UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

LA HUELLA DE LA ESTRUCTURA QUE SUBYACE A LAS TEORÍAS FÍSICAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

D O C T O R   E N   F I L O S O F I A   D E   L A   C I E N C I A

PRESENTA:

J O R G E A L B E R T O M A N E R O O R O Z C O

DIRECTOR DE TESIS:

D R.   E L I A S   O K O N   G U R V I C H
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS, UNAM.

COMITÉ TUTOR:

D R.   H E C T O R   H E R N Á N D E Z   C O R O N A D O
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

D R A.   O L I M P I A   I R I S   L O M B A R D I
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, ARGENTINA.

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.   ENERO 2018

AGRADECIMIENTOS

> “Los esfuerzos de la mayoría de los seres humanos se consumen en la lucha por su pan de cada día, pero la mayoría de los que están, ya sea por su suerte o algún don especial, aliviado de esta lucha son absorbidos en gran medida a mejorar aún más su suerte mundana. Bajo el esfuerzo dirigido hacia la acumulación de bienes materiales se encuentra con demasiada frecuencia, la ilusión de que este es el fin más importante y deseable que se persiga; pero hay, por fortuna, una minoría compuesta por aquellos que reconocen al principio de sus vidas que las experiencias más hermosas y satisfactorias abiertas a la humanidad no se derivan desde el exterior, pero están unidos con el desarrollo de la propia sensación de la persona, el pensamiento y la actuación.”
> *Extracto de tributo a Emmy Noether escrito por Albert Einstein.*

Un agradecimiento especial al CONACYT, por el apoyo económico que se me ha ofrecido a partir de la fecha 01 de febrero de 2014 hasta el 31 de diciembre de 2017.

Un agradecimiento muy grande a la Universidad Nacional Autónoma de México, una institución que no ha dejado de maravillarme y a la que le debo mucho.

Un gran agradecimiento al Dr. Elias Okon, la Dra. Olimpia Lombardi y el Dr. Héctor Hernández por su apoyo y asesoría.

Un gran agradecimiento a la Dra. Ana Rosa Pérez y la Dra. Fernanda Samaniego por interesarse en mi trabajo y ser parte de mi jurado.

En lo personal, quisiera hacer un agradecimiento especial a mis padres por su amor y apoyo.

Gracias a Natalia, mi compañera de vida.

Gracias a mi hermano, que vibra en la luz con nosotros.

Gracias a mis amistades.

Índice

Parte I

Introducción

1. Introducción General

Una de las promesas más ambiciosas dentro de los círculos de investigación filosóficos ha sido comprender los aspectos más profundos del mundo a través de nuestro conocimiento. En esta incesante búsqueda, la ciencia ha desempeñado un rol significativo debido a su capacidad de predecir fenómenos con un grado de precisión inigualable. Gracias a esta virtud, algunos filósofos han adoptado una tesis filosófica, ampliamente conocida como *Realismo Científico*, que se fundamenta en la creencia de que el mundo es independiente del agente cognoscente y puede conocerse mediante las teorías científicas más exitosas[1]. Esta tesis ha sido justificada por ser supuestamente la mejor explicación al éxito predictivo que la ciencia ha gozado desde hace ya varios siglos. Sin embargo, al tratar de investigar la imagen del mundo que estas teorías esbozan más allá de su capacidad predictiva, han surgido cuestionamientos que no han resultado del todo triviales, sobre todo en relación a la claridad, ó bien, la veracidad de las proposiciones en términos de las cuales se construyen dichas teorías. Por ejemplo, ¿Cuál es la imagen del mundo que la Leyes de las teorías científicas representan? ¿Es dicha imagen la fisonomía del mundo real?
Estos cuestionamientos comprenden distintos problemas que se han analizado en términos de ciertas categorías filosóficas previamente establecidas: i) el problema semántico, que refiere a la ambigüedad de las interpretaciones del lenguaje en el que se construyen dichas teorías; y el ii) problema epistemológico, que manifiesta la dificultad de confirmar de manera racional la veracidad de las proposiciones teóricas y la posibilidad de que estas últimas refieran al mundo mediante la adopción de alguna de dichas interpretaciones. En lo que respecta a la semántica (i), aspectos como la claridad y la adecuación empírica han demostrado tener algunos problemas considerables. El problema de la *Claridad*[2] es, en efecto, la dificultad de interpretar a las teorías debido a la ambigüedad y la poca claridad con la que sus términos teóricos hacen referencia a un mundo que se pretende esbozar. Por ejemplo, en el caso de la *Mecánica Clásica* (*MC*), es posible interpretar a las funciones y las ecuaciones diferenciales supuestamente en términos de la interacción y la dinámica de partículas puntuales en movimiento con propiedades bien definidas. Pero con la presencia de las fuerzas newtonianas, es factible preguntarse si esta interpretación plantea una imagen clara del mundo clásico, ó bien, si se sabe con claridad el significado de estas fuerzas. Por otro lado, el problema de la *Adecuación Empírica* se debe a la existencia de elementos del mundo observable que no tienen su contraparte en cualquier interpretación disponible[3]. Por ejemplo, se sabe que la *MC* reproduce todos los fenómenos

[1] En este trabajo, se hace énfasis únicamente en el éxito *predictivo* de las teorías científicas.

[2] Bajo el supuesto de que se requiere una definición abstracta para todo término teórico, la claridad es, según Leibniz, la aprehensión clara de las ideas que dichas definiciones poseen, regida por el principio de no-contradicción y de razón suficiente [Peirce, 1878, p.288].

[3] En el contexto de la Física, la adecuación empírica de una teoría suele llamarse completitud. Sin embargo, habría que hacer una distinción entre la completitud de un cuerpo teórico que no necesariamente viene acompañado de una interpretación, como por ejemplo, la *Mecánica Cuántica Estándar* (*MCE*) de perfil instrumentalista, y la adecuación empírica de las entidades inobservables

observables que ocurren a un nivel macroscópico en términos de la dinámica y la interacción de partículas puntuales, sin embargo, algunos fenómenos observables como los efectos de difracción de electrones parece que escapan a cualquier posibilidad interpretativa bajo los supuestos metafísicos de esta teoría.

En lo que concierne a la epistemología (ii), se presentan dos problemas al nivel confirmativo, uno a posteriori y el otro a priori. El primero, mejor conocido como la *Meta-inducción Pesimista* (*MIP*), hace un llamado a la evidencia histórica para concluir, de manera inductiva, que un compromiso ontológico con respecto a los objetos y propiedades inobservables que postulan las teorías científicas más exitosas es deficiente debido a que no ha podido sobrevivir al cambio teórico natural de la ciencia. Un ejemplo muy conocido en la historia de la ciencia (acerca de los estudios teóricos de la luz) es la hipótesis del éter, la cuál fue legítima en su momento gracias a que podía explicar el éxito predictivo de la teoría de Fresnel bajo un dominio restringido (para materiales dialécticos y frecuencias ópticas), pero que eventualmente fue reemplazada por la hipótesis ondulatoria de los campos electromagnéticos, que explica el éxito predictivo de la teoría de Maxwell (válida para cualquier tipo de materiales y frecuencias). El segundo, comúnmente conocido como el *Problema de la Sub-determinación* (*PSD*), consiste en la imposibilidad de confirmar empíricamente una sola interpretación, en virtud del espectro de las posibilidades interpretativas que son, en principio, empíricamente equivalentes. Por ejemplo, la confrontación entre diferentes interpretaciones que se han propuesto en la *MC*, como es el caso de la existencia de fuerzas newtonianas en la formulación de Newton, o bien, la existencia de campos hamiltonianos que influyen a las partículas en su movimiento en la formulación de Hamilton-Jacobi.

Ahora bien, tomando en cuenta el debate filosófico que se ha desarrollado a partir de alguno(s) de estos cuestionamientos, se han propuesto distintas tesis filosóficas que tratan de resolver o evitar estos problemas de forma satisfactoria, como es el caso del *Realismo Selectivo* defendido en [Psillos, 1999, Saatsi, 2005], ó bien, el *Semi-realismo* de propiedades propuesto en [Chakravartty, 1988]. Así mismo, bajo otro tipo de consideraciones metafísicas, se ha propuesto el *Realismo Estructural Epistémico*, que presume ser una tesis realista de corte epistemológico, y que adopta un compromiso ontológico con respecto a una estructura concreta (un conjunto de relaciones) que es cognoscible mediante las teorías científicas, en detrimento del *conocimiento* de los objetos y las propiedades que satisfacen dichas relaciones [Worrall, 1989]. Finalmente, siguiendo con el mismo espíritu pero con compromisos metafísicos más radicales, el *Realismo Estructural Óntico* (*REO*) se compromete ontológicamente con respecto a una estructura cognoscible mediante las teorías científicas, pero en detrimento de la *existencia* de los objetos y sus propiedades que, supuestamente, satisfacen dichas relaciones [French, 1988, Ladyman et al., 2007, French, 2014].

Sin embargo, la presencia de enfoques tan variados y diferentes ha propiciado que el debate se perfile en la determinación de criterios que los justifiquen, ó bien, que los confronte, apartando otro tipo de criterios que permitan caracterizar de forma apropiada y evaluar los alcances y las restricciones que poseen cada una de estas tesis filosóficas. Por ejemplo, en el caso particular del *REO*, se ha sugerido la cimentación y

que son compatibles con dicha teoría, como es el caso de la *Teoría Cuántica Bohmiana* (*TCB*). En el segundo caso, se desea que los juicios que se hagan acerca de objetos y propiedades observables (en términos, por ejemplo, de la configuración y la dinámica de partículas puntuales) sean verdaderos. Aquí se considerará esta segunda noción de adecuación empírica.

fundamentación de sus bases metafísicas que hacen alusión a un mundo de naturaleza estructural, buscando argumentos razonables que justifiquen, por un lado, la eliminación de los objetos y sus propiedades, y por otro lado, que legitimen la independencia conceptual entre estos elementos y las relaciones fundamentales que se satisfacen entre ellos. Sin embargo, aunque la legitimidad de las teorías más exitosas sirva para respaldar suposiciones metafísicas de esta índole, poco se ha hecho para identificar una estructura que represente claramente una entidad física y concreta con la que el *REO* pueda hacer frente a todos los desafíos metafísicos, semánticos y epistemológicos, propios de un realismo científico acerca de objetos y propiedades (al que me referiré como *Realismo Estándar*). Por este motivo, en lugar de poner el suficiente empeño para identificar estructuras más generales que comprendan a la mayoría de las teorías exitosas, solo se han identificado casos muy restringidos que, en conjunto, pretenden legitimar una tesis realista y estructural que, de por sí, parece ser muy ambiciosa. Ejemplos en el ámbito de la Física son las estructuras que se representan mediante simetrías dinámicas, tal como el *Grupo Unitario Especial* (*SU(3)*) para la cromodinámica cuántica, o bien, el *Grupo de Poincaré* (*ISO(1,3)*) para la *Relatividad Especial* (*RE*), dejando de lado el grupo de simetría de la *MC* que, en principio, resulta ser exitosa en su dominio (para un mundo de cuerpos macroscópicos y velocidades bajas). Pero si uno se quiere comprometer seriamente con una tesis realista de este tipo, creo necesario identificar una estructura que pueda ser, en la medida de lo posible, lo más general en tanto que permita reconstruir parte del formalismo de todas las teorías científicas exitosas, o al menos que tenga dicha finalidad.

Ahora bien, una de las razones por las que esta tarea ha estado lejos de alcanzarse, reside en que la mayoría de los exponentes del *REO* argumentan que el punto de partida para adoptar una tesis de esta naturaleza yace en el tipo de compromisos metafísicos que se pueden inferir a partir de algunas teorías particulares de la Física contemporánea que gozan de gran poder predictivo, como suele ser el caso de las interpretaciones de la *Mecánica Cuántica* (*MCU*). Esta visión difiere del carácter regulativo de las tesis realistas que originalmente se propusieron, donde su principal enfoque reside en contribuir al conocimiento del mundo externo a partir de la ciencia en su totalidad, y su base justificativa deviene del *Argumento del No-milagro* (*ANM*), que engloba como objeto del discurso no a algunas sino a todas las teorías científicas que gozan y gozarán de gran poder predictivo. En esta coyuntura, creo que si se quiere adoptar una tesis realista y estructural con respecto a un dominio particular de conocimiento que, de por sí, tiene un peso reduccionista muy fuerte, entonces es justo y necesario que dentro de los límites que circunscriben a los dominios de la Física en los cuales reposa la tesis realista que se quiere caracterizar, se incluya a todas las teorías e interpretaciones existentes, evitando con ello preferencias anticipadas hacia una en particular. Así mismo, en continuidad con lo que se dijo líneas arriba, creo que también es importante especificar con claridad y formalidad la estructura con respecto a la cual se pretende ser realista antes de penetrar en los aspectos justificativos bajo los cuales esta tesis se fundamenta.

En estas circunstancias, este trabajo estará destinado a cubrir parcialmente esta vacío que falta en el debate filosófico al tratar de legitimar una tesis realista de perfil estructural en el contexto particular de la Física contemporánea. Antes de proceder a la justificación de sus supuestos metafísicos, esta labor se realizará desde un enfoque que desarticule, con mayor fuerza, la ambigüedad que infesta una tesis filosófica de esta envergadura mediante una caracterización clara y concreta. En particular, se pretende erguir una base interpretativa que respalde y legitime un tipo de *REO*, por medio de la identificación de una estructura matemática que pueda ser, en la medida de lo posible, lo más general. En efecto, una estructura que permita reconstruir el formalismo bajo un dominio considerablemente extenso, es decir, respecto a los fenómenos que estudian algunas teorías contemporáneas de la Física, incluyendo a la *MC*, la *MCU* y la *RE*. Esta caracterización se enfocará en precisar la forma en que un compromiso ontológico, con respecto a la estructura que representa dicho formalismo, hace frente a los problemas semánticos y epistemológicos propios de cualquier tesis realista en el contexto de la Física contemporánea.

2. Objetivos

Concretamente, este trabajo consistirá en legitimar y defender una tesis realista de perfil óntico y estructural de acuerdo a dos lineamientos metodológicos en orden de importancia: mediante: i) una caracterización formal de esta tesis filosófica con base en la identificación y descripción de una estructura concreta que manifieste sus virtudes metafísicas, semánticas, y epistemológicas; y ii) una justificación de la misma que pretenda hacer valer su perfil estructural en detrimento de los objetos y propiedades.
Con este fin en mente, se realizará un breve resumen de los resultados que se pretenden alcanzar en este trabajo, no sin antes mencionar algunos supuestos teóricos y metodológicos que se asumirán de principio a fin: al menos que se diga lo contrario, este trabajo se restringirá al dominio de la Física. Así mismo, se evitará entrar en discusiones metafísicas que conciernen a dicho supuesto reduccionista. Al contrario, bajo las bases de un realismo científico restringido a la Física, se pretende legitimar al *REO* por medio de la descripción y caracterización formal de una estructura teórica concreta. Dicho de otro modo, en lugar de enfocarse en su justificación, se pretende confirmar (por medio de un ejemplo concreto) las bases metafísicas del *REO* que se postulan de antemano con claridad.

2.1. En Búsqueda de una Caracterización

El realismo estructural que se desea defender aquí puede caracterizarse mediante tres afirmaciones que conciernen a la Metafísica, a la semántica y a la epistemología:

(1) *La dimensión metafísica*: El mundo es *parcialmente* una estructura independiente de la cognición humana *que es investigado por la* MC*, la* MCU *y la* RE[4].

(2) *La dimensión semántica*: La estructura de un mundo consistente con las observaciones[5] (no necesariamente el real) se representa mediante un formalismo matemático, específicamente, un subgrupo de

[4]Tanto el elemento de parcialidad como la restricción a la investigación que se hace en un dominio particular tiene directa relación con el carácter pragmatista y metafísico que tiene esta tesis filosófica. Los detalles se explicarán más adelante en 11.1.

[5]En continuidad con la dimensión semántica del realismo estándar [Psillos, 1999, p.10] (que demanda especificar las condiciones de verdad de las proposiciones teóricas), se desea identificar un formalismo que sea común a distintas teorías de la Física y que represente literalmente la estructura de un mundo, independientemente si corresponde (o no) al real.

Lie homomorfo al *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* (*ISp(n)*) y sus *Representaciones* de Lie[6], que es común al cuerpo teórico que subyace a la *MC*, la *MCU* y la *RE*.

(3) *La dimensión epistémica*: Las proposiciones que constituyen a dicho formalismo son *parcialmente* verdaderas y refieren *parcialmente* al mundo real.

Particularmente en este trabajo, el formalismo del que se habla tiene su fundamento en algunas teorías matemáticas (teoría de grupos, geometría diferencial, topología, etc.), y tiene la característica especial de que abarca de manera parcial el formalismo subyacente a la *MC*, la *MCU* y la *RE*. Esto se justificará rigurosamente por el hecho de que la estructura simpléctica y abeliana que subyace a la *MC* se ha identificado con el grupo de simetría de la *MCU*, que es el *Grupo de Galileo Extendido* ($\widetilde{Gal}$) y el grupo de simetría espacio-temporal de la *RE*, que es el *Grupo de Poincaré* (*ISO(1,3)*), mediante homomorfismos y contracciones de grupo, respectivamente [Leray, 1981, Folland, 1989, De Gosson, 1990, 2001, De Gosson & Hiley, 2011]. En este sentido, un compromiso realista y estructural respecto a dicha estructura se entenderá mediante una noción de correspondencia de verdad pragmática y parcial (que es distinta a la noción *Tarskiana*) entre esta estructura y el formalismo matemático del que se habla[7]. Sólo mediante este compromiso, será posible dar una respuesta razonable a los problemas interpretativos que se mencionaron arriba. Por motivos de precisión, a continuación se muestra un resumen simplificado de la manera en que dichos problemas se resolverán aquí de acuerdo a sus categorías filosóficas metafísicas, semánticas y epistemológicas. Tomando en cuenta que su tratamiento es más justificativo que descriptivo, los aspectos metafísicos (1) no serán motivo de un análisis riguroso (en lo que concierne a la caracterización) y tendrán relevancia más adelante en el contexto de la justificación.

(2) *La dimensión semántica*: Se deben satisfacer dos condiciones, una con respecto a la *Claridad* del formalismo que se presentó arriba y la otra con respecto a su *Adecuación Empírica*. En primer lugar, demandar claridad y desambiguación respecto a la interpretación estructural de objetos matemáticos podría parecer, de por sí, una exigencia un poco compleja. Sin embargo, esta demanda puede aclararse mediante: i) la suposición de que existe una relación unívoca entre este formalismo y la estructura de un mundo (no necesariamente el mundo real); y ii) que este formalismo matemático se identifique con un lenguaje estrictamente estructural que subyaga a las teorías de la Física. En relación con esta última petición, se requiere que las leyes que corresponden a la *MC*, la *MCU* y la *RE* se deriven explícitamente de dicho formalismo. Esto se hará siguiendo con el programa de Wigner y Weyl [French, 1999], tomando en cuenta que el formalismo del que se habla es estrictamente un Grupo de Lie abstracto que permite distintas Representaciones en espacios vectoriales específicos. Resulta sorprendente que el grupo de Lie que se pretende identificar, admite Representaciones en el *Espacio Fase*, en el *Espacio de Hilbert* y en el *Espacio-tiempo de Minkowski*, que corresponden a las ecuaciones de evolución de la *MC*, la *MCU*, y la relativista. Por supuesto, el sentido desde el

[6]A partir de aquí, cuando uno se refiera a las representaciones de Lie (en un sentido estrictamente matemático) se escribirá la primera letra con mayúscula, de lo contrario, será con minúscula.

[7]La noción de *Verdad Parcial* se explicará más adelante en 11.1.

cual se interpreta a la Física en este enfoque es estrictamente estructural y matemática y no apela a ninguna interpretación en términos de objetos y propiedades. En segundo lugar, la adecuación empírica de estas teorías debe de caracterizarse en términos del formalismo que se ha presentado arriba. A este respecto, se demostrará que dicho formalismo permite hacer una correspondencia directa con los fenómenos observables dentro del dominio que abarcan estas tres teorías mediante la derivación de sus ecuaciones de movimiento. Esto con la presuposición metafísica de que es posible hablar y hacer juicios verdaderos acerca de objetos observables e inobservables (que reproducen a gran escala los objetos observables, como es el caso de la configuración e interacción de partículas clásicas), sin comprometerse con su existencia. En efecto, en el caso de la *MC*, las ecuaciones de Hamilton determinan el movimiento de partículas y propiedades clásicas que, en general, reproducen los fenómenos clásicos. Análogamente, en el caso de la *MCU*, las ecuaciones de movimiento de la *TCB* determinan la posición y la dinámica de partículas puntuales que reproducen, de manera probabilística, los fenómenos cuánticos. Y en el caso de la *RE*, las ecuaciones de movimiento relativistas pueden reproducir, de manera análoga al caso clásico, los objetos relativistas transtemporales.

(3) *La dimensión epistemológica*: Se pretende hacer una caracterización rigurosa del formalismo matemático del que se habla para hacer frente al *PSD* y el problema derivado de la *MIP*. Esto se hará mediante la incorporación de un elemento pragmático sobre las bases metafísicas de un realismo estructural. En particular, se quiere adoptar una tesis filosófica desde la cual el *REO* pueda volverse a plantear a partir de la confluencia del pragmatismo de C.Peirce y la Metafísica especulativa de A.N.Whitehead [Peirce, 1878, 1877, Atkin, 2013, Peirce, 1871, Whitehead, 1929, 1933, 1938, Da Costa & French, 2003, French, 2014]. Para ello, se incitará una conversación entre las prácticas científicas en su amplio espectro y los compromisos realistas, tomando en cuenta que la ciencia opera a un nivel pragmático y que cualquier compromiso metafísico (en este caso con respecto a una estructura), es una hipótesis tentativa que corresponde a la imagen del mundo que es cognoscible desde un dominio particular de conocimiento, es decir, una imagen que se construye a partir de un dominio bien delimitado que forma parte de nuestras posibilidades epistemológicas. Esto quiere decir: i) que el *REO* no está condenado a depender enteramente de la veracidad (de acuerdo a la teoría correspondentista de la verdad) de las proposiciones que constituyen al formalismo, sino de la parcialidad inherente en la complejidad inter-teórica que se manifiesta en las prácticas científicas al nivel tanto de la Física como también de la matemática; y ii) que el *REO* es la hipótesis metafísica más razonable que se puede adoptar en relación a un mundo que existe independiente de la cognición humana, pero que sin embargo, es parcialmente accesible desde un dominio particular y delimitado de conocimiento. Es decir, que es posible ser realista desde un contexto epistémico limitado y específico sin colapsar a un anti-realismo, ó bien, a un idealismo. Por ejemplo, en el caso que aquí nos compete, este contexto correspondería a los fenómenos clásicos, cuánticos y relativistas, dejando de lado fenómenos gravitatorios, ó bien, dominios desconocidos (como puede ser el estudio de la cognición humana desde la Física y los innumerables misterios que todavía esconde el universo). Por supuesto que todo esto se

planteará con formalidad y rigor, tomando en cuenta la noción de verdad parcial que se introduce en [Mikenberg et al., 1986]. En este nuevo lenguaje, algunas limitaciones epistémicas entran en juego (como es el caso de la ignorancia de los agentes en un momento específico), las cuales desempeñan un papel significativo en la construcción de las teorías, donde regularmente se incorporan idealizaciones, aproximaciones, etc. Con este espíritu y desde esta nueva noción de verdad, se explorará la relación compleja que guarda la física de la *MC*, la *MCU* y la *RE* con el formalismo matemático que tienen en común. De esta forma, asumiendo una tesis realista de corte pragmático y metafísico será legítimo pensar en la posibilidad de que, en un futuro, surjan otras teorías parcialmente verdaderas que sean exitosas en otros dominios menos restringidos.

Ahora bien, mediante un compromiso ontológico con respecto a la estructura que se ha caracterizado en consonancia con este tipo de pragmatismo epistemológico, se pretende evitar parcialmente el *PSD* de manera más evidente, identificando una estructura matemática compleja que incluya a casi todas las interpretaciones y modelos que sean compatibles con cada teoría. Esto se llamará el *Potencial de Unificación* de la estructura en cuestión. Así mismo, con el motivo de evitar el problema derivado de la meta-inducción pesimista, se identificará una estructura que se preserve frente al cambio teórico hasta el descubrimiento de la *RE*, aspecto de la estructura que tendrá el nombre de *Potencial de Continuidad*. Para ambos fines, las relaciones que se presentan entre diferentes teorías, entre las matemáticas y la Física, o bien, entre estas últimas y los hechos empíricos, se caracterizarán y acomodarán mediante una compleja red de relaciones y jerarquías en términos de un meta-lenguaje propuesto por algunos filósofos llamado *Estructuras Parciales* [Da Costa & French, 1990, Bueno, 1997, Da Costa & French, 2003, French, 2014]. La naturaleza específica de este meta-lenguaje tiene su raíz en la visión semántica de teorías [Suppe, 1989, van Fraassen, 1980, Da Costa & French, 1990], por lo que su tratamiento es meramente convencional y remite a un tipo de representación al nivel de la Filosofía de la Ciencia que dispone de una noción de verdad parcial de corte epistémico, contrariamente a la correspondencia tarskiana entre el lenguaje y el mundo [French, 2000, Bueno et al., 2002, Da Costa & French, 2003, French, 2014]. Así mismo, debe ser capaz de representar la complejidad de las prácticas científicas de la ciencia, entre ellas, la presencia de ignorancia con respecto a muchos aspectos inherentes a las teorías físicas y la fertilidad predictiva asociada a *Estructura Matemática Superflua*, que consiste en objetos matemáticos que no tienen una contraparte física [Redhead, 1975, French, 2000, Bueno et al., 2002, Da Costa & French, 2003].

Respecto a este último punto, se pretende apelar a un ejemplo interesante en el contexto particular de la *MCU*, es decir, la posibilidad de describir superposiciones de estados con diferente masa [Hernandez, 2012]. La visión estándar considera que este tipo de superposiciones no tienen una contraparte empírica (comprende estructura matemática superflua), sin embargo, recientes publicaciones han sugerido lo contrario al interpretarlas como remanentes relativistas que se pueden describir matemáticamente mediante otro tipo de grupos de simetría que, salvo contracciones y aproximaciones, resultan ser equivalentes a las simetrías de la *RE*.

2.2. En Búsqueda de una Justificación

Ahora bien, desde el campo de la justificación, los aspectos metafísicos implícitos en el realismo estructural que se pretende caracterizar aquí serán motivo de análisis. En efecto, se pretende asumir la existencia de una estructura en detrimento de una Metafísica de objetos y propiedades que implica la postura más razonable frente a todas las posibilidades que se han propuesto en la literatura. No obstante, aquí la noción de "racionalidad" esconde varios aspectos que se tratarán en este trabajo y se enumeran a continuación:

(1) *Sub-determinación Metafísica*: La presencia de una sub-determinación respecto a la ontología de una de las teorías que han podido librarse de algunos problemas que aquejan al realista: la *TCB*. Se realizará un análisis filosófico riguroso en el contexto particular de esta teoría para elucidar la presencia de distintas interpretaciones compatibles con un formalismo en común. Esto desde el punto de vista de un realismo acerca de objetos y propiedades.

(2) *Individualidad*: El perfil estructural de la individualidad en la *TCB*. Aunque se demostrará que esta teoría es el candidato ideal respecto al cual es posible salvaguardar una noción de individualidad en el contexto cuántico (de forma no trivial, como se constatará en este trabajo), se verá que su posible elucidación termina irremediablemente respaldando el realismo estructural que se pretende caracterizar aquí.

3. Procedimiento a Seguir

Aparte de fijar un objetivo claro y concreto, es importante aclarar el procedimiento que seguiré a lo largo de este trabajo. En efecto, este último se dividirá en tres partes que se describen a continuación:

(1) Se escribirá un preámbulo teórico acerca del origen, el fundamento, y el desempeño de distintas tesis realistas (realismo científico, semi-realismo, realismo estructural, etc.), en el contexto de algunas teorías de la Física contemporánea (*MC* y *MCU*). Esto se hará mediante una caracterización que tome en cuenta tanto escenarios positivos (por ejemplo, la dimensión ontológica de la *MC*, ó bien, posibles soluciones al problema de la medición en *MCU*), como también negativos (cambio teórico, sub-determinación, etc.).

(2) En lo que respecta a la caracterización del *REO* que se propone aquí, se desplegarán tres ejes principales que lo constituyen: su dimensión metafísica, semántica y epistemológica. En lo que concierne a las últimas dos, se presentará una revisión y caracterización formal de la estructura matemática elucidada en [Leray, 1981, Folland, 1989, De Gosson, 1990, 2001, De Gosson & Hiley, 2011], con base en si satisface la condición de claridad, adecuación empírica, potencial de unificación y continuidad. Esto se logrará al identificar la relación matemática que guarda esta estructura y las simetrías que subyacen a la *MC* (El *Grupo Simpléctico* (*Sp(n)*)), la *MCU* ($\widetilde{Gal}$) y la *RE* (*ISO(1,3)*). Así mismo, se incorporará un elemento pragmático sobre las bases matemáticas de este tipo de realismo, y se propondrá una tesis filosófica con la que se pueda caracterizar el *REO* desde una nueva perspectiva.

(3) En lo que respecta a la justificación del *REO* que se propone en este trabajo, se expondrán dos argumentos. Estos comprenden al *PSD* en la *TCB*, y el concepto de individualidad en *MCU*. Específicamente, se elaborará una revisión del formalismo de la *TCB*, situándola como una teoría empíricamente equivalente a la *MCU* y de la que se derivan distintas interpretaciones. Estas últimas se analizarán de acuerdo a su grado de afinidad con alguna o varias virtudes teóricas y criterios realistas con la finalidad de evidenciar su sub-determinación. Así mismo, se investigará de forma rigurosa la noción de individualidad en la *MCU*, tomando en cuenta todas las propuestas que se presentan en la literatura física y filosófica. En esta dirección, se argumentará que incluso en el contexto de la *TCB*, la noción de individualidad no puede establecerse en términos ajenos a las propiedades estructurales del espacio y el tiempo, reivindicando la propuesta estructural que se pretende caracterizar aquí.

Parte II

Preámbulo Teórico

4. El Por Qué También Importa

> "Knowing why is a singular achievement, distinct from other scientific accomplishments. Science aims at describing and representing nature, predicting and controlling it; but science also aims at explanation."[Wayne, 2011, p.1]

A lo largo de las últimas décadas las teorías científicas contemporáneas han sido (y son) consideradas por muchos científicos y filósofos como un conjunto de conocimientos indudablemente exitosos por su capacidad de predecir, con alto grado de precisión, los resultados experimentales que conciernen a su campo de estudio. Por ejemplo la *Electrodinámica Cuántica* ha podido predecir los valores de ciertas propiedades con un grado de exactitud de uno en cien billones, comparado con lo que se ha obtenido en los experimentos. Según [Feynman, 1985, p.7], lo anterior equivaldría a que si uno fuera a medir la distancia que separa Los Ángeles de Nueva York, la diferencia entre el resultado del experimento y el de la predicción de dicha medición sería equivalente al grosor de un cabello humano. Sin embargo, aparte de las predicciones y las aportaciones tecnológicas que puede ofrecer una ciencia de esta naturaleza, la mayoría de los científicos cree que una teoría científica no es solo una herramienta de cálculo, sino que además de describir y hacer predicciones de los fenómenos, también posee una dimensión explicativa e interpretativa. Es decir, la ciencia que construyen se desarrolla en forma tal que además de gozar de éxito predictivo, es capaz de ofrecer una explicación y un entendimiento particular del mundo, logrando así contribuir a su conocimiento. Por ejemplo, después de contribuciones substanciales que pernearon los círculos astronómicos tanto en oriente como en occidente, el paradigma predominante de la época clásica trascendió el espectro descriptivo al ofrecer una explicación detallada del movimiento planetario a partir de nuevas observaciones. A causa de ello, grandes científicos como Isaac Newton, contribuyeron de forma inédita al análisis sistemático de los datos experimentales en virtud de un entendimiento más riguroso de los fenómenos celestes. En efecto, se dice que la teoría gravitacional newtoniana es el primer indicio que se tiene en la historia de la ciencia moderna de proveer una explicación causal del movimiento planetario mediante la introducción de las fuerzas newtonianas y su tratamiento matemático riguroso, como lo prueba, el análisis geométrico y vectorial. No obstante, más allá de las incursiones filosóficas del mismo Newton, pocas veces uno se pregunta si efectivamente estas fuerzas son elementos inobservables que explican y forman parte del mobiliario del mundo, o bien, son instrumentos teóricos que se introducen para describir indirectamente el movimiento de los cuerpos celestes.

Respecto a este último punto, una de las preguntas que le vendría a la mente a un científico interesado en desentrañar los misterios de la Naturaleza sería la de si existe una realidad representada fielmente, o al menos, aproximadamente por tales teorías. Según la mayoría de los científicos (si uno no se equivoca), los objetos que perciben nuestros sentidos (la Luna, las manzanas, etc.) existen independientemente de la percepción humana y es posible conocer directamente sus propiedades, su comportamiento, etc. No obstante, estas creencias no son tan habituales si los fenómenos que se estudian no son directamente observables, contrariamente a lo que se esperaría de la caída de las manzanas o el movimiento de la Luna. En el caso del estudio de lo más pequeño, los físicos cuánticos experimentales se encuentran, por ejemplo, ante un microscopio que emite electrones. Este último consiste en un aparato de grandes dimensiones con pantallas que muestran resultados de algún experimento en forma de gráficas ajenas a cualquier imagen figurativa. De este modo, para poder usar el aparato y saber cómo leer e interpretar estas gráficas es imprescindible leer un manual de instrucciones, por ejemplo, "Física cuántica XX", demasiado técnico para ser descifrado por la mayoría de los lectores. Un usuario que no esté familiarizado con alguna teoría en particular, y sobre todo con el uso de estos complicados aparatos, no puede llegar a saber algo más de lo que una persona que no es médico sabe acerca de un paciente en el quirófano.

Como se puede apreciar en estos ejemplos, parece ser que en los procesos de construcción de la ciencia no se plantean con suficiente rigor las bases conceptuales que inevitablemente se asumen en la teoría y en la observación, ni tampoco las diferencias entre una predicción, una descripción y una explicación satisfactoria. Además, dado que en la mayoría de las teorías científicas contemporáneas se postulan elementos teóricos inobservables como los átomos o la radiación electromagnética, es factible preguntarse si la ciencia provee un conocimiento acerca del mundo real más allá de su dominio empírico. Eventualmente uno podría llegar a corroborar que no existe un acuerdo que le confiera a los objetos matemáticos de las teorías científicas un rol que vaya más allá de la predicción y sea propiamente explicativo y fundamental. Respecto a este último punto, la *Filosofía de la Ciencia* se ha encargado de plantear preguntas como la de si el mundo descrito por la ciencia es el real y si es clara con respecto a lo que se dice de él. Estas interrogantes se han elaborado a partir de una base argumentativa propiamente rigurosa que pretende desarrollar una racionalidad adecuada que pueda dar respuestas generales tentativas, más nunca definitivas.

A la luz de estas observaciones, existen elementos filosóficos que juegan un papel central en el ejercicio convencional de la ciencia y que esperan a ser elucidados en este trabajo. Teniendo en cuenta lo anterior es importante definir y establecer desde un principio los aspectos filosóficos que se analizarán para dar pauta a una línea argumentativa más rigurosa. En lo que concierne a esta trabajo, gran parte del debate tendrá su sustento en virtud de distintas tesis *realistas*. No obstante, antes de proceder a caracterizar, en términos formales, cada una de estas tesis filosóficas, creo necesario empezar con un breve preámbulo acerca de algunas nociones básicas que recurrentemente aparecen en la literatura filosófica: el concepto de objeto y sus propiedades.

5. El Espectro de los Objetos y sus Propiedades

El concepto de objeto como tal ha sido motivo de ardua discusión y controversia, por lo que a la fecha no existe una definición universalmente aceptada. A causa de estos menesteres, creo pertinente empezar con un ejemplo ilustrativo para poder entender las diferentes nociones asociadas a este concepto, y una vez hecho esto, seré explícito con respecto a una definición particular que será empleada a lo largo de este trabajo.

A principios del siglo veinte se desarrollaron distintas vanguardias pictóricas que desplazaron las figuras miméticas por nuevas formas de representación mediante elementos abstractos en consonancia con la idea de construir el espacio visual a partir de objetos inexistentes, ó bien, artificiales. Estas corrientes pictóricas se alejaron poco a poco de su raíz fundacional, el impresionismo, que construyó un lenguaje fugaz y espontáneo, donde la impresión y el instante encontró una expresión plástica y visual gracias al contacto sensible con el mundo. A diferencia de las representaciones abstractas comunes del periodo vanguardista, la mayoría de los impresionistas trataron de plasmar, mediante el lenguaje del color, la percepción inmediata que les producía estar y ser parte de un espacio natural concreto. Lo que para ellos significaba la noche, el día, el agua, el viento, era en realidad una conflagración de colores obscuros, claros, densos, etc. Por esta razón, lo que naturalmente se observa en una obra impresionista son pinceladas de color sin ninguna línea y ningún trazo que fragmente e intervenga al mundo que se representa. A decir verdad, para los impresionistas el mundo no es un conjunto de objetos que se distinguen uno del otro por líneas, círculos o figuras geométricas, sino es un telar de colores con distintas profundidades y contrastes, que a lo lejos designan y disciernen a objetos ilusorios.

Este ejemplo es una analogía que pone de manifiesto la distinción evidente entre diferentes tipos de representación que suponen (o no) la necesidad de dividir al mundo mediante objetos individuales supuestamente observables. Mientras que los impresionistas se esmeraron en 'deconstruir' un mundo ilusoriamente dividido por objetos observables mediante un tratamiento heterogéneo y obsesivo del color, los vanguardistas construyeron un mundo abstracto de objetos ideales (líneas rectas, bordes y fronteras) con la intención de representar indirectamente aspectos del mundo observable, ó bien, del mundo de las sensaciones. Al tomar en serio esta analogía, es importante reconocer la capacidad de la mente de representar, más allá del lenguaje objetual, las apariencias sensibles del mundo, ó bien, de producir imágenes de objetos ideales o hasta inexistentes, como es el caso de algunas construcciones humanas mentales cuyo estudio le compete más a la epistemología, a la lógica y al estudio del lenguaje [Toraldo, 1988]. A este respecto, algunos filósofos han afirmado que una condición para conocer aspectos del mundo tiene directa relación con la constitución de categorías y objetos mentales que son afines a la estructura de pensamiento de todo sujeto (por ejemplo, las formas geométricas). Esta creencia ha sido un pilar fundamental en distintas líneas de investigación (incluso desde hace varios siglos), como es el caso del idealismo kantiano que interpreta a los objetos fenoménicos en función de objetos trascendentales. En la era moderna, la distinción entre lo que existe y lo conocible se ha llevado a un extremo con el advenimiento del empirismo lógico que proclama un abandono a la Metafísica tradicional al privilegiar el conocimiento objetual proveniente de los sentidos. Sin embargo, recientemente se ha argumentado que la introducción de un lenguaje basado en objetos es consecuencia de una actitud metodológica y epistemológica para codificar, a conveniencia del analista, los datos de los sentidos en elementos que pueden ser interpretados y asimilados por la mente [Dalla Chiara & Toraldo Di Francia, 1993, Quine, 1960].

> Physical things generally, however remote, become known to us only through the effects which they help to induce at our sensory surfaces.[Quine, 1960, p.1]

Tomando en cuenta estas observaciones, es posible establecer al menos seis diferentes categorías de objetos que dependen del enfoque filosófico que se sostenga con respecto a ellos:

(i) El enfoque metodológico, que considera a los objetos como instrumentos, o bien, artefactos que se construyen por medio del lenguaje y la razón para alcanzar un fin práctico.

(ii) El enfoque ontológico, que caracteriza a objetos tanto observables como inobservables como entes existentes en términos de ciertas categorías y jerarquías ontológicas.

(iii) El enfoque nomológico, que aunque niega la existencia de los objetos, considera que estos últimos son entes objetivos que inciden en el mundo al constituirse como Leyes naturales.

(iv) El enfoque epistemológico, que introduce un lenguaje en términos de objetos con la finalidad de asimilar y entender por medio de la razón a los datos empíricos del mundo observable.

(v) El enfoque semántico, que garantiza la predicación y la referencia de objetos en un lenguaje.

Ahora bien, aunque ayude al esclarecimiento de algunas nociones atribuidas al concepto de objeto, esta clasificación parece heredar un serio problema de indeterminación, en cuanto a que en ciertos contextos específicos, no se sabe con exactitud cuál de todos estos enfoques es el más razonable. De este modo, uno termina con debates tan promiscuos como el del idealismo en contra del realismo que, por ser irrefutables, no parecen tener consecuencias significativas en los debates filosóficos contemporáneos. A este respecto, lo mejor que uno puede hacer es acotar el problema, y por razones de conveniencia, caracterizar a los objetos desde un enfoque que sea compatible con la tesis filosófica que se quiere abordar en este trabajo. Específicamente, desde una tesis realista en el contexto de las teorías físicas contemporáneas. De esta forma, aunque cualquier objeto puede interpretarse de acuerdo a uno de los cinco enfoques que se despliegan arriba, se verá que una tesis realista con respecto a las teorías científicas de la Física contemporánea debe considerar al menos un conjunto de objetos ontológicos.

Una vez que se ha establecido una base filosófica realista, es hora de definir de manera más precisa el concepto de objeto que se empleará en este trabajo. Un objeto se definirá mediante dos categorías exclusivas: como un particular, ó bien, un universal. Los primeros se definen en virtud de que guardan una relación consigo mismo, mientras que los segundos se definen en virtud de las relaciones externas que tienen con otros particulares [Gracia, 1988]. Siguiendo con ideas aristotélicas, un particular es la terminología moderna que refiere crudamente a las substancias primarias. Por otro lado, un universal es, por el contrario, la terminología moderna que refiere a las substancias secundarias. Estas últimas constituyen la naturaleza de las sustancias primarias, es decir, lo que es común a los objetos o posibles objetos, ya sea por medio de factores accidentales, o bien, necesarios. Siguiendo con la terminología moderna, los universales comprenden tanto propiedades como relaciones. Las propiedades como el color, la textura, la dureza, etc., son objetos universales[8] debido a que se instancian en más de una ocasión por distintos particulares. En la literatura existen muchas referencias al concepto de "propiedad"que se despliega en muchas categorías. Aquí sólo se tomará en cuenta la distinción entre las propiedades extrínsecas (PE) y las propiedades intrínsecas (PI). Las primeras comprenden a todas las propiedades instanciadas sobre algún particular en términos de la relación externa que guarda con otros particulares, mientras que las segundas involucran una relación de identidad independiente de otros particulares[9] [Lewis, 1983, Langton & Lewis, 1998, Langton and Lewis, 2001]. Nótese que el concepto de propiedad es, después de todo, un tipo de objeto, es decir, un universal. Así mismo, una relación, que se define al fin y al cabo como una propiedad poliádica, es por ende un universal. Sin embargo, con la excepción de que se especifique explícitamente lo contrario, aquí uno se referirá a los particulares mediante el término *Objeto* y a los universales (excluyendo por el momento a las relaciones ó bien las propiedades poliádicas) como *Propiedades*[10].

Habiendo definido de manera precisa el concepto de objeto y propiedad, en seguida se dará un preámbulo teórico de lo que significa, en términos formales, una tesis realista con respecto a las teorías científicas, con base en una caracterización ampliamente conocida en la literatura.

[8] A muchos filósofos les disgusta la existencia de universales, por lo que consideran que todas las propiedades deben ser particulares. Estos últimos reciben el nombre de *Tropos* y se caracterizan por no poder instanciarse en más de una ocasión [Gracia, 1988]. No obstante, aquí se descartará esta última opción y se identificará a cualquier propiedad con objetos tanto universales como particulares.

[9] Respecto a las PE (PI) que se tienen en las teorías físicas, Jauch las distingue por su dependencia (independencia) del estado del sistema [Jauch, 1966, p.275]. Por ejemplo, la energía, el momento, y el espín son extrínsecas mientras que la carga, la masa y el momento angular son intrínsecas. Sin embargo, esta caracterización en general no se satisface, dado que en algunas teorías físicas las propiedades espacio-temporales (PET) dependen del estado, no obstante, no tienen ninguna relación externa con otras propiedades u objetos.

[10] Como se verá más adelante, la distinción entre las propiedades extrínsecas y las relaciones no se puede establecer de manera trivial.

6. ¿Qué es el Realismo Científico?

Bob es un filósofo obsesionado con la Metafísica que muy a menudo reflexiona acerca de cómo es el mundo en su extensión. Alicia, una filósofa de la ciencia, eventualmente le sugiere a Bob la idea de que es razonable creer en lo que las teorías científicas nos dicen acerca del mundo. Bob parece no estar convencido, pues no es muy claro acerca del tipo de teorías a las que ella se refiere. Existen un millar en el aire, replica. Alicia convencida de su postura responde que hay buenas razones para creer en lo que dicen las teorías más exitosas de la ciencia. Ella tiene en mente que la mejor explicación al poder predictivo de las teorías científicas es debido a que todas ellas dicen algo acerca del mundo. La intervención de Alicia vuelve a Bob muy pensativo. No obstante, con algunos signos de incredulidad, Bob se cuestiona si el poder predictivo es una razón suficiente para creer en lo que las teorías científicas dicen acerca del mundo. En el caso afirmativo, continúa Bob, las teorías científicas en general deben ser muy claras y precisas respecto a lo que dicen del mundo al que refieren (que se ha supuesto como el real) y su entendimiento debe ser posible por medio de un marco interpretativo que sea común a todas las teorías exitosas, al menos si se asume que existe un mundo único. A causa de que Alicia no puede dar una respuesta a los cuestionamientos de Bob, ambos deciden suspender la conversación por el momento.

Ahora bien, aunque parece que Bob es muy incrédulo respecto a las creencias de Alicia, creo que hay un punto importante en esta conversación que habría que considerar. A decir verdad, los cuestionamientos de Bob se pueden entender en términos de dos categorías filosóficas previamente establecidas, una de perfil semántico y la otra epistemológico: la primera de ellas incita a determinar y aclarar el tipo de correspondencia que existe entre el lenguaje empleado por las teorías científicas más exitosas y el mundo al que cada una refiere (independientemente si las entidades que postula son reales), mientras que la segunda pretende confirmar la veracidad de los términos teóricos de una sola teoría que supuestamente refieren al mundo real. A este respecto, es claro que es imprescindible hacer un análisis filosófico de las teorías científicas más exitosas para poder elucidar un tipo de interpretación que sea compatible con estas categorías semánticas y epistemológicas. Para este fin, este trabajo estará destinado a narrar una historia positiva acerca de Alicia, en alusión a la larga travesía intelectual que tendrá que pasar para responder, de la manera más razonable posible, a estos cuestionamientos. No obstante, para lograr este fin, Bob no desaparecerá de la escena. Aunque pareciera que a la sombra de ambos interlocutores la Metafísica parece estar divorciada de la ciencia, la labor que compete por ahora es defender y aclarar el sentido en que sus ideas se encuentran correlacionadas. Con esta promesa en mente, es importante caracterizar de forma rigurosa el tipo de tesis filosófica que Alicia quiere defender. Esto se hará por medio de una caracterización particular de lo que se conoce como *Realismo Científico* por medio de un puente conciliador entre ambos interlocutores que, a primera vista, parecen estar muy distantes.

El realismo científico no ha podido definirse de manera única. Si se tratara de construir una noción estrictamente general que abarcara a todas las posturas existentes se llegaría, paradójicamente, a una simplificación excesiva o a una caracterización deficiente de su significado para cada caso. Por esta razón, si se pretende definir de una forma más rigurosa, es más razonable describir algunos ejemplos, y a partir de ellos, proceder a dar una definición particular con base en los criterios que Bob y Alicia han sugerido y que será la raíz de la estructura argumentativa del presente trabajo.

Según algunos filósofos [Chakravartty, 2012], el realismo científico es una actitud respecto a la investigación científica que cree en la existencia de objetos observables e inobservables que son epistémicamente accesibles mediante las teorías científicas. A este respecto, aunque la distinción entre lo observable y lo inobservable no ha sido esclarecida con rigor, se puede apreciar sin ambigüedad en casos particulares muy concretos. Por ejemplo, uno bien sabe que las sillas y las mesas son objetos observables dado que pueden ser percibidos directamente por los sentidos. Por el contrario, nadie ha podido observar directamente un átomo o un electrón a no ser que se detecten mediante una medición indirecta de sus propiedades, por ejemplo, mediante un microscopio electrónico. No obstante, aunque esta distinción pueda requerir de especial atención en otro tipo de discusiones filosóficas, el realismo científico sanciona que tanto el mundo observable como el inobservable poseen el mismo estatus epistemológico, en cuanto a su accesibilidad por medio de la cognición humana.

Ahora bien, siguiendo con esta distinción se han planteado, en particular, dos tipos de realismo que difieren en cuanto a la actitud epistémica que el filósofo asume frente a las teorías científicas: la primera de ellas pretende ser una respuesta a sus logros epistemológicos, en tanto que dichas teorías contribuyen al conocimiento del mundo, mientras que la segunda se fundamenta de acuerdo con una actitud pragmática hacia las mismas [Chakravartty, 2012]. Dado que las teorías científicas más exitosas han propiciado, no sólo predicciones sorprendentes, sino un mejor entendimiento de innumerables fenómenos naturales, se cree *de facto* que son correctas (o aproximadamente correctas) en tanto que sus términos teóricos refieren exitosamente al mundo y de este modo lo explican. La idea central de este enfoque es la creencia de que las teorías científicas contribuyen exitosamente al conocimiento tanto del mundo observable como del inobservable. Por otro lado, la segunda tesis realista no se enfoca en una creencia, sino que contrariamente a "un acto de fe", es una actitud pragmática que se fundamenta en un propósito o una finalidad. En este sentido, un realista respecto a las teorías científicas aspira, en la medida de lo posible, a una descripción correcta del mundo real y a una teoría que refiera, de manera exitosa, a los objetos observables e inobservables, aunque no siempre sea el caso.

Tomando en cuenta estos ejemplos, es importante mencionar que en este trabajo se articulará un realismo que pretende tomar en serio ambas definiciones. Con ello se debe advertir que una actitud "de fe" es importante en tanto que incita a construir con rigor, coherencia y claridad argumentos para creer en la veracidad de las proposiciones de una teoría mientras que una actitud pragmática es relevante en cuanto a las posibilidades y limitaciones del conocimiento científico que confiere una actitud tentativa pero productiva respecto a sus fundamentos.

La definición de realismo científico que se expondrá aquí se limitará a algunas propuestas elucidadas en [Chakravartty, 2012, Laudan, 1981, Psillos, 1999]. En efecto, según estos autores una tesis realista comprende tres componentes fundamentales:

(1) La metafísica: Se asume la existencia del mundo externo con independencia de la cognición humana [Chakravartty, 2012, Psillos, 1999]. Su caracterización metafísica reside en que el mundo externo es

un conglomerado de objetos y propiedades sin especificar[11].

(2) La semántica: Los términos teóricos de las teorías científicas exitosas refieren [Psillos, 1999], y las proposiciones lingüísticas que los configuran tienen valores de verdad [Laudan, 1981]. Dicho de otro modo, el conjunto de las proposiciones de las teorías científicas se interpretan literalmente, independientemente si esta interpretación es (o no es) la correcta.

(3) La epistémica: Las proposiciones de las teorías científicas exitosas son (aproximadamente) verdaderas y sus términos teóricos refieren (aproximadamente) *al* mundo real [Laudan, 1981].

Tomando en consideración todos estos componentes, el realismo científico asume que, mediante las teorías científicas más exitosas, se puede acceder y conocer aproximadamente al mundo tal como es, en tanto que este último se constituye de objetos y propiedades. Aquí es importante aclarar cada una de estas afirmaciones: con respecto a (1), la existencia del mundo es independiente de la mente y no depende de quién lo conciba ni quién lo conozca. En este sentido, es posible asumir la existencia del mundo externo sin que sea necesario su verificación tanto empírica como epistemológica[12]. Al incorporar dentro de su discurso objetos y propiedades inobservables, esta afirmación niega cualquier tesis radicalmente idealista y verificacionista; con respecto a (2), es importante notar que la correspondencia que existe entre los términos teóricos y su referencia constituye una "interpretación literal" en el sentido de que las aserciones de las teorías deben ser objeto de juicios de verdad (de acuerdo a la teoría correspondentista de la verdad *a la* Tarski), entendiéndose con ello que las proposiciones, en el caso de ser verdaderas, no se reducen a aserciones expresadas en otro lenguaje sino a una correspondencia con el mundo externo [Hodges, 2014]. Conocido como *Realismo Semántico*, este componente realista tiene como única función especificar las condiciones de verdad de las proposiciones de las teorías científicas, función que no debe confundirse con especificar las condiciones bajo las cuales una proposición debe aceptarse como verdadera [Psillos, 1999, p.10]. Ahora bien, para especificar las condiciones de verdad de las proposiciones teóricas, la interpretación de estas últimas debe satisfacer dos condiciones: i) *claridad*; y ii) *adecuación empírica* [13]. En primer lugar, la claridad demanda que no exista ningún tipo de ambigüedad respecto a los objetos observables y/ó inobservables al que refieren los términos teóricos de la teoría, y bien, que las proposiciones del lenguaje en que se construyen las teorías hablen claramente acerca de ellos. Por otro lado, la adecuación empírica demanda que la totalidad de las proposiciones de la teoría que refieren al mundo observable sean verdaderas, o bien, que "salve a todos y absolutamente a todos los fenómenos", independientemente de la correspondencia que existe entre los términos teóricos y los objetos inobservables. De esta manera, una teoría que, por ejemplo, cuente una historia de cómo todos los objetos y propiedades observables se re-conceptualizan a partir de supuestos

[11] De acuerdo con lo visto anteriormente, los objetos son sustancias primarias y las propiedades son sustancias secundarias con todos los aspectos que los caracterizan. En terminología moderna, los objetos son entes particulares mientras que las propiedades son entes universales.

[12] Desde el punto de vista de este trabajo, la epistemología es aquello que investiga lo que es cognoscible mediante las teorías científicas, sin estar necesariamente vinculado con los datos sensibles. En este sentido, los aspectos metafísicos que se infieren de dichas teorías no son empíricamente accesibles pero pueden considerarse elementos constitutivos del saber.

[13] Ver en [Ladyman, 2002, p.138,158].

‘objetos teóricos’ e inobservables (electrones, átomos, etc.), presupone una representación literal de lo que se dice del mundo observable y no necesariamente una representación correcta del mundo inobservable; finalmente, en lo que respecta a (3), es importante reconocer que cualquier teoría científica es correcta bajo cierto grado de aproximación, en el sentido de que cualquier construcción teórica que demande el uso de un lenguaje no puede evitar errores que regularmente merman la posibilidad de construir una copia perfecta del mundo real. Asumiendo que los juicios aproximadamente verdaderos involucran una distinción y comparación entre el mundo real (o una descripción del mismo) y el mundo (o e estado) descrito por la teoría, Psillos define una noción de aproximación de la siguiente manera: “A description D approximately fits a state S (i.e. D is approximately true of S) if there is another state S’ such that S and S’ are linked by specific conditions of approximation, and D fits S’ (D is true of S’).” [Psillos, 1999, p.268]. Aquí las descripciones son a las proposiciones, lo que los estados son a las interpretaciones. Por supuesto que esta definición no puede entenderse formalmente no sin antes advertir que la noción de verdad empleada aquí tiene su fundamento en la teoría correspondentista de verdad tarskiana [Hodges, 2014].

En este punto de la discusión, es importante hacer énfasis en que existen distintas tesis filosóficas que no caracterizan al realismo mediante estas tres componentes. Por ejemplo, en [Solé, 2010, pp.2-3] se prescinde de una distinción entre el componente semántico y el epistémico del realismo. En efecto, el autor identifica el primer componente ontológico con lo que él llama *condición de independencia*, mientras que tanto el componente epistémico como el semántico los identifica con la *condición de accesibilidad*. Sin embargo, si no se tomara en cuenta esta distinción se podría llegar a confundir una tesis realista con otro tipo de posturas, a tal grado que podría llegar a confundirse con su antítesis: el *Anti-realismo*. En efecto, existen tesis filosóficas como es el caso del *Empirismo Constructivo* de Van Fraassen [Curd & Cover, 1998, pp.1064-1087] que se comprometen con el componente metafísico y semántico pero prescinden del componente epistémico. Es decir, considerando a la par la distinción fundamental entre los entes observables y los entes inobservables, y manteniendo una tesis escéptica respecto a la existencia de los segundos, esta doctrina afirma, paralelamente al realismo que se ha caracterizado aquí, que una representación literal del mundo es posible siempre y cuando las proposiciones que se refieren a elementos observables sean verdaderas, es decir que sean empíricamente adecuadas. Sin embargo, a diferencia de la tesis realista descrita en este trabajo, el empirismo constructivo es epistemológicamente moderado debido a que sostiene un escepticismo en cuanto al acceso hacia el mundo inobservable. Es decir, para el empirista constructivo no es posible corroborar la veracidad de las proposiciones que se refieren a elementos inobservables. Respecto a este punto, en seguida se dará un ejemplo ilustrativo: en innumerables fuentes de la literatura antigua se ha hablado acerca de la creación del universo como es el caso del “Popol Vuh”, ó bien, el libro del génesis de la Biblia hebrea. Este tipo de relatos sumerge al lector en una historia cronológica sobre cómo se creó el universo que culmina en la creación del hombre y en el estado del mundo antiguo al que tuvieron acceso tanto los hebreos como los mayas. Es decir, cada una de estas obras cuenta una historia empíricamente adecuada que comienza cuando el universo se creó y que se desarrolla de forma tal que culmina en la descripción del mundo contemporáneo a los hebreos y los mayas (aproximadamente hace tres y dos milenios, respectivamente). Respecto a este ejemplo, es posible que algunos mayas como también algunos hebreos hayan interpretado literalmente sus obras sin ningún conato simbólico o metafórico, excluyendo así la posibilidad de que hayan sido, por ejemplo, representaciones de códigos éticos a manera de fábulas y mitos. No obstante, el hecho de que estos relatos hayan sido interpretados literalmente no implica que hoy en día alguno de ellos se considere correcto, es decir, que efectivamente ambas civilizaciones eran herencia inmediata de Adán y Eva, ó bien, de los hombre de palo. Así mismo, asumiendo que sólo debe existir una historia correcta acerca del proceso de creación, lo que se conoce como monismo ontológico, esta breve reflexión podría ahorrar muchos conflictos. Después de todo, pueden ser obras literarias inspiradas en algunos elementos empíricos pero que no reflejan a la realidad como también es el caso de una obra contemporánea de ciencia ficción.

Regresando a la definición de realismo que se ha presentado y con la finalidad de resaltar los criterios antes mencionados, es decir, los que se refieren a los tres componentes, la tesis filosófica que se asume se caracterizará de aquí en adelante como *Realismo Científico*. Uno abogará que la filosofía permite que se cuestionen este tipo de definiciones, sin embargo, a pesar de que la forma de elegirlos y definirlos no es de ningún modo trivial, no es un asunto que sea relevante por el momento. Al contrario, es necesario delinear las bases argumentativas para poder llegar a una conclusión filosófica satisfactoria evitando argumentos sin salida.

7. El Realismo Científico en la Física

En seguida se pretende evaluar la legitimidad del realismo científico en el contexto particular de la Física. Para ello, es importante definir algunos conceptos importantes que servirán para aclarar y formalizar el contenido filosófico de este trabajo.

Cuando se dice que uno es realista con respecto a una teoría, lo es con respecto a los objetos observables e inobservables que tienen alguna correspondencia con el lenguaje en el que se expresa dicha teoría. En este contexto, se dice que los términos teóricos refieren a objetos tanto observables como inobservables y que las proposiciones que se construyen a partir de ellos son verdaderos. Sin embargo, debido a que la correspondencia entre el lenguaje teórico y el mundo que pretende esbozar no es trivial, parece que es necesario especificar el tipo de objetos inobservables que son compatibles con dicha teoría, y con respecto a los cuales se pretende ser realista[14]. Es decir, se debe especificar el tipo de objetos que, bajo una tesis realista, forman parte del mobiliario del mundo, tomando en cuenta que todo lo que la teoría dice acerca de ellos (en términos de proposiciones) es verdadero. Desde un punto de vista meramente filosófico, los objetos en cuestión corresponden a lo que se llama *ontología*, que son las entidades que objetivamente existen en el mundo independientemente de la percepción humana. Es importante aclarar que aquí la ontología siempre refiere a los objetos que existen relativos a una teoría que se asume (hipotéticamente) como correcta, es decir, que las proposiciones que hablan acerca de los objetos en cuestión son verdaderas (como condición de posibilidad). Si no fuera así, entonces se estaría afirmando de manera precipitada que, independientemente de cualquier teoría que se construya en el transcurso del tiempo, la ontología sería en efecto aquello de lo cual se compone el mundo en su nivel más fundamental. Tomando en cuenta una caracterización en términos de *Modelos Ontológicos* [Leifer, 2014, p.20], la ontología en cuestión, restringida a una teoría física, tiene el nombre de *Estado Óntico*. Es decir, el estado óntico es, por definición, lo que existe, ya sea el conjunto de objetos que constituyen al mundo que la teoría representa, ó bien, a sus propiedades [Leifer, 2014, p.5]. En estos términos, ser realista con respecto a una teoría científica presupone la existencia de un estado óntico.

Contrariamente a un estado de este tipo, un *Estado Epistémico* es una descripción de lo que un observador sabe acerca de un sistema en algún momento dado [Leifer, 2014, p.6]. Generalmente en esta concepción de estado, se presuponen ciertas nociones de probabilidad epistémica donde se incorporan elementos probabilísticos en términos de grados de creencias, agentes de conocimiento, etc. Pero particularmente en el ámbito de la Física, los estados epistémicos comparten una característica en común que se debe a su carácter meramente epistemológico pero también objetivo, debido a que involucra un conocimiento gradual acerca de un hecho objetivo, es decir, de un estado óntico que especifica las propiedades y características reales de un sistema.

Tomando en consideración estos modelos, en seguida se evaluarán algunas de las teorías más exitosas para defender una tesis realista en función de sus interpretaciones. Para ello, se procederá a analizar en qué medida un realista puede comprometerse con dichas teorías de acuerdo con los tres componentes que se definen

[14]Nótese que no hace falta confirmar la veracidad de las proposiciones que refieren a los objetos observables si se asume que dicha teoría es empíricamente adecuada.

arriba. En esta labor, el componente metafísico se asumirá desde un principio ya que no es motivo de análisis en lo que concierne a su caracterización, y es condición necesaria para adoptar una tesis realista.

7.1. La Dimensión Semántica: Una Visión Optimista

Con el propósito de dar una exposición más clara, se empezará por ilustrar un par de ejemplos para evaluar, en particular, la legitimidad del componente semántico del realismo en el contexto de la Física contemporánea. Con esto en mente, el primer ejemplo (la *MC*) pretende corroborar los criterios semánticos del realismo científico, mientras que el segundo (la *MCU*) revela algunos problemas que surgen si uno es realista con respecto a ella. Es decir, se pretende evaluar a ambas teorías físicas de acuerdo a si son empíricamente adecuadas y permiten elucidar una imagen clara del mundo que describen mediante una "representación literal" acotada a sus respectivos dominios.

7.1.1. Reivindicando la Dimensión Semántica: La Mecánica Clásica

En la literatura filosófica se asume regularmente que la *MC* es el ejemplo estándar de una teoría respecto a la cual uno puede adoptar una tesis realista sin comprometer algunas intuiciones filosóficas que convencionalmente se han aceptado. Sin embargo, a pesar de que parece ser razonable, creo necesario evaluar este tipo de suposiciones que, muy menudo, terminan siendo cuestionables a la luz de reflexiones más incisivas. En primera instancia, habría que advertir que una tesis realista con respecto a una teoría manifiesta una carga problemática menor siempre y cuando el dominio de aplicación de dicha teoría sea lo más extenso posible. Desafortunadamente, una tesis realista con respecto a la *MC* no satisface este requisito. Estrictamente, no satisface el componente epistémico del realismo, debido a que hoy en día las predicciones de dicha teoría son limitadas y únicamente son válidas en el dominio de los objetos macroscópicos y velocidades bajas. Sin embargo, a pesar de esta negativa, algunas fuentes han sugerido que la *MC* permite construir una imagen particular del mundo, cuyas bases filosóficas se encuentran estrechamente vinculadas con el componente semántico del realismo científico. De este modo, con el propósito de defender una tesis realista en este contexto, esta sección estará dedicada a dar una justificación apropiada de que, al menos, el componente metafísico y semántico se satisfacen.
En lo que respecta a la viabilidad de una actitud realista con respecto a la *MC*, parece que no hay mejor indicio del que se aprecia en algunos pasajes del tercer libro de los *Principia*. En su magna obra, Isaac Newton se refiere a las leyes matemáticas no como un instrumento imaginativo sino como una forma de representar fiel y objetivamente al mundo. A grandes rasgos:

> "For Newton there is a final stage in this process: when the system and its conditions no longer represent nature simplified and idealized or an imaginative mathematical construct, but seem to conform to (or at least to duplicate) his realities of the external world" [Cohen, 1980, p.64]

Desde una visión más radical, también se tiene registro de que, a causa de que el proyecto clásico había llegado a un grado de madurez con la formulación hamiltoniana y lagrangiana, se creía que unas cuantas leyes matemáticas podían dar cuenta de la realidad en su totalidad. Por ejemplo:

> "Tous les effets de la nature ne sont que résultats mathématiques d'un petit noinbre de lois immuables"[Lapplace, 1847, p.168]

Por supuesto que esta actitud más radical fue eventualmente rechazada, puesto que hoy en día se sabe que la *MC* es una teoría empíricamente exitosa únicamente en el dominio de los objetos macroscópicos y velocidades bajas. En efecto, dicha teoría ya no puede predecir y estudiar otros fenómenos que se han observado y analizado a detalle, como son los fenómenos cuánticos y relativistas. Por esta razón, las proposiciones teóricas que se restringen al dominio clásico no pueden considerarse estrictamente verdaderas, en tanto que refieren al mundo externo.

Sin embargo, esto no implica que no se pueda adoptar una tesis realista más débil que permita construir una interpretación clara y empíricamente adecuada de un mundo estrictamente clásico. En efecto, el estado del conocimiento actual permite establecer limitaciones epistémicas de forma tal que la *MC* sea suficientemente clara y precisa con respecto a lo que dice del mundo clásico y de igual manera, que permita establecer una correspondencia entre este mundo y los hechos empíricos. Por supuesto que para este fin, se tiene que especificar la forma en que los hechos empíricos (delimitados a los objetos macroscópicos y velocidades bajas) se re-conceptualizan en términos de la ontología de la teoría que corresponden, después de todo, a los eslabones fundamentales del mundo clásico.

Para probar la primera de estas aseveraciones basta con especificar una ontología compatible con la *MC*. Para ello habría que notar que esta teoría permite hacer una descripción completa de cualquier fenómeno macroscópico (a velocidades bajas) mediante dos elementos fundamentales: un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que dictaminan la dinámica de un sistema mecánico –mejor conocidas como ecuaciones de Hamilton– y un conjunto de condiciones iniciales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ que determinan el estado del sistema $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ en cualquier instante de tiempo de manera única[15]. La descripción de un sistema mecánico en términos de estos dos elementos permite elucidar una interpretación de la *MC* en términos de un conjunto finito de partículas puntuales en movimiento con momento y posición bien definidos. Así mismo, las propiedades dinámicas asociadas a las partículas, como la energía o la aceleración, juegan un papel secundario al ser funciones de $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ y del Hamiltoniano, el cual se incluye en las ecuaciones de Hamilton. Esto implica que tanto la materia y la energía tienen atributos definidos y cognoscibles en términos de la ubicación de partículas puntuales en el espacio físico y en el campo de momento. De este modo, es posible concebir una imagen clara y precisa del mundo clásico en términos del movimiento de un sistema de partículas puntuales gobernado por las ecuaciones de Hamilton, y particularmente, por el Hamiltoniano, que dictamina el tipo de sistema cuya dinámica se desea determinar. Por ende, bajo la suposición de que la ontología de la *MC* consiste en un conglomerado de partículas puntuales, es posible definir al estado óntico de esta teoría mediante $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, el cual corresponde a los grados de libertad del sistema, y específicamente, a las propiedades obje-

[15]Las coordenadas bajo las cuales se define el estado del sistema incluye a las coordenadas generalizadas y a los momentos conjugados. Estas coordenadas definen el haz cotangente a la variedad de configuración, usualmente conocido como *Espacio Fase*.

tivas de las partículas[16]. Ahora bien, es un hecho que cuando se quiere describir objetos macroscópicos de diferente índole, como por ejemplo, un fluido, resulta que la dinámica asociada a cada una de las partículas que lo componen es muy complicada. A decir verdad, cuando se trata de un sistema compuesto por miles de millones de partículas, prácticamente no es posible conocer con exactitud la posición y el momento de cada partícula. Por esta razón, es necesario introducir un elemento que permita medir cuantitativamente el conocimiento (o la ignorancia) que se tiene del estado óntico del mismo mediante una densidad de probabilidad que se define en el espacio fase. Esta densidad corresponde, como bien se sabe, al estado epistémico de un sistema clásico.

Hasta el momento se ha especificado una ontología compatible con la *MC*, pero para lograr el cometido de esta sección faltaría determinar la correspondencia que existe entre esta ontología y los hechos empíricos. Para ello, habría que notar que las partículas puntuales clásicas son un recurso para modelar objetos macroscópicos, como si estos últimos fueran objetos compuestos de un gran número de partículas puntuales. Esto debido a que el centro de masa de un objeto compuesto se comporta como una partícula puntual. Por ende, la constitución de los objetos clásicos observables se explica en virtud de dichas partículas, o dicho de otro modo, los cuerpos macroscópicos se re-conceptualizan en términos de un conjunto de partículas puntuales con propiedades bien definidas[17].

Ahora bien, habría que notar que bajo este tipo de consideraciones metafísicas, existe la intuición de que cualquier proceso de observación puede ser considerado una medición, por lo que si se quiere especificar de manera precisa el tipo de correspondencia que existe entre la ontología de la teoría y los fenómenos observables, es importante hacer una descripción formal del proceso de medición. A este respecto uno se preguntaría si la *MC* permite definir un concepto de medición que sea compatible con su ontología. Es decir, que mediante el aparato formal de esta teoría sea posible especificar de manera precisa lo que es una medición, o lo que es lo mismo, que pueda describir coherentemente los procesos de medición que se llevan a cabo en este dominio. Para ello, simplemente habría que notar que el proceso de medición resulta ser, en principio, indistinguible de cualquier proceso físico y no requiere de un tratamiento especial que involucre otro tipo de descripción. En efecto, cualquier medición es un proceso físico y viceversa. La razón es que una medición se describe en términos de la dinámica de las partículas que componen al sistema que se quiere estudiar y al dispositivo experimental con el que se quiere medir. De este modo, así como la teoría determina cualquier proceso físico que se encuentre dentro de su dominio, también especifica el tipo de mediciones que se pueden realizar. El punto está en que en un contexto clásico, estos procesos no modifican al sistema de estudio, y si lo modifican, es posible cuantificar de manera precisa la perturbación provocada por ellos. Por motivos de claridad, una descripción esquemática de una medición clásica se presentará a continuación (siguiendo a [Dieks, 2011, Ch.8]):

[16]Nótese aquí que se ha omitido hablar acerca del estatus de los campos y fuerzas newtonianas, que son conceptos fundamentales en la *MC*. Esto se debe a que la interpretación de las fuerzas en esta teoría no es trivial, lo que involucra ciertos problemas de índole semántico.

[17]Un experto en Metafísica como Bob, podría demandar un análisis mucho más profundo (en términos metafísicos) con respecto a la correspondencia que se tiene entre la teoría y el mundo observable. Sin embargo, prefiero esperar a la sección dedicada a la dimensión fenomenológica de otro tipo de realismo en 10.5, cuya caracterización es radicalmente distinta al que se ha definido aquí.

Una medición define una correlación entre la propiedad $\mathcal{A}$ de un sistema S y una propiedad $\mathcal{R}$ del dispositivo experimental M. En el contexto de la *MC*, se asume que $\mathcal{A}$ posee un cierto valor $a \in \mathbb{R}$, que pertenece al conjunto de sus posibles valores permitidos $a_1, \ldots, a_n \subset \mathbb{R}$. Resulta que, después de una medición, $\mathcal{R}$ tiene un valor equivalente a $r_j = m(a_j)$, donde m es una biyección entre los posibles valores de $\mathcal{A}$ antes de la medición y los posibles valores de $\mathcal{R}$ después de la medición. Por supuesto que una medición es un proceso físico que también desempeña un rol pragmático, en el sentido de que el valor de una propiedad que no es directamente observable, por ejemplo la masa, se correlaciona con el valor de una propiedad que es directamente observable, por ejemplo, la posición de un puntero. De este modo, para que se lleve a cabo una correlación entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}$, debe haber una interacción física entre S y M. Esta interacción puede influir potencialmente sobre el valor de $\mathcal{A}$, de tal manera que el valor antes de la medición pueda cambiar a otro valor después de la medición. Por ende, una medición se puede ver como un proceso de retroacción cuya finalidad es revelar el valor de $\mathcal{A}$ antes de la interacción con M.
Sin embargo, una medición clásica puede considerarse una interacción casi despreciable, de forma tal que el valor $\mathcal{A}$ no se modifique. Por lo tanto, la transición del estado en una medición ideal puede expresarse esquemáticamente como:

$$(a_j, r_0) \rightsquigarrow (a_j, r_j) = (a_j, m(a_j))$$

Nótese que el método que se usa para medir (el contexto experimental) es independiente de la dinámica del sistema de estudio, siempre y cuando este último se encuentre correlacionado con el dispositivo experimental. También habría que notar que la forma en que se mide $\mathcal{A}$ se expresa en términos de la forma en que se determina el valor de $\mathcal{R}$ que, después de todo, se asume que es directamente observable.
Finalmente, habiendo especificado una ontología compatible con la *MC* y haber determinado la correspondencia que existe entre esta ontología y los hechos empíricos (incluidas las mediciones), queda claro que es posible defender una tesis realista con respecto a esta teoría, reducida a su componente metafísico y semántico. Es decir, mediante las Leyes de Newton y la postulación de partículas puntuales en movimiento es posible, por un lado, concebir una ontología clásica bien definida, y por otro lado, determinar una correspondencia entre esta ontología y los hechos empíricos. Ahora bien, actualmente se sabe que la detección de fenómenos cuánticos ha traído consigo algunas limitaciones respecto al poder predictivo de la *MC*. Estas evidencias obligan a cuestionar la viabilidad de la ontología clásica propuesta. En particular, la falta de su adecuación empírica en dominios menos restringidos y por lo tanto, un cuestionamiento a su correspondencia con el mundo real. En seguida, conviene introducir a la *MCU* en el contexto de este trabajo, tomando en cuenta que su construcción y desarrollo tuvo su origen a razón de estas anomalías. En consecuencia, se pretende evaluar una tesis realista bajo el supuesto de que la *MCU* es un pilar fundamental de las teorías científicas contemporáneas más exitosas. Para ello, será necesario entender a cabalidad los problemas conceptuales de los que adolece esta teoría.

7.1.2. En Detrimento de la Dimensión Semántica: La Mecánica Cuántica

Después de Newton, algunos científicos creyeron que la *MC* había revelado gran parte de los misterios del universo, especialmente porque se había sugerido que una representación correcta del mundo real era efectivamente posible. Sin embargo, con el auge de la *MCU*, a pesar de ser una teoría muy exitosa desde el punto de vista predictivo, estas aspiraciones pronto se vieron interrumpidas. A diferencia de la *MC*, esta nueva teoría resultó ser muy ambigua y "obscura" respecto a su correspondencia y adecuación con el mundo. Desde una visión propiamente física, una de las razones que propiciaron tal cosa fue que la única teoría que se desarrolló para describir fenómenos a un nivel de extensión microscópico no podía describir objetivamente los procesos de medición y debía introducir lo que se conoce como *Observadores Externos*. Es decir, a pesar de que había indicios suficientes de que la teoría era predictivamente exitosa, no era capaz de dar una descripción apropiada del proceso de medición en términos de interacciones físicas gobernadas por sus ecuaciones fundamentales. A propósito de este problema y por un asunto de claridad considérese la siguiente situación:

Imagínese un estudiante de arte que visita al Museo Guggenheim de Nueva York. Dentro del recinto existen diferentes galerías, en cada una de las cuales se expone un ejemplar –con un color distinto al resto– de la serie de cuadros monocromáticos de Yves Klein "Popositions monochromes". Se le ha permitido el acceso a todas las galerías donde se encuentran dichas obras, por lo que ha decidido entrar a una al azar, sin saber de antemano el color del cuadro que se encuentra en su interior. Una vez dentro de la galería, el estudiante observa un ejemplar azul de la obra de Klein. Ahora bien, supóngase que existe una teoría "YK" que supuestamente explica y describe de forma completa y correcta el proceso real de observación, tomando en cuenta tanto al cuadro de Klein como también al estudiante. Para ello YK narra la siguiente historia: el cuadro se compone de un conjunto denso de átomos que absorben fotones a cierta frecuencia causando que la luz artificial del recinto se refleje de tal modo que los rayos incidan sobre la retina del estudiante. La excitación de los átomos de la retina produce pulsos eléctricos que llegan al cerebro donde finalmente ocurre un proceso complejo neuronal que concluye con una representación macroscópica de las frecuencias de luz reflejadas, es decir, con lo que se conoce como el color azul. A propósito de YK, el proceso de observación ha sido descrito de forma consistente con las leyes de la teoría, como es el caso de las interacciones entre los átomos y la luz en correspondencia con un fenómeno macroscópico: el ojo del estudiante percibiendo un cuadro azul. Desafortunadamente YK dista de ser una realidad en cuanto a que la *MCU* no puede ofrecer una descripción de la misma naturaleza. En efecto, a pesar de que el estudiante únicamente conoce de antemano las posibilidades cromáticas de los cuadros de Klein (rojo, verde, amarillo, etc.), la *MCU* no es capaz de contar una historia que pueda reproducir el color que ha sido observado inmediatamente después de entrar a la galería. Es decir, visto en retrospectiva, esta teoría no es capaz de predecir el resultado de la observación de forma consistente con el hecho empírico de que el cuadro, una vez que ha sido observado, es en efecto de color azul. El problema reside en que la representación macroscópica del proceso de observación descrito por la teoría correspondería únicamente a un cuadro sin un color bien definido –a una superposición de todos los colores sin que se apreciara uno en particular–, teniendo en cuenta la totalidad

de variantes cromáticas que existen en la serie de Klein (rojo, verde, amarillo, etc.). En términos del formalismo, la *Función de Onda*[18] asociada al sistema completo del cuadro y el observador se encontraría en una *Superposición de Estados*[19], cada uno de los cuales tendría asociado un posible color. Este *Enredamiento* del estado cuántico es resultado de la evolución del sistema completo gobernado por las leyes de la *MCU* que, sin duda, difiere de lo que se percibe en el mundo observable.
Esta ambigüedad que yace entre las consecuencias del formalismo de la teoría cuántica y el dominio que éste último representa, comúnmente denominado *Problema de la Medición*, no se había logrado caracterizar y formular unánimemente antes de que naciera un interés filosófico respecto a estos problemas conceptuales. El denominador común que hoy podemos identificar es la afirmación de que existe un problema que trasciende la consistencia matemática del formalismo al interpretar a la *MCU* desde una tesis particularmente realista, con algunos matices que se discuten actualmente en la literatura filosófica.
A continuación se procederá a dar una descripción del problema de la medición desde un punto de vista más formal. Habiendo hecho esto, se podrá advertir el rol que juega este problema en relación con el realismo científico que se ha definido aquí.

7.1.3. El Problema de la Medición

En gran parte de la literatura filosófica se asume que la *MCU* posee problemas de naturaleza conceptual, sin embargo, antes de pronunciarse por una posible solución, uno esperaría que la comunidad científica tenga suficientemente claro el tipo de problemas que padece dicha teoría. Aunque existen suficientes referencias filosóficas al respecto, desafortunadamente todavía no existe un consenso que involucre tanto a la comunidad científica como la filosófica.
En la literatura se han tratado de esbozar algunas ambigüedades conceptuales que imperan en la *MCU*, para lo cual ha sido importante no solo explicar su éxito predictivo, sino también tener claro los requisitos filosóficos mínimos para que pueda ser satisfactoria en relación con los hechos empíricos: su adecuación empírica. En efecto, es un hecho empírico que el mundo observable se constituye de objetos estables con propiedades bien definidas. Por ejemplo, gatos vivos o muertos, punteros que apuntan a una dirección, etc. Al suponer que es posible acceder al conocimiento de estas propiedades por medio de una teoría, es importante que esta última pueda contar una historia consistente o poseer las herramientas suficientes para que pueda dar cuenta de dicho resultado meramente empírico. A este respecto, los físicos han propuesto algoritmos matemáticos para que las teorías reproduzcan las propiedades bien definidas de los objetos observables, entre ellos los resultados de una medición. Desafortunadamente, lo más que se ha logrado en el dominio de la *MCU* ha sido predecir de forma probabilística los resultados experimentales. Esto mediante la realización sucesiva de experimentos para obtener una distribución probabilística de estados posibles. De esta forma, la *MCU* ha demostrado ser predictivamente exitosa desde un nivel probabilístico, pero su

[18]Una función matemática que contiene información sobre el estado probabilístico de un sistema. Más adelante se le definirá en detalle.

[19]Un estado del sistema que no puede descomponerse en las partes que se han superpuesto. Su definición formal se dará más adelante.

carácter interpretativo y fundacional a nivel individual ha sido objeto de controversia.

A la luz de este marco introductorio, todo parece indicar que para caracterizar y dar solución a esta problemática en el contexto de la *MCU*, es necesario diluir la distinción que naturalmente aparece entre la Física, como una ciencia empírica, y la filosofía. De esta forma, el problema de la medición, es decir, la serie de supuestos que revelan ambigüedades conceptuales con respecto a la medición en el contexto de la *MCU* no es únicamente de naturaleza física, sino también llama a reconsiderar aspectos centrales en el ámbito de la filosofía. Para tener claro dicha asunción se procederá a caracterizar dicho problema tomando como guía a [Maudlin, 1995]. En este artículo, se propone una caracterización clara y sistemática. Aparte de las virtudes explicativas que ostenta esta propuesta, esta última resulta tener implicaciones relevantes en un contexto filosófico que guarda estrecha relación con el realismo científico que se ha definido aquí. No obstante, es justo y pertinente aclarar que estas implicaciones son independientes de los argumentos propios del autor y que no pretenden pedir prestado su nombre para adjudicarle elementos ajenos a su obra. Al contrario, estas implicaciones son elementos filosóficos que a mi parecer pueden desarrollarse a partir de su propuesta original, que como tal no contempla una tesis filosófica bien definida.

En [Maudlin, 1995] se caracteriza el problema de la medición mediante el despliegue de tres afirmaciones que resultan ser, en conjunto, inconsistentes:

(1) La función de onda especifica todas las propiedades físicas de un sistema. A esta característica se le llama *Completitud* de la función de onda[20].

(2) La función de onda siempre evoluciona de acuerdo con una ecuación dinámica lineal (*Ecuación de Schrödinger*).

(3) Las mediciones de las propiedades tienen valores bien definidos[21].

Según [Maudlin, 1995], un posible escenario donde las tres afirmaciones anteriores no pueden ser, en conjunto, verdaderas es el siguiente: considérese un sistema de un electrón con espín $1/2$ y un aparato que mide sólo la componente z del mismo. Supóngase que todas las propiedades relevantes de este sistema, es decir, el espín del electrón y la dirección del puntero del aparato de medición, tienen su contraparte en la *MCU*. Esto significa que las propiedades del mismo se especifican mediante la función de onda, o lo que es lo mismo, se afirma (1). Ahora bien, se sabe que el aparato de medición tiene un estado inicial "listo" antes de la medición, y dos posibles estados (arriba y abajo) que corresponden a los eigen-estados z del espín hacia arriba y hacia abajo, después de la medición. El sistema se prepara de tal forma que un electrón con espín hacia arriba (abajo) permanece hacia arriba (abajo) durante la medición. Ahora, supóngase que en lugar de tener un electrón en un eigen-estado z de espín, se tiene un electrón en el eigen-estado x de espín. En virtud de (2), al evolucionar el sistema de acuerdo a la ecuación de Schrödinger (tomando en cuenta que

[20] Aquí es importante recalcar que existen teorías, como veremos más adelante, que consideran estados cuánticos, los cuales describen completamente un sistema pero que contienen otros elementos aparte de la función de onda, sin que ésta última sea propiamente una descripción completa del mismo.

[21] Por ejemplo, cuando se mide la componente z del espín de un electrón, se sabe que después de la medición el estado del aparato de medición es tal que arroja el valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (y no $-\frac{1}{\sqrt{2}}$) o $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (y no $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

el sistema total comprende tanto al electrón como al aparato de medición), el resultado que se obtiene es una superposición de estados del aparato en términos del eigen-estado z de espín. Respecto al proceso de medición descrito, surge una pregunta: ¿Qué le ocurre al aparato después de medir al espín?
Hay que recordar que si se satisface la afirmación (1), es decir, si la función de onda final que se obtiene corresponde a una descripción completa del aparato y del electrón, entonces esta función debe especificar de manera completa todas las propiedades físicas del mismo. Sin embargo, en virtud de asumir (2), un simple argumento de simetría niega que uno y sólo uno de los estados del indicador (ya sea arriba o abajo), sea suficiente para determinar completamente las propiedades físicas del aparato. Es decir, no se puede privilegiar a sólo uno de los dos estados superpuestos porque entran simétricamente en la función de onda final. En virtud de que el aparato se encuentra en una superposición de estados, es imposible que el aparato indique un valor bien definido después de la medición. Un ejemplo sencillo basta para clarificar el argumento de simetría anterior, el cual se espera que pueda ayudar a la comprensión del mismo sin llegar a confundir al lector: Análogamente al acto de medir el espín del electrón, el lector puede imaginar que se abre un libro en blanco y que la portada y contraportada son del mismo color (despreciando cualquier detalle que los haga diferentes). De este modo, no importa de qué lado se abra el libro, nunca se podrá distinguir si uno está al inicio o al final del mismo. Además, la definición de portada y contraportada pierden sentido si el libro esta en blanco y no hay referencia alguna que diga si uno se encuentra en el inicio o fin del mismo. Habiendo dicho esto, se puede concluir que si (1) y (2) son verdaderos, entonces (3) es falso. Es decir, si (1) y (2) son verdaderos, y se llevan acabo mediciones de un electrón en el eigen-estado x de espín, con un aparato que mide la componente z de espín, entonces se puede concluir que la teoría no determina valores de espín bien definidos después de la medición.
Ahora bien, una vez que se ha descrito el ejemplo anterior, es pertinente preguntarse por la relación que guarda la incompatibilidad entre todas las afirmaciones de arriba con el realismo científico que se ha definido aquí. A este respecto, es importante situar la discusión anterior en un contexto filosófico adecuado con la finalidad de entender tanto su contenido como su propósito. Nótese que para evaluar la problemática que supuestamente existe en el contexto de la *MCU*, habría que comprometerse realísticamente con las tres afirmaciones. En efecto, las tres afirmaciones que se establecen como inconsistentes no son, por sí mismas, problemáticas. Tampoco lo es la *MCU* entendida como un conjunto de ecuaciones sin contenido semántico. Al contrario, la raíz del problema descrito yace en asumir que el estado físico del aparato de medición, entendido como el conjunto de sus propiedades objetivas y reales, sea estrictamente una superposición macroscópica de estados. La razón es que al adjudicar realidad a dicho estado se está negando que los aparatos siempre indican un valor determinado después de una medición, que el cuadro de Klein tiene un solo color, etc. Dicho de otro modo, el problema de la medición se fundamenta en el hecho de asumir que la función de onda tiene una correspondencia unívoca con el estado óntico del sistema, o bien, que especifica las propiedades objetivas de un sistema existente. Sin este (u otros posibles) compromisos de naturaleza realista no tiene sentido problematizar la incompatibilidad entre las tres afirmaciones de arriba.
A mi parecer, el contexto filosófico en el que se fundamenta esta caracterización del problema de la medición puede hacerse corresponder con un realismo más débil, caracterizado por el componente metafísico y

semántico. Pero a diferencia de algunas propuestas anti-realistas como el empirismo constructivo, su caracterización abre la posibilidad de interpretar a la *MCU* desde una tesis realista sin negar explícitamente su otro componente epistémico. No obstante, aunque en esta caracterización del problema de la medición es posible encontrar algunos elementos que reivindican el componente metafísico y semántico del realismo, se omite hablar de una interpretación desde un caso particular y preferente. Es cierto que en [Maudlin, 1995] se mencionan distintas propuestas e interpretaciones supuestamente compatibles con una tesis realista con respecto a la *MCU*, algunas de las cuales muestran ser más adecuadas que otras, sin embargo, no es posible determinar alguna preferencia al respecto, y la actitud más pertinente en este caso sugiere ser la de un escéptico respecto al componente epistémico del realismo. Estas observaciones permiten sugerir que esta caracterización del problema de la medición no se compromete con un realismo respecto a objetos inobservables específicos, ya sea la función de onda como una entidad real o alguna de las cantidades que se definen en la teoría (la posición o/y la velocidad o/y el espín, etc.). Al contrario, solo determina las posibilidades de contar una historia clara, consistente y empíricamente adecuada. En este punto, conviene hacer una lista de los aspectos filosóficos que se le pueden adjudicar a la problemática que se presenta en [Maudlin, 1995] y que involucran al componente semántico del realismo:

(1) *La Adecuación Empírica:* Cualquier teoría científica, y en particular, *MCU* aspira a ser una teoría empíricamente adecuada, tomando en cuenta que el mundo observable se constituye de objetos macroscópicos con propiedades bien definidas (gatos vivos o muertos, el puntero de un aparato de medición apuntando hacia una dirección, etc.). Pero además de esta petición, una actitud realista con respecto a esta teoría demanda la adecuación empírica de su *interpretación*. Considérese el siguiente ejemplo como un caso particular: después de un proceso de medición, las propiedades de los objetos inobservables que se postulan y son representados por la teoría (el espín de una partícula, o bien, la posición asociada a un sistema de partículas, etc.), deben tener valores bien definidos al reproducir los valores bien definidos de las propiedades de los objetos macroscópicos observables:

> "And since we are interested in individual cats and detectors and electrons, since it is a plain physical fact that some individual cats are alive and some dead, some individual detectors point to "UP.ªnd some to "DOWN", a complete physics, which is able at least to describe and represent these physical facts, must have more to it than ensemble wavefunctions".[Maudlin, 1995, p.10]

Dicho de otro modo, los valores bien definidos de las propiedades de objetos inobservables que se obtienen después de una medición deben corresponderse con los valores bien definidos de las propiedades de objetos observables. Por ejemplo, si la materia constara de partículas inobservables con posiciones bien definidas (como la única propiedad existente), cualquier propiedad macroscópica bien definida se debería constituir por una configuración espacial particular de dichas partículas. Esto implica que, bajo la suposición de que existen objetos inobservables de algún tipo, las teorías deben describir de manera literal y objetiva los resultados que se obtienen al medir un sistema si se asume que estos resultados son datos empíricos infalibles. Volviendo al ejemplo, si una teoría asume que la materia se compone de partículas con posiciones bien definidas, se seguiría que dicha teoría cree que existen partículas con una configuración y dinámica tal que, en conjunto, lograrían reproducir los datos que se obtienen mediante los aparatos de medición (por ejemplo la posición y dirección del puntero). Así, estos elementos inobservables no son artilugios metafóricos o instrumentales que reproducen los datos empíricos como cualquier otro elemento de este tipo (tal como lo haría un instrumentalista), sino que son, en conjunto, una representación literal de los elementos observables.

(2) *La Claridad*. Esta caracterización del problema de la medición no muestra preferencias hacia una postura en particular que determine, de manera única, la ontología de la *MCU*. Es decir, no satisface el componente epistémico del realismo debido a que no confirma si una interpretación representa al mundo real. Sin embargo, sí deja abierta la posibilidad de elucidar ontologías compatibles con la *MCU*. Aquí conviene analizar la primera de las afirmaciones de la caracterización propuesta, es decir, que la función de onda especifica todas las propiedades físicas de un sistema. Dicha aserción no implica que se crea en la existencia de la función de onda como un objeto independiente y autónomo. Al contrario, significa que si a un sistema físico existente se le asigna una función de onda, entonces existe una propiedad objetiva del sistema (sin especificar explícitamente) que tiene una correspondencia unívoca con la función de onda. En particular, esta 'propiedad del sistema' podría referirse a las propiedades dinámicas de un sistema de partículas cuánticas, o/y bien, a las propiedades de un campo cuántico. Por este motivo, dado que es posible especificar un tipo de ontología compatible con la *MCU* sin la necesidad de creer en la realidad de alguna de ellas, se puede concluir que la caracterización del problema de la medición en [Maudlin, 1995], satisface implícitamente el criterio de claridad respecto a la interpretación que admite esta teoría.

De esta forma, debido a que el componente semántico del realismo demanda tanto claridad como adecuación empírica respecto a cualquier interpretación que se haga de la *MCU*, es posible entender el problema de la medición únicamente si se asume dicho componente (y por supuesto su componente metafísico).

A manera de conclusión, se puede advertir que el problema de la medición caracterizado aquí establece los límites de la *MCU* con respecto a su contenido semántico. Es decir, pone en duda la correspondencia literal entre el lenguaje formal y el mundo tanto observable como inobservable que este último representa. De esta forma, al proponer un enfoque filosófico que asume una tesis realista, es importante dejar al lado ambigüedades semánticas que yacen en el núcleo conceptual de la *MCU*. Por esta razón, en seguida se caracterizarán y mencionarán posibles soluciones que existen en la literatura respecto al problema de la medición.

7.1.4. El Olvido del Realismo

Sin lugar a dudas, se han hecho esfuerzos considerables para entender el problema de la medición, y en el mejor de los casos, dar una respuesta satisfactoria. Sin embargo, gran parte de estas propuestas han sido objeto de discusión y controversia y hasta el momento solo se han propuesto, en general, dos soluciones concretas: interpretar a la teoría de tal forma que el problema ya no tenga relevancia o cambiar el formalismo de la teoría. Es un hecho que varios físicos y filósofos han preferido tomar en serio la primera posibilidad, como es el caso de las primeras interpretaciones comúnmente conocidas con el nombre de *Mecánica Cuántica Ortodoxa*[22]. En lo que respecta a esta sección, se describirán dichas interpretaciones y se verá que la tesis filosófica subyacente a todas ellas amerita un abandono del realismo que aquí se ha definido.

Es importante recordar que en la primera mitad del siglo veinte, algunos fundadores de la *MCU* [Petersen, 1963][Neumann, 1955], propusieron una serie de interpretaciones, en parte para entender el concepto de medición a partir de ciertos supuestos filosóficos. Los ejemplos más citados en la literatura corresponden a la *Interpretación de Copenhague*, la *Interpretación de Ensambles* (o estadística) y la *Interpretación epistémica* (o de ignorancia), las cuales dieron inicio a distintas líneas de investigación que se fueron desarrollado con el paso del tiempo. En alusión a su primera etapa de desarrollo, estas interpretaciones afirman que la *MCU* no pretende elaborar una descripción literal y fidedigna del mundo, sino que su formalismo solo se usa para propósitos instrumentales sin la necesidad de hacer referencia a las propiedades físicas de un sistema individual. De esta forma, se dice que estas interpretaciones tienen supuestos filosóficos, que interpretados a la luz de esta discusión, sugieren un abandono al componente semántico del realismo mediante una tesis instrumentalista y al componente epistémico mediante una tesis moderadamente escéptica[23]. A este respecto, también es importante mencionar que la mayoría de las variantes anti-realistas de la teoría ortodoxa, aunque prescinden del componente semántico y epistémico del realismo, no niegan su componente metafísico[24].

A grandes rasgos, la teoría ortodoxa: i) niega que la función de onda describa el estado completo del sistema (se niega la primera afirmación (1) del problema de la medición); y también ii) niega que el estado del sistema evoluciona *en todo momento* solamente mediante la ecuación de Schrödinger (lo que equivale que se niegue (2)). Nótese que esta negación no implica que se niegue que, en algún momento, el estado del sistema evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, puesto que el sistema evoluciona de esta manera en ausencia de mediciones. Con respecto a (i), se asume la existencia de una limitante epistemológica para poder acceder a la naturaleza real del estado óntico del sistema. Un caso particular son las interpretaciones epistémicas y de ensambles, donde la función de onda corresponde al estado epistémico del sistema. Por otro lado, para que la teoría sea empíricamente adecuada se requiere del postulado del colapso, en cuyo caso la evolución del estado del sistema resulta ser indeterminista, y por lo tanto se satisface (ii). El caso

[22] Todavía no existe un acuerdo de lo que define a la mecánica cuántica ortodoxa, sin embargo se evitarán asuntos históricos que han sido objeto de controversia y se asumirá que dicha teoría comprende a todas las propuestas tempranas que resultan ser, en general, interpretaciones instrumentalistas.

[23] Aquí es importante enfatizar nuevamente que la historia que hoy se cuenta no es necesariamente la correcta, abriendo la posibilidad de que algunas interpretaciones se interpreten de acuerdo a un realismo con estos componentes.

[24] Se puede asumir un anti-realismo al prescindir únicamente del componente semántico y epistémico. La razón es que la negación de ambas componentes es condición suficiente, más no necesaria, para garantizar una tesis anti-realista. En efecto, se puede sustentar el componente metafísico del realismo al creer en un mundo inobservable que, sin embargo, no pueda ser descrito mediante la *MCU*.

más conocido que niega (2) es la interpretación defendida en [Neumann, 1955].

La interpretación epistémica de la función de onda y la adecuación empírica de la teoría da pauta para que las interpretaciones ortodoxas se consideren en algún sentido realistas. No obstante, debido a que no especifican la ontología en cuestión, y sabiendo que una tesis anti-realista se obtiene negando *alguna* o varias de las componentes del realismo, resulta que estas interpretaciones son después de todo anti-realistas.

Antes de describir en detalle estas interpretaciones es importante mencionar un aspecto importante que concierne a los estados epistémicos en el contexto general de la *MCU*, incluyendo sus variaciones interpretativas y formales. En efecto, al interpretar a la función de onda como un estado epistémico existe una distinción que involucra ciertos compromisos con algunos componentes del realismo. Por un lado, es posible interpretar a la función de onda de forma epistémica y al mismo tiempo negar la posibilidad de describir el estado óntico del mismo mediante los términos teóricos de la teoría en cuestión. En efecto, la *MCU* (incluyendo sus variaciones) no puede, en principio, decirnos algo acerca del mundo, por lo que para este fin se debe apelar a otro tipo de teorías o formas de conocimiento. Por otro lado es posible interpretarla de forma epistémica sin negar que otros términos teóricos puedan describir el estado óntico del sistema, como pueden ser otras variables asociadas al sistema, sin dejar de asumir la existencia de un mundo externo independiente de la cognición humana que puede llegar a ser cognoscible por algunas variaciones de la *MCU*. Como última opción, se puede imaginar un estado óntico que sea, por decreto, epistémicamente inaccesible, no solo por la *MCU* sino por la cognición humana en general, o bien, un mundo idealista totalmente regido por esta última. Tomando en cuenta estas distinciones, es evidente que el primer tipo corresponde a una visión instrumentalista y moderadamente escéptica respecto a la *MCU* en general, como es el caso de algunas variantes de la interpretación de Copenhague que afirman que el mundo cognoscible es estrictamente clásico al negar la existencia del mundo cuántico. Respecto al segundo tipo, al asumir que la función de onda no define completamente el estado óntico del sistema, resulta que la ontología que subyace a la misma no esta bien definida. Esto involucra una teoría del tipo instrumentalista únicamente respecto a la *MCU*. Tal es el caso de las interpretaciones de ignorancia y de ensambles. No obstante, aquí se deja abierto la posibilidad de comprometerse con el componente epistémico del realismo por medio de una variación de la teoría estándar, lo que se conoce como *Mecánica Cuántica Estándar* (*MCE*). Con respecto a la última opción, lo que se tiene es una versión radical de lo que se conoce como escepticismo, o bien, idealismo. Dado que estas tesis filosóficas son, en principio, irrefutables, su presencia no será de gran importancia para el propósito del presente trabajo.

Habiendo apelado a esta distinción, es hora de entrar en detalles respecto a estas interpretaciones. Dado que la interpretación de Copenhague no es muy clara con respecto a sus supuestos filosóficos, esta discusión se enfocará en la interpretación epistémica y de ensambles. Para poder introducir estas propuestas de forma coherente con la presente discusión, se considerará el mismo ejemplo propuesto en [Maudlin, 1995], que consiste en un sistema de un electrón con espín x y un aparato de medición que mide su componente z. Como ya se ha dicho, se puede demostrar que al asumir (1) y (2), la función de onda final del espín y del aparato de medición se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |z \uparrow\rangle_{electron} \otimes |\uparrow\rangle_{aparato} + \frac{1}{\sqrt{2}} |z \downarrow\rangle_{electron} \otimes |\downarrow\rangle_{aparato} \tag{7.1}$$

expresión que obedece a una superposición y que resulta ser incompatible con la afirmación (3). Tomando en cuenta el mismo ejemplo, en esta ocasión únicamente se afirmará (2) y (3), es decir, se asumirá que la función de onda evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger y que los resultados de una medición tienen valores bien definidos que se especifican mediante la teoría. Al obtener (7.1), esta expresión puede interpretarse de diferentes formas, entre las cuales se encuentran las siguientes:
El primer caso de estudio corresponde a la interpretación epistémica (véase en [Maudlin, 1995, Bell, 1971]). De acuerdo con esta postura, la función de onda es un estado epistémico que representa la ignorancia que se tiene acerca de las propiedades de un sistema. En otras palabras, niegan (1). Supóngase que después de una medición de la componente z de espín, el estado del aparato de medición resulta estar en una superposición, que de acuerdo a esta interpretación, involucra un desconocimiento de los valores obtenidos del espín (ya sea arriba o abajo). Esto asume, de forma implícita, un criterio de realidad, es decir, el hecho de que efectivamente el sistema está en alguno de los estados posibles, que corresponden a un valor determinado (arriba o abajo), aunque no se sepa cuál. Sin embargo, este criterio de realidad no corresponde al hecho explícito de que la función de onda final se encuentra en una superposición de estados. En efecto, la existencia de los estados individuales representados mediante el estado óntico del sistema son independientes del estado cuántico en superposición que se obtiene considerando la afirmación (2). En este ejemplo, es claro que la ignorancia no solo es una ausencia de conocimiento, como suele entenderse en un sentido vulgar, sino que por el contrario, la ignorancia es la forma de afirmar que algo se ha reconocido como real pero que no se sabe lo que es. Con el propósito de ser claro, es factible enunciar el problema de la siguiente manera: si se niega (1) y se asume (2) y (3), no se puede usar un criterio de ignorancia, si de antemano una superposición no puede dar sentido a los resultados bien definidos que se ignoran, es decir, al estado óntico del sistema. En palabras de Maudlin:

> "[...] In order to use the ignorance interpretation of mixtures, there must be something of which we are ignorant."[Maudlin, 1995, p.10]

Según [Maudlin, 1995], este es el problema sustancial del que adolece la interpretación de ignorancia. Por lo tanto, no puede considerarse como una solución satisfactoria al problema de la medición. No obstante, en vista de esta crítica razonable, creo que es posible encontrar otros problemas en el seno de esta interpretación que se centran en el carácter epistémico de la función de onda. De acuerdo con el marco filosófico que se ha establecido, parece que esta interpretación no resuelve el problema de la medición porque simplemente lo evita. Es decir, al asumir que la función de onda tiene un significado epistémico y no especifica de forma objetiva todas las propiedades físicas de un sistema, se está negando, al menos, el componente semántico y epistémico del realismo científico. Esto involucra, como bien se dijo arriba, un instrumentalismo y escepticismo moderado desde el cual el problema de la medición no tiene sentido alguno. De este modo, no tiene sentido caracterizar esta interpretación en el contexto filosófico en el que se fundamenta el problema de la medición. La interpretación epistémica simplemente es una versión de la *MCU* que no se propone pensar a esta última como una teoría con algún tipo de correspondencia con el mundo real.

Otra propuesta que involucra un cambio en el entendimiento del formalismo es la interpretación de ensambles (véase en [Ballentine, 1970]). En términos generales, esta propuesta también niega que la función de onda sea una descripción completa del sistema. De acuerdo con esta interpretación, la función de onda no describe sistemas individuales sino que describe una colección muy grande de sistemas con estados bien definidos (ensambles). En efecto, un ensamble es una colección idealizada de muchas copias de un mismo sistema individual, gobernado por las mismas leyes y descrito de la misma forma. En el ejemplo del espín, un ensamble se obtiene al considerar, por ejemplo, cien copias del mismo sistema-aparato[25], en donde cada una de ellas posee un estado bien definido del aparato. De esta forma, si se considera la totalidad de las copias, se obtiene un promedio estadístico de los estados posibles del aparato (por ejemplo, los estados arriba y abajo) representado matemáticamente por la función de onda final (7.1), es decir, cincuenta de las copias tienen probabilidad muy alta de que se correspondan con el estado arriba, mientras que las otras cincuenta copias tienen probabilidad muy alta de que se correspondan con el estado abajo. Si no es clara la definición, a continuación se ofrecerá un ejemplo que ayudará a entender de mejor manera este concepto:

Se tiene una hoja de papel con dos círculos dibujados, uno de los cuales contiene una moneda en su interior, y el otro esta vacío. Se le pide a un colaborador con los ojos cerrados que adivine donde se encuentra la moneda. Si se repite el experimento muchísimas veces con diferentes personas, el resultado final será que lo más probable es que la mitad de los colaboradores se queden con la moneda, mientras que la otra mitad se queden sin nada. Este resultado es independiente de si en los primeros cinco o diez experimentos los colaboradores se quedaron con la moneda o no lo hicieron, pues la idea esencial de estos experimentos alude a que el comportamiento promedio que se manifiesta a un nivel de ensamble (después de muchos intentos) es distinto al comportamiento de un sistema individual.

Una vez que se ha escrito una introducción al marco teórico de la interpretación de ensambles, es importante regresar al punto de partida. En el contexto de esta discusión, esta interpretación parece no satisfacer una de las tres afirmaciones que han mostrado ser, en conjunto, inconsistentes. En efecto, no satisface (1), lo que resultaría, en efecto, una solución aparente al problema de la medición. La razón es simple: la función de onda sólo describe ensambles y no especifica completamente las propiedades de los sistemas individuales, tales como los electrones, los gatos, los detectores, etc. Sin embargo, esta interpretación al igual que la epistémica, no intenta hacer afirmación alguna acerca del estado óntico del sistema sino que solo le asigna un significado epistémico e instrumental a la función de onda. Es decir, la interpretación de ensambles acepta que la función de onda es un instrumento de predicción que describe de forma incompleta al sistema al no poder especificar las propiedades individuales del mismo. Por esta razón, y análogamente a la interpretación de ignorancia, esta postura no figura como un candidato convincente para incluso hacer sentido alguno del problema de la medición que se fundamenta a partir de los criterios realistas asociados (que corresponden al componente metafísico y semántico del realismo científico).

[25]Por supuesto, un ensamble en realidad es una copia infinita de un sistema, sin embargo, en la práctica, resulta ser finito pero adecuado.

A manera de conclusión cabe decir que ninguna de las interpretaciones que se han bosquejado hasta el momento resultan ser efectivas para dar solución al problema sin prescindir de una tesis realista. De forma similar, se puede concluir que si estas propuestas son insuficientes para encontrar una solución apelando a criterios interpretativos y filosóficos, es importante caracterizar el problema desde otro punto de vista[26]. Es decir, si la función de onda no puede describir completamente a los estados físicos individuales, no importa la manera en que se interprete la teoría, todo parece indicar que la estructura interna y el núcleo de los fundamentos debe ser revisada para abrir paso a un nuevo formalismo. Hacia esta dirección se encaminará el resto de esta sección.

7.1.5. ¿Alguna Propuesta Optimista?

En lugar de descartar modelos realistas, también se ha intentado resolver el problema de la medición de una manera distinta, dando lugar a nuevas teorías físicas que parecen ser compatibles con dichos criterios tomando en cuenta sus variantes interpretativas. A este respecto, es importante definir un procedimiento para obtener una solución satisfactoria al problema de la medición. Una propuesta en esta dirección se muestra a continuación:
Antes que todo, es necesario recordar la caracterización del problema de la medición que se ha seguido a lo largo de esta discusión. En efecto, el argumento es simple y es el siguiente. Se tienen tres afirmaciones, las cuales resultan ser, en conjunto, inconsistentes:

(1) La función de onda es completa.

(2) La ecuación de Schrödinger es la ecuación de evolución de todos los sistemas.

(3) Los resultados de las mediciones siempre están bien definidos.

De las afirmaciones anteriores se sabe que si se asume dos de ellas, entonces la tercera las contradice. Si se quisiera prescindir del problema de la medición tomando en cuenta este argumento, lo que procede es negar una de las tres afirmaciones, de tal forma que las otras dos resulten ser consistentes. A este respecto, cabe recordar que la interpretación de ensambles abre la primera posibilidad para solucionar el problema de la medición mediante este argumento. Pero a pesar de que dicha interpretación niega la primera de las afirmaciones (1), no comparte el ingrediente esencial de una tesis realista (su componente semántico y epistémico), lo que ha demostrado ser insuficiente para el propósito que se tiene. Afortunadamente existe una solución al problema de la medición que niega (1) y que dispone de la maquinaria suficiente para no prescindir de un realismo al proponer un cambio explícito en el formalismo. Esta propuesta ha sido desarrollada y caracterizada ampliamente en la literatura y un breve recuento de sus fundamentos es el siguiente (Para un resumen véase en [Goldstein, 2017]. Detalles en [Bohm, 1952a,b, Holland, 1995, Dürr et al., 1992, Valentini, 1992, Bohm & Hiley, 1993, Solé, 2010]):

[26] Sin subestimar su importancia, se han omitido otro tipo de propuestas (por ejemplo la interpretación de Bohr) debido a que no hay un consenso respecto a su significado en el contexto realista.

