UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

TEORÍA ALGORÍTMICA DE LA MEDICIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICAS)

PRESENTA:
ALDO FERNANDO GUADALUPE SOLIS LABASTIDA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

COMITÉ TUTOR
DR. ALFRED BARRY U'REN CORTÉS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

DR. ISAAC PÉREZ CASTILLO
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA,CD. MX., ENERO 2018

Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas

Teoría Algorítmica de la Medición

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

ALDO FERNANDO GUADALUPE SOLIS LABASTIDA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH

2017

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y hermanas por todo el apoyo y amor que me han dado.

Agradezco a mi asesor el Dr. Jorge Hirsch por guiarme a través de este trabajo y formarme como físico.

Agradezco al proyecto PAPIIT IN109417 por el apoyo económico.

Encerrado aquel sentimiento en los sótanos del alma, su tensión se eleva y, buscando escape, encuentra el de la superstición científica. A falta de una religión, las clases ilustradas endiosan la ciencia.

Samuel Ramos

Índice general

Resumen

Los procesos de medición tienen un papel fundamental en la Física actual. Sin embargo, no existe un estudio dedicado a las mediciones en sí mismas. Este trabajo es una aproximación a los fundamentos de la medición. Hacemos una exploración de distintos ámbitos de las mediciones. Revisamos, parcialmente, el desarrollo de las escalas de medición y de la teoría de la medición.

El objetivo principal es relacionar los conceptos de computabilidad y medición; que siendo de naturaleza muy diferente juegan un papel muy importante en la teoría de la información cuántica.

Proponemos un formalismo básico que permite este desarrollo, y con él mostramos la imposibilidad de un procedimiento que determine qué mide un experimento, así como la de enumerar los procesos de medición bien definidos. Mencionamos algunas posibles aplicaciones a problemas actuales de la Física.

Introducción

¿Qué es medir?

En el discurso científico actual, la medición juega un papel fundamental. Debido a que, al menos en principio, la validez del discurso científico descansa sobre la *evidencia empírica*. Esto es particularmente revelador en el caso de teorías científicas como la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad, que, desde su fundamento, contradicen a la intuición y contienen aún gran cantidad de problemas sin resolver. Esta evidencia empírica, y el gran peso que se le atribuye, ha sido estudiada profundamente en el siglo pasado por los filósofos de la ciencia. La relación entre los discursos científicos y los experimentos que se realizan está en el corazón de la ciencia misma y es uno de los temas con más interés. Gracias a estos trabajos, tenemos una visión crítica del quehacer científico. Autores como Kuhn [Kuh96], Lakatos [Lak78] y Feyerabend [Fey75] desarrollaron un discurso, históricamente argumentado, que da cuenta del rol de los experimentos en el desarrollo de las teorías más allá del ideal de la ciencia empírica.

El gran peso que se le atribuyen a los experimentos, a pesar de la luz de los trabajos sobre las disciplinas científicas que aligeran esa responsabilidad, conlleva una necesidad por estudiar el fenómeno mismo de la medición. ¿Qué es medir? Resulta una pregunta natural en el discurso científico actual. ¿Cuáles son las condiciones necesarias para que una medición se realice? Es una cuestión fundamental para saber si las cantidades que usamos están bien definidas, esto toma más importancia en nuestro tiempo dónde las teorías físicas contienen nuevas variables como el "espín","color", etc. que no tienen un agarre directo con los métodos de medición.

Estas preguntas no son exclusivas de la Física Moderna. A finales del siglo XIX, uno de los físicos mas destacados de la historia, Hermann von Helmholtz integró en su famoso “Contar y Medir” [HBD30] distintas preguntas fundamentales sobre la medición. Este gran desarrollo fue seguido por distintos científicos y matemáticos que llegarían a desarrollar lo que se conoce como la teoría de la medición. Tal teoría indaga en gran parte de la naturaleza de la medición. Como veremos, estos resultados nos permiten caracterizar e imponer condiciones a los métodos que utilizamos para definir las escalas de medición; es decir, la manera en que asociamos números u objetos matemáticos a distintas condiciones que se encuentran experimentalmente.

Siguiendo el camino de estos trabajos, nos encontramos con una visión muy rica de lo que “medir” significa. La medición en la Física es un tema profundamente complejo, pues su naturaleza no se limita a la teoría física o al laboratorio, sino que proviene de la comunión de ambos. El estudio de esta relación se complica; su naturaleza cambia en función de las corrientes científicas y filosóficas que se dan en las historia de la ciencia [Fey75].

En los tiempos actuales la situación es aún más complicada: El problema de la medición, dentro del ámbito de la Mecánica Cuántica, nos ha llevado a incluir a la medición misma dentro de la regla de evolución temporal. Sin embargo, gran parte de las interpretaciones buscan, de una manera o de otra, excluir a ésta de la teoría; es decir, cumplir el deseo de Bell [Bel90].

Esto no parece despegado del carácter instrumental que ha tomado la medición: ¿Cuántos físicos hemos medido la corriente utilizando un multímetro sin saber cómo realizar esa medición sin ese aparato, sin saber sobre el galvanómetro? Si bien estamos cerca de las mediciones, es común mirarlas como sólo un medio, un medio que nos permite acceder al valor *real* de una magnitud; valor que sí interesa al físico. Por tanto, las mediciones han sido poco discutidas y se han visto relegadas.

En la actualidad, resulta cada vez más difícil mantener esa posición ante los procesos de medición. Algo tan fundamental para nuestra disciplina demanda ser estudiado a fondo, con una mirada crítica y así está ocurriendo con las distintas ramas ya establecidas en la Física.

Viendo el panorama tan vasto que es el estudio de las mediciones, este trabajo sólo puede concentrarse en un pequeño rincón escondido entre estas grandes disciplinas. Nos concentraremos en una característica que es poco mencionada en los textos relacionados con la medición: su carácter algorítmico. Si bien la teoría de la medición describe minuciosamente las características matemáticas que requiere una magnitud para ser medida, no se suelen tocar las características del proceso por el cual se accede a la magnitud. Este proceso que debe ser entendido por todos, repetible, etcétera; se le atribuye siempre un carácter protocolar, mecánico y, llevando más allá la analogía, algorítmico.

La tesis que se intentará sostener en las páginas siguientes es: los procedimientos experimentales tienen una naturaleza algorítmica intrínseca, en particular los procedimientos de medición. Además, tal naturaleza puede ser formalizada matemáticamente, permitiéndonos hacer deducciones generales sobre tales procedimientos.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. El problema de la Medición.

Dentro de las teorías físicas siempre tenemos reglas o relaciones matemáticas que vinculan las situaciones, o el estado de las cosas, en distintos momentos del tiempo.

Para caracterizar las situaciones dentro de la teoría se utiliza algún objeto matemático conveniente; por ejemplo, en la Mecánica Hamiltoniana la situación física se describe por la colección de coordenadas y momentos denotados normalmente por

$$q_i, q_{j_i} = 1, ..., n$$

, es decir, por un punto en el espacio fase. Al punto en el espacio fase que represente la situación le llamamos normalmente *el estado*; en el caso general, al objeto matemático que se asocia a una situación física se le llama *el estado del sistema*. Esta asociación es, en el caso común, única; es decir, a cada situación física se le puede asociar sólo uno de los estados y, a cada estado, sólo una situación física.

Si a un situación en un tiempo dado se le asocia un estado A y en un tiempo posterior se le asocia un estado B la regla que los relaciona, es decir, $f_t(A) = B$, podría considerarse la regla de evolución. En la Física, las reglas de evolución no suelen referirse a este tipo de funciones. Por ejemplo, volviendo a la Mecánica Hamiltoniana, la regla que relaciona a los estados a lo largo del tiempo está dada por las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{dp_j}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{dq_j}{dt}; \tag{1.1}$$

resolviendo éstas podemos calcular el estado del sistema después de un tiempo dado. Nótese que estas ecuaciones plantean un esquema de problema matemático: solamente hasta que hayamos planteado H se tendrá un sistema de ecuaciones diferenciales que, una vez resuelto, nos permitirá calcular el valor de las posiciones y momentos en distintos tiempos. Son este tipo de reglas, o esquemas de problemas matemáticos, a las que se les conoce en la Física como *reglas de evolución temporal* o simplemente *reglas de evolución*.

Para dirigirnos hacia el problema central veamos el caso de la Mecánica Cuántica(no relativista). Ésta tiene, naturalmente, regla de evolución; la escribimos como:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle = H\left|\Psi\right\rangle. \tag{1.2}$$

De nuevo notamos que una vez especificado H tendremos planteado el problema matemático a resolver. A través de distintos métodos de cálculo, se puede obtener la relación entre los estados con diferencia de tiempo dada.

Hay, sin embargo, otra regla de evolución temporal en varias formulaciones de la Mecánica Cuántica, particularmente en la que John von Neumann escribió [Von55], se trata de la *regla del colapso*. Esta regla se aplica únicamente en casos donde tengamos la medición de una observable Q con resultado q_n, como resultado el estado sufrirá la transformación:

$$\left|\Psi\right\rangle \to \left|q_n\right\rangle, \tag{1.3}$$

donde $\left|q_n\right\rangle$ es el autoestado del operador Q con autovalor q_n.

Es decir, la Mecánica Cuántica tiene una regla de evolución compuesta por las dos reglas anteriores:

$$\begin{cases} \left|\Psi\right\rangle \to \left|q_n\right\rangle & \text{si hay una medición.} \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle = H\left|\Psi\right\rangle, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.4}$$

No tiene nada de malo, en principio, escribir reglas de evolución con casos como ésta, siempre y cuando esté bien definida, es decir, sin ambigüedades.

En nuestra regla de evolución compuesta tenemos un problema de definición: si bien cada sub-regla está bien definida, la condición para decidir cuál de ellas se aplicará no lo está; ¿cómo saber si se está llevando a cabo una medición?,¿cuáles son las condiciones que debe cumplir una situación para que sea considerada una medición? Este problema se debe fundamentalmente a que el acto de medición no está completamente definido.

De la cuestión anterior se desata una de las discusiones más importantes para la Mecánica Cuántica. La ambigüedad señalada es una de las tantas formas que puede adoptar el *problema de la medición*. Las distintas formulaciones, interpretaciones o correcciones que se le han asociado a la Mecánica Cuántica para enfrentar este problema lo suelen formular de distintos modos y resolverlo de la manera que mejor les parece. En la visión de Bohr, por ejemplo, el problema de la medición está directamente relacionado al tamaño del sistema donde se aplica el formalismo de la Mecánica Cuántica [Mur87]. Las teorías de colapso espontáneo niegan que sea el acto de medición el responsable del colapso, por tanto niegan que la condición en la regla compuesta sea correcta, y aseguran que este proceso pasa de manera natural y aleatoria [Blo08]. Incluso hay versiones que aseguran que este cambio en la evolución unitaria, es decir, el colapso, ocurre debido a la conciencia [Wig95]. Como se puede apreciar, hay una gran diversidad de formas de plantear y, al mismo tiempo, resolver este problema [Sch05].

De ahora en adelante nos referiremos al problema de la medición como ha sido expuesto, es decir, como una ambigüedad en la regla de evolución temporal del formalismo cuántico.

La mayoría de las opciones que se proponen como solución al problema, buscan eliminar la medición completamente de la teoría; ven en ella un elemento indeseable. El mismo John Bell, que ha influido profundamente en toda la comunidad de físicos, sostenía esta posición como puede apreciarse en su famoso artículo “Against Measurement” [Bel90]. Hay un aspecto que ha sido, como mencionamos antes, omitido en muchos análisis, y parece natural: estudiar y definir la medición en sí misma.

Las mediciones parecen muy cercanas a la naturaleza humana; todas las civilizaciones, sin importar su antigüedad, muestran rastros de medición de pesos, distancias y tiempo [Kul99]. Es de esperar que tengamos una relación de este tipo, pues hay una necesidad de las mediciones en el comercio para cuantificar las mercancías, cuantificar los terrenos e incluso para controlar el tamaño del pan [Kul99]. Una historia tan larga nos sugiere que las mediciones tienen suficiente material como para definirse independientemente del problema cuántico. Nos parece que el problema de la medición puede esclarecerse definiendo de la mejor manera posible medición. Esto ayuda a definir con mayor claridad el problema y, como veremos más adelante, desde esta mirada algunos planteamientos simplemente carecen de sentido o se vuelven triviales.

Como es de esperar, un tema tan relevante para la ciencia moderna como son las mediciones, en el sentido general de la palabra, ha atraído la atención de muchos científicos y filósofos en el pasado. Este tema no sólo es de interés para los físicos, como en el caso de la Mecánica Cuántica, también para químicos, ingenieros y, muy particularmente, psicólogos. Por tanto nos parece importante dar cuenta, aunque sea sólo una visión aérea, de los intentos por adentrarse en la definición de medición. Estos intentos no pueden ponerse en relación con la Física Cuántica fácilmente; no están escritos en un lenguaje similar ni tienen conceptos similares. Sin embargo, nos parece fundamental como un acercamiento distinto a las cantidades con las que normalmente tratamos en la Física.

1.2. Teoría de la Medición

La teoría de la medición, creada por Helmholtz a finales del siglo pasado [HBD30], representa uno de los primeros intentos de abordar matemáticamente el fundamento las mediciones [Cam13; Ell68; Luc+90]. Los esfuerzos de esta teoría no se acercan directamente a la definición de las mediciones; tienen el objetivo de encontrar esas condiciones necesarias para que una propiedad sea cuantificable de manera objetiva o justa.

Con lo anterior en mente, pensemos en el proceso que nos permite asociar a una vara el doble de longitud que otra. Para ello necesitamos tener un criterio que nos permita saber si dos magnitudes son iguales en cantidad. En efecto, dadas dos varas iguales en longitud, las ponemos una enseguida de la otra en línea recta, al compararlas con la más larga, si coinciden, se puede establecer que esta última tiene el doble de la longitud de las primeras.

Todo procedimiento para poder medir una magnitud extensiva, como lo es la longitud, necesita de un criterio para establecer la igualdad de una magnitud y de un proceso por el cual las magnitudes se combinen o se sumen [HBD30; Cam13; Ell68]. En nuestro caso el procedimiento es poner una vara enseguida de la otra, a este proceso le llamaremos *proceso de combinación*. A la vara compuesta le asociamos directamente el doble de longitud, lo que implica una hipótesis importante: la longitud de dos varas combinadas será la suma de las longitudes. También lo podemos representar como:

$$L(a \star b) = L(a) + L(b) \tag{1.5}$$

donde a, b representan las varas, $\star$ representa la operación de combinación y $L(a)$ la longitud de la vara a.

Este proceso se puede repetir para obtener múltiplos enteros y comparar con otras longitudes. Por otro lado, para construir submúltiplos necesitamos un par de varas, iguales en longitud, tal que su combinación sea igual al patrón; a éstas les asociaremos la mitad de la longitud del patrón. Este procedimiento, dada una vara patrón, se puede usar para construir toda una escala [Ell68].

La ecuación anterior está muy cerca de la propia definición de extensividad de una magnitud. Tiempo, fuerza, etcétera, son magnitudes que esperamos cumplan con la condición impuesta, cada una con su respectivo procedimiento de combinación.

El caso de las magnitudes intensivas tiene un enfoque distinto. Tomemos la presión como ejemplo. Ésta puede ser definida como fuerza sobre área, por tanto, como la razón de magnitudes extensivas. Esto implica que para medir la presión en una superficie es necesario medir la fuerza sobre ésta y su área para, después, realizar el procedimiento de cálculo necesario. También sería posible que la presión tenga alguna relación con otra cantidad, por ejemplo la temperatura, como en la ley del gas ideal, y midamos esta otra cantidad para calcular la presión. Este tipo de aproximación se le conoce como *medición indirecta* [Cam13; Ell68], en resumen, consiste en medir otra cantidad que tenga una relación conocida o asumida con la de interés y realizar un procedimiento de cálculo para obtener el valor de la cantidad deseada. En contraste con este procedimiento tenemos las *mediciones indirectas* que no dependen de otro elemento, la medición de distancia que expusimos entra dentro de esta clasificación.

