Mercantile Exchange- cuyo propósito era manejar las transacciones al contado y realizar contratos al arribo de la mercancía. Dichos contratos en esencia eran contratos adelantados que especificaban la cantidad de grano y su precio para entrega en una fecha futura.

Durante la década de 1960, las bolsas de futuros estadounidenses se expandieron al introducir contratos a futuro de una gran variedad de mercancías, tales como panza de puerco, puercos vivos, concentrado de jugo de naranja congelado, madera y plata. La semilla que germinó en las Opciones bursátiles en la era moderna se plantó en 1968, cuando el Chicago Board of Trade se decide (de acuerdo al resultado de un estudio analítico) a crear el primer mercado de Opciones sobre acciones. Así surgió el Chicago Board Option Exchanged (CBOE) en 1972. El 26 de abril de 1973 comienza a operar el Chicago Board Options Exchange, como el primer mercado organizado en el mundo con la finalidad concreta de negociar Opciones sobre acciones de empresas que cotizan en bolsa. El primer día se negociaron 911 contratos de 16 Opciones de tipo *call* que aparecieron en el índice del New York Stock Exchange y en 1977 se comenzaron a negociar Opciones tipo *put*.

A principios de los setentas, Fischer Black, Myron Scholes hicieron una contribución fundamental en la valoración de las Opciones sobre acciones, que fue lo que se conoce como el modelo Black-Scholes. Este modelo ha tenido una enorme influencia en la forma en la que los operadores del mercado realizan y operan coberturas con Opciones; también ha sido una pieza clave en el crecimiento de la matemática financiera desde los años ochentas hasta la actualidad. Un reconocimiento a la importancia del modelo llegó en 1997 cuando Myron Scholes y Robert Merton fueron galardonados con el premio Nobel de Economía; lamentablemente Fischer Black murió en 1995.

La década de 1980 se caracterizó por la proliferación de nuevos contratos, por la apertura de nuevas bolsas de futuros y, en general, por la mayor difusión del uso de instrumentos de administración de riesgos sofisticados.

4.2.1. Antecedentes Nacionales

En 1994 el Consejo de Administración de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) autorizó el presupuesto para desarrollar el mercado de Futuros y Opciones. El 31 de diciembre de 1996 se publicaron en el Diario Oficial de la Federación las reglas a las que han de sujetarse las sociedades y fideicomisos participantes en la constitución y operación del Mercado Mexicano de Derivados.

Se empezaron operaciones el 15 de diciembre de 1998 al listar contratos de futuros sobre subyacentes financieros, siendo constituida como una sociedad anónima de capital variable autorizada por la Secretaria de Hacienda y Crédito Publico (SHCP)

4.3. Derivados

Existe gran variedad de derivados entre ellos: Los Forwards, Futuros, Opciones y Swaps. Este trabajo se centra principalmente en las Opciones. Aunque se menciona unas definiciones básicas sobre Futuros para poder entender más adelante lo que se conoce en la literatura financiera como la paridad *Put-Call* que es un resultado de la valuación de las Opciones.

A continuación se enuncian algunas definiciones básicas.

Definición 4.3.1. *(**Arbitraje**). Se entiende por Arbitraje el asegurar una ganancia sin riesgo al realizar transacciones simultáneas en dos o más mercados.*

Ejemplo 4.3.2. *Considérese las acciones de una empresa que cotiza tanto en la Bolsa de Nueva York (New York Stock Exchange) como en la de Londres(London Stock Exchange). Si suponemos que el precio de la acción es de 172 dólares en Nueva York y 100 libras en Londres con un tipo de cambio de 1.75 dolares por cada libra esterlina: Una operación de arbitraje sería comprar simultáneamente 100 acciones en el mercado de Nueva York y venderlas en Londres para obtener un beneficio libre de riesgo de* $100 \times (1.75 \times 100 - \$172) = \$300$ *dólares en ausencia de costos de transacción.*

Oportunidades de arbitraje como la que se muestra en el ejemplo no pueden durar mucho tiempo. A medida que los operadores compran acciones en Nueva York, las fuerzas de la oferta y la demanda harán subir el precio en dólares. Del mismo modo, a medida que se venden acciones en Lodres, el precio en libras se verá forzado a la baja. Rápidamente ambos precios, evaluados al tipo de cambio, terminarán siendo equivalentes.

Definición 4.3.3. *(**Supuesto Básico**). De manera práctica, en la teoría básica de valuación de instrumentos derivados se considera que en la economía hay ausencia de arbitraje.*

4.3.1. Forwards y Futuros

Definición 4.3.4. *(**Contrato Forward**).*[3] *Un contrato Forward es un acuerdo para comprar o vender un activo (el subyacente) a un precio pactado (precio de entrega), el cuál se escoge de tal manera que el valor del Forward sea cero al celebrar el contrato; es decir, no cuesta nada ya sea tomar una posición larga (compra) o una corta (vender) en una fecha futura pactada (fecha de maduración). El poseedor del Forward está obligado a comprar el subyacente (posición larga). Por supuesto, la correspondiente posición corta (el emisor o vendedor del Forward) acuerda vender el subyacente. El precio Forward de un contrato a un determinado tiempo se define como el precio de entrega que haría al contrato tener valor cero.*

Definición 4.3.5. *(**Payoff**). Si se supone que la fecha de vencimiento es* T *se define*

$$\begin{aligned} S_T &: \textit{Precio del activo en la fecha } T \textit{ (Spot).} \\ K &: \textit{Precio de entrega en el contrato Forward.} \end{aligned}$$

se llamara a esta diferencia $S_T - K$ *como el Payoff (beneficio bruto).*

[3] Usualmente los contratos Forwards se realizan entre dos instituciones financieras ó entre una institución financiera y uno de sus clientes corporativos (no en un mercado de valores). A este tipo de mercado se lo conoce como Over the Counter (OTC). Por otro lado los contratos futuros son pactados en un mercado de valores.

Usando la siguiente notación:

T : Tiempo hasta la fecha de entrega del contrato a plazo (en años).
t : Tiempo actual (años).
S_t : Precio del activo subyacente en t.
F_t : Precio del Forward en t.
r : Tasa anual libre de riesgo en tiempo actual t para una inversión que madura en T.

Se tiene que el precio del Forward F_t está dado por

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}. \tag{4.3.1}$$

Teorema 4.3.1. *Los precios Forward y de Futuros son iguales en la presencia de tasas de interés constantes (misma fecha de entrega).*

Demostración. La demostración fue dada en el artículo de Cox-Ingersoll-Ross, véase [2]. □

4.3.2. Opciones

Una Opción es un contrato que establece el derecho más no la obligación de comprar o vender una cantidad determinada de un bien (una acción, una mercancía básica, divisas, instrumentos financieros etc.) a un precio preestablecido (precio de ejercicio) dentro de un periodo determinado. Existen dos tipos de Opciones: **Opciones de compra** (*call*) y **Opciones de venta** (*put*).

Todos los contratos de Opciones, ya sean para comprar (*call*) o para vender (*put*), deben especificar lo siguiente.

i. El bien subyacente.

ii. El monto del bien subyacente.

iii. El precio de ejercicio al cuál se puede ejercer la Opción.

iv. El vencimiento.

Definición. 4.3.6. ***(Opción de compra (call))****. La Opción de compra (* call*) es el derecho más no la obligación de comprar cierta cantidad de un bien a un determinado precio, para ejercerse durante cierto periodo. Este derecho se obtiene a cambio del pago de una prima o precio.*

Definición. 4.3.7. ***(Opción de venta (put))****. La Opción de venta (* put*) es el derecho más no la obligación de vender cierta cantidad de un bien a un determinado precio, para ejercerse durante cierto periodo. Este derecho se obtiene a cambio del pago de una prima o precio.*

En este punto se debe señalar que existen cuatro tipos de participantes en los mercados de Opciones.

1. Compradores de Opciones de compra.

2. Vendedores (emisores) de Opciones de compra.

3. Compradores de Opciones de venta.

4. Vendedores (emisores) de Opciones de venta.

Definición. 4.3.8. ***(Opción Europea)****. Contrato en el cuál el comprador adquiere del vendedor el derecho, más no la obligación, de comprar o vender el bien subyacente al precio pactado* ***solo en la fecha de vencimiento*** *y el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido.*

Definición. 4.3.9. ***(Opción Americana)****. Contrato en el cuál el comprador adquiere del vendedor el derecho, más no la obligación, de comprar o vender el bien subyacente al precio pactado* ***en el periodo hábil comprendido entre la fecha de negociación y la fecha de vencimiento****, mientras que el vendedor se obliga a vender o comprar, según corresponda, el activo subyacente al precio convenido.*

En las siguientes figuras se muestran los rendimientos Brutos (Payoff) de las diferentes posiciones de acuerdo al tipo de Opción.

Figura 4.1: Compra de un call, posición larga

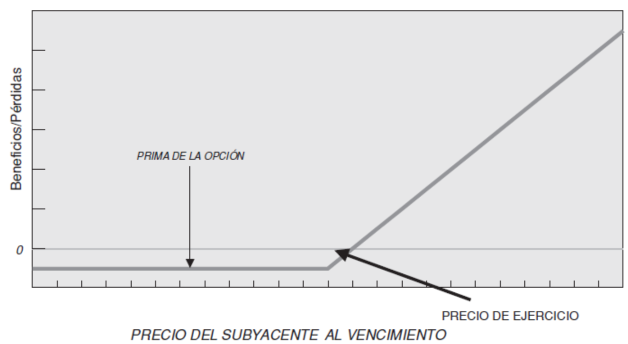


Figura 4.2: Compra de un put, posición larga

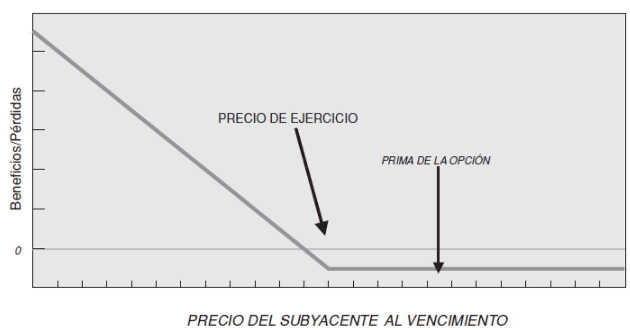


Figura 4.3: Venta de un call, posición corta

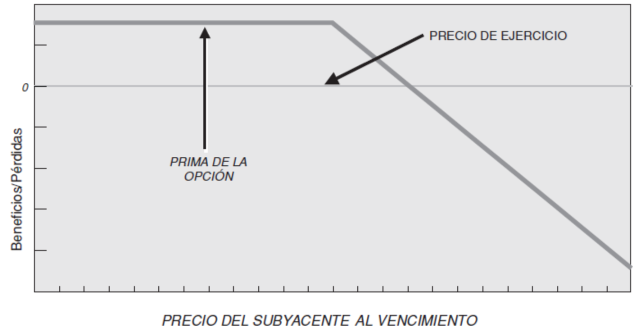
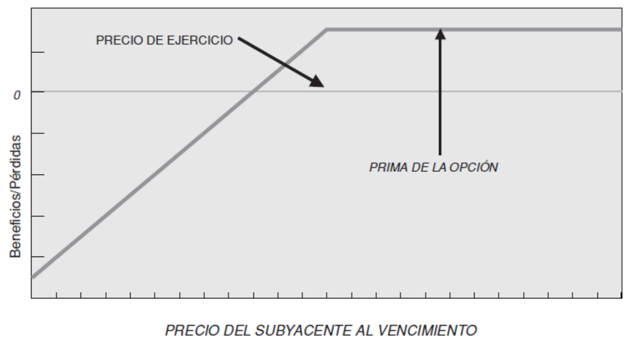