En dirección opuesta a la interpretación de ensambles, esta propuesta modifica el estado del sistema al introducir variables adicionales que corresponden a las posiciones de las partículas, y que junto con la función de onda, forman parte del estado óntico del sistema. Es decir, si se determinan tanto las posiciones de las partículas como la función de onda asociada a ellas, es posible tener una descripción completa del sistema, en el sentido de que una vez que se tienen estas variables bien definidas es posible tener información completa del mismo. Desde el punto de vista de la dinámica, el estado descrito evoluciona de forma determinista mediante dos ecuaciones de movimiento: la ecuación de Schrödinger, la cual se encarga de determinar la evolución de la función de onda, y una ecuación de movimiento adicional, la *Ecuación Guía*, la cual determina las trayectorias y velocidades de todas las partículas del sistema en consideración. En este caso, los valores obtenidos tras una medición están bien definidos debido a que la posición de todas las partículas, incluidas las del aparato de medición (y la configuración macroscópica del registro del aparato), se describen de forma completa mediante el estado del sistema y de forma determinista mediante las ecuaciones de movimiento. Al negar (1) y afirmar (2) y (3), se ha resuelto el problema planteado. En efecto, esta propuesta permite que una medición pueda considerarse como un proceso físico indistinguible de los demás, puesto que aunque la función de onda no es capaz de especificar completamente las propiedades de las partículas individuales, la posición de las partículas (que se han incorporado al estado del sistema) hace posible su descripción. Así mismo, esta propuesta describe un mundo cuántico que reproduce el mundo observable mediante extensiones macroscópicas, donde las predicciones acerca de los sistemas individuales del primero son probabilísticas en un sentido muy distinto a la *MCE*. En esta teoría, las probabilidades asociadas a las predicciones de un sistema individual son epistémicas, en el sentido de que, a falta de un conocimiento completo de la posición inicial de las partículas (por razones que serán discutidas desde distintas interpretaciones), la predicción de su evolución sólo es accesible en función de su probabilidad, teniendo en cuenta que la teoría es, en principio, determinista. En la literatura, al conjunto de teorías que propone una solución de esta forma se le denomina *Teoría Cuánticas Bohmiana* (*TCB*).

Ahora bien, al considerar otras posibilidades del argumento que se presenta arriba, es decir, la posibilidad de negar que la ecuación de Schrödinger sea la ecuación de evolución del sistema o que existan resultados de mediciones bien definidos, entonces emergen teorías de diferente índole, ampliamente conocidas como *Teorías del colapso objetivo* y *Teorías de muchos mundos*, respectivamente. A continuación se describirán las primeras brevemente (véase en [Ghirardi, 2016]).

A diferencia de la teoría ortodoxa, las teorías del colapso objetivo asumen la existencia del colapso de la función de onda como un proceso real y objetivo que debe ser descrito adecuadamente por la teoría en consistencia con la evolución unitaria y lineal del estado en ausencia de mediciones. Para ello, se ha propuesto, salvo variaciones y refinamientos, modificar la ecuación de Schrödinger con un término estocástico no lineal, lo que implica que la evolución del estado del sistema pueda ser indeterminista en ciertas condiciones físicas específicas. Esta modificación permite, sobre la base de un modelo dinámico que se asume que gobierna cualquier proceso natural, reproducir todos los fenómenos microscópicos que predice la *MCE* y los fenómenos macroscópicos que gobierna la *MC*. En la ausencia de mediciones, la evolución del sistema evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger estándar, sin ninguna diferencia formal y predictiva con la *MCE*. No obstante, al efectuar una medición, poco a poco el término estocástico predomina, lo que implica una modificación a la evolución del estado, que en presencia del aparato de medición, se encuentra inicialmente en una superposición macroscópica de posibles estados del sistema. Esta modificación es tal que el estado final resulta ser uno de los paquetes de la superposición, aquél que está asociado al valor de la propiedad que se ha medido. Esta transición entre la evolución lineal, unitaria y determinista en ausencia de mediciones y una evolución no lineal, estocástica e indeterminista es, en efecto, una transición suave y gradual entre el mundo microscópico y el mundo macroscópico. De este modo, para que la teoría sea consistente con esta transición gradual, debe de determinar la manera en que el mecanismo del colapso puede hacerse más efectivo en tanto que la descripción tiende más al dominio macroscópico. Asumiendo que la base privilegiada es el de la posición, las teorías de colapso objetivo describen procesos estocásticos de localización espontánea. Es decir, en un sistema de N partículas, la evolución del estado es tal que cada cierto tiempo la función de onda colapsa al paquete asociado a una distribución de partículas objetivas bien localizadas en el espacio con una probabilidad de ocurrencia bien definida. Sin embargo, entre más partículas tenga el sistema (cuando N aumenta), esta probabilidad aumenta, lo que implica que en un sistema macroscópico de partículas bastante numeroso, el colapso termina siendo muy probable para tiempos considerablemente cortos. Esto explica que en los procesos de medición (cuando se tiene un número de partículas considerable y que componen al sistema y al aparato de medición), el colapso siempre ocurre. De este modo, todas las teorías de colapso objetivo comparten algunos elementos en común sin dejar de advertir algunas diferencias significativas entre sus posibles interpretaciones[27]. Estas teorías tienen la virtud de describir sistemas físicos individuales que comprenden sistemas de partículas. Así mismo, también describen adecuadamente procesos estocásticos por medio de la evolución indeterminista de vectores de estado asociados únicamente a la posición de las partículas, y finalmente describen adecuadamente la transición gradual entre la evolución determinista en sistemas microscópicos y la evolución indeterminista en sistemas macroscópicos. Por último, las teorías de colapso objetivo son, por ahora, empíricamente equivalentes a la *MCE*. No obstante, a diferencia de la *TCB*, estas teorías han sido capaz de elucidar nuevas predicciones debido a que la modificación de la evolución del estado permite establecer diferencias respecto a las distribuciones de probabilidad que se pueden definir.

Ahora bien, una vez que se ha dado un breve preámbulo teórico de estas teorías, faltaría elaborar una descripción análoga con respecto a la *Teoría de Muchos Mundos* (ver en [Everett, 1957]). No obstante, antes de proceder a realizar esta tarea, no se puede dejar de advertir algunos problemas de incompatibilidad entre esta teoría y las bases filosóficas que se han asumido en este trabajo. En efecto, se puede demostrar que esta última prueba ser incompatible con los criterios realistas que se han definido. La razón tiene que ver con que en la teoría de Muchos Mundos la función de onda asociada al aparato de medición se encuentra en una superposición macroscópicamente distinguible, en donde cada resultado permitido vive, literalmente,

[27] Entre sus interpretaciones, se encuentran las teorías de colapso objetivo que asumen la existencia de la función de onda multidimensional, en términos de la cual se determina el estado del sistema, y los enfoques que asumen una ontología primitiva tridimensional, entre las cuales se encuentra la densidad de masa y los flashes. Así mismo, la presencia de términos escolásticos involucra a su vez nuevos parámetros que a la luz de una interpretación adecuada, permite evidenciar nuevas contantes naturales.

en un mundo concreto. Según [Maudlin, 1995], al asumir esta interpretación se sigue que (3) no es correcto, es decir, no existe un resultado bien definido después de una medición en virtud de que dicha medición se efectúa en diferentes mundos, cada uno de los cuales discierne un valor particular de la propiedad medida. En efecto, esta interpretación afirma que existen múltiples resultados bien definidos en un universo pluralista. Esto permite inferir que la tesis realista que se quiere defender, profundamente comprometido con una Metafísica monista, sea incompatible con la interpretación de Everett. No obstante, es posible formular y dar una salida al mismo problema al asumir otros criterios realistas que puedan ser consistentes con esta teoría, pues nada indica que la caracterización del realismo científico que se ha empleado en esta sección sea una condición necesaria para el planteamiento y solución del problema de la medición. De esta manera, aunque la caracterización filosófica del problema de la medición empleada aquí haga a un lado de forma explícita a la interpretación de Muchos Mundos, un posible resultado que prueba ser relevante en esta discusión corresponde a que el problema de la medición podría tener bases filosóficas más liberales al poder resolverse al asumir una tesis realista más general a la empleada aquí, y que tomara en cuenta una Metafísica pluralista como la que se asume en esta interpretación.

Para concluir esta sección se hará un resumen y una breve discusión de lo que aquí se ha argumentado. En la literatura existen ejemplos concretos de nuevas teorías que han demostrado ser buenas candidatas para defender una tesis realista bajo sus fundamentos (respecto a su componente semántico) a partir de un compromiso por resolver el problema de la medición. Tal es el caso de la teoría Bohmiana y la teoría del colapso objetivo, la primera de las cuales se describirá en detalle posteriormente. No obstante, es importante advertir que para evaluar su compatibilidad con el realismo científico, incluyendo su componente epistémico, se suma la dificultad de determinar tanto el estatus de cada uno de los términos teóricos que aparecen en dichas teorías como también precisar el acceso epistémico a dichos elementos. Por ejemplo, teniendo en cuenta esta labor, conceptos que se han usado y definido en *MCU* como es el caso de la función de onda, la probabilidad o la medición, han jugado un papel ambivalente en todas las teorías e interpretaciones existentes. Naturalmente se les ha definido de acuerdo a si estos corresponden a elementos fenoménicos (observables), elementos reales (ontológicos), elementos epistémicos (en virtud de su contribución al saber), o en el caso mas diferente, como entes artificiales sin contribución epistémica u ontológica. Respecto a este punto, es un hecho que dentro del contexto de la confirmación y elección teórica la interpretación de las teorías científicas ha engendrado diversos problemas de índole epistemológico. Por esta razón, aunque el entendimiento de la *MCU* a veces se reduce a una labor concerniente a su carácter semántico, a continuación se verá que el realista cuántico no puede ser tan optimista frente al componente epistémico que lo define.

7.2. La Dimensión Epistemológica: Los Límites de la Física

Considérese de nuevo la conversación entre Bob y Alicia. Recuérdese que uno de los cuestionamientos de Bob respecto a la postura realista de Alicia tenía directamente relación con dos condiciones, uno de

índole semántico y el otro epistemológico. La primera condición consistía en que para adoptar una tesis realista es necesario determinar una correspondencia entre el lenguaje empleado por las teorías científicas y el mundo al que refieren, mientras que la segunda, aunado a su carácter confirmativo, demandaba asumir la veracidad del conjunto de proposiciones teóricas de este lenguaje. Para retomar el hilo de la argumentación, se dará una introducción breve respecto a estas dos condiciones.
Para algunos filósofos de la ciencia, la principal labor del científico es construir teorías predictivamente exitosas que puedan abonar al conocimiento del dominio que investigan. A este respecto, la búsqueda de una interpretación clara y empíricamente adecuada de estas teorías ha jugado un papel central para dar cuenta de las primeras dos componentes del realismo: su aspecto metafísico y semántico. No obstante, más allá de la semántica, el realista está convencido de que es importante evaluar la veracidad de dichas interpretaciones, o bien dicho, especificar las condiciones bajo las cuales las proposiciones teóricas sean aceptadas como aproximadamente verdaderas (en el sentido correspondentista de la verdad). Bajo la suposición de que el mundo se constituye de objetos y propiedades, la única conclusión a la que se ha llegado es que la mayoría de las teorías documentadas en la historia de la ciencia encaran dos desafíos realistas de naturaleza epistemológica: el problema del cambio teórico, formalmente caracterizado mediante la *MIP*, y el enigma de la interpretación, que comprende al *PSD* en todas sus variantes conocidas. A continuación y en el orden establecido, se dará una breve explicación sobre cada uno de estos desafíos en un contexto general. En secciones posteriores la discusión se restringirá a las teorías de la Física contemporánea, incluyendo la *MC*, la *MCU* y la *RE*.

7.2.1. En Búsqueda de Continuidad

La abducción es un tipo de inferencia y razonamiento que consiste en ofrecer o determinar una hipótesis para explicar las posibles razones de ocurrencia de un hecho concreto. También conocido como 'inferencia a la mejor explicación', dicho razonamiento juega un papel central en este trabajo al ser, quizá, una justificación razonable de las tesis realistas en función del éxito predictivo que las teorías científicas ostentan. Para un realista el éxito predictivo no es un milagro de la ciencia, sino que tiene su fundamento en el hecho de que las proposiciones de las teorías científicas son aproximadamente verdaderas [Putnam, 1981]. En otras palabras, la explicación mas razonable al éxito predictivo de una teoría, tal vez, la que nos permite conservar un mayor número de intuiciones y compromisos filosóficos, la provee el realismo científico. En este sentido, si un compromiso realista supone ser la mejor explicación al éxito predictivo de todas las teorías físicas contemporáneas que poseen dicha virtud entonces, por definición, cualquiera de estas teorías, que operan en ciertos dominios restringidos, deberían ser candidatos convincentes para ofrecer una imagen lo más cercana posible a la semblanza del mundo real [Psillos, 1999]. Sin embargo, bajo las bases metafísicas de un realismo estándar acerca de objetos y propiedades, parece que si se tomaran en cuenta todas las teorías exitosas que se han desarrollado hasta el momento, entonces se presentaría un problema de incompatibilidad entre las interpretaciones de cada teoría. Por ejemplo, aunque existen diferentes reglas de correspondencia entre la *MC* y la *MCU* (aproximaciones, reglas de cuantización, límite de propiedades, etc.), la imagen del mundo que esboza cada una de estas teorías parece ser muy diferente y hasta contradictoria, o mejor dicho, su ontología es inconmensurable [Worrall, 1989]. Las partículas clásicas son diferentes de las partículas cuánticas –si es que un objeto como el de una partícula cuántica puede definirse de manera apropiada–, pero también estas entidades son en principio muy diferentes a los objetos relativistas, debido a que, en este caso, pueden existir diferentes eventos en el espacio-tiempo que pertenecen al mismo objeto[28]. Tomando en cuenta este ejemplo, se puede advertir que existen diferentes interpretaciones asociadas a diferentes teorías, cada una de la cuales corresponde a un dominio en particular. En este sentido, si el realista científico pretende ser la mejor explicación al éxito predictivo, faltaría determinar cuál es la imagen única del mundo que se puede sustraer de diferentes teorías con dicha virtud predictiva, tomando en cuenta que cada una se interpreta de manera diferente.

Ahora bien, las bases en las que se fundamenta este problema de inconmensurabilidad son: i) la suposición de que cualquier interpretación asume la existencia de objetos y propiedades; y ii) el argumento del nomilagro (*ANM*). Dicho de otro modo, para evitar dicho problema de inconmensurabilidad y salvaguardar una tesis realista es necesario negar (i), (ii), ó ambas. Sin embargo, de la misma forma en que, a primera vista, no existen razones suficientes para negar (i), tampoco las hay para desvincular al *ANM* del realismo científico. Después de todo, el *ANM* es un pilar fundamental de esta tesis filosófica. Para formalizar este razonamiento, se ha propuesto un argumento inductivo, llamado la *MIP*, con el que se trata de demostrar que la historia de la ciencia brinda suficiente evidencia de que el realismo científico (como consecuencia del *ANM*) es insostenible. Este argumento se resume de la siguiente manera:

> Premise 1: Entity a, posited in historical period p_1, was subsequently agreed not to exist.
>
> Premise 2: Entity b, posited in historical period p_2, was subsequently agreed not to exist.
>
> Premise 3: Entity c, posited in historical period p_3, was subsequently agreed not to exist.
>
> Premise N: Entity i, posited in historical period p_n, was subsequently agreed not to exist.
>
> (Inductive) Conclusion: The entities posited today will subsequently be shown not to exist.[Laudan, 1981]

En pocas palabras, según la historia de la ciencia, la creencia en la existencia de objetos en función del éxito predictivo de una teoría no puede establecerse debido a que, a la luz de nuevas observaciones, algunas entidades que en algún periodo histórico se asumieron como reales fueron abandonadas en un momento posterior. De manera inductiva se puede inferir que, a causa de un posible abandono, no hay razón suficiente para creer en la existencia de las entidades que actualmente son responsables del éxito predictivo de las teorías científicas [Psillos, 1999]. Un ejemplo muy conocido en la literatura es la transición entre la teoría de Fresnel y la teoría electromagnética de Maxwell. En ambos casos, tanto la hipótesis de la existencia del éter como la realidad de los campos electromagnéticos son compromisos ontológicos que pudieron ser considerados en su momento como los responsables del éxito predictivo de cada teoría. No obstante, ninguna teoría contemporánea exitosa refiere a la hipótesis del éter. Aunque la teoría de Fresnel es empíricamente

[28] En la literatura es frecuente ver que los objetos que se definen en un dominio relativista son *Eventos* o puntos espacio-temporales de una variedad de cuatro dimensiones con métrica de Minkowski.

exitosa respecto a un dominio restrictivo –que se satisface para materiales dialécticos y frecuencias ópticas–, la hipótesis del éter fue desterrada con el auge del electromagnetismo [Worrall, 1989, Saatsi, 2005]. Otro ejemplo asociado a este tipo de problema también se puede encontrar en el contexto de la *MCU*. Esto debido a que su dominio predictivo difiere con el de otras teorías, como es el caso de la *MC* y la *RE*. A raíz de que una serie de anomalías de la teoría clásica fueron reveladas por algunos experimentos, la comunidad científica de la época se vio en la necesidad de transformar el marco teórico construido por las teorías de Newton y de Maxwell. Esto produjo, a su vez, un cambio en sus fundamentos, al estar obligados a re-definir conceptos como onda o partícula en el contexto de la *MCU*. En alusión a este y otros ejemplos, si se sabe que la *MC* es predictivamente exitosa en un contexto particular y ha probado ser falsa en dominios menos restrictivos, entonces nada impide inferir que las teorías contemporáneas más exitosas también serán descartadas al someterlas a pruebas experimentales en dominios por ahora desconocidos. Si se ha demostrado que los elementos inobservables de la teoría clásica, como son las partículas o las ondas, no refieren satisfactoriamente a los objetos del mundo microscópico, nada impide cuestionar que la ontología que se define en el contexto de la teoría cuántica (considerando cualquier tipo de teoría empíricamente equivalente que se haya privilegiado) tenga alguna correspondencia fidedigna con el mundo en otros dominios donde su poder predictivo sea insuficiente. Por lo tanto, el problema del cambio teórico puede ser considerado como un desafío para el realista. Sin una solución a la MIP, las teorías científicas no pueden ser consideradas buenos candidatos para proveer una imagen aproximada a la semblanza del mundo real.

Sin embargo, parece que el estado actual de la literatura filosófica ha dado un progreso considerable para evaluar este problema al elaborar distintos cuestionamientos a las premisas que lo sustentan (ya sea (i) ó (ii)). Tomando en cuenta que el *ANM* establece que el éxito predictivo de cualquier teoría se explica al especificar la veracidad de *todas* las proposiciones, en el sentido de que todas ellas refieren a objetos inobservables, es posible evitar la *MIP* por medio de estrategias que restrinjan el *ANM* de acuerdo a nociones de referencia más débiles, ó bien, privilegiando algunos referentes. Una propuesta en este sentido niega (ii) en su versión estricta y asume, de manera un poco radical, que los términos teóricos de todas las teorías científicas exitosas no refieren y que el compromiso realista debe ser con respecto a las causas que sus términos teóricos tienen en común [Hardin and Rosenberg, 1982]. Sin embargo, esta postura se ha criticado por ser muy liberal, en tanto que permite un sinnúmero de posibles causas, y porque desincorpora el contexto teórico en el que dichos términos teóricos se fundamentan [French, 2014, p.3]. Una estrategia más razonable podría ser negar (ii) en su versión estricta pero argumentar que un realista debería de creer en la veracidad de algunas proposiciones que hacen referencia a entidades que todas las teorías exitosas tienen en común. Siguiendo con esta idea, se puede establecer una noción particular de referencia (mediante nombres propios) que incorpore aspectos tanto causales como descriptivos de los objetos a los que refieren, y que resultan ser comunes a lo largo de diferentes dominios teóricos [Psillos, 1999]. Por ejemplo, se puede concebir una familia común de objetos (tanto de la teoría de Fresnel como de la teoría de Maxwell) a los cuales se haga referencia mediante distintas descripciones, ya sea por propiedades instanciadas en el éter, ó bien, por ondas electromagnéticas, respectivamente. Sin embargo, es pertinente preguntarse: ¿Cuales son estos objetos existentes? ¿Cuáles son los objetos en común a los que todas las teorías exitosas refieren?

Una posible respuesta es un realismo selectivo que pretenda acotar la ontología de objetos y propiedades sobre aquellos que estrictamente tienen un rol explicativo con respecto al éxito predictivo que ostentan todas las teorías en cuestión [Psillos, 1999, Saatsi, 2005]. No obstante, hasta el momento no se ha podido determinar un mínimo necesario que tenga dicha virtud explicativa (sólo se ha hecho para las que no la tienen) [Vickers, 2016]. Ahora bien, otra alternativa es también negar (i) en su versión estricta, y asumir que las propiedades por sí mismas existen excluyendo de la ontología a los objetos donde se instancian [Chakravartty, 1988]. Esta propuesta tiene la virtud de que no se compromete con la existencia de los particulares en los cuales las entidades fundamentales se instancian, por lo que garantiza una continuidad parcial entre diferentes teorías que refieren a las mismas propiedades. Sin embargo, en vista de algunos problemas de coherencia que se han identificado, otros filósofos han tomado más en serio el carácter relacional que fundamenta a esta propuesta, de tal modo que han adoptado una tesis que se compromete ontológicamente con el conjunto de propiedades relacionales que poseen los objetos, es decir con respecto a las relaciones que se satisfacen entre ellos. Esta estrategia resulta tener profundas consecuencias metafísicas al eliminar del espectro del conocimiento el reino de los objetos y sus propiedades monádicas [Worrall, 1989]. Ahora bien, debido a que esta tesis filosófica se caracteriza principalmente por tener una actitud escéptica con respecto a la existencia de objetos y propiedades, (i) en general no se niega, no obstante, asume que las únicas entidades cognoscibles por medio de la ciencia son las propiedades relacionales, y por lo tanto comprenden el único dominio de entidades referidas por las proposiciones teóricas (se niega (ii) en su versión estricta)[29]. Una de las virtudes que esta propuesta presume tener es su validez para casos muy concretos, al demostrar que el formalismo matemático común que subyace a diferentes teorías es invariante frente al cambio teórico. Por ejemplo, se puede demostrar que la teoría electromagnética se reduce a la teoría de Fresnel, en el límite para materiales dialécticos y frecuencias ópticas, lo que garantiza su éxito predictivo para este dominio restrictivo en virtud de que ambas teorías comparten una formulación en común [Saatsi, 2005]. De este modo, un compromiso realista con respecto a este formalismo evita la *MIP* por medio de la negación de (ii) en su versión estricta y permite articular una noción de estructura que es invariante frente al cambio teórico. Sin embargo, más allá de las virtudes que una tesis estructuralista de perfil epistémico puede llegar a tener, no es inmune a objeciones significativas dentro de un contexto realista. Por ejemplo, se enfatiza reiteradamente el vacío epistemológico que deja abierto respecto a los objetos y propiedades, tomando en cuenta que una tesis realista debe ser clara con respecto a lo que existe y lo que no existe. Bajo estas circunstancias, es necesario dar una respuesta razonable a dichas objeciones, o bien, proponer otra alternativa que tenga las mismas virtudes pero que pueda evitar el mayor número de problemas filosóficos. Hacia esta dirección se encaminará el contenido del presente trabajo.

Ahora bien, más allá de sugerir una salida al problema del cambio teórico mediante cambios significativos

[29] Aquí conviene hacer una distinción importante. Aparte de esta tesis filosófica, comúnmente conocida como *Realismo Estructural Epistémico*, se han propuesto otras de perfil estructuralista, tal como el *Realismo Estructural Óntico* (*REO*), que asume que el mundo no es nada más y nada menos que una estructura física y real, en detrimento de la existencia de los objetos y sus propiedades[French, 1988, Ladyman et al., 2007, French, 2014], ó bien, una actitud más moderada conocida como *Realismo Estructural Moderado*, que asume la existencia tanto de estructuras como de objetos y propiedades [Esfeld & Lam, 2008]. Es importante advertir que el presente trabajo gira en torno al realismo estructural de perfil óntico.

a la tesis realista que se ha definido aquí, es necesario hacer una pausa momentánea, y preguntarse acerca de la imagen del mundo que las teorías científicas más exitosas esbozan, tomando en cuenta un realismo estándar, es decir, que el mundo está poblado de objetos y propiedades. En otras palabras, ¿Cómo las teorías científicas describen los objetos y propiedades que constituyen al mundo? Para responder a esta pregunta es imprescindible dar solución a varios problemas que han sido objeto de discusión en distintos círculos de investigación filosófica y que ha sido bautizado con el nombre de *PSD*. Sin una solución satisfactoria a dichos problemas no será posible buscar ni encontrar el mensaje correcto que esconden las teorías científicas más exitosas. En seguida se presenta una introducción al respecto.

7.2.2. En Búsqueda del Mensaje Correcto

En lo que respecta a las teorías científicas, la búsqueda de una descripción del mundo real que sea suficientemente clara y empíricamente adecuada no ha encontrado una respuesta definitiva, lo que ha propiciado un distanciamiento considerable entre la Metafísica y la ciencia [Hawley, 2006, Monton, 2011, French, 2014, Fields, 2014]. Una de las razones que han propiciado dicho distanciamiento es que la mayoría de las teorías contemporáneas se construyen a partir de lenguajes abstractos, cuya interpretación resulta ser muy compleja y problemática, como es el caso de la teoría de grupos, la geometría diferencial, etc. Al establecer una distinción entre el mundo externo y las matemáticas[30] (u otro tipo de construcciones teóricas, por ejemplo, modelos icónicos), el realista científico está comprometido a determinar una interpretación del lenguaje en el que se construyen las teorías en correspondencia con el mundo real[31]. En este punto, también es importante preguntarse si existe una interpretación que se encuentre asociada de antemano a cada teoría científica y que se pueda conocer fidedignamente al "leer" directamente el contenido teórico de dicha teoría. Pero en vista de que el lenguaje en el que se construyen las teorías tiene ya, de por sí, un contenido semántico inherente, se puede advertir que existen presuposiciones metafísicas externas que representan un sesgo epistemológico al momento de establecer una interpretación del mundo en función de las teorías científicas. Esto tiene como consecuencia que una interpretación del mundo en función de la ciencia puede ser, a decir verdad, una interpretación arbitraria en función de elementos metafísicos que se han introducido a mano desde un principio [Sklar, 1981, p.131] [Monton, 2011, Fields, 2014]. A este respecto, es posible encontrar en la literatura un pasaje que refiere a lo anterior en el contexto del conflicto aparente entre la *RE* y el *Presentismo*:

> While our total world-view must, of course, be consistent with our best available scientific theories, it is a great mistake to read off a metaphysics superficially from the theory's overt appearance, and an even greater mistake to neglect the fact that metaphysical presuppositions have gone into the formulation of the theory, as it is usually framed, in the first place. [Sklar, 1981, p.131].

[30] Al establecer esta distinción, se dejan de lado concepciones pitagóricas y platónicas respecto a las matemáticas, que asumen que el mundo es un ente matemático *per se*. Una propuesta en esta dirección se puede encontrar en [Tegmark, 2007].

[31] Por el momento se deja abierta la posibilidad de asumir distintas nociones de correspondencia, como es el caso de la representación isomorfa, la similitud, etc.

Dejando de la lado estas cuestiones (a las que se volverá en la sección 11.1), y asumiendo que es posible inferir suposiciones metafísicas directamente de las teorías sin algún sesgo epistemológico, es posible identificar otro tipo de problemas concernientes a la interpretación. En efecto, todavía persiste una duda con respecto a si es posible elucidar una descripción única del mundo en función de las teorías científicas. Por ejemplo, en el ámbito de la Física se pueden identificar distintas formulaciones asociadas con una misma teoría, de la misma forma en que no se ha establecido una interpretación canónica en función de un formalismo. A este tipo de problemas (*PSD*) que tienen su base en la dimensión epistemológica del realismo, se les ha caracterizado en función de una falta de determinación respecto a la interpretación de la ciencia. Tomando en cuenta que este problema sugiere un distanciamiento entre la Metafísica y la ciencia, se espera que el realista científico tenga una respuesta razonable que pueda servirle de justificación. En efecto, resulta imprescindible atender a este problema si la actitud más apropiada respecto a la ciencia presume ser una incesante búsqueda del mensaje correcto. A continuación se pretende dar una breve descripción sobre el *PSD*, tomando en cuenta todas sus variantes y las soluciones que se han propuesto al respecto.

7.2.3. El Problema de la Sub-determinación

Mucho se ha escrito acerca de la sub-determinación de las teorías por la evidencia empírica, a tal grado que ha llegado a situarse como uno de los debates epistemológicos más significativos en la Filosofía de la Ciencia. Sin embargo, aunque ha propiciado que numerosas líneas de investigación se desarrollen[32], la sub-determinación plantea tanto problemas de naturaleza epistemológica en el contexto de la confirmación, como fuertes desafíos dentro del esquema estándar del realismo científico, ocupando un lugar central en el célebre debate entre el realismo y el antirealismo[33]. A pesar de que el entendimiento y los alcances de dicho problema pueden variar de acuerdo a diferentes propósitos epistemológicos[34], aquí sólo se tratará de esbozar una noción particular: la *Sub-determinación Contrastiva*[35] [Stanford, 2016], poniendo énfasis en sus implicaciones negativas para el esquema estándar del realismo científico.

A grandes rasgos, el problema consiste en que la evidencia empírica no es suficiente para creer en la veracidad de las proposiciones de una teoría en respuesta a dicha evidencia. Cualquier evidencia puede llegar a confirmar diferentes teorías mutuamente inconsistentes. Aquí, la consistencia entre teorías se entiende siempre en relación a las hipótesis o proposiciones que refieren exitosamente a los objetos con los que el realista se compromete ontológicamente. No falta un ejercicio de gran imaginación para concebir ejemplos con este tipo de sub-determinación en contextos que no son científicos. Si uno va al mercado y observa que en una bolsa de un kilo hay dos manzanas que no pesan igual, no es posible saber el peso de cada una de

[32]Por ejemplo, el empirismo contructivo de Van Fraassen, o bien, algunas propuestas que provienen de la sociología o la psicología [Hesse, 1980], y las críticas efectuadas por Paul Feyerabend e Imre Lakatos, respecto a disolución del carácter racional de la ciencia.

[33]Tal es el caso de la célebre tesis de Duhem-Quine [Curd & Cover, 1998, pp.257-320], así como las tesis antirealistas que le precedieron [Stanford, 2016].

[34]A parte de los artículo seminales de Duhem y Quine, las publicaciones de Van Fraassen [van Fraassen, 1991] y Larry Laudan [Laudan, 1981] son referencias importantes que tratan a la sub-determinación desde una perspectiva crítica.

[35]Kyle Stanford distingue entre la sub-determinación holista y la contrastiva, la primera de las cuales corresponde a la tesis inicialmente propuesta por Pierre Duhem, que hace alusión a la imposibilidad de confirmar una hipótesis aislada [Stanford, 2016].

ellas. Otro ejemplo más interesante es el siguiente: supóngase que se tienen dos hipótesis que predicen con un grado de exactitud equivalente la posición de una pelota en un tiempo determinado. La evidencia que se tiene es que la pelota comienza a moverse horizontalmente desde un punto A, enseguida pasa por un punto B a una velocidad máxima y finalmente se detiene en un punto C, para luego regresar con la misma velocidad máxima al punto B y llegar a un estado de reposo al punto inicial A. La primera hipótesis propuesta para explicar la evidencia corresponde al ingenio de un estudiante que ha supuesto que la pelota se mueve de esta manera debido a que se encuentra sujeta a un resorte invisible que se expande y se contrae. Para predecir exitosamente la evidencia ha tenido que usar las ecuaciones de movimiento de un oscilador armónico que le enseñaron en su curso introductorio de mecánica. Paralelamente, otro estudiante ha propuesto una segunda hipótesis que igualmente predice exitosamente la misma evidencia. Este último ha supuesto que la pelota ya no se mueve horizontalmente sino que lo hace en círculos sobre un plano que observa desde un lado, de tal forma que parece que la pelota se mueve en línea recta. Es decir, aunque el alumno supone que la pelota se mueve en círculos, el punto de vista desde el cual se le observa es tal que no existe una inconsistencia con la evidencia. Pero como el movimiento de un objeto en línea recta no es el mismo que en círculo, este alumno ha tenido que recurrir a sus libros de mecánica más avanzada para poder predecir la posición de la pelota que se mueve de forma circular y uniforme. Aunque en este caso la explicación es distinta, las predicciones de la evidencia terminan siendo las mismas.

Ahora bien, el *PSD* que se discute en el ámbito de la Filosofía de la Ciencia no es de carácter trivial. Al contrario, tiene su fundamento en ejemplos más complejos que concierne a la contraposición de interpretaciones de algunas teorías científicas que resultan ser empíricamente equivalentes. Aquí es importante mencionar que dos teorías son empíricamente equivalentes si predicen exactamente los mismos resultados a pesar de que sus hipótesis sean distintas. En esta situación, es posible imaginar situaciones donde dos o más teorías resultan ser empíricamente equivalentes pero que después de un lapso de tiempo difieren respecto a nuevas predicciones. Por otro lado, también es posible encontrar teorías que son, en principio, empíricamente equivalentes y que se construyen de forma tal que no difieren respecto a nuevas predicciones. En la literatura, particularmente en Duhem, estos casos corresponden a distintos tipos de sub-determinación: la débil y la fuerte, respectivamente [Stanford, 2016]. Al advertir que el segundo dictamina que diferentes teorías no difieren en cuanto a nuevas predicciones, se sigue que únicamente este tipo de sub-determinación plantea un problema serio para el realismo científico. El primer caso es un problema provisional que puede desaparecer con el auge de nuevas predicciones.

Un ejemplo más riguroso respecto a la discusión presente servirá para esclarecer la sub-determinación fuerte. En el contexto de la *MCU* existen teorías empíricamente equivalentes que refieren a diferentes objetos y plantean distintas interpretaciones. Tal es el caso de la *TCB*, la Teoría de Muchos Mundos y la Teoría de Colapso Objetivo. Se puede demostrar que las primeras dos están sub-determinadas por la evidencia empírica de manera fuerte mientras que la tercera lo está de manera débil respecto a las otras. Se puede concluir que mientras la sub-determinación entre la *TCB* y la Teoría de Muchos Mundos plantea un desafío para el realista, la Teoría del Colapso Objetivo es, después de todo, una excepción al estar abierta a nuevas (posibles) predicciones. No obstante, cada una de estas teorías tiene interpretaciones muy distintas que pueden plantear problemas análogos de sub-determinación al tener un formalismo en común con distintos compromisos metafísicos respecto a los objetos inobservables. Aquí conviene mencionar la posibilidad de articular otro tipo de sub-determinación al nivel de la interpretación: la *Sub-determinación de la Interpretación por la Teoría*. Como bien lo expone Van Fraassen:

> The phenomena underdetermine the theory. There are in principle alternative developments of science, branching off from ours at every point in history with equal adequacy as models of the phenomena. Only angels could know these alternative sciences, though sometimes we dimly perceive their possibility. The theory in turn underdetermines the interpretation. Each scientific theory, caught in the amber at one definite historical stage of development and formalization, admits many different tenable interpretations. [van Fraassen, 1991, p.491]

A este respecto, conviene ser más claro y tratar de definir lo que se entiende por interpretación y su relación con lo que es una teoría. Sin embargo, dado que esta pregunta resulta ser controversial, lo más apropiado sería retomar el sentido desde el cual este trabajo referirá a dicho concepto.

7.2.4. Antes Que Todo, ¿Qué es una Interpretación?

Siguiendo con la visión semántica de teorías (en términos de modelos)[36], se puede advertir que la distinción entre interpretación y teoría resulta ser un poco ambigua, dado que los modelos que constituyen a las teorías son, en efecto, una interpretación del leguaje lógico formal que satisfacen. Desde esta perspectiva, una teoría no consiste en un lenguaje formal con estructura puramente sintáctica que se le pueda adjudicar una interpretación a través de ciertas reglas de correspondencia con el mundo. Al contrario, todos los modelos son, en realidad, elementos extra-linguísticos con un contenido semántico preestablecido, incluyendo las estructuras matemáticas de las teorías físicas. Lo que se conoce como el formalismo de una teoría física es, en realidad, una familia de modelos que contiene la semántica de las estructuras matemáticas en cuestión. Por ejemplo, un concepto que usualmente se emplea en la Física contemporánea es la de una variedad diferenciable, la cual se caracteriza como una instanciación de un conjunto de proposiciones que, en términos de un lenguaje formal, determinan las reglas que posee un espacio topológico con una estructura diferenciable.

Ahora bien, aquí habría que hacer una distinción en torno a diferentes nociones de 'interpretación'. Una interpretación puede ser: i) una familia de modelos que satisfacen las proposiciones de un lenguaje formal; ó bien ii) la relación semántica indisociable entre los modelos de una teoría y el mundo. La primera noción es formal e identifica al lenguaje formal con una estructura semántica en términos de una familia de modelos (donde se incluye el 'formalismo' matemático de la teoría, sus modelos ontológicos, sus idealizaciones, aproximaciones, etc.). Mientras que la segunda noción especifica las condiciones de verdad de dichos modelos que, en caso de ser verdaderos, establecen una correspondencia de verdad tarskiana entre la teoría y la constitución del mundo externo (independiente de la estructura linguística). Como bien se ha mencionado arriba, la primera noción de interpretación no sólo tiene relevancia en el ámbito de las prácticas científicas

[36]En secciones posteriores 11.1.3 se hará un análisis a detalle de la visión semántica de las teorías que aquí se pretende asumir.

sino en el matemático también, mientras que la segunda remite a una manera de evidenciar los compromisos metafísicos de una teoría acerca de las entidades inobservables que se postulan, si esta última se asume como correcta. Desde esta última perspectiva, la relación estándar entre el formalismo de una teoría y su interpretación se puede entender, en la visión semántica, como la relación que existe entre los modelos de una teoría y el mundo externo (tanto observable como inobservable). Por motivos de rigor, en seguida se presenta una caracterización de la distinción entre formalismo e interpretación:

> Desde una tesis realista respecto a una teoría física T y el sistema físico S al que refiere, un formalismo de T se puede identificar como una familia de modelos que caracteriza a T, mientras que una interpretación es la yuxtaposición de: (i) una relación de inmersión entre los modelos empíricos y los datos obtenidos en los experimentos; (ii) la relación entre dichos modelos empíricos de naturaleza cuantitativa y las percepciones sensoriales de origen cualitativo; y (iii) la relación indisociable entre los modelos ontológicos y el mundo [Muller, 1997]

Nótese que lo que se conoce como 'el formalismo' de una teoría no es un conjunto de proposiciones de un lenguaje formal con un contenido estrictamente sintáctico, sino que remite directamente a la conflagración de una familia de modelos, donde se incluyen estructuras matemáticas, datos empíricos y compromisos ontológicos que, en el caso de que la teoría en cuestión resultara ser correcta, corresponderían a los modelos que establecen una relación indisociable con el mundo real. En resumen: lo que se conoce como el formalismo de la teoría es, después de todo, un conjunto de modelos donde se incluyen algunas afirmaciones acerca de supuestos objetos (putativos) inobservables que postulan las teorías. En cambio, lo que se conoce como interpretación, es la correspondencia de verdad entre dichas afirmaciones y la constitución del mundo, en el caso de que la teoría sea correcta. Ahora bien, con esta caracterización en mente, es posible expresar el problema análogo de sub-determinación de una manera precisa. En particular, es posible mostrar la manera en que la sub-determinación de la interpretación por la teoría es, en efecto, un resultado que hereda los problemas de la sub-determinación de la teoría por la evidencia sin que lleguen a ser equivalentes. En seguida se expondrán sus diferencias y, a partir de ellas, también se determinarán sus similitudes.

En vista de estas observaciones, la diferencia entre ambos tipos de sub-determinación no yace en función de los lenguajes lógico-formales disponibles ni de los compromisos metafísicos epistémicamente accesibles por medio de las teorías científicas. Al contrario, el distanciamiento entre estas formas de sub-determinación yace en una distinción entre elementos metafísicos que ha servido para respaldar una tesis realista de corte selectiva: la distinción entre las *afirmaciones acerca de objetos y propiedades inobservables* que existen según la teoría y las *afirmaciones metafísicas* que se hacen respecto a ellos. Debido a que esta distinción se usará en varias partes de este trabajo creo necesario dar su definición precisa. A grandes rasgos, las primeras son enunciados que, a la luz de un razonamiento abductivo, explican el éxito predictivo de la teoría, mientras que las segundas aluden a cuestiones de índole estrictamente metafísico que, en principio, no tienen consecuencias significativas en relación a las predicciones de la teoría. La base normativa de dicha distinción tiene su origen en un criterio de dispensabilidad respecto a la efectividad de los compromisos metafísicos para explicar el éxito predictivo de cualquier teoría.

> Suppose that H together with another set of hypotheses H_0 (and some auxiliaries A) entail a prediction P. H indispensably contributes to the generation of P if H_0 and A alone cannot yield P and no other available hypothesis H^* which is consistent with H_0 and A can replace H without loss in the relevant derivation P. [Psillos, 1999, p.110]

Con base en este criterio, es posible asociar la distinción entre *afirmaciones acerca de objetos y propiedades inobservables* y *afirmaciones metafísicas* con la distinción entre las hipótesis indispensables y las dispensables. En efecto, si se asume un realismo científico y se afirma que un conjunto de proposiciones de una teoría refiere a objetos inobservables existentes (en caso de ser verdaderas), entonces por el criterio de dispensabilidad existe un mínimo de hipótesis de la teoría que son indispensables en tanto que la constitución del mundo se representa o se "lee" directamente de una parte del contenido teórico. El resto de las proposiciones resultan ser, después de todo, dispensables. Así mismo, es evidente que si se habla acerca de dichos objetos por otros medios donde no se incluyan las proposiciones teóricas, entonces las hipótesis en cuestión resultan ser dispensables en tanto que la constitución del mundo no se representa por la teoría sino por instrumentos metafísicos independientes de ella.

Tomando en cuenta estas observaciones y definiciones, se puede decir que el caso estándar de sub-determinación consiste en la contención entre hipótesis que hablan de manera distinta acerca de los objetos inobservables que postulan las teorías científicas pero que, en principio, explican el éxito predictivo de la teoría en cuestión. Mientras que el segundo caso, consiste en la confrontación entre diferentes posturas metafísicas que especifican la naturaleza de dichos objetos inobservables que no contribuyen de manera directa a explicar el éxito predictivo de la teoría, sino al entendimiento y esclarecimiento de las características constitutivas de dichos objetos. Por ejemplo, el primer caso contempla la contención entre diferentes leyes que reproducen la misma evidencia, como es el caso de la Teoría del Colapso Objetivo y la *TCB*. Por otro lado, el segundo caso muestra la incompatibilidad entre diferentes formas de interpretar a las leyes y si los objetos inobservables a los que se refieren estas últimas son partículas con propiedades extrínsecas ó intrínsecas, campos ondulatorios, etc.

Ahora bien, aunque su distinción sea necesaria, ambos tipos de sub-determinación comparten un rasgo de indeterminación respecto a la interpretación. En efecto, ambos remiten a la incompatibilidad entre distintas hipótesis acerca de los objetos inobservables que postulan las teorías científicas, ya sea por medio de afirmaciones sobre su comportamiento, ó bien, sobre su constitución metafísica. Después de todo, la distinción entre hipótesis indispensables y dispensables es de naturaleza estrictamente metafísica, por lo que ambos tipos de sub-determinación sólo tiene sentido si se asume la existencia de objetos inobservables y la correspondencia indisociable entre estos últimos y los enunciados verdaderos.

Para concluir, la sub-determinación estándar está directamente relacionada con la incompatibilidad entre diferentes familias de modelos (que hemos llamado 'formalismos'), en cada una de las cuales se incluyen modelos matemáticos y ontológicos (donde se habla en torno a objetos inobservables), excluyendo con ello los modelos empíricos que tienen en común. Por el contrario, la sub-determinación de la interpretación por la teoría tiene directamente relación con las especificaciones que se hacen acerca de la constitución metafísica de dichos objetos para establecer una correspondencia más clara entre el modelo ontológico correspondiente y el mundo externo.

7.2.5. Algunas Frustraciones en Torno al Problema de la Sub-determinación

Ahora bien, con el motivo de respaldar un realismo científico respecto a la Física, es importante preguntarse si es posible prescindir del *PSD* en todas sus variantes existentes. En esta labor, uno debe encarar otro tipo de problemas epistemológicos directamente relacionados con la confirmación y la elección teórica. En particular, se presenta la necesidad de elegir el formalismo más apropiado, o bien, la interpretación correcta de la teoría mediante criterios meta-empíricos que trasciendan el espectro experimental. Así surgen preguntas como las siguientes: ¿cuál de las teorías empíricamente equivalentes es la correcta? ¿Cómo decidirse por alguna de ellas? ¿Cuáles son los criterios racionales, si es que existen, para elegir una de varias teorías, o bien, interpretaciones?

Para dar alguna respuesta a esta pregunta es importante distinguir los tipos de sub-determinación que se han identificado aquí. A continuación se abordará el problema estándar de sub-determinación por la teoría, y posteriormente el que compete a la interpretación por la teoría.

En el contexto del realismo científico estándar, una de las objeciones más conocidas al problema estándar de sub-determinación apela a algunas virtudes epistémicas que ostenta la interpretación de una teoría, como la heurística en la novedad predictiva, la simplicidad, la naturalidad y el sentido común, las cuales han formado parte de las creencias habituales de los físicos al momento de justificar sus teorías. Sin embargo, estas virtudes han suscitado severas dudas en relación al carácter racional de la ciencia. En efecto, una definición satisfactoria de lo que pretende ser una virtud de este tipo tiene que evaluarse de acuerdo a ciertos criterios racionales que tengan alguna relación con la verdad. Desafortunadamente, una revisión exhaustiva de la literatura prueba que la elección de estos criterios no es definitiva. La principal objeción a este tipo de sub-determinación proviene de que las virtudes que trascienden el aspecto empírico de la evidencia no son suficientes para la elección de un formalismo sobre otro. En efecto, los criterios en los que se fundamentan dichas virtudes siempre tendrán una limitante dado que no pueden contribuir al propósito que se les adjudicó desde un principio, es decir, de ser candidatos a la verdad. Otro problema relacionado con este tipo de objeciones tiene relevancia con respecto a la relación que existe entre diferentes virtudes teóricas, como puede ser la correlación negativa que se puede apreciar entre la novedad predictiva y la simplicidad en algunos casos específicos. De esta manera, al justificar un pilar de la sub-determinación mediante una virtud de esta naturaleza, puede que se niegue con ello la importancia de otras virtudes que podrían tener alguna relevancia con respecto a la teoría en cuestión.

Ahora bien, respecto a la sub-determinación de la interpretación por la teoría, dado que el fundamento filosófico de este problema es estrictamente metafísico, al pretender evaluar y justificar un pilar de la sub-determinación en cuestión es imprescindible apelar a criterios metafísicos. Tomando esto en cuenta, hay quienes pretenden devaluar la importancia y el fundamento que subyace a este tipo de sub-determinación por tratarse de un caso poco interesante y de una simple especulación metafísica. Sin embargo, a mi parecer, creo razonable y necesario dar una respuesta a este último de acuerdo con la premisa de que un entendimiento sobre los fenómenos que se estudian por la ciencia es necesario si es que se quiere creer en lo que las teorías dicen acerca del mundo real. En este punto, conviene apelar de nuevo a la abducción, a razón de que el poder explicativo de cada interpretación desempeña un papel muy importante con respecto a su contribución al entendimiento. En este contexto esta forma de razonamiento considera que si se tienen distintas hipótesis que, a la luz de la evidencia empírica son equivalentes, la solución más adecuada al problema de la sub-determinación apunta a elegir aquella que explique de mejor manera dicha evidencia. Por ejemplo, si uno estuviera leyendo esta hoja impresa y se percatara de que tiene una mancha de café, se lograría inferir que en un momento anterior alguien vertió parte de su café sobre ella. Sin embargo, esta estrategia tampoco está libre de objeciones. Siguiendo con el ejemplo, dicha hipótesis no implica lógicamente el hecho de que dicha hoja tenga una mancha de café, pues bien pudo pasar que una cafetera próxima al papel explotó u otro hecho posible aunque poco plausible de acuerdo con el contexto que se ha planteado. De éste y otros ejemplos se puede corroborar que, aunque la abducción juega un papel común en las inferencias que se hacen tanto en la vida cotidiana como en las actividades más especializadas, existen argumentos razonables que justifican cada pilar de la sub-determinación y que son compatibles con el mismo formalismo, y por ende, con la misma teoría. Para tener más claro este punto importante, en secciones posteriores se analizará un caso particular (la *TCB*) y se corroborará que la sub-determinación metafísica ahí presente es inevitable e inquebrantable.

Hasta aquí se han presentado distintos desafíos en contra de una tesis realista. El primero de ellos indica un problema semántico respecto a la correspondencia entre el lenguaje formal de la teoría y el mundo que representa. Como se ha mostrado a lo largo de esta introducción, este tipo de problemas pueden ser resueltos al modificar el formalismo mediante criterios que le competen a la Física. Desafortunadamente existen otro tipo de desafíos de naturaleza epistemológica que no han probado ser inmunes frente al realista científico. Por un lado, una salida al *PSD*, incluyendo todas sus variantes, contempla algunas virtudes teóricas como candidatos aptos para la verdad, ó bien, argumentos metafísicos que se relacionan con el poder explicativo. Por otro lado, una salida al problema del cambio teórico sugiere que los términos teóricos refieren a las causas, ó/y las propiedades ó/y los objetos ó/y estructuras que resultan ser comunes a todas las teorías y que pueden haber sido responsables de su éxito predictivo a lo largo de la historia de la ciencia. No obstante, aunque estas virtudes y cambios en los compromisos metafísicos de las teorías amparan al realista, no es claro que satisfagan todos sus requisitos epistemológicos. A continuación se discutirá una estrategia diferente, específicamente la propuesta estructuralista de perfil óntico, que se caracterizará y justificará en el contexto de algunas teorías físicas contemporáneas.

8. La Propuesta Estructuralista

A continuación se hará una revisión de algunas propuestas que, a mi parecer, pueden considerarse parte del *REO*. Esto es, se tratará de hacer una caracterización mínima de los requisitos necesarios que sustentan la mayoría de las propuestas con este perfil metafísico, tomando en cuenta sus categorías metafísicas, semánticas y epistémicas.

8.1. Una Posible Salida Estructural

En vista de los problemas semánticos y epistemológicos que se discutieron en la sección anterior, es imprescindible articular una postura filosófica que pueda, en la medida de lo posible, amparar al realista en la búsqueda de una continuidad teórica y una interpretación clara y empíricamente adecuada. Para ello, se investigará la posible legitimidad de una tesis estructuralista de perfil óntico en este contexto, y a partir de los resultados obtenidos, se propondrá una caracterización mínima de dicha tesis con base en una distinción metafísica, semántica y epistemológica. A razón de que su poder predictivo es considerable, esta discusión se restringirá al contexto de la Física contemporánea.

En lo que concierne al problema del cambio teórico, hay quienes argumentan que no hay suficientes razones para contender a favor de una tesis realista cuando se tiene una variedad de teorías parcialmente exitosas en dominios diferentes pero con interpretaciones incompatibles. Esto con la suposición metafísica de que el mundo se compone de objetos y propiedades bien definidas. No obstante, esto no implica que no se pueda evitar la *MIP* mediante otro tipo de suposiciones metafísicas. A este respecto, el *REO* es una tesis filosófica que reivindica la creencia de que las teorías exitosas contribuyen al conocimiento del mundo externo, pero que se constituye únicamente mediante una red de relaciones fundamentales entre objetos y propiedades, sin que sea necesario creer en la existencia de estos últimos. Específicamente, esta tesis consiste en la creencia de que las proposiciones teóricas que configuran las estructuras teóricas de las teorías son aproximadamente verdaderas, en el sentido de que existe una correspondencia aproximada entre la estructura del mundo y el componente teórico y estructural (que es común a al formalismo que subyace a diferentes teorías). En efecto, contrariamente al espectro discontinuo de los objetos y propiedades, este componente estructural se puede interpretar como una entidad autónoma que se preserva a lo largo de diferentes dominios, y el cual desempeña un rol explicativo con respecto al éxito predictivo que ostentan las teorías científicas dentro de su dominio. En consecuencia, el *REO* evita la *MIP*, enfocándose únicamente en los elementos estructurales de las teorías científicas y negando la versión estricta del *ANM* por medio de un compromiso ontológico con respecto al mínimo de estructuras teóricas que son indispensables de acuerdo con el criterio de dispensabilidad de Psillos.

Ahora bien, retomando sus bases metafísicas estructurales, esta estrategia se puede considerar como una consecuencia e instanciación metafísica de lo que en algún momento se denominó *Plasticidad Heurística*. Esta noción refiere y enfatiza la plasticidad y continuidad inherente en los aspectos estructurales del formalismo que subyace a las teorías científicas. Una referencia bajo estos términos se puede encontrar en [Saunders, 1993], donde se presenta una discusión metodológica de la tesis de correspondencia de Post que, restringiéndose el dominio de la Física, se puede caracterizar de la siguiente manera:

> [...] what is taken over from preceding theories is not only those laws and experimental facts which are well-confirmed, but also 'patterns' and 'internal connections', that in this way the successor theory accounts for whatever success its precursor enjoyed" [Saunders, 1993, p. 295]

A este respecto, Post comenta:

> "[. . .] will in fact embody a good deal of the (lower) theoretical structure of the [precursor] theory." [Post, 1971, p. 229]

Habría que advertir que las virtudes que ostenta esta tesis filosófica tienen su fundamento en aspectos que difieren del realismo estándar, no sólo en cuanto a la posibilidad de evitar la *MIP*, sino también con respecto a la solución de otros problemas epistemológicos que conciernen a la interpretación (por ejemplo el *PSD*). Sólo basta con excluir a los objetos y propiedades de las categorías ontológicas, tal como lo hace el *REO*, para que la tesis de sub-determinación no sea válida, debido a que en dicho caso, diferentes hipótesis que son incompatibles (cuando refieren a objetos y propiedades) resultan ser equivalentes cuando refieren a las relaciones que se satisfacen entre ellos. Esto implica que las diferentes interpretaciones (acerca de objetos y propiedades) corresponden a diferentes formas de hablar acerca de una misma estructura. Por ejemplo, la hipótesis del éter, ó bien la hipótesis de la constancia de la velocidad de la luz, resultan ser dos formas de hablar de una misma estructura, descrita por medio de las leyes relativistas que abarcan a ambas formulaciones (las transformaciones de Lorentz). Desafortunadamente, es posible advertir la presencia de problemas de inconmensurabilidad y de interpretación al nivel del *OSR* que se heredan del realismo estándar. En otras palabras, es posible identificar un problema análogo a la *MIP*, así como también es posible presenciar el *PSD* en un contexto estructuralista. En esta coyuntura, es necesario identificar y resolver dichos problemas en términos de las nuevas características estructurales de *OSR*. En seguida, se pretende alcanzar dichos objetivos en el orden establecido:
Aunque el *REO* supone ser la mejor estrategia para evitar la *MIP*, este problema puede heredarse con la misma fuerza en un contexto estructuralista. Algunos escenarios que dan prueba de ello son las discontinuidades estructurales que ocurren a lo largo de la historia de la ciencia. Un ejemplo al que se recurrirá más adelante corresponde a la relación estructural que existe entre la simetría de la *MCU* y la de *RE*, en cuyo caso la segunda resulta ser una aproximación (a velocidades bajas) de la primera. En este caso, existen pérdidas estructurales que se traducen en cierto tipo de discontinuidades entre ambos dominios. En vista de este tipo de escenarios, se puede sugerir especificar directamente la estructura fundamental con la que el realista se compromete ontológicamente, y por ende, demostrar que, a pesar de este tipo de discontinuidades, existe un componente mínimo que se preserva a través del cambio teórico. Sin embargo, para que esta estrategia pueda realizarse correctamente se necesita identificar una estructura teórica que abarque parte del formalismo que subyace a cada teoría, de tal modo que sea lo suficientemente robusta y pueda explicar todas las predicciones de la teoría. Un paso importante en esta dirección se ha propuesto para el caso de la *MC* y la *MCU* [Thebault, 2016], donde se retoma los trabajos matemáticos de [Jordan & Sudarshan,

1961]. Estos últimos autores identifican una continuidad estructural entre ambas teorías al nivel del álgebra simpléctica que caracteriza a su formalismo. Sin embargo, existen algunos detalles que no han quedado del todo resueltos, sobre todo porque esta propuesta sólo es válida para casos particulares (Hamiltonianos cuadráticos). En un intento por generalizar este resultado, más adelante apelaré a la propuesta topológica de *GH*, donde se identifica una estructura simpléctica que se preserva en ambos dominios, pero esta vez, al nivel de los grupos abstractos.

Ahora bien, en lo que respecta a la interpretación, existen un par problemas que deben identificarse en el seno de una tesis realista y estructural: i) antes que todo, habría que asumir que el realista estructural esta obligado a concebir una interpretación a partir de estructuras teóricas relevantes. Sin embargo, para elucidar semejante interpretación, es necesario establecer y caracterizar el tipo de correspondencia que se satisface entre la estructura del mundo y las teorías que lo describen. Desafortunadamente no existe, en principio, una interpretación canónica de un formalismo (sin objetos ni propiedades) que pueda proveer una imagen clara del mundo en correspondencia con el lenguaje de la teoría [Jones, 1991]. Por ejemplo, en el caso de que la *MC* fuera correcta, no existiría una receta que pudiera sugerir una imagen nítida del mundo "a semejanza" de las ecuaciones de la formulación hamiltoniana. Esta semejanza podría estar mediada quizá por una noción de representación, ó bien, de similitud que es necesario especificar; por otro lado, ii) es posible evidenciar un problema de sub-determinación en un contexto estructural. En efecto, existen diferentes formulaciones de una misma teoría que difieren respecto a su contenido teórico pero que son indistinguibles con respecto a su contenido predictivo [van Fraassen, 1991, Ch. 4] [French, 2014, Ch. 2]. Por ejemplo, no existe un marco estructural privilegiado de la *MC*, como lo prueba la presencia de dos formulaciones aparentemente diferentes (la mecánica hamiltoniana y la lagrangiana), ó bien, la presencia de estructura matemática superflua dentro de la teoría de grupos[37] [Roberts, 2011].

Tomando en cuenta estas observaciones, parece que una tesis estructural presenta graves problemas en un contexto realista, pues no sólo persiste la dificultad de establecer una correspondencia precisa entre el formalismo y la estructura del mundo, sino que tampoco es posible interpretar dicho formalismo de manera única. No obstante, esto no implica necesariamente el fin del estructuralismo. En lo que respecta al problema de sub-determinación en cuanto al formalismo, el caso particular de la *MC* ha servido de ejemplo para proponer distintas estrategias para disolver los problemas realistas que se han asociado a esta indeterminación. Esto se ha hecho mediante la diferenciación de criterios epistémicos en la formulación hamiltoniana y lagrangiana, como es el caso de la naturalidad [Curiel, 2015], la fertilidad predictiva [Wallace, 2006], la simplicidad [North, 2009], o en todo caso, mediante criterios metafísicos [Musgrave, 1992]. De forma análoga al caso de la sub-determinación estándar, este razonamiento se ha generalizado para cualquier teoría científica que tenga distintas formulaciones empíricamente equivalentes. No obstante y sin entrar en detalles, existe una objeción estándar en contra de estos criterios epistémicos, o bien, metafísicos. Al asumir que son relevantes en virtud de una elección teórica, estos criterios son insuficientes debido a que su estructura epistémica es independiente de la verdad (de acuerdo a la teoría correspondentista). Por esta razón, se

[37]Por ejemplo, se ha demostrado que la teoría de grupos contiene estructura dispensable, en el sentido de que tiene elementos sin una contraparte física.

les ha considerado como criterios provisionales con presencia indiscutible únicamente en el estudio de las prácticas científicas [French, 2014, p. 33]. Además, aparte del problema de elección de una formulación, existe el problema de determinar una interpretación clara y precisa de esta última, tomando en cuenta que no hay una caracterización estándar que se le asocie a la correspondencia que existe entre el formalismo de la teoría y la estructura del mundo. Aquí es pertinente preguntarse acerca del tipo de correspondencia que se debe considerar, ya sea mediante una noción de verdad y correspondencia tarskiana, o bien, mediante una noción de similitud con otras características.

Dejando de lado estos criterios de confirmación teórica, existe otra manera de restringir las posibilidades interpretativas de las teorías y dar cuenta de las últimas observaciones por medio de dos estrategias mutuamente consistentes: i) demostrar explícitamente que existe una estructura matemática que es única y común a todas las formulaciones compatibles con una misma teoría [French, 2014, pp. 43-47]; y ii) definir y determinar la correspondencia entre la física y la matemática. Una evidencia a favor de la primera estrategia se puede encontrar de nuevo en el contexto de la *MC*. En efecto, se ha sugerido buscar aspectos en común que comparten tanto la formulación hamiltoniana como la lagrangiana mediante la elucidación de una estructura matemática unificada [Pooley, 2006]. Esto se ha podido realizar al tomar en cuenta que:

> [...] The space of initial data and the space of solutions share a common geometric structure—these spaces are isomorphic as symplectic manifolds. [Belot, 2006, p. 17]

Sin entrar en detalles, se puede decir que la formulación lagrangiana y la hamiltoniana son duales, pues una se expresa en el haz tangente de la variedad de configuración y la otra en el haz cotangente, lo que determina una relación de isomorfismo entre el espacio tangente y cotangente, ó bien, entre el espacio de las condiciones iniciales y el de las soluciones correspondientes. La relevancia de esta asociación matemática es que dicho isomorfismo se define en el haz de la variedad de configuración, la cual tiene una estructura simpléctica que unifica a ambas formulaciones [Belot, 2006]. Aquí habría que introducir un paréntesis para adelantar que dicha estructura simpléctica no sólo unifica a diferentes formulaciones de una teoría, sino que también se preserva frente al cambio teórico (al menos en lo que respecta a la *MC* y la *MCU*). Más adelante en la sección 10.4.3, se verá que una generalización relativista a esta estructura simpléctica servirá para dar una salida simultánea tanto al *PSD* como al problema del cambio teórico (a la *MIP*) bajo un domino más extenso, por medio de una caracterización e interpretación apropiada de su contenido matemático.

Ahora bien, con respecto a la segunda estrategia, se asumirá una noción de correspondencia de verdad tarskiana que se entiende en términos de una noción muy básica de "representación isomorfa". Desde esta noción, un compromiso realista con respecto a una estructura matemática tiene sentido al asumir que el mundo es una copia idéntica de la estructura matemática en las que se formula la teoría en cuestión. Aunque por el momento se dejarán de lado los aspectos que conciernen a la representación y su problemática en relación con el realismo científico, en secciones posteriores se retomará esta discusión (sección 10.1.1).

A modo de conclusión, se ha revisado una propuesta estructural que pretende dar solución a distintos problemas epistemológicos en un contexto realista (que difiere de la caracterización del realismo estándar que se caracterizó al inicio de este trabajo). Frente a un cuestionamiento acerca de la existencia y la descripción del mundo en su extensión, las teorías científicas más exitosas ofrecen una respuesta que se justifica en virtud de su éxito predictivo. Dicha respuesta consiste en contar una historia consistente acerca del mundo externo de acuerdo a una lectura apropiada de su formalismo. No obstante, debido a la presencia de problemas epistemológicos en las tesis realistas convencionales, se sugiere que la mejor lectura al respecto sea la de un realismo que asuma la existencia de una estructura que describe de manera parcial los confines del mundo físico, en detrimento de la existencia de objetos y sus propiedades. De manera más detallada, una tesis realista de esta naturaleza consiste en un compromiso ontológico con respecto a una estructura autónoma que se representa mediante un formalismo, cuyo cuerpo teórico presume ser común a la estructura que subyace a diferentes formulaciones de una teoría, y bien, que es continuo con diferentes teorías exitosas que difieren respecto a su poder predictivo. Así mismo, suponer la existencia de una estructura que se describe mediante un formalismo matemático presupone una noción de representación que, por razones que se verán más adelante, se caracterizará mediante un "isomorfismo" entre una entidad metafísica y una matemática. Sólo de esta manera, es posible corroborar que las teorías científicas ofrecen un mensaje correcto acerca del mundo, en función de cómo se estructuran las matemáticas.

8.2. Realismo Estructural Óntico

A grandes rasgos, el *REO* es una tesis realista que se fundamenta a partir de la evidencia histórica de una continuidad estructural frente al cambio teórico y la legitimidad de las teorías más exitosas de la ciencia para respaldar suposiciones metafísicas como la eliminación de los objetos y sus propiedades. En virtud de estos aspectos significativos, se puede elaborar una caracterización del *REO* a partir de ciertas distinciones filosóficas (en continuidad con la caracterización del realismo estándar), no sin antes restringir el dominio de investigación a las teorías matemáticas de la Física. Específicamente, el *REO* se puede definir por medio de: la suposición metafísica de que el mundo es una estructura autónoma que existe con independencia de la cognición humana en detrimento de la existencia de objetos y propiedades; la correspondencia semántica entre las teorías físicas exitosas y la estructura putativa del mundo, donde se establecen las condiciones de verdad de las proposiciones teóricas que tienen en común (la estructura teórica que subyace a dichas teorías); y la especificación de las condiciones epistemológicas bajo las cuales dichas proposiciones se acepten como aproximadamente verdaderas, en el sentido de que la estructura del mundo tenga una correspondencia aproximada con una estructura teórica y autónoma que se preserve bajo diferentes dominios e interpretaciones que se han investigado a lo largo de la historia de la ciencia. Ahora bien, a continuación se desplegará dicha caracterización con sus respectivos detalles:

(1) *La dimensión metafísica de* REO: El mundo es estrictamente una estructura autónoma independiente de la cognición humana.

(2) *La dimensión semántica de* REO: Las proposiciones del formalismo matemático común que subyace a las teorías más exitosas de la Física refieren y tienen valores de verdad, en el sentido de que representa de manera "isomorfa" la estructura a la cual refiere (independientemente si dicha estructura

corresponde a la real). A este respecto, se tienen dos condiciones que debe satisfacer su interpretación: i) *Claridad*: en primer lugar, este formalismo común debe constituirse en términos de un lenguaje estrictamente estructural. En segundo lugar, las teorías más exitosas de la Física (incluidas sus leyes y sus principios) deben expresarse en términos de dicho formalismo; ii) *Adecuación Empírica*: el mundo observable, es decir, los objetos macroscópicos, los dispositivos experimentales, y los fenómenos empíricos deben re-conceptualizarse en términos estructurales. Para ello, las ecuaciones de movimiento que corresponden a las teorías más exitosas de la Física deben derivarse igualmente de dicho formalismo.

(3) *La dimensión epistémica del* REO: Las proposiciones del formalismo matemático común que subyace a las teorías más exitosas de la Física refieren (aproximadamente) a la estructura del mundo externo y las proposiciones que lo constituyen son (aproximadamente) verdaderas. En el campo de la confirmación, se tienen dos condiciones: el i) *Potencial de Unificación*, que básicamente demanda que el formalismo del que se habla contenga y abarque a todas las formulaciones e interpretaciones compatibles con cada una de las teorías más exitosas de la Física, y de esta forma, evite el *PSD*; y el ii) *Potencial de Continuidad*, que pide que dicho formalismo se preserve frente al cambio teórico en detrimento del problema que se deriva de la *MIP*.

Una caracterización mínima sobre esta tesis filosófica tiene un propósito significativo. Es un hecho que algunas consideraciones generales sobre esta tesis filosófica han prevalecido en la literatura, sobre todo en relación a su justificación. Por ejemplo, gran empeño se ha puesto en la cimentación de las bases metafísicas que hacen alusión a un mundo de naturaleza estructural, en detrimento de los objetos y sus propiedades. No hace falta reiterar que estas bases metafísicas se articulan gracias a la insistencia de dar una respuesta a los problemas epistemológicos que desafían un realismo estándar basado en objetos y propiedades. Sin embargo, más allá de estas consideraciones de corte justificativo (que difieren en la mayoría de los casos), no se han analizado con suficiente rigor los aspectos interpretativos mínimos requeridos que conciernen a su caracterización, como es el caso de su claridad, adecuación empírica, unificación y continuidad. Ahora bien, si no se ha puesto suficiente atención a este aspecto, y por ello, no se ha planteado una caracterización robusta de esta tesis filosófica, supongo que por la misma razón, no se ha dado una respuesta a la pregunta: ¿Qué es y cuál es exactamente la estructura de la que se habla? A falta de una respuesta, no se ha encontrado una estructura matemática concreta que, bajo estos lineamientos, sea un candidato razonable para representar la estructura del mundo real. En efecto, uno esperaría tener suficientemente claro cuál es la estructura en la cual se fundamenta el compromiso realista del *REO*, de la misma forma en que uno desearía caracterizar de forma rigurosa y analítica el formalismo subyacente, y la manera en que este último permite una solución a los problemas semánticos y epistemológicos del realismo estándar. Sin embargo, en la literatura sólo es posible evidenciar estructuras matemáticas que presentan casos muy restringidos, y que en conjunto, pretenden sugerir una tesis realista que de por sí parece ser muy ambiciosa. Ejemplos de este tipo son las simetrías dinámicas que subyacen a la teoría de partículas elementales tal como *SU(3)* para la cromodinámica cuántica, o bien, *ISO(1,3)* para *RE*. En este sentido, no existe por el momento una imagen clara de cómo estas simetrías dinámicas son parte de una estructura más general, quizá en términos de una compleja red de relaciones y jerarquías. Pero si uno quiere adoptar una tesis realista de este tipo, es importante identificar una estructura matemática que pueda ser, en la medida de lo posible, lo más general en tanto que permita reconstruir el formalismo de todas las teorías contemporáneas exitosas de la Física, o al menos que tenga dicha finalidad.

Este trabajo estará destinado a cubrir parcialmente esta vacío que falta en el debate filosófico, en el que por una cuestión de coherencia, será justo y necesario que dentro de los límites que circunscriben a los dominios de la Física (en los cuales reposa una tesis realista de esta naturaleza), se incluya a todas las teorías exitosas e interpretaciones existentes, evitando con ello preferencias anticipadas hacia una en particular. Así mismo, también es importante especificar con claridad y formalidad la estructura con respecto a la cual se pretende ser realista, antes de penetrar en los aspectos justificativos bajo los cuales esta tesis se fundamenta. Ahora bien, como se verá a continuación esta tarea se podrá realizar parcialmente para el caso de tres teorías exitosas: la *MC*, la *MCU* y la *RE*. De este modo, el compromiso realista reposará únicamente en los límites de este dominio, con el cual se tratará de abarcar a todas las formulaciones e interpretaciones disponibles que pertenecen a este último. Habiendo asumido esto, creo que es muy importante advertir que, aunque se logre encontrar e identificar a dicha estructura parcialmente general, no será posible saber si en un estado de conocimiento posterior o diferente al que circunscribe el dominio de estas tres teorías, la imagen del mundo que la Física supuestamente interpreta terminará siendo muy diferente. Después de todo, el *REO*, entendido bajo los lineamientos de un *Realismo Metafísico*, supone que la hipótesis de existencia de una estructura independiente de la cognición humana se desvincula de la posibilidad de que se llegue a saber o a verificar. Esto implica que esta hipótesis es, a su vez, una aserción acerca del mundo de ayer, de hoy y el que se avecina en el futuro, lo que termina siendo un juicio inductivo que trasciende el espectro cognoscible. Pero si se advierte que dicha hipótesis tiene su origen en la evidencia histórica y la legitimidad de las teorías más exitosas de la Física que se han desarrollado hasta el momento, y particularmente, la que supuestamente gozan estas tres teorías, cualquier suposición metafísica que tenga su origen en todas o algunas de las teorías científicas de ayer y hoy, estará limitada por el continuo y renuente cambio teórico que las asecha. Aquí habría que enfatizar que la mayoría de los exponentes del *REO* se contraponen con el perfil regulativo de las tesis realistas convencionales donde su principal enfoque reside en la totalidad de la ciencia, y su base normativa y justificativa deviene del *ANM*, que engloba como objeto del discurso no a algunas, sino a todas las teorías científicas contemporáneas que gozan de gran poder predictivo. Sin embargo, a pesar de ello, la piedra angular que motiva y articula una tesis estructuralista es la presencia de problemas epistemológicos que se despliegan en la *totalidad* de la ciencia, me refiero al *PSD* fuerte y el que se deriva de la *MIP*. Desde este punto de vista, la visión "anti-regulativa" del *REO* sufre de un grave problema que consiste en que la evidencia histórica y la legitimidad de algunas teorías particulares que gozan de gran poder predictivo termina cargando consigo un peso reduccionista muy fuerte. Después de todo, bajo el argumento abductivo del no-milagro, esta tesis se compromete con elementos metafísicos que se reducen al perfil interpretativo de algunas teorías de la Física, y a partir de estos casos particulares, hace aserciones acerca del mundo real en su totalidad.

En vista de estas observaciones, creo pertinente modificar parcialmente la caracterización mínima que se ha hecho en torno a esta tesis filosófica, incorporando un elemento pragmático dentro de su cuerpo conceptual. A grandes rasgos, creo que a diferencia de un realismo metafísico, el *REO* supone la hipótesis metafísica más razonable (parcialmente verdadera) que se puede hacer desde un dominio particular de conocimiento, en el que se incluyen las teorías más exitosas de la Física que se han desarrollado hasta el momento. Por supuesto que para caracterizar estas ideas de una forma más adecuada, es necesario entender la condición de racionalidad que se menciona y aclarar el significado de una noción de verdad parcial diferente a la de Tarski. Ahora bien, como esta nueva sugerencia no será relevante sino hasta que se hable acerca del componente epistemológico, creo conveniente hacer una pausa al respecto y dejar esta discusión para ese momento (en 11.1). Por ahora, dejaré intacta la caracterización que originalmente se hizo, y desarrollaré lo que concierne al componente metafísico y semántico. Para ello, se procederá a cubrir, en primera instancia, dos aspectos que están directamente relacionados con la caracterización mínima del *REO* que se desplegó arriba, es decir, la claridad y la adecuación empírica. Posteriormente, se recurrirá a una nueva caracterización pragmatista y metafísica de esta tesis filosófica, y con base en ella, se cubrirán el resto de los aspectos, es decir, el potencial de unificación, y continuidad. Finalmente, la discusión se encaminará a cubrir los aspectos justificativos de la misma, donde se pretenden incluir discusiones en torno a la sub-determinación y la individualidad en el seno de una teoría cuántica particular: la *TCB*.

Parte III

En Búsqueda de una Caracterización

En seguida se pretende refinar la caracterización de la versión mínima del *REO*, siendo explícitos con respecto a cada uno de los aspectos metafísicos, semánticos y epistemológicos que constituyen y definen a esta tesis filosófica.

9. Una Propuesta Estructural: La Dimensión Metafísica

En lo que concierne a la dimensión metafísica, la versión mínima del *REO* afirma que el mundo es estrictamente una estructura independiente de la cognición humana. Esta afirmación presupone de antemano dos tesis: i) la existencia de una estructura, y con ello, el abandono de la Metafísica tradicional basada en objetos y propiedades, en tanto que estos últimos se definen como particulares y universales, respectivamente [French, 2014, Ch.6]; y ii) la independencia del mundo con respecto a la cognición humana. En seguida, se tratará de abordar el sentido y las consecuencias filosóficas de cada una de estas tesis en el orden establecido:

(1) De acuerdo con la lectura convencional de *REO*, se dice que una estructura consiste en un conjunto de relaciones que se satisfacen ente supuestos objetos que se les excluye de realidad autónoma y cuyo perfil metafísico es, en principio, irrelevante. Sin embargo, nótese que la interpretación intencional y la naturaleza más profunda de estas relaciones no se pueden determinar, al menos que estas últimas se describan en términos de las relaciones concretas que se satisfacen entre, por ejemplo, los términos teóricos de las teorías más exitosas de la Física. En este sentido, una caracterización más detallada de la estructura del mundo ya no comprende aspectos especulativos de índole metafísico, sino que se ayuda particularmente de la Física, de tal manera que sus aspectos interpretativos de índole semántico y epistemológico llegan a ocupar un lugar privilegiado. Es decir, uno comienza con esbozar y "moldear" el perfil metafísico del mundo en términos de una estructura que se desea representar para que, posteriormente y en función de este perfil estructural, se puedan describir los detalles más sutiles del mundo, según lo que las teorías más exitosas de la Física dicen acerca de él.

A decir verdad, al asumir una distinción entre el lenguaje en el que se construyen las teorías y la estructura del mundo que estas últimas representan, el *REO* no tiene otra opción más que asumir que la estructura de este mundo existe en un sentido primitivo. Es decir, existe porque *existe*, sin hablar de su mera constitución en términos de algún lenguaje. Ahora bien, regularmente se define una noción de estructura en términos de algunos lenguajes formales. Por ejemplo, se dice que una estructura S es, a grandes rasgos, una tupla $S = (U, R)$ que consiste en un conjunto U de objetos que forman el dominio de S y un conjunto ordenado de relaciones en S (monádicas y poliádicas) que se satisfacen entre supuestos elementos de U [Frigg and Votsis, 2011, p.229]. Esta caracterización de estructura prescinde de un componente material y se le define extensionalmente, en el sentido de que las relaciones definidas no tienen una interpretación intencional, sino que se les identifica en términos del conjunto de tuplas ordenadas que la satisfacen. No obstante, es evidente que esta definición de estructura presupone un lenguaje objetual en términos del cual se le caracteriza, en este caso, la teoría de conjuntos. Por ejemplo, para definir a S es necesario introducir un conjunto de objetos semánticos U, respecto a los cuales se definen las relaciones R. Esto implica que esta estructura no es independiente del lenguaje objetual en el que se define, y por lo tanto, dista de una caracterización con perfil estrictamente estructural y metafísico[38]. Por esta razón, creo que el componente metafísico de la versión mínima de esta tesis filosófica no debe ser objeto de análisis ni tampoco de refinamiento conceptual, teniendo como aspecto relevante la suposición estructural del mundo. Este último es, después de todo, una suposición metafísica de tintes especulativos que permite determinar de antemano la extensión de los elementos ontológicos que entran en juego en esta tesis filosófica. Es decir, el mundo es una estructura, punto y aparte. Se reitera que el tipo de estructura y su representación mediante el lenguaje de las teorías de la ciencia son aspectos que trascienden la dimensión metafísica, y que desde luego, penetran en los aspectos que conciernen a la semántica y la epistemología, cuya finalidad versa en el estrecho vínculo que yace entre la Física y la Metafísica. Por supuesto que la racionalidad de cualquier presuposición metafísica demanda una justificación, particularmente la que concierne a la eliminación de los objetos y propiedades, y la posibilidad de concebir metafísicamente a sus relaciones de manera independiente. Como se verá en secciones más adelante (en la Parte IV), la justificación del perfil estructural del mundo y la eliminación de los objetos y sus propiedades comprende aspectos metafísicos que no son del todo triviales, como por ejemplo, la falta de una noción de individualidad de los objetos que postula la Física contemporánea que sea independiente de las relaciones que satisfacen.

(2) La posibilidad de asumir la existencia de una entidad metafísica que sea independiente de la cognición humana tiene directamente relación con la legitimidad de un realismo metafísico en un sentido más general. A este respecto, creo conveniente dar un breve resumen de las características más significativas de esta tesis filosófica, empezando por entender su negación, lo que comúnmente se le llama *Idealismo*[39]. Asumiendo una simplificación excesiva de todas las doctrinas con el mismo emblema

[38] Así mismo, se han intentado construir nuevos lenguajes formales, tratando de eliminar elementos no estructurales que regularmente 'infectan' cualquier tipo de definición. Un ejemplo se encuentra en [Muller, 2010].

[39] En el fondo, el idealismo en su versión radical no es estrictamente la negación del realismo metafísico. Existen tesis idealistas más moderadas que atentan en contra de un realismo de forma no tan evidente. Tal es el caso de la postura que defienden los neokantianos en relación a la naturaleza del conocimiento científico. Al asumir que existe una distinción entre el mundo investigado por las ciencias con el mundo en su totalidad, ellos afirman que cualquier conocimiento adquirido mediante la experiencia, incluido el conocimiento científico, no puede ser independiente de la cognición humana. Es decir, los juicios *a priori* enraizados innatamente a la cognición humana, el entrenamiento sensorial y perceptivo, y los aspectos relacionados a las prácticas de investigación son elementos importantes que influyen en la imagen del mundo que construyen las teorías de la ciencia. Sin embargo, contrariamente a un idealismo, este tipo de doctrinas afirma la existencia del mundo en su totalidad en tanto que este último trasciende el espectro de los dominios cognoscibles.

idealista radical, la versión Berkeliana es una tesis filosófica antropocéntrica que argumenta que no existe un mundo afuera del cuerpo sensorial y cognitivo que vaya más allá de sus límites epistemológicos. En efecto, el mundo es la idea que se tiene de él y nada más. No existe una coraza que divida al mundo exterior del mundo de las ideas o del conocimiento, sino que todo lo cognoscible e imaginable es lo que es.

> However, an answer that captures what exactly it is that Berkeley rejects is that material things are mind-independent things or substances. And a mind-independent thing is something whose existence is not dependent on thinking/perceiving things, and thus would exist whether or not any thinking things (minds) existed. Berkeley holds that there are no such mind-independent things, that, in the famous phrase, esse est percipi (aut percipere) — to be is to be perceived (or to perceive).[Downing, 2004]

Un ejemplo del mismo Berkeley que pone de manifiesto su doctrina filosófica corresponde a la *Paradoja del Árbol Caído*: si un árbol se cayera en medio de un bosque ¿se podría afirmar que ha caído sin que se haya percibido? Su respuesta es evidentemente negativa al argumentar que el árbol ni siquiera puede existir sin que haya alguien que lo perciba. En analogía con este tipo de doctrinas filosóficas, en *Tlön, Uqbar, Orbis Tertius* (uno de los más extensos relatos de la compilación "El Jardín de Senderos que se Bifurcan"), Borges se imagina un mundo (Tlön) donde numerosas generaciones de hombres han concebido secretamente un universo de extremo idealismo análogo al mundo que Berkeley visualiza desde su tesis filosófica. La historia relata como los habitantes de Tlön se convencen poco a poco de que los objetos físicos son elementos que existen gracias al poder unísono de la imaginación, donde cualquier doctrina materialista es considerada una herejía. La visión tlöniana reconoce la percepción como fundamental y niega la existencia de una realidad subyacente. De esta manera, Borges explora metafóricamente los límites del conocimiento para describir la forma en que las ideas fluyen sobre la realidad y la determinan:

> Las cosas se duplican en Tlön; propenden asimismo a borrarse y a perder los detalles cuando los olvida la gente. Es clásico el ejemplo de un umbral que perduró mientras lo visitaba un mendigo y que se perdió de vista a su muerte. A veces unos pájaros, un caballo, han salvado las ruinas de un anfiteatro. [Borges, 1944]

Así mismo, las tesis filosóficas de índole idealista pueden atentar en contra de un proyecto cientificista al asumir que no existe un mundo independientemente de quién lo perciba (un mundo independientemente de la mente) que se puede investigar por las teorías científicas. En efecto, incluso el dualismo imperante en algunas doctrinas de la filosofía clásica entre el observador y el mundo observado pierde su fundamento. La imagen perceptiva de un "mundo externo" es, en realidad, una imagen que se crea en la mente del "observador", por lo que el "proceso de observación" es un proceso de reconceptualización interna, es el acto de reemplazar una idea por otra de diferente índole. De este modo, gracias a la continuidad de esta aparente dicotomía entre lo conocido y lo cognoscente, esta doctrina elimina automáticamente la dimensión epistemológica del realismo. Siguiendo con una analogía Borgesiana:

> Este monismo o idealismo total invalida la ciencia. Explicar (o juzgar) un hecho es unirlo a otro; esa vinculación, en Tlön, es un estado posterior del sujeto, que no puede afectar o iluminar el estado anterior. Todo estado mental es irreductible: el mero hecho de nombrarlo *id est*, de clasificarlo importa un falseo. De ello cabría deducir que no hay ciencias en Tlön ni siquiera razonamientos.[Borges, 1944]

De igual manera, esta doctrina elimina automáticamente la dimensión semántica de cualquier tipo de realismo, al contraer el dualismo entre la referencia y el referente. En efecto, la representación que se hace del "mundo externo" es simplemente una copia de la misma imagen que, sin embargo, es parte de la mente. Desde un idealismo radical, las representaciones no existen, sólo existen copias de una misma imagen construida a merced de los procesos cognitivos de la mente humana. De este modo, se puede corroborar que la tesis de independencia es una condición necesaria de la dimensión semántica y epistemológica de cualquier tipo de realismo. Es decir, estas últimas únicamente tienen sentido si se asume, con anterioridad, la independencia del mundo con respecto a la cognición humana, tomando en cuenta que, con ello, cualquier doctrina idealista radical debe refutarse. Por último, conviene dar un ejemplo interesante que remite directamente a las prácticas científicas. En la siguiente cita se puede apreciar un criterio realista sutil comúnmente aceptado en la comunidad científica:

> Every experiment has an unambiguous outcome, and records and memories of that outcome agree with what the outcome was at the space-time location of the experiment.[Tumulka, 2015]

Este criterio es difícil de refutar si uno asume, al menos desde un monismo metafísico, cualquier tipo de realismo. En efecto, asumiendo una tesis realista muy débil, parece ser que los hechos que ocurren a escalas macroscópicas y son sensibles a la percepción no son del todo ambiguos, no se transforman al ser observados, y permanecen en un registro histórico de datos de manera que no se pierde información en el proceso. En respuesta a este tipo de realismo, un idealismo radical indicaría que este criterio es falso debido a que los registros y memorias de los datos obtenidos cambian después de que se haya efectuado la medición al gusto de quien los haya observado, sin importar la forma en que se registraron ni cuántos observadores presenciaron el hecho. Pero si este fuera el caso, parecería que existe una "conspiración cognitiva" que determina no sólo a los hechos que se perciben, sino que también es capaz de reconstruir su memoria en el transcurso del tiempo. Este ejemplo, como muchos que se pueden concebir, permite evidenciar que el debate en torno a un realismo, o bien un idealismo genérico y radical no tiene un alcance y aporte significativo dado que, no importa la postura que uno adopte, sus bases fundacionales son irrefutables. Tomando esto en cuenta, conviene asumir dede un principio una tesis realista de esta naturaleza e incluir dentro de su caracterización elementos que sí puedan ser refutables.

10. Una Propuesta Estructural: La Dimensión Semántica

La dimensión semántica del *REO* es, según su caracterización mínima, la afirmación de que las proposiciones del formalismo matemático común que subyace a las teorías más exitosas de la Física refieren y tienen valores de verdad. Dicho de otro modo, afirma que este conjunto de proposiciones se interpretan literalmente, independientemente si esta interpretación (que presume tener un perfil estructural) es o no es la correcta. Para corroborar dicha afirmación se debe proceder a especificar las condiciones bajo las cuales una correspondencia de verdad se satisface entre la estructura del mundo que esbozan las teorías científicas y el formalismo matemático que lo refiere, si la interpretación es correcta. Sin embargo, esta tarea involucra un análisis filosófico que comprende tanto un conocimiento básico en torno a la teoría correspondentista de la verdad, como también conocimientos matemáticos en relación al formalismo en cuestión. Tomando en cuenta estas observaciones, se apelará, en primera instancia, a una noción de representación muy básica (en términos de un "isomorfismo") que intuitivamente se vincula con una copia perfecta de lo que se quiere representar, y con la que podrá ser posible incorporar una correspondencia de verdad tarskiana. Habiendo hecho esto, se advertirá la importancia del lenguaje en términos del cual se expresa el formalismo de las teorías físicas más exitosas. Es decir, no es lo mismo sugerir que la estructura del mundo clásico se represente mediante las propiedades de una variedad simpléctica que mediante un modelo vectorial. Ambas guardan diferencias significativas que pueden ser relevantes en cuanto a su correspondencia con el mundo y los alcances teóricos e interpretativos que poseen. Por esta razón, es importante identificar un tipo de lenguaje matemático que sea lo más adecuado para el propósito que se tiene en mente. En este caso, dicho lenguaje se elegirá de acuerdo a si el formalismo (que difiere de su interpretación por medio de una representación "isomorfa") satisface un par de condiciones, una en referencia a su claridad y la otra en referencia a su adecuación empírica. Es decir, por un lado el lenguaje tiene que constituirse (formalmente hablando) como una estructura, y con base en ello, debe ser capaz de expresar a la *MC*, la *MCU*, y la *RE*, en términos de una estructura matemática en común, y por otro lado, también debe tener características afines que permitan que esta estructura matemática tenga una correspondencia directa con los fenómenos observables mediante la derivación de las ecuaciones de movimiento, y la re-conceptualización estructural de los objetos a este nivel fenomenológico. Esto se hará siguiendo con el programa de Wigner y Weyl, tomando en cuenta que el lenguaje que se sugiere, y en términos del cual se construye el formalismo, es un Grupo de Lie abstracto que permite distintas Representaciones en espacios vectoriales específicos. Específicamente se demostrará que un grupo de Lie particular admite Representaciones en el espacio fase, en el espacio de Hilbert, y en el *Espacio-tiempo de Minkowski* que corresponden a las ecuaciones de evolución de la *MC*, la *TCB*, y la *RE*.

10.1. La Representación Estructural

En esta sección se hablará brevemente acerca del problema de la representación. Para ello, conviene apelar a un ejemplo ilustrativo que servirá para comprender el tipo de argumentos que se quieren discutir. Considérese de nuevo el ejemplo del preámbulo teórico, en el que se comparan dos corrientes artísticas, es decir, el impresionismo y el arte abstracto vanguardista. Como bien se dijo, el lenguaje pictórico predominante en el impresionismo es el del color y la mancha, mientras que el del periodo vanguardista corresponde al uso de objetos abstractos (como las figuras geométricas). En particular, este último se apoya del lenguaje escrito, del matemático y del fotográfico, con un énfasis en la forma pero también en el color. Resulta que estas dos corrientes pictóricas ofrecen diferentes imágenes estéticas del mundo que difieren en cuanto al tipo de lenguaje que usan y el dominio que desean representar. En este sentido, si la intención del artista es plasmar el instante y con ello entregarse a la Naturaleza observable, el lenguaje del impresionismo parecería ser el más adecuado, pero si se quiere plasmar la intervención de la mente humana en el mundo, incluyendo sus posibilidades, sus limitaciones, sus formas de conocer y las sensaciones en sí mismas, el arte vanguardista parece tener un lugar predominante en tanto que permite el uso de diferentes soportes técnicos e introduce objetos ideales y abstractos que, después de todo, son una posibilidad inminente de la mente humana.

Tomando en cuenta esta analogía, es evidente que el lenguaje que se emplea ocasionalmente en distintos contextos de representación es crucial, siempre y cuando no se le despoje del significado al que refiere, es decir, que tenga una correspondencia unívoca entre dicho lenguaje y el escenario que se quiere representar. Al construir un puente entre el significante y el significado, o bien, establecer una correspondencia unívoca entre ellos, cualquier cambio del significante o del lenguaje incurre en un cambio en el significado y en lo que representa este lenguaje. Por esta razón, en lo que respecta al lenguaje matemático, como es el caso de las teorías Físicas contemporáneas, y bajo la suposición de que el formalismo asociado a estas teorías es una copia exacta del mundo que se desea representar (es una representación "isomorfa"), la teoría matemática en el que se expresen estas teorías determina invariablemente la imagen de dicho mundo. Conviene aquí reiterar que no es lo mismo que la estructura del mundo clásico se represente mediante las propiedades de una variedad simpléctica, es decir, por medio de la formulación hamiltoniana, que mediante el modelo vectorial de la formulación newtoniana. Como se verá en este trabajo, es un hecho que el primero ha desempeñado un rol interpretativo mucho más significativo en otros dominios de la Física, sobre todo porque remite a las simetrías que subyacen a diferentes teorías, mientras que el segundo sólo se restringe al dominio newtoniano, que incluso muestra algunas dificultades para incluir campos electromagnéticos en su formulación.

A propósito de estas observaciones, creo conveniente dar una breve introducción a algunos problemas que se han identificado en el seno de la representación lingüística tradicional (en términos de un "isomorfismo"), concluyendo con la adopción de la misma pero bajo una base más apropiada y justificada. Posteriormente, la discusión se enfocará principalmente en el rol que desempeña esta noción de representación en el caso particular de ciertos lenguajes matemáticos que usan las teorías de la Física contemporánea, y en el contexto particular del *REO*.

10.1.1. Problemas de Representación

La noción de representación en las teorías científicas ha sido objeto de debate en algunos círculos de investigación filosófica, particularmente en el contexto del *REO* [Frigg, 2006, van Fraassen, 2006, Brading

& Landry, 2006, Muller, 2010, French, 2014, 2015]. Pero más allá de los alcances de este debate y la complejidad de los argumentos que entran en juego en torno a esta noción filosófica, existe una intuición muy simple que ha abierto numerosas líneas de investigación en este contexto. Esta intuición tiene su fundamento en una tradición filosófica de acuerdo con la cual los términos teóricos refieren, y las proposiciones que las constituyen se consideran verdaderas mediante una noción de verdad bien definida (teoría correspondentista de la verdad). Una lectura tarskiana en este sentido, implica que una correspondencia de verdad bien definida satisface una condición de adecuación material. Es decir, que para cada oración P del lenguaje para el que se define la verdad, se satisface [Hodges, 2014]:

"P " es verdadero si y solo si P.

Donde "P " es una expresión en términos de un meta-lenguaje que representa a P, y en términos del cual se expresa la fórmula anterior. Por ejemplo, la expresión "es verdadero que x es una estructura" equivale al hecho de que x es efectivamente una estructura. Es importante indicar que esta concepción de verdad remite a una 'propiedad' de las expresiones de un lenguaje pero no a las propiedades de entidades reales. Según la interpretación estándar, es posible formular una definición tarskiana de verdad que tenga estrecha relación con la teoría correspondentista de la verdad mediante dos condiciones semánticas: i) la suposición de que cualquier oración acerca de una entidad real se pueda expresar como una oración acerca de un lenguaje; y ii) la condición de que los predicados se satisfagan por variables [Sher, 1999, pp-152-154]. Se dice que 'el mundo' satisface la oración "x es la estructura más fundamental" en el meta-lenguaje si y solo si el mundo es la estructura más fundamental, en el lenguaje. De este modo, la oración 'x es la estructura más fundamental' es verdadera en el lenguaje si y solo si se satisface por una secuencia de objetos, en este caso, únicamente dada por 'el mundo'. Por supuesto que si la verdad se define para el contenido semántico de una oración del lenguaje, faltaría especificar cuáles son los elementos de la oración que tienen una correspondencia con el mundo. En este punto, un estructuralista estaría convencido de que dichos elementos corresponden a aquellos con perfil estructural, por ejemplo, algunas constantes lógicas, en lugar de las variables asociadas a los objetos que las substituyen [Sher, 1999, p.154].

Es en este sentido que la correspondencia de verdad tarskiana se puede interpretar en términos de una noción de representación análoga al de un "isomorfismo". Sin embargo, habría que notar que una noción de representación en estos términos sugiere, a primera vista, una imagen dual entre dos estructuras semánticas: el significante y el significado, es decir, entre algo que está haciendo el trabajo de representar y se sitúa en un lado de la relación de correspondencia, y el objetivo que se sitúa en el otro lado de esta relación [French, 2015]. En efecto, por un lado el significante puede ser un conjunto de proposiciones matemáticas que constituyen a una teoría en particular (si se asume la concepción sintáctica de teoría), ó bien, puede ser una familia de modelos (si se asume la concepción semántica) [Frigg, 2006]. Por otro lado, el mundo se constituye como aquella estructura ambigua que supuestamente es epistémicamente accesible por medio de una correspondencia de verdad unívoca con el significante, en tanto que es su objetivo o su significado. No obstante, la correspondencia entre el significante y el significado no es estrictamente hablando la de un isomorfismo matemático, debido a que la estructura física del mundo supuestamente no es una estructura matemática. El punto esta en que esta imagen dual involucra un distanciamiento entre los aspectos epistemológicos, que son accesibles mediante las teorías científicas (el significante), y los aspectos metafísicos del mundo externo (el significado). No existe ningún lenguaje formal en términos del cual se logre caracterizar al mundo en sí mismo mediante una estructura cognoscible bien definida, a no ser que la relación de correspondencia se elimine y colapse la distinción entre el significante y el significado. Es decir

> "Isomorphism is a relation that holds between two structures and not between a structure and a piece of the real world *per se*"[Frigg, 2006, p.55].

En un contexto particular, este tipo de problemas tiene directa relación con una objeción en contra del *REO*, ampliamente conocido como el *Problema del Colapso*. Aquí conviene apelar al concepto de espín, que ha sido objeto de ardua discusión en la filosofía de la *MCU*. A diferencia de otras propiedades observables, este concepto es ambiguo con respecto a su significado debido a que, más allá de su manifestación indirecta y contextual en el mundo fenomenológico, es un término teórico que guarda un significado estrictamente estructural, en términos de las simetrías dinámicas asociadas al grupo de rotaciones y sus Representaciones irreducibles en el espacio de Hilbert. De este modo, tomando en cuenta que las teorías científicas contemporáneas (como es el caso de la *MCU*), se expresan en términos de una estructura matemática (por ejemplo, la teoría de grupos y sus Representaciones) y sabiendo que el *REO* asume que estas teorías esbozan la estructura real del mundo, entonces cualquier distinción entre la estructura física del mundo y la estructura matemática de una teoría científica no puede establecerse [van Fraassen, 2006, pp. 292-293]. Es decir, al advertir que el conocimiento científico es estrictamente estructural y predominantemente matemático, la suposición metafísica de que lo único que existe es una estructura física y concreta es una suposición acerca de que el mundo es, en realidad, una entidad matemática, salvo que la noción de "estructura física" se entienda en términos de otros aspectos que trasciendan el lenguaje matemático. Aquí conviene preguntarse, ¿Qué es exactamente la "estructura" física del mundo si no es una estructura matemática?
Algunos realistas de perfil estructural han respondido a la objeción del colapso simplemente asumiendo su conclusión, es decir, que el mundo es estrictamente matemático. Esta salida radical es una forma de evitar el problema, dejando que la estructura del mundo "hable por sí misma", disolviendo, con ello, la distinción entre las tesis realistas y estructurales que se han propuesto tanto en el campo de las matemáticas como en el de la física [Tegmark, 2007]. En dirección contraria y con una actitud más moderada, algunos filósofos han afirmado que no existen razones suficientes para creer que la estructura del mundo sea matemática [Saunders, 2003b], dejando abierta la pregunta acerca del tipo de correspondencia que existe entre la estructura física y la matemática. Con este mismo espíritu, algunos realistas han propuesto otras nociones de representación que no son estrictamente isomorfas, como por ejemplo, la incorporación de una relación de correspondencia entre lo concreto y lo abstracto [Rosen, 2001], ó bien, mediante la adopción de un escepticismo respecto a una noción de representación que pueda distinguir entre la estructura física y la matemática [Ladyman et al., 2007, Frigg, 2006]. En contra de la visión semántica de teorías, se ha dicho que:

> 'Hence, if we are to make sense of the claim that model and target are isomorphic we have

> to assume that the target exhibits a structure. [...] As a consequence, descriptions cannot be omitted from an analysis of scientific representation and one has to recognize that scientific representation cannot be explained solely in terms of structures and isomorphism"[Frigg, 2006, p.55].

No obstante, si lo que se quiere es salvaguardar una noción de representación en términos de un "isomorfismo" pero sin romper la distinción que existe entre la Física y la Matemática, parece que la única opción es tratar de concebir una noción metafísica de estructura que sea independiente a las estructuras matemáticas cognoscibles mediante las teorías científicas. Es decir, para evitar el problema del colapso, entonces se debe de buscar la manera en que la "estructura física del mundo" pueda entenderse y diferenciarse de su contraparte matemática, en términos que no involucren un compromiso ontológico con respecto a elementos no estructurales. Aquí valdría la pena recordar que la noción metafísica de estructura que aquí se pretende abordar es la de un conjunto de relaciones que se satisfacen entre objetos. Sin embargo, al eliminar los objetos (particulares) de las categorías metafísicas, parece que una nueva noción de estructura debe establecerse en términos de las relaciones que se satisfacen entre elementos que no existen pero que, sin embargo, pueden nombrarse[40]. Solamente una vez que se asume que el mundo es una estructura primitiva e independiente de la cognición humana, ahora sí es posible hacer una caracterización más refinada mediante una correspondencia bien definida con la estructura del formalismo matemático de las teorías científicas. De este modo, se puede decir que el conjunto de relaciones que constituyen al mundo se representan "isomórficamente" mediante las relaciones matemáticas que se satisfacen en las teorías científicas.

Ahora bien, tomando en cuenta todas las estrategias que tratan de evitar el problema del colapso, la moral que aquí es importante destacar es que, después de todo, uno termina con una suposición metafísica de tintes especulativos. En efecto, si se quiere salvaguardar una noción de representación en términos de un "isomorfismo" se debe suponer que el mundo es una estructura matemática, ó bien, se debe especificar metafísicamente una noción de estructura en la que se fundamenta el compromiso ontológico del realista independiente del lenguaje matemático. Por ejemplo, imagínese de nuevo una conversación entre Bob, un curioso metafísico, y Alicia, una filósofa de la ciencia. Asumiendo que Bob es un simpatizante del *REO*, pero con algunas reservas, se pregunta acerca de cómo es la estructura del mundo. Alicia responde a Bob apuntando su dedo a un pizarrón donde hay fórmulas matemáticas. En ese momento, Bob trata de esbozar la imagen del mundo en términos de estas ecuaciones matemáticas, tomando en cuenta que estas últimas podrían representar a la estructura de la realidad. Pero después de reflexionar un rato respecto a esta cuestión, Bob no puede imaginar de qué manera dichas ecuaciones representan a un mundo que, de por sí, es independiente a cualquier herramienta lingüística. Por esta razón, concluye que el mundo son esas ecuaciones, punto y aparte. Por otro lado, Alicia parece no estar de acuerdo con Bob, pues ella tiene la intuición de que detrás de estas ecuaciones (que, después de todo, son signos de gis que se esbozan en una superficie rugosa bi-dimensional), debería de existir una descripción formal que detallara la forma en que estos signos tienen un parecido con la estructura del mundo. Para ese fin, ella trata de profundizar en el lenguaje de las

[40]Este hecho se analizará más adelante en el contexto de la dimensión fenomenológica del Realismo Estructural Óntico (en 10.5).

matemáticas y la lógica, sin embargo, después de un tiempo considerable se da cuenta que no es posible dar una respuesta que no medite una presuposición metafísica acerca de la constitución del mundo independiente de cualquier lenguaje. El punto de esta conversación es que tanto Bob como Alicia no tienen otra opción más que recurrir a un acuerdo que pueda dar una salida en común. En efecto, la Filosofía de la Ciencia no tiene otra opción más que recurrir a la Metafísica en tanto que debe existir, después de todo, una suposición en estos términos. Es decir, se debe asumir que el mundo es, en efecto, una estructura matemática, ó bien, que se constituye de una estructura primitiva que se debe caracterizar metafísicamente, independientemente del lenguaje matemático.

Habiendo dicho esto, una vez que se ha adoptado al menos una noción básica de estructura que supuestamente constituye al mundo y lo fundamenta, es posible elucidar una noción de representación que sea "isomorfa", en el sentido de que existe una correspondencia unívoca entre la estructura matemática de las teorías científicas y la estructura metafísica del mundo. Habría que advertir, como bien se plantea en las objeciones discutidas en este texto, que esta correspondencia no es estrictamente un isomorfismo, puesto que esta última únicamente tiene sentido entre estructuras matemáticas, o bien, en términos de un lenguaje formal. Al contrario, en un pilar de la representación se tiene una estructura matemática que efectivamente puede expresarse en términos de un lenguaje formal, mientras que en el pilar opuesto se tiene una estructura de carácter metafísico que no puede expresarse en estos términos. Por lo tanto, es posible concebir una noción de correspondencia bien definida entre las teorías científicas y el mundo que, aunque dista de la definición estricta de un isomorfismo, tiene las características afines a una representación de este tipo.

10.1.2. El Lenguaje de las Matemáticas

Al haber identificado y resuelto ciertos problemas en relación a la noción de representación tradicional, es momento de indicar de qué manera esta noción resulta ser útil para el propósito de este trabajo. En efecto, al asumir que existe una correspondencia unívoca entre la estructura matemática de las teorías físicas contemporáneas y la estructura del mundo que supuestamente esbozan, es importante reiterar el rol tan significativo que tiene la elección de un lenguaje sobre los posibles candidatos que son compatibles con dichas teorías. Para ello, se deben establecer ciertos criterios que guíen esta elección, de acuerdo a los fines que se desean perseguir. En lo que concierne a la dimensión semántica del *REO*, se desea encontrar una interpretación que sea clara y empíricamente adecuada. Bajo la suposición de que dicha interpretación consiste en una representación "isomorfa" de la estructura de un mundo hipotético (no necesariamente el real), lo que se desea es, en realidad, encontrar un formalismo claro y empíricamente adecuado. Con ello, uno se refiere a la necesidad de identificar un lenguaje estructural que permita expresar a la *MC*, la *MCU*, y la *RE* en términos de una estructura matemática en común, y que de igual manera, pueda derivar las ecuaciones de movimiento de cada una de estas teorías, tomando en cuenta que estas ecuaciones son, por construcción, empíricamente adecuadas en su dominio. Una vez dicho esto, es momento de comenzar a buscar dicho formalismo. En este punto, conviene hace un pequeño énfasis respecto a la reciprocidad que existe entre la investigación de nuevos lenguajes matemáticos y la investigación científica.

Se tiene la evidencia histórica de que avances en el ámbito de las matemáticas, como es el caso de nuevas teorías matemáticas, la elucidación de puentes conceptuales entre diferentes modelos, ó bien, la fundamentación lógica de su estructura, influye en avances significativos en la investigación científica, o viceversa. Un ejemplo conocido en la literatura es la reciprocidad que existe entre la física del átomo y la teoría de grupos de Lie [French, 2014, p.106]. En efecto, se sabe que un átomo es simétrico bajo permutaciones y bajo rotaciones alrededor del núcleo. En ambos casos, las Representaciones irreducibles que este tipo de simetrías admite corresponden a los diferentes valores de espín permitidos (ya sea un valor fraccionario o entero, y bien, un valor positivo o negativo). En lo que respecta a la Física, este resultado permite elucidar una relación precisa entre ambas simetrías, pero de igual modo, en lo que respecta a las matemáticas, es posible demostrar que una simetría discreta (el grupo de permutaciones) y una simetría continua (el grupo de rotaciones) tienen Representaciones que corresponden a propiedades en común. De este modo, la presencia de asociaciones al nivel matemático contribuye a elucidar asociaciones al nivel de la Física o viceversa. Esta reciprocidad implica que, si se quiere encontrar un formalismo que satisfaga los criterios de claridad y adecuación empírica, es necesario incursionar en alguna rama particular de las matemáticas que tenga la cualidad de elucidar estructuras matemáticas, en términos de las cuales se expresen las leyes y principios de la *MC*, la *MCU*, y la *RE*, y que tengan una relación directa con los fenómenos empíricos en algún dominio predeterminado.
Con este propósito en mente, en seguida se pretende identificar una rama de las matemáticas que ha tenido, desde sus inicios, una amplia gama de posibilidades físicas: la geometría. Para ello, se elaborará, en primera instancia, un preámbulo teórico dedicado al lector que no esta familiarizado con el formalismo geométrico y las distintas teorías matemáticas que guardan alguna relación tangencial con ella. Posteriormente, se verá la manera en que dicho formalismo permite satisfacer los criterios de claridad y adecuación empírica, haciendo referencia a un proyecto de investigación que varios físicos llevaron a cabo a principios y mediados del siglo veinte.

10.2. En Búsqueda del Formalismo

10.2.1. La Geometría: un Lenguaje Universal

Esta sección está dedicada al lector que no se encuentra familiarizado con el lenguaje matemático. Si no es el caso, puede pasar a la siguiente sección 10.2.2. Se elaborará una revisión informal de algunos conceptos matemáticos que serán imprescindibles para el desarrollo del presente trabajo, específicamente, elementos básicos de geometría diferencial, teoría de grupos y topología algebraica[41]. Habiendo hecho esto, se apelará al trabajo de Souriau [Souriau, 1983] para enfatizar en el rol tan importante que desempeña la geometría en la Física contemporánea, al reivindicarse como un lenguaje indispensable y fundamental en muchas investigaciones. El lector interesado también puede referirse a cualquier libro básico de

[41] Espero ser lo más claro e ilustrativo sin dejar de lado el carácter formal de estas disciplinas. Tampoco es mi intención resaltar la ignorancia del lector, sino al contrario, enfatizar el hecho de que estos conceptos formales puedan entenderse desde una perspectiva más accesible.

geometría diferencial [Boothby, 1975][Do Carmo, 2013], teoría de grupos [Hall, 2003][Azcarraga & Izquierdo, 1995][Ramond, 2010][Warner, 1971] y topología algebraica [Munkres, 2000][Bott & Tu, 1986]. También [Arnold, 1989] y [Weinberg, 1995] se recomienda para entender su conexión con la *MC*, y la Física contemporánea, respectivamente.