Aunque podemos definir la presión a través de la fuerza y el área, también podemos hacer una escala de presión en base a mediciones directas. Por ejemplo, si tenemos dos tanques con gas a iguales presiones y permitimos a ambos tanques comunicarse no esperamos obtener el doble de presión. De la misma manera, un par de litros de agua, a la misma temperatura, no esperamos que al ponerse en el mismo recipiente tengan el doble de temperatura. Sin embargo podemos pensar en sustituir el procedimiento de suma por el de promedio, es decir:

$$P(a \star b) = \frac{P(a) + P(b)}{2}. \tag{1.6}$$

Con este nuevo procedimiento sí tenemos la posibilidad de construir una escala sin necesidad de definir la cantidad con mediciones indirectas.

Aunque en lo anterior pareciera que las magnitudes extensivas son las únicas que tienen esta relación entre el proceso de combinación y la suma; hay otras magnitudes que también cumplen esta condición. Por ejemplo, la resistencia: si conectamos dos resistencias en serie, lo que equivaldría a la combinación, tenemos que la resistencia total es la suma de las resistencias. Por otro lado se podría construir una nueva escala si se asumiera que las resistencias se suman al conectarlas en paralelo, como efectivamente pasa con los capacitores y construir otra escala.

En conclusión, el procedimiento de combinación junto con el proceso matemático que se le asocia determinará la escala de medición. En general escribiremos:

$$g(a) \diamond g(b) = g(a \star b), \tag{1.7}$$

donde el procedimiento $\diamond$ denotará una función matemática de dos argumentos, podrá ser la suma, el promedio, pero también otro tipo de funciones.

Naturalmente habrá condiciones que establecerán cuándo uno de estos procedimientos realmente da lugar a la creación de una escala. La teoría de la medición moderna [Luc+90], se ha dedicado a este problema que, como se puede ver en la estructura de la ecuación que hemos escrito, está muy cerca del álgebra abstracta.

En este trabajo queremos enfocar la atención del lector al procedimiento representado por $\star$. No hay dentro de la teoría de la medición, unas condiciones explicitas para éste. Sabemos que actúa sobre elementos físicos, como las varas o el agua, pero no se aplican condiciones a la naturaleza del procedimiento.

Independientemente de la clara relación con las cantidades físicas, queremos mencionar rápidamente que este marco teórico tiene un gran valor para otros campos. La psicología, por ejemplo, tuvo una época en la que intentó cuantificar algunos conceptos importantes. ¿Es posible cuantificar el enojo? Resulta que los criterios básicos que acabamos de mencionar para la cuantificación de variables no pueden establecerse. Por tanto si aceptamos estas condiciones, es imposible sostener la cuantificación de varios conceptos psicológicos [Tre09].

1.3. Los experimentos

Si bien la teoría de la medición da gran luz sobre la naturaleza de las cantidades físicas, también vemos que hay partes que aún quedan obscuras, pues se centra más en la naturaleza de las cantidades que en la naturaleza del método que nos permite cuantificarlas. Vamos a ver una serie de características relacionadas con los experimentos haciendo especial énfasis en el caso de la Mecánica Cuántica.

La Mecánica Cuántica se ha presentado siempre con diversos elementos que la separan de otras teorías físicas, cosas que han recibido gran atención por parte de la comunidad de físicos. Como ejemplos tenemos la superposición de estados, el principio de incertidumbre, el colapso de la función de onda, la regla de Born, etcétera.

Muchos de estos problemas (o pseudoproblemas) están relacionados con la posición filosófica, implícita muchas veces, que se adopta al enfrentarlos. Por ejemplo, el indeterminismo fundamental, que propone la visión ortodoxa de la Mecánica Cuántica, claramente chocaba con la visión de Einstein, originando la famosa crítica EPR [EPR35].

Si queremos adoptar una perspectiva que ponga a las mediciones como un concepto central nos es necesario definir claramente a qué nos referimos con *experimento*. En el uso diario no se suelen especificar todas las condiciones experimentales cuando hablamos de algún experimento en particular. Si nos referimos al experimento de lanzar una moneda, no especificamos las dimensiones de la moneda, la superficie donde se lanzará o el número de veces que se realizará; posiblemente podríamos especificar las condiciones de lanzamiento lo que, si son suficientes, determinarán el resultado del experimento.

Por ejemplo, si lanzamos la moneda una vez, ¿es éste el mismo experimento que si la lanzamos diez o cien veces? Parece natural que si tenemos al menos una condición distinta en la descripción experimental, debemos considerarlos como experimentos distintos.

El término experimento puede llegar a ser confuso, en el sentido de que, en ocasiones, nos referimos a dos procedimientos experimentales como el mismo *experimento*, siendo que difieren en algunas de sus condiciones. Es por ello que consideramos conveniente, a partir de ahora, hablar de *procedimientos*. En ese sentido, en el experimento de lanzar una moneda se pueden englobar distintos procedimientos, el que la lanza una, cien o mil veces.

Dado un procedimiento M, denotaremos a su repetición n veces como M^n. Si el procedimiento A es lanzar una moneda una vez [1], lanzar la moneda diez veces B cumplirá: $B = A^{10}$. Por otro lado, C, significando lanzar la moneda cien veces, cumplirá: $C = B^{10} = (A^{10})^{10} = A^{100}$. Naturalmente esta operación cumple las reglas algebraicas esperadas.

El tratamiento de los resultados del experimento también puede diferenciar entre ellos. De nuevo el caso del lanzamiento de monedas nos ayuda: lanzamos una moneda diez veces, en un caso el resultado que medimos es la frecuencia de aparición de una de las caras, en el otro será el resultado del décimo lanzamiento. Estos procedimientos son diferentes pues, aunque todas las instrucciones que tengan que actúen sobre la moneda son iguales, el procesamiento de los datos es distinto. Por lo tanto, incluso los tratamien-

[1] Guardando el resultado en algún dispositivo

tos matemáticos, que se realizan con los datos medidos, pueden llevar a dos procedimientos diferentes, siempre que el cálculo matemático se incluya en el procedimiento experimental.

Por otro lado, en el ámbito cuántico, existen fenómenos que no se pueden predecir, algunas interpretaciones toman esto como una cuestión epistemológica y otras como ontológica. Un ejemplo de fenómeno que no se repite lo tenemos en un sistema físico, preparado en un estado Ψ, al que le medimos una propiedad, representada por el operador P, de la que Ψ no es autoestado. De este procedimiento obtendremos un resultado que puede variar si lo repetimos. La novedad de los fenómenos cuánticos reside en que, sin importar el detalle con que se especifiquen las condiciones experimentales, no se podrá lograr que el resultado se repita [2]. Esto nos lleva a una clasificación de los procedimientos con resultado: los repetibles, es decir, que siempre que se ejecuten tienen el mismo resultado; y los no repetibles, que tienen resultados distintos. Esta noción no depende de la interpretación de la teoría siempre que el resultado del experimento y el criterio de igualdad estén bien definido.

Lanzar una moneda, sin especificar sus condiciones iniciales, es un experimento no repetible, lo sabemos y usamos todos los días. Lanzar un dado, de nuevo sin condiciones, también lo es. Si lanzamos una moneda, pero en vez de fijarnos en qué cara salió, nos fijamos en si se dirigió hacia la tierra o hacia el cielo, tendremos un experimento repetible. La repetibilidad se considera como la *igualdad* entre resultados de experimentos con condiciones *iguales*.

En los casos reales, necesitamos especificar minuciosamente las condiciones en las que el experimento se llevó a cabo. Tómese por ejemplo la medición de la resistividad de un metal, si no controlamos la temperatura tendremos distintos resultados dependiendo del valor que ésta tenga, en definitiva el experimento no será repetible. Sin embargo, el desarrollo experimental no exige que absolutamente todas las condiciones sean las mismas; por ejemplo, difícilmente el color de los calcetines del experimentador influirá en el experimento. Se debe agregar que es necesario describir sólo aquellas condiciones suficientes y necesarias para que el resultado del experimento sea el mismo.

Consideremos ahora como impacta la repetibilidad a las teorías físicas. Éstas son capaces de realizar cálculos y predicciones a partir de datos an-

[2] Esto depende de nuevo de la interpretación.

teriores sobre el sistema: las interacciones que lo caracterizan, condiciones iniciales, etcétera. Los cálculos que realizan las teorías sí constituyen fenómenos repetibles y, por tanto, cualquier cálculo que se repita bajo los mismos datos tendrá el mismo resultado. En consecuencia, es imposible la predicción o reproducción de fenómenos no repetibles en una teoría [3]. Como ya se mencionó, tenemos fenómenos cuánticos que no se repiten, en vista de lo anterior cabe hacer la pregunta: ¿Cómo logra la Mecánica Cuántica dar cuenta de fenómenos no repetibles? En experimentos cuánticos que no tienen resultados repetibles, la distribución de probabilidad sí lo es y la Mecánica Cuántica sólo se limita a predecir la distribución, los valores promedio y demás medidas estadísticas.

Como se afirmó antes, necesitamos un criterio de igualdad bien definido. Cuando los posibles resultados de salida son discretos o contables, como los casos que mencionamos, no aparecen problemas para saber si un resultado es el mismo que otro; sin embargo, si medimos la longitud de una mesa, tendremos una variable continua y evaluar si dos resultados son iguales se vuelve complicado; es difícil discernir entre valores muy cercanos de la magnitud.

Las magnitudes continuas representan una serie de dificultades para las mediciones. Como bien se sabe, si asociamos un valor de 3,2 a una magnitud continua, una longitud por ejemplo, no esperamos que la magnitud *real* sea ese número, pero sí que sea muy cercana; caso que contrasta con el del dado donde, si el resultado es dos, se cree que el resultado es absolutamente dos. Este caso refleja la diferencia, no siempre tan clara, entre contar y medir.

Consideremos ahora otro rasgo de las magnitudes continuas: generalmente, al medirla varias veces, obtenemos una serie de números que no necesariamente son iguales, sin embargo, son muy parecidos. El grado de cercanía entre estos números se suele cuantificar utilizando la desviación estándar. ¿Qué tan separados pueden estar dos magnitudes para que se consideren que son la misma? Este criterio de igualdad o similaridad viene de un consenso de la comunidad científica particular. En algunas comunidades 1 % es demasiado, en otras un orden de magnitud es suficiente. Debido a la gran riqueza de

[3]Para poder afirmar completamente la imposibilidad de predecir fenómenos no repetibles, es necesario definir a qué nos referimos con “predecir”. Sin embargo, para toda noción razonable de predicción, vemos una gran dificultad en lograr esta tarea.

este punto en particular, invitamos al lector interesado a consultar [Kuh61] donde se trata el tema.

Siguiendo con las características de los experimentos, podemos observar algunas que pedimos a los experimentos para considerarlos válidos. Por ejemplo, que puedan ser descritos a cualquier persona con los conocimientos del campo al que pertenece el experiment [Mur87]. Los experimentos en general vienen acompañados de un discurso que explica su funcionamiento, es decir, el argumento que lleva a concluir que el resultado del experimento será el que se desea. Un caso de esto es el siguiente: al hablar del experimento de Stern-Gerlach hay toda una narrativa, que argumenta por qué la posición de los átomos de plata en la placa final está relacionada con el momento angular, aunque éste es un experimento clave en la Mecánica Cuántica, la narrativa está basada en la teoría cinética, el electromagnetismo, etc. La Mecánica Cuántica sólo aparece en la cuantización del momento angular. Los pares del experimentador deben aceptar el discurso que acompaña al experimento, los resultados que se obtienen y la relación entre estos últimos y los conceptos de la teoría. En este caso deben aceptar la relación entre la imagen que se observa al final del experimento y el momento angular.

También es una condición necesaria que otros experimentadores puedan realizar el experimento. No esperamos que los experimentos sean algo que sólo algunos elegidos puedan hacer. Es claro que algunos experimentadores tienen más habilidad que otros, pero esperamos idealmente que los experimentos se puedan repetir por cualquier experimentador, al tener una técnica experimental bien establecida. Incluso parece plausible pedir mucho más que esto: si no fueran las manos del experimentador habilidoso las que lleven directamente a cabo las acciones sino las de alguien más bajo su guía también se espera éxito en la tarea; no importando si las manos corresponden a un experto en Física experimental, un teórico, un panadero o un abogado.

Para lograr transmitir el procedimiento experimental, claramente se necesita establecer un lenguaje común entre interlocutores para ejecutar la tare [Mur87]; éste es imprescindible para comunicar las acciones que se deben realizar y lograr el arreglo experimental: poner ciertos objetos en lugares específicos, encender aparatos, llevar instrumentos, realizar preparativos, etc. Esto es un problema muy complicado. Tal vez el experimento requiera de alguna habilidad especial, como tornear, y el experimentador neófito no la tendrá. Sin embargo, parece razonable establecer una serie de acciones que sabemos sí puede realizar, como poner un objeto sobre la mesa, dado el objeto y la mesa. Si sabe leer y escribir, podremos pedir que realice el registro de datos, si puede girar una perilla y leer un indicador, podemos pedirle que ponga una fuente de voltaje a un valor dado, asumiendo que la fuente funcione, etc. Entre mayor sea este conjunto de acciones es posible realizar un mayor número de experimentos.

Ante la objeción de que instruirle a alguien que ponga un voltaje en un aparato dado es imposible si no sabe qué es el voltaje, no vemos problema si tal cuestión puede reducirse a girar una perilla u oprimir un botón hasta ver en el indicador el número deseado. Esta cuestión puede volverse más profunda: en los experimentos originales de Ohm para obtener la ley que lleva su nombre, él no contaba con el concepto de voltaje, el término que usó para describir su arreglo fue "spannung" traducido normalmente como tensión. Para él, esta tensión representaba una condición operativa en el laboratorio y no estaba ligada al concepto de trabajo por unidad de carga que fue establecida después debido a su simpleza y éxito predictivo. Este ejemplo nos revela cómo tenemos conceptos operativos experimentales que son ligados a entes teóricos; sin embargo, debe notarse que constituyen dos elementos distintos y claramente, en el caso ideal planteado de un neófito en Física experimental realizando un experimento, no es necesario el elemento teórico. Indiscutiblemente en la situación real el experimentador depende fuertemente de su conocimiento conceptual y habilidades relacionadas a la teoría física. Para excluir este tipo de situaciones nos limitaremos a hablar de situaciones experimentales bien definidas y establecidas, es decir, experimentos para los que una metodología bien caracterizada ya haya sido formulada.

Con la finalidad de establecer una imagen de los procesos que nos interesan pensemos en experimentadores ideales, sólo realizan procedimientos siguiendo las técnicas ya establecidas y que en principio no tienen por qué entender los conceptos más básicos de la Física. No hablamos de experimentadores reales intentado medir un fenómeno físico inusual o creando una nueva técnica experimental, hablamos de autómatas realizando experimentos. Tomaremos esta imagen para poder abordar, en el siguiente capítulo, un formalismo que represente las características antes mencionadas. En particular debemos mencionar que todos los discursos que acompañan a los experimentos y métodos experimentales se desarrollan en el lenguaje común, definir una acción como "pon eso sobre la mesa" en un lenguaje matemático es, desde cierta perspectiva, imposible. Debido a que el problema del lenguaje es increíblemente complicado, supera por mucho los alcances de este trabajo [4]. Cada acción se nombrará por signos que asumimos son entendidos inequívocamente por la comunidad. Esto será de gran relevancia en el formalismo.

1.4. Precisión e Incertidumbre

Dentro de la Física siempre se habla de propiedades como la longitud, la resistencia, la presión, etc. que son caracterizadas por números que le dan cantidad a esa propiedad. Un ejemplo de esto es asegurar que la longitud de una mesa es de 1m o el peso de una piedra 10kg. Cuando estas ideas se llevan a la experimentación y el terreno de las mediciones nos encontramos con un problema fundamental: es necesario introducir el concepto de incertidumbre y precisión.

Tan importantes son estos conceptos que encontramos enunciados como el siguiente:

> *La Física constituye un edificio científico coherente debido especialmente a que, mediante las diferentes definiciones operacionales, basadas en leyes distintas de una misma magnitud física, se obtienen, en cada caso, resultados aproximadamente iguales.* [CG68]

Si bien este enunciado contiene mucho más que una referencia a nuestro tema, "aproximadamente" nos revela un problema fundamental. Mientras que la relación de igualdad es absoluta, la anteriormente propuesta podría estar mal definida.

Para establecer un lenguaje claro definamos primero la incertidumbre: Si podemos aseverar que una magnitud tiene un valor dentro del intervalo $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ llamaremos a Δx la incertidumbre de la medición [Bai00].

[4] Para ver una descripción de un lenguaje de este tipo se puede consultar [Car66]

No debe pasar desapercibido que dentro de esta definición hay una suposición fundamental: existe un valor x único que es el valor de la magnitud. Es debido a esto que se le llama incertidumbre, pues es una medida de la no-certidumbre sobre cuál es el valor.

Notemos que la incertidumbre tiene las mismas unidades que la magnitud que acompaña y, en el caso común, esperamos se cumpla $\Delta x/x << 1$ si $x \neq 0$. Naturalmente, si podemos asegurar que el valor se encuentra en un intervalo, se sigue que está en cualquier otro intervalo que contenga al primero. Por tanto estamos interesados en el valor mínimo de incertidumbre.

La definición anterior tiene el problema de ser demasiado acotada si se quiere incluir a magnitudes que no tengan al continuo como representación matemática. De manera general podemos decir que, dado un conjunto matemático donde la variable toma valores, el conjunto de certidumbre de una medición, es el conjunto donde podemos aseverar que está el valor de una variable. Si este conjunto de valores tiene medida, podemos decir que la medida del conjunto de certidumbre es la incertidumbre de la medición[5].

Un ejemplo muy sencillo son las reglas escolares. La mayoría de ellas tienen su graduación más fina en milímetros. Una medición con una de éstas siempre tendría asociada, en el sentido estricto, una incertidumbre de al menos medio milímetro.

Otro sentido de error que es común encontrar en condiciones experimentales es el de precisión, ligado directamente con el concepto de repetibilidad. Cuando un experimentador toma distintas muestras de la misma magnitud en las mismas condiciones, es común asociar el valor promedio de la muestra a la cantidad y a la precisión la desviación estándar de la misma. Este procedimiento es bien conocido y usado por gran parte de la comunidad científica. Este procedimiento viene respaldado, en parte, por la teoría de los errores que permite, bajo hipótesis simples, asociar una distribución a los posibles valores que se obtendrán y justifica que el valor promedio de la distribución se identifique con el valor verdadero.

Para ejemplificar ambas aproximaciones, y mostrar claramente sus di-

[5]Para ser consistentes deberíamos decir "la mitad de la medida del conjunto de certidumbre es la incertidumbre de la medición", pues, en el caso común, el conjunto de certidumbre es $(x - \Delta x, x + \Delta x)$.

ferencias, pensemos en una barra a la que se le quiere medir la longitud. Tomaremos una regla para medirla, la pondremos a un lado de la barra, con el cero y un extremo de la barra coincidiendo y anotaremos los dos valores que acotan el otro extremo de la barra. El valor que obtenemos, aunque sólo tengamos una medición, tiene asociada un incertidumbre: la diferencia de los valores que acotan el extremo de la barra; normalmente se asocia a la mínima escala de la regla. Ahora supongamos que se toman toda una serie de mediciones con el mismo método, se calculan promedio y desviación estándar. De esta manera se obtendrán valores para la precisión.

Un caso extremo que nos permite ver claramente la diferencia es el siguiente: si todas las mediciones que realizamos se encuentran entre la marca de $25cm$ y la de $26cm$, la incertidumbre de cada medición es $0{,}5cm$, pero la desviación estándar, dado que asociamos a cada medición el valor $25{,}5 \pm 0{,}5cm$, es $0cm$.

Por otro lado, en el caso de la precisión, tenemos que el valor dependerá de la cantidad de veces que se repite el experimento; a mayor número de muestras el promedio se volverá más estable. Desde un sentido estricto vale la pena considerar que una medición individual y una serie de mediciones son dos experimentos distintos. En el primer caso la medición individual es el resultado del experimento; en el segundo, es el promedio de las mediciones.

El resultado de un experimento se piensa normalmente como un número, sin embargo este número es poco útil sin un valor de error asociado. En ese sentido, ya sea la incertidumbre o la precisión, el error convierte el resultado de una medición a un intervalo; que es el verdadero resultado de una medición.

De lo anterior se presenta una pregunta fundamental: ¿Por qué es necesaria la introducción del error? Para cualquier experimentador, es natural aceptar la imposibilidad de realizar mediciones con incertidumbre cero. Muchas veces se da una explicación en términos de condiciones experimentales imperfectas; es decir, que no se identifican plenamente con el objeto matemático que las representa, o simplemente se aceptan como parte del fenómeno[6]. Debido a que el error es general a todas la mediciones, parece

[6] El caso de la Mecánica Cuántica es digno de mención especial. Si bien en su versión original se hablaba de un principio de incertidumbre o indeterminación, en la formulación

que un formalismo sobre la medición debería dar cuenta de esta condición de manera independiente al tipo de medición que se trate.

1.5. Teoría de la Computación

Si bien esta disciplina no tiene una relación directa con las mediciones, este trabajo está basado en la teoría de la computación. Daremos aquí una breve mirada a esta teoría.

Esta teoría, en su origen, está dirigida a definir y estudiar aquellos procesos que llamamos algoritmos. Por ejemplo, el algoritmo de la división o de Euclides, representan procedimientos matemáticos que permiten realizar operaciones a través de una serie de instrucciones bien definidas. En el diccionario de la real academia se define el algoritmo como un "Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema."

El interés de este problema se incrementó sustancialmente a principios del siglo XX debido a la gran revolución en los fundamentos de las matemáticas. La búsqueda por mantener las matemáticas en una base de procedimientos de carácter finito o potencialmente infinito, volvió a la definición del concepto de algoritmo en un problema central. Las funciones recursivas fundaron gran parte de los trabajos en lógica matemática donde se necesitaba esta definición. El Teorema de Incompletitud de Gödel se fundó en esta noción, por ejemplo. Sin embargo, diferentes formalismos tuvieron mayor éxito en atacar otros problemas. Uno de los problemas más importantes, llamado la decibilidad del cálculo se resolvió por Alonzo Church utilizando su llamado cálculo Lambda [Chu36]. De entre estas propuestas de formalización, en muchos contextos se prefiere la de máquinas, debida a Alan Turing en 1936 [Tur37], pues tiene un lenguaje sencillo e intuitivo. Ésta será la que usemos aquí.

Los algoritmos son procedimientos que se pueden realizar de manera efectiva. Estos procedimientos están compuestos de distintos pasos u operaciones

moderna este ya no se refiere a incertidumbres sino a la desviación estándar de un conjunto de mediciones. Por otro lado recordemos que, para una sola cantidad, no hay límite teórico a la precisión con la que se la puede determinar, simplemente impondrá condiciones a la variable conjugada con la que cumpla la desigualdad del principio de indeterminación de Heisenberg.

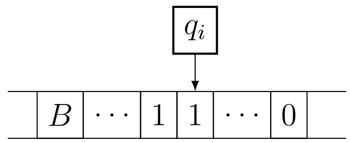

Figura 1.1: Representación de Máquina.

que se realizan de manera secuencial hasta alcanzar un resultado. La manera más fácil de entender estos procedimientos es a partir de nuestra relación con las computadoras, debido a esta tenemos una buena idea de sus posibilidades.

Las máquinas de Turing se imaginan como un dispositivo que permite realizar estas operaciones de la misma manera que una computadora [Dav53]. Éstas consisten en una cinta infinita, que tiene paralelo con la memoria de una computadora, en la que la máquina puede escribir, leer y borrar una serie de símbolos dentro de cierto alfabeto. Además habrá una serie de estados que representan el estado interno de la máquina; es decir, el estado de los transistores o los engranes, que componen a la máquina. En la figura 1.1 tenemos una representación esquemática de una máquina.

Este formalismo nos permite representar distintas operaciones matemáticas que aceptamos como algoritmos. Sumar números es claramente una operación algorítmica, sólo hay que seguir las reglas de la suma. Bien podría ser que los números que nos den a sumar sean tan grandes que la vida no nos alcanzara para sumarlos, pero esta abstracción de lo que un cálculo es no toma estas consideraciones en cuenta.

En analogía con las máquinas térmicas, las máquinas de Turing se presentan como sistemas irrealizables e ideales con poderes mayores a los de su contraparte realizable. Así como los límites de las máquinas de Carnot representan un límite para las posibilidades de las máquinas reales, los límites de las máquinas de Turing representan un límite para las máquinas de cálculo que tenemos en nuestra realidad.

Para acercarnos a este formalismo tratemos una máquina sencilla que nos permita entender la mecánica de su funcionamiento. Para representar de manera simple una máquina utilizaremos grafos [Min67]. Esta representación tan generosa en su lectura, es inadecuada para algunas máquinas, pero será suficiente para nuestros propósitos.

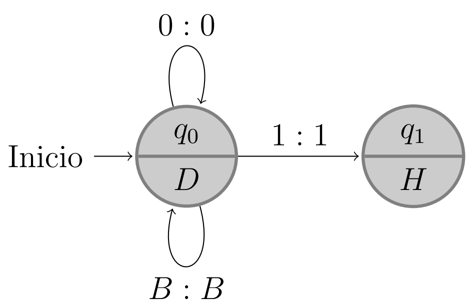

Figura 1.2: Máquina 1

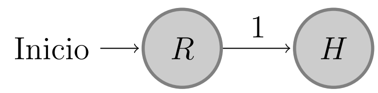

Figura 1.3: Simplificación

La máquina de la figura 1.2 se moverá cuadro por cuadro a la derecha hasta que encuentre un cuadro con un símbolo 1. La máquina inicia en el estado q_0, se mueve a la derecha (D), si encuentra un símbolo 0 lo sustituye por otro igual y regresa al estado q_0. Algo análogo pasa si encuentra un cuadro en blanco, denotado por B. Si se encuentra con el símbolo 1 pasará al estado q_1 donde terminará (H) su procedimiento. Las etiqueta del tipo $0 : 1$ significa que al leer el símbolo 0 se imprimirá el símbolo 1 para pasar al estado que señala la flecha.

Para aligerar esta representación tenemos la versión de la figura 1.3 donde se obvian algunas acciones. Si nos encontramos con un estado que no tiene señalado el comportamiento al leer un símbolo, significa que lo reimprimirá dejándolo igual y seguirá su camino. Debido a que no se usan directamente las etiquetas q_i tampoco se señalan. Finalmente si un estado lee un símbolo y lo reimprime para pasar a otro, no se señala la reimpresión.

Por ejemplo, tomemos una máquina que cuenta el número de unos sobre la cinta. Si tenemos una cinta como la de la figura 1.4 la máquina que se muestra en la figura 1.5 terminará con el número de unos en la cinta expresado en binario.

El procedimiento de nuestra máquina contadora seguirá el siguiente camino:

La máquina empezará en el cuadro señalado en la figura 1.4, se moverá un cuadro a la izquierda e imprimirá un cero, representando que la cuenta de unos empieza en cero. Después se moverá a la derecha del cuadro inicial y continuará hasta que el bloque de unos se termine. Volverá a la izquierda un

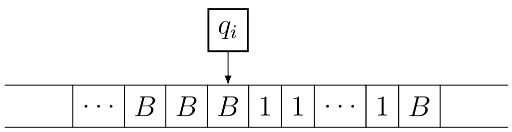

Figura 1.4: Cinta para contar.

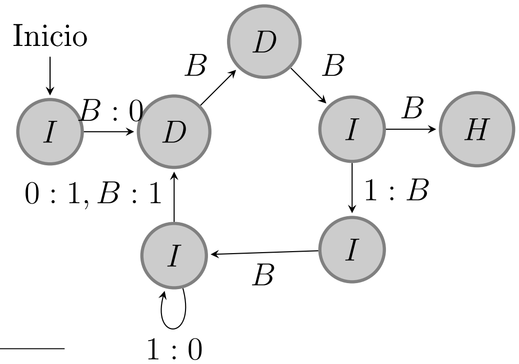

Figura 1.5: Contador

cuadro para situarse sobre el último 1 y sustituirlo por B. Continuará con un movimiento a la izquierda hasta llegar a la zona donde se lleva la cuenta, ahí le sumará uno a la cuenta de la siguiente manera:

- Si encuentra un 0 debe ser sustituido por 1 para finalizar.
- Si encuentra un 1 debe ser sustituido por 0 y pasar al cuadro de la izquierda.
- Si encuentra un B debe ser sustituido por 1 y para terminar.

Finalmente la máquina vuelve al cuadro inicial y repite el ciclo. Si la máquina no encuentra unos en su excursión a la derecha, se detendrá al volver.

Capítulo 2

Los Algoritmos y las Mediciones

En este capítulo introduciremos un formalismo matemático para describir los procedimientos experimentales.

2.1. Motivación desde la teoría de la medición

Como mencionamos, la teoría de la medición provee un marco formal para desarrollar las preguntas sobre las condiciones necesarias al establecer una escala de medición. En particular, la relación entre los procesos de combinación y de cálculo representan uno de los puntos más fuertes de la teoría. Recordemos que

$$g(a) \diamond g(b) = g(a \star b) \tag{2.1}$$

donde podemos ver a g como un homomorfismo, es la base para la asociación de números en una escala a objetos o sistemas físicos.

Si bien no se profundizó en el análisis de las posibilidades del operador diamante, hay una literatura extensa al respecto. La teoría de la medición moderna se dedica a este estudio [Luc+90].

En este punto queremos desviar nuestra atención del operador diamante al operador estrella. Este operador no está realmente en un espacio matemático[1] pues representa una operación en nuestras interacciones. Veremos cuáles son las condiciones que podemos pedir al objeto matemático que represente las operaciones en el laboratorio.

Para continuar, debemos hacer un paréntesis y anotar una característica más sobre el operador diamante que no se encuentra en la literatura: proponemos que el operador diamante debe ser una función computable dentro del dominio al que se aplica. La razón para solicitar tal condición es una simple: dado que se debe aplicar el operador diamante en algún momento para realizar la escala, es necesario garantizar que éste podrá ser aplicado efectivamente por el experimentador. Dado que nuestras posibilidades de cálculo están limitadas por la teoría de la computación, debemos solicitar que el operador diamante se encuentre dentro de estos límites. En los casos normales, el diamante se sustituye por operaciones aritméticas o combinaciones de ellas; claramente éstas son computables, pues hay un algoritmo que las calcula. En la práctica, las funciones no computables están lejos de usarse y por ello no es común exigir su computabilidad.

De la nueva hipótesis surgen una serie de consecuencias que no afectan en principio la idea general de la teoría de la medición. Sin ahondar en el tema, podemos ver que esto se debe a que la composición de operaciones computables es computable.

Si ya tenemos esta condición sobre las operaciones, parece natural exigirla a los demás actores de esta historia. Por ejemplo, podemos pedir que la función g sea computable para que podamos garantizar su aplicación efectiva; aunque no tendría sentido debido a que a y b no pertenecen realmente a un espacio matemático; estos símbolos representan objetos dados [2].

[1] Aunque claramente se puede enmarcar en uno.

[2] Debe quedar claro que a,b pueden siempre pertenecer a un espacio matemático o es posible construirlo en principio. A pesar de ello, no es de interés pues esta construcción relacionaría a los objetos con objetos matemáticos y la computabilidad dependería exclusivamente de la relación entre los objetos matemáticos y la operación g o el operador estrella. Esto dejaría fuera del estudio de la “computabilidad” a la relación entre los objetos y objetos matemáticos, o simplemente asumiría que esta relación es “aceptable” de alguna manera como de hecho lo hacen algunas formulaciones de la teoría algorítmica de la información. Si bien esta opción puede ser viable en el caso finito, en el caso infinito no es sostenible.

La otra posibilidad es exigir computabilidad al operador estrella, lo que parece natural debido a su relación con el operador diamante. De nuevo, debido a que no tenemos una definición de computabilidad para elementos en este espacio, no tenemos forma de imponer tal condición. Recordemos que la estrella representa los procesos de combinación y esperamos que cumplan con condiciones similares. ¿Podemos definir la noción de computabilidad en los procedimientos que combinan sistemas?

Las cuestiones anteriores no son de hecho únicas de las definiciones de escalas de medición. A un experimento normal, dentro de ciertos límites, se le piden las condiciones que ya hemos mencionado. Con esto en mente, e inclinados por distintos argumentos que sugieren la relación entre las formas de la teoría de la computación y la formalización que buscamos, se procederá con un discurso en completa analogía con el de Turing de 1936 [Tur37]. Nuestro objetivo es formalizar ese espíritu algorítmico que tienen las mediciones.

2.2. Motivación desde la práctica de las mediciones.

A diferencia de lo que pueda sugerir el término “máquina”, Turing no buscaba describir una máquina de cálculo o computadora con su formalismo; él buscó definir el término “calcular”. Dentro de las primeras líneas del trabajo de Turing [Tur37] vemos una sugerencia del discurso que siguió para llegar a su formalismo. Esta sugerencia ha sido comentada en diferentes textos, en particular en Davis [Dav53]. Su argumento comienza con un hombre que tendrá como tarea calcular. Este hombre no será común, pues, como lo único que puede hacer es calcular, no tendrá imaginación, ni creatividad, ni sueños, etc. Para poder realizar cálculos él sí tiene la capacidad de leer, escribir, borrar y, sobre todo, tomar decisiones sobre qué escribirá, leerá o borrará. Este hombre, condenado a calcular, tendrá también una cantidad inagotable de papel para llevar a cabo su tarea; debido a que no sabemos en principio cuánto papel necesitará para llevar a cabo el cálculo que se le pida. Las decisiones que toma están completamente determinadas por las condiciones a las que se enfrenta y en las que se encuentra.

Estas ideas se reflejan perfectamente en el modelo de Turing, un dispositivo con una cinta infinita donde puede escribir, leer y borrar. Este dispositivo es mecánico, es decir, sus decisiones se basan en el símbolo que ha leído y en su estado interno, análogo del "estado mental" de la persona, donde podría enmarcarse la memoria por ejemplo. Este punto tiene detrás algo fundamental que mencionamos antes, un cálculo es repetible, se espera que tenga siempre el mismo resultado.

Como ya se dijo, este formalismo debe parte de su fama a que es muy asequible en comparación con otras posibles representaciones de lo que un cálculo es. Debe ponerse mucho énfasis en que, si bien el formalismo de Turing es uno de muchos, todas las aproximaciones al problema mostraron ser equivalentes, de ahí que se hable de una teoría de la computación.

Siguiendo este camino, propongamos ahora una persona similar. De manera análoga, esta persona carecerá de capacidad creativa o decisiva; sus decisiones se verán determinadas por una serie de reglas basadas en las condiciones externas e internas. Mientras que en el caso anterior la persona sólo puede leer y escribir, aquí solicitamos un conjunto mucho más rico de acciones posibles y de lecturas posibles. Por ejemplo, si queremos medir el largo de una mesa será necesario que esta persona tenga la capacidad de tomar la regla, hacer coincidir su inicio con el inicio de la mesa, ponerla paralela al largo de ésta y leer los números que acotan el final de la mesa.

El formalismo de las máquinas incluye directamente una representación del papel; en nuestro caso no tenemos papel, las interacciones que realizará nuestro personaje podrían pensarse se encontrarán en el espacio o espacio-tiempo lo que llevaría a plantear que debemos expresar esas acciones en un espacio tridimensional o alguno semejante. Después de todo en discursos como la relatividad especial de Einstein, la posición de Bohr [Mur87] sobre la Mecánica Cuántica, etcétera, se señala que nuestras interacciones se reducen a cuestiones espaciales o espacio-temporales, que cualquier medición que se hace estará en última instancia dada por una coincidencia espacio temporal.

La aproximación dicha no es adecuada debido al peso que traería un objeto matemático como ese: ¿Cómo sabemos que el espacio está bien representado por R^3? Claramente no lo sabemos y tomar algún objeto matemático en particular impondría una condición física sobre este formalismo; mientras su objetivo no es indagar en el terreno de la Física, sino de las mediciones.

Además, como vimos en el desarrollo de algunas de las escalas, imponer esta condición sería imposible en el formalismo. En el caso de las esferas de Coulomb, el predicado tocar no es de la misma naturaleza que ver una aguja sobre una escala, como lo es en el caso de Ohm. La manera en la que se nos dan estos conceptos es distinta, resumir ambos a la coincidencia espacio-temporal viene de la construcción conceptual que ya tenemos del espacio y de la relación de los objetos con él. Por eso, debemos mantener el formalismo al margen de los conceptos físicos en la medida de lo posible.

Por otro lado tenemos un compromiso con la perdurabilidad de las acciones realizadas. Si una máquina escribe en la cinta, ésta quedará así hasta que la propia máquina cambie el símbolo. Si deseamos que nuestra representación use el espacio, habrá condiciones que, aunque se impongan en un momento, dejarán de cumplirse naturalmente. Por ejemplo, si ponemos una pelota en una mesa inclinada, ésta rodará y dejará de estar en el mismo lugar, si queremos representar la pelota usando el espacio, tendremos que seguir su trayectoria, esta descripción es la que la Física realiza. Esto se traduce en que el análogo a la cinta tendrá una dinámica propia dada claramente por las distintas ramas de la Física. Necesitamos entonces un objeto que describa las acciones realizadas, pero aquello que represente debe perdurar.

Para continuar con la formalización, proponemos una máquina normal con un alfabeto muy grande. Cada acción fundamental será representada por un símbolo del alfabeto. Estas acciones deberán atender a la condición de intersubjetividad; la comunidad correspondiente le debe dar un significado unívoco que se transfiera a las interacciones del laboratorio. Por ejemplo, si tenemos una pelota en una caja de cartón, podemos definir la acción "saque la pelota de la caja". Alguien podría tomar un cuchillo, hacerle un hoyo a la caja y sacar la pelota; esto nos llevaría a redefinir como "abra la caja, sin romperla, y saque la pelota". Pero esta cadena puede continuar llevándonos a definiciones más y más complicadas. Lo fundamental de esto es que por más complicada que sea una acción supondremos que tal acción se puede nombrar a través de un símbolo cualquiera.

La condición de intersubjetividad tiene unas implicaciones amplias. Es gracias a ésta que nos permitimos hablar de objetividad en una comunidad [Mur87]. Cuando, dentro de una comunidad de físicos, se habla sobre el voltaje no es necesario explicar a cada uno de ellos la naturaleza del mismo; se asume que es un conocimiento compartido y aceptado por los participantes. Estas acciones fundamentales, que puede realizar nuestro formalismo sobre la experimentación, cumplen con que la comunidad acepta que es posible realizarlas. Estas condiciones se imponen en el laboratorio a voluntad lo que corresponde con la noción de efectividad que deseamos expresar.

Ahora tenemos una máquina con un gran alfabeto, dentro de él habrá dos tipos de símbolos: los que corresponden a acciones básicas y los que sólo se usan como auxiliares o para cálculos. En lo que se refiere a la cinta, pensando en una cinta semi-infinita, dejaremos que el primer cuadro de la cinta sea especial: cuando se imprima un símbolo ahí, será equivalente a ejecutar la acción que el símbolo representa. El resto de la cinta no tendrá un significado especial. Este esquema no aumenta los poderes de cálculo de una máquina, incluso pasando de una cinta a un arreglo n-dimensional de cuadros tenemos el mismo poder de cálculo[3]. De esta manera, si para tomar una decisión en el proceder experimental es necesario realizar algún cálculo, el resto de la cinta permitirá funcionar a la máquina de manera normal para ejecutarlo.

Pasemos a la parte de la lectura. El formalismo no nos permite leer directamente salvo de la cinta. Tenemos ahora que introducir un elemento que permita el acceso de información a nuestro dispositivo. Esto ya ha sido estudiado desde el origen de la teoría de la computación y, dentro del formalismo de las máquinas, se traduce en el uso de un oráculo. Este objeto matemático permite a la máquina tomar una decisión basada en condiciones externas a ésta. La máquina tendrá la capacidad de preguntar si un número dado corresponde a un conjunto; basada en la respuesta, seguirá su cálculo.

De la misma manera que proponemos condiciones que se pueden imponer a voluntad, tendremos condiciones que se pueden verificar a voluntad. Éstas tienen que cumplir, de nuevo, con que la comunidad las acepte como condiciones válidas. Por ejemplo: “la pelota está en la mesa”, “la aguja apunta a

[3]Esto nos permite abordar otra propuesta de formalización. Actualmente las computadoras tienen la capacidad de imponer condiciones, como la posición de un motor, utilizando registros especiales. Esto se puede representar como cuadros especiales en la cinta de la máquina. Debido a que esta extensión de la cinta no aumenta los poderes de cálculo, esta propuesta es equivalente a la nuestra.

un número menor a cinco", etc. Estas condiciones también pueden tener una especificación muy compleja, pero sólo pedimos que puedan ser representadas por un número.

Las condiciones verificables tendrán una respuesta binaria. Esto no limita el que la respuesta sea un número u otro objeto matemático; siempre es posible tomar el resultado numérico y usando un orden, natural o arbitrario, hacer preguntas binarias hasta obtener el valor deseado. Usando este mecanismo es posible llevar valores a la cinta, hacer cálculos con ellos, etc.

2.3. Formalismo matemático.

Con las condiciones anteriores podemos construir un formalismo de máquinas de Turing con oráculo. Para la definición formal tendremos:

- Un alfabeto finito con dos tipos de símbolos, los que representan símbolos de acciones, s_i, y los que no tienen significado, S_j. Dentro de los símbolos sin significado tendremos dos elementos especiales: S_0 representando al símbolo nulo, que es el análogo al espacio blanco; el símbolo S_1 lo utilizará el oráculo para comunicarse con la máquina.
- Un conjunto finito de posibles estados q_i
- Un par de símbolos referentes a los movimientos de la máquina, izquierda L y derecha R.
- Un conjunto A de números naturales.

Siguiendo a [Dav53], definiremos a una máquina de Turing por las instrucciones que sigue: Una máquina es un conjunto finito de expresiones de las formas

1. $q_i S_j S_k q_l$
2. $q_i S_j R q_l$
3. $q_i S_j L q_l$

4. $q_i S_j q_k q_l$

El primer tipo representa que la máquina en el estado q_i, que lee el símbolo S_j, imprimirá S_k y se pondrá en el estado q_l. En el segundo caso la máquina en el estado q_i que lee el símbolo S_j se moverá a la derecha y se pondrá en el estado q_l. El tercer caso es análogo al segundo, pero moviéndose a la izquierda. El último caso se refiere a máquinas con oráculo representado por el conjunto A. Si la máquina está en el estado q_i y lee el símbolo S_j pasará al estado q_k si el número de apariciones del símbolo S_1 en la cinta pertenece a A; pasará al estado q_l en caso contrario.

Este formalismo de máquinas de Turing con oráculo será el que se use para representar mediciones.

De este formalismo se siguen diversos teoremas básicos, como que la composición de máquinas de Turing también es una máquina de Turing. Por motivos de brevedad no desarrollaremos esto, pero al lector interesado le recomendamos consultar [Dav53] o [Min67].

Otra punto que debe aclararse es respecto a los símbolos. Es común añadir o quitar símbolos a una máquina como vía para demostrar teoremas. Un resultado importante es que las máquinas conservan su poder de cálculo aunque pierdan o se agreguen símbolos[4]. En nuestro caso, debido a que los símbolos tienen un significado especial, no podemos sustituir un símbolo por otro directamente. Cambiar un símbolo equivale a cambiar completamente a la máquina. Sin embargo hay forma de cambiar ligeramente la propuesta para permitir esto. Si tenemos una máquina con muchos símbolos y queremos pasar a un alfabeto binario[5], podemos reservar no sólo el primer cuadro de la cinta como elemento especial. Tomando cierto número de cuadros[6] y designándolos como especiales, es posible escribir las órdenes utilizando un lenguaje binario.

Esta cuestión nos invita a pensar en la dependencia entre acciones; es decir, qué símbolos se pueden reducir a otros e incluso qué símbolos son incompatibles. Por ejemplo, "ponga la pelota dentro de la caja" y "ponga la

[4]Siempre que tengan al menos dos símbolos

[5]Nótese que con alfabeto binario nos referimos a uno que tiene en realidad tres símbolos, el nulo, '1' y '0'.

[6]Si el número de símbolos con significado es n, necesitamos el entero inmediato mayor a $log_2(n)$.

pelota fuera de la caja". Estos símbolos incompatibles tienen gran importancia, por ejemplo, Bohr descansa parte de su argumento de indeterminación posición-momento en este concepto de incompatibilidad [Mur87].

Los órdenes en el conjunto de símbolos que se pueden generar, dependen completamente del criterio que se use. Una opción que es que un símbolo pueda ser sustituido por otro en cualquier aparición, o que se pueda sustituir por la ejecución de otra máquina.

En realidad, debido a estos símbolos incompatibles, tenemos problemas con algunas máquinas. Podemos tener una serie de instrucciones como: "saque la pelota de la caja", "destruya la pelota" y "meta la pelota en la caja". Esto nos demuestra que un conjunto de instrucciones bien fundado no tiene por qué dar lugar a un experimento.

Uno de los punto más fundamentales de la teoría de la computación es la hipótesis Church-Turing. Ésta establece que para todo algoritmo, en el sentido coloquial, habrá una máquina de Turing que lo representa. En nuestro caso, debido a lo explicado anteriormente, no habrá tal cuestión, aunque sí englobaremos la descripción formal de los experimentos dentro de las máquinas de Turing con oráculo. Por tanto establecemos que: Dado un experimento, hay una máquina de Turing con oráculo que lo representa.

Con este formalismo básico podemos demostrar algunos resultados estándar que son consecuencia directa de las propiedades básicas de las máquinas con oráculo, como que la composición de procedimientos es también procedimiento, si realizamos un par de procedimientos y hacemos un tercero con esos resultados, también será procedimiento y demás teoremas que se pueden encontrar en [Dav53] u otro texto de teoría de la computación que cubra el tema de máquinas con oráculo.

2.4. Universalidad

Dentro de la teoría de la computación, la universalidad representa la habilidad de una máquina para reproducir los cálculos de otras. Con este concepto podemos hacer contacto con la intuición de las computadoras y demás dispositivos con los que estamos familiarizados. A este tipo de máquina se le puede subministrar una entrada que determinará a cuál máquina imitarán.

Es decir:

$$U(x_M, a, b, ...) = M(a, b, ...)$$

donde la función que nos permite calcular x_M dado M es computable. De nuevo por brevedad no se pondrá explícitamente una máquina universal, pero se invita al lector a consultar [Dav53; Min67].

Anteriormente se pidió que los experimentos puedan ser realizados por cualquier persona en condiciones ideales. Dadas unas posibilidades experimentales, lo que equivale a un alfabeto y un conjunto, el experimentador debe ser capaz de realizar todos los experimentos que se le indiquen. En ese sentido, parece natural la existencia de una máquina universal dentro del formalismo.

Con una máquina de este tipo podemos hacer contacto con la Teoría de la Información Algorítmica de manera muy directa. Dadas unas posibilidades experimentales, sea U una máquina universal. Decimos que la cantidad de información de un experimento M es el mínimo número de símbolos que necesita U como entrada para imitar a M. En símbolos:

$$I(M) = min\{|m||U(m) = M\}$$

donde $|m|$ significa el número de símbolos de la expresión m.

Capítulo 3

Ejemplos

Debido al análisis que queremos hacer de los distintos procesos de medición; en este capítulo mostramos los métodos de medición de algunas cantidades fundamentales en la Física. Naturalmente no mostraremos la historia de cada uno de los conceptos debido a su gran extensión y complejidad. Sin embargo, expondremos algunos de los puntos más significativos en la historia cercana a su creación.

3.1. El experimento de Coulomb

En el año de 1785 Charles Augustin de Coulomb, científico francés, publicó sus memorias sobre la electricidad y el magnetismo [Cou85], dentro de ellas estaba su famosa ley para la fuerza entre dos partículas cargadas. Esta ley fue comprobada empíricamente, normalmente la escribimos como:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Tenemos tres elementos a medir en esta ley: la fuerza, la distancia y la carga. Si queremos comprobar esto, esperamos un experimento donde se mida la fuerza entre dos cuerpos, se mida la carga de cada uno y la distancia entre ellos. Coulomb es recordado por los avances que realizó en la balanza de torsión; aparato para medir fuerzas con excelente precisión. Aceptaremos que tenía la posibilidad de medir distancias fácilmente, pero ¿cómo logró medir la carga de los cuerpos?