Figura 4.4: Venta de un put, Posición corta



Notación:

$$
\begin{aligned}
S_t &= \text{Precio actual de las acciones.} \\
K &= \text{Precio de ejercicio de una acción (precio strike).} \\
T &= \text{Tiempo hasta el vencimiento de una acción.} \\
r &= \text{Tasa de interés libre de riesgo continua para una inversión que vence en el momento T.} \\
c[S_t, T, K] &= \text{Precio de una Opción de compra Europea para comprar una acción.} \\
p[S_t, T, K] &= \text{Precio de una Opción de venta Europea para comprar una acción.} \\
X &= \text{Precio de la acción en el momento de vencimiento de la Opción. Payoff.}
\end{aligned}
$$

El payoff para las Opciones está dado por

$$
\begin{aligned}
\text{Call Europea} &\rightarrow \text{máx}\{S_t - K, 0\}. \\
\text{Put Europea} &\rightarrow \text{máx}\{K - S_t, 0\}.
\end{aligned}
$$

Los beneficios están dado por la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\text{Call Europea} &=: \text{máx}(S_t - K) - prima. \\
\text{Put Europea} &=: \text{máx}(K - S_t) - prima.
\end{aligned}
$$

Donde más adelante encontrará la forma de calcular el valor de la prima.

4.3.3. Ecuación fundamental de las Opciones Europeas (Paridad Put-Call).

Se muestra la importante relación que existe entre $p[S_t, T, K]$ y $c[S_t, T, K]$. Consideremos las siguientes dos carteras:

Cartera A: Una Opción Europea de compra más una cantidad monetaria igual a Ke^{-rt}.
Cartera B: Una opción Europea de venta más una acción.

Ambas tienen el valor de $max(S_t, K)$ al vencimiento de las Opciones. Como las Opciones son europeas, no pueden ejercerse antes de la fecha de vencimiento. Por lo tanto, el mismo valor deben tener las carteras al día de hoy, esto significa que

$$c[S_t, T, K] + Ke^{-rt} = p[S_t, T, K] + S_0. \tag{4.3.2}$$

Esta relación se conoce como *ecuación fundamental de las Opciones Europeas (paridad put-call).*

Esta igualdad demuestra que el valor de una Opción europea de compra con un cierto precio de ejercicio puede deducirse del valor de una Opción Europea de venta con el mismo precio y fecha de ejercicio, y viceversa.

4.4. Estrategias de construcción

El concepto de valuación a riesgo es, sin duda, muy importante en el estudio de productos derivados.

Definición. 4.4.1. ***(Valoración Neutral al riesgo)****. Debido a la consideración de un rendimiento esperado μ. La ecuación*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{4.4.1}$$

no es independiente de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto mientras mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado, μ, a fin de que el premio $\nu = \mu - r$ le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\nu = 0$, a si $\mu = r$ y de esta manera el rendimiento medio esperado de cuálquier activo es la tasa de interés libre de riesgo r. Otra forma de medir el premio al riesgo, de uso más frecuente, consiste en estandarizar ν por unidad de varianza (más precisamente por unidad de desviación estándar), es decir $\lambda = \frac{\nu}{\sigma}$. Como antes, si los agentes no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\lambda = 0$, lo cuál implica a su vez, que $\mu = r$. Si se escribe

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t\Big(\frac{\mu - r}{\sigma} + dW_T\Big) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t(\lambda dt + dW_t), \end{aligned}$$

entonces, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo $\lambda = 0$, se tiene que la ecuación (4.4.1) se trasforma en

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{4.4.2}$$

en cuyo caso se dice que el Movimiento Browniano está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Más adelante, se utiliza el teorema de Girsanov que formaliza y generaliza estas ideas. En los modelos financieros más simples, se tiene un mercado que consiste en un activo aleatorio y un activo sin riesgo (bono).

Definición. 4.4.2. *(**El portafolio** $(\alpha_\mathbf{t}, \beta_\mathbf{t})$). Un portafolio es un par de procesos $\{\alpha_t\}$ y $\{\beta_t\}$ los cuáles describen de manera respectiva, el número de unidades del activo y de bono que debemos mantener al tiempo t. Los procesos pueden tomar valores positivos o negativos (se puede vender en corto cuálquier cantidad de activo o de bono). El componente de activo del portafolio α debiese ser $\mathcal{F}_s$ -previsible- dependiente solo de la información hasta el tiempo t pero sin incluir t.*

La descripción del portafolio (α_t, β_t), es una estrategia dinámica que detalla el monto que debemos mantener en cada instante de cada componente. Un portafolio es auto-financiado si y sólo si el cambio en su valor sólo depende en el cambio de los precios de sus componentes, con un precio S_t del activo aleatorio y un precio B_t del bono. El valor V_t, de un portafolio (α_t, β_t) al tiempo t está dado por

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t. \tag{4.4.3}$$

Al siguiente instante de tiempo t dos cosas suceden: el viejo portafolio, V_{t-1}, cambia de valor debido a que S_t y B_t han cambiado su valor de precio con respecto a S_{t-1} y B_{t-1} respectivamente; y el viejo portafolio tiene que ser ajustado para dar un nuevo portafolio requerido por la estrategia (α_t, β_t). Si el costo del ajuste es igualado exactamente por las ganancias o pérdidas generadas por el portafolio, entonces no se requiere ningún dinero extra de fuera es decir el portafolio es auto-financiado.

Definición. 4.4.3. *(**Propiedad de auto-financiamiento**). Sea (α_t, β_t) en un portafolio con precio del stock*[4] *S_t y precio del bono B_t, entonces*

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t.$$

Es una estrategia auto-financiada si cambios en su valor se deben sólo a cambios en los valores de los activos.

Definición. 4.4.4. *(**Estrategia de replicado**). Supongamos un mercado que consta de un bono sin riesgo B_t, un activo de riesgo S_t con volatilidad σ_t, y contingente dado por X (payoff) en eventos hasta el tiempo T. Entonces Una estrategia de replicado para X es un portafolio auto-financiado (α_t, β_t) tal que $\int_0^t \sigma_t^2 \alpha_t^2 dt < \infty$ y $V_T = \alpha_t S_t + \beta B_t = X$.*

De la definición anterior surge una pregunta de manera natural. ¿Porqué es importante una estrategia de replicado? Esto es debido a que X da el valor de un derivado que se necesita pagar al tiempo T. Se quiere tener un precio al día de hoy dado un modelo para S_t y B_t. Si hay una estrategia de replicado (α_t, β_t), entonces el precio del contingente al tiempo t debe ser

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t.$$

Si V_t fuera menor con respecto a X (Payoff), podríamos comprar una unidad del derivado al tiempo t y vender α_t unidades de S_t y β_t unidades de B_t, permaneciendo cortos (α_t, β_t) hasta el

[4]Precio del bien subyacente; se usará esta expresión indistintamente.

tiempo T. Como (α_t, β_t) es auto-financiado y su valor garantizado en T es X, el derivado que se compró y el portafolio que se vendió se cancelaría en T y ningún dinero extra es requerido entre t y T. La ganancia obtenida por el diferencial de valores al tiempo t puede meterse al banco en ese momento sin riesgo alguno. Por supuesto, si el precio del derivado hubiese sido mayor que V_t, entonces podríamos haber vendido el derivado y comprado el portafolio auto-financiado (α_t, β_t) para el mismo efecto. Si una estrategia de replicado existe, ésta da el precio del contingente en cuálquier momento.

4.5. Modelo Black-Scholes

A principios de los años setentas del siglo pasado, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton hicieron una contribución fundamental en la valoración de las Opciones. Esto ocacionó el desarrollo de lo que se conoce como el modelo Black-Scholes. Este modelo ha tenido una gran influencia en la forma en que los operadores del mercado valoran y realizan coberturas con Opciones. También ha sido una pieza clave en el crecimiento y éxito de la matemática financiera en los años ochentas y noventas. Un reconocimiento a la importancia del modelo llegó en 1997 cuando Myron Scholes y Robert Merton fueron galardonados con el premio Nobel de Economía. Lamentablemente Fischer Black murió en 1995.

4.5.1. Supuestos sobre el Modelo Black-Scholes

Los supuestos hechos por Fisher Black y Myron Scholes cuando expusieron su fórmula de valoración de Opciones fueron los siguientes:

- El comportamiento del precio de las acciones corresponde al modelo lognormal, con μ y σ constantes.
- No hay costos de transacción o impuestos. Todos los activos financieros son perfectamente divisibles.
- No hay dividendos sobre las acciones durante la vida de la Opción.
- No hay oportunidades de arbitraje.
- La negociación de valores financieros es continua.
- Los inversores pueden prestar o pedir prestado al mismo tipo de interés libre de riesgo.
- El tipo de interés libre de riesgo a corto plazo r, es constante.

Algunos de estos supuestos básicos han ido cambiando con el tiempo. Por ejemplo, pueden usarse variaciones de la fórmula de Black-Scholes cuando r y σ son funciones del tiempo. También se puede ajustar para cuando existen dividendos.

El objetivo de este trabajo será aplicar el cálculo estocástico a la valuación de una Opción. Para ello el plan de trabajo será:

- Tomar el modelo del Movimiento Browniano Geométrico con tendencia para el precio de nuestro bien subyacente.
- Usar el teorema de Girsanov para cambiarlo a una martingala.