> Differential geometry, the contemporary heir of the infinitesimal calculus of the 17th century, appears today as the most appropiate language for the description of physical reality.[Souriau, 1983, p.1]

La *Geometría Diferencial* tiene su origen y fundamento en la *Geometría Euclidiana*. En torno a sus principios más básicos, se dice que dos o más figuras son equivalentes si coinciden al desplazarlas y yuxtaponerlas[42]. Por ejemplo, al rotar un triángulo equilátero el equivalente a $(2/3)\pi$ respecto a su centro de gravedad se obtiene la misma figura que se tenía inicialmente. Al generalizar esta noción de movimiento o "desplazamiento", se pueden construir espacios matemáticos de cualquier dimensión en los que se definen "desplazamientos" o transformaciones, bajo los cuales se identifican objetos invariantes: aquellos que al "desplazarlos" siempre coinciden.

Ahora bien, para localizar estos objetos en cualquier espacio matemático se procede a comparar su posición en cada punto del espacio con su posición en un espacio euclidiano de la misma dimensión. De esta forma, es posible establecer conceptos euclidianos (como el de equivalencia) en cualquier espacio matemático de manera local. A esta comparación o traducción de elementos de un espacio euclidiano a otro más general se le conoce con el nombre de *Sistema de Coordenadas*. Por ejemplo, un mapa terrestre traduce elementos reales que viven en una geometría curvilínea de aproximadamente dos dimensiones (carreteras, poblados, montañas, países, continentes, etc.) en representaciones esquemáticas de la misma dimensión en el espacio euclidiano (líneas, círculos, etc.). De este modo, cualquier transformación definida en cualquier espacio matemático abstracto no es nada más que los cambios de coordenadas inducidos por un 'desplazamiento' en el espacio euclidiano. Por ejemplo, el recorrido de un avión a través de un círculo máximo de la Tierra puede verse como una trayectoria curva en un mapa bi-dimensional del globo terráqueo.

Específicamente, un espacio puede llegar a ser una curva, una superficie, o bien, un concepto más general llamado *Variedad Diferenciable* que puede tener dimensión arbitraria. La propiedad esencial que distingue a una variedad de otros espacios matemáticos consiste en que los cambios de coordenadas definidas sobre esta última deben ser diferenciables. Es decir, corresponden a transformaciones muy suaves que permiten que algunas propiedades geométricas se preserven, o bien, que dejen invariantes a los objetos definidos sobre los puntos de la variedad. Naturalmente uno imagina una superficie como un elemento inmerso en un espacio de dimensión mayor, por ejemplo, una esfera de dos dimensiones inmersa en el espacio euclidiano de tres dimensiones. Sin embargo, una variedad no necesariamente se encuentra inmersa en otro espacio, sino que puede definirse independientemente de este último. A manera de ejemplo, considérese una esfera S^2. Esta última consiste en una variedad de dos dimensiones. Sin embargo, aveces se piensa que la esfera

[42]Es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, área, longitud, volumen, entre otras propiedades geométricas.

vive en un espacio tridimensional y que sobre su superficie hay elementos con volumen, como es el caso de un individuo que vive sobre la superficie de la Tierra. Sin embargo, a decir verdad, los únicos elementos que se definen en una esfera son bi-dimensionales. En este sentido, solo unos bichos aplastados podrían habitar una variedad como la esfera.

Ahora, imagínese que sobre S^2 se definen transformaciones G (rotaciones respecto a cualquier eje). En este caso, se sabe que cualquier rotación es continua y su inversa es continua (cualquier esfera que ha sido rotada puede volverse a rotar continuamente en sentido contrario hasta llegar a su posición inicial). De esta forma, cabe mencionar que las rotaciones son un caso particular de un tipo de transformaciones que se les denomina homeomorfismos, que son mapeos o aplicaciones de un espacio genérico (a otro o a sí mismo) continua e invertible. Ahora, si una rotación mueve a la esfera de manera muy lenta y suave (no produce movimientos abruptos ni repentinos) entonces se dice que dicha transformación es un difeomorfismo, o bien, las rotaciones son diferenciables, en el sentido de que se definen por medio de derivadas parciales de cualquier orden en una variedad diferenciable. Estos últimos son mapeos o aplicaciones continuas y diferenciables cuyos inversos también lo son. Hasta aquí, se ha hablado de mapeos y de objetos definidos en variedades diferenciales, particularmente para el caso de la esfera, sin embargo, desde una perspectiva más formal y general, no se les ha definido de forma más acabada. Con este fin, en seguida se pretende definir lo que es un objeto geométrico, para proceder posteriormente a introducir mapeos diferenciales que se definen entre estos últimos, y así, lograr caracterizar el tipo de objetos que existen en las variedades diferenciables.

Antes de proceder a realizar dicha tarea, es importante definir el concepto de *Grupo*. De manera simplificada, un grupo consta de un conjunto de elementos con una operación entre dos de ellos, pero que combina cualquier pareja para formar un tercer elemento dentro del grupo (mediante una "regla de multiplicación"). El conjunto y la operación deben satisfacer la propiedad asociativa, debe tener un elemento identidad y un elemento inverso. Si dicha operación es suave, es decir, define un mapeo continuo que tiene derivadas de todos los ordenes, y además el grupo es una variedad diferenciable, entonces es un *Grupo de Lie*. Por ejemplo, el grupo de rotaciones en el espacio euclidiano forma un grupo de Lie equivalente a una esfera S^2. Para tener una imagen concreta de este concepto basta con componer una rotación $\pi/2$ sobre un eje cartesiano con otra rotación del mismo ángulo sobre un eje perpendicular. Debido a que la rotación compuesta es equivalente a una rotación de $\pi/2$ en el tercer eje, entonces se satisface la propiedad de grupo. Además se puede demostrar que la composición de rotaciones infinitesimales (muy pero muy pequeñas) resulta ser una rotación como cualquier otra, por lo que estas últimas son también transformaciones suaves. Por lo tanto, el conjunto de absolutamente todas las rotaciones forman una esfera, del mismo modo en que las trayectorias de todos los aviones en vuelo "cubren" a la superficie de la Tierra en su totalidad.

Habiendo dicho esto, se puede definir a un objeto geométrico como el conjunto de los elementos en los cuales actúa un grupo. Estos pueden ser figuras compuestas por puntos espaciales, como por ejemplo triángulos, pero también pueden ser vectores, formas diferenciales, tensores, etc., que comúnmente se aplican en la mecánica, en el electromagnetismo, en la cristalografía y en la relatividad general. Sin embargo, para proceder con una exposición más clara y consistente de los conceptos en cuestión, faltaría definir lo que se entiende por acción de un grupo. En efecto, la acción de un grupo sobre un conjunto (ya sea un grupo, un espacio vectorial, etc.) es (en términos formales) una Representación[43], es decir, una "copia" del grupo por medio de transformaciones que se definen en un espacio particular (o bien, un homomorfismo del grupo al grupo de automorfismos del espacio). En particular, los grupos que actúan en variedades diferenciales se les denomina grupos de transformaciones, debido a que son transformaciones (automorfismos) definidas en la variedad, y que junto con sus operaciones, forman un grupo de Lie. Por ejemplo, el grupo de rotaciones se representa como una transformación lineal en el espacio euclidiano de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$ que dejan invariante a su eje de rotación. Estas transformaciones son, en realidad, la acción de un conjunto de matrices ortogonales de 3×3 (con determinante igual a la unidad) en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Una vez que se ha definido un objeto geométrico, es importante dar algunos ejemplos que ayuden a la comprensión de esta exposición. Para ello, a continuación se dará la definición de *Vector Tangente*, así como también de una *Forma Diferencial*, en el orden establecido. Para esta última se tendrá que definir otro tipo de objetos más generales: los *Tensores*.

Considérese una variedad, por ejemplo, otra vez la esfera S^2. Los vectores tangentes son elementos que viven en el espacio tangente, un espacio distinto al de la variedad que se define en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, para el caso de la esfera, este espacio consiste en el plano tangente que intersecta a un punto de ella. La forma estándar de construir este espacio es por medio de una familia de curvas parametrizadas $\{\alpha_i\}_p$ que pasan por un punto p de la variedad. Al derivar las curvas con respecto al parámetro en p, se obtiene una familia $\{\dot{\alpha}_i\}_p$ de "vectores tangentes" a dichas curvas en el punto p. Al introducir un sistema de coordenadas cartesianas $\{x^i\}$, estos "vectores" son, en realidad, los componentes cartesianas de N-tuplas de $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{\alpha}_i = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \cdots, \dot{x}^n)_i$$

que forman un espacio vectorial, y por ende, poseen una base canónica ortonormal en el espacio tangente $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$. Esto se debe a que este último es isomorfo al espacio euclidiano y tiene dimensión equivalente al de la variedad. Tomando estas consideraciones en cuenta, a decir verdad un vector tangente es un operador diferencial sobre funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df(\alpha(t))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p [f]$$

donde α es una curva parametrizada en t sobre la variedad tal que $\alpha(p) = \alpha(0)$. De esta forma, cualquier vector puede escribirse como un operador $\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, que al evaluarse en todos los puntos de la variedad definen un campo vectorial cuya base resulta ser $\{\sigma_i\} = \{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$. Una propiedad esencial de los vectores tangentes es que pueden definirse independientemente de las coordenadas. Es decir, es un objeto invariante bajo un grupo de transformaciones relativas a cambios de sistemas de coordenadas. También, cualquier curva cuya derivada en un punto sea equivalente a algún campo vectorial definido en ese punto se le llama *Curva Integral*.

Ahora, se procederá a definir una forma diferencial. Para ello, considérese la definición estándar del 'pro-

[43] Recuérdese que se denota 'Representación' con mayúscula si el término refiere únicamente al nombre técnico de la acción de un grupo.

ducto escalar' entre vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$, es decir, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} v^i u_i$. Se sabe que el resultado de esta operación es un número real y su interpretación geométrica tiene directa relación con la longitud que resulta de la proyección entre ambos vectores. Desafortunadamente este "producto" no es un elemento del espacio vectorial en cuestión, y por ende no define, en realidad, un producto del espacio[44].

Tomando en cuenta la definición de vector tangente que se ha dado aquí, el 'producto escalar' definido como $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} v^i u_i$ es realmente la imagen de una función lineal, que toma un vector de un espacio vectorial y lo manda al campo de los números reales, es decir, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \equiv v : \mathbf{u} \to \mathbb{R}$, o bien, $\mathbf{v}(\mathbf{u})$. Esta función lineal apela a un objeto matemático más general σ, que es importante definir. Sea $\mathbf{v} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ un elemento de un espacio vectorial tangente V definido en cada punto de una variedad. Al funcional lineal σ que, evaluado en un elemento del espacio tangente a dicho punto $\mathbf{v} \in V$, arroja un número real se le llama 1-forma diferencial o *Covector*. Para que su expresión matemática sea consistente con esta definición, se debe especificar el espacio vectorial en el que vive dicha función. Este espacio debe ser, por definición, el espacio vectorial dual V^* con base $(\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, \cdots, \sigma^{*n})$, donde $\sigma^{*i}(\sigma_j) = \sigma^{*i}(\partial/\partial x^j) = \delta^i_j$.

A este respecto, del hecho de que los vectores son elementos del espacio tangente y los covectores elementos del espacio dual tangente, o bien, cotangente, se puede inferir que ambos objetos se transforman a otro sistema de coordenadas de manera recíproca, o mejor dicho, sus matrices de transformación son inversas. Esto quiere decir que los componentes de los vectores se transforman como las bases de los covectores, mientras que los componentes de los covectores se transforman como las bases de los vectores. Tomando este resultado en cuenta, es posible demostrar, de igual manera, que ambos objetos, tanto vectores como covectores, son invariantes bajo cualquier transformación de coordenadas.

No obstante, este espacio vectorial es un caso particular de un espacio más general: el conjunto de todos los funcionales multilineales que toman k vectores y k covectores definidos en la variedad al campo de los números reales:

$$T : \underbrace{V^* \times V^* \cdots \times V^*}_{p \text{ veces}} \times \underbrace{V \times V \cdots \times V}_{q \text{ veces}} \to \mathbb{R}$$

Este objeto tiene el nombre de tensor de orden (p, q), donde p es el componente contravariante y q el componente covariante, y se caracterizan principalmente por ser invariantes bajo cualquier cambio de coordenadas. Ahora bien, tomando en cuenta que cualquier tensor es un espacio vectorial, existe un producto asociado a dicho objeto llamado 'producto tensorial' que manda dos tensores T_1 y T_2 de orden (p_1, q_1) y (p_2, q_2), a un tensor $T_1 \otimes T_2$ de orden $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$. Dado que el producto tensorial genera tensores de orden superior, se puede demostrar que el espacio vectorial tensorial es generado por el producto tensorial de sus bases (incluyendo sus duales)

$$T = T^{i1\ldots ip}_{j1\ldots jq} \underbrace{\sigma_{i1} \otimes \sigma_{i2} \cdots \otimes \sigma_{ip}}_{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{\sigma^{*j1} \otimes \sigma^{*j2} \cdots \otimes \sigma^{*jq}}_{q \text{ veces}}$$

Habiendo dicho esto, es posible obtener casos particulares de este objeto, entre los cuales se encuentran las k-formas, los vectores o bichos más extraños. En particular, una *k-forma diferencial* es un tensor covariante

[44]Se puede demostrar que el producto más natural entre dos vectores corresponde al conmutador $[\mathbf{v},\mathbf{u}]$.

de orden (0,q). Sin embargo, al considerar al espacio de todas las formas diferenciales en sí mismo como un espacio vectorial, se puede demostrar que el producto tensorial no define realmente un producto en este espacio. Para ello, es importante "anti-simetrizar" el objeto que resulta del producto tensorial. Al hacerlo, se define un producto para el espacio de formas diferenciales llamado *Producto Exterior* con la notación "$\wedge$". Por consiguiente se tiene que toda forma diferencial se puede escribir como:

$$\alpha = \alpha_{j1\ldots jq} \underbrace{\sigma^{*j1} \wedge \sigma^{*j2} \cdots \wedge \sigma^{*jq}}_{q \text{ veces}}$$

Naturalmente, a las bases duales $\{\sigma^{*i}\}$ se les denota como $\{dx^i\}$. Esta notación tiene una razón de ser y que involucra a un operador, análogo a la derivada de funciones, que se puede definir en el espacio de formas diferenciales: la *Derivada Exterior*. Este elemento es como un operador de ascenso, en el sentido de que manda una k-forma a una $k+1$-forma, con la propiedad esencial que $d^2\alpha = 0$ para toda forma diferencial α. Tomando esta definición en cuenta, si cada coordenada de la variedad x^i es una función real definida sobre ella, o bien, una forma diferencial de orden cero, su diferencial exterior dx^i resulta ser un covector asociado a la i-ésima dirección, es decir, la base dual.

Habiendo definido los objetos geométricos en cuestión, es posible especificar dos propiedades de las k-formas diferenciales que, como se verá abajo, tendrán gran relevancia en un contexto topológico. Se dice que una k-forma α es cerrada si:

$$d\alpha = 0$$

Mientras que se dice que una k-forma α es exacta si existe una forma diferencial β de orden $k-1$ tal que:

$$d\beta = \alpha$$

Como es de esperarse, una k-forma diferencial exacta es cerrada (debido a la propiedad esencial $d^2\alpha = 0$). Sin embargo, no siempre una k-forma diferencial cerrada será exacta. Como se verá más adelante, este hecho tiene su raíz en las propiedades topológicas de la variedad. Como un adelanto, puede demostrarse que una k-forma diferencial cerrada será exacta siempre y cuando el "grupo de homotopía" sea la identidad (lema de Poincaré).

Por último, falta por definir los mapeos entre los objetos geométricos en cuestión. Particularmente, mapeos entre vectores y formas diferenciales. Para este fin, habría que especificar el dominio y la imagen asociada a dichos mapeos para ambos casos. De este modo, se puede decir que un mapeo entre vectores es una aplicación que se realiza entre espacios tangentes, en general, asociados a puntos específicos de dos variedades, mientras que un mapeo entre formas diferenciales es una aplicación entre el espacio cotangente definido en dichos puntos. El primer mapeo corresponde al *Push-forward* de un vector a otro, mientras que el segundo corresponde al *Pull-back* de una forma diferencial a otra. Dado que se trata de espacio duales, el cambio de coordenadas inducido en el espacio euclidiano de ambos mapeos es distinto y se relacionan inversamente. Específicamente, el push-forward "manda" a un vector de una variedad a otro vector de otra variedad, mientras que el pull-back "regresa" una forma diferencial definida en la segunda variedad a una forma diferencial de la primera. Por ende, cabe concluir que al definir mapeos de este tipo en solo una variedad se ha logrado caracterizar formalmente el grupo de transformaciones entre diferentes objetos geométricos de la misma variedad.

Hasta aquí se ha dado una breve introducción a la geometría diferencial, incluyendo grupos de Lie, variedades, y objetos que viven en estas últimas, como los vectores y las k-formas diferenciales. No obstante, nótese que todos estos conceptos han sido definidos respecto a un punto p de la variedad, es decir, respecto al espacio tangente definido en ese punto, o bien, el espacio de las formas diferenciales en el mismo punto. Además, cualquier sistema de coordenadas se define en un entorno a cualquier punto de la variedad donde cualquier cambio a otro sistema de coordenadas es suave. Esto conduce a pensar que la geometría diferencial es, en realidad, el estudio de las propiedades geométricas locales de una variedad. Afortunadamente el matemático también dispone de herramientas suficientes para poder analizar propiedades que dependan de la variedad en su totalidad. En este contexto surge la *Topología Algebraica* como una disciplina que se encarga de analizar en profundidad los espacios topológicos, en particular, las variedades diferenciables. Su importancia radica en que sus conceptos son esencialmente globales, es decir, dependen de la totalidad del espacio. Además, proporciona una manera de clasificar las variedades en términos de deformaciones (homeomorfismos, o bien, mapeos continuos e invertibles). Es decir, vincula diferentes variedades (geométricamente hablando) mediante deformaciones continuas, tal cual como una goma de mascar se deforma en figuras diferentes sin separarlo en piezas. Un ejemplo ilustrativo corresponde a la deformación de un triángulo para obtener una circunferencia, ya que podemos transformar el primero y lograr construir el segundo de forma continua, sin romperlo ni pegarlo. No obstante, una circunferencia no puede deformarse continuamente en un segmento, ya que habría que partirla, plegarla o pegarla. De este modo, en comparación a la geometría euclidiana local, dos variedades son topológicamente equivalentes en un sentido mucho más amplio: deben tener el mismo número de "trozos", "huecos", "intersecciones", etc. Una pregunta clave que surge en la topología algebraica tiene relación con el hecho de cómo definir la equivalencia topológica entre diferentes variedades. En este contexto, surgen dos conceptos importantes dentro de la disciplina: el grupo de homotopía y el grupo de co-homología de una variedad.

Desde un acercamiento informal, el *Grupo de Homotopía* habla acerca de la "porosidad" de una variedad. Considérese una esfera bi-dimensional S^2, y con ello un conjunto de lazos de la misma dimensión, es decir, curvas parametrizadas cerradas en ella. Por ejemplo, los círculos máximos o los paralelos. En seguida, surge la cuestión si al definir mapeos entre curvas cerradas, dichos mapeos resultan ser continuos. Es decir, si los círculos máximos o los paralelos, cuyo origen (y punto final) coinciden, son deformables entre sí. La respuesta para el caso de la esfera es positiva, dado que siempre es posible contraer un círculo máximo en un paralelo "rodeando" a la esfera. No obstante, para el caso de cualquier variedad, podrían haber algunas curvas que se puedan deformar entre sí y otras que no (dependiendo de la topología de la variedad). Por ejemplo, un caso distinto a la esfera corresponde al toro (una dona), dado que una curva que rodea a éste de manera horizontal no es deformable a las curvas (en forma de anillos) que cruzan verticalmente al hoyo. Debido a esta característica topológica de cualquier variedad, es posible "dividir" a esta última en diferentes conjuntos de curvas, cuyos elementos sean deformables entre sí. Específicamente, se dice que el *Grupo Fundamental* (o el primer grupo de homotopía) de la variedad, o bien del grupo de Lie en cuestión, son clases de equivalencia de curvas cerradas con origen y destino en un punto de la variedad. Por ejemplo, dado que todas las curvas cerradas que se definen en una esfera son contractibles a un punto, se dice que el primer grupo fundamental de la esfera es la identidad, o el grupo nulo. Contrariamente, para el caso del toro, es posible definir exactamente dos familias con un número infinito de curvas que se contraen entre sí, por ello, su grupo fundamental corresponde a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Habiendo definido el primer grupo de homotopía, faltaría introducir un concepto más general, de tal forma que los lazos se sustituyan por otro tipo de variedades, como pueden ser, superficies de dimensión mayor. Al conjunto de todos los grupos que codifican información topológica de una variedad en este sentido se le llama grupo de homotopía. Como se verá más adelante, los grupos de homotopía guardan información topológica muy útil, como es el caso de la 'conexidad' de las variedades, en el sentido informal de que "están hechas de una misma pieza".

Ahora bien, para definir el grupo de co-homología de una variedad, se debe recordar las propiedades de las k-formas diferenciales, especialmente las k-formas exactas y cerradas de una variedad. El *Grupo de Co-homología* es el grupo de familias que se pueden formar al tomar el conjunto de formas diferenciales cerradas $\{d\alpha_i = 0\}$ que también sean exactas. Es decir, que para cualquier familia de formas diferenciales cerradas $\{d\alpha_i\}$, existe una forma diferencial en común β tal que $d\beta = \{\alpha_i\}$. La relevancia de definir este concepto radica en que cualquier variedad puede ser caracterizada en términos de propiedades más simples, a diferencia de los grupos de homotopía.

En esta breve introducción matemática se ha logrado definir los siguientes elementos fundamentales: por un lado los espacios en sí mismos, o bien, variedades diferenciables, y por otro lado, todos sus componentes: mapeos (grupo de transformaciones) y objetos matemáticos. Tomando en cuenta estas definiciones, se ha caracterizado local y globalmente a cualquier variedad, así como también se han identificado algunos conceptos importantes que serán imprescindibles al momento de incursionar en los fundamentos de la Física.

10.2.2. El Programa de Wigner y Weyl

Una vez que se tiene una noción clara de los conceptos técnicos que se tratarán en esta tesis, es momento de incursionar en un análisis detallado de la propuesta estructuralista que aquí se pretende caracterizar. Con este propósito en mente, es importante, antes que todo, identificar a la estructura matemática que permita contribuir a la resolución de los problemas semánticos que enfrenta una tesis realista en el ámbito de la Física contemporánea. En vista de lo que se trató en la introducción, se busca una estructura matemática que pueda interpretarse de forma clara, ó bien, que represente fidedignamente una estructura física y concreta, y que sea empíricamente adecuada. No obstante, dado que evidentemente esta estructura es de naturaleza matemática, estos dos aspectos con respecto a los cuales se desea caracterizar deben traducirse en términos de un lenguaje matemático que permita su elucidación al nivel formal. La cuestión que aquí conviene tratar corresponde a si existe dicho lenguaje. En esta y la siguiente sección se dará una respuesta positiva a esta pregunta, con base en diferentes referencias científicas y filosóficas. Por ahora, la discusión se enfocará en el tipo de lenguaje que es más apropiado para que un formalismo pueda satisfacer las condiciones de claridad y adecuación empírica. Posteriormente se analizará de qué manera dicho formalismo puede considerarse una estructura.

La primera mitad del siglo veinte fue testigo del creciente interés en aspectos fundacionales de la Física en la víspera de nuevos descubrimientos que tuvieron lugar en el campo de las matemáticas. En este contexto, una respuesta temprana hacia esta dirección fue sugerida por Wigner, quién fundó y desarrolló un programa significativamente ambicioso que consistía en dar cuenta de los fenómenos cuánticos y relativistas en términos de la invarianza de propiedades físicas bajo cierto grupo de transformaciones matemáticas, regularmente interpretadas como "simetrías de la Naturaleza" [French, 1999]. Salvo algunas aproximaciones e idealizaciones, esta idea llevó a Wigner al descubrimiento de que la física "observable"[45] de partículas elementales podía formularse en términos de un grupo de transformaciones, representadas matemáticamente como Representaciones irreducibles de un Grupo de Lie. En particular, este descubrimiento permitió describir rigurosamente la manera en que las Representaciones unitarias e irreducibles del *Grupo de Poincaré* (*ISO(1,3)*) permiten que: i) a cada partícula se le pueda asociar dos parámetros: la masa y el espín; ii) que toda partícula sea invariante con respecto a un grupo de simetría espacio-temporal, de tal manera que pueda considerarse un objeto genidéntico; iii) que toda partícula sea indivisible; y iv) que a cada partícula se le pueda asociar un conjunto de observables que describan sus estados posibles [Bain, 2000, p.402]. La intuición detrás de estos descubrimientos es que existe una correlación entre los valores de las propiedades físicas con los parámetros que identifican a las Representaciones irreducibles. De esta manera, mediante una clasificación de este tipo de Representaciones, Wigner pudo identificar las propiedades de masa, espín y paridad, propias de la Física "observable" de partículas elementales. Aquí conviene proponer un ejemplo ilustrativo: Considérese un átomo de hidrógeno, donde un electrón rota libremente en torno a su núcleo. Debido a este movimiento rotacional, se sabe que la *MCU* asigna a este sistema varias propiedades, entre las cuales se encuentra el momento angular total. Despreciando los grados de libertad internos (el espín), uno puede representar la dinámica de este sistema en términos de un grupo de Lie abstracto, es decir mediante el *Grupo Especial Ortogonal* (el grupo cuya representación natural es el conjunto de rotaciones continuas alrededor de un punto) *SO(3)*. Se puede demostrar que las Representaciones irreducibles de *SO(3)* en el espacio de estados del átomo de hidrógeno (el espacio de Hilbert) son, en efecto, un grupo de matrices complejas de dimensión $N = (2j + 1)$ (donde j es un entero positivo), que transforma vectores de estado. De esta forma, los valores del momento angular asociado a este sistema se pueden expresar en términos de números cuánticos invariantes bajo transformaciones en el espacio de Hilbert $j = (N - 1)/2$, que son, después de todo, los eigenvalores del operador del momento angular que pueden observarse en las líneas del espectrales del átomo de hidrógeno. En resumen, el momento angular se puede derivar de las propiedades invariantes de las Representaciones de un grupo de Lie, sin considerar descripciones acerca del estado del sistema. En palabras de Eddington:

> [...] In fundamental investigations the conception of group-structure appears quite explicitly as the starting point; and nowhere in the subsequent development do we admit material not

[45] Observable en el sentido de que descubrió una teoría matemática que es empíricamente adecuada con respecto a los fenómenos experimentales de la *MCU* y *RE*.

derived from group structure. [Eddington, 1939, p.143].

Con este espíritu, pero desde un punto de vista un poco distinto, Weyl trató de construir una plataforma teórica desde el cual las leyes y principios fundamentales de las teorías físicas pudieran reconstruirse [French, 2014, p.75]. En el corazón conceptual de este programa se encontraba una intuición filosófica respecto a las características invariantes, atemporales y universales de las leyes de la Física. En este sentido, si el ideal era reconstruir una teoría en términos de principios matemáticos fundamentales de la manera más general posible, entonces todo indicaba que dichos principios tenían que incluir los aspectos invariantes, atemporales y universales de sus leyes. Con este propósito, Weyl propuso buscar, caso por caso, invarianzas en la estructura matemática de las teorías físicas bajo algún grupo de transformaciones, tomando en cuenta que estas últimas tenían que definirse en términos del lenguaje matemático en el que la teoría estaba formulada [French, 2014, pp.74-79]. El resultado fue alentador al poder caracterizar la estructura matemática invariante atribuida a las leyes de una teoría mediante las Representaciones de un Grupo de Lie sobre el espacio donde se definen. De esta manera, gracias a la estructura especial de los Grupos de Lie y sus Representaciones en espacios matemáticos, se constituyó un puente fundamental entre la dinámica y la geometría.
Ahora bien, en vista de los resultados descubiertos por Wigner y Weyl, es importante dar cuenta de una jerarquía entre los Grupos de Lie y sus Representaciones, y por ende, explicar la contraparte metafísica de este tipo de jerarquía. Una vez que se asume una correspondencia unívoca entre las Matemáticas y la Física, es importante aclarar que los Grupos de Lie, comúnmente conocidos como grupos de simetría, son objetos matemáticos abstractos que no tienen interpretación física alguna, hasta que actúan sobre un espacio matemático. Este espacio puede ser el espacio-tiempo, o bien, el espacio de estados de una teoría particular. Por ejemplo, en el caso del átomo de hidrógeno, este espacio corresponde al espacio de Hilbert. De este modo, las Representaciones del Grupo de Lie en cuestión corresponden a la contraparte física del grupo, comúnmente conocidas como grupo de transformaciones. El punto es que estas transformaciones permiten identificar objetos invariantes definidos en alguno de estos espacios. Estos objetos, conocidos como simetrías, corresponden tanto a las leyes, que se expresan en términos de ecuaciones diferenciales (en el programa de Weyl), como a las propiedades físicas de la teoría correspondiente (en el programa de Wigner), que se expresan generalmente mediante vectores y que tienen una relación directa con los hechos empíricos (líneas espectrales, experimentos del tipo Stern-Gerlach, etc.). Nótese que este procedimiento no requiere de una descripción del estado del sistema, ó bien, de alguna referencia al lenguaje estándar en el que se expresan las leyes de la teoría. Al contrario, deja de lado cualquier descripción de los objetos, las propiedades y las leyes, y se centra en las invarianzas que ocurren en el espacio de la Representación.
A este respecto, algunos filósofos con actitudes más pesimistas han dicho que si bien, las Representaciones de los grupos de simetría individualizan los objetos mediante su carácter invariante, no es posible evitar un compromiso ontológico con respecto a este tipo de objetos [Ladyman, 1998, p.421]. Por ejemplo, en el caso del átomo de hidrógeno, el rol que desempeñan las Representaciones irreducibles de $SO(3)$ es la de describir las invarianzas bajo el cambio de los estados del átomo de hidrógeno que, después de todo, corresponde a un conglomerado de objetos de naturaleza no estructural. Sin embargo, nótese que el procedimiento empleado por Wigner y Weyl nunca refiere al estado de los sistemas físicos de modo que se les interprete

de manera realista, al contrario, toda referencia que se hace con respecto a cualquier propiedad física se re-conceptualiza en términos estructurales. En este sentido, en la parte superior de la jerarquía ontológica se encuentran los grupos de simetría, representados por grupos de Lie, y en la parte inferior se encuentra el espacio de la Representación. Las Representaciones irreducibles que, metafísicamente hablando, son una copia del grupo en el espacio de Representación, son transformaciones que dejan invariante a algunas cantidades definidas en él. Sorprendentemente, estas cantidades las podemos asociar (nosotros humanos) a las propiedades de sistemas físicos individuales, ó bien, a las leyes de las teorías, pero ello no significa que estos sistemas tengan un lugar predominante en esta jerarquía ontológica[46]. De esta manera, siguiendo con el programa de Weyl es posible identificar de manera formal y rigurosa un formalismo que sea claro, en términos del cual se expresen las leyes de una teoría al identificar su grupo de simetría y los espacios matemáticos donde se construyen. Así mismo, siguiendo con el programa de Wigner, también es posible identificar un formalismo que sea empíricamente adecuado, en el sentido de que pueda dar cuenta de los fenómenos observables (líneas espectrales, experimentos del tipo Stern-Gerlach, etc.)[47].

Ahora bien, es importante mencionar algunos ejemplos y con ello enfatizar en que existen diferentes tipos de grupos de simetría que forman parte de estos sorprendentes descubrimientos. De aquí en adelante, el enfoque de la discusión estará dirigido a ambos programas tomando en cuenta las consecuencias significativas del programa de Weyl en lo que respecta a la claridad del formalismo, y el programa de Wigner en lo que respecta a su adecuación empírica.

En el contexto de la *MC*, se sabe que las fuerzas que actúan sobre un objeto en movimiento son equivalentes para cualquier observador moviéndose a velocidad constante respecto a él. Por esta razón, se demostró que la simetría correspondiente a las leyes de la *MC* es el *Grupo de Galileo*[48] (*Gal*) [Bargmann, 1954, Levy, 1967], el cual actúa o se representa en el espacio newtoniano de tal manera que la fuerza resulta ser un objeto invariante. Ahora bien, uno desearía generalizar este resultado para todas las teorías de la Física. Sin embargo, para tal propósito habría que advertir que *Gal* tiene algunas limitaciones que pueden apreciarse en otros dominios, sobre todo, en relación a la estructura del espacio donde naturalmente actúa y por ende al tipo de Representaciones que admite. En la literatura física y filosófica existe una distinción que se puede apreciar entre diferentes grupos de transformaciones: los que se describen en términos de grupos de simetría dinámicos y los que lo hacen en términos de grupos de simetría espacio-temporales [French, 2014, pp.150-151]. Las simetrías dinámicas se interpretan regularmente como simetrías internas, debido a que están asociadas a una variedad diferenciable en la que actúa, o bien, se Representa (espacio fase, espacio de Hilbert, etc.), y desde la cual se obtienen las leyes y los principios de las teorías en consideración. Por ejemplo, la ecuación de Schrödinger, cuyas soluciones no se definen en el espacio-tiempo sino en el espacio de Hilbert, ó bien, las simetrías de norma, cuyas Representaciones no tiene ninguna contribución a las

[46]En la parte que concierne a la dimensión epistemológica del *REO* que se caracteriza en este trabajo (sección 10.5), se analizará con rigor y detalle esta jerarquía ontológica, tomando en cuenta aspectos epistémicos que entran en juego en la investigación tanto matemática como científica.

[47]Nuevamente la manera en que los objetos observables se re-conceptualizan a partir de una estructura se analizará más adelante en 10.5, cuando se hable acerca de la dimensión fenomenológica de la estructura.

[48]Ver la Definición 49 en A.

soluciones de las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, las simetrías espacio-temporales actúan en las variedades espacio-temporales correspondientes a estas teorías (espacio newtoniano, espacio de Minkowski, etc.). Por ejemplo, *Gal* que, como bien ya se dijo, es el grupo de simetría de la *MC*, ó bien, *ISO(1,3)* en la *RE*. Por supuesto, tomando en cuenta los alcances de la mente humana, nosotros (los seres humanos) estamos interesados primordialmente en los grupos de simetrías que actúan sobre el espacio físico accesible a nuestra experiencia sensible, es decir, al espacio-tiempo newtoniano. Sin embargo, tanto la *RE* como también otras teorías contemporáneas sugieren que el espacio fundamental en el que actúan los grupos de simetría sea diferente al newtoniano.

10.2.3. El Perfil Estructural del Formalismo

> Whenever differential equations describe nature, their group structure describes relationships amongst natural phenomena. [Wulfman, 2011, p.15]

Teniendo como base el programa de Wigner y Weyl, ahora creo conveniente aclarar la manera en que la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones puede construir un formalismo que sea estrictamente estructural. Es decir, que mediante este formalismo se pueda representar la estructura del mundo bajo un "isomorfismo". Aquí valdría la pena recordar que una estructura es, a grandes rasgos, un conjunto de relaciones. Teniendo en cuenta esta definición y habiendo establecido una jerarquía entre los Grupos de Lie y sus Representaciones es posible identificar algunos aspectos estructurales en términos de una red compleja de relaciones.

Antes de entrar en detalles, considérese el mismo ejemplo ilustrativo del grupo de Lie *SO(3)*. Este grupo de Lie admite una representación natural en el espacio euclidiano en términos de la cual se obtiene un conjunto de rotaciones de la esfera $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, y $R_z(\theta)$, donde x, y, y z son ejes ortogonales de rotación. Del mismo modo, existe un automorfismo de *SO(3)* que se obtiene a partir de una rotación suave respecto a estos ejes, mandando rotaciones $R_x(\theta)$ en rotaciones $\alpha(R_x(\theta))$ con respecto a otros ejes. Esto permite concluir que la clase de todos los automorfismos forma un subgrupo de *Aut(SO(3))*, que a su vez es isomorfo al grupo mismo *SO(3)*. Este resultado se puede comprobar fácilmente si uno se imagina, por ejemplo, dos maneras de que un avión pueda llegar a su destino partiendo de un mismo origen. En efecto, puede partir de la ciudad de Quito en el Ecuador hacia el norte para dirigirse al Polo Norte, pero también podría dirigirse hacia el este, y una vez llegando al continente africano dirigirse hacia al norte en dirección al mismo destino. Este ejemplo pone de manifiesto que un grupo de Lie es, desde un punto de vista abstracto, un elemento que obedece ciertas reglas de correspondencia. Una vez que este grupo se representa en el espacio euclidiano, es posible ver que dichas reglas de correspondencia se interpretan de acuerdo a una propiedad de clausura que se satisface entre rotaciones respecto a diferentes ejes. Por ejemplo, se puede comprobar que en el caso del avión, se tiene:

$$R_x(\pi/2) = R_z(\pi/2) \cdot R_y(\pi/2)$$

Esta propiedad de clausura es, después de todo, consecuencia de la definición de un grupo de Lie respecto a una operación de multiplicación bien definida. De este modo, la Representación de un grupo de Lie es, por definición, una transformación entre elementos que se definen en una variedad o espacio de Representación que satisface una regla de correspondencia bien definida, que se incluye en la definición del grupo abstracto. Tomando en cuenta esta referencia, se tiene la intuición de que los grupos de Lie son, después de todo, un conjunto de elementos que tienen cierta estructura, ó bien, un conjunto de relaciones, las cuales se establecen de acuerdo al tipo de reglas de correspondencia que satisfacen, es decir, a la regla de multiplicación que se define al asumir la propiedad de clausura. A este respecto, en Braithwaite [1929] se define la estructura de un grupo de Lie como la suma entre los elementos del grupo abstracto y su modo de combinación (reglas de multiplicación). Por ejemplo, en el caso de *SO(3)*, los elementos del grupo corresponderían a $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, y $R_z(\theta)$ (bajo la representación natural), y su modo de combinación sería las propiedades de multiplicación de la función α, definida como $\alpha(R_x(\theta))$. Sin embargo, el argumento en términos del cual los elementos del grupo y sus modos de combinación son aspectos que constituyen la estructura del grupo, no se ha librado de algunas objeciones. En efecto, se ha reiterado que cualquier formulación matemática, incluida la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones, configura implícitamente un lenguaje que no puede evitar referencia a elementos no estructurales:

> The doctrine that *only* structure is known involves the doctrine that *nothing* can be known that is not logically deducible from the mere fact of existence, except ("theoretically") the number of constituting objects. [Newman, 1928, p.144]

Es decir, los elementos del grupo y la forma en que se combinan, apelan a un lenguaje en términos de objetos (los grupos) y las propiedades que satisfacen (su regla de multiplicación). Contrariamente a este tipo de objeciones, en [Eddington, 1939] se reivindica el aspecto estructural de los grupos de Lie, enfatizando en que los elementos del grupo no pueden definirse sin expresar de antemano las reglas de multiplicación que los define como grupo. En otras palabras, los elementos del grupo son lo que son debido a la relación que guardan con la estructura del grupo. De este modo, aunque sea inevitable referir a objetos, como sería el caso de los elementos del grupo, estos elementos son, después de todo, entes secundarios en la jerarquía estructural del grupo, que se definen o se re-conceptualizan en términos de esta estructura. Al adoptar una actitud realista con respecto a estos grupos abstractos, se vuelve a considerar un aspecto indiscutiblemente importante, es decir, la diferencia que existe entre la descripción de un dominio en términos de un lenguaje objetual y los elementos ontológicos que existen en ese dominio. Tomando en cuenta esta observación, los elementos del grupo son entes matemáticos a los que se hace referencia mediante una noción intuitiva de objeto e individuo, pero que fundamentalmente son entes que no pueden individuarse sino es en términos de las reglas de multiplicación que satisfacen. Así mismo, dado que la Representación de un grupo es, por así decirlo, una transformación o una relación que se satisface entre elementos de un espacio de Representación, los elementos de un grupo son, en sí mismos, relaciones que se satisfacen entre los elementos de la variedad donde actúan. Bajo la suposición de que las transformaciones definidas en esta variedad son una copia metafísica del grupo, esto permite, en palabras de Eddington, asumir que los elementos que se definen en el espacio de Representación son aquellos que sí tienen cierta individualidad. Esto, sin embargo, no quiere decir que los objetos y sus propiedades existen, sino que es posible referirse a ellos en términos de las Representaciones de un grupo, sin que se les interprete como entes ontológicos. Tomando en cuenta estas observaciones, Eddington caracteriza la estructura que constituye la teoría de grupos y sus Representaciones en términos de un patrón de relaciones (una regla de multiplicación) que se satisface entre otro tipo de relaciones (elementos de un grupo de Lie). En sus propias palabras:

> [...] group theory enters physics as a way of expressing the relationships between relations and that whatever the nature of the entities, the use of group theory allows us to abstract away the 'pattern' or structure of relations between them. What the group-structure represents, then, is the 'pattern of interweaving' or 'interrelatedness of relations'. [Eddington, 1939, pp. 137–40].

Siguiendo con [French, 2014, Ch.4] y dando justicia al legado de Eddington, aquí pretendo seguir con esta caracterización de estructura que tiene, por así decirlo, una correspondencia natural con el lenguaje de la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones. En efecto, teniendo como base el programa de Wigner y Weyl, es posible construir un formalismo que sea estrictamente estructural. Es decir, que mediante este formalismo se pueda representar la estructura del mundo bajo un "isomorfismo".

Una vez que se han establecido las bases filosóficas necesarias, es momento de ser explícitos con respecto al tipo de estructura que se anda buscando. A este respecto, conviene recordar que lo que se busca es una estructura matemática cuya interpretación satisfaga dos requisitos: claridad y adecuación empírica. De este modo, asumiendo una noción de representación lo más cercano a un "isomorfismo", se plantea reivindicar el compromiso ontológico del *REO* mediante la identificación de una estructura matemática, en términos de la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones, y que haga justicia a los requisitos antes mencionados. Específicamente, en [De Gosson, 2001][De Gosson & Hiley, 2011] (teoría matemática que tendrá el nombre *GH*) se sugiere que la estructura matemática asociada al grupo de Lie simpléctico promete una continuidad entre la estructura formal y fundamental que subyace a la *MC* y la *MCU*. Así mismo, salvo a algunas aproximaciones, demostraré que es posible identificar dicha estructura en el seno de las simetrías subyacentes a la *RE*. No obstante, antes de enfocarse en las consecuencias filosóficas que se le pueden atribuir a esta teoría matemática y hacer una caracterización fidedigna de la misma, es importante dar un breve resumen de su propuesta, y una vez hecho esto, describir rigurosamente su contenido matemático.

10.3. El Sendero Entre la Mecánica Clásica y la Mecánica Cuántica

En la literatura física es posible encontrar diferentes propuestas que han tratado de elucidar una correspondencia matemática entre el dominio clásico y el cuántico. La base conceptual que todas estas propuestas comparten se fundamenta en la búsqueda de artificios matemáticos (añadidos a mano) que permitan elucidar conexiones entre los cuerpos teóricos de ambas teorías. Por supuesto, la naturaleza de estas conexiones ha sido estrictamente matemática o formal, sin ningún compromiso metafísico que la fundamente. Por ejemplo, las reglas de cuantización de Dirac entre las propiedades clásicas y los operadores cuánticos (ver en [Sakurai and Napolitano, 1994, p.48]), ó bien, la teoría de decoherencia de Zeh (ver en [Zurek, 1991]), que ha sido objeto de ardua discusión de la comunidad científica. Sin embargo, aunque todas estas estrategias son legítimas en términos de una finalidad que solo comprende aspectos predictivos (bajo un dominio

restringido), no se han podido evitar algunos problemas que yacen en el seno de su significado y su consistencia fundacional [De Gosson, 2001, p.17] y [Adler, 2003]. Después de todo, están lejos de constituirse como una teoría matemática unificada que abarque a ambos dominios. En estas circunstancias, *GH* sugiere construir un puente entre la Matemática y la Física, por medio de la identificación de una estructura común que subyaga a la *MC* y la *MCU*, pero con la cual sea posible discutir aspectos fundacionales menos problemáticos que trascienden el ámbito predictivo[49]. Ahora bien, antes de incursionar en la propuesta *GH*, es importante recapitular algunas ideas que dieron pauta al desarrollo de este tipo de teorías matemáticas. Una vez que se entiendan, al menos intuitivamente, las bases conceptuales de su propuesta, se procederá a realizar un breve resumen que pueda aproximar al lector a una lectura más profunda de su contenido.
Es bien sabido que la *MC* se puede construir en términos de otras formulaciones matemáticas diferentes a la mecánica newtoniana. Estas formulaciones enriquecen y generan nuevas líneas de investigación en lo que concierne a los sistemas mecánicos, al establecer por ejemplo, nuevos procedimientos independientes que determinen sus ecuaciones de movimiento. Un caso ejemplar es la formulación de Hamilton-Jacobi, que permite describir un sistema mecánico en términos de la evolución temporal de campos multidimensionales, los cuales determinan la dinámica de un sistema de partículas [Holland, 1995, pp-27-65]. Este punto de vista, ofrece algunas virtudes entre las cuales destacan la posibilidad de formular a la mecánica en términos geométricos y permite relacionar mediante analogías algunos fenómenos mecánicos con fenómenos ondulatorios. Para ello, se introducen dos ecuaciones diferenciales de primer orden. La primera determina, mediante $(N+1)$ variables $(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_N; t)$, la evolución temporal de un campo real $S(\mathbf{q}, t)$, llamado *Función Principal de Hamilton*, que es una función del espacio de configuración y el tiempo [Holland, 1995, p.32]:

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0$$

mientras que la segunda es una ecuación de campo que permite, a partir de S y una condición inicial $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ..., \mathbf{Q}_N)$ (salvo contantes de integración), determinar el campo de momento canónico de un sistema de partículas, las cuales pasan por un punto específico del espacio de configuración a un tiempo dado:

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_i}$$

donde $\mathbf{p}_i$ es el momento canónico asociado a cada partícula. Una característica especial de esta formulación es que, aunque su finalidad sea calcular la trayectoria que describe cada una de las partículas que componen al sistema, sus ecuaciones de campo codifican el potencial dinámico del sistema mediante la determinación de un conjunto infinito de trayectorias que describen un ensamble de partículas idénticas. Así mismo, a diferencia de la mecánica newtoniana, el momento de cada partícula ya no corresponde estrictamente a un grado de libertad del sistema, sino a una propiedad que se determina mediante el campo S, el cual codifica

[49] Aquí es importante mencionar que antes de que *GH* se publicara, ya existían algunas contribuciones que tenían como intención buscar una continuidad matemática entre ambas teorías. Por ejemplo, la propuesta de [Jordan & Sudarshan, 1961] que, recientemente ha sido retomada por [Thebault, 2016] en el contexto del *REO*.

la información de todas las posibles trayectorias del sistema, de acuerdo al valor que tome su posición inicial.

Ahora bien, resulta que tanto la *MC* como la *MCU* comparten un lenguaje bastante rico y robusto, que se puede formalizar mediante una generalización a la teoría de Hamilton-Jacobi [Holland, 1995]. Esta generalización tiene su fundamento en una analogía que se puede establecer entre fenómenos mecánicos y fenómenos ondulatorios, en lo que respecta al estudio de la luz. En efecto, se sabe que la formulación de Hamilton-Jacobi de la mecánica se puede interpretar en términos de una teoría de la luz corpuscular (la óptica geométrica de Fresnel), que comparte características afines con las propiedades ondulatorias del electromagnetismo bajo ciertas aproximaciones. En efecto, de acuerdo con la teoría de Fresnel, los rayos de luz pueden describirse en términos de un conjunto de partículas en movimiento, gracias a que las remanentes de los campos electromagnéticos (en una aproximación de frecuencias bajas) resultan ser funciones que obedecen una versión reducida de la ecuación de Hamilton-Jacobi: la ecuación de la eikonal [Arnold, 1989, Ch.1]. Este resultado no solo permite elucidar interpretaciones corpusculares de la luz, sino que también abre la posibilidad de interpretar a la mecánica en términos ondulatorios para casos particulares. Por ejemplo, es posible interpretar a la dinámica de un sistema de partículas libres en términos de un conjunto de trayectorias que atraviesan perpendicularmente a frentes de onda constantes, análogamente al movimiento que describe un barco sobre el mar al que le pegan las olas de frente [Holland, 1995, pp.41-45]. Ahora bien, esta interpretación parece ser simplemente una analogía entre diferentes teorías que postulan, por un lado, la existencia de partículas puntuales, y por el otro, la existencia de campos electromagnéticos, como puede ser el caso de la hipótesis de Planck en relación al estudio del cuerpo negro. Sin embargo, convendría preguntarse si una analogía similar se puede establecer en lo que respecta a los fenómenos de la materia en toda su generalidad. Es decir, que la teoría de Hamilton-Jacobi para sistemas mecánicos sea una aproximación de una teoría de campos de materia más general que permita establecer un puente entre fenómenos mecánicos y fenómenos ondulatorios. El primer indicio de una teoría de este tipo se remonta a la evidencia de fenómenos de difracción en experimentos con electrones. Crudamente, estos experimentos llevaron a la postulación de que los electrones tenían propiedades ondulatorias, ampliamente conocida como la hipótesis de de Broglie [Sakurai and Napolitano, 1994, p.46]:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

que permite identificar propiedades ondulatorias (el número de onda $\mathbf{k}$) con propiedades corpusculares de la materia (el momento $\mathbf{p}$). Ahora bien, para el caso particular de una partícula libre, resulta que la relación de de Broglie no es nada más que una ley de movimiento equivalente a la que aparece en la teoría de Hamilton-Jacobi. Es decir, sabiendo que cualquier onda plana se expresa como:

$$\phi = Re^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt)}$$

Al identificar a la fase de esta onda (salvo una constante $\hbar$) con $S = \hbar(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - wt)$, es decir, $\phi = R\exp(iS/\hbar)$, es fácil demostrar que, debido a la hipótesis de de Broglie, la siguiente ecuación se satisface:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}}S$$

En efecto, la ley de movimiento de la teoría de Hamilton-Jacobi es idéntica a la hipótesis de de Broglie, tomando en cuenta que una partícula libre se puede describir mediante una onda plana de la forma $\phi = R\exp(iS/\hbar)$. Sin embargo, esta relación por sí sola no puede establecer un vínculo dinámico entre la teoría clásica y la cuántica, debido a que no se ha especificado la manera en que dicha onda plana evoluciona en el tiempo. Con esta finalidad en mente, resulta sorprendente que hoy en día se tiene una formulación de la *MCU* en términos de una generalización a la ecuación de Hamilton-Jacobi en el dominio clásico. Como se verá más adelante, esta formulación es equivalente a la *TCB* en su versión original. Siguiendo con [Holland, 1995, pp.66-135], esta teoría expresa a las soluciones complejas de la ecuación de Schrödinger en términos de dos campos reales $S(\mathbf{q}, t)$ y $R(\mathbf{q}, t)$, mediante $\phi = Rexp(iS/\hbar)$. Al sustituir esta última en la ecuación de Schrödinger y al quedarse únicamente con su parte real, se obtiene la siguiente ecuación de campo:

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(\nabla_i S)^2(\mathbf{q}, t)}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla_i^2 R(\mathbf{q}, t)}{R(\mathbf{q}, t)} \right) + V(\mathbf{q}, t) = 0$$

que se puede interpretar a simple vista como una ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada. Al calcular la aproximación de longitud de onda pequeña ($\hbar \to 0$), y postulando la ecuación $\mathbf{p} = \boldsymbol{\nabla} S_{\mathbf{r}}$, se obtiene la ecuación clásica cuya solución es la función principal de Hamilton $S(\mathbf{q}, t)$. Tomando en cuenta este resultado y sin entrar a sus aspectos interpretativos, esta teoría ayuda a construir puentes formales y conceptuales entre la *MC* y la *MCU* que, de otro modo, parecería ser una tarea muy complicada.

Ahora bien, aquí hay que advertir la diferencia que existe entre el hecho de que la teoría de Hamilton-Jacobi admita una generalización de la cual una de las teorías se obtenga como caso particular, al caso hipotético de que ambas teorías puedan construirse mediante un formalismo en común, No es lo mismo decir que la *MC* se obtiene mediante la aproximación de una ecuación más general que rige otros dominios menos restringidos, a que exista un formalismo de la cual se obtengan las ecuaciones de evolución de ambas teorías. De este modo, debería existir un formalismo que permita determinar de manera precisa el origen de ambas ecuaciones, sin que se asuma una de ellas como la más fundamental. Tomando en cuenta que la teoría de Grupos de Lie y sus Representaciones tienen esta virtud por razones que ya se han mencionado, es momento de enfocarse en la propuesta de *GH*, sobre todo porque en ella se identifica una estructura de grupo que permite construir una formulación que es común a ambas teorías. A continuación se realizará un resumen muy breve de esta propuesta, con la intención de que el lector tenga una idea clara y precisa de la importancia y las consecuencias significativas que tiene en lo que respecta a este trabajo.

Análogamente a la teoría de Hamilton-Jacobi, la *MC* se puede construir en términos de la formulación hamiltoniana, como una de varias teorías matemáticas que son consistentes con sus virtudes predictivas. Esto se ha podido lograr mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, llamadas "ecuaciones de Hamilton", cuyas soluciones son curvas integrales de un campo vectorial definido en el espacio fase. Estas curvas están asociadas a un objeto matemático llamado el *Flujo hamiltoniano*, que es un grupo de un parámetro que manda puntos en puntos en el espacio fase de tal manera que mantiene invariante a las ecuaciones de Hamilton. Desde el punto de vista de la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones, el conjunto de flujos hamiltonianos se pueden identificar mediante matrices simplécticas (salvo derivadas en sus coordenadas[50]), que se generan mediante la acción del grupo simpléctico en el espacio fase (conocidas como transformaciones canónicas). Esto significa que el flujo, el cual se calcula mediante las ecuaciones de Hamilton, y por ende, por el Hamiltoniano, consiste en matrices simplécticas (salvo derivadas en sus coordenadas), cuyo conocimiento determina completamente la evolución del sistema mecánico. Esto permite elucidar una jerarquía entre las matrices simplécticas y las ecuaciones de Hamilton, donde las primeras se sitúan arriba de las segundas, en cuanto a su orden de importancia y dependencia. Análogamente, uno puede adoptar una estrategia similar en el contexto particular de la *MCU*, en cuyo caso la ecuación de Schrödinger resulta tener el mismo lugar secundario que tienen las ecuaciones de Hamilton. En efecto, se sabe que el conjunto de operadores de evolución forman un subgrupo de un parámetro de operadores unitarios en el espacio de Hilbert. En términos más formales, son una Representación del *Grupo Metapléctico* (*Mp(3)*) en el espacio de Hilbert. Pero dado que este conjunto determina completamente la evolución de un sistema, entonces la dinámica de la *MCU* se puede obtener directamente de las propiedades estructurales de *Mp(3)*.

Ahora bien, una vez que ambas teorías se han formulado en términos de la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones, queda por resolver si el subgrupo de un parámetro asociado a dichos operadores unitarios se relaciona matemáticamente con el subgrupo de un parámetro de los *Flujos hamiltonianos*. Con el propósito de responder a esta pregunta, es momento de recurrir a la propuesta de *GH*. En efecto, la base matemática de *GH* básicamente consiste en el siguiente argumento topológico (apelando a los trabajos [Folland, 1989] y [Leray, 1981]): en el mismo espíritu en que usualmente se obtiene el *Grupo de Espín* (*SU(2)*), como la *Doble Cubierta* del *Grupo Especial Ortogonal* (*SO(3)*), *Mp(3)* se puede obtener mediante la Representación unitaria de la *Doble Cubierta* del *Grupo Simpléctico* (*Sp(3)*). Esto implica (apelando a una propiedad de grupos cubierta) que el *Flujo hamiltoniano*, que es un subgrupo de un parámetro de *Sp(3)*, puede mandarse mediante una homomorfismo al único subgrupo de un parámetro de *Mp(3)*, es decir, al conjunto de operadores unitarios del espacio de Hilbert. Desde este punto de vista, la ecuación de Schrödinger se determina al construir la *Doble Cubierta* de *Sp(3)* (bajo este homomorfismo) que, al fin de cuentas, resulta ser el grupo de Lie de operadores unitarios que describen la evolución temporal del Hamiltoniano del sistema. A este respecto, es importante tomar en cuenta que la *Doble Cubierta* de *Sp(3)* no es estrictamente lo mismo que *Mp(3)*, sino que el primero es la Representación unitaria del primero. Sin embargo, dado que el primero es un grupo de Lie y al mismo tiempo una Representación fiel canónica, ambos grupos son isomorfos y pueden considerarse el mismo. De este modo, *Mp(3)* (que es análogo topológico a *Sp(3)* bajo un homomorfismo) se puede identificar como la base fundamental desde el cual se construye el formalismo cuántico, implicando una continuidad con la teoría clásica desde un punto de vista estrictamente matemático. En estas circunstancias, se puede concluir que *GH* permite dar una respuesta positiva en relación con la búsqueda de una estructura matemática unificada que pueda definir una relación de correspondencia entre la *MC* y la *MCU*. Ahora bien, una vez que se ha redactado un resumen de los resultados obtenidos por *GH*, es importante

[50] Esto se debe a que el *Flujo hamiltoniano* no es en general una matriz simpléctica, sino más bien la matriz jacobiana asociada. Unicamente cuando se tienen hamiltonianos cuadráticos (en la posición y el momento), la matriz jacobiana coincide con la matriz de transformación del flujo.

proceder a describir de forma más rigurosa los trabajos de de Gosson, Hiley y sus colaboradores [De Gosson, 2001][De Gosson & Hiley, 2011][De Gosson, 1990][Leray, 1981][Folland, 1989]. De esta manera, no habrá ninguna duda formal respecto a sus conceptos más técnicos, y se podrá elucidar algunos resultados matemáticos de manera consecuente, antes de pasar al contenido filosófico de los mismos. El lector que no está familiarizado con el lenguaje matemático puede pasar directamente a la sección dedicada a simetría espacio-temporal de la *MCU* (en 10.4). En esta sección, se verá como este estructura matemática puede extenderse al dominio relativista, tomando en cuenta algunas contribuciones que se han hecho al respecto.

10.3.1. Los Principios Matemáticos de la Mecánica

En su libro titulado *The principles of Newtonian and Quantum Mechanics* [De Gosson, 2001], como en su artículo más reciente [De Gosson & Hiley, 2011], de Gosson y Hiley desarrollan un puente de naturaleza topológico entre la teoría newtoniana y la *MCU* que promete tener consecuencias significativas al tratar de elaborar una descripción estructural en común. Es bien sabido que la mecánica newtoniana (una teoría de campos vectoriales en el espacio físico) puede ser formulada en términos de una función hamiltoniana definida en el espacio fase. Esta formulación sólo es válida para sistemas mecánicos con un tipo genérico de fuerzas y Hamiltonianos (maxwellianos). Para dichos sistemas, la acción del *Grupo Simpléctico* en el espacio fase define una simetría de la teoría clásica en cuestión. Paralelamente, se puede demostrar que esta última contiene el germen de una teoría que permite re-formular a la *MCU* en términos del formalismo hamiltoniano. Como se verá a continuación, para el caso de sistemas mecánicos con Hamiltonianos cuadráticos, esta formulación consiste en construir una Representación unitaria ordinaria de la *Doble Cubierta* del *Grupo Simpléctico*, comúnmente llamado el *Grupo Metapléctico*. De igual manera, es posible generalizar este resultado para Hamiltonianos genéricos al considerar análogamente la *Doble Cubierta* de un grupo más extenso: el grupo de simplectomorfismos, o bien flujos hamiltonianos con simetría simpléctica. Desde esta perspectiva, se puede demostrar que las ecuaciones de evolución Bohmianas son un resultado que emerge de la geometría simpléctica del espacio fase, diluyendo la línea que distingue a las ecuaciones de evolución de la *MC* y la *MC*.
En seguida, se escribirá un breve resumen del análisis simpléctico en el caso clásico. Posteriormente, se generalizará este resultado al caso cuántico.

10.3.2. Los Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Clásica

Considérese el movimiento de una pelota en caída libre. Este sistema físico, ampliamente discutido en libros de texto básicos de mecánica, es un fenómeno que puede ser descrito y explicado de diferentes formas. La manera en que Newton describió y trató de explicar dicho movimiento consiste en postular la existencia de fuerzas gravitacionales en el espacio físico. La pelota se precipita hacia el suelo debido a que una fuerza gravitacional constante actúa sobre ella en esta dirección, de modo que el cambio de su movimiento se debe a un agente mecánico y causal. El origen de dichas fuerzas tiene su raíz en leyes universales (las leyes de Newton) que dictaminan la relación entre la masa y aceleración de dicha pelota con las del planeta. Dado que el movimiento solo ocurre en una dimensión y además la acción de las fuerzas tienen dirección y sentido, la representación de la caída libre se hace en términos de "flechas" en una recta unidimensional. Sin embargo, un físico contemporáneo familiarizado con otro tipo de formulaciones, puede dar cuenta de dicho fenómeno por medio de otro tipo de descripción y explicación. En particular, puede describir la caída libre de la pelota por medio de la postulación de dos cantidades vectoriales físicas: la posición y el momento. Ambas cantidades se pueden representar simultáneamente en un espacio distinto a la recta unidimensional, es decir, en un espacio de dos dimensiones (un plano) de tal forma que cada punto en dicho espacio corresponde a dos vectores (en este caso dos números) que indican la posición y el momento de la pelota. De esta forma, las leyes que rigen el movimiento de la pelota ya no corresponden a las de Newton sino a las ecuaciones de Hamilton, que dependen de una función (el Hamiltoniano) directamente relacionada con la energía total del sistema. En este sentido, la explicación de la caída libre de una pelota ya no se presenta en términos de las fuerzas que actúan sobre ella, sino mediante dos cantidades vectoriales (la posición y el momento) que se determinan, de manera simultánea, a partir del conocimiento de la energía total del sistema. En este tipo de explicación, la noción de posición resulta ser para algunos físicos más natural (su definición solo requiere de la introducción de sistemas de referencia), y la noción de momento se fundamenta en el hecho empírico de que su valor es directamente proporcional a la velocidad, donde la constante de proporcionalidad corresponde, en este caso, a la masa de la pelota.

Este ejemplo pone de manifiesto las diferencias sustantivas entre una formulación (mecánica newtoniana), que se construye en el espacio físico mediante cantidades vectoriales, y otra formulación (la mecánica hamiltoniana), que se construye en el espacio fase de posición y momento.

Ahora bien, al enfocarse en la mecánica hamiltoniana, es importante considerar que el ejemplo anterior es un caso particular de una formulación más general que se define en el espacio fase. Desde un punto de vista formal, este espacio es una construcción geométrica de la variedad de configuración, que corresponde al espacio de posiciones (coordenadas generalizadas) de un sistema mecánico de dimensión equivalente al número de grados de libertad del sistema. Conocido como el fibrado cotangente, este espacio consiste en una variedad que se construye al asociar a cada punto de la variedad de configuración su espacio cotangente correspondiente, o bien, el espacio de las formas diferenciales en dicho punto de la variedad de configuración. El sistema de coordenadas del espacio fase se expresa mediante las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (q_1, \cdots, q_n; p_1. \cdots, p_n)$, siendo estos últimos los componentes de covectores definidos en cada punto de la variedad de configuración.

Ahora bien, tomando en cuenta estas definiciones, las ecuaciones de Hamilton son, después de todo, un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones corresponden a las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Estas últimas existen para todo tiempo y son únicas dadas algunas condiciones de continuidad y diferenciabilidad. En particular, existe un tipo de funciones llamadas *Hamiltonianos Cuadráticos* de la forma:

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + U(\mathbf{r}) \qquad \text{where} \quad U(\mathbf{r}) \geq A - B\mathbf{r}^2, B \geq 0$$

cuyas ecuaciones asociadas siempre tienen soluciones únicas. Estos incluyen los Hamiltonianos asociados a algunos sistemas mecánicos, como por ejemplo, un electrón en presencia de un campo magnético o una partícula en presencia de fuerzas de Coriolis.

Además de las características especiales de este tipo de Hamiltonianos, existe un concepto básico que representa la evolución de un sistema físico en el espacio fase: el *Flujo Vectorial Hamiltoniano*. Este objeto matemático es un mapeo (que tiene como parámetro el tiempo) que se efectúa de un punto a otro del espacio fase. La importancia y relevancia de dicho concepto radica en que la curva integral correspondiente al campo vectorial hamiltoniano:

$$X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{p}} H, -\nabla_{\mathbf{r}} H) \tag{10.1}$$

coincide con la curva que describe el mapeo correspondiente. Se puede demostrar que el flujo forma un grupo de un parámetro si el Hamiltoniano no depende del tiempo (en cuyo caso (10.1) forma un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales). En el caso contrario, es posible modificar la noción de flujo tomando en cuenta el intervalo de tiempo de la evolución del sistema, de tal forma que el tiempo inicial sea distinto de cero. Más adelante se dará su definición formalmente.

Una ventaja de trabajar con la formulación hamiltoniana es la relativa facilidad de representar la evolución de un sistema por medio de la estructura geométrica del espacio fase. Esta última contiene el germen de una formulación intrínsecamente relacionada con las simetrías geométricas que se definen en la *MC*. Como bien se ha definido, una simetría es un grupo de transformaciones que actúan sobre los objetos que se definen en un espacio matemático, de tal forma que las leyes de una teoría definidas en dicho espacio permanecen invariantes. En particular, el *Grupo Simpléctico* corresponde a la simetría de la mecánica hamiltoniana dado que las ecuaciones de Hamilton resultan ser invariantes bajo transformaciones simplécticas. Se puede construir de forma natural una 2-forma simpléctica en el espacio fase (que contiene la información de la evolución del Hamiltoniano asociado al sistema físico correspondiente) que resulta ser invariante bajo un tipo de transformaciones que, en general, se representan mediante transformaciones cuyas matrices jacobianas son simplécticas y definen un *Flujo hamiltoniano*.

10.3.3. La Mecánica Newtoniana y la Hamiltoniana

Tomando en cuenta los trabajos de Souriau y de Gallisot, de Gosson aborda a la mecánica newtoniana desde un enfoque geométrico que da cuenta de las interconexiones globales entre diferentes formulaciones de la *MC*. Específicamente, es bien sabido que la mecánica hamiltoniana emerge de la mecánica newtoniana al tomar en cuenta el campo vectorial asociado a las fuerzas newtonianas y definiendo una función hamiltoniana. Sin embargo, esta derivación que se encuentra en muchos libros de texto básicos de mecánica, esconde un ingrediente esencial que es indispensable para demostrar la equivalencia entre ambas formulaciones. Este ingrediente caracteriza una clase de fuerzas newtonianas que son compatibles con la formulación hamiltoniana, al que se conoce como el *Principio de Maxwell*. Tomando en cuenta estas observaciones, De Gosson demuestra que el principio de Maxwell implica que la segunda Ley de Newton puede expresarse en

términos de la forma diferencial de Poincaré-Cartan, lo que implica a su vez su equivalencia con el formalismo hamiltoniano de la *MC* y su invarianza galileana. En seguida, se verá en detalle esta demostración.
Las $6n$ soluciones $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (q^1, \ldots, q^{3n}; \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^{3n})$ para N partículas a la segunda ley de Newton en su formulación vectorial[51]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \qquad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m \tag{10.2}$$

determina N trayectorias en el espacio de estados extendido $\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^3_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R}_t$[52], o bien, en el espacio fase extendido $\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{R}_t$[53]. Estas trayectorias definen curvas integrales del campo vectorial newtoniano suspendido en el espacio fase extendido[54]:

$$X_N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = (\mathbf{p}/m, \mathbf{F}, 1) \tag{10.3}$$

Tomando en cuenta este campo vectorial es importante anunciar la siguiente definición:

Definición 1 (Principio de Maxwell)**.** [De Gosson, 2001, p.40] Considérese fuerzas no disipativas que dependen en las variables $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ y que tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \tag{10.4}$$

Donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos campos vectoriales que dependen de $(\mathbf{r}, t)$. Una fuerza de este tipo que implica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{10.5}$$

se dice que satisface el principio de Maxwell.

En términos del gauge $(\mathbf{A}, U)$ (libertad de norma)[55], la fuerza se escribe [De Gosson, 2001, p.41]:

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}} U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{v} \tag{10.6}$$

Este gauge se transforma como $(\mathbf{A}, U) \rightarrow (\mathbf{A} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi, U - \partial \chi / \partial t)$ para cualquier función escalar $\chi(\mathbf{r}, t)$, de tal manera que las ecuaciones anteriores resultan invariantes. Según de Gosson, estas transformaciones son cantidades físicas que pueden ser detectadas como el efecto Aharonov-Bohm, las fases de Berry y los ángulos de Hannay en *MC*.
Habiendo anunciado el principio de Maxwell es importante definir el siguiente objeto matemático:

---

[51]Donde $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ son los componentes de los vectores definidos en el espacio tangente en un punto del espacio de configuración.

[52]El espacio de estados es en términos formales el fibrado tangente, que consiste en asociar a cada punto del espacio de configuración el espacio tangente correspondiente.

[53]Para este caso, es necesario calcular la transformada de Legendre entre elementos del espacio tangente al espacio cotangente.

[54]Cualquier campo vectorial $\mathbf{u}$ en el espacio tangente al espacio fase de $2n$ dimensiones (considerado una variedad por sí mismo) se expresa como $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^i} + \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i}$. Dado que el espacio fase es el producto cartesiano entre espacios euclidianos, su espacio tangente resulta ser isomorfo al espacio de sus coordenadas, por lo que no hay necesidad de distinguir entre coordenadas y componentes de vectores del espacio fase. No obstante, en este trabajo se usará la notación simplificada en sus componentes $\mathbf{u} = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{p}})$ por motivos de claridad y formalidad.

[55]El gauge corresponde a un campo vectorial $\mathbf{A}$ y una función escalar U que se construyen mediante $\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{r}} U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ usando las condiciones (10.5).

Definición 2 (Forma lagrangiana)**.** [De Gosson, 2001, p.45] La forma lagrangiana (para una partícula) es una dos forma diferencial definida en el espacio cotangente al espacio de estados extendido $\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^3_{\mathbf{v}} \times \mathbb{R}_t$:

$$\Omega_{\mathbf{B}} = (m d\mathbf{v} - \mathbf{E}dt) \wedge (d\mathbf{E} - \mathbf{v}dt) + \mathbf{B}_{\mathbf{x}}(d\mathbf{y} \wedge d\mathbf{z}) + \mathbf{B}_{\mathbf{y}}(d\mathbf{z} \wedge d\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\mathbf{z}}(d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y}) \tag{10.7}$$

Ahora bien, se requiere de la siguiente proposición para llegar al resultado deseado:

Teorema (Principio de Maxwell y forma lagrangiana)**.** [De Gosson, 2001, p.45] La forma lagrangiana $\Omega_{\mathbf{B}}$ tiene las siguientes propiedades[56]:

(1) El principio de Maxwell se satisface sí y sólo si la forma lagrangiana es cerrada:

$$d\Omega_{\mathbf{B}} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \right. \tag{10.8}$$

(2) La segunda Ley de Newton se satisface sí y solo si la contracción de la forma simpléctica con el campo vectorial newtoniano suspendido $X_N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = (\mathbf{v}, \mathbf{F}/m, 1)$ es nula:

$$\Omega_{\mathbf{B}}[\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}), X_N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \right. \tag{10.9}$$

donde $\mathbf{u} = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{v}}, 1)$ es un campo vectorial en el espacio tangente del espacio de estados extendido[57].

Tomando en cuenta este resultado, se procederá a anunciar el teorema que conecta geométricamente a la formulación newtoniana con la hamiltoniana[58].

Teorema. [De Gosson, 2001, p.51] La forma lagrangiana (definida ahora en el espacio tangente al espacio fase extendido) es la diferencial de la forma de Poincaré-Cartán $\lambda_H = \mathbf{p}d\mathbf{r} - Hdt$:

$$\Omega_{\mathbf{B}} = d\lambda_H \tag{10.10}$$

asociada a un tipo de funciones hamiltonianas de la forma

$$H = (1/2m)(\mathbf{p} - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + U(\mathbf{r}, t) \tag{10.11}$$

comúnmente conocidos como *Hamiltonianos Maxwellianos*[59].

De esta modo, resulta ser que la 2-forma lagrangiana es una 2-forma exacta, lo que garantiza que también sea una 2-forma cerrada, en otras palabras, que se satisfaga el principio de Maxwell (de acuerdo con el primer teorema (10.8)). Es fácil probar que si se asumen las ecuaciones de Hamilton (o bien, la segunda

[56] La demostración se encuentra en [De Gosson, 2001, p.46].

[57] Tanto el principio de Maxwell como el gauge se extienden a sistemas de muchas partículas, tomando en cuenta que $\Omega_{\mathbf{B}} = \sum_{j=1}^{N} \Omega_{\mathbf{B_j}}$ y $\mathbf{B} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{B}_j(*d\mathbf{r}_j)$ son dos formas diferenciales correspondientes a la forma lagrangiana y al campo $\mathbf{B}$. Por ende, la existencia de un gauge $\mathbf{B}_j = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_j$ es equivalente a decir que la dos forma $\mathbf{B} = d\mathbf{A} = d(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}_j d\mathbf{r}_j)$ es exacta (pertenece al grupo de co-homología cuyo subgrupo normal es la diferencial exterior del gauge). Dado que una dos forma cerrada $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, no implica que sea exacta, la construcción de un gauge es posible si el primer y segundo grupo de homotopía del dominio en el que el campo se define es trivial.

[58] Su demostración se encuentra en [De Gosson, 2001, pp.51-52].

[59] La construcción de la forma de Poincaré Cartán tiene implícita tanto a la segunda Ley de Newton como a las ecuaciones de Hamilton.

ley de Newton) en la definición de la forma de Poincaré-Cartán, entonces por el teorema (10.9), se puede demostrar que las leyes newtonianas son válidas (o bien, las ecuaciones de Hamilton se satisfacen) y las fuerzas que se definen corresponden a una clase particular de funciones que el principio de Maxwell determina.
Aunado a este resultado, se puede concluir que las ecuaciones de Hamilton definen trayectorias o curvas integrales del campo vectorial hamiltoniano suspendido:

$$X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = (\mathbf{p}/m, \mathbf{F}, 1) = (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} H, -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} H, 1) \tag{10.12}$$

en el espacio fase extendido.
En seguida, se demostrará que las ecuaciones de Hamilton con funciones hamiltonianas maxwellianas son invariantes bajo el grupo de simetrías galileana. Esto indica que solo este tipo de funciones son compatibles con dicha simetría.
Como bien se indica en (Apéndice B, Sección B.1, Definición 49), el *Grupo de Galileo* (*Gal*), cuya acción en el espacio fase extendido se denota como g_m, es un grupo de Lie que se presenta como una matriz de diez dimensiones con multiplicación común de matrices. Este grupo es isomorfo al semi-producto del: *Grupo de Rotaciones* (*SO(3)*), ó bien, el *Grupo Especial Ortogonal* de dimensión tres; el *Grupo de Traslaciones* ($\mathbb{R}^3$); y el *Grupo de Boosts* ($\mathbb{R}^3$). Tomando en cuenta su definición, se puede demostrar lo siguiente[60]:

Teorema (La simetría galileana)**.** [De Gosson, 2001, p.62] Las únicas soluciones de las ecuaciones de Hamilton para los cuales se satisface

$$\mathbf{u} \to g_m \circ \mathbf{u} \quad \text{si} \quad H \to H \circ g_m \tag{10.13}$$

son Hamiltonianos maxwellianos.

10.3.4. El Grupo Simpléctico

La formulación hamiltoniana de la *MC* ya no se define en el espacio físico tridimensional (espacio euclidiano) donde transcurre el tiempo. En otras palabras, en dicha formulación *Gal* ya no actúa sobre el espacio-tiempo newtoniano mediante rotaciones, cambios de velocidad, traslaciones espaciales y temporales, que son, después de todo, transformaciones que representan el movimiento de un cuerpo. Al contrario, esta formulación se define en el espacio fase, el producto cartesiano de dos espacios euclidianos de dimensión N, donde cada dimensión representa un grado de libertad del sistema asociado al momento, ó bien, a la posición de la partícula en una dirección coordenada. En este sentido, el tipo de transformaciones que actúan en el espacio fase y que representan el movimiento del cuerpo en el espacio físico es distinto a la acción del grupo sobre este último. Habría que saber la forma en que un sistema mecánico evoluciona en el espacio fase y su correspondencia con su movimiento en el espacio físico. Con este propósito en mente, se buscará definir un tipo de transformaciones que actúan en el espacio fase, y que dejan invariante a las ecuaciones de Hamilton, de tal manera que el efecto de las leyes que rigen el movimiento de cualquier

[60] La demostración se encuentra en [De Gosson, 2001, pp.63-64].

cuerpo pueda representarse fielmente en este espacio $2n$-dimensional. Para ello, se comenzará a definir el grupo de *Matrices Simplécticas*:

Definición 3 (Matriz simpléctica)**.** [De Gosson, 2001, p.77] Una matriz simpléctica $\mathbf{s}$ es una matriz de $2n \times 2n$ con cuatro componentes (matrices de $n \times n$) que satisface la siguiente igualdad:

$$\mathbf{sJs}^T = \mathbf{s}^T\mathbf{Js} = \mathbf{J} \tag{10.14}$$

donde la matriz $\mathbf{J}$ se define:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{I}_{n\times n} \\ -\mathbf{I}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{pmatrix} \tag{10.15}$$

Como bien se anuncia en (Apéndice B, Sección B.1, Definición 50), las matrices simplécticas son matrices con determinante uno que definen un grupo de Lie *Sp(n)* de dimensión $n(2n+1)$ bajo la multiplicación (10.14):

$$Sp(n) \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \otimes_S U(n) \tag{10.16}$$

donde *U(n)* es el *Grupo Unitario* y $\mathbb{R}$ el grupo euclidiano.
En seguida, se demostrará que una matriz simpléctica puede expresarse, en general, como una transformación lineal entre el espacio tangente a diferentes puntos del espacio fase inducida por una transformación entre puntos del espacio fase. Para ello, se verá que es posible construir una 2-forma diferencial en el espacio cotangente al espacio fase llamada *Forma Simpléctica*, que resulta ser invariante al evaluarla en el espacio tangente definido en diferentes puntos.
Una manera de construir un covector en el espacio fase es mediante $\sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$, dado que, por definición, cada elemento p_i es un componente de un covector cuya base canónica es dq^i. Al operar esta 1-forma diferencial mediante la derivada exterior, se obtiene una 2-forma diferencial, que por construcción es una 2-forma cerrada. Este objeto es la forma simpléctica asociada al espacio fase y se define de manera formal a continuación:

Definición 4 (Forma simpléctica)**.** [De Gosson, 2001, p.78] La forma simpléctica es una 2-forma diferencial del espacio fase $\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, bi-lineal y anti-simétrica:

$$\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i = \mathbf{v}^T\mathbf{Ju} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r} \tag{10.17}$$

donde $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{p}}\,;\, \dot{\mathbf{r}}', \dot{\mathbf{p}}')$ son dos campos vectoriales del espacio tangente al espacio fase en algún punto[61].

Tomando en cuenta la siguiente relación fundamental entre la forma simpléctica, el campo vectorial hamiltoniano y la función hamiltoniana (otra forma de expresar a las ecuaciones de Hamilton):

$$\Omega(\mathbf{u}, X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p})) = dH(\mathbf{u})^{62} \tag{10.18}$$

[61] Tanto $\mathbf{u}$ como $\mathbf{u}$ son dos espacios vectoriales en el espacio tangente al espacio fase que se expresan como $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_1}} + \cdots + \dot{\mathbf{q}}_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{q_n}} + \dot{\mathbf{p}}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p_1}} + \cdots + \dot{\mathbf{p}}_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{p_n}}$, y $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}'_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'_1} + \cdots + \dot{\mathbf{q}}'_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}'_n} + \dot{\mathbf{p}}'_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'_1} + \cdots + \dot{\mathbf{p}}'_n \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'_n}$.

[62] Donde el primer término es la contracción de la forma simpléctica con el campo vectorial hamiltoniano.

se puede interpretar a la forma simpléctica como un objeto matemático que contiene toda la información de la evolución del sistema en cuestión (la que tiene el Hamiltoniano asociado H). Dado que no hay ningún impedimento que prohiba definir la acción de matrices simplécticas en el espacio tangente en diferentes puntos del espacio fase, se puede demostrar, por medio de (10.14), que dichos mapeos inducen un 'pull-back' o mapeo en el espacio cotangente del espacio fase que deja invariante a la 2-forma simpléctica:

$$\Omega(\mathbf{su}, \mathbf{sv}) = (\mathbf{sv})^T \mathbf{J}(\mathbf{su}) = \mathbf{v}^T \mathbf{J}\mathbf{u} = \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{10.19}$$

para cualquier par de campos vectoriales $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en el espacio tangente a un punto del espacio fase.

Ahora bien, después de haber definido formalmente a la forma simpléctica, en seguida se pretende demostrar que, en general, esta última es invariante bajo el jacobiano de transformaciones definidas en el espacio fase. No obstante, se verá que existe una excepción muy particular que consiste en que la forma simpléctica sea invariante bajo transformaciones lineales.

Considérese un espacio fase de dimensiones arbitrarias. Como bien se mencionó arriba, cada punto de dicho espacio especifica el valor de la posición y el momento de un sistema en un tiempo determinado. Si se tiene un sistema de N dimensiones, entonces la dimensión del espacio fase será equivalente a $2N$. Ahora, imagínese que se produce una película acerca de los sucesos que ocurren en dicho espacio mientras que el tiempo transcurre. No es difícil imaginar que, después de un tiempo considerable, se verá el trazo de una curva sobre este espacio. Sin embargo, si el productor de la película quisiera volver a ver lo que se ha grabado en un intervalo de tiempo particular, tendría que tener un medidor que indique la posición del sistema o la curva trazada en cada instante de tiempo. Este "medidor" tiene su contraparte formal en la geometría del espacio fase, al que se conoce como *Flujo Hamiltoniano*. En seguida, se tratará de elucidar el significado físico y geométrico de las matrices simplécticas por medio de este concepto fundamental[63].

Regularmente, en la literatura básica un *Flujo hamiltoniano* se define de la siguiente manera:

Las curvas integrales en el espacio fase extendido se definen como curvas parametrizadas $t \to (\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t)$, que coinciden con los vectores tangentes a cada punto del espacio fase extendido de un campo vectorial hamiltoniano suspendido:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = (\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} H, -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} H, 1) \tag{10.20}$$

Ahora bien, sea f_t un difeomorfismo en el espacio fase extendido que manda un punto $\mathbf{z}(t_0)$ a $\mathbf{z}(t)$, que es equivalente a una curva integral de X_H que pasa por esos puntos en el espacio fase extendido [De Gosson, 2001, pp.56-57]:

$$\frac{d}{dt} f_t(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = X_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \tag{10.21}$$

Este difeomorfismo define un grupo debido a que satisface

$$f_t \circ f_{t_0} = f_{t+t_0}, \ (f_t^{-1}) = f_{-t} \tag{10.22}$$

A este difeomorfismo se le llama el *Flujo Suspendido*, que se determina por medio del Hamiltoniano en cuestión. De igual forma, también es posible definir un flujo dependiente del tiempo f_{t,t_0} de la siguiente

[63] A partir de este momento, se usará la notación $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ para identificar un punto inicial en el espacio fase y $\mathbf{z} = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$ para un punto final.

manera

$$f_{t,t_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), t_0) = f_{t-t_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0), t_0) \tag{10.23}$$

Este elemento llamado *Flujo hamiltoniano*, que se define en el espacio fase ordinario tiene su origen en el espacio fase extendido. Su definición formal se indica a continuación:

Definición 5 (Flujo Hamiltoniano)**.** [De Gosson, 2001, pp.8,81] Los flujos hamiltonianos son difeomorfismos definidos en el espacio fase $f : \mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \to \mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$ que dependen de un parámetro t, tal que si t_0 es fijo, entonces la fórmula:

$$\mathbf{z(t)} = f_{t,t_0}(\mathbf{z}_0(t_0)) \tag{10.24}$$

define funciones $t \to \mathbf{r}(t)$ y $t \to \mathbf{p}(t)$ que satisfacen:

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t), \quad \dot{\mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{r}} H(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t) \tag{10.25}$$

junto con las condiciones iniciales $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ y $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$.

La interpretación más natural del *Flujo hamiltoniano* corresponde a una aplicación que manda puntos del espacio fase a un tiempo t_0 a otros puntos del espacio fase al tiempo t, y que coincide con la curva integral del campo vectorial hamiltoniano X_H definido en el espacio fase ordinario. Nótese que de (10.23), se sigue que el *Flujo hamiltoniano* hereda las propiedades de grupo del flujo suspendido. En efecto, los flujos hamiltonianos definen un grupo de difeomorfismos de un parámetro del espacio fase en sí mismo.
Ahora bien, considérese el jacobiano del *Flujo hamiltoniano* definido en todo punto del espacio fase:

$$s_{t,t_0}(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial r}{\partial p_0} \\ \frac{\partial p}{\partial r_0} & \frac{\partial p}{\partial p_0} \end{pmatrix} \tag{10.26}$$

Se puede demostrar que s_{t,t_0} es una matriz simpléctica, y que como tal, deja invariante a la forma simpléctica definida arriba (Ver Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3). En general, a los mapeos definidos en el espacio fase con esta característica de invarianza se les llama *Simplectomorfismos*, ó bien, *Transformaciones Canónicas*.
Nótese que el *Flujo hamiltoniano* f define un mapeo entre puntos del espacio fase, mientras que el grupo de matrices simplécticas asociadas al jacobiano definen un mapeo en el espacio tangente a cada punto del espacio fase. Esto se refleja en el hecho de que la matriz jacobiana, ó bien, las matrices simplécticas asociadas al mapeo f actúan sobre vectores en el espacio tangente, mientras que f es la regla de correspondencia entre diferentes coordenadas del espacio fase. No obstante, cuando el *Flujo hamiltoniano* corresponde a una transformación lineal de la forma:

$$\mathbf{z(t)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (\mathbf{z}_0(t_0)) \tag{10.27}$$

se presenta una particular excepción. En este caso, el jacobiano coincide con su transformación lineal asociada, por lo que el *Flujo hamiltoniano* se expresa como una matriz simpléctica que actúa en el espacio de coordenadas del espacio fase y que deja invariante a la forma simpléctica, o bien, define un simplectomorfismo en sí mismo. No es difícil probar que esta excepción es válida únicamente cuando el Hamiltoniano es

cuadrático en el momento y la posición.
Como bien se pudo apreciar a lo largo de este breve capítulo, las matrices simplécticas también juegan un papel importante para poder tener una interpretación geométrica de la evolución de un sistema clásico en el espacio fase. A este respecto, el *Flujo hamiltoniano* define mapeos, o bien, transformaciones en el espacio fase, cuyos jacobianos son, en general, matrices simplécticas. Estas últimas dejan invariante a la forma simpléctica, o bien a las ecuaciones de Hamilton, que determinan de manera única la evolución de cualquier sistema mecánico donde se ha definido un Hamiltoniano particular. En este sentido, se dice que las transformaciones canónicas son simetrías de la mecánica hamiltoniana.
Se puede concluir que existe una correspondencia entre la evolución del sistema en el espacio fase y el movimiento del cuerpo asociado a dicho sistema en el espacio físico, tomando en cuenta que en ambos espacios se definen transformaciones que dejan invariante a las leyes que rigen su evolución en el tiempo.

10.3.5. El Grupo Simpléctico Inhomogéneo

Ahora bien, hasta aquí se sabe que la simetría de la mecánica newtoniana corresponde a *Gal*, mientras que la simetría de la mecánica hamiltoniana corresponde a *Sp(n)*. Su diferencia radica en que cada grupo actúa en diferentes espacios matemáticos, ya sea, el espacio físico tridimensional o el espacio fase, respectivamente. Sin embargo, es bien sabido que bajo algunas restricciones cualquier simetría de una teoría puede actuar en espacios diferentes, siempre y cuando las leyes de la teoría, relativas a dichos espacios, resulten ser invariantes. Como bien se demostró en (10.13), *Gal* acepta una Representación en el espacio fase, que resulta ser una simetría de la mecánica hamiltoniana bajo un tipo de funciones hamiltonianas (Hamiltonianos maxwellianos). No obstante, si la acción de *Gal* en el espacio fase es una simetría de la mecánica hamiltoniana, como lo son las matrices simplécticas, habría que ver cuál es la relación entre *Sp(n)* y la acción de *Gal* en el espacio fase.
Tomando en cuenta estas observaciones, es posible definir un tipo de transformaciones en el espacio fase que se componen de matrices simplécticas (que dejan invariante a la forma simpléctica), y otro tipo de difeomorfismos menos restrictivos que definen traslaciones en el espacio fase. A este grupo se le llama *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* (*ISp(n)*) y tiene características diferentes a *Sp(n)*.
Como bien se muestra en (Apéndice B,Sección B.1, Definición 51), *ISp(n)* tiene características geométricas y topológicas de grupo, y por lo tanto, es un grupo de Lie conexo que contiene a *Sp(n)* como subgrupo:

$$ISp(n) \simeq \mathbb{R}^2 \otimes_S Sp(n) \tag{10.28}$$

En particular, es isomorfo al grupo de todas las matrices $(2n+1)\times(2n+1)$ del tipo:

$$(s, z_0) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{z} \\ \mathbf{0}_{1\times 2n} & 1 \end{pmatrix} \tag{10.29}$$

Tomando en cuenta este isomorfismo, es posible demostrar que la acción de *Gal* en el espacio fase es un subgrupo de *ISp(n)* de dimensión $n = 3$. Es decir, siempre y cuando $\mathbf{R}$ sea una rotación (una matriz $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ de 3×3), la transformación $g : (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \to (\mathbf{R}\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, \mathbf{R}\mathbf{p}_0 + \mathbf{p})$, que corresponde a la acción de *Gal* en el espacio fase (véase Apéndice B, Sección B.1, Definición 49) es un subgrupo de *ISp(3)* (en su presentación de matrices (10.29)). Específicamente

$$Gal \subset \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{6\times6} & \mathbf{z}_{6\times1} \\ \mathbf{0}_{1\times6} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{R}_{3\times3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}_{1\times6} & 1 \end{pmatrix} \tag{10.30}$$

Mediante la introducción de *ISp(n)*, se ha podido elucidar una relación entre *Sp(n)* y la acción de *Gal* en el espacio fase. En particular, es posible interpretar a la matriz simpléctica formada por rotaciones $\mathbf{R}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{R}_{3\times3} \end{pmatrix} \tag{10.31}$$

como “la componente simpléctica” de *ISp(n)*, mientras que la suma de los vectores del espacio fase como “la componente traslacional” de *ISp(n)*. Es evidente que si una transformación galileana no tiene rotaciones, entonces dicha transformación consiste en cambios de velocidad con traslaciones espaciales y temporales, que inducen únicamente una traslación en el espacio fase.
A continuación, se verá que existen un tipo de matrices simplécticas llamadas *Matrices Simplécticas Libres* que tienen asociadas de manera única funciones generadoras expresadas en términos de polinomios cuadráticos. Este procedimiento permitirá definir a *Sp(n)* en términos de este tipo de funciones generadoras. La importancia de introducir este tipo de funciones se verificará en la próxima sección.

10.3.6. Funciones Generadoras

Se empezará por definir lo que es un *Simplectomorfismo Libre*. Recuérdese que, en general, a los mapeos definidos en el espacio fase cuya matriz jacobiana es simpléctica se les llama simplectomorfismos, o bien, transformaciones canónicas.

Definición 6 (Simplectomorfismo libre)**.** [De Gosson, 2001, p.132] Un simplectomorfismo f que se define en un subconjunto del espacio fase es libre si dadas dos coordenadas $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r_0}$ del espacio, la ecuación:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \tag{10.32}$$

determina de manera única a los momentos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}_0$.

Ahora bien, se puede demostrar que un simplectomorfismo es libre si y sólo si (véase en Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3):

$$det\frac{\partial r}{\partial p_0} \neq 0 \tag{10.33}$$

Con esta condición en mente, considérese la siguiente definición:

Definición 7 (Función generadora)**.** [De Gosson, 2001, pp.133-134] Supóngase que f es un simplectomorfismo libre de tal forma que

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{r} = d\mathbf{p}_0 \wedge d\mathbf{r}_0 \tag{10.34}$$

donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ se expresan en términos de $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{p}_0$ por medio de (10.32).
De la ecuación (10.34) se obtiene:

$$d(\mathbf{p}d\mathbf{r} - \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0) = 0 \tag{10.35}$$

Lo que conduce a afirmar que el término dentro del paréntesis es una forma cerrada. Dado que el espacio fase es un conjunto contractible (puede ser deformado continuamente hasta convertirlo en un punto), entonces $\mathbf{p}d\mathbf{r} - \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0$ es también una forma exacta, y por lo tanto, existe una función $G = G(\mathbf{r}, \mathbf{p}; \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ de tal forma que:

$$\mathbf{p}d\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0 + dG \tag{10.36}$$

A la función G se le llama *Función Generadora*. Esta última puede expresarse mediante variables independientes $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}))$ si f es un simplectomorfismo libre.

Usando el resultado anterior y un resultado en (Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3), se puede probar la siguiente proposición:

Teorema (Función generadora y simplectomorfismo II)**.** [De Gosson, 2001, p.136] $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ es una función generadora para un simplectomorfismo libre si y sólo si[64]:

$$\mathrm{Hess}_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(W) \neq 0. \tag{10.37}$$

Este teorema se demuestra en (Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3). Tomando en cuenta estos resultados, se ha probado que existe una correspondencia entre los simplectomorfismos libres y funciones generadoras, siempre y cuando se satisfagan algunas condiciones específicas. De manera paralela, se puede determinar una relación análoga entre el conjunto de matrices simplécticas y las funciones generadoras. A este respecto, debe recordarse que, en general, los simplectomorfismos y las matrices simplécticas difieren en cuanto al espacio en el que actúan, al tratarse del espacio de coordenadas del espacio fase y el espacio tangente en cada punto del mismo, respectivamente. Sin embargo, habría que considerar simplectomorfismos que actúan como transformaciones lineales en el espacio fase y que su presentación en matrices resulta ser un subconjunto de las matrices simplécticas. Esta observación conduce a definir lo que se conoce como matriz simpléctica libre, y que define un simplectomorfismo libre en términos de una matriz simpléctica:

Definición 8 (Matriz simpléctica libre)**.** [De Gosson, 2001, p.133] Una matriz simpléctica

$$s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{10.38}$$

es libre si y solo si $\det(B) \neq 0$. Esto es una consecuencia trivial de (10.26) y del resultado de arriba, pues el elemento superior derecho de la matriz jacobiana asociada a f es efectivamente $\frac{\partial r}{\partial p_0}$.

Al conjunto de todas las matrices simplécticas libres se le denota como $Sp_0(n)$.
El siguiente teorema prueba que es posible determinar, de manera única, funciones generadoras de matrices simplécticas libres (para su demostración completa véase en Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3):

Teorema (Funciones generadoras de matrices simplécticas libres)**.** [De Gosson, 2001, pp.225-226]

[64] Aquí $\mathrm{Hess}_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}$ denota el determinante de la matriz hessiana.

(a) Supóngase que $\mathbf{s}$ es una matriz simpléctica libre. Una función generadora W para $\mathbf{s}$ es la forma cuadrática

$$W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T DB^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^T B^{-1}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0^T B^{-1}A\mathbf{r}_0 \tag{10.39}$$

donde DB^{-1} y $B^{-1}A$ son matrices simétricas y $\mathbf{s}$ se expresa como (10.38).

(b) Si por el contrario, W es una forma cuadrática de la forma:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{2}\mathbf{r}^T P\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^T L\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0^T Q'\mathbf{r}_0 \\ P &= P^T \ , \ \ Q = Q^T \ , \ \ \det L \neq 0 \end{aligned} \tag{10.40}$$

entonces la matriz:

$$\mathbf{s}_W = \begin{pmatrix} L^{-1}Q & L^{-1} \\ PL^{-1}Q - L^T & PL^{-1} \end{pmatrix} \tag{10.41}$$

es una matriz simpléctica libre cuya función generadora está dada por (10.40).

(c) Si $(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbf{s}(\mathbf{r_0},\mathbf{p_0})$ entonces la función generadora está dada por

$$W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}_0) \tag{10.42}$$

Las matrices simplécticas libres $Sp_0(n)$ resultan ser un subconjunto de matrices simplécticas $Sp(n)$ que, en su totalidad, definen a $Sp(n)$ con propiedades de multiplicación bien definidas. No obstante, antes de terminar este capítulo convendría preguntarse si el conjunto de matrices simplécticas libres $Sp_0(n)$ definen un grupo con propiedades de multiplicación específicas. Para poder responder a dicha pregunta es necesario definir un producto en $Sp_0(n)$:

Definición 9 (Producto de matrices simplécticas libres)**.** [De Gosson, 2001, p.229] Sean $\mathbf{s}_W$ y $\mathbf{s}_{W'}$ dos matrices simplécticas libres asociadas a las funciones generadoras $W = (P, L, Q)$ y $W' = (P', L', Q')$. El producto se define como $\mathbf{s}_{W''} = \mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$, donde $W'' = (P'', L'', Q'')$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} P'' &= P - L^T(P' + Q)^{-1}L \\ L'' &= L'(P' + Q)^{-1}L \\ Q'' &= Q' - L'(P' + Q)^{-1}L'^T \end{aligned} \tag{10.43}$$

Se puede probar que el producto $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$ define una matriz simpléctica libre si y solo si (véase en el Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3):

$$det(P' + Q) \neq 0 \tag{10.44}$$

Este resultado indica que $Sp_0(n)$ no es un grupo en general. Para que éste fuera el caso, el conjunto $Sp_0(n)$ debería definir, sin restricciones, un producto para cualquiera de sus elementos. No obstante, de manera similar se puede probar que las matrices simplécticas libres tienen definido una matriz inversa (véase en el Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3):

Teorema (Matriz simpléctica libre inversa)**.** [De Gosson, 2001, p.226] Las matrices simplécticas libres tienen definido un elemento inverso que tiene la forma

$$\mathbf{s}^{-1}_{W(Q,L,P)} = \mathbf{s}_{W(-Q,-L^T,-P)} = \begin{pmatrix} L^{T(-1)}P & -L^{T(-1)} \\ -(QL^{T(-1)}P - L) & QL^{T(-1)} \end{pmatrix} \tag{10.45}$$

Aquí es importante mencionar que, aunque el producto no tuviera restricciones de ningún tipo, aunado a la existencia del elemento inverso, se puede probar que la matriz identidad $\mathbb{I}$ no pertenece al conjunto de las matrices simplécticas libres (no puede expresarse mediante el triplete (P,L,Q)). Este hecho confirma que el conjunto de matrices simplécticas libres no es un grupo.
Una vez definido el producto de matrices simplécticas libres, y tomando en cuenta este último resultado, se puede verificar que el conjunto de matrices simplécticas libres genera al grupo simpléctico *Sp(n)* por medio del producto (véase demostración en Apéndice B, Sección B.3, Teorema B.3):

Teorema (Producto generador de matrices simplécticas)**.** [De Gosson, 2001, p.231] Cualquier matriz simpléctica $\mathbf{s}$ es el producto de dos matrices simplécticas libres $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$.

Hasta el momento se ha definido de manera formal una correspondencia entre funciones generadoras y el grupo simpléctico restringido a matrices simplécticas libres. Se ha llegado a un resultado que permite generar al grupo simpléctico por medio de matrices simplécticas libres. A continuación se quiere demostrar la importancia de dicha correspondencia, al definir una Representación del grupo de matrices simplécticas, asociadas a funciones generadoras únicas, en un espacio diferente. Este espacio corresponde a un espacio de Hilbert particular, es decir, al espacio de funciones medibles cuadrado-integrables y complejo-valoradas. Posteriormente se verá las implicaciones de este tipo de Representación en el contexto de la *MCU*.

10.3.7. Extensión a los Fundamentos de la Mecánica Clásica

Recuérdese que *Sp(n)* es un grupo de Lie conexo y que es homeomorfo al semi-producto (10.16). Una de las propiedades relevantes de cualquier grupo de Lie consiste en que el conjunto de sus elementos define una variedad diferenciable, por lo cual es posible apelar a la geometría diferencial como lenguaje conductor. De esta manera, aparte de las propiedades geométricas comunes de una variedad, es posible determinar los grupos de homotopía del grupo, y en particular, el grupo fundamental.
Por ejemplo, en (Apéndice A, Sección A.1, Teorema A.1.3), se demuestra que el primer grupo fundamental de *Sp(n)* corresponde al grupo de números enteros que se operan mediante la suma $(\mathbb{Z}, +)$, es decir, cada número entero forma un conjunto de curvas en *Sp(n)* cuyos elementos son homotópicos entre sí (son deformables entre sí).
Tomando en cuenta este concepto topológico, se puede proceder a definir un segundo concepto que será de gran importancia en esta discusión: los *Grupos Cubierta*.

10.3.8. Cubiertas

Considérese el conjunto de líneas rectas que cruzan el origen en un plano. Por otro lado, considérese el conjunto de líneas rectas orientadas que cruzan el origen en el mismo plano, es decir, líneas que tienen una orientación y que, en algún punto, cruzan por el origen. Nótese que el total de líneas que existen en ambos casos es infinita, sin embargo, debido a que sólo existen dos posibles orientaciones en cualquier objeto de una dimensión, entonces se puede inferir que por cada línea recta estándar existen dos líneas rectas orientadas. Esto indica que los dos conjuntos correspondientes comparten una relación dos-a-uno, en el sentido de que por cada elemento de uno existen dos del otro. Esta relación entre diferentes conjuntos puede ser generalizada de tal forma que, por cada elemento de uno, existen N del otro, incluso si N es infinito. Tomando en cuenta este ejemplo, se procederá a definir un concepto importante.

La relación en cuestión se representa mediante un homomorfismo llamado *Proyección de Cubierta* cuyo dominio pertenece al "espacio N cubierta" (por ejemplo, las líneas rectas orientadas que pasan por el origen) y su imagen al "grupo base" (las líneas rectas que pasan por el origen). En este sentido, existe un mapeo continuo que preserva las operaciones entre dos espacios y que no es inyectiva (para un tratamiento más formal véase en el Apéndice A, específicamente en A.2).

Este concepto es de gran utilidad, sobre todo en grupo de transformaciones que dejan invariantes algunos objetos geométricos, no en su primera, sino en su segunda, tercera o enésima acción sucesiva. Por ejemplo, la doble cubierta de *SO(3)* es el *Grupo Especial Unitario* (*SU(2)*), que son rotaciones y posibles estados del espín de un electrón, respectivamente. Esto quiere decir que para que un electrón permanezca igual sin cambiar su estado, se deben realizar dos rotaciones completas de 2π, de tal manera que el espín (que tiene dos estados) sea invariante. Esto se debe a que cada rotación corresponde a un cambio de un estado de espín $1/2$ a $-1/2$.

La existencia de una cubierta es, en general, un resultado que depende de algunas propiedades topológicas del grupo base (véase en el Apéndice A, Subsección A.2.4). Específicamente, el tipo de propiedades depende del orden de la cubierta en cuestión, y en particular, de su conexidad, como se verá a continuación. Sin embargo, para comprender de fondo este tipo de cuestiones es imprescindible apelar, antes que todo, a la definición de conexidad de un grupo (véase Apéndice A, Subsección A.1.3). De forma simplificada, un grupo es conexo si entre cualesquiera dos elementos existe una curva que está contenida en el grupo. Por otra parte, también existen otras definiciones similares pero que toman en cuenta lazos (curvas cerradas) en lugar de curvas arbitrarias. Se dice que un grupo es doble-conexo si en dos ciclos (vueltas) de un lazo parametrizado en la variedad diferenciable del grupo, se llega al elemento que corresponde al punto de partida. De este modo, este concepto puede generalizarse hasta definir un grupo N-conexo, como aquél en el que se requieren dar N-ciclos para poder regresar al punto de partida. Análogamente es posible definir un grupo simple-conexo como aquél en el que cualquier lazo que se construye en la variedad del grupo puede ser deformado a un solo punto del mismo. De aquí se sigue que cualquier grupo simple-conexo es equivalente a que su grupo fundamental sea nulo. Considérese un ejemplo ilustrativo: imagínese un barco de pesca que encierra a un cardumen de peces con una enorme red en forma de lazo. Un extremo de esta última se jala, poco a poco, por un marinero, de tal manera que el cardumen atrapado se va acercando al barco. Sin embargo, el éxito de la maniobra del marinero depende si existen arrecifes adentro del área que encierra la red. Si no hay arrecifes, entonces éste puede jalar hasta el punto de tener casi toda la cuerda en sus manos. Sin embargo si hay arrecifes, entonces no importa cuánto jale a la red, ésta no podrá ser contraída a la posición donde se encuentra el barco. Para este fin, se tendría que soltar mas cuerda de tal manera que rodeara de nuevo al cardumen pero en sentido inverso al primer tramo.

Ahora bien, este trabajo pone especial atención a un grupo base particular que es, a su vez, un grupo de Lie: el *Grupo Simpléctico*. Como este último es conexo por curvas, localmente conexo por curvas, y semi-

localmente simple-conexo (véase en Apéndice B, Sección B.1, Teorema B.1), el teorema de la función de ascenso correspondiente débil (véase en Apéndice A, Subsección A.2.3, Teorema A.2.3) prueba que para $b_0 \in$ *Sp(n)*, y para cada subgrupo H_q del primer grupo fundamental de *Sp(n)*, existe un mapeo de cubierta Π_q : $Sp_q(n) \rightarrow Sp(n)$ y un punto $e_0 \in \Pi^{-1}(b_0)$, tal que $\Pi_{q*}(\pi_1(Sp_q(n), e_0) = H_q$. No obstante, dado que cualquier subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$ puede expresarse como $(q\mathbb{Z}, +)$, con q un número natural, entonces $\Pi_{q*}(\pi_1(Sp_q(n), e_0) = q\mathbb{Z}$. Ahora considérese el teorema de la función de ascenso correspondiente fuerte (Apéndice A, Subsección A.2.3, Teorema A.2.3). Como el primer grupo fundamental de *Sp(n)* es $(\mathbb{Z}, +)$, y dado que *Sp(n)* es conexo por curvas, entonces la función de ascenso correspondiente ψ induce un mapeo biyectivo $\Phi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rightarrow \Pi^{-1}(b_0)$, lo que implica que existe un homeomorfismo entre los grupos cubierta para $q < \infty$ con los grupos cocientes $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
Ahora bien, gracias a las propiedades de conexidad de *Sp(n)*, se puede demostrar por medio del teorema de existencia del grupo universal (véase Apéndice A, Subsección A.2.6, Teorema A.2.6) la existencia de un único grupo cubierta que es simple-conexo, es decir, que su primer grupo fundamental es trivial. Este grupo se le llama la cubierta universal de *Sp(n)* y se denotará aquí como $Sp_\infty(n)$. Del teorema de la función de ascenso correspondiente débil y fuerte A.2.3, se puede demostrar que el subgrupo H de $(\mathbb{Z}, +)$ que corresponde al mapeo de cubierta universal $\Pi_\infty : Sp_\infty(n) \rightarrow Sp(n)$ es trivial, es decir, existe un homeomorfismo entre $(\mathbb{Z}, +)$ y $\Pi^{-1}(b_0)$.
Tomando en cuenta estas observaciones entonces se puede clasificar a todos los grupos cubierta de *Sp(n)* de la siguiente manera:

Definición 10 (*Grupos cubierta simplécticos*)**.** [De Gosson, 2001, pp223-224] El *Grupo Simpléctico* (*Sp(n)*) genera un conjunto de grupos de Lie conexos $Sp_2(n), Sp_3(n), \ldots, Sp_q(n), \ldots, Sp_\infty(n)$, llamados grupos cubierta de orden q, de tal manera que para cada q existe un homomorfismo (proyección cubierta) $\Pi_q : Sp_q(n) \rightarrow Sp(n)$ con las siguientes propiedades:
Si $q < \infty$:

(1) Π_q es suprayectiva y q-a-uno. En otras palabras, $\Pi_q^{-1}(I)$ contiene q elementos.

(2) Π_q es continua y $\forall s \in Sp(n) \exists\, U_s$, una vecindad abierta que es suavemente cubierta. Es decir, que la imagen inversa se expresa como $\Pi_q^{-1}(U_s) = \bigcup_\alpha V_\alpha$, tal que V_α es una vecindad en $Sp_q(n)$, son abiertos disjuntos $V_\alpha \bigcap V_\beta$ $\forall \alpha, \beta$, y para toda α la restricción de Π en V_α define un homeomorfismo de V_α a U_s.

Si $q = \infty$:

(3) La *Cubierta Universal* $Sp_\infty(n)$ es el único grupo de Lie simple-conexo tal que existe una proyección cubierta de $Sp_\infty(n)$ a $Sp_q(n)$ para toda q incluida $q = 1$.

Como se verá en las siguientes secciones, la relevancia de este tipo homomorfismos tiene directa relación con que una de las cubiertas de *Sp(n)* puede expresarse en término de operadores unitarios. Es decir, de entre todas las cubiertas que existen para *Sp(n)*, la cubierta de orden dos $Sp_2(n)$ (la *Doble Cubierta*) corresponde al único grupo conexo que admite una Representación en el espacio de Hilbert como operadores unitarios. A esta Representación frecuentemente se le llama el *Grupo Metapléctico* (*Mp(n)*). En términos de teoría de Representaciones, *Mp(n)* es una Representación unitaria de $Sp_2(n)$ en el espacio de Hilbert, es decir, un homomorfismo de la forma $Sp_2(n) \rightarrow Mp(n)$.

10.3.9. El Grupo Metapléctico

A continuación, se definirán transformaciones en el espacio de funciones medibles cuadrado-integrables y complejo-valoradas, que se proyectan al grupo de matrices simplécticas libres. Se probará que una extensión de estas transformaciones generan una Representación unitaria de *Sp₂(n)*. Para este fin se evocarán elementos técnicos de [Leray, 1981] y [De Gosson, 2001], que ayudarán a la comprensión de la presente discusión.