La respuesta no es simple. La carga, a diferencia de la distancia, no tiene un vínculo tan directo con nuestros sentidos; con mirar un par de objetos no podemos decir si uno está más cargado que el otro, aunque tal vez sí podemos inferirlo de su comportamiento dinámico. Un posible criterio, para determinar si un cuerpo está más cargado que otro, podría establecerse en base a la cantidad de trocitos de papel que puede atraer o desde qué tan lejos puede atraerlos. Otro en base a la descarga o el dolor que nos hace sentir, aunque comparar dolores no es una tarea simple. Aún cuando tengamos tal criterio, ¿cómo saber si un objeto está el "doble" de cargado que otro? ¿si atrae el doble de papelitos?, ¿ si me hace sentir el doble de dolor la descarga, significa que el objeto estaba el doble de cargado?, ¿qué significa que una acción duela el "doble" que otra?

De lo anterior vemos que para establecer el sistema de mediciones, se necesitan las condiciones planteadas anteriormente en el contexto de la teoría de la medición.

Tenemos que responder una pregunta: ¿Cómo logró él medir la carga? Coulomb medía las fuerzas entre pequeñas esferas metálicas, su procedimiento consistía en cargar eléctricamente una esfera, y tocar ambas. Él asumía que al tocarlas la carga se repartiría uniformemente entre ambas[1]. Esa hipótesis extra, o incluso *ad hoc*, es la que permitió la medición de la carga. Así las cargas en las esferas serían iguales y también se podía establecer divisiones de un patrón inicial permitiendo verificar la ley para cada submúltiplo de la carga original. Así es como Coulomb midió la carga [Kei99].

En vista de lo anterior parece válida una mirada crítica a los fundamentos del electromagnetismo. La ley de Coulomb es uno de los ingredientes más básicos de esta teoría, ¿no debería preocuparnos que su verificación experimental requiera de asumir a los metales como conductores? Aún cuando esta ley sea sustituida por otra, cualquier ley que refiera a la carga necesitará un método de medición de la carga y seguirá siendo válida la pregunta.

Además de lo anterior, uno de los elementos más básicos del experimento es la repetibilidad por lo que vale la pena preguntar: ¿es repetible el experi-

[1] Se debe tener en cuenta que en ese momento ya se tenía la idea de la electricidad como un fluido y los metales como un material a través del cual fluía fácilmente [Sim12].

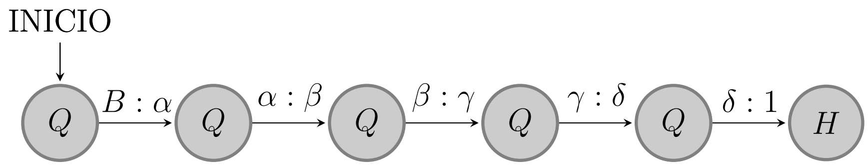

Figura 3.1: Algoritmo que corresponde a la preparación de dos pelotas con carga igual según la hipótesis de Coulomb.

mento de Coulomb? Este experimento tan fundamental para el desarrollo de la teoría eléctrica tiene una historia muy particular. Durante su época no fue aceptado sin reservas por la comunidad, incluso hace pocos años se afirmó que Coulomb no dedujo su ley de los datos que había obtenido [Hee92]. En esta referencia intentan repetir el experimento de Coulomb imitando las mismas condiciones que él tuvo en el siglo XVIII. Concluyen que tal experimento es difícil de repetir y, dada la tecnología a la que Coulomb tenía acceso, parece plausible que su ley fue obtenida de otras consideraciones teóricas y no de los datos experimentales. Probablemente la gran aceptación que obtuvo se debía al prestigio del que Coulomb gozaba. Este tipo de historias no son raras en el entrono científico, en particular en momentos importantes en la historia de la ciencia.

Ahora apliquemos el formalismo desarrollado al ejemplo de la preparación de las cargas. Primero definamos el alfabeto a usar:

- B: Símbolo llano (Símbolo nulo o blanco).
- 1: Símbolo llano.
- α: Tome pelota A.
- β: Cargue pelota A.
- γ: Tome pelota B.
- δ: Toque pelotas A y B entre sí.
- H: Final.

En la figura 3.1 tenemos la representación de la máquina que representa el procedimiento de preparación de cargas de Coulomb, nótese que no tenemos llamadas al oráculo. Por la manera que está formulado la máquina parece muy lineal; sólo lleva a cabo la serie de pasos que en principio no contienen ninguna medición. Esta representación esquemática correspondería a un "nivel de lenguaje muy alto". Pensemos en una descripción más detallada; por ejemplo, tomemos el símbolo δ. Para lograr que las pelotas se toquen, dado que en pasos anteriores ya las tenemos tomadas, debemos de ser capaces de acercarlas. Supongamos que ambas están tomadas por artefactos que nos permiten controlar su posición y, para saber que ya se están tocando, cuentan con un sensor de fuerza cada uno. Entonces el alfabeto en esta máquina es :

- B,0,1: Símbolos llanos.
- α: Consultar valor de posición A.
- β: Consultar valor de posición B.
- γ: Calcular el signo de la resta de las posiciones.
- δ: Incrementar posicionador A.
- ϵ: Decrementar posicionador A.
- ζ: Toma la respuesta binaria del sensor de presión.
- H: Final.

La descripción está en la figura 3.2, ahí vemos que la máquina comienza obteniendo la posición de ambos posicionadores y encontrando el signo de la resta para saber en qué dirección debe avanzar el posicionador A para coincidir con el B. Ordenará un avance en la dirección que hará a ambos coincidir hasta que el sensor de presión, que interpretamos como la coincidencia y contacto de las pelotas, se active.

De nuevo esta descripción puede ser refinada, tomemos la captura de datos del oráculo que tenemos en la figura 3.3. En esta implementación tenemos que la máquina imprimirá tantos símbolos '1' como el oráculo le instruya. Incluso puede comunicarle distintos argumentos que están separados por un

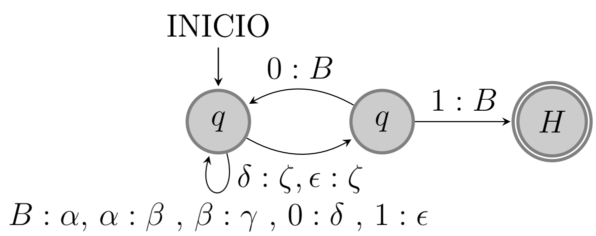

Figura 3.2: Máquina para la efectuar la acción de “tocar” entre las esferas metálicas.

marcador ‘M’. La función del oráculo está justo en el primer nodo que tiene dos posibles comportamientos para el símbolo ‘B’, el oráculo le indicará cual seguir. Al final de su tarea la cabeza de la máquina volverá a su casilla inicial. La cinta tendrá los dos argumentos, en este caso cantidades, que necesita para el siguiente paso del procedimiento.

Ahora la máquina debe averiguar en qué dirección debe avanzar el posicionador A. El procedimiento necesario es sólo un cálculo normal, representado en la figura 3.4, tiene dos nodos de salida que dependen de si se debe tomar un incremento o decremento en el siguiente paso del algoritmo.

Con la exposición de estas máquinas queremos mostrar como un algoritmo muy esquemático, como el de la figura 3.1, puede revisarse y explicarse detalladamente en cada una de sus piezas. Gran parte de la forma del algoritmo dependerá de las condiciones experimentales que tengamos a nuestra mano.

3.2. La temperatura: Joseph Black

La percepción de caliente y frío tiene raíces muy profundas en nuestra forma de relacionarnos con el mundo. Su cuantificación moderna, que es la que nos interesa, surge con la invención del termómetro. Un aparato, con una propiedad medible, que tiene relación única con los conceptos frío y caliente.

La relación más inmediata que se observa en muchos objetos con los cambios de temperatura es el cambio de volumen; los termómetros galileanos estaban basados en este principio. Basados normalmente en fluidos, éstos fueron los más usados en los principios de la termometría [Cha04; Con57].

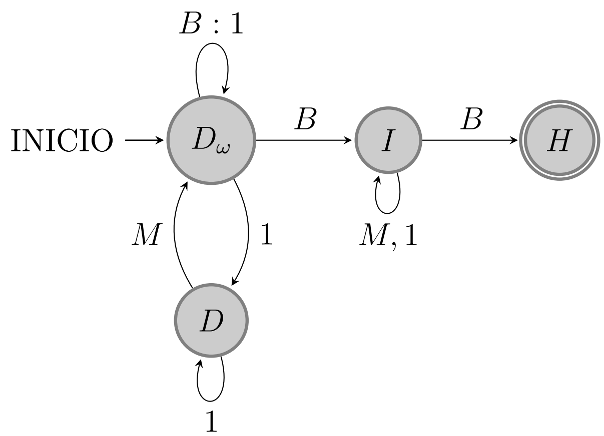

Figura 3.3: Máquina para colocar los valores dictados por el oráculo en la cinta. Éste permite la introducción de varios argumentos como cadenas del símbolo '1', cada cadena está separada por el marcador 'M'. Nótese que en el estado inicial tenemos dos condiciones de respuesta para el espacio blanco, se utiliza una u otra dependiendo de la respuesta del oráculo.

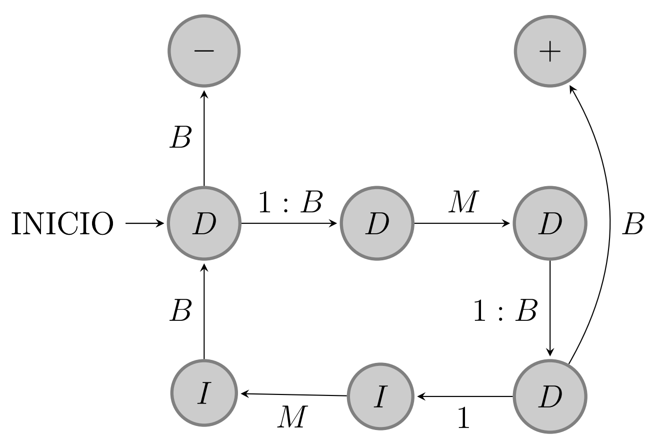

Figura 3.4: Máquina para decidir la dirección que debe tomar el posicionador.

Pensemos en un diseño simple con una columna muy delgada donde se le permite al fluido expandirse. La longitud de la columna alcanzada se considera la medida de la temperatura. Esto es similar al termómetro de mercurio moderno.

Pronto fue claro que aún el mismo aparato usado como termómetro, pero con distinto fluido daba como resultado distintas alturas, y como consecuencia distintas escalas de temperatura [Cha04; Sim12].

Lo anterior nos deja con el problema de escoger una sustancia de referencia; es decir, una sustancia privilegiada respecto de la cual compararemos las otras y definiremos la escala de temperatura. Nótese que aunque definamos la escala usando una sustancia, no significa que otra no pueda usarse para construir un termómetro. Sólo significa que ese no tendrá, en general, las marcas de los grados igualmente espaciadas; esto debido a que no necesariamente habrá una relación de linealidad entre las expansiones de ambos líquidos en equilibro.

En aquella época, los conceptos que usamos actualmente para describir estos fenómenos, no estaban bien definidos. La diferencia clara entre temperatura y calor, o la "cantidad de calor" y la "intensidad de calor", no se tuvo hasta la existencia de termómetros, aún éstos con escalas no bien definidas.

Alrededor de 1760, Joseph Black, científico escocés, utilizó un método fundamental para establecer la escala. Este método equivale a la hipótesis que realizó en su momento Coulomb. Un buen termómetro cumplirá con lo siguiente: Si se tienen dos cantidades iguales de agua, una con una columna en el termómetro con longitud a y la otra con longitud b, la mezcla de las medidas de agua logrará una columna de longitud $\frac{a+b}{2}$ [Cha04; Din70].

Naturalmente este método se puede extender a otros casos, si se combinan siete partes de agua, con una temperatura, y tres con otra; el resultado de la medición debe ser $\frac{7a+3b}{10}$.

Utilizando esta hipótesis, que definirá el concepto de temperatura, se tuvo la capacidad de distinguir qué sustancias permitían una mejor medición de temperatura. Esta ardua tarea fue llevada a cabo por André De Luc, contemporáneo de Black y oriundo de Ginebra. Él concluyó que el termómetro de mercurio era el fluido que mejor cumplía la hipótesis.

Al igual que el ejemplo anterior tenemos una secuencia de pasos, dados

dos recipientes iguales volúmenes de agua:

- Mida la columna del termómetro en el recipiente A.
- Mida la columna del termómetro en el recipiente B.
- Mezcle ambas cantidades de agua en el recipiente C.
- Mida la columna del termómetro en el recipiente C.
- Calcule el promedio de las columnas.
- Verifique que coincidan en un $n\,\%$.

Este procedimiento es una máquina muy monótona como las que hemos visto antes; sólo consiste en una lista de pasos lineal. Pensemos que estamos en el paso en el que hacemos la mezcla. En vez medir inmediatamente con el termómetro, permitimos que el tiempo pase, no estamos violando ninguna regla, sigue siendo una ejecución válida del algoritmo. Claramente esto llevará a que el experimento no se logre como deseamos. Para imponer restricciones de tiempo se deben cambiar los símbolos y tener una referencia. Por ejemplo:

- Inicie cronómetro.
- Mida la columna del termómetro en el recipiente A antes de 1min.
- Mida la columna del termómetro en el recipiente B antes de 2min.
- Mezcle ambas cantidades de agua en el recipiente C antes de ...

y así sucesivamente, esto debe reevaluarse para determinar si es experimentalmente posible la realización de las acciones en el tiempo dado.

Escribamos con más detalle la acción que se realiza cuando medimos la columna. Supongamos una regla dividida en milímetros, por ejemplo. Un algoritmo muy sencillo, pero muy poco eficiente sería ir avanzando milímetro por milímetro preguntando si el valor de la columna es menor.

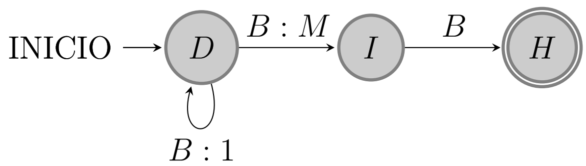

Figura 3.5: Máquina para la medición de la longitud, avanza en la mínima escala de la regla y pregunta una por una si la magnitud es menor que el valor de la cuenta.

3.3. Pierre Bouguer: La intensidad luminosa

Los primeros intentos de cuantificar la intensidad luminosa se remontan a Huygens. Para determinar la intensidad relativa entre astros y el Sol, él ideó un aparato óptico que consistía en un tubo cuya apertura era variable. Su método consistía en mirar la intensidad de una estrella durante la noche, ya de día miraba al Sol con su aparato y buscaba una apertura que le permitiera igualar la intensidad de la estrella [Che05]. Esta primera aproximación tiene muchas fallas desde la visión moderna ya sumergida en el discurso de la óptica.

Pierre Bouguer, nacido en Francia, matemático, físico, geólogo, astrónomo e ingeniero naval; empezó a establecer mediciones de intensidad basado en un principio fundamental del que carecía la aproximación de Huygens: las comparaciones de intensidad deben realizarse al mismo tiempo. Basado en ello, Bouguer desarrolló una técnica experimental que le permitiría establecer mediciones de intensidad. A continuación describiremos esta técnica.

Nótese que todas las mediciones serán, en última instancia, realizadas por el ojo humano. Se pedirá al experimentador que realice una comparación: un par de zonas estarán iluminadas en igual magnitud, la primera más que la segunda o viceversa.

Como primer paso para validar la medición, Bouguer, revisa la precisión que tiene el ojo humano, para ello toma dos velas, iguales en todo aspecto controlable y las pone delante de una pantalla. Entre éstas y la pantalla pone un objeto opaco de manera que se proyecten dos sombras en la pantalla, cada una debida a una vela. Se aleja una de las velas hasta que su sombra ya no sea distinguible y se compara la distancia entre las velas para calcular el límite del ojo al distinguir superficies con distinta intensidad. Como resultado de esta experiencia se tiene que la sombra deja de distinguirse cuando, dado que la vela cercana está a un pie de distancia, la vela lejana está alrededor de ocho pies de distancia [Che05]

¿Cómo calculamos el poder de resolución del ojo? Basado en la óptica geométrica tenemos que la intensidad de las velas caerá como el cuadrado de la distancia a la pantalla. Por tanto, si la razón de resolución es de 1:8, tenemos que el error máximo que tendrá una comparación del ojo será de 1/64 en intensidad, lo que equivale al 1,5 %.

Otros experimentos basados en esto consisten en un par de velas a cierta distancia de papeles usados como pantallas y separados por una barrera que impide el paso de la luz. Este sencillo arreglo permite, usando la relación de la intensidad con el cuadrado de la distancias, comparar la brillantez de dos velas.

Esta línea de razonamiento demuestra la genialidad de Bouguer. Su técnica para establecer la intensidad está fundada en bases sólidas y bien articuladas que le permiten llegar a un método robusto. Si bien no se lograron resultados muy exactos, comparados con mediciones actuales, en las mediciones originales de Bouguer; esta técnica, con este discurso tan hábil y fundamentado, se estableció con éxito para la medición de intensidades luminosas.

Sin ninguna intención por quitar valor al desarrollo anterior, notemos los puntos fundamentales al igual que en la historia de las otras cantidades. La hipótesis *ad hoc* que le permite a Bouguer definir su técnica experimental es parte del discurso de la óptica geométrica; es necesario asumir que la intensidad caerá con el cuadrado de la distancia para poder hacer el cálculo del poder de resolución y la comparación. De nuevo vemos que la hipótesis extra nos permite traducir la medición a una de posiciones dado que podemos tener un criterio de comparación entre las intensidades.

En el caso del segundo fotómetro se podría pensar en probar la ley de inverso del cuadrado al tener tres velas iguales, poner dos de un lado del fotómetro y una del otro. Se asumiría que hay el doble de intensidad de un lado que del otro. Naturalmente esto tendría problemas, por ejemplo, la superficie debe ser perpendicular a la vela para que el término coseno no afecte la intensidad y dependiendo de la distancia entre velas y la distancia a la pantalla esto podría ser un problema.

De nuevo nos encontramos con al menos una hipótesis que influye la construcción de la técnica experimental que nos permite medir una magnitud. Naturalmente otra hipótesis nos llevaría a distintos sistemas de medición que, naturalmente, difieren de éste. Por ejemplo, Celsius, como el mismo Bouguer menciona, bajo otro criterio más relacionado con la "definición" (de imagen) de un objeto bajo una fuente luminosa, menciona que un objeto el doble de lejos que otro, pero con el mismo grado de "definición", tendría que estar iluminado por una fuente 256 veces más fuerte. Lo anterior equivale a la octava potencia de la distancia. Esta hipótesis podría llevarnos a una escala distinta que, en este caso, estaría relacionada con la de Bouguer por una potencia cuarta.

La técnica anterior también es abordada y analizada por Bouguer en su texto; se dan razones claras y contundentes de por qué no es viable para la medición de la intensidad. Veamos:

> *As we are considering only the amount of light or its brightness, it does not matter whether the observer has long or short sight, good sight or bad. If the rays cross before having reached the retina or if they come together farther back, nevertheless they act on the back of the eye. There is nothing lost, and the total effect is always the same as regards the intensity of the impression [Che05]*

Bouguer reconoce claramente los problemas experimentales que presenta esta aproximación. Sin embargo, notamos cómo los argumentos expuestos están enmarcados dentro del discurso de la óptica geométrica. En ese sentido parece que, debido a los avances que se tenían en esa área, una construcción o discurso experimental como el que propone Celsius no es sostenible. Recordemos que los trabajos en fotometría de Bouguer pertenecen a la primera mitad del siglo XVIII, para el momento la óptica geométrica está bien establecida; aún cuando estas ideas tienen una raíz muy profunda en la historia; parece suficiente mencionar que Galileo construyó su telescopio refractor alrededor de 1609.

3.4. El experimento de Ohm

La ley de Ohm es fundamental para la electrónica, base generadora de toda la tecnología actual. Ésta propone que, para alambres metálicos, la corriente que los atraviesa es proporcional a la diferencia de voltaje entre sus extremos. De nuevo preguntémonos sobre la naturaleza de las observables involucradas. En este caso tenemos sólo dos observables: el voltaje y la corriente. Estos observables son claramente más difíciles de medir que en el caso anterior, pues ninguno tiene experiencia sensorial inmediata.

Empecemos por la corriente. Ohm comenzó sus investigaciones sobre la conducción de los metales en 1825, tiempo en el que conceptos como carga, corriente, voltaje, etc. no estaban bien definidos o estandarizados en la comunidad científica. Para entonces ya había trabajos que buscaban medir o cuantificar fenómenos que se relacionaban con la corriente, Hans Christian Oersted es uno de los científicos más renombrados por esto y sus investigaciones sobre la relación electricidad-magnetismo datan de 1820; pero estudios mucho más cuantitativos como los de Andre Marie Ampère, de los que se desprendería la ley de Ampère, se publicaron hasta 1826 [Kei99; Sim12]. Ohm, basado en los trabajos de Coulomb, utilizó una balanza de torsión para medir la corriente. De la balanza colgaba una aguja magnetizada que se localizaba por encima de un alambre por el que pasaba la corriente. Midiendo el ángulo de desviación en la balanza, que era una medida de la fuerza, se medía la corriente [Ohm27].

Esto aún no responde cómo se medía la corriente. La medición directa que se realizaba era del ángulo de desviación pero aún falta la ecuación que relaciona la desviación con la corriente para poder medir la corriente. Esta relación tendría que ser establecida por separado: medir corriente y desviación por separado para poder encontrar la ecuación que las relaciona. Ohm no realizó tal experiencia, sino asumió directamente que la fuerza sobre la aguja era directamente proporcional a la corriente que pasaba por el alambre [Kei99].

Al igual que en el experimento de Coulomb, nos encontramos con una hipótesis sin justificar que es fundamental para el desarrollo[2]. Sin embargo

[2]Es de hecho posible pensar en un experimento que justifique a la corriente como carga

debe quedar claro que aún el concepto de corriente, como lo conocemos hoy día, el movimiento de una carga; no estaba bien definido. Este tipo de eventos van dando forma al concepto cuantitativo.

El otro agente en esta medición es el voltaje. Al igual que con la corriente, el voltaje como diferencia de energía potencial por unidad de carga no se encontraba establecido. La "fuente de voltaje" que usaba Ohm era una pila de Volta, recién inventada por Volta en 1800, invento que dio un giro completo a las posibilidades experimentales de la época. En realidad la propuesta original de Ohm no se establece para varios voltajes, de hecho, no establece voltajes, Ohm expresaba sus resultados en términos de *spannung*. Antes de pasar a la relación entre *spannung* y voltaje hablemos de la conclusión de la historia de Ohm. Los primeros resultados de Ohm, erróneos, fueron mejorados por la introducción de otra fuente de poder, el efecto Seebeck. Mientras que las celdas de Volta, desde el punto de vista moderno, no tenían un voltaje constante, una juntura de Seebeck o termopar sí le daba a Ohm una fuente constante de voltaje que le permitía realizar sus mediciones. En realidad Ohm no podía establecer magnitudes de voltaje a voluntad, lo único que podía hacer era cambiar la diferencia de temperaturas del termopar y notar que entre mayor era la diferencia, mayor el efecto medido. De nuevo encontramos que él no contaba con la relación entre tensión y temperatura, aunque sí con un método para medir la temperatura y una escala: los grados Reamur, así que la necesidad de asumir otra relación de linealidad se hizo presente, aunque de manera muy distinta.

Ohm estableció una ecuación para describir su segundo experimento:

$$X = \frac{a}{b + x} \tag{3.1}$$

donde X es la fuerza de flexión en la balanza de torsión, asumida proporcional a la corriente como se mencionó antes, x es la longitud del alambre que es medido y tanto a como b son constantes. Probando distintas diferencias de temperatura para el termopar, Ohm notó que la constante b no cambiaba y concluyó que se debía al aparato. Por otro lado a sí cambiaba con la diferencia

en movimiento, si esferas metálicas cargadas se hacen girar en un disco de corcho, para aislarlas; y en el centro se pone una aguja magnetizada se podrá justificar la proporcionalidad asumida por Ohm.

de temperatura y por tanto ese término lo atribuyó a la fuerza que impulsaba a la corriente, independiente del resto del arreglo experimental.

Desde la perspectiva actual, vemos la estructura moderna de la ley de Ohm:

$$I = \frac{V}{R_{aparato} + R_{alambre}} \tag{3.2}$$

de donde se concluiría que la resistencia de un alambre es proporcional a su longitud. De hecho ésta es su conclusión principal.

Ya hemos visto cómo se llegó a asociar una magnitud al término de corriente usando una hipótesis extra de linealidad entre fuerza y corriente. El caso del voltaje es más complicado, esta vez no debido a que no esté justificada la relación entre diferencia de temperatura y la constante a, sino porque el voltaje es un concepto más complicado, su definición de energía potencial por unidad de carga, nos deja ver que hereda de la concepción de trabajo y no hay una relación justificada entre éste y la constante a.

De hecho Ohm no se refería al voltaje con ese término, sino como el "modo de separación de electricidad". En la era de Ohm la "diferencia de potencial" no existía como concepto y no se verificó esta relación empíricamente; pues para ello se hubiera necesitado tomar un cuerpo cargado, con carga conocida, medir el trabajo, es decir la fuerza y desplazamiento, al pasarlo de un conductor a otro y después establecer una relación entre el voltaje calculado y la corriente, lo cual estaba fuera de las posibilidades técnicas de la época; recordemos que obtener una fuente de voltaje constante era complicado, es de hecho el termopar y su estabilidad lo que permite a Ohm obtener sus resultados.

¿Cómo es que se le asoció a ese "modo de separación" un concepto como el de voltaje? En el año de 1849, Gustav Robert Kirchhoff identificaría estos términos basado en el trabajo de Rudolf Kohlrausch en capacitores y buscando hermanar el gran éxito experimental de la ley de Ohm con la teoría de los potenciales poissoniana, con tanta fuerza en ese momento [Arc88; Sch63].

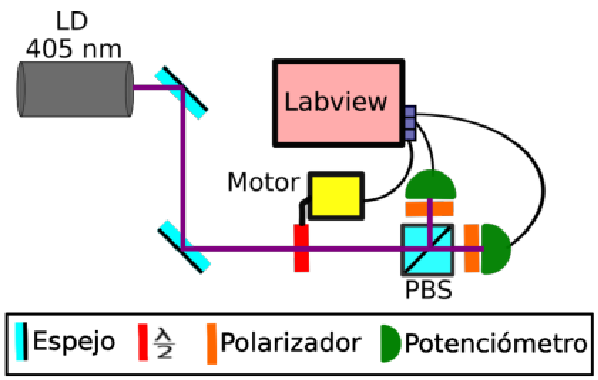

Figura 3.6: Diagrama del arreglo experimental obtenido de [Mar17]

3.5. Un experimento actual: $|\psi\rangle = \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}$

Los ejemplos mencionados hasta ahora pertenecen realmente a otra época; todos tienen más de cien años de antigüedad. Trataremos ahora de describir un experimento mucho más reciente: la preparación de un estado cuántico.

En el laboratorio de óptica cuántica del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, se realizó la preparación de fotones con el estado de polarización $|\psi\rangle = \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}$ [Mar17], donde $|\pm\rangle$ representa las polarizaciones vertical(horizontal) respecto a una referencia.

En primera aproximación podemos pensar en un láser, que normalmente ya tiene un grado alto de polarización, de alrededor de 1 %, colocado en la posición correcta respecto a nuestra referencia. Esto nos dará un haz de fotones con la polarización deseada. Tendremos una máquina casi trivial.

Como mover todo el láser no es conveniente debido a su magnitud, generalmente se pone en el camino del haz una lámina de media onda que nos permite tomar la polarización lineal y orientarla en cualquier dirección al girar la lámina.

Un láser común como el que se usó en este experimento tiene una polarización lineal en 1 %; es decir, la intensidad de luz en la dirección de polarización del láser es al menos cien veces mayor que la intensidad en la dirección ortogonal a ésta.

Si bien esta situación es suficiente para un gran número de situaciones, en esta ocasión se demanda una precisión mayor. Este arreglo se usará para la generación cuántica de números al azar, área donde se demanda incluso 0,01 % en precisión. Para alcanzarla, se usó un dispositivo que monitorea y corrige constantemente la posición de la lámina de media onda para contrarrestar los distintos efectos que aumentan el error. Los errores a escalas de tiempo cortas son corregidos por los polarizadores adicionales que se colocan a las salidas del divisor de haz polarizante. Por otro lado los efectos de largo plazo, principalmente derivas térmicas en cada aparato, se van corrigiendo con el movimiento de la lámina de media onda. Esta corrección se realiza en tiempo real; los datos de las mediciones son pasados a una computadora con un programa en LabView. Éste calcula la corrección necesaria para el sistema y la manda a la interfaz del motor de la montura, donde se encuentra colocada la lámina de media onda, lo que termina orientando ésta en la posición óptima.

El esquema general del desarrollo del experimento es:

1. Disponer todos los elementos en una mesa.
    a) Colocar el láser en la posición a,b respecto a la mesa.
    b) Colocar el espejo A en la posición ...
    $\vdots$
2. Alinear el haz para que se enfoque en los medidores de intensidad.
    a) Encender el láser.
    b) Alinear el haz ...
    $\vdots$
3. Iniciar el programa de realimentación.
    a) Conectar los potenciómetros a sus interfaces y a la computadora.
    b) Iniciar la interfaz de usuario.
    c) Iniciar el programa de realimentación.

Naturalmente podemos expresar las máquinas para cada uno de los procesos igual que en los casos anteriores. De hecho los físicos experimentales describen ellos mismos sus procedimientos de esta manera. Por ejemplo, el procedimiento de alinear tiene una descripción algorítmica clara como podemos ver en un reporte experimental del alumno encargado de este experimento:

> *Para alinear dos espejos se requiere usar dos iris. Llamemos E1 al primer espejo que refleja el láser, E2 al otro espejo, I1 a la iris que está justo después de E2 e I2 a la otra iris.*
>
> *E1 y E2 deben estar colocadas de forma que el láser pase aproximadamente por su centro. Cada espejo tiene 2 grados de libertad, controlables con tornillos de alta precisión, uno corresponde a su movimiento horizontal (derecha e izquierda) y el otro al vertical (arriba y abajo). Primero se ajusta E2 para que el haz pase por el centro de I1 y se observa I2. Supongamos que la fig 3 derecha representa I2, esta figura muestra un haz que incide a la derecha del centro de I2, debemos ajustar el grado de libertad horizontal de E1 y E2. Para ello realizamos los siguientes pasos:*
>
> 1. *Modificando E1, imitamos en I1 la imagen observada en I2. En este caso, el haz en I2 debe pegar a la derecha como en la figura 7*(figura 3.7)*.*
> 2. *Con E2 rectificamos el haz para que pase por el centro de I1 y observamos I2.*
> 3. *Realizamos estos dos pasos hasta que el láser pase por los centros de I1 e I2.*
>
> *Una vez hecho lo anterior, en I1 e I2 se observa una imagen como en la figura 8 izquierda*(figura 3.8)*. ¿Qué pasa si la imagen observada en I2 está desalineada también verticalmente? En este caso aplicamos el procedimiento anterior a cada grado de libertad. Por ejemplo, supongamos que en I2 observamos la figura 8 derecha, la cual muestra un haz que incide arriba a la derecha del*

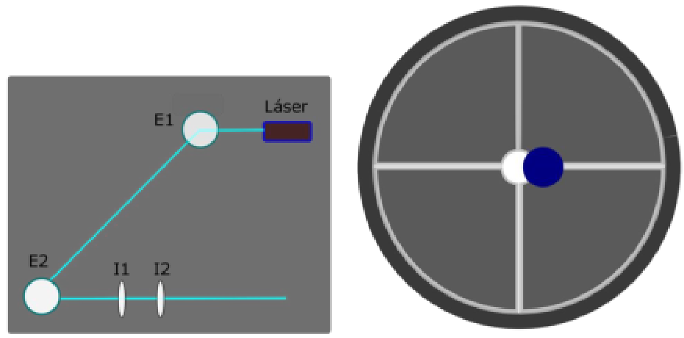

Figura 3.7: Figura tomada de [Mar17] a la que se refiere el texto citado. Se muestra un haz desalineado.

> *centro de I1. Primero ajustamos el haz vertical u horizontalmente y después ajustamos el otro grado de libertad.*

Otro punto importante a resaltar es la presencia de computadoras que automatizan los procedimientos dentro del experimento. De la misma manera que algunas acciones que hemos puesto en otras máquinas no están bien especificadas, principalmente debido a la gran complejidad que involucran, también tenemos procedimientos, como ejecutar el programa en LabView, que engloban una serie de acciones muy compleja aunque desde nuestra perspectiva se reduzcan a apretar sólo un botón. En el formalismo tenemos la posibilidad de traducir acciones básicas de la máquina, es decir, imprimir un símbolo dado, en un procedimiento más complicado que envuelva más acciones y decisiones, siempre que sea equivalente. En definitiva, un programa en LabView usado por un experimentador tendría el equivalente de una subrutina en un programa de computadora normal. Como es de esperarse de cualquier lenguaje de programación moderno, dentro del mismo programa de LabView tenemos subrutinas, en las figuras 3.9 y 3.10 vemos dos diferentes funciones del programa, la adquisición y el movimiento del motor para realizar el reajuste.

En este caso, si bien no mostramos el grafo equivalente, el propio algoritmo ya está escrito, en el lenguaje de LabView. La gran automatización que reciben los experimentos hoy día es un indicador de la naturaleza algorítmi-

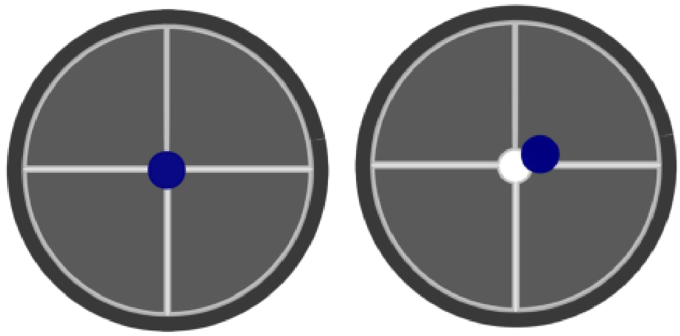

Figura 3.8: Figura tomada de [Mar17]. Corresponde a la figura 8 del texto citado. Muestra un haz desalineado.

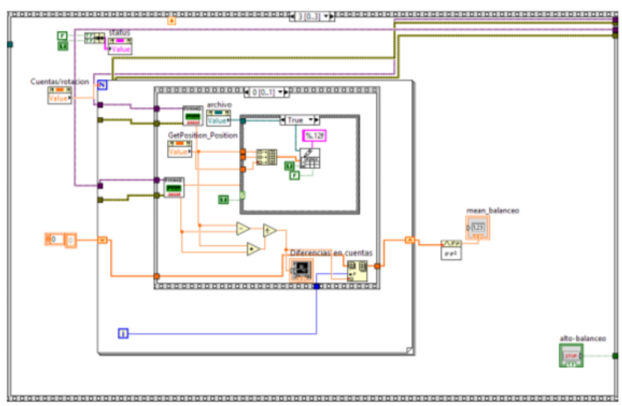

Figura 3.9: Programa en LabView para adquisición de datos [Mar17]

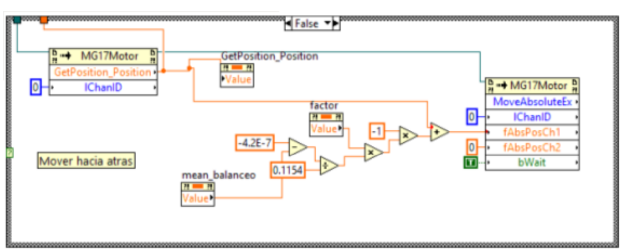

Figura 3.10: Programa en LabView para movimiento de motor [Mar17]

ca de los procedimientos experimentales. Naturalmente cada caso se limita a ciertas posibilidades experimentales y es por ello que en el formalismo tenemos esto representado a través del alfabeto. El alfabeto es una imagen de las posibilidades experimentales.

Volviendo a la descripción del experimento, recordemos que éste se concentraba en la generación de este estado para fotones individuales, una vez conseguida la producción del estado de polarización, se atenuó el haz, utilizando elementos ópticos de absorción, y se cambiaron los medidores de intensidad usados por medidores de fotones individuales conocidos como fotodiodos de avalancha(APD). Esto nos lleva a la configuración de la figura 3.11, ahí podemos ver el arreglo experimental final. En los reportes experimentales es común encontrar diagramas para facilitar la comprehensión del arreglo experimental, pero no hay nada de malo en formular todo el arreglo en términos de sus posiciones relativas.

El caso de los foto-diodos nos parece de gran relevancia. En alguna parte del algoritmo tendremos una instrucción que nos permita colocar y conectarlos de manera correcta. Dentro de las hipótesis del experimento se asume que se tienen a disposición tales aparatos, no se describen las propiedades de éstos o su método de funcionamiento. Bien pueden funcionar como "cajas negras" para el experimentador, cajas que se usan de manera operativa. Muchos otros aparatos de medición se ven únicamente de manera operativa, esto es muchas veces ineludible debido al secreto industrial. En la labor experimental real, los experimentadores trabajan arduamente pues estos aparatos que se utilizan operativamente no funcionan como es esperado, es entonces necesario pasar de la parte operativa a analizar directamente el instrumento. En el caso del experimento que venimos relatando un etiquetador de tiempos no funcionaba bien y tardamos algunos meses en darnos cuenta. Claramente el formalismo que planteamos no tiene el poder para expresar estas situaciones, se limita a pedir que la situación sea repetible independientemente si hay algún "error" en el experimento. Desde el punto de vista del autómata que realiza un experimento no hay bien o mal, el procedimiento arroja un resultado y eso es todo. La noción de correcto viene de que esperamos un cierto resultado de un experimento que sólo puede fundarse en la noción de repetibilidad.

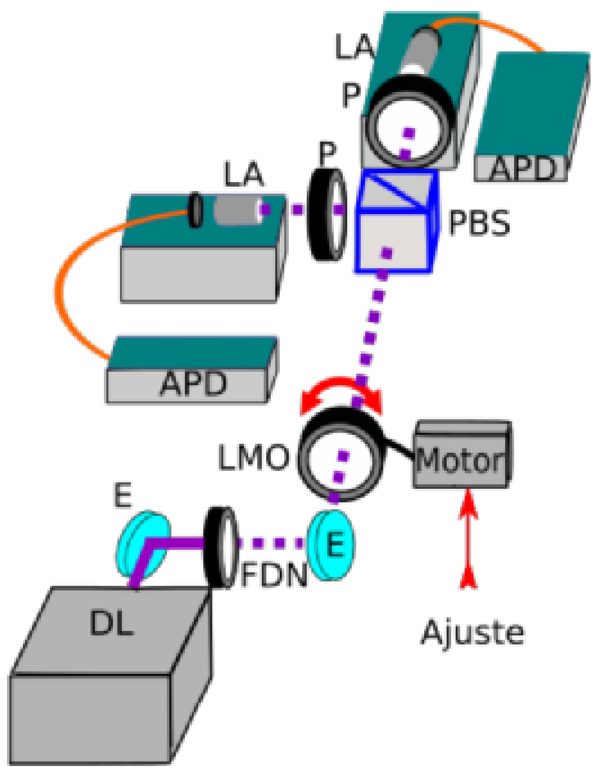

Figura 3.11: Diagrama del arreglo experimental obtenido de [Mar17]

3.6. Las hipótesis *ad hoc*

En los casos que hemos revisado vemos que la historia de la medición de una magnitud es bastante complicada. Hay una cantidad muy grande de factores que influyen como la concepción teórica, las posibilidades tecnológicas, la corriente de la comunidad científica, etc.

En cada uno de los casos que revisamos hay una condición que permite lograr la medición de la magnitud: en el de Coulomb, la hipótesis de la repartición de la carga; en el de Ohm, la de la linealidad de la corriente; en el de Bouguer, la del inverso de los cuadrados y en el de Black, la del promedio de temperaturas.

El caso de Coulomb y de Bouguer son más cercanos. En éstos la hipótesis correspondiente nos otorga los criterios necesarios, mencionados en el capítulo anterior, para construir la escala de medición; es decir, los procesos de verificación de igualdad y de combinación.

En el caso de Black tenemos a la longitud de la columna del termómetro que sí podemos medir directamente; por tanto, el problema se reduce a la convención de la relación entre la longitud y la "verdadera" temperatura. En este caso particular la convención se establece gracias al método de combinación y a una relación matemática especial que refleja las expectativas de la comunidad.

Finalmente, en Ohm, vemos un caso análogo al de Black: la fuerza sobre la aguja se puede medir usando la balanza de torsión. Sin embargo, se propuso directamente una relación proporcional entre la fuerza y la corriente.

En la historia podemos encontrar muchos más ejemplos de este tipo. Las mediciones, bajo esta lupa, tienen dos caras: como medios que nos permiten acceder a valores de cantidades físicas y como convenciones intersubjetivas [Kul99] que se han usando mucho antes del nacimiento de la ciencia con objetivos muy diversos.

Nuestra insistencia sobre las condiciones que llevan estos experimentos proviene de que estos conceptos, si bien son el fundamento para la creación de nuevos experimentos y técnicas de medición, no son absolutamente necesarios para la repetición de éstas. Vemos como, en el origen de las magnitudes estudiadas, la medición o preparación se suele reducir al control u observación sobre posiciones de objetos a través de las hipótesis ad hoc. En el formalismo vemos reflejado eso en la arbitrariedad que tenemos para elegir el alfabeto.

Capítulo 4

Resultados

Con el formalismo expuesto anteriormente se pueden obtener resultados que, bajo nuestra interpretación, lucen interesantes. Por ejemplo, vamos a demostrar que es imposible dar un criterio que nos diga qué procedimientos miden posición o temperatura.

4.1. Dispositivos con Control Externo

Para alcanzar el resultado antes mencionado, primero debemos hablar sobre un tipo especial de dispositivos. Existen dispositivos que, según sus valores de entrada, controlan su comportamiento al medir un sistema dado. Un ejemplo de esto es el multímetro. Éste dispositivo puede medir distintas magnitudes, se suele seleccionar qué magnitud se va a medir con una rueda seleccionadora o también con algún botón. Las magnitudes más comunes que mide un multímetro son voltaje, corriente y resistencia; algunas unidades más completas pueden medir capacitancia, frecuencia, inductancia y temperatura, aunque para esta última se necesita un termopar.

Otro ejemplo trivial de dispositivos con control es un aparato de medición con un interruptor de encendido y apagado. Una gran cantidad de aparatos de medición hoy día tienen este tipo de interruptores, debido en gran medida a que la mayoría consume energía eléctrica. Tomemos por ejemplo un termómetro digital que tiene un botón de encendido, lo queremos para medir la temperatura de un litro de agua mientras hierve. Si olvidamos encender el aparato antes de introducirlo al agua, éste no medirá; por el contrario, si lo encendemos, obtendremos el valor deseado.

Los dispositivos con estas características tienen claramente una representación en nuestro formalismo. En efecto:

- Leer valor de entrada.
- Si es '0' encienda el termómetro, no lo encienda en caso contrario.
- Introduzca el termómetro en el agua.
- Espere diez segundos.
- Retire el termómetro del agua y lea el valor del mismo.
- Devuelva el valor del termómetro o '0' si no se encendió.

Un procedimiento de este tipo tiene una característica muy curiosa: si su valor de entrada es '0' no será un procedimiento para medir la temperatura, en otro caso sí es un procedimiento para medir temperatura.

Es fácil ver que, siempre que tenemos un procedimiento que mida una magnitud, como los que hemos mencionado en otro capítulo; se puede construir un procedimiento controlado análogo al anterior, lo llamaremos C:

- Leer valor de entrada.
- Si es '0' aplique el procedimiento para medir la propiedad P, no lo aplique en caso contrario.
- Devuelva el valor del procedimiento, en caso de no haberlo aplicado, devuelva '0'.

Este procedimiento tiene, en definitiva, la propiedad deseada, medirá o no medirá la propiedad P dependiendo de la entrada que reciba. Ahora continuemos con la demostración del resultado.

4.2. El argumento diagonal

El Argumento Diagonal es una técnica utilizada para demostrar distintos resultados como el problema de la parada [Dav53]. Recibe este nombre por la demostración que Georg Cantor realizó en relación a la cardinalidad del continuo.

Para facilitar el lenguaje, tomemos el caso particular de la temperatura, aunque la demostración se extiende a cualquier otra propiedad de manera inmediata. Supongamos que existe un procedimiento V que nos permite verificar si otro procedimiento dado mide o no la temperatura. Es decir, este procedimiento de verificación tomará como argumento a otro procedimiento, si éste último mide la temperatura, devolverá '1'; en otro caso, '0'.

Ahora utilizaremos este procedimiento y el de la sección anterior para construir un tercer procedimiento C'. Este nuevo procedimiento consiste en realizar el procedimiento de verificación de la temperatura, tomar la salida e introducirla al procedimiento C de la sección pasada (de nuevo en el caso particular de la temperatura). Matemáticamente esto se representa por $C'(E) = C(V(E))$, donde E es un procedimiento cualquiera.

¿Cómo se comporta nuestro tercer procedimiento C'? Supongamos que E mide la temperatura, el proceso de verificación nos devolverá '1', cuando introducimos este valor al proceso C no se comportará como un procedimiento que mide la temperatura. Por lo tanto C' no medirá la temperatura. Ahora tomemos el otro caso, supongamos que E no mide la temperatura, luego el proceso de verificación nos devolverá '0', que será tomado como argumento por C y, debido a su comportamiento, sí medirá temperatura. Es decir, C' sí medirá temperatura en este caso.

En resumen, el comportamiento de C' es contrario a su argumento, mide temperatura cuando el argumento no lo hace y viceversa. Dicho de otra manera: *C' mide temperatura si y sólo si E no la mide*. El problema que se nos presenta con este enunciado es el caso particular $E = C'$ [1]. Entonces nuestro enunciado se traduce en *C' mide temperatura si y sólo si C' no la mide*; esto es una contradicción. Llegamos a este absurdo suponiendo que el

[1] Nótese que no tiene nada de malo en preguntarse si este procedimiento construido mide o no la temperatura.

procedimiento V existía, por tanto, no puede existir un procedimiento que verifique si un procedimiento mide temperatura.

Como ya mencionamos, esta prueba es general, no sólo se aplica a la temperatura. Para llegar a la contradicción fue necesario usar dos procedimientos: el procedimiento controlado que expusimos en la sección pasada y suponer la existencia del procedimiento de verificación. Una de las características más importantes de esta técnica de demostración es el compromiso que hay entre estos dos objetos, sólo uno de ellos puede existir; si ambos existieran sería posible construir la contradicción tal como lo hemos mostrado. Por lo tanto, siempre que sea posible construir un procedimiento que presente o no una propiedad dependiendo de sus valores de entrada, en nuestro caso dicha propiedad es "medir temperatura"; el procedimiento que verifica si otro procedimiento tiene esta propiedad no puede existir.

Si bien la prueba anterior es correcta, tiene algunos detalles que deben ser resueltos para expresarla correctamente. Por ejemplo, debido a que tenemos un argumento para el procedimiento C', parece que en la prueba deberíamos permitir argumentos para los procedimientos. Por otro lado podemos pensar que el experimento V debería considerarse de otra clase de procedimientos pues su argumento es un procedimiento. Sin embargo no es necesario plantear esto así. Primero vamos a notar que es posible pasar como argumento no un procedimiento sino la descripción o la representación de éste. Con ello podemos utilizar distintos objetos que representen a los procedimientos. Supongamos que el procedimiento toma como argumento una cadena de símbolos, podemos pasarle la cadena de símbolos que describa a otro procedimiento dado. Aún si suponemos que al procedimiento se le pasa como argumento un estado Ψ, podemos establecer una relación entre los estados y los procedimientos de manera que exista un ψ_M que represente al procedimiento M.

Con lo anterior nuestro resultado se puede reescribir de la siguiente manera:

- Supongamos que existe un procedimiento $V(e, x)$ para conocer si la propiedad P se mide en un procedimiento cualquiera E con representación e, dado un estado x sobre el que se aplica, devuelve '1' si la mide y '0' en otro caso.

- Usamos la función entre los procedimiento y los estados, x_E es el estado que codifica al procedimiento E.
- Construimos el procedimiento C que toma como argumento 0 o 1; si es 0 mide la propiedad P y si es 1 no la mide.
- Definimos ahora $C'(x_E)$ como:

  $C'(x_E) = C(D(e, x_E))$; es decir, $C'(x_E)$ mide P si y sólo si $E(x_E)$ no lo mide.
- En el caso particular $C' = E$ tenemos

  $C'(x_{C'})$ mide P si y sólo si $C'(x_{C'})$ no lo mide.
- Por tanto no hay tal procedimiento.

Un segundo resultado importante se refiere a la imposibilidad de enumerar los procedimientos de medición bien definidos. Siguiendo con una notación sugestiva de la forma $M(\Psi)$ donde M es un proceso de medición y Ψ un sistema sobre el que se aplica M podemos obtener resultados interesantes. Considérese el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \dots \\
\hline
M_0 & M_0(\Psi_0) & M_0(\Psi_1) & M_0(\Psi_2) & M_0(\Psi_3) & \dots \\
M_1 & M_1(\Psi_0) & M_1(\Psi_1) & M_1(\Psi_2) & M_1(\Psi_3) & \dots \\
M_2 & M_2(\Psi_0) & M_2(\Psi_1) & M_2(\Psi_2) & M_2(\Psi_3) & \dots \\
M_3 & M_3(\Psi_0) & M_3(\Psi_1) & M_3(\Psi_2) & M_3(\Psi_3) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

aquí se tienen ordenadas todas las posibles mediciones bien definidas con resultados repetibles, el conjunto Ψ_i es un conjunto de sistemas infinito. Si definimos $G(\Psi_i) = M_i(\Psi_i) + 1$[2] tendremos que la medición G no está en la lista de mediciones, pues difiere de cualquier medición de la lista en al menos un

[2]La suma con uno puede no estar definida dentro del objeto matemático resultado del proceso de medición. Lo importante es que se le asocie cualquier otro objeto de manera que se tenga $G(\Psi_i) \neq M_i(\Psi_i)$. Mientras la medición tenga en principio más de un valor posible, lo que es razonable, se podrá definir la función G.

sistema; en efecto, supongamos $G = M_k$ para algún k, luego $M_k(\Psi_i) = G(\Psi_i)$. Si evaluamos lo anterior en Ψ_k tenemos: $M_k(\Psi_k) = G(\Psi_k) = M_k(\Psi_k) + 1$ que es contradictorio. De aquí deducimos que la construcción de la lista de mediciones no puede ser computable. Por tanto, la enumeración de los procesos de medición no es un proceso computable. Este es el famoso argumento diagonal.

Con este formalismo hemos demostrado la imposibilidad de un procedimiento que determine qué mide un experimento y que es imposible enumerar los procesos de medición bien definidos.

4.3. Teoría y Experimento

Hasta ahora no se ha relacionado el formalismo con las teorías físicas. Los argumentos que se han dado sólo se basan en las propiedades de las máquinas y algunas nociones intuitivas de lo que los experimentos son.

Para poder llevar el formalismo un paso más, es necesario que se incluya a la teoría. Como vimos, algunos de los enunciados más básicos que usamos para referirnos a los experimentos están profundamente relacionados con el formalismo que las describe. Por tanto, para siquiera plantear algunas de las preguntas más naturales respecto a la naturaleza de las mediciones es necesario hablar también de la teoría.

Debido a que las teorías físicas carecen de un formalismo tan riguroso como las matemáticas, describirlas es bastante complicado. Sin embargo podemos pensar en un esquema de cómo se relacionan los procedimientos de medición con los cálculos teóricos. Como vemos en la figura 4.1, establecemos hipótesis para el cálculo que vienen de la descripción experimental. Un ejemplo de esto es el hamiltoniano al que, derivado de las condiciones experimentales, le asociamos una expresión. Estas condiciones experimentales tienen un resultado. Por el lado del cálculo las hipótesis, siempre que sean suficientes, tendrán como resultado un cálculo que deberá coincidir, bajo los criterios de error o certidumbre, con el resultado experimental.

En principio es posible, aunque muy complicado, representar este diagrama de cálculo en nuestro formalismo utilizando las máquinas antes explicadas.

Definimos la función que va de los experimentos al conjunto de enuncia-

$$\begin{tikzcd}
\text{Preparación} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Hipótesis} \arrow[d] \\
\text{Resultado} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Cálculo}
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Procedimiento de verificación

dos dentro de la teoría, la llamamos *función de interpretación* $\mathscr{I} : \mathscr{M} \to \mathscr{E}_T$, de manera similar a la usada en lógica matemática. Esta función y su computabilidad, no tomando en cuenta al oráculo, pues ahora sólo estamos usando descripciones de máquinas y enunciados matemáticos, es de fundamental importancia para nuestra aproximación y otros problemas relacionados como el hipercómputo.

Con esto podemos establecer formalmente lo que significa una coincidencia entre teoría y experimento de la siguiente manera: Si nombramos a la representación teórica del resultado de un experimento repetible[3] como $Res(M)$, decimos que una teoría describe un experimento M si

$$\mathscr{I}(M) \vdash_T Res(M)$$

es decir, el resultado del experimento M es consecuencia lógica de las hipótesis asociadas a ese experimento dentro de la teoría T.

Esta estructura, abre el camino al estudio de la relación entre la teoría y el experimento. Comentaremos para terminar algunos problemas fundamentales que pueden estudiarse con este formalismo.

- Uno de los elementos más usados en la lógica matemática es algún tipo de autoreferencia, en este formalismo parece natural buscarla. Debido a que es posible realizar, bajo ciertas hipótesis, la relación entre objetos de la teoría y experimentos; podemos referirnos a los experimentos usando entes teóricos. Un intento así apunta a la búsqueda de problemas indecidibles en la Física, ya se conocen algunos que no tienen solución como se puede ver en [CD91; CPGW15].

[3] La repetibilidad garantiza la buena definición de Res

- La Mecánica Cuántica es un claro candidato para empatarse con este formalismo. Esta teoría tiene una contraparte de las mediciones como operadores autoadjuntos o POVM(Positive Operator Valued Measure). Esta estructura se puede comparar con la que ya tenemos. Hay ya intentos por empatar el formalismo cuántico, en sus elementos más fundamentales, con la teoría de la computación [SCS05; CS08].

- El hipercómputo está relacionado directamente con la computabilidad de las funciones $I(M)$ y $Res(M)$. El problema del hipercómputo es actualmente estudiado, principalmente en relación al cómputo cuántico [Kie03; CD06; Kie02].

- Encontrar los límites de los procesos de predicción que respetan el diagrama 4.1 es la principal búsqueda de este formalismo. Debido a que tenemos límites de computabilidad en los cálculos que hacemos de lado teórico, se afecta la simetría del diagrama que sería el ideal de teoría [Wol08].

Capítulo 5

Conclusiones

Dentro del gran terreno que nos ofrecen las mediciones para investigar, este trabajo se centró en una característica particular: el carácter algorítmico. ¿Tienen las mediciones un carácter algorítmico?, ¿son estos procedimientos una especie de algoritmo? Restringiendo las mediciones a esos procesos o técnicas establecidas en la comunidad, técnicas que pueden repetirse de manera efectiva y nos devuelven un objeto matemático; afirmamos que los procesos de medición pueden ser representados por algoritmos. Es decir, una vez que una técnica experimental ha sido aceptada y estandarizada por una comunidad, afirmamos que existe una máquina de Turing y un alfabeto, que la representa. De esta representación es posible reconstruir tal técnica.

La relación profunda que se encuentra entre los algoritmos y los experimentos, entendidos como una técnica o procedimiento operativo, tiene un vínculo en el lenguaje. Ambos objetos se basan en enunciados imperativos. Estos se deben expresar en un lenguaje común que debe ser aceptado por la comunidad. Este lenguaje no necesariamente es el lenguaje teórico de la física, como se expuso, hay situaciones límite donde no es necesario conocer los términos teóricos para la ejecución de un experimento.

Desde el punto de vista de las cantidades físicas, vemos que éstas son una combinación de expectativas de los experimentadores sumado a las posibilidades técnicas de la época en que son creadas. ¿Por qué ya no hay nuevas cantidades? Parece la pregunta fundamental en este sentido. Si bien se inventan todo el tiempo nuevas cantidades en el lado teórico, no parecen haber nuevas en el lado experimental; es decir, las nuevas cantidades siempre se miden a partir de cantidades ya establecidas como la corriente, la frecuencia, la posición, etcétera. Este límite había sido ya mencionado por Bohr en 1926 [Mur87].

Representar a los experimentos por un objeto matemático, como lo son las máquinas de Turing, nos permite trabajar en un marco formal donde es posible hacer deducciones generales. Esto fue utilizado en el capítulo de resultados, el primer teorema que contiene es un ejemplo de como se puede aplicar el formalismo desarrollado.

¿Qué impacto tiene este resultado en relación a las cantidades físicas? En física, tenemos distintas técnicas de medición que se aplican en un caso u otro según convenga. El caso interesante resulta con las nuevas técnicas de medición de cantidades, si tenemos una nueva técnica ¿cómo aseguramos que ésta realmente mide lo que queremos si no hay método que no los pueda asegurar? El desarrollo de estas técnicas consiste de muchos más elementos que salen del alcance de este trabajo.

En definitiva la principal aportación de este trabajo es proponer el carácter algorítmico de los procesos de medición, su formalización y su uso como hipótesis para la deducción de resultados generales sobre dichos procesos.

Mientras que la matemática ha logrado una rama tan fructífera como la lógica matemática, que ha dado como fruto algunos de los teoremas más impresionantes de la historia como los de Incompletitud de Gödel o de indefinibilidad de Tarski, no vemos en la Física resultado similar; ni aún la gigantesca y grandiosa revolución generada por la Física moderna parece ponerse a la par. Este intento naturalmente no aspira a ser el formalismo necesario para tal empresa, pero espera hacer preguntas que nos dirijan en ese camino o, al menos, dar una mirada fresca que nos permita pensar en otros.

Ojalá, la Física algún día cuente con un área que le permita estudiar su propio quehacer. Después de todo, ¿qué más le podemos pedir a una teoría que sea capaz de señalar directamente sus límites?

Bibliografía

[Arc88] T. Archibald. «Tension and Potential from Ohm to Kirchhoff». En: *Centaurus* 31.2 (1988), págs. 141-163.

[Bai00] D. C. Baird. *Experimentación. Una Introducción a la Terоría de Mediciones Y Al Diseño de Experimentos*. Pearson Prentice Hall, 2000.

[Bel90] J. Bell. «Against 'measurement'». En: *Physics world* August (1990), págs. 33-40.

[Blo08] C. Blood. «Difficulties with Collapse Interpretations of Quantum Mechanics». En: (2008).

[Cam13] N. R. Campbell. *Physics : the elements*. Cambridge University Press, 2013.

[Car66] R Carnap. *Philosophical foundations of physics: an introduction to the philosophy of science*. Basic Books, inc., 1966.

[CD06] N. C. A. da Costa y F. A. Doria. «Some thoughts on hypercomputation». En: *Applied Mathematics and Computation* 178.1 (2006), págs. 83-92.

[CD91] N. C. A. da Costa y F. A. Doria. «Undecidability and incompleteness in classical mechanics». En: *International Journal of Theoretical Physics* 30.8 (1991), págs. 1041-1073.

[CG68] F Cernuschi y F. I. Greco. *Teoría de errores de mediciones*. Ediciones previas: Física. Universitaria de Buenos Aires, 1968.

[Cha04] H Chang. *Inventing Temperature: Measurement and Scientific Progress*. Oxford Studies in the Philosophy of Science. Oxford University Press, 2004.

[Che05] X. Chen. «Visual Photometry in the Early 19th Century: A "Good" Science with "Wrong" Measurements». En: *Wrong for the Right Reasons*. Ed. por J. Z. Buchwald y A. Franklin. Dordrecht: Springer Netherlands, 2005, págs. 161-183.

[Chu36] A. Church. «An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory». En: *American Journal of Mathematics* 58.2 (1936), pág. 345.

[Con57] J. B. Conant. *Harvard Case Histories in Experimental Science*. Harvard University Press, 1957.

[Cou85] C. A. Coulomb. *Premier-[troisième] mémoire sur l'electricité et le magnétisme*. Nineteenth Century Collections Online (NCCO): Science, Technology, and Medicine: 1780-1925. Académie Royale des sciences, 1785.

[CPGW15] T. S. Cubitt, D. Perez-Garcia y M. M. Wolf. «Undecidability of the spectral gap». En: *Nature* 528.7581 (2015), págs. 207-211.

[CS08] C. S. Calude y K. Svozil. «Quantum Randomness and Value Indefiniteness». En: *Advanced Science Letters* 1.2 (2008), págs. 165-168.

[Dav53] M. Davis. *Computability and Unsolvability*. Dover, 1953.

[Din70] H. Dingle. *The Scientific Adventure*. Freeport, N.Y., Books for Libraries Press, 1970.

[Ell68] B Ellis. *Basic Concepts of Measurement*. Cambridge University Press, 1968.

[EPR35] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?» En: *Physical Review* 47.10 (1935), págs. 777-780.

[Fey75] P. Feyerabend. *Against Method*. 1975, pág. 279.

[HBD30] H von Helmholtz, C. L. Bryan y H. T. Davis. *Counting and measuring*. D. Van Nostrand co, 1930.

[Hee92] P. Heering. «On Coulomb's inverse square law». En: *American journal of physics* 60.11 (1992), págs. 988-994.

[Kei99] J. F. Keithley. *The Story of Electrical and Magnetic Measurements: From 500 BC to the 1940s*. Wiley, 1999.

[Kie02] T. D. Kieu. «Quantum hypercomputation». En: *Minds and Machines* 12.4 (2002), págs. 541-561.

[Kie03] T. D. Kieu. «Quantum Algorithm for Hilbert's Tenth Problem». En: *42* (2003), págs. 1461-1478.

[Kuh61] T. S. Kuhn. «The Function of Measurement in Modern Physical Science». En: *Isis* 52.2 (1961), págs. 161-193.

[Kuh96] T. S. Kuhn. *The structure of scientific revolutions*. Vol. 57. 1. 1996, págs. 59-75.

[Kul99] W Kula. *Las medidas y los hombres*. Historia (Siglo XXI de España Editores). Siglo Veintiuno Editores, 1999.

[Lak78] I. Lakatos. «The methodology of scientific research programmes Philosophical Papers Volume I». En: *The Elgar companion to economics and philosophy* (1978), pág. 250.

[Luc+90] R. D. Luce y col. *Foundations of Measurement*. Vol. 3. 1990, pág. 493.

[Mar17] A. C. Martínez. «Un generador cuántico de números al azar: de un PBS a etiquetas temporales.» Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autonoma de Mexico, 2017.

[Min67] M. L. Minsky. *Computation: Finite and Infinite Machines*. Prentice-Hall series in automatic computation. Prentice-Hall, 1967.

[Mur87] D. Murdoch. *Niels Bohr's philosophy of physics*. Cambridge University Press, 1987, pág. 294.

[Ohm27] G. S. Ohm. *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*. T. H. Riemann, 1827.

[Sch05] M. Schlosshauer. «Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics». En: *Reviews of Modern Physics* 76.4 (2005), págs. 1267-1305.

[Sch63] M. L. Schagrin. «Resistance to Ohm's Law». En: *American Journal of Physics* 31.7 (1963), págs. 536-547.

[SCS05] K. Svozil, C. S. Calude y M. A. Stay. «From Heisenberg to Gödel via Chaitin». En: *International Journal of Theoretical Physics*. Vol. 44. 7. 2005, págs. 1053-1065.

[Sim12] K Simonyi. *A Cultural History of Physics*. An A K Peters book. Taylor y Francis, 2012.

[Tre09] G. Trendler. «Measurement Theory, Psychology and the Revolution That Cannot Happen». En: *Theory & Psychology* 19.5 (2009), págs. 579-599.

[Tur37] A. Turing. «On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 42 (1937), págs. 230-265.

[Wig95] E. P. Wigner. «Remarks on the Mind-Body Question». En: *Philosophical Reflections and Syntheses*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995, págs. 247-260.

[Wol08] D. H. Wolpert. «Physical limits of inference». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 237.9 (2008), págs. 1257-1281.

[Von55] J. Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, 1955, pág. 445.