- Usar el teorema de la representación martingala para crear una estrategia de replicado para cada contingente.

4.5.2. Modelo Black-Scholes

Se propone r, μ, y σ deterministas tales que el precio del bono y del bien subyacente son

$$\begin{aligned} B_t &= e^{rt}. \\ S_t &= S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, \end{aligned}$$

donde r es la tasa de interés libre riesgo, σ es la volatilidad del bien subyacente y μ es la tendencia del bien subyacente. No hay costos de transacción y ambos instrumentos se pueden comerciar en posición corta o larga, libre e instantáneamente al precio listado.

4.5.3. Una interpretación de la Fórmula de Black-Scholes mediante un cambio de medida

En esta sección se revisará la fórmula de Black-Scholes para la valoración de Opciones. Se demuestra que se puede interpretar como la esperanza condicional de $(S_t - K)^+$, considerando los siguientes aspectos.

- El precio de una acción de un activo con riesgo (título) se describe mediante la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \ \text{t} \in [0, T], \tag{4.5.1}$$

  donde μ es el "rendimiento medio", σ la "volatilidad", y W_t un Movimiento Browniano Estándar (según la medida de P).

- El precio del título sin riesgo (Bono), se describe mediante la ecuación diferencial determinista

$$dB_t = r dB d_t, \ \text{t} \in [0, T],$$

  donde $r > 0$, es la tasa de interés del bono.

- La cartera en el momento t consta de α_t acciones del título y β_t unidades del bono. Por lo tanto, su valor en el momento t está dado por

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t.$$

- La cartera es auto financiada, es decir

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t.$$

- En el momento del vencimiento V_t es igual al "derecho aleatorio"de ejercer la Opción. Para una Opción call Europea $X_t = (S_t - K)^+$ y para una Opción put Europea $X_t = (K - S_t)^+$.

Tasas de interés cero.

Se simplifica momentáneamente el contexto haciendo la tasa de interés $r = 0$. Ahora bien, para un instrumento contingente arbitrario dado por X conocido, para un tiempo T, se quiere encontrar una estrategia de replicado (α_t, β_t). Ademas se necesita una medida $\mathbf{Q}$ bajo la cuál $\{S_t\}$ sea una martingala.
Se tiene que

$$S_t = \exp(\mu t + \sigma W_t),$$

entonces si, $Y_t = \ln(S_t)$, ocurre que

$$Y_t = \mu t + \sigma W_t$$

de donde se sigue

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Usando la fórmula de Itô (2.4.5) para $S_t = e^{Y_t}$.
Sea $S_t = e^{Y_t} = f(Y_t)$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial Y_t} = e^{Y_T}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial Y_t^2} = e^{Y_T}$, $h(Y_t, t) = \mu$ y $g(Y_t, t) = \sigma$. Luego entonces

$$\begin{aligned} dS_t &= \big(\mu e^{Y_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{Y_t}\big)dt + \sigma e^{Y_t} \\ &= \big(\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t\big)dt + \sigma S_t \\ &= \big(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\big)S_t dt + \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

Para que S_t sea una martingala, es necesario eliminar la tendencia en esta EDE. Haciendo $\gamma_t = \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ y usando el teorema de Girsanov existe una $\mathbf{Q}$ tal que $\widehat{W}_t = W_t + \gamma t$ es $\mathbf{Q}$-Movimiento Browniano.[5] entonces se tiene que

$$dS_t = \sigma S_t d\widehat{W}_t.$$

El criterio para martingalas exponenciales supone una condición técnica que se cumple en S_T debido a que σ es constante, por tanto S_T es una $\mathbf{Q}$ martingala.

Dada $\mathbf{Q}$, se construye un proceso a partir de X:

$$N_t = E_Q(X|\mathcal{F}_t),$$

el cuál es una $\mathbf{Q}$ martingala.

Utilizando el teorema de la representación martingala [6] se sabe que existe un proceso previsible $\{\alpha_t\}$ tal que

$$N_t = E_Q(X|\mathcal{F}_t) = E_Q(X) + \int_0^t \alpha_s dS_s.$$

Entonces, dada una medida de probabilidad $\mathbf{Q}$ que hace a S_t una $\mathbf{Q}$-martingala con volatilidad positiva, se tiene que

$$dN_t = \alpha_t dS_t$$

para alguna α_t.

Por tanto la estrategia será:

[5] La condición técnica se satisface debido a que γ_t es constante.

[6] Para usar el teorema necesitamos que la volatilidad de S_t sea positiva.

- Mantener α_t unidades del bien subyacente al tiempo t.
- Mantener $\beta_t = N_t - \alpha_t S_t$.

Se verifica que se tiene es una estrategia de réplica. De modo que el portafolio al tiempo t es

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha S_t + \beta_t B_t \\ &= \alpha S_t + N_t - \alpha S_t \\ &= N_t \\ &= E_Q(x|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

debido a que $B_t = 1$ para toda t. Por lo tanto, usando el hecho que $dN_t = \alpha dS_t$ y que $dB_t = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} dV_t &= dN_t \\ &= \alpha_t dS_t \\ &= \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t. \end{aligned}$$

Aún más, el valor terminal de la estrategia es

$$\begin{aligned} V_t &= N_t \\ &= E_Q(X|\mathcal{F}_t) \\ &= X. \end{aligned}$$

Por lo tanto hay un precio de no-arbitraje para X en cuálquier tiempo. En particular se tiene que el precio al tiempo 0 es el valor (α_0, β_0):

$$N_0 = E_Q(X).$$

Tasas de interés diferente de cero

Si se opera sin cuidado cuando r es distinta de cero para encontrar el valor del payoff se puede pensar lo siguiente. La ganancia de la Opción al tiempo de vencimiento T es $(S_t - K)^+$. Al determinar la cantidad de dinero al momento $t = 0$ se tiene que actualizar el tanto de interés dado por r

$$e^{-rt}(S_t - K)^+. \tag{4.5.2}$$

Si, no se conoce el valor de S_t de antemano, pero se supone que S_t satisface la ecuación diferencial estocástica (4.5.1) y se toma la esperanza de (4.5.2) como precio de la Opción en el momento $t = 0$. Este procedimiento pareciera razonable, pero no lo es.

Se recuerda que el payoff de un Forward está dado por $S_T - K$, donde K es el precio de entrega. El valor de K que hace que el contrato tenga valor cero al tiempo cero es $K = S_0 e^{rT}$. La regla cuando r era cero, era simplemente calcular el valor esperado del payoff bajo la medida martingala. Sin embargo

$$E_Q(St - K) = E_Q(St - S_0 e^{rt}) = S_0(1 - e^{rt})$$

que claramente es distinto de cero. Por lo tanto regla para encontrar una medida que hace que S_t sea una martingala solo sirve cuando r es cero.

Cuando r es diferente de cero, se debe tomar en cuenta el crecimiento de efectivo. Se remueve el crecimiento del efectivo al descontar todo, pero al hacer esto se tiene que ajustar la esperanza cambiando la medida de probabilidad subyacente. Este cambio de medida P será obtenido de tal forma que el precio actualizado de una acción

$$\widehat{S} = e^{-rt}S_t,$$

sea una martingala según la nueva medida de probabilidad Q.

Sea $f(S_t, t) = e^{-rt}S_t$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = -re^{-rt}$, $\frac{\partial f}{\partial S_t} = e^{-rt}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = 0$ y se tiene $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, se puede aplicar el lema de Itô con $h(St, t) = \mu S_t$ y $g(S_t, t) = \sigma S_t$ para obtener

$$\begin{aligned} d\widehat{S}_t &= (-re^{-rt}S_t + \mu S_t e^{-rt})dt + \sigma S_t e^{-rt} dW_t \\ &= e^{-rt}S_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t] \\ &= \widehat{S}_t[(\mu - r) + \sigma dW_t] \\ &= \sigma \widehat{S}_t d\widehat{W}_t. \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Si se define $\widehat{W}_t = W_t + [(\mu - r)/\sigma]t$, $t \in [0, T]$, el cuál por el Teorema de Girsanov se sabe que existe una medida martingala equivalente Q, que transforma $\widehat{W}_t$ en el Movimiento Browniano Estándar.
La solución a (4.5.3) dada por

$$\widehat{S}_t = \widehat{S}_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma \widehat{W}_t}, \tag{4.5.4}$$

transforma a a la medida Q en una medida martingala con respecto a la filtración Browniana natural.

Ahora se necesita un proceso que al tiempo T coincida con el payoff descontado y que también sea una Q-martingala. La forma de obtenerlo es la siguiente:

$$N_t = E_Q(e^{-rt}X|\mathcal{F}_t).$$

El teorema de la representación martingala da un proceso previsible $\{\alpha_t\}$ tal que

$$dN_t = \alpha_t d\widehat{S}_t.$$

Se quiere replicar el payoff con ciertas cantidades del stock real, pero en un mundo descontado se puede replicar el payoff descontado al mantener α_t unidades del stock descontado. Entonces, se puede intentar usar α_t también en el mundo real. El valor de la cantidad de unidades del bono en el mundo descontado es $b_t = N_t - \alpha_t \widehat{S}_t$. De igual manera en el mundo real. Se observa que al tiempo T se tiene que el valor del portafolio es

$$\begin{aligned} \alpha_T S_T + \beta_T B_T &= \alpha_T S_T + (N_T - \alpha_T \widehat{S}_T)B_T \\ &= \alpha_T S_T + (B_T^{-1}X - \alpha_T B_T^{-1} S_T)B_T \\ &= X. \end{aligned}$$

Dado estos resultados la estrategia de replicado será:

- Mantener α_t unidades del stock al tiempo t.
- Mantener $\beta_t = N_t - \alpha_t \widehat{S}_t$.

El valor del portafolio (α_t, β_t) está dado por

$$\begin{aligned} V_t &= \alpha S_t + \beta_t B_t \\ &= \alpha S_t + (N_t - \alpha \widehat{S}_t) B_t \\ &= \alpha S_t + (N_t - \alpha S_t B_t^{-1}) B_t \\ &= \alpha S_t + N_t B_t - \alpha S_t \\ &= B_t N_t. \end{aligned}$$

Proposición. 4.5.1. *Si B_t es un proceso con volatilidad cero y X_t cuálquier proceso estocástico, entonces*

$$d(B_t X_t) = B_t dX_t + X_t dB_t.$$

Demostración. La demostración es consecuencia de la regla del producto para procesos estocásticos (2.4.12). □

Si se utiliza este resultado (dos veces) en (4.5.5), la definición de b_t para despejar N_t y el hecho de que $S_t = B_t Z_t$ se tiene que

$$\begin{aligned} dV_t &= B_t dN_t + N_t dB_t \\ &= \alpha_t B_t d\widehat{S}_t + N_t dB_t \\ &= a_t B_t d\widehat{S}_t + (\alpha_t \widehat{S}_t + \beta_t) dB_t \\ &= \alpha_t (B_t d\widehat{S}_t + \widehat{S}_t dB_t) + \beta_t dB_t \\ &= \alpha_t d(B_t \widehat{S}_t) + \beta_t dB_t \\ &= \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t. \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene el siguiente resultado.

Proposición. 4.5.2. ***(Estrategias auto-financiadas)****. Una estrategia (α_t, β_t) de tenencias en un stock S_t y un bono (sin volatilidad y en efectivo) B_t tiene valor $V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$ y valor descontado si $N_t = \alpha_t \widehat{S}_t + \beta_t$ donde $\widehat{S}_t$ es el precio descontado del stock$\widehat{S}_t = B_t^{-1} S_t$. entonces la estrategia es auto-financiada si*

$$dV_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t$$

o de manera equivalente

$$dN_t = \alpha_t d\widehat{S}_t.$$

Recordar que una estrategia es auto-financiada si cambios en su valor se deben solo a cambios en los valores de los activos o de forma equivalente si cambios en su valor descontado se deben solo a cambios en los valores descontados de los activos.

En resumen: Si suponemos que se tiene un modelo de Black-Scholes para modelar un stock y un bono comerciable de manera continua, es decir, suponiendo la existencia de constantes r, μ y σ tales que los respectivos precios pueden ser presentados como

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{\mu + \sigma W_t} \\ Bt &= e^{rt}, \end{aligned}$$

entonces todos los reclamos contingentes X, conocidos en algún horizonte temporal T, tienen estrategias de replicado asociadas (α_t, β_t). Aún más, el precio de no arbitraje del contingente X al tiempo $t \leq T$ está dado por

$$V_t = B_t E_Q(B_t^{-1} X | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} E_Q(X|\mathcal{F}_t), \tag{4.5.5}$$

donde Q es la medida martingala para el stock descontado $B_t^{-1} S_t$. Nótese que Q no es la medida que hace al stock una martingala, sino la medida que hace al stock descontado una martingala. Nótese además que el precio de no arbitraje del contingente es la esperanza bajo Q del payoff descontado.
La expresión (4.5.5) es la forma de evaluar una Opción Europea mediante el método de Black-Scholes.

4.5.4. Las fórmulas de Black-Scholes para Opciones Europeas

¿Pero como se calcula la expresión (4.5.5)? El payoff depende del precio del stock al tiempo T, por lo que es suficiente encontrar la distribución marginal de S_t bajo Q. Recordemos que Q es la medida bajo la cuál

$$d\widehat{S}_t = \sigma \widehat{S}_t d\widehat{W}_t, \tag{4.5.6}$$

con $\widehat{W}_t$ un Q *un Movimiento Browniano*. Usando la definición de $\widehat{S}_t$, y el hecho de que $B_t^{-1} = e^{-rt}$ es un proceso con volatilidad cero se puede trabajar ambos lados de la ecuación (4.5.6) para obtener

$$\begin{aligned} d(B_t^{-1} S_t) &= \sigma B_t^{-1} S_t d\widehat{W}_t \\ B_t^{-1} dS_t + St dB_t^{-1} &= \sigma B_t^{-1} S_t d\widehat{W}_t \\ e^{-rt} dS_t + S_t de^{-rt} &= \sigma e^{-rt} S_t \widehat{W}_t \\ e^{-rt} dS_t + S_t(-r) e^{-rt} dt &= \sigma e^{-rt} S_t \widehat{W}_t \\ dS_t - r S_t dt &= \sigma e^{-rt} S_t \widehat{W}_t. \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

En consecuencia, la EDE que satisface el proceso de precios del stock en términos de $\widehat{W}_t$ es

$$dS_t = r S_t + \sigma S_t d\widehat{W}_t.$$

Usando el Lema de Itô, y por el ejemplo (2.4.8) siendo $f(S_t, t) = ln(S_t)$, se tiene

$$d(ln(S_t)) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma d\widehat{W}_t$$

de donde

$$ln(S_t) = ln(S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) t + \sigma(\widehat{W}_t),$$

Por lo tanto

$$S_t = S_0 e^X.$$

donde $X \backsim N((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$.

Proposición. 4.5.3. ***(fórmulas de Black-Scholes para valuar Opciones.)*** *Las fórmulas para evaluar una call o put europeas son las siguientes.*

$$\begin{aligned} c[S_0, T, K] &= S_0 N(d1) - K e^{-rT} N(d2). \quad (4.5.8)\\ p[S_0, T, K] &= K e^{-rT} N(-d2) - S_0 N(-d1), \quad (4.5.9) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right].\\ d2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] = d1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

Demostración call Europea. Se hará la demostración para la call europea. Se quiere evaluar

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^x - K)^+ \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}} dx.$$

El integrando es diferente de cero cuando $S_0 e^x > K$, es decir, cuando $x > ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{-rT}\int_{ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} (S_0 e^x - K)^+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}} dx &= e^{-rT}\int_{ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} S_0 e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}} dx\\ &- e^{-rT}\int_{ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} K \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}} dx. \end{aligned}$$

Aplicando el lema (0.1.12) a ambos términos. Para el primero se aplica el lema con $a = 1$ y $b = ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$. Para el segundo con $a = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} e^{-rT}\int_{b}^{\infty} S_0 e^x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\left[\left(\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma T}\right)\right]} dx &= S_0 N(d1), \quad (4.5.10)\\ -e^{-rT}\int_{b}^{\infty} K \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{\left[\left(\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma T}\right)\right]} dx &= -K e^{-rT} N(d2), \quad (4.5.11) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} d1 &= \frac{ln(\frac{S_0}{k}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},\\ d2 &= \frac{ln(\frac{S_0}{k}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene la fórmula para evaluar un call europea:

$$c[S_0, T, K] = S_0 N(d1) - K e^{-rT} N(d2).$$

□

Demostración put Europea. La demostración para obtener $p[S_0, T, K]$ es análoga. Se quiere evaluar

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(K - S_0e^x)^+ \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}dx.$$

El integrando es diferente de cero cuando $K > S_0e^x$, es decir, cuando $x < ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{-rT}\int_{\infty}^{ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}(S_0e^x - K)^+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}dx &= e^{-rT}\int_{\infty}^{ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}K\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}dx \\ &- e^{-rT}\int_{\infty}^{ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}S_0e^x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}dx. \end{aligned}$$

Aplicando el lema (0.1.13) a ambos términos. Para el primero se aplica el lema con $a = 0$ y $b = ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$. Para el segundo con $a = 1$ se tiene

$$e^{-rT}\int_{b}^{\infty}K\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\left[\left(\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^T}\right)\right]}dx = KN(-d2), \tag{4.5.12}$$

$$-e^{-rT}\int_{b}^{\infty}S_0e^x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\left[\left(\frac{-(x-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^T}\right)\right]}dx = -S_0e^{-rT}N(-d1), \tag{4.5.13}$$

con

$$\begin{aligned} d1 &= \frac{ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d2 &= \frac{ln\left(\frac{S_0}{k}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene la fórmula para evaluar un call europea:

$$p[S_0, T, K] = Ke^{-rT}N(-d2) - S_0N(-d1).$$

También se puede utilizar la paridad put-call (4.3.2).

$$\begin{aligned} p[S_0, T, K] &= c[S_0, T, K] + Ke^{-rT} - S_0 \\ &= S_0N(d1) - Ke^{-rT}N(d2) + Ke^{-rT} - S_0 \\ &= Ke^{-rT}(1 - N(d2)) - S_0(1 - N(d1)) \\ &= Ke^{-rT}N(-d2) - S_0N(-d1). \end{aligned}$$

En ambos casos tenemos el mismo resultado. □

A continuación se presenta un ejemplo de la literatura financiera.

Ejemplo. 4.5.4. *El precio de las acciones 6 meses antes del vencimiento de una Opción es de \$42.00, el precio de ejercicio de la Opción es de \$40.00, el tipo de interés libre de riesgo es del 10 % anual y la volatilidad es del 20 % anual ¿Cuál es el valor de la Opción call y put europeas?*

Solución
Se tiene los siguientes datos $S_0 = 42$, $K = 40$, r =*0.10*, σ =*0.20*, T =*0.5*

$$\begin{aligned} d1 &= \frac{ln(42/40) + (0.1 + 0.2^2/2) \times 0,5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693. \\ d2 &= \frac{ln(42/40) + (0.1 - 0.2^2/2) \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.6278. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(0.7693) &= 0.7791, \quad N(-0.7693) = 0.2209. \\ N(0.6278) &= 0.7349, \quad N(-0.6278) = 0.2651. \end{aligned}$$

y

$$Ke^{-rt} = 40e^{-0.1\times 0,5} = 38.049.$$

De ahí que, la Opción de compra tenga un valor de

$$c[S_0, T, K] = 42N(0.7693) - 38.049N(0.6278) = \$4.76.$$

Si la Opción es de venta, su valor p es

$$p[S_0, T, K] = 38.049N(-0.6278) - 42N(-07693) = \$0.81.$$

Ignorando el valor temporal del dinero, el precio de las acciones tiene que subir \$2.76 para que el comprador de la Opción de compra se quede igual. De forma similar, el precio de las acciones tiene que bajar \$2.81 para que el comprador de la Opción de venta esté también indiferente.

4.5.5. Caso Practico

Ahora se presenta la valuación de una Opción de la vida real. Esta Opción fue calculada cuando me encontraba trabajando en el área de *Financial Risk Managment* (FRM) en la consultora KPMG. Presenta los elementos necesarios para la valuación de una Opción call de compra y la Opción put de venta ambas del tipo europea. Y se presenta la plantilla en Excel utilizada para dicha valuación. En los apéndices se muestra las cartas de confirmación de la Opciones así como los vectores que contiene información de los precios del bien subyacente en este caso gas natural así como los valores de las tasa LIBOR fijada a la fecha de concertación y la volatilidad. Estos datos fueron obtenidos mediante proveedores de información como Ttco, el cuál está pactado tal cuál en la carta de confirmación, y con otros proveedores que KPMG había contratado.