A cada matriz simpléctica libre $\mathbf{s}_W$, se le puede asociar exactamente dos automorfismos unitarios en el espacio de Schwartz, llamados *Transformadas de Fourier Cuadráticas* (véase en Apéndice C, Sección C.1, Definición 56 y Teorema C.1):

$$S_{W,m}\Psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2} \Delta(W) \int_{\mathbb{R}^n_\mathbf{r}} e^{iW(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}\Psi(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{10.46}$$

Donde $\Delta(W) = i^m \sqrt{|detL|}$, Ψ son funciones cuadrado integrables y complejo-valoradas en el espacio de Schwartz $L^2(\mathbb{R}^n_\mathbf{r})$, y m se define por la condición $arg(det(L)) = m\pi \mod 2\pi$. En efecto:

Definición 11 (Índice de Maslov)**.** [De Gosson, 2001, p.233] El índice de Maslov de una transformada de Fourier cuadrática $S_{W,m}$ corresponde al número entero m asociado a W. En general, tomando en cuenta que $det(L) = Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(-W)$ se tiene:

$$m\pi = arg(Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(-W)) \tag{10.47}$$

Exactamente dos índices de Maslov modulo 4 están asociados a cada W: m y $m+2$. Esto se prueba fácilmente al ver que para cada W, existe una matriz invertible L, tal que $detL = e^{i(m+2)\pi} = e^{im}$.

Una pregunta surge en torno a esta definición: ¿Será que las transformadas de Fourier cuadráticas forman un grupo? Respuesta: en general, no. Para verlo, basta con saber la existencia de un elemento neutro e inverso, así como una propiedad multiplicativa de grupo bien definida. En efecto, se puede encontrar un elemento inverso del conjunto de transformadas de Fourier cuadráticas $(S_{W,m})^{-1}$ de la siguiente forma (véase en Apéndice C, Sección C.1, Teorema C.1):

$$(S_{W,m})^{-1} = S_{W^*,m^*} \quad \text{con} \quad W^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = -W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) \text{ y } m^* = n - m \mod 4 \tag{10.48}$$

Donde si $W = (P, L, Q)$, entonces $W^* = (-Q, L^T, -P)$. En este sentido, el elemento neutro es, por consecuencia, el operador identidad $\mathbb{I}$. Sólo habría que demostrar que el producto entre dos transformadas de Fourier cuadráticas es, a su vez, una transformada de Fourier cuadrática. Sin embargo, como se verá a continuación, no siempre se satisface esta propiedad de grupo (véase en Apéndice C, Sección C.1, Teorema C.1):

Teorema (Producto de transformadas de Fourier cuadráticas I)**.** [Leray, 1981, p.16] Sean $S_{W,m}$ y $S'_{W',m'}$ dos transformadas de Fourier cuadráticas asociadas a W y W' respectivamente, y sea $S''_{W'',m''}$ la transformada de Fourier cuadrática asociada a la función generadora W'' del producto $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$ (ver en (10.43)). Entonces, en general, se tiene:

$$S_{W,m}S'_{W',m'} = \pm S''_{W'',m''} \tag{10.49}$$

El doble valor que se obtiene del lado derecho de la ecuación se puede eliminar de la siguiente manera (véase en Apéndice C, Sección C.1, Teorema C.1):

Teorema (Producto de transformadas de Fourier cuadráticas II)**.** [De Gosson, 2001, pp.236,246][Leray, 1981, p.16] La siguiente igualdad se satisface $S_{W,m}S'_{W',m'} = S''_{W'',m''}$ para algún par (W'', m'') (donde W'' corresponde a la función generadora del producto $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$ (10.43)), sí y sólo si:

$$\det(P' + Q) \neq 0 \quad \text{y} \quad m'' = m + m' - \text{Inert}(P' + Q) \mod 4 \tag{10.50}$$

Donde $\text{Inert}(P' + Q)$ es el número de eigenvalores negativos de la matriz $P' + Q$.

Por ende, para que el conjunto de transformadas de Fourier cuadráticas $Mp_0(n)$ satisfaga las propiedades de grupo debe cumplir las condiciones (10.50). Se puede concluir que, en general, $Mp_0(n)$ no es un grupo. Como bien se demostró líneas atrás, cada una de estas transformadas es un operador unitario definido en $L^2(\mathbb{R}^n_x)$, es decir, en el espacio de funciones medibles cuadrado-integrables y complejo-valoradas. Estos operadores están asociados a las matrices simplécticas libres por medio de una fórmula bien definida (10.46), y que define una relación dos-a-uno: a cada matriz simpléctica libre están asociados exactamente dos elementos de $Mp_0(n)$, que corresponde a los dos posibles valores (modulo 4) de los índices de Maslov $m\pi = arg(Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(-W))$. Este hecho sugiere definir una correspondencia o un mapeo entre el conjunto total de transformadas de Fourier cuadráticas $Mp_0(n)$ y el conjunto total de matrices simplécticas libres $Sp_0(n)$:

Definición 12 (proyección parcial)**.** [De Gosson, 2001, p.237] Al mapeo $\Pi_0 : Mp_0(n) \rightarrow Sp_0(n)$ que asocia a cada transformada $S_{W,m}$ una matriz simpléctica libre $\mathbf{s}_W$ se le llama *Proyección Parcial*.

Se puede demostrar que (véase en Apéndice C, Sección C.1, Teorema C.1):

Teorema (Proyección parcial restringida)**.** Si $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$ define una matriz simpléctica libre, o bien, si $det(P' + Q) \neq 0$), entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\Pi_0((S_{W,m})^{-1}) = (\mathbf{s}_W)^{-1} \tag{10.51}$$

$$\Pi_0(S_{W,m}S_{W',m'}) = \mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'} \tag{10.52}$$

Habiendo definido este mapeo, se quisiera construir de manera análoga a un automorfismo definido en $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ que, sin embargo, consistiera en un conjunto de operadores unitarios que pudiera asociarse con el grupo de matrices simplécticas (y no con el conjunto de matrices simplécticas libres). Es decir, generalizar el mapeo Π_0 a un homomorfismo de grupo, cuya imagen correspondería a todos los elementos de $Sp(n)$ y cuyo dominio sería el total de los elementos de un grupo formado por operadores unitarios en $L^2(\mathbb{R}^n_x)$. En seguida se intentará definir este grupo.
En primera instancia, se puede comenzar por buscar un conjunto de operadores en $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ que satisfagan todas las propiedades de grupo. Para ello, puede que el conjunto $Mp_0(n)$ llegue a ser útil para el propósito en cuestión, pero se debe recordar que dos de sus elementos se corresponden con sólo un elemento del conjunto $Sp_0(n)$, que difiere del grupo simpléctico $Sp(n)$ en cuanto a que no define, en general, un grupo. No obstante, dado que es posible obtener cualquier matriz simpléctica por medio del producto de dos matrices

simplécticas (10.3.6), un posible candidato para el elemento que se anda buscando podría ser el conjunto que resulta del producto de dos o más elementos de *$Mp_0(n)$*. Al considerar en serio esta posibilidad, habría que demostrar que este conjunto, que consiste en el producto de elementos de *$Mp_0(n)$*, define un grupo, y además, que existe un homomorfismo de grupo entre este último y *Sp(n)*.

Definición 13 (Conjunto metapléctico *Mp(n)*)**.** [De Gosson, 2001, p.233] El conjunto metapléctico *Mp(n)* es el conjunto de todos los productos

$$S = S_{W_1,m_1} S_{W_2,m_2} \cdots S_{W_k,m_k} \tag{10.53}$$

de un número finito de transformadas de Fourier cuadráticas.

Para demostrar que efectivamente *Mp(n)* es un grupo, es necesario probar que este conjunto satisface todas las propiedades de grupo. En primer lugar, cualquier elemento de este conjunto multiplicado por otro será un elemento del conjunto por tratarse de un producto. El inverso puede definirse de manera análoga a (10.48), tomando en cuenta que el inverso de un producto $S = S_{W_1,m_1} \cdots S_{W_k,m_k}$ es $S^{-1} = S_{W_k^*,m_k^*} \cdots S_{W_1^*,m_1^*}$, cuyo elemento también pertenece a *Mp(n)*. De forma paralela, se puede definir el operador identidad $\mathbb{I}$ en el producto y también demostrar que S define un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^n_x)$. De ahora en adelante, se puede nombrar al conjunto metapléctico como el *Grupo Metapléctico* (*Mp(n)*).De manera análoga al *Grupo Simpléctico*, de aquí se sigue que es posible definir un elemento del *Grupo Metapléctico* $S \in Mp(n)$ por medio del producto de al menos dos transformadas de Fourier cuadráticas $S_{W,m}$ y $S_{W',m'}$.
Ahora sí, es posible definir un homomorfismo de grupo Π : *Mp(n)* $\rightarrow$ *Sp(n)* que satisface algunas condiciones que se especifican formalmente mediante el siguiente teorema (véase en Apéndice C, Sección C.1, Teorema C.1):

Teorema (Proyección cubierta metapléctica)**.** [De Gosson, 2001, p.238] El mapeo Π : *Mp(n)* $\rightarrow$ *Sp(n)* es un homomorfismo de grupo que satisface:

(a) Se preservan las propiedades de grupo:

$$\Pi(SS') = \Pi(S)\Pi(S') \tag{10.54}$$

(b) $\Pi(S_{W,m})$ es una matriz simpléctica libre.

(c) Π es una proyección de cubierta de la forma Π : *Mp(n)* $\rightarrow$ *Sp(n)*.

Hasta aquí se ha definido un grupo *Mp(n)* que actúa sobre $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ y que, de alguna manera, reproduce la acción de *Sp(n)* en el espacio fase. En este sentido, se ha encontrado que un simplectomorfismo definido en el espacio fase (o bien, una transformación canónica) puede inducir (en el espacio de Hilbert) otro tipo de transformaciones que se representan mediante operadores unitarios en $L^2(\mathbb{R}^n_x)$. Estas transformaciones son los elementos de *Mp(n)*, y la correspondencia entre éste y *Sp(n)* se puede expresar en términos de una función suprayectiva, en el sentido de que por cada elemento de *Sp(n)* hay dos elementos de *Mp(n)* (que corresponden a los dos posibles valores que pueden tener los índices de Maslov). Respecto a este punto, es posible definir índices de Maslov para el caso de cualquier elemento $SS' \in$ *Mp(n)*:

Definición 14 (Índices de Maslov. Caso general)**.** [De Gosson, 2001, p.247] Para cualquier $S, S' \in Mp(n)$, el índice de Maslov asociado al producto SS' se define:

$$m(SS') = m(S) + m(S') - q(s, s') \tag{10.55}$$

donde $q : Sp(n) \times Sp(n) \to \mathbb{Z}_4$ es un 'co-ciclo de grupo' o 'multiplicador de Schur'[65]. Se puede probar fácilmente que de (10.55) y de la propiedad asociativa $m((SS')S'') = m(S(S'S''))$ se satisface:

$$\sigma(ss', s'') + \sigma(s, s') = \sigma(s, s', s'') + \sigma(s', s'') \tag{10.56}$$

Nótese que para el producto de dos transformadas de Fourier cuadráticas, se tenía que $q(s, s') = \mathrm{Inert}(P' + Q)$, donde $\mathrm{Inert}(P' + Q)$ es el número de eigenvalores negativos de la matriz $P' + Q$. Esta condición era, después de todo, la que permitía la existencia de este producto. Sin embargo, en este caso más general, no es una condición sino una consecuencia o un resultado de las propiedades de *Mp(n)*. Quizá no sea de gran relevancia indicar las características significativas de $q(s, s')$ (ver en [De Gosson, 2001, pp.247-253] y particularmente en [Leray, 1981]), pero es importante resaltar que para construir *Mp(n)*, incluyendo sus propiedades de grupo, se debe satisfacer (10.55).
En seguida se dará una breve introducción a la teoría de Representaciones para *Sp(n)*. Se verá que existe un tipo de Representación de *Sp(n)* llamada la *Representación de Weyl* que define un conjunto de operadores unitarios μ que son inducidos por el grupo de automorfismos del *Grupo de Heisenberg Polarizado* en el espacio fase. Sin embargo, se demostrará que dichos operadores no forman, en conjunto, una *Representación Ordinaria* de *Sp(n)*, sino una *Representación Proyectiva*, debido a que no define un homomorfismo de grupo:

$$\mu(s)\mu(s') = \psi(s, s')\mu(ss') \tag{10.57}$$

Finalmente se identificará al elemento $\psi(s, s')$ con el co-ciclo $e^{i\pi/2[\mathrm{Inert}(P'+Q)+m(SS')-m(S)-m(S')]}$ que se ha definido arriba. En este sentido, se podrá concluir que la *Doble Cubierta* de *Sp(n)* permite determinar el co-ciclo asociado a la *Representación Proyectiva*. Este resultado justifica la existencia de una *Representación Ordinaria* de la *Doble Cubierta* de *Sp(n)* mediante operadores unitarios definidos en el espacio de Hilbert: el *Grupo Metapléctico*.

10.3.10. Representaciones del Grupo Simpléctico

Como se ha indicado arriba, una Representación de un grupo de Lie es una "copia"del grupo en un espacio matemático arbitrario. En el caso particular de un espacio vectorial como el espacio fase $\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, una Representación de un grupo G se define como un homomorfismo suave de G al grupo de automorfismos del espacio fase (ver en Apéndice A, subsección A.1.2, Definición 35). Si G es el *Grupo Simpléctico*, entonces a este último se le interpreta como un conjunto de transformaciones canónicas en el espacio fase (o bien, el jacobiano de dichas transformaciones) que dejan un objeto invariante: la forma simpléctica (y por ende las ecuaciones de Hamilton). Análogamente, para el caso de un espacio vectorial como el espacio de Hilbert

[65] $\mathbb{Z}_4$ es por definición el grupo cociente $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, es decir el grupo entero modulo 4.

complejo $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$, una Representación de un grupo G se define como un homomorfismo suave de G al grupo de automorfismos de $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$, $\rho : G \to Aut(L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}))$.
Ahora bien, se sabe que *Sp(n)* induce, mediante homomorfismos, un conjunto de transformaciones u operadores unitarios en el espacio de Hilbert, al que se le ha identificado con *Mp(n)*. Dado que estos operadores mandan funciones del tipo $L^2(\mathbb{R}^n_r)$ a funciones del mismo tipo, es posible identificar a este último como el grupo de automorfismos $Aut(L^2(\mathbb{R}^n_r))$. Este último define el rango de diferentes funciones, como puede ser el caso de $Sp(n) \to Aut(L^2(\mathbb{R}^n_r))$, o bien, $Sp_2(n) \to Aut(L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}))$. Sin embargo, no todas estas funciones definen un homomorfismo de grupo de Lie, es decir, una función $f : G \to H$ tal que dados dos elementos $g, g' \in G$ y $f(g), f(g') \in H$, preserva sus operaciones de grupo (ver en Apéndice A, subsección A.1.2, Definición 32) :

$$\mu(g)\mu(g') = \mu(gg') \tag{10.58}$$

A las homomorfismos que mandan a un grupo G al grupo de automorfismos de un espacio vectorial H se les llamará aquí *Representaciones Ordinarias de G en H*. Por el contrario, a las funciones que mandan a un grupo G al grupo de automorfismos de un espacio vectorial H que satisfacen

$$\mu(g)\mu(g') = \psi(g, g')\mu(gg') \tag{10.59}$$

se les llama *Representaciones Proyectivas de G en H*, donde $\psi(s, s')$ es una transformación escalar de los elementos del grupo (en particular, es el multiplicador de Schur o co-ciclo q definido arriba) que satisface:

$$\psi(g, g')\psi(g'', gg') = \psi(g'', g)\psi(g''g, g') \tag{10.60}$$

con $g, g'.g'' \in G$. Formalmente, este tipo de funciones son, en realidad, aplicaciones del tipo $f : G \to PGL(H)$ donde $PGL(H)$ es el grupo proyectivo de H. Este último es la acción del grupo lineal de matrices invertibles $GL(n)$ sobre el espacio proyectivo $P^n(H)$. Considérese a H un espacio vectorial y un grupo de transformaciones invertibles en dicho espacio. El grupo proyectivo $PGL(H)$ es el conjunto de todas las transformaciones de este tipo, algunas de las cuales se identifican mediante una relación de equivalencia mediada por transformaciones escalares. Un ejemplo ilustrativo que se conoce en el ámbito de la *MCU* es cuando el espacio vectorial en cuestión H corresponde a funciones del tipo $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$. En este caso, el grupo proyectivo corresponde a todos los rayos ψ' que definen una clase de equivalencia entre funciones $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$ tales que para un número complejo $k \in \mathbb{C}$ se tiene $\psi = k\psi$.
Como se verá a continuación, el único candidato para definir una *Representación Ordinaria* (y no una *Representación Proyectiva*), cuyo rango sea equivalente a $Aut(L^2(\mathbb{R}^n_r))$, corresponde a la función $Sp_2(n) \to Aut(L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}))$, lo que implica que *Mp(n)* es la representación ordinaria de la *Doble Cubierta* de *Sp(n)*. No obstante, antes de demostrar este resultado, se analizarán los casos posibles para proceder de una manera más clara y sistemática.
El primer candidato para definir una representación cuyo rango corresponda al grupo de automorfismos $Aut(L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}))$ obedece a una aplicación μ que tiene su dominio en el conjunto de matrices simplécticas libres $\mu : Sp_0(n) \to Aut(L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}))$. Conocida como la *Representación de Weyl*, el procedimiento para encontrar dicha aplicación es conocido ampliamente en la literatura, y tiene su fundamento matemático en la proyección

parcial definida arriba (10.51). Es decir, es un mapeo que asocia a cada transformada de Fourier cuadrática $S_{W,m}$ una matriz simpléctica libre $\mathbf{s}_W$.
Para construir formalmente la Representación de Weyl (véase en [Folland, 1989, p.177]), se debe definir un grupo que actúa en el espacio fase, pero que admite una acción en el espacio de Hilbert. Para ello, se puede demostrar que el mapeo $(\mathbf{z}', t') \to (\mathbf{s}_W(\mathbf{z}'), t)$ en el espacio fase extendido $\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{R}_t$ donde $\mathbf{s}_W \in Sp_0(n)$ es un elemento del grupo de automorfismos del *Grupo de Heisenberg Polarizado* ($Aut(H_{pol}(n))$), que deja el origen fijo (véase en Apéndice B, Sección B.1, Definición 52). Una vez definido este elemento, es importante introducir la Representación de Schrödinger, o bien, los operadores de Heisenberg-Weyl $\rho(\mathbf{z}')$ que definen operadores unitarios en $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$. La acción de estos operadores unitarios en el espacio de Hilbert es:

$$\rho(\mathbf{z}', t)\psi = e^{i/\hbar(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r} - 1/2(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}')) + t}\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{10.61}$$

La cual define una Representación irreducible y unitaria de $H_{pol}(n)$. Al componer $\rho(\mathbf{z}')$ con $Aut(H_{pol}(n))$ se obtiene una nueva Representación $\rho(s(\mathbf{z}'))$ que define automorfismos en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$. No obstante, al invocar el teorema de Stone-Von Neumann, se sigue que la Representación de $Aut(H_{pol}(n))$ en el espacio de Hilbert es única, por lo que existen operadores unitarios μ tal que:

$$\rho(\mathbf{s}_W(\mathbf{z}'), t) = \mu(\mathbf{s}_W)\rho(\mathbf{z}', t)\mu(\mathbf{s}_W)^{-1} \tag{10.62}$$

Ahora bien, se puede demostrar que μ es equivalente a las transformadas de Fourier cuadráticas que se han definido arriba (10.46) (véase en Apéndice A, subsección A.1.2, Definición 35). En este sentido, se tiene un mapeo μ que manda elementos del conjunto de matrices simplécticas libres al grupo de automorfismos en el espacio de Hilbert $\mu : Sp_0(n) \to Aut(L^2(\mathbb{R}^n_r))$. Como bien se demostró arriba (C.15), este mapeo satisface

$$\mu(s)\mu(s') = \pm\mu(ss') \tag{10.63}$$

De esta manera, por lo visto en (10.59), μ define una *Representación Proyectiva* de $Sp_0(n)$, donde el cociclo asociado a esta Representación es la transformación escalar $\psi : Sp(n) \to \mathbb{R}$, cuyo rango es el conjunto {1,-1}=$e^{i\pi/2[\mathrm{Inert}(P'+Q)+m(SS')-m(S)-m(S')]}$. Esto significa que el mapeo μ no define un homomorfismo de grupo cuyo dominio sea $Sp(n)$, y cuyo rango corresponda al grupo de automorfismos $Aut(L^2(\mathbb{R}^n_r))$. Por lo tanto, μ no merece ser un buen candidato para definir una *Representación Ordinaria*.
Ahora bien, el segundo candidato para definir una *Representación Ordinaria* en $L^2(\mathbb{R}^n_r)$ es $Mp(n)$. Como ya se ha detallado, este grupo es el producto de transformadas de Fourier cuadráticas que definen un grupo de Lie y que corresponde al dominio de un homomorfismo Π que asocia a dos elementos de $Mp(n)$ con un elemento de $Sp(n)$. A continuación, se verá que $Mp(n)$ es una *Representación Ordinaria* de la *Doble Cubierta* de $Sp(n)$, es decir, existe una Representación $\mathbb{W}$ de la forma $\mathbb{W} : Sp_2(n) \to Aut(L^2(\mathbb{R}^n_r))$ donde $Aut(L^2(\mathbb{R}^n_r))$ es, por definición, $Mp(n)$.
Para ello, fíjese arriba que $\Pi : Mp(n) \to Sp(n)$ define una proyección de cubierta. Por los teoremas de unicidad de cubiertas vistos arriba, dado que existe una única *Doble Cubierta* (que difiere de otras únicamente mediante homeomorfismos), entonces Π es homeomorfo a la proyección que manda $Sp_2(n)$ a $Sp(n)$. Por lo

tanto, existe un homeomorfismo $\mathbb{W} : Sp_2(n) \to Mp(n)$ tal que

$$\mathbb{W}(g_2)\mathbb{W}(g_2') = \mathbb{W}(g_2 g_2') \tag{10.64}$$

Donde $g_2, g_2' \in Sp_2(n)$. Por definición, este homeomorfismo define una *Representación Ordinaria* en $L^2(\mathbb{R}^n_r)$. Además, se puede definir un tipo de Representaciones de tal manera que el homomorfismo en cuestión sea inyectivo. Conocidas como *Representaciones Fieles*, $\mathbb{W}$ define por tanto una Representación fiel y ordinaria de $Sp_2(n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n_r)$.

Finalmente, se ha construido una Representación unitaria, fiel y ordinaria de la *Doble Cubierta* del *Grupo Simpléctico* equivalente al producto de transformadas de Fourier cuadráticas, cada una de las cuales se asocian, en una relación suprayectiva, a una matriz simpléctica libre. Habiendo hecho esto, es posible demostrar que esta Representación induce una transformación unitaria y temporal en $L^2(\mathbb{R}^n_r)$ a partir del formalismo de la mecánica hamiltoniana. En efecto, como se verá a continuación, la ecuación de Schrödinger emerge de la mecánica hamiltoniana. En el caso particular de sistemas mecánicos con Hamiltonianos cuadráticos, esta correspondencia se construye mediante la representación metapléctica definida arriba, tomando en cuenta una ecuación adicional que se asume en el contexto de la mecánica hamiltoniana y que relaciona al momento $\mathbf{p}$ con la función generadora W. Esta ecuación, junto con la ecuación de Schrödinger forman, en conjunto, una nueva formulación en el contexto de la *MCU*[66].

10.3.11. La Emergencia de la Ecuación de Schrödinger

La Representación metapléctica tiene un algoritmo que permite calcular las soluciones de la ecuación de Schrödinger con Hamiltonianos cuadráticos a partir de las trayectorias clásicas. Análogamente, las trayectorias clásicas se obtienen a partir de la función de onda mediante el mismo procedimiento. De esta forma, el movimiento tanto clásico como cuántico tienen una estructura matemática en común que se expresa en términos de un grupo de Lie: el *Grupo Simpléctico*.

> "[...] both classical and quantum mechanics rely on the same mathematical object, the Hamiltonian flow, viewed as an abstract group. If one makes that group act on points in phase space, via its symplectic representation, one obtains Hamiltonian mechanics. If one makes it act on functions, via the metaplectic representation, one obtain quantum mechanics.

Para demostrar este resultado importante, se seguirá el siguiente procedimiento: en primera instancia, por cuestiones de claridad y formalidad, se definirán algunos conceptos matemáticos que no se han visto, en particular, funciones generadoras dependientes del tiempo, *Funciones de Green* (propagadores) y la *Densidad de Vleck*. Posteriormente, se mostrará la forma en que la ecuación de Schrödinger emerge del formalismo hamiltoniano al definir una función generadora local en el espacio fase extendido (para tiempos cortos). En seguida, se generalizará este resultado en términos de las propiedades globales del espacio fase extendido (para cualquier tiempo). Finalmente se terminará esta sección indicando que este procedimiento solo es

[66]Para Hamiltonianos genéricos esta correspondencia se demuestra al considerar la *Doble Cubierta* del grupo de simplectomorfismos.

válido para Hamiltonianos cuadráticos. Sin embargo, aunque no se detallará aquí, es importante saber que ya existe un procedimiento análogo para llegar al mismo resultado, pero para cualquier tipo de Hamiltonianos.

Considérese un *Flujo hamiltoniano* f_{t,t_0}. Se puede demostrar que para intervalos de tiempo $t - t_0$ cortos, el *Flujo hamiltoniano* f_{t,t_0} definido localmente es un simplectomorfismo libre (Recuérdese que, en general, un simplectomorfismo es un homeomorfismo cuya matriz jacobiana es simpléctica). Es decir (véase demostración en Apéndice C, Sección C.2, Teorema C.2):

Teorema (Simplectomorfismos Libres Para Tiempos Cortos)**.** Para cada $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ existe $\epsilon > 0$ tal que f_{t,t_0} es un simplectomorfismo libre cerca de $\mathbf{z}_0$ para $0 < |t - t_0| < \epsilon$.

Una vez que se tiene ese resultado, es posible construir para algún t y t_0 una función generadora local $W_{t,t_0} : (\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}_t) \times (\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}_t) \to \mathbb{R}$ para el *Flujo hamiltoniano* f_{t,t_0}, que depende de (t, t_0):

Definición 15 (Función generadora y función principal de Hamilton)**.** La función W_{t,t_0} se define de la siguiente manera:

$$W_{t,t_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}_0,t_0}^{\mathbf{r},t} \mathbf{p} d\mathbf{r} - H ds \tag{10.65}$$

Donde la integral se calcula a lo largo de una trayectoria en el espacio fase extendido del punto $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$ al punto $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$

Se puede demostrar[67] que W_{t,t_0} es una función generadora para el simplectomorfismo libre f_{t,t_0}, y que si se fija t_0 y $\mathbf{r}_0$, entonces la función $\Phi_{\mathbf{r}_0,t_0} : (\mathbf{r}, t) \to W_{t,t_0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ es solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi, y por lo tanto, es la función principal de Hamilton (o bien la acción) asociada al Hamiltoniano en cuestión. Ahora, se procederá a construir y definir un concepto importante: la función de green o propagador, particularmente de la ecuación de Schrödinger.

Considérese la ecuación de Schrödinger. En el lenguaje de kets introducido por Paul Dirac, se sabe que las soluciones $|\alpha, t\rangle$ a esta ecuación, que contienen un operador hamiltoniano H autoadjunto en el espacio de Hilbert (con eigenvalores E_{a_0}), se puede expresar en términos de un operador unitario que actúa sobre un estado inicial $|\alpha, t_0\rangle$:

$$|\alpha, t\rangle = e^{-(i/\hbar)H(t-t_0)} |\alpha, t_0\rangle \tag{10.66}$$

Ahora bien, por completitud del espacio de Hilbert:

$$|\alpha, t\rangle = \sum_{a_0} \langle a_0\rangle\, \alpha, t_0 e^{-(i/\hbar)E_{a_0}(t-t_0)} \tag{10.67}$$

[67] Este resultado no se prueba en este trabajo debido a que su demostración es extenso y no contribuye de manera sustancial al desarrollo del mismo. Para el lector interesado, puede referirse a [De Gosson, 2001, p.138].

En términos de los estados en la base de posición $\psi(\mathbf{r}'', t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{r}, t) &= \langle \mathbf{r} \rangle \, \alpha, t = \sum_{a_0} \langle \mathbf{r}'' \rangle \, a_0 \, \langle a_0 \rangle \, \alpha, t_0 e^{-(i/\hbar)E_{a_0}(t-t_0)} \\
&= \sum_{a_0} \langle \mathbf{r} \rangle \, a_0 \left[\int \langle a_0 \rangle \, \mathbf{r}_0 \, \langle a_0 \rangle \, \alpha, t_0 d^3\mathbf{r}_0 \right] e^{-(i/\hbar)E_{a_0}(t-t_0)} \\
&= \int \left[\sum_{a_0} \langle \mathbf{r} \rangle \, a_0 \, \langle a_0 \rangle \, \mathbf{r}_0 e^{-(i/\hbar)E_{a_0}(t-t_0)} \right] \psi(\mathbf{r}, t_0) d^3\mathbf{r}_0 \\
&= \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) \psi(\mathbf{r}, t_0) d^3\mathbf{r}_0
\end{aligned}$$

Definición 16 (Función de Green)**.** La función:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = \sum_{a_0} \langle \mathbf{r} \rangle \, a_0 \, \langle a_0 \rangle \, \mathbf{r}_0 e^{-(i/\hbar)E_{a_0}(t-t_0)} \tag{10.68}$$

tal que:

(a) Para $t > t_0$, $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ satisface la ecuación de Schrödinger en $\mathbf{r}$ y t, con $\mathbf{r}_0$ y t_0 fijo.

(b) y se satisface

$$\lim_{t \to t_0} K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

se le llama la *Función de Green de la Ecuación de Schrödinger*.

Se sigue de la definición que si a un tiempo t_0, $\mathbf{r}_0$ no varía, entonces $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ corresponde a la función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$.
Antes de proceder a demostrar el resultado más importante de esta sección, se definirá otro concepto importante que se relaciona directamente con la amplitud de la función de onda: el determinante de Vleck.
Considérese un sistema que evoluciona en un intervalo de tiempo corto $(t - t_0)$. Por el teorema C.2, se sabe que, en este intervalo de tiempo, el flujo f_{t,t_0} que manda un punto $\mathbf{z}_0$ a $\mathbf{z}$ en el espacio fase es un simplectomorfismo libre. Esto implica, por definición, que para cualesquiera $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$, los momentos $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})$ son únicos y están bien definidos para todo tiempo t. En otras palabras, existe una trayectoria única que evoluciona en el espacio de configuración entre los puntos $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ en un tiempo $(t - t_0)$. Ahora bien, para algún $\mathbf{r}_0$ y t_0, si se permite variar al momento inicial $\mathbf{p}_0$, entonces se obtiene una trayectoria distinta que terminará en un punto diferente a $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Si se repite este procedimiento muchas veces, entonces se obtendrá una familia de trayectorias diferentes que tienen un origen en común en $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$. Tomando en cuenta este hecho, el determinante de Vleck es el elemento que determina la razón de cambio entre las desviaciones en la posición con respecto a la posición inicial correspondientes a cambios en el momento inicial:

Definición 17 (Determinante de Vleck)**.** El determinante de Vleck $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ se define como

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = det\left(\frac{\partial p_0}{\partial \mathbf{r}}\right) = Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(-W)$$

Se puede demostrar que el determinante de Vleck existe si y sólo si el *Flujo hamiltoniano* f_{t,t_0} definido mediante $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{t,t_0}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ es un simplectomorfismo libre (véase en Apéndice C, Sección C.2, Teorema C.2). Nótese que si W es una forma cuadrática, entonces

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = detL$$

Así mismo, la función $(\mathbf{r}, t) \to \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ satisface para valores fijos $\mathbf{r}$ y t_0, la ecuación[68]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (1/m)\boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \mathbf{p} = 0$$

Habiendo definido lo necesario para una exposición clara y sistemática del trabajo de de Gosson, se procederá a demostrar el siguiente teorema:

Teorema (El propagador y función de Green)**.** Sea f_{t,t_0} un *Flujo hamiltoniano* dependiente del tiempo. Sea t_0 fijo tal que para $\epsilon > 0$, f_{t,t_0} es un simplectomorfismo libre definido para cualquier tiempo corto $0 < |t - t_0| < \epsilon$. Sea W la función generadora en t, determinada por el Hamiltoniano H y ρ su determinante de Vleck asociada. Considérese la siguiente función (llamada el propagador de la ecuación de Schrödinger para tiempos cortos).

$$G^{sh} = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)} \sqrt{\rho} e^{(i/\hbar)W}$$

entonces el propagador G^{sh} es una función de Green de la ecuación de Schrödinger para cualquier tiempo si y solo sí H es un polinomio de segundo orden en la posición y el momento.

Para ver la demostración referirse a [De Gosson, 2001, pp.285-289] (véase en Apéndice C, Sección C.2, Teorema C.2).
Ahora sí es momento de enunciar el teorema más importante de esta sección (véase la demostración en Apéndice C, Sección C.2, Teorema C.2):

Teorema (La representación metapléctica y la ecuación de Schrödinger)**.** Considérese una función generadora dependiente del tiempo W_{t,t_0}, tal como se define arriba (10.65). Considérese una matriz simpléctica libre $\mathbf{s}_{t,t_0}$ (simplectomorfismo libre lineal) asociada a W_{t,t_0}. El determinante de Vleck es $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = detL(t, t_0)$. Entonces, la solución a la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t_0) &= \Psi_0(\mathbf{r}) \\ i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{H}\Psi \end{aligned}$$

está dada por la fórmula

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)} i^{m(t,t_0)} \sqrt{|detL(t)|} \int e^{(i/\hbar)W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)} \Psi_0(\mathbf{r}_0) d^n\mathbf{r}_0 \tag{10.69}$$

donde el índice Maslov se define como $m(t, t_0) = m(S_{t,t_0})$, siendo $t \to S_{t,t_0}$ la función de ascenso a *Mp(n)* de la curva $t \to \mathbf{s}_{t,t_0}$ que pasa por la identidad al tiempo $t = t_0$. Es decir:

$$m(t, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t - t_0 < \epsilon \\ 1 & \text{si } -\epsilon < t - t_0 < 0 \end{cases} \tag{10.70}$$

[68]La demostración se omitirá dado que es muy extensa. El lector interesado, puede referirse a [De Gosson, 2001, p.282].

si W se define en $0 < |t - t_0| < \epsilon$. O bien, para cualquier intervalo de tiempo no necesariamente corto (t, t_0) es:

$$m(t_2, t_0) = m(t_2, t_1) + m(t_1, t_0) - n + Inert[Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(-(W(0, \mathbf{r}_0; t_2, t_1) + W(\mathbf{r}_0, 0; t_1, t_0)))]$$

si W se define en $0 < |t_2 - t_1| < \epsilon$ y $0 < |t_1 - t_0| < \epsilon$.

Este teorema se puede explicar brevemente de la siguiente manera: cuando H resulta ser un polinomio de segundo orden en la posición y el momento, entonces las transformadas de Fourier cuadráticas[69] $\pm S^{\hbar}_{t,t_0}$ asociadas a las matrices simplécticas libres s_{t,t_0} (restringiendo el simplectomorfismo correspondiente f_{t,t_0} al caso lineal), equivalen a la integral del propagador G^{sh}:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)} i^{m(t,t_0)} \sqrt{|detL(t)|} \int e^{(i/\hbar)W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)}\Psi_0(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0$$

y tienen la propiedad fundamental de que satisfacen la ecuación de Schrödinger y la condición inicial

$$\Psi(\mathbf{r}, t_0) = \Psi(\mathbf{r})$$

Este resultado se satisface únicamente para tiempos cortos. Sin embargo, es posible generalizarlo para cualquier tiempo al momento de generar a *Mp(n)* por medio del producto de transformadas de Fourier cuadráticas, como bien se indica en la demostración del teorema de arriba y en [De Gosson, 2001, pp.285-289].
Ahora bien, faltaría demostrar la emergencia de la ecuación de Schrödinger en el caso general. Sin embargo, para ese fin se necesitaría definir, en primera instancia, algunos elementos formales bastante técnicos que no son necesarios para este trabajo. Si el lector quiere referirse al procedimiento general, deberá apelar a los trabajos más recientes de de Gosson y Hiley en [De Gosson & Hiley, 2011].

10.3.12. Conclusiones

Esta sección ha sentado las bases matemáticas para establecer una continuidad matemática entre la estructura formal y fundamental que subyace tanto a la *MC* y la *MCU*. Esto se ha logrado por medio de la identificación de una estructura de grupo asociada al *Grupo Simpléctico* y sus variantes homomorfos. Resulta que la acción de dicho grupo en diferentes espacios de estado, en este caso, al espacio fase y el espacio de Hilbert, permite derivar explícitamente a las ecuaciones de evolución de ambas teorías. En efecto, por un lado se demostró que el *Flujo hamiltoniano* que permite definir la evolución temporal del Hamiltoniano (las ecuaciones de Hamilton) se puede identificar con un grupo de transformaciones de un parámetro (el tiempo) en el espacio fase, que resulta ser un subgrupo de *Sp(n)*. Por otro lado, también se probó que el operador unitario temporal que determina la evolución de la función de onda (la ecuación

[69] Aquí es importante recalcar que $\pm S^{\hbar}_{t,t_0}$ son las transformadas de Fourier cuadráticas con una constante añadida $\hbar$. Este parámetro se puede añadir sin modificar las propiedades topológicas del *Grupo Metapléctico* debido a que se puede construir una proyección de cubierta $\Pi^{\hbar}$ cuyo dominio pertenece a la imagen de un automorfismo en *Mp(n)*. Este automorfismo puede definirse entre elementos de $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$, y por ende, entre los elementos S y $S^{\hbar}$ de *Mp(n)*, que solo difieren por la constante $\hbar$. Véanse los detalles en [De Gosson, 1990, p.85] ó [De Gosson, 2001, p.240].

de Schrödinger) en el espacio de Hilbert se identifica con un subgrupo de un parámetro (el tiempo) de *Mp(n)*. Es un resultado sorprendente que tanto *Sp(n)* como *Mp(n)* son (salvo homomorfismos) equivalentes topológicos. Es decir, la *MC* y la *MCU* comparten un mismo formalismo.

10.4. La Identificación del Formalismo

A grandes rasgos, la finalidad de este trabajo es, en parte, identificar una estructura matemática en términos de la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones, cuya interpretación satisfaga dos requisitos: claridad y adecuación empírica. El primero de estos requisitos demanda que dicha interpretación esboce, en efecto, un mundo estructural, que sea accesible mediante las teorías de la Física más exitosas. Específicamente, bajo el establecimiento de las condiciones de verdad (mediante una noción de correspondencia bien definida), se desea identificar un formalismo estrictamente estructural que abarque la estructura de grupo que subyace tanto a la *MC*, la *MCU* y la *RE*. Con este fin en mente, en la sección anterior se sentaron las bases matemáticas para identificar una estructura matemática que subyace tanto a la *MC* como a la *MCU*. No obstante, faltaría demostrar que, salvo a algunas aproximaciones, es posible identificar dicha estructura en el seno de las simetrías subyacentes a la *RE*. Para ello, creo necesario comenzar por hacer un análisis crítico de las simetrías de la *MCU*, tomando en cuenta algunas investigaciones que se han hecho en las últimas décadas [Bargmann, 1954, Greenberger, 2001, Hernandez, 2012]. Estas referencias ayudarán, en primera instancia, a identificar algunos problemas relevantes en torno a las simetrías espacio-temporales de la *MCU*, y posteriormente permitirán conocer otras posibles simetrías que definen, de una manera mas consistente, la estructura que subyace a esta teoría y su relación con la simetría relativista. Una vez hecho esto, demostraré (mediante un resultado matemático) que la simetría fundamental de la *MCU* y la *RE* (que difiere de la primera por contracciones de grupo), están íntimamente relacionadas con la estructura simpléctica que en *GH* se ha identificado. Finalmente, bajo este tipo de consideraciones, se podrá identificar un formalismo que presume abarcar el dominio de la *MC*, la *MCU* y la *RE*.

10.4.1. La Simetría Espacio-Temporal de la Mecánica Cuántica

Como bien se dijo en secciones atrás, existe una distinción entre diferentes grupos de transformaciones: aquellos que se describen en términos de grupos de simetría dinámicos, y otros en términos de grupos de simetría espacio-temporales. Es un hecho que los grupos de simetría que corresponden al mundo clásico de la experiencia humana son aquellos que permiten una Representación fiel en el espacio-tiempo newtoniano, y que dejan invariante a las leyes de Newton. Es decir, que a todo elemento del grupo corresponde una transformación en el espacio-tiempo newtoniano, cuyas simetrías resultan ser las ecuaciones de evolución de la mecánica newtoniana. Sin embargo, en otros dominios menos restringidos, como es el caso de los fenómenos que estudia la *MCU*, el espacio de estados del sistema ya no se puede expresar en términos de las coordenadas y los vectores definidos en el espacio-tiempo newtoniano, sino mediante los que se definen en el espacio de Hilbert. De este modo, uno desearía conocer la estructura de grupo que subyace a la *MCU*, y una vez identificada, determinar si corresponde o tiene alguna similitud con la de la *MC*. Este será, por ahora, el propósito de esta sección.

A grandes rasgos, en los círculos de investigación científica se asume regularmente que el *Grupo de Galileo* (*Gal*) es el grupo[70] de simetría espacio-temporal de la *MCU*. La razón es que este grupo actúa en el espacio de Hilbert, de forma tal que la ecuación de Schrödinger resulta ser un objeto invariante. No obstante, a raíz de los descubrimientos de Wigner y Weyl, algunas diferencias significativas que existen entre los grupos de simetría y la contraparte física de sus Representaciones comenzaron a apreciarse, particularmente en el hecho de que las Representaciones de *Gal* sobre otros espacios diferentes al newtoniano parecían ser inadecuados en dominios menos restringidos, como es el caso de la acción de *Gal* en el espacio de Hilbert y en el espacio-tiempo de Minkowski. De este modo, algunas investigaciones se embarcaron en un proyecto que pudiera reconocer y dar una solución sistemática a este tipo de anomalías [Bargmann, 1954]. Recientemente, es posible encontrar una respuesta en [Greenberger, 2001] y [Hernandez, 2012], donde se expone, de forma clara y precisa, la presencia de limitaciones físicas inherentes en algunas Representaciones de *Gal* y la compatibilidad matemática entre la simetría de la *MCU* y la *RE*. A este respecto, convendría elaborar un breve resumen que pudiera simplificar, de la mejor manera posible, la problemática y la propuesta que se presenta. Para ello, se seguirá la línea argumentativa sugerida en [Hernandez, 2012], la cual solo toma en cuenta las propiedades del *Grupo de Galileo Restringido* (Gal^*), que es un subgrupo del grupo estándar *Gal*, cuyos elementos de grupo son $g^* = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbb{I})$, donde se excluye el elemento que corresponde a las rotaciones. Tomando esta restricción en cuenta, es posible resumir [Hernandez, 2012] por medio de dos observaciones, que se despliegan a continuación:

(1) La acción de *Gal* en el espacio de Hilbert no define una *Representación Ordinaria* sino una *Representación Proyectiva*[71]. Por ello, una fase global aparece en la ley de multiplicación de dicha Representación: $U(g_1^*)U(g_2^*) = w(g_1^*, g_2^*)U(g_1^* \cdot g_2^*) = w(g_1^*, g_2^*)U(g_3^*)$, donde $g_1^* \cdot g_2^* = g_3^*$ son elementos de Gal^*. De este hecho, se sigue que "It is an established fact that Schrödinger equation is not invariant under Galilei boosts, but is invariant up-to-a-phase only." [Hernandez, 2012, p.1351]. Específicamente, se puede demostrar que al asumir la invarianza de la ecuación de Schrödinger (para el caso de una partícula) bajo transformaciones inducidas por *Gal*, una vez que se ha Representado en el espacio-tiempo newtoniano $g \triangleright (\mathbf{r}_0, t_0) \mapsto (\mathbf{r}, t) = (\mathbf{R}\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_0 + \mathbf{a}, t_0 + b)$, se obtienen vectores en el espacio de Hilbert que difieren por una fase:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = exp[im(\mathbf{v}^2 t_0/2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0)/\hbar]\psi(\mathbf{r}_0, t_0)$$

donde $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ son vectores tridimensionales en el espacio-tiempo newtoniano. Ahora bien, aunque ambos vectores $\psi(\mathbf{r}, t)$ y $\psi(\mathbf{r}_0, t_0)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia, en tanto que ambos son soluciones que difieren por un operador unitario y definen el mismo rayo (son empíricamente equivalentes), la presencia de la fase (10.71) lleva consigo algunas consecuencias que uno debe tomar en cuenta. En efecto, esta fase define una *Representación Proyectiva*, la cual no actúa de forma apropiada

[70] Ver en Apéndice B, Sección B.1, Definición 49.

[71] Se asume que el lector conoce los conceptos básicos de la teoría de Representaciones. Ver en Apéndice A, Sección A.1.2, Definición 35.

sobre algunas soluciones de la ecuación de Schrödinger, y obliga a que se introduzcan reglas de superselección que permitan describir los procesos físicos sin la presencia de términos teóricos irrelevantes que no tengan una contraparte empírica. Por ejemplo, mientas que la acción del elemento identidad de *Gal* sobre el espacio-tiempo newtoniano es fiel y no induce ninguna transformación activa, su acción sobre estados en superposición con diferentes masas induce, por el contrario, transformaciones que producen un desfase con términos de interferencia no triviales[72] [Hernandez, 2012, pp. 1356-7] [Bargmann, 1954]. Para ver a detalle este resultado, supóngase que $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(m_1, \mathbf{r}, t) + \psi_2(m_2, \mathbf{r}, t)$ es una superposición de estados con masa distinta preparada en un sistema de referencia inercial. Considérese el siguiente elemento $g_2^{*-1} g_1^{*-1} g_2^* g_1^* = e$, equivalente a la identidad de Gal^*, donde g_1^* es (bajo la Representación natural en el espacio-tiempo newtoniano) una traslación por $\mathbf{a}$, y g_2^*, es un Boost puro por $\mathbf{v}$. La acción de este elemento sobre el espacio de Hilbert induce una transformación de la siguiente forma [Hernandez, 2012, p. 1357]:

$$\psi_{g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1}(\mathbf{r}, t) = exp[im_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/\hbar]\psi_1(\mathbf{r}, t) + exp[im_2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/\hbar]\psi_2(\mathbf{r}, t)$$

Esta acción define una *Representación Proyectiva* de la identidad con una fase global si y sólo si $m_1 = m_2$, sin embargo, en el caso general se obtiene una transformación diferente a la identidad que manda el vector $\psi(\mathbf{r}, t)$ a otro vector $\psi_{g_2^{*-1} g_1^{*-1} g_2^* g_1^*}(\mathbf{r}, t)$, empíricamente distinto. En efecto, ambos vectores no pertenecen al mismo rayo (estado cuántico). Esto significa que los elementos del grupo no se "copian" adecuadamente en el espacio de Representación, legitimando algunos términos matemáticos empíricamente irrelevantes (elemento identidad del grupo) mediante transformaciones físicas en el espacio de Representación. La respuesta estándar a este tipo de anomalías consiste en interpretar vacuamente a la fase (10.71) de tal forma que no tenga una contraparte empírica. De ser así y por razones de adecuación, se requiere la introducción de reglas de superselección (llamadas reglas de superselección de Bargmann) que prohiban este tipo de superposiciones dentro del formalismo, ó bien dicho, se necesita poner a mano la restricción $m_1 = m_2$. Sin embargo, hasta aquí se ha asumido que los estados en superposición de masa no han sido detectados, ó bien, no tienen ninguna contribución directa o indirecta con las observaciones, suposición que, como se verá a continuación, no está exenta de objeciones.

De acuerdo con [Greenberger, 2001] y descubrimientos recientes en el área de la investigación experimental, la fase asociada a este tipo de Representaciones resulta tener, después de todo, una contraparte física que se puede apreciar gracias a la presencia de remanentes relativistas en el dominio cuántico. En efecto, los términos de interferencia, que dan lugar a las reglas de superselección de Bargmann, se producen gracias a la diferencia relativista en el tiempo entre diferentes observadores inerciales que se obtiene en el límite de velocidades bajas. Aquí convendría recordar que en la *RE* el tiempo es relativo, por lo que diferentes sistemas de referencia inerciales que difieren en su tiempo propio son empíricamente distinguibles. Por lo tanto, si la fase (10.71) tiene, después de todo, un significado empíricamente relevante, entonces por una cuestión de adecuación y completitud, la transformación

[72] A estas transformaciones se les llama transformaciones de Bargmann gracias a su publicación [Bargmann, 1954].

definida por esta fase debe tener su contraparte matemática mediante estructura adicional del grupo. Es decir, debe existir un elemento del grupo distinto a la identidad que, al actuar en el espacio de Hilbert, genere una transformación de la forma (10.71). Esto implicaría la modificación de Gal^* por otro grupo de simetría que permita describir este tipo de superposiciones.

(2) Otro argumento a favor de esta conclusión se debe al mismo Greenberger [Hernandez, 2012, pp. 1356-7]. Uno puede demostrar que el Boost que corresponde a la simetría de un estado cuántico (que deja la relación de dispersión invariante) no satisface las relaciones de conmutación entre generadores del álgebra de Gal^*. Además, dado que la masa y la energía desempeñan un papel equivalente en el límite relativista de velocidades bajas, los estados en superposición con diferente energía, y por ende, con diferente masa, predominan necesariamente en el dominio de la *MCU*.

Tomando en cuenta estas observaciones importantes, es pertinente concluir que el grupo de simetría espacio-temporal de la *MC* (Gal^*) no corresponde al grupo de simetría de la *MCU*. Si uno está en lo correcto, entonces debería de existir un grupo de simetría que permita la invarianza de las leyes pero que pueda evitar los problemas que se han identificado hasta ahora. Para este fin, convendría preguntarse: ¿Cuál es entonces el grupo de simetría de la *MCU*?

10.4.2. La Simetría de la Mecánica Cuántica y la Simetría Relativista

Para responder a esta pregunta, uno debe apelar a algunos resultados matemáticos que se han obtenido a partir de una inflexión convergente entre la teoría de grupos y la topología: si un *Grupo Conexo* admite una *Representación Proyectiva* en un espacio vectorial, no es posible construir una *Representación Ordinaria* del mismo grupo sobre dicho espacio. Esto sólo es posible mediante la *Representación Ordinaria* de la *Extensión Central Algebraica* y la *Extensión Central Topológica* (llamada *Cubierta Universal*) del grupo original[73]. En palabras de Hernández, "This projective representation can be regarded as a true unitary representation of the extended Galilei group, a Central Extension of the Galileo one which contains the mass as a generator." [Hernandez, 2012, p. 1352]. El *Grupo de Galileo Extendido Restringido* ($\widetilde{Gal}^*$) es, en efecto, el *Grupo de Galileo Restringido*, salvo que su Lie álgebra no satisface una relación de conmutación. Este grupo extendido tiene un nuevo generador $\mathbf{M}$, que pertenece al centro del grupo original (conmuta con el resto de sus generadores) y satisface la relación de conmutación $[C_i, P_j] = M\delta_{ij}$, donde $\mathbf{C}$ y $\mathbf{P}$ son traslaciones espaciales y Boosts, respectivamente [Hernandez, 2012, pp. 1358-9]. Este grupo con elementos del tipo $\tilde{g}^* = (b_m, b, \mathbf{a}, \mathbf{v})$ admite una *Representación Ordinaria* unitaria en el espacio de Hilbert, mientras que actúa trivialmente en el espacio-tiempo newtoniano. Por esta razón, satisface la relación estándar de grupo $U(\tilde{g}_1^*)U(\tilde{g}_2^*) = U(\tilde{g}_1^* \cdot \tilde{g}_2^*)$, lo que distingue al grupo extendido del grupo original en cuanto a su Representación en el espacio de Hilbert.

Ahora bien, tomando en cuenta la posibilidad de construir una *Representación Ordinaria* de Gal^*, los problemas que se han descrito en el listado de arriba pueden resolverse de la siguiente manera:

[73]En este caso particular, el *Grupo de Galileo* restringido (el *Grupo de Galileo* sin rotaciones) es isomorfo al espacio euclidiano, y por ende, también es isomorfo a su *Cubierta Universal*. Ver en Apéndice A, Sección A.2, Definición A.2.6.

(1) Los estados en superposición de masas pueden describirse de forma consistente mediante la *Representación Ordinaria* del grupo extendido[74] $\widetilde{Gal}^*$. Así mismo, dado que la acción de $\widetilde{Gal}^*$ en el espacio-tiempo newtoniano no es fiel (existe un elemento adicional del grupo b_m que no admite una Representación en este espacio como lo hace cualquier otro elemento del grupo), Hernandez sugiere otro tipo de acción en dicho espacio. En sus propias palabras: "Furthermore, we claim that a proper description of non-relativistic quantum mechanics requires a modification of the notion of spacetime in the corresponding limit, which is noticeable only for quantum particles"[Hernandez, 2012, p. 1350]. De esta forma, dos elementos del grupo se Representan por dos elementos en el espacio-tiempo newtoniano, permitiendo una relación unívoca entre el grupo y la Representación correspondiente. Esto es relevante desde el punto de vista físico en el sentido de que existe una diferencia en el tiempo propio entre diferentes observadores inerciales, la cual pasa inadvertida por el grupo de simetría estándar, pero que tiene su raíz al establecer un límite relativista para bajas velocidades en el contexto cuántico.

(2) Contrariamente al caso del grupo estándar *Gal**, los Boosts que dejan invariante a la relación de dispersión no relativista satisface las relaciones de conmutación entre generadores de $\widetilde{Gal}$.

(3) No menos importante es el hecho matemático de que $\widetilde{Gal}^*$ se puede ver como un caso límite del *Grupo de Poincaré* (*ISO(1,3)*) a velocidades bajas. Esto se debe a a un procedimiento conocido como contracción del grupo, ó bien, contracción de inönü-Wigner, la cual es, a grandes rasgos, una modificación no isomorfa del grupo al nivel del álgebra de Lie que es posible mediante la eliminación de algunos parámetros asociados a los generadores del grupo[75]. Nótese que el álgebra de Lie asociado a *ISO(1,3)* es tal que el conmutador entre los generadores 'Boosts' **K** y las traslaciones espaciales **P** se expresa en términos del generador de traslaciones temporales **H** de la siguiente forma: $[K_i, P_j] = H\delta_{ij}/c^2$, cuya expresión se reduce a $[C_i, P_j] = M\delta_{ij}$ en el límite relativista para bajas velocidades[76]. De esta forma, se tiene un procedimiento formal con el cual se obtiene $\widetilde{Gal}^*$ mediante una contracción del grupo *ISO(1,3)*.

Tomando en cuenta la primacía y el significado fundamental de los grupos de simetría en la Física, hay suficientes razones para concluir que el grupo de simetría de la *MCU* corresponde al *Grupo de Galileo Extendido Restringido* ($\widetilde{Gal}^*$). Sin embargo, antes de tomar en serio esta conclusión, faltaría mencionar un aspecto que no se puede encontrar en las publicaciones de Hernandez y Greenberger. En lo que concierne a la publicación de Hernández [Hernandez, 2012], habría que notar que toda referencia que se hace al grupo *Gal** es, en realidad, una referencia al subconjunto de elementos $\tilde{g} = (b, a, v, \mathbb{I})$, excluyendo el que corresponde a las rotaciones (bajo la Representación natural en el espacio-tiempo newtoniano). Este subconjunto

[74] Los detalles se pueden ver en [Hernandez, 2012, pp. 1958-9].

[75] Ver detalles en [Inönü & Wigner, 1953].

[76] Para un sistema de partículas con masa m y velocidad v, el operador de momento lineal y angular (que corresponden a las traslaciones espaciales y a las rotaciones, respectivamente), es del orden de $\mathbf{J} \sim 1, \mathbf{P} \sim mv$. Por otro lado, el operador de energía (que corresponde a las traslaciones temporales) es $\mathbf{H} = \mathbf{M} + \mathbf{W}$, con la masa total M y la energía mecánica y clásica W del orden de $\mathbf{M} \sim m, \mathbf{W} \sim mv^2$. Por lo que en el límite $v << 1$, se obtiene la contracción deseada.

forma, a su vez, un subgrupo del *Grupo de Galileo* estándar (*Gal*). Como se ha visto a lo largo de esta sección, existe una *Representación Ordinaria* de la *Extensión Central Algebraica* de este grupo restringido que presumiblemente tiene una respuesta a los problemas que se mencionaron arriba. Sin embargo, el mismo procedimiento no se puede generalizar al caso del grupo estándar (incluyendo rotaciones), debido a que cualquier *Representación Ordinaria* de este último en el espacio de Hilbert no solo se obtiene mediante la *Extensión Central Algebraica*, sino también por medio de la *Extensión Central Topológica* de su componente de rotación (en este caso equivalente a su *Doble Cubierta*). En efecto, como se verá a continuación, el grupo se simetría de la *MCU* es, en realidad, la *Doble Cubierta* de la *Extensión Central Algebraica* del grupo estándar *Gal* (también llamada *Extensión central maximal*).

10.4.3. Una Simetría Unificada

Tomando en cuenta las propuestas que se han esbozado, ya sea la estructura simpléctica de grupo de simetría que promete una continuidad formal entre la *MC* y la *MCU*, ó bien, el grupo de simetría particular de la *MCU*, en virtud de su relación de aproximación con la simetría de la *RE*, habría que preguntarse si estos dos formalismos están relacionados a un nivel matemático y fundamental.
En efecto, se desea saber si el grupo completo $\widetilde{Gal}$ admite una *Representación Ordinaria* en el espacio de Hilbert. Por supuesto, como bien se ha mencionado aquí, uno siempre tiene la posibilidad de construir una *Representación ordinaria* de $\widetilde{Gal}^*$, que se ha restringido a traslaciones en el espacio fase (excluyendo rotaciones), mediante su *Extensión central algebraica*. Sin embargo, como se verá a continuación, este es un resultado que se sigue de las características especiales de una estructura significativamente más general, que permite construir *Representaciones ordinarias* no sólo de simetrías espacio-temporales (como *Gal*), sino de otro tipo de objetos que codifican la dinámica tanto de la *MC* como de la *MCU*: la estructura simpléctica de *GH*. A grandes rasgos, uno puede probar que la *Representación Metapléctica* de *Sp(3)* y la *Representación ordinaria* del grupo de simetría de la *MCU* ($\widetilde{Gal}$) pertenecen a una y la misma entidad matemática, además de que la última es un subgrupo de la contraparte inhomogénea del primero. Esta conexión se puede demostrar tomando en cuenta algunas referencias bibliográficas, tales como [Folland, 1989, De Gosson, 2001], pero debido a que sus detalles son muy técnicos, se prefiere esbozarlos en términos más simples, dejando conceptos básicos y definiciones en el Apéndice. La proposición formal que se quiere probar detrás de esta conexión se expresa de la siguiente manera:

Teorema. La única *Representación Ordinaria* del grupo de Galileo (*Gal*) en el espacio de Hilbert (salvo un homomorfismo) es un subgrupo del *Grupo Metapléctico Inhomogéneo* $IM_p(3)$.

Demostración. Dado que el *Grupo de Galileo* estándar (*Gal*), no es simplemente conexo y su álgebra de Lie tiene cargas centrales, entonces no admite una *Representación Ordinaria* unitaria del espacio de Hilbert sino una *Representación Proyectiva*[77]. Ahora bien, para construir una *Representación Ordinaria* del *Grupo de Galileo* estándar (*Gal*), uno debe proceder de la siguiente manera: considérese la acción de Gal $\simeq \mathbb{R}^3 \otimes_S (\mathbb{R}^3 \otimes_S \mathrm{SO}(3))$ en el espacio fase sin considerar sus generadores de traslación temporal

[77]Ver Teorema B.2 en B.

$g \triangleright (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \mapsto (\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{R}\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, \mathbf{R}\mathbf{p}_0 + \mathbf{p})$. Se puede demostrar que esta acción define una Representación natural de un subgrupo del *Grupo Simpléctico Inhomogéneo*: *ISp(3)* $\simeq \mathbb{R}^6 \otimes_S$ *Sp(3)* (el grupo de matrices que contienen un componente rotacional y uno traslacional en el espacio fase[78]). Este es un hecho matemático que se sigue de las propiedades geométricas del espacio fase. Posteriormente, si se calcula la única *Extensión Central Maximal* de *Gal* se obtiene[79] $\widetilde{Gal} \simeq \mathbb{R} \otimes_S (\mathbb{R}^3 \otimes_S (\mathbb{R}^3 \otimes_S \mathrm{SU}(2)))$, que es un subgrupo de $HSp_2(3) \simeq H_{pol}(3) \otimes_S Sp_2(3)$. Este último grupo es el semi-producto de dos grupos: el *Grupo de Heisenberg Polarizado*[80] $\mathrm{H}_{pol}(3) \simeq \mathbb{R} \otimes_S \mathbb{R}^6$, y la *Doble Cubierta* del *Grupo Simpléctico*, respectivamente[81]. Nótese que la *Extensión Central Algebraica* de $\mathbb{R}^6$ no es en general $H_{pol}(3)$, pero debido a que en este caso particular, $\mathbb{R}^6$ es un subgrupo de *ISp(3)*, las relaciones algebraicas que comparte con *Sp(3)* (determinadas por la forma simpléctica $\mathbb{R}$-bilineal no-degenerada $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'$) permiten que lo sea[82]. Sólo faltaría probar que $HSp_2(3)$ es el equivalente topológico a *ISp(3)* que admite una *Representación Ordinaria* unitaria en el espacio de Hilbert. En efecto, la única *Representación Ordinaria* unitaria de $HSp_2(3)$ es equivalente al producto de dos Representaciones bien conocidas que forma, a su vez, un grupo: el *Grupo Metapléctico Inhomogéneo* ($IMp(3) = \rho \cdot \mu$), donde ρ es *la Representación de Schrödinger* de $H_{pol}(3)$ y μ es la *Representación Metapléctica*, que se denota usualmente como[83] *Mp(3)*. De este modo, se puede concluir que la única *Representación Ordinaria* del *Grupo de Galileo* (*Gal*) en el espacio de Hilbert (salvo un homomorfismo) es un subgrupo de $IM_p(3)$.

En consecuencia, el *Grupo de Simetría* de la *MCU* se puede expresar como un subgrupo de $HSp_2(3) \simeq H_{pol}(3) \otimes_S Sp_2(3)$, que es el equivalente topológico (salvo un homomorfismo), de un subgrupo de *ISp(3)*. El primero admite una *Representación Ordinaria* en el espacio de Hilbert *IMp(3)* de la *MCU*, mientras que el segundo admite una *Representación Ordinaria* en el espacio fase de la *MC*.
Ahora bien, dado que $\widetilde{Gal}^*$ es una aproximación (a bajas velocidades) del grupo de simetría de *SR* (*ISO(1,3)*), se sigue que el grupo estándar $\widetilde{Gal}$ debe ser una aproximación (a bajas velocidades) de un grupo distinto, es decir, del *Grupo de Espín-Poincaré*[84] (*ISL(2,$\mathbb{C}$)*). Este último grupo se obtiene por medio de la *Doble Cubierta* (equivalente a la *Cubierta Universal*) de *ISO(1,3)*, por lo que admite una *Representación Ordinaria* en el espacio de Hilbert.
Tomando en cuenta este resultado, y el hecho de que $\widetilde{Gal}$ es la aproximación que resulta de contraer el nuevo *Grupo de Simetría* de la *RE* (*ISL(2,$\mathbb{C}$)*) para bajas velocidades, uno puede concluir que el *Grupo de Simetría* de la *MCU* está relacionado estructuralmente con el de la *RE* y también con el de la *MC*. En otras palabras, salvo homomorfismos y contracciones, la *MC*, la *MCU* y la *RE* comparten una estructura matemática, que admite una Representación dependiendo del dominio que se considere. De esta manera, se

[78] Ver en detalle en Apéndice B, Sección B.1, Definición 51, y en [De Gosson, 2001, pp.93-94].
[79] Por Definición 27 en Apéndice A.
[80] Ver en B, Sección B.1, Definición 52.
[81] Esto se sigue gracias al Teorema B.1 y la Definición 10 en la sección anterior.
[82] Ver en B, Sección B.1, Definición 52.
[83] Ver en Definición 13 arriba, Definiciones 54, 55 en Sección B.2, Apéndice B.
[84] El grupo *ISL(2,$\mathbb{C}$)* corresponde a la *Cubierta Universal* del *Grupo de Poincaré* (*ISO(1,3)*). Aunque sea equivalente al grupo base (desde un punto de vista geométrico), este grupo cubierta puede describir consistentemente estados en superposición de espín, que son físicamente significativos gracias a algunos experimentos efectuados recientemente [Summhammer et al., 1982].

ha logrado identificar una estructura de grupo, de acuerdo con la cual las leyes de algunas de las teorías más exitosas de la Física se construyen mediante sus *Representaciones Ordinarias*. A grandes rasgos, se puede concluir que:

(a) La estructura de grupo que subyace a la *MC* se encuentra intrínsecamente asociada a los *Grupos de Simetría* de la *MCU* y la *RE* mediante sus *Representaciones Ordinarias*, salvo homomorfismos y contracciones de grupo.

(b) Para elucidar dicha asociación, no hay necesidad de apelar a ninguna interpretación no estructural más allá del formalismo matemático[85].

Tomando en cuenta estas conclusiones, un matemático se puede sentir complacido en saber que diferentes teorías comparten una estructura de grupo que las abarca sin la necesidad de introducir elementos a mano o mediante una interpretación en otro tipo de lenguaje que no sea el matemático. De igual modo, a falta de una interpretación no estructural, el filósofo podría inclinarse a pensar que una tesis realista de perfil estructural óntico respecto a este formalismo podría ser razonable, sobre todo en virtud de su claridad y adecuación empírica. Tomando en cuenta que la claridad de la interpretación se entiende aquí de acuerdo con la posibilidad del formalismo de poder derivar las leyes asociadas a la *MC*, la *MCU* y la *RE* mediante un lenguaje estrictamente estructural, entonces es posible dar una respuesta positiva al respecto. Sólo faltaría ver si se satisface el criterio de adecuación empírica, para lo cual, se ha escrito la siguiente sección.

10.5. La Dimensión Fenomenológica

Hasta aquí, se ha identificado un formalismo matemático que se construye en términos de la teoría de los grupos de Lie y sus respectivas Representaciones, cuya base semántica permite legitimar sus características estructurales. Así mismo, en la búsqueda de un lenguaje coherente con la Física contemporánea, se ha demostrado que, a partir de dicho formalismo, es posible derivar explícitamente a las ecuaciones de evolución de la *MC*, la *MCU* y la *RE*, tomando en cuenta las Representaciones de un grupo de Lie sobre los espacios de estado de cada una de estas teorías. A este respecto, nótese que el grupo de Lie abstracto opera metafísicamente al nivel de las relaciones que se determinan mediante su regla de multiplicación, mientras que las Representaciones operan metafísicamente al nivel de las relaciones que supuestamente se satisfacen entre los elementos del espacio de estados, ó bien, las propiedades físicas de las teorías. De este modo, si se asume que algunas teorías de la Física pueden representar, de la mejor manera posible, la fisonomía estructural del mundo real, es necesario que el formalismo que las subyace incluya tanto a sus *Grupos de Simetría* como a sus Representaciones. De ser así, el compromiso ontológico del *REO* debe ser con respecto a lo que representa la estructura matemática que comprende a ambas entidades matemáticas[86].

[85] Hay un detalle menor que se debe tomar en cuenta. La *Representación Metapléctica* introduce una constante arbitraria que puede ser identificada con la constante de Planck $\hbar$ mediante criterios empíricos. Este es el único requisito que se pide poner a mano para derivar la ecuación de Schrödinger sin ningún tipo de interpretación objetual.

[86] Este aspecto se justificará en 11.4, junto con algunas objeciones que se pueden argumentar en torno al problema del cambio teórico.

Sin embargo, convendría mencionar un detalle importante que tiene relación con la manifestación objetual y fenomenológica de esta estructura. En efecto, toda interpretación de una teoría, que es empíricamente adecuada, demanda una explicación del perfil fenomenológico del mundo observable. Así mismo, toda interpretación estructural también demanda una explicación del perfil no-estructural y objetual del escenario que esbozan las teorías científicas más exitosas de la Física. En consonancia con estas demandas, se debería especificar la manera en que los *Grupos de Simetría* y sus Representaciones permiten hablar, no sólo de los objetos inobservables que usualmente postulan las teorías científicas (partículas, campos, etc.), sino de los objetos y propiedades observables que se manifiestan (como las sillas, las partículas de las cámaras de niebla, o bien, el efecto Doppler de las ondas de luz), sin comprometerse con su existencia. A razón de que los objetos y propiedades que postulan estas teorías también tienen rasgos no estructurales, aquí se plantea un problema bastante discutido en los círculos de investigación filosófica: la existencia de relaciones sin *relata* que las satisfaga. En este contexto, se plantea el problema de especificar la manera en que el *REO* se compromete ontológicamente con las relaciones que se satisfacen entre objetos, eliminando estos últimos de su bagaje ontológico, pero sin dejar de hablar y hacer juicios de verdad acerca de ellos. Si *REO* se compromete únicamente con respecto a la representación de este conjunto de relaciones, habría que preguntarse la manera en que los vectores de estado, y por ende, las propiedades físicas de cada una de las teorías, satisfacen dichas relaciones sin que tengan realidad independiente a estas últimas. Particularmente, cómo es que un grupo de transformaciones definidas en el espacio de Representación (ecuaciones de evolución u operadores) puede representar una entidad real sin que los objetos que se transforman bajo este último (propiedades físicas) representen entidades reales independientes de dichas transformaciones. A continuación se tratará de dar una respuesta satisfactoria al respecto, pero para ello, es importante remitirse a algunas estrategias metafísicas que justifican la existencia de relaciones sin *relata* que las satisfaga. Una vez que se ha articulado esta justificación mediante el instrumental metafísico disponible, se apelará al instrumental teórico de la Física, indicando la manera en que su formalismo matemático puede hablar de entidades físicas y observables en términos de su perfil estructural.

10.5.1. Relaciones en un Mundo Sin Relata

Cuando se habla acerca del mundo fenomenológico, y bien, del mundo que esbozan las teorías de la Física, naturalmente se hace referencia a objetos como las sillas, las mesas, los electrones, las ondas, ó también, a propiedades como el color, la dureza, la carga, y la masa, etc. Esta visión del mundo tiene una narrativa que se construye a partir del sentido común, la experiencia sensible, o en todo caso, mediante las prácticas científicas de la Física, donde se usa un lenguaje especializado para referirse a ciertas entidades matemáticas. No obstante, de forma análoga a lo que hace un artista vanguardista, el *REO* plantea la desincorporación de elementos que obedecen a esta narrativa a cambio de nuevos compromisos metafísicos de diferente índole. De este modo, elimina de la ontología a los objetos y sus propiedades e incorpora dentro de ella a las relaciones que se satisfacen entre ellos. No obstante, así como un cubista puede hablar acerca de perros y personas en términos de una compleja superposición de planos, colores y texturas geométricas,

se espera que el *REO* pueda hablar de objetos y propiedades sin comprometerse con su existencia. Pero para llegar a ello, creo pertinente articular una noción de dependencia entre la estructura del mundo y los objetos y las propiedades que aparecen tanto en las teorías como en el mundo manifiesto.
En efecto, tomando en cuenta que se requiere de una noción de dependencia asimétrica que suponga que el elemento fundamental del mundo es estructural, parece adecuado apelar a una jerarquía explicativa [French, 2014, pp.164-167]. Es decir, suponer que un elemento depende de otro en tanto que los hechos que se le adjudican al primero se explican en virtud de los hechos que se le adjudican al segundo. Por ejemplo, que la dinámica de un electrón con espín pueda explicarse en términos de la Representación del Grupo Especial Ortogonal en el espacio de estados del átomo de hidrógeno. Esto no significa que un elemento sea más fundamental que el otro, ó bien, que se asuma una jerarquía ontológica donde ambos elementos formen parte de las categorías ontológicas. Al contrario, al decir que una entidad se explica en virtud de la otra, lo que se quiere es eliminar todo lo que hay en una en favor y en términos de la otra [French, 2014, p.166]. Otro ejemplo que ayudará a aclarar esta noción de dependencia explicativa, se encuentra en la relación metafísica que existe entre las mesas convencionales y los electrones. En este caso, no existen dos mesas estrictamente hablando, una que se describe mediante su dureza, su forma y color, y otra mediante la interacción y la dinámica de un conjunto de electrones, protones y neutrones. Tampoco es el caso de que la mesa y los átomos, como categorías semánticas, refieren a un mismo objeto ontológico. Lo que en realidad ocurre, es que la mesa y sus cualidades se explican en virtud de la existencia de los átomos que son, después de todo, objetos y propiedades inobservables [French, 2014, pp.167-171].
Ahora bien, habiendo articulado una noción apropiada de dependencia en un contexto estructural que elimina a los objetos y sus propiedades, faltaría aclarar los términos metafísicos bajo los cuales se puede elucidar una correspondencia entre la estructura del mundo y los fenómenos observables, sin ignorar el hecho de que dicha estructura se representa mediante un formalismo matemático que subyace a las teorías más exitosas de la Física. A este respecto, es importante reiterar que en las prácticas científicas regularmente se hace referencia a objetos y propiedades inobservables, como es el caso de las partículas elementales y las propiedades clásicas y cuánticas que poseen. No es muy claro el tipo de objetos al que los físicos se refieren, pero es un hecho que las entidades que postulan son, después de todo, objetos que, en la mayoría de los casos, se manifiestan mediante la instanciación localizada de diferentes propiedades físicas. De este modo, creo necesario indicar, en primer lugar, la manera en que el mundo observable de las mesas y las sillas (tomando en cuenta, por ejemplo, tanto su dureza como su color), depende fundamentalmente de la existencia de los objetos y propiedades inobservables que postulan las teorías de la Física, como son los electrones y sus propiedades que se determinan en función de sus interacciones. Una vez hecho esto, es importante proceder a aclarar la manera en que los objetos y propiedades que postulan las teorías de la Física se pueden reconceptualizar en términos de una estructura, tomando en cuenta un compromiso ontológico con respecto a esta última. El significado de este procedimiento se podrá entender una vez que se hayan asentado sus bases metafísicas, es decir, aclarar la correspondencia entre los fenómenos y la Física, y posteriormente, entre esta última y la estructura del mundo real. Se concluirá que sólo mediante la articulación metafísica del mundo observable en términos del mundo inobservable de la Física, y este último a su vez, en términos

de la estructura del mundo real, es posible elucidar la adecuación empírica de la interpretación estructural del formalismo que se ha identificado.

En la literatura es posible encontrar diferentes estrategias en las que se fundamenta la dimensión metafísica de las teorías científicas (partículas, ondas, etc.) y la eliminación de los objetos y propiedades observables [French, 2014, p.171]. Estas estrategias se distinguen de acuerdo a si los juicios que se hacen acerca de los objetos del mundo manifiesto se consideran verdaderos o falsos. En primer lugar, están aquellos que argumentan, sobre una base pragmática, que juicios como "la mesa es dura" son falsos pero tienen una función en cuanto a que permiten construir narrativas que son "verdaderas" únicamente en el dominio del sentido común [Miller, 2016]. Así mismo, se puede decir que las mesas existen pero cualquier juicio como "la mesa es dura" es falso en tanto que no existen propiedades pre-existentes, como la dureza, que le sean atribuidas de antemano [Miller, 2016]. Por otro lado, están las estrategias que consideran que cualquier juicio acerca del mundo manifiesto es verdadero. En el primer caso, se puede concebir una noción primitiva de existencia derivada que permita hablar de mesas y sillas mediante juicios verdaderos, pero que su existencia se encuentre supeditada a los objetos y propiedades inobservables [Eddington, 1939, p.162]. Otra opción es modificar la noción de verdad tarskiana en términos de una correspondencia indirecta con el mundo, de tal forma que juicios como "la mesa es dura" sean verdaderos desde el punto de vista de la narrativa y los estándares operativos del sentido común, mientras que sea falsa desde el punto de vista del mundo inobservable que interpretan las teorías de la Física cuya ontología, según estos filósofos, es la correcta [Horgan & Potrc, 2008]. Finalmente, se encuentra una opción que, a mi parecer, es más razonable y que permite conservar el mayor número de intuiciones filosóficas sin comprometerse con otra noción de existencia ni de verdad. Contrariamente a la visión de Quine, esta estrategia tiene su fundamento en la insistencia de asumir un compromiso ontológico con respecto a ciertos objetos inobservables para que los juicios como "la mesa es dura" sean verdaderos. Esto sin la necesidad de asumir la existencia del objeto al que refiere la variable incluida en el juicio, en este caso "la mesa" [Cameron, 2008]. Sin embargo, para que esta propuesta sea viable en el contexto presente, es necesario indicar el tipo de entidades que tienen que existir para que los juicios acerca de objetos y propiedades observables sean verdaderos. Una sugerencia en este sentido es emplear un modelo mereológico, de tal forma que la verdad de los juicios como "la mesa es dura" dependa necesariamente de la existencia de los objetos y las propiedades fundamentales que constituyen a las tablas y la dureza, por ejemplo, los electrones, los campos de interacción, etc. [French, 2014, p.176]. Desde este punto de vista, cualquier juicio acerca de objetos y propiedades observables es verdadero debido a la existencia de sus componentes fundamentales, en tanto que componen y constituyen al mundo manifiesto. Aquí 'composición' y 'constitución', no refieren necesariamente a simples desde el punto de vista espacio-temporal, sino desde su fundamentalidad. Por supuesto, el tipo de componentes que entran en juego depende del contexto físico en el que uno se encuentre. Por ejemplo, juicios como "la mesa es dura" es verdadero en virtud de que la mesa y la dureza se constituyen por átomos que, a su vez, contienen protones, neutrones y electrones, cuya dinámica se determina mediante la presencia de campos electromagnéticos cuantizados, provocando, en conjunto, esa sensación de dureza en contacto con la mesa.

Cabe concluir que, después de revisar diferentes estrategias, la mejor opción promete eliminar a los objetos y propiedades observables de las categorías ontológicas, tomando en cuenta que cualquier juicio acerca de ellos es verdadero. Desde este punto de vista, lo que existe son objetos inobservables que, mediante su configuración y composición, reproducen los fenómenos observables. Del mismo modo, esta estrategia permite conservar las nociones de existencia y verdad que usualmente se emplean.

Ahora bien, tomando en cuenta que es posible hacer juicios verdaderos acerca de objetos y propiedades observables sin comprometerse ontológicamente con respecto a estas entidades, es momento de preguntarse acerca de la correspondencia que existe entre los objetos y propiedades inobservables que postulan las teorías científicas con el perfil estructural que constituye al mundo real. Asumiendo que la "ontología correcta" corresponde a la estructura que se representa mediante el formalismo que subyace a las teorías más exitosas de la Física, la cuestión que aquí es pertinente investigar tiene directa relación con la posibilidad de hacer juicios de verdad acerca de los objetos y propiedades que regularmente postulan las teorías de la Física, presuponiendo que lo único que existe es dicha estructura. Aquí también se han propuesto algunas estrategias que difieren de las primeras en cuanto a que el compromiso metafísico ya no es con respecto a objetos y propiedades, no importa que sean observables o inobservables, sino con respecto a las relaciones que supuestamente se satisfacen entre estos últimos. No obstante, por razones de simplicidad, no trataré en detalle cada una de estas propuestas y me enfocaré en una sugerencia que se puede encontrar en [French, 2014, p.189] que, aunque no se trata con detalle, a mi parecer puede resolver esta cuestión de manera más razonable.

En la literatura estructuralista, regularmente se reitera la legitimidad de las teorías más exitosas de la Física para respaldar suposiciones metafísicas como la eliminación de los objetos y sus propiedades, ó bien, la elucidación de nociones "estrechas" de individualidad en términos del complejo de relaciones que se satisfacen entre ellos. Por el momento, no prestaré atención a la justificación de estas suposiciones (que se abordarán en la sección 14 dedicada a a individualidad en *MCU*), sin embargo, creo pertinente asumir por ahora que, mediante una lectura apropiada de las teorías de la Física contemporánea, la mera constitución de los objetos y las propiedades que se postulan dependen de las relaciones que satisfacen, y bien, de su estructura subyacente. Esto quiere decir que si los objetos y propiedades existen, es gracias a que la estructura que los subyace también existe, en el sentido de que su esencia o constitución es estrictamente estructural. De este modo, la eliminación de los objetos y las propiedades teóricas se entiende como una re-conceptualización de la narrativa que se emplea usualmente en el contexto de la Física a favor de la existencia de las relaciones que se satisfacen entre ellos. Esto no implica que los objetos y las propiedades teóricas *qua* estructuras no existan, o sean parte de un imaginario y una ilusión que se ha impuesto desde un nivel más fundamental. Lo que se entiende por re-conceptualización aquí tiene relación con la eliminación de los objetos *qua* particulares y las propiedades *qua* universales, en virtud de las relaciones que satisfacen. Es decir, se les despoja de una noción de substancia que involucre a la individualidad de los objetos y a la instanciación de los universales, y a cambio, se les define en términos estructurales. Esta observación permite elucidar la posibilidad de hacer juicios de verdad acerca de objetos y propiedades teóricas *qua* estructuras, asumiendo que el mundo es estrictamente estructural. Pero para ello, faltaría aclarar la manera en que los objetos y propiedades forman parte de dicha estructura. Evidentemente, un candidato indiscutible sería apelar a la Física, y en particular, a la estructura matemática que se ha identificado en este trabajo, pues de ser así, todo indicaría que las propiedades físicas invariantes son, a grandes rasgos, una copia del grupo abstracto en el espacio de Representación. Sin embargo, aún después de apelar a esta estructura matemática, habría que notar que cualquier Representación de un grupo, incluyendo sus invarianzas, permite identificar algunos parámetros que se asocian estrictamente a las propiedades de un sistema, pero no a las partículas donde se instancian. Por supuesto que en la práctica, cuando se calculan dichos parámetros, se presupone que los posibles valores de las propiedades que se obtienen corresponden a los que poseen las partículas. Pero esto no implica que dichos sistemas individuales se hayan "derivado" de la estructura del grupo. De este modo, faltaría explicar la manera en que los objetos teóricos que regularmente se postulan pueden re-conceptualizarse en términos de las propiedades invariantes bajo las Representaciones del grupo. Por ejemplo, la manera en que los electrones pueden constituirse metafísicamente como partículas en términos de las propiedades que posee, como su masa, momento angular, etc. Para ello, faltaría apelar de nuevo al instrumental metafísico necesario, con el que se pueda articular una noción de objeto en términos de sus propiedades, y por ende, en términos de la estructura del grupo y sus Representaciones.

Para ser breve, todo parece indicar que lo que se necesita es un principio metafísico que pueda agrupar en "cúmulos" discretos diferentes propiedades que, en el contexto de este trabajo, se obtienen mediante las invarianzas de las Representaciones de un grupo abstracto. Este principio tiene que ser muy diferente al *Principio de Individuación de Propiedades Agregadas*, el cual permite concebir una noción de individualidad en términos de las propiedades que el individuo posee[87]. La razón es que la noción de objeto que se quiere construir no es el de un particular, entendido como una substancia primaria, sino la de un objeto cuya constitución es meramente estructural. De este modo, se requiere de una nueva noción que permita construir un objeto a partir de elementos estrictamente estructurales. A este respecto, habría que tomar en cuenta dos características metafísicas que constituyen, a grandes rasgos, una tesis realista de corte estructural. Por un lado, *REO* presupone un monismo ontológico, en el sentido de que la estructura del mundo es única, dejando de lado otro tipo de categorías ontológicas. Por otro lado, es un hecho que dicha estructura tiene que tener diferentes aspectos, de tal modo que, a partir de su representación en un lenguaje matemático, pueda derivar las leyes y las ecuaciones de movimiento de las teorías más exitosas de la Física. Asumiendo que una estructura es, crudamente, un conjunto de relaciones, estas dos características indican que el mundo se constituye de un conjunto único de relaciones, pero que presentan un orden establecido, en el sentido de que dicho conjunto puede dividirse en subconjuntos de relaciones que corresponden a las propiedades que se definen en cada una de las teorías. Pero uno puede ir más allá y pensar que dentro del conjunto de las relaciones que se definen en cada teoría, existen diferentes "cúmulos" de relaciones que se pueden identificar con las propiedades que se instancian en los objetos que se postulan en dicha teoría. Por ejemplo, el cúmulo de propiedades como la masa, la carga y el momento angular que poseen los electrones. Esto incita a pensar que una estructura, la más fundamental, tiene diferentes aspectos, cada uno de los cuales correspondería a un objeto inobservable. Sin embargo, estos aspectos no añaden un elemento de más a la ontología, sino que son partes constitutivas de un sólo elemento existente. Es decir, el "cúmulo" de relaciones que consti-

[87]En la sección 14 dedicada a la noción de individualidad se definirá este principio con más detalle.

tuyen a los objetos inobservables de las teorías de la Física son parte de la estructura del mundo, aquella que se representa mediante los grupos de Lie y sus Representaciones en diferentes espacios. Por supuesto que faltaría aclarar el significado de 'aspectos de la estructura' entendiendo a estos últimos en términos de un espectro enorme de instanciaciones. Quizá una respuesta podría estar en el contenido metafísico de los 'modos' de Spinoza que, casualmente o no, tienen un parecido con el esquema que se plantea aquí, sobre todo en relación a su carácter monista y la presencia de diferentes aspectos que no añaden ningún contenido ontológico. Sin embargo, no quisiera entrar en cuestiones que, de por sí, son muy polémicos, y simplemente me gustaría dejar en entredicho esta analogía que sirve de preámbulo para nuevas investigaciones.

El cometido de esta sección ha sido determinar la manera en que se puedan hacer juicios de verdad acerca de los objetos y propiedades observables asumiendo, antes que todo, que lo único que existe es una estructura. En otras palabras, se quiere saber si dicha estructura es empíricamente adecuada. Para este fin y bajo la suposición de que lo único que existe es una estructura, se establecieron, por una parte, las bases metafísicas necesarias para elucidar juicios de verdad acerca de objetos y propiedades observables, y luego aquellas que son necesarias para el caso de los objetos y propiedades inobservables de la Física. La raíz de esta distinción reside en que el *REO* es, a grandes rasgos, un compromiso ontológico con respecto a una estructura que es cognoscible mediante las teorías científicas. En el contexto especifico de este trabajo, esta estructura se representa mediante un formalismo que es común al que subyace a diferentes teorías de la Física, cuyos compromisos metafísicos regularmente no son estructurales, sino determinan la dinámica de partículas, ondas, u otro tipo de objetos inobservables. De este modo, la correspondencia que existe entre la estructura y el mundo manifiesto debe desplegarse en términos de la correspondencia que existe entre la estructura y el mundo que esbozan las teorías de la Física, y luego, mediante la correspondencia entre este último y el mundo manifiesto. No obstante, si uno siguiera este procedimiento al pie de la línea, podría concluir que, al fin y al cabo, los objetos inobservables que regularmente postulan las teorías de la Física existen. Es decir, de acuerdo con este procedimiento, para poder hacer juicios verdaderos acerca de objetos y propiedades observables es necesario creer en la existencia de los objetos inobservables de la Física que, después de todo, componen y constituyen a los primeros. Pero, esta conclusión tiene la desventaja de que introduce dentro de la ontología a elementos que no son estructurales, cosa que *REO* negaría. Pero si uno toma en cuenta que la re-conceptualización de los objetos y propiedades teóricas en términos estructurales no implica la eliminación de estos últimos *qua* entidades estructurales, se puede evitar este tipo de objeciones. A decir verdad, aunque la narrativa metafísica que caracteriza una correspondencia entre la estructura real y el mundo que esbozan las teorías es distinta (en el sentido de que las categorías metafísicas que caracterizan a las estructuras y a los objetos y propiedades substanciales son diferentes), la correspondencia entre el mundo que esbozan las teorías de la Física y el mundo manifiesto se puede articular asumiendo la existencia de objetos y propiedades *qua* estructuras. En este sentido, uno bien puede hacer juicios verdaderos acerca de entidades inexistentes, como las mesas, los perros y los colores, pero asumiendo la existencia de electrones, ondas y cargas (*qua* estructuras) que componen y constituyen a los primeros.

Hasta aquí, espero que se hayan aclarado algunos aspectos que conciernen a la eliminación de los objetos y las propiedades desde una tesis realista de corte estructural. Promoviendo una conversación productiva con la Metafísica, se han introducido algunos elementos que son necesarios para lograr el cometido de esta sección: determinar la manera en que se puedan hacer juicios de verdad acerca de los objetos y propiedades observables y los que regularmente postulan las teorías de la Física, asumiendo que lo único que existe es una estructura que se representa mediante su formalismo subyacente. No obstante, la labor que falta por hacer es la de especificar la manera en que el formalismo matemático que se ha identificado en este trabajo permite corroborar todo el bagaje metafísico que se ha articulado hasta ahora. Específicamente, mostrar la manera en que un compromiso ontológico con respecto a la estructura que se representa mediante dicho formalismo matemático permite hacer juicios de verdad acerca de objetos y propiedades inexistentes *qua* particulares con individualidad, y *qua* universales que se instancian.

10.5.2. La Estructura de los Fenómenos

Es hora de establecer una correspondencia entre la fisonomía estructural del mundo que esbozan las teorías de la Física y los fenómenos que comprenden dominios clásicos, cuánticos y relativistas, esto en términos del formalismo matemático que se ha identificado en este trabajo. Para ello, habría que notar que, debido a los rasgos estructurales que constituyen a este formalismo, todo objeto y propiedad observable debe expresarse en términos de dicho formalismo. Habiendo especificado la manera en que los objetos observables dependen de la existencia de los objetos inobservables que postulan estas teorías, únicamente es necesario determinar la manera en que los objetos y propiedades que se postulan en dichas teorías se re-conceptualizan en términos del instrumental matemático de los grupos de Lie y sus Representaciones. Específicamente, cómo se re-conceptualizan en términos del *Grupo Simpléctico* (salvo homomorfismos y contracciones de grupo) y sus Representaciones en el espacio fase, en el espacio de Hilbert y en el espacio-tiempo de Minkowski[88]. Para ello, bajo la suposición de que tanto la *MC*, la *MCU*, y la *RE* refieren de manera clara y precisa a objetos y propiedades inobservables, propongo especificar formalmente la manera en que las propiedades conservadas de los sistemas físicos y las ecuaciones de movimiento de estas tres teorías se derivan del formalismo estructural en cuestión. Esto se hará mediante la observación de que, por un lado, las propiedades conservadas son invarianzas bajo cierto tipo de transformaciones que se efectúan en los espacios de Representación, y por otro lado, las ecuaciones de movimiento determinan la instanciación de las propiedades físicas sobre los objetos inobservables que se postulan (en términos de los grados de libertad del sistema). En lo que respecta a la *MCU*, es factible preguntarse si una teoría probabilística, en este dominio, puede formularse en términos de un conjunto de ecuaciones de movimiento, de tal modo que permita establecer una ontología de objetos y propiedades inobservables en el espacio y el tiempo. Aquí conviene recordar la introducción de este trabajo, donde se ofrecen distintas respuestas al problema de la medición para salvaguardar una tesis realista en este contexto. A este respecto, se sabe que tanto la *TCB* como las Teorías del Colapso Objetivo, son propuestas realistas (en su dimensión semántica) que permiten

[88]Recuérdese que esta re-conceptualización se determinó con base en ciertas suposiciones metafísicas (como es la noción de dependencia explicativa). Pero suponiendo que estas suposiciones sirven para demandar claridad en la interpretación que se hace de las teorías físicas, hace falta determinar la adecuación empírica de dicha interpretación en términos del formalismo que se ha identificado en este trabajo.

establecer de manera clara y precisa una ontología primitiva en el dominio de la *MCU*, sin la necesidad de introducir observadores al sistema. Tomando en cuenta esta posibilidad, es hora de especificar formalmente un vínculo entre el formalismo que se ha identificado y los objetos y propiedades inobservables compatibles con estas tres teorías, incluyendo a sus ecuaciones de movimiento.

En lo que respecta a la *MC* en su formulación hamiltoniana, las propiedades dinámicas de un sistema mecánico son, después de todo, funciones del espacio fase de posición y momento. Cuando se satisfacen algunas simetrías en este espacio, entonces resulta que estas funciones son constantes de movimiento (en sistemas mecánicos integrales). Estas últimas se obtienen directamente de la invarianza de las ecuaciones de Hamilton, bajo la acción de cada elemento de *Sp(n)* en el espacio de posición y momento [Arnold, 1989]. Para ver este resultado en detalle, recuérdese que la forma simpléctica es una 2-forma diferencial $\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \times \mathbb{R}^n_{\mathbf{p}}$, bilineal y anti-simétrica. Así mismo, el *Bracket de Poisson* ($\{\cdot, \cdot\}$) es una operación bilineal sobre funciones diferenciales h y g:

$$\{h, g\} = \Omega(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_g)$$

donde $(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_g)$ son dos campos vectoriales del espacio tangente al espacio fase en algún punto. Cuando $\mathbf{X}_h = \mathbf{X}_H$ es el campo vectorial hamiltoniano (donde H es la función hamiltoniana), se sigue que:

$$\frac{dh(f_t(t))}{dt} = \mathbf{X}_H h = \{h, H\}$$

donde $f_t(t)$ es un *Flujo hamiltoniano*. Como bien se puede demostrar, h es una constante de movimiento si y sólo si $\{h, H\} = 0$, y si y sólo si el Hamiltoniano no depende del tiempo. Sin embargo, la moral más importante que se sigue de este resultado es que, en general, cada función h define un simplectomorfismo, o bien, una transformación canónica. Por esta razón, es posible obtener las propiedades (constantes de movimiento) de un sistema mecánico en términos de las invarianzas bajo una transformación canónica definida en el espacio fase. Fíjese que dichas propiedades no se ha definido de antemano como cualidades que se instancian en las partículas del sistema mecánico, sino que son entidades que se identifican a-posteriori mediante las invarianzas bajo una simetría dinámica. Un caso particular es cuando h es equivalente a la función hamiltoniana. Dado que $\{H, H\} = 0$, entonces H resulta ser una constante de movimiento que, por definición, es la energía total del sistema. Los principios de conservación de otras propiedades como el momento, momento angular, la densidad de masa y de carga se obtienen de forma análoga.

Ahora bien, además de calcular el valor de cada una de estas propiedades para el sistema total, faltaría determinar su valor para el caso de cada sistema individual. Se sabe que las propiedades de cada sistema individual no se conservan en general, por lo que debe existir una forma de determinar su valor en cada instante de tiempo, sin recurrir a presuposiciones físicas que involucren su constitución como objetos substanciales. Para ello, recuérdese que es posible "derivar" a las ecuaciones de Hamilton a partir de las propiedades simplécticas del espacio fase. En efecto, se puede demostrar, como bien se hizo arriba, que un subgrupo de un parámetro de *Sp(n)* (salvo derivadas) define un flujo sobre el espacio fase que, desde un punto de vista geométrico, es una curva integral de un campo vectorial particular: el campo vectorial hamiltoniano que determina a las ecuaciones de Hamilton. Así mismo, se sabe que las ecuaciones de Hamilton admiten una formulación equivalente en términos de la teoría de Hamilton-Jacobi, gracias a la posibilidad de construir funciones generadoras mediante la invarianza de la forma simpléctica en el espacio fase. Esta nueva formulación permite construir una teoría espacio-temporal de “partículas” en movimiento, tomando en cuenta que el momento conjugado (que corresponde al momento lineal de un sistema de “partículas”) se puede expresar en términos de una función generadora y el espacio de configuración. Desde este punto de vista, se tiene un ensamble de “partículas” idénticas que definen (salvo constantes de integración) trayectorias espacio-temporales de acuerdo a ciertas condiciones iniciales en su posición $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ..., \mathbf{Q}_N$. Específicamente, se sabe que cada “partícula” define una trayectoria que se determina mediante la función generadora S (conocida como función principal de Hamilton) y una condición inicial en su posición, de acuerdo a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_i}$$

Recuérdese que cualquier sistema mecánico (integrable) define un conjunto de funciones que son constantes de movimiento, las cuales corresponden, como bien se dijo arriba, al valor total de las propiedades de todas las “partículas”. De este modo, tomando en cuenta un sistema de coordenadas canónicas para la ecuación de movimiento de arriba, es posible determinar el valor de las propiedades conservadas, pero esta vez para cada “partícula”. En efecto, mediante la indexación de cada coordenada tridimensional del espacio de configuración, esta ecuación determina el valor de la posición y el momento que posee cada “partícula” en cada instante de tiempo. Sabiendo que el resto de las propiedades son funciones de la posición y el momento, entonces sólo faltaría especificar su valor de acuerdo a la relación funcional que guarda con estas propiedades canónicas. Nótese que la noción de “partícula” que se emplea en esta formulación corresponde a una trayectoria tridimensional de una proyección del espacio de configuración donde se define tanto la variable de la posición (por medio de la misma variedad de configuración) como la variable del momento (por medio del espacio cotangente a la variedad de configuración). Por ende, una “partícula” clásica se define en términos únicamente de sus propiedades variables, y específicamente, en términos de su posición y momento cuyo valor cambia con el tiempo. Esto significa que no hay necesidad de postular de antemano la existencia de partículas y propiedades instanciadas. Al contrario tanto las “partículas” como las propiedades que se instancian en ellas son, después de todo, elementos estructurales que se identifican bajo ese nombre, pero que al fin y al cabo, son invarianzas que se definen en el espacio fase de dimensión equivalente al doble del número de “partículas”. Ahora bien, debido a que el número de “partículas” tiene una relación unívoca con la dimensión del espacio fase, entonces parecería que es necesario referir a este último si se quiere hablar acerca de propiedades que se instancian en un número específico de partículas puntuales. No obstante, esto no significa que el espacio de Representación deba considerarse, en sí mismo, como parte de la estructura que se asume como fundamental. Al contrario, debido a que la acción de un grupo es, por definición, una copia de los elementos del grupo que preservan la estructura del espacio donde actúa, la constitución del espacio fase, y en particular su dimensión, depende exclusivamente de las transformaciones canónicas que se definen en él (y bien de la dimensión de la acción de *Sp(n)*).

Ahora se procederá a realizar una discusión similar pero en el contexto de la *MCU*. Para no salirse de contexto, creo conveniente elegir una teoría cuántica que disponga de un instrumental metafísico lo más parecido al caso clásico. Es decir, una teoría cuántica cuya ontología sea similar a la que se tiene en la *MC*. En este punto, salta a la vista un posible candidato: la *TCB* (Para un resumen véase en [Goldstein, 2017]. Detalles en [Bohm, 1952a,b, Holland, 1995, Dürr et al., 1992, Valentini, 1992, Bohm & Hiley, 1993, Solé, 2010]). Recuérdese que esta teoría es, de forma análoga a la mecánica newtoniana, una teoría cuántica de movimiento acerca de partículas objetivas inobservables, cuya dinámica se determina mediante la función de onda y la posición de todas las partículas del sistema. Debido a ciertas condiciones que se dieron justo después del inicio del universo, resulta que la posición y el momento preciso de cada partícula no se puede determinar simultáneamente, lo que implica que la teoría sólo es capaz de predecir probabilidades asociadas a ciertas configuraciones posibles de las partículas, aunque estas últimas describan, de hecho, trayectorias bien definidas. Aunque el estatus ontológico de la función de onda y las propiedades dinámicas dependen de la interpretación que se considere, es un hecho que la versión mínima de la *TCB* es una teoría acerca de partículas con posición bien definida[89]. Esto significa que la posición es la única propiedad no contextual de las partículas, cuyo valor no depende de la medición que se haga. Esto se puede traducir, en otras palabras, en que la posición es la única propiedad intrínseca de las partículas y el resto de las propiedades (si es que existen) son extrínsecas debido a que dependen del estado completo del sistema (incluida la función de onda). Esto permite concluir, como se verá en secciones posteriores (en 14), que una noción de individualidad que haga justicia a las características objetuales y no relacionales de las partículas no puede establecerse al menos que sea únicamente mediante sus propiedades espacio-temporales. De ser así, entonces habría que ver la manera en que la posición de cada partícula y la partícula misma 'emerge' de una estructura más fundamental.

En este punto, convendría apelar a un resultado muy importante que tiene que ver con el formalismo que se ha identificado en este trabajo, pero que guarda una relación directa con los fundamentos matemáticos de la *TCB*. A grandes rasgos, tomando en cuenta la correspondencia que existe entre la *MC* y la *MCU* (por medio de la propuesta *GH*), se sigue que:

> [...] It is remarkable that in both cases, we have an associated theory of motion: in the symplectic representation, that motion is governed by Hamilton's equations. In the metaplectic representation, it is governed by Bohm's equations. [De Gosson, 2001, p.267]

Como bien se ha mencionado en la introducción, una versión mínima de la *TCB* es, en efecto, un aparato formal distinto a la *MCE*. Dado que el estado del sistema Bohmiano se especifica por medio de la posición de una partícula representativa y una función de onda definida en el espacio de configuración, existen dos ecuaciones diferenciales que determinan su evolución en el tiempo: la ecuación guía y la ecuación de Schrödinger, respectivamente. En este sentido, es importante preguntarse si existe una estructura que subyace a este aparato formal del mismo modo en que la estructura simpléctica determina las simetrías asociadas a la mecánica hamiltoniana. A continuación se dará una respuesta positiva indicando que el formalismo de la versión mínima de la *TCB* emerge topológicamente de la estructura simpléctica asociada a la mecánica hamiltoniana mediante el mismo procedimiento que se encuentra en *GH*. Para ello, sólo

[89]En la sección 13, se desplegará detalladamente esta versión mínima.

faltaría identificar las leyes que se derivan de dicho formalismo con las de la *TCB*.

Corolario 1 (La formulación Bohmiana I)**.** La formulación Bohmiana es equivalente a la formulación metapléctica para Hamiltonianos cuadráticos.

Demostración. La demostración es muy sencilla[90]. Si se considera la versión mínima de la *TCB* (ecuación de Schrödinger y la ecuación guía), solo basta con observar que la ecuación guía es una consecuencia inmediata del hecho de que las matrices simplécticas libres $\mathbf{s}_W$ tienen una relación directa con las funciones generadoras W_{t,t_0} de la forma $\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{r}} W$. Ahora bien, tomando en cuenta esta correspondencia, se demostró que para cada $\mathbf{s}_W$ existen dos transformadas de Fourier cuadráticas $\pm S^{\hbar}_{t,t_0}$, (que son una Representación ordinaria de *Mp(n)*) y que equivalen a la función

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)} i^{m(t,t_0)} \sqrt{|detL(t)|} \int e^{(i/\hbar)W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)} \Psi_0(\mathbf{r}_0) d^n \mathbf{r}_0$$

la cual es una solución a la ecuación de Schrödinger (ver los detalles en [De Gosson, 2001, pp.285-289]). Por lo tanto, es posible obtener tanto la ecuación de Schrödinger como la ecuación guía a partir de la correspondencia topológica que existe entre el *Sp(n)* y el grupo *Mp(n).*

De este modo, se puede demostrar, de forma análoga al caso clásico, cómo es que a partir de las propiedades estructurales de *Mp(n)* es posible obtener las ecuaciones de evolución de la versión mínima de la *TCB*. Así mismo, dado que este grupo permite "derivar" a la ecuación guía que, a su vez, determina a las ecuaciones de movimiento, es posible conocer la posición de las partículas del sistema y definir a estas últimas en términos de las trayectorias que describen en el espacio tridimensional. En el caso de que se asuma la existencia del resto de las propiedades, existe un procedimiento por medio del cual se obtienen sus valores en función de la posición de todas las partículas y la función de onda del sistema. Este procedimiento, conocido como la *Ley de Atribución de Propiedades*, determina una correspondencia entre operadores diferenciales y funciones diferenciales [Holland, 1995, pp.91-94]. En efecto, es posible definir, a partir de la acción de estos operadores en el espacio de Hilbert, funciones que corresponden a las propiedades variables de cada una de las partículas del sistema. Debido a esto, es posible entender la manera en que la estructura metapléctica de los operadores unitarios determinan, mediante su acción en el espacio de Hilbert, un conjunto de funciones diferenciales que corresponden a las propiedades dinámicas de cada una de las partículas. Cabe concluir que, mediante el resultado de arriba y la ley de atribución de propiedades, es posible re-conceptualizar a las "partículas" cuánticas y las propiedades que poseen en términos de *Mp(n)* y sus Representaciones en el espacio de Hilbert. Resulta sorprendente que dentro de estas Representaciones existen remanentes clásicas (bajo su formulación hamiltoniana) que corresponden a la ecuación guía de la *TCB*.

Finalmente, se desea establecer una correspondencia entre el formalismo matemático que se ha identificado y los objetos y propiedades de la *RE*, incluidas sus ecuaciones de movimiento. Como se verá a continuación, esta labor es similar a los casos anteriores en cuanto a que dicha teoría sólo es válida para escalas

[90]Su generalización para Hamiltonianos genéricos se encuentra en [De Gosson & Hiley, 2011].

macroscópicas (de forma análoga a la *MC*). No obstante, difiere en cuanto a que establece un vínculo de compatibilidad entre la teoría electromagnética de Maxwell y una generalización a la mecánica de Newton. En este sentido, la *RE* refiere de forma análoga a un sistema de partículas newtonianas con propiedades bien definidas, pero con la única diferencia de que permite generalizar su descripción para velocidades y sistemas de referencia arbitrarios, incluyendo en su descripción al comportamiento de los campos electromagnéticos. Esto involucra una re-conceptualización de dichos objetos y propiedades y una generalización al procedimiento que se usó para el caso de la *MC*. Pero antes de proceder a realizar esta labor, creo pertinente hacer un breve preámbulo teórico del entendimiento convencional de esta teoría para que no haya dudas con respecto a sus raíces fundacionales (uno se referirá a [Weinberg, 1995]).

Como bien se sabe, una generalización a la mecánica newtoniana que sea compatible con la teoría electromagnética es posible gracias a la modificación de los conceptos clásicos inherentes al tiempo y al espacio y el abandono de un sistema de referencia privilegiado[91]. En efecto, la *RE* considera que el tiempo ya no es un parámetro absoluto a través del cual el estado de un sistema clásico evoluciona, sino al contrario, es un grado de libertad que depende del sistema de referencia que se adopte. En otras palabras, de ser un parámetro absoluto que se define para cualquier sistema de referencia, el tiempo resulta ser una propiedad relativa que es necesario especificar para obtener la dinámica de un sistema de partículas. Regularmente, se dice que los fundamentos centrales de dicha teoría versan en dos principios fundamentales: el *Principio de Relatividad*, que asume que las leyes de la Física son las mismas desde cualquier sistema de referencia inercial, y el *Principio de Constancia de la Luz*, la cual asume que la velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema inercial. Gracias a la postulación de estos dos principios, se han descrito una serie de fenómenos que eventualmente han sido detectados experimentalmente, entre los cuales se encuentran la contracción de Lorentz, la dilatación del tiempo, la equivalencia de la masa y la energía, y la relatividad de la simultaneidad. En relación a este último fenómeno, la incorporación del tiempo como otro grado de libertad del estado implica un cambio en la semántica que se establece respecto a los objetos y propiedades físicas. En lugar de describir a las partículas y sus propiedades en términos de un sistema espacial de coordenadas (x, y, z) para cada instante de tiempo t, un objeto relativista es un evento que se define en términos de un sistema de coordenadas espaciales pero también temporales (ct, x, y, z). Ahora bien, el principio de relatividad dictamina que los sistemas de referencia relativistas que son, después de todo, sistemas de coordenadas espacio-temporales, deben satisfacer las mismas leyes de la Física, en particular, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. Este principio, junto con otras condiciones (incluido el principio de constancia de la luz) incita a determinar una simetría que actúe en el espacio-tiempo de Minkowski de tal manera que dichas ecuaciones resulten ser invariantes (covariantes desde una terminología más apropiada). Como bien se sabe, este es un grupo de Lie de diez dimensiones denominado *Grupo de Poincaré* (*ISO(1,3)*), que admite una Representación en el espacio-tiempo de Minkowski, conocidas como transformaciones de

[91] Hay que decir que el abandono de un sistema de referencia privilegiado (desde el cual se miden las propiedades físicas) no es lo mismo que negar una tesis substantivalista respecto al espacio matemático donde se define la teoría. El primero involucra un aspecto de índole empírico, mientras que el segundo involucra un aspecto de índole metafísico.

Lorentz. Estas últimas tienen la siguiente forma (para un movimiento espacial unidimensional):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)\\ t' &= \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{x}/c^2)\end{aligned}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. A este respecto, algunos físicos y filósofos creen que es posible invertir dicho procedimiento de tal forma que, a partir de estas transformaciones, uno pueda dar una descripción completa de los fenómenos relativistas, incluyendo a los objetos y propiedades relativistas [Maudlin, 2012][92]. Su argumento versa en que la acción de *ISO(1,3)* en el espacio-tiempo de Minkowski establece un conjunto de invarianzas que son constitutivos de dicha simetría y dicho espacio, entre las cuales se encuentran, las ecuaciones de Maxwell, una generalización a las leyes de Newton (ambas formalmente expresadas en términos de tensores covariantes) y las magnitudes de las propiedades conservadas de los sistemas relativistas. Para ver en detalle este supuesto resultado, habría que notar que las ecuaciones de movimiento de esta teoría son ecuaciones que se expresan regularmente en términos de cuatri-vectores, que definen campos vectoriales en el espacio-tiempo de Minkowski. Resulta que, debido a las propiedades geométricas de *ISO(1,3)*, que actúa sobre este espacio, se obtiene una 2-forma diferencial invariante, llamado *Métrica de Minkowski* $\eta_{\beta\alpha}$. Esta métrica define un producto vectorial entre dos cuatri-vectores cuyo resultado siempre es un escalar invariante, es decir, un escalar que es independiente de las coordenadas. Este escalar regularmente se interpreta como la magnitud de la propiedad física que el cuatri-vector correspondiente representa. Por ejemplo, el caso más simple corresponde al producto entre dos cuatri-vectores de posición[93] $\mathbf{X}^\nu = (ct, x, y, z)$. Como la métrica es invariante bajo transformaciones de Lorentz Λ entre dos sistemas inerciales O y O', entonces:

$$(d\mathbf{X}')^2 = d\mathbf{X}'^{\mu'} d\mathbf{X}'_{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} d\mathbf{X}'^{\mu'} d\mathbf{X}'^{\nu'} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta d\mathbf{X}^\alpha d\mathbf{X}^\beta = \eta_{\alpha\beta} d\mathbf{X}^\alpha d\mathbf{X}^\beta = (d\mathbf{X})^2$$

por lo que el elemento $(d\mathbf{X}')^2$ resulta ser invariante. Este elemento corresponde al intervalo relativista espacio-temporal, lo que permite elucidar un cambio en las invarianzas que se satisfacen entre sistemas inerciales clásicos y relativistas, sobre todo porque el tiempo que separa a dos eventos ya no corresponde a un parámetro invariante entre dos sistemas de referencia relativistas. De aquí se siguen tres resultados importantes: i) la trayectoria que describe la luz en su movimiento es una línea recta que se sitúa en la superficie del cono de luz (formado por la estructura métrica de este espacio-tiempo). Así mismo, el producto entre dos cuatri-vectores de velocidad $\mathbf{U}^\nu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$ (que se obtiene de la posición mediante $\mathbf{U}^\nu = d\mathbf{X}^\nu/d\tau$, donde $d\tau = \sqrt{-d\mathbf{X}^2}$) corresponde a un invariante equivalente a $-c^2$, lo que implica el principio de constancia de la velocidad de la luz[94]; por otro lado, ii) la invarianza del intervalo relativista permite establecer una conexión con la Física, y en particular, con el principio de inercia relativista, que dictamina

[92]La posibilidad de describir completamente los fenómenos y subsistemas relativistas a partir de la covarianza de Lorentz ha sido objeto de controversia. En [Brown, 2005] se argumenta en contra de esta posibilidad legitimando una formulación constructiva de la *RE*. Por el contrario, en [Maudlin, 2012] es posible encontrar una formulación de la *RE* en términos de la estructura inherente del espacio-tiempo de Minkowski.

[93]Dado que se trata de un espacio euclidiano, el espacio tangente es isomorfo a él.

[94]Un ejemplo interesante es el producto entre dos cuatro-vectores de momento $\mathbf{P}^\nu = \gamma(E/c, p_x, p_y, p_z)$ que resulta ser la energía en reposo de una partícula $-(mc)^2$ (en un sistema de coordenadas donde el momento clásico de la partícula es nulo).

que cualquier trayectoria de una partícula que no se vea afectada por fuerzas externas (tanto mecánicas como electromagnéticas) describe líneas rectas en el espacio-tiempo de Minkowski. De igual modo al caso anterior, este principio se deduce principalmente por el hecho de que si la velocidad de una partícula es constante (lo que supone que no existen fuerzas que cambien su estado de movimiento), se puede demostrar que su trayectoria describe una línea recta en el espacio-tiempo de Minkowski; finalmente, de forma análoga a los casos anteriores, es posible demostrar que, debido al carácter invariante de la métrica de Minkowski y a la simetría relativista, iii) el tiempo que miden los "relojes" en cualquier sistema de referencia es, en realidad, un concepto que establece una medición de la longitud de las trayectorias de las partículas en el espacio-tiempo. Gracias a este concepto, ha sido posible construir superficies de "simultaneidad" (conocidas como *Superficies de Cauchy*), para las cuales se fijan las condiciones iniciales de las ecuaciones dinámicas, lo que permite determinar el futuro y el pasado de un universo relativista a partir de ellas. Estos tres resultados son, para algunos físicos y filósofos, los principios fundamentales en los que versa la *RE*, indicando con ello que la dinámica asociada a esta teoría se encuentra intrínsecamente relacionada con la estructura del espacio y el tiempo donde se define [Maudlin, 2012].

De esta forma, es posible identificar a las propiedades de las partículas relativistas como elementos invariantes bajo transformaciones que se definen en el espacio-tiempo de Minkowski. Ahora faltaría ver cómo es que los objetos donde se instancian dichas propiedades, incluyendo a las partículas y los campos electromagnéticos, se pueden re-conceptualizar en términos de la simetría relativista. Análogamente al caso clásico, esto se puede hacer si se obtiene un conjunto de ecuaciones de movimiento que permitan identificar a cada partícula con sus respectivas propiedades, y a los campos electromagnéticos con sus cualidades ondulatorias. Siguiendo con este procedimiento, se puede demostrar que la acción de *ISO(1,3)* en el espacio-tiempo de Minkowski permite "derivar" a las ecuaciones de movimiento relativistas. Específicamente, permite formular una generalización a las soluciones de la segunda ley de Newton en compatibilidad con las fuerzas electromagnéticas, y de igual modo, determina las soluciones ondulatorias de las ecuaciones de Maxwell. En efecto, dadas las características invariantes (bajo las transformaciones de Lorentz en particular) de algunos elementos, entre ellos el *Operador de D'Alembertian* '$\Box$', la fuerza relativista, y el *Tensor Electromagnético*, es posible demostrar que:

$$
\begin{aligned}
F'^{\mu'} = F^{\mu} = \frac{dP^{\mu}}{d\tau} &= (F^0, \gamma\mathbf{f}) \text{ donde } F^0 = \gamma/c(dE/dt) \text{ y } \mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt. \\
\Box' F'^{\alpha'\beta'} = \Box F^{\alpha\beta} = \partial^{\nu}\partial_{\nu}F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F^{\alpha\beta}}{\partial t^2} - \nabla^2 F^{\alpha\beta} = 0
\end{aligned}
$$

donde $F^{\alpha\beta}$ es el tensor electromagnético. Estas corresponden a las ecuaciones de movimiento de partículas con propiedades bien definidas y ondas electromagnéticas, respectivamente. Aquí habría que poner un énfasis en que las ecuaciones de movimiento relativistas no se puedan obtener solamente mediante el principio de covarianza de Poincaré. En este caso, del mismo modo en que se obtuvieron las magnitudes de los cuatro-vectores, las ecuaciones de movimiento relativistas son invariantes bajo la acción de *ISO(1,3)* en el espacio-tiempo de Minkowski. Esto significa que para obtener la Física de los fenómenos relativistas es necesario especificar el espacio de Representación en el que actúa la simetría subyacente y en el que se

definen tanto relojes como longitudes [Maudlin, 2012]. Así mismo, nótese que en este caso, los objetos relativistas son eventos o campos tensoriales que se definen en el espacio-tiempo de Minkowski, lo que implica que las ecuaciones de movimiento no determinan, por un lado, las trayectorias de un sistema de partículas, y por otro lado, la propagación de ondas en el espacio físico. Al contrario, la ley de Newton generalizada determina las trayectorias de un sistema de partículas espacio-temporales y la ecuación de onda relativista determina la propagación de ondas en el espacio y el tiempo mediante una noción de distancia diferente.
Antes de terminar, faltaría reiterar la correspondencia que existe entre *ISO(1,3)* (incluyendo su Representación en el espacio-tiempo de Minkowski) con el formalismo que se ha identificado en este trabajo. Para ello, solo habría que recordar que la contracción de *ISO(1,3)* (para velocidades bajas) resulta ser el *Grupo de Galileo Extendido* ($\widetilde{Gal}$), la simetría correcta de la *MCU* que, a su vez, difiere por medio de un homomorfismo con un subgrupo del *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* (*ISp(n)*) de la *MC*. De este modo, es posible ver que existe una estructura de grupo con remanentes clásicas y cuánticas pero que es empíricamente adecuada en el dominio relativista.
Finalmente, habría que recordar que el componente semántico del *REO* que se caracteriza aquí debe satisfacer dos condiciones, una con respecto a la claridad del formalismo que se presentó arriba y la otra con respecto a su adecuación empírica. Recuérdese que la primera demanda claridad y desambiguación respecto a la interpretación estructural de objetos matemáticos mediante: i) la suposición de que existe una relación unívoca entre este formalismo y la estructura de un mundo (no necesariamente el mundo real); y ii) la identificación de este formalismo con un lenguaje estrictamente estructural que subyaga a las teorías de la Física. Ahora bien, estas dos condiciones se lograron satisfacer mediante el esclarecimiento de una noción de representación Tarskiana y la derivación de las leyes que corresponden a la *MC*, la *MCU*, y la *RE* a partir de la simetría simpléctica que todas comparten. Así mismo, se demostró la adecuación empírica de dicha estructura mediante dos estrategias: i) apelando a un instrumental metafísico que permite hablar y hacer juicios de verdad acerca de objetos y sus propiedades, sin comprometerse ontológicamente con ellos; y mediante ii) la derivación de las ecuaciones de movimiento que corresponden tanto a la *MC*, la *MCU*, y la *RE*. Habiendo hecho esto, es momento de proceder a caracterizar el componente epistemológico del realismo, aquél que tiene directa relación con el potencial de unificación y continuidad del formalismo que se ha identificado, para hacer frente a los problemas de confirmación que enfrenta una tesis realista: el *PSD* y el problema derivado de la *MIP*.

11. Una Propuesta Estructural: La Dimensión Epistemológica

Hasta aquí se ha demostrado que el formalismo estructural que subyace a algunas teorías exitosas de la Física permite una interpretación estructural clara y empíricamente adecuada. Este resultado permite elucidar una correspondencia bien definida entre la matemática y el perfil estructural del mundo que esbozan estas teorías. Sin embargo, hasta el momento no se ha dicho con precisión si la imagen del mundo que esboza la estructura matemática que subyace a la *MC*, la *MCU*, y la *RE* corresponde a la del mundo real. Podría ser el caso de que estas tres teorías contaran una historia muy clara y empíricamente adecuada que, sin embargo, no resultara ser correcta. Así mismo, podría ocurrir que otras teorías exitosas (las que se excluyen, ó bien, las que todavía falta por descubrir) esbozaran una imagen muy distinta del mundo que supuestamente representan, ó bien, que existieran diferentes interpretaciones compatibles con cada una de las teorías que se están considerando. De esta manera, hace falta confirmar si efectivamente la interpretación estructural del formalismo que se ha identificado tiene una correspondencia de verdad con el mundo real. Para ello, es necesario corroborar dos aspectos importantes en relación a este formalismo: i) su potencial de unificación, el cual permite abarcar las distintas interpretaciones que se han hecho en el seno de cada una de estas teorías; y ii) su potencial de continuidad, que garantiza su preservación estructural a través del cambio teórico. Como se verá a continuación, ambos aspectos permitirán dar una salida sugerente al *PSD* y el que se deriva de la *MIP*.

11.1. Análisis Filosófico y Metodológico

Para lograr este cometido, creo necesario identificar, aclarar y explicar desde un principio dos elementos en el orden de importancia: i) las bases filosóficas que fundamentan la dimensión epistemológica del realismo que se desea adoptar aquí, es decir, la tesis filosófica que determina la forma y el sentido en que las teorías científicas se confirman, fundamentando con ello conceptos como la verdad y la viabilidad de las proposiciones de las teorías científicas; y ii) el lenguaje formal en términos del cual se analizan y caracterizan los aspectos epistemológicos de las mismas (continuidad y unificación de la estructura, relación entre la matemática y la ciencia, etc.). En el caso de (i), se tomarán en cuenta algunos enfoques acerca del conocimiento, y en términos de estos últimos, se establecerá la relación que existe entre la filosofía y la ciencia y el rol que desempeña la Metafísica. Para ello, se pretende tomar en cuenta la dimensión pragmatista del conocimiento, donde algunos aspectos concernientes a las prácticas cognitivas se anticipan a los juicios de verdad y de certeza. Específicamente, se hará un análisis detallado de lo que se conoce como *Pragmatismo Epistemológico*, para luego anticipar una relación directa entre esta última y una corriente filosófica llamada *Metafísica Especulativa* que, a primera vista, perecen ser incompatibles. Posteriormente, se tratará de establecer un punto de convergencia entre estas tesis filosóficas y el *REO*, tomando con ello, distancia considerable respecto al realismo metafísico, las corrientes lógico-positivistas, las convencionalistas, las escépticas radicales, y por último, del idealismo radical.

Ahora bien, para el caso de (ii), creo necesario advertir que a este nivel de análisis, el lenguaje formal del que se habla resulta ser convencional, en el sentido de que sirve como instrumental metodológico con el que

es posible caracterizar, de la mejor manera posible, a las estructuras que constituyen a las teorías científicas. Nótese que este lenguaje es esencial y categóricamente independiente del que subyace a la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones. A decir verdad, es un meta-lenguaje que se emplea al nivel de la Filosofía de la Ciencia, el cual se elige de acuerdo a la finalidad que se tenga. Siguiendo con la tesis pragmatista que se analizará en (i), aquí se requiere de un meta-lenguaje que pueda, en la medida de lo posible, representar fidedignamente a las prácticas científicas lo más cercano a como realmente son: actividades complejas. En efecto, la evidencia de un contenido matemático común, como también de la continuidad de un formalismo que subyace a distintas teorías de la Física no es tan trivial como parece. Pues para ello, debe esclarecerse la correspondencia que existe entre los modelos tan complejos que se han propuesto en cada teoría (aproximaciones, idealizaciones, etc.) con las teorías matemáticas que se desarrollan con el paso del tiempo. Así mismo, también importan las relaciones inter-teóricas que existen, y por supuesto, los aspectos epistémicos que entran en juego en las prácticas científicas. Por ejemplo, los límites semánticos y epistemológicos de cada uno de los modelos que constituyen a las ciencias contemporáneas, ó bien, la falta de una imagen clara de lo que es, en realidad, una teoría. Por estas razones, se elegirá un meta-lenguaje particular en términos de teoría de conjuntos llamado *Estructuras Parciales*, que tiene su raíz en la *Visión Semántica de Teorías*. De este modo, para poder comprender el importe epistemológico que yace detrás de este meta-lenguaje, será necesario comenzar con un breve preámbulo de lo que es, a grandes rasgos, la visión semántica de teorías y su relación con un realismo estructural de perfil óntico. Una vez hecho esto, se definirá formalmente este meta-lenguaje, y a partir de él, se procederá a caracterizar el formalismo que se ha identificado en secciones posteriores.
Antes de empezar creo conveniente advertir que en esta parte, no se pretende respaldar ni justificar la filosofía pragmatista ni la Metafísica especulativa (dada la complejidad de sus ideas, ocuparía la misma extensión de una tesis doctoral). Aunque en ocasiones mostraré cierta simpatía con algunos aspectos, mi intención es hacer una revisión de sus ideas más importantes, y con base en ello, demostrar la compatibilidad que existe entre ambas tesis y una versión del *REO*. Por esta razón, mi labor es más descriptiva que justificativa, y conduce al lector a reconocer que existen varias formas de interpretar este tipo de realismo, una de las cuales corresponde a la tesis donde confluye el pragmatismo y la Metafísica especulativa.

11.1.1. Pragmatismo Epistemológico

La "Biblioteca de Babel" de Jorge Luis Borges [Borges, 1944] es una alegoría acerca del posicionamiento del conocimiento humano en una realidad aparentemente caótica y azarosa. El universo es, metafóricamente hablando, una biblioteca gigantesca que contiene un número inimaginable pero finito de libros, que equivale al total de combinaciones que se pueden hacer con veinticinco símbolos, suponiendo que todos los libros contienen el mismo número de páginas, párrafos, y renglones. En dicha biblioteca se encuentran todas las obras literarias, las obras religiosas, incluso las obras filosóficas y científicas que se han hecho y se harán en el curso del tiempo humano. Una interpretación particular de este relato acaba dando cuenta de que todo pensamiento emerge y se consuma en la escritura, y por tal motivo, el humano cree que está destinado a ordenar la realidad, alcanzando con ello la verdad y la plenitud plena en las páginas de un libro único y fundamental. En búsqueda de este último legado, la biblioteca encarna individuos desesperados y dispuestos a adoptar un dogma que les permita embriagarse y alucinar con la verdad en términos de un lenguaje divino que esboza las páginas del primer libro que azarosamente encontraron. Pero es un hecho que el total de las posibilidades lingüísticas y semánticas de la Biblioteca no se limitan a un libro ni a un lenguaje, sino que por el contrario, existen diferentes lenguajes encarnados en las páginas de otros libros que incluso designan un mismo significado. A propósito de estos hechos, la majestuosidad, diversidad y enormidad de la biblioteca crea la confusión, la duda, y con ello, revela la ingobernabilidad unilateral de la mente y la ilegitimidad de principios fundamentales. En esta suerte, este relato invita al lector a reflexionar en torno al complejo proceso cognitivo que involucra el conocimiento humano, tomando en cuenta sus limitaciones, sus posibilidades, sus rasgos subjetivos y esenciales.

Ahora bien, aunque la interpretación estándar de este relato es de origen idealista, creo importante considerarlo como punta de partida para reconocer un problema de la filosofía moderna respecto a la insistencia de privilegiar la claridad, la distinción y la certeza de los enunciados lingüísticos (como principios normativos en cuanto al conocimiento y la realidad), e ignorar la diversidad de los procesos del conocimiento y la complejidad de las prácticas cognitivas. A decir verdad, se confina la realidad y el pensamiento al 'diccionario' de un lenguaje privilegiado, cuyos términos ya tienen un significado propiamente establecido, sin saber que en otra parte de esta enorme biblioteca existen otros libros, otros, símbolos, otros lenguajes y otros significados.

A partir de estas observaciones, la alegoría de Borges es, a mi parecer, una invitación a tomar en cuenta la dimensión pragmatista del conocimiento, donde algunos aspectos concernientes a las prácticas cognitivas se anticipan a los juicios de verdad y de certeza. Desde este punto de vista, resulta de suma importancia el reconocimiento, la aclaración y la explicación de una variedad de lenguajes e interpretaciones que una biblioteca como la de Babel puede llegar a tener. Es en este punto donde una alegoría como la de Borges permite motivar una tesis filosófica con tintes pragmatistas, pero que sin embargo, es necesario definir y caracterizar apropiadamente.

En términos más específicos, la tesis filosófica que quiero caracterizar puede considerarse como un punto de convergencia para conciliar las ideas pragmatistas y acumulativas de Peirce, la Metafísica especulativa de Whitehead y el pragmatismo epistemológico de estructuras parciales de Da Costa, French y Bueno. Sin duda, la anacronía y complejidad evidente entre estas posturas filosóficas puede suscitar un cuestionamiento en lo que respecta a la posibilidad de elucidar algún punto de acuerdo sin llegar, con ello, a una descontextualización de su significado filosófico y su historia. Sin embargo, la finalidad de esta sección estriba en convencer al lector de que algunos aspectos de estas diferentes tesis filosóficas apuntan en la misma dirección, no sin antes aclarar que los debates contemporáneos ayudan a enriquecer y aclarar contribuciones previas. Otro aspecto que es muy importante mencionar es que mi discusión acerca de estos autores estará restringido a algunas publicaciones específicas [Peirce, 1878, 1877, Whitehead, 1929, 1933, 1938, Mikenberg et al., 1986, Da Costa & French, 1990, 2003]. Esto implica que lo que llamaré la tesis de Peirce, Whitehead, ó bien, de Da Costa y colaboradores, no trata de hacer justicia de sus trabajos completos, ni trata de evidenciar los cambios y procesos que pasaron cada uno de ellos. Al contrario, trataré de acotar mi investigación tomando algunas ideas relevantes que en algún momento escribieron, y espero que el lector comprenda que cada vez que haga un llamado a su nombre implicará una referencia a estas ideas particulares.

Siguiendo con una metodología "dialéctica", empezaré con aclarar las similitudes y las diferencias conceptuales que aquí considero importantes entre estas tres tesis filosóficas. Para ello, se hará una investigación breve en lo que respecta a: i) sus enfoques acerca del conocimiento; ii) su concepción de la relación entre la filosofía y la ciencia; y iii) el estatus y el método de la Metafísica, no sin antes advertir que estas tres características se encuentran interrelacionadas. Específicamente, como punto de partida trataré de describir brevemente los elementos pragmatistas más significativos de la tesis de Peirce y Whitehead en lo que concierne al conocimiento, la relación indisociable que ambos defienden entre la filosofía y la ciencia, y las implicaciones filosóficas que suscita la defensa de Whitehead a la Metafísica especulativa. Posteriormente, tomando en cuenta una formalización a la tesis pragmatista en términos analíticos (gracias a Da Costa, French y Bueno), caracterizaré, a manera de síntesis, un tipo de pragmatismo epistemológico que es compatible con la Metafísica especulativa de Whitehead y especificaré la manera en que el *REO* que se ha caracterizado aquí puede adoptarse por medio de esta postura.

A mi parecer, Peirce y Whitehead comparten los siguientes principios normativos en relación al conocimiento: 1) una premisa pragmatista; 2) la constitución y el método epistemológico del pensamiento; 3i) la independencia de la realidad con la opinión del individuo cognoscente. De igual forma, difieren en cuanto a: 3ii) su relación con la ontología. A continuación, estas similitudes y diferencias se desglosan en tres pilares conceptuales:

(1) *La Premisa Pragmatista*. No es posible enunciar de forma a priori un conjunto de enunciados verdaderos acerca del mundo real, o en términos de Peirce, dar una definición precisa de cualquier "idea" que supuestamente exprese abstractamente la *concepción* total de una entidad real [Peirce, 1878, pp.286-9]. Al contrario, según Peirce la "idea" que se tiene acerca de una entidad es la concepción general que se tiene del total de sus efectos que produce o produciría en todas las situaciones imaginables [Peirce, 1878, pp.289-93]. En este sentido la concepción, a diferencia de una proposición y una definición, expresa una totalidad epistémica.[95]

> Consider what effects, which might conceivably have practical bearings, we conceive the object of our conception to have. Then, our conception of those effects is the whole of our conception of the object. [Peirce, 1878, p.293]

Por 'consecuencias prácticas', Peirce se refiere a que la experiencia del objeto y el conocimiento general de sus efectos produce hábitos y creencias factuales en el cognoscente, lo que forma el

[95] Sin embargo, es posible expresar la concepción total de una entidad en términos de una proposición únicamente en el estado final del conocimiento. Con esto se debe tomar en cuenta el carácter finalista de su tesis filosófica, es decir, incorporando un estado total y final de conocimiento [Da Costa & French, 2003, pp.13-4]. Este aspecto se analizará más adelante.

preámbulo de posibles acciones racionales e imaginables (por ejemplo, el inicio de una investigación). El dogma que se quiere revertir con esta premisa tiene su origen, según Peirce, en la tradición lógica Leibniziana, en cuyo caso la función del pensamiento es aclarar y aprehender una idea distintamente[96], según las reglas de la lógica como la no-contradicción y el principio de razón suficiente [Peirce, 1878, p.287]. Así mismo, a la par con el sistema filosófico racional de Descartes, Peirce atribuye a la conciencia reflexiva la capacidad de descubrir los 'principios verdaderos' bajo la condición (objetiva) de que las ideas estén sujetas a una examinación crítica y dialéctica, o en otras palabras, que se aprehendan distintamente en tanto que no haya puntos obscuros en la discusión, y no sólo bajo la condición (subjetiva) de que sean claras a primera impresión [Peirce, 1878, p.288]. De esta forma, la verdad como certeza no existe, sólo la aprehensión y entendimiento gradual de ideas cada vez más generales y que se expresan por medio de concepciones parciales. Aquí el elemento de parcialidad involucra que las ideas no son una copia perfecta del objeto que se concibe, sino que constituyen una concepción inacabada y abierta que se puede completar de muchas maneras diferentes en virtud del reconocimiento de sus limitaciones y sus posibilidades. Una idea similar es posible encontrar en Whitehead:

> My point is that understanding is never a completed static state of mind. It always bears the character of a process of penetration, incomplete and partial. ...Of course in a sense, there is a completion. But it is a completion presupposing relation to some given undefined environment, imposing a perspective and awaiting exploration.[Whitehead, 1938, p.43]

En el mismo espíritu, Whitehead llama a evitar lo que él llama la *Falacia de la Concreción Inadecuada*, que consiste en suponer, de forma a priori, que una definición o enunciado es verdadero, y bien, la *Falacia Dogmática*, que consiste en suponer que los únicos enunciados relevantes e importantes en los procesos cognitivos son aquellos que son claros, distintos, y precisos [Whitehead, 1929, p.8]. Al contrario, independientemente de su certeza, todos los enunciados deben considerarse igual de importantes con el único propósito de comprender las ideas que los subyace.

> The history of European thought, even to the present day, has been tainted by a fatal misunderstanding. It may be termed The Dogmatic Fallacy. The error consists in the persuasion that we are capable of producing notions which are adequately defined in respect to the complexity of relationship required for their illustration in the real world. [Whitehead, 1933, p.144]

(2) *El pensamiento como conocimiento*. El pensamiento es un proceso racional y se constituye por un conjunto de ideas (concepciones). En términos más formales, Peirce argumenta que todo proceso de pensamiento es un proceso "semiótico" de signos. A este respecto, la teoría semiótica propuesta por él mismo, vincula al pensamiento con un conjunto de signos que pertenecen a un contexto semántico específico que hay que descifrar, donde los objetos a los que estos últimos refieren y el intérprete que

[96] Aprehender una idea distintamente es, según Peirce, dar una definición precisa de la misma en términos abstractos.

reconoce a los signos adquieren una unidad indisociable [Atkin, 2013]. A decir verdad, el pensamiento es el proceso del entendimiento y comprensión de las ideas que se confinan a diferentes formas de conocimiento (ciencia, filosofía, etc.). Según Peirce, la conciencia (que él entiende por conocimiento) tiene una dimensión sensitiva (aquello de lo que uno es consciente inmediatamente) y otra dimensión relacionada con el pensamiento, que es un proceso mental temporal que consiste en la sucesión, ordenación y distinción congruente de las sensaciones que se manifiestan (incluyendo su modalidad) [Peirce, 1878, p.290]. Para Whitehead, el pensamiento es, por definición, un proceso que comprende diferentes ideas. Ahora bien, el pensamiento como cualquier proceso, tiene un origen, una función y una finalidad. Estas son las siguientes:

(i) *El Origen del Pensamiento*. La raíz de todo pensamiento proviene de los hechos empíricos y las sensaciones. En este punto, Peirce argumenta que la maquinaria de la mente solo puede transformar el conocimiento pero no lo puede fundar, al menos que haya nuevos hechos empíricos que lo originen [Peirce, 1878, p.287]. Sin embargo, como se verá más adelante, su concepción nominalista de la realidad no permite que esta postura se reduzca a un empirismo radical. Según Whitehead, los hechos empíricos y las sensaciones que producen son, en efecto, el inicio de una aventura imaginativa del pensamiento regimentadas por las reglas de la lógica y otros criterios racionales [Whitehead, 1929, p.5]. Aunado a esto, Whitehead argumenta que no es posible axiomatizar las ideas, no sin antes aprehenderlas distintamente a partir de los hechos empíricos, debido a que su base fundacional se establece con estos últimos. Así mismo, no es posible saber de antemano cuál es el lenguaje indicado (en términos del cual dichos principios se expresan), no sin antes aprehender distintamente las ideas cuya base fundacional se establece, igualmente, con los hechos empíricos.

(ii) *La Función del Pensamiento*. Este último es la aprehensión distinta de las ideas debido a la duda. Según Peirce, esta última es una insatisfacción producida por la resistencia que los hechos empíricos impone sobre determinadas creencias previas (acerca de las ideas) debido a una situación nueva que desafía el conjunto de hábitos acumulados por la experiencia [Peirce, 1878, pp.289-90]. En este punto, Whitehead agrega que las ideas se aclaran, en parte, al identificar o familiarizarse con el lenguaje en términos del cual se expresan (suponiendo que sin lenguaje no hay ideas). Así mismo, en lugar de asumir que existe un lenguaje privilegiado, en términos del cual los principios verdaderos supuestamente se expresan, es necesario aclarar las ideas que corresponden a dicho lenguaje, y por ende, identificarlo bajo la constate prueba de su éxito en dominios más generales. Ahora bien, ambos pensadores precisan que la mente puede proceder de esta manera gracias a las herramientas de la lógica que nos sirven para aclarar nuestras ideas en un estado momentáneo del conocimiento, y bien, para saber claramente lo que pensamos, dominar y reconocer el método con el cual damos significado a las ideas.

(iii) *El Propósito del Pensamiento*. Este último tiene su raíz en una teoría verificacionista y pragmatista del conocimiento. En contra de la duda metódica cartesiana, el propósito del pensamiento es, según Peirce, la corrección y adquisición de nuevas creencias que se concretizan únicamente en términos de un efecto sensible (putativo), pero que después de todo, es un estado momentáneo del pensamiento que termina generando otras creencias. La duda es, por tanto, un catalizador para la puesta en marcha de nuevas creencias. En este punto, Whitehead agrega que el propósito del pensamiento es generalizar las ideas que provienen de los hechos empíricos (de un dominio restringido a dominios más extensos) por medio de un esquema determinado de ideas tentativas [Whitehead, 1929, p.5].

(3) *La Dimensión Ontológica del Pragmatismo*. En lo que respecta al realismo, Peirce y Whitehead comparten un punto de acuerdo en tanto que ambos argumentan que i) es posible adoptar una tesis realista con rasgos pragmatistas siempre y cuando se especifique el sentido con respecto al cual eso que llamamos real resulta ser independiente de cada uno de los individuos pensantes. Sin embargo, es posible apreciar un punto en desacuerdo al momento de analizar este rasgo de independencia para cada caso, vinculado a ii) la distinción entre la epistemología y la ontología. Tomando en cuenta estas observaciones preliminares, en seguida se pretende profundizar en los rasgos que conllevan a la convergencia y la divergencia ideológica entre ambos autores.

Desde una lectura contemporánea (que no sólo se debe a Peirce sino a un desarrollo filosófico muy complejo que no pretendo esbozar aquí), el pragmatismo epistemológico vincula la verdad con las normas epistémicas que se adoptan en un estado factual y posible del conocimiento [Hookway, 2016]. De este modo, un enunciado es verdadero siempre y cuando pueda verificarse por medio del conocimiento de lo que dicho enunciado refiere. Por supuesto que ese conocimiento pertenece al universo de lo posible, aunque por ahora no sea el caso. Algunos pragmatistas vinculan esta tesis filosófica con un rasgo común que los distingue de un realismo metafísico. Este rasgo común es esencialmente el hecho de que la verdad objetiva se disocia de la teoría correspondentista de la verdad, negando con ello que cualquier enunciado es verdadero si y sólo si corresponde con un elemento de la realidad (por medio de enunciados con valores de verdad que se satisfacen por variables abstractas), independientemente de que se llegue (o no se llegue) a saber [Ellis, 1985]. Es en este sentido que un pragmatismo epistemológico de esta envergadura cobra un significado especial, asociando la verdad objetiva con las posibilidades y procesos epistémicos del cognosciente. Sin embargo, hasta aquí no queda claro de qué manera es posible salvaguardar una tesis realista si esta última supone cierta independencia cognitiva con respecto al mundo real. Aquí es donde es necesario especificar lo que para un pragmatista epistemológico tiene una connotación de realidad. Es cierto que tanto Peirce y Whitehead comparten algunos de estos elementos pragmatistas, sin embargo, la vinculación entre la verdad y las normas epistémicas no es un rasgo que podamos encontrar en ambos. Es en este punto donde se comienza a observar una divergencia entre ambos autores, la cual reside principalmente en el vínculo entre la epistemología y la ontología, y particularmente, en la categoría filosófica que cada uno le adjudica, por un lado, a los hechos empíricos y las sensaciones, y por otro lado, a la verdad. Aunque esta diferencia se caracterizará más adelante cuando se analicen los aspectos metafísicos, es importante adelantar algunos elementos significativos. Siguiendo con una postura verificacionista, el significado de cualquier entidad o concepto se determina, según Peirce, por medio de los efectos sensibles que (putativamente) produce, los cuales tienen consecuencias epistemológicas en tanto que, por medio de un proceso de pensamiento, construyen y formulan una concepción parcial, ó bien, una creencia (putativa) acerca del objeto. Sin embargo, a diferencia del empirismo y el idealismo, estos efectos sensibles no son un recurso primario e irreducible a partir del cual comienza y termina el pensamiento, sino que tienen una causa que se debe a la presencia de un objeto real, y en términos generales, a la realidad externa. Es decir, Peirce describe lo que es, a grandes rasgos, la tesis nominalista de la siguiente manera:

> Where is the real, the thing independent of how we think it, to be found? There must be such a thing, for we find our opinions constrained; there is something, therefore, which influences our thoughts, and is not created by them. We have, it is true, nothing immediately present to us but thoughts. Those thoughts, however, have been caused by sensations, and those sensations are constrained by something out of the mind. This thing out of the mind, which directly influences sensation, and through sensation thought, because it is out of the mind, is independent of how we think it, and is, in short, the real. [Peirce, 1871, p.468]

De este modo, Peirce infiere que la totalidad de los efectos sensibles que imponen las entidades reales produce creencias, las cuales no son estrictamente correctas hasta que exista una concepción total de las mismas en un "estado final" de conocimiento que, según él, adquiere el mismo perfil finalista que cualquier hipótesis que está predestinada a confirmarse. Esta es la razón por la que es necesario conservar la noción de verdad objetiva que únicamente es accesible en un estado final y total de conocimiento, donde supuestamente es posible conocer todo lo que constituye al universo. Por supuesto que solo en este estado final y total es cuando se puede adoptar la teoría correspondentista de la verdad. Esto debido a que la totalidad de los efectos que produce una entidad real (que, después de todo, es la concepción total de la misma) se pueden expresar en términos de una serie de proposiciones verdaderas que corresponden a la entidad real.

> Different minds may set out with the most antagonistic views, but the progress of investigation carries them by a force outside of themselves to one and the same conclusion. This activity of thought by which we are carried, not where we wish, but to a foreordained goal, is like the operation of destiny. No modification of the point of view taken, no selection of other facts for study, no natural bent of mind even, can enable a man to escape the predestinate opinion. This great law is embodied in the conception of truth and reality. The opinion which is fated to be ultimately agreed to by all who investigate, is what we mean by the truth, and the object represented in this opinion is the real. That is the way I would explain reality. [Peirce, 1878, p.300]

Ahora bien, contrariamente a este argumento, el significado y concepción de cualquier entidad se determina, según Whitehead, por medio de las preconcepciones metafísicas que se tienen respecto al mundo donde se instancia (que es una generalización en un estado momentáneo del conocimiento) y no con respecto a los hechos empíricos que, después de todo, no se presentan enteramente como son, sino están infectados por preconcepciones teóricas y metafísicas [Whitehead, 1929, p.11]. Aquí es importante destacar que si bien, la naturaleza metafísica de las entidades reales no es independiente de la evolución del pensamiento, Whitehead no sólo adopta una tesis reconciliadora entre la epistemología y la ontología, sino que incluso las colapsa para embarcarse en un proyecto cuyas bases fundamentales se encuentran en la *Filosofía del Proceso* [Whitehead, 1929]. Desde este punto de vista, el conocimiento es un proceso continuo cuya única finalidad es la comprensión y no la verdad. Esta última no puede establecerse mediante un enunciado lingüístico o un dogma (no importa si se enuncia hoy o en millones de años), porque de ser así, se estaría suponiendo el carácter estático y monista de la realidad. Al contrario, la realidad, incluyendo al pensamiento, es un proceso continuo y complejo que no es posible determinar de alguna forma y con un lenguaje predeterminado. Tomando en cuenta estas especificaciones y después de haber establecido los puntos de acuerdo entre las posturas filosóficas de Peirce y Whitehead (en torno al conocimiento), es importante reconocer e identificar un elemento donde no hay un acuerdo común: el estado final del conocimiento y sus implicaciones al realismo. Según Peirce, el estado final del conocimiento es total y es una predestinación. Esta suposición es necesaria en cuanto a que permite cierta independencia cognitiva del mundo real, tomando en cuenta un destino epistemológico de índole objetivo que no depende de quién lo sepa pero sí de que se llegue a saber. Así mismo, tiene su justificación en el hecho de que cualquier negación al acceso epistémico en dominios que hoy en día son desconocidos es un juicio de valor falaz debido a que no es posible corroborarlo a priori. Contrariamente a esta postura, Whitehead argumenta que la verdad no es una predestinación (no es el estado final objetivo al que llegaremos) ni tampoco un punto de referencia al que aspiramos llegar. La función del pensamiento es, en realidad, el proceso continuo cuya única finalidad es la comprensión, mientras que su necesidad y posibilidad es el carácter inestable y procesal de la realidad. Este es el rasgo que caracteriza la independencia del mundo con la opinión que cada individuo cognoscente puede llegar a tener de él, esa distancia que existe entre lo estable y lo inestable, entre el dogma y el proceso. En este sentido, el conocimiento (incluida la ciencia), como pieza clave en los procesos ontológicos de la realidad, es constitutivamente progresivo pero no acumulativo ni finalista [Whitehead, 1933, p.145]:

> Rationalism is an adventure in the clarification of thought, progressive and never final. But it is an adventure in which even partial success has importance. [Whitehead, 1929, p.9]

Ahora bien, después de establecer algunas diferencias y similitudes que se aprecian entre las posturas epistemológicas y ontológicas de Peirce y Whitehead, es momento de investigar los principios normativos en relación a la relación entre la ciencia y la filosofía mediante: 1) su constitución en términos de ideas; 2) la importancia de la ciencia en la era moderna. A continuación se desglosan ambos pilares conceptuales:

(1) *La constitución de la Ciencia y la Filosofía*. La ciencia al igual que la filosofía se constituyen de ideas,

que son producto del pensamiento racional. Como bien ya se dijo, el origen del pensamiento reside en los hechos empíricos, y como tales, son el principio y la regla que sostiene el edificio conceptual de la ciencia y la filosofía. Desde el punto de vista de Whitehead, la ciencia se dispone a investigar, descubrir e identificar los hechos de la experiencia y brindarles un soporte conceptual por medio de un esquema de ideas, mientras que la filosofía pretende elaborar y revisar un esquema de ideas generales cuya base es la experiencia. En este sentido, ambas actividades tienen un punto en común, en cuanto a que su origen reside en la experiencia, entendida esta última como un conjunto de hechos empíricos que son susceptibles a las sensación y percepción directa, y en cuanto a su constitución, como la elucidación de un conjunto de ideas.

> Science and Philosophy mutually criticise each other, and provide imaginative material for each other. A philosophic system should present an elucidation of concrete fact from which the sciences abstract. Also the sciences should find their principles in the concrete facts which a philosophic system presents. The history of thought is the story of the measure of the failure and success in this joint enterprise. [Whitehead, 1933, p.146]

Por supuesto, esta visión de la ciencia y su estrecho vínculo con la filosofía, está asociado hoy en día con una tesis realista particular (tanto de los científicos como de los filósofos) que reconocen el papel significativo que la filosofía desempeña en los círculos de investigación científica. En parte, por investigaciones que demuestran que, gracias a teorías y metodologías científicas, es posible elucidar aspectos metafísicos que apuntan a la constitución del mundo, de acuerdo con el estado de conocimiento hasta ese momento. Esta postura difiere sobre todos de quienes argumentan que la ciencia es una actividad instrumental que tiene como finalidad la predicción por encima de la explicación y los problemas conceptuales inherentes en ella. De este modo, en lo que respecta al contenido de la ciencia (como un conjunto de ideas acerca de la evidencia empírica), la postura de Whitehead no sólo reconoce, aparte de su dimensión predictiva, la existencia y la importancia de la dimensión conceptual de la ciencia, sino que también afirma que la ciencia *es* un esquema conceptual de ideas y es, por definición, indisociable de él [Whitehead, 1933, p.140]. Por supuesto que esta afirmación tiene estrecha relación con una hipótesis que se analizará posteriormente y que consiste en que la evidencia empírica no es independiente de las ideas que adopta el individuo cognoscente, o en otras palabras, la hipótesis del trasfondo teórico de la observación. No obstante, antes de adentrarse en esta discusión, por ahora creo conveniente relacionar esta postura con algunas ideas que son adoptadas por Peirce. En efecto, la suposición de que toda creencia es el resultado de la duda, que ésta última es la elucidación concreta de un proceso de pensamiento auspiciado por la lógica y la razón, aunado a que toda creencia acerca de un objeto o concepto se constituye por el hábito y los efectos sensibles que produce, es una condición suficiente para la relación indisociable entre el núcleo conceptual y el núcleo científico de las ideas [Peirce, 1877]. Esto por el hecho de que el pensamiento, que se constituye de un conjunto de ideas, es un elemento del conocimiento que repercute en toda investigación, tanto predictiva como explicativa, que se ejecuta con base en los hechos empíricos. Así mismo, la importancia que tiene la lógica, como un instrumento para lograr la claridad y distinción de las ideas, también se ve reflejado en el lugar privilegiado que las matemáticas han gozado en el desarrollo de la ciencia desde hace ya varios siglos. Por este y otras razones que no se tratarán aquí, creo que es pertinente reconocer el lugar predominante que ocupa la ciencia en los tratados filosóficos de Peirce. En seguida se presentarán algunas ideas al respecto.

(2) *La importancia de la Ciencia*. Al asumir que existe un estado final y total de conocimiento, se asume que existe un acuerdo entre todos los agentes cognoscentes que se impone y se determina por la realidad externa. Pero para que el proceso colectivo de pensamiento llegue a semejante estado se necesita de un método que sea lo suficientemente robusto para garantizar la convergencia entre los diferentes enfoques racionales. Este es, según Peirce, el método científico [Peirce, 1877]. A este respecto, nadie puede negar que la ciencia es exitosa en cuanto a su poder de predicción, a tal grado que los métodos adoptados por ella han contribuido a desarrollar e implementar técnicas innovadoras en otras áreas especializadas del conocimiento. Así mismo, al ser un instrumento predictivo de semejante envergadura, uno desearía reconocer, entender y manipular el método que se implementa en la mayoría de las actividades relacionadas con ella. Sin embargo, todo parece indicar que no existe una sola respuesta al respecto, y si la hay, uno debe involucrarse enteramente en la dinámica y la profundidad de todas las prácticas científicas tanto teóricas como experimentales. A lo más, se puede decir que la destreza obtenida y las habilidades desarrolladas a lo largo de los años son los únicos aspectos que pueden explicar el origen y el proceso implicado en los cambios y contribuciones científicas. Por esta y otras razones, es importante reconocer y preguntarse acerca de los procesos y métodos epistémicos que se emplean en la ciencia que, en términos generales, van más allá del debate tan promiscuo que se ha generado en torno al realismo y el anti-realismo. Es en este punto neutral donde conviene llamar la atención acerca de la importancia de la ciencia en las actividades del pensamiento. Según Peirce, existe una distinción entre los razonamientos que infieren conclusiones verdaderas a partir de premisas verdaderas y las inferencias sensitivas que se hacen en vista de una adopción tentativa de creencias [Peirce, 1877]. Mientras que el primer tipo de inferencias son objetivas e independientes de quién las razone y exprese, el segundo tipo dependen de las normas epistémicas que el cognoscente llegue a adoptar. Así mismo, estas inferencias generan creencias, y por ende, hábitos que se traducen en acciones vinculadas a las prácticas del conocimiento. La tradición escolástica favorece el primer tipo de inferencias, implicando con ello, que la labor de la lógica se reduce y simplifica a la tarea de asumir premisas y formular conclusiones factuales y verdaderas bajo ciertas reglas bien establecidas. Pero cuando se trata del segundo tipo de inferencias, la lógica ya no actúa como un instrumento empecinado a formular sentencias verdaderas, sino a ordenar y estructurar las posibilidades (factuales o imaginarias) del pensamiento, lo que podría considerarse un antecedente de lo que hoy se conoce como *Lógica Modal* [Peirce, 1877].

Ahora bien, a la vista de cualquier estudiante de Física, parece que esta distinción no es apropiada para caracterizar la estructura lógica involucrada en las teorías científicas. Al fin y al cabo, hay teorías como la termodinámica clásica, o bien, la *RE*, que permiten una axiomatización de acuerdo a la jerarquía argumentativa que subyace al los principios físicos por encima de los fenómenos empíricos. Sin embargo, este tipo de impresión suele cambiar al reconocer que la ciencia no es, en general, el resultado de inferencias lógicas, sino que es un proceso muy complicado de actividades cognitivas donde se incluyen no sólo inferencias, sino idealizaciones, escenarios imaginarios que permiten entender algunos fenómenos factuales, ó bien, abstracciones que trascienden el ámbito empírico. Por supuesto que esto no significa que la ciencia no tenga un método establecido ni mucho menos una estructura lógica común que se pueda identificar en el amplio espectro de su dominio, sino que por el contrario, falta investigar y reconocer los hábitos que los científicos adoptan en un estado tentativo de conocimiento, siendo resultado de un complejo proceso lógico que, buscando armonía con los hechos empíricos, inicia con la duda y termina con la adopción de una serie de creencias. Aquí es donde el argumento de Peirce encuentra un punto de convergencia con el pensamiento de Whitehead. Para este último, la ciencia es uno de varios dominios del conocimiento que esperan, a la luz de nuevas evidencias, abarcar otros dominios en su incesante busca para generalizarse. Sin embargo, la evidencia indica que la ciencia no sólo ha gozado de esta virtud, en lo que se refiere a algunos dominios, sino que apuesta a incidir en la racionalización del pensamiento de acuerdo a su método lógico y experimental. A partir de ella, la lógica adquiere un lugar privilegiado, sobre todo en el ámbito de la física matemática. Pero no sólo se limita a la ciencia que, como bien se sabe, ha llevado a glorificarla, sino que además funda una nueva línea de pensamiento que tiene estrecha relación con el lenguaje. A decir verdad, la lógica es el procedimiento mediante el cual se llega a constituir un esquema de ideas que, de acuerdo con Whitehead, debe ser coherente, aplicable y adecuado [Whitehead, 1929, p.5].

Finalmente, a mi parecer, Peirce y Whitehead no comparten los siguientes principios normativos en relación a la Metafísica:

(1) *La Metafísica: el origen y el fundamento*. Según Peirce, el significado de cualquier entidad o concepto se determina por medio de los efectos sensibles que (putativamente) produce. En este sentido, su concepción se origina y se limita a sus diversas manifestaciones a las que se tiene acceso sensible. Convencido de que esta premisa supone la adopción de un verificacionismo de corte moderadamente empirista, no es claro si converge o diverge de las corrientes positivistas que tuvieron su auge a principios del siglo veinte. Sin embargo, con la intención de evitar traslapar y descontextualizar diferentes tesis filosóficas, creo pertinente distinguirlas desde ahora, y a partir de esta distinción, creo necesario investigar acerca del lugar que ocupa la Metafísica en su pensamiento.
Aunque otras contribuciones de Peirce adoptan otra visión acerca de la Metafísica (sobre todo las que tienen relación con la evolución), conviene citar un fragmento donde se establece claramente una postura anti-metafísica:

> However, as metaphysics is a subject much more curious than useful, the knowledge of which, like that of a sunken reef, serves chiefly to enable us to keep clear of it, I will not trouble the reader with any more Ontology at this moment.[Peirce, 1878, p.302]

Aquí habría que retomar la idea de que la totalidad de los efectos sensibles de las entidades reales produce creencias (acerca de ellas mismas) que son correctas únicamente en un estado total y final de conocimiento. Esto supone que la realidad, aunque no pueda descifrarse en su totalidad en un estado tentativo de conocimiento, está "destinada" a conocerse de manera exhaustiva. De ser así, no tiene sentido hacer suposiciones metafísicas a priori acerca del mundo real que vayan más de las posibilidades epistemológicas que se tienen hoy en día. Aunque puede que sea verdadera, una suposición acerca del mundo en un estado tentativo del conocimiento tiene alta probabilidad de que sea falsa, o bien, que pueda impedir el descubrimiento de nuevas evidencias.

Ahora bien, en dirección contraria al pensamiento de Peirce, es posible identificar una serie de contribuciones filosóficas que se desarrollaron en el mismo periodo y que tienen su base en un análisis sistemático de la historia del pensamiento, y en particular, de la historia de la ciencia. En efecto, consisten en comprender y caracterizar los rasgos más esenciales de un periodo de pensamiento de acuerdo con un tipo de racionalidad que no se limita a la que sus autores vivieron, sino que por el contrario, es un entramado anacrónico de ideas que, en conjunto, establecen un orden y un patrón que hace falta identificar: el *ethos*. A grandes rasgos, estas contribuciones afirman que el origen y la base fundacional de cualquier tipo de conocimiento (incluida la ciencia) reside en la Metafísica. Por ejemplo, en [Koyré, 1968] es posible encontrar el siguiente fragmento:

> I am convinced that the rise and growth of experimental science is not the source, but, on the contrary, the result of the new theoretical, that is, the new metaphysical approach to nature that forms the content of the scientific revolution of the seventeenth century. [Koyré, 1968, p.6]

Desde este punto de vista, la Metafísica no es aquello que es superfluo e innecesario. Sino al contrario, aunque se quiera prescindir de ella, es el origen y elemento constitutivo de todo pensamiento que, por una cuestión de coherencia, debe reconocerse. En este sentido, la Metafísica es aquello que se pregunta acerca del orden general y la estructura del universo, pero que subyace y persevera en cualquier dominio del conocimiento y que condiciona cualquier tipo de pensamiento. En una publicación de David Bohm es posible encontrar el siguiente fragmento:

> It seems clear that everybody has got some kind of metaphysics, even if he thinks he hasn't got any.... [T]he practical 'hard-headed' individual has a very dangerous kind of metaphysics, i.e. the kind of which he is unaware... Such metaphysics is dangerous because, in it, assumptions and inferences are being mistaken for directly observed facts, with the result that they are effectively riveted in an almost unchangeable way into the structure of thought... [W]hat is needed is a the conscious criticism of one's own metaphysics, leading to changes where appropriate and, ultimately, to the continual creation of new and different kinds. In this way, metaphysics ceases to be the master of a human being and becomes his servant, helping to give an ever changing and evolving order to his overall thinking. [Bohm, 1969, p.41]

Estas ideas son, en grandes rasgos, los puntos más esenciales que ayudaron a Whitehead a forjar una concepción singular de la Metafísica. Según él, el significado y concepción de cualquier entidad se determina por medio de las preconcepciones metafísicas que se tienen respecto al mundo donde se instancia. Nótese que aquí se puede observar una distinción clara con el pensamiento de Peirce, de acuerdo con el cual el significado y concepción de cualquier entidad o concepto se origina y se limita a sus efectos sensibles, dejando de lado cualquier alusión a aspectos metafísicos que trascienden no sólo el ámbito empírico sino el epistemológico también. Sin embargo, esta concepción particular de la Metafísica no sólo tiene su origen en las corrientes historicistas de la filosofía, sino que también se fundamenta en una postura singular con respecto a los hechos empíricos, el pensamiento y su relación con el lenguaje. A este respecto, vale la pena profundizar en estos aspectos.

(2) *La dimensión metafísica de la observación*. En lo que respecta a la ciencia, hoy en día no cabe duda de que la evidencia empírica y la observación no es independiente de la teoría, pero tampoco de los compromisos metafísicos que se adopten. Aunque en su tiempo ya existían procedimientos experimentales que sugerían romper con la distinción entre la observación y la Metafísica, conviene narrar una hazaña que servirá como ejemplo para corroborar fielmente su estrecha relación. En una ocasión, en compañía de un amigo astrónomo, platicábamos acerca del procedimiento que implica analizar imágenes astronómicas. Él me decía que los astrónomos usualmente reciben señales de radio a frecuencias específicas de algunas regiones del espacio. Estas señales se detectan y se amplifican por medio de una serie de antenas, de tal manera que se obtiene un patrón de interferencia. Este patrón es, a su vez, de-codificado (por medio de una herramienta matemática llamada la transformada de Fourier inversa) para obtener una representación aproximada de la imagen real. No obstante, el ruido (emisiones de ondas electromagnéticas) proveniente de poblaciones cercanas a las antenas forman inevitablemente parte de la imagen. A este respecto, me surgió una duda y no reparé en preguntarle ¿Cual era exactamente la labor del astrónomo ante este problema particular? A lo que respondió diciéndome que su principal labor era tratar de eliminar el ruido de las imágenes por medio de técnicas de contraste y diferenciación, para luego interpretarlas de acuerdo con lo que se sabe acerca de las ondas de radio. Esta conversación nos condujo a reflexionar acerca del rol que desempeña la observación y la supuesta legitimidad de las mediciones que se asume en las prácticas científicas. En este ejercicio, no solo se pudo constatar que estas observaciones dependen de un conocimiento sólido del proceso de interferencia de ondas de radio (en particular, de la habilidad de determinar la diferencia entre el ruido y la imagen real en una representación aproximada de esta última), sino también de un bagaje interpretativo que las legitima (por ejemplo, algunas suposiciones respecto a la constitución del universo).

Ahora bien, en vista de este ejemplo, es posible afirmar que un astrónomo que hace este tipo de análisis interpreta las señales de radio en términos de algunas teorías científicas preestablecidas, y por medio de una técnica de selección que ha adquirido mediante su experiencia en este tipo de análisis. Sin embargo, habría que advertir que para realizar dicho análisis experimental, no basta con identificar el formalismo que subyace a dicha teoría (lo que se llama la dependencia teórica de la observación), sino que también es necesario considerar la interpretación de la misma, bajo la cual los objetos y las propiedades que se observan se estructuran conceptualmente. A este respecto y contrariamente a lo que sustentan los proponentes del positivismo lógico, los hechos empíricos de la experiencia no constituyen, según Whitehead, un tipo de conocimiento que pueda delimitarse e identificarse mediante un conjunto de objetos, propiedades y relaciones establecidas o bien definidas, como pueden ser, los patrones de interferencia detectados por medio de las antenas [Whitehead, 1929, p.4]. Al contrario, la interpretación es constitutiva de la observación. Regularmente la observación de cualquier elemento se lleva a cabo mediante el método de la diferencia, que consiste en discriminar detalladamente aspectos de la experiencia para dar prioridad a un análisis sistemático de algunos objetos que supuestamente se presentan enteramente ante la percepción directa, como por ejemplo, la selección de la frecuencia con la que se detectan las ondas de radio y la eliminación del ruido de las imágenes astronómicas [Whitehead, 1929, p.4]. Sin embargo, todo parece indicar que este método requiere de algunos criterios de selección que puedan diferenciar los aspectos que destacan y aquellos que se discriminan. Pero a razón de que estos criterios no pueden elegirse sin elucidar algún tipo de interpretación, como lo supone la construcción de imágenes por medio de algunas técnicas utilizadas para descifrar las señales de radio, tanto el contenido teórico como los principios metafísicos que sustentan a dicha interpretación deben forman parte del conocimiento exhaustivo de todos los aspectos de la experiencia. A decir verdad, si los hechos empíricos fueran exhaustivos e independientes de cualquier otro tipo de conocimiento, se estaría ignorando el criterio respecto al cual los aspectos de la experiencia se discriminan bajo la observación directa, como puede ser el fondo interpretativo donde las ondas de radio, el ruido y el universo donde se sitúan adquieren una unidad indisociable. De este modo, Whitehead concluye que, tanto la interpretación como el método de la diferencia (mediante el cual se perciben los aspectos de la experiencia), están íntimamente relacionados con la observación y no pueden entenderse de manera autónoma [Whitehead, 1929, p.5]. A este respecto, Whitehead argumenta que la ciencia se constituye mediante la convergencia de dos modos de experiencia que son, en principio, inseparables, el orden de la observación y el orden conceptual:

> We inherit an observational order, namely types of things which we do in fact discriminate; and we inherit a conceptual order, namely a rough system of ideas in terms of which we do in fact interpret. We can point to no epoch in human history, or even in animal history, at which this interplay began. [Whitehead, 1933, p.155]

Esto quiere decir que los nuevos conceptos sugieren nuevas posibilidades de observación mientras que nuevas observaciones modifican el orden conceptual. De este modo, tanto el acto de observar como el acto de interpretar no pueden desarrollarse de manera independiente. A razón de este tipo de pensamiento que contrasta con el de los positivistas lógicos, Whitehead afirma que la función del pensamiento no es interpretar a los hechos empíricos. Al contrario, su función es, como ya bien se dijo, aclarar y entender las ideas que constituyen a dicha interpretación, tomando en cuenta que esta última es un ejercicio que se hace al momento de observar, es decir, que la observación involucra una interpretación [Whitehead, 1929, pp.14-5].

(3) *Todo lenguaje presupone compromisos metafísicos*. A lo largo de la historia de la filosofía, es posible encontrar diferentes enfoques que tienen como objeto de análisis al lenguaje coloquial, el lenguaje verbal, ó bien, los lenguajes formales. La mayoría de los enfoques, o más bien, los que han sido convencionalmente aceptados o discutidos, se despliegan en un amplio espectro que se origina básicamente a partir de la convergencia de dos categorías filosóficas en relación con el lenguaje: la lógica y sintáctica, ó bien, la semántica e interpretativa[97]. En un extremo del espectro se pueden encontrar las corrientes positivistas del principio del siglo veinte, las cuales contribuyeron a forjar la idea de que todo lenguaje podía expresarse en términos una estructura sintáctica y lógica mediante su axiomatización, incluyendo no sólo a las matemáticas sino a otro tipo de lenguajes más coloquiales. Mediante esta axiomatización y algunas reglas lógicas de correlación (morfismos), es posible elucidar una correspondencia unívoca entre este tipo de lenguaje y los hechos empíricos, desvinculando al lenguaje de cualquier tipo de interpretación o elemento semántico y dotándole de un grado mayor de independencia. En el otro extremo, se sitúan otro tipo de corriente filosóficas (como la Metafísica especulativa) que afirman que la principal función del leguaje es referencial, en el sentido de que todo signo lingüístico tiene una función semántica. Es decir, todo signo lingüístico refiere a un elemento (un objeto, una propiedad, etc.) que forma parte de una interpretación, así como también cualquier elemento de una interpretación se expresa en términos de algún signo lingüístico [Whitehead, 1929, p.11]. Desde este punto de vista, y en particular de la Metafísica especulativa, la expresión de cualquier signo presupone la presencia de una entidad a la que refiere, de modo que el conjunto de signos (lo que forma una oración) presupone una interpretación acerca de la totalidad del universo donde dichas entidades se instancian. Nótese que aquí no se ha hecho referencia al concepto de verdad, por lo que, bajo la premisa de su función referencial, no es necesario que las oraciones verdaderas correspondan a aspectos de la realidad. Al contrario, la Metafísica especulativa no trata de hacer afirmaciones verdaderas acerca de la constitución del mundo real, sino hace sentencias (posiblemente verdaderas o falsas) acerca de un mundo hipotético, cuyas características son indisociables del lenguaje que se está empleando. En este sentido, hablar acerca de una interpretación (cuyas características se verán más adelante), ya sea correcta o incorrectamente, es parte de lo que Whitehead llama Metafísica especulativa. Por supuesto que una revisión histórica de esta corriente filosófica podría remitirse al mismo Peirce, quién había articulado una teoría de signos (semiótica) que, a grandes rasgos, afirma que ningún pensamiento puede entenderse ni aclararse sin reconocer que se constituye de signos que pertenecen a un contexto semántico particular en el que el intérprete desempeña un papel importante. En este punto valdría la pena recordar que la función del pensamiento es, según Whitehead, identificar, aclarar y entender los principios metafísicos que se presuponen tanto en el lenguaje como en

[97] Tarski se refiere a este despliegue al hacer la distinción formal entre lenguaje objeto y el metalenguaje, cuyos conceptos ya se han definido secciones arriba.

el proceso de observación en un estado momentáneo del conocimiento. Después de todo, las ideas se aclaran, en parte, al identificar o familiarizarse con el lenguaje en términos del cual se expresan (suponiendo que sin lenguaje no hay ideas). Así mismo, en vista de que todo lenguaje presupone compromisos metafísicos que se deben identificar explícitamente y restringir a un domino particular, no es posible saber de antemano cuál es el lenguaje indicado. De este modo, en lugar de asumir que existe un lenguaje privilegiado, en términos del cual los principios verdaderos supuestamente se expresan, es necesario empezar por aclarar las ideas que corresponden a dicho lenguaje, y de este modo, identificar a él y a las presuposiciones metafísicas que se hacen bajo la constate prueba de su éxito en dominios más generales. Aquí es donde la Metafísica especulativa que defiende Whitehead, aunado a la condición indisociable del lenguaje, la observación y la interpretación, converge con su pragmatismo epistemológico en un esquema filosófico unificado [Whitehead, 1929, pp.11-3].

(4) *El método del pensamiento en función de una Metafísica especulativa*. Como bien ya se dijo, el pensamiento es un proceso racional que se constituye por un conjunto de ideas cada vez más claras y comprensibles. Al afirmar que tanto el lenguaje como la observación están estrechamente vinculados con la interpretación, y por ende, con el pensamiento (que es, después de todo, un proceso continuo de elucidación de ideas), parece no ser posible encontrar un razonamiento genérico, ó bien, un método epistemológico claro y preciso, que pueda adecuarse y ser aplicable a cualquier dominio del conocimiento. No obstante, aunque no exista un método de razonamiento preestablecido, es importante reconocer la importancia y situar categóricamente un tipo especial de razonamiento: la razón especulativa. Este tipo de razonamiento es, en términos de Peirce, una forma de abducción, que es un recurso para desarrollar hipótesis o creencias que reproduzcan y expliquen a la experiencia sensible. El acto de especular es entonces plantear una hipótesis que sirva para ciertos propósitos epistemológicos y que al mismo tiempo explique la evidencia empírica. Dicho esto, la Metafísica especulativa es entonces la actividad del pensamiento de desarrollar un sistema general de ideas en términos del cual cada elemento de la experiencia pueda interpretarse [Whitehead, 1929, p.3]. Desde el punto de vista racional, este sistema debe ser coherente, lógico y necesario, y desde el punto de vista empírico, debe ser aplicable y adecuado con respecto a la interpretación. Por supuesto que para Whitehead, una interpretación de este tipo implica que todo elemento cognoscible, incluyendo las sensaciones, las creencias y el pensamiento debe ser parte del mismo sistema de ideas. Ahora bien, coherencia es, según él, la condición de que absolutamente todas las ideas del sistema sirvan de base o condición para su elucidación de tal modo que no puedan adquirir un significado de forma independiente al sistema. De este modo, se presupone que ninguna entidad se puede concebir en completa abstracción afuera del sistema del universo. Que el sistema sea lógico significa que satisfaga las reglas convencionales de la lógica, como son la consistencia lógica, la falta de contradicciones, los principios de inferencia, etc., además de que se pueda dar una definición de conceptos en términos lógicos. Que sea necesario, indica que sea universal en el sentido de que dicho sistema busque la "esencia" del universo hipotético que emerge de la totalidad de los elementos de la experiencia que son, por ahora,

empíricamente accesibles. Tomando en cuenta esta última condición, la petición de que dicho sistema sea adecuado significa que no pueden haber elementos de la experiencia que no se interpreten mediante el sistema, ó bien, que todo elemento que forme parte de la experiencia debe exhibir la misma textura que se ilustra por medio de este sistema filosófico. Finalmente, la condición de aplicabilidad significa que al menos algunos elementos de la experiencia puedan interpretarse [Whitehead, 1929, pp.3-4].

Habiendo introducido las condiciones que debe satisfacer cualquier sistema de ideas en torno a una Metafísica especulativa, es momento de vincular el procedimiento metodológico que sigue esta última con el que se sugirió para el caso del pensamiento racional (su origen, función y finalidad). Una vez hecho esto, se constatará nuevamente la compatibilidad que existe entre la Metafísica especulativa y el pragmatismo epistemológico. En seguida se muestran el procedimiento metodológico que cualquier sistema de ideas debe seguir en torno a una Metafísica especulativa [Whitehead, 1929]:

(i) *El Origen del sistema*. La raíz de cualquier sistema en torno a una Metafísica especulativa proviene de los hechos empíricos y las sensaciones. De este modo, los hechos empíricos y las sensaciones que producen son, en efecto, el origen y la causa de una aventura imaginativa del pensamiento regimentadas por las reglas de la lógica y criterios como la coherencia, la necesidad, la aplicabilidad y la adecuación.

(ii) *La Función del sistema*. La función de un sistema de ideas en torno a una Metafísica especulativa es la construcción de hipótesis funcionales que sean coherentes, lógicas, necesarias, aplicables y adecuados. Estas hipótesis se formulan (no por deducción o inducción sino por abducción) buscando la generalización de algunos patrones que se tienen en algunos dominios particulares. Específicamente, en relación con la condición de aplicabilidad, Whitehead adopta un método de 'generalización descriptiva' que consiste en que el uso de nociones específicas que se aplican a una familia restringida de hechos conlleva a la elucidación de nociones más generales que se aplican a la totalidad de los hechos.

(iii) *El Propósito del sistema*. El propósito de un sistema de ideas en torno a una Metafísica especulativa es la generalización y no la verdad, es decir, buscar los aspectos interpretativos que sean cada vez más generales. Sin embargo, aunque no sea posible construir generalizaciones que constituyan una Metafísica respecto al mundo real en su totalidad, sí es posible producir una variedad de sistemas parciales que tengan ideas con una generalidad limitada.

Hasta aquí se ha hecho un recuento de lo que son, a grandes rasgos, los fundamentos y las diferencias (ó bien similitudes) entre el pragmatismo epistemológico de Peirce y la Metafísica especulativa de Whitehead. En este ejercicio, se ha visto que, aunque ambos autores difieren en algunos detalles, como es el carácter finalista y empirista de la tesis de Peirce, ó bien, la carga metafísica que presupone la tesis de Whitehead, también comparten muchas de sus ideas que habría que interpretarlas de acuerdo a su contexto histórico. Tomando en cuenta la confluencia entre ambas tesis, en seguida se presentará una propuesta de corte pragmatista y metafísica que es compatible con el *REO*. Por supuesto que esto obliga al lector a dejar de lado algunos supuestos en torno a la lectura convencional de este tipo de realismo, sobre todo el que se refiere al realismo metafísico, y de esta forma, le sugiere establecer un lazo entre el realismo estructural, el pragmatismo epistemológico y la Metafísica especulativa de acuerdo a una tesis progresista pero no finalista. En seguida se presentarán los detalles.

11.1.2. Metafísica, Epistemología y Pragmatismo: Una Nueva Propuesta

En esta parte del trabajo, sugiero presentar la síntesis del procedimiento "dialéctico" que hasta aquí he adoptado. Para ello, es hora de poner en práctica los elementos que se han aprendido gracias a la revisión de algunas tesis filosóficas. Tomando prestado algunas de sus ideas, se pretende articular una tesis filosófica realista y estructuralista con tintes pragmatistas y metafísicas. Sin embargo, antes de embarcarse en esta actividad, creo necesario esbozar brevemente la concepción convencional del *REO*, como un caso particular de lo que se llama *Realismo Metafísico*. Una vez hecho esto, se pretenderá evitar cualquier prejuicio bajo el nombre de esta tesis estructuralista, y se ampliarán las posibilidades argumentativas que se han propuesto en torno a ella.
El enfoque convencional del *REO* supone un realismo metafísico de perfil normativo e independiente del conocimiento. Es decir, supone que los principios fundamentales que caracterizan la estructura del mundo real se pueden enunciar claramente, independientemente de su acceso epistémico y del estado de conocimiento que se tenga en el momento de su enunciación. Explícitamente se asume que: "El mundo real es una estructura independiente de la cognición humana". Como bien se sabe, esta afirmación es equivalente al componente metafísico del *REO* que, después de todo, desvincula a la realidad del conocimiento que de ella se tiene. De este modo, el hecho de que haya evidencia de las hipótesis en varias aristas del conocimiento científico es el sustento de esta tesis filosófica pero no su fundamento. Es su sustento porque gracias al argumento del no-milagro (*ANM*), se justifica de acuerdo con el éxito predictivo de las teorías científicas, y no es su fundamento porque la estructura que supone como real existe independientemente de la posibilidad de justificar su existencia. Ahora bien, a grandes rasgos, este tipo de realismo abre una brecha con respecto a corrientes convencionalistas, verificacionistas, pragmatistas, empiristas y escépticas. Siguiendo a [Psillos, 1999, Ellis, 1985], el realismo metafísico acotado al conocimiento científico es un realismo (en su definición genérica) que se fundamenta gracias a la conjunción de cuatro elementos que hablan acerca de la verdad y el conocimiento: i) la tesis central del realismo; ii) la verdad objetiva; iii) la teoría correspondentista de la verdad; y iv) la distinción pragmática y empírica. Por un lado, (i) dice que las proposiciones de las teorías científicas son afirmaciones acerca de la realidad; (ii) es la tesis que en varias ocasiones hemos llamado *Realismo Semántico*, lo que significa que las proposiciones de las teorías tienen valores de verdad (son verdaderas o falsas); (iii) es la teoría correspondentista de la verdad (que ya se ha definido); y finalmente (iv) es la distinción que se rompe al adoptar el empirismo constructivo, el cual asume que las consideraciones epistémicas relevantes a la finalidad de la ciencia y los juicios de verdad son independientes del grado y el estado del conocimiento empírico. Debido a que la tesis central del realismo (i) es una consecuencia de la conjunción de la verdad objetiva (ii) y la teoría correspondentista de la verdad (iii), entonces es posible

caracterizar el realismo metafísico como la conjunción de (ii), (iii) y (iv). Una vez que se ha caracterizado de esta forma a este tipo de realismo, es posible identificar explícitamente las diferencias y similitudes que goza con otras tesis filosóficas. Por ejemplo, en [Ellis, 1985] se puede ver que el convencionalismo es, a grandes rasgos, la implicación que se obtiene al negar únicamente la verdad objetiva (ii), debido a que, de acuerdo con esta tesis filosófica, la verdad o falsedad de cualquier enunciado (entendida desde la teoría correspondentista de la verdad) no tiene sentido, distanciándose así con tesis de tipo relativistas. Análogamente, el empirismo constructivo se obtiene al negar la distinción pragmatista y empírica, dado que la finalidad de la ciencia, según esta tesis filosófica, es la adecuación empírica. Finalmente, el resultado más relevante es lo que Ellis llama realismo interno (versión pragmatista del realismo), que se obtiene al negar la teoría correspondentista de la verdad (iii). En este sentido, Ellis argumenta que una tesis pragmatista con respecto al conocimiento y la verdad (que tiene un parentesco indiscutible con la tesis de Peirce, aunque en el contexto particular del realismo científico) difiere de un realismo metafísico precisamente al negar la teoría correspondentista de la verdad. De esta forma, el pragmatismo epistemológico, según Ellis, no elimina el componente semántico del realismo (el que refiere a la verdad objetiva), pero instruye al filósofo a hacer un puente entre la verdad y las normas epistémicas en base un destino final del conocimiento. Aunque no creo que sea interés aquí, no queda claro si el enfoque de Ellis es análogo a lo que aquí hemos caracterizado como una tesis finalista. Recuérdese que desde una visión finalista, la definición de verdad objetiva presupone que las proposiciones de las teorías científicas son verdaderas o falsas en un estado final y total de conocimiento al cual se llega inevitablemente (a modo de una predestinación). Por supuesto que en este estado, como bien ya se dijo, la verdad no puede interpretarse de otra forma que mediante la teoría correspondentista de la verdad, pero a diferencia de un realismo metafísico, esta definición de verdad no se satisface salvo en este estado final y total. Ahora bien, tomando en cuenta estas observaciones, es posible correlacionar el realismo metafísico directamente con la teoría correspondentista de la verdad, que a la luz de algunos filósofos de la ciencia adquiere diferentes enfoques. Por ejemplo, el realismo metafísico de Psillos adopta la teoría de los llamados "True Makers", ó bien, la tesis que afirma que las proposiciones de las teorías científicas refieren de manera causal a objetos y propiedades inobservables [Psillos, 1999, p.225]. Por otro lado, se encuentran los estructuralistas quienes adoptan otro tipo de estrategias al tratar de construir (por medio del concepto de representación) un puente entre las estructuras matemáticas y la estructura del mundo real [French, 2014]. Dejando de lado estos detalles, es momento de articular la tesis filosófica que aquí se quiere adoptar.

Desde un enfoque particular, sugiero interpretar al *REO* como un realismo científico pragmatista que es progresivo pero no finalista, contrariamente a la tesis epistemológica de Peirce. Para ello, esta propuesta toma una distancia considerable con respecto al realismo metafísico, en el sentido de que niega la teoría correspondentista de la verdad en su versión estricta, y también con respecto al realismo interno heredado de Peirce, en el sentido de que niega la verdad objetiva en su versión estricta en virtud del aspecto no finalista de este tipo de realismo. Por esta razón, sugiero adoptar una variación de ambas nociones de verdad, en cuyo caso, es necesario introducir el concepto de *Verdad Parcial* gracias a Mikenberg, da Costa, y Chuaqui, y posteriormente desarrollado en [Da Costa & French, 2003], lo que hoy en día se conoce como la teoría (formal) pragmatista de verdad. Como se verá más adelante, esta sugerencia encuentra su justificación al entender la noción de parcialidad en un sentido que no es finalista pero que si es progresista y acumulativa, de tal manera que el estado actual de conocimiento permita elucidar proposiciones parcialmente verdaderas que representan a la realidad aunque no de forma totalmente transparente. Sin embargo, antes de embarcarse en formalidades, es necesario sentar las bases filosóficas en las que reposa y desde las cuales tiene sentido hablar de un concepto de verdad que no es estrictamente la que se deriva de la teoría correspondentista de la verdad y de la verdad objetiva sino que involucra un elemento de parcialidad pragmática, en el sentido de que incluye en su definición normas y aspectos epistémicos, como la ignorancia de los agentes en un estado tentativo y restringido del conocimiento. A continuación se presentarán el origen y las bases filosóficas en las que reposa la definición de verdad parcial, primero en virtud de que niega la teoría correspondentista de la verdad, y posteriormente en virtud de que niega la verdad objetiva.

(1) *En contra de la teoría correspondentista de la verdad*. En primera instancia, habría que advertir que, cuando se habla usualmente de la teoría correspondentista de la verdad en el contexto de la Filosofía de la Ciencia (y no únicamente en un contexto realista), se hace referencia a la definición de verdad tarskiana, la cual como bien se dijo, es un concepto que sólo se aplica para lenguajes formales. Por supuesto que una de las enseñanzas del legado de Tarski es que el lenguaje coloquial no debe privilegiarse ni se le debe conceder un perfil universal, sin embargo, si uno trata de posicionarse en un lugar lo más neutral posible, también queda el pendiente de articular una noción de verdad para los lenguajes coloquiales que, después de todo, forman parte de las teorías científicas. Tarski reconoce que bajo ciertas condiciones, la noción de verdad que se adopta para algunos lenguajes coloquiales (lógica de primer orden) puede representarse en términos del que se tiene en los lenguajes formales [Tarski, 1935, p.165] , pero de ser así, inevitablemente se obtiene una definición fragmentada de verdad [Da Costa & French, 2003, p.11]. Aparte de este problema, también es posible reconocer que, cuando uno observa detenidamente los cambios tan complejos que ocurren en la historia de la ciencia, una concepción formal de verdad tarskiana no puede representar fielmente la discrepancia sutil que existe entre dos o más modelos teóricos, entre un modelo y la observación, ó bien, entre un modelo y el mundo, si se llegara a adoptar una tesis realista [Da Costa & French, 2003, p.11-2]. En este punto, Psillos invoca una noción de verdad aproximada pero que si bien, sirve para reconocer la dimensión aproximativa de la ciencia, no puede formalizarse y se mantiene en el espectro intuitivo de las ideas [Psillos, 1999, p.266]. En vista de este escenario poco optimista, Mikenberg, da Costa, y Chuaqui, desarrollaron una nueva propuesta que es ajena al legado tarskiano [Mikenberg et al., 1986]. Este último básicamente consiste en identificar y dar una respuesta a un aspecto problemático dentro del sistema tarskiano. En efecto, aunque nadie dudaría que la definición de verdad tarskiana es clara, formal y precisa, en algunas ocasiones resulta inaplicable. Esto debido a que hay proposiciones que difícilmente pueden tener valores de verdad, ó bien, que puedan reificarse de forma tal que sea posible identificar el lenguaje objeto para el que se define la noción de verdad. Según French, no todas las proposiciones disponen de:

> The straightforward nature of the procedures required to establish whether the relevant well-formed formula is satisfied by the elements of the relevant universe of discourse and thus to establish whether the sentence is "in fact" true or false. [Da Costa & French, 2003, p.12]

Al contrario, los enunciados que usualmente pertenecen al instrumental teórico de las ciencias son, en general, conceptualmente abiertos y divergentes en el sentido de que no pueden interpretarse estrictamente como proposiciones con valores de verdad. En vista de esto, se requiere de una nueva noción de verdad que sea más flexible, que se pueda aplicar tanto a los lenguajes formales como a los coloquiales, y que introduzca un elemento parcial y pragmático que se aplique a modelos icónicos que no se puedan reificar, modelos que puedan transformarse con la adquisición de nuevos conocimientos, ó bien, la posibilidad de que un fragmento de los modelos (pero no el total) tenga una correspondencia afín con parte del dominio que se investiga. Con respecto a este último punto, se pretende reconocer y representar la complejidad de las prácticas científicas, incluyendo tanto las aproximaciones, las idealizaciones, y la ignorancia que se tiene acerca de un dominio de conocimiento. Esta noción es la que Mikenberg, da Costa, y Chuaqui definen en [Mikenberg et al., 1986], a la que se conoce como *Verdad Parcial*, verdad pragmática, ó bien, cuasi-verdad. Bajo este término, yace la intuición de que cada uno de los modelos que constituyen a las teorías científicas (ecuaciones, enunciados, idealizaciones, aproximaciones, experimentos mentales, etc.) no son del todo correctos, ó bien, no corresponden a la estructura y semblanza del dominio que se investiga, sino que representan a este último bajo cierta aproximación. En un contexto realista, es una copia inexacta del mundo real. De este modo, la parcialidad inherente en esta nueva noción de verdad involucra a un estado tentativo de conocimiento donde no se ha adquirido completa y plena certeza acerca del mundo, pero que está abierto a diferentes investigaciones que sirven para su esclarecimiento paulativo. Ahora bien, la palabra 'parcial' viene del latín *partialis*, que es lo perteneciente o relativo a una parte del todo (entendiéndose 'parte' en un sentido genérico), por lo que cualquier concepto que remite a lo 'parcial' presupone la definición del concepto que remite al 'todo'. De este modo, la definición de verdad parcial presupone la definición de la 'verdad total', que puede identificarse con la noción de verdad tarskiana y objetiva donde existe una correspondencia 'isomorfa' entre la teoría y la totalidad del dominio que se investiga. Por esta razón, para definir el concepto de verdad parcial no es necesario ir muy lejos, dado que su significado es relativo al concepto de verdad que se conoce convencionalmente. Sin embargo, para que esta nueva noción no se quede en el terreno de lo intuitivo, algunos filósofos han hecho lo necesario para formular una definición formal de la misma, la cual se desplegará en la sección 11.1.3, dedicada a especificar el meta-lenguaje apropiado para caracterizar los elementos epistemológicos asociados a las teorías científicas.

(2) *En contra de la verdad objetiva*. Para fundamentar y dar sentido a una noción parcial de verdad en un contexto realista que rompa con la teoría correspondentista de la verdad, algunos filósofos han sugerido, como es el caso de Ellis, French y otros, recurrir a un tipo de pragmatismo epistemológico donde

la verdad y las normas epistémicas sean dos elementos indisociables. Pero aunque romper con esta noción sea suficiente para dicho propósito, sobre todo si se trata de un pragmatismo epistemológico progresista y finalista (como el de Peirce), a mi parecer también urge rechazar la tesis de verdad objetiva, de tal forma que se adopte una tesis realista de corte pragmático y progresista pero que no sea finalista, y que por tanto, se abra las puertas a un escepticismo con respecto a si existe un estado final y total de conocimiento en el que coexisten tanto la verdad objetiva como la verdad en el sentido de correspondencia. No obstante, parece que este enfoque puede ser objeto de dos objeciones: en primer lugar, i) la posibilidad de eliminar la hipótesis del destino final y total del conocimiento impide definir una noción apropiada de verdad parcial precisamente porque lo parcial (el estado actual del conocimiento) es lo perteneciente o relativo a una parte del todo (el estado final del conocimiento). De este modo, si la verdad es parcial, uno se debe preguntar ¿con respecto a qué? Pero si no existe tal cosa como un estado total de conocimiento, entonces parece que incluso su elucidación es problemática, ó bien, ni siquiera tiene sentido. En segundo lugar, ii) habría que recordar que en la tesis de Peirce el carácter independiente de la realidad se justifica de acuerdo a la existencia de este estado final y total. Según él, la realidad es independiente de la cognición humana en el sentido de que existe un acuerdo objetivo entre los diferentes agentes cognoscentes que se determina e impone por la realidad misma. Es precisamente la totalidad de los efectos que la realidad produce, y que por tanto, se traduce en una concepción total de la misma donde la verdad (en el sentido de correspondencia) adquiere su significado. Pero al no saber si existe semejante estado total y final, uno termina en la misma posición que empezó, puesto que no manera de justificar el carácter independiente de la realidad.
Ahora bien, a mi parecer existe una salida a ambos problemas si se consideran otro tipo de elementos tanto epistemológicos como metafísicos. En relación con la primera objeción (i), habría que considerar el carácter progresista y acumulativo del conocimiento y distinguirlo del enfoque finalista. Es decir, no es necesario asumir que existe un estado final y total del conocimiento para elucidar la posibilidad de que el estado actual de conocimiento permita conocer parcialmente el dominio que se está investigando que, al adoptar una tesis realista, correspondería al mundo real en su totalidad. Puede ser que el conocimiento nunca nos lleve a un punto de convergencia, pero que sin embargo, la realidad se nos presente de forma cada vez más nítida. Esto debido a que, dentro del rango de las posibilidades, pueden existir aspectos de la realidad que sean, en principio, epistémicamente inaccesibles, como bien argumentarían los escépticos, ó bien, que ella misma sea dinámica y cambiante, a la par con el legado procesista de Whitehead. Por supuesto que el criterio de parcialidad en la verdad podría implicar muchas interpretaciones, como por ejemplo la intuición de que la teoría es correcta en un dominio restringido porque a través de ella se conoce, en un sentido literal, una parte extensional y "material" del todo, como la relación mereológica entre una gota de agua y un litro de agua. No obstante, aquí el criterio de parcialidad es más complejo y comprende, como ya se dijo, la posibilidad de definir la verdad parcial en modelos icónicos que no se puedan reificar, en fragmentos de modelos que se adicionan o se eliminan con la adquisición de nuevos conocimientos, ó bien, permite la posibilidad de que un fragmento de los modelos (pero no el total) tenga una correspondencia unívoca con

el mundo real. Ahora bien, con respecto a la segunda objeción (ii), creo necesario recurrir de manera inmediata a Whitehead, en lo que respecta a su Metafísica especulativa. Esto debido a que si se considera la elucidación de un esquema metafísico de ideas *a la* Whitehead (una interpretación tentativa acerca del mundo), y a este último se le vincula con una noción parcial de verdad (en el sentido de que dicha interpretación es una copia inexacta de la realidad que amerita esclarecimiento por medio de su posible generalización), entonces es posible adoptar una tesis realista al discernir entre aquello que objetivamente existe, es decir, un mundo externo que no se ha podido conocer de manera total, y una interpretación tentativa de este mundo externo que pide revisión y abertura frente a nuevas evidencias. Por supuesto que aquí se le está concediendo un lugar privilegiado al escéptico al permitir la presencia de ignorancia con respecto al mundo externo. No obstante, no es una postura escéptica radical que supone la imposibilidad de conocer todos los elementos de la realidad. La ignorancia que se tiene es parcial, en el sentido de que tiende a opacarse a la luz de nuevas investigaciones en ciertos dominios bien delimitados. Un rasgo importante de esta propuesta es que parte de dicha ignorancia involucra el hecho de que no se sabe si existe un estado total y final de conocimiento. Este estado formaría parte de las hipótesis metafísicas acerca del mundo donde el conocimiento se funda, lo que garantiza la coherencia interna de esta propuesta. En vista de que aspectos más genéricos acerca del pragmatismo epistemológico ya han sido enunciados, no hace falta volver a ellos, sino que por ahora pretendo describir y caracterizar lo que, a mi parecer, es el mejor camino a seguir, tomando en cuenta que el propósito es establecer una relación entre una tesis pragmatista y el *REO*.

Al introducir el concepto de verdad parcial, reitero que mi propuesta realista retoma un pragmatismo epistemológico que es progresista pero no es finalista. Difiero con Peirce en el aspecto no finalista del conocimiento, puesto que uno de las premisas más importantes de su legado es precisamente la existencia de un estado total y final de conocimiento. Al mismo tiempo, difiero con Whitehead (en lo que respecta a su perfil pragmatista), en que no existe tal cosa como un estado final y total de conocimiento. Al contrario, bajo un perfil menos radical y más moderado, prefiero adoptar una actitud escéptica con respecto a la existencia de este estado. Después de todo, ambas son premisas que, aunque uno no lo quiera, resultan ser irrefutables en virtud del conocimiento que se tiene hasta el momento. Esto no implica que debo evitar e ignorar la posibilidad de que exista o no exista, sino que por el contrario, es necesario tomar en cuenta que ambas posibilidades son viables. No obstante, al abrir la posibilidad de que haya un estado final y total sin saber que en algún momento puede llegar a ocurrir, es importante aún así tener a la mano el instrumental necesario para poder definir una noción de verdad para dicho estado (aunque puede que nunca se use). Y precisamente esta noción es la que equivale a la tesis de verdad objetiva y la adopción de la teoría correspondentista de la verdad. Por supuesto que estas últimas podrían satisfacerse únicamente si llegara a existir un estado final y total de conocimiento, hecho que trasciende nuestras posibilidades cognitivas. Una vez que ha quedado claro este detalle, en seguida mencionaré los puntos más importantes de mi propuesta, la cual consiste en hacer una recapitulación del *REO* en términos de un pragmatismo epistemológico elucidado tanto por Peirce como por Whitehead, y una Metafísica especulativa desarrollado por este último pensador. Por motivo de simplicidad, únicamente me referiré a los títulos de la lista que se desplegó en la parte dedicada a describir

estas corrientes filosóficas.
El *REO* que pretendo adoptar se caracteriza por satisfacer los siguientes puntos:

(1) *La Premisa pragmatista*. En general, no es posible enunciar de forma a priori enunciados verdaderos acerca del mundo real, y en particular, tampoco es posible dar una definición clara, distinta y precisa que permita expresar abstractamente la *concepción* total de una entidad real. Al contrario, bajo la condición (objetiva) de que las ideas (creencias, concepciones e hipótesis funcionales) tienen que estar sujetas a una examinación crítica y dialéctica, el *REO* que se ha caracterizado aquí afirma que, *en lo que respecta al dominio investigado por las ciencias*, existe una estructura autónoma e independiente de la cognición humana. En este sentido, provee la mejor hipótesis metafísica tentativa que se puede formular acerca del mundo en el dominio de conocimiento restringido a algunas teorías científicas exitosas, excluyendo con ello los efectos gravitatorios y los puentes teóricos que se han hecho entre una y la otra. Bajo esta interpretación, el *REO* define una noción de verdad distinta a la certeza en el sentido de que la hipótesis estructural, y en particular, la estructura concreta que supone como real, no es una caracterización correcta ni una copia perfecta del mundo real, sino que constituye una concepción inacabada y abierta del mismo, a tal grado que podría permitir la aprehensión y entendimiento gradual de ideas cada vez más generales que, a la luz de nuevas investigaciones, incorporaría los fenómenos gravitatorios, los fenómenos de la conciencia, y todo lo que es cognitivamente posible.

(2) *La Premisa metafísica*. La Metafísica es la base constitutiva de cualquier dominio de conocimiento. A razón de que la Metafísica subyace y condiciona cualquier tipo de pensamiento, es necesario reconocerla tanto explícitamente como críticamente. En sintonía con una de las premisas fundamentales del *REO*, es necesario identificar y reconocer el tipo de ontología que subyace a la mayoría de las teorías científicas contemporáneas. Por ejemplo, no falta hacer un análisis exhaustivo para reconocer que tanto la *MC*, la *MCU* como la *RE* poseen una ontología de objetos y propiedades con características que dependen del dominio que se considere (partículas clásicas, partículas cuánticas, etc.). Con base en ello, la hipótesis estructuralista se puede interpretar como el resultado de una examinación crítica de este tipo de ontología a la luz de su inconmensurabilidad desde un marco teórico que unifique a dichas teorías. Así mismo, el *REO* permite preservar y perseverar la autonomía de una entidad real frente al cambio teórico y la adquisición de nuevos datos empíricos.

(3) *El pensamiento como conocimiento*. El pensamiento es un proceso racional que se se constituye por un conjunto de ideas. Este último tiene un origen, una función y una finalidad que se puede entender desde un pragmatismo epistemológico y una Metafísica especulativa:

    (i) La raíz de todo pensamiento en torno a una Metafísica especulativa proviene de los hechos empíricos y las sensaciones. Esto, sin embargo, no supone la hipótesis empirista de que todo tipo de conocimiento superviene en los hechos empíricos, que estos últimos determinan a los pensamientos, y que existe una relación jerárquica que los distingue. A mi parecer, la observación tiene un trasfondo teórico y metafísico, por lo que la evidencia empírica no constituye un conjunto de datos que sean independientes de la interpretación que se adopte. Después de todo, la observación involucra una interpretación con la que es posible identificar los objetos y las propiedades de la experiencia. Esto tampoco supone un especie de idealismo en el que todo tipo de conocimiento superviene en las ideas, sino que la evidencia empírica es un tipo de conocimiento igual de legítimo, y que corresponde al conjunto de los efectos que producen las entidades reales. Sin embargo, dado que toda observación viene acompañada inevitablemente de una interpretación, más vale reconocer y descifrar, mediante el pensamiento, el fondo interpretativo de estos efectos. A este respecto, basta con afirmar que el significado y concepción de cualquier entidad (objeto, propiedad, estructura, u otra categoría que por ahora se desconoce) se determina por medio de las hipótesis metafísicas que se tienen respecto al mundo donde se instancia y no con respecto a los hechos empíricos que, después de todo, no se presentan enteramente como son, sino están infectados por preconcepciones teóricas y metafísicas. Desde el punto de vista del *REO*, la evidencia empírica presupone, por supuesto, que las entidades que se observan (objetos y propiedades) forman parte del mundo clásico de los objetos macroscópicos con velocidades bajas. Esto no significa que entonces dichos objetos y propiedades existan. Al contrario, la adquisición de otros conocimientos (por ejemplo, el desarrollo de la *MCU* y la *RE*) justifica la eliminación de los objetos y las propiedades, lo que permite elucidar la hipótesis de existencia de estructuras físicas y concretas (ver detalles en en 10.5).

(ii) La función del pensamiento en torno a una Metafísica especulativa es desarrollar y aprehender distintamente un sistema general de ideas tentativas (creencias e hipótesis metafísicas funcionales), en términos del cual cada elemento de la experiencia pueda interpretarse. Este sistema debe ser coherente, lógico, necesario, aplicable y adecuado. A mi parecer, el *REO* supone una interpretación estructural que, bajo estos términos, es el sistema general de ideas más coherente, lógico, necesario, aplicable y adecuado respecto al dominio de la Física, y en particular, de la *MC*, de la *MCU*, y de la *RE*. La razón es que existe una correlación entre cada una de estas condiciones y la caracterización del realismo que se ha hecho en este trabajo. Específicamente, i) la coherencia se traduce en la idea de que una interpretación estructural es concebible en términos de una única estructura que es coherente con las estructuras de cada teoría. Es decir, la estructura formal que se ha identificado permite reconstruir el formalismo que subyace a cada una de las teorías que se han considerado, resultado que se pudo verificar en 10.4.3; ii) la condición de logicidad se vincula con el perfil matemático que tiene el formalismo que se ha identificado. En particular, un grupo abstracto (y sus respectivas Representaciones). De este modo, bajo la suposición de que la estructura del mundo (que investigan las teorías científicas) es equivalente al formalismo de grupo que se ha identificado (bajo una representación isomorfa), todos los aspectos físicos se describen en términos de propiedades matemáticas, lo que permite la consistencia lógica, la falta de contradicciones, y la elucidación de principios de inferencia lógicos, necesarios para su correcta caracterización; iii) la condición de necesidad se relaciona con la hipótesis estructural del *REO* que se caracteriza aquí, pues este último es, por definición y motivación, una salida al *PSD* y el problema que se deriva de la *MIP*. Esto debido a que una salida estructuralista a ambos problemas busca cierto grado de universalidad. Después de todo, este tipo de realismo supone la existencia de una estructura que es común a diferentes teorías (con poder predictivo en diferentes dominios), y de igual modo, que permite la elucidación de una estructura única que integra diferentes formulaciones e interpretaciones de una misma teoría; iv) la aplicabilidad se correlaciona con la dimensión fenomenológica y la condición metafísica monista que forma parte de los fundamentos de este tipo de realismo (ver en 10.5). Esta condición se satisface por el hecho de que es posible identificar una única estructura que (bajo una representación isomorfa) permita que algunos elementos de la experiencia, que forma parte de diferentes dominios y que incluye a los fenómenos que estudia la *MC*, la *MCU*, y la *RE*, puedan interpretarse; v) finalmente, la adecuación tiene directa relación con el éxito predictivo de las teorías científicas que igualmente se consideran. Después de todo, cada una de estas teorías es exitosa relativo a su dominio.

(iii) La finalidad del pensamiento en torno a una Metafísica especulativa es generalizar este sistema de ideas (de un dominio restringido a dominios más extensos). Aunque no sea posible construir generalizaciones que permitan enunciar los primeros principios metafísicos, sí es posible producir una variedad de sistemas parciales que tengan ideas con una generalidad limitada. Aquí es necesario adoptar una noción de verdad parcial que niega tanto la teoría correspondentista de la verdad, en virtud de que traza una distinción con el realismo metafísico, como también la verdad objetiva, en virtud de que se asume un escepticismo con respecto al estado final y total del conocimiento. Esto involucra que la noción de verdad que se pretende adoptar tiene su fundamento tanto en las normas epistémicas como también en las presuposiciones metafísicas que se tienen en un estado tentativo y factual del conocimiento. Desde este punto de vista, el *REO* afirma una hipótesis tentativa de existencia (una estructura concreta) bajo la condición de que permite generalizar hipótesis previas acerca de dominós restringidos (interpretaciones particulares de cada teoría, entre las cuales se encuentran la *MC*, la *MCU*, y la *RE*). Por supuesto que si se tiene una visión de este tipo, no hay dudas de que debe haber un proceso de conocimiento acumulativo (a la Peirce), aunque no necesariamente finalista, dado que la verdad parcial de las hipótesis tentativas tiene sentido únicamente en términos de la posibilidad (aunque no de la necesidad) de una verdad total. En este sentido, habría que separar entre las concepciones totales del mundo (que son una posibilidad) y las concepciones parciales que se tienen respecto al mismo. La verdad parcial es, por definición, un término que se aplica a estos últimos. Pero es parcial en el sentido de que, a la par con la evidencia empírica, las suposiciones metafísicas acerca de un dominio particular deben estar presentes parcialmente y de alguna forma en las suposiciones metafísicas de dominios más generales. Esta "evolución" parcial de la adquisición de conocimiento empírico en consonancia con suposiciones metafísicas más generales es lo que caracteriza el carácter acumulativo del conocimiento. Sin embargo, habría que especificar de qué forma están presentes. En particular, y en lo que respecta al contexto de las teorías físicas contemporáneas, habría que especificar el tipo de ontología que subyace a los fenómenos clásicos, pero también abría que probar que esta última forma parte (parcialmente) de la ontología que subyace a fenómenos cuánticos y relativistas. A mi parecer, el *REO* es la tesis filosófica que inevitablemente está obligada a hacer esta tarea, porque de no ser así, entonces el poder predictivo relativo al dominio que investigan algunas teorías contemporáneas, como por ejemplo la *MC*, no podría encontrar una explicación adecuada. Incluso, como bien ya se dijo en varias ocasiones, esta tesis realista re-conceptualiza estructuralmente el carácter objetual de los objetos macroscópicos (en términos de los cuales se constituye la evidencia empírica), para poder explicar el éxito predictivo de la mayoría de las teorías físicas. Como bien se dijo en la parte dedicada a describir la dimensión fenomenológica de este tipo de realismo (en 10.5), cualquier hipótesis de existencia acerca de objetos y propiedades (en virtud de que son particulares y universales, respectivamente) se puede formular en términos de una hipótesis de existencia acerca de estructuras, pero no viceversa. Es decir, si se asume la existencia de los objetos y propiedades (como bien lo haría un realista estándar), es posible re-conceptualizar estos últimos en términos estructurales tomando en cuenta las relaciones que satisfacen estos últimos. Esto debido a que, desde este punto de vista, las relaciones son categorías ontológicas que supervienen a los objetos y sus propiedades. Pero si se asume que lo único que existe son estructuras (como bien lo haría el *REO*), no es posible re-conceptualizar estas últimas en términos de los objetos y sus propiedades que, en principio, han sido relegados de su estatus ontológico. De este modo, la jerarquía ontológica del *REO* presupone la idea de que el éxito predictivo de teorías que son compatibles con una ontología de objetos y propiedades también puede explicarse por medio de la hipótesis estructural del mundo que investiga dicho dominio. Por esta razón, esta tesis filosófica es afín al aspecto progresivo y acumulativo del conocimiento, en cuanto a que las hipótesis metafísicas que se hacen en un estado tentativo de conocimiento deben su legitimidad a la posibilidad de poder generalizarse hacia dominios menos restringidos. A decir verdad, la existencia de la estructura o las relaciones que se satisfacen entre los objetos de la *MC* presupone la existencia de los objetos y propiedades (desde el enfoque particular del dominio de la *MC*), mientras que la existencia de la estructura o las relaciones que se satisfacen entre los objetos de la *MC* no presupone la existencia de objetos y propiedades sino que es, por sí misma, una categoría ontológica fundamental (desde el enfoque general del dominio de la *MC*, la *MCU* y la *RE*).

(4) *La Ciencia y la Filosofía*. La ciencia al igual que la filosofía, es el resultado de un proceso de pensamiento que tiene el mismo origen, función y finalidad (relativo al método de pensamiento que se desplegó arriba). No obstante, la mejor explicación a su extraordinario poder predictivo (que difiere considerablemente con la de otros dominios) es la creencia de las hipótesis metafísicas que las teorías científicas particularmente adoptan, lo que se conoce como *ANM*. A grandes rasgos, la ciencia es un proceso muy complicado de actividades cognitivas que se origina en los hechos empíricos, pero donde se incluyen no sólo inferencias lógicas, sino idealizaciones, escenarios imaginarios (que permiten

entender algunos fenómenos), ó bien, abstracciones que trascienden el ámbito empírico. Para elucidar fielmente su importancia, falta investigar y reconocer los hábitos que los científicos adoptan en un estado tentativo de conocimiento, siendo resultado de un complejo proceso lógico que, buscando armonía con los hechos empíricos, inicia con la duda y termina con la adopción de una serie de creencias. No obstante, algo que le distingue de otro tipo de dominios es su extraordinario poder de predicción, a tal grado que los métodos adoptados por ella han contribuido a desarrollar e implementar técnicas innovadoras en otras áreas especializadas del conocimiento. En este sentido, a pesar de que es uno de varios dominios del conocimiento que esperan, a la luz de nuevas evidencias, abarcar otros dominios en su incesante busca para generalizarse, ha sido por ahora el mejor candidato para dicha finalidad. En vista de estas observaciones, no veo un punto en desacuerdo entre esta visión de la ciencia y la que podría adoptar el *REO*. Después de todo, la base justificativa de este tipo de realismo yace en el *ANM* y en la importancia que tiene la filosofía (y en especial, la Metafísica) como método para entender y esclarecer las ideas[98].

(5) *La importancia del lenguaje*. Todo lenguaje presupone compromisos metafísicos. Por esta razón, es necesario identificar la estructura semántica de los principios metafísicos que subyacen al lenguaje, y posteriormente restringir dichos principios a un domino particular. A este respecto, parecería que el *REO* ha tomado la dirección equivocada, debido a que uno de sus rasgos mas esenciales es la de una tesis realista que le da prioridad al lenguaje, y desde el cual pretende representar, ó bien, caracterizar directamente al mundo estructural que supone como real. Por ejemplo, el realismo estructural caracterizado aquí presupone que la teoría matemática de los grupos de Lie y sus Representaciones es el lenguaje adecuado respecto al cual es posible caracterizar e identificar la estructura del mundo (bajo una representación isomorfa)[99] [French, 2014].
No obstante, es posible re-interpretar el *REO* a partir de una premisa pragmatista que, a grandes rasgos, niega la posibilidad de enunciar de forma a priori (con base en un lenguaje) enunciados verdaderos acerca del mundo real, y dar una definición clara, distinta y precisa que permita expresar abstractamente la *concepción* total de una entidad real (las estructuras del mundo). Esto es posible si se toma una distancia considerable respecto al realismo metafísico y se adopta una tesis pragmatista respecto a *REO*. En efecto, suponiendo que la función del pensamiento es identificar, aclarar y entender los principios metafísicos (que se presuponen tanto en el lenguaje como en el proceso de observación) en un estado momentáneo del conocimiento, entonces el *REO* puede interpretarse como una hipótesis metafísica parcial y tentativa acerca de un dominio limitado que investiga únicamente fenómenos clásicos, cuánticos y relativistas. En este sentido, en lugar de asumir que existe un lenguaje privilegiado en términos del cual los principios verdaderos supuestamente se expresan (la teoría de grupos y sus Representaciones), es necesario empezar por aclarar y delimitar el dominio respecto al cual se satisfacen las suposiciones metafísicas (parcialmente verdaderas) que subyacen a

[98] A este respecto, remítase al "The Viking approach to metaphysics" en el tercer capítulo de [French, 2014].

[99] Incluso, otro tipo de versiones evitan introducir cualquier noción de representación, en tanto que el lenguaje actúa no como una copia aproximada de la realidad sino como la configuración y estructura de la realidad misma [Muller, 2010].

dicho lenguaje y que apuntan a una estructura autónoma e independiente de la cognición humana. En conclusión, se puede afirmar que el lenguaje más adecuado para describir e interpretar los fenómenos que ocurren en el dominio de la *MC*, la *MCU* y la *RE* corresponde a la teoría de grupos y sus Representaciones. Al identificar y familiarizarse con este lenguaje, es posible aclarar y determinar la hipótesis de existencia de una estructura que tiene una correspondencia de verdad parcial con el mundo.

Hasta aquí, se ha tratado de elucidar y poner en evidencia la compatibilidad entre una propuesta de corte pragmatista y metafísica con las premisas mas importantes del *REO*. El resultado ha sido positivo, salvo que hace falta precisar algunos detalles y definiciones que se dieron a lo largo de esta discusión. La aclaración de estos últimos se hará, a grandes rasgos, mediante la identificación del meta-lenguaje formal, en términos del cual se pretende analizar y caracterizar los aspectos epistemológicos de las teorías científicas[100]. Específicamente, el meta-lenguaje de estructuras parciales, a partir del cual es posible definir formalmente conceptos como el de verdad parcial que, como se verá a continuación, permitirá hacer una caracterización formal de la continuidad y unificación de la estructura que se ha supuesto como real, elucidar de forma más clara la relación entre la Matemática y la ciencia, entre otros aspectos significativos. Para este fin, es importante comenzar con un preámbulo teórico de lo que es, a grandes rasgos, una teoría científica.

11.1.3. En Búsqueda de un Meta-lenguaje: La Concepción Semántica de Teorías

Esta sección es una revisión de las siguientes referencias: [Hodges, 2014, Suppes, 1960, Suppe, 1989, van Fraassen, 1980, Da Costa & French, 1990, Bueno, 1997, Da Costa & French, 2003, French, 2014]. Es un hecho que las teorías científicas más exitosas, particularmente las teorías contemporáneas de la Física, se expresan en términos de ecuaciones matemáticas y enunciados lógico-formales. Por ejemplo, al estudiar un libro de Electromagnetismo, o bien, de Mecánica Cuántica XX, eventualmente uno termina identificando a dichas teorías en términos de un conjunto de ecuaciones y enunciados que supuestamente hablan acerca de las relaciones, propiedades y objetos del dominio correspondiente al que investigan. En virtud de este hecho, se ha llegado a pensar que una caracterización apropiada de cualquier teoría científica debe realizarse en términos del lenguaje matemático en que se formula, incluyendo algunas nociones semánticas de verdad, explicación, etc. Tomando más en serio esta posibilidad, se ha planteado que una teoría es, en realidad, una serie de principios proposiciones de un lenguaje formal que, bajo ciertas inferencias lógicas, permite hacer predicciones acerca del mundo fenomenológico. Este tipo de caracterización teórica tiene su fundamento en la supuesta axiomatización de su contenido matemático, y contiene el germen de una noción de teoría que depende intrínsecamente del lenguaje en el que se formula. Por supuesto que para que dicha axiomatización tenga sentido al nivel de la ciencia, uno debería tener claro el tipo de inferencias lógicas que se emplean para garantizar una correspondencia entre el formalismo de la teoría y los fenómenos empíricos. Esto se ha hecho por medio de reglas de correspondencia bien definas que asocian biyectivamente

[100] Nótese que aquí se habla del caso particular de las ciencias físicas contemporáneas y no de otro tipo de dominios dentro y afuera de la ciencia.

los términos del lenguaje formal con los modelos de datos que reflejan el método experimental empleado para detectar los fenómenos observables. Según esta noción de teoría, conocida como la *Visión Sintáctica* (o bien lingüística), estas reglas de correspondencia, son después de todo, elementos que individualizan, caracterizan e identifican a las teorías en cuestión[101]. No obstante, hoy se sabe que esta caracterización no ha escapado de ser objeto de crítica y controversia. Algunas de las objeciones más conocidas que se conocen en la literatura, tienen directa relación con el amplio rango de posibilidades que una teoría permite al nivel de la práctica. Por ejemplo, la ignorancia de los agentes que contribuyen al desarrollo de la ciencia, las aproximaciones e idealizaciones que regularmente se construyen, ó bien, la variedad de métodos experimentales que se emplean en el ámbito de su confirmación. Especialmente en este último punto, no existe una práctica experimental *siu generis* que sea única y estrictamente necesaria para la confirmación de una teoría. Al contrario, cualquier hipótesis puede confirmarse a la luz de experimentos cada vez más refinados, lo que involucra la necesidad de incorporar distintas reglas de correspondencia entre los términos teóricos que constituyen al formalismo y los elementos empíricos. Sin embargo, parece que la concepción sintáctica de teorías prohibe la existencia de diferentes reglas de correspondencia, porque de ser así, cada una de estas reglas correspondería a una teoría diferente (bajo la suposición que existe una relación biyectiva entre ellas). Por esta y otras razones, se ha llegado a un acuerdo de que esta caracterización axiomática, al parecer una propuesta con tintes lógico-positivistas, no es capaz de describir, de forma adecuada, las prácticas científicas más comunes. Después de todo, si la axiomatización al nivel de la matemática ha probado tener dificultades considerables, es poco plausible que una estrategia similar pueda llevarse a cabo en el ámbito tan complejo de la ciencia.

A raíz de la emancipación de la crítica al proyecto lógico-positivista, una nueva línea de investigación filosófica comenzó a tener más fuerza gracias al advenimiento de nuevas formas de caracterización y representación matemática. Un caso ejemplar son las grandes contribuciones de Tarski tanto en el ámbito de los fundamentos de las matemáticas como en la filosofía del lenguaje [Hodges, 2014, Sher, 1999]. En contraposición al proyecto lógico-positivista desarrollado principalmente por Betrand Rusell y Rudolp Carnap, la *Teoría de Modelos* de Tarski fue una respuesta a algunas paradojas (por ejemplo, la paradoja del mentiroso), que modificaría las nociones de verdad estrechamente vinculadas con las inconsistencias lógicas y formales que se presencian al asumir la universalidad del lenguaje natural. Específicamente, Tarski propuso una nueva noción de verdad semántica relativos a (para) lenguajes formales que permitiera evitar enunciados auto-referenciales. Esto bajo el supuesto de que es necesario distinguir claramente entre el lenguaje acerca del cual se habla (el lenguaje objeto) y el lenguaje con el que se habla (el meta-lenguaje). A manera de definición, Tarski afirmó que el meta-lenguaje es el que se encarga de definir la noción de verdad de manera estricta y formal con base en sus reglas e inferencias lógicas, y el lenguaje objeto es la estructura para la que se define dicha noción de verdad. En otras palabras, el meta-lenguaje es, en realidad, una interpretación o modelo acerca del lenguaje objeto. Siguiendo con esta concepción semántica y relativa de verdad, Tarski implementó una definición de *modelo* en términos de: i) un universo del discurso, que consiste en un

[101] Nótese que ninguna noción de verdad se ha introducido desde este enfoque. Al contrario, siguiendo con una línea empirista, la axiomatización de una teoría sirve para evidenciar su adecuación empírica pero no la veracidad de sus proposiciones.

conjunto A de elementos; y ii) una condición de verdad, que consiste en que los enunciados y las fórmulas del lenguaje objeto son verdaderos si y sólo si se satisfacen por los elementos y las relaciones definidas en A (o bien, definen su extensión). Según Tarski, la verdad es una noción semántica respecto a un lenguaje objeto que se puede definir únicamente si se le ha adjudicado de antemano una interpretación, o bien, un meta-lenguaje. De este modo, tanto el formalismo como la interpretación, así como el lenguaje objeto y el meta-lenguaje, se complementan y son necesarios para la implementación de una noción formal y estricta de verdad. El legado de Tarski es significativo en el sentido de que si una noción de verdad se ha formalizado desde el punto de vista de un lenguaje formal, y si cualquier disciplina (matemáticas, ciencia, etc.) es capaz de formularse en términos de este último, entonces es posible definir de manera clara y precisa el enunciado "p es verdadero" para cualquier ámbito epistemológico.

Ahora bien, más allá del contexto matemático en el que inicialmente se implementó, hoy se sabe que la teoría Tarskiana de verdad ha tenido consecuencias significativas en el ámbito de la Filosofía de la Ciencia. Con la intención de llevar a cabo un análisis lógico-formal para entender las prácticas científicas en su generalidad, Beth y Suppes desarrollaron una nueva línea de investigación filosófica en respuesta a las ideas que se habían emancipado en los círculos lógico-positivistas en este contexto. Conocida como la *Visión Semántica de Teorías*, esta nueva línea de investigación siguió su curso como una continuación al legado de Tarski en el contexto particular de la Filosofía de la Ciencia (independientemente de la teoría de modelos, estrictamente hablando). A grandes rasgos, la concepción semántica abre la posibilidad de caracterizar y representar a las teorías científicas en términos de la extensión o "interpretación" de las formulaciones axiomáticas disponibles. Desde este enfoque, la caracterización de las teorías científicas trata, en la medida de lo posible, se ser independiente de los aspectos puramente linguístico-formales y se enfoca en la interpretación formal o la referencia de estos últimos. Según Beth y Suppes, una teoría es, en realidad, una familia de modelos que, como bien ya se dijo, son elementos que satisfacen las proposiciones del lenguaje formal que tienen en común, en el sentido de que son las instanciaciones de los significantes lingüísticos. La naturaleza más específica de estos modelos dependen, por supuesto, del estatus filosófico que se les adjudique. En el extenso y complejo espectro de las posibilidades interpretativas del formalismo de una teoría existen modelos acerca de objetos y propiedades de distinto tipo, dependiendo si su estatus es semántico, epistémico, ó bien, ontológico[102]. Por ejemplo, existen modelos matemáticos, como es el caso del conjunto de los números reales, cuyo estatus es regularmente semántico y epistemológico, pero también existen modelos ontológicos, empíricos, idealizados y hasta artificiales que, en conjunto, dan cuenta de diferentes aspectos relevantes a las prácticas científicas. Un caso de este tipo es el modelo cinético de los gases que, aunque pudiera representar los supuestos aspectos corpusculares del mundo real, las partículas puntuales que se postulan son estrictamente idealizaciones para describir de manera cuantitativa el complejo comportamiento de los gases. De este modo, es importante reiterar que al caracterizar a las teorías científicas en términos del espectro tan amplio de estos modelos, la axiomatización del lenguaje en el que se formulan no desempeña un papel significativo, aunque pueda que sea relevante en cuanto a la constitución de los modelos (en cuanto a que es necesario especificar el lenguaje bajo el cual dichos modelos se satisfacen).

[102]Suppe, por ejemplo, desarrolla un puente entre la visión semántica de teorías y el realismo científico [Suppe, 1989].

> To lie properly in the theory of models a study should really make "essential" use of structures as well as of languages. Vaguely, it is necessary that the structures (or more general kinds of entities) which underlie the interpretation of the grammars under consideration should be considered as individuals –that we construct them, perform operations on them, classify them, or determine relations that hold among them. [Addison, 1965, p.441]

Por supuesto que para representar a cada uno de estos modelos y el lenguaje que satisfacen se necesita de un "meta-lenguaje"[103] que permita, en la medida de lo posible, abarcar el espectro tan grande de modelos que constituyen a la mayoría de las teorías científicas. Para este fin, la teoría de conjuntos, y en particular, las estructuras conjuntistas, resultan ser, según Suppes, el lenguaje más apropiado[104]. Sin embargo, habría que reiterar que el rol que desempeña este "meta-lenguaje" es meramente descriptivo y convencional (a conveniencia del filósofo de la ciencia) y no tiene directa relación con la constitución literal de las teorías científicas.

Ahora bien, en la literatura se han propuesto diferentes caracterizaciones que difieren tangencialmente entre sí pero comparten el mismo nombre en torno a una concepción semántica de teoría. Como se verá a continuación, el grado en el que difieren depende directamente de la independencia/dependencia que le adjudiquen a los aspectos lingüísticos. Por un lado, se encuentra el enfoque que caracteriza a las teorías científicas en términos de una familia de modelos (que se emplean por una cuestión de representación), pero con un énfasis importante en el lenguaje formal que satisfacen. Es decir, plantea que una teoría se puede identificar por medio de una serie de enunciados proposicionales para los cuales se define una noción de verdad, sin dejar de advertir que estos últimos cuentan con un componente interpretativo en términos de un conjunto de modelos. Desafortunadamente, al no poder prescindir totalmente del componente lingüístico y al requerir de una interpretación formal (instanciación) estricta de este último, este enfoque no parece contribuir epistémicamente al entendimiento de las prácticas científicas, como es el caso de los aspectos ambiguos, parciales y aproximados, que resisten a una formulación lógico-lingüística. Tal es el caso de la imposibilidad de que el conjunto de los números reales satisfaga de manera estricta un conjunto finito de axiomas lógico-formales, o bien, la imposibilidad de construir un modelo que pueda formalizarse lógicamente en el contexto de la *MCE*. Por este motivo, aunado al carácter complejo del desarrollo y contenido de las teorías científicas, una motivación que ha servido para representar apropiadamente a estas últimas tiene directa relación con el grado de independencia que se necesita con el lenguaje en el que se formula. Sin embargo, al identificar e individualizar una teoría en términos de un conjunto de modelos, se requiere de algún tipo de lenguaje formal para poder distinguir los modelos o estructuras que son compatibles con los enunciados proposicionales asociados a la teoría en cuestión. Además, una representación teórica independiente del lenguaje, o bien, sin enunciados proposicionales, puede que sea insuficiente para expresar las actitudes epistémicas que se tengan hacia una teoría en específico, como es el caso de una definición formal

[103] Las comillas aquí se ponen debido a que la teoría de conjuntos no es un lenguaje formal, en un sentido estrictamente sintáctico, sino que es una teoría acerca de objetos (conjuntos) que tienen implícito un elemento semántico.

[104] Steven French ha generalizado este tipo de representación en términos de cualquier teoría matemática (grupos, categorías, tipos, etc.), notando que es posible definir cualquier predicado de dicha teoría en términos de la teoría de conjuntos.

y estricta de verdad. En este sentido, parece que existe una tensión dentro de la visión semántica, donde el lenguaje proposicional de cualquier teoría puede que sea o no relevante. En efecto, por un lado parece que es posible prescindir del lenguaje formal en el que se expresa la teoría, apelando al conjunto (una clase) de modelos que la constituyen [van Fraassen, 1989]. Este enfoque trata de describir la estructura de la teoría, identificar relaciones (inter)intra-teóricas y caracterizar la correspondencia entre la teoría y el mundo en términos de dicha estructura. Por otro lado, es posible caracterizar a una teoría en virtud de que aspira a ser objeto de ciertas actitudes epistémicas (verdad, adecuación empírica, etc.), mediante un conjunto de modelos que satisfacen un lenguaje formal específico. Desde este punto de vista, los modelos representan, pero no constituyen, las teorías en cuestión. Ambas nociones de representación teórica se corresponden con lo que Suppes llama una caracterización extrínseca e intrínseca, respectivamente.

Ahora bien, al tomar en cuenta la caracterización extrínseca o el carácter constitutivo de los modelos, no sólo valdría la pena saber si una noción de verdad puede definirse apropiadamente, sino que también sería razonable preguntarse si dicha noción tiene sentido en ausencia de un lenguaje proposicional. Sin embargo, este hecho no impide que intuitivamente se pueda elucidar una noción informal de "verdad", en virtud de una correspondencia externa entre la familia de modelos que constituye a la teoría y el dominio que se investiga. Retomando algunas discusiones precedentes, habría que recordar que cualquier modelo puede representarse en términos de un conjunto (matemáticamente hablando), lo que involucra que si este último se considera "verdadero", entonces debe existir una correspondencia unívoca entre dicha teoría y el mundo que investiga en términos de un "isomorfismo". Específicamente, cuando se describe un dominio particular Δ, uno asume que es posible hacerlo de manera parcial o completa en términos de las propiedades de los elementos de Δ, de las relaciones que se satisfacen entre ellos, y de las funciones definidas en Δ. En efecto, un modelo o estructura A es apropiado con respecto al dominio que desea investigar Δ si el enunciado "A 'codifica' los aspectos relevantes de Δ" es verdadero *a la* Tarski (desde la teoría correspondentista de la verdad). Como bien ya se dijo, la noción de representación que subyace entre una estructura lingüística y el dominio que se investiga no es estrictamente la de un isomorfismo, pero gracias a que tiene características afines a la teoría correspondentista de la verdad, puede considerarse, después de todo, un "façon de parler" al hablar de la "veracidad" de dichos modelos. Por otro lado y contrariamente al enfoque extrínseco, la caracterización intrínseca permite la sentencia de ciertas actitudes epistémicas, y en particular, establece formalmente una noción de verdad gracias a que los modelos o estructuras satisfacen las proposiciones del lenguaje formal que tienen en común. Las sentencias que expresan nuestras creencias (ya sean verdaderas o falsas) son las proposiciones lógico-linguísticas, mientras que el objeto y contenido de dichas creencias, ó bien, las interpretaciones de estas últimas corresponden a los modelos y estructuras.

Hasta aquí se tienen dos enfoques que difieren entre sí de acuerdo al tipo de caracterización teórica al que aspiran, ya sea en términos de su constitución (para la caracterización extrínseca), ó bien, en términos de su representación (para la caracterización intrínseca). Aunque pareciera que ambos enfoques son incompatibles, resulta que la estrategia más razonable para dar cuenta de todos los aspectos semánticos y epistemológicos que entran al juego en una teoría científica es un dualismo que considera a ambas caracterizaciones como fundamentales. Sin embargo, para reconciliar ambos puntos de vista, es necesario introducir una noción de verdad distinta a la noción tarskiana que pueda usarse en contextos mucho más afines a las prácticas científicas y que tenga cierto perfil pragmático. Debido a que esta nueva noción de verdad, llamada *Verdad Parcial*, necesita de un lenguaje en el que pueda fundamentarse, es necesario definir lo que son las *Estructuras Parciales* (Ver en Apéndice D). A grandes rasgos, esta visión semántica se justifica tomando en cuenta las siguientes observaciones:

(1) Existen varios tipos de modelos, entre los que se encuentran las analogías, las representaciones, los iconos, los teóricos, los fenomenológicos, etc. Todos ellos pueden ser descritos mediante *Estructuras Parciales*, ya que sólo de esta forma se puede dar solución a algunos problemas que emergen al cuestionar su relevancia frente a una representación teórica sin modelos. Gran parte de su importancia radica en que mediante su elucidación es posible dar cuenta de las ambigüedades, aproximaciones, vacíos teóricos y epistémicos que la práctica de la ciencia reconoce.

(2) Si bien, en una caracterización intrínseca de teorías los enunciados que denotan las actitudes epistémicas son parte de un lenguaje formal, los objetos epistémicos a lo que refieren dichos enunciados no necesariamente son partes constitutivas de un lenguaje formal. De esta forma, al caracterizar una teoría intrínsecamente, los elementos semánticos pueden expresarse mediante un lenguaje, pero eso no indica que una teoría con valores de verdad deba representarse lingüísticamente. Por ejemplo, un libro de arte de Klein puede incluir una descripción verbal de sus cuadros monocromáticos, sin embargo, es claro que dichos objetos no son elementos lingüísticos sino pictóricos que involucran un lenguaje independiente al proposicional. De este modo, es posible representar una teoría mediante un conjunto de modelos o estructuras que satisfacen ciertos enunciados proposicionales de un lenguaje conjuntista, no obstante, dichos modelos pueden ser funciones de verdad en este sentido sin apelar de forma constitutiva a un lenguaje en específico.

(3) Una condición suficiente para que una teoría sea verdadera o parcialmente verdadera es que sea respaldada por elementos empíricos. La forma de representar que dichos elementos respaldan a la teoría puede ser por medio de una jerarquía compleja de modelos, incluyendo modelos de datos, modelos fenomenológicos, modelos teóricos, y modelos matemáticos. De esta manera, vinculando diferentes modelos que forman parte de esta jerarquía, es posible ver como la caracterización extrínseca abarca a la caracterización intrínseca.

Con esta introducción en mente, es importante adelantar que en este trabajo se tomará la misma línea argumentativa que sigue la visión semántica de teorías, desde el punto de vista del meta-lenguaje de *Estructuras Parciales*. De acuerdo con una lectura apropiada, una teoría se caracterizará en términos de una familia de modelos (estructuras parciales) representados por un lenguaje matemático (comúnmente en términos de teoría de conjuntos) cuyo estatus es meramente descriptivo y por lo tanto convencional [van Fraassen, 1991, p.241]. Existen diferentes modelos que caracterizan a una teoría, entre los cuales se encuentran los que corresponden a los datos empíricos, a los compromisos ontológicos, a las idealizaciones, a las leyes que se expresan en algún lenguaje matemático, a aquellos que se definen en el dominio estrictamente matemático,

etc. Todos estos modelos se entrelazan mediante relaciones monádicas, plurales y jerárquicas que, en conjunto, forman una compleja estructura de mapeos (comúnmente morfismos entre conjuntos) en la que varios aspectos concernientes a las prácticas científicas se expresan explícitamente en términos rigurosos y analíticos. En particular, la veracidad y la adecuación empírica de las teorías se definen en términos de sus modelos de una forma estricta y precisa. Contrariamente a una noción de correspondencia entre el dominio que se investiga y el lenguaje lógico formal que axiomatiza a la teoría (con una estructura puramente sintáctica), la verdad en la visión semántica se interpreta de acuerdo a si cada modelo que la conforma (incluyendo el modelo asociado a los datos empíricos) satisface (parcial o totalmente) un conjunto de proposiciones de un lenguaje arbitrario y convencional (por ejemplo, teoría de conjuntos). Es decir, este lenguaje que, se asume convencional y arbitrario, refiere a modelos de cualquier tipo, donde estos últimos fungen como instanciaciones o interpretaciones del primero. Asumiendo esta visión semántica, se sugiere que un filósofo pueda trabajar al nivel de los modelos e investigar las relaciones (parciales y totales) que se presentan entre la teoría y los datos empíricos, o bien, sus relaciones inter-teóricas, sin tomar en cuenta una axiomatización de la teoría mediante un lenguaje particular con estructura puramente sintáctica.
Ahora bien, como ya se dijo en la sección dedicada a la teoría y sus interpretaciones, al incorporar una tesis realista a esta visión particular y tomando en cuenta el ingrediente metafísico que esta tesis filosófica sostiene, esta visión semántica dictamina dos aspectos en relación a la verdad y la adecuación empírica: en primer lugar, una teoría se dice parcialmente verdadera en el sentido de que existe una subfamilia de modelos que la conforman (estructuras parciales) que, en principio, tienen una correspondencia de verdad parcial con el mundo real (modelos ontológicos)[105]. En segundo lugar, las teorías que tienen alguna correspondencia con el mundo empírico son parcialmente verdaderas respecto a este último en el sentido de que tienen una subfamilia de modelos que refieren parcialmente a algunos fenómenos observables (modelos empíricos). Un ejemplo para ambos casos son los modelos asociados a la mecánica estadística clásica. El modelo ontológico es, en dicho caso, la estructura matemática que representa al estado óntico del sistema, es decir, las propiedades microscópicas que definen el espacio de estados (la posición y el momento), mientras que el modelo empírico es la estructura matemática que hace posible un análisis estadístico a gran escala para obtener las predicciones termodinámicas, es decir, el estado epistémico que corresponde a la densidad de probabilidad de la cual se calculan los valores esperados de las propiedades físicas en el límite termodinámico. De este modo, los modelos asociados a la ontología de la teoría y aquellos que corresponden a los datos experimentales se relacionan mediante una compleja red inter-teórica con independencia del lenguaje en el que se expresan y se definen.

11.2. La Estructura Continua y Unificada

En la sección 10 dedicada a dimensión semántica, se ha caracterizado apropiadamente a la estructura matemática que subyace a algunas de las teorías más exitosas de la Física, tomando en cuenta las aporta-

[105] Hasta aquí la verdad se ha definido para proposiciones, sin embargo, desde este momento es posible adoptar una definición precisa de verdad para la teoría en sí misma.

ciones significativas de la teoría de grupos y sus Representaciones. Esta caracterización se ha hecho a partir de un tesis realista, que concierne principalmente a su dimensión semántica. De este modo, al pretender conocer la imagen del mundo que las teorías más exitosas esbozan (independientemente si dicha imagen corresponde con a la del mundo real), se ha recurrido a construir una interpretación estructural (con base en una representación 'isomorfa' de la estructura matemática subyacente) que satisfaga criterios de claridad y adecuación y empírica. Ahora bien, como bien se dijo anteriormente, esta caracterización no es suficiente para respaldar una tesis realista con respecto a dicha estructura subyacente. Adicionalmente a la dimensión semántica, debe existir por un lado, un juicio de verdad que indique que la estructura matemática que se ha identificado realmente representa la estructura del mundo real, y por otro lado, un juicio justificativo que pueda erguir las bases fundacionales de dicho compromiso de verdad en términos de algunos criterios de unificación y continuidad que se aplican a la estructura en cuestión. Asumiendo que ambos juicios comprenden elementos epistemológicos, es momento de embarcarse en la dimensión epistémica de la tesis estructuralista que se ha pretendido caracterizar en el presente trabajo.
Tomando en cuenta estos objetivos, se seguirá el siguiente procedimiento en el orden establecido: i) los aspectos estructurales de la *MC*, la *MCU* y la *RE* se desplegarán de acuerdo a una jerarquía de relaciones que se presentan tanto en el ámbito de las Matemáticas como en el de la Física; ii) el cambio teórico y la sub-determinación que se manifiesta entre diferentes dominios o entre diferentes formulaciones de la *MC*, la *MCU*, y la *RE* se caracterizarán formalmente en términos de la continuidad estructural de diferentes grupos de simetría y sus respectivas Representaciones. Para este fin, los métodos aprendidos del punto anterior servirán para describir y aclarar la forma en que las teorías al nivel de la Física se estructuran y se vinculan en virtud de su relación inextricable con la continuidad entre diferentes estructuras de grupo al nivel de las matemáticas; iii) se argumentará que algunas *Estructuras Matemáticas Superfluas* en el cuerpo teórico de la *MCU* son, en realidad, remanentes matemáticas que podrían tener una contraparte empírica. Esto se hará apelando a un ejemplo interesante que se puede encontrar en la literatura, en relación a la supuesta realidad física de estados en superposición de masas, las cuales pueden interpretarse como remanentes relativistas en la *MCU*, contrariamente a la visión estándar que las considera empíricamente irrelevantes.

11.3. La Jerarquía y la Complejidad de la Estructura

Siguiendo con la misma línea argumentativa de [Bueno et al., 2002], el primer objetivo (i) es hacer una descripción formal de las relaciones que se tejen entre las teorías matemáticas generales a las que este trabajo hace referencia (teoría de grupos y sus Representaciones) y las estructuras matemáticas asociadas únicamente a las teorías de la Física, incluyendo a la *MC*, la *MCU*, y la *RE*. Específicamente, esto se hará de la siguiente manera:

(1) El primer paso es fijar un dominio particular del conocimiento Δ para el que se restringe esta descripción. Este corresponde a la conjunción de todos los hechos empíricos que pertenecen al dominio de la *MC*, la *MCU*, y la *RE*, excluyendo fenómenos gravitatorios y puentes teóricos entre ellas. Esta restricción no significa que este trabajo pretenda buscar una teoría unificada (por ejemplo la teoría

de Dirac) que abarque a estas teorías y que estudie fenómenos adicionales (como la antimateria, la estructura fina, o efectos de la electrodinámica cuántica, etc.). Al contrario, lo que busca es una estructura teórica en términos de la cual se explique el éxito predictivo de cada una de estas teorías, restringidas a sus respectivos dominios.

(2) Asumiendo la visión semántica de teorías, el segundo paso es identificar un lenguaje apropiado con el que la familia de todos los modelos (incluyendo modelos matemáticos, icónicos, etc.) asociados a Δ pueda representarse formalmente y de la manera más apropiada. Esto se hará por medio del lenguaje de *Estructuras Parciales* por las razones que se mencionaron arriba. A este respecto, la *RE* es la teoría "verdadera", mientras que la *MC* y la *MCU* son parcialmente verdaderas. Esto quiere decir que, en vista de la propuesta pragmatista que se desea adoptar, la verdad parcial que se define para cualquier teoría que precede a la *RE* adquiere su significado en términos de la verdad total que se define para ella, entendiéndose como una teoría cuyas proposiciones tienen una correspondencia de verdad con la realidad[106]. Por supuesto que esto es un aspecto meramente semántico que ayuda a la formalización conceptual puesto que, desde esta perspectiva, la *RE* no es la teoría del todo, sino que es simplemente una teoría tentativa que es parcialmente verdadera con respecto a otras teorías que por ahora se desconocen, ó bien, que se han excluido de Δ (teorías gravitatorias, teorías de la conciencia, etc.). Por esta razón, los modelos (tanto matemáticos como físicos) asociados a todas las teorías que precedan a la *RE* se pueden considerar estructuras parciales.

(3) El tercer paso consiste en hacer una distinción metodológica entre los modelos asociados a las teorías matemáticas que se han empleado (teoría de grupos y sus Representaciones) y los modelos asociados a las teorías científicas [Bueno et al., 2002]. Aunque ambos tipos de modelos comparten la misma categoría conceptual por tener (totalmente o parcialmente) estructuras matemáticas del mismo tipo, existen ligeras diferencias que deben enunciarse explícitamente: los modelos del primer tipo están asociados con teorías matemáticas más generales, las cuales incluyen entre otros elementos *Estructura Matemática Superflua*, que supuestamente no tiene una "realidad física" [Bueno, 2000b]. Por otro lado, los modelos del segundo tipo representan, a grades rasgos, aspectos teóricos que conciernen a la práctica y al desarrollo científico, ó bien, despliegan la manera específica en que los hechos empíricos se relacionan y articulan en toda la estructura teórica y matemática.

Tomando en cuenta este procedimiento metodológico, se procederá a describir explícitamente (extensionalmente, pero rigurosamente) la estructura conjuntista que describe la estructura de grupo que aquí se ha identificado y sus respectivas Representaciones en el espacio-tiempo de Minkowski, en el espacio fase y en el espacio de Hilbert. Posteriormente, se introducirán funciones conjuntistas (morfismos) que conectarán (mediante una relación funcional) las estructuras conjuntistas, que a su vez, representan las relaciones que

[106]Esto se puede representar formalmente mediante la noción de *Estructura Normal*, que constituye el conjunto de estructuras parciales que pueden ser extendidas de tal forma que adquieran su estructura faltante y se conviertan en estructuras totales [Da Costa & French, 1990]. Ver definición en Apéndice D.

satisfacen las estructuras de los grupos. Por último, se discutirá la manera en que dichas relaciones contribuyen a describir formalmente i) la continuidad de la estructura; ii) la unificación de diferentes formulaciones; y bien, iii) la presencia de *Estructura Matemática Superflua*.
Es momento de hacer un análisis riguroso respecto a la estructura matemática que se ha identificado. Para ello es importante enfatizar la presencia de dieciséis objetos: siete grupos de Lie bien definidos y nueve Representaciones:

Grupo de Lie	**Símbolo del Grupo**	**Símbolo de la Rep.**
Grupo Simpléctico	*Sp(3)*	$s(\mathbb{R}^2)$
Grupo Metapléctico	*Mp(3)*	$\mu(\mathscr{H})$
Grupo Simpléctico Inhomogéneo	*ISp(3)*	$\mathscr{I}(\mathbb{R}^2)$, $\mathscr{I}(\mathscr{H})$
Grupo Metapléctico Inhomogéneo	*IMp(3)*	$\mathscr{W}(\mathscr{H})$
Grupo de Galileo	*Gal*	$Gal(\mathscr{H})$, $Gal(\mathbb{R}^2)$
Grupo Extendido de Galileo	$\widetilde{Gal}$	$\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$
Grupo de Espín-Poincaré	$ISL(2,\mathbb{C})$	$RE(\mathbb{R}^4)$

Cuadro 1: *Las estructuras más relevantes*. Esta tabla despliega la presencia de dieciséis objetos matemáticos, siete de los cuales son grupos de Lie y nueve sus respectivas Representaciones.

Ahora bien, $\mathscr{H}$ es el espacio de Hilbert, $\mathbb{R}^4$ es el espacio-tiempo de Minkowski, y $\mathbb{R}^2$ es el espacio fase. Siguiendo con el procedimiento acordado, los grupos contenidos en esta lista se representan por medio de modelos (estructuras conjuntistas), formalmente descritas por el lenguaje de *Estructuras Parciales*, cada uno de los cuales codifica las relaciones y propiedades matemáticas de un grupo y sus respectivas Representaciones. Específicamente, estos modelos se definen en términos de estructuras formales conjuntistas que, por definición, corresponden a un meta-lenguaje que satisface (en un sentido tarskiano) un conjunto de proposiciones de un lenguaje formal, el lenguaje objeto. Estas proposiciones incluyen los axiomas de los grupos de Lie, las reglas de multiplicación asociadas a cada grupo, y la estructura diferencial de los espacios de Representación. Siguiendo con la visión semántica de teorías que se ha articulado en la sección 11.1.3, el análisis que se presenta a continuación no depende del lenguaje y de las proposiciones que se derivan de los axiomas de una teoría. Al contrario, su objeto de investigación comienza directamente con la semántica de los modelos y los procesos epistémicos involucrados, tales como el cambio teórico, la variedad de formulaciones de una teoría y la inminente efectividad de las matemáticas.
Desde este punto de vista, cada uno de los dieciséis objetos de arriba se caracterizará por medio de una estructura parcial A_n de la siguiente forma:

$$A_n =< D_n, R_{ni}, f_{nj}, a_{nk} >_{i\in\mathbb{I}, j\in J, k\in K}$$

donde D_n es un conjunto no vacío que corresponde a los elementos de un dominio particular de conocimiento Δ (los hechos empíricos de la *MC*, la *MCU*, y la *RE*), y bien, a los elementos del grupo o de la

Representación correspondiente; R_{ni} es un conjunto no vacío indexado (numerable) que corresponde a la familia de relaciones parciales; f_{nj} son los isomorfismos y homomorfismos parciales definidos entre A_n y otras estructuras parciales; y a_{nk} corresponde a la *Estructura superflua*. Con respecto a la notación, los conjuntos de índices I, J, K, y n corresponden al número de relaciones parciales, número de homo(iso)-morfismos parciales que se definen "verticalmente" u "horizontalmente"[107], número de *Estructuras superfluas*, y el nivel de la jerarquía "vertical" de A_n con respecto a otras estructuras parciales, respectivamente. En efecto, n representa la graduación vertical con la que A_n se relaciona con otras estructuras parciales, dependiendo si su contenido es más teórico y abstracto, ó bien, empírico y fenomenológico. En los niveles inferiores de la jerarquía se encuentran las estructuras empíricas (modelos de datos), y en los niveles superiores las estructuras matemáticas.

Ahora bien, con el propósito de ser más formal y sistemático, la jerarquía de las estructuras parciales que corresponden al formalismo matemático que se ha identificado en este trabajo se despliega de forma explícita en la Figura 1. Este diagrama representa únicamente el grado n superior de la estructura de grupo e ignora

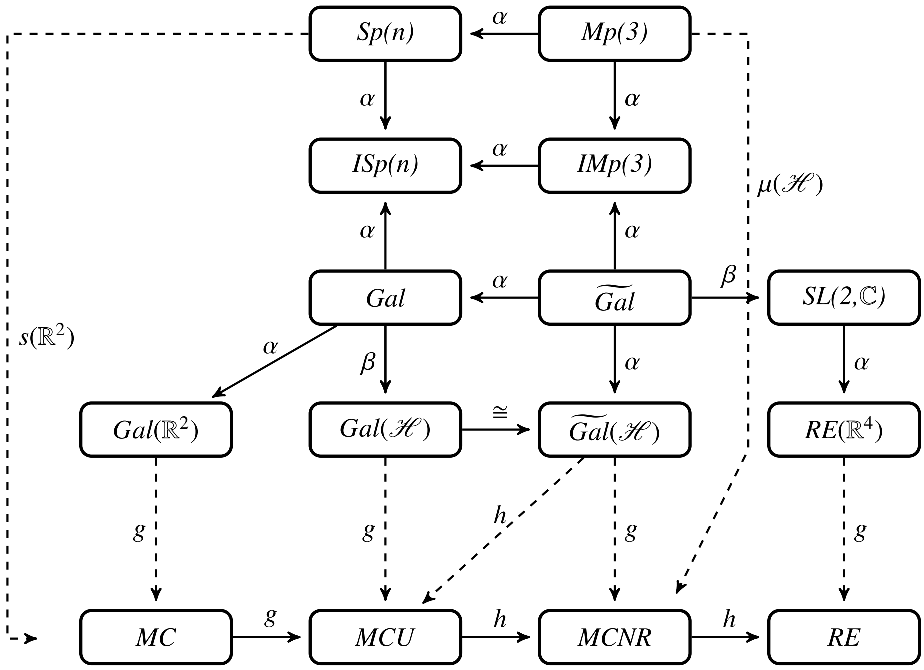

Figura 1: *La Complejidad de la Estructura*. Este diagrama representa la complejidad y las relaciones jerárquicas de la estructura de grupo que subyace a los modelos (como estructuras conjuntistas) asociados a *MC*, *MCU*, y *RE*, incluyendo los grupos de Lie, sus Representaciones, y los mapeos de grupo.

[107] los homo(iso)-morfismos parciales verticales son los que se definen entre diferentes estructuras parciales que corresponden y constituyen a una misma teoría, mientras que los horizontales son los que se definen entre estructuras parciales que corresponden a diferentes teorías y tienen, naturalmente, una connotación temporal (en cuanto a los procesos epistémicos se refiere).

el grado inferior, que corresponde a la dimensión fenomenológica de la estructura. En la parte superior de la Figura 1 se despliegan las estructuras parciales que representan las propiedades estructurales de las teorías matemáticas (que contribuyen a investigar el dominio de conocimiento Δ), que corresponden, a grandes rasgos, la teoría de grupos de Lie y sus Representaciones en el espacio fase, en el espacio de Hilbert, y en el espacio-tiempo de Minkowski. En la parte inferior de la Figura 1 se despliegan las estructuras parciales que se relacionan directamente con las teorías físicas. En otras palabras, la familia de modelos que se han desarrollado en torno a los dominios que forman parte de Δ, entre los cuales se incluyen no sólo los modelos y formulaciones matemáticas de cada teoría sino que también los modelos icónicos, las idealizaciones, etc. Es importante reiterar que este análisis no trata de representar la dimensión fenomenológica de la estructura (aspecto que ya se ha tratado en secciones anteriores), tampoco trata de elucidar las relaciones existentes entre los hechos empíricos y las teorías físicas, ni mucho menos especificar las relaciones ínter-teóricas que se satisfacen entre los modelos interpretativos que postulan objetos y propiedades inobservables. Al contrario, lo que se desea aquí es analizar los aspectos estrictamente estructurales que se despliegan en la frontera entre las teorías matemáticas y las teorías físicas, y con ello, demostrar formalmente la continuidad y el poder unificador de la estructura. Por esta razón, cada teoría se representará de una forma condensada (extensionalmente e intuitivamente) de acuerdo con la notación que se ha venido empleando (*MC*,*MCU*, *NRQM*[108], y *RE*).

Ahora bien, siguiendo con la línea argumentativa de [Bueno et al., 2002] y tomando en cuenta la jerarquía "vertical" y "horizontal" de las estructuras parciales, es importar reconocer e identificar la función y el rol pragmático que desempeña el lenguaje de *Estructuras Parciales*, en tanto que involucra aspectos relacionados con la práctica y el desarrollo científico y matemático. A continuación dicha labor se hará para el caso de i) las estructuras matemáticas en la parte superior de la jerarquía; y para el caso de ii) las estructuras de la Física en la parte inferior de la jerarquía:

Por un lado, en lo que respecta a los modelos matemáticos (i), es importante reconocer la posibilidad de representar explícitamente la compleja "red" de interrelaciones que se entretejen entre diferentes estructuras matemáticas y el grado de "parentesco" entre ellas. Dichas relaciones se pueden representar por medio de morfismos que se denotarán mediante *letras griegas*, donde se incluyen tanto homomorfismos totales como también parciales (por ejemplo, inmersiones totales o parciales), cuya diferencia radica en el grado de "parentesco" entre las estructuras matemáticas correspondientes (ver definiciones en Apéndice D). Tomando en cuenta esta posibilidad, se prestará atención a la continuidad de la estructura matemática que se puede apreciar a lo largo de la Figura 1. En lo que respecta a los modelos asociados a las teorías físicas (ii), es importante reconocer dos posibles modos de representación: el uso de *Homomorfismos Totales*, ó bien, de *Homomorfismos Parciales*, las cuales se denotarán mediante *letras latinas*. El primer tipo de morfismos pueden usarse para representar la correspondencia entre los modelos asociados a las Representaciones y aquellos modelos asociados a las teorías físicas. Mientras que el segundo tipo de morfismos, pretende representar otro tipo de aspectos estructurales como son, primeramente, la noción de *Representación Pro-*

[108] Aquí es importante trazar una distinción entre la *Mecánica Cuántica* (*MCU*) y la *Mecánica Cuántica No Relativista* (*MCNR*). Más adelante se explicarán y desplegarán los detalles de esta distinción en el contexto de *Estructura Matemática Superflua*.

yectiva, y en segunda instancia, la identificación de subestructuras de los modelos matemáticos que pueden considerarse *Estructura Matemática Superflua*, desde los cuales se podrían proyectar parcialmente modelos que representan a las teorías físicas. Esta característica estructural se puede representar por medio de proyecciones parciales entre las estructuras matemáticas totales y las estructuras físicas, lo que refleja la evidencia de que los agentes de conocimiento (los científicos) son ignorantes con respecto a una parte del dominio de conocimiento Δ que se investiga. Es decir, las teorías físicas naturalmente usan sólo una parte de la totalidad y complejidad de las estructuras matemáticas, lo que puede llevar a identificar *Estructura Matemática Superflua*, estructura que eventualmente termina gozando de alguna interpretación física (aunque inicialmente no se haya conocido). Siguiendo con [Bueno et al., 2002], la presencia de ignorancia acerca de Δ y la adquisición de nuevos conocimientos (provenientes de lo que inicialmente se consideró *Estructura Matemática Superflua*) puede representarse por medio homomorfismos parciales

Una vez que los aspectos funcionales del lenguaje de *Estructuras Parciales* se han establecido, es hora de poner en práctica todas estas herramientas en el contexto particular del cambio teórico y la subdeterminación del formalismo que se ha identificado en este trabajo.

11.4. La Continuidad de la Estructura

Con la finalidad de hacer una caracterización formal y adecuada de lo que se ha denominado "la preservación de la estructura" entre una teoría y la que le sucede, uno debe representar este rasgo de continuidad teórica en términos del meta-lenguaje de *Estructuras Parciales*. Una primera sugerencia es interpretar dicha noción de "preservación" en términos de una compleja red de homomorfismos parciales y totales que se satisfacen entre los modelos que representan a las teorías científicas.

A grandes rasgos, de la Figura 1 se pueden articular dos nociones conjuntistas de "preservación estructural": i) preservación total; y ii) preservación parcial. El primer tipo (que se denotarán por medio de la letra griega α) se puede expresar en términos de *Homomorfismos Totales* entre modelos conjuntistas mientras que el segundo tipo (que se denotarán por medio de la letra griega β) por medio de inmersiones parciales, que son un caso particular de *Homomorfismos Parciales*.

En lo que respecta al primer tipo de morfismos, una preservación total ocurre cuando el cambio teórico se manifiesta al nivel de los modelos científicos y no al nivel de los modelos matemáticos. En particular, esto ocurre cuando existe un cambio radical entre una teoría y su sucesor al nivel de la Física y sus modelos correspondientes (ontológicos, icónicos, etc.) sin que haya un cambio significativo al nivel de la estructura de grupo. Ahora bien, en lo que respecta al segundo tipo de morfismos, el rasgo más significativo que subyace a la noción de parcialidad en la preservación de una estructura es la abertura con la que esta noción puede caracterizar el cambio teórico, incluyendo la posibilidad de incorporar pérdidas de estructura (lo que ha sido identificado como "pérdidas Kuhnianas") a través de inmersiones parciales [Bueno, 2000a] (ver Definición 64). Estas inmersiones representan un caso concreto en el desarrollo de la ciencia, en cuyo caso la estructura que subyace a la nueva teoría contiene algunas relaciones que le pertenecen a la estructura que subyace a la teoría que le precede.

Ahora bien, se debe enfatizar que la noción de "preservación estructural" es un caso particular donde *Homomorfismos Totales* y *Parciales* se usan para representar transiciones teóricas al nivel "horizontal" de la Figura 1. Sin embargo, también existe una distinción entre morfismos parciales y totales que involucra transiciones al nivel "vertical" de la estructura, tales como: i) describir y concebir la presencia de *Representaciones Ordinarias* mediante homomorfismos totales, así como la presencia de *Representaciones Proyectivas* en términos de homomorfismos parciales; y ii) describir y concebir otro tipo de mapeos bien definidos que exportan parcial ó totalmente estructuras matemáticas, tales como los mapeos topológicos, los mapeos diferenciales, y las inmersiones comunes.

Ahora bien, tomando en cuenta estas definiciones, creo pertinente caracterizar formal y detalladamente el formalismo que se ha identificado en este trabajo. En seguida se despliegan seis aspectos que codifican las relaciones que se satisfacen entre los modelos asociados a los grupos de Lie (dejando las relaciones de sus Representaciones para después), tomando primero en cuenta los homomorfismos del tipo α, antes de embarcarse en un análisis de los homomorfismos del tipo β.

(1) Recuérdese que la propuesta *GH* era, a grandes rasgos, identificar una relación topológica precisa entre *Sp(3)* y *Mp(3)* a través de la *Doble Cubierta*, que correspondían a las simetrías fundamentales que subyacen a la *MC* y la *MCU*, respectivamente. De este modo, tomando en cuenta que la *Doble Cubierta* es un homomorfismo de grupo que se satisface entre grupos de Lie, es posible expresar este concepto en términos de un homomorfismo total (entre estructuras conjuntistas) de la siguiente manera: la estructura conjuntista asociada a *Mp(3)* es el dominio del homomorfismo del tipo α cuya imagen corresponde a la estructura conjuntista de *Sp(3)*. Este mapeo manda a *Sp(3)* las relaciones que se sabe que se satisfacen R_1 y no se satisfacen R_2 en *Mp(3)* sin que haya pérdida de estructura. Esto se puede ver por el hecho de que es un homomorfismo de grupo que, por definición, preserva la estructura completa del grupo de Lie abstracto.

(2) El mapeo que se define entre las extensiones inhomogéneas de ambos grupos (*ISp(3)* y *IMp(3)*) puede expresarse en términos del mismo tipo de homomorfismos (α), debido a que, desde el punto de vista de la teoría de grupos de Lie, ambas extensiones están relacionadas por medio de cubiertas. Sin embargo, hay un punto importante que habría que destacar: la parte inhomogénea de *ISp(3)* es el *Grupo Euclidiano* ($\mathbb{R}^6$) que corresponde al conjunto de traslaciones en el espacio fase, pero la *Doble Cubierta* de $\mathbb{R}^6$ no es la parte inhomogénea de *IMp(3)*, que es, el *Grupo de Heisenberg Polarizado* (H_{pol}). Al contrario, la *Extensión Central Algebraica* de $\mathbb{R}^6$, por medio del *Grupo Abeliano Real* ($\mathbb{R}$), es equivalente a H_{pol}. Ahora bien, nótese que la *Extensión Central Algebraica* se puede expresar explícitamente por medio de un homomorfismo suprayectivo de grupo entre el grupo cubierta H_{pol}, y el grupo base, que es un grupo cociente de la forma $\mathbb{R}^6 = H_{pol}/\mathbb{R}$, con respecto al subgrupo normal central $\mathbb{R}$. Esto implica que el mapeo que se define entre las dos estructuras conjuntistas (*ISp(3)* y *IMp(3)*) es un homomorfismo del tipo α.

(3) Si se vuelve a observar la Figura 1, uno puede percatarse de que existe un mapeo de inclusión que se define entre *Sp(3)* y *ISp(3)*, ó bien, entre *Mp(3)* y *IMp(3)*. Desde el punto de vista de la teoría de grupos de Lie, este mapeo es un homomorfismo de grupo, asociado comúnmente con una *Extensión Dividida* llamada *Inmersión Natural*. Esto quiere decir que el grupo total (ya sea G = *ISp(3)*, ó bien, G = *IMp(3)*) es la extensión del grupo cociente $H = G/N$ (ya sea H = *Sp(3)*, ó bien, H = *Mp(3)*)m con respecto al subgrupo normal (ya sea $N = \mathbb{R}^6$, ó bien, $N = H_{pol}$). Estos grupos totales se denominan *Extensiones Divididas* de H por N (que es una generalización de la *Extensión Central Algebraica para semi-productos*), y en este caso, tanto H = *Sp(3)* como H = *Mp(3)* son subgrupos. El punto aquí es que este concepto se puede expresar en términos de una inmersión total, ó bien, un mapeo inclusivo entre estructuras conjuntistas. En efecto, debido a que ambos grupos (*Sp(3)* y *Mp(3)*) son subgrupos de su contraparte inhomogénea, el mapeo entre los modelos conjuntistas que se asocian a estos grupos es un homomorfismo de tipo α, el cual manda las relaciones que se sabe que se satisfacen R_1 y aquellas que no se satisfacen R_2 en *Sp(3)* y en *Mp(3)* a *ISp(3)* y *IMp(3)*, respectivamente. Esto implica, de igual forma al caso anterior, que no existen pérdidas estructurales.

(4) El mapeo que se define entre los modelos conjuntistas de *Gal* y $\widetilde{Gal}$ es equivalente al mapeo α que se define arriba, con excepción de que no está definido en los modelos asociados a los grupos totales (*ISp(3)* y *MSp(3)*) sino en una restricción de estos últimos.

(5) También existe un par de mapeos inclusivos entre *Gal* y *ISp(3)*, ó bien, entre $\widetilde{Gal}$ y *IMp(3)*. Desde el punto de vista de la teoría de grupos de Lie, estos mapeos son inmersiones inyectivas de grupo, que a la vez son homomorfismos de grupo. Este concepto se puede expresar análogamente en términos de inmersiones totales, ó bien, mapeos inclusivos entre los modelos conjuntistas correspondientes. En efecto, dado que tanto *Gal* como $\widetilde{Gal}$ son subgrupos de *ISp(3)* y *MSp(3)*, respectivamente, estos mapeos corresponden a homomorfismos totales α entre los respectivos modelos conjuntistas, el cual manda las relaciones que se sabe que se satisfacen R_1 y aquellas que no se satisfacen R_2 en *ISp(3)* y *MSp(3)* a *Gal* and $\widetilde{Gal}$, respectivamente. Esto implica que de igual forma, no existen pérdidas estructurales.

(6) El último mapeo por caracterizar aquí corresponde al que se define entre $\widetilde{Gal}$ y *ISL(2,$\mathbb{C}$)*. Desde el punto de vista de la teoría de grupos de Lie, estos mapeos son inmersiones inyectivas de grupo, que a su vez son homomorfismos de grupo, pero está vez únicamente con respecto a un subgrupo de $\widetilde{Gal}$, es decir, *SU(2)*. Este elemento es un subgrupo de $\widetilde{Gal}$ y *ISL(2,$\mathbb{C}$)*, cuyas restricciones a *SU(2)* tienen álgebras de Lie equivalentes. En efecto, la contracción de grupo de *ISL(2,$\mathbb{C}$)* con respecto a *SU(2)* es $\widetilde{Gal}$. Esta contracción es, por definición, un mapeo que se define entre diferentes elementos del mismo álgebra de Lie asociada a *ISL(2,$\mathbb{C}$)* con respecto a un parámetro c, en cuyo caso si $c \to 0$, entonces la imagen de *ISL(2,$\mathbb{C}$)* $\setminus$ *SU(2)* resulta ser una álgebra de Lie distinta a la original (que corresponde a $\widetilde{Gal} \setminus$ *SU(2)*). Ahora bien, dado que este mapeo no es un homomorfismo de grupo, entonces puede

representarse como un *Homomorfismo Parcial* del tipo β, que se define entre los modelos conjuntistas correspondientes, y que mandan una subestructura de un modelo al otro. Nótese que en este caso, todas las relaciones que se sabe que se satisfacen R_1 y las que no se satisfacen R_2 en *SU(2)* $\subset \widetilde{Gal}$ son isomorfas a las relaciones que se satisfacen (y no se satisfacen) en *SU(2)* $\subset$ *ISL(2,*$\mathbb{C}$*)*. Pero las mismas relaciones que se satisfacen (o no) en el grupo total $\widetilde{Gal}$ no son isomorfas a aquellas que se satisfacen (o no) en *ISL(2,*$\mathbb{C}$*)*, por lo que existen ciertas relaciones R_3, que en algún momento se desconocía si se satisfacían (o no se satisfacían) en $\widetilde{Gal}$, pero que con el advenimiento de la *RE*, resultaron ser relaciones R_1 que se satisfacen en *ISL(2,*$\mathbb{C}$*)*. Estas relaciones corresponden a aquellas que se satisfacen en *ISL(2,*$\mathbb{C}$*)* $\setminus$ *SU(2)*. Análogamente, existen ciertas relaciones R_1 que en algún momento se sabía que se satisfacían en $\widetilde{Gal}$, pero que con el advenimiento de la *RE* resultaron ser relaciones que no se satisfacen en *ISL(2,*$\mathbb{C}$*)*. Estas relaciones corresponden a las que se satisfacen en $\widetilde{Gal} \setminus$ *SU(2)*.

Ahora bien, una vez que los aspectos más significativos han sido formalmente analizados al nivel de los grupos abstractos, en seguida la discusión se centrará en las Representaciones. Una inspección rápida de la Figura 1 muestra que existen dos diferentes Representaciones de Lie: Las *Representaciones Proyectivas* y las *Representaciones Ordinarias*. Las Representaciones del primer tipo son homomorfismos de grupo, mientras que las Representaciones del segundo tipo son homomorfismos parciales que involucran pérdidas estructurales. El grado en el que estas últimas Representaciones pierden estructura depende de las Representaciones de Lie que se considere. Por esta razón, en las siguientes líneas se pretende exponer los aspectos que codifican las relaciones que se satisfacen entre los modelos asociados tanto a las *Representaciones Ordinarias* como a las *Representaciones Proyectivas*:

(1) *Representaciones Ordinarias*. Este tipo de Representaciones incluye a $s(\mathbb{R}^2)$, $\mu(\mathscr{H})$, $Gal(\mathbb{R}^2)$, $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$ y $RE(\mathbb{R}^4)$, mientras que la única[109] *Representación Proyectiva* es $Gal(\mathscr{H})$. A este respecto, es posible expresar a las *Representaciones Ordinarias* en términos de homomorfismos totales del tipo α entre modelos conjuntistas. A decir verdad, estos últimos no son mapeos inclusivos sino que son mapeos que preservan la estructura total del grupo, de tal forma que las relaciones que se sabe que se satisfacen R_1 y que no se satisfacen R_2 en *Sp(n)*, *Mp(n)*, *Gal*, $\widetilde{Gal}$, y *ISL(2,*$\mathbb{C}$*)*, se preservan al aplicar $s(\mathbb{R}^2)$, $\mu(\mathscr{H})$, $Gal(\mathbb{R}^2)$, y $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$ $RE(\mathbb{R}^4)$, respectivamente. Una vez dicho esto, no es necesario meterse en detalles con respecto a cada Representación, puesto que cada uno de ellos resulta ser un ejemplo del conjunto de homomorfismos de grupo que se expresan en términos conjuntistas como homomorfismos totales.

(2) *Representaciones Proyectivas*. A primera vista se puede constatar que la *Representación Proyectiva* de *Gal* en el espacio de Hilbert, que es $Gal(\mathscr{H})$, es un mapeo que lleva consigo una pérdida de la estructura del grupo en el que se define. Específicamente, el mapeo inducido por la Representación no es un homomorfismo de grupo global, sino que es parcial en el sentido de que la topología del grupo

[109]La Representación $\mathscr{I}(\mathscr{H})$ también es proyectiva pero no son relevantes para el propósito de este trabajo.

Gal (que no es *Simple-Conexo*) induce una fragmentación del espacio de Hilbert en subespacios que son mutuamente inaccesibles. Dado que este grupo admite una Representación natural y canónica en el espacio-tiempo Newtoniano, es posible identificar un punto de dicho espacio con diferentes puntos del espacio de Hilbert. Este aspecto se puede expresar en términos de homomorfismos parciales del tipo β que se satisfacen entre modelos conjuntistas. El punto es que esta Representación manda parcialmente a $Gal(\mathscr{H})$ las relaciones que se sabe que se satisfacen R_1 y que no se satisfacen R_2 en *Gal*, tomando en cuenta que estas relaciones se asocian a modelos que satisfacen los axiomas de grupos de Lie. Esto quiere decir que las relaciones R_2 que se sabe que no se satisfacen *Gal* resultan ser relaciones R_1 que sí se satisfacen en $Gal(\mathscr{H})$. Así mismo, generalmente existen casos donde algunas relaciones R_1 que se sabe que se satisfacen en un grupo de Lie, resultan ser relaciones R_1 que sí se satisfacen en su *Representación Proyectiva*. Pero esto ocurre cuando la fase asociada a las *Representaciones Proyectivas* irreducibles es multi-valuada y se elimina para algunos elementos del grupo[110]. En seguida, este aspecto de las *Representaciones Proyectivas* se explicará en detalle mediante algunas fórmulas relevantes[111]:

Desde un punto de vista estrictamente abstracto, considérese un elemento $g \in Gal(3)$. Dado que *Gal* es un grupo de Lie, entonces satisface el axioma de clausura:

$$g_1 g_2 = g_3$$

donde g_1, g_2, y g_3 son elementos de *Gal*. Ahora bien, cuando este grupo actúa en el espacio de Hilbert, induce una *Representación Proyectiva*, que es $Gal(\mathscr{H})$, y que se expresa de la siguiente manera:

$$U(g_1)U(g_2) = w(g_1, g_2)U(g_1 g_2) = w(g_1, g_2)U(g_3)$$

Este define una transformación unitaria que produce un cambio de fase, a diferencia de lo que pasa con la acción de *Gal* en el espacio-tiempo newtoniano:

$$R(g_1)R(g_2) = R(g_1 g_2) = R(g_3)$$

De esta manera, las relaciones (que definen propiedades y axiomas de grupo) se modifican al momento de inducir una Representación unitaria de *Gal* en el espacio de Hilbert, implicando con ello que algunas relaciones R_2 que no se satisfacían en *Gal* se satisfagan en $Gal(\mathscr{H})$ (relaciones que se incorporan a través de la fase $w(g_1, g_2) \neq 0$).

Después de que se ha hecho un análisis (extensional, riguroso) de la estructura que se despliega en la Figura 1, uno pensaría que los principales objetivos de esta sección se han cubierto satisfactoriamente. Sin embargo, hace falta identificar concretamente el grupo (o los grupos) que sugieren las afinidades estructurales entre los dominios teóricos que se están investigando. Posteriormente, sabiendo que dicha estructura matemática de grupo se sitúa en la parte superior de la jerarquía, se pretende analizar la preservación estructural que ocurre en la parte inferior de la misma, es decir, los aspectos estructurales al nivel de la Física.

[110]Por ejemplo, las Representaciones unitarias doble-valuadas del *Grupo de Lorentz*.

[111]El lector puede referirse a la definición 49 en A.

Tomando en cuenta que existen dos nociones conjuntistas de "preservación estructural", una total y otra parcial, es posible demostrar que, en lo que respecta a los modelos matemáticos, existe una estructura que se ha preservado parcialmente. En efecto, a un nivel más abstracto, donde no solamente las simetrías espacio-temporales están involucradas sino también las simetrías internas, se puede decir que existe una estructura matemática concreta que se ha preservado parcialmente frente al cambio teórico. Esta estructura corresponde precisamente al *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* (*ISp(3)*) (salvo un homomorfismo de grupo *IMp(3)*). Ahora bien, antes de que se proceda a analizar la naturaleza física de este cambio teórico que se ha identificado al nivel de las Matemáticas, creo conveniente hacen énfasis en algunos aspectos problemáticos en relación con la noción de "preservación parcial". Como bien ya se dijo, las contracciones de grupo y las inmersiones parciales implican la presencia de pérdidas estructurales que son parte constitutiva del proceso complejo del cambio teórico que, después de todo, es importante reconocer. Sin embargo, algunos filósofos han argumentado que las pérdidas estructurales traen consigo algunas dificultades para dar cuenta del proceso del cambio teórico desde una tesis realista de corte estructural [Bueno, 2008]. En efecto, un argumento análogo a la *MIP* puede plantearse al nivel de los grupos abstractos si existen pérdidas estructurales al cambiar de un marco teórico a otro. Sin embargo, ante dichos argumentos uno tiene que tener en cuenta que los únicos aspectos relevantes para el *REO*, y en los cuales reposa su compromiso de verdad, deben ser los elementos estructurales que pueden explicar el éxito predictivo de las teorías que son parte del proceso del cambio teórico: "[...] not all structures get carried over, as it were, but only those which are genuinely explanatory'" [French, 2014, p. 10]. En efecto, existen estructuras que no son "genuinamente explicativas", ó bien, dispensables (en el sentido de Psillos elucidado en la sección (7.2.4)), y en cuyo caso, su presencia en teorías subsecuentes es irrelevante. No obstante, esta respuesta parece ser insuficiente si no se determina explícitamente la naturaleza de la estructura que se considera indispensable. Afortunadamente, uno puede ver en la Figura 1 que el modelo conjuntista asociado al grupo *SU(2)* es el único elemento estructural que se preserva (incluyendo a la MC, la MCU, y la RE) en un sentido estricto y total. En efecto, *SU(2)* corresponde a la única estructura que no se pierde frente a las transiciones "horizontales" de la estructura matemática de la Figura 1. Con base en este hecho, es posible concluir que un compromiso ontológico con respecto a dicha estructura versa en su indispensabilidad en cuanto al éxito predictivo que gozan dichas teorías, lo que a su vez implica su inmunidad frente a la *MIP*.

Aparte de estas observaciones, también creo importante aclarar que la topología de $ISL(2,\mathbb{C}) = \mathbb{R}^4 \otimes (\mathbb{R}^3 \otimes SU(2))$ es muy similar a la de $\widetilde{Gal} \simeq \mathbb{R} \otimes_S (\mathbb{R}^3 \otimes_S (\mathbb{R}^3 \otimes_S \mathrm{SU}(2)))$ (más no lo son sus Lie álgebras asociadas que codifican sus propiedades locales), lo que implica (inductivamente) que debería existir una conexión a un nivel todavía más abstracto, más allá de las inmersiones parciales que se han identificado. Como esta conexión no es tan clara desde la perspectiva de la *Doble Cubierta* (por tratarse de aspectos estrictamente topológicos), habría que enfocar la atención a algunas contribuciones que han tratado de identificar un formalismo matemático que se preserva totalmente en este proceso de cambio teórico, incluso incorporando las teorías gravitatorias (por ejemplo la propuesta de álgebras de Clifford de Basil Hiley [Hiley, 2010]). Ahora bien, más allá de las posibilidades imaginables que se tengan hoy en día, hasta aquí sólo queda reconocer la legitimidad del elemento de parcialidad implícito en el meta-lenguaje de *Estructuras Parciales*. Dado que todos las estructuras de grupo se han representado en términos de modelos conjuntistas con un elemento de parcialidad inherente, la posibilidad de incorporar posteriormente ciertas estructuras matemáticas es consistente con la actitud realista y pragmatista que se ha adoptado hasta el momento. El punto es que, con respecto a un dominio de conocimiento específico Δ, es posible identificar una estructura matemática concreta que se preserva, lo que permite adoptar una actitud positiva con respecto al problema del cambio teórico.

Hasta aquí se puede decir que se ha identificado una estructura matemática que se preserva frente al cambio teórico. Sin embargo, la base metafísica del *REO* versa en términos de un compromiso ontológico con respecto a una estructura continua que se preserva no sólo al nivel de los grupos abstractos sino también al nivel de la Física. Sin este elemento, no se puede plantear una salida satisfactoria al problema derivado de la *MIP*. Para este fin, a continuación se elucidará y articulará una conexión clara y precisa entre las teorías físicas que se están considerando y las estructuras matemáticas de grupo que se preservan:

A primera vista, la familia completa de modelos que corresponde a las estructuras matemáticas de grupo, incluyendo los elementos del conjunto D_n y las relaciones que se satisfacen entre ellos R_{ni}, se han caracterizado en términos de los elementos de los grupos de Lie y los axiomas (reglas de multiplicación) que satisfacen dichos grupos, respectivamente. Sin embargo, esta caracterización es análoga pero no es equivalente para el caso de las Representaciones, que son transformaciones de vectores en el espacio vectorial correspondiente, y que satisfacen (en el caso de tratarse de Representaciones ordinarias) los mismos axiomas que se le atribuyen a los grupos de Lie (incluyendo la regla multiplicativa). Por otro lado, los modelos asociados a las teorías se caracterizan comúnmente en términos de objetos físicos (partículas, clásicas, electrones, quarks, etc.) y relaciones que se satisfacen entre estos últimos, incluyendo las relaciones monádicas (propiedades) que poseen dichos objetos (carga, masa, energía, etc.). En consecuencia, la semántica de los modelos asociados a las estructuras de grupo, aquellos que subyacen a las Representaciones, y los que corresponden a las teorías Físicas es muy diferente. De esta forma, debería de existir un procedimiento que pueda relacionar ambos tipos de modelos en términos de un lenguaje común. Pero no hace falta un análisis exhaustivo para darse cuenta de que la mejor estrategia disponible se encuentra en la misma teoría matemática de grupos, tal como el programa de Wigner y Weyl lo demuestran. En efecto, los elementos de grupo que corresponden a D_n son entidades abstractas que no tienen ninguna interpretación física hasta que se Representan en términos de transformaciones que ocurren en el espacio de estados de la teoría en cuestión. Por lo que la interpretación física más directa y adecuada para este tipo de transformaciones es en términos de elementos invariantes que pertenecen estrictamente al espacio de Representación. A decir verdad, los vectores invariantes (bajo este tipo de transformaciones) del espacio de Representación corresponden a las cantidades físicas del sistema que la teoría investiga. Esto quiere decir que no sólo los grupos (como entidades abstractas) se consideran parte de la estructura matemática que subyace a una teoría física, sino que también los elementos vectoriales del espacio de Representación. Después de todo, una Representación se puede ilustrar como una "copia" del grupo definida en un espacio vectorial con una estructura matemática bien definida. Gracias a esta virtud matemática y estructural, se puede apreciar una relación precisa y formal entre el edificio teórico y el matemático que presupone que los objetos físicos que se definen en las teorías científicas no son objetos *per se* sino propiedades como la masa, la carga, la velocidad, etc. De este modo, cualquier teoría física demanda una re-conceptualización de los objetos que se definen en ella en términos de propiedades, cada una de las cuales puedan asociarse con vectores invariantes en el espacio de Representación bajo una familia de transformaciones que se definen por el grupo abstracto en consideración.

Ahora bien, este aspecto se puede expresar en términos conjuntistas al asociar cada propiedad física con un elemento del espacio de Representación en consideración (como espacio vectorial). Siguiendo con la Figura 1, uno comienza en la cima de la jerarquía con los elementos y las relaciones asociadas a los grupos abstractos representados por las siguientes estructuras (modelos) parciales conjuntistas:

$$G_n =< D_n, R_{ni}, f_{nj}, a_{nk} >_{i\in\mathbb{I}, j\in J, k\in K}$$

El dominio D_n es un conjunto de elementos de los grupos abstractos y R_{ni} es la familia completa de relaciones que se satisfacen entre los elementos del grupo, que corresponden a los axiomas de grupo, y en particular, a sus reglas de multiplicación. Una vez que se ha identificado esta estructura parcial, lo que sigue es caracterizar la manera en que los elementos D_n actúan (se Representan) en el espacio de Representación P_m. Esto se hace por medio de una familia de transformaciones que se expresan por medio de homomorfismos de tipo α y β. Estas transformaciones resultan ser conjuntos de nuevas relaciones que se satisfacen entre la familia de elementos vectoriales D'_n y que pertenecen a una nueva estructura conjuntista que corresponde al espacio de Representación (como un espacio vectorial):

$$P_m =< D'_m, R'_{mi}, f'_{mj}, a'_{mk} >_{i\in\mathbb{I}, j\in J, k\in K} \quad \text{such that} \ \ m \leq n$$

El dominio D'_m es el conjunto que se obtiene mediante la conjunción de los elementos de los grupos abstractos y el conjunto de vectores que generan el espacio de Representación P_m. Así mismo, R_{mi} corresponde a la familia completa de relaciones, donde se incluyen las relaciones que se satisfacen entre los elementos de grupo R_{ni} y los elementos del espacio de Representación inducidos por los homomorfismos $\alpha(D_n)$, ó bien, $\beta(D_n)$. Para el caso de homomorfismos parciales del tipo β, este último tipo de relaciones se expresan en términos de algunas fases en las reglas de multiplicación, debido a la presencia de *Representaciones Proyectivas*.

Ahora bien, algunos de los elementos vectoriales de D'_m son invariantes con respecto a la familia de transformaciones R'_{mi} que se inducen por los grupos abstractos. Por lo que las subestructuras de la familia de vectores invariantes D'_{m-1} (que corresponden a las cantidades físicas) se pueden representar de la siguiente manera:

$$P_{m-1} =< D'_{m-1}, R'_{(m-1)i}, f'_{(m-1)j}, a'_{(m-1)k} >_{i\in\mathbb{I}, j\in J, k\in K}, \quad \text{such that} \ \ m \leq n$$

donde $R'_{(m-1)i}$ es la familia de transformaciones que actúan sobre las cantidades físicas D'_{m-1}, familia que se puede asociar a un tipo de relaciones físicas que se satisfacen entre estas cantidades (ecuaciones de movimiento, operadores de evolución, etc.). Asumiendo esto, entonces uno puede interpretar a P_{m-1} como una estructura parcial que se puede asociar a cualquier modelo de una teoría física. Sin embargo, únicamente es posible representar dicha asociación una vez que se hayan identificado los mapeos del tipo g (como bien se puede observar en la Figura 1). Este tipo de mapeos se han introducido suponiendo que cada modelo conjuntista en la parte inferior de la jerarquía corresponde a la estructura que subyace a una teoría autónoma con fronteras bien definidas.

Gracias a estas observaciones, uno puede pensar que los modelos que se localizan en la parte inferior de la jerarquía que se observa en la Figura 1, están asociados a una teoría física particular que se constituye estructuralmente mediante un espacio de Representación con un grupo abstracto actuando sobre él. De esta forma, lo que se ha demostrado es que el cambio teórico que se manifiesta entre diferentes teorías físicas se puede representar por medio del meta-lenguaje de *Estructuras Parciales*, y gracias a ello, es posible identificar una estructura continua que se preserva al nivel de los grupos abstractos pero que tiene una dimensión física por medio de sus Representaciones. Tomando en cuenta esta posibilidad, es posible dar una respuesta a la *MIP* al adoptar una tesis realista con respecto a una estructura concreta que se preserva a lo largo del cambio teórico que se manifiesta entre la *MC*, la *MCU*, y la *RE*. Se puede concluir que esta estructura corresponde al grupo abstracto *SU(2)* que es, después de todo, el "componente rotacional" del *Grupo Metapléctico Inhomogéneo* (*ISp(3)*), y los espacios de Representación, como son el espacio-tiempo newtoniano ($\mathbb{R}^4$), y el espacio de estados correspondiente a la *MCU*($\mathscr{H}$) y a la *MC*($\mathbb{R}^2$).

Ahora bien, en lo que respecta al compromiso ontológico con respecto a los espacios de Representación, existen algunas cuestiones problemáticas que deben reconocerse y resolverse. En efecto, no es difícil notar que la adopción de un compromiso realista con respecto a un espacio de Representación es, después de todo, un argumento a favor de la *MIP*, debido a que la estructura que se preserva no es la que subyace al espacio de Representación, sino al grupo abstracto correspondiente. Sin embargo, a primera vista parece que no es posible prescindir de la existencia de dichos espacios debido a que, si este fuera el caso, no habría una manera de relacionar las estructuras matemáticas de los grupos abstractos con las estructuras que subyacen a las teorías de la Física, ni con la naturaleza estructural de los hechos empíricos. En otras palabras, no habría manera de interpretar física y empíricamente a dichas estructuras matemáticas. Después de todo, lo que determina dicha relación es la posibilidad de realizar una "copia" del grupo abstracto sobre el espacio de Representación que corresponde a cada teoría. Afortunadamente, aunque es importante ser críticos con respecto a las premisas más importantes de este trabajo, considero que esta objeción no plantea un problema en contra del *REO*, sino que al contrario, reivindica la base metafísica de dicha tesis filosófica. Esto debido a que los espacios de Representación que se están considerando ($\mathbb{R}^4$, $\mathscr{H}$, y $\mathbb{R}^2$) son espacios donde los grupos abstractos, y en particular *SU(2)*, actúa por medio de *Representaciones naturales* y *Representaciones Ordinarias* (no proyectivas). Esto implica que la ley de multiplicación asociada a dicho grupo se induce en los espacios de Representación correspondientes, y por ende, se preserva independientemente de la constitución de estos últimos. En efecto, por un lado, la estructura de los grupos abstractos es, por definición, equivalente a la estructura de sus *Representaciones naturales*, ya que estas últimas son, después de todo, isomorfas al grupo. Un ejemplo es el hecho de que existe un isomorfismo entre la *Doble Cubierta* del *Grupo Simpléctico* y el *Grupo Metapléctico*, que define una Representación en el espacio de Hilbert. Por otro lado, aunque los espacios de Representación (que corresponden a diferentes teorías) parezcan ser muy distintos, tienen un aspecto en común que se manifiesta estructuralmente al poder definir una copia del grupo *SU(2)* sobre ellos. Este aspecto común es específicamente la regla de multiplicación que únicamente se preserva en las *Representaciones Ordinarias* que se han identificado para cada teoría. Tomando estos elementos matemáticos en consideración, el compromiso realista debe ser con respecto a las reglas de multiplicación que son comunes al grupo y al espacio de representación correspondiente. Esto es, debido a que la estructura que se preserva corresponde a estas reglas de multiplicación, entonces un compromiso realista con respecto a los grupos abstractos implica el mismo compromiso con respecto a los espacios de Representación donde actúan. Entonces para concluir, si el lector se pregunta: ¿Cuál es la estructura que se preserva y que subyace a los espacios de Representación? la respuesta más acertada sería que dicha estructura corresponde a las reglas de multiplicación que se tienen tanto para el grupo *SU(2)* como para su "copia", ya sea en el espacio-tiempo newtoniano ($\mathbb{R}^4$), ó bien, en el espacio de estados correspondiente a la $MCU(\mathscr{H})$ y a la $MC(\mathbb{R}^2)$.

11.5. La Estructura Unificada: Contra La Sub-determinación

Si se observa en la parte inferior de la Figura 1, uno puede notar que cada una de las teorías (*MC*, *MCU*, y *RE*) se representa por medio de un modelo (estructura parcial) que las identifica y las caracteriza. Pero más allá de su relación indisociable con la estructura general de algunos grupos abstractos, el modelo asociado a cada teoría no muestra explícitamente a las subestructuras que forman parte de la misma, como por ejemplo, los modelos asociados a sus distintas interpretaciones y formulaciones. La razón de esta falta es que si se construyera un diagrama, que fuera lo más completo y preciso (de tal manera que se mostraran explícitamente a todos los modelos asociados a estas tres teorías, incluyendo las subestructuras empíricas, ontológicas, matemáticas, e icónicas), aparte de ser una tarea muy compleja, resultaría poco fructífera en relación con el objetivo de este trabajo. Después de todo, si los presupuestos metafísicos del *REO* hacen un énfasis en las estructuras matemáticas de las teorías, y si toda interpretación en términos de objetos y propiedades es relegada de un estatus ontológico, entonces no es necesario prestar atención a los detalles y los casos particulares de las interpretaciones objetuales, sino que el enfoque debe ir dirigido a las formulaciones matemáticas de cada una de estas teorías, que constituyen a su vez, un elemento común a todas sus interpretaciones[112]. Específicamente, se desea investigar analíticamente la forma en que la estructura matemática que se ha identificado abarca a estas formulaciones, o en otras palabras, se desea demostrar que la mayoría de las formulaciones existentes de cada una de estas teorías resultan ser subestructuras de una estructura simpléctica. Pero para ello, no hace falta volver a abrir nuestros libros de Física y Matemáticas, sino que la respuesta se encuentra precisamente en algunos pasajes y secciones de este trabajo.

Considérese el caso de la *MC*. Gracias a la sección dedicada a articular la formulación newtoniana de la *MC* desde el punto de vista de la formulación hamiltoniana (10.3.3), se sabe que ambas formulaciones son equivalentes bajo la restricción de que se satisfaga el llamado *Principio de Maxwell*, o lo que es lo mismo, que las fuerzas newtonianas puedan expresarse en términos de una fórmula más general que involu-

[112] Más adelante, en la sección 13 se verá que en el caso particular de la *TCB*, es posible identificar una versión mínima respecto a la cual subyace un formalismo matemático bien definido que es común a todas las interpretaciones que se tienen en dicha teoría.

cre campos clásicos (por ejemplo, campos electromagnéticos). De esta forma, la formulación hamiltoniana puede considerarse más general en el sentido de que puede describir sistemas donde existen otro tipo de fuerzas que no son reconocidas por la teoría newtoniana y que violan el *Principio de Maxwell*. Por otro lado, se tiene la formulación lagrangiana que, como bien se ha visto, es diferente a la hamiltoniana en el sentido de que se define en otro espacio matemático: el haz tangente de la variedad de configuración (del espacio de coordenadas). Por supuesto, esto no implica que dicho espacio no tenga ninguna relación con el espacio matemático donde se define la formulación hamiltoniana que, después de todo, corresponde al haz cotangente. Evidentemente, la formulación hamiltoniana y lagrangiana difieren en tanto que una se define en el espacio dual de la otra. Ahora bien, encontrar una relación matemática entre una formulación y su homóloga no implica que ambas formen parte de una formulación más general donde cada una resulta ser un caso particular. A este respecto, en la sección 8 dedicada a describir la propuesta estructuralista, se afirma, siguiendo a [Pooley, 2006], que es posible identificar aspectos en común que comparten tanto la formulación Hamiltoniana como la Lagrangiana mediante una estructura matemática unificada. Esto se ha podido realizar al tomar en cuenta que su dualidad determina una relación de isomorfismo entre el espacio tangente y cotangente, ó bien, entre el espacio de las condiciones iniciales y el de las soluciones correspondientes. Aparte de estos detalles, lo relevante es que este isomorfismo se define en el haz de la variedad de configuración, la cual tiene una estructura simpléctica que unifica a ambas formulaciones [Belot, 2006]. Pero más relevante es que esta estructura simpléctica se codifica, después de todo, en las transformaciones canónicas del espacio fase por medio de la forma simpléctica. Es decir, la estructura general en la que tanto la formulación hamiltoniana como la lagrangiana coexisten se puede identificar con la Representación del *Grupo Simpléctico* en el espacio fase. Y esta estructura forma parte precisamente del formulismo que se ha identificado y que comparte estructura con otras teorías como la *MCU* y la *RE*.

Ahora considérese la *MCU*. En este caso, se conocen dos formulaciones: la imagen de Schrödinger y la imagen de Heisenberg. La primera es una formulación donde se define una ecuación diferencial (de segundo orden en la posición y primer orden en el momento) cuya solución es la función de onda. Esta formulación básicamente consiste en determinar la evolución de la función de onda en el tiempo, y a partir de ella, poder calcular valores de expectación por medio de operadores estacionarios que se definen en un tiempo dado. La segunda es, por el contrario, una formulación acerca de la evolución de los operadores en el tiempo, a partir de los cuales es posible calcular los valores de expectación a tiempos diferentes. Ahora bien, a primera vista ambas formulaciones podrían parecer muy diferentes y hasta inconmensurables, pues no sólo difieren en su forma sino que también difieren en su base con respecto a la cual transcurre el tiempo (la base de la posición para la primera y cualquier base para la segunda). Pero no hace falta ir muy lejos para darse cuenta que ambos satisfacen una relación indisociable. Un argumento a favor de la existencia de esta relación se encuentra en la sección 10.3.11, dedicada a desentrañar la estructura simpléctica de la imagen de Schrödinger (que es, después de todo, la que se ha adoptado hasta el momento). Al final de esta sección, se pudo constatar que la ecuación de Schrödinger emerge de la estructura simpléctica codificada en la Representación del *Grupo Metapléctico* en el espacio de Hilbert. Sin embargo, hay un detalle que faltó decir al respecto, y es que todo el desarrollo matemático que se hizo para llegar a semejante resultado adopta una Representación particular que privilegia la base de la posición sobre otras bases. Esto se puede constatar al notar que *Mp(n)* se define en términos de las funciones generadoras $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que se definen en el producto cartesiano de espacios de coordenadas. Sin embargo, en [De Gosson, 2001, pp.316-8] es posible constatar que el mismo procedimiento es válido para cualquier base, partiendo del hecho de que la formulación hamiltoniana de la *MC* es covariante bajo transformaciones canónicas (desde la cual se define *Mp(n)*). De este modo, vistas desde la perspectiva de *Mp(n)*, la imagen de de Schrödinger y la imagen de Heisenberg son casos particulares de una misma estructura que es intrínsecamente simpléctica, la primera que trabaja al nivel del álgebra simpléctica y la segunda al nivel de *Mp(n)*. Como última observación respecto a la *MCU*, es importante tener en cuenta la distinción entre la versión estándar (*MCE*), y otro tipo de formulaciones como la *TCB*, ó bien, la Teoría del Colapso Objetivo. Con respecto a *TCB*, habría que notar que su estructura es mas extensa que la de *MCE* porque la contiene, tomando en cuenta que la primera tiene una ecuación adicional (la ecuación guía). Pero esto no implica un problema porque, después de todo, se sabe que la *TCB* es precisamente la teoría que se obtiene al Representar *Mp(n)* en el espacio de Hilbert (ver en 1). Ahora bien, una formulación que no podría fundamentarse desde el punto de vista de *Mp(n)* es la Teoría del Colapso Objetivo, pues uno de sus rasgos distintivos es que modifica la ecuación de Schrödinger al introducir elementos estocásticos. Pero, como se verá en la sección 13, dedicada al realismo de las interpretaciones Bohmianas (en lo que respecta a la justificación de la tesis filosófica que se defiende), esta formulación no es estrictamente empíricamente equivalente a la *TCB* y a la teoría estándar. Esto debido a que la primera está abierta a nuevas predicciones, lo que conduce a evidenciar una sub-determinación débil entre esta y el resto de las formulaciones que, evidentemente, no tiene el mismo peso que la sub-determinación fuerte.

Finalmente, con respecto a la *RE*, se pueden identificar dos interpretaciones diferentes que son empíricamente equivalentes: la de Einstein y la de Lorentz[113]. No obstante, a pesar de que ambas interpretaciones difieren en cuanto al tipo de objetos y propiedades que postulan (por un lado, objetos y propiedades clásicas, y por otro lado el éter), ambas comparten el hecho de que la estructura espacio-temporal que subyace a esta teoría es Lorentziana. Bajo esta observación, no es necesario hacer un análisis respecto al tipo de relación estructural que existe entre una interpretación y la otra pues, después de todo, ambas comparten una misma estructura: el *Grupo de Poincaré* que, como bien se demostró en 10.4.3, difiere de un subgrupo del *Grupo Metapléctico Inhomogéneo* bajo contracciones de grupo.

En vista de estas observaciones, se concluye que en lo que respecta a la *MC*, la *MCU*, y la *RE*, es posible identificar una estructura común, específicamente, una estructura simpléctica que establece una relación de inmersión con todas sus formulaciones existentes. Esto implica que el compromiso ontológico del *REO* sobre la estructura matemática que subyace a diferentes formulaciones de una teoría, y en este caso a la estructura simpléctica, permite evitar parcialmente[114] el problema de la sub-determinación respecto a las teorías que se han considerado, es decir, con respecto a la *MC*, la *MCU*, y la *RE*.

[113]Una discusión filosófica en torno a la presencia de estas formulaciones se puede encontrar en [Acuña, 2013].

[114]Por supuesto, lo evita parcialmente porque uno podría identificar otro tipo de formulaciones no tan relevantes que no se han tratado hasta ahora.

11.6. Estructura Matemática "Superflua"

En seguida la discusión se centrará en un aspecto que debe analizarse a profundidad en lo que respecta a la relación entre el perfil matemático y el teórico: la presencia de *Estructura Matemática Superflua*.
Una rápida inspección de la Figura 1, conduce al lector a demandar claridad y desambiguación del significado de los mapeos h, que son similares a los homomorfismos que se definen entre los modelos matemáticos asociados a las Representaciones y los modelos asociados a las teorías físicas. No menos importante es el hecho de que existe una diferencia entre las teorías (*MCU* y *MCNR*), y las Representaciones (tanto de $Gal(\mathscr{H})$ como de $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$) que habría que desarticular. En este análisis, se demostrará la presencia de *Estructura Matemática Superflua*, y con base en ello, se identificará la viabilidad heurística de dicha estructura desde el punto de vista del meta-leguaje de *Estructuras Parciales*.
Recapitulando lo que se ha dicho en secciones posteriores, el *Grupo de Galileo* (*Gal*) actúa sobre el espacio de Hilbert a través de *Representaciones Proyectivas* $Gal(\mathscr{H})$. Estas Representaciones no pueden describir adecuadamente algunos estados (particularmente los estados en superposición con diferentes masas), y a razón de ello, es necesario introducir a mano una regla de súper-selección que prohiba dichos estados. Sin embargo, como ya se dijo, existe una manera de evitar este problema recurriendo a algunas técnicas matemáticas. Si se calcula la *Doble Cubierta* de la *Extensión Central Algebraica* de *Gal* se obtiene $\widetilde{Gal}$, que resulta ser un grupo que admite una *Representación Ordinaria* ($\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$) y que es topológicamente equivalente a[115] $Gal(\mathscr{H})$. Afortunadamente, esta *Representación Ordinaria*, a diferencia de una *Representación Proyectiva*, puede describir los estados en superposición con diferente masa. En consecuencia, esta extensión evita el uso de reglas de súper-selección que, después de todo, prohiben estados que no pueden ser descritos por el formalismo.
Ahora bien, en el dominio de la *MCU* y en la ausencia de cualquier indicio que sugiera la presencia de fenómenos relativistas, los estados en superposición de masas carecen de una contraparte empírica, en cuyo caso, tanto *Gal* como $\widetilde{Gal}$ son grupos de simetría sin ninguna diferencia significativa en cuanto a la interpretación física se refiere. No obstante, cuando la *RE* aparece en la escena, resulta que este tipo de estados en superposición adquieren una interpretación física, y por ende son empíricamente relevantes, gracias a algunas remanentes que persisten en el dominio de la *MCNR* cuando los objetos relativistas se mueven a velocidades bajas. Por ejemplo, en este rango de velocidades la presencia de cambios en la fase asociada a las transformaciones de Galileo puede interpretarse físicamente como un cambio que ocurre en el tiempo propio que poseen diferentes observadores (que se mueven relativamente uno con respecto al otro). Esto conlleva a identificar y reconocer la dimensión empírica de este tipo de estados, y a su vez, provee una justificación razonable para considerar al grupo $\widetilde{Gal}$ como el grupo de simetría fundamental de la *MCNR*.
Ahora bien, el punto de volver a introducir esta discusión tiene directa relación con el hecho de que los mapeos h, que se presentan en 1, corresponden a los homomorfismos que codifican las relaciones que se satisfacen entre los modelos matemáticos y los modelos asociados a las teorías científicas. Esto a razón

[115]Por esta razón, es posible identificar en la Figura 1 un signo de equivalencia entre los modelos que corresponden a ambas Representaciones.

de que es posible identificar *Estructura Matemática Superflua* en las estructuras que subyacen a $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$, desde el punto de vista de la *MCU*, pero no desde el punto de vista de la *MCNR*. Para aclarar semejante posibilidad, considérese el siguiente análisis.

La estructura parcial que subyace a la *MCU* puede expresarse (extensionalmente, rigurosamente) de la siguiente manera:

$$S_{Gal} = \left\langle D'_{Gal}, R'_{(Gal)\,i}, f'_{(Gal)\,j}, a'_{(Gal)\,k} \right\rangle_{i\in\mathbb{I}, j\in J, k\in K}, \quad \text{such that } Gal < n.$$

donde D'_{Gal} son los elementos de *Gal* en conjunción con las cantidades físicas clásicas que, después de todo, pertenecen a una clase de equivalencia de vectores que son invariantes[116] bajo la familia de operadores unitarios en el espacio de Hilbert, es decir, $R'_{(Gal)\,i}$. Ejemplos de estas cantidades son el momento lineal y angular, la energía, la aceleración, etc. A decir verdad, la relación precisa entre la estructura parcial de *MCU* (S_{Gal}) y la estructura parcial de $Gal(\mathscr{H})$ se expresa por medio un homomorfismo parcial del tipo g. En este caso, es parcial debido a que S_{Gal} sólo es una sub-estructura de $Gal(\mathscr{H})$, en el sentido de que algunas relaciones (pero sólo algunas) son isomorfas. En términos conjuntistas, una subfamilia de relaciones R_1 que se sabe se satisfacen en $Gal(\mathscr{H})$ resultan ser relaciones R_2 que se sabe no se satisfacen en S_{Gal}. Estas relaciones corresponden a los vectores que no son invariantes bajo operadores unitarios en el espacio de Hilbert D'_m.

Ahora bien, desde el punto de vista de la *MCU*, la extensión de cualquier grupo de simetría conexo admite una *Representación Ordinaria*, sin que sus implicaciones empíricas se vean afectadas. Como bien ya se dijo, esto se puede hacer al calcular la *Extensión Central Maximal* ($\widetilde{Gal}$). Por lo tanto, se puede concluir que la diferencia entre el grupo original y su homólogo extendido no es empíricamente significativa, implicando con ello, que la estructura adicional del grupo extendido $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$ es superflua en el sentido de que permite la descripción de estados que no tienen una contraparte empírica.

No obstante, contrariamente a lo que sucede en el dominio de la *MCU*, se sabe que con el advenimiento de la *RE*, los estados en superposición de masas resultan ser físicamente significativos, ó bien, empíricamente relevantes, en el límite de velocidades bajas. Por esta razón, lo que antes se consideró *Estructura Matemática Superflua* desde el punto de vista de la *MCU*, adquiere un significado relevante desde el punto de vista de la *MCNR* que es, después de todo, la teoría cuántica que se obtiene de la *RE* en el límite clásico de velocidades bajas. Esta transición se puede representar por medio del meta-lenguaje de *Estructuras Parciales*. En efecto, la estructura parcial que corresponde a la *MCU* puede expresarse (extensionalmente, rigurosamente) de la siguiente manera:

$$S_{\widetilde{Gal}} = \left\langle D'_{\widetilde{Gal}}, R'_{(\widetilde{Gal})\,i}, f'_{(\widetilde{Gal})\,j}, a'_{(Gal)\,k} \right\rangle_{i\in\mathbb{I}, j\in J, k\in K}, \quad \text{tal que } \widetilde{Gal} < n.$$

donde $D'_{\widetilde{Gal}}$ son las cantidades físicas cuánticas que son invariantes bajo la familia de operadores unitarios $R'_{(\widetilde{Gal})\,i}$. Esto se codifica de forma análoga al caso anterior por medio de los mapeos g.

[116] La invarianza empírica (que no es lo mismo que invarianza física, como bien sucede al adoptar diferentes interpretaciones de la *MCU*), se interpreta de acuerdo a si dichos vectores son parte del mismo rayo en el espacio de Hilbert, es decir, si forman una clase de equivalencia de vectores que difieren por transformaciones unitarias. Esto debido a que las predicciones de esta teoría se obtienen mediante distribuciones de probabilidad de la forma $|\Psi|^2$.

Desde el punto de vista de la *MCU*, es posible identificar *Estructura Matemática Superflua* en $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$. Esto se traduce en términos conjuntistas al incorporar relaciones a'_{mk} dentro de la estructura parcial que corresponde a $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$. De esta forma, existe un homomorfismo parcial h, que se define entre la estructura parcial de $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$ y la de S_{Gal}, y que codifica la presencia de relaciones adicionales a'_{mk} (dentro de la estructura parcial de $\widetilde{Gal}(\mathscr{H})$), que resultan ser relaciones R_3 que no se sabe si se satisfacen (o no se satisfacen) en S_{Gal}. Pero cuando la *RE* aparece en la escena, la *Estructura Matemática Superflua* a'_{mk} adquiere relevancia en cuanto a que se reconoce su contraparte empírica. En este caso, a'_{mk} resultan ser relaciones R_1 que se sabe se satisfacen en la estructura parcial de la *MCNR*, por lo que de ser un homomorfismo parcial, g se convierte en un homomorfismo total. Así mismo, la traspaso parcial de estructura entre S_{Gal} y la estructura parcial de *NRQM* se puede expresar por medio de un homomorfismo parcial del tipo h, debido a que tanto R_1 como R_2 no permanecen igual bajo dicho mapeo.

Finalmente, se tiene un análisis detallado de algunos aspectos importantes en relación al cambio teórico, particularmente acerca de la *Estructura Matemática Superflua* asociada a $\widetilde{Gal}$, y a las propiedades estructurales de la *Doble Cubierta*. Esto permite reconocer la viabilidad y utilidad de este tipo de estructura en las actividades de la ciencia, en el sentido de que con el advenimiento de nuevas evidencias (la *RE*) es posible que elementos matemáticos que nunca tuvieron una interpretación física, ó bien, una contraparte empírica (estados en superposición de masas), resulten ser parte de la estructura que subyace a nuevas teorías físicas.

12. Conclusiones en Torno a la Caracterización

Entonces regresemos a la pregunta de Bob, ¿Qué es y cómo es el mundo externo? A esta pregunta, el *REO* tiene una respuesta: existen buenas razones para creer parcialmente en la realidad de una estructura que, en conjunto, comparte tanto el formalismo de la *MC*, la *MCU*, y la *RE*. Ante esta posibilidad, Alicia preguntaría: ¿Qué es y cual es la estructura del mundo externo? Hasta aquí parece que dicha estructura es (bajo una representación que alude a una correspondencia de verdad parcial) un conjunto de grupos abstractos y Representaciones. Específicamente un subgrupo (*SU(2)*) del *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* (salvo homomorfismos y contracciones de grupo), y sus respectivas Representaciones. Este último debe su aparición a una caracterización particular del *REO* en el que aspectos metafísicos, semánticos y epistemológicos se entrelazan de una manera precisa. En primer lugar, se ha asumido el carácter estructural del mundo externo. En segundo lugar, se ha demostrado que existe una estructura matemática común que comparten los formalismos de la *MC*, la *MCU*, y la *RE*, y que satisface condiciones de claridad y adecuación empírica. En lo que respecta a la primera condición, se ha justificado el carácter estructural del lenguaje (teoría de grupos y sus Representaciones) con el que se presenta dicha estructura matemática. En relación con el segundo criterio, el programa de Wigner y Weyl ha servido para corroborar que las leyes, las ecuaciones de evolución, y las predicciones asociadas a estas teorías se han derivado de esta estructura en términos de sus Representaciones. Finalmente, en relación a la confirmación de las hipótesis metafísicas concernientes al *REO*, se ha procedido a investigar si la estructura que se ha identificado satisface la condición de unificación y continuidad, para dar una respuesta a problemas epistemológicos que han prevalecido en el seno de las tesis realistas convencionales. Esto se ha hecho por medio de un meta-lenguaje conocido como *Estructuras Parciales*, que tiene su origen y fundamento en una tesis filosófica de tintes pragmatistas. Tomando en cuenta este aspecto, se ha demostrado la posibilidad de articular una tesis filosófica donde confluyen el pragmatismo epistemológico de Peirce y la Metafísica especulativa de Whitehead, y en la que el nuevo perfil del *REO* encuentra una forma más razonable y menos radical de interpretarse. Para ello, se han hecho algunas modificaciones a la caracterización mínima del *REO* introduciendo nociones como el de verdad parcial.

A manera de conclusión, no habría que olvidar que el intento de Bob para legitimar la labor de la Metafísica en el seno de las discusiones filosóficas relativas a la ciencia encuentra un lugar predominante. Sobre todo porque no sólo resulta ser una herramienta imprescindible para aclarar aspectos concernientes al cuerpo teórico de las teorías, sino porque también desempeña un papel significativo en las investigaciones y actividades científicas más comunes. A este respecto, Alicia y Bob pueden continuar conversando, esperando llegar a un acuerdo que permita elaborar nuevos esquemas fructíferos de pensamiento en el que la Metafísica y la Filosofía de la Ciencia encuentren un punto de convergencia, como bien es el caso del *REO* que se ha caracterizado minuciosamente en las secciones anteriores. Ahora bien, para terminar esta parte creo conveniente desplegar de forma explícita dicha caracterización:

(1) *La dimensión metafísica*: El mundo es *parcialmente* una estructura independiente de la cognición humana *que es investigado por la Mecánica Clásica, la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial*.

(2) *La dimensión semántica*: La estructura de un mundo consistente con las observaciones (no necesariamente el real) se representa (por medio de una correspondencia tarskiana de verdad) mediante un formalismo matemático, específicamente, un subgrupo de Lie homomorfo al grupo simpléctico inhomogéneo y sus Representaciones de Lie, que es común al instrumental teórico que subyace a la *Mecánica Clásica*, la *Mecánica Cuántica* y la *Relatividad Especial*.

(3) *La dimensión epistémica*: Las proposiciones que constituyen a dicho formalismo son *parcialmente* verdaderas y refieren *parcialmente* al mundo real.

Parte IV

En búsqueda de una justificación

13. Realismo Estructural en las Interpretaciones Bohmianas

13.1. Antecedentes a la Teoría Cuántica Bohmiana

Los antecedentes de la *TCB* se remontan hasta hace más de tres siglos, cuando el sistema mecánico newtoniano[117] dominaba las esferas científicas de la época. En relación al estudio de la óptica y los fenómenos de la luz, *La Óptica Geométrica*[118] tuvo gran relevancia gracias al poder predictivo y unificador que había heredado del sistema mecánico newtoniano. No obstante, con el advenimiento de la teoría ondulatoria de la luz, las deficiencias de este sistema comenzaron a apreciarse, en parte porque los fenómenos de difracción visibles en ciertos experimentos eran incompatibles con una interpretación corpuscular. De este modo, no fue sino hasta dos siglos después que Lagrange y Hamilton desarrollaron una nueva formulación de la teoría newtoniana que incorporó al electromagnetismo dentro de de su estructura conceptual. A esta teoría unificada es lo que hoy en día se conoce como *Mecánica Clásica*. A este respecto, Hamilton estaba convencido de que había que considerar a la óptica geométrica como un caso particular de la teoría electromagnética que fuera válida en dominios restringidos. Con este propósito en mente, Hamilton construyó un procedimiento para derivar la primera de la segunda, conocido hoy en día como la *Aproximación de la Eikonal* [Arnold, 1989, Ch.1]. Por esta razón, la óptica geométrica es una aproximación válida de la teoría electromagnética de la luz únicamente cuando las distancias características en que cambian las propiedades ópticas del medio son grandes comparadas con la longitud de onda de la luz. Es posible demostrar que, tomando una aproximación a las soluciones de las ecuaciones de Maxwell (con longitud de onda pequeña), se obtiene la ecuación de la Eikonal, que es la ley que gobierna a la óptica geométrica [Arnold, 1989, Ch.1]. Posteriormente, Hamilton también se dio cuenta de que la ecuación de la Eikonal no es nada más y nada menos que la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema de partículas. Es decir, los rayos de un sistema óptico en la aproximación de longitud de onda pequeña y las trayectorias de una partícula de masa unitaria (en el potencial correspondiente y para energía total nula), son las mismas curvas, pues están determinadas por las mismas ecuaciones y procedimientos matemáticos [De Gosson, 2001, p.94]. Este resultado importante condujo a Hamilton a preguntarse por la existencia de una ecuación de ondas de materia, de tal manera que su aproximación (por medio de longitudes de onda pequeñas) resultara, en general, equivalente a la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema mecánico. No obstante, no pudo llegar a una conclusión satisfactoria, en parte, debido a la falta de una evidencia que pudiera permitir la descripción adecuada de un sistema mecánico en términos ondulatorios. Pero como bien se sabe hoy en día, no fue sino hasta la primera

[117] Como bien ya se dijo, este sistema tiene una visión corpuscular de la materia cuyo movimiento es gobernado por las leyes de Newton.

[118] La Óptica Geométrica estudia las trayectorias de los rayos de luz cuando viajan en un medio óptico. Supone que la luz son partículas puntuales que viajan en línea recta.

mitad del siglo veinte que la ciencia dio un giro considerable. Con el advenimiento de nuevos experimentos que cimbraron la evidencia del comportamiento ondulatorio de la materia en dominios microscópicos, aparecieron las primeras formulaciones matemáticas de la *MCU*, la cual no tenía correspondencia conceptual alguna con la Física que le había antecedido. Es decir, una teoría mecánica de movimiento en este dominio parecía teóricamente imposible. Sin embargo, no fue hasta que aparecieron los trabajos de Louis de Broglie [De Broglie, 1927], y posteriormente David Bohm [Bohm, 1952a,b], cuando el proyecto elucidado por Hamilton hace aproximadamente dos siglos se concretó en el contenido de una teoría, que hoy en día se conoce como *Teoría Cuántica Bohmiana* (*TCB*).

13.2. Teoría e Interpretación: el Realismo Bohmiano

El primer indicio que se tiene de una teoría similar a la *TCB* se le adjudica a Louis de Broglie, en ese entonces conocida como la teoría *Onda-Piloto* de la *MCU* [De Broglie, 1927]. Desafortunadamente, algunas razones históricas propiciaron que esta teoría no tuviera la relevancia esperada en los círculos científicos dominantes de la época. No fue sino hasta que David Bohm publicó sus artículos seminales [Bohm, 1952a,b], que esta teoría se formuló de forma más rigurosa y sistemática, en parte por su relevancia en el contexto de un debate en torno a los problemas conceptuales que se habían fundado con el auge de la *MCU*, en particular, la posibilidad de construir una teoría de variables ocultas[119].

Por razones que competen a su estructura conceptual y que va más allá de su dimensión fenomenológica, se dice que la *TCB* es una de múltiples “interpretaciones” existentes de la *MCU*. De ser así, entonces se tendría que trazar una distinción entre una “interpretación” de este tipo y la *MCE*, con todos los elementos que la caracterizan como *teoría*. Sin embargo, debido a que la teoría Bohmiana difiere de la teoría estándar en cuanto a sus aspectos semánticos pero también sintácticos, no hay razones suficientes para creer que este es el caso. Por ello, parece más razonable asumir que la propuesta Bohmiana no es una interpretación de la *MCE*, sino que es una teoría diferente e independiente, lo que incita a determinar algunos criterios que la caractericen y la individualicen. Con esta finalidad en mente, es importante tomar en cuenta las siguientes observaciones:

(1) *La individuación*: En relación a su individuación, es importante notar que la *TCB* introduce nuevas variables independientes (posiciones) y una nueva ecuación diferencial (ecuación guía). Es decir, aunque las ecuaciones diferenciales que se definen en la *MCE* no sufren ninguna modificación, la *TCB* incorpora otra ecuación en su formulación[120].

[119]Se dice que estas variables son *ocultas* debido a que no aparecen en las predicciones estadísticas de la *MCE*. Su importancia radica en que permiten hacer una descripción individual de los sistemas cuánticos más allá de su comportamiento colectivo. Una discusión acerca del significado de las variables ocultas se puede encontrar en [Jammer, 1974].

[120]El lector que tenga algún conocimiento respecto al formalismo Bohmiano, podrá advertir que el estado del sistema se define mediante la función de onda del sistema y mediante un conjunto de curvas definidas en el espacio físico tridimensional. Así mismo, la dinámica de la teoría se determina por medio de la ecuación de Schrödinger y la ‘ecuación guía’, las cuales describen la evolución temporal de la función de onda y las curvas, respectivamente.

(2) *El contexto filosófico*: En segunda instancia, cualquier análisis conceptual que tiene como propósito elucidar una interpretación de un cuerpo teórico, debe ser explícito con respecto a las bases y suposiciones filosóficas que la fundamentan. En este sentido, la incorporación de una ontología compatible con el formalismo de la teoría es consecuencia inmediata de suponer una tesis realista bajo los lineamientos de una concepción semántica de teorías.

Una consecuencia que se deriva de ambas observaciones es que, a diferencia de lo que se dice en algunas fuentes de la literatura y apelando a las propuestas que se estudiarán en este trabajo, la *TCB* es una *teoría* empíricamente equivalente pero distinta a la *MCE*. Este supuesto tiene sentido desde la visión semántica de teorías en el contexto de una tesis realista. Esto debido a que la teoría y su interpretación difieren, en cuanto a que la primera comprende todos los modelos que satisfacen un formalismo en común, y la segunda refiere a una correspondencia de verdad entre algunos de estos modelos y el mundo real. Desde esta perspectiva, tanto la *MCE* como la *TCB*, son teorías independientes que poseen un formalismo que las identifica, pero que de igual modo, (al menos para el caso de la *TCB*) permiten una variedad de interpretaciones.
Ahora bien, creo importante precisar la manera en que esta teoría se define, se caracteriza y se individualiza. Con este propósito en mente, se tratará de hacer una caracterización mínima que identifique a la *TCB* y a todas sus interpretaciones existentes. Posteriormente, se evaluará la legitimidad de una tesis realista con respecto a los objetos ontológicos que se postulan y a los que el formalismo refiere.

13.2.1. La Individuación de la Teoría Cuántica Bohmiana

Se sabe que la *TCB* es compatible con diferentes interpretaciones, cada una de las cuales postula un conjunto de objetos ontológicos que especifican el estado óntico del sistema Bohmiano. Estas incluyen a la *Interpretación Original de Bohm* (*TOB*) [Bohm, 1952a,b], a la *Mecánica Bohmiana* (*MB*) [Dürr et al., 1992], y a la *Interpretación de Valentini* (*VAL*) [Valentini, 1992]. Por ejemplo, en [Valentini, 1992] se niega el carácter fundamental del espacio físico tridimensional donde viven las "partículas" Bohmianas. En este esquema, estos corpúsculos resultan ser manifestaciones reales y emergentes de un espacio más fundamental que corresponde a un espacio de $3N$ dimensiones, donde N es el número de estas "partículas". Por el contrario, [Dürr et al., 1992] niega el estatus fundamental de este último al elaborar una descripción únicamente en términos de partículas puntuales que se mueven en un espacio tridimensional fundamental[121].
Ahora bien, a pesar de que existen interpretaciones muy diferentes, uno desearía identificar una versión mínima de la teoría, quizá en parte por motivos de simplicidad y sistematización. Es decir, un conjunto de elementos formales e interpretativos que todas las interpretaciones Bohmianas tienen en común y que contienen el mínimo de requisitos para describir satisfactoriamente a la teoría. Uno pensaría que no es posible determinar este conjunto de requisitos debido a la carga semántica y las diferencias interpretativas que infestan a este tipo de teorías. Afortunadamente, se puede proponer una caracterización en este sentido, si se consideran las siguientes observaciones:
De acuerdo con la distinción que se ha establecido entre una teoría y una interpretación, se puede advertir

[121] El lector no debe estar familiarizado con estas interpretaciones. Más adelante, se dará un análisis detallado de algunas de ellas.

que los elementos que tienen en común todas las teorías Bohmianas no son sintáctico-formales, sino que contienen elementos semánticos que ineludiblemente desempeñan un papel significativo para explicar el éxito predictivo de la teoría. Siguiendo con una distinción entre afirmaciones acerca de entidades inobservables y afirmaciones metafísicas (en función del criterio de dispensabilidad de Psillos en la sección (7.2.4)), se puede identificar un conjunto de modelos matemáticos asociados a la teoría que refieren a algunas propiedades propiamente atribuidas a un sistema Bohmiano, como es el caso de la posición. Esto se puede realizar sin establecer afirmaciones metafísicas que no desempeñan un rol propiamente explicativo frente al éxito predictivo de la teoría, como es el caso de las interpretaciones antes mencionadas, que difieren en tanto que una asume la existencia de muchas partículas tridimensionales, y la otra la existencia de una partícula multidimensional. En este sentido, el denominador común que comparten todas las interpretaciones Bohmianas es, en realidad, un híbrido entre la estructura axiomática formal y elementos interpretativos, que permiten explicar, con el menor número de compromisos metafísicos, el éxito predictivo de la *MCU*, si se asume que esta última es un candidato razonable para defender una actitud realista.

Tomando en cuenta estas consideraciones, en seguida definiré una versión mínima de la *TCB* mediante tres premisas que contienen, en esencia, la estructura sintáctica y semántica necesaria que permite explicar su éxito predictivo. Para ello, se tomará en cuenta una formulación en términos de modelos ontológicos[122]:

(1) El estado óntico del sistema comprende a una curva en el espacio de configuración, $\mathbf{Q}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_N(t)) \in \mathbb{R}^{3N}$, definida por un sistema de coordenadas parametrizadas $\{\mathbf{x}_j(t) \in \mathbb{R}^3 | j = 1, \cdots, N\}$[123], y una 'función de onda'[124] definida en dicho espacio $\Psi : L^2(R^{3N}) \to \mathbb{R}$[125], cuyo dominio comprende $(\mathbf{q}(t), t)$. El estado se denota como $(\Psi(\mathbf{q}, t), \mathbf{Q}(t))$.

(2) La función de onda $\Psi(\mathbf{q}(t), t)$ es una solución a la ecuación de Schrödinger, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden en el parámetro t y de segundo orden en las coordenadas:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi\,(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t} = -\left(\sum_i^N \frac{\hbar}{2m} \nabla_i^2 - V(\mathbf{q}(t), t) \right) \Psi(\mathbf{q}(t), t) \tag{13.1}$$

Donde ∇ es el operador gradiente, V es un campo vectorial real en el espacio de configuración y tanto m como $\hbar$ son la masa y la constante de Planck dividida por 2π. La solución completa de esta ecuación se determina una vez que se especifica la condición inicial $\Psi(\mathbf{q}, t_0)$ cuando $t = t_0$.

(3) La trayectoria de la curva tridimensional $\mathbf{x}_i(t)$ es solución del siguiente sistema de N ecuaciones

[122] La notación que se usa es la siguiente: $\mathbf{Q}(t)$ con mayúsculas refiere a variables evaluadas en el espacio de configuración; $\mathbf{q}(t)$ con minúsculas refiere a variables arbitrarias sin evaluar en el espacio de configuración; $\mathbf{x_i}(t)$ es una variable evaluada en el espacio tridimensional; y $\mathbf{q_i}(t)$ es una variable arbitraria sin evaluar en el espacio tridimensional.

[123] Aquí se asume que un sistema de coordenadas en el espacio de configuración son N funciones parametrizadas de puntos en $\mathbb{R}^3$ a un solo punto $\mathbf{q}$ de este espacio, o bien, $3N$ funciones de los reales al mismo espacio.

[124] En este trabajo, uno se referirá a la 'función de onda' como un elemento puramente matemático, evitando alguna interpretación definida.

[125] $L^2(R^{3N})$ es el conjunto de todas las funciones complejas doble-integrables sobre el espacio de configuración. Se puede demostrar que dicho conjunto es un espacio de Hilbert.

diferenciales simultáneas:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Q}, t) = \frac{\hbar}{m}\left(\frac{\Psi^*\nabla_i\Psi}{\Psi^*\Phi}\right)_{\mathbf{q_j}=\mathbf{x}_j(t)} \tag{13.2}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se tiene que especificar la condición inicial $\mathbf{x}_{0i} = \mathbf{x}_i(t_0)$ de todas las curvas. El vector inicial $\dot{\mathbf{x}}_i(\mathbf{q}, t_0)$ se fija con $\Psi_0 = \Psi(\mathbf{q}, t_0)$.

Respecto a estas proposiciones, es importante tener en cuenta la siguiente observación: Al tiempo t_0 es posible definir una función real $P : L \rightarrow [0, 1]$ (donde L, es el álgebra de Borel del espacio de configuración R^{3N})[126], que al evaluarla en $\mathbf{q} \in R^{3N}$ se obtiene:

$$|\Psi|^2(\mathbf{q}, t_0) \tag{13.3}$$

Esta ecuación es lo que se conoce como *El Postulado Estadístico*. En el contexto de las interpretaciones Bohmianas, su significado guarda estrecha relación con una noción de probabilidad que corresponde al estado epistémico del sistema.

Ahora bien, aunque haya sido posible identificar un conjunto de elementos formales e interpretativos que contienen "el mínimo de requisitos" para individualizar a la *TCB*, no hay que olvidar que este procedimiento tiene sentido si se asume desde un principio una tesis realista, bajo la cual sea posible postular la existencia de un conjunto de objetos y propiedades que constituyen a la ontología de esta teoría particular. No obstante, la legitimidad de esta tesis filosófica en este contexto no ha sido analizada con rigor. A este respecto, faltaría aclarar el rol que desempeña la versión mínima de la *TCB* en relación a la tesis realista que se ha caracterizado aquí.

13.2.2. El Contexto Filosófico de las Interpretaciones Bohmianas

A primera vista, parece que una tesis realista con respecto a esta versión mínima no se escapa de algunos problemas[127]. Tomando en cuenta las consideraciones filosóficas que se trataron en el preámbulo teórico de este trabajo, es un hecho que no es posible obtener una imagen clara y precisa del mundo al que refiere esta teoría sin incluir algunas afirmaciones metafísicas con respecto a esta versión mínima. Siguiendo con un realismo de corte metafísico y dejando de lado versiones selectivas, las afirmaciones metafísicas respecto a esta versión mínima son imprescindibles si lo que se quiere es generar un entendimiento más perspicuo, a pesar de que no desempeñen un rol explicativo frente al éxito predictivo de la teoría. De este modo, aunque sea posible construir una coraza teórica mínima que permita identificar a una teoría en particular, un realista con respecto a esta última necesita de afirmaciones metafísicas adicionales para poder garantizar un entendimiento propio del mundo al que refiere. Esto tiene directa relación con las categorías semánticas y epistemológicas que caracterizan al realismo estándar que se ha definido aquí. En efecto, en tanto que esta estructura mínima permite explicar el éxito predictivo de la teoría en cuestión, debe de ser lo suficientemente clara y precisa acerca del dominio que investiga, es decir, debe satisfacer la condición semántica

[126] La colección de todos los subespacios del espacio de configuración que a través de operaciones específicas satisfacen los axiomas de Kolmogorov. Más adelante se definen estos axiomas. Por el momento véase en [Dickson, 1998, p.4 y pp.113-114].

[127] Por tesis realista, aquí me referiré al realismo estándar de objetos y propiedades.

de la claridad. Así mismo, debe garantizar una correspondencia de verdad con el mundo, es decir, debe satisfacer su componente epistemológico. Pero ninguna de estas dos condiciones se satisfacen sin la presencia de afirmaciones metafísicas que puedan servir de soporte explicativo. Por lo tanto, si se asume una tesis realista con respecto a la *TCB*, es posible evaluar los aspectos semánticos y epistemológicos de todas sus interpretaciones, siempre y cuando estas últimas contengan la carga metafísica necesaria que permita la explicación de su éxito predictivo, pero también un entendimiento del mundo que representa. Por esta razón, si se quiere respaldar una tesis realista en este contexto particular, no es suficiente apelar a su versión mínima, sino que es importante evaluar directamente a las interpretaciones Bohmianas que contengan una carga metafísica lo suficientemente robusta para poder entender la imagen del mundo al que refieren. Con estas observaciones en mente, se pretende hacer lo siguiente:
Se desea elaborar un análisis filosófico para investigar y evaluar una actitud realista respecto a la *TCB*. Con esta finalidad, se procederá a caracterizar y revisar las interpretaciones Bohmianas en términos de las categorías metafísicas, semánticas y epistemológicas que caracterizan al realismo científico estándar. Por motivos meramente prácticos, se evitará una exposición detallada de estas interpretaciones y el lector tendrá que remitirse a las referencias que se mostrarán en el texto. La conclusión no será positiva al mostrar que la dimensión epistemológica del realismo presenta algunos problemas inevitables en este contexto: la sub-determinación metafísica.

13.3. El Mundo Para el Realista Bohmiano

En lo que respecta a su dimensión metafísica, un desafío de naturaleza 'idealista' se presenta ante los ojos del realista Bohmiano: si es posible elucidar un mundo independiente de la percepción humana que pueda ser, en principio, investigado por la *MCU*. Aunque una tesis idealista es, en principio, irrefutable, nótese que cualquier interpretación Bohmiana sugiere implícitamente un compromiso ontológico con respecto a substancias primarias (objetos) y substancias secundarias (propiedades), las cuales se incorporan dentro de su estructura conceptual. En efecto, tomando en cuenta que esta teoría dispone de una variedad de interpretaciones, es posible afirmar que, más allá del contenido semántico del formalismo que tienen en común, todas ellas presuponen la existencia de objetos y propiedades (partículas o/y ondas o/y campos) de acuerdo a características metafísicas que definen con rigor. Aunque por el momento no pretendo hablar acerca de estas características, es posible sugerir que estas últimas legitiman una tesis realista respecto a un mundo de objetos y propiedades Bohmianas. Esto debido a que no es posible (y no tiene sentido) esbozar una interpretación del mundo en función de esta teoría si su constitución depende estrictamente del los procesos cognitivos. De este modo, dado que cualquier interpretación Bohmiana especifica una ontología, o bien, determina el estado óntico del sistema, se puede concluir que, gracias al espectro interpretativo disponible, es posible asumir de manera implícita la independencia absoluta del mundo de objetos y propiedades Bohmianas con respecto la cognición humana.

13.4. La Semántica del Realista Bohmiano

Un desafío se presenta ante los ojos del realista Bohmiano: i) si es posible determinar una correspondencia unívoca entre el contenido formal de la *TCB* y el mundo cuántico que se pretende esbozar; y ii) si las interpretaciones disponibles son claras y empíricamente adecuadas, independientemente de su veracidad. Es decir, que sean claras y precisas con respecto a lo que dicen del mundo que supuestamente representan, y por otro lado, que puedan reproducir los fenómenos cuánticos que se observan en los experimentos. Para ello, se apelará directamente a las interpretaciones de la teoría para determinar con precisión si sus elementos ontológicos satisfacen dichos criterios.

Como bien se mencionó en el preámbulo teórico de este trabajo, el problema de la medición de la *MCE* es, en realidad, problemático si se asume, al menos, el componente metafísico y semántico del realismo. En respuesta a este hecho, se demostró que es posible introducir variables adicionales al estado del sistema, de tal forma que una medición pueda ser descrita como cualquier interacción física mediante los términos teóricos de la teoría. Así mismo, se concluyó que este nuevo esquema permite garantizar la adecuación empírica de la *MCU* mediante algunos términos teóricos que representan, de forma literal y fidedigna, a las propiedades que se miden. El esquema que se tiene en mente corresponde a la *TCB*, cuyo origen y fundamento se detalló en páginas anteriores. En esta teoría, el estado del sistema consta de dos elementos: la función de onda y la posición de las partículas en el espacio de configuración. El primero evoluciona de manera determinista y unitaria mediante la ecuación de Schrödinger, mientras que el segundo evoluciona de acuerdo con la ecuación guía. En un contexto de medición, dado que el sistema completo comprende tanto al dispositivo experimental como al objeto que se estudia, la función de onda total (que corresponde a la conjunción de estos subsistemas) evoluciona a una superposición con soporte aproximadamente disjunto. Sin embargo, dado que las partículas Bohmianas siempre tienen posiciones bien definidas, el resultado de cualquier medición corresponde al i-ésimo eigen-valor del operador en cuestión, al existir una correlación entre la posición de las partículas del dispositivo experimental y el soporte del i-ésimo paquete que corresponde a un eigen-estado del operador. En este sentido, al momento de medir una propiedad del sistema y gracias a un fenómeno de decoherencia, la posición de las partículas del dispositivo experimental determinan el eigen-estado o el paquete asociado al operador que representa dicha propiedad. Ahora bien, uno podría suponer que todos los operadores, con excepción de la posición, refieren a propiedades reales, como es el caso de la *TOB* (ver en [Holland, 1995, P.91] y [Solé, 2010, Ch.4]). En caso contrario, también uno podría suponer que no refieren como es el caso de la *MB* [Dürr et al., 1996, 2004], ó bien, de la *VAL* [Valentini, 1992]. De cualquier manera, un aspecto en común que todas las interpretaciones Bohmianas comparten es la contextualidad de las mediciones. En efecto, una medición de las propiedades atribuidas a las partículas Bohmianas no revela el valor preexistente de las mismas. Sin embargo, esta característica de la teoría admite una excepción significativa: la posición [Solé, 2010, Ch.4]. En este sentido, la posición de las partículas posee un estatus privilegiado debido a que una medición de esta propiedad, a diferencia de cualquier otra, revela invariablemente el valor de la misma. En otras palabras, el operador de posición siempre será un elemento teórico que refiere de manera literal a la posición objetiva de las partículas Boh-

mianas, con independencia de la interpretación que se le adjudique a estas últimas. De este modo, gracias al estatus privilegiado de la posición en cualquier interpretación Bohmiana, es posible representar literalmente a esta propiedad por medio de un operador hermitiano, cuyos valores de la primera corresponden a los eigen-valores del segundo mediante la regla eigenvalor-eigenvector. A decir verdad, esta representación garantiza la adecuación empírica de la teoría (al disolver el problema de la medición), además de que su interpretación (como propiedad del sistema) es clara y coherente con respecto a las propiedades matemáticas del cuerpo teórico de la teoría (las propiedades de los operadores hermitianos). Por estas razones, es pertinente concluir que una actitud realista, al menos con respecto a su dimensión semántica, es razonable.
Ahora bien, uno podría objetar que cada interpretación se compromete con distintos elementos ontológicos, lo que implicaría dificultades para evaluar de forma única y satisfactoria el componente semántico del realismo. Por ejemplo, la *TOB* asume un dualismo ontológico que tiene lugar tanto en el espacio físico como en el espacio de configuración, mientras que la *MB* y la *VAL* son monistas en relación con el carácter fundamental del primero y el segundo, respectivamente. No obstante, dado que el componente semántico del realismo no se compromete con la veracidad de las proposiciones teóricas, todas las interpretaciones que se han bosquejado hasta el momento permiten contar una historia literal del mundo observable e inobservable, sin importar si el marco interpretativo en consideración es el correcto.
En conclusión, al haber asumido la existencia de un mundo independiente del observador y al querer comprender su estructura interna, parece que todas las interpretaciones Bohmianas, dado que su formulación lo permite, introduce nuevas variables que garantizan la realización de una lectura literal de lo que las teorías bohmianas refieren. Esto implica que la *TCB* constituye un caso ejemplar, con la que es posible y razonable defender una tesis realista, al menos desde una noción más débil caracterizada únicamente por el componente metafísico y semántico[128]. Sin embargo, es importante recordar que el realismo científico definido aquí, aparte de sus componentes metafísico y semántico, también se caracteriza por satisfacer su componente epistemológico. Como se verá a continuación, una tesis realista también demanda que la interpretación del mundo cuántico, que por lo visto es clara y empíricamente adecuada, sea a la vez aproximadamente correcta. Sólo de este modo, la introducción de un elemento de verdad al esquema Bohmiano permite seguir el camino optimista del realista.

13.5. El Acceso Epistémico del Realista Bohmiano

Por lo visto arriba, la versión mínima de la *TCB* (13.2.1) promete ser un candidato convincente para defender una tesis realista (al menos desde su componente metafísico y semántico), debido a que goza de algunas virtudes interpretativas, como es el caso de su claridad y adecuación empírica. No obstante, aunque se haya identificado una teoría con estas características, un realista respecto a esta última también busca establecer una correspondencia de verdad entre sus términos teóricos y el mundo real, es decir, afirma que una coordinación de estos términos refiere fidedignamente al mundo. Ahora bien, parece que una tesis realista

[128]Es importante recalcar que, aunque todas las interpretaciones Bohmianas son buenos candidatos para considerarlas realistas desde el punto de vista semántico, este atributo no se sigue necesariamente de cada una de ellas. Bien puede ser el caso de que dichas teorías sean interpretadas de forma distinta sin comprometer al Bohmiano con criterios realistas.

bajo estas circunstancias presupone una tesis muy ambiciosa y problemática. Esto no sólo debido a la presencia de una variedad de interpretaciones incompatibles entre sí, sino que, en virtud de su poder predictivo, la *TCB* esboza una imagen del mundo desde un dominio restringido y confinado a los fenómenos cuánticos. Por esta razón, una actitud realista con respecto a la *TCB* depende de algunas condiciones que se establecen a partir de un análisis epistemológico que concierne a la confirmación y la elección teórica. Estas condiciones son, como ya se dijo, la unificación y la continuidad inherentes al marco interpretativo en cuestión, los cuales permiten adoptar una tesis realista más razonable. De acuerdo con la discusión que se aborda en este trabajo, estas condiciones sugieren a su vez una salida al *PSD* y el problema derivado de la *MIP*. Ahora bien, dejando de lado los problemas a-posteriori del realismo científico, como es el caso de la *MIP*, se quiere abordar un análisis filosófico a priori con respecto al *PSD* que se presenta en la *TCB*. En efecto, dado la existencia de diferentes interpretaciones Bohmianas empíricamente equivalentes, parece inevitable usar algunos criterios de confirmación en víspera de la confrontación que existe entre sus ontologías evidentemente incompatibles. Así mismo, como esta tarea involucra aspectos que trascienden el ámbito empírico a-posteriori, es necesario evaluar cada interpretación en función de al menos tres virtudes epistemológicas, con el fin de establecer una distinción significativa entre ellas. Estas virtudes son: la *Viabilidad Predictiva*, el *Poder Explicativo*, y la *Simplicidad Sintáctica y Ontológica*. Desafortunadamente, después de realizar esta tarea se demostrará la ineficiencia de dichas virtudes como criterios de elección teórica. Este resultado permitirá articular una justificación a favor del *REO* que se caracteriza en este trabajo.

13.5.1. La Viabilidad Predictiva

Una de las virtudes epistemológicas que es posible identificar en el contexto de las interpretaciones Bohmianas corresponde a la viabilidad predictiva. Tanto la *TOB*, la *MB* y la *VAL* son interpretaciones de una teoría que es empíricamente equivalente a la *MCE*. Es decir, la *TCB*, en su versión mínima (13.2.1), es un conjunto de proposiciones que es indistinguible de la *MCE* en cuanto a las predicciones se refiere. Esto implica que cualquier interpretación que presuma ser más refinada será, después de todo, empíricamente indistinguible. Aquí conviene recordar que los términos teóricos inobservables que se expresan mediante la versión mínima de esta teoría únicamente corresponden al aparato teórico y metafísico que explica su éxito predictivo, por lo que cualquier refinamiento que se haga con respecto a su interpretación tendrá invariablemente el mismo poder predictivo. Tomando estas consideraciones en cuenta, es pertinente preguntarse acerca del origen y fundamento de esta equivalencia empírica. A continuación se presenta una revisión informal al respecto (ver en [Bohm, 1952b, Dürr et al., 1992, Goldstein, 2017]):

Considérese un sistema Bohmiano. Por definición, el estado del sistema comprende tanto a la función de onda asociada al sistema en su totalidad Ψ, como a la configuración $\mathbf{Q}$ de las partículas que lo componen. En principio, al fijar las condiciones iniciales del estado a un tiempo t_0, es decir, la función de onda inicial $\Psi(\mathbf{r}, t_0)$ y la configuración inicial $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t_0)$, es posible determinar su valor para cualquier tiempo $t \neq t_0$, por medio de las ecuaciones de evolución correspondientes (ver en (13.2.1)). Desafortunadamente, no es posible determinar la posición inicial precisa de cada una de las partículas que componen al sistema. Existe una limitación epistémica *de facto* que prohibe determinar dicha propiedad a no ser que la función de onda inicial $\Psi(\mathbf{r}, t_0)$ sufra una transformación, de tal manera que la dinámica asociada a las partículas resulte ser diferente a la que tenía en el estado inicial. Esta consecuencia inmediata de la teoría no presenta problemas en el ámbito predictivo si se construye una noción de probabilidad frecuentista que permita realizar predicciones mecánico-cuánticas. Esto se hace mediante la introducción de un estado epistémico compatible con la teoría a través de una distribución de probabilidad asociada a la configuración inicial de las partículas que componen al sistema. Bajo estas circunstancias, resulta que al fijar la función de onda inicial $\Psi(\mathbf{r}, t_0)$, la *TCB* predice a lo más la probabilidad de que las partículas del sistema se encuentren inicialmente en $\mathbf{Q}_0$ a un tiempo t_0, de acuerdo a una distribución de probabilidad equivalente a $|\Psi|^2$. Así mismo, todas las interpretaciones Bohmianas comparten el hecho de que una vez que se asume dicha distribución a un tiempo inicial t_0, la propiedad de equivarianza Bohmiana, íntimamente relacionada con la forma de sus ecuaciones de evolución, determina que dicha distribución se satisfaga para cualquier tiempo $t \neq t_0$. Es decir, una vez que se define una distribución de probabilidad asociada a la posición inicial de las partículas, cualquier predicción que se quiera realizar mediante la *TCB* en un tiempo posterior, determina, a lo más, la probabilidad de que las partículas del sistema se encuentren en $\mathbf{Q}$ a un tiempo t, de acuerdo a una distribución de probabilidad equivalente a $|\Psi|^2$. En consecuencia, al identificar esta distribución con la regla de Born, es posible concluir que las interpretaciones Bohmianas comparten el mismo poder predictivo de la que goza la *MCE*.

Ahora bien, aunque estas consideraciones están estrechamente vinculadas con aspectos que conciernen al ámbito predictivo, cualquier interpretación Bohmiana debería de ser muy clara con respecto al origen y significado que guarda esta distribución particular (por ejemplo, su relación precisa con la función de onda), y la causa asociada al desconocimiento de la posición inicial de las partículas. Afortunadamente, todas las interpretaciones Bohmianas dan una respuesta a estas cuestiones mediante diferentes estrategias, algunas de las cuales son más elaboradas que otras. Por ejemplo, aunque tanto la *TOB* como la *VAL* no justifican la interpretación probabilística y frecuentista del estado epistémico del sistema, elaboran un procedimiento operacional que permite establecer de forma clara y precisa su equivalencia empírica con la *MCE*. Por otro lado, la *MB* trata de hacer sentido de esta distribución mediante una distinción que existe entre la función de onda efectiva, propiamente definida en un subsistema restringido, y la función de onda universal, que es, en principio, la que determina la evolución del sistema total del universo Bohmiano. Una vez que se asume esta distinción, en la *MB* se elabora un procedimiento que, a grandes rasgos, explica la forma en que se obtiene una distribución de probabilidad frecuentista para el caso de cualquier predicción que se haga con respecto a un subsistema restringido (por ejemplo, cualquier subsistema controlado en un laboratorio), a partir de una distribución inicial asociada al universo en su totalidad (conocida como la *Hipótesis del Equilibrio Cuántico*). Para ello, pretende hacer noción de una distribución de probabilidad objetiva asociada a todas las partículas del universo, independientemente de una concepción epistémica, ó bien, objetiva en términos frecuentistas. A decir verdad, su argumento pretende dar una justificación a la limitación epistémica *de facto* que prohibe determinar la posición inicial de las partículas en cualquier subsistema por medio de un principio normativo que refiere al estado inicial del universo. En este sentido, el desconocimiento de

la posición de las partículas no se debe a la imprecisión de los experimentos efectuados sino a un hecho objetivo aunque probabilista que involucra algunas características reales del universo en su estado inicial.
Una vez que se ha determinado la equivalencia empírica de todas las interpretaciones Bohmianas, es importante advertir la existencia de algunas extensiones teóricas a la *TOB* y la *VAL*, las cuales involucran teorías más generales y fundamentales que gozan de predicciones hipotéticas adicionales, y por ende, pueden llegar a ser empíricamente diferentes a la *MCE* [Bohm, 1952a, 1953, Valentini, 1991, 1992]. A este respecto, en virtud de que las predicciones de cualquier interpretación Bohmiana son únicamente probabilísticas, cualquier extensión predictiva es posible si la distribución de probabilidad correspondiente es diferente a $|\Psi|^2$. Estas nuevas predicciones hipotéticas podrían tener su contraparte física mediante la descripción de nuevos fenómenos que no han sido observados. Por ejemplo, en ambas extensiones (que se denotarán como *TOB** y *VAL**), la discrepancia con las predicciones de la *TOB* y la *VAL* permitiría la determinación precisa de las posiciones de las partículas en dominios subcuánticos menos restrictivos con órdenes de magnitud más "finos" que 10^{-13} metros.
No obstante, estas extensiones incluyen tanto i) elementos formales como también ii) elementos interpretativos, lo que las distingue de la versión mínima de la *TCB* que se ha caracterizado al inicio de esta sección. En lo que concierne a los elementos formales (i), es posible demostrar una compatibilidad matemática entre la distribución de probabilidad de la *MCU* ($P = |\Psi|^2$), y la ecuación guía (con posibles términos adicionales cuya divergencia sea nula [Deotto & Ghirardi, 1998]), que invariablemente restringe la posibilidad de nuevas predicciones [Bohm, 1952a]. Dado que este resultado es estrictamente matemático, es posible demostrar que su violación involucra una definición de momento distinta $\mathbf{p}_i \neq \nabla_i S$. De esta manera, debido a que el formalismo asociado a las extensiones que tanto la *TOB** como la *VAL** proponen es diferente al original, existe una apertura al nivel de su formalismo no sólo en el ámbito de la predicción sino en el de la justificación y la elección teórica. Por otro lado, en lo que concierne a los elementos interpretativos (ii), es posible advertir la presencia de términos teóricos con un bagaje interpretativo que induce cierta novedad predictiva. Por ejemplo, la ontología de fuerzas y potenciales inherentes tanto en la *TOB** como en la *VAL**. En vista de estas observaciones, es pertinente hacer un análisis más detallado de las extensiones teóricas (*TOB** y *VAL**) y su relación con la *MB*, en términos de sus elementos formales e interpretativos como criterios de elección teórica.

13.5.2. Ruptura de la Sub-determinación: Viabilidad Predictiva

Hasta aquí es claro que todas las interpretaciones Bohmianas son empíricamente equivalentes (*TOB*, *MB*, *VAL*). Como bien ya se mencionó en secciones anteriores, su equivalencia empírica induce un problema de sub-determinación de las interpretaciones por la teoría que puede mermar los compromisos epistemológicos del realista Bohmiano. En esta coyuntura, se presenta la posibilidad de elegir y confirmar la veracidad de una interpretación Bohmiana en virtud de su viabilidad predictiva. En lo que respecta a la definición de este último concepto, se despliegan dos nociones que se observan en el contexto Bohmiano: la viabilidad predictiva del formalismo, ó bien, la viabilidad predictiva de sus compromisos metafísicos.

Como se verá a continuación, el despliegue de este concepto en dos nociones diferentes presupone la distinción entre proposiciones acerca de objetos inobservables y proposiciones acerca de entidades metafísicas, con un énfasis en el rol explicativo (en cuanto al éxito predictivo de la teoría) que desempeñan las primeras. En efecto, aunque en un contexto realista de corte selectivo debe de trazarse una línea clara entre el ámbito predictivo y el explicativo, ambas nociones de viabilidad predictiva presuponen la presencia de un formalismo que posee inevitablemente un bagaje interpretativo (en este caso la versión mínima 13.2.1). Después de todo, se sabe que la carga metafísica de esta versión mínima es suficientemente robusta para explicar el éxito predictivo que la teoría ha gozado hasta el día de hoy. Sin embargo, faltaría ver si esta versión mínima, ó bien, las presuposiciones metafísicas adicionales son las responsables de su poder predictivo *a posteriori*, es decir, si permiten cierta novedad predictiva en un futuro próximo. En torno a esta pregunta, en seguida se definen las dos nociones de viabilidad predictiva:

(i) *Viabilidad predictiva del formalismo.* Esta virtud epistemológica profesa la posibilidad de la 'versión mínima de una teoría' (usualmente identificada por medio de su formalismo) de generar nuevas predicciones sin cambios sustanciales en su estructura original. Esto no significa que su estructura sintáctica y formal tenga necesariamente relación directa con las predicciones, sino que puede ser el caso de que dicha estructura permita una interpretación mínima que tenga cierta viabilidad predictiva. En este sentido, esta virtud asienta la capacidad de la versión mínima de generar nuevas predicciones cuya estructura sintáctica tiene una posición privilegiada en el contexto de nuevas observaciones confirmatorias. Este concepto tiene su fundamento en una noción que se ha mencionado anteriormente en el contexto estructuralista, es decir, a la "plasticidad heurística", que enfatiza la continuidad de la estructura formal (ó bien el formalismo) que subyace a las teorías científicas más exitosas que han existido a lo largo de la historia de la ciencia [Saunders, 1993].

(ii) *Viabilidad predictiva de los compromisos metafísicos.* Esta virtud profesa, por el contrario, la posibilidad de incorporar compromisos metafísicos adicionales a la versión mínima de una teoría para generar nuevas predicciones. En este sentido, las proposiciones metafísicas tienen una posición privilegiada en la jerarquía que se tiene respecto a la novedad predictiva de la teoría. Análogamente, esto no significa que los compromisos metafísicos sean necesariamente los únicos elementos que inducen nuevas predicciones. Al contrario, existe la posibilidad de que algunas entidades metafísicas construyan diferentes formalismos que, a su vez, permitan nuevas predicciones.

Una vez que se han desplegado estas dos nociones de viabilidad predictiva, es momento de hacer una radiografía de las extensiones a las interpretaciones Bohmianas. Para ello, se pretende investigar si alguna de estas dos nociones pueden usarse como criterios de elección teórica. Una opción sería usar la viabilidad predictiva de su formalismo para privilegiar a ciertas interpretaciones gracias a su contenido matemático, mientras que otra opción sería usar sus aspectos ontológicos ó nomológicos para el mismo propósito. Se empezará por analizar la primera posibilidad.

A diferencia de lo que sucede en la *TOB* y la *VAL*, es claro que sus homólogos extendidos (*TOB** y *VAL**) son interpretaciones con cierto grado de viabilidad predictiva en lo que respecta a su formalismo. Esto se debe a que la estructura matemática inherente a estas dos extensiones, permite la elucidación de nuevas predicciones en un futuro. Por ejemplo, en ambos casos la violación a la igualdad $\mathbf{p}_i \neq \nabla_i S$ permite la hipotética elucidación de nuevas predicciones que, en algunos casos, permiten determinar la posición precisa de las partículas Bohmianas [Bohm, 1952a, Valentini, 1991]. Considérese primero a la *TOB**. Antes de analizar esta interpretación, conviene hacer una aclaración con respecto a su versión original. En efecto, la *TOB* emerge de una equivalencia matemática que existe entre la versión mínima de la *TCB* y una ecuación que dictamina la manera en que la función de onda "guía.[el] movimiento de las partículas, es decir, la *Segunda Ley de Newton Generalizada* [Bohm, 1952a, Holland, 1995]. Esta última se obtiene al hacer un cambio de variable en la ecuación de Schrödinger, que consiste en sustituir un campo vectorial de momento por el gradiente de un campo escalar (mediante el uso de la ecuación guía). Este cambio de variable permite elucidar una generalización de la segunda ley de Newton con un término adicional (el potencial cuántico), lo que implica que esta interpretación no trata únicamente con fuerzas del tipo newtoniano, sino con otro tipo de fuerzas que se determinan mediante la función de onda (que se interpreta como un campo físico multidimensional). Así mismo, gracias a la ecuación guía, la función de onda desempeña un rol fundamental debido a la "complicidad" que existe entre su fase y el movimiento de las partículas Bohmianas [Holland, 1995, Ch.3]. Ahora bien, a diferencia de su versión original, la *TOB** modifica la *Segunda Ley de Newton Generalizada* sin hacer cambios significativos en su interpretación. Es decir, análogamente a su versión original, la *TOB** también habla de fuerzas cuánticas que actúan sobre partículas tridimensionales, y que se generan por un campo cuántico multidimensional que tiene existencia independiente. Esto es posible, ya sea añadiendo un término a la *Segunda Ley de Newton Generalizada*, ó bien, expresando una "ecuación de Schrödinger generalizada"que involucra un término inhomogéneo [Bohm, 1952a, pp.178-179]. Estos términos contienen el germen de una nueva formulación que abre la puerta a nuevas predicciones hipotéticas, únicamente en dominios de un orden menor a 10^{-13}. Nótese que en la transición de la *TOB* a la *TOB**, las ecuaciones y leyes dinámicas se han modificado para abrir la puerta a nuevas predicciones, pero su interpretación sigue siendo la misma.

Ahora, considérese a la *VAL**. Análogamente al caso de la *TOB**, la *VAL** asigna otra distribución de probabilidad inicial distinta a (13.3) (prescindiendo de la restricción que la ecuación guía impone al campo de momento), sin modificar sus compromisos metafísicos. En efecto, desde el punto de vista de sus compromisos metafísicos, no existe una diferencia sustancial entre la *VAL* y la *VAL**. Sin embargo, a diferencia de su homólogo, la *VAL** justifica la hipótesis del equilibrio cuántico (usando la terminología de la *MB*) con criterios de relajación y equilibrio que emergen de un nivel en desequilibrio mucho más fundamental. El universo de Valentini es azaroso pero aparentemente se comporta de manera ordenada después de un tiempo considerable debido a ciertas condiciones de equilibrio, que pueden ser descritas por la termodinámica clásica. Este universo (el nuestro) es, según Valentini, determinista simplemente porque en un estado inicial existieron las condiciones suficientes para que de él emergiera un equilibrio cuántico desde los confines de un universo azaroso.

Finalmente uno esperaría la misma conclusión para el caso de la *MB*, sin embargo, no se tiene evidencia de que esta interpretación permita una extensión como la que se tiene para sus equivalentes empíricos. Como se verá más adelante, la razón de esta falta de evidencia reside en que el poder predictivo de la *MB* se encuentra íntimamente relacionado con sus compromisos metafísicos, y éstos a su vez con su formalismo, lo que implica la imposibilidad de nuevas predicciones sin un cambio teórico radical tanto en su estructura matemática como en sus elementos interpretativos.

Tomando en cuenta estas observaciones, una lección de esta discusión apunta a que tanto la *TOB** como la *VAL** pueden considerarse viables predictivamente, respecto a una noción íntimamente relacionada con los aspectos formales de cada interpretación. Por otra parte, nótese que se ha abierto una brecha entre la *MB* y el resto de las interpretaciones extendidas (*TOB** y *VAL**). Considerando que hasta el día de hoy la *TOB**, la *MB* y la *VAL** son empíricamente equivalentes (hasta que no se hayan confirmado nuevas predicciones), esta brecha radica en que tanto la *TOB** y la *VAL** se encuentran sub-determinadas con respecto a la *MB* de manera *débil*. Es decir, la sub-determinación que existe entre estas últimas y la *MB* es tentativa y podría evaporarse a favor de las primeras por medio de nuevos experimentos que operen a un orden de magnitud menor a 10^{-13} metros. Esto parece corroborar que mediante criterios de viabilidad predictiva del formalismo, no es posible romper la sub-determinación fuerte entre la *TOB*, la *MB* y la *VAL*, pero sí es posible romper la sub-determinación débil que existe entre la *MB* y el resto de las interpretaciones extendidas (*TOB** y *VAL**). No obstante, a mi parecer, esta conclusión no es convincente por dos razones:

En primera instancia, es importante recalcar que la viabilidad predictiva del formalismo es un criterio tentativo y de carácter heurístico, en el sentido de que permite romper la sub-determinación entre dos formulaciones de manera provisional. La razón es que todas las opciones son, por ahora, empíricamente equivalentes y no existen las condiciones empíricas ni técnico-prácticas para decidirse por alguna de ellas. Por otro lado, se ha propuesto una distinción entre la sub-determinación débil y fuerte (ver en el preámbulo teórico de este trabajo), dándole un peso a cada una de estas últimas en virtud de los problemas que generan en el ámbito realista. Tomando en cuenta esta distinción, se sigue que la viabilidad predictiva como criterio para la elección teórica debe rechazarse. De lo contrario, este criterio acabaría por elegir una de cualesquiera que fueran las teorías sub-determinadas débilmente, eliminado la sub-determinación débil en el contexto realista. Aparte de estas observaciones, se debe advertir que aunque se haya evitado la sub-determinación débil en cuestión mediante la viabilidad predictiva del formalismo, el problema que originó la presente discusión todavía persiste. Nótese que tanto la *TOB** como la *VAL** se encuentran fuertemente sub-determinadas debido a que ambas permiten la elucidación de posibles predicciones sin una diferencia clara entre ellas. Es decir, aunque su formalismo podría ser diferente, ambas extensiones parecen ser empíricamente equivalentes hoy y siempre. Esto debido a que la forma y el grado en el que se podrían confirmar sus nuevas predicciones es equivalente, en tanto que ambas aspiran a que sea posible medir la posición precisa de las partículas Bohmianas que, en principio, se determinan de manera equivalente.

Ahora bien, en lugar de considerar la viabilidad predictiva del formalismo, el panorama filosófico podría ser muy distinto al apelar a la viabilidad predictiva de sus compromisos metafísicos, como criterio de elección teórica. En efecto, esta virtud epistemológica podría privilegiar a ciertas interpretaciones gracias a algunos aspectos de índole ontológico ó nomológico de las opciones sub-determinadas. Además, es importante considerar que en este caso también entran en juego las versiones originales (*TOB*,*MB* y *VAL*), debido a que su novedad predictiva puede caracterizarse en términos de la plasticidad y continuidad de sus compromisos metafísicos a lo largo de la historia de la ciencia. A este respecto, uno tiene la intuición de que existen elementos interpretativos que tienen un rol explicativo (respecto al éxito predictivo de la teoría) y que cualquier novedad predictiva es consecuencia de las posibles formulaciones que son compatibles con dicha interpretación. Sin embargo, se puede demostrar que la viabilidad predictiva de los compromisos metafísicos de la *TOB* y la *VAL*, ó bien, de la *TOB** y la *VAL**, no ayudan a romper la sub-determinación fuerte que se tiene entre ellos. Esto debido a que no existe alguna diferencia significativa con respecto a los compromisos metafísicos entre las interpretaciones originales (*TOB* y *VAL*) y sus versiones extendidas (*TOB** y *VAL**). Como bien ya se dijo, en el caso de la *TOB* (y su versión extendida *TOB**) existe una interpretación en común que consiste en fuerzas cuánticas y campos multidimensionales que actúan sobre partículas tridimensionales, mientras que en el caso de la *VAL* (y su versión extendida *VAL**) también existe una interpretación en común que consiste en fuerzas aristotélicas y campos que actúan sobre partículas multidimensionales.

Por otro lado, en el caso de la *MB*, es un hecho que su poder predictivo se encuentra íntimamente relacionado con sus compromisos metafísicos. En efecto, como bien se sabe, la ecuación guía y el postulado estadístico (13.3), mejor conocido como la hipótesis del equilibrio cuántico en dicha interpretación, son mutuamente consistentes. En este sentido, se puede probar que la modificación de alguno de ellos, induce una modificación en el otro con la única excepción de que algunos términos con divergencia nula pueden añadirse a la ecuación guía. Esto implica que si se quiere modificar el formalismo de tal forma que permita nuevas predicciones, entonces se tienen que eliminar los tres postulados del formalismo Bohmiano (13.2.1). No obstante, desde la estructura conceptual de la *MB*, esta modificación induciría un cambio profundo en sus compromisos metafísicos, lo que resultaría en otra interpretación profundamente distinta a la *MB*. Las razones son las características metafísicas inherentes al formalismo de esta última, las cuales se mencionan a continuación:

Mediante un análisis más detallado se puede constatar que la *MB*, a diferencia de las otras interpretaciones, asume que el postulado estadístico $|\Psi|^2$ es, en realidad, una hipótesis acerca del estado inicial del universo [Dürr et al., 1992]. Recuérdese que la *MB* insiste en una distinción entre el estado inicial del universo y el estado de un subsistema controlado y confinado a una región de este universo. Bajo este supuesto, la determinación de una distribución inicial de las partículas que componen al universo entero involucra un aspecto objetivo que es inherente a su origen y constitución. Esta distribución de probabilidad no es un estado epistémico, es decir, no representa el conocimiento que se tiene del estado óntico de un subsistema específico, sino que representa directamente la configuración azarosa del estado óntico inicial del universo. El mundo es fundamentalmente determinista y la probabilidad objetiva, pero entendida de manera frecuentista, emerge de un evento histórico meramente objetivo: el mundo de hoy es tal que la configuración inicial de las partículas que componen al universo tenía una probabilidad muy alta de ocurrencia con respecto a una distribución de probabilidad equivalente a $|\Psi|^2$. Gracias a esta suerte, el estado actual del universo es resultado del estado inicial más probable que este, nuestro universo, tuvo en ese momento.

Por otro lado, los compromisos metafísicos de la *MB* están íntimamente relacionados con sus leyes, siendo

la ecuación guía y la interpretación de la función de onda (como una entidad nomológica) parte fundamental de dichos compromisos. En efecto, tanto la invarianza fundamental galileana como la interpretación nomológica de la función de onda son, según DGZ, prueba de ello [Dürr et al., 1992, 1995a, Goldstein et al., 2013]. Ahora bien, en la literatura es posible encontrar otro tipo de leyes bajo el nombre de *MB* que no corresponden a las ecuaciones de evolución Bohmianas, sin embargo, no dejan abierta la posibilidad de nuevas predicciones, sino que arropan nuevas formulaciones físicamente distintas pero empíricamente indistinguibles [Deotto & Ghirardi, 1998]. Esta posibilidad ya se ha tratado en una formulación acerca de partículas físicamente indistinguibles [Goldstein et al., 2005], o bien, en algunas extensiones teóricas donde se interpreta a la ecuación de Schrödinger como una ley fenomenológica que emerge de una ecuación cosmológica más fundamental, y que es compatible con las características típicas de una ley: la ecuación estacionaria de Wheeler de Witt (ver en [Dürr et al., 1995a] y en [Dürr et al., 2004]).
A este respecto, se puede concluir que la *MB* es tal que sus compromisos metafísicos no permiten la posibilidad de predicciones novedosas, por lo que la viabilidad predictiva mediante estos compromisos podría romper la sub-determinación existente a favor del resto de las interpretaciones, no obstante, esto implicaría una situación similar al caso anterior. En efecto, aunque la viabilidad predictiva de los compromisos metafísicos podría romper tentativamente la sub-determinación débil que existe entre la *MB* y el resto de las interpretaciones (*VAL* y *TOB*), su elucidación toma en cuenta un argumento provisional que no permite apelar a criterios de verdad. Por otro lado, aunque los criterios de viabilidad predictiva que radican en sus compromisos metafísicos terminen por elegir provisionalmente a la *VAL*, ó bien, a la *TOB*, todavía persiste una sub-determinación fuerte entre estas últimas. Esto debido a que su ontología es propensa a generar nuevas predicciones con el mismo alcance, es decir, predicciones que determinen la posición precisa de las partículas Bohmianas después de una medición.
En vista de lo discutido en esta sección, se puede concluir que ambas virtudes epistemológicas, que apelan a la viabilidad predictiva como criterio de elección teórica, deben rechazarse. El realista Bohmiano no ha escapado del problema.

13.5.3. Poder Explicativo

Es momento de investigar el poder explicativo de las interpretaciones Bohmianas. Es un hecho que en un contexto de confirmación, los criterios predictivos no pueden avalar ninguna interpretación que sea empíricamente equivalente a la *MCE*. No obstante, para dicha finalidad nada impide que otro tipo de criterios sean tomados en cuenta, como es el caso de la explicación científica. Aunque puede que corra con la misma suerte que la viabilidad predictiva, el poder explicativo tiene la virtud de que está estrechamente vinculado con el entendimiento de los fenómenos más allá de su predicción. Por ejemplo, aunque el servicio meteorológico nacional haya predicho lluvia para el día de mañana, faltaría dar una razón razonable de este hecho meramente predictivo. En efecto, la explicación de cualquier hecho puede estar estrechamente vinculado con su predicción pero también comprende otro tipo de criterios independientes de este último, como son (respecto al ejemplo de arriba), los efectos de la precipitación, su frecuencia de ocurrencia, su disposición a relacionarse con otros fenómenos, etc. De este modo, a causa de que ambas virtudes desempeñan roles análogos como criterios de justificación y de elección teórica, faltaría por evaluar la fuerza que tiene la explicación frente al poder unísono de la predicción. Bajo estas circunstancias, en seguida se procederá a realizar una evaluación de esta virtud epistemológica para cada interpretación en el orden establecido.

En el contexto de la *MC*, se sabe que las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico permiten diferentes formulaciones. Por ejemplo, existe una equivalencia matemática entre las soluciones de la teoría de Hamilton-Jacobi y la teoría newtoniana. Sin embargo, la equivalencia matemática en sus soluciones no implica su equivalencia interpretativa, como es el caso de las propiedades de las partículas clásicas que están estrechamente vinculadas con sus predicciones (en ambas formulaciones), contrariamente al campo ondulatorio que solo contribuye a su entendimiento (en la teoría de Hamilton-Jacobi). No obstante, todo parece indicar que en dominios menos restringidos el estudio de los fenómenos ondulatorios de la materia cobra mayor importancia. Esto es evidente en un contexto Bohmiano, que comprende términos teóricos como la función de onda Ψ con el mismo estatus fundamental que el de las partículas.
Un caso particular en este contexto corresponde a la *TOB* (véase en [Bohm, 1952a, Holland, 1995]). Esta interpretación afirma que el estado de un sistema se compone de dos elementos físicos, objetivos e irreducibles: un campo cuántico que se propaga a través del espacio de configuración $\mathbb{R}^{3N}$ y N partículas que se mueven en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ bajo la guía del campo[129]. Ambos se describen en el formalismo mediante la función de onda $\Psi(\mathbf{q}, t) \in L^2(R^{3N})$ y una curva parametrizada $\mathbf{Q} = (\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_N}) \in R^{3N}$ tal que $\{\mathbf{x}_j(t) \in \mathbb{R}^3 | j = 1, \cdots, N\}$, respectivamente[130]. El campo Ψ es una solución de la ecuación de Schrödinger para un sistema de N partículas y las trayectorias de las partículas en el espacio tridimensional se obtienen mediante la ecuación guía, dando como resultado una curva solución $\mathbf{x}_i(t)$. Ahora bien, tomando en cuenta que Ψ es una solución compleja de la ecuación de Schrödinger, se puede expresar en términos de dos campos reales $S(\mathbf{q}, t)$ y $R(\mathbf{q}, t)$:

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = R(\mathbf{q}, t) e^{\frac{iS(\mathbf{q},t)}{\hbar}} \tag{13.4}$$

Si se sustituye (13.4) en la ecuación de Schrödinger y si se separa la parte real e imaginaria, se obtienen las siguientes ecuaciones de campo en términos de R y S [Holland, 1995, Ch.3] y [Bohm, 1952a, p.169]:

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(\nabla_i S)^2(\mathbf{q}, t)}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla_i^2 R(\mathbf{q}, t)}{R(\mathbf{q}, t)} \right) + V(\mathbf{q}, t) = 0 \tag{13.5}$$

$$\frac{\partial R^2(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2(\mathbf{q}, t) \nabla_i S(\mathbf{q}, t)}{m} \right)_i = 0 \tag{13.6}$$

El elemento adicional $K = \hbar^2/2m\nabla_i^2 R(\mathbf{q}, t)/R(\mathbf{q}, t)$ se le llama *Potencial Cuántico*. Este término no depende de S, por ende, es posible interpretarlo como un potencial dependiente del tiempo contenido en el Hamiltoniano, donde S es una solución generalizada a la ecuación de Hamilton-Jacobi con una interpretación

[129] Es importante reiterar que las trayectorias que describen las N partículas que se mueven en el espacio tridimensional representa una trayectoria $\mathbf{Q}$ en el espacio de configuración.

[130] El parámetro t es el tiempo.

similar que la que se tiene en la *MC*. Si bien, la solución $S(\mathbf{q},\gamma,t)$ depende de la evolución de R, este hecho implica que el potencial cuántico no es un potencial externo (no es una función pre-asignada de las coordenadas), sino que está asociado a la dinámica del sistema. Así mismo, contrariamente a un potencial clásico, su homólogo cuántico resulta ser invariante bajo normalizaciones de la intensidad del campo, lo que garantiza que sus efectos se manifiesten a distancias muy lejanas, sean independientes de la intensidad del campo y dependan únicamente de su forma. Siguiendo la idea de Hamilton en el contexto de la *MCU*, Bohm demuestra que, al tomar la aproximación de longitud de onda pequeña de la ecuación de Schrödinger ($\hbar \to 0$), se obtiene, en general, la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema mecánico [Bohm, 1952a, p.170]. Esta nueva ecuación permite interpretar a las trayectorias de las partículas en términos ondulatorios. Es decir, permite identificar el movimiento de un sistema de partículas mediante un campo S que se propaga a una velocidad proporcional.

Ahora bien, de la misma forma en que uno puede expresar las ecuaciones de evolución de la *TCB* en términos de una generalización al formalismo de Hamilton-Jacobi, también es posible formular una ecuación similar a la segunda ley de Newton con algunas diferencias en lo que concierne a su estructura tanto sintáctica como semántica. Si se aplica el operador ∇_i a ambas partes de la ecuación (13.5) y se hace un cambio de variable a través de la ley de movimiento (ecuación guía), se obtiene [Holland, 1995, Ch.3]:

$$\begin{aligned} md^2\mathbf{x}_i/dt^2(\mathbf{q},t) &= -\nabla_i\{V(\mathbf{q},t) - \sum_{j=1}^{N}(\hbar^2/2m)\nabla_j^2 R(\mathbf{q},t)/R(\mathbf{q},t)\} \\ \frac{\partial R^2(\mathbf{q},t)}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[R^2(\mathbf{q},t)d\mathbf{x}_i/dt(\mathbf{q},t)\right]_i \end{aligned}$$

Donde $\Psi = Re^{\frac{iS}{\hbar}}$ y $d\mathbf{x}_i/dt = (1/m)\partial S/\partial\mathbf{q}^i$.

Si se observa con detalle, estas ecuaciones tienen la misma forma que la segunda ley de Newton con excepción del término que corresponde al potencial cuántico. No obstante, es importante notar una asimetría que existe entre la segunda ley de Newton estándar y las ecuaciones Bohmianas escritas de esta forma. La ley de Newton estándar no es suficiente, por sí sola, para describir la dinámica de un sistema cuántico: con el conocimiento de la posición y el momento ($md\mathbf{x}_i/dt$) de una partícula (propiedades que definen el estado clásico de una partícula), no es posible determinar su movimiento si se desconoce el valor y la evolución de la función de onda, y además, si se desconoce su relación con el valor y la evolución del campo S (mediante la ecuación guía). En efecto, esta última ecuación se interpreta como una restricción a las soluciones del momento que se obtienen de la ley de Newton. Por esta razón, la ecuación guía es, en realidad, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, contrariamente a las ecuaciones de segundo orden Newtonianas en su formulación estándar.

Este resultado es importante por dos razones: ubica a la función de onda y a su evolución en un lugar privilegiado, y permite interpretar a la *TCB* en términos de fuerzas cuánticas con propiedades inusuales. Así pues, aunado a estas observaciones, los partidarios de la *TOB* afirman que

> [...] aunque el recurso a las nociones de fuerza (la segunda ley de Newton generalizada suministra la

> fuerza que actúa sobre cada una de las partículas del sistema) y energía (el potencial cuántico es, como el potencial clásico, una forma de energía) es superfluo desde el punto de vista del contenido empírico de la teoría, no lo es desde el punto de vista de la ontología y la explicación.[Solé, 2010, p.40]

Es decir, la identificación de algunos términos teóricos como la fuerza y la energía permiten hacer un vínculo con la dimensión explicativa de la *TOB*. Aunque no sea relevante desde el punto de vista de la predicción, la introducción del potencial cuántico y de la *Segunda Ley de Newton Generalizada* establece una jerarquía ontológica en concordancia con el poder explicativo que ostenta el formalismo Bohmiano. De este modo, es importante aclarar las condiciones bajo las cuales el potencial y las fuerzas cuánticas son relevantes frente al poder explicativo de la *TOB*. A este respecto, destacan dos aspectos importantes [Holland, 1995, Ch.3]:

(i) La acción del potencial cuántico sobre las partículas Bohmianas explica algunos experimentos cruciales[131] por medio de mecanismos *causales*. Es decir, mediante ecuaciones que introducen fuerzas de origen cuántico se puede determinar la posición precisa de cada una de las partículas (dirigidas por dichas fuerzas), cuyo comportamiento es distinto a cualquier partícula clásica.

(ii) Permite explicar la aproximación clásica en términos de mecanismos causales. Aparte de la fuerza newtoniana, existe una fuerza adicional cuántica que desaparece en el límite $\hbar \to 0$.

Nótese que se introduce el concepto de 'mecanismos causales' con la que el lector podría no estar familiarizado. Para proseguir con una discusión más clara y rigurosa, es importante aclarar el significado y el rol que desempeña la causalidad en este caso particular. Con esta tarea en mente, se podrá advertir la importancia de este concepto en lo que respecta a la dimensión explicativa de la *TOB*.

En la introducción de [Bohm & Hiley, 1993], se hace una referencia al concepto de causalidad en el contexto de la *TCB*, que tiene estrecha relación con un concepto de determinismo que se sigue de la existencia y unicidad de las soluciones a sus ecuaciones de movimiento. Sin embargo, aunque esta noción de causalidad tenga su contraparte formal por medio de una descripción matemática de la evolución del sistema en cuestión, parecer ser ambigua con respecto al estatus de los objetos matemáticos que forman parte de este último. Es decir, se usan las ecuaciones de evolución Bohmianas para construir una cadena causal de sucesos temporales, pero no se caracterizan apropiadamente los objetos que entran en juego en su formulación. De este modo, para aclarar este tipo cuestiones basta con retomar la discusión anterior en torno a los compromisos metafísicos que se tienen en la *TOB*, pues sólo así se podrá identificar una noción de casualidad inherente a la *TOB*.

Después de una lectura detallada de la *TOB*, es posible identificar una noción de causalidad distinta a la visión predominante, la cual tiene como propósito epistemológico fragmentar un sistema de estudio en componentes más simples para su mejor comprensión, y como propósito metafísico, creer en la existencia de dichas componentes[132]. Es importante mencionar que esta doctrina, ampliamente conocida como mecanicismo, cobró relevancia con el auge de la mecánica newtoniana, según la cual la Naturaleza es cognoscible

[131] Experimento de la doble rendija, experimentos del tipo Stern-Gerlach, etc.

[132] Esta noción de causalidad tiene estrecha relación con el modelo explicativo *mecánico causal*, implementado por Wesley Salmon [Salmon, 1989, Woodward, 2017].

mediante modelos que describen el comportamiento del mundo observable a partir de la configuración y la dinámica de partículas microscópicas. Contrariamente a una tesis mecanicista, la ontología de la *TOB* involucra agentes de movimiento no newtonianas, lo que permite identificar un tipo de causalidad que determina el comportamiento atípico y no local de una partícula Bohmiana. A este respecto, Bohm y Hiley abonan un punto importante a esta discusión, al introducir una noción de causalidad mediante una analogía que hace alusión a las propiedades del potencial cuántico [Bohm & Hiley, 1993, pp.35-38]: considérese el movimiento de un barco en piloto automático. El barco es guiado por medio de ondas de radio con cierta frecuencia, independientemente de su intensidad. El punto esencial de esta analogía es que el barco se mueve con su propia energía y la información proveniente de las ondas de radio sirven para dirigirlo. Según ellos, el tipo de acción que se produce sobre el barco es, más que una causa eficiente, algo así como "información activa" que incide sobre su movimiento. De este modo, es claro que, bajo este tipo de caracterización, el agente causal que determina el movimiento de las partículas Bohmianas no comparte las mismas propiedades que poseen las fuerzas en el esquema newtoniano. Al contrario, algunos físicos y filósofos proponen que es factible recurrir a su caracterización desde una nueva noción de causalidad, estrechamente vinculada con la causa formal aristotélica[133] [Valentini, 1992].

Ahora bien, todo parece indicar que este concepto de causalidad en consonancia con la ontología de *TOB* permite evaluar esta interpretación en lo que respecta a su poder explicativo. Sólo habría que identificar la noción de explicación que sea compatible con este tipo de mecanismos causales. No obstante, esta tarea perece ser muy complicada y hasta problemática por dos razones: porque i) la *TOB* es compatible con una variedad de modelos explicativos representativos en la literatura filosófica, y porque ii) una noción de causalidad formal no puede establecerse entre diferentes espacios matemáticos donde viven los objetos que se postulan sin alguna correspondencia entre ellos. En seguida se explicará cada una de estas observaciones.

En lo que respecta a (i), es importante notar que, más allá del poder explicativo de sus mecanismos causales, la *TOB* es compatible con otros tipos de modelos explicativos que son representativos en la literatura filosófica, como es el caso del *Modelo Unificador* en [Kitcher, 1989]. Por ejemplo, como bien se dijo arriba, se sabe que una partícula Bohmiana se comporta clásicamente si el potencial cuántico es despreciable bajo ciertos dominios restrictivos $\hbar \to 0$. La razón principal es que las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son fuerzas externas clásicas. Esto permite reconciliar otra virtud explicativa con los preceptos conceptuales de la *TOB*, esto mediante su capacidad de explicar fenómenos en dominios menos restrictivos a partir de un marco teórico unificado. Es decir, la posibilidad de explicar los fenómenos clásicos a partir de una aproximación (específicamente cuando $\hbar \to 0$) en términos del instrumental ontológico que la *TOB* dispone (en términos de fuerzas cuánticas nulas). De aquí se sigue que tanto algunos mecanismos causales como también algunos criterios de unificación entran en juego al tratar de evaluar el desempeño de la *TOB* frente a su poder explicativo. Sin embargo, podría ser el caso de que otros aspectos, como el rol que desempeñan las simetrías frente al poder explicativo de la *TOB*, permita la elucidación de otros modelos explicativos compatibles con esta interpretación.

Enfocándose ahora en (ii), es importante recordar algunas características relacionadas a la ontología de la

[133] Más adelante se analizará el poder explicativo de esta interpretación

TOB. Un rasgo esencial de esta interpretación es el dualismo ontológico inherente al estado óntico del sistema. En efecto, recuérdese que este último comprende dos elementos: un campo cuántico y un conjunto de partículas que viven en espacios diferentes, es decir, en el espacio de configuración de $3N$ dimensiones y en el espacio físico de tres dimensiones, respectivamente [Albert, 1996a, pp.124-125]. Esta imagen dual del mundo a la que Albert llama "the two space picture", consiste en un universo que se desdobla en dos espacios físicos e independientes. A razón de que la interpretación matemática de la función de onda y las partículas Bohmianas se encuentra en función de la constitución del espacio donde se definen, el estatus ontológico de estos elementos sugiere la existencia independiente de sus espacios correspondientes. Tomando en cuenta esta observación, el dualismo ontológico que comprende tanto al espacio físico como al espacio de configuración es una consecuencia de la existencia de un campo cuántico $3N$-dimensional $\Psi(\mathbf{q}, t) \in L^2(R^{3N})$ y la presencia de N partículas de dimensión menor o equivalente $\mathbf{Q} = (\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_N}) \in R^{3N}$. No obstante, más allá de los problemas (ó bien virtudes) interpretativas que se siguen de las características atípicas del campo cuántico y el comportamiento extraño de las partículas Bohmianas, se puede identificar un vacío explicativo que tiene directa relación con los espacios donde se definen ambas entidades. Es un hecho que cualquier interacción física entre dos elementos (en particular, la relación causal que existe entre el campo cuántico y las partículas) tiene sentido si ambos elementos viven en un espacio en común. De lo contrario, no habría modo de determinar los efectos causales (en términos de cualquier modelo explicativo, ya sea mediante causas mecánicas, su geometría subyacente, interacciones espacio-temporales, o bien, un espacio que los unifique) que el campo ejerce sobre las partículas, debido a que no habría ninguna relación matemática entre ambos objetos:

> Lacking any geometrical relationship between A and B, there is nothing about the condition of A in its space that is structurally capable of picking out anything like a direction, or anything like a particular corpuscle, or anything whatsoever, in the B-space. Period. End of story. [Albert, 1996a, p.125]

Ahora bien, según Albert uno podría insistir en incorporar una regla de correspondencia entre ambos espacios, de tal manera que se pudieran establecer relaciones geométricas entre el campo cuántico y las partículas Bohmianas. En particular, habría que elucidar una correspondencia entre las direcciones de la base coordenada del espacio $3N$-dimensional y las direcciones de la base coordenada del espacio físico de tres dimensiones. Sin embargo, aunque a primera vista parece ser una tarea trivial, la interpretación física de dicha correspondencia puramente matemática parece ser problemática. Para ver en detalle el problema en cuestión, considérese lo siguiente:

Imagínese un objeto matemático arbitrario que se define en un espacio euclidiano $3N$-dimensional. La posición de dicho objeto se especifica mediante $3N$ coordenadas, cada una de las cuales tiene una dirección que coincide con los ejes de una base ortogonal de dimensión $3N$. Por otro lado, imagínese N objetos que se definen mediante N puntos en el espacio físico de tres dimensiones, cada uno de los cuales se especifica mediante tres coordenadas. De este modo, para elucidar una correspondencia matemática entre ambos objetos, es necesario identificar las tres coordenadas que corresponden al objeto definido en el espacio físico tridimensional con tres coordenadas del espacio donde se define el objeto $3N$ dimensional. Pero no hace falta una gran destreza matemática para concluir que esta identificación no es única, y existen $3N(3N-1)(3N-2)$ posibles manera de realizar dicha correspondencia. Este problema de asignación no presenta ningún desafío desde el punto de vista matemático. Sin embargo, al asumir la existencia de dicha correspondencia, se necesitaría establecer una asignación privilegiada de los ejes coordenados, lo que implicaría la introducción de una estructura metafísica adicional. Dicho de otro modo, no es posible establecer los mecanismos causales que sirven para elucidar una interpretación coherente y explicativamente razonable hasta que no se haya identificado una correspondencia de verdad entre las coordenadas del espacio $3N$-dimensional con las del espacio físico. Esto induce a pensar en que el poder explicativo de la *TOB* (en términos de cualquier modelo explicativo) no puede servir como criterio de elección teórica en ausencia de esta correspondencia. Este resultado tiene, en efecto, una importancia mayor en comparación con la primera observación (i), puesto que aunque se tuviera el instrumental suficiente para elegir la noción de explicación más apropiada, la ausencia de dicha correspondencia implicaría un vacío explicativo considerable, en lo que respecta a esta interpretación. Desafortunadamente, más adelante se demostrará que al establecer esta correspondencia y permitir más estructura metafísica, se puede garantizar el poder predictivo de la *TOB*, a costa de permitir una metafísica más robusta y darle menos prioridad a la simplicidad. Como se argumentará más adelante, esta correlación negativa entre diferentes virtudes epistemológicas merma la posibilidad de establecer criterios suficientemente razonables para elegir una interpretación sobre sus equivalentes empíricos.

A continuación, se pretende evaluar de forma análoga el desempeño de la *MB* y la *VAL* en virtud de su poder explicativo. La conclusión será similar pero con algunas diferencias importantes. Reconsidérese la *MB*. A partir de la publicación de los artículos seminales de David Bohm (la *TOB*), el proyecto Bohmiano se emancipó en distintos círculos de investigación científica y filosófica, lo que resultó en el surgimiento de nuevas interpretaciones Bohmianas distintas a las que se habían propuesto inicialmente. Un ejemplo de estas interpretaciones corresponde a la que usualmente se conoce en la literatura como *Mecánica Bohmiana* (*MB*)[Goldstein, 2017, Dürr et al., 1992, 1995a]. Como se verá en esta parte del presente trabajo, esta propuesta fue el resultado de numerosas investigaciones que contribuyeron a construir una visión muy distinta a la que Bohm tenía en mente. En particular, cabe mencionar la interpretación "hidrodinámica"publicada en 1971 por J.S.Bell [Bell, 1971], quién sin lugar a dudas, fue el autor más influyente entre los primeros partidarios de la *MB*. A grandes rasgos, a pesar de que la *MB* comparte muchos criterios afines con la *TOB*, como por ejemplo, su determinismo, su objetividad, su no localidad, etc., esta nueva interpretación es la culminación formal de un amplio espectro de objeciones en torno al carácter atípico de los potenciales y las fuerzas cuánticas que, como bien se sabe, son parte constitutiva de la *TOB*. Esta interpretación es, en esencia, un refinamiento interpretativo a la versión mínima de la *TCB*, sin la jerarquía metafísica dualista de la *TOB*. Según Sheldon Goldstein:

> "The quantum potential itself is neither simple nor natural and it is not very satisfying to think of the quantum revolution as amounting to the insight that nature is classical after all, except that there is in nature what appears to be a rather ad hoc additional force term, the one arising from the quantum potential." [Goldstein, 1996, p.158]

Goldstein, quién es uno de los proponentes de la *MB*, argumenta en contra de la *TOB* que cualquier interpretación que implique un regreso a los compromisos metafísicos de la *MC* involucra la necesidad de introducir suposiciones *ad-hoc*, que son reflejo de un entendimiento muy pobre de los fenómenos cuánticos. Es importante recalcar que estas aseveraciones distan de lo que se ha dicho aquí, a causa de que la *TOB* es explícita con respecto a sus diferencias evidentes con la *MC*, en particular con una noción de causalidad en conflicto con la tesis mecanicista de la mecánica newtoniana. No obstante, aunque no tan evidentes, estas supuestas deficiencias han motivado a algunos físicos y filósofos para sumar esfuerzos y construir una nueva interpretación compatible con el formalismo Bohmiano. Con esta finalidad, se ha propuesto un abandono al dualismo ontológico inherente a la estructura conceptual de la *TOB*. En efecto, según la *MB*, el estado óntico del universo se compone de la función de onda universal $\Psi(\mathbf{q}, t) \in L^2(R^{3N})$ (de carácter nomológico y sin realidad física), y N partículas físicas, objetivas e irreducibles, descritas por una curva parametrizada [134] $\mathbf{Q}(t)$. Esta última es una solución de la ecuación de Schrödinger para un sistema de N partículas y $\mathbf{Q}(t)$ se obtiene en función de $\Psi(\mathbf{q}, t)$ mediante la ecuación guía. La imagen estándar del mundo de acuerdo con esta interpretación consiste en la configuración compleja de partículas puntuales que viven en un espacio físico de tres dimensiones, cuya dinámica se determina mediante un conjunto de leyes, en las que se incluye la función de onda universal [Goldstein, 2017, Dürr et al., 1992].

En vista de estas características y más allá de lo que concierne al abandono de las nociones clásicas, los aspectos más significativos que, a mi parecer, son propios de la *MB* comprenden tanto el rol que desempeña la función de onda como también la aclaración de vacíos conceptuales en relación al postulado estadístico. En detrimento de un dualismo ontológico, la función de onda universal se interpreta como un objeto matemático cuya importancia reside en establecer explícitamente las leyes que gobiernan el estado y la evolución del sistema en cuestión [Dürr et al., 1995a, Goldstein et al., 2013]. Según la *MB*, lo único que existe son partículas puntuales tridimensionales cuyo movimiento se describe y representa matemáticamente por medio de su posición y la función de onda. Por otro lado, esta interpretación también demanda, contrariamente a la *TOB*, dar un paso hacia atrás para justificar y entender más a fondo algunos elementos implícitos en la versión mínima de la teoría que contribuyen de manera inequívoca a su equivalencia empírica. En efecto, *MB* provee una justificación y ayuda a esclarecer el significado y la relación entre las ecuaciones de evolución y el postulado estadístico.

Ahora bien, estos aspectos tienen consecuencias significativas en lo que respecta al poder explicativo de la *MB*. A primera vista y contrariamente a las virtudes de la *TOB*, esta nueva interpretación prescinde del tipo de agentes causales que se atribuyen a los potenciales y las fuerzas cuánticas. No existe ningún recurso primario o una estructura jerárquica que pueda garantizar una explicación en términos de interacciones físicas (no importa que no sean mecanicistas y newtonianas) que ocurren dentro de una sucesión causal. Al contrario, desde el punto de vista de la *MB*, sólo existen partículas en movimiento que se comportan de una manera atípica sin que haya nadie ni nada que les diga cómo moverse. Al operar al nivel de la explicación, algunos autores se han pronunciado en contra de esta interpretación dado la falta de agentes causales

[134] Recuérdese que $\mathbf{Q}$ con mayúsculas es la configuración de las partículas a un tiempo t, mientras que $\mathbf{q}$ es un punto genérico en el espacio de configuración.

similares a los que se tienen en la *TOB*. Por ejemplo:

> Puesto que el proponente de dicha interpretación considera que no hay nada más allá de las partículas y de sus trayectorias, no dispone de ningún recurso para explicar por qué, en cada caso, estas trayectorias son como son. Dicho de otro modo: esta interpretación hace de las trayectorias entes primitivos tanto desde el punto de vista de la ontología como desde el punto de vista de la explicación.[Solé, 2010, p.60]

Otro tipo de objeciones a la *MB* existen en la literatura, como es el caso de la crítica elaborada por David Albert en contra de un modelo monista como éste [Albert, 1996b]. De acuerdo con Albert, en el ámbito de la *TCB* en general (independientemente de sus interpretaciones), es posible construir un modelo ontológico monista al que llama 'configuration-space picture'. Este último consiste en elevar el estatus del espacio tridimensional, desde el cual es posible construir el espacio de configuración, por medio de la asignación ordenada de las coordenadas que corresponden a cada partícula. Es decir, el espacio de configuración se construye de tal manera que sus primeras tres ordenadas corresponden a las coordenadas de la primera partícula, las siguientes tres coordenadas corresponden a las coordenadas de la segunda partícula, y así sucesivamente. Nótese que en este caso, no es necesaria una correspondencia adicional entre espacios de diferente dimensión, esto debido a que el espacio de configuración es, por construcción y definición, un espacio derivado del espacio de tres dimensiones. Desde esta perspectiva, el espacio de configuración donde la función de onda se define, resulta ser una estructura secundaria que no puede existir propiamente:

> "Call this one the configuration-space picture. According to this picture, there is still a real physical concrete fundamental three-dimensional space and *N* material corpuscles that move around in it, but the 3*N*-dimensional space in which the wave function undulates is something other, something less, than a real, concrete, fundamental, free-standing physical space; it's something derivative, something that is essentially about something else, something it would make no sense to imagine existing on its own. On this picture, the space in which the wave function evolves is (more particularly) the configuration space of the *N* corpuscles in the concrete three-dimensional space".[Albert, 1996b, p.125]

En efecto, este modelo ontológico implica que una interpretación ontológica respecto a la función de onda podría llegar a ser problemática desde el punto de vista de la explicación. La razón es que, contrariamente a evaluar la función de onda en los puntos de un espacio fundamental con autonomía ontológica, se evalúa de acuerdo a la configuración de las partículas que, en principio, viven en otro espacio. Bajo estas circunstancias parece que la única salida a los desafíos que plantea un modelo de esta naturaleza es el abandono de una interpretación ontológica con respecto a la función de onda. Es en este punto donde se puede establecer una comparación entre este modelo ontológico y la *MB*, pues resulta que esta última plantea una interpretación de onda en estos términos, a saber, como un elemento nomológico. Sin embargo, a los ojos de Albert, dicha salida no parece ser viable, dado que una ley, a diferencia de la función de onda, no evoluciona y es en principio estática[135]. De este modo, similarmente a la objeción de Albert Solé, Albert concluye que un

[135] Como bien se mencionó anteriormente, este tipo de objeciones han sido tomados en cuenta en la *MB* (ver en [Dürr et al., 1995a] y en [Dürr et al., 2004]).

modelo ontológico que abandone algunos recursos metafísicos, como es el caso de la realidad de la función de onda, no puede evitar problemas al nivel de la explicación, que abone al poder explicativo de cualquier interpretación.

Ahora bien, para que ambas objeciones puedan ser relevantes en esta discusión, es importante analizar el sentido y el modo en que se está usando la noción de explicación en ambos casos. A primera vista, parece que la crítica de Albert Solé tiene su fundamento en un modo particular de entender la explicación científica, específicamente, de acuerdo con una noción de explicación análoga a la que se presenta en la *TOB*. De este modo, queda claro que la *MB* no hace justicia a este tipo de explicación, pero más que una deficiencia, este aspecto ha sido vinculado con una virtud que, según esta interpretación, es constitutiva del dominio cuántico: la falta de materialidad de cualquier agente causal. Por otro lado, la crítica de Albert, tomando en cuenta que tiene su raíz en una concepción humeana de las leyes, supone una noción de explicación sumamente comprometida con una imagen del mundo que consiste en suponer que las leyes supervienen a hechos concretos que acontecen en puntos espacio-temporales. Según esta postura filosófica, las leyes son un recuento de hechos que acontecen en puntos con propiedades bien definidas, lo que implica un abandono a nociones de causalidad, ó bien, a condiciones de necesidad que cimbran los fundamentos de otras posturas acerca de las leyes, entre las cuales se encuentra la tesis ontológica [Maudlin, 1995], o la tesis realista [Armstrong, 1985]. De este modo, una vez que se han sentado las bases e intuiciones filosóficas de la crítica de Albert, es posible entender la razón por las cual no es partidario con una interpretación como la *MB*. En efecto, una concepción humeana de las leyes parece ser incompatible con la idea de que una ley (en este caso, la función de onda universal) gobierna o determina la dinámica de los objetos que sí tienen una realidad física (en este caso, las partículas Bohmianas). Siguiendo con esta idea, todo parece indicar que la *MB* debe interpretarse, en el mejor de los casos, desde una postura ontológica o realista acerca de las leyes, lo que podría sugerir la presencia de otro tipo de aspectos explicativos inherentes a esta interpretación. Específicamente, el poder explicativo que podría ostentar la *MB* en virtud de que la función de onda sea una entidad nomológica que explique el movimiento de la partículas en términos de su predominio jerárquico en cuanto a su fundamentalidad y no en cuanto a su existencia.

Tomando en cuenta las suposiciones filosóficas que subyacen a ambas objeciones, es claro que la *MB* es una interpretación que es incompatible con una noción de explicación análoga al que tiene la *TOB*, y de igual modo, con una visión humeana acerca de las leyes. Sin embargo, estas restricciones no son condiciones necesarias para despojar a la *MB* de poder explicativo. Es posible encontrar otro tipo de modelos explicativos que sean compatibles con esta interpretación, como es el caso del que se obtiene gracias al carácter nomológico de sus elementos matemáticos, de su geometría como consecuencia del estatus fundamental de la simetría galileana, ó bien, de su compatibilidad con otras teorías exitosas que operan en dominios menos restrictivos. Aunque se podría dar una discusión elaborada en torno a cada una de estas posibilidades, aquí solo se quiere enfatizar el hecho de que la *MB* podría ser compatible con diferentes nociones de explicación, cada una de las cuales podría identificarse con algún modelo explicativo conocido en la literatura.

Se puede concluir, análogamente al caso de la *TOB* que, a causa de estos menesteres, sólo es posible evaluar el poder predictivo de la *MB*, de acuerdo a diferentes modelos explicativos, lo que invalida la posibilidad de asociarla con una noción de explicación particular.

Por último, considérese a la *VAL*. Según algunos filósofos contemporáneos, existen momentos en la historia de la ciencia reciente donde se han construido imágenes falsas de una realidad supuestamente inobservable. Estas imágenes han viciado la investigación científica al concluir, por ejemplo, que las formas de descripción inspiradas en la *MC* son, en efecto, las más adecuadas para representar la fisonomía del mundo real. No obstante, las evidencias que brinda la Física contemporánea son suficientes para desafanarse de las "ataduras" que produce este tipo de imágenes que, después de todo, merman la posibilidad de acceder al conocimiento del mundo real. Al percatarse de ello, los físicos han podido expandir su campo de visión más allá del mundo observable y reconstruir sus apariencias desde otra perspectiva. Aunque les parezca poco común, desmesurado o absurdo, las nuevas evidencias indican que una descripción en términos clásicos no es clara ni empíricamente adecuada en dominios menos restringidos. Por ejemplo, en el contexto de la *MCU* se requiere de una nueva descripción que pueda corroborar de una forma más natural y coherente nuevas evidencias empíricas. En esta dirección y paralelamente a la publicación de los primeros artículos de la *MB*, Valentini dedica su tesis doctoral [Valentini, 1992] al desarrollo de una nueva interpretación fundamentalmente holista y no local del formalismo Bohmiano. En consonancia con estos principios, Valentini insiste en abandonar nociones, como el de fuerza y campo, que se instauraron desde la mecánica newtoniana y que prueban ser inadecuadas para este dominio. Así mismo, desarrolla una idea inicialmente propuesta por David Bohm, que consiste en extender las predicciones de la *TCB* mediante mecanismos que, en principio, operan a un nivel subcuántico en desequilibrio mucho más fundamental. A grandes rasgos, el estado óntico del sistema se compone de dos elementos físicos, objetivos e irreducibles que viven en un espacio euclidiano de $3N$ dimensiones: un campo-piloto (una función $\Psi(\mathbf{Q}, t) \in L^2(R^{3N})$) que evoluciona de acuerdo a una ecuación análoga a la ecuación de Schrödinger, y una partícula representativa $3N$-dimensional (cuya trayectoria se representa mediante una curva parametrizada $\mathbf{Q} = (\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_N}) \in R^{3N}$), que se mueve de acuerdo a la ecuación guía bajo la influencia del campo. Hasta aquí conviene hacer algunas aclaraciones. Una partícula representativa se define como un objeto puntual que vive en el espacio euclidiano de $3N$ dimensiones. Al proyectar la trayectoria de esta partícula en el espacio físico de tres dimensiones, se obtienen N curvas en el espacio físico tridimensional asociadas a N "partículas" con un estatus secundario y no fundamental. Así mismo, el campo piloto Ψ, es una solución a una ecuación análoga a la ecuación de Schrödinger, pero que a diferencia de esta última, contiene un término V que no se interpreta como un potencial clásico. Al contrario, este término no tiene interpretación física alguna y solamente determina la forma en que el campo evoluciona en el tiempo. La imagen del mundo que sugiere la *VAL* incorpora tanto un dualismo ontológico (en cuanto a que existen dos objetos diferentes), como también un monismo, en el sentido de que existe un espacio único en el que viven dichos objetos [Valentini, 1992]. De esta manera, el campo-guía es un objeto multidimensional que, mediante cierto tipo de mecanismos causales, determina la dinámica de la partícula representativa de la misma dimensión. Desde esta perspectiva, el campo cuántico puede identificarse, de manera análoga a la *TOB*, como un gente causal que produce el movimiento de las partículas, pero sin mediación de ningún potencial, ya sea clásico o cuántico. Al postular la existencia de una partícula representativa y un campo guía en un espacio $3N$ dimensional, la *VAL* prescinde de los instrumentos ontológicos que tanto la *TOB* como la *MB* disponen. No obstante, a pesar de estas diferencias, la *VAL* debe de disponer del instrumental suficiente para que pueda considerarse, de igual forma, una interpretación clara y empíricamente adecuada. A este respecto, no deben quedar inadvertidos los siguientes dos pilares fundamentales que subyacen a esta interpretación: el holismo y la emergencia o adecuación empírica.

En primer lugar, el holismo es, a diferencia del mecanicismo, una tesis metafísica que pone de manifiesto el carácter fundamental de la totalidad sobre sus partes. Es decir, supone que una descripción del mundo en términos de elementos que se restringen a una parte de la totalidad es limitada, dado que no incluye información acerca de este último. Desde esta perspectiva, es importante reconocer que el holismo ontológico es una forma de descripción y representación del mundo compatible no sólo con teorías recientes como la *MCU*, sino que también presume serlo para el caso de la *MC*. A este respecto, mientras que una tesis mecanicista es, por construcción, compatible con la teoría newtoniana, una tesis holista puede ser igualmente compatible con otra formulación sin escapar al dominio clásico, es decir, con la teoría de Hamilton-Jacobi. En vista de que esta formulación define un campo ondulatorio S que determina el movimiento de las partículas de un sistema mecánico, se puede asumir que cualquier interacción posible entre las partículas es mediado por el carácter no separable de S. Para corroborar este resultado es importante saber que la 'separabilidad' se puede traducir en términos de la independencia del movimiento de cualquier partícula sobre el resto de las $N-1$ partículas. Esto a su vez es equivalente a poder expresar a S como:

$$S_T = S_1 + ... + S_N \tag{13.7}$$

Según la *VAL*, esta noción de separabilidad indica que si (13.7) no se satisface, entonces la trayectoria de cualquiera de las partículas depende del movimiento del resto. Desde la perspectiva de una tesis mecanicista, dicha noción equivale a que el potencial clásico no sea nulo $V \neq 0$, o bien, que existan fuerzas actuando sobre las partículas[136]. No obstante, desde la perspectiva de una tesis holista, el efecto de estas supuestas fuerzas externas son, en realidad, manifestaciones de la no separabilidad o enredamiento del campo S, en tanto que describe las interacciones de las partículas en términos del sistema total. S es, en general, no separable, pero cuando lo es, es posible corroborar una tesis mecanicista en torno a la mecánica newtoniana.

Ahora bien, hasta el momento solo se ha planteado la compatibilidad entre la formulación clásica de Hamilton-Jacobi y una tesis holista, sin embargo, uno esperaría que esta tesis pudiera ser compatible con otros dominios menos restringidos. Al heredar la misma interpretación en el contexto de la *MCU*, resulta interesante percatarse que la única diferencia con respecto a la *MC* yace en las propiedades no locales de S. En efecto, en el caso cuántico, resulta que la ecuación Schrödinger se encarga de determinar la evolución de la función de onda a través de $S = \hbar \, \mathrm{Im} \, ln(\Psi)$, tal como lo expresa el formalismo Bohmiano. Al tomar en cuenta esta observación, se pueden advertir consecuencias significativas que no aparecen en el dominio clásico. Por ejemplo, en el contexto de la *MCU*, la propiedad lineal de la ecuación de evolución para Ψ garantiza la existencia de estados enredados que no pueden ser separables, de donde emerge el carácter no

[136] Habría que advertir que en este esquema, la correlación entre las partículas se caracteriza en virtud de elementos externos (fuerzas) contenidos en la forma de V.

local de las ecuaciones de movimiento para las N "partículas"[137]. En este sentido, resulta que al elevar el estatus de S, ó bien, Ψ a un nivel más fundamental, y trascender cualquier descripción en términos del movimiento de partículas efectuado por fuerzas o campos externos, se reivindica el carácter holista de la teoría por medio de la no localidad explícita en sus ecuaciones de evolución. Cabe concluir que la *VAL* propone un abandono al esquema mecanicista y reitera su compromiso por re-interpretar la teoría de Hamilton-Jacobi, como una teoría física fundamental, independiente de la mecánica newtoniana. Esto le permite elucidar el estatus fundamental de la ecuación de movimiento de primer orden (la ecuación guía) y su agente (la función de onda), de acuerdo con el concepto de 'campo guía' que es propio de esta formulación:

> We propose an abanndonment of all such mechanical ideas, and suggest instead that the notion of guiding field be taken as fundamental and irreducible [...] [Valentini, 1992, p.12]

Una consecuencia significativa de una tesis holista en la *VAL* es que la conservación de la energía y el momento son principios locales que tienen sentido en un espacio y dominio de extensión restringido, es decir, para sistemas cerrados. No obstante desde una perspectiva más general, no cabe duda que dichas propiedades no pueden conservarse. Después de todo, esta interpretación asume que dichos principios, junto con los objetos y propiedades clásicas, emergen fenomenológicamente de una condición de desequilibrio más fundamental. En otras palabras:

> Let us then take the view that Hamilton-Jacobi Theory is an actual physical theory, conceptually and mathematically independent of the usual mechanical formulation. In this theory all physical variables (particles, fields, or the geometry of 3-space) are guided in their time evolution, not by mechanical laws or field equations, but rather by a multidimensional "guiding field"(or pilot-wave) S which has an autonomous existance in configuration space. Indeed, we shall reverse the usual view and say that the mechanical concepts of "force", "momentum", and even "energy", arise from mere mathematical reformulations of this more fundamental physical theory - and such derivative mechanical concepts prove to be inappropriate for extension to the subquantum domain. [Valentini, 1992, p.8]

En segundo lugar, es momento de hacer un análisis similar pero con respecto a la adecuación empírica de esta interpretación. Como bien ya se dijo, uno de los desafíos que cualquier teoría enfrenta (para establecer una interpretación adecuada en un contexto realista), tiene directa relación con la posibilidad de reproducir el mundo manifiesto en función de sus compromisos metafísicos. Específicamente, la manera en que los compromisos metafísicos de la *VAL*, íntimamente relacionados con un dualismo ontológico, reproducen las predicciones mecánico-cuánticas. De este modo, para sorpresa del filósofo, la *VAL* dispone del instrumental suficiente para superar estos desafíos de manera similar al mito platónico de la caverna o al mundo ilusionista que Borges imagina en "las ruinas circulares". En palabras menos rimbombantes, la *VAL* es capaz de proveer una explicación razonable por la que el mundo observable, compuesto de mesas, sillas y vasos tridimensionales, resulta ser una ilusión detrás de una realidad que se constituye de un campo y una partícula

[137] De aquí en adelante se denotará como "partículas.ª los elementos emergentes de la partícula representativa que viven en el espacio tridimensional no fundamental.

multidimensional. A este respecto, recuérdese que la ecuación guía dictamina que el gradiente de la fase del campo guía es proporcional al campo de velocidad. Según la *VAL*, este campo de velocidad tiene su origen fundamentalmente en un espacio $3N$ dimensional, mientras que las "partículas"tridimensionales son proyecciones ilusorias y emergentes de la trayectoria representativa del sistema en un espacio que no es el fundamental. De este modo, el acoplamiento entre la partícula representativa y el campo permite interpretar a este último de manera similar a la *TOB*, es decir, como un "campo guía de información activa", ó bien, como un campo de causa formal. Aunado a lo anterior, los efectos del campo son tales que si se analiza el sistema en sus partes constitutivas, es decir, en el espacio físico de tres dimensiones, es posible hacer una descripción heurística y aproximada del movimiento de "partícula" en términos de "fuerzas aristotélicas" proporcionales a la velocidad. Recuérdese que al usar terminología aristotélica, una causa formal involucra un agente causal que se caracteriza por manifestar una tendencia intrínseca del sistema, en contraste con las causas eficientes, que son propias de las fuerzas externas newtonianas. En este sentido, la *VAL* es una interpretación que, a diferencia del esquema newtoniano, introduce heurísticamente un elemento, 'fuerza', que no es proporcional a la aceleración y que se define simplemente como 'un agente que causa movimiento'. De este modo, la *VAL* "recupera" el mundo ilusorio tridimensional y clásico al que los sentidos tienen acceso, por medio de un instrumental metafísico que incorpora un dualismo (en relación con los objetos que existen), y un monismo (en relación al espacio donde se definen).

Ahora bien, si se amplía esta discusión hasta cubrir los aspectos explicativos, habría de prestar atención a los elementos que desempeñan un papel fundamental frente al poder explicativo que ostenta esta interpretación. No hace falta una revisión exhaustiva para concluir que la *VAL* no es compatible con una noción de explicación mecanicista donde se introducen agentes causales eficientes. Al contrario, a la par con el proyecto que la *MB* ambiciona, esta interpretación presupone un modelo explicativo que prescinde de fuerzas y potenciales newtonianas y pone de manifiesto nociones aristotélicas de la cinemática y la causalidad. Sin embargo, a diferencia de la *MB*, la *VAL* reivindica el estatus significativo del espacio multidimensional de $3N$ dimensiones en compatibilidad con una tesis holista, y abre una puerta a la comprensión de aspectos emergentes al que los sentidos tienen acceso, por ejemplo, las sillas, las mesas, etc. No obstante, más allá de las virtudes explicativas que la *VAL* puede llegar a tener, se han podido vislumbrar varias objeciones en el amplio mar de la literatura. Por ejemplo, por lo visto anteriormente, es un hecho que elevar el estatus fundamental del espacio multidimensional donde la *VAL* se define puede ayudar a la comprensión causal y mecánica de los efectos no locales y atípicos que se presentan en el ámbito de la *MCU*. Sin embargo, al tratar de "rescatar" o reproducir los fenómenos observables, como lo son, las sillas, las mesas y todo objeto perceptible, parece que un compromiso metafísico con respecto a dicho espacio resulta ser vulnerable y problemático [Albert, 1996a, pp.125-127]. La razón es que el espacio multidimensional donde viven, tanto el campo como las partículas, es diferente al espacio de configuración. A continuación se verá en detalle el origen de esta anomalía.

Como bien se dijo arriba, el espacio de configuración es un espacio derivado que se construye a partir del espacio físico tridimensional en el que viven los objetos perceptibles. Tomando en cuenta esta observación, quizá sea posible construir un modelo ontológico que sea compatible con la ontología de la *VAL*, pero que difiere de los modelos que anteriormente se mencionaron. En efecto, este modelo ya existe y Albert (en palabras de Goldstein) lo llama 'the marvelous point picture'. Dicho modelo es dualista, en tanto que comprende a la función de onda y la partícula representativa, pero también es monista, en tanto que ambos objetos viven en un espacio multidimensional de $3N$ dimensiones. Sin embargo, aunque este último es isomorfo al espacio de configuración, no es equivalente por prescindir de la estructura que se obtiene al identificar a cada partícula en dicho espacio. En otras palabras:

> What we're down to now is a picture of Bohmian mechanics in which both the wave-functional and the corpuscular elements of the world are equally real and concrete and fundamental, and in which both of them float around in a single, real, fundamental, free-standing, very-high-dimensional space. The space in question here is going to be precisely the 3N-dimensional member of the pair real physical spaces in the two-space picture. And what the world consists of, on this picture, is a wave function which evolves in accord with the Schrödinger equation and a single material corpuscle, which changes its position in that 3N-dimensional space in accord with the Bohmian guidance condition. Call it (after Shelly Goldstein) the marvelous point picture. [Albert, 1996b, p.127]

Ahora bien, una vez que se ha identificado un modelo ontológico en estos términos, es importante preguntarse la manera en que este último reproduce el mundo manifiesto dentro de su jerarquía ontológica, como es el caso de las mesas, las sillas, etc. Es decir, asumiendo de forma análoga a la *MB*, que el mundo observable puede describirse de acuerdo con la configuración de "partículas" tridimensionales, uno espera especificar la manera en que N partículas tridimensionales emergen de dos objetos y un espacio multidimensional. Albert propone, para ello, especificar una función hamiltoniana que asocie un punto del espacio multidimensional con un punto en el espacio de configuración. Es decir, bajo ciertas condiciones que se pueden codificar en el Hamiltoniano del sistema, es posible asociar conjuntos ordenados de coordenadas de un espacio $3N$ dimensional, de tal forma que se pueda construir el espacio de configuraciones para N partículas de tres dimensiones. Solo por medio de esta identificación, es posible describir la dinámica de corpúsculos tridimensionales a partir de un modelo que se define en un espacio de $3N$ dimensiones (ver detalles en [Albert, 1996b, p.130-133]). De este modo, en el caso de que la *VAL* admita dicho Hamiltoniano, todo parece indicar que es compatible con 'the marvelous point picture'. Sin embargo, a pesar de su similitud, la *VAL* prescinde de un método formal, como el que Albert implementa, para demostrar la adecuación empírica de la teoría. Es decir, esta interpretación no especifica ninguna función hamiltoniana que permita reproducir los objetos perceptibles en términos de los objetos y el espacio multidimensional. Alguien podría objetar que la adecuación empírica de esta interpretación es parte constitutiva de la interpretación estándar de sus ecuaciones de movimiento. Sin embargo, es claro que la ecuación guía depende explícitamente de la función de onda, y está última es solución de la ecuación de Schrödinger, donde las funciones hamiltonianas desempeñan un rol fundamental[138].
Finalmente, tomando en cuenta esta última anomalía, se puede concluir que si bien, la *VAL* no es compa-

[138] Para los lectores que no están convencidos con esta explicación, es recomendable leer la sección dedicada a la *TCB* en [Albert, 1996a, pp.130-3].

tible con un modelo de explicación mecanicista, no es claro cuál sería el modelo más apropiado para esta interpretación. David Albert insiste, desde una visión humeana, que el 'marvelous point picture' permite una explicación razonable de la adecuación empírica de la teoría. Sin embargo, a causa de las deficiencias que presenta este modelo en el contexto de la *VAL*, alguien más podría inclinarse hacia una concepción de explicación enfocada a derivar algunos de los postulados en términos matemáticos y formales. Por ejemplo, la posibilidad de derivar el postulado estadístico a partir de argumentos prestados de la termodinámica fuera de equilibrio [Valentini, 1992]. De igual modo, también uno podría recurrir a otras nociones de explicación que remita a las simetrías de la *VAL*, como por ejemplo, la simetría que se deriva del espacio cinemático aristotélico que, aunado a la relación de proporcionalidad entre las fuerzas aristotélicas y la velocidad, permite la adopción de un sistema de referencia privilegiado (ver detalles en [Valentini, 1997]). Tomando en cuenta estas observaciones, se puede concluir, análogamente al caso de *TOB* y *MB*, que no existe un consenso respecto a la afinidad que supuestamente existe entre los compromisos ontológicos de la *VAL* con los modelos explicativos que se presentan en la literatura.

13.5.4. Ruptura de la Sub-determinación: Poder Explicativo

Hasta aquí se ha evaluado el desempeño de la *TOB*, la *MB*, y la *VAL* en virtud de su poder explicativo. A primera vista, parece que esta labor no ha tenido ninguna consecuencia relevante. En todos los casos, la conclusiones a las que se ha llegado han arrojado una lección importante. En pocas palabras, no existe una manera única de caracterizar a una interpretación a partir de su poder explicativo. Pueden existir distintos modelos explicativos que sean compatibles con los compromisos ontológicos de cada interpretación, tal como se ha demostrado en algunos casos. Tomando en cuenta el objetivo del presente trabajo, esta lección resulta ser de suma importancia dado que muestra las deficiencias del poder explicativo *como criterio para la elección teórica* en el ámbito de la sub-determinación existente. Hay que advertir que no se está desprestigiando el rol que juega la explicación científica en el ámbito del entendimiento relativo a las prácticas científicas. Al contrario, al abrir la posibilidad de que existan distintos modelos explicativos compatibles con una interpretación particular, es un punto a favor del nivel de entendimiento que se puede desarrollar gracias a la ciencia. En realidad, lo que se quiere argumentar es que el poder explicativo no es un candidato adecuado para garantizar una ruptura en la sub-determinación presente entre interpretaciones de una misma teoría. En otras palabras, en el contexto Bohmiano el poder explicativo parece que no tiene algo que ver con la verdad. El realista Bohmiano no ha escapado del problema.

13.5.5. La Simplicidad Bohmiana

Mucho se ha hablado acerca de la simplicidad en la ciencia. Algunos conceptos conocidos como "la navaja de Ockham", la "parsimonia", ó bien, "la economía axiomática", han desempeñado un rol importante en algunas discusiones filosóficas, hasta el grado de considerarlos serios candidatos en un contexto realista para confirmar y elegir teorías con virtudes predictivas en común. No obstante, antes de realizar un análisis más profundo en torno a esta virtud epistemológica, es importante hacer una aclaración respecto al despliegue de su significado en distintos contextos de investigación. En efecto, desde un contexto filosófico más general, es importante trazar una distinción entre la *Simplicidad Sintáctica* y la *Simplicidad Ontológica* [Baker, 2016]. Tomando en cuenta la posibilidad de una axiomatización teórica, la primera refiere al mínimo de principios y axiomas necesarios para la claridad y la adecuación empírica de la teoría, mientras que la segunda pretende limitar la robustez metafísica de una interpretación, sin perder claridad y adecuación empírica. En tanto que la simplicidad sintáctica no escapa al ámbito lingüístico, instrumental y lógico de cualquier axiomatización (incluyendo a los problemas que esta tarea ha suscitado), la simplicidad ontológica guarda, en cambio, estrecha relación con el realismo científico que se ha caracterizado aquí, y por ende, con criterios de continuidad y unificación. Por ejemplo, el carácter simplista de la Naturaleza, la parsimonia, los procesos físicos que minimizan la energía, etc. Aunque ambas categorías pueden estar estrechamente vinculadas en algunos contextos específicos, en este trabajo se apelará a la jerarquía conceptual de las interpretaciones Bohmianas para entender más de fondo su grado de afinidad o independencia. Tomando esto en cuenta, a continuación se hará una caracterización de las interpretaciones Bohmianas de acuerdo a su simplicidad sintáctica y ontológica.

En lo que concierne a su simplicidad sintáctica, es claro que todas las interpretaciones Bohmianas están a la par, debido a que comparten un cuerpo teórico, es decir, la versión mínima de la *TCB*. Aunque esta estructura no sea del todo un cuerpo lingüístico axiomático sin ningún contenido semántico, es importante recalcar que, en el caso de que fuera posible una axiomatización de esta versión mínima, todas las interpretaciones Bohmianas la compartirían. En este sentido, la simplicidad sintáctica no parece tener consecuencias significativas ni alentadoras como un criterio de elección teórica.

A causa de que la simplicidad sintáctica no resulta ser relevante en el contexto de las interpretaciones Bohmianas, es pertinente preguntarse si es posible hacer una posible modificación del formalismo Bohmiano. Por ejemplo, las extensiones teóricas (*TOB** y *VAL**). Como bien se sabe, ambas son extensiones que difieren de sus originales en cuanto a su estructura matemática. Tomando en cuenta el análisis que se hizo al respecto, es claro que la *MB*, la *TOB*, y la *VAL* son más simples sintácticamente, dado que tanto la *TOB** como la *VAL** contienen una estructura matemática adicional a la versión mínima, del cual se construyen tanto la *MB*, la *TOB* y la *VAL*. En efecto, esta estructura adicional es, en esencia, los nuevos términos teóricos que se deben añadir a la ecuación guía, ó bien, a la ecuación de Schrödinger, de tal manera que la igualdad $\boldsymbol{\nabla} S = \mathbf{p}$ no se satisfaga. De aquí se sigue que, por tratarse de interpretaciones que son sintácticamente más robustas, tanto la *TOB** como la *VAL** no resultan ser los mejores candidatos si se le adjudica una importancia significativa a la simplicidad sintáctica.

Ahora bien, respecto a la simplicidad ontológica hay mucho que decir, sobre todo porque tiene una estrecha relación con el contexto realista en el que se fundamenta la presente discusión. En primera instancia se empezará por caracterizar a la *MB*, para luego continuar con el resto de las interpretaciones.

Una de las motivaciones que llevaron a desarrollar la *MB* es, después de todo, una intuición muy enraizada en los círculos de investigación científica en cuanto a la finalidad de concebir una interpretación que tenga el mínimo de compromisos metafísicos. En efecto, no es una casualidad que a la *MB* se le haya llamado la "interpretación minimalista" de la *TCB* [Dürr et al., 1995b]. A grandes rasgos, esta interpretación habla acerca de partículas puntuales que se mueven en el espacio físico de tres dimensiones. Estas partículas, incluyendo la posición donde se instancian, comprenden la *Ontología Primitiva* de la teoría, es decir, son los únicos compromisos metafísicos relevantes que se definen en el espacio físico tridimensional [Allori, 2012]. Como bien ya se dijo, en esta interpretación, no existen fuerzas, campos, ni otro objeto real que acompañe a las partículas Bohmianas. Esto induce a pensar que la simplicidad ontológica es parte constitutiva de la *MB*. No obstante, creo importante hacer un análisis de las leyes y el estatus de las propiedades de la *MB*, que podrían revisar o corroborar con mayor rigor esta afirmación. En esta labor, se mencionarán algunos aspectos relativos a otras interpretaciones.

Recuérdese que en esta interpretación, la ecuación guía, la ecuación de Schrödinger, y el postulado estadístico (para la función de onda universal), mejor conocido como la hipótesis del equilibrio cuántico, son postulados con un estatus metafísico privilegiado. La imagen del mundo que la *MB* describe consiste en un "universo puntillista" compuesto por partículas Bohmianas que se mueven de acuerdo a leyes deterministas, representadas por las ecuaciones de evolución y la función de onda universal. Estas leyes gobiernan la dinámica de estas partículas sin la necesidad de introducir agentes causales. Como parte de una justificación parcial, la *MB* motiva el origen de la ecuación guía mediante argumentos de simetría, específicamente, esta ley es resultado de la invarianza galileana que se asume como fundamental [Dürr et al., 1992]. Así mismo, la *MB* se empeña en darle un sentido físico a la hipótesis del equilibrio cuántico, más allá de sus connotaciones pragmáticas. En efecto, contrariamente al resto de las interpretaciones, la *MB* postula esta hipótesis en consistencia con las leyes y los resultados experimentales, de acuerdo con una noción de tipicalidad respecto a la configuración inicial de todas las partículas del universo. Es un hecho completamente físico y real que la configuración inicial de las partículas corresponde a la que tuvo este universo determinista y también es un hecho físico y real que dicha configuración inicial tuvo alta probabilidad de ocurrencia, tomando en cuenta todas las posibles configuraciones que podía tener con respecto a una distribución de probabilidad que la Naturaleza dictaminó. En este sentido, a diferencia de una concepción epistémica de la probabilidad, la *MB* se compromete objetivamente con dicha distribución dado que involucra un aspecto que no depende del conocimiento y que es inherente al comportamiento del mundo externo. Es una virtud de esta interpretación que, gracias a una propiedad de equivarianza, se puedan reproducir todas las predicciones mecánico-cuánticas, esto mediante la introducción de funciones de onda efectivas y distribuciones epistémicas definidas en un subsistema que emergen de la configuración de las partículas de todo el universo de acuerdo con una distribución en equilibrio cuántico [Dürr et al., 1992].

Tomando en cuenta estas observaciones, es un hecho que la *MB* es una interpretación austera en el sentido de que asume un mínimo de compromisos metafísicos, en lo que respecta a su ontología primitiva. Sin embargo, hay quién podría afirmar que, a costa de un mejor entendimiento de algunas presuposiciones y principios, como es el caso de la ecuación guía, ó bien, la hipótesis del equilibrio cuántico, esta interpretación termina teniendo un peso metafísico mayor. A este respecto, no es claro cuál sea el bagaje metafísico que involucra tanto la simetría galileana como la la hipótesis del equilibrio cuántico si se le distingue de la ontología primitiva. En este punto, es importante enfatizar, en lo que respecta a un realismo de objetos y propiedades, que cualquier argumento que involucre a las simetrías físicas como a algunas nociones de probabilidad, refiere, después de todo, a la ontología primitiva de la teoría, es decir, a las partículas Bohmianas. Ahora bien, en lo que respecta al estatus de las propiedades en la *TCB*, existen dos aspectos importantes que no deben dejarse inadvertidos. El primero es una actitud pragmática y operacional con respecto a la posición de las partículas, mientras que el segundo involucra una actitud respecto a su existencia. Parece un hecho, al menos hasta el momento, que: i) la medición de cualquier propiedad de un sistema puede realizarse en términos de la medición de la posición macroscópica de un dispositivo experimental que sea adecuado para ello. Esto es diferente y no debe confundirse con la suposición de que: ii) la posición es la única propiedad que se puede medir, ó bien, que: iii) la posición es la única propiedad real de las partículas. Tomando en cuenta estas distinciones, es importante mencionar algunos ejemplos. En cuanto a (i), conviene ilustrar el procedimiento para medir el espín de un electrón. En este caso, se puede diseñar un experimento de Stern-Gerlach, el cual consiste en enviar un electrón horizontalmente a través de un campo magnético polarizado con dirección perpendicular a la partícula. Resulta que, al atravesar el campo, el electrón se desvía en dirección vertical ya sea hacia arriba o abajo (dependiendo si su espín es arriba o abajo) dejando una marca puntual en una pantalla. De ese modo, el espín puede determinarse dependiendo de la localización de la partícula en la pantalla (arriba o abajo) después de pasar el campo. Por otro lado, un claro ejemplo de una interpretación que satisface (i) pero no satisface (ii) y (iii) es la *TOB*. Aquí se sume que todas las propiedades clásicas de un sistema (la posición, momento, energía, etc.) son reales y se pueden describir por medio de la teoría independientemente del proceso de medición [Holland, 1995, Ch.3]. Esta tesis filosófica, llamada *Maximalismo* de las propiedades, es parte constitutiva de la *TOB*. Sin embargo, gracias a que el estado óntico del sistema es equivalente en todas las interpretaciones Bohmianas, las propiedades en la *TOB*, con excepción de la posición, son extrínsecas, en el sentido de que cualquier propiedad de una partícula depende y se define en función de la posición y la función de onda asociada al resto de las partículas. En este sentido, en un contexto general que involucra a cualquier interpretación Bohmiana, la única propiedad que es intrínseca e independiente corresponde a la posición de las partículas. Sin embargo, en vista que que todas las interpretaciones Bohmianas son empíricamente equivalentes, esta característica de la *TOB* sólo tiene relevancia con respecto a algunas virtudes epistemológicas que trascienden el espectro predictivo.

Un elemento importante para entender estas distinciones, y por ende, la diferencia entre una tesis maximalista con una minimalista tiene estrecha relación con los procesos de medición en un contexto neutral que trasciende cualquier interpretación Bohmiana. Gracias a que las partículas siempre tienen posición bien definida y esta última es una propiedad independiente de la función de onda, la *TCB* en su versión mínima es empíricamente adecuada, evitando con ello cualquier problema en relación con los procesos de medición. Respecto a este punto, valdría la pena recordar que una medición es, después de todo, una interacción particular entre el dispositivo experimental y el sistema de estudio en cuestión, cuyo resultado depende de su interacción, y sobre todo, del estado macroscópico de la función de onda y la configuración de las partículas asociadas al dispositivo. Tomando en cuenta esta observación, a causa de que cualquier medición perturba al sistema de estudio mediante una alteración abrupta a la amplitud de la función de onda asociado a este último, resulta que el valor obtenido de cualquier propiedad asociada a las partículas no coincide con su valor preexistente, con una especial excepción: la posición. Esto implica que después de una medición en términos de posiciones (i), la posición que se observa es, en realidad, la posición de las partículas del dispositivo (por ejemplo, del puntero). Esta propiedad resulta estar correlacionada con el soporte del paquete de la función de onda total (que se encuentra en una superposición macroscópica) y el cual corresponde al valor de cualquier propiedad del sistema que se mide. Desde esta perspectiva, resulta que la posición es la propiedad responsable de la adecuación empírica de la teoría. Por esta razón, se dice que la *TCB* le confiere un lugar privilegiado a la posición, pero esto no significa que esta última se interprete necesariamente como la única propiedad real.

En consistencia con el estado óntico de cualquier sistema Bohmiano, una opción es asumir un maximalismo en la *TOB*, de tal manera que se reivindique el carácter perturbativo de las mediciones inherente a la dinámica del sistema. Esto es, asumir que todas las propiedades tienen un importe ontológico pero su acceso epistémico (con excepción de la posición) está en principio limitado por la perturbación que se produce al medir. Por otro lado, dejando de lado compromisos metafísicos que no abonan a la adecuación empírica de la teoría, la *MB* propone otro tipo de interpretación respecto al carácter ontológico de las propiedades en [Dürr et al., 2004] y [Dürr et al., 1996]. Sabiendo el estatus privilegiado de la posición, la *MB* asume que la única propiedad real y objetiva es la posición de las partículas y que las propiedades restantes son simplemente herramientas matemáticas que, después de todo, reflejan el estado contextual del sistema y el aparato de medición, ó dicho de otro modo, sirven para codificar información acerca de su interacción. Por ejemplo, es un hecho que si se efectúa una medición del espín de un electrón hacia otras direcciones, el resultado será distinto al que inicialmente se tenía. Esta característica singular de las mediciones Bohmianas respalda la interpretación contextual de los observables. De acuerdo con esta interpretación, los operadores que aparecen recurrentemente en el formalismo de la *MCU* no expresan propiedades de las partículas, sino que caracterizan la interacción entre el dispositivo experimental y su sistema de estudio.

> We thus believe that contextually reflects little more than the rather obvious observation that the result of an experiment should depends upon how it is performed! [Dürr et al., 1996, p.11]

A manera de conclusión, se puede afirmar que la única propiedad real, objetiva y no contextual de la *MB* es la posición de las partículas, que presume ocupar un lugar privilegiado tanto en las predicciones de la teoría (i) como en sus compromisos metafísicos (iii). Por esta razón, la *MB* es una interpretación *minimalista* del formalismo Bohmiano, de acuerdo con la cual la única propiedad con importe ontológico de las partículas bohmianas es la posición. Dado que esta última es la única propiedad real, se concluye que la *MB*, a diferencia de la *TOB*, tiene un peso ontológico menor.

En relación a la *TOB*, es importante recordar que esta interpretación no solamente se compromete con la existencia de partículas Bohmianas tridimensionales, sino también con un campo cuántico que se representa mediante una función de onda multidimensional. En vista del análisis anterior, se sabe que en el espacio de tres dimensiones este campo cuántico se manifiesta mediante fuerzas cuánticas que actúan sobre las partículas. Desde esta visión, la *TOB* es una interpretación que asume dualismo ontológico: la existencia tanto de partículas como la de un campo cuántico en diferentes espacios. En consistencia con este dualismo, la *TOB* se ve en la necesidad de añadir reglas de correspondencia bien definidas entre los dos espacios donde viven dichas entidades, a causa de mantener su coherencia. Por otro lado, al asumir un maximalismo respecto a las propiedades, es claro que la *TOB*, en comparación con la *MB*, no es del todo una interpretación que sea austera en un sentido ontológico. A este respecto, la *TOB* resulta ser una interpretación metafísicamente robusta, siendo este aspecto uno de los puntos débiles desde los cuales muchos críticos han fundado sus objeciones.

Finalmente, resulta que al analizar a la *VAL* frente a la simplicidad ontológica, se puede situar en un punto intermedio entre la *TOB* y la *MB*. Análogamente a la *TOB*, se tiene un dualismo ontológico pero que comprende un campo guía multidimensional y una sola partícula representativa en un espacio en común. Sin embargo, como bien lo menciona David Albert, en una interpretación dualista definida en un sólo espacio, las reglas de correspondencia que se necesitan para el caso de la *TOB* no son necesarias. Dado que el espacio tridimensional y todas las entidades que se postulan en dicho espacio (las fuerzas aristotélicas y las proyecciones de la partícula representativa en *N* partículas Bohmianas tridimensionales) son elementos secundarios y emergen de un espacio más fundamental (donde vive el campo guía y el punto representativo), no hay necesidad de introducir reglas de correspondencia que aumenten el peso metafísico de la interpretación. Aquí alguien podría apelar a una austeridad metafísica al nivel de la estructura espacio-temporal. Sin embargo, dicha posibilidad trasciende el contexto realista de esta discusión al tratarse de una estructura y no de objetos y propiedades. Por otro lado, el estatus ontológico de las propiedades Bohmianas en la *VAL* es minimalista, por lo que no tiene diferencia alguna con la *MB* en lo que concierne a este aspecto. De este modo, la *VAL* es una interpretación que asume una ontología dualista pero que prescinde de elementos metafísicos incluidos en la *TOB*, tal como son las reglas de correspondencia y la existencia de propiedades clásicas, excluyendo la posición de las partículas. En este sentido, la *VAL* se encuentra en un punto medio entre la *TOB* y la *MB* en cuanto a lo que respecta a la simplicidad ontológica.

13.5.6. Ruptura de la Sub-determinación: Simplicidad Sintáctica y Ontológica

A continuación se analizarán estas virtudes epistemológicas en el contexto Bohmiano, de acuerdo a si ambas resultan ser buenos candidatos como criterios de elección teórica. Desafortunadamente, la conclusión a la que se llegará para ambos casos no es muy optimista, al identificar una correlación negativa entre la simplicidad sintáctica y la viabilidad predictiva del formalismo, y bien, entre la simplicidad ontológica y la viabilidad predictiva de sus compromisos metafísicos.

Es claro que si las interpretaciones a evaluar tienen un formalismo en común, entonces la simplicidad sintáctica no puede usarse como criterio de elección teórica. Se sabe que esta noción de simplicidad comprende elementos puramente sintácticos, por lo que si estos últimos guardan estrecha relación con un formalismo en común a todas las interpretaciones, es imposible que puedan distinguir a estas últimas dado que su diferencia yace en el ámbito semántico. Ahora bien, si se permitiera un cambio en el formalismo de alguna de estas interpretaciones, como por ejemplo la *TOB** y la *VAL**, entonces un criterio de simplicidad sintáctica podría ser el elemento indispensable para decidir cuál de todos los formalismos (la *TOB**, la *MB*, ó bien, la *VAL**) es el más favorable. De ser éste el caso, dado que la modificación del formalismo tanto en la *TOB* como en la *VAL* sumaría una estructura adicional al original, entonces uno podría sugerir que la interpretación más adecuada y más simple en este sentido es la *MB*. No obstante, nótese que este criterio opera de manera inversa a los criterios de viabilidad predictiva en lo que respecta al formalismo, debido a que la estructura adicional de la que se habla puede guardar virtudes predictivas, tal como se ha mencionado arriba. A pesar de que tienen una estructura más robusta, tanto la *TOB** como la *VAL** resultan ser flexibles a nuevas predicciones. Bajo este panorama, se puede concluir que la simplicidad sintáctica presenta una correlación inversa con la viabilidad predictiva del formalismo, y a falta de una razón que privilegie a una en detrimento de la otra, no es posible identificar una sola virtud que sirva como criterio de elección teórica. En estas circunstancias, la simplicidad sintáctica es relevante, siempre y cuando las formulaciones en cuestión sean empíricamente equivalentes en el presente *y* en el futuro.

Ahora bien, en párrafos anteriores se llegó a la conclusión de que la la *MB* es la interpretación más austera y la que asume el menor número de compromisos metafísicos. A este respecto, no hay mucho que decir de la *TOB* y la *VAL* dado que, contrariamente a la *MB*, ambas son metafísicamente más robustas. Análogamente al caso anterior, quizá se pueda cuestionar el carácter justificativo de un criterio como el de la simplicidad ontológica dada su correlación negativa con otras virtudes de la teoría. A continuación, se revisará esta posibilidad en referencia al poder predictivo y la viabilidad predictiva relativo a cada interpretación.

En los círculos de investigación filosófica existe un gran debate respecto al peso que uno le debe adjudicar al contenido metafísico de una interpretación en balance con el entendimiento que se obtiene, generalmente asociado al poder explicativo desde una tesis realista. En este contexto, algunos filósofos creen que ambas virtudes están negativamente correlacionadas, en el sentido de que si la interpretación en cuestión asume el menor número de compromisos metafísicos, como es el caso de la *MB*, entonces escapa al poder explicativo. De la misma forma, se cree que tanto la *TOB* como la *VAL* son explicativamente superiores en comparación con la *MB*, a pesar de que se comprometen con una ontología mucho más robusta. No obstante, en vista de lo que se ha discutido hasta ahora, uno podría cuestionarse la validez de estos argumentos. En efecto, resulta que ninguna interpretación puede ser explicativamente superior a otra si no se tiene un modelo de explicación privilegiado en este contexto. Desafortunadamente, también parece que existen distintos modelos explicativos que pueden ser compatibles con cada una de las interpretaciones Bohmianas, lo que implica que no existe un "monismo explicativo"que sirva como condición para la confirmación y elección de una teoría. Se sigue que la supuesta intriga entre la carga ontológica y el poder explicativo de una teoría escapa al contexto presente simplemente porque existe un pluralismo de modelos explicativos en cada interpretación.

Contrariamente al poder explicativo, es posible concluir que la viabilidad predictiva tiene el mismo estatus frente a la simplicidad ontológica, empero con algunos detalles adicionales que habría que analizar. Recuérdese el despliegue conceptual de la viabilidad predictiva en lo que respecta a su formalismo, ó bien, a sus compromisos metafísicos. Una vez que se ha trazado esta distinción, nótese que la viabilidad predictiva del formalismo sólo tiene sentido si algunas de las interpretaciones tienen la posibilidad en un futuro de generar nuevas predicciones exitosas. Este sólo es el caso si se consideran las extensiones (la *TOB** y la *VAL**). Al contrario, la *TOB* y la *VAL* son, por construcción, (fuertemente) empíricamente equivalentes y no hay criterios empíricos que puedan decidir por alguna de ellas hoy y siempre. No obstante, como bien se argumentó aquí, es posible modificar la noción de viabilidad predictiva en términos de los compromisos metafísicos que ostenta la interpretación en cuestión. En lo que respecta a esta virtud epistemológica, la lección es que, a diferencia de la *MB*, la *TOB* y la *VAL* son interpretaciones que tienen un grado de viabilidad predictiva respecto a una noción que se encuentra íntimamente relacionada con los aspectos metafísicos de cada una de las opciones sub-determinadas. Esto abre la posibilidad de identificar una correlación negativa entre la simplicidad ontológica y la viabilidad predictiva (de sus compromisos metafísicos) en el contexto Bohmiano. Es decir, mientras la *MB* es una interpretación metafísicamente austera pero su ontología no genera nuevas predicciones, la ontología de la *TOB* y la *VAL* es más robusta pero permite, en efecto, nuevas predicciones. Esta observación permite concluir, análogamente al caso de la simplicidad sintáctica, que la presencia de una correlación negativa entre la simplicidad ontológica y la viabilidad predictiva merma la posibilidad de encontrar un criterio de elección suficientemente convincente para romper la sub-determinación. El realista Bohmiano no ha escapado del problema.

13.6. Conclusiones

A lo largo de esta sección, se ha investigado la posibilidad de adoptar una actitud realista con respecto a la *TCB*. En esta labor, se ha propuesto una caracterización mediante el despliegue de sus aspectos metafísicos, semánticos y epistémicos, relativos a un realismo en su versión estándar. Esto ha sido posible mediante la formulación de una versión mínima de la teoría, de la cual se construyen diferentes interpretaciones (la *TOB*, la *MB* y la *VAL*). En efecto, tomando en cuenta que la versión mínima dispone del bagaje metafísico suficiente para explicar el éxito predictivo de la teoría, las diferentes interpretaciones que se tienen son, después de todo, refinaciones a su contenido metafísico. De este modo, su función trasciende el ámbito predictivo y consiste en entender y ser lo suficientemente claro con respecto a la imagen del mundo que construyen. Tomando en cuenta estas observaciones, se ha asumido que el mundo está compuesto de objetos y propiedades en acorde con una noción aristotélica de substancia. También, se ha buscado claridad y adecuación empírica de la versión mínima de la teoría, evitando con ello, algunos problemas semánticos que aquejan al realista, particularmente el problema de la medición. Por último, en vista de que las interpretaciones Bohmianas están sub-determinadas por la misma teoría, se ha propuesto un análisis interpretativo frente a tres virtudes epistemológicas (la viabilidad predictiva, el poder explicativo y la simplicidad), con la intención de evaluar su desempeño como criterios de elección teórica. Sin embargo, la conclusión a la que se ha llegado no es del todo positiva. En efecto, los resultados de esta evaluación apuntan a que no existe una manera suficientemente razonable para elegir una interpretación de todas las opciones sub-determinadas. En este sentido, una actitud realista con respecto a esta teoría resulta ser problemática, debido a que persiste un problema de sub-determinación entre sus interpretaciones que, después de todo, son indispensables para un entendimiento refinado del mundo Bohmiano.

Ahora bien, esto no impide que se consideren otras tesis filosóficas que puedan evitar problemas de sub-determinación en el ámbito interpretativo. Bajo estas circunstancias, este trabajo ha caracterizado de manera rigurosa una tesis realista de perfil estructural, desde la cual es posible evitar estos problemas de sub-determinación, tomando en cuenta una interpretación unificada que abarque la estructura que subyace a todas las opciones sub-determinadas. En este caso, es importante identificar una estructura que sea común a todas las interpretaciones Bohmianas y con la cual uno se comprometa ontológicamente. Para ello, es importante notar que la versión mínima de la *TCB* es precisamente un cuerpo teórico que es común a todas sus interpretaciones, en el sentido de que comprende el mínimo de requisitos sintácticos y semánticos para explicar el éxito predictivo de la teoría. No obstante, al considerar este cuerpo teórico como un candidato realista de perfil estructural, es importante hacer algunas observaciones al respecto. Como bien se dijo al inicio de esta sección, la versión mínima de la teoría es un cuerpo matemático con contenido tanto sintáctico como semántico, en el sentido de que contiene una carga metafísica implícita en sus ecuaciones. Es decir, se determina el estado óntico del sistema junto con sus ecuaciones de evolución, pero aunque no se especifica ni se refinan los conceptos involucrados en ella, esta versión involucra una Metafísica de objetos y propiedades que dista de un mundo estructural. En vista de este hecho, es importante identificar un cuerpo matemático detrás de esta versión mínima que sea independiente de sus objetos y propiedades. Siguiendo con los resultados de este trabajo, una posibilidad sería buscar las simetrías que subyacen a esta versión mínima y que puedan reproducir todos sus postulados en su forma original. A este respecto, es pertinente preguntarse si es posible encontrar tales simetrías. Afortunadamente, no es necesario ir al fondo de esta cuestión para llegar a una conclusión positiva. Como se demostró en secciones anteriores, la estructura que subyace a todas las interpretaciones Bohmianas es, en efecto, una Representación del *Grupo Metapléctico* en el espacio de Hilbert. Este grupo es la *Doble Cubierta* del *Grupo Simpléctico*, la simetría que subyace a la *MC* en su formulación Hamiltoniana. Esto implica que los tres postulados que comprenden a la versión mínima son una reminiscencia de la estructura simpléctica que tiene la *MC* en el espacio fase. Al construir una Representación en el espacio de Hilbert a partir de esta estructura simpléctica, se obtienen las ecuaciones de evolución de la versión mínima. Sólo de este modo es posible hablar de objetos y propiedades, y de igual manera, es posible nombrarlos de acuerdo a una re-conceptualización en términos de esta Representación. El procedimiento para derivar estos postulados a partir de las Representaciones de un grupo de simetría es, después de todo, un resultado matemático completamente afín a las propiedades estructurales de los grupos de Lie y sus Representaciones. Sin embargo, para establecer una equivalencia (tanto sintáctica como semántica) entre las Representaciones de este grupo de simetría y la versión mínima, es importante identificar al parámetro $\hbar$, que aparece espontáneamente en uno de los postulados, como la bien conocida constante de Planck. Esta identificación permite hablar acerca de partículas Bohmianas gobernadas por la función de onda mediante sus ecuaciones de evolución, sin establecer un compromiso ontológico con estos objetos. Al contrario, estos últimos son, después de todo, entidades estructurales que se derivan de una simetría subyacente, pero que son referidas en términos de un lenguaje conocido, como es el caso del lenguaje común de objetos y propiedades, ó en este caso, de partículas y constantes universales. De esta manera, al establecer un compromiso ontológico con respecto a los homomorfismos del *Grupo Simpléctico* y sus Representaciones, es posible evitar el *PSD* que persiste entre diferentes interpretaciones que se contraponen en búsqueda de una imagen falsa del mundo. Habiendo dicho esto, es pertinente concluir con una lección optimista: la presencia de una sub-determinación inevitable entre diferentes interpretaciones (en términos de objetos y propiedades), permite justificar y motivar una tesis estructuralista bajo una caracterización equivalente a la que se ha realizado en este trabajo. El realista Bohmiano ha escapado del problema.

14. Individualidad en la Mecánica Cuántica

14.1. La Individualidad ¿Un Desafío Para el Realista?

Aunado a los desafíos que plantea una tesis realista en la *TCB*, existen otros problemas de índole metafísico que concierne a la individualidad como concepto relevante dentro de un realismo orientado hacia una Metafísica de objetos y propiedades. Hasta el momento, sólo se ha planteado el problema de la subdeterminación de la interpretación por la teoría en el contexto Bohmiano, en cuyo caso distintos compromisos metafísicos, íntimamente relacionados con un realismo estándar, compiten en víspera de una posible elección y justificación teórica. Por ejemplo, la ontología primitiva de la *MB*, que consiste en corpúsculos discernibles, o el dualismo ontológico de la *TOB* y la *VAL*, que consiste en campos y corpúsculos de diferente índole a los objetos clásicos. No obstante, ante la imposibilidad de observar a simple vista, ó bien, detectar empíricamente la individualidad de los objetos cuánticos, si es que existen, se ha suscitado un cuestionamiento profundo respecto a si es posible elucidar una noción de individualidad en el contexto de la *MCU*. Aunado a este tipo de cuestionamientos, se han publicado innumerables trabajos que tratan de reivindicar el carácter "granular" de esta teoría auspiciado por el andamiaje instrumental de la Metafísica, sugiriendo con ello una ontología más "natural" con base en concepciones clásicas, ó bien, mediante una concepción de individuo más flexible al carácter atípico de los fenómenos cuánticos. Sin embargo, en otras instancias, se han pronunciado a favor de una ontología que ha contemplado eliminar el concepto de individuo, abriendo la posibilidad de incorporar otros elementos que no supervengan a este último, como es el caso del *REO*. De este modo, sin comprometerse inicialmente con alguna de estas posibilidades, a continuación se pretende hacer un análisis crítico de las propuestas que se ha sugerido en torno a una noción de individualidad compatible con la *MCE*. Posteriormente, esperando correr con mayor suerte, se tratará de caracterizar una noción de individualidad en el contexto de la *TCB*, tomando en consideración la versión mínima que abarca a todas sus interpretaciones. Después de esta labor, se pretende convencer al lector de que si se quiere salvaguardar una noción de individualidad compatible con la *MCU*, entonces se debe definir en términos de una formulación físicamente diferente pero empíricamente equivalente a la versión mínima de la *TCB*. Esta formulación es una variación simetrizada que evita elementos metafísicos superfluos y dispensables y asume la existencia de partículas discernibles que únicamente poseen posición extendida a lo largo de trayectorias.

Es importante recalcar que este debate ha acaparado la atención de muchos realistas con perfil estructuralista. Por esta razón, se quiere retomar la presente discusión de acuerdo con el debate filosófico que se ha desarrollado en torno al *REO*. De este modo, después de evaluar la tensión que existe entre una noción de individualidad supuestamente compatible con la *MCU* y este tipo de realismo, se podrá advertir que si bien, es posible introducir una noción de individualidad en esta teoría (mediante la formulación Bohmiana referida), es más razonable interpretar esta noción particular en términos estructurales que justifique una tesis realista análoga a la que se ha caracterizado aquí.

El procedimiento será el siguiente: en la primera parte, se pretende realizar un preámbulo teórico sobre algunos conceptos clave que serán de gran utilidad para el resto de esta sección. Este incluye un análisis riguroso con respecto a la noción de individualidad que se usará aquí, tomando en cuenta algunas definiciones que se han empleado en este trabajo, como es el caso del concepto de objeto y propiedad. Así mismo, se establecerán los diferentes problemas concernientes a la individualidad estrechamente vinculados con su estatus lógico, ontológico, epistemológico y semántico. En la segunda parte, después de situar la importancia y la problemática de la individualidad en la *MCU*, se realizará un diagnóstico crítico de esta noción en el contexto particular de la *MCE*, vinculándola con el debate realista de perfil estructural. Más adelante (en la tercera parte), se pretende caracterizar una noción de individualidad en el contexto de las interpretaciones Bohmianas, tomando en cuenta diferentes fuentes bibliográficas pero también elementos filosóficos que se han tratado en este trabajo. Esto se hará desde una perspectiva que engloba a todas las interpretaciones, y con base en ella, se identificarán algunos problemas que impiden establecer una noción de individualidad en este contexto. En la cuarta parte, se determinará una noción de individualidad compatible con la *MCU* en términos de una formulación diferente a la versión mínima de la *TCB*. Finalmente, tomando en cuenta este último resultado, se quiere justificar (en la quinta parte) una tesis estructuralista en términos del realismo estructural que se ha caracterizado en este trabajo.

14.2. Una Introducción al Concepto de Individuo

Antes de definir cualquier concepto formal en un contexto, lo más general posible, es importante situar esta discusión desde un panorama más accesible. Para ello, se invitará al lector a que considere el siguiente ejemplo: imagínese un sistema que comprende únicamente *objetos* observables, como es el caso de las sillas, las mesas, etc. Ahora bien, tome un subconjunto de esta familia de objetos observables que contengan algunas *propiedades* en común, por ejemplo, las hojas de los árboles de Maple. A primera vista, parece que estos objetos pueden identificarse, como *individuos*, en virtud de que poseen propiedades cualitativas, como son, sus colores característicos (dependiendo de la estación del año), su forma, su tamaño, etc. Ahora bien, si alguien encontrara dos hojas de Maple con las mismas propiedades cualitativas, tarde o temprano trataría de identificar las características que le son únicas. Una posible respuesta sería apelar a una propiedad que no sea común a ambas hojas, por ejemplo, su posición en el espacio físico tridimensional, tomando en cuenta que ambas no pueden ocupar el mismo espacio. No obstante, este tipo de caracterización asume implícitamente que dos objetos son *idénticos* sí y sólo si ambos comparten todas sus propiedades tanto cualitativas como espacio-temporales. De lo contrario, resultarían ser individuos *distinguibles* que difieren en algún aspecto que se puede conocer. Este supuesto conocido como el *Principio de Indiscernibles de Leibniz* garantiza la individuación de los objetos a partir de su discernibilidad, proceso que parece tener estrecha relación con la posibilidad de conocer. Sin embargo, es posible elucidar una noción de individuo que vaya más allá de su caracterización epistemológica y sea independiente de su discernibilidad en este sentido epistémico. Uno podría imaginar la existencia de una substancia o substrato sustancial inherente a las hojas de Maple que no supervenga en absoluto en todas sus propiedades conocidas. Es decir, que identifique al objeto independientemente de las cualidades que posee. Este elemento podría garantizar la individuación de las hojas de Maple, independientemente de dichas cualidades y en virtud de su identidad. Tomando en cuenta esta posibilidad, se pueden advertir diferentes modos de individualizar a cada uno de los objetos del mundo observable, en particular a las hojas de Maple, ya sea por medio de sus propiedades, ó bien, por medio de una noción de individualidad con una carga metafísica considerable que trasciende la dimensión epistemológica.

Dejando de lado el ejemplo anterior, es importante situar esta discusión desde un análisis más riguroso, de tal forma que se pueda discernir entre diferentes enfoques y problemas filosóficos en lo que concierne a la individualidad de los objetos. Por esta razón, he puesto en cursivas algunos de los conceptos que no se han definido con rigor. A primera vista, parece que la diferencia cualitativa que se aprecia entre diferentes objetos no es lo mismo que cuestionar el principio por el cual se individualizan, es decir su individuación. Tampoco parece ser adecuado empatar estos enfoques con la caracterización ontológica de un individuo, o bien, con el hecho y el proceso por el cual se le dota de referencia. Sin ser menos relevante, también se podría llevar a cabo un análisis del estatus de los objetos tanto observables como inobservables que aparecen en las teorías científicas y su relación con estos conceptos que, de alguna manera, refieren a su individualidad. No obstante, más allá de los elementos ontológicos, semánticos y epistemológicos que se pueden identificar, es importante no comprometer una definición de individualidad bajo los preceptos conceptuales de una interpretación particular de la *MCU*. Es decir, pretender definir la noción de individualidad de acuerdo a una sola interpretación acerca del mundo cuántico. De ser así, cualquier interpretación de una teoría científica podría dictaminar lo que para ella es y no es un individuo, trivializando y relativizando el análisis de esta noción. De esta manera, es importante definir de antemano dicho concepto y precisar las condiciones suficientes y necesarias para que un objeto pueda considerarse un individuo.

En esta dirección, es posible encontrar en [Gracia, 1988] un análisis sistemático de la individualidad, poco discutida de forma rigurosa. Sin entrar al dominio de la Filosofía de la Ciencia, y retomando ideas de los escolásticos, preferentemente desde una noción tradicional y realista de la Metafísica, se propone una distinción importante entre seis dimensiones o problemas en relación a la individualidad: el problema de la intención, de la extensión, del estatus ontológico, del principio de la individualización, de la discernibilidad y de la referencia. El primer problema, como bien se dijo arriba, contempla la necesidad de definir y aclarar conceptualmente el concepto de individualidad al identificar las condiciones suficientes y necesarias para que un objeto se considere un individuo desde un enfoque completamente lógico. En esta parte, Gracia pretende definir una noción de individualidad que pueda ser lo más general posible incluyendo el mundo real y mundos posibles. Tomando en cuenta esta tarea, en el segundo, tercero y cuarto problema se irguen las bases metafísicas por medio de la extensión categórica que comprende el concepto de individuo en el mundo (objetos particulares en contraposición con objetos universales), su caracterización y composición ontológica, y los principios que permiten la individualidad de los objetos, o bien, las condiciones suficientes y necesarias para que un individuo se individualice. El quinto problema determina todo lo relativo a la discernibilidad de los individuos desde un enfoque epistemológico y finalmente el sexto problema comprende todo lo que compete a la referencia del individuo (mediante etiquetas y nombres propios) desde un enfoque semántico. Aunque este análisis se caracteriza por escindir el problema de la individualidad en diferentes

rubros, es importante mencionar que existen relaciones también importantes que se pueden dar entre estas seis categorías que dependen de algunos compromisos metafísicos que se considerarán más adelante.
Ahora bien, siguiendo la metodología empleada en [Gracia, 1988], a continuación se pretende dar solución a cada uno de los problemas mencionados en un contexto diferente, en particular, en torno a las teorías científicas contemporáneas. Por razones de claridad y rigor filosófica, habría que elaborar una breve descripción y caracterización de los conceptos de los que habla el autor de acuerdo con un enfoque que incluya a la Filosofía de la Ciencia contemporánea. Una vez que se realice esta tarea, también habría que preguntarse que pasaría si uno explorara otros confines del mundo y considerara de igual forma al dominio cuántico, que es en principio inobservable. Para responder a esta pregunta, el resto de esta sección se dedicará a analizar estos conceptos en el contexto cuántico. Se evitará discutir la propuesta y la opinión de [Gracia, 1988] en torno a cada una de los problemas que se han identificado. A este respecto, solo se tomará la distinción metodológica que propone para evitar cualquier prejuicio que pueda fundarse desde una postura en particular, y al mismo tiempo, evitar confundir y traslapar diferentes tradiciones filosóficas, como es el caso de la escolástica y la filosofía analítica contemporánea.

14.3. Los Problemas Generales de la Individualidad

Como bien se dijo arriba, en [Gracia, 1988] se introducen al menos seis problemas metodológicos relacionados con la noción de individualidad en un contexto filosófico muy general. A continuación se analizarán cada uno de estos problemas en este contexto, sin embargo, quiero hacer una labor adicional que consistirá en identificar algunas de sus diferencias. Estas diferencias se caracterizarán de acuerdo a un sistema conceptual basado en graduaciones que tome como referencia dos extremos: el mundo de los sentidos y el mundo lógico, metafísico y abstracto. Dado que la metodología empleada en este trabajo toma como partida las teorías contemporáneas de la Física (y en particular a la *MCU*), propongo una estructura gradual que comience en el centro con un sistema lógico de definiciones, por ejemplo, las condiciones suficientes y necesarias de la individualidad de los objetos, y termine de forma gradual en la periferia del mundo observable y sensible. Es evidente que, de acuerdo a esta metodología, los aspectos lógicos y metafísicos se encuentran más cerca del centro y los aspectos epistemológicos y semánticos se encuentran más cerca de la periferia, en contrapunto con la necesidad de interpretar y codificar los datos sensibles y empíricos del mundo. De esta forma, se toma en cuenta el carácter estructural y complejo de la individualidad, y se evita con ello, ignorar las relaciones que existen entres sus categorías metafísicas, epistemológicas y semánticas. A este respecto, en el contexto de la *MCU* se verá que tanto la metafísica, la semántica y la epistemología no pueden distinguirse de manera tan radical. A continuación se enumeran y se definen los problemas propuestos en [Gracia, 1988], de acuerdo al sistema de graduaciones que propongo.

14.3.1. La Intención de la Individualidad

La intención de la individualidad es un aspecto lógico que caracteriza conceptualmente a la individualidad. Son las condiciones suficientes y necesarias para que un objeto pueda ser considerado un individuo.

Según [Gracia, 1988], existen cinco condiciones no exhaustivas que tradicionalmente han sido aceptadas en los círculos filosóficos (que excluye la Filosofía de la Física contemporánea), cada una de las cuales se comprometen ontológicamente con algunos aspectos que competen más a la extensión, constitución y el principio de individuación de los individuos. Estos corresponden a la *Indivisibilidad*, que tiene su fundamento en un mundo de objetos materiales; la *Distinción*, que tiene sentido en un mundo con más de un objeto; la *División*, que apela a una relación de pertenencia entre diferentes objetos; a la *Identidad Temporal*, que tienen los objetos existentes que persisten en el tiempo; y la *Inpredicabilidad*, que habla de objetos lógicos que no son predicados de otro objeto o término lingüístico. Sin embargo, todos estos aspectos involucran un perfil que se limita a ciertos dominios específicos, donde algunos compromisos ontológicos y epistemológicos, ajenos a las situaciones que se observan en las prácticas científicas contemporáneas, desempeñan un papel significativo. Por esta razón, creo necesario definir una noción de individualidad particularmente restringida al dominio de la Física contemporánea, sin anteponer cualquier supuesto que comprometa su perfil bajo los preceptos conceptuales de una visión ajena a este dominio.

En el contexto de la Física contemporánea (y en particular en la *MCU*), es posible construir formalmente una noción de objeto que sea estrictamente una condición suficiente y necesaria para constituirse como un individuo. Esta noción tiene su fundamento en términos de conteo y numeración, por lo que está estrechamente vinculada con el concepto de identidad formal. Es decir, tomando en cuenta la teoría de conjuntos, un individuo se define en términos de un elemento que pertenece a un conjunto numerable, en cuyo caso se identifica por una etiqueta (que es constitutiva del individuo) que permite que no sea idéntico a otros. Como se verá más adelante, esta etiqueta refiere a propiedades que el individuo posee (incluyendo sus relaciones), ó bien, a propiedades trascendentales como la *Haecceitas*. Para ello, es necesario definir la identidad entre dos objetos a y b. Normalmente $a = b$ es la simbología empleada para referirse a que a es idéntica a b. Siguiendo con una noción asociada a Frege, la relación de identidad se satisface entre entidades de origen epistémico (descripciones) que refieren a un sólo objeto de origen ontológico (su constitución). Sólo existe un objeto real que es referido mediante dos entidades de categoría 'descriptiva' a y b, propios del conocimiento que se tiene de este último. De este modo, un objeto es un individuo sí y sólo si es elemento de un conjunto contable.

14.3.2. La Extensión de la Individualidad

El problema de la extensión de la individualidad se pregunta acerca de la existencia (o posible existencia) de objetos que poseen individualidad, y si es el caso, determina el tipo de objetos que se consideran (o no) individuos. Para ello, es importante saber el tipo de objetos que existen o pueden existir para luego proceder a identificar aquellos que son y no son individuos. Se sabe que existen diferentes teorías filosóficas en relación al tipo de objetos que viven (y que podrían vivir) en este mundo o que responden al llamado *Problema de los Universales*. Por un lado, están aquellos filósofos que creen que el mundo se constituye únicamente de objetos particulares (teoría nominalista). Por otro lado, están los que creen que el mundo se constituye únicamente de objetos universales (teoría realista), y finalmente están aquellos que, en víspera de una polarización evidente, prefieren asumir la existencia de ambos (teorías eclécticas). Siguiendo con el enfoque sugerido en [Gracia, 1988], aquí se asumirá esta tercera opción con el fin de evitar posturas filosóficas muy generales que polaricen la presente discusión. Ahora bien, una vez que se sabe el tipo de objetos que constituyen el mobiliario del mundo, creo pertinente seguir con la tradición filosófica, de acuerdo con la cual los objetos que poseen individualidad son nada más y nada menos que objetos *Particulares*, entendiendo estos últimos como objetos con una relación fundamental con ellos mismos. Consecuentemente, de acuerdo con las categorías exclusivas que se han propuesto, creo que los *Universales* corresponden al resto de los objetos existentes, entendiendo estos últimos como clases, naturalezas o tipos de objetos, en tanto que tienen una relación externa con otros objetos. Al menos que se especifique lo contrario, aquí uno se referirá al concepto de objeto únicamente cuando se trate de un particular o individuo, mientras que el resto serán propiedades.

14.3.3. Qué es un Individuo?

En este punto, lo que se busca es determinar la caracterización ontológica del individuo. Tomando en cuenta el tipo de objetos que existen o podrían existir: ya sea particulares, o bien, universales, se desea saber la forma en que los individuos se constituyen en su naturaleza más esencial. Aquí es importante mencionar que la constitución ontológica de un individuo en el mundo no es lo mismo que su definición, es decir, el problema de la constitución no es lo mismo que el problema de la intención. La confusión está en traslapar categorías distintas, la primera ontológica y la segunda lógica. Ahora bien, antes de profundizar en lo que concierne a la constitución ontológica del individuo, es importante ser claro y preciso, no sólo con respecto a la definición de los particulares (individuos), sino al tipo de objetos universales que, en principio, los constituyen. Aquí conviene recordar que los universales se definen como aquellos elementos que pueden instanciarse en los objetos y los caracterizan. De acuerdo con esta definición, existen al menos dos categorías de universales: aquellos que son epistémicamente accesibles y aquellos que no lo son (comúnmente conocidos como elementos trascendentales). Aquí habría que enfatizar que, en el ámbito de la Filosofía de la Ciencia contemporánea, la epistemología es aquello que investiga lo que es cognoscible mediante las teorías científicas, sin estar necesariamente vinculado con los datos sensibles. En este sentido, los aspectos metafísicos que se infieren de dichas teorías no son empíricamente accesibles pero pueden considerarse elementos constitutivos del saber. Ahora bien, en un pilar de esta distinción se encuentran las propiedades que comprenden las cualidades y las relaciones[139] que se satisfacen entre los individuos. Aunque estas propiedades pueden ser observables o inobservables, tienen la virtud de que pueden instanciarse en objetos particulares (ya se en uno o varios). Por otro lado, se encuentran los elementos trascendentales que no supervienen a las propiedades cognoscibles. Respecto a este último, se han propuesto distintas caracterizaciones, que si bien, pueden cambiar de acuerdo al marco teórico desde el cual se fundamentan, todas dictaminan que existe una substancia trascendental que constituye al individuo como tal pero que no se puede conocer.

[139] Aquí conviene introducir las relaciones como un tipo de propiedad, en tanto que son entes que se instancian en los objetos de tipo particular. Por supuesto que dentro del espectro de las propiedades existe la distinción entre PI y PE, donde los últimos podrían identificarse con las propiedades relacionales (como se verá más adelante).

En la literatura han existido varias formas de referirse a esta noción de individualidad, entre las cuales se encuentra la *Haecceitas*, el 'este primitivo', la 'unidad fundamental', ó bien, la 'substancia'. Para poder dar una descripción formal de "este algo que no se sabe que es", se puede recurrir a identificar al individuo en términos de su identidad propia. Es decir, la individualidad trascendental de un objeto a es el "atributo" de ser idéntico a sí mismo '$a = a$'. Sin embargo, si ' $=$' se entendiera como un atributo (en particular una relación) en un sentido estándar, la individualidad trascendental colapsaría a una caracterización ontológica en términos de propiedades relacionales, dado que se trataría de una relación exterior entre dos objetos que, después de todo, refieren a uno solo. En este sentido, si se quiere identificar a la individualidad con la identidad propia, se debe tomar en cuenta que la relación de identidad ' $=$' se encuentra metafísicamente ligada al individuo y no denota ninguna relación exterior a otros individuos, como ocurre cuando se trata de cualquier tipo de relación.
Ahora bien, de acuerdo con [Gracia, 1988], existen al menos cuatro teorías acerca de la constitución ontológica del individuo. Es importante reiterar que estas teorías asumen que las propiedades no son individuos, es decir, asumen la postura aristotélica, de acuerdo con la cual todo individuo es una substancia primaria y toda propiedad es una substancia secundaria. A continuación se enumeran y se explican brevemente:

(1) *La teoría del 'substratum'*. El individuo se constituye de dos elementos: la individualidad en forma de *Haecceitas*; de las propiedades cualitativas y relacionales.

(2) *La teoría de las propiedades*. El individuo se constituye únicamente de propiedades. Sin embargo, la individualidad se caracteriza ontológicamente mediante una o varias propiedades que mantienen cierta independencia del resto de las propiedades, algo así como una o varias "propiedades individualizantes".

(3) *La teoría relacionista I*. Análogamente a la teoría del 'substractum', el individuo se constituye de tres elementos: la individualidad en forma de *Haecceitas*; de las propiedades cualitativas y relacionales; y de las relaciones entre estos dos últimos elementos, es decir, relaciones que existen entre las propiedades y la *Haecceitas*.

(4) *La teoría relacionista II*. Análogamente a la teoría de las propiedades, el individuo se constituye de dos elementos: las propiedades cualitativas y relacionales (tomando en cuenta las propiedades individualizantes); las relaciones que existen entre las propiedades y las propiedades individualizantes.

14.3.4. Principio de Individuación

De acuerdo con la caracterización que se ha dado de un individuo, este último es un objeto de tipo particular que posee un 'atributo' de índole metafísico: su individualidad. Sin embargo, dado que se trata de un 'atributo' que los individuos poseen a priori, debe haber algo así como un principio que permita su individuación y que preceda al individuo en su condición fenoménica. Es decir, las condiciones suficientes y necesarias para que un objeto arbitrario se individualice. Dado que se trata de un proceso por el cual un objeto “se vuelve” o se “pliega” en un individuo, el nombre más adecuado para referirse a este principio ha sido el *Principio de Individuación*. Así mismo, la discusión acerca de particulares o individuos seguirá restringiéndose en torno a substancias del tipo aristotélico, tomando en cuenta a su vez que las propiedades no son individuos sino universales.

Ahora bien, antes de recurrir al universo de respuestas que se han dado en torno al principio de individuación, es importante reconocer que este proceso presupone dos elementos imprescindibles para su despliegue: i) por un lado, depende directamente de los tres problemas anteriores, es decir, de la intención de la individualidad, de su extensión, y de la constitución ontológica del individuo. En efecto, no tiene sentido establecer un principio o proceso que, de por sí, habla de un elemento que no se ha definido con claridad. Antes que todo, es necesario determinar una noción primitiva de individualidad apegada a las prácticas científicas y establecer la extensión y el significado de las entidades que forman parte del mobiliario del mundo (por ejemplo, los objetos y las propiedades); ii) por otro lado, es importante reconocer que, detrás de cualquier principio de individuación, existe la intuición de que los objetos se “pliegan” en individuos en virtud de que se distinguen por su relación interna respeto a ellos mismos, ó bien, externa respecto a otros objetos. En seguida, se hará una breve descripción de lo que es, a grandes rasgos, la discernibilidad, para luego pasar a desplegar diferentes formas de individuación en términos de esta última.

En el núcleo de la estructura conceptual que se ha construido se encuentra la discernibilidad como un aspecto de índole metafísico que pretende dar cuenta de los atributos individuales que posee un objeto con base en su relación que guarda consigo mismo, ó bien, con otros objetos. Ahora bien, muchas veces se considera que la discernibilidad es una noción de índole epistemológico en el sentido de que se fundamenta a partir de la forma y el contenido del conocimiento que se tiene del individuo como tal. Según esta visión, el problema de la discernibilidad consiste en formular preguntas como si el individuo es epistémicamente accesible, y de qué forma se le conoce en virtud de su diferencia cualitativa con otros individuos. No obstante, habría que señalar que la visión epistemológica de la discernibilidad no logra explicar la mera posibilidad de introducir instrumentos estrictamente metafísicos (por ejemplo la *Haecceitas*) para discernir diferentes objetos sin recurrir al conocimiento que se tenga respecto a estos últimos (mediante su descripción en términos de propiedades, relaciones, etc.). Al tratarse de una visión limitada, la interpretación epistémica de la discernibilidad resulta ser, en general, inviable, con la única excepción de que se limite a la frontera que se desdobla entre lo que es posible conocer y los datos empíricos que provienen de los fenómenos del mundo externo (donde dos objetos o más son discernibles en virtud de que hay cualidades observables que los hace diferentes). Por ende, se puede afirmar que la discernibilidad epistémica es condición suficiente pero necesaria para su individualidad.

Ahora bien, hasta el momento, el universo de respuestas que se han dado comprende, al menos, cuatro categorías con diferentes formas de concebir el principio de individuación[140]:

(1) *Teorías de individuación esencial*. Las teorías de individuación esencial comprenden a la *Teoría Vacía*

[140]Existen otras como son el principio de individuación extrínseca, el principio de individuación de propiedades, o bien, la propuesta que se sugiere en [Gracia, 1988], en torno a un principio existencial de individuación, que no contribuyen de forma substancial al presente trabajo.

de Particulares, a la *Teoría Formal*, y a la *Teoría Material*. Por motivos de importancia, solo se describirán las primeras dos. Respecto a la primera noción, la individuación de un objeto es trascendental en el sentido de que no superviene en las propiedades que posee (y podría poseer), ó bien, de cualquier principio que le anteceda. En efecto, el principio de individuación *es* el principio de individuación. De acuerdo con esta noción de individuación, dos objetos que son numéricamente distintos difieren en cuanto a su capacidad de poder ser individuos sin que exista otra diferencia que se accesible entre ellos. Uno bien podría individualizar a un objeto, por ejemplo una elipse alongada, en términos de su diferencia con el círculo, apelando a las propiedades de cada una de ellas, ya sea, mediante sus coordenadas, su forma, su excentricidad, su tamaño, etc. Pero si existieran varias elipses o círculos con las mismas propiedades cualitativas, uno terminaría aludiendo a un principio de individuación trascendental independiente de estas últimas. Por último, es evidente que este principio es compatible con la teoría del 'substractum', en tanto caracterización ontológica del individuo.

Por otro lado, se encuentra la teoría formal de individuación. Desde esta perspectiva, un particular es individuo gracias a su *Forma Substancial*. De acuerdo con Aristóteles, la forma substancial es el principio estructural que determina y organiza las propiedades, el orden, la unidad y la identidad que caracterizan ontológicamente a la individualidad de un particular. Es, por así decirlo, la causa formal y 'orgánica' de la acción propia de los objetos, ó bien, las 'ideas' y patrones que organizan a la materia y la hacen inteligible. Dado que Aristóteles contempla que estas 'ideas' son, en principio, epistémicamente inaccesibles, presupone que el principio de individuación es el proceso mediante el cual la forma substancial se pliega y despliega en objetos individuales discernibles a través del espectro de lo cognoscible. La individualidad de un particular y su diferencia con otros particulares se caracteriza entonces por medio de esta forma substancial, en tanto que la noción aristotélica de "forma" comprende lo que es idéntico a sí mismo y lo que es común a muchos. Por último, este principio es igualmente compatible con la teoría del 'substractum', en tanto caracterización ontológica del individuo.

(2) *Teorías de propiedades agregadas*. La individuación de un objeto superviene en todas o algunas de sus propiedades *intrínsecas*[141]. Dado que esta teoría considera como agente de individuación únicamente a las propiedades que se instancian sólo una vez en cada instante de tiempo, es evidente que es compatible con la teoría de las propiedades o la teoría relacionista II, en lo que respecta a la caracterización ontológica del individuo. Es importante mencionar que este proceso de individuación es un principio de índole metafísico que concierne aspectos que trascienden el conocimiento empírico y que determina la forma de individuación de cualquier objeto en virtud de las propiedades intrínsecas reales y objetivas que posee, independientemente de su acceso empírico.

En continuidad con este principio, llama la atención el problema de la discernibilidad epistémica, en cuyo caso el conocimiento que se tiene de las propiedades instanciadas sobre un objeto permiten la individuación del mismo a partir de un principio que pueda asociar aspectos de índole epistémico (la

[141] Habría que recordar que las propiedades intrínsecas son aquellas que se instancian solo una vez en los particulares.

discernibilidad) con aspectos de índole metafísico (la individualidad). Desde el punto de vista de las teorías de propiedades agregadas, no hay necesidad de recurrir a elementos trascendentales como la *Haecceitas* para individualizar a los objetos, al contrario, el principio de individuación yace en términos de elementos cognoscibles (en este caso elementos teóricos inherentes a la Física contemporánea, y en particular, a la *MCU*) que tienen la condición de instanciarse: las propiedades intrínsecas. Aunque generalmente la discernibilidad sea condición suficiente más no necesaria de la individualidad, el hecho de que los objetos se plieguen en individuos debido a las propiedades intrínsecas que poseen, permite avanzar del núcleo donde la individualidad se enraíza a los aspectos lógicos y metafísicos hacia el exterior donde los aspectos epistemológicos empiezan a tener una importancia significativa. En este sentido y en lo que respecta a este trabajo, la individuación en términos de la teoría de las propiedades agregadas es condición suficiente y necesaria de la discernibilidad.

Ahora bien, desafortunadamente este principio de individuación no es inmune a algunos problemas. Un análisis más detallado sugiere la posibilidad de que existan dos o más particulares con las mismas propiedades lo que, a decir verdad, constituye un problema de individuación al cuestionar la mera definición de lo que es una propiedad intrínseca (como elemento que se instancia solamente una vez) y al prescindir de una distinción metafísica entre distintos objetos. A este respecto, se ha sugerido la implementación de algunos principios de índole metafísico que garanticen su distinción mediante algunas propiedades que no tengan en común. Por ejemplo, apelar a su localización espacio-temporal junto con un principio de impenetrabilidad que prohiba situar dos objetos en un mismo lugar. No obstante, por encima de este principio existe otro de carácter más fundamental que permite evitar el problema relativo a la instanciación múltiple de *todas* las propiedades intrínsecas (incluyendo las propiedades espacio-temporales). Conocido como el principio de la identidad de indiscernibles (principio de Leibniz), este supuesto metafísico consiste en que dos o más objetos no pueden poseer (ontológicamente hablando) todas sus propiedades relevantes en común, y por ende, solo poseen propiedades intrínsecas. El estatus metafísico de este principio ha sido objeto de controversia desde su elucidación. No obstante, asumiendo que la individualidad "emerge" de las propiedades intrínsecas agregadas, se cree que el principio de Leibniz debe considerarse como una verdad a priori de la Metafísica[142]. En lógica de segundo orden, el principio de Leibniz para dos objetos se expresa de la siguiente manera:

$$\forall F(F(a) \leftrightarrow F(b)) \rightarrow a = b \tag{14.1}$$

Donde a y b son variables cuyo dominio comprende a ambos individuos y F es otra variable cuyo dominio representa las posibles propiedades relevantes de estos individuos. Ahora bien, aunque se sabe que a y b representa a dos objetos particulares (individuos), hasta el momento no se ha especificado el dominio asociado a F, es decir, no se ha determinado cuáles son las propiedades intrínsecas relevantes. Puede ser el caso de que F se componga de todas las propiedades intrínsecas inimaginables, o bien, que contenga sólo un subconjunto de este universo. De esta forma, el principio de

[142]Sin embargo, hay quienes han considerado (incluso el mismo Leibniz) que su verdad es contingente. Una propuesta más moderadora argumenta que debe ser interpretado como un principio de índole metodológico.

Leibniz comprende, al menos, tres dominios diferentes: i) Llámese PPI(1) tal que $F = \{PI\}$ involucra a todas las propiedades intrínsecas; ii) Llámese PPI(2) tal que $F = \{PI\} - \{PET\}$ involucra a todas las propiedades intrínsecas con excepción de las espacio-temporales, y bien, iv) llámese 'principio de impenetrabilidad' PPI(2)* a $F = \{PET\}$. Aquí es claro que la teoría de individuación de propiedades agregadas requiere de un compromiso metafísico con PPI(1) para garantizar la individuación de cualquier objeto. Este principio se consolida como una verdad lógica y fundamental desde esta perspectiva. También es claro que si las propiedades espacio-temporales están incluidas en el dominio F, entonces PPI(1) presupone el principio de la impenetrabilidad. Por el contrario, tanto PPI(2) como PPI(3) son independientes de este último, y si se apela a alguna propiedad espacio-temporal para la individuación de cualquier objeto, entonces es necesario añadir dicho principio a los compromisos metafísicos que se tengan.

Antes de pasar a otra teoría de individuación conviene mencionar que los proponentes de la teoría de propiedades agregadas deben dar buenas razones para considerar al principio de Leibniz como una verdad lógica de carácter metafísico. Para ello, basta con romper la distinción tajante entre la Metafísica y la epistemología, e interpretar a la discernibilidad no sólo en función de la posibilidad de poder distinguir a simple vista dos o más objetos, sino como un principio de individuación de carácter metafísico que se fundamenta en términos de lo que es accesible al conocimiento, y en particular, al conocimiento científico. En efecto, dado que la discusión presente se ha conducido en un contexto realista limitado al dominio de la ciencia contemporánea (y se pretende limitar a la *MCU*), cualquier objeto o propiedad inobservable que se asuma como real (con potencial de conocerse) debería preferentemente tener su contraparte en alguna teoría científica, y por ende, debería ser epistémicamente accesible en este sentido. Si se asume que existen individuos de acuerdo con este principio, debería existir, al menos, una teoría científica que los pueda discernir mediante propiedades intrínsecas bien definidas. En vista de estas observaciones, la teoría de propiedades agregadas escapa a las nociones trascendentales de la individualidad, debido a que en dicho caso se presupone que la noción *per se* de la individualidad no es epistémicamente accesible. Es decir, se presupone la imposibilidad de conocerlo por medio de las teorías científicas.

(3) *Teorías de individuación accidental*. Entre las teorías de individuación accidental se encuentra la *Teoría Espacio-Temporal* y la *Teoría Cuantitativa*, no obstante por motivos de importancia, solo se describirá la primera. La teoría espacio-temporal dictamina que la individuación de un objeto superviene en las propiedades espacio-temporales. Se fundamenta a partir de la posición que ocupa o la trayectoria que describe en un espacio determinado. Por ejemplo, si dos elipses se describen mediante el mismo conjunto de puntos coordenados, entonces ambas son idénticas. Un ejemplo similar son las partículas que se definen en la mecánica newtoniana mediante puntos espacio-temporales. Las partículas newtonianas supervienen en sus propiedades espacio-temporales. Dado que esta teoría de individuación considera únicamente a un tipo de propiedades de los particulares (espacio-temporales), es evidente que es compatible con la teoría de las propiedades o la teoría re-

lacionista II, en lo que respecta a la caracterización ontológica del individuo. Ahora bien, se puede notar que este principio puede interpretarse como un caso particular del principio de propiedades agregadas, excluyendo todas las propiedades intrínsecas con excepción de las espacio-temporales. En efecto, este principio dictamina que un objeto se individualiza en virtud de su posición que posee en un espacio determinado. Para prevenir situaciones donde dos objetos distintos puedan ocupar un mismo lugar, se requiere de un principio de impenetrabilidad, tal como se sugirió en el ejemplo del árbol de Maple. Uno bien podría apelar al principio PPI(1), a costa de una carga metafísica mayor, sin embargo, el principio de impenetrabilidad PPI(2)* es suficiente para apelar, al menos, a esta noción particular de individualidad. Esta alternativa ofrece algunas ventajas sobre el principio de propiedades agregadas, entre las cuales se encuentra la austeridad metafísica con la que cuenta, sin la necesidad de apelar a otras propiedades intrínsecas ni al principio de Leibniz en su versión general. No obstante, tampoco se libra de problemas. En efecto, desde esta noción de individualidad, el espacio-tiempo resulta ser una entidad privilegiada debido a que cualquier individuo se define en términos de sus propiedades geométricas y estructurales. Aquí conviene prestar atención al debate entre el relacionismo y el substantivalismo. Si se asume el primero, una noción de individualidad de este tipo podría colapsar a un principio de individuación análogo al de propiedades agregadas, dado que desde esta perspectiva, el espacio superviene en las relaciones que existen entre los objetos que, junto con las propiedades, son atributos con los cuales se puede individualizar un objeto. Si se asume el segundo, entonces habría que explicar detalladamente la noción de individuo que emerge de esta entidad o estructura abstracta.

(4) *Teoría de Individuación Relacional* La teoría de individuación relacional se fundamenta en la afirmación de que la individuación de un objeto superviene en las relaciones que se satisfacen entre éste y el resto de los objetos. Es una teoría independiente de cualquier elemento trascendental (como la *Haecceitas* y de las propiedades monádicas que se instancian en uno o varios objetos. Al contrario, un individuo se constituye a partir de las relaciones exteriores que guarda con otros objetos. Dado que esta teoría de individuación considera únicamente a relaciones, es evidente que es compatible con la teoría relacionista II, en lo que respecta a la caracterización ontológica del individuo. Por supuesto que para definir de manera precisa a una relación, es imprescindible recurrir al contexto desde el cual se considera dicha noción. Solo de esta forma, es posible saber el tipo de principios que son necesarios para que esta teoría se satisfaga. En consecuencia, a no ser que se especifique el tipo de relaciones que individualizan a los objetos, no existe un principio a priori (como el de Leibniz) que sirva como condición para definir una noción de individualidad en este sentido. El único elemento importante que se puede reconocer de antemano, es que una noción de individualidad relacional niega el principio de Leibniz en su versión estricta, es decir, niega que los objetos se individualicen en términos únicamente de propiedades intrínsecas. Sin embargo, si se quiere extender dicho principio de tal manera que abarque a las relaciones que se satisfacen entre los objetos particulares, es preferible esperar a hacer una caracterización refinada de estas últimas (en la sección (14.5)) en función

de la *MCU*. En particular, se verá que la inclusión de propiedades *extrínsecas* dentro del principio de Leibniz podría abonar a una caracterización relacional de la individualidad en este contexto.

14.3.5. Referencia

Aproximándose en la periferia del esquema conceptual propuesto, se encuentra el problema de la referencia, o bien, el proceso de asociar un signo a un particular en virtud de su individualidad. Desde los confines del mundo observable uno pensaría que este problema siempre procede de la posibilidad de discernir y diferenciar empíricamente el individuo sobre otros objetos[143], sin embargo, en un dominio de extensión más general que comprenda objetos inobservables, el enfoque metafísico o lógico de la referencia tiene igual de fuerza que los aspectos epistemológicos o fenoménicos. En efecto, no siempre se hace referencia al individuo por medio del conocimiento que de él se tiene, ya sea conocimiento adquirido mediante la experiencia sensible, ó bien, mediante una teoría científica, sino que también se puede identificar por medio de una presuposición metafísica a manera de etiquetas referenciales que no son constitutivamente descriptivas. Ahora bien, respecto al problema de la referencia, existen diversas formas de identificar un individuo, ya sea por medio de nombres propios, índices de referencia, etc. Retomando la propuesta sugerida en [Gracia, 1988], este trabajo se restringirá al problema de los nombres propios, desde el cual se han propuesto, al menos, dos teorías:

(1) *La teoría causal de la referencia*: En consonancia con una dicotomía entre la descripción y la referencia, esta teoría interpreta a los nombres propios como designaciones rígidas cuya función es meramente referencial sin ningún aporte semántico. En comparación con enunciados o términos del tipo descriptivo y en ausencia de significado simbólico alguno, los nombres propios tiene la función de llamar, nombrar e indicar, por lo que sólo es posible su elucidación si existe una relación semántica única entre el signo y la referencia. De acuerdo con Saul Kripke, a quién se le atribuye esta teoría, los nombres propios son términos lingüísticos que se asocian a un individuo mediante un "acto inicial de bautismo", cuya función es meramente referencial pero que adquiere una dimensión epistemológica a partir de las cadenas causales que garantizan el conocimiento colectivo del nombre y la referencia hacia el mismo individuo.

(2) *La teoría descriptiva*: En consonancia con un vínculo entre la descripción y la referencia, los nombres propios refieren y tienen significado, no obstante, el significado determina su referencia, el cual se expresa mediante un conjunto de descripciones proposicionales fijas y definidas[144]. En este caso, es posible su elucidación al establecer una elección semántica (que no es única) entre diferentes signos (descripciones) y la referencia. Esta teoría se le atribuye a Bertrand Russell.

Para evitar confusiones es importante entender la distinción entre ambas teorías en el contexto que se presenta aquí que, después de todo, comprende dos enfoques opuestos en relación a la referencia, el primero

[143] Como se verá más adelante, la distinguibilidad empírica de dos o más objetos observables constituye la periferia de la estructura conceptual que se propone, tomando en cuenta que es la única forma sensible de percibir objetos en su individualidad.

[144] Normalmente se les llama descripciones fijas disfrazadas.

que tiene su fundamento en aspectos relacionados con la intencionalidad, la lógica y la Metafísica, y el segundo que apela a cuestiones de índole descriptivo, y por ende, epistemológico. En efecto, en contrapunto con la teoría de la referencia, es posible caracterizar ontológicamente al individuo, ó bien, individualizar al objeto en cuestión independientemente de cualquier elemento que sea epistémicamente accesible (por ejemplo, la teoría del 'substractum' o la teoría vacía de individuación, respectivamente), y de esta forma, referirse a él mediante un nombre o etiqueta que pueda designarlo rígidamente. O bien, en sentido inverso y en contrapunto con la teoría descriptiva, es posible caracterizar ontológicamente al individuo por medio de la teoría de propiedades, ó bien, aludir al principio de individuación de propiedades agregadas, y de esta forma, referirse al mismo por medio de descripciones cualitativas que se expresen mediante elementos epistémicamente accesibles. En este sentido, cabe mencionar que al tratarse de referencia acerca de individuos, en tanto que la caracterización de este último emerge en general de aspectos tanto metafísicos como epistemológicos, es conveniente no polarizar la discusión y retomar elementos de ambas teorías. En esta dirección se encamina la propuesta de Gracia, quien pretende contribuir con una posición más equilibrada en el espectro de las teorías de la referencia. Desde este nuevo enfoque, existen dos pasos que contribuyen al proceso de la referencia de un individuo en relación a los nombres propios. En primer lugar, la función primaria de la referencia es: i) designar un nombre al individuo que sea fijo y único; y en segundo lugar ii) aprender a usar el nombre de manera efectiva, es decir, mediante descripciones que, por definición, son epistémicamente accesibles (como puede ser su discernibilidad mediante propiedades) [Gracia, 1988, Ch. 6]. Con el despliegue de estos dos pasos, es posible asignar un signo único y fijo a cualquier individuo, sin que por ello, la descripción del mismo quede rezagada en cuanto a su claridad semántica se refiere. Por ejemplo, a dicha asignación precede el acto de reconocer o darse cuenta de la presencia del individuo, para lo cual es necesaria su percepción directa y sensorial (para el caso de individuos empíricamente accesibles), ó bien, a través de una descripción que permita caracterizar al individuo del cual se trate. En este último caso, es necesario apelar a una descripción que puede establecerse por medio de una estructura teórica y conceptual (por ejemplo, a partir de teoría científica), sin que por ello implique que la descripción determine la función y el proceso de la referencia que, después de todo, no depende necesariamente de ella. En este sentido, las descripciones tienen la función de caracterizar a la referencia pero también contribuyen a que sus nombres se puedan usar de manera más efectiva, evitando errores y cambios en su referencia. Esta noción de referencia se ha formalizado de acuerdo con el concepto de identidad del que se habló anteriormente. En este sentido, la referencia consiste, en primera instancia, en designar una etiqueta que es constitutiva del objeto (a, ó bien, b), asumiendo que es elemento de un conjunto contable, y posteriormente, es posible atribuirle a estas etiquetas diferentes descripciones que refieren al mismo objeto $a = b$.

14.3.6. Distinguibilidad Empírica

En la periferia de la estructura conceptual que se ha construido se encuentra la distinguibilidad empírica[145], como un aspecto que se fundamenta a partir de la forma y el contenido del conocimiento empírico

[145] A partir de aquí, habrá que hacer la distinción entre distinguibilidad y discernibilidad. La primera es, por definición, la distinguibilidad empírica, mientras que la segunda es el acto de diferenciar objetos en términos epistémicos o metafísicos.

que se tiene de la individualidad y del individuo como tal. En este sentido, al tratarse de un problema que concierne al mundo de lo observable, se llega a la frontera que se desdobla entre los procesos cognitivos de la razón y los datos empíricos que provienen de los fenómenos del mundo externo. En efecto, la periferia de la estructura conceptual se articula y se adecua de acuerdo a las propiedades observables de los objetos fenoménicos (el color, el tamaño, la ubicación, los datos experimentales, etc.). Ahora bien, retomando el ejemplo de las hojas del árbol de Maple, podrían imaginarse situaciones donde se tengan dos hojas con la misma ubicación, forma, color, etc. Para evitar este tipo de casos (donde se tienen diferentes objetos con propiedades observables equivalentes), es necesario apelar al principio de los indiscernibles de Leibniz. Sin embargo, desde esta perspectiva este principio tiene un estatus meramente epistémico y empírico, entendiéndose como una restricción a la posibilidad de conocer a simple vista dos individuos con las mismas propiedades. No es difícil concluir que todos los objetos observables (las sillas, las mesas y las hojas de Maple) satisfacen dicho principio, y por ende, son empíricamente distinguibles.
Ahora bien, es posible identificar tres categorías en lo que respecta a la distinguibilidad empírica: la distinguibilidad por medio de sus propiedades cualitativas, por sus propiedades espacio-temporales, ó bien, por propiedades relacionales. Por supuesto que estas tres formas de distinguibilidad que garantizan una noción particular de individualidad podrían explicarse en términos de una noción de discernibilidad epistémica, ó bien, metafísica. Sin embargo, no necesariamente es el caso de que una noción de discernibilidad que existe al nivel de la epistemología y la Metafísica tiene su contraparte al nivel de las observaciones. En efecto, como se verá en el contexto de la *MCU*, la indistinguibilidad empírica de las partículas cuánticas idénticas no es condición suficiente para que se les excluya de una noción de individualidad epistémica, ó bien, metafísica.

14.3.7. Una Lección Importante

Hasta aquí, se ha tratado de definir cada uno de los conceptos fundamentales que atañen a la individualidad. Se ha comenzado por definir lo que es la individualidad sin ningún compromiso ontológico o epistemológico para poder incluir todo tipo de interpretaciones dentro del dominio de la *MCU*. Consecuentemente, se han descrito los aspectos metafísicos que comprenden a la extensión, la caracterización y el principio por el cual los objetos se individualizan. Así mismo, desde un enfoque epistemológico y semántico, se han investigado los aspectos que remiten a la discernibilidad y se han identificado diferentes formas de referencia de acuerdo a que si existen individuos en función (o no) de las propiedades que posee. Finalmente, se ha hecho una distinción muy clara entre distinguibilidad empírica (la cual se describe en la última parte), discernibilidad epistémica, y discernibilidad metafísica. Esta caracterización se ha realizado a partir de un sistema metodológico y conceptual cuyos extremos (que corresponden al centro y a la circunferencia) establecen la distinción entre los aspectos metafísicos, semánticos y epistemológicos de la individualidad. Específicamente, los aspectos estrechamente relacionados con la Lógica se ubican en el centro, seguidos por los aspectos metafísicos y epistemológicos, en cuyo caso es difícil de trazar una distinción clara y precisa. En seguida, están aquellos aspectos que conciernen a la semántica, y por último aquellos relacionados con los datos sensibles (que se ubican en la periferia). En consecuencia, la frontera entre este esquema conceptual de ideas y los fenómenos observables reproduce un proceso cognitivo por el cual la mente ordena a la realidad. Al tratarse de un sistema con graduaciones, es importante enfatizar en el aspecto unificado y gradual del problema de la individualidad en el seno de las teorías contemporáneas de la Física.

Con este sistema conceptual en mente, es momento de poner en la práctica las herramientas adquiridas, apelando a un ejemplo particular: la *MCU*. No obstante, dado que la mayoría de las discusiones en torno a la individualidad se restringen al contexto realista de perfil óntico, creo conveniente empezar con un breve relato de los resultados más importantes que se han obtenido en este contexto.

14.4. La Individualidad Cuántica

Como bien se ha planteado a lo largo de este trabajo, una de las razones justificativas que respaldan a una tesis realista de perfil óntico es la legitimidad de las teorías más exitosas de la Física para respaldar suposiciones metafísicas como la eliminación de los objetos y sus propiedades. En particular, el éxito indiscutible de la *MCU* ha servido como base para cuestionar la existencia de los objetos y las propiedades[146] debido a la presencia de problemas interpretativos y el carácter ambiguo de esta teoría en su versión estándar (MCE). Esto ha sido, en parte, motivado por las ambigüedades e imprecisiones conceptuales que se tienen respecto a sistemas individuales, y la falta de una respuesta en cuanto a la posibilidad de determinar el valor de las propiedades intrínsecas de las partículas cuánticas (si es que existen).

Ahora bien, a pesar de las características atípicas e inusuales de estas partículas, algunos filósofos se han resistido a abandonar la idea de que es posible inferir una Metafísica tradicional de objetos y propiedades de los preceptos conceptuales de la *MCE*, y en respuesta, han propuesto dos estrategias para salvaguardar una noción de individualidad bajo consideraciones epistemológicas, ó bien, metafísicas. En general, estas estrategias son: i) la presencia de individuos "estrechos"que se fundamenta mediante una noción relacional de individualidad en términos de *Discernibilidad Débil* [Saunders, 2003b,a, 2006, Muller & Saunders, 2008, Muller & Seevinck, 2009]; y ii) una noción de individualidad trascendental en términos de *Haecceitas* [Gracia, 1988, Teller, 1998]. La primera propuesta (i) ha sido interpretada, en realidad, como un argumento que motiva las bases filosóficas del *REO*, en lugar de contribuir a definir una noción razonable de individualidad en el contexto de un realismo científico estándar [French & Krause, 2006, Ladyman, 2007, Muller, 2011]; y la segunda propuesta (ii), ha sido cuestionada por críticos de perfil anti-metafísico, pero también, ha sido objeto de fuertes objeciones debido a que, contrariamente a la *Haecceitas*, siempre es posible recurrir a una Metafísica de objetos y propiedades en términos de *No-individuos*, lo que implica la presencia de una sub-determinación de la Metafísica por la Física, en lo que respecta a la noción de individualidad [French & Krause, 2006, French, 2011, 2014]. Afortunadamente, mediante una extensión al formalismo de la *MCE*, es posible elucidar una teoría empíricamente equivalente pero físicamente distinta, es decir, la *TCB* [Bohm, 1952a,b, Bell, 1971, Valentini, 1992, Dürr et al., 1992, Holland, 1995]. Esta teoría presumiblemente in-

[146]Habría que recordar que las nociones de objeto y propiedad tienen su fundamento en términos de las nociones aristotélicas de substancia primaria y secundaria, y en terminología moderna, en términos de particulares y universales, respectivamente.

troduce partículas discernibles de carácter objetivo, cuya dinámica se determina mediante ecuaciones de movimiento deterministas. A este respecto, la *TCB* puede usarse como la base teoría respecto a la cual es posible socavar una de las motivaciones del *REO*, en efecto, las características atípicas e inusuales de las partículas cuánticas dentro de la *TCE*. Esto debido a que, en el mismo espíritu de la *MC*, la individualidad de estas partículas se puede interpretar en términos de una noción de discernibilidad epistémica implícita en la *TCB*, sin la necesidad de recurrir a nociones metafísicas que, después de todo, no se infieren a partir de la ontología de la teoría. Sin embargo, aquí no termina esta historia.

En lo que respecta a la *TCB*, se tiene una observación importante: algunos resultados experimentales [Aharonov & Bohm, 1959, Brown et al., 1996] sugieren que los parámetros independientes del estado definidos en la *TCB* (como la masa, la carga, y el momento angular) pueden ser, a lo más, propiedades relacionales, como es el caso del resto de las propiedades dinámicas de la *TCB*, las cuales dependen de la función de onda y de la posición del resto de las partículas[147]. Este hecho sugiere que las partículas Bohmianas no poseen propiedades intrínsecas, con excepción de su posición. En efecto, no es que las partículas Bohmianas puedan compartir todas sus propiedades intrínsecas, en cuyo caso uno debe recurrir a las propiedades espacio-temporales como ocurre en un sistema de partículas idénticas. Al contrario, lo que ocurre es que, con la única excepción de la posición, las propiedades intrínsecas no existen. En consecuencia, debido a que los parámetros independientes del estado no son propiedades intrínsecas, las partículas Bohmianas pueden discernirse en términos únicamente se su posición extendida a lo largo de trayectorias (que se despliegan en el espacio físico), sin importar la forma de la función de onda[148] (y sin importar si se trata (o no) de un sistema de partículas idénticas).

Sin embargo, una inspección más a fondo de la naturaleza de las partículas Bohmianas permite revelar un problema respecto a su individualidad. Esto debido a que la naturaleza determinista de las ecuaciones de movimiento y el carácter no local de la dinámica implícita en la *TCB* implica que cualquier permutación en la posición inicial de al menos dos partículas incurre en el despliegue de diferentes trayectorias para ambas partículas y el sistema total (en comparación con el estado anterior a la permutación), con la única excepción de cuando la función de onda es (anti)-simétrica [Brown et al., 1999, Goldstein et al., 2005]. En estas circunstancias, no sólo existe la posibilidad de discernir a las partículas Bohmianas, sino que ellas *deben* discernirse. No obstante, debido a que dichas partículas solo pueden discernirse una vez que se hayan determinado las trayectorias del sistema, las ecuaciones de movimiento Bohmianas dictaminan que es necesario saber de antemano la posición inicial que corresponde a cada partícula. En este sentido, las partículas Bohmianas se pueden discernir una vez que las trayectorias del sistema se hayan determinado, y una condición necesaria para que esto ocurra es recurrir a una regla de asignación entre el conjunto de las posiciones iniciales y el conjunto de las partículas. Este resultado refleja el hecho de que las partículas Bohmianas deben discernirse en términos de algún atributo adicional que no sean los parámetros independientes del estado ni la posición extendida a lo largo de trayectorias [Brown et al., 1999].

[147]Este hecho se explicará a detalle más adelante.

[148]Como se verá más adelante, esta implicación requiere que se asuma el principio de individuación de propiedades agregadas con respecto a las propiedades intrínsecas.

Ahora bien, debido a que la constitución de partículas individuales debe tener la forma de una propiedad que las distinga, ya sea de naturaleza epistemológica como cualquier propiedad física (la masa, la carga, la posición, etc.), ó bien, metafísica como la *Haecceitas*, los resultados anteriores implican que esta última es la única opción disponible. Desafortunadamente, esta noción metafísica es vulnerable al mismo tipo de objeciones que se tienen para el caso de la *MCE*, particularmente a la sub-determinación de la Metafísica por la Física en torno a la noción de individualidad de las partículas cuánticas.

En este sentido, todo parece indicar que en lo que respecta a la individualidad, la *TCB* no presenta ningún aporte significativo en comparación con la *MCE*. Tomando en cuenta este resultado, la única noción de individualidad compatible con la *MCU* deber ser, después de todo, en términos de una formulación diferente a la *TCB*. En efecto, como se verá más adelante, se demostrará que es posible salvaguardar una noción de individualidad en términos de discernibilidad epistémica gracias a una formulación empíricamente equivalente pero físicamente distinta a la *TCB* acerca de partículas discernibles cuya individualidad se fundamenta en términos de su posición extendida a lo largo de trayectorias [Goldstein et al., 2005]. Esta formulación alternativa (*BRM*) evita cualquier alusión a nociones metafísicas de individualidad y ofrece una imagen clara y consistente acerca de partículas individuales, evitando cualquier tipo de sub-determinación de la Metafísica por la Física en este contexto. Si se interpreta este resultado desde un punto de vista realista, todo parece indicar que los estructuralistas de perfil óntico han perdido la batalla. En efecto, *BRM* puede adoptarse para socavar una de las motivaciones del *REO*. En particular, la *TCB* requiere que las partículas puedan identificarse mediante algún atributo metafísico (introducir *Haecceitas*), para lo cual existen argumentos (la sub-determinación metafísica de la individualidad) a favor del *REO*. Sin embargo, *BRM* no requiere que las partículas tengan nombres (se sepa "cuál es cual"), por lo que no hay necesidad de introducir nociones metafísicas como la *Haecceitas*. Al contrario, las partículas Bohmianas pueden individualizarse únicamente en términos de su posición extendida a lo largo de trayectorias, y por este motivo, los realistas estructuralistas deben buscar otro tipo de argumentos que sustenten una tesis eliminativista de objetos y propiedades. Para ello, el final de esta sección estará dedicado a articular un argumento a favor del estructuralismo con base en los resultados que se han resumido anteriormente.

Con la intención de ser más claro y riguroso, en seguida se presentará una evaluación crítica al concepto de individualidad en el contexto particular de la *MCE*. Esto servirá de ejercicio previo para luego involucrarse en el contexto Bohmiano, no sin antes recalcar que si bien, es posible investigar la imagen del mundo real con base en lo que dicen las teorías más exitosas de la Física, parece poco razonable (y hasta tramposo) hacerlo respecto a sólo una versión de las teorías, ignorando el amplio espectro de formulaciones e interpretaciones disponibles. Como se verá a continuación, a pesar de que una noción de individualidad en la *MCE* es problemática, parece que una conclusión similar no se sigue trivialmente desde una formulación e interpretación diferente, es decir, desde el punto de vista de la *TCB*.

14.5. La Individualidad en la Mecánica Cuántica Estándar

Tomando en cuenta el sistema conceptual metodológico que se bosquejó en la sección anterior, es momento de hacer una revisión bibliográfica sobre la noción de individualidad en el contexto de la *MCE*. La conclusión será, en efecto, la elucidación de dos nociones de individualidad, una de índole epistemológico, la otra de índole metafísico. Desafortunadamente, se identificarán algunos problemas respecto a ambas nociones de individualidad, en consonancia con los supuestos filosóficos que se han establecido a lo largo de este trabajo.

La noción de individualidad en el contexto de la *MCE* se ha tratado mediante contribuciones que datan desde hace ya varias décadas, entre las cuales conviene mencionar las publicaciones de van Fraassen, Teller, Maudlin, Ladyman, French, Saunders, Della Chiara y Toraldo Di Francia. A manera de introducción, seguiré a French, Maudlin y Van Fraassen con un breve y claro preámbulo teórico respecto al: 1) problema de enredamiento cuántico; y el 2) problema de las partículas idénticas. Antes de empezar, es importante tener en cuenta las siguientes observaciones. Como bien se argumenta en el preámbulo teórico de este trabajo, a falta de claridad y adecuación empírica, parece ser más razonable la adopción de una tesis instrumentista con respecto a la *MCE*. Esto se debe, en parte, a que la teoría no contribuye a especificar una ontología. En este sentido, al abrir un texto de *MCU* y leer la palabra 'partícula', se puede identificar, a lo más, un nombre propio que dista de ser un referente alusivo a un objeto real. Al contrario, es un signo que refiere a un elemento del formalismo cuya función es estrictamente predictiva. No obstante, si de lo que se trata es saber si es posible elucidar una noción de individualidad en esta teoría, parece ser que es importante desafiar, por un instante, a este enfoque instrumentista, tomando como partida la posibilidad de definir una ontología que reivindique, por lo menos, la dimensión metafísica y semántica del realismo. Específicamente, con base en un realismo metafísico y semántico, la discusión que se presentará a continuación asume (putativamente) la existencia de objetos y propiedades, pudiendo así sentar las bases filosóficas de un debate que gira en torno a la posibilidad (o no) de elucidar una noción de individualidad para partículas cuánticas. Como se verá más adelante, la conclusión no será favorable, a tal grado que una tesis realista con respecto a objetos y propiedades probará ser inadecuada en esta teoría.

(1) *El Problema del Enredamiento Cuántico*. Tomando en cuenta la interpretación estándar de la *MCU*, considérese un sistema de una ó muchas partículas descrito por el estado Ψ[149]. De acuerdo con Maudlin, existen, a lo más, dos posibilidades interpretativas del estado del sistema: el enfoque del rayo y el enfoque estadístico. Para un sistema de una sola partícula, el enfoque de rayo dictamina que el estado Ψ de dicha partícula determina el valor de sus propiedades (que se representa matemáticamente por medio de eigenvalores del operador correspondiente). Por otro lado, el enfoque estadístico afirma que Ψ permite designar el rango de los posibles valores de cualquiera de las propiedades de la partícula (mediante la suma de los posibles estados que corresponden a cada valor). Ahora bien, para el caso general de un sistema de muchas partículas, la *MCU* predice que, después de un lapso de tiempo, se obtiene un estado macroscópico enredado. En este caso, el enfoque de rayo acerca de Ψ consiste

[149] Por tratarse de la interpretación estándar, la función de onda coincide con el estado del sistema.

en que no hay manera de determinar el estado para cada partícula (no posee propiedad alguna si se asume su existencia), o bien, que las propiedades de cada partícula se pueden especificar en términos de las propiedades del resto de las partículas (son propiedades relacionales). Por otro lado, el enfoque estadístico dictamina que, a partir del estado completo enredado, sólo es posible calcular valores de expectación de las propiedades asociadas a cada una de las partículas. En vista de estas observaciones, es evidente que, en el caso de un sistema de muchas partículas y debido a su estado total enredado, no es posible identificar a cada partícula en términos de las propiedades intrínsecas que posee, sino únicamente mediante sus propiedades relacionales (o lo que es lo mismo, las relaciones que se satisfacen entre ella y el resto de las partículas). A primera vista, este hecho impide construir una noción de individualidad epistémica basada en propiedades intrínsecas desde las bases fundacionales de esta teoría. Sin embargo, como bien ya se dijo, nada impide establecer una noción de individualidad en términos de las propiedades relacionales de las partículas, ó bien, trascender el ámbito epistemológico y adoptar una nueva noción de individualidad en términos metafísicos (la *Haecceitas*).

A este respecto, la presencia de estados enredados, según Maudlin, es una prueba fehaciente de que es necesario abandonar un reduccionismo ontológico en este contexto. Contrariamente a esta tesis filosófica, la *MCE* invita a adoptar la idea de que el todo (el sistema total) es algo más que la suma de las partes individuales (las partículas) y las propiedades del todo no supervienen en las propiedades intrínsecas de cada una de las partes. Por tratarse de una aseveración ontológica, este tipo de 'holismo' conduce inevitablemente a la conclusión de que la noción de individualidad epistémica en el contexto de la *MCE* es problemática, a no ser que la individualidad de las partículas pueda establecerse en términos de las propiedades del sistema total, o lo que es lo mismo, en términos de las relaciones que se satisfacen entre ellas. De forma análoga, Teller afirma que un sistema cuántico se compone tanto de partículas individuales como de *Relaciones No-supervenientes* que se satisfacen entre ellas. Este tipo de relaciones se pueden ver como una propiedad intrínseca del todo que no superviene en las propiedades intrínsecas de las partes. Según él, el objeto compuesto atribuido a un sistema de muchas partículas (cuyo estado se representa mediante una función de onda en superposición) posee una propiedad intrínseca que no superviene en las propiedades intrínsecas de las partículas.

Ahora bien, es claro que tanto Maudlin como Teller, asumen la existencia de individuos (partículas) cuyas propiedades intrínsecas, si es que existen, son epistémicamente inaccesibles. Sin embargo, a diferencia del caso de Maudlin, en el que la individualidad de las partículas se establece en términos de las propiedades del sistema total, Teller cree que es necesario apelar a la *Haecceitas* para caracterizar y formular un principio de individuación que sea compatible con su propuesta[150]. En vista de estos ejemplos, se puede concluir que la presencia de estados cuánticos enredados sugieren la elucidación de dos nociones de individualidad que difieren en cuanto a su caracterización y principio de individuación, una de índole epistemológica, la otra de índole metafísica. Mientras que la primera se fundamenta en aspectos que son accesibles a la *MCU*, la segunda contempla elementos estrictamente

[150]Sin embargo, las publicaciones posteriores del mismo Teller contradicen dicha aserción al sostener que la individualidad trascendental es inapropiada en el contexto del problema de las partículas idénticas.

metafísicos.

(2) *El Problema de Partículas Idénticas*. En el dominio de la *MCE*, un conjunto de partículas idénticas (objetos que comparten todas sus propiedades intrínsecas) se describen en términos de funciones de onda simétricas, ó bien, anti-simétricas, cada una de las cuales tiene directamente relación con la presencia de diferentes familias de partículas, ya sea la familia de bosones, ó bien, la familia de fermiones:

$$\psi(\mathbf{x}_{P^{-1}1}, \mathbf{x}_{P^{-1}2}, \ldots, \mathbf{x}_{P^{-1}N}) = \pm\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \tag{14.2}$$

donde N es el número de partículas, y P es una permutación arbitraria de las coordenadas de las partículas[151] $\{1, 2, \ldots, N\}$. A este respecto, han habido un par de contribuciones en la literatura para justificar (14.2), comúnmente llamado el *Postulado de Simetrización*. En efecto, (14.2) se puede derivar de algunas premisas cuyo trasfondo teórico se irgue sobre una base empírica, o bien, abstracta y topológica: del *Postulado de Indistinguibilidad* que, a grandes rasgos, expresa la invarianza de las predicciones mecanico-cuánticas (distribuciones de probabilidad) bajo permutaciones en las coordenadas de las partículas; ó bien, de la conexidad múltiple y la dimensión del espacio donde la función de onda se define. En el primer caso, el postulado de indistinguibilidad se asume como premisa:

$$|\psi(\mathbf{x}_{P^{-1}1}, \mathbf{x}_{P^{-1}2}, \ldots, \mathbf{x}_{P^{-1}N})|^2 = |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N)|^2 \tag{14.3}$$

a partir del cual se deriva el postulado de simetrización [van Fraassen, 1998]. Aunque este argumento ha sido objeto de objeciones, la motivación principal para asumir (14.3) como premisa, versa en que existe evidencia empírica que la corrobora. En el segundo caso, con la finalidad de motivar desde un punto de vista más abstracto el postulado (14.2), se hace un énfasis importante en la topología del *Espacio de Configuración Reducido* ($\mathbb{R}^{3N}/S^N$). Este último es el espacio cociente que resulta de identificar cualquier par de coordenadas asociadas a diferentes partículas que difieren por permutaciones en una sola coordenada. De este modo, bajo premisas topológicas muy precisas, tales como la conexidad múltiple de $\mathbb{R}^{3N}/S^N$ y su dimensión, es posible demostrar que este espacio es aquél que está directamente asociado a un sistema de partículas indistinguibles[152]

Ahora bien, en cualquier caso, ya sea por medio de la premisa (14.3), ó bien, argumentos topológicos, la función de onda de un sistema de partículas idénticas es invariante bajo permutaciones en las coordenadas de las partículas (salvo por un signo), lo que significa que cualquier permutación de dos o más de los N conjuntos de tuplas ordenadas de tres coordenadas, resulta que las predicciones son equivalentes, tal como lo muestra (14.3). Esto implica que partículas cuánticas idénticas son indistinguibles, in en este sentido ellas no pueden ser etiquetadas, o bien, no es posible saber "cuál partícula es cual" en términos empíricos. A continuación, se desplegarán dos ejemplos, uno de carácter ilustrativo que se ha propuesto para describir de manera más simple un sistema de partículas idénticas, y

[151] Aquí es importante trazar una distinción entre las etiquetas de las coordenadas de las partículas y la posición objetiva de las mismas. En el contexto de la *MCE*, no es correcto decir que la posición de la partícula se intercambia debido a que, con ello, se presupone que se sabe "cuál partícula es cual", aspecto que no todos los filósofos comparten y que será discutido posteriormente.

[152] El significado más profundo de este argumento topológico tendrá que esperar para páginas siguientes.

el otro un sistema cuántico real.

Es un hecho que la probabilidad de ocurrencia asociada a las posibles configuraciones de un sistema cuántico de partículas difiere considerablemente a la que se tiene en el caso de un sistema clásico de partículas. Para ilustrar este hecho, considérese un sistema de dos partículas clásicas idénticas, cada una de las cuales permite dos estados posibles. En este escenario, las predicciones de la *MC* permiten afirmar que un sistema de dos partículas idénticas, cada una de las cuales tiene dos posibles estados, resulta tener un total de cuatro estados posibles con probabilidad de un cuarto cada una. Por ejemplo, si las partículas corresponden a dos bolas de billar, A y B, y los posibles estados corresponden a la posición de dichas bolas de acuerdo a si se encuentran en alguno de dos los compartimentos disponibles (1 y 2), entonces la *MC* predice que los eventos (arreglos) posibles serían:

Bolas A y B en compartimento 1.
Bolas A y B en compartimento 2.
Bola A en compartimento 1 y bola B en compartimento 2.
Bola B en compartimento 1 y bola A en compartimento 2.

con una equiprobabilidad de ocurrencia equivalente a un cuarto. Ahora bien, considérese un sistema de dos partículas cuánticas idénticas con dos estados posibles. Por sorpresa, las predicciones de la *MCU* resultan ser muy diferentes. En este caso, se obtienen tres eventos o arreglos posibles con equiprobabilidad de un tercio cada una:

Partículas A y B en estado 1.
Partículas A y B en estado 2.
Partícula A ó B en estado 1 y partícula B ó A en estado 2.

En estos ejemplos, se puede observar una diferencia significativa entre un sistema de partículas clásicas y cuánticas. La diferencia yace principalmente en que el estado cuántico del sistema completo no se modifica al intercambiar las bolas en sus respectivos compartimentos. Es decir, al intercambiar A por B, o viceversa, las predicciones resultan ser las mismas. En este sentido, se dice que las partículas cuánticas idénticas son indistinguibles, pues los estados que se intercambian son empíricamente inaccesibles, de tal modo que no existen cualidades observables de ningún tipo que puedan discernir a las partículas.

Ahora bien, siguiendo con otro ejemplo considérese el estado singulete de espín de dos electrones que componen un átomo de helio:

$$\psi = 1/\sqrt{2}[|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2] \tag{14.4}$$

donde las etiquetas indican el valor del espín de cualquier partícula. Es fácil observar que no existe diferencia empírica si los términos de la superposición se intercambian, debido que las probabilidades asociadas a los valores de espín antes y después de la permutación son equivalentes (en virtud de que el estado es anti-simétrico).

Para algunos filósofos (la mayoría de perfil empirista), estos y otros ejemplos han servido de evidencia en contra de la existencia de objetos cuánticos individuales, conocida como la 'visión natural' acerca de la individualidad en la *MCE*. De acuerdo con esta visión, los términos de la superposición (14.4) son simplemente etiquetas "mudas" que no corresponden a etiquetas constitutivas de las partículas, dado que si ese fuera el caso, se tendría que saber de antemano "cuál partícula es cual". En un sistema de partículas idénticas no hay etiquetas que sean constitutivas de las partículas. Al contrario, dichas partículas son objetos indistinguibles que no pueden considerarse particulares, ó bien, individuos. Por supuesto que esta visión, involucra que en el contexto de la *MCE*, aparte de no existir evidencia empírica de que las partículas sean distinguibles, tampoco hay elementos admisibles mediante la teoría que puedan dar cuenta de su discernibilidad epistémica. Después de todo, como lo prueba (14.4), no hay manera de discernir entre los diferentes términos de la superposición por medio de propiedades intrínsecas, que sean admisibles mediante la teoría (en este caso la posición, por tratarse de un sistema de partículas idénticas)[153]. No obstante, detrás de esta visión subyace la intuición de que cualquier objeto particular debería de discernirse físicamente de otros objetos, por ejemplo, por medio de sus propiedades intrínsecas. De este modo, al establecer una afinidad entre la discernibilidad y la individualidad, debe existir un principio metafísico bajo el cual se excluya la posibilidad de que diferentes objetos tengan en común todas sus propiedades intrínsecas (incluyendo su posición). No hace falta un ejercicio de gran imaginación para recordar que este principio corresponde al principio de indiscernibles de Leibniz (ver en (14.1)), en lo que respecta al principio de individuación de propiedades agregadas. De este modo, la 'visión natural' acerca de la individualidad supone que $F = \{PI\}$, y por ende, concluye que la *MCU* adopta PPI(1) pero niega que las partículas cuánticas sean individuos. En este caso, este principio posee un estatus ontológico en el sentido de que si un realismo científico estándar se asume y todo lo que la *MCE* dice acerca de un objeto cuántico es verdadero, entonces no sólo se concluye que las partículas cuánticas idénticas no son discernibles en términos de sus propiedades intrínsecas, sino que dichas propiedades no existen.

Para entender a fondo este principio desde la 'visión natural', es importante reconocer y mencionar algunas suposiciones metodológicas y metafísicas, las cuales también sirven como premisas para lo que procede en este trabajo: en primer lugar, si la individualidad de las partículas cuánticas puede fundamentarse a partir de su discernibilidad y en virtud de sus propiedades intrínsecas, entonces es necesario considerar el caso más serio de discernibilidad en el que F excluye a todas las propiedades intrínsecas que tienen las partículas en común (por supuesto, con excepción de la posición); y en segundo lugar, las etiquetas son constitutivas de las partículas y deben estar asociadas ya sea a una propiedad intrínseca (masa, carga, posición, etc.), ó bien a un atributo metafísico como la *Haeccei-*

[153]Como se verá más adelante, esta conclusión contrasta con la *TCB*, donde se adopta una interpretación en términos de partículas con posición físicamente admisible.

tas.
Ahora bien, la 'visión natural' acerca de la individualidad en la *MCE* ha articulado, bajo este tipo de premisas, una interpretación muy precisa acerca de las partículas cuánticas, con la peculiar característica de que son objetos indistinguibles e indiscernibles pero con la excepción de que *no* son individuos, sino al contrario, son *No-Individuos*. Desde esta perspectiva, los objetos no son particulares donde se instancian las propiedades, como ocurre con la distinción extensional que hasta ahora se ha adoptado, sino que son un tipo de entidades que prescinden de instanciación, en virtud de que tienen una relación de identidad con otros objetos. En realidad, son elementos cuya única característica que tienen es pertenecer a un conjunto de objetos con cierta cardinalidad, y por ende, presupone una noción de objeto estrechamente vinculada con la división que, como bien se dijo, apela a una relación de pertenencia entre diferentes objetos. Esta noción particular ha sido heurísticamente motivada mediante una analogía que consiste en "tener dinero en una cuenta de banco" [Teller, 1983, 1998]. En efecto, cierta cantidad de dinero puede depositarse en una cuenta de ahorros bancaria, pero a diferencia de lo que sucede con las monedas que se depositan en una alcancía, no hay manera de identificar individualmente a cada unidad monetaria. Por ejemplo, supóngase que el Lunes se deposita un dólar y el Martes se deposita de nuevo otro dólar. Si el miércoles se retirara la misma cantidad de dinero, entonces no habría manera de saber si la cantidad que se retiró corresponde a la que se depositó el lunes, ó bien, el martes. En otras palabras, no hay manera de estar seguro de que "The dollar you give me is the one I deposited on Monday, not the one I deposited on Tuesday!." [Teller, 1998, p.115].
De este modo, tomando en consideración que si un sistema de partículas cuánticas idénticas tienen todas sus propiedades en común (con excepción de la posición) y, sin embargo, son empíricamente indistinguibles y epistémicamente indiscernibles (bajo permutaciones en sus coordenadas), o mejor dicho, si ninguna partícula se puede identificar por medio de sus propiedades intrínsecas incluyendo su posición, resulta que se obtiene el siguiente dilema: o bien, la *MCE* infiere que las partículas son individuos pero niega PPI(1), ó las partículas cuánticas son objetos pero no individuos. Consecuentemente, en lo que respecta al PPI(1), la noción de individualidad en el contexto de la *MCE* es problemática, ó bien, la noción de una partícula cuántica, como objeto particular, no se ha podido establecer. En vista de este dilema, algunos filósofos han renunciado a un realismo cuántico, cuya postura versa en la premisa de que la naturaleza metafísica e inobservable del mundo no se puede inferir de la ontología de una de las teorías más exitosas de la Física, es decir, la *MCU*.
Afortunadamente, otros filósofos se han resistido a esta conclusión sugiriendo varias alternativas que abonan a construir una noción de individualidad en este contexto. Por un lado, algunos argumentan que, con base en una noción "débil" de individualidad relacional, es posible discernir a cada uno de los elementos que componen a un sistema de partículas idénticas. Esta estrategia permite continuar con el vínculo tradicional entre la individualidad y la discernibilidad epistémica al extender a PPI(1) de tal manera que F incluya relaciones. Desde una interpretación filosófica más formal, esta noción débil de individualidad considera que dichas partículas se caracterizan (ontológicamente) e individualizan gracias a las propiedades relacionales que poseen. Esto evidentemente se puede lograr

mediante la teoría de individuación de relaciones, en consonancia con una caracterización ontológica que reside en la teoría de las propiedades. Así mismo, las etiquetas que hacen referencia a las partículas presuponen la adopción de la teoría de la referencia (en lo que respecta a la dimensión semántica de la individualidad) pero también de la teoría descriptiva, debido a que a cada partícula se le asigna (rígidamente) un número, incluyendo una descripción en términos de sus propiedades relacionales. Desde esta perspectiva, es claro que la configuración de partículas cuánticas no cambia antes y después de una permutación en su posición, sin embargo, dicha invarianza no se expresa en términos de sus propiedades intrínsecas sino en términos de sus relaciones simétricas no-reflexivas que se satisfacen entre ellas.

Ahora bien, por otro lado, y con una visión muy diferente, algunos filósofos creen que si se pretende asumir la existencia de partículas individuales, es imperativo apelar a otras formas de caracterización, individuación y referencia que sean independientes de las propiedades que poseen y ajeno a cualquier aspecto epistemológico, es decir, que elimine la supuesta continuidad entre la discernibilidad epistémica y la individualidad. Volviendo al sistema conceptual propuesto en la sección anterior, es fácil ver que la única opción presente, en cuanto a caracterización ontológica e individuación se refiere, resulta ser la teoría del 'substractum' en consonancia con la teoría vacía de individuación. En este mismo caso, las etiquetas que hacen referencia a las partículas tienen su fundamento en la teoría de la referencia de Gracia, que consiste en asignar rígidamente una etiqueta a cada una de ellas sin la necesidad de adoptar una descripción, las cuales solo se usan para aprender a identificarlas. Sólo de esta forma es posible omitir cualquier aspecto epistémico en relación a la individualidad. En sintonía con el rasgo descriptivo de la teoría de Gracia, dicha asignación viene acompañada de una restricción epistemológica que se impone a mano sobre las partículas y que consiste en afirmar que no todas pueden ocupar un estado con la misma probabilidad. Es decir, a cada partícula se le asigna un nombre pero no de forma arbitraria, sino de acuerdo a una restricción que inevitablemente se establece con base en lo que dicta la estadística cuántica[154].Volviendo al ejemplo ilustrativo de arriba (que consiste en un sistema de dos partículas idénticas con dos estados posibles), en seguida se presentará una explicación más detallada al respecto:

Es posible concebir una noción de individualidad trascendental en el contexto cuántico si se elimina la equiprobabilidad de los estados posibles del sistema total[155]. Por ejemplo, bajo esta presuposición, las diferentes posibles configuraciones del sistema son las siguientes:

Partículas A y B en estado 1.

Partículas A y B en estado 2.

Partícula A en estado 1 y partícula B en estado 2.

[154]Ver en [French, 1988, p.101] y en [French & Krause, 2006, pp.198-37]

[155]En la literatura, la asunción de equiprobabilidad de estados posibles se conoce como *Principio de indiferencia*, y tiene directamente relación con una noción de probabilidad epistémica, de tal manera que los estados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrencia (asumiendo que se tiene la misma información para todos los casos).

Partícula B en estado 1 y partícula A en estado 2.

con probabilidad de un tercio, un tercio, un sexto y un sexto, respectivamente. A este respecto, la probabilidad ya no es equivalente en cada uno de los estados o arreglos posibles. Es en este punto donde la distinción entre la discernibilidad epistémica y la individualidad es más evidente.

En vista de estos resultados, todo parece indicar que si se trata de buscar una noción de individualidad de partículas cuánticas idénticas, existen por el momento dos posturas antagónicas: en primera instancia, se puede asumir la existencia de partículas individuales pagando el precio de inclinarse hacia aspectos de índole metafísico (como es la individualidad trascendental o *Haecceitas*), que no tienen mucho respaldo (sobre todo en los círculos más allegados a la investigación científica). Por otro lado, es posible concebir una noción "débil" de individualidad epistémica que permita una continuidad conceptual con la discernibilidad epistémica (en términos de propiedades relacionales). Sin embargo, más allá de cualquier noción de individualidad supuestamente compatible con la *MCU*, también existe la "visión natural" que pretende eliminar cualquier tipo de referencia hacia objetos individuales y considera a los objetos del mundo cuántico como no-individuos. Es decir, aunque sean objetos de otro tipo, urge dejar de hablar acerca de la individualidad de las partículas cuánticas.

Si algo queda claro en esta discusión es que la individualidad en la *MCU* no es una noción trivial. En particular, las dificultades que se pueden apreciar en torno a este concepto permite motivar otro tipo de tesis filosóficas que apuestan a cambian los compromisos metafísicos que se suponen desde un principio. Una de las estrategias en este sentido es el *REO*, el cual como se ha visto, es una tesis filosófica que relega a los objetos y las propiedades de su estatus ontológico. En este espíritu, se evita hablar del comportamiento anómalo de las partículas cuánticas, y en su lugar, se hace énfasis en las propiedades estructurales de *MCU*. No obstante, existen otras estrategias que se han sugerido sin comprometer una Metafísica de objetos y propiedades pero que supuestamente evitan las objeciones que se han enraizado en torno a la constitución de objetos individuales en el seno de la *MCU*. Esta labor se ha podido hacer por medio de: i) la articulación de una noción de individuo más razonable que extienda la PP(1); ó bien, ii) recurrir a otras formulaciones compatibles con otro tipo de interpretaciones que puedan evitar problemas en torno a la individualidad (por ejemplo la *TCB*). Por el momento, se evitará entrar a discutir (ii), para la cual se tiene reservado la siguiente parte de esta sección, y la discusión por ahora se enfocará en (i) en el contexto de la *MCE*, en otras palabras, se evaluará si es posible articular una concepción de individuo más razonable. Hasta el momento, en lo que respecta al problema del enredamiento cuántico y el problema de las partículas idénticas, se pueden identificar dos estrategias que han abonado a instaurar una noción de individualidad en la *MCU*:

(1) *Discernibilidad Débil.* Adoptar una noción más débil de discernibilidad para articular una noción epistémica de individualidad. Esta estrategia busca articular una noción epistémica de individualidad que sea compatible con el formalismo de la *MCU*, y con ello, pueda evitar cualquier referencia a nociones metafísicas, tales como la *Haecceitas*. Como bien se dijo, esta noción de individualidad

considera que las partículas cuánticas se caracterizan (ontológicamente) e individualizan gracias a las propiedades relacionales que poseen, de tal manera que el principio de Leibniz en su versión estricta (PPI(1)) incluya estas últimas en su formulación. Así mismo, tomando en cuenta que en esta teoría uno encuentra estados de un sistema de partículas fermiónicas con todas sus propiedades intrínsecas en común (con excepción de la posición), es posible adoptar una noción más débil de discernibilidad en términos de propiedades extrínsecas. Volviendo a las definiciones del preámbulo teórico, estas propiedades relaciones pueden interpretarse como "externas" en tanto que dependen de otros objetos más allá del objeto en el que se instancian. En este caso, una propiedad externa es relacional en el sentido de que cualquier propiedad de una partícula es una propiedad de otras partículas, y por ende, es invariante bajo permutaciones en su posición [Muller & Saunders, 2008, p.527]. Ahora bien, estas propiedades pueden formalmente definirse en términos de relaciones simétricas no-reflexivas que se satisfacen entre las partículas y que tienen la característica especial de que son invariantes bajo permutaciones en sus coordenadas [Saunders, 2003b,a, 2006, Muller & Saunders, 2008]. Específicamente, es posible distinguir dos nociones de discernibilidad:

(i) *Discernibilidad absoluta*. Dos objetos son absolutamente discernibles si existe una fórmula $F(x)$ de una variable x que es verdadera para sólo uno de los objetos. Esta noción equivale al principio de Leibniz si para toda propiedad y físicamente relevante (para la *MCU*), dicha fórmula corresponde al enunciado $F(x) =$"x posee la propiedad y". En otras palabras, si para un par de variables cuyo dominio son dos objetos a y b existe una propiedad monádica F, tal que:

$$(F(a) \wedge \neg F(b)) \vee (\neg F(a) \wedge F(b))$$

(ii) *Discernibilidad débil*. Dos objetos son débilmente discernibles si existe una relación R dos-a-dos irreflexiva que ambos objetos satisfacen. En este caso, esta noción equivale al principio de Leibniz si para cualquier otra variable y, la relación $R(xy)$ es verdadera para sólo un objeto. En otras palabras, si para un par de variables cuyo dominio son dos objetos a y b existe una propiedad poliádica (relación) R tal que:

$$\begin{aligned} \exists c((R(ac) \wedge \neg R(bc)) \quad &\vee \quad (R(bc) \wedge \neg R(ac))) \vee \\ \exists d((R(da) \wedge \neg R(db)) \quad &\vee \quad (R(db) \wedge \neg R(da))) \end{aligned}$$

Según estos autores, un sistema de partículas fermiónicas no satisface la discernibilidad absoluta pero sí satisface la discernibilidad débil. Por ejemplo, en un estado singulete de electrones (14.4) se ha probado que, aunque no sea posible especificar el espín de cada electrón, existe una relación simétrica no-reflexiva en común (la propiedad relacional de tener espín en dirección contraria) que es invariante bajo permutaciones en su posición y que puede discernir "débilmente" a cada partícula. En este sentido, las partículas cuánticas son objetos individuales en virtud de que satisfacen una relación de este tipo. Esta propuesta se ha hecho con formalidad dentro de un marco lógico, y una generalización rigurosa se ha desarrollado para cualquier tipo de partícula elemental [Muller & Seevinck, 2009].

Más aún, debido a que esta noción de individualidad es estrictamente relacional, también puede considerarse contextual, en el sentido de que cualquier propiedad de una partícula depende de cómo se relacione con el resto de las partículas [Stachel, 2005].

Desde un punto de vista metafísico, es un hecho que esta noción de individualidad puede establecerse gracias a la teoría de las propiedades (en lo que respecta a su caracterización ontológica) y el principio de propiedades relacionales (en lo que respecta su principio de individuación). Ahora bien, al abogar por una noción de individualidad en este sentido, es necesario tomar en cuenta algunos aspectos concernientes al agregado de propiedades extrínsecas que se instancian en las partículas. Básicamente, para garantizar una noción epistémica de individualidad en términos de la discernibilidad, uno debe asumir un principio (el principio de Leibniz) que restringe la posibilidad de que distintas partículas compartan todas sus propiedades extrínsecas. Sin embargo, por tratarse de propiedades extrínsecas, ó bien, relacionales, este principio debe generalizarse. De lo contrario, la adopción de una noción epistémica de individualidad resultaría imposible por el hecho de que dicho principio presupone únicamente la instanciación de propiedades *intrínsecas* (incluida la posición[156]) que, como bien se sabe, no garantizan la discernibilidad de las partículas cuánticas. En este caso, el principio de Leibniz

$$\forall F(F(a) \leftrightarrow F(b)) \rightarrow a = b$$

se satisface si se incluye a R, es decir, incluye enunciados donde los objetos a y b son indiscernibles débilmente mediante relaciones, o lo que es lo mismo:

$$\forall c(R(ac) \leftrightarrow R(bc)) \wedge \forall d(R(da) \leftrightarrow R(db))$$

Por ejemplo, en el caso de un estado singulete de dos electrones (a y b), aunque no es posible saber el espín de cada una de las partículas, ambas partículas satisfacen la relación "a tiene el espín opuesto a b", y bien, "b tiene el espín opuesto a a", omitiendo el caso reflexivo "x tiene el espín opuesto a x".

(2) *Individualidad Trascendental*. Otra estrategia consiste en recurrir a conceptos metafísicos como la *Haecceitas* de Donus Scotus, la propiedad trascendental del éste primitivo de acuerdo con Adams, el substrato Lockeano, ó bien, la individualidad trascendental de Post. Estos conceptos tienen en común el hecho de que tratan de articular una noción de individualidad metafísica más allá del acceso epistémico que una teoría puede llegar a tener en relación a objetos individuales. Para un sistema cuántico de partículas idénticas, uno siempre puede recurrir a una Metafísica de objetos individuales (en dirección contraria a la noción de no-individualidad), tomando en cuenta que las configuraciones de los estados antes y después de una permutación (en la posición de dos o más partículas) difieren, aunque dichos estados estén "escondidos" o sean inaccesibles para la *MCU*. Como bien se dijo, esto se puede lograr al negar la equiprobabilidad de las configuraciones posibles del estado inicial, lo que se conoce como el principio de indiferencia. Desde el punto de vista filosófico, una noción de

[156] A este respecto, habría que recordar que una permutación en la posición de dos o más partículas idénticas no cambia las predicciones de la teoría

individualidad de este tipo se separa del concepto epistémico de discernibilidad y se embarca en un análisis puramente metafísico [Gracia, 1988]. La discernibilidad en este sentido resulta ser una condición suficiente pero no necesaria de la individualidad [Gracia, 1988, French, 1988]. De este modo, mientras que la discernibilidad entre diferentes objetos es suficiente para su individuación, no existe, en principio, ninguna restricción para introducir nociones metafísicas más allá de lo que es epistémicamente accesible. Así mismo, más allá del significado pre-kantiano de este concepto, la noción de individualidad vinculada a la *Haecceitas*, se ha caracterizado por medio de la teoría del 'substractum' (en cuanto a su caracterización ontológica) y la teoría vacía de individuación (en cuanto a su principio de individuación). Una característica importante respecto a esta teoría de individuación es que extiende el principio de Leibniz en su versión estricta de tal manera que, en lugar de existir relaciones físicas (intrínsecas o extrínsecas) que disciernen a las partículas, existe un atributo de índole metafísico (la *Haecceitas*) que permite su distinción. Finalmente, no sin ser menos importante, las etiquetas o nombres propios que se le asocian a las partículas se introducen por medio de la teoría de la referencia de Gracia que, como bien ya se dijo, es un híbrido entre la teoría causal de la referencia y la teoría descriptiva, y que dispone del instrumental necesario para garantizar la referencia de las partículas por medio de etiquetas sin descripciones [157]. Es un hecho significativo que esta teoría semántica se ha formalizado en términos de la teoría de "quasets"[158], que presupone la idea de contar diferentes elementos de una misma familia con ciertas características en común [Gracia, 1988, French, 1988, Psillos, 1999, French & Krause, 2006]. Un ejemplo es la asignación de etiquetas a los componentes de las posibles configuraciones permitidas en el ejemplo ilustrativo de las bolas de billar. Otro ejemplo interesante es la asignación de etiquetas de los componentes de un estado enredado, tal como se puede observar en (14.4).

Desafortunadamente, estas estrategias cuya finalidad es salvaguardar una noción de individualidad dentro de la *MCE* no están exentas de problemas. Recuérdese que en ambos casos, el PPI(1) se extiende de tal forma que, al pretender no adoptar una postura análoga a la de la "visión natural", asumen que las partículas cuánticas son objetos individuales pero de otro tipo al que se conoce convencionalmente. En estas circunstancias, algunas objeciones se han propuesto en contra de ambas estrategias, las cuales se describen a continuación:

En lo que respecta a la primera estrategia, es decir, a la discernibilidad débil, sus mismos precursores han argumentado, como ya bien se dijo, que una noción "estrecha" de individualidad en términos de propiedades externas no difiere conceptualmente del hecho de que cualquier propiedad discernible que se le atribuya a una familia de partículas idénticas depende necesariamente de las relaciones que satisface [Muller & Saunders, 2008]. Sin embargo, esta suposición ha contribuido no sólo a desterrar una Metafísica de objetos y propiedades sino que también ha servido para articular una motivación legítima a favor del *REO*. En efecto, parece ser que al articular una noción de individualidad relacional en este sentido se obtiene un argumento circular:

[157] Ver en [Gracia, 1988, Ch. 6] y en [French & Krause, 2006, pp.198-37]

[158] Ver en detalle en [French & Krause, 2006].

> In order to appeal to such relations, one has had to already individuate the particles which are so related and the numerical diversity of the particles has been presupposed by the relation which hence cannot account for it. [French, 2014, p.40] y [French & Krause, 2006]

En otras palabras, la noción de discernibilidad débil adopta la visión de que el los objetos y propiedades tienen una prioridad ontológica sobre las relaciones (ó bien, las relaciones supervienen en los objetos). Pero al mismo tiempo, dicha visión revela una categoría de objetos individuales que se pueden discernir únicamente mediante relaciones. Por lo tanto, a no ser que los objetos se eliminen y se re-conceptualicen en términos de sus relaciones, tal como el *REO* argumenta, entonces se obtiene un argumento circular. Ante este problema, se ha sugerido que dicha noción de discernibilidad debe formularse en términos estructurales, es decir, los individuos deben reconceptualizarse en términos del conjunto de relaciones que satisfacen (entre las que se encuentran las relaciones irreflexivas): "[...] as individuals are nothing over and above the nexus of relations in which they stand."[Ladyman et al., 2007, p.138];[French & Krause, 2006, p.172] y [French, 2014, pp.40-41]. Este hecho induce a pensar que el intento de salvaguardar una noción de individuo en el ámbito de la *MCU* resulta ser, contrariamente a su objetivo, una evidencia a favor de la eliminación metafísica de los objetos y propiedades, tal como se argumenta en el *REO* [Ladyman, 2007, Ladyman & Bigaj, 2010, Muller, 2011].

Por otro lado, con respecto a la segunda estrategia, algunos críticos han argumentado que una noción metafísica de individualidad en estos términos carece de una justificación física, cuyo origen tiene su base en una premisa de parsimonía ontológica: mientras que una noción de individualidad pueda inferirse de forma clara y precisa a partir de la Física, no es necesario incrementar el peso metafísico de la teoría por medio de la introducción de nuevos elementos inobservables. Al adoptar una tesis realista de corte selectivo y siguiendo con esta premisa, uno bien puede introducir semejante concepto (la *Haecceitas*) siempre y cuando no haya afirmaciones metafísicas que se puedan inferir a partir de la teoría[159] y cuando dichas afirmaciones sean dispensables (en el sentido de Psillos (7.2.4)), es decir, cuando no existan otras hipótesis metafísicas que expliquen el éxito predictivo de la teoría [Saatsi, 2005, Psillos, 1999]. De lo contrario, uno termina añadiendo de forma arbitraria un contenido metafísico que es superfluo desde el punto de vista de la explicación y podría no tener ninguna relación con la *MCU* [Ladyman et al., 2007, Ladyman, 2007]. De acuerdo con Ladyman:

> Positing haecceity may be thought to engender an infinite regress for what individuates each haecceity? If haecceity can be primitively the particular haecceity that they are, then why not allow that the individuality of objects be primitive, dispensing with the need for haecceity in the first place? It is also reasonable to question whether such metaphysical posits ever genuinely explain or ground anything [Ladyman, 2007, p.26].

[159]Conocida como "admisibilidad física" por algunos filósofos, esta noción epistémica consiste en que las entidades inobservables que conforman la ontología de la teoría poseen propiedades intrínsecas o extrínsecas que se representan mediante estados y operadores. Esto permite, a su vez (como condición suficiente) que las propiedades físicas sean predicados de sujetos absolutamente discernibles. Desafortunadamente, es un hecho de que la *MCE* resulta ser un caso particular en el que dicha accesibilidad es imposible (al menos en lo que concierne a la instanciación de propiedades intrínsecas) [Muller & Saunders, 2008].

De este modo, es fácil ver que nociones como la *Haecceitas* no sólo contribuyen a formular enunciados metafísicos que, después de todo, son dispensables en relación a la explicación del éxito predictivo de la teoría, sino que también son explicativamente superfluos en el sentido de que son compatibles con cualquier formulación y cualquier teoría disponible.

Ahora bien, aún suponiendo un argumento neutral con respecto a nociones metafísicas como la *Haecceitas*, es importante advertir la posibilidad de considerar una noción diferente (y hasta antagónica) en el contexto de la *MCU*, es decir, la no-individualidad, siempre y cuando no exista ningún método que sea viable para incorporar una noción epistémica de individualidad. En otras palabras, cada vez que exista un argumento a favor de incorporar individuos por medio de nociones metafísicas como la *Haecceitas*, también existirá un argumento a favor (y con el mismo peso justificativo) para incorporar su homólogo antagónico, es decir, la noción de la no-individualidad. Esto implica, según French, una sub-determinación de la Metafísica por la Física, en el sentido de que no existe ningún método epistemológico (accesible para la teoría) que pueda elegir certeramente entre la *Haecceitas* y la no-individualidad [French, 2011]. De este modo, según French, la presencia de una sub-determinación de la Metafísica por la Física en el ámbito de la *MCE* es una evidencia contundente de que una Metafísica acerca de objetos y propiedades es deficiente. En consecuencia, de forma análoga al caso de la discernibilidad débil, esta conclusión ha propiciado un cuestionamiento profundo en torno al realismo estándar basado en objetos y propiedades, y por si fuera poco, ha servido de motivación y justificación para defender una tesis realista de corte estructural y eliminativista [French, 2014].

Desafortunadamente, estas objeciones indican que ambas estrategias no han establecido nociones de individualidad que extiendan el PPI(1) pero que preserven una Metafísica de objetos particulares y propiedades. Aparentemente esta conclusión es desastrosa para el realista estándar, sin embargo, creo importante atraer la atención del lector en torno a un problema metodológico que se puede identificar en el argumento de sub-determinación de French y que, a mi parecer, ha pasado desapercibido por la mayoría de los filósofos. Al pretender "leer" la Metafísica a partir de la Física, o dicho de otro modo, al pretender esbozar la imagen del mundo real en términos de las interpretaciones de las teorías de la Física más exitosas, uno debe ser cauteloso y evitar cualquier tipo de juicio a priori que pueda alterar el mensaje de dichas teorías. No obstante, a mi parecer French presupone que la *MCE* es la única teoría cuántica existente que goza del mismo poder predictivo. Así mismo, también cree que dicha teoría es el único candidato razonable que permite esbozar claramente la imagen del mundo cuántico. Pero, como bien se sabe (gracias al preámbulo teórico de este trabajo), la *MCE* está muy lejos de ser un candidato razonable en este sentido. No sólo es una teoría ambigua desde el punto de vista de la explicación, sino que también es empíricamente inadecuada (a no ser que se establezca algo así como un postulado del colapso), o bien, inconsistente. Por esta razón, el argumento de French no sólo presupone un juicio (sin justificación alguna) al creer que la *MCE* es el mejor candidato, sino que ignora la existencia de otras teorías muy diferentes pero empíricamente equivalentes, como es el caso de la *TCB* y las Teorías del Colapso Objetivo. Es más, sabiendo que la *TCB* es la única teoría cuántica que introduce explícitamente una ontología primitiva basada en partículas cuánticas, el argumento de French se derrumba trivialmente. De este modo, si lo que se quiere es "leer" la Metafísica a partir de la teoría científica más exitosa (la *MCU*), uno debe investigar la complejidad y la diversidad de las teorías

que existen en este dominio[160]. Sabiendo que una tesis realista estándar es problemática en el contexto de la *MCE*, uno debería de investigar, al menos, la teoría cuántica más adecuada que permita evidentemente introducir una noción de individualidad de acuerdo al sistema metodológico que se ha planteado en torno a este concepto. Según lo visto en el preámbulo teórico, dicha teoría correspondería a la *TCB*, pero como se podrá ver a continuación, su elucidación no es trivial y requiere de un análisis crítico en torno a este concepto.
El procedimiento será el siguiente: se identificará una noción de individualidad relativa a cualquier interpretación Bohmiana (a su versión mínima), con base en los seis problemas de la individualidad y la estructura conceptual de este concepto elaborada en la sección anterior. Posteriormente, se sugerirá y presentará una objeción en contra de esta noción, la cual a su vez se criticará apelando a otra formulación distinta.

14.6. La Individualidad en la Teoría Cuántica Bohmiana

Como bien se dijo anteriormente, una tesis realista con respecto a una teoría científica demanda especificar una ontología, la cual comprende los elementos de la realidad a los que dicha teoría hace referencia mediante sus proposiciones. En el contexto de la *TCB*, este conjunto de elementos consiste en una familia de partículas que se mueven en espacios tridimensionales o multidimensionales, guiadas por la función de onda que se propaga en el espacio de configuración (cuya interpretación es controversial). A decir verdad, ambos tipos de elementos parecen ser objetos de diferente categoría ontológica. Por un lado, las partículas se instancian discontinuamente (puntualmente) en el espacio correspondiente mientras que la función de onda, aunado a su carácter continuo, representa una distribución espacial de una magnitud escalar (o vectorial) que actúa potencialmente en dichos puntos. De este modo, existe una ligera intuición de que ambos objetos difieren en cuanto a la posibilidad de ser identificados como individuos. Uno bien podría identificar a una sola partícula en términos de sus propiedades cualitativas. Sin embargo, todavía no es claro cuáles serían dichas propiedades "individualizantes" ¿podrían ser la velocidad, la energía y el espín?, ó bien, ¿la masa y la carga? Análogamente, uno podría referirse a las partículas como objetos independientes de sus propiedades cualitativas, o bien, como un individuo autónomo que no superviene en estas últimas y que es individuo en tanto que tiene la cualidad de serlo. En este caso, parecería que uno tiene que apelar a un especie de substrato trascendental y etiqueta que pueda identificar a cada partícula. En cuanto a la función de onda, la primera impresión parecería ser que dicho objeto no puede identificarse como individuo. Una de las razones es que su carácter continuo prohibe su instanciación en un sólo punto, e incluso si se tomara con seriedad su definición formal, resultaría que no se puede definir de manera única espacio-temporalmente dado que es independiente de las coordenadas. Otra razón es que actúa potencialmente, en el sentido de que sus efectos que se instancian en puntos espacio-temporales sólo se hacen efectivos con la presencia de una o más partículas. No obstante, quizá uno podría recurrir a otra caracterización de individuo, o bien, otra forma de individuación que apelara, por ejemplo, a la substancia formal aristotélica, con la cual sería posible iden-

[160] Aquí habría que considerar que la justificación para creer en alguna interpretación de la *MCU* (incluyendo todas sus variantes) tiene su base en el argumento abductivo del no-milagro (*ANM*).

tificar a la función de onda como un agente causal del tipo formal, como bien Valentini propone [Valentini, 1992]. La moraleja que se sigue de estas primeras observaciones indica que tanto el concepto de objeto como el de individuo en la *TCB* requieren de un análisis perspicuo en virtud de que poseen diferencias pero también similitudes no triviales. A continuación, la discusión se encaminará a establecer un análisis respecto a la noción de individualidad para las partículas Bohmianas, dejando de lado la discusión que concierne a la función de onda. Sin embargo, aunque esto se hará por cuestión de economía y simplicidad, esta omisión no significa que se le reste importancia o relevancia a dicho debate.

14.6.1. Preámbulo Teórico

En el contexto de la *TCB*, es posible identificar diferentes nociones de individualidad de acuerdo al tipo de interpretación que se adopte [161]. Sin embargo, por razones de simplicidad, se pretende restringir la discusión a la versión mínima de la *TCB*, cuyo cuerpo teórico tiene aspectos que comparten todas sus interpretaciones, y que como bien se sabe, dispone del instrumental teórico y metafísico suficiente e indispensable para la explicación del éxito predictivo de la teoría. Es importante mencionar que para poder evaluar y caracterizar la noción de individualidad de dicha versión mínima, es necesario hacerlo con base en una definición intencional establecida de individualidad que no dependa de ninguna de sus interpretaciones y que no comprometa de antemano alguna postura metafísica dentro de la misma, al tomar en cuenta todas sus posibilidades. A este respecto, apelando al aspecto intencional de la individualidad que se ha establecido al principio de esta sección, es posible inferir que las condiciones suficientes y necesarias para que cualquier objeto de un sistema Bohmiano (no importa su interpretación) sea considerado un individuo, comprende una noción de conteo y numeración estrechamente vinculada con la identidad propia de un objeto (ver en 14.3.1).
Ahora bien, respecto a la extensión de la individualidad, se asumirá que el mundo se constituye de objetos de tipo particular y universal. De acuerdo con esta suposición, se apelará a la distinción aristotélica entre substancias primarias (que corresponden a las partículas) y sus propiedades. Estas últimas, como bien se dijo, serán considerados objetos de tipo universal. Otra observación importante es que en el contexto de la *TCB* existe un vacío conceptual entre la periferia que constituye a los datos sensibles y empíricos con respecto a cualquier aspecto que concierne a la individualidad de los objetos Bohmianos. En efecto, dado que se trata de teorías de variables ocultas (respecto a las partículas), cualquier referencia a los objetos Bohmianos es una afirmación metafísica que no puede ser, por el momento, empíricamente accesible. De esta forma, el tratamiento de la individualidad en este contexto no involucra elementos empíricos, y se caracteriza por asumir aspectos de índole metafísico. No obstante, suponiendo que la imagen del mundo que esboza la teoría es la correcta y tomando en cuenta que es empíricamente adecuada (al menos en términos probabilísticos), los aspectos epistemológicos también desempeñan un papel preponderante (como podría ser el caso de la discernibilidad entre sus términos teóricos inobservables). En efecto, si la teoría fuera co-

[161] Estas interpretaciones comprenden a la *MB*, la *VAL* y la *TOB*, incluyendo, como un caso particular, la de Basil Hiley y sus colegas (*HPP*). El lector interesado puede referirse a los trabajos de Dürr, Goldstein, y Zanghi (*MB*) [Dürr et al., 1992]; Brown, Elby, Weingard (*BEW*) [Brown, 2005], ó bien, Pylkkänen, Pättiniemi y Hiley (*PPB*) [Pylkka, et. al, 2014].

rrecta, sería posible acceder al conocimiento que se tiene del mundo real, posiblