



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**GENERACIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES POR
PERTURBACIÓN A UN AGUJERO NEGRO DE
SCHWARZSCHILD**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**F Í S I C O
P R E S E N T A:**

MARIANA LIRA PERALTA



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
(2018)**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado

Presidente

Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuellar

Secretario

Dr. Darío Núñez Zúñiga

Vocal

Dr. Juan Carlos Degollado Daza

Suplentes

Dr. Emilio Tejeda Rodríguez

Dr. César Simón López Monsalvo

*Hace 1.3 mil millones de años dos agujeros negros orbitaban entre sí.
Uno tenía una masa 29 veces mayor a la del Sol, el otro 36 veces.
De pronto, uno de los eventos más violentos del universo sucedió...
...los dos agujeros chocaron casi a la mitad de la velocidad de la luz y en una fracción
de segundo se convirtieron en uno solo más masivo.
Parte de la masa se convirtió en energía.
Ondas gravitacionales con energía equivalente a tres veces la masa del sol fueron
emitidas a la velocidad de la luz.
Su potencia pico fue de unas 50 veces la de todo el Universo visible.*

*1.3 mil millones de años después, el 14 de septiembre de 2015, fueron detectadas en
el planeta Tierra.*

*La colaboración del Observatorio por Interferometría Láser de Ondas
Gravitacionales (LIGO), tenía encendidos dos detectores gemelos separados por casi
3 mil kilometros en el norte de América.
El detector en Livingston, Louisiana detectó la señal 7 milisegundos antes que el
detector de Hanford, Washington.*

*Era la primera vez que la comunidad científica observaba directamente las
ondulaciones del tejido espacio-temporal, predichas 100 años antes, en 1915, por
Albert Einstein en su teoría de la relatividad general.*

El 11 de febrero de 2016, yo estaba en la Facultad de Ciencias. Sabía que la colaboración LIGO había programado una conferencia de prensa donde anunciarían “algo importante” para ese día. Muchos lo esperábamos. Fui a la sala de computo a ver la transmisión en vivo. David Reitze, director del proyecto LIGO, sin rodeos anunció,

“Damas y caballeros, nosotros hemos detectado las ondas gravitacionales.”

Yo ya sabía que existían, las había estudiado, las había imaginado y soñado pero oír esas palabras me emocionó enormemente. Ciertamente, la ciencia y los descubrimientos, así como el arte y la compañía, conmueven y alegran el corazón. Hoy estoy aquí, escribiendo una tesis sobre las ondas gravitacionales y los agujeros negros; temas que, como a muchos, desde pequeña me han intrigado.

Opino que todo ser humano es capaz de entender la física detrás de éste y muchos fenómenos interesantes, solo es cuestión de hacerlo. Presento así este trabajo con satisfacción de poco a poco ir respondiendo a mis preguntas infantiles con más preguntas.

Índice General

Resumen	6
Agradecimientos	7
Introducción	9
1 Fundamentos de Relatividad General	11
1.1 Notación tensorial	12
1.2 Estructura del espaciotiempo	14
1.2.1 Derivada covariante y la conexión	15
1.2.2 Geodésicas	16
1.3 Transformaciones de Lorentz y relatividad especial	17
1.4 Principio de Equivalencia	18
1.5 Ecuaciones de campo	18
1.5.1 Límite newtoniano	21
1.5.2 Solución de Schwarzschild	21
1.5.3 Solución de Kerr	22
2 Ondas Gravitacionales	25
2.1 Teoría de perturbaciones	27
2.2.1 Teoría linearizada	28
2.2 Propiedades de las ondas gravitacionales	30
2.2.1 Ondas planas	30
2.2.2 Polarización	31
2.2.3 Efecto de la onda sobre un cuerpo	32
2.2.4 Energía de las ondas	33
2.2.5 Momento cuadrupolar	34
2.3 Fuentes	35
2.4 Detección y extracción de la forma de la onda	36
3 Formalismo Newman-Penrose	39
3.1 Tétrada nula, operadores y espinores	40
3.2 Tensor y escalares de Weyl	43
3.3 Clasificación de Petrov y teorema de Peeling	44
3.4 Ecuaciones de Newman-Penrose	46
3.4.1 El tensor de Riemman	46
3.4.2 Identidades de Bianchi	47
3.5 Ecuación de perturbación para Ψ_4	48
	51

4	Ecuación de perturbación para un agujero negro de Schwarzschild	52
4.1	Agujeros negros	54
1.2.1	Geodésicas radiales en Schwarzschild	55
4.2	Objetos compactos y acreción	56
4.3	Ecuación de perturbación	59
4.4	Fuentes de la señal gravitacional	60
4.4.1	Fluido tipo polvo	63
4.4.2	Otras fuentes	64
4.5	Unidades patrón	65
4.6	Ecuación de perturbación en unidades patrón	67
4.7	Escalas	
5	Análisis Numérico	69
5.1	Descomposición en un sistema de primer orden	70
5.2	Método de líneas	71
5.2.1	Discretización de las componentes espaciales	72
5.3	Runge-Kutta	73
5.4	Condiciones iniciales	74
5.5	Descripción del código	74
5.6	Resultados	75
6	Conclusiones	81
	Referencias	85

RESUMEN

Se presenta la teoría de perturbaciones para la métrica de Schwarzschild con el objetivo de modelar la acreción de polvo a un agujero negro de Schwarzschild y estudiar la subsecuente generación, en ciertas condiciones, de radiación gravitacional. Es importante tener claros los fundamentos, por ello la primera parte de esta tesis sintetiza los resultados de la relatividad general [Cap. 1], la teoría de las ondas gravitacionales y sus propiedades [Cap. 2], haciendo énfasis en la teoría de perturbaciones. Posteriormente se presenta el formalismo Newman-Penrose [Cap. 3] en donde se describe a la onda gravitacional en términos de los escalares de Weyl mediante una ecuación de perturbación que depende de la distribución de materia-energía [Cap. 4].

Los últimos dos capítulos de este trabajo presentan técnicas para resolver esa ecuación, resultados y una discusión sobre las implicaciones. Otra cuestión importante es que en este trabajo se reescribe la ecuación de perturbación en unidades patrón con el propósito de tener resultados cualitativos y cuantitativos de la radiación gravitacional para contrastar con las observaciones de LIGO. Finalmente se presentan algunas conclusiones y perspectivas de estudio.

Agradecimientos

Quiero agradecer de todo corazón a muchas personas porque concluir este trabajo fue debido a sus distintas formas de apoyo.

Primero a mis papás porque ellos me dieron las bases éticas, morales y materiales para concluir esta etapa. A mi hermano Mou, mi amigo Mou. Simplemente no hay mejor compañía que ellos tres para contemplar las estrellas en Oaxaca, donde, por cierto, comenzó mi amor por el universo. A mi enorme familia también.

A Darío, por todo su tiempo, consejos, conocimientos, su atención y guía.

A mis sinodales por su disposición para leerme, enseñarme y corregirme, aún con la distancia y la falta de tiempo.

A los maestros que me compartieron sus conocimientos con avidez a lo largo de toda mi formación académica.

A la Red Temática de Ondas Gravitacionales y Agujeros Negros, por introducirme a los temas actuales de investigación en el área de relatividad general a través de escuelas y talleres.

A mis amigos de la licenciatura, de quienes siempre aprendí algo. A mis compañeras y maestras físicas, porque en un sentido son ejemplo y motivación.

A mis amigos de todas las carreras, porque han contruido en no ser tan ignorante en todo lo que no sea física. Y porque me han escuchado hablando de agujeros negros, galaxias, átomos, materia, energía, etc, aún cuando no logro explicarme.

A mis amigos que sueñan conmigo que otros mundos son posibles y construimos otras formas de compartir ciencia. Gracias, porque sin esos espacios de resistencia mi vida no tendría mucho sentido.

Y por último a Sergio, por ser mi compañero en esta vida que a veces parece tan difícil, pero él siempre tiene una sonrisa, un beso y una canción para mí. Gracias por tu guitarra acompañándome tantas noches estudiando y escribiendo.

Introducción

Se calcula que nuestro universo tiene una edad de 13, 800 millones de años[1]. En ese tiempo, la materia y la energía se han reordenado y transformado una y otra vez. Los fenómenos que acontecen en el Universo son tan variados, lejanos y complejos que para la humanidad es todo un reto descubrir y predecir algo sobre la naturaleza de las cosas. A pasos lentos, salvo algunos brincos enormes, se han acumulado conocimientos y teorías que describen distintas fracciones de la realidad.

Este trabajo tiene como base una de las teorías más famosas de la física contemporánea, la relatividad general, presentada en 1915 por Albert Einstein. Se utiliza para estudiar sistemas en campo gravitacional fuerte¹ y a velocidades cercanas a la de la luz, donde la teoría newtoniana deja de ser válida. La relatividad general tiene muchas consecuencias sorprendentes que tanto han acelerado la comprensión del universo como abierto nuevas preguntas fundamentales. En este trabajo solo nos centraremos en dos de sus predicciones: la existencia de las ondas gravitacionales y de los agujeros negros. Ambas fueron deducidas meses después de que Einstein encontrara las ecuaciones de campo. En las décadas posteriores, se mantuvo el debate sobre su existencia y la posibilidad de detectarlas.

Las ondas gravitacionales transportan por el espaciotiempo energía liberada en los procesos más violentos del universo, como el choque de dos agujeros negros, el colapso gravitacional, el Big Bang y los núcleos activos de galaxia[2].

El proyecto LIGO comenzó en 1984 con el propósito de detectar las ondulaciones del tejido espaciotemporal. El reto demanda la colaboración interdisciplinaria e internacional para construir detectores capaces de medir longitudes subatómicas y analizar los datos arrojados.

Ciertamente estamos en tiempos interesantes. El 15 de septiembre de 2015[3], cuando los detectores estaban en fase de calibración, fueron detectadas por primera vez en la historia las ondas gravitacionales. Tal hecho es en sí mismo impresionante, pero además, de las mediciones se pudo saber que la señal se había generado luego de la coalescencia de dos agujeros negros, siendo también la primera observación directa de estos objetos compactos.

¹Es decir, cuando el término $\frac{2MG}{c^2r}$ es del orden de 1, siendo M la masa característica del sistema; G es la constante de la Gravitación universal; c es la velocidad de la luz son constantes universales; r es distancia.

A día de hoy (noviembre, 2017) LIGO ha anunciado oficialmente la detección de cuatro señales gravitacionales más de nombres GW150914, GW151126 [4], GW170104 [5] y GW170817 [6]. Las tres primeras se generaron en sistemas binarios de agujeros negros de pocas decenas de masas solares. La última provino de la coalescencia de dos estrellas de neutrones y se observó también en el espectro electromagnético, en particular en rayos gamma.

Se espera que en los próximos tiempos, conforme detectores más precisos se pongan en marcha y los recursos teóricos, computacionales y numéricos sigan desarrollándose, las ondas gravitacionales abrirán una ventana enorme para la observación de los fenómenos más energéticos del universo y al cosmos mismo. No solo seremos capaces de observar el cosmos mediante la luz, los rayos gamma, rayos X, en ultravioleta, infrarrojo (es decir, radiación electromagnética) sino también con el espectro de la radiación gravitacional.

Dicho esto, se entiende el contexto, la problemática y motivación de esta tesis cuyo objetivo es estudiar y modelar las propiedades de las ondas gravitacionales y los fenómenos astrofísicos que las causan haciendo uso de la teoría de perturbaciones en el formalismo Newman-Penrose.

El estudio de ondas gravitacionales involucra tres fases de estudio: generación, propagación y detección que requieren. Este trabajo está centrado en la fase de generación.

Los primeros capítulos de esta tesis buscan dar una base teórica de las ondas gravitacionales, comenzando desde los fundamentos de relatividad general hasta el formalismo Newman-Penrose. También se busca mantener una discusión vigente y presentar algunas de las técnicas que se utilizan para estudiar ondas gravitacionales.

Muchas veces en relatividad se pierde de vista las escalas y los órdenes de magnitud de las variables, por ello, otro objetivo de esta tesis es introducir unidades a la ecuación de perturbación resultante, acorde a los sistemas físicos de estudio, llamadas unidades patrón (últimas secciones del capítulo 4). Otro problema al resolver ecuaciones, no solo en astrofísica relativista, sino en general, es que se pierde de vista la validez física del problema. Esto se intenta revertir incluyendo una descripción del fenómeno astrofísico modelado: acreción de polvo a un agujero negro.

En las últimas partes de esta tesis se detallan los métodos numéricos que se emplean en relatividad general en regímenes de campo débil, lo cuál es relevante porque son las condiciones de los detectores en el planeta Tierra.

Antes de comenzar, quiero añadir que más que resolver una pregunta, esta tesis presenta sistemáticamente un problema contemporáneo en astrofísica y un formalismo y técnicas capaces de arrojar las formas de las ondas gravitacionales, como un inicio de partida a próximos proyectos de investigación.

Capítulo 1

Fundamentos de Relatividad General

Todas las teorías son legítimas y ninguna tiene importancia. Lo que importa es lo que se hace con ellas.

Jorge Luis Borges

La Relatividad General es una teoría sobre la gravitación; parte de pocos postulados y con ello construye un sistema lógico de ideas que, a día de hoy, han redefinido completamente no solo el concepto de *gravedad*, sino también el de *tiempo*, *espacio* y su relación con la *materia* y *energía*. Fue presentada en 1916 por el físico Albert Einstein en *The Foundation of the General Theory of Relativity*[1], ver Fig. 1.1.

Uno de los principales problemas teóricos de la física de finales del siglo XIX era que las ecuaciones de la mecánica newtoniana y las del electromagnetismo de Maxwell no son invariantes al mismo conjunto de transformaciones entre sistemas inerciales. Las primeras lo son ante transformaciones de Galileo y las segundas ante transformaciones de Lorentz, en las cuales la velocidad de la luz es constante en el vacío y es un límite. La relatividad general, no solo resuelve ese problema, sino que es, tal cual, una nueva teoría de la gravitación.

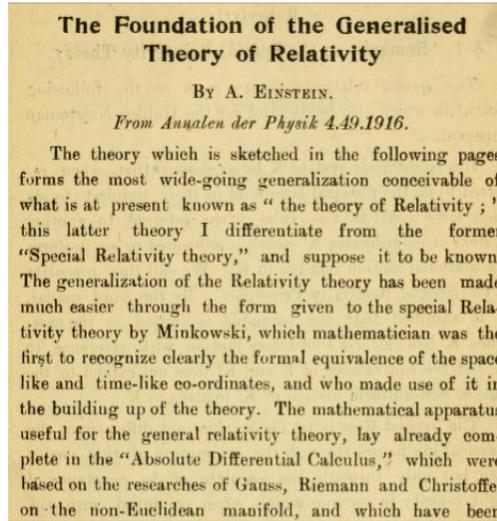


Figura 1.1: Inicio en inglés del artículo de 1916 de Albert Einstein. Tomado de [4].

A continuación se presenta de forma simplificada las matemáticas básicas de la teoría, sus antecedentes y fundamentos, así como la notación, definiciones y ecuaciones que en los siguientes capítulos se utilizará.

Para una introducción formal a la teoría de Einstein se pueden consultar las referencias [2] a [6], mismas que fueron retomadas en la elaboración de este capítulo.

En lo que sigue se utilizará la signatura $(-,+,+,+)$, a menos que se especifique lo contrario. Para los índices se utilizan los símbolos $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, mientras que i, j, k se reservan para coordenadas espaciales.

1.1 Notación tensorial

La relatividad general está escrita en lenguaje tensorial por una razón muy conveniente, facilita formular una teoría covariante al representar las cantidades físicas mediante tensores sobre variedades diferenciables de cuatro dimensiones. Los tensores se definen² por la forma en que sus componentes se transforman entre dos bases distintas $\{x^\alpha\} \rightarrow \{x^{\alpha'}\}$.

A_α es un tensor de rango uno -llamado vector covariante- si y solo si, sus componentes se transforman de forma lineal:

$$A_\alpha \rightarrow A_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} A_\alpha. \quad (1)$$

²Esta definición no es formal, aunque sí suficiente para nuestros fines y equivalente a su formulación matemática. Para una introducción al cálculo tensorial y las matemáticas que se usan en RG ver [7] y [8].

En cambio, un vector contravariante A^μ es aquel cuyas componentes se transforman entre bases como,

$$A^\alpha \rightarrow A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha. \quad (2)$$

A partir de los vectores se generaliza el concepto de tensor de rango (n, m) como el producto de n vectores covariantes y m vectores contravariantes. Es decir que, intuitivamente, el rango de un tensor está dado por el número de índices necesarios para especificar sus componentes. Por ejemplo, un tensor $T_\rho^{\kappa\sigma}$ de rango $(1, 2)$, se transforma como

$$T_{\gamma'}^{\alpha' \beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\delta} T_\epsilon^{\kappa\delta}. \quad (3)$$

En relatividad, los tensores *viven* en un espacio de cuatro dimensiones, cuyos índices corren de 0 a 3. La convención de suma de Einstein dice que índices repetidos arriba y abajo se suman:

$$A^\alpha B_\alpha = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

Un tensor con componentes $T_{\alpha\beta}$ en alguna base, será simétrico si $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$.

En cambio, si $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$, será antisimétrico. Se puede simetrizar o antisimetrizar cualquier tensor $A_{\alpha\beta}$, haciendo

$$A_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}); \quad A_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}),$$

donde $A_{(\alpha\beta)}$ es el tensor simétrizado y $A_{[\alpha\beta]}$ antisimetrizado.

Los tensores satisfacen una álgebra multilineal. Dados U_β^α , V_β^α , W^δ y $T_\beta^{\alpha\delta}$, y los escalares a y b , se define la combinación lineal, el producto directo y la contracción, respectivamente como

$$T_\beta^\alpha \equiv aU_\beta^\alpha + bV_\beta^\alpha, \quad T_\beta^{\alpha\delta} \equiv U_\beta^\alpha W^\delta, \quad T^{\alpha\delta} \equiv T_\beta^{\alpha\beta\delta}. \quad (4)$$

Los escalares son tensores de rango cero y se definen como aquellos objetos que no cambian su magnitud bajo una transformación de coordenadas,

$$\varphi(x^\alpha) \rightarrow \varphi(x^{\alpha'}) = \varphi(x^\alpha) = \varphi. \quad (5)$$

Los escalares y los tensores representan cantidades físicas con la ventaja de que no es necesario especificar un sistema coordenado.

1.2 Estructura del espaciotiempo

En relatividad general se trabaja sobre un espacio de cuatro dimensiones, llamado espaciotiempo. Más adelante se verá que el espaciotiempo no solo es el escenario de la relatividad, sino un actor principal. Todo punto del espaciotiempo recibe el nombre de evento y se denota $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ con $x^0 = ct$ la coordenada temporal y $x^i, i = 1, 2, 3$, las tres coordenadas espaciales. Para definirlo matemáticamente, se considera una variedad diferencial, \mathcal{M} , 4-dimensional conexa de clase C^∞ y una métrica de Lorentz, \mathbf{g} , sobre \mathcal{M} .

Dado un sistema coordenado, la distancia entre dos eventos ds , llamado elemento de línea, está dada por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (6)$$

Puesto que la distancia entre dos eventos debe ser la misma para cualquier sistema de referencia, se impone que el elemento de línea es un invariante:

$$ds^2 = ds'^2. \quad (7)$$

Así, \mathbf{g} es un tensor covariante de rango dos simétrico cuyas componentes en dos sistemas coordenados distintos están relacionados de acuerdo a la regla de transformación,

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\beta'}}. \quad (8)$$

La métrica tiene una gran importancia porque contiene toda la información de la geometría del espaciotiempo. Para que tenga un significado físico válido, debe satisfacer que $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ y $g < 0$. Más adelante se verá que para cada métrica existe un campo gravitacional asociado. \mathbf{g} determina el movimiento de las partículas en presencia de tal campo gravitacional.

En el caso de un sistema de referencia inercial cuyas coordenadas espaciales son cartesianas se tiene que,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

es decir que en estas coordenadas la métrica es

$$g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (9)$$

Se observa que la parte espacial $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, es la distancia entre dos puntos en el

espacio euclidiano. La expresión (9) recibe el nombre de métrica de Minkowski.

1.2.1 Derivada covariante y la conexión

La dinámica de un sistema se describe mediante ecuaciones diferenciales que deben mantener su forma bajo cualquier transformación. La forma de derivar debe ser tal que en espacios curvos mantenga la invarianza física.

Considérese un vector A^α y

$$T_{\beta}^{\alpha} := \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad (10)$$

que al reescribirlo en un sistema primado, por regla de la cadena resulta,

$$T_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial A^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta} \right) = \frac{\partial A^{\delta}}{\partial x^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\delta}} \right) + A^{\delta} \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\delta}} \right), \quad (11)$$

es decir que T no se transforma como tensor. El primer término es la derivada parcial pero sobra el término $A^{\delta} \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\delta}} \right)$ que aparece porque las coordenadas también están cambiando. Entonces, se debe construir un operador de derivada que sea covariante.

La solución resulta ser la conexión de Levi-Civita³ que determina la forma de “conectar” regiones locales entre distintos puntos de la variedad y sus componentes están dadas por,

$$A^{\alpha}_{;\beta} = A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} A^{\delta}, \quad (12)$$

donde $\frac{DA}{Dx^{\beta}} \equiv A^{\alpha}_{;\beta}$, el primer término es la derivada parcial, $\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \equiv A^{\alpha}_{,\beta}$ y $\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}$ son las componentes de la conexión,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} := \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\delta}}. \quad (13)$$

Efectivamente, sus componentes se transforman tensorialmente

$$A^{\alpha'}_{;\beta'} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta}_{;\gamma}.$$

Los coeficientes $\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}$ dependen de las coordenadas. No se transforman como tensor pero satisfacen que $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}$. Se pueden subir y bajar índices con la métrica, por ejemplo, $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\nu} \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}$.

La conexión se relaciona con el tensor métrico de la siguiente forma:

³Formalmente, la conexión de Levi-Civita es un mapeo que preserva la métrica y es libre de torsión. Dada una base $\{\hat{e}_{(a)}\}$ de la variedad, en el espacio tangente a un punto p en \mathcal{M} : $T_p \mathcal{M}$, la conexión estará dada por:

$$\nabla_{\hat{e}_{(b)}} \hat{e}_{(a)} = \Gamma^a_{bc} \hat{e}_{(c)}.$$

donde Γ^a_{bc} son los componentes de la conexión.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}(g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}), \quad (14)$$

que resultan ser los símbolos de Christoffel. Son primeras derivadas de la métrica.

1.2.2 Geodésicas

El tiempo propio, τ , se define como,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2, \quad (15)$$

y representa el tiempo medido por un observador localizado en un sistema en reposo, donde $d\ell^2 = 0$. Es un invariante fundamental, es decir que desde cualquier marco de referencia se mide el mismo valor del tiempo propio, por ello es un escalar muy útil para construir magnitudes. Por ejemplo, la cuadrivelocidad y el cuádrimomento de una partícula⁴ se definen, respectivamente,

$$u^{\nu} \equiv \frac{dx^{\nu}}{d\tau}, \quad p^{\nu} \equiv mu^{\nu}, \quad (17)$$

donde m es la masa en reposo de la partícula.

La norma de la cuadrivelocidad es invariante $u_{\nu}u^{\nu} = -c^2$.

Considérese una partícula libre cuya acción se obtiene al integrar su función lagrangiana \mathcal{L} en cierto intervalo de tiempo,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt, \quad (18)$$

Para la partícula libre, implica que,

$$S = \int ds = \int \sqrt{g_{\nu\mu} dx^{\nu} dx^{\mu}}. \quad (19)$$

La distancia más corta entre dos eventos, se obtiene al *extremizar* la acción, es decir, calcular $\delta S = \int \delta ds$. Al reescribir $\delta ds = \frac{\delta ds^2}{2ds^2} ds$ se tiene que

$$\delta ds^2 = -(g_{\alpha\nu} d^2 x^{\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha\mu} dx^{\alpha} dx^{\mu}) \delta x^{\nu} + d(g_{\alpha\nu} dx^{\alpha} \delta x^{\nu}),$$

con

$$\Gamma_{\nu\alpha\mu} = \frac{1}{2}(g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu}),$$

⁴En el caso del fotón (partícula sin masa), el elemento de línea, el tiempo propio y la masa son cero. Por ello se utiliza un parámetro λ para caracterizar su movimiento conocido como parámetro afín tal que

$$k^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}. \quad (16)$$

que son símbolos de Christoffel y coinciden con los componentes de la conexión de Levi-Civita vistos en la sección anterior. Se demuestra que para que $\delta S = 0$, la condición necesaria y suficiente es que se satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (20)$$

Esta es la ecuación geodésica de movimiento de una partícula. Cualquier trayectoria que satisfaga la ecuación geodésica, *extremiza* la distancia entre dos eventos en la geometría dada.

1.3 Transformaciones de Lorentz y relatividad especial

Una transformación lineal entre $\{x^\alpha\} \rightarrow \{x^{\alpha'}\}$ de la forma

$$x^{\alpha'} = \Lambda_{\beta}^{\alpha'} x^\beta + x_0^{\alpha'}, \quad (21)$$

siendo $x_0^{\alpha'}$ constantes, Λ_{β}^{α} matriz que satisface $\Lambda_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\delta}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}$, y $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ recibe el nombre de transformación de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz fueron obtenidas en primer lugar por Hendrik Lorentz. Él buscaba el grupo de transformaciones que mantuviera invariantes las ecuaciones del electromagnetismo entre sistemas inerciales y cumpliera con la observación de que la velocidad de las ondas electromagnéticas, como la luz, es constante en el vacío⁵. Posteriormente Minkowski y Poincaré desarrollaron su formalismo matemático. Einstein las retomó dotándolas de significado físico en la teoría de la relatividad especial, presentada diez años antes que la relatividad general.

La relatividad especial surge de retomar el principio de relatividad galileano de que las leyes de la física son invariantes en todos los marcos de referencia inerciales más la suposición de que la velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los marcos de referencia inerciales. Estos dos postulados son equivalentes a decir que

Las leyes de la naturaleza son invariantes ante transformaciones de Lorentz.

Einstein[9] estudió las implicaciones de tal afirmación. Para empezar, si la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales, entonces el tiempo y el espacio debe *acomodarse* para preservar la constancia de la velocidad de la luz. Esto significa que el espacio y el tiempo no son absolutos. La dilatación del tiempo, la contracción de las longitudes y la no simultaneidad entre eventos vistos por distintos observadores inerciales son deducciones de la relatividad especial ya comprobadas.

Se dice que es relatividad especial o restringida porque sólo es válida entre sistemas inerciales, donde una partícula de prueba se mueve sin aceleración. Su generalización requiere aceptar un principio más, a continuación expuesto.

⁵Los aportes teóricos de Maxwell y los experimentos de Michelson y Morley en 1881 y 1888 corroboraban tal afirmación.

1.4 Principio de Equivalencia

En la ecuación geodésica se observa que la geometría del espaciotiempo, a través de los componentes de la conexión de Levi Civita, es la que determina las trayectorias geodésicas de una partícula libre sobre cierta variedad dotada de una métrica. Si una partícula se mueve a través de una geodésica se dice que está en un sistema inercial. En caso contrario la partícula se encuentra en un sistema no inercial, esto es, está acelerada.

La relatividad especial está restringida a trabajar con sistemas inerciales. Adoptando el principio de equivalencia es posible trabajar también con sistemas no inerciales. Éste estipula que un sistema no inercial es equivalente a tener un campo gravitacional⁶. En palabras de Einstein,

En cada punto del espaciotiempo en un campo gravitacional arbitrario, es posible elegir un sistema coordenado localmente inercial tal que, dentro de una región suficientemente pequeña alrededor de dicho punto, las leyes de la Naturaleza toman la misma forma que un sistema de coordenadas cartesianas no acelerado en ausencia de gravedad [1].

Es decir que una partícula en presencia de un campo gravitacional es equivalente a estar en un sistema no inercial, y éste puede ser descrito localmente con la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, entonces son válidos los resultados de relatividad especial.

La razón de establecer una equivalencia entre un sistema no inercial y un campo gravitacional, y no un campo de otra naturaleza física proviene de la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitacional, también llamado principio de equivalencia débil. Éste fue establecido por Galileo Galilei, retomado por Isaac Newton y comprobado en el famoso experimento de Eötvös.

En otras palabras, el campo gravitacional tiene una naturaleza distinta a los otros campos físicos porque puede ser descrito como un sistema no inercial, donde las partículas se mueven aceleradamente siguiendo la geometría del espaciotiempo. Es decir que el campo gravitacional se puede describir de forma puramente geométrica.

Imponiendo esto se vuelve válido el principio de covarianza general que dice que las ecuaciones mantienen su forma bajo cualquier transformación $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$. Esto es, si una ecuación es válida en un sistema coordenado, lo será en cualquier otro.

1.5 Ecuaciones de campo

Una vez admitido el principio de equivalencia, el principal problema es encontrar un objeto tensorial que represente a la gravedad como curvatura⁷ de la variedad diferenciable. Por suerte, George

⁶La cantidad que describe de forma invariante a ese sistema curvado es el escalar de Riemman, definido en la siguiente sección

⁷El tensor curvatura está definido para toda variedad dotada de una conexión como:

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w.$$

Friedrich Riemann, años antes encontró una cantidad tensorial mientras trabajaba sobre hipersuperficies. En su honor, se nombra tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\gamma\lambda}(\Gamma_{\beta\delta,\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\delta,\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\eta}^{\lambda}\Gamma_{\beta\delta}^{\eta} - \Gamma_{\beta\eta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\delta}^{\eta}). \quad (22)$$

El tensor de Riemann depende de los símbolos de Christoffel y sus primeras derivadas, es decir, depende de las primeras y segundas derivadas de la métrica. Contrayendo el tensor de Riemann consigo mismo se construye el escalar de Kretschmann

$$K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (23)$$

útil para conocer cantidades invariantes de los espacios. Por otro lado, al hacer una doble contracción sobre los índices que no se anulan se obtiene el tensor de Ricci, cuya traza recibe el nombre de escalar de Ricci. Respectivamente son,

$$R_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta}R_{\gamma\alpha\delta\beta}, \quad R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (24)$$

Éste satisface las siguientes propiedades

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta\rho\sigma} = -R_{\rho\sigma\alpha\beta}. \quad (25)$$

Una observación es pertinente. En un sistema localmente inercial, las coordenadas espaciales son cartesianas, entonces la métrica que lo describe es la de Minkowski. En tal caso para todo punto, $\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} = 0$ y se demuestra que la curvatura es nula (relatividad especial). En cualquier otro sistema no inercial, la métrica no es Minkowski sino $g_{\alpha\beta}$ y $\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} \neq 0$, lo que implica una curvatura no nula y por tanto la existencia de un campo gravitacional (relatividad general).

Por otro lado, una condición importante que deben satisfacer las ecuaciones relativistas es que en el límite newtoniano tiendan a las ecuaciones de mecánica clásica. La ecuación de Poisson relaciona el potencial gravitacional newtoniano ϕ_g con la distribución de la densidad ρ de la fuente,

$$\nabla^2\phi_g = 4\pi G\rho. \quad (26)$$

El lado derecho contiene la información de la fuente y su generalización en el espaciotiempo es el tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$ cuya forma depende de la distribución de materia y energía y debe satisfacer las leyes de conservación,

$$T_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0. \quad (27)$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de las ecuaciones relativistas debe satisfacer también que la

Está relacionando con el transporte paralelo, que mide el cambio de un vector al transportarlo de forma paralela en la variedad Riemanniana. Para la conexión de Levi-Civita empleada en relatividad general, se reduce a la ec. (22).

derivada covariante respecto a un índice sea cero y debe estar relacionado con la métrica mediante una combinación de los tensores relacionados con la curvatura arriba definidos. Se puede demostrar que el único tensor que lo satisface es el tensor de Einstein-Ricci definido por ⁸:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}. \quad (28)$$

Por construcción satisface,

$$G_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0, \quad (29)$$

de donde se deducen las identidades de Bianchi. Éstas son:

$$R_{\alpha[\beta\rho\sigma]} = R_{\alpha\beta\rho\sigma} + R_{\alpha\rho\sigma\beta} + R_{\alpha\sigma\beta\rho} = 0 \quad (30)$$

$$R_{\alpha\beta[\rho\sigma;\delta]} = R_{\alpha\beta\rho\sigma;\delta} + R_{\alpha\beta\sigma\delta;\rho} + R_{\alpha\beta\delta\rho;\sigma} = 0. \quad (31)$$

Finalmente, se obtienen las ecuaciones de campo de la relatividad general son,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (32)$$

Son efectivamente tensoriales, covariantes y elegantes.

Las ecuaciones de campo están representadas en lenguaje compacto pero si se les desarrolla, resultan ser diez ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas.

Resolverlas significa encontrar una métrica que describa al espaciotiempo dada una distribución de materia y energía, lo cual, salvo casos altamente simétricos, es prácticamente imposible de hacer analíticamente.

Las leyes de conservación de masa y momento, las ecuaciones de continuidad y de Euler así como la gravitación newtoniana y el electromagnetismo de Maxwell se derivan correctamente de las ec. (32)

Exitosamente las ecuaciones de campo recogen todas las leyes de la física en el límite donde la velocidad es mucho menor que c . El factor $\frac{8\pi G}{c^4}$ se añade para que las ecuaciones tiendan correctamente a la ecuación de Poisson, como se verá a continuación.

⁸Las ecuaciones de campo admiten incluir un componente proporcional a la métrica $\Lambda g_{\mu\nu}$, así la versión más general del tensor de Einstein es

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

a Λ se le conoce como la constante cosmológica y ocupa un lugar fundamental en cosmología. Por simplificación, en este trabajo se omite.

1.5.1 Límite newtoniano

Considérese un potencial gravitatorio muy pequeño respecto a c^2 ; la métrica para un campo gravitatorio débil se representa

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{h_{\alpha\beta}(x)}{c^2}, \quad h_{00} \approx -2\phi_g.$$

Haciendo el límite $v \lll c$, la única componente no nula del tensor de Ricci es

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial(x^i)^2} = \nabla^2 \phi_g.$$

Al sustituir en las ecuaciones de campo, con $T_{00} = -\rho c^2$

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G\rho \quad (33)$$

que es la ecuación de Poisson, coherente con la mecánica newtoniana. Comprobamos que las ecuaciones de campo en el límite de campo débil se reducen a la ecuación clásica de Poisson.

1.5.2 Solución de Schwarzschild

A pocos meses de que Einstein hiciera públicas las ecuaciones de la relatividad general, Karl Schwarzschild encontró la primera solución no trivial refugiado en las trincheras de una guerra en 1916. Consideró un espaciotiempo estático ($g_{\alpha\beta,t} = 0$), simetría esférica y un campo gravitacional isotrópico. En tal caso los componentes de la métrica no dependen de la coordenada temporal t . La forma estándar de esa métrica⁹ en coordenadas esféricas es:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (34)$$

Las componentes no nulas de la métrica son

$$g_{tt} = B(r), \quad g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

Con esto se construyen los doce símbolos de Christoffel no nulos y el tensor de Ricci, el cual tiene cuatro componentes no nulas y $R_{\nu\mu} = 0$ para $\alpha \neq \beta$. En el vacío las ecuaciones de campo se reducen a

$$R_{\beta\alpha} = 0, \quad (35)$$

⁹La forma más general para una métrica isotrópica y estática es $d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dt(\bar{x}\cdot d\bar{x}) - 2D(r)(\bar{x}\cdot d\bar{x})^2 - C(r)d\bar{x}^2$. Al reescribir la métrica en coordenadas esféricas y definir un tiempo coordenado $t' = t + Y(r)$ se elimina la componente g_{tr} . El radio se define $r'^2 = C(r)r^2$ y se obtiene finalmente la expresión (10) conocida como forma estándar. [Weinberg, Capítulo 8]

por lo tanto, se obtienen cuatro ecuaciones para $B(r)$ y $A(r)$:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{B''}{2A} + \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{B'}{A} = 0 \\ R_{rr} &= \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = 0 \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = 0 \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \end{aligned}$$

donde $A = A(r)$, $B = B(r)$ y $'$ significa derivada respecto a r . De estas ecuaciones se encuentra que $B'/B = -A'/A$, entonces $AB = \text{constante}$. Además, se impone que cuando $r \rightarrow \infty$, la métrica tiene que aproximarse a Minkowski en coordenadas esféricas. Por lo tanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$$

Con esto encontramos que $A(r) = \frac{1}{B(r)}$. La ecuación diferencial para B resulta ser $\frac{d}{dr}(rB) = rB' + B = 1$, cuya solución es

$$rB(r) = r + \text{constante}.$$

En el límite newtoniano $g_{tt} = -B \rightarrow -1 - 2\phi$, donde $\phi = \frac{-MG}{c^2 r}$ es el potencial newtoniano. Por lo tanto la constante de integración es $-2MG$. Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} B(r) &= \left[1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right] \\ A(r) &= \left[1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Al remplazar en el tensor métrico, el elemento de línea resulta ser

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (36)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

La solución dada por la ec. (36) es una solución exacta y es de las más importantes porque modela a un agujero negro estático. En el capítulo 4 será retomada.

1.5.3 Solución de Kerr

Se considera el caso anterior pero suponiendo una distribución de masa con simetría axial en rotación con momento angular J . La métrica que describe a la geometría, en coordenadas de Boyer-Lindquist, es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MGr}{c^2 \Sigma} \right) c^2 dt^2 + \frac{4aGMr \sin^2 \theta}{c^3 \Sigma} c dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{c^4 \Sigma} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

donde M es la masa del objeto rotante, $a = J/M$ es el momento angular específico que relaciona el momento angular y la masa. $\Sigma = r^2 + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta$; $\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$. La métrica de Kerr predice la existencia de agujeros negros rotantes, llamados agujeros de Kerr. Es más probable que existan agujeros de Kerr que de Schwarzschild, pues la mayoría de la materia en el universo está en movimiento.

Por último, añadir que la relatividad general ha sido una de las teorías que, junto con la mecánica cuántica, más desarrollo ha tenido. No solo explica satisfactoriamente fenómenos como el corrimiento al rojo gravitacional de líneas espectrales, la deflexión de la luz por el sol y la precesión del perihelio de las orbitas de los planetas interiores. También predijo la existencia de objetos y fenómenos de importancia astrofísica, en particular la radiación gravitacional, tema central del siguiente capítulo.

Capítulo 2

Ondas Gravitacionales

Study one idealization after another. Build a catalog of idealizations, of their properties, of techniques for analyzing them. This is the only way to come to grips with so complicated a subject as general relativity!

Misner, Thorne & Wheeler

En el capítulo anterior se presentó la teoría de la relatividad general. Como se dijo, es una teoría geométrica de la gravedad a diferencia de la teoría de la gravitación universal de Isaac Newton que la interpreta como fuerza entre cuerpos con masa.

Una de las implicaciones más incómodas de la teoría newtoniana es que la gravedad se propaga instantáneamente. El mismo Isaac Newton reconocía esta vaguedad pero aceptó presentar su ley de la gravitación universal [1] con la esperanza que después de él, alguien solucionara tal problema. Tuvieron que pasar más de dos siglos para ello.

En 1916, Einstein comenzó a estudiar las implicaciones de las ecuaciones de campo. Mediante su linealización, -presentada en la sección 2.1- predijo que la gravedad se propaga en forma de ondas a la velocidad de la luz. Las llamó ondas gravitacionales y no son más que perturbaciones sobre el espaciotiempo cuya fuente es cualquier sistema de masas aceleradas. Por ejemplo, en la Fig. 2.1 se representan las ondas gravitacionales generadas por la coalescencia de dos agujeros negros.

Si tienen una amplitud mayor a $10^{-22}m$, pueden ser detectadas por los interferómetros de LIGO [2], [3] colocados en nuestro planeta, específicamente en Livingston y Hanford, Estados Unidos, es decir que LIGO detecta perturbaciones del orden ¡de una millonésima parte del tamaño del protón!¹⁰ Existen otros proyectos, como VIRGO [4] que el primero de agosto de 2017 comenzó operaciones para apoyar los resultados de LIGO en la búsqueda de ondas gravitacionales. VIRGO cuenta con un interferómetro localizado cerca de Pisa, Italia pero tiene menor sensibilidad que

¹⁰Medir el radio del protón no es posible, principio de incertidumbre, pero si se le han podido cotas superiores de $10^{-15} m$.

LIGO, sin embargo, tener tres interferómetros buscando señales permite triangular y acotar mejor la región del espacio de donde provienen las señales.

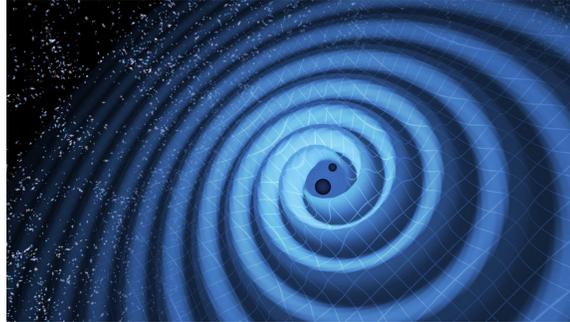


Figura 2.1: Ondas gravitacionales producidas en la fusión de los dos agujeros negros de 14 y 8 masas solares. Corresponde a la segunda detección de ondas gravitacionales hecha por LIGO el 26 de diciembre de 2015. Créditos: LIGO/T. Pyle

Puesto que las ondas gravitacionales transportan por el espaciotiempo energía e información de los fenómenos que las producen, detectarlas aporta información de los fenómenos astrofísicos más interesantes y energéticos de nuestro universo. A partir de 1980, comenzaron los esfuerzos sistemáticos para detectarlas¹¹. Por supuesto, antes de intentar detectarlas se requiere desarrollar modelos teóricos capaces de modelar las fuentes de emisión de radiación gravitacional.

Sin embargo, los espaciotiempos que generan radiación gravitacional son no simétricos y las fuentes son sistemas de campo fuerte, altamente energéticos, como la colisión de dos objetos compactos. Las aproximaciones de campo débil, homogeneidad y simetría dejan de ser válidas, por lo tanto se deben considerar las ecuaciones completas -no lineales y con cientos de términos- y evolucionarlas directamente por métodos numéricos computacionales. De éstos, el más usado es el formalismo 3+1¹². Ver [5] y [6].

No obstante, lejos de las fuentes de emisión, las ondas gravitacionales pueden verse como una perturbación a una métrica de fondo y por tanto modelarse mediante métodos perturbativos, computacionalmente menos costosos que las evoluciones completas porque las ecuaciones perturbadas suelen ser de primer o segundo grado. De hecho, con teoría de perturbaciones -discutida en la primera sección de este capítulo- se deduce la existencia y algunas de las propiedades -descritas en la segunda sección- de las ondas gravitacionales.

En la tercera sección se discuten las fuentes de las señales y en la última sección su detección y extracción.

¹¹El antecedente de la construcción de detectores de ondas gravitacionales se remonta a los inicios de la década de 1960 cuando J. Webber construyó un par de cilindros masivos de aluminio. Por medio del fenómeno de resonancia, Webber consideraba que podría detectar ondas con una sensibilidad de 10^{-13} metros. A finales de 1960, Weber declaró haber detectado una señal, sin embargo su resultado no ha podido ser reproducido ni con barras detectoras más sensibles.

¹²A grosso modo el formalismo 3+1 consiste en reescribir las ecuaciones de campo en una forma canónica, llamada ADM y resolverlas como un problema de Cauchy. Para ello se hacen foliaciones sobre el espaciotiempo que separan las dimensiones espaciales (3) de la temporal (1) en hipersuperficies espaciales que evolucionan para la coordenada temporal [14].

2.1 Teoría de perturbaciones

Las teorías de perturbaciones son utilizadas en distintas ramas de la física para encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales. Los métodos perturbativos tienen restricciones importantes porque solo pueden aplicarse en condiciones límite.

En relatividad general, los métodos perturbativos pueden utilizarse pero tomando en cuenta que tanto la métrica como los campos físicos se deben perturbar.

Si se conoce una solución exacta a las ecuaciones de Einstein, en régimen de campo débil es posible modelar las ondas gravitacionales como una perturbación a esa solución [7]. Se propone un espaciotiempo de fondo bien definido $g_{\alpha\beta}^B$ más una pequeña perturbación $h_{\alpha\beta}$. El sistema de estudio queda descrito por la métrica

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^B + h_{\alpha\beta}, \quad (37)$$

con $|h_{\alpha\beta}| \ll |g_{\alpha\beta}^B|$.

Posteriormente, la idea es encontrar expresiones para $h_{\alpha\beta}$ sustituyendo la métrica en las ecuaciones de campo y las soluciones conocidas para la métrica de fondo $g_{\alpha\beta}^B$.

La teoría perturbativa es muy útil en variados casos. Por ejemplo, muy lejos de cualquier objeto compacto, se propone que la métrica de fondo es la métrica del espacio plano $\eta_{\alpha\beta}$ (Minkowski) más una perturbación lineal $h_{\alpha\beta}$, es decir que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (38)$$

tal que $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ y $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Inversamente, $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$, donde $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\sigma}h_{\rho\sigma}$. A esta situación se le conoce como campo débil.

Un sistema binario puede ser descrito por la métrica del objeto central más una pequeña perturbación de fondo, ocasionada por el objeto menos masivo, lo cual simplifica el problema de los dos cuerpos.

Otro caso donde la teoría perturbativa se puede usar es un sistema binario conformado por un objeto compacto que orbita un agujero negro de Schwarzschild. La métrica de fondo será la de Schwarzschild $g_{\alpha\beta}^{Sc}$ y el objeto compacto se representará por una perturbación, de tal forma que la métrica del sistema binario es

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{Sc} + h_{\alpha\beta}. \quad (39)$$

Más aún, un sistema de dos agujeros negros que están a punto de colisionar puede estudiarse, conforme se aproxima al estado final, como una solución tipo Kerr (agujero negro rotante) más una perturbación.

Otra cuestión importante a tener en cuenta es bajo que condiciones es válida la aproximación

perturbativa. Si \mathcal{R} es el radio de curvatura del fondo ($g_{\alpha\beta}^B$), λ la longitud de onda reducida (dividida por 2π) y \mathcal{A} la amplitud de la perturbación, entonces ee deben cumplir las siguientes condiciones [9, cap 35]:

$$\mathcal{A} \ll 1 \text{ y } \lambda/\mathcal{R} \ll 1.$$

Como se observa, la teoría perturbativa puede ser una buena aproximación en el estudio de sistemas astrofísicos. El siguiente paso para analizar el sistema es expandir las ecuaciones de Einstein para una métrica de la forma (37) a primer orden en $h_{\alpha\beta}$. A este método se le conoce como teoría linearizada en aproximación de campo débil.

2.1.1 Teoría linearizada

Considérese la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ más una pequeña perturbación $h_{\alpha\beta}$, ec. (38). Al hacer una transformación de Lorentz $x^{\alpha'} = \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} x^{\alpha}$, se tiene que

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\rho} \Lambda_{\beta}^{\sigma} g_{\rho\sigma} = \Lambda_{\alpha}^{\rho} \Lambda_{\beta}^{\sigma} (\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}).$$

La métrica de Minkowski es invariante ante transformaciones de Lorentz, por lo tanto

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}, \quad (40)$$

con

$$h'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\rho} \Lambda_{\beta}^{\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (41)$$

Se observa que $h_{\alpha\beta}$ también es un tensor bajo transformaciones de Lorentz. Usando la expresión (14), con la métrica se obtienen los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\nu\sigma} (h_{\alpha\sigma,\beta} + h_{\sigma\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\sigma}). \quad (42)$$

A primer orden en h , el tensor de Riemman no tendrá términos con Γ^2 , de tal forma que al bajar un índice del tensor éste se expresa como

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\rho\lambda} (\Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\lambda}),$$

por tanto, el tensor de Riemman linearizado en función de las componentes de h es

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\mu\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho}).$$

Al contraer μ y ρ el tensor de Ricci toma la forma,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu,\nu\sigma}^\sigma + h_{\nu,\mu\sigma}^\sigma - h_{,\mu\nu} - \square h_{\nu\mu}), \quad (43)$$

donde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ y $\square = \eta^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu = -c^2\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$.

Y el escalar de Ricci es,

$$R = \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h. \quad (44)$$

Se sustituyen las expresiones (43) y (44) en el tensor de Einstein,

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R \\ &= \frac{1}{2}(h_{\mu,\sigma\nu}^\sigma + h_{\nu,\sigma\mu}^\sigma - h_{,\mu\nu} - \square h_{\nu\mu} - \eta_{\mu\nu}h_{,\nu\mu}^{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\square h). \end{aligned} \quad (45)$$

Debe definirse una norma y dada la libertad de elección se elige aquella que que satisfaga:

$$\bar{h} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h, \quad (46)$$

$$\partial^\beta\bar{h}_{\beta\alpha} = 0. \quad (47)$$

A esta condición se le conoce como *Norma de Lorentz*¹³ y permite simplificar el tensor de Einstein, a primer orden en h en

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\alpha\beta}.$$

Finalmente, al sustituir en las ecuaciones de campo,

$$\square\bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (48)$$

¹³Justificación de elección de Norma de Lorentz.

Sea una transformación de la forma $x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)$, con $|\partial_\beta\xi^\alpha| \ll 1$ (del mismo orden de magnitud que $h_{\alpha\beta}$). Reciben el nombre de *transformaciones de norma*. Las componentes de la métrica en las nuevas coordenadas son:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\gamma} g_{\lambda\gamma} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} + O(h\partial\xi, (\partial\xi)^2); \quad h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - (\partial_\alpha\xi_\beta + \partial_\beta\xi_\alpha)$$

con $|h'_{\alpha\beta}| \ll 1$. De esta forma, $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$, bajo una transformación de norma se transformará en

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\xi_\beta - \partial_\beta\xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\xi^\mu$$

Ahora, elegiremos la transformación de norma tal que $\square\xi_\alpha = \partial^\beta\bar{h}_{\alpha\beta}$. Se sigue satisfaciendo que $|\partial_\beta\xi^\alpha| \ll 1$ y $|\bar{h}_{\alpha\beta}| \ll 1$. Con esto, obtendremos que $\partial^\beta\bar{h}'_{\alpha\beta} = 0$. A esta elección de transformación de norma que satisface la ec. (46) se le conoce como *norma de Lorentz* y siempre es aplicable. Además, las transformaciones de norma tienen la propiedad de no cambiar las componentes del tensor de Riemman a primer orden. Esto es ventajoso porque significa que en un espaciotiempo de gravedad débil, la curvatura no cambia ante transformaciones de norma.

que describe la perturbación h en presencia de materia y energía contenida en $T_{\alpha\beta}$, dentro de la teoría linearizada, válida en situaciones de campo débil para bajas velocidades. El tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$ debe ser calculado a orden cero en $h_{\alpha\beta}$, pues se supone que las contribuciones de $T_{\alpha\beta}$ a ordenes mayores son despreciables.

La ec. (48) tiene por solución [6]

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x-x') T_{\alpha\beta}(x'), \quad (49)$$

donde G es la función de Green que satisface $\square G(x-x') = \delta^4(x-x')$, aunque hace falta poner condiciones de borde adecuadas, lo cual representa un reto más en la resolución de la ecuación de onda.

Escrita de esta forma, $\bar{h}_{\mu\nu}(x)$ se interpreta como *radiación gravitacional* producida por la fuente $G(x-x')T_{\alpha\beta}(x')$.

En general, la integral de la ec.(49) se resuelve numéricamente, aunque puede simplificarse un poco en ciertas condiciones.

2.2 Propiedades de las ondas gravitacionales

En [8], [9], [10] se encuentran descripciones detalladas de las propiedades de las ondas.

2.2.1 Ondas planas

La expresión (48) en el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) se reduce a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} \equiv \nabla^c \nabla_c \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (50)$$

que tiene por solución ondas planas de la forma

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \exp(A_{\mu\nu} i k_\alpha x^\alpha) = A_{\alpha\beta} \cos(\omega ct - k_j x^j)$$

donde $A_{\alpha\beta}$ es la amplitud y hemos definido $k_\alpha x^\alpha = k_0 x^0 + k_j x^j$, con $k_0 = \omega$, $x^0 = ct$. Se interpreta \mathbf{k} como el vector de onda, que apunta en la dirección de propagación, ω como la frecuencia angular, f la frecuencia y λ la longitud de onda. Se relacionan de la siguiente manera:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}; \quad \lambda |\mathbf{k}| = 2\pi.$$

La relación de dispersión es,

$$\omega = c |\mathbf{k}|,$$

y significa que las velocidad de fase y de grupo son iguales a la velocidad de la luz. Al sustituir en la ec. (50), se observa que debe satisfacer que

$$\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0,$$

lo que significa que k^μ son las componentes de un vector nulo respecto a $\eta_{\mu\nu}$. Además, al imponer la condición de norma, en un sistema coordenado, se tiene que

$$k^\alpha A_{\alpha\beta} = 0,$$

es decir que el tensor de amplitud es ortogonal a la dirección de propagación de la onda.

2.2.2 Polarización

La norma de Lorentz no determina de forma única a $\bar{h}_{\alpha\beta}$ pues se pueden aplicar transformaciones infinitesimales que mantengan la condición de norma. Con tal libertad, en lo que sigue se trabajará dentro de la norma TT “transversa sin traza”, donde se satisface que,

$$\bar{h}_{\alpha 0}^{TT} = 0, \quad \bar{h}^{TT\alpha}{}_{\alpha} = 0, \quad (51)$$

más las condiciones de la norma de Lorentz:

$$\bar{h} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad \partial^\beta \bar{h}_{\beta\alpha} = 0.$$

En este marco, las componentes temporales y la traza son cero; los únicos componentes no nulos son espaciales.

Las ondas gravitacionales tienen asociados solo dos grados de polarización. Para mostrarlo, se parte de un sistema de coordenadas donde $u^\alpha = (c, 0, 0, 0)$ es un vector tiempo normalizado tal que

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -c^2,$$

y

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{TT}u^\beta = 0, \quad \eta^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta}^{TT} = 0. \quad (52)$$

Dadas las condiciones anteriores, quedan determinados ocho de los diez componentes independientes de h^{TT} . Por tanto, h tiene unicamente dos grados de libertad, que corresponden a los dos posibles estados de polarización de la radiación gravitacional, lo que motiva definir los tensores de polarización $e_{\alpha\beta}^+$ y $e_{\alpha\beta}^\times$, y las amplitudes h_+ y h_\times . Así, cualquier onda gravitacional puede expresarse como,

$$h_{\alpha\beta}^{TT} = h_+ e_{\alpha\beta}^+ + h_\times e_{\alpha\beta}^\times. \quad (53)$$

Por ejemplo, si la dirección de propagación de la onda es el eje $+z$, $k^\mu = (\frac{c}{\omega}, 0, 0, k)$, $h_{\alpha 3} = 0$, los únicos componentes de los tensores no nulos son,

$$e_{xx}^+ = -e_{yy}^+ = 1, \quad e_{xy}^\times = e_{yx}^\times = 1. \quad (54)$$

La onda gravitacional se reduce a,

$$h_{\alpha\beta}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t, \mathbf{x}) & h_\times(t, \mathbf{x}) & 0 \\ 0 & h_\times(t, \mathbf{x}) & -h_+(t, \mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

como se muestra en la siguiente figura.

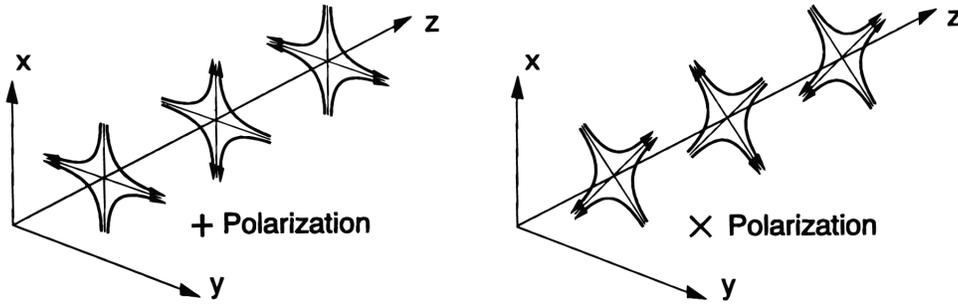


Figura 2.2: Polarización $+$ y \times de las ondas gravitacionales propagadas en la dirección z .

2.2.3 Efecto de la onda sobre un cuerpo

Una ventaja de la descripción en la norma TT es que el tensor de Riemman se expresa en términos de la métrica perturbada,

$$R_{\alpha 0 \beta 0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{c^2 \partial t^2} h_{\alpha\beta}^{TT}, \quad (56)$$

donde los dos puntos indican segunda derivada temporal. Es importante notar que todo el tensor de Einstein, que contiene la información del campo gravitacional, queda fijado por la métrica perturbada.

Para detectar directamente ondas gravitacionales primeramente se debe saber como la onda interacciona con la materia. El efecto no puede ser detectado para una sola partícula, se requieren

considerar al menos dos partículas de prueba cercanas entre sí.

Considérense sus trayectorias $x^\alpha(\tau)$ y $x^\alpha(\tau) + \delta x^\alpha(\tau)$ para un tiempo propio τ y $\delta x^\alpha(\tau)$ el vector de desplazamiento. Cada una seguirá su propia trayectoria geodésica. La evolución del vector desplazamiento está dada por la ecuación de desviación geodésica,

$$\frac{d\delta x^\alpha}{c^2 dt^2} \approx -R_{0\beta 0}^{\alpha TT} \delta x^\beta.$$

Integrando se encuentra que el vector de desplazamiento cambia en función del tensor de la onda gravitacional de acuerdo a

$$\delta x_\alpha = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta}^{TT} x_0^\beta. \quad (57)$$

El efecto es más claro si se considera un círculo de partículas libres. Ante el paso de una onda gravitacional, la distribución de ondas se comprime o se achata en direcciones perpendiculares y alternadas, como se muestra en la siguiente figura:

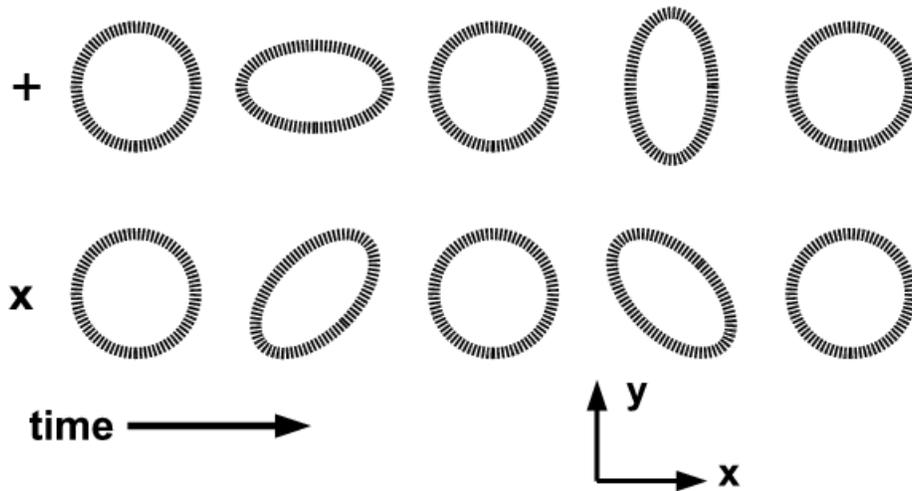


Figura 2.3: Polarización + y x de las ondas gravitacionales propagadas en la dirección z.

2.2.4 Energía de las ondas

Las ondas gravitacionales, como cualquier onda, transportan energía, momento lineal y angular. Para estudiar estas propiedades se asocian los segundos términos de la expansión de las ecuaciones de Einstein a la curvatura de fondo y se obtienen ecuaciones de segundo orden para $h_{\alpha\beta}$ en el vacío. Los términos de primer orden se consideran parte de la perturbación gravitacional. Los términos asociados a la fuente definen un tensor de energía-momento efectivo para la onda gravitacional nombrado $T_{\alpha\beta}^{GW}$.

En teoría linealizada para fondo tipo Minkowski se reduce a

$$T_{\alpha\beta}^{GW} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \partial_\alpha h_{ij}^{TT} \partial_\beta h^{TT ij} \rangle \quad (58)$$

donde $\langle \rangle$ denota un promedio sobre las longitudes de onda:

$$\langle \partial_\alpha h_{ij}^{TT} \partial_\beta h^{TT ij} \rangle = \frac{1}{\int d\mathcal{A}} \int \partial_\alpha h_{ij}^{TT} \partial_\beta h^{TT ij} d\mathcal{A}.$$

Con este tensor se define, por ejemplo, el flujo de energía en la dirección radial dado por los componentes T_{tr}^{GW} .

Por otro lado, por conservación la luminosidad de la onda gravitacional debe ser igual al negativo del cambio de energía de la fuente. Así, se define la luminosidad que pasa a través de una superficie esférica centrada en la fuente como,

$$L_{GW} \equiv -\frac{dE}{dt} = -\lim_{r \rightarrow \infty} \int T_{tr}^{GW} r^2 d\Omega. \quad (59)$$

y en términos de las amplitudes de la onda,

$$L_{GW} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \int \langle \dot{h}_+^2 \dot{h}_\times^2 \rangle d\Omega. \quad (60)$$

2.2.5 Momento cuadrupolar

En el apartado 2.1.1 se mostró que en campo débil y bajas velocidades, la señal gravitacional se obtiene de integrar el tensor de energía-momento. En [10] se muestra como, a distancias lejanas de la fuente de emisión, haciendo uso de la función de Green, una expansión en potencias de x^i/r y el teorema del virial¹⁴ se obtiene una importante relación para una fuente newtoniana:

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, x^k) = \frac{2}{r} \ddot{I}_{\alpha\beta}(t-r), \quad (61)$$

donde $I^{\alpha\beta}$ es el segundo momento de la distribución de masa definido como,

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int d^3 x' \rho_0(t, x'^\gamma) x'^\alpha x'^\beta. \quad (62)$$

El significado físico es que la radiación gravitacional es causada por una distribución de masa cuadrupolar. Aunque este resultado se obtiene para campo débil, en muchas fuentes físicas de campo fuerte, la aproximación sigue siendo una útil y válida suposición.

¹⁴El teorema del virial que se aplica, como consecuencia de las leyes de conservación para el tensor de materia es,

$$\int d^3 x' T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3 x' T^{tt} x'^\alpha x'^\beta,$$

con $T^{tt} = T^{00}$.

Así, aunque la radiación gravitacional comparte propiedades con la radiación electromagnética, un hecho que las diferencia es que la última si puede ser causada por distribuciones dipolares, no así la gravitacional.

2.3 Fuentes

En las secciones anteriores se mostró que las ondas gravitacionales transportan energía y deforman el espaciotiempo a su paso y por lo tanto interactúan con la materia y esto, en principio debe ser medible.

Cualquier sistema físico compuesto por dos masas aceleradas entre sí o que tiene un cambio de momento angular, emitirá ondas gravitacionales. Por ejemplo, el movimiento del brazo con un ángulo de torsión emite ondas porque está cambiando su momento angular, sin embargo la amplitud de la onda es increíblemente pequeña: mucho menor que la distancia de Planck y por lo tanto, es prácticamente imposible detectarla. Por suerte, en el universo ocurren eventos altamente energéticos cuyas amplitudes, se espera que sean ordenes de magnitud mucho mas grandes.

Las fuentes más prometedoras de emisión gravitacional son sistemas binarios de dos objetos compactos, como agujeros negros o estrellas de neutrones. De hecho, las tres primeras detecciones de LIGO corresponden a tres parejas de agujeros negros colisionando, respectivamente.

Un sistema binario de dos masas m_1 y m_2 orbitando en el plano xy se modela newtonianamente desde el marco de la masa reducida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Es relativamente sencillo encontrar los componentes del momento cuadrupolar $I_{\alpha\beta}$ en coordenadas esféricas (ver [11]), luego calcular sus derivadas para obtener, usando la ec. (61):

$$\begin{aligned} h_+ &= -\frac{2}{r}\Omega^2\mu R^2(1 + \cos^2\theta)\cos 2\Omega(t-r) \\ h_\times &= -\frac{4}{r}\Omega^2\mu R^2\cos\theta\sin 2\Omega(t-r), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que la magnitud h de la amplitud de la onda es del orden de

$$h \simeq \frac{4}{r}\frac{\mu\Omega^2 R^2}{c^2} = \frac{4}{r}\frac{\mu MG}{c^2 R}, \quad (63)$$

donde $M = m_1 + m_2$, y $\Omega^2 = M/R^3$ obtenida mediante las leyes de Kepler. h es llamado *strain* o esfuerzo.

Resalta que la frecuencia de la onda es la mitad de la frecuencia de la órbita en la aproximación cuadrupolar.

Por ejemplo, para dos masas iguales M , la masa reducida es $\mu = M/2$ y el strain de la onda gravitacional se estima como

$$h \simeq \frac{4 \mu M G}{r c^2 R} \simeq 5 \times 10^{-20} \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{M}{R} \right). \quad (64)$$

Así, un sistema de agujeros negros estelares con $M = 10M_{\odot}$, localizados a 20 Mpc y una separación de $R = \frac{6MG}{c^2}$, tendrá [20]

$$h \simeq 10^{-20} m.$$

Otras fuentes que se espera puedan detectarse son el colapso estelar, fondos estocásticos, estrellas de neutrones rotantes, agujeros negros supermasivos activos, sistemas binarios de estrellas de neutrones y agujeros negros¹⁵ y sucesos cosmológicos como el big bang.

2.4 Detección y extracción de la forma de la onda

La detección de ondas impone enormes retos tecnológicos y computacionales [11].

Los detectores de LIGO y Virgo constan de dos y un interferómetro respectivamente, colocados a grandes distancias entre sí. Un interferómetro está compuesto por dos brazos en forma de L; cuando la señal interacciona, se comprime un brazo mientras se estira el otro.

Esto es porque, como se expuso en secciones anteriores, las ondas gravitacionales cambian la métrica del espaciotiempo y esos cambios ocurren con signos opuestos para las direcciones ortogonales. Dentro de los interferómetros están colocados espejos que permanecen locamente en reposo y conforman el interferómetro tipo Michelson. Se envía una señal laser y se divide en dos señales que llegan desfasadas a los espejos si una señal gravitacional interfirió en el recorrido de la luz. Aunque el principio experimental es simple, la dificultad radica en obtener la mayor sensibilidad y la menor interferencia externa (ruido) posible.



Figura 2.4: Fotografía de los interferómetros de LIGO localizados en Livingston y Hanford. Créditos: ligo Lab Caltech.

¹⁵Por ejemplo, un agujero negro supermasivo y uno estelar, conocido como *extreme mass ratio inspirals*.

Como las fuentes están muy alejadas de los detectores (provenientes de otras galaxias o clusters), las formas de las ondas bien pueden modelarse por métodos perturbativos. Por ello, la motivación principal en seguir desarrollando teoría de perturbaciones dentro de la relatividad general es aportar al análisis de datos recopilados por los detectores; pues éstos arrojan tanta información diaria, siendo la mayor parte ruido, que encontrar la señal es un arduo trabajo casi imposible si no se tiene una forma de onda numérica que buscar entre tanto ruido.

Entonces, el estudio de las ondas gravitacionales es una ciencia que requiere un trabajo cooperativo entre observación-teoría; los recursos computacionales en ambos casos son centrales, por un lado para el análisis de datos y por el otro para crear simulaciones numéricas y compararlas entre sí.

No obstante, aún con métodos perturbativos no es trivial extraer la forma de la señal porque muchas veces la onda depende de la elección de coordenadas y no es sencillo elegir la norma más apropiada. Existen distintas estrategias, (como el formalismo de Moncrief o el formalismo Newman-Penrose) para extraer la forma de la onda, que básicamente se dividen en:

- Comenzar proponiendo una métrica de la forma: $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\text{fondo}) + h_{\alpha\beta}(\text{perturbación})$ y resolver las ecuaciones en campo débil.
- Construir escalares para el espaciotiempo y considerar la perturbación como uno de esos escalares.

En este trabajo se utiliza el segundo enfoque mediante el formalismo de Newman-Penrose, descrito en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Formalismo Newman-Penrose

As we localize the position of a particle, its jumps essentially allong the null cone.

Roger Penrose, 1966.

Una vez expuestos los fundamentos de la relatividad general (Capítulo 1) y de las ondas gravitacionales (Capítulo 2), se presenta en este capítulo el formalismo de tétradas.

El formalismo tetradial fue desarrollado por Ezra Newman y Roger Penrose en 1962 [1] donde se construye un conjunto de ecuaciones equivalentes a las ecuaciones de campo con un orden reducido, lo cual simplifica altamente algunos problemas.

Su utilidad en este trabajo radica en que permite describir la radiación gravitacional y sus fuentes mediante una ecuación de perturbación. Con este formalismo se han logrado importantes aportes en relatividad general, por ejemplo en la búsqueda de soluciones exactas a las ecuaciones de campo, estudio de congruencias nulas, el problema de la energía del campo gravitacional e inmersión del espaciotiempo [2]. Teukolsky usó este formalismo para derivar ecuaciones en distintos campos en un fondo de Kerr [3]. El formalismo es una poderosa herramienta para modelar agujeros negros de Kerr y estudiar sus fuentes, como se puede ver en [4], donde Chandrasekhar sistematiza y detalla los formalismos de la teoría matemática de los agujeros negros.

Penrose comenzó estudiando geometría algebraica y posteriormente retomó varios resultados e hizo importantes aportes a la relatividad general, en particular en el estudio de las singularidades. Penrose consideraba que la estructura del cono de luz debía explotarse, así que formuló junto con Ezra un tratamiento equivalente pero elegante para estudiar la radiación gravitacional describiéndola a través de una tétrada conformada por dos vectores sobre el cono de luz y dos en el plano ortogonal.

A grosso modo, se introduce tal tétrada nula con la que se definen escalares, operadores y espinores -primera sección- y sobre ella se proyecta el tensor de Weyl para construir los escalares de Weyl -segunda sección-. La tétrada también se proyecta sobre el tensor de Riemman, las ecuaciones

de Einstein y las identidades de Bianchi -cuarta sección-. Las ecuaciones resultantes son llamadas de Newman-Penrose y aunque son muchas, son lineales en los operadores.

Una desventaja de este formalismo es que que la elección de la tetrada no es única. Este problema se aborda en la segunda sección. En la última sección se aplica la teoría de perturbaciones para el escalar de Weyl asociado a la onda gravitacional.

3.1 Tetrada nula, operadores y espinores

Considérese una base de cuatro vectores Z_a^μ linealmente independientes que satisfacen

$$Z_a^\mu Z_{b\mu} = \eta_{ab}, \quad g_{\mu\nu} = \eta^{ab} Z_{a(\mu} Z_{b\nu)}, \quad (65)$$

donde

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & -\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad (66)$$

siendo η la constante de normalización. Cualquier evento del espaciotiempo puede expresarse en términos de dicha base, a la que se le conoce como *tetrada de vectores nulos*.

Puesto que la radiación gravitacional viaja a la velocidad de la luz, convendrá usar como base tetradial a dos vectores reales sobre el cono de luz orientados hacia el futuro denotados como $Z_1^\mu = l^\mu$ y $Z_2^\mu = k^\mu$ y dos vectores $Z_3^\mu = m^\mu$ y $Z_4^\mu = m^{*\mu}$ localizados en el plano perpendicular al cono, siendo $Z_4^\mu = Z_3^{*\mu}$, donde * significa complejo conjugado.

También se contruye $Z^a = \eta^{ab} Z_b$, donde η^{ab} es tal que $\eta^{ac} \eta_{cb} = \delta_b^a$.

En la signatura del espaciotiempo $(+, -, -, -)$, $\eta = 1$. En la signatura $(-, +, +, +)$ adoptada en este trabajo, $\eta = -1$. Para una discusión sobre como cambia la tetrada por la elección de la signatura ver [5].

Entonces, con $\eta = -1$, la tetrada satisface las condiciones de ortonormalidad:

$$l^\mu k_\mu = -m^\mu m_\mu^* = -1, \quad (67)$$

y todos los demás productos son cero.

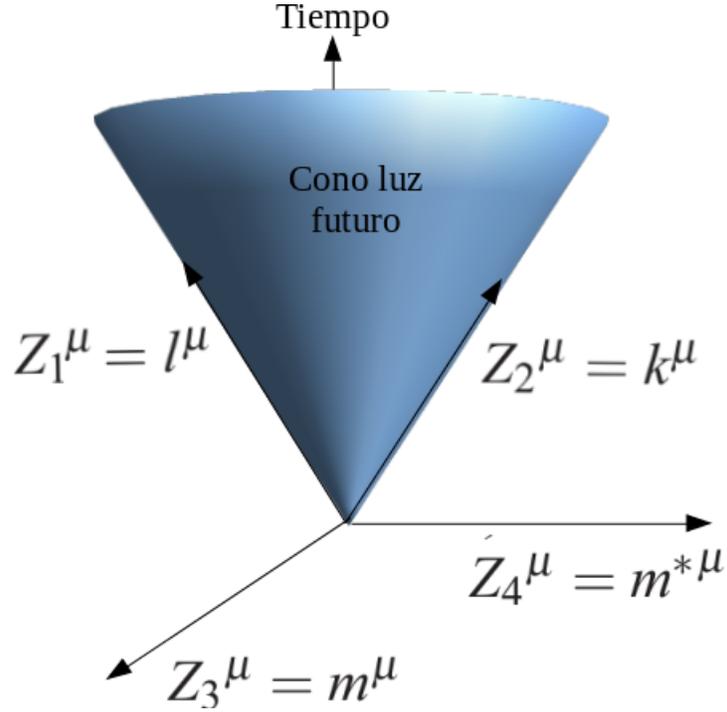


Figura 3.1: Representación de la tetrada sobre el cono de luz

Cualquier vector A y tensor T_{ab} podrá expresarse en términos de la tetrada como

$$A = A^a Z_a \quad T_{ab} = T_{\mu\nu} Z_a^\mu Z_b^\nu, \quad (68)$$

de esta forma se relacionan las componentes de un tensor en su base coordenada con la base tetradial.

Por otro lado, se definen las derivadas direccionales de funciones escalares como

$$f_{,a} = Z_a^\mu \partial_\mu f,$$

Explícitamente, los operadores de las derivadas direccionales se definen como

$$D = l^\mu \partial_\mu; \quad \Delta = k^\mu \partial_\mu; \quad \delta = m^\mu \partial_\mu; \quad \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu, \quad (69)$$

donde $\bar{\cdot}$ denota complejo conjugado.

La derivada covariante resulta ser una combinación lineal de estos operadores:

$$\nabla_\alpha = g_\alpha^\beta \nabla_\beta = k_\alpha D + l_\alpha \Delta + \bar{m}_\alpha \delta - m_\alpha \bar{\delta}. \quad (70)$$

Y en esto radica la ventaja del formalismo Newman-Penrose: las derivadas covariantes en las ecuaciones relativistas se remplazan por los operadores de derivadas direccionales para convertir las ecuaciones tensoriales en conjuntos de ecuaciones escalares haciendo algunas contracciones con la tétrada nula, como más adelante se expondrá.

En el caso de las derivadas sobre tensores se define

$$T_{cd,a} = Z_a^\mu T_{cd,\mu}. \quad (71)$$

Ahora bien, al proyectar la derivada covariante de un vector a lo largo de la tétrada se obtiene

$$v_{a,b} = Z_b^\mu \nabla_\mu (Z_a^\nu v_\nu) = Z_b^\mu Z_a^\nu v_{\nu;\mu} + Z_b^\mu Z_{c\nu} Z_{a;\mu}^\nu v^c,$$

así, se definen de forma natural los *coeficientes de rotación de Ricci*¹⁶ como

$$\gamma_{abc} \equiv Z_a^\mu Z_{b\mu;\nu} Z_c^\nu. \quad (72)$$

La proyección de las derivadas parciales a lo largo de cada vector nulo será

$$v_{a,b} = Z_b^\mu Z_a^\nu v_{\nu;\mu} + \gamma_{cab} v^c. \quad (73)$$

También, se define la derivada extrínseca como

$$v_{a|b} \equiv Z_b^\mu Z_a^\nu v_{\nu;\mu} = v_{a,b} - \eta^{cd} \gamma_{cab} v_d. \quad (74)$$

Y su generalización a tensores como

$$T_{abcd|e} = T_{abcd,e} - \eta^{nm} (\gamma_{nae} T_{mbcd} + \gamma_{nbe} T_{amcd} + \gamma_{nce} T_{abmd} + \gamma_{nde} T_{abcm}). \quad (75)$$

Mediante los coeficientes de rotación, las primeras y segundas derivadas covariantes de la tétrada toman la forma

$$Z_{a\mu;\nu} = \gamma_{bac} Z_\mu^b Z_\nu^c, \quad Z_{a\mu;\nu\lambda} = \gamma_{bac;\lambda} Z_\mu^b Z_\nu^c + \gamma_{bac} (Z_{\mu;\lambda}^b Z_\nu^c + Z_\mu^b Z_{\nu;\lambda}^c). \quad (76)$$

Puesto que los coeficientes de rotación serán de gran utilidad más adelante, convendrá definirlos explícitamente. Al ser éstos antisimétricos en el primer par de índices $\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$, habrá doce coeficientes independientes [4]:

¹⁶Algunos autores también los llaman coeficientes espinores

$$\begin{aligned}
\kappa &\equiv \gamma_{311} = m^\mu l_{\mu;\nu} l^\nu \\
\tau &\equiv \gamma_{312} = m^\mu l_{\mu;\nu} k^\nu \\
\sigma &\equiv \gamma_{313} = m^\mu l_{\mu;\nu} m^\nu \\
\rho &\equiv \gamma_{314} = m^\mu l_{\mu;\nu} m^{*\nu} \\
\pi &\equiv \gamma_{241} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} l^\nu \\
\nu &\equiv \gamma_{242} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} k^\nu \\
\mu &\equiv \gamma_{243} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} m^\nu \\
\lambda &\equiv \gamma_{244} = k^\mu m^*_{\mu;\nu} m^{*\nu} \\
\varepsilon &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) l^\nu \\
\gamma &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) k^\nu \\
\beta &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) m^\nu \\
\alpha &\equiv \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}) = \frac{1}{2}(k^\mu l_{\mu;\nu} + m^\mu m^*_{\mu;\nu}) m^{*\nu}
\end{aligned} \tag{77}$$

A partir de estos, se contruyen sus conjugados, dando un total de 24 coeficientes.

Antes de seguir, es importante mencionar que este formalismo fue inicialmente desarrollado por Penrose en términos de espinores que es equivalente al formalismo tetradial. Mucha de la notación proviene del lenguaje espinorial.

3.2 Tensor y escalares de Weyl

Una cuestión importante es caracterizar los campos gravitatorios de forma independiente a cualquier sistema coordinado. Antes de ello, es útil formular las ecuaciones en términos del tensor de Weyl,

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} := R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\alpha[\mu}R_{\nu]\beta} - g_{\alpha[\nu}R_{\mu]\beta}) + \frac{1}{6}g_{\alpha[\mu}g_{\nu]\alpha}R. \tag{78}$$

$C_{\alpha\beta\mu\nu}$ tiene las mismas propiedades de simetría que el tensor de Riemman pero su traza es nula:

$$C_{\mu\alpha\nu}^\alpha = 0.$$

Satisface también que $\eta^{\alpha\beta}C_{\alpha\nu\lambda\beta} = 0$ y,

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = -C_{\beta\alpha\gamma\delta} = -C_{\alpha\beta\delta\gamma} = C_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad C_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0, \tag{79}$$

por lo que tiene diez componentes independientes.

Al proyectar las componentes de $C_{\mu\nu\lambda\tau}$ sobre la tétrada nula se obtienen cinco cantidades complejas:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu l^\lambda m^\tau \\
\Psi_1 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu k^\nu l^\lambda m^\tau \\
\Psi_2 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu m^\nu m^{*\lambda} k^\tau \\
\Psi_3 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} l^\mu k^\nu m^{*\lambda} k^\tau \\
\Psi_4 &= -C_{\mu\nu\lambda\tau} k^\mu m^{*\nu} k^\lambda m^{*\tau}
\end{aligned} \tag{80}$$

Éstos reciben el nombre de *escalares de Weyl*. Al ser escalares, los Ψ_a son invariantes ante transformaciones de Lorentz; nótese que esto no implica que no dependan de la elección de la tetrada¹⁷.

Otra forma del tensor de Weyl que será útil es:

$$C_{\mu\nu\lambda\tau} = R_{\mu\nu\lambda\tau} + \frac{1}{2}(\eta_{\mu\lambda}R_{\nu\tau} - \eta_{\nu\lambda}R_{\mu\tau} - \eta_{\mu\tau}R_{\nu\lambda} + \eta_{\nu\tau}R_{\mu\lambda}) - \frac{1}{6}(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\tau} - \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\tau})R. \tag{81}$$

Por otro lado, si U, V y W se definen en términos de la tetrada

$$\begin{aligned}
U_{ab} &= -l_a m_b^* + l_b m_a^* \\
V_{ab} &= k_a m_b - k_b m_a \\
W_{ab} &= m_a m_b^* - m_b m_a^* - k_a l_b - k_b l_a.
\end{aligned} \tag{82}$$

El tensor de Weyl se puede expandir como [6]

$$\begin{aligned}
C_{abcd} &= \Psi_0 U_{ab} U_{cd} + \Psi_1 (U_{ab} W_{cd} + W_{ab} U_{cd}) + \Psi_2 (V_{ab} U_{cd} + U_{ab} V_{cd} + W_{ab} W_{cd}) \\
&\quad + \Psi_3 (V_{ab} W_{cd} + W_{ab} V_{cd}) + \Psi_4 V_{ab} V_{cd}.
\end{aligned} \tag{83}$$

Escrita de esta forma, los escalares de Weyl tienen la siguiente interpretación física, propuesta por Szekeres en 1966 [7]:

- Ψ_4 representa una onda transversa en la dirección k
- Ψ_3 representa la componente longitudinal de la onda
- Ψ_0 representa la componente transversa en la dirección l
- Ψ_1 su componente longitudinal
- Ψ_2 el potencial coulombiano

3.3 Clasificación de Petrov y teorema de Peeling

En el estudio de las soluciones de las ecuaciones de la relatividad general, es conveniente contar con una caracterización invariante de los espaciotiempos, esto es, independiente de cualquier sistema

¹⁷Esta ambigüedad puede desaparecer en ciertos espacios métricos, como veremos en la siguiente sección.

de coordenadas. En esta tarea resulta muy útil una clasificación formulada en 1954 por A. Z. Petrov, que se basa en las simetrías algebraicas del tensor de Weyl [8].

El tensor de Weyl puede describirse completamente en términos de cinco escalares, no obstante, éstos dependen de la elección de la tétrada. A su vez, bajo una transformación de Lorentz, la tétrada nula en general cambiará de tres formas básicas distintas: dos rotaciones y una transformación de espín. Algunos escalares se igualan a cero, dependiendo de la transformación sobre la tétrada¹⁸.

Así, los espacios métricos se clasifican en función de los valores de los escalares de Weyl en espacios algebraicamente generales y especiales:

Algebraicamente general

- Tipo I (con $\Psi_0 = 0$)

Algebraicamente especial

- Tipo II ($\Psi_0 = \Psi_1 = 0$),
- Tipo III ($\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$)
- Tipo N ($\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$)
- Tipo O ($\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$). Ejemplos: Minkowski y Friedmann-Robertson-Walker, donde no hay efectos gravitacionales.
- Tipo D ($\Psi_2 \neq 0$). Ejemplos: Schwarzschild y Kerr en el vacío.

Se puede demostrar que para los espacios algebraicamente especiales siempre existe una tétrada preferente que deja los escalares de Weyl sin cambios ante transformaciones en los vectores de la tétrada.

En el siguiente capítulo se trabajará en el espaciotiempo de Schwarzschild, tipo D, donde los coeficientes ν , κ , σ y λ se anulan al igual que todos los escalares de Weyl, excepto Ψ_2 . Estudiar la dinámica de agujeros negros de Schwarzschild en el formalismo de tétradas es de gran utilidad porque la descripción del espaciotiempo queda en función de escalares invariantes ante transformaciones de Lorentz y ante transformaciones sobre la tétrada elegida.

Por otro lado, una de las propiedades más importantes de los escalares de Weyl es su comportamiento en regiones asintóticas. El teorema de Peeling aplicado para espacios generales plantea que en una región asintótica, los escalares de Weyl se comportan como

$$\Psi_i \propto \frac{1}{r^{(5-i)}}. \quad (84)$$

¹⁸Rotaciones tipo I que preservan l^μ y cambian las otras tres direcciones. Rotaciones tipo II que preservan k^μ y cambian las otras tres direcciones. Transformaciones espín o tipo III que rotan en fases complementarias m^μ y \bar{m}^μ y reescalan l^μ y k^μ manteniendo su dirección invariante. Formalmente, el problema se reduce a encontrar las raíces complejas de una ecuación cuártica para cierto parámetro. Cuando alguna de las raíces coinciden se dice que el espacio es algebraicamente especial. Así, la clasificación de Petrov divide a los espacios en función del número de raíces distintas. Para más detalles ver [6]

3.4 Ecuaciones de Newman-Penrose

Las ecuaciones de campo expresadas en términos de la tétrada nula para los escalares de Weyl reciben el nombre de ecuaciones de Newman-Penrose. Aunque este formalismo arroja una enorme cantidad de ecuaciones, usualmente existen simetrías que las reducen. Un grupo de las ecuaciones de Newman-Penrose se obtienen al proyectar el tensor de Riemman expresado en términos de los operadores, espinores y escalares de Weyl sobre la tétrada; la forma de obtenerlas se desarrolla en la subsección 3.4.1. Otro grupo de las ecuaciones se obtiene al utilizar las identidades de Bianchi igualmente proyectadas en la tétrada; éstas se deducen en la subsección 5.4.2.

En esta sección no se derivan todas las ecuaciones Newman-Penrose, solo aquellas que serán de utilidad para encontrar la ecuación de perturbación del escalar Ψ_4 . La derivación completa del conjunto de las ecuaciones Newman-Penrose puede encontrarse en [4] y [6].

3.4.1 El tensor de Riemman

Al proyectar el tensor de Riemman sobre la tétrada se obtiene

$$R_{abcd} = R_{\sigma\mu\nu\lambda} Z_a^\sigma Z_b^\mu Z_c^\nu Z_d^\lambda = (Z_{a\mu;\nu\lambda} - Z_{a\mu;\lambda\nu}) Z_b^\mu Z_c^\nu Z_d^\lambda,$$

donde

$$\begin{aligned} Z_{a\mu;\nu\lambda} Z_b^\mu Z_c^\nu Z_d^\lambda &= \gamma_{bac|d} + \eta^{nm} (\gamma_{nac} \gamma_{bmd} + \gamma_{ban} \gamma_{cmd}), \\ Z_{a\mu;\lambda\nu} Z_b^\mu Z_c^\nu Z_d^\lambda &= \gamma_{bad|c} + \eta^{nm} (\gamma_{nad} \gamma_{bmc} + \gamma_{ban} \gamma_{dmc}). \end{aligned}$$

Así, el tensor de Riemman en términos de los coeficientes de rotación se expresa como

$$R_{abcd} = \gamma_{bac|d} - \gamma_{bad|c} + \eta^{nm} (\gamma_{nac} \gamma_{bmd} - \gamma_{nad} \gamma_{bmc} + \gamma_{ban} (\gamma_{cmd} - \gamma_{dmc})). \quad (85)$$

Además, la definición de derivada extrínseca en la ec.(75), aplicada al tensor de Riemman es

$$R_{abcd|e} = R_{abcd,e} - \eta^{nm} (\gamma_{nae} R_{mbcd} + \gamma_{nbe} R_{amcd} + \gamma_{nce} R_{abmd} + \gamma_{nde} R_{abcm}). \quad (86)$$

También el tensor de Riemman puede tomar la forma,

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} Z_a^\sigma = Z_{a\mu;\nu\lambda} - Z_{a\mu;\lambda\nu} \quad (87)$$

Con estas expresiones encontraremos un conjunto de ecuaciones que relacionan los escalares de Weyl y los operadores actuando sobre los coeficientes espinores. Combinando la ec. (81) y (85) obtenemos

$$\begin{aligned}
C_{abcd} = & \gamma_{bac|d} - \gamma_{bad|c} + \eta^{nm} (\gamma_{nac}\gamma_{bmd} - \gamma_{nad}\gamma_{bmc} + \gamma_{ban}(\gamma_{cmd} - \gamma_{dmc})) \\
& - 4\pi (\eta_{ac}T_{bd} - \eta_{ad}T_{bc} - \eta_{bc}T_{ad} + \eta_{bd}T_{ac}) + \frac{8\pi}{3} (\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc}) T.
\end{aligned} \tag{88}$$

Esta expresión ya relaciona los escalares con los operadores actuando sobre los coeficientes espinores. Por ejemplo, para la proyección R_{2424} obtenemos

$$\Psi_4 + (\Delta - \mu - \mu^* - 3\gamma + \gamma^*)\lambda - (\delta^* - 3\alpha - \beta^* - \pi + \tau^*)\nu = 0, \tag{89}$$

Para la proyección de $R_{1241} - R_{3442}$ encontramos que

$$\Psi_3 + (\Delta - \mu^* + \gamma^*)\alpha - (\delta^* - \beta^* + \tau^*)\gamma - \lambda(\beta + \tau)\mu\tau^* + \nu(\rho + \varepsilon) = 0. \tag{90}$$

3.4.2 Identidades de Bianchi

Además de las ecuaciones derivadas de la ec. (88) obtendremos un conjunto de ecuaciones para los escalares de Weyl. Para ello partimos de las identidades de Bianchi. En su forma compacta éstas son:

$$R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0, \quad R_{\alpha\beta[\gamma\delta;\varepsilon]} = 0. \tag{91}$$

Expresaremos el tensor de Riemman en términos del tensor de Weyl, haciendo uso de la ec. (81), y posteriormente en términos del tensor de energía-momento mediante las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} = C_{\mu\nu\lambda\tau} - \frac{4\pi G}{c^4} (g_{\mu\lambda}T_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}T_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}T_{\mu\tau} + g_{\nu\tau}T_{\mu\lambda}) + \frac{8\pi_n G}{3c^4} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda})T, \tag{92}$$

cuya derivada covariante es:

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\nu\mu\kappa;\sigma} = & C_{\lambda\nu\mu\kappa;\sigma} - \frac{4\pi G}{c^4} (g_{\mu\lambda}T_{\nu\tau;\sigma} - g_{\mu\tau}T_{\nu\lambda;\sigma} - g_{\nu\lambda}T_{\mu\tau;\sigma} + g_{\nu\tau}T_{\mu\lambda;\sigma}) \\
& - \frac{8\pi G}{3c^4} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda})T_{,\sigma}.
\end{aligned} \tag{93}$$

Al utilizar estos resultados en la identidad para $R_{42[21]4} = 0$, obtenemos

$$C_{4221|4} + C_{4242|1} + 4\pi_n\eta_{12}(T_{42|4} - T_{44|2}) = 0 \tag{94}$$

Luego, proyectaremos estas ecuaciones en la tétrada nula y así obtendremos un conjunto de ecuaciones para los escalares de Weyl.

$$\begin{aligned}
& (\delta * -2(\alpha + 2\pi)) \Psi_3 - (D - (\rho - 4\epsilon)) \Psi_4 + 3\lambda \Psi_2 = \\
& 4\pi ((\delta * -2\alpha + 2\tau *) T_{km*} - (\Delta - \mu * -2\gamma + 2\gamma *) T_{m**} + \lambda T_{lk} - \sigma * T_{kk} - 2\nu T_{lm*} + \lambda T_{mm*}).
\end{aligned} \tag{95}$$

3.5 Ecuaciones de perturbación para Ψ_4

Consideremos una perturbación a la métrica (Secc. 2.1) de la forma

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^0 + h_{\alpha\beta},$$

donde $g_{\alpha\beta}^0$ es la métrica de fondo. Los escalares de Weyl se perturbarán de acuerdo a

$$\Psi_i \rightarrow \Psi_i^0 + \Psi_i^{(1)}, \tag{96}$$

donde Ψ_i^0 es el escalar i -ésimo no perturbado.

Identificaremos al escalar perturbado $\Psi_4^{(1)}$ como la onda gravitacional por las siguientes razones [9], [10].

Las ondas gravitacionales son ondas transversas, no longitudinales. Si suponemos que éstas viajan en la dirección k de acuerdo a la interpretación de Szekeres, ésta corresponderá al escalar Ψ_4 .

Además, de acuerdo al teorema de Peeling $\Psi_4 \propto \frac{1}{r}$ lo que significa que, en el espaciotiempo de Schwarzschild, es el escalar que más lento tiende a cero y, por lo tanto, domina a distancias lejanas del agujero negro. En esos regímenes se comporta localmente como una onda plana, como vimos en la Sec 5.3.

Por otro lado, Ψ_4 se relaciona con las componentes de h presentada en la sec. 2.1 de acuerdo a:

$$\Psi_4 = -\ddot{h}_+ + i\ddot{h}_\times. \tag{97}$$

Dicho esto, se construye la ecuación de perturbación para $\Psi_4^{(1)}$. Se toman las ecuaciones Newman-Penrose considerando los escalares perturbados para obtener un conjunto de ecuaciones que describirán la dinámica de la perturbación [11].

Por ejemplo, para $R_{42[21]4}$,

$$\begin{aligned}
& (\delta * -2(\alpha + 2\pi)) \Psi_3^{(1)} - (D - \rho - 4\epsilon) \Psi_4^{(1)} + 3\lambda^{(1)} \Psi_2 \\
& = 4\pi_n \left((\delta * -2\alpha + 2\tau *) T_{km*}^{(1)} - (\Delta - \mu * -2\gamma + 2\gamma *) T_{kk}^{(1)} \right).
\end{aligned} \tag{98}$$

Para $R_{42[13]2}$

$$\begin{aligned}
& (\Delta - 4\mu^* - 2\gamma)\Psi_3^{(1)} - (\delta - 4\beta + \tau)\Psi_4^{(1)} + 3\nu^{(1)}\Psi_2 \\
& = -4\pi_n \left((\Delta - 2\mu^* - 2\gamma)T_{km^*}^{(1)} - (\delta^* - 2\alpha - 2\beta^* + \tau^*)T_{kk}^{(1)} \right). \tag{99}
\end{aligned}$$

Para R_{2424} en espacios no perturbados, la ecuación se reduce a,

$$\Psi_4^{(1)} + (\Delta - 4\mu - 4\mu^* - 3\gamma + \gamma^*)\lambda^{(1)} - (\delta^* - 3\alpha - \beta^* - \pi + \tau^*)\nu^{(1)} = 0. \tag{100}$$

Finalmente se obtiene que

$$\begin{aligned}
& [(\Delta + \eta(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*)(D - \eta(\rho - 4\epsilon)) - 3\eta\Psi_2 \\
& - (\delta^* + \eta(3\alpha + \beta + 4\pi - \tau^*))(\delta + \eta(4\beta - \tau))]\Psi_4^{(1)} = \frac{\eta 8\pi_n}{c^4} T_4^{(1)} \tag{101}
\end{aligned}$$

donde todos los términos de la fuente están contenidos en $T_4^{(1)}$ dada por:

$$T_4^{(1)} = \hat{\mathcal{T}}^{kk}T_{kk} + \hat{\mathcal{T}}^{km^*}T_{km^*} + \hat{\mathcal{T}}^{m^*m^*}T_{m^*m^*}. \tag{102}$$

Los términos $\hat{\mathcal{T}}^{ab}$ son operadores definidos por

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{T}}^{kk} &= -(\delta^* + \eta(3\alpha + \beta + 4\pi - \tau))(\delta^* + \eta(2\alpha + 2\beta - \tau^*)), \\
\hat{\mathcal{T}}^{km^*} &= (\Delta + \eta(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))(\delta^* - 2\eta(\alpha - \tau^*)) \\
&\quad + (\delta^* + \eta(3\alpha - \beta^* - 4\pi - \tau))(\Delta + 2\eta(\mu^* + \gamma)), \\
\hat{\mathcal{T}}^{m^*m^*} &= -(\Delta + \eta(4\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*))(\Delta + \eta(\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)). \tag{103}
\end{aligned}$$

La ec. (101) será la ecuación central del siguiente capítulo. $\Psi_4^{(1)}$ es la radiación gravitacional cuyo comportamiento puede hallarse al resolver tal ecuación para una métrica de fondo $g_{\alpha\beta}^B$ y una fuente $T_4^{(1)}$ dada.

Capítulo 4

Ecuación de perturbación para un agujero de Schwarzschild

A luminous star, of the same density as the Earth, and whose diameter should be two hundred and fifty times larger than that of the Sun, would not, in consequence of its attraction, allow any of its rays to arrive at us; it is therefore possible that the largest luminous bodies in the universe may, through this cause, be invisible.

P Laplace, 1798.

En este capítulo se aplicará el formalismo Newman-Penrose para encontrar las ecuaciones diferenciales que debe satisfacer Ψ_4 perturbada considerando como métrica de fondo la de Schwarzschild, y como fuente, T_4 , un fluido perfecto y simple: polvo.

Antes de ello, es importante comprender el fenómeno astrofísico que modelaremos: la acreción de materia y gases sobre un objeto compacto y la subsecuente emisión de energía en forma de radiación. Con este objetivo, en las primeras dos secciones introduciré y calcularé algunos conceptos y propiedades de utilidad.

En la primera sección se muestra que existe una singularidad asociada a la métrica de Schwarzschild y, mediante la obtención de los escalares asociados al tensor de curvatura, mostraré que se trata de una singularidad física, llamada agujero negro. La primera referencia a un agujero negro fue hecha por Laplace, como se muestra en la cita que introduce este capítulo.

En la segunda sección se introduce el concepto de acreción y las propiedades de un fluido tipo polvo.

En la tercera sección se utiliza la ecuación de perturbación (101) en el caso de interés. Se mostrará que la ecuación puede descomponerse en una parte radial-temporal y otra angular, de tal forma que la ecuación de perturbación se debe resolver solo para las componentes radial y temporal

pues la parte angular tiene por solución armónicos esféricos. Se interpretan los resultado y sus implicaciones en la perturbación gravitacional.

En la última sección se definen las unidades patrón y con ellas se reescribe la ecuación de perturbación.

4.1 Agujero negros

Una singularidad es un punto de un espaciotiempo donde la solución de las ecuaciones de campo diverge, es decir, el tensor métrico no está definido. En algunos casos la singularidad puede ser removida con una transformación de coordenadas; entonces se tiene una singularidad matemática o de coordenadas. En otros casos sucede que la singularidad se preserva en cualquier sistema coordenado y recibe el nombre de singularidad física [1].

Es decir que la geometría del espacio-tiempo está *rota* en ciertos puntos, sea cual sea el sistema de coordenadas; la curvatura diverge. En tal caso, las ecuaciones de campo no se pueden aplicar.

En el caso de la métrica de Schwarzschild en su forma estándar,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

existe una singularidad física. Para mostrarlo, obtenemos del tensor métrico el tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{trtr} &= -2 \frac{GM}{c^2 r^3}, & R_{\theta\phi\theta\phi} &= 2 \frac{GM}{c^2} r \sin^2 \theta \\ R_{t\theta t\theta} &= \frac{GM}{c^2 r} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right), & R_{t\phi t\phi} &= R_{t\theta t\theta} \sin^2 \theta \\ R_{r\theta r\theta} &= -\frac{GM}{c^2 r} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, & R_{r\phi r\phi} &= R_{r\theta r\theta} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Con ello calculamos el escalar de Kretschmann

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48G^2M^2}{c^4 r^6}. \quad (104)$$

El escalar diverge en $r = 0$ y precisamente por ser un escalar, sabemos que en cualquier sistema de referencia divergerá; por lo tanto se trata de una singularidad física. $r = 0$ es un punto que no pertenece a la variedad \mathcal{M} pero es justamente en este punto donde se encuentra el objeto puntual de masa M que curva el espacio tiempo, al que se conoce como agujero negro de Schwarzschild.

Por otro lado, la métrica en su forma estandar presenta una singularidad coordenada en

$$r = \frac{2GM}{c^2},$$

pues g_{rr} diverge y g_{tt} tiende a cero. A $r = \frac{2GM}{c^2}$ se le llama radio de Schwarzschild (R_{sh}) porque de-

limita dos regiones, la interna en la que la luz incidente no puede salir y la externa asintóticamente plana. No obstante, la singularidad es removible:

Al redefinir la coordenada radial y temporal como

$$\begin{aligned} dr^* &= \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr, \\ cdt' &= cdt \pm (dr^* - dr) \\ &= cdt \pm \left(\frac{c^2 r}{1 - 2GM} - 1\right) dr, \end{aligned}$$

sustituir en la ec. (36) dt en función de dr^* y dt' y redefinir las variables obtenemos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 dt'^2 + \frac{4MG}{rc^2} c dt' dr + \left(1 + \frac{2MG}{rc^2}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (105)$$

que ya no diverge en el radio de Schwarzschild. La expresión anterior es llamada métrica en coordenadas penetrantes o de Eddington-Finkelstein y tienen la ventaja de diverger solo en el origen, por lo tanto son útiles para estudiar la dinámica de las partículas en las vecindades del agujero, aún en el radio de Schwarzschild.

La métrica de Schwarzschild, solución simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío, representa el espaciotiempo de un agujero negro; éste consiste en una singularidad física en el origen y un horizonte de eventos en el radio de Schwarzschild.

Después de que Karl Schwarzschild encontrara su solución en 1915, el debate sobre la existencia de los agujeros negros, se convirtió en un importante campo de desarrollo teórico. Ahora se sabe que muchos de los agujeros negros se forman en condiciones específicas en un proceso de colapso gravitacional, como parte de la evolución estelar. El agujero de Schwarzschild no es el único, pero sí es el agujero negro más sencillo porque está descrito solamente por su masa. De forma más general, los agujeros pueden tener carga eléctrica y momento angular (que implicaría que el agujero está rotando).

Un agujero sin carga ni rotación se describe con la métrica de Schwarzschild. Aunque es el caso más simple, sirve modelarlo para ganar intuición de la física del sistema.

Un agujero sin carga y con rotación se describe con la métrica de Kerr. Este modelo es más realista porque en el universo casi todo está rotando y, por conservación de momento angular, si el sistema que origina al agujero estaba rotando, el agujero también tendrá momento angular.

Un agujero negro con carga y sin rotación se describe con la métrica de Reissner-Nordstrom. Tiene simetría esférica, es estático y está rodeado por dos horizontes de eventos. No es muy utilizada en astrofísica porque la mayoría de los objetos del universo son neutros. Carecen de una carga eléctrica neta.

Un agujero negro con carga y rotación se describe con la métrica de Kerr-Newman. Es la de-

scripción más general y fue encontrada Ezra Newman¹⁹, como generalización de la solución de Kerr.

4.1.1 Geodésicas radiales en Schwarzschild

Para explorar la geometría de Schwarzschild, consideremos una partícula de prueba de masa m en movimiento radial, es decir, no tiene componentes angulares para la velocidad. Su dinámica está condensada en su función lagrangiana

En coordenadas penetrantes de la métrica de Schwarzschild se expresa como [7],

$$\frac{1}{m}\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)u^{t^2} + \frac{4MG}{c^2 r}u^t u^r + \left(1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right)u^{r^2}. \quad (106)$$

La partícula se moverá a lo largo de las geodésicas. Las componentes de su cuadrivelocidad se pueden obtener de la ecuación geodésica pero también de la función lagrangiana como sigue.

La energía es una cantidad conservada, es decir, una constante de movimiento dada por

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^t} \\ &= m\left[\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)u^t - \frac{2MG}{c^2}u^r\right], \end{aligned}$$

de donde encontramos que, para una energía E , u^t será

$$u^t = \frac{\frac{E}{m}r + \frac{2MG}{c^2}u^r}{r - \frac{2MG}{c^2}}. \quad (107)$$

El movimiento de las geodésicas satisface que

$$u^\alpha u_{\beta;\alpha} = 0.$$

La normalización de la norma impone que

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -kc^2$$

con $k = 1$ para partículas masivas y $k = 0$ para fotones. Como el polvo está compuesto de partículas con masa, consideraremos $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \mathcal{L} = -c^2$. Al sustituir u^0 , la segunda componente de la velocidad resulta ser

$$u^r = -\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - c^2 + 2\frac{MG}{r}}. \quad (108)$$

¹⁹El mismo que construyó el formalismo de tétradas en colaboración con Roger Penrose.

con signo negativo porque el polvo está cayendo. Las ecuaciones (107) y (108) determinan la velocidad de las partículas del polvo en función del tiempo y la posición, para la energía E , constante a lo largo de la trayectoria. Notemos, de la ec. (106) que este lagrangiano tiene unidades de energía por unidad de masa, es decir que es el lagrangiano por unidad de masa.

4.2 Objetos compactos y acreción

Un objeto compacto nace cuando una estrella lo suficientemente masiva agota casi todo su combustible nuclear, entonces no puede mantener el equilibrio hidrostático y tiende al colapso gravitacional. Las enanas blancas, las estrellas de neutrones y los agujeros negros son objetos compactos. En el primer caso el colapso es detenido por la presión de degeneración de electrones y en el segundo por la presión de degeneración de neutrones. Los agujeros negros estelares son objetos completamente colapsados [2], y en general cualquier objeto compacto, son altamente densos²⁰.

Existen otros agujeros negros, como los primordiales o supermasivos, que no serán abordados en este trabajo. En lo que sigue, al referirnos a agujeros negros, estamos hablando de agujeros estelares por colapso.

Como cualquier cuerpo con masa, atraen gravitacionalmente materia que es capturada y acumulada. A este proceso se le conoce como *acreción* y es de gran interés porque en el proceso es probable que una cantidad considerable de materia sea convertida en energía y emitida en forma de radiación, ya sea electromagnética o gravitacional.

En el caso de una estrella de masa M y radio R , suelen darse procesos de acreción cuando materia cae sobre la superficie de la estrella. La materia tiene asociada una energía cinética que incrementa conforme se acerca al objeto compacto.

La tasa de acreción $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$, se define como la razón de cambio en el tiempo a la cual se acreta masa hacia el objeto compacto. Está relacionada con la luminosidad²¹ como,

$$L = \frac{1}{2}v^2\dot{m} = \frac{Gm\dot{m}}{R} = \zeta\dot{m}c^2, \quad (109)$$

donde ζ se puede interpretar como el factor de eficiencia del proceso de acreción para emitir energía y depende de las características del objeto central como $\zeta = \frac{GM}{Rc^2}$

En ciertos sistemas, la acreción es un proceso muy eficiente para transformar energía, incluso mas que las reacciones nucleares como la cadena p-p acontecida en el núcleo de estrellas en secuencia principal, ver Figura 4.1 [3].

En general, poder seguir la dinámica de un gas acretando sobre un objeto compacto es complicado. Algunos casos idealizados están bien estudiados y parten de las siguientes suposiciones: el

²⁰La densidad media del sol es de 1 g cm^{-3} ; la de una enana blanca de masa menor al sol es del orden de 10^7 g cm^{-3} ; la de una estrellas de neutrones de masa $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$!

²¹Les la energía que fluye por unidad de tiempo, $L = \frac{\Delta E}{\Delta t}$. En astronomía se suele medir en erg s^{-1} .

objeto compacto central es el que genera la métrica de fondo; la materia acretante es un gas con autogravedad nula o despreciable; y aunque la masa del objeto central está aumentando, ésta es tan pequeña que también se desprecia [4]. El modelo más sencillo es la acreción esférica realizado por Bondi en 1952, sin embargo por su simetría no produce señal gravitacional.

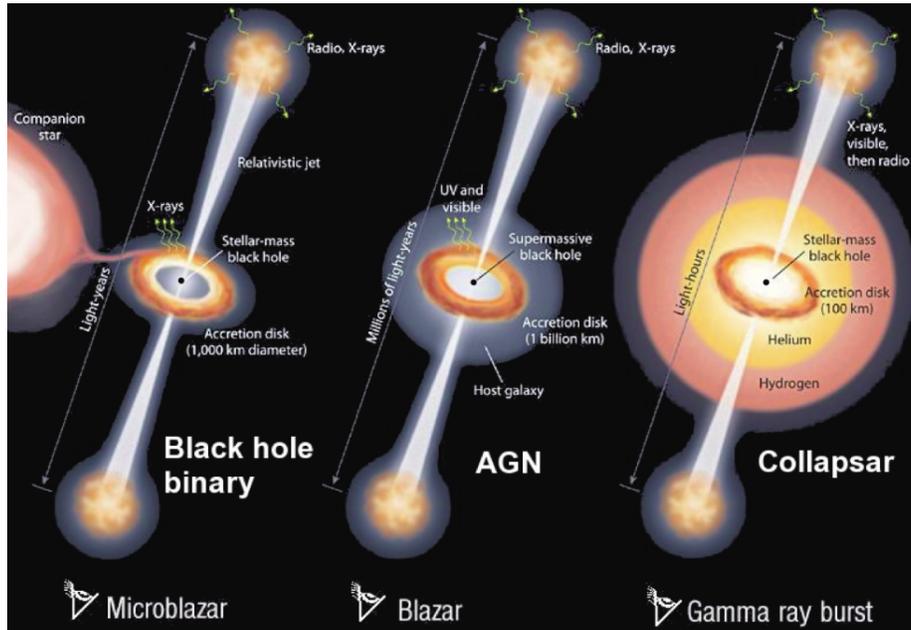


Figura 4.1: Proceso de acreción hacia agujeros negros de distintos tamaños. Tienen en común la generación de jets y discos de acreción.

En general la acreción ocurre a escalas de energía altísimas que son difíciles de modelar, sobre todo cuando se involucra rotación y campos electromagnéticos. En el proceso se suelen formar discos de la materia que se acreta alrededor del objeto compacto, llamados discos de acreción, y también emisiones de jets relativistas, rayos x, luz visible, en ultravioleta y radio. Algunas de esas señales electromagnéticas ha podido detectarse en los observatorio en la Tierra y están bien modeladas. En lo que sigue, estamos interesados en los procesos de acreción que generen radiación gravitacional, no solo electromagnética.

4.3 Ecuación de perturbación

El tratamiento que a continuación sigue está basado en el trabajo sobre teoría de perturbaciones en agujeros negros sintetizado en [5] y empleado en [8-10]. Conviene expresar el espaciotiempo de Schwarzschild en coordenadas penetrantes o de Eddington-Finkelstein, pues en éstas el elemento de línea del agujero negro de Schwarzschild es discontinuo solamente en el origen:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{4MG}{rc^2} c dt dr + \left(1 + \frac{2MG}{rc^2}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (110)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ es el elemento de ángulo sólido.

El tensor métrico covariante es

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2MG}{rc^2} & \frac{2MG}{rc^2} & 0 & 0 \\ \frac{2MG}{rc^2} & 1 + \frac{2MG}{rc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Se utilizará la signatura $(-, +, +, +)$ donde $\eta = -1$ [6]. La elección de la tétrada para este caso conviene ser,

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2MG}{rc^2}, 1 - \frac{2MG}{rc^2}, 0, 0\right) \\ k^\mu &= (1, -1, 0, 0) \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2r}} (0, 0, 1, i \csc \theta). \end{aligned} \quad (112)$$

Y satisfacen las relaciones de ortonormalidad

$$l^\mu k_\mu = -m^\mu m_\mu^* = 1.$$

Los únicos coeficientes espinores no nulos son

$$\mu = \frac{1}{r}; \quad \rho = \frac{r-2M}{2r^2}; \quad \varepsilon = -\frac{M}{2r^2}; \quad \alpha = \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2r}}, \quad \beta = -\alpha. \quad (113)$$

Con esto, al sustituir en la ec. (101) se obtiene directamente la ecuación de perturbación del escalar Ψ_4 ,

$$[\square_{tr} + \square_{\theta\phi}] \Psi_4^{(1)} = \frac{16\pi G}{c^4} r^2 T_4^{(1)}, \quad (114)$$

donde

$$\begin{aligned} \square_{tr} \Psi &= - \left(r^2 + \frac{2MrG}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \left(r^2 - \frac{2MrG}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4MGr}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \\ &\quad + 2 \left(2r + \frac{3MG}{c^2}\right) \frac{\partial}{c \partial t} + 6 \left(r - \frac{MG}{c^2}\right) \frac{\partial}{\partial r} + 4. \\ \square_{\theta\phi} \Psi &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 4i \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (115)$$

$T_4^{(1)}$ se calculará explícitamente más adelante.

Es de utilidad definir

$$\Phi = r\Psi_4^{(1)},$$

pues, de acuerdo al teorema de Peeling, Φ será constante en regiones lejanas al agujero negro. La ec.(114) en términos de Φ se reescribe como

$$[\square_{tr}^{\Phi} + \square_{\theta\phi}^{\Phi}]\Phi = \frac{16\pi_n G}{c^4} r^3 T_4. \quad (116)$$

Todos los operadores permanecen iguales, excepto el operador radial-temporal que pasa a ser

$$\begin{aligned} \square_{tr}^{\Phi} = & -r^2 \left[\left(1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4MG}{c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{2}{r} + \frac{MG}{c^2 r^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(\frac{2}{r} - \frac{MG}{c^2 r^2}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2MG}{c^2 r} \right]. \end{aligned} \quad (117)$$

La expresión (116) será más útil para el análisis numérico porque la perturbación no se atenuará a distancias lejanas.

Por otro lado, es muy ventajoso que las componentes radiales y temporales puedan expresarse de forma independiente a las componentes angulares en la ecuación de perturbación. Este hecho sugiere que la función gravitacional puede expresarse como el producto de dos funciones de (t, r) y (θ, φ) . Más aún, sería útil que la solución de la parte angular pudiera expresarse en términos de armónicos esféricos, es decir que pensamos al operador $\square_{\theta\phi}$ análogo al operador laplaciano²²; con esta motivación se construyen los siguientes operadores

$$\begin{aligned} \delta_s &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - s \cot \theta \right) = \delta_0 + s \cot \theta, \\ \bar{\delta}_s &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \csc \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + s \cot \theta \right) = \bar{\delta}_0 - s \cot \theta. \end{aligned} \quad (118)$$

donde s se define como el espín.

Ambos operadores se construyen para actuar sobre armónicos esféricos de grado l y fase m , denotados por $Y_s^{l,m}(\theta, \varphi)$ de la siguiente forma:

²²La ecuación de Laplace expresada en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 f = 0,$$

puede resolverse expresando $f(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$. A la parte angular Y se le denomina armónico esférico. La ecuación resultante para Y admite soluciones periódicas en las dos coordenadas angulares que dependerá de dos enteros (l, m) , siendo

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N \exp(im\varphi) P_l^m(\cos \theta),$$

donde N es una constante de normalización y P_l^m es el polinomio asociado de Legendre de grado l .

En nuestro caso, aunque el operador angular $\square_{\theta\phi}$ no es el operador de Laplace, propondremos soluciones tipo armónicos esféricos.

$$\begin{aligned}
\check{\delta}_s Y_s^{l,m} &= \sqrt{(l-s)(l+s+1)} Y_{s+1}^{l,m}, \\
\check{\delta}_s Y_s^{l,m} &= -\sqrt{(l+s)(l-s+1)} Y_{s-1}^{l,m}
\end{aligned} \tag{119}$$

Claramente, s debe cumplir que $|s| \leq l$. El operador $\check{\delta}_s$ aumenta el espín del armónico esférico mientras que $\check{\delta}_s$ lo disminuye. Dicho sea de paso, esto recuerda los operadores escalera para el momento angular en mecánica cuántica, con cierta analogía matemática.

Los armónicos satisfacen la siguiente relación de ortonormalidad

$$\oint d\Omega_s Y_s^{l,m} Y_{s'}^{l',m'} = \delta_{ss'} \delta_{ll'} \delta^{mm'},$$

con $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$.

En particular, de la forma explícita de $\check{\delta}_{-1}$ y $\check{\delta}_{-2}$ se encuentra que el operador angular $\square_{\theta\phi}$ se expresa como

$$\square_{\theta\phi} = \check{\delta}_{-1} \check{\delta}_{-2}.$$

Además, $\check{\delta}_{-1} \check{\delta}_{-2} Y_{-2}^{l,m} = \sqrt{(l+2)(l-1)} \check{\delta}_{-1} Y_{-1}^{l,m} = -(l-1)(l+2) Y_{-2}^{l,m}$, por lo que

$$\square_{\theta\phi} Y_{-2}^{l,m} = -(l-1)(l+2) Y_{-2}^{l,m}. \tag{120}$$

Por otra parte, convendrá expresar la función Φ en términos de una función radial-temporal $R_{l,m}(t, r)$ y los armónicos esféricos de espín $s = -2$ de la siguiente forma:

$$\Phi = \sum_{lm} R_{l,m}(t, r) Y_{-2}^{l,m}(\theta, \varphi). \tag{121}$$

Finalmente, al sustituir en la ec.(116) se obtiene la ecuación de perturbación en términos de los armónicos esféricos para $R_{l,m}(t, r)$:

$$\sum_{lm} Y_{-2}^{l,m} \left[\square_{tr}^{\Phi} - (l-1)(l+2) \right] R_{l,m}(t, r) = \frac{16\pi_n G}{c^4} r^3 T_4^{(1)}. \tag{122}$$

4.4 Fuentes de la señal gravitacional

La información de la fuente está contenida en el término T_4 . En nuestro caso las ec.(118) se reducen a,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{T}}^{kk} &= -\frac{1}{2r^2} \bar{\delta}_{-1} \bar{\delta}_0 \\
\hat{\mathcal{T}}^{km*} &= \frac{\sqrt{2}}{r} \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} - \frac{3}{r} \right) \bar{\delta}_{-1} \\
\hat{\mathcal{T}}^{m**} &= -\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - 2 \frac{\partial^2}{c \partial t \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{6}{r} \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{4}{r^2} \right).
\end{aligned} \tag{123}$$

Lo que ahora sigue es proponer una fuente. Como vimos en secciones anteriores, es necesario considerar una fuente no simétrica. Además debe ser astrofísicamente posible. Por otro lado, de la ec. (122) se observa que conviene proponer una fuente cuya parte radial-temporal sea separable de la angular; más aún, que la parte angular pueda verse como una combinación lineal de los armónicos esféricos.

4.4.1 Fluido tipo polvo

En diversas situaciones astrofísicas es una buena primera aproximación considerar que la fuente del campo gravitatorio es un fluido perfecto, el cual satisface las leyes de conservación de la hidrodinámica. Un fluido es una colección de partículas cuya dinámica está descrita en términos de cantidades promedio. Se dice que un fluido es perfecto cuando no tiene viscosidad ni conduce calor, desde el marco de referencia inercial. En tal caso, el tensor de energía-momento que lo describe es

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}, \tag{124}$$

donde ρ es la densidad de masa en reposo, u_α su cuadrivelocidad y p la presión. Cuando la presión es nula, se dice que es un fluido tipo-polvo (o simplemente *polvo*); el tensor de energía-momento se reduce a

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta. \tag{125}$$

Si el polvo cae radialmente en el agujero negro, la cuadrivelocidad se expresa como $u^\alpha = (u^t, u^r, 0, 0)$ y sus componentes están dadas por las ecs. (108) y (107).

Se supondrá que el agujero negro de Schwarzschild es perturbado por materia (polvo) que cae hacia él.

Por la forma de la cuadrivelocidad, solo las proyecciones del tensor de energía a lo largo del cono de luz en la dirección k serán no nulos. De las expresiones (123) los términos de T_4 resultan ser:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{T}}_{kk} &= (k^\mu u_\mu)^2 \rho = (u^0 + u^1)^2 \rho \\
\hat{\mathcal{T}}_{km*} &= \hat{\mathcal{T}}_{m**} = 0
\end{aligned} \tag{126}$$

Por lo que

$$T_4^{(1)} = \hat{T}_{kk} T_{kk} = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2r^2} \bar{\delta}_{-1} \bar{\delta}_0 \rho. \quad (127)$$

Proponemos que la parte angular de la densidad esté desacoplada de la radial-temporal de la siguiente forma,

$$\rho = \sum_{lm} \rho_{l,m}(t,r) Y_0^{l,m}(\theta, \varphi), \quad (128)$$

así, la densidad del polvo se distribuye en armónicos esféricos, mientras que la parte temporal-radial satisface una función de densidad $\rho_{l,m}(t,r)$ dependiendo del sistema.

Usando la propiedad (120),

$$\bar{\delta}_{-1} \bar{\delta}_0 \rho = \sum \rho_{l,m}(t,r) \sqrt{l(l-1)(l+1)(l+2)} Y_{-2}^{l,m}.$$

Finalmente la expresión para la fuente tipo polvo se reduce a

$$T_4^{(1)} = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2r^2} \sum \rho_{l,m}(t,r) \sqrt{l(l-1)(l+1)(l+2)} Y_{-2}^{l,m}. \quad (129)$$

Es importante notar que no todos los modos normales son fuentes de radiación; para $l = 0$ y $l = 1$ se anula la expresión anterior. Es decir que la forma en la que cae el polvo afecta la generación de la señal y esto concuerda con el hecho de que momentos monopulares y dipolares no generan ondas gravitacionales. Por otro lado, es interesante examinar la forma de los armónicos esféricos [Fig. 4.2] en relación a la distribución de la densidad del polvo.

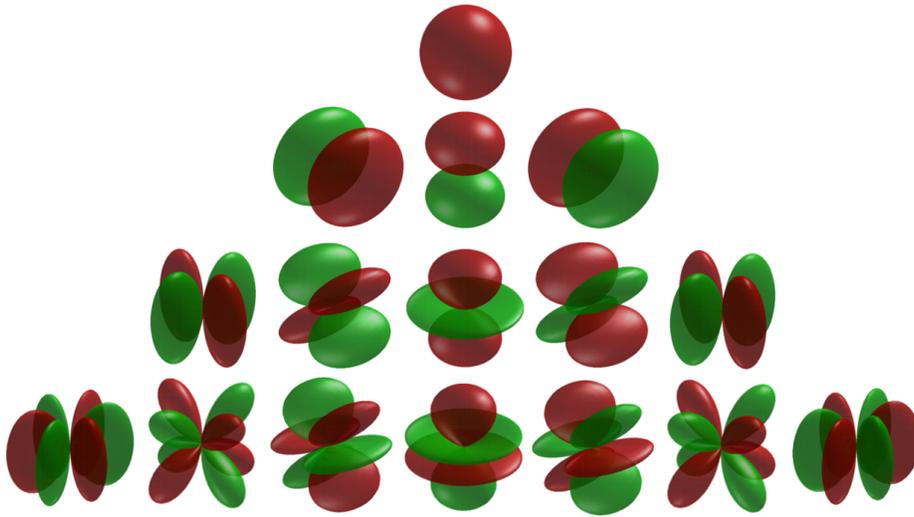


Figura4.2: Armónicos esféricos reales para $l=0,\dots,4$ de arriba a abajo y de $m=-4,\dots,4$ de izquierda a derecha.

Respecto a la evolución del polvo, como cualquier fluido perfecto, satisface las ecuaciones de hidrodinámica relativista. El cuadvectores de flujo se define como $j^\alpha = \rho u^\alpha$, entonces la ecuación de continuidad relativista, claramente covariante,

$$j^\alpha{}_{;\alpha} = 0, \quad (130)$$

determina la dinámica del fluido y en el caso del polvo, se reduce a,

$$\partial_t (\sqrt{-g}\rho_{l,m}u^t) + \partial_r (\sqrt{-g}\rho_{l,m}u^r) = 0, \quad (131)$$

que describe la evolución de la densidad. $\sqrt{-g}$ es el determinante del tensor métrico.

La función de densidad para el polvo,

$$\rho_{l,m} = \rho_{l,m}(r, t)$$

debe satisfacer la ecuación de continuidad (ec. 131).

En términos prácticos, un primer modelo es considerar un pulso gaussiano inicial en cascaras de polvo multiplicado por los armónicos esféricos,

$$\rho = \rho_{l,m}(r, t)Y_0^{l,m}, \quad 2 \leq l. \quad (132)$$

Esta distribución es, en términos computacionales, más fácil de analizar. Lo que se hace [11] es variar el ancho del pulso para analizar la compacidad de la cáscara. Esto se detallará en el siguiente capítulo.

4.4.2 Otras fuentes

Lo que sigue se añade para plantear perspectivas de estudio.

El siguiente paso sería elegir un fluido con presión descrito por $T_{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}$. Sería deseable que el tensor tenga una parte angular separable de la radial-temporal. Si el fluido es un gas politrópico [12] en un proceso adiabático satisface que

$$P = k\rho^\gamma,$$

siendo γ el índice politrópico, consideramos k constante²³. Proponemos que ρ es de la forma de la ec. (128), entonces T_4 podría ser expresada en términos de armónicos esféricos. Esto es lo que pretenderíamos lograr posteriormente.

²³El índice politrópico es el cociente entre los calores específicos: $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, $k = k(s)$, con s la entropía específica.

Por otro lado, sería también interesante considerar el tensor de una colección de partículas no interactuantes²⁴,

$$T_{\alpha\beta} = \rho_f \langle u_\alpha u_\beta \rangle,$$

donde la densidad está dada por f , una función de distribución de la colección de partículas integrada respecto a $d\omega$, invariante de volumen en el espacio de velocidades del espacio fase, es decir,

$$\rho_f = \int f d\omega.$$

Los paréntesis denotan promedio,

$$\langle u_\alpha u_\beta \rangle = \frac{1}{\rho_f} \int f u_\alpha u_\beta d\omega,$$

La forma de la densidad dependerá de la función de distribución f . De ella dependerá que la ecuación de perturbación pueda ser resuelta utilizando el desarrollo previo, usando los operadores angulares. De ser posible, podríamos modelar la acreción de otros tipos de materia. Por ejemplo, el tensor de la colección de partículas se puede usar para modelar cúmulos de estrellas o materia oscura.

De hecho, también podrían considerarse alguna de las densidades propuestas para halos de materia oscura [13]. Por ejemplo, el modelo isotérmico es,

$$\rho_{iso} = \frac{\sigma_{0iso}^2}{2\pi G r^2}. \quad (133)$$

Otros modelos comunes dentro del estudio de materia oscura son el isotermino truncado, modelo Burkert y modelo Navarro-Frenk-White:

$$\rho_{iso-tr} = \frac{\sigma_{0iso-tr}}{2\pi G (r^2 + r_s^2)}; \rho = \frac{\rho_{0NFW}}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (134)$$

$$\rho_{Burket} = \frac{\rho_{0Burket}}{\left(1 + \frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r^2}{r_s^2}\right)}.$$

que se deducen de distintos modelos de materia oscura [14].

En cualquier caso, la densidad debe satisfacer la ecuación de continuidad y las formas de la distribución expuestas en esta subsección pueden tomarse como condiciones iniciales cuya evolución está dada justamente por la ec. (131).

²⁴Surge de la ecuación de Vlasov [13]

4.5 Unidades patrón

Existen distintos sistemas de unidades, cada uno tiene sus ventajas y desventajas pero todos son equivalentes entre sí. El Sistema Internacional tiene como unidades básicas el metro, el kilogramo y el segundo. Es el más utilizado en todas las ramas y es intuitivamente más claro. El Sistema CGS tiene como unidades básicas el centímetro, el gramo y el segundo. Éste aún se utiliza ampliamente dentro de la astronomía.

El sistema geométrico se construye estableciendo que $c = 1$, y $G = 1$, lo que implica que tanto la distancia como el tiempo y la masa se miden en metros, siendo el metro “tiempo”:

$$1 m = 3 \times 10^{-8} s,$$

y el metro “masa”:

$$1m = 7.45 \times 10^{28} kg.$$

Este sistema resulta ser muy útil en relatividad general porque simplifica el manejo de las ecuaciones y su programación. En la siguiente tabla se presenta el valor de algunas constantes universales en los tres sistemas.

Constante	SI	CGS	Geométrico
G	$6,67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^2$	$6,67 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$	1
c	$2,997925 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$	$2,997925 \times 10^{10} cm \cdot s^{-1}$	1
\hbar	$1,055 \times 10^{-34} J \cdot s$	$1,055 \times 10^{-27} erg \cdot s$	$2,612 \times 10^{-70} m^2$
masa del sol	$2 \times 10^{30} kg$	$2 \times 10^{33} g$	$1.476 \times 10^3 m$
radio del sol	$6,96 \times 10^8 m$	$6.96 \times 10^{10} cm$	$6.96 \times 10^8 m$

Table 1: Valores de algunas constantes físicas en SI, cgs y sistema geométrico

No es difícil construir cualquier otro sistema de unidades que sea acorde a las escalas del fenómeno físico de estudio. Basta con definir unidades patrón que sean cantidades características del sistema. De esa forma, las variables se mantienen adimensionales, como en el sistema geométrico, pero están pesadas por las unidades patrón.

4.6 Ecuación de perturbación en unidades patrón

Introduciremos unidades patrón a la ecuación de perturbación:

$$[\square_{tr}^{\Phi} + \square_{\theta\phi}] \Psi_4^{(1)} = \frac{16\pi_n G}{c^4} r^2 T_4, \quad (135)$$

$$\text{con } T_4 = -\frac{(u^0 + u^1)^2}{2r^2} \sum \rho_{l,m}(t, r) \sqrt{l(l-1)(l+1)(l+2)} Y_{-2}^{l,m}.$$

En primer lugar es importante tener claras las unidades de cada miembro de la ecuación. Éstas son,

$$\left[\Psi_4^{(1)} \right] = \frac{1}{\text{distancia}^2}; \left[\frac{16\pi G}{c^4} \right] = \frac{\text{tiempo}^2}{\text{masa} \cdot \text{distancia}}$$

$$[\square_{tr}^\Phi + \square_{\theta\phi}] = \text{adimensional}; [T_4] = \frac{\text{masa}}{\text{distancia}^3 \cdot \text{tiempo}^2}.$$

Efectivamente, las unidades de ambos lados de la ecuación son iguales.

Se introducen las siguientes unidades patrón en función de constantes patrón R_0 , M_0 y T_0 . Los valores de las constantes pueden fijarse dependiendo del sistema físico de estudio. q es la velocidad característica del sistema:

$$r = R_0 d \quad M = M_0 n \quad t = T_0 T$$

$$q^2 = \frac{M_0 G}{R_0} \quad \alpha = \frac{q}{c}, \quad (136)$$

Los operadores son adimensionales y se reescriben como

$$\square_{tr}^\Phi \rightarrow \square_{Td}^\Phi = d^2 \left[-\alpha^2 \left(1 + \frac{2\alpha^2 n}{d} \right) \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \left(1 - \frac{2\alpha^2 n}{d} \right) \frac{\partial^2}{\partial d^2} + 2\alpha \left(\frac{2}{d} + \frac{\alpha^2 n}{d^2} \right) \frac{\partial}{\partial T} + 2 \left(\frac{2}{d} - \frac{\alpha^2 n}{d^2} \right) \frac{\partial}{\partial d} + \frac{4\alpha^3 n}{d} \frac{\partial^2}{\partial T \partial d} + \frac{2\alpha^2 n}{d} \right],$$

$$\square_{\theta\phi} \rightarrow \bar{\square}_{\theta\phi} = \square_{\theta\phi}.$$

Respecto a $\Psi_4^{(1)}$ se propone que $\Psi_0 = R_0^{-2}$. $\bar{\Psi}_4$ es la señal adimensional que se desea obtener en términos de las variables d y T .

$$\Psi_4^{(1)} = \Psi_0 \bar{\Psi}_4 = \frac{1}{R_0^2} \bar{\Psi}_4,$$

En cuanto a la parte derecha de la ecuación de perturbación, en el agujero de Schwarzschild $T_4 = \hat{\mathcal{T}}^{kk} T_{kk}$.

$$\hat{\mathcal{T}}^{kk} = \frac{1}{R_0^2} \tilde{T}^{kk}, \quad \tilde{T}^{kk} = \frac{1}{2d^2} \bar{\delta}_{-1} \bar{\delta}_0.$$

donde \tilde{T}^{kk} es el operador en las nuevas unidades.

Si consideraremos un fluido tipo polvo,

$$T_{\nu\mu} = \rho u_\mu u_\nu, \quad (137)$$

La densidad podemos expresarla como

$$\rho = \sigma \rho_0 \bar{\rho}$$

donde ρ_0 una densidad patrón, σ factor de proporción, $\bar{\rho}$ es la densidad en las nuevas variables. La velocidad la reescribimos como

$$u_\mu = q w_\mu$$

donde q la velocidad característica del fluido y w_μ la velocidad adimensional. Con esto

$$T_{\nu\mu} = \rho_0 \bar{\rho} q^2 w_\mu w_\nu = \sigma \rho_0 q^2 \bar{T}_{\nu\mu},$$

con

$$\bar{T}_{\nu\mu} = \bar{\rho} q^2 w_\mu w_\nu \Rightarrow \bar{T}_4 = \bar{T}^{kk} \bar{T}_{\nu\mu}$$

Es decir que,

$$T_4 = \left(\frac{\sigma \rho_0 q^2}{R_0^2} \right) \bar{T}^{kk} \bar{T}_{\nu\mu} = \left(\frac{\sigma \rho_0 q^2}{R_0^2} \right) \bar{T}_4.$$

Ahora sustituimos estos resultados en la ec. (135)

$$[\square_{Td} + \square_{\theta\phi}] \frac{1}{R_0^2} \bar{\Psi}_4 = \frac{16\pi G}{c^4} R_0^2 d^2 \left(\frac{\sigma \rho_0 q^2}{R_0^2} \right) \bar{T}_4,$$

Finalmente obtenemos, para cualquier densidad característica:

$$[\square_{Td} + \square_{\theta\phi}] \bar{\Psi}_4 = \left(\frac{16\pi G}{c^4} \rho_0 q^2 R_0^2 \right) d^2 \bar{T}_4. \quad (138)$$

4.7 Escalas

La ec. (138) permite tener una noción cualitativa del tamaño de la onda.

Como primera observación, la constante de proporcionalidad es muy pequeña,

$$\frac{16\pi G}{c^4} = 4.15 \times 10^{-48} \frac{s^2}{g \cdot cm},$$

por lo tanto, aunque aún falta resolver la ecuación, se intuye que la señal gravitacional efectivamente va a ser muy pequeña, a menos que las propiedades de la fuente, es decir su tamaño, densidad inicial y velocidades, sean grandes.

Por otro lado esas cantidades dependen entre sí. Consideremos que la unidades patrón las define el agujero negro de k masas solares. Su radio de Schwarzschild será la distancia patrón,

$$\begin{aligned}
M_0 &= kM_\odot & R_0 &= R_{SH} = \frac{2GkM_\odot}{c^2} \\
\Rightarrow q^2 &= \frac{kM_\odot G}{R_0} = \frac{c^2}{2}, & \alpha &= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{139}$$

Entonces $q^2 R_0^2 = \frac{c^2 R_{SH}^2}{2}$, por lo tanto se obtiene,

$$[\square_{Td} + \square_{\theta\phi}] \bar{\Psi}_4 = \left(\frac{8\pi G}{c^2} R_{SH}^2 \rho_0 \right) d^2 \bar{T}_4. \tag{140}$$

Escrita de esta forma se observa que el tamaño de la onda gravitacional depende del tamaño del agujero negro perturbado, y por lo tanto de su masa.

La densidad patrón ρ_0 conviene relacionarla con las propiedades del fluido que acreta al agujero negro. Puede calcularse para distintas distribuciones y dependiendo del tipo de materia.

Por ejemplo, una distribución esférica constante de polvo²⁵:

$$\rho_0 = \frac{3M_\odot}{4\pi R_{SH}^3} = \frac{3c^2}{8\pi G R_{SH}^2},$$

en tal caso, la constante entre paréntesis de la ec. (140) se reduce a 3.

O considerando el modelo isotérmico para un halo materia oscura,

$$\rho_0 = \frac{\sigma_{iso}^2}{2\pi G R_{SH}^2},$$

la constante se reduce a $\frac{4\sigma_{iso}^2}{c^2}$. σ_{iso}^2 se obtiene del modelo, pero no puede ser mayor que c^2 . Por tanto, en este caso el valor máximo de la constante es 4. Mayor que el modelo anterior.

Lo que sigue es resolver la ecuación de perturbación con métodos numéricos, expuestos en el siguiente capítulo.

²⁵En el caso de que la fuente sea un agujero de Schwarzschild de masa similar a la del sol, tendremos que $M_0 = M_\odot = 10^{33} \text{ gr}$, entonces $R_0 = R_{sh} = 1.5 \times 10^5 \text{ cm}$. Por tanto, la velocidad característica del sistema sería $q = \frac{1}{2}c$, mientras que $\alpha = \frac{1}{2}$. Y $\rho_0 = 7.07 \times 10^{16} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$.

Capítulo 5

Análisis numérico

Los métodos numéricos han sido vitales para simular y estudiar fenómenos muy variados que involucran la generación de ondas gravitacionales. En los sesentas, toma auge la relatividad numérica²⁶ que buscaba (a la par de otras líneas de investigación) simular ondas gravitacionales por colisión de dos agujeros negros para poder estimar el rango de eficiencia y propiedades de las señales gravitacionales modeladas [1].

La ecuación de perturbación obtenida en el capítulo anterior no puede ser resuelta de forma analítica, como la mayoría de las ecuaciones relativistas. En este capítulo detallaré las herramientas necesarias para resolver la ecuación por métodos numéricos.

Este trabajo ha sido recientemente desarrollado principalmente por el Dr. Darío Núñez Zúñiga y el Dr. Juan Carlos Degollado Daza, quien realizó el código que se presenta en la Sección 5.3. En [3] y [7] se detalla la forma de obtener la forma de la señal gravitacional, poniendo detalle en los modos cuasinormales, la evolución para el perfil de densidad y la forma de la señal para distintos observadores. A continuación resumo la forma de resolver la ecuación de perturbación.

Comenzaré mostrando que la ecuación de perturbación puede reducirse a un sistema de ecuaciones parciales de primer orden bien comportado. Escrito de esa forma es más sencilla su resolución por el método de diferencias finitas que luego debe ser integrado. Usamos Runge-Kutta. También se discuten las condiciones iniciales.

²⁶la ciencia y el arte de desarrollar algoritmos computacionales para resolver las ecuaciones de Einstein en sistemas astrofísicos realistas de campo-fuerte y altas velocidades [2].

5.1 Descomposición en un sistema de primer orden

Es una ventaja que para una fuente tipo polvo, la parte angular pueda desacoplarse de la parte radial y temporal. La parte angular tiene por solución los armónicos esféricos, entonces, el problema se reduce a resolver la ecuación de perturbación con primeras y segundas derivadas radiales y temporales [3]. Es importante remarcar que el desacoplamiento es posible porque la densidad del polvo se pudo expresar como la suma de armónicos esféricos por una función dependiente solo de r .

Ahora, para simplificar la ecuación conviene recordar la expresión de Φ :

$$\Phi = r\Psi_4^{(1)} = \sum Y_{-2}^{l,m}(\theta, \varphi)R_{l,m}(t, r)$$

de donde se obtiene que

$$\sum_{lm} Y_{-2}^{l,m} \left[\square_{tr} \Phi - (l-1)(l+2) \right] R_{l,m}(t, r) = \frac{16\pi G}{c^4} r^3 T_4^{(1)}. \quad (141)$$

siendo

$$T_4 = - \left(\frac{\frac{E}{m} - \sqrt{\frac{E^2}{m^2} - c^2 + \frac{2MG}{r}}}{r - \frac{2MG}{c^2}} \right)^2 \sum_{lm} \rho_{l,m}(t, r) \sqrt{l(l-1)(l+1)(l+2)} Y_{-2}^{l,m}$$

se han sustituido las expresiones para u^0 y u^1 obtenidas en la sección (4.2).

Uniendo estos resultados, se obtiene que cada modo (l, m) debe satisfacer la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} & \left(-r^2 \left[\left(1 + \frac{2MG}{c^2 r} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4MG}{c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} + \right. \right. \\ & + 2 \left(\frac{2}{r} + \frac{MG}{c^2 r^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + 2 \left(\frac{2}{r} - \frac{MG}{c^2 r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left. \frac{2MG}{c^2 r} \right] - (l-1)(l+2) \Big) R_{l,m} = \\ & - \frac{16\pi G r^3}{c^4} \left(\frac{\frac{E}{m} - \sqrt{\frac{E^2}{m^2} - 1 + \frac{2M}{r}}}{r - 2M} \right)^2 \sqrt{l(l-1)(l+1)(l+2)} \rho_{l,m}. \end{aligned} \quad (142)$$

Ahora, para resolver la ecuación se definen convenientemente las siguientes funciones.

$$\begin{aligned} \psi_l & := \partial_r R_l, \\ \Pi_l & := \frac{r + \frac{2MG}{c^2}}{r} \partial_t R_l - 2 \frac{MG}{c^2 r} \psi_l. \end{aligned} \quad (143)$$

Al remplazar estas funciones en la ec. (142) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned}
\partial_t \psi_l &= \frac{1}{r + 2\frac{MG}{c^2}} \left(r \partial_r \Pi_l + 2\frac{MG}{c^2} \partial_r \psi_l \right) + \frac{2\frac{MG}{c^2}}{\left(r + 2\frac{MG}{c^2} \right)^2} (\Pi_l - \psi_l), \\
\partial_t \Pi_l &= \frac{1}{r + 2\frac{MG}{c^2}} \left(2\frac{MG}{c^2} \partial_r \Pi_l + r \partial_r \psi_l \right) + \frac{2}{r \left(r + 2\frac{MG}{c^2} \right)^2} \left(2r^2 + 5\frac{MG}{c^2} r + 4 \left(\frac{MG}{c^2} \right)^2 \right) \Pi_l \\
&\quad + \left(r + 4\frac{MG}{c^2} \right) \left(2r + 3\frac{MG}{c^2} \right) \psi_l + \left(\frac{2}{r^3} \frac{MG}{c^2} - \frac{(l-1)(l+2)}{r^2} \right) R_l \\
&\quad + 4\pi r \left(\frac{\frac{E}{m} - \sqrt{\frac{E^2}{m^2} - c^2 + \frac{2MG}{r}}}{r - 2\frac{MG}{c^2}} \right)^2 \sqrt{l(l-1)(l+1)(l+2)} \rho_l.
\end{aligned} \tag{144}$$

Además, de la definición de Π_l se tiene que

$$\partial_t R_l = \frac{1}{r + 2\frac{MG}{c^2}} (r \Pi_l - \psi_l). \tag{145}$$

Son estas tres últimas ecuaciones las que deben resolverse acopladamente. Contiene solamente primeras derivadas radiales del lado derecho, mientras que del lado izquierdo se tiene la evolución temporal.

En este caso, al tener un sistema de ecuaciones lineales, no se requiere el inmenso costo computacional que demandan ciertos métodos de relatividad numérica. En cambio, se puede recurrir a métodos bien conocidos como diferencias finitas, elementos finitos y métodos espectrales. En estos métodos la complicación radica en construir soluciones convergentes y estables eligiendo las condiciones de borde más apropiadas. De estos, el método utilizado en este trabajo es el método de líneas.

5.2 Método de líneas

En el objetivo del método de líneas se consideran ecuaciones parciales diferenciales para obtener soluciones numéricas convergentes estables, donde la evolución temporal está bien establecida dado un conjunto de condiciones iniciales [4].

Estable significa que los resultados deben ser físicos para los datos iniciales dados. Convergente significa que la diferencia entre la solución calculada y la solución continua se reduce cuando se incrementa la resolución numérica.

Para aplicarlo a nuestro sistema de ecuaciones, primeramente se deben discretizar las derivadas espaciales y se convierte en un sistema semi-discreto. Posteriormente, la parte temporal se resuelve integrando la ecuación diferencial ordinaria utilizando, por ejemplo, Runge-Kuta de tercer orden

como integrador temporal. A continuación detallaré este proceso.

5.2.1 Discretización de las componentes espaciales

Para la discretización se puede recurrir al método de líneas. La ventaja de comenzar haciendo esto, es que ahorra tiempo de cómputo.

Se considera que el espaciotiempo es una malla uniforme conformada por un conjunto discreto de puntos. Así, cada función se evalúa en valores discretos de x_i , pensando al tiempo y al espacio de forma separada. Por “uniforme” se quiere decir que la distancia entre dos puntos Δx es constante, por lo tanto,

$$x_i = i\Delta x. \quad (146)$$

o considerando la forma más general, $x_i = x_0 + i\Delta x$.

Dada una función ϕ , la aproximación diferencial finita se denota como ϕ_j , para el valor $\phi(x_j, t_n)$, de tal forma que

$$\phi_i = \phi(x_i) + \text{error de truncamiento}.$$

Luego, al hacer una expansión en serie de Taylor se tiene que,

$$\begin{aligned} \phi_{i+1} &= \phi(x_i + \Delta x) = \phi(x_i) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_j} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{x_j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_{x_j} \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \\ \phi_{i-1} &= \phi(x_i - \Delta x) = \phi(x_i) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_j} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{x_j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)_{x_j} \Delta x^3 + O(\Delta x^4), \end{aligned} \quad (147)$$

de donde se obtiene que

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{(\phi_{i+1} - \phi_i)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (148)$$

lo cual era de esperarse porque en el límite $\Delta x \rightarrow \infty$, no es más que la definición de derivada parcial. Pero además,

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (149)$$

y el error ya es de segundo orden en Δx . Esto es conveniente porque significa que el error de truncamiento disminuirá en un factor de cuatro cuando se reduzca Δx por un factor de dos, en el límite de pequeños espacimientos de la malla.

De esta forma, las derivadas espaciales son discretizadas para obtener un sistema semi-discreto de ecuaciones ordinarias para la parte temporal.

Por cierto, bajo este método es posible construir segundas derivadas parciales y de ordenes mayores, aunque en este caso no es necesario.

5.3 Runge-Kutta

Entre los integradores estables se encuentra el método de Runge-Kutta [6] que resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma $\partial_t f = S$.

En primer lugar se toma un número de pasos de tiempo a primer orden para f :

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f^n \\ f^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{ik} f^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} S(f^k) \right), \\ f^{n+1} &= f^s \end{aligned} \quad (150)$$

con $i = 1, 2, \dots, s$.

Si se considera hasta el segundo orden,

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \sum_{k=0}^{i-1} f^n + \Delta t S(f^n), \\ f^{n+1} &= \frac{1}{2} f^n + \Delta S(f^n). \end{aligned} \quad (151)$$

Y el tercer orden resulta ser,

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= u^n + \Delta t S(f^n), \\ f^{(2)} &= \frac{1}{4} \left(3f^n + u^{(1)} + \Delta t S(f^1) \right), \\ f^{n+1} &= \frac{1}{3} \left(3f^n + 2u^{(1)} + 2\Delta t S(f^2) \right). \end{aligned} \quad (152)$$

Una solución numérica es consistente cuando el error local de truncamiento²⁷ tiende a cero cuando Δx tiende a cero.

Así, se pueden considerar distintos ordenes para contruir la función de interés, f a través de un número finito de pasos. Al ser fáciles de programar y robusto, los integradores, y en particular los métodos Runge-Kutta, son de gran utilidad para obtener soluciones consistentes a ecuaciones para la dinámica de fluidos, de gran importancia en la física.

²⁷El error de truncamiento es uno de los tipos de error de interés. Dada una solución exacta a la ecuación diferencial f , el error de truncamiento σ está dado por

$$\sigma(t + \Delta t, x) = |f(t + \Delta t, x) - \tilde{f}(t + \Delta t, x)|,$$

diendo $\tilde{f}(t + \Delta t, x)$ la solución numérica con valores iniciales dados.

5.4 Condiciones iniciales

Estas condiciones son de la forma

$$\phi_i(x, 0) = \phi_{0i}(x), \quad (153)$$

donde $\phi_{0i}(x)$ es la condición dada. Debe ser una función suave, es decir, continua, aunque esto no garantiza que existan soluciones bien definidas o continuas. Al plantamiento de una ecuación diferencial dada la condición anterior se le conoce como problema de Cauchy.

El caso donde los datos iniciales son discontinuos, se le llama problema de Riemann. Tener discontinuidades dificulta la computación de la solución de la ecuación porque el método de diferencias finitas deja de ser válido cerca de las discontinuidades. En tal caso se puede recurrir a otros métodos como el de volúmenes finitos.

En nuestro caso de estudio, se considera un pulso gaussiano para $R_{l,m}$, luego éste se propaga de acuerdo a la ecuación de perturbación.

En las funciones Π_l y Ψ_l se asignan valores iniciales y dependiendo de la combinación de éstos, el pulso viajará hacia el agujero negro hacia adentro o hacia afuera.

Al llegar el pulso al agujero, será modificado y las propiedades de la fuente modelarán la señal dispersada. Así, ésta puede ser contrastada con la información de los detectores.

La malla computacional tiene algunos límites a posiciones finitas para mantener estable la evolución. r_{in} delimita la parte interna del horizonte aparente del agujero negro. También se impone el límite $r_{out} \sim 800 - 1600$ [7]. Suponemos que la densidad del polvo inicial está distribuida en una esfera y por lo tanto puede ser descrito como la superposición de modos armónicos:

$$\rho = \rho_{0,0}(r, t)Y_0^{0,0} + \rho_{l,m}(r, t)Y_0^{l,m}, \quad (154)$$

con $l \geq 2$. A partir de $l = 2$ el modo contribuye de forma importante a la señal resultante; ésta debe ser al menos cuadrupolar, pues ni el dipolo ni el monopolo genera radiación gravitacional.

Con esto lo que se está modelando es un pulso gaussiano cayendo hacia el agujero negro.

5.5 Descripción del código

Bajo el esquema arriba descrito se elaboró un código en el lenguaje de programación FORTRAN.

El programa se divide en subprogramas, los cuales son:

- boundary.f90 Contiene las condiciones de borde
- initial.f90 Maneja los datos iniciales del problema
- evolve.f90 Resuelve la envolvente de la densidad del fluido tipo polvo.

- derivs.f90
- main.f90 Es el subprograma principal.
- maxrho.f90 Se encarga de graficar la envolvente de la densidad del fluido. También define la malla.
- params.f90 Permite cambiar los parámetros del problema, como la masa del agujero negro.
- rhs.f90 resuelve la ecuación en fondo de Schwarzschild.

Y utiliza los datos almacenados en

- energy.dat, obs1_R1.dat, obsR1.dat, obsR2.dat, pi4.dat, psi.dat, R3.dt, R4.dat rho.dat, rho_envolpe.dat.

El último es generado por maxrho.f90 y crea datos de la envolvente de la densidad.

5.6 Resultados

En el análisis suele usarse un pulso gaussiano y obtener la respuesta gravitacional debida a la variación de los parámetros del pulso.

En la siguiente imagen se muestra la gráfica de $\Phi = r\Psi_4^{(1)}$ para tres modos l distintos.

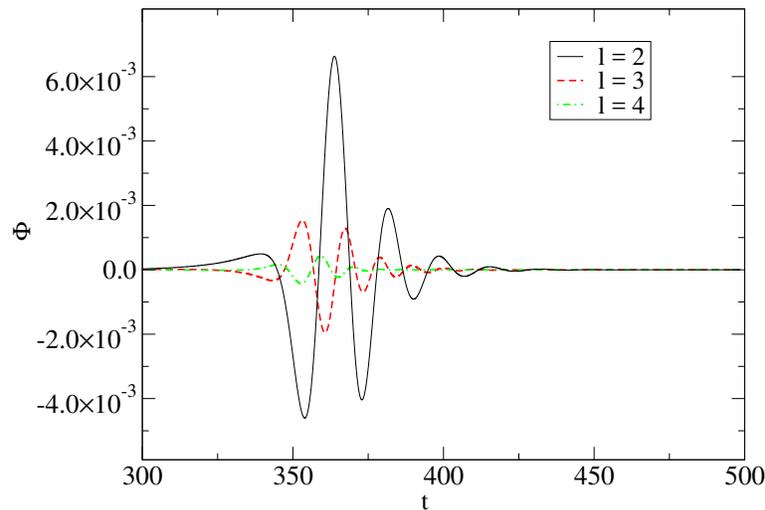


Figura 5.1: Señal gravitacional para los modos $l = 2, l = 3, l = 4$. Tomado de [6].

Lo que se modela es un pulso gaussiano inicial que se deja caer al agujero negro a una distancia $r = 120M$. Un observador situado en este observa la evolución de la señal.

El pulso viaja a la velocidad de la luz y llega al agujero negro, el cual reacciona y produce una señal que es emitida también a la velocidad de la luz y es la solución a la ecuación de perturbación.

La solución a la ecuación se divide en tres partes:

- La señal inicial. Depende fuertemente de los datos iniciales.
- La fase de oscilación “ring down”. Cuando la señal llega al agujero negro.
- La fase decayendo “tail”. Que es la señal atenuada.

Se observa que la solución tiene un comportamiento oscilatorio. Las frecuencias pueden obtenerse aplicando la transformada compleja de Fourier y corresponden a los modos cuasinormales de la señal gravitacional, ver [3].

Por otro lado, es importante comprobar que no existirá señal en el modo monopolar ni dipolar. Es a partir de $l = 2$ cuando se genera la señal gravitacional. Entonces se requiere perder simetría en la forma de la caída del polvo, no obstante esto es muy posible físicamente. En general, los procesos de acreción en las vecindades del agujero negro son altamente caóticos, energéticos y nada simétricos.

Así, la señal obtenida concuerda cualitativamente con las formas de las señales obtenidas por LIGO para la señal GW150915 [8].

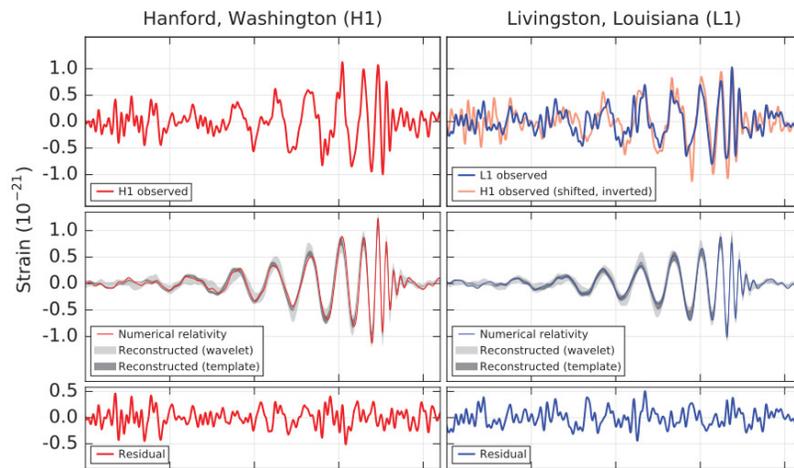


Figura 5.2: Señal gravitacional detectada por los interferómetros de Hanford (izquierda) y Livingston (derecha) el 15 de septiembre de 2015.

Más aún, se espera que la ec. (138) obtenida en este trabajo permitirá comparar cuantitativamente las señales gravitacionales.

Otros resultado importante que se obtiene de resolver la ec. (142) obtenida de la ecuación de continuidad, es la evolución del perfil de densidad del polvo. Se encuentra que los modos de materia (l, m) , despiertan los correspondientes modos de radiación gravitacional. En la siguiente figura se muestra como decrece la densidad.

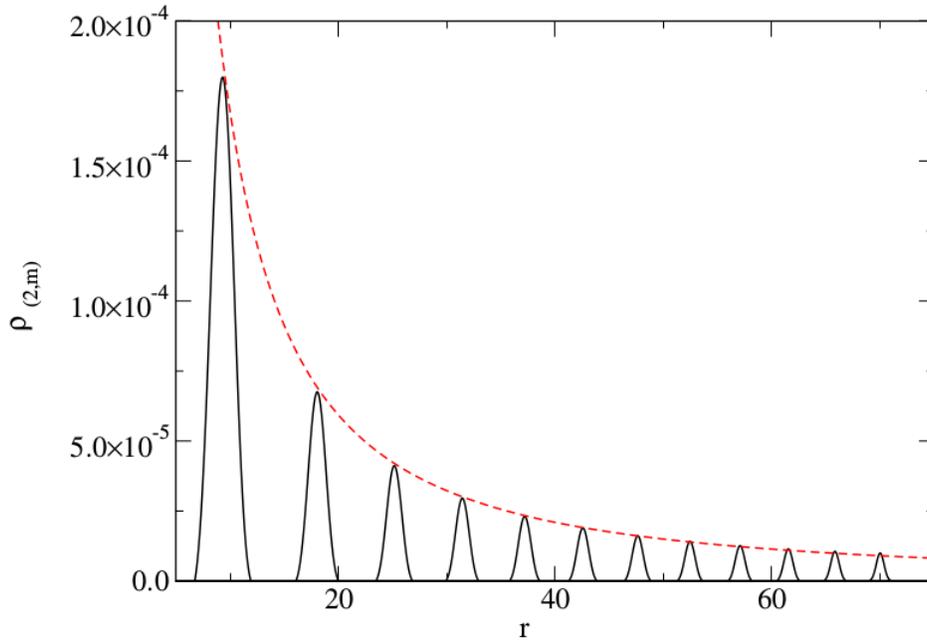


Figura 5.3: Evolución de la densidad para un pulso inicial con amplitud 10^{-5} , ancho $\sigma = 0.5$ y centrada en $r_0 = 70M$.

Tomado de [6].

Al resolver simultáneamente las ecs. (144), (145) y (142) se encuentra la respuesta gravitacional del agujero negro ante perturbaciones causadas por tal distribución de materia. A continuación se muestra la función de radiación Φ obtenida para tres observadores localizados a distintas distancias.

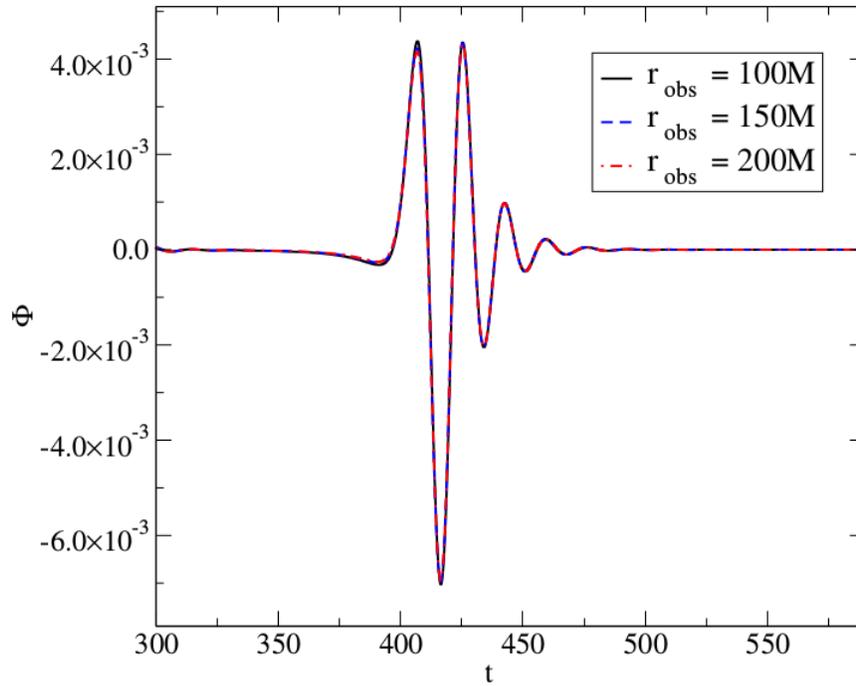


Figura 5.4: Señal gravitacional medida por tres observadores en $r_{obs} = 100M$, $150M$ y $200M$. Tomado de [6].

De la figura anterior se comprueba que Φ tiene un comportamiento constante en r , entonces Ψ_4 efectivamente decae como $1/r$. En esta gráfica se superpusieron las señales para comprobar tal comportamiento asintótico para tres observadores situados a $r = 100M$, $200M$ y $300M$.

Por otro lado, se comparó la señal de pulsos de diferentes anchos, por ejemplo $\sigma = 1M$, $1.5M$, $2M$, $2.5M$. En escala logarítmica,

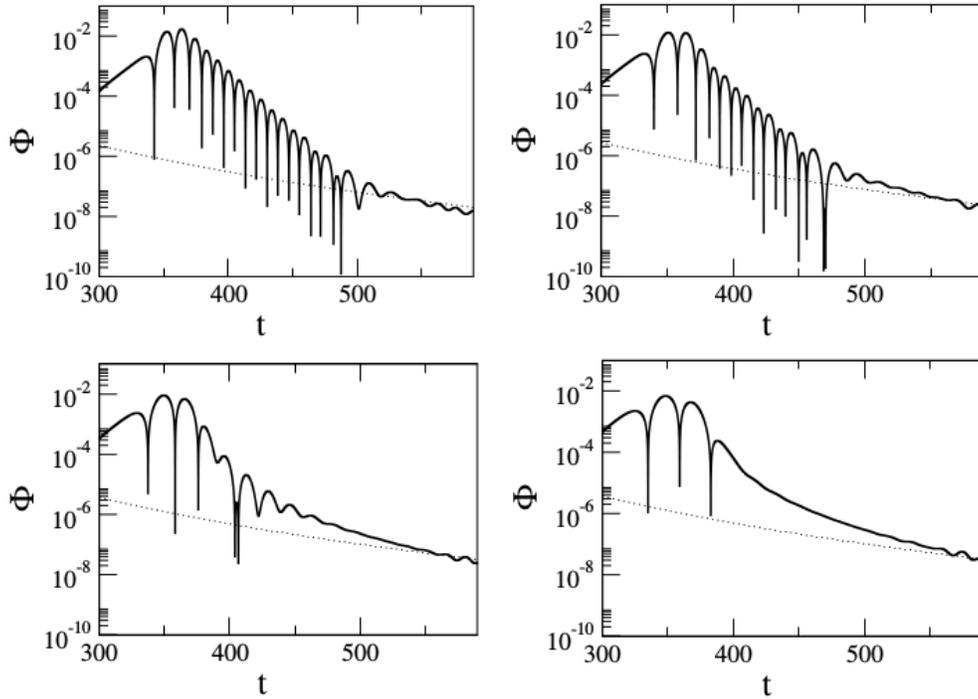


Figura 5.5: De izquierda a derecha $\sigma = 1M, 1.5M$ arriba y $\sigma = 2M, 2.5M$ abajo. Observamos los modos generados por cáscaras de polvo. Tomado de [6].

Esto significa que para perturbaciones que actúan por breves periodos de tiempo tienen por respuesta del agujero negro los modos cuasinormales de oscilación, hechos ya obtenidos por distintos autores [9]. Además, mientras más compacta es la cáscara, se generan más modos.

Es importante notar que todos estos resultados se obtuvieron resolviendo las ecuaciones adimensionales. En futuros trabajos se puede utilizar estos resultados para encontrar las magnitudes físicas de las variables.

Capítulo 6

Conclusiones

El fenómeno central de esta tesis fue la acreción de polvo hacia un agujero negro de Schwarzschild. Es un modelo muy idealizado que busca reproducir la generación de ondas gravitacionales para el agujero negro más simple y la fuente más simple. Encontramos aún así importantes resultados y experiencia para poder resolver posteriormente sistemas un poco más realistas.

Al ser un fenómeno completamente relativista, está descrito por ecuaciones tensoriales de cuatro dimensiones, no obstante, existen formalismos alternativos cuyas ventajas deben explotarse. Esto fue lo que hicimos con el formalismo Newman-Penrose cuya ventaja radica en poder caracterizar un espaciotiempo en términos de los escalares de Weyl. Aunque estos invariantes dependen de la elección de la tétrada, es una gran ventaja que los espaciotiempos de Schwarzschild y Kerr sean tipo D. El siguiente paso fue perturbar los escalares de Weyl, en particular $\Psi_4^{(1)}$ que lo interpretamos como la onda gravitacional. De las ecuaciones perturbadas de Newman-Penrose encontramos la ecuación que debía satisfacer la onda gravitacional.

Hubiera sido muy complicado resolver esa ecuación de no haber sido posible desacoplar la parte radial-temporal de la angular. Bajo esa motivación se buscó que la fuente fuera tal que también pudieran separarse las variables angulares. Motivado con las soluciones de la ecuación de Laplace, se propuso que la parte angular tuviera por solución armónicos esféricos, lo cual simplificó el problema. Entonces, se propuso que la fuente fuera polvo cuya densidad fuera una combinación de armónicos esféricos por una distribución de densidad.

La siguiente pregunta fue ¿qué tipo de función de densidad utilizar para describir polvo acretaando y a que situación física asemejaría? Como modelo se estudiaron pulsos gaussianos variando los modos normales y el ancho del pulso para distintos observadores. Se encontró que efectivamente el modo $l = 0$ ni $l = 1$, generan radiación gravitacional. Además, los modos cuasinormales del agujero negro se despiertan mientras más rápidos sean los pulsos, lo cual está relacionado a la distribución de la masa del polvo.

Se introdujeron las unidades patrón para la ecuación de perturbación para Φ , y se propusieron

cantidades características del sistema con distintas formas de la función de densidad -homogénea esférica e isotérmica de un halo de materia oscura. Se observó que las dimensiones de la onda cambian un poco dependiendo de la densidad elegida.

En síntesis, el formalismo Newman-Penrose es satisfactorio para describir la generación de ondas gravitacionales mediante la perturbación de un agujero negro de Schwarzschild. Efectivamente se reproducen las propiedades de las ondas gravitacionales que se deducen de la teoría de la relatividad general. No obstante, es importante recordar que este modelo solo es válido en regiones muy lejanas del agujero negro. Es importante conjuntar estos resultados con los datos arrojados por LIGO y más aún, con otros métodos numéricos.

A día de hoy, el estudio de las ondas gravitacionales está tomando más importancia por mostrar éxito potencial en observar el universo en el espectro gravitacional, además del electromagnético.

La mayoría de las fuentes probables de ondas gravitacionales involucran agujeros negros, por ello modelar la acreción tiene importancia y relevancia actual. Pero es importante en las investigaciones con resultados numéricos, poner atención en las unidades del sistema y en el significado físico del problema modelado. Por ello, a lo largo de todo el trabajo mantuvimos las unidades en sistema cgs, por ser comunmente utilizado en astrofísica.

Finalmente, quiero plantear una serie de reflexiones adquiridas a lo largo de la realización de esta tesis.

La relatividad general es una teoría hasta el momento exitosa para describir una enorme gama de fenómenos que hasta ahora se están empezando a entender. Pero no hay que perder de vista que se trata de una teoría y hay principios a priori que a veces conviene detenerse a reflexionar. A la par, se deben cuestionar y contrastar distintos métodos para describir todos esos fenómenos. En nuestro caso, abordamos el análisis perturbativo porque era nuestro objetivo modelar la onda lejos de la fuente, por ejemplo, en los detectores colocados en el sistema solar. Esto recordando siempre que el universo es mucho más complejo de lo que nuestras ecuaciones pueden describir. No obstante, ese método debe complementarse con los resultados donde evolucionan las ecuaciones de campo en el régimen de campo fuerte. También debe conjugarse con las actuales observaciones de los detectores. Al final, es la forma en la que se generan los conocimientos científicos, mediante la complementación y contrastación de distintos modelos, experimentos y simulaciones, utilizando todas las herramientas disponibles.

Es importante decir que la relatividad numérica ha sido vital para que continúe el desarrollo de la cosmología y la astrofísica relativista; ha permitido estudiar, por ejemplo, distintos escenarios dinámicos de sistemas binarios de agujeros negros o estrellas de neutrones y la generación de radiación gravitacional para contrastar las observaciones obtenidas en LIGO y otros proyectos internacionales. Las simulaciones numéricas, en distintas ocasiones, han adelantado a las observaciones o a modelos teóricos, como lo fue el fenómeno de colapso gravitacional.

Es cierto que nos encontramos sobre el nuevo paradigma en investigación. Las ondas gravitacionales son un tema de actualidad, sobre todo después de que se le otorgara el Premio Nobel de

Física 2017 a los investigadores Rainer Weiss, Barry Barish y Kip Thorne, pioneros del proyecto LIGO. Por ello, es importante divulgar de la mejor forma los contenidos científicos para que la sociedad pueda también acceder de forma clara a los últimos resultados a los que ha llegado la comunidad científica.

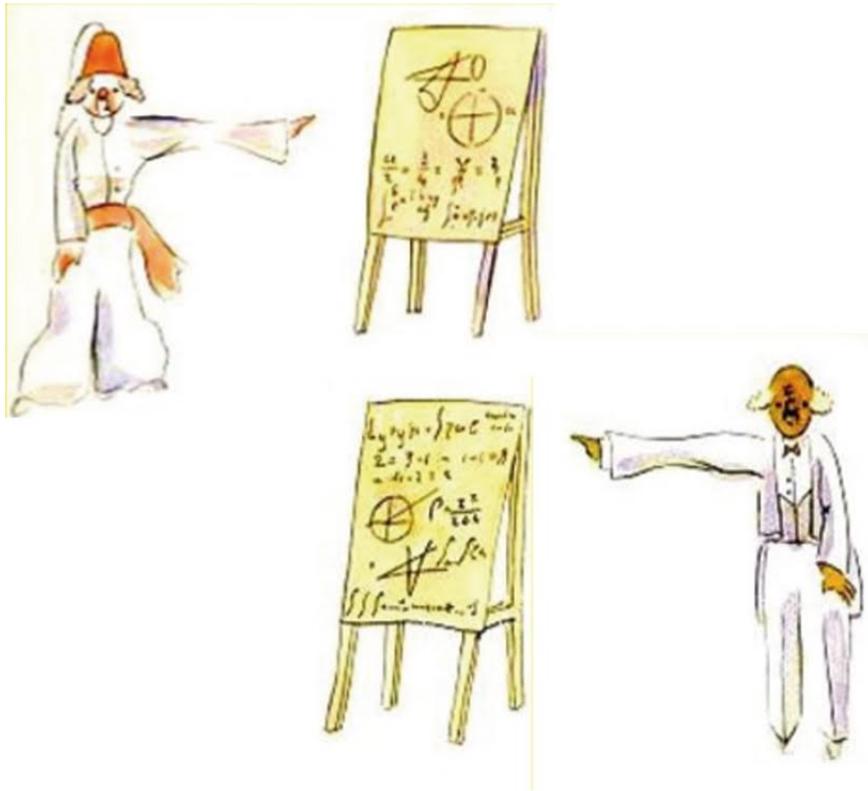


Figure 1: Astrónomo turco que vio el asteroide B 612, en *El Principito*. © Antonie de Saint-Exupéry 1999.

Referencias

Introducción

- [1] Planck collaboration (2013). «Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results». Submitted to *Astronomy & Astrophysics*. arXiv:1303.5062
- [2] LIGO (2016). *Gravitational Waves Detected 100 Years After Einstein's Prediction*. Press Release, Feb, 11 2016.
- [3] *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 (2016). "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger"
- [4] "GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence" (open access) Published in *Phys. Rev. Lett.* 116, 241103 (2016)
- [5] GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2 (open access) Published in *Phys. Rev. Lett.* 118, 221101 (2017)
- [6] GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral (open access) Published in *Phys. Rev. Lett.* 119, 161101 (2017)

Capítulo 1

- [1] A. Einstein, *Annalen der Phys.*, 49, 769 (1916).
- [2] Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology* (New York: Wiley).
- [3] Schutz, Bernard F. *A First Course in General Relativity*. 2nd Edition, Cambridge University Press, (2009)
- [4] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. 1973, *Gravitation* (San Francisco: Freeman).
- [5] Núñez, D., Degollado, J. C. *Relatividad General Notas para el curso de la Facultad de Ciencias, UNAM*
- [6] Feynman, R. P.; Morinigo, F. B.; Wagner, W. G.; Hatfield, B. (1995). *Feynman lectures on gravitation*. Addison-Wesley.
- [7] E. Bertshinger. *Physics 8.962 Introduction to tensor calculus for general Relativity* MIT (1999)
- [8] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry*, Addison-Wesley
- [9] A. Einstein, *Ann. Physik*, 17, 891 (1905); 18, 639 (1905).

Capítulo 2

- [1] Landau & Lifshitz: Mecánica, Ed. Reverté, Barcelona, 1991
- [2] Phys. Rev. D 93, 122010 (2016) -- Abstract "GW150914: The Advanced LIGO Detectors in the Era of First Discoveries"
- [3] Página oficial de LIGO <https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20170801>
- [4] Página oficial de VIRGO: <http://www.virgo-gw.eu/>
- [5] M. Alcubierre, Introduction to 3 + 1 numerical relativity, Clarendon Press, Oxford, 2007.
- [6] T. Baumgarte, S. Shapiro. Numerical Relativity Cambridge University Press (2010).
- [7] De Unánue, A. Revisión de la teoría de perturbaciones en Relatividad General. Revista Mexicana de Física 57 (4) 276-303
- [8] Schutz, Bernard F. A First Course in General Relativity. 2nd Edition, Cambridge University Press, (2009)
- [9] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. 1973, Gravitation (San Francisco: Freeman).
- [10] Maggiore, M. Gravitational Waves, Vol. 1. Oxford University Press, 2017.
- [11] Shutz, B. Ricci, F. Gravitational Waves, Sources and Detectorsb (2010) arXiv:1005.4735.

Capítulo 3

- [1] Newman, E., Penrose, R.: An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. J. Math. Phys. 3, 566–579 (1962).
- [2] Salgado, Marcelo. Formulación 3+1 de la relatividad general y formalismo de tétradas con aplicaciones numéricas (1999).
- [3] Teukolsky, Phys. Rev. Lett. 29, 1114 (1972)
- [4] Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes Oxford Classic Text, 1981
- [5] Degollado, J. C., Núñez D., Palenzuela, C. Signatures of the sources in the gravitational waves of a perturbed schwarzschild black hole (2009).
- [6] Kramer D., Stephani H, Herlt E., Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press.
- [7] Szekeres, P. J., Math. Phys. 6, 1387 (1965).
- [8] Aguilar-Chavez, C. Tétradas de Newman Penrose en relatividad general. En The Genercience Journal
- [9] S. A. Teukolsky. Perturbations of a rotating black hole i. fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. Astroph. J., 185:635–647, 1973.
- [10] D. Núñez A. Zenginoğlu and S. Husa. Gravitational perturbations of schwarzschild space-time at null infinity and the hyperboloidal initial value problem. Class. Quantum. Gravit., 26:035009, 2009.
- [11] Núñez, D., Degollado, J. C. Perturbation theory of black holes: Generation and properties of gravitational waves. AIP Conf. Proc. 1473, 3 (2012); doi: 10.1063/1.4748529

Capítulo 4

[1] Shapiro, S. L. Teukolsky, S. A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars The Physics of Compact Objects Ed Wiley-VCH (1983)

[2] Mendoza, S. Astrofísica Relativista. UNAM, 2003.

Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes Oxford Classic Text, 1981

[3] Carroll B.W. & Ostlie D.A., An Introduction to Modern Astrophysics.

[4] Alecian, E. An Introduction to Accretion Disks. Available in <http://www.astro.caltech.edu/~lah/review/stardiskph>

[5] D. Núñez, J. C. Degollado, Perturbation theory of black holes: Generation and properties of gravitational waves. AIP Conf. Proc. 1473, 3 (2012); doi: 10.1063/1.4748529

[6] J. C. Degollado, D. Núñez, and C. Palenzuela, Signatures of the sources in the gravitational waves of a perturbed Schwarzschild black hole, GRG, (2009), 42, No. 5, 1287-1310.

[7] Núñez, D., Degollado, J. C. Relatividad General Notas para el curso de la Facultad de Ciencias, UNAM

[8] J. C. Degollado, D. Nunez, and C. Palenzuela, Gen.Rel.Grav. 42, 1287–1310 (2010), 0903.2073.

[9] D. Nunez, J. C. Degollado, and C. Moreno, Phys.Rev. D84, 024043 (2011), 1107.4316.

[10] D. Nunez, J. C. Degollado, and C. Palenzuela, Phys. Rev. D81, 064011 (2010), 1002.2227

[11] Degollado, J. C. Ondas gravitacionales y acreción hacia agujeros negros. Tesis doctoral, Posgrado en Ciencias Físicas (2010).

[12] Greiner W., Neise L. & Stocker H. Thermodynamics and Statistical Mechanics

[13] Domínguez-Fernández, P. Jiménez-Vázquez, E. Alcubierre, M. Montoya, E. Núñez, D. Description of the evolution of inhomogeneities on a Dark Matter halo with the Vlasov equation (2017). arXiv:1703.03286

[15] Tonatiuh Matos, Argelia Bernal, and Dario Nunez. Flat Central Density Profiles from Scalar Field Dark Matter Halo. Rev.Mex.A.A., 44:149, 2008.

Capítulo 5

[1] H. Bondi, N. G. J. van der Burg, and A. W. K. Metzner. Gravitational waves in general relativity vii. waves from axisymmetric isolated systems. Proc. Roy. Soc. of London A, 269, Number 1336:21–, 1962.

[2] M. Ruiz, M. Alcubierre, D. Núñez, and R. Takahashi. Multipole expansion for energy and momenta carried by gravitational waves. Gen. Relativ. and Gravit., 40:1705–1729, 2008

[3] D. Núñez, J. C. Degollado, Perturbation theory of black holes: Generation and properties of gravitational waves. AIP Conf. Proc. 1473, 3 (2012); doi: 10.1063/1.4748529

[4] Shoichiro Nakamura. Métodos numéricos aplicados con software. Prentice-Hall, Naucalpan, Edo. de México, 1992.

[5] Chi-Wang Shu Sigal Gottlieb. Total variation diminishing runge-kutta schemes. Mathematics of computation, 67:73–85, 1998.

- [6] Degollado, J. C. Ondas gravitacionales y acreción hacia agujeros negros. Tesis doctoral, Posgrado en Ciencias Físicas (2010).
- [7] Oliger Gustafsson, Kreiss. Time dependent problems and difference methods. J. Wiley, New York, 1995.
- [8] Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016). "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger"
- [9] Nagar, A. Zanotti, J. Font, J. A. and Rezzolla, Phys. Rev. D 75, 044016 (2007).