Fecha de acuerdo	07-oct-2010
Comprador	Cal Apasco, S.A.
Vendedor	Deutsche Bank AG London Branch
Commodity	Gas Natural
Opción	Call
Tipo de Opción	Europea

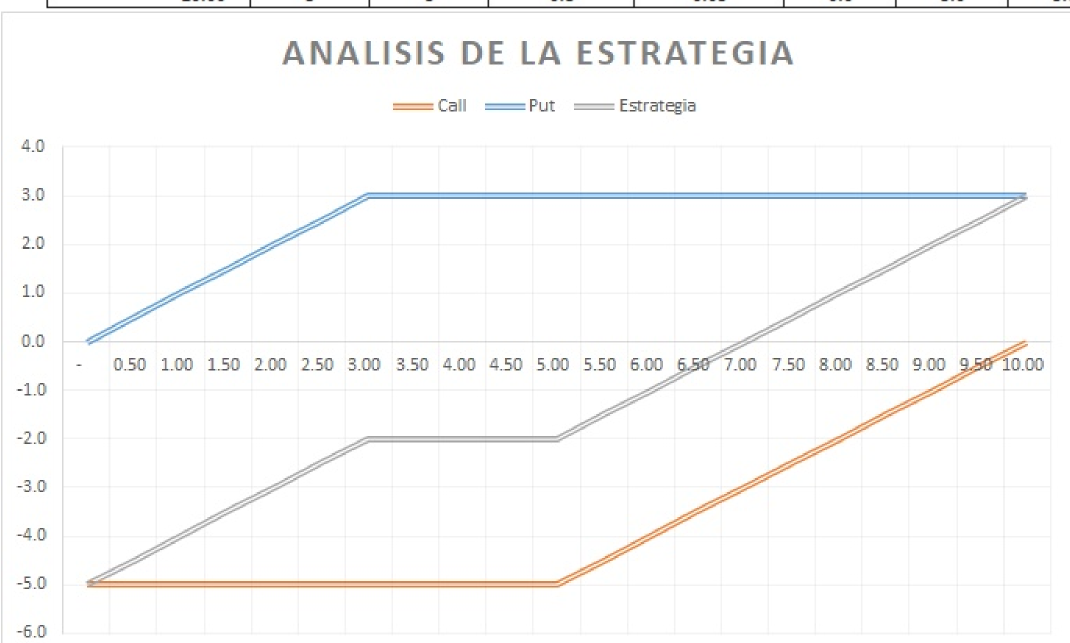
Periodo	Nocional	Strike
1-ene-12 a 31-dic-12	46,000	5.00

Fecha de inicio	Fecha vto.	DxV	So	T	C/P	C/V	Plazo Flujo	Libor	Volatilidad	Strike	Vol mensual	d1	d2	Val Opción	Val USD	Prima
ene-12	31-ene-12	396	5.06	1.10	Call	Compra	31	0.78%	29.19%	5	46,000	0.22	-0.08	0.66	30,513.24	- 36,800.00
feb-12	29-feb-12	425	5.03	1.18	Call	Compra	29	0.78%	29.30%	5	46,000	0.21	-0.11	0.67	30,926.30	- 36,800.00
mar-12	31-mar-12	456	4.94	1.27	Call	Compra	31	0.78%	27.03%	5	46,000	0.14	-0.16	0.59	27,228.84	- 36,800.00
abr-12	30-abr-12	486	4.69	1.35	Call	Compra	30	0.78%	26.51%	5	46,000	-0.02	-0.33	0.47	21,660.03	- 36,800.00
may-12	31-may-12	517	4.71	1.44	Call	Compra	31	0.78%	25.72%	5	46,000	-0.01	-0.31	0.48	22,072.67	- 36,800.00
jun-12	30-jun-12	547	4.74	1.52	Call	Compra	30	0.78%	25.34%	5	46,000	0.02	-0.29	0.51	23,282.86	- 36,800.00
jul-12	31-jul-12	578	4.78	1.61	Call	Compra	31	0.78%	25.42%	5	46,000	0.06	-0.26	0.55	25,094.85	- 36,800.00
ago-12	31-ago-12	609	4.81	1.69	Call	Compra	31	0.78%	26.48%	5	46,000	0.10	-0.25	0.61	27,864.97	- 36,800.00
sep-12	30-sep-12	639	4.81	1.78	Call	Compra	30	0.78%	27.47%	5	46,000	0.12	-0.25	0.65	29,871.45	- 36,800.00
oct-12	31-oct-12	670	4.88	1.86	Call	Compra	31	0.79%	26.10%	5	46,000	0.15	-0.21	0.67	30,693.04	- 36,800.00
nov-12	30-nov-12	700	5.04	1.94	Call	Compra	30	0.79%	24.56%	5	46,000	0.24	-0.10	0.74	33,891.52	- 36,800.00
dic-12	31-dic-12	731	5.26	2.03	Call	Compra	31	0.79%	23.74%	5	46,000	0.37	0.03	0.87	39,967.04	- 36,800.00
											552,000				343,066.81	- 441,600.00

Fecha de inicio	Fecha vto.	DxV	So	T	C/P	C/V	Plazo Flujo	Libor	Volatilidad	Strike	Vol mensual	d1	d2	Val Opción	Val USD	Prima
ene-12	31-ene-12	396	5.06	1.10	Put	Venta	31	0.78%	29.19%	3	46,000	1.89	1.58	0.02	- 905.31	1,380.00
feb-12	29-feb-12	425	5.03	1.18	Put	Venta	29	0.78%	29.30%	3	46,000	1.81	1.50	0.02	- 1,144.21	1,380.00
mar-12	31-mar-12	456	4.94	1.27	Put	Venta	31	0.78%	27.03%	3	46,000	1.82	1.52	0.02	- 1,041.16	1,380.00
abr-12	30-abr-12	486	4.69	1.35	Put	Venta	30	0.78%	26.51%	3	46,000	1.64	1.33	0.03	- 1,585.43	1,380.00
may-12	31-may-12	517	4.71	1.44	Put	Venta	31	0.78%	25.72%	3	46,000	1.65	1.34	0.03	- 1,545.96	1,380.00
jun-12	30-jun-12	547	4.74	1.52	Put	Venta	30	0.78%	25.34%	3	46,000	1.66	1.35	0.03	- 1,554.19	1,380.00
jul-12	31-jul-12	578	4.78	1.61	Put	Venta	31	0.78%	25.42%	3	46,000	1.65	1.32	0.04	- 1,676.43	1,380.00
ago-12	31-ago-12	609	4.81	1.69	Put	Venta	31	0.78%	26.48%	3	46,000	1.58	1.24	0.05	- 2,123.94	1,380.00
sep-12	30-sep-12	639	4.81	1.78	Put	Venta	30	0.78%	27.47%	3	46,000	1.51	1.15	0.06	- 2,685.15	1,380.00
oct-12	31-oct-12	670	4.88	1.86	Put	Venta	31	0.79%	26.10%	3	46,000	1.58	1.23	0.05	- 2,230.01	1,380.00
nov-12	30-nov-12	700	5.04	1.94	Put	Venta	30	0.79%	24.56%	3	46,000	1.73	1.39	0.03	- 1,536.56	1,380.00
dic-12	31-dic-12	731	5.26	2.03	Put	Venta	31	0.79%	23.74%	3	46,000	1.88	1.54	0.02	- 1,083.81	1,380.00
											552,000				- 19,112.17	16,560.00

Análisis de la estrategia

	Call Compra	Put Venta	Valor de la prima		Analisis de Estrategia		
Precio del Subyacente	Precio Strike	Precio Strike	Prima Call Largo	Prima Put Venta	Call	Put	Estrategia
-	5	3	0.8	0.03	-5.0	0.0	-5.0
0.50	5	3	0.8	0.03	-5.0	0.5	-4.5
1.00	5	3	0.8	0.03	-5.0	1.0	-4.0
1.50	5	3	0.8	0.03	-5.0	1.5	-3.5
2.00	5	3	0.8	0.03	-5.0	2.0	-3.0
2.50	5	3	0.8	0.03	-5.0	2.5	-2.5
3.00	5	3	0.8	0.03	-5.0	3.0	-2.0
3.50	5	3	0.8	0.03	-5.0	3.0	-2.0
4.00	5	3	0.8	0.03	-5.0	3.0	-2.0
4.50	5	3	0.8	0.03	-5.0	3.0	-2.0
5.00	5	3	0.8	0.03	-5.0	3.0	-2.0
5.50	5	3	0.8	0.03	-4.5	3.0	-1.5
6.00	5	3	0.8	0.03	-4.0	3.0	-1.0
6.50	5	3	0.8	0.03	-3.5	3.0	-0.5
7.00	5	3	0.8	0.03	-3.0	3.0	0.0
7.50	5	3	0.8	0.03	-2.5	3.0	0.5
8.00	5	3	0.8	0.03	-2.0	3.0	1.0
8.50	5	3	0.8	0.03	-1.5	3.0	1.5
9.00	5	3	0.8	0.03	-1.0	3.0	2.0
9.50	5	3	0.8	0.03	-0.5	3.0	2.5
10.00	5	3	0.8	0.03	0.0	3.0	3.0



Las conclusiones obtenidas después de analizar la valuación de estas Opciones son las siguientes.

1. En este ejemplo estamos asumiendo que la compañía está cubriendo su consumo mensual de gas (el cuál es el equivalente al nocional o volumen mensual que se encuentra pactado en la carta de confirmación).

2. La valuación de KPMG está realizada dos meses después de la fecha de contratación, y el cálculo de la prima hecha por KPMG es menor a la pactada entre APASCO y Deutsche

Bank. Esto se debe a que a mayor plazo existe un mayor riesgo, por esta razón; la prima de la Opción irá decreciendo conforme se acerca la fecha de ejercicio de la Opción.

3. La volatilidad del precio del comoditie está correlacionada con la demanda cíclica de dicho comoditie.

4. APASCO al comprar un call y un put están reduciendo el costo de la prima total a pagar, pagando y recibiendo una prima; en cada caso el riesgo asociado no es el mismo. El precio que paga por un call de compra es mayor ya que si el precio del gas sube por arriba del strike la ganancia no está limitada. Por otro lado si el precio de gas cae por debajo del precio strike pactado en el put de venta, la pérdida está reducida hasta que el precio de gas llegue a cero.

5. El precio de la prima está asociado al riesgo, nocional, volatilidad, tiempo y precio del strike. Estos son elementos sumamente importantes en fórmula de Black-Scholes para valuación de Opciones europeas.

CONCLUSIONES

Este trabajo se ha enfocado en los elementos matemáticos que conforman la fórmula de Black and Scholes, hemos analizado los elementos básicos de la teoría de probabilidad, de los procesos estocásticos y de la teoría de la medida. Se vio las propiedades elementales del Movimiento Browniano que nos permitieron comprender de mejor manera el Movimiento Browniano Geométrico que tiene un comportamiento muy similar al que tienen las acciones en los mercados financieros. Se utilizó la derivada de Radon-Nikodim para poder garantizar un cambio de medida, el teorema de Girsanov que permite transformar un Movimiento Browniano con tendencia en uno sin tendencia y el teorema de la representación martingala que permite fijar el precio de las Opciones. Todo esto para la construcción de la fórmula de Black and Scholes.

La construcción de la fórmula de Black and Scholes desde el enfoque estocástico (hay otras maneras de llegar a la fórmula, por ejemplo con ecuaciones diferenciales, con la ecuación de difusión de calor y utilizando geometría diferencial) está bien sustentada al tener como soporte los elementos antes mencionados.

Sin embargo ¿Si los modelos matemáticos no fallaron entonces que sí lo hizo? Como lo menciona Charles Fergunson es su documental "Inside Job"la ambición, la falta de ética y su poca preocupación por dañar a la economía por parte de los bancos de Wall Street fueron los causantes de la crisis pasada y en general se puede afirmar que son las causas de todas las crisis que han existido y existirán. En su afán de obtener más dinero, se violaron los supuestos básicos del modelo de Black and Scholes, por ejemplo: 1) No hay oportunidad de arbitraje y 2) Se debe tener una tasa de interés libre de riesgo.

¿Cómo se violó el que no debe existir oportunidad de arbitraje?

Tomemos por ejemplo a los bancos Goldman Sachs, John Paulson and Morgan Staley que diseñaron estrategias para apostar en contra de los CDOs junto con Merry Linch, JP Morgan, Lheman Brother y otros más, sabiendo que estos instrumentos no eran adecuados y no reflejaban su verdadero valor en el mercado. Por otro lado, ellos mismos continuaban promoviendo la venta de estos instrumentos financieros y hacían creer que estos eran seguros y libre de riesgo. Inclusive hicieron que las grandes calificadoras como Standard & Poor's (S&P), Moody's y Fitch dieran una clasificación **AAA** o su equivalente, (clasificación que da confianza a los inversionistas ya que es la calificación más alta que se puede dar). Por lo tanto se aseguró una ganancia sin tomar ningún riesgo: hubo arbitraje. Esta estrategia fue hecha con base en la información privilegiada que se obtuvo, hecho que contradice el principio básico de la valuación de instrumentos financieros donde se pide ausencia de arbitraje.

¿Se tenía realmente una tasa libre de riesgo?

Otro elemento básico en la valuación de Opciones es poder tener una tasa libre de riesgo. ¿Ocurrió realmente así?

En 2012 salió a la luz un nuevo escándalo: la tasa LIBOR que es comúnmente usada para la valuación de instrumentos financieros fue manipulada deliberadamente por los principales bancos de Londres. La repercusión es muy grande ya que una pequeña variación de esta tasa puede suponer pérdidas o ganancias por valores de millones de dólares. Este hecho viola el supuesto que debemos tener una tasa libre de riesgo para la valuación de los derivados.

Como se menciono en la introducción, los banqueros empezaron a buscar matemáticos, físicos y actuarios para poder crear modelos cada vez más sofisticados. Sin embargo la poca ética que han tenido los grandes banqueros ha hecho que en su ambición se violen los principios básicos de la matemática financiera; no les ha importado que las personas se vean afectadas en sus hipotecas de vivienda y pierdan sus hogares, en préstamos de crédito y financiamientos de estudios, por citar tan solo algunos. Queda claro que, en efecto, como mencionó Myron Scholes, es cuestión de como se asumen los riesgos y no de los modelos matemáticos.

Los actuarios de la UNAM tenemos la capacidad por nuestra formación matemática de comprender y hacer modelos que permitan hacer la creación de nuevos y mas sofisticados derivados. Sin embargo es importante tener siempre presente nuestro lema “Por mi raza hablara el espíritu”, en vez de dejarnos guiar por nuestra propia ambición o la de otras personas, tenemos que tener la parte humanística para no perjudicar a la sociedad pues queda evidente que la mayoría de los personajes que causan las grandes crisis financieras no sufren las consecuencias.

APÉNDICE.

La fórmula matemática acusada de destruir la economía mundial

Tim Hartford

BBC

28 abril 2012


THINKSTOCK

No todos los días ocurre que alguien formula una ecuación que puede transformar el mundo. Pero a veces sí ocurre, y el mundo no siempre cambia para bien. Algunos creen que la fórmula Black-Scholes y sus derivadas ayudó generar el caos en el mundo financiero.

La fórmula se escribió por primera vez en los primeros años de la década de 1970, pero su historia comienza muchos años antes, en el mercado de arroz de Dojima en el siglo XVII en Japón, donde se escribían contratos de futuros para los comerciantes del arroz. Un contrato de futuros simple dice que una persona acordará comprar arroz de otra persona en un año, a un precio que acuerdan al momento de la firma.

En el siglo XX, la Bolsa de Comercio de Chicago era el lugar para que los comerciantes negociaran no sólo futuros sino contratos de opciones. Un ejemplo de esto último es un contrato en el que se acuerda comprar arroz en cualquier momento durante un año, a un precio convenido con la firma, pero que es opcional.

Es posible imaginarse por qué uno de estos contratos puede ser útil. Si alguien tiene una cadena grande de restaurantes de hamburguesas, pero no sabe cuánta carne necesitará

10-Dec-2010

Cal de Apasco, SA
Attention: Confirmations
Phone:
Fax Number:

Confirmation Letter

The purpose of this agreement ('Confirmation') is to confirm the terms and conditions of the Commodity Swap Transaction entered into betweenDeutsche Bank AG London Branch and Cal de Apasco, SAon the Trade Date specified below (the 'Transaction').The definition and provisions contained in the 2005 ISDA Commodity Definitions (the 'Commodity Definitions'), as published by the International Swaps and Derivatives Association, Inc., are incorporated into this Confirmation. In the event of any inconsistency between the Commodity Definitions and this Confirmation, this Confirmation will govern.This Confirmation evidences a complete and binding agreement between Deutsche Bank AG London BranchandCal de Apasco, SAas to the terms of the Transaction to which this Confirmation relates. In addition, Deutsche Bank AG London Branch andCal de Apasco, SAagree to use all reasonable efforts promptly to negotiate, execute and deliver an agreement in the form of the ISDA Master Agreement (Multicurrency-Cross Border) (the 'ISDA Form') with such modifications as you and we will in good faith agree. Upon execution by Deutsche Bank AG London Branch and Cal de Apasco, SAof such an agreement, this Confirmation will supplement, form part of, and be subject to that agreement. All provisions contained or incorporated by reference in that agreement upon its execution will govern this Confirmation. Until we execute and deliver that agreement, this Confirmation, together with all other documents referring to the ISDA Form (each a 'Confirmation) confirming transactions (each a 'transaction') entered into between us (notwithstanding anything to the contrary in a Confirmation) shall supplement, form a part of, and be subject to an agreement in the form of the ISDA Form as if we had executed an agreement on the Trade Date of the first such Transaction between us in such form with the Schedule thereto (i) specifying only that (a) the governing law is English Law and (b) the Termination Currency is U.S., Dollars, (ii) incorporating the addition to the definition of 'Indemnifiable Tax' contained in (page 48 of) the ISDA 'Users Guide to the 1992 ISDA Master Agreements' and (iii) incorporating any other modifications to the ISDA form specified below.

The terms of the Transaction to which this Confirmation relates are as follows:

Terms:

Trade Date: 07-Oct-2010
Buyer: Cal de Apasco, SA
Seller: Deutsche Bank AG London Branch
Commodity: Natural Gas
Business Days: New York
Option Type: Call
Option Style: European
Exercise Procedures: The Underlying Transaction below shall come into effect automatically upon price settlement.

Calculation Period	Notional Quantity per Calculation Period	Strike Price	Float Spread	Commodity Reference Price
	(MMBTU)	(USD per MMBTU)		
01-Jan-2012 - 31-Dec-2012	46,000 Monthly; Total 552,000	5.00000		

Commodity Reference Price: *TETCO_STX_IF - Platts Inside Ferc Gas Market Report, Prices of Spot Gas Delivered to Pipelines, Texas Eastern Transmission Corp., South Texas zone Index
Pricing Date(s): The day of the first publication in the Reference Month.
Floating Price: The Specified Price
Specified Price: The price for the relevant Reference Month.

Premium Payment Date	Premium
09-Jan-2012	36,800.00 USD
07-Feb-2012	36,800.00 USD
07-Mar-2012	36,800.00 USD
09-Apr-2012	36,800.00 USD
07-May-2012	36,800.00 USD
07-Jun-2012	36,800.00 USD
09-Jul-2012	36,800.00 USD
07-Aug-2012	36,800.00 USD
10-Sep-2012	36,800.00 USD
05-Oct-2012	36,800.00 USD
07-Nov-2012	36,800.00 USD
07-Dec-2012	36,800.00 USD

Payment Date(s): 5 Business Days after the relevant Calculation Period subject to adjustment in accordance with the Modified Following Business Day Convention

Calculation Agent: As per the agreement.

Account Details:

Payments to DEUTSCHE BANK AG. LONDON: Deutsche Bank Trust Company Americas
SWIFT: BKTRUS33

Account of: DEUTSCHE BANK AG. LONDON

Account Number: 04411739

Please confirm that the foregoing correctly sets forth the terms of our agreement by sending a FAX to such effect to the attention of Commodity Derivative Operations Department, facsimile No. INT'L +44(0)207 545 2280 or telex No. 94015555 Printer 57 (please mark Attn. Energy Dept). If you have any queries, please call us on +44 (0)20 7541 11979.

Please check this confirmation carefully and immediately upon receipt so that errors and discrepancies can be promptly identified and rectified.

We are pleased to have executed this transaction with you.

Sincerely,
Deutsche Bank AG London Branch

Accepted:
Cal de Apasco, SA

Name: Sarah Ahmed
Title: Authorized Signatory

Name: Antony Burrows
Title: Authorized Signatory

For Office Use Only: 12319034 -- EO-CALL

10-Dec-2010
10:28:59PM

10-Dec-2010

Cal de Apasco, SA
Attention: Confirmations
Phone:
Fax Number:

Confirmation Letter

The purpose of this agreement ('Confirmation') is to confirm the terms and conditions of the Commodity Swap Transaction entered into betweenDeutsche Bank AG London Branch and Cal de Apasco, SAon the Trade Date specified below (the 'Transaction').The definition and provisions contained in the 2005 ISDA Commodity Definitions (the 'Commodity Definitions'), as published by the International Swaps and Derivatives Association, Inc., are incorporated into this Confirmation. In the event of any inconsistency between the Commodity Definitions and this Confirmation, this Confirmation will govern.This Confirmation evidences a complete and binding agreement between Deutsche Bank AG London BranchandCal de Apasco, SAas to the terms of the Transaction to which this Confirmation relates. In addition, Deutsche Bank AG London Branch andCal de Apasco, SAagree to use all reasonable efforts promptly to negotiate, execute and deliver an agreement in the form of the ISDA Master Agreement (Multicurrency-Cross Border) (the 'ISDA Form') with such modifications as you and we will in good faith agree. Upon execution by Deutsche Bank AG London Branch and Cal de Apasco, SAof such an agreement, this Confirmation will supplement, form part of, and be subject to that agreement. All provisions contained or incorporated by reference in that agreement upon its execution will govern this Confirmation. Until we execute and deliver that agreement, this Confirmation, together with all other documents referring to the ISDA Form (each a 'Confirmation) confirming transactions (each a 'transaction') entered into between us (notwithstanding anything to the contrary in a Confirmation) shall supplement, form a part of, and be subject to an agreement in the form of the ISDA Form as if we had executed an agreement on the Trade Date of the first such Transaction between us in such form with the Schedule thereto (i) specifying only that (a) the governing law is English Law and (b) the Termination Currency is U.S., Dollars, (ii) incorporating the addition to the definition of 'Indemnifiable Tax' contained in (page 48 of) the ISDA 'Users Guide to the 1992 ISDA Master Agreements' and (iii) incorporating any other modifications to the ISDA form specified below.

The terms of the Transaction to which this Confirmation relates are as follows:

Terms:

Trade Date:	07-Oct-2010
Buyer:	Deutsche Bank AG London Branch
Seller:	Cal de Apasco, SA
Commodity:	Natural Gas
Business Days:	New York
Option Type:	Put
Option Style:	European
Exercise Procedures:	The Underlying Transaction below shall come into effect automatically upon price settlement.

Calculation Period	Notional Quantity per Calculation Period	Strike Price	Float Spread	Commodity Reference Price
	(MMBTU)	(USD per MMBTU)		
01-Jan-2012 - 31-Dec-2012	46,000 Monthly; Total 552,000	3.00000		

Commodity Reference Price:	*TETCO_STX_IF - Platts Inside Ferc Gas Market Report, Prices of Spot Gas Delivered to Pipelines, Texas Eastern Transmission Corp., South Texas zone Index
Pricing Date(s):	The day of the first publication in the Reference Month.
Floating Price:	The Specified Price
Specified Price:	The price for the relevant Reference Month.

Premium Payment Date	Premium
09-Jan-2012	1,380.00 USD
07-Feb-2012	1,380.00 USD
07-Mar-2012	1,380.00 USD
09-Apr-2012	1,380.00 USD
07-May-2012	1,380.00 USD
07-Jun-2012	1,380.00 USD
09-Jul-2012	1,380.00 USD
07-Aug-2012	1,380.00 USD
10-Sep-2012	1,380.00 USD
05-Oct-2012	1,380.00 USD
07-Nov-2012	1,380.00 USD
07-Dec-2012	1,380.00 USD

Payment Date(s): 5 Business Days after the relevant Calculation Period subject to adjustment in accordance with the Modified Following Business Day Convention

Calculation Agent: As per the agreement.

Account Details:

Payments to DEUTSCHE BANK AG. LONDON: Deutsche Bank Trust Company Americas
SWIFT: BKTRUS33

Account of: DEUTSCHE BANK AG. LONDON

Account Number: 04411739

Please confirm that the foregoing correctly sets forth the terms of our agreement by sending a FAX to such effect to the attention of Commodity Derivative Operations Department, facsimile No. INT'L +44(0)207 545 2280 or telex No. 94015555 Printer 57 (please mark Attn. Energy Dept). If you have any queries, please call us on +44 (0)20 7541 11979.

Please check this confirmation carefully and immediately upon receipt so that errors and discrepancies can be promptly identified and rectified.

We are pleased to have executed this transaction with you.

Sincerely,
Deutsche Bank AG London Branch

Accepted:
Cal de Apasco, SA

Name: Sarah Ahmed
Title: Authorized Signatory

Name: Antony Burrows
Title: Authorized Signatory

Precio de Gas

Fech	31-dic-10	31-ene-11	28-feb-11	31-mar-11	30-abr-11
feb-11	4.255				
mar-11	4.262				
abr-11	4.256				
may-11	4.297				
jun-11	4.340				
jul-11	4.404				
ago-11	4.440				
sep-11	4.447				
oct-11	4.513				
nov-11	4.667				
dic-11	4.915				
ene-12	5.062				
feb-12	5.034				
mar-12	4.939				
abr-12	4.692				
may-12	4.707				
jun-12	4.741				
jul-12	4.779				
ago-12	4.810				
sep-12	4.812				
oct-12	4.876				
nov-12	5.040				
dic-12	5.264				
ene-13	5.411				
feb-13	5.369				
mar-13	5.229				
abr-13	4.928				
may-13	4.932				
jun-13	4.958				
jul-13	4.996				
ago-13	5.030				
sep-13	5.041				
oct-13	5.113				
nov-13	5.271				
dic-13	5.480				
ene-14	5.629				

Volatilidad del precio de Gas.

Dias	Volatilidad	Dias	Volatilidad	Dias	Volatilidad	Dias	Volatilidad
396	29.19%	482	26.57%	568	25.39%	654	26.85%
397	29.17%	483	26.56%	569	25.39%	655	26.80%
398	29.17%	484	26.54%	570	25.40%	656	26.75%
399	29.18%	485	26.53%	571	25.40%	657	26.71%
400	29.18%	486	26.51%	572	25.40%	658	26.66%
401	29.19%	487	26.50%	573	25.41%	659	26.61%
402	29.19%	488	26.47%	574	25.41%	660	26.57%
403	29.20%	489	26.44%	575	25.41%	661	26.52%
404	29.20%	490	26.42%	576	25.42%	662	26.47%
405	29.21%	491	26.39%	577	25.42%	663	26.43%
406	29.21%	492	26.37%	578	25.42%	664	26.38%
407	29.22%	493	26.34%	579	25.42%	665	26.34%
408	29.22%	494	26.31%	580	25.46%	666	26.29%
409	29.22%	495	26.29%	581	25.49%	667	26.24%
410	29.23%	496	26.26%	582	25.53%	668	26.20%
411	29.23%	497	26.24%	583	25.56%	669	26.15%
412	29.24%	498	26.21%	584	25.60%	670	26.10%
413	29.24%	499	26.18%	585	25.63%	671	26.06%
414	29.25%	500	26.16%	586	25.67%	672	26.00%
415	29.25%	501	26.13%	587	25.70%	673	25.95%
416	29.26%	502	26.11%	588	25.74%	674	25.90%
417	29.26%	503	26.08%	589	25.77%	675	25.85%
418	29.27%	504	26.05%	590	25.81%	676	25.80%
419	29.27%	505	26.03%	591	25.84%	677	25.75%
420	29.27%	506	26.00%	592	25.88%	678	25.69%
421	29.28%	507	25.98%	593	25.91%	679	25.64%
422	29.28%	508	25.95%	594	25.95%	680	25.59%
423	29.29%	509	25.92%	595	25.98%	681	25.54%
424	29.29%	510	25.90%	596	26.02%	682	25.49%
425	29.30%	511	25.87%	597	26.05%	683	25.44%
426	29.30%	512	25.85%	598	26.09%	684	25.38%
427	29.23%	513	25.82%	599	26.12%	685	25.33%
428	29.15%	514	25.79%	600	26.16%	686	25.28%
429	29.07%	515	25.77%	601	26.19%	687	25.23%
430	29.00%	516	25.74%	602	26.23%	688	25.18%
431	28.92%	517	25.72%	603	26.27%	689	25.13%
432	28.85%	518	25.69%	604	26.30%	690	25.07%
433	28.77%	519	25.68%	605	26.34%	691	25.02%
434	28.70%	520	25.67%	606	26.37%	692	24.97%
435	28.62%	521	25.65%	607	26.41%	693	24.92%
436	28.54%	522	25.64%	608	26.44%	694	24.87%
437	28.47%	523	25.63%	609	26.48%	695	24.82%
438	28.39%	524	25.62%	610	26.51%		
439	28.32%	525	25.61%	611	26.54%		
440	28.24%	526	25.59%	612	26.58%		
441	28.17%	527	25.58%	613	26.61%		
442	28.09%	528	25.57%	614	26.64%		
443	28.01%	529	25.56%	615	26.68%		
444	27.94%	530	25.55%	616	26.71%		
445	27.86%	531	25.53%	617	26.74%		
446	27.79%	532	25.52%	618	26.77%		
447	27.71%	533	25.51%	619	26.81%		
448	27.63%	534	25.50%	620	26.84%		
449	27.56%	535	25.49%	621	26.87%		
450	27.48%	536	25.48%	622	26.91%		
451	27.41%	537	25.46%	623	26.94%		
452	27.33%	538	25.45%	624	26.97%		
453	27.26%	539	25.44%	625	27.01%		
454	27.18%	540	25.43%	626	27.04%		
455	27.10%	541	25.42%	627	27.07%		
456	27.03%	542	25.40%	628	27.10%		
457	26.95%	543	25.39%	629	27.14%		
458	26.94%	544	25.38%	630	27.17%		
459	26.92%	545	25.37%	631	27.20%		
460	26.91%	546	25.36%	632	27.24%		
461	26.89%	547	25.34%	633	27.27%		
462	26.88%	548	25.33%	634	27.30%		
463	26.86%	549	25.33%	635	27.34%		
464	26.85%	550	25.34%	636	27.37%		
465	26.83%	551	25.34%	637	27.40%		
466	26.82%	552	25.34%	638	27.43%		
467	26.80%	553	25.35%	639	27.47%		
468	26.78%	554	25.35%	640	27.50%		
469	26.77%	555	25.35%	641	27.45%		
470	26.75%	556	25.36%	642	27.41%		
471	26.74%	557	25.36%	643	27.36%		
472	26.72%	558	25.36%	644	27.31%		
473	26.71%	559	25.36%	645	27.27%		
474	26.69%	560	25.37%	646	27.22%		
475	26.68%	561	25.37%	647	27.17%		
476	26.66%	562	25.37%	648	27.13%		
477	26.65%	563	25.38%	649	27.08%		
478	26.63%	564	25.38%	650	27.03%		
479	26.62%	565	25.38%	651	26.99%		
480	26.60%	566	25.39%	652	26.94%		
481	26.59%	567	25.39%	653	26.89%		

Tasa LIBOR

Plazo\Fecha	31/12/2010	Plazo\Fecha	31/12/2010	Plazo\Fecha	31/12/2010	Plazo\Fecha	31/12/2010
396	0.7813722	480	0.7825449	564	0.7837203	648	0.7848981
397	0.7813861	481	0.7825589	565	0.7837343	649	0.7849122
398	0.7814001	482	0.7825729	566	0.7837483	650	0.7849262
399	0.7814140	483	0.7825869	567	0.7837623	651	0.7849402
400	0.7814280	484	0.7826009	568	0.7837763	652	0.7849543
401	0.7814419	485	0.7826148	569	0.7837903	653	0.7849683
402	0.7814559	486	0.7826288	570	0.7838043	654	0.7849823
403	0.7814698	487	0.7826428	571	0.7838183	655	0.7849964
404	0.7814838	488	0.7826568	572	0.7838323	656	0.7850104
405	0.7814977	489	0.7826707	573	0.7838463	657	0.7850245
406	0.7815117	490	0.7826847	574	0.7838603	658	0.7850385
407	0.7815256	491	0.7826987	575	0.7838744	659	0.7850525
408	0.7815396	492	0.7827127	576	0.7838884	660	0.7850666
409	0.7815535	493	0.7827267	577	0.7839024	661	0.7850806
410	0.7815675	494	0.7827407	578	0.7839164	662	0.7850947
411	0.7815814	495	0.7827546	579	0.7839304	663	0.7851087
412	0.7815954	496	0.7827686	580	0.7839444	664	0.7851228
413	0.7816093	497	0.7827826	581	0.7839584	665	0.7851368
414	0.7816233	498	0.7827966	582	0.7839724	666	0.7851508
415	0.7816372	499	0.7828106	583	0.7839865	667	0.7851649
416	0.7816512	500	0.7828245	584	0.7840005	668	0.7851789
417	0.7816651	501	0.7828385	585	0.7840145	669	0.7851930
418	0.7816791	502	0.7828525	586	0.7840285	670	0.7852070
419	0.7816930	503	0.7828665	587	0.7840425	671	0.7852211
420	0.7817070	504	0.7828805	588	0.7840565	672	0.7852351
421	0.7817209	505	0.7828945	589	0.7840705	673	0.7852492
422	0.7817349	506	0.7829085	590	0.7840846	674	0.7852632
423	0.7817489	507	0.7829224	591	0.7840986	675	0.7852773
424	0.7817628	508	0.7829364	592	0.7841126	676	0.7852913
425	0.7817768	509	0.7829504	593	0.7841266	677	0.7853054
426	0.7817907	510	0.7829644	594	0.7841406	678	0.7853194
427	0.7818047	511	0.7829784	595	0.7841546	679	0.7853334
428	0.7818186	512	0.7829924	596	0.7841687	680	0.7853475
429	0.7818326	513	0.7830064	597	0.7841827	681	0.7853615
430	0.7818466	514	0.7830204	598	0.7841967	682	0.7853756
431	0.7818605	515	0.7830343	599	0.7842107	683	0.7853896
432	0.7818745	516	0.7830483	600	0.7842247	684	0.7854037
433	0.7818884	517	0.7830623	601	0.7842388	685	0.7854177
434	0.7819024	518	0.7830763	602	0.7842528	686	0.7854318
435	0.7819164	519	0.7830903	603	0.7842668	687	0.7854458
436	0.7819303	520	0.7831043	604	0.7842808	688	0.7854599
437	0.7819443	521	0.7831183	605	0.7842948	689	0.7854740
438	0.7819582	522	0.7831323	606	0.7843089	690	0.7854880
439	0.7819722	523	0.7831463	607	0.7843229	691	0.7855021
440	0.7819862	524	0.7831603	608	0.7843369	692	0.7855161
441	0.7820001	525	0.7831743	609	0.7843509	693	0.7855302
442	0.7820141	526	0.7831882	610	0.7843650	694	0.7855442
443	0.7820281	527	0.7832022	611	0.7843790	695	0.7855583
444	0.7820420	528	0.7832162	612	0.7843930	696	0.7855723
445	0.7820560	529	0.7832302	613	0.7844070	697	0.7855864
446	0.7820699	530	0.7832442	614	0.7844211	698	0.7856004
447	0.7820839	531	0.7832582	615	0.7844351	699	0.7856145

448	0.7820979	532	0.7832722	616	0.7844491	700	0.7856285
449	0.7821118	533	0.7832862	617	0.7844631	701	0.7856426
450	0.7821258	534	0.7833002	618	0.7844772	702	0.7856567
451	0.7821398	535	0.7833142	619	0.7844912	703	0.7856707
452	0.7821537	536	0.7833282	620	0.7845052	704	0.7856848
453	0.7821677	537	0.7833422	621	0.7845192	705	0.7856988
454	0.7821817	538	0.7833562	622	0.7845333	706	0.7857129
455	0.7821956	539	0.7833702	623	0.7845473	707	0.7857270
456	0.7822096	540	0.7833842	624	0.7845613	708	0.7857410
457	0.7822236	541	0.7833982	625	0.7845754	709	0.7857551
458	0.7822375	542	0.7834122	626	0.7845894	710	0.7857691
459	0.7822515	543	0.7834262	627	0.7846034	711	0.7857832
460	0.7822655	544	0.7834402	628	0.7846174	712	0.7857972
461	0.7822795	545	0.7834542	629	0.7846315	713	0.7858113
462	0.7822934	546	0.7834682	630	0.7846455	714	0.7858254
463	0.7823074	547	0.7834822	631	0.7846595	715	0.7858394
464	0.7823214	548	0.7834962	632	0.7846736	716	0.7858535
465	0.7823353	549	0.7835102	633	0.7846876	717	0.7858676
466	0.7823493	550	0.7835242	634	0.7847016	718	0.7858816
467	0.7823633	551	0.7835382	635	0.7847157	719	0.7858957
468	0.7823772	552	0.7835522	636	0.7847297	720	0.7859097
469	0.7823912	553	0.7835662	637	0.7847437	721	0.7859238
470	0.7824052	554	0.7835802	638	0.7847578	722	0.7859379
471	0.7824192	555	0.7835942	639	0.7847718	723	0.7859519
472	0.7824331	556	0.7836082	640	0.7847858	724	0.7859660
473	0.7824471	557	0.7836222	641	0.7847999	725	0.7859801
474	0.7824611	558	0.7836362	642	0.7848139	726	0.7859941
475	0.7824751	559	0.7836502	643	0.7848279	727	0.7860082
476	0.7824890	560	0.7836642	644	0.7848420	728	0.7860223
477	0.7825030	561	0.7836782	645	0.7848560	729	0.7860363
478	0.7825170	562	0.7836922	646	0.7848700	730	0.7860504
479	0.7825310	563	0.7837062	647	0.7848841	731	0.7860645

BIBLIOGRAFÍA

[1] CATHERINE MANSELL CARSTENS, *Las nuevas finanzas en México*, Edit. Milenio, México, 1996.

[2] J. C. COX, J. E. INGERSOLL Y S. A. ROSS, *The relationship between forward prices and futures prices*, Journal of Financial Economics, 9 (diciembre 1981), 321-346.

[3] « Departamento de Matemáticas. UNEX » *Teoría de la de medida y probabilidades*, 2010.

[4] ESPEN GAARDER HAUG, *The complete guide to option pricing fórmulas*, Edit. McGraw-Hill 2da edición.

[5] F. JAVIER MARTÍN PLIEGO y LUIS RUIZ -MAYA PEREZ, *Fundamentos de Probabilidad*, Editorial AC, Madrid España, 2000.

[6] FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ, *Riesgos Financieros Y Económicos*, Edit. CENGAGE, segunda edición.

[7] GREGORY F. LAWLER, *Stochastic Calculus: An Introduction with Applications.*

[8] HULL. J . C ., *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, Edit. PEARSON EDUCATION, Madrid, 2002.

[9] HUMBERTO DEL CASTILLO, *Notas de clase.*

[10] JOSÉ ANTONIO CLIMENT HERNÁNDEZ, «Vínculos Matemáticos No 38», *Valuación de opciones*, Facultad de ciencias, México D.F. 2005.

[11] JOSÉ M. MARÍN y GONZALO RUBIO IRIGUYEN, *Economía Financiera.* Edi. Antoni Bosch Editor S.A. Barcelona, España, 2011.

[12] JOSEFINA MARTÍNEZ y JULIO G. VILLALON, *Introducción al cálculo estocástico aplicado a la modelación Económico-Financiero-Actuarial*, Edi. Nebillo, 1ra edición , Coruña, 2003.

[13] LUIS RINCÓN, *Introducción a la probabilidad*, Prensa de ciencias México, D.F. 2014.

[14] LUIS RINCÓN, *Curso intermedio de probabilidad*, Prensa de Ciencias México, D.F. 2008.

[15] Luis Rincón, *Introducción a los procesos estocásticos*, Prensa de Ciencias México, D.F. 2008.

[16] Ma. Emilia Caballero, «Vínculos Matemáticos No 76», *Procesos Estocástico I, Cadenas de Markov*, Facultad de ciencias, México D.F. 2007.

[17] Miriam Muñoz de Özak y Liliana Blanco Castañeda, *Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad*, Facultad de ciencias, Bogotá, Colombia 2005.

[18] Oksendal Bernet *Stochastic Differential Equations And Introducction Whit Applications*, Fitht edition, Edit.Springer-Verlag, New York.

[19] Pierre Henry-Labordére, *Analisys, Geometry, and Modeling in finances Advances Methods in option pricing* Edit. CHAPMAN & HALL/CRC, London, UK, 2009.

[20] Steel, J. Michel, *"Sthocastic calculus and financial application"*, Edit. Springer-Verlag , 2001.

[21] Zdzislaw Berzezniak and Tomasz Zastawniak, *Basic Stochastic processes* Edit. Spreinger-Verlag, London, UK, 1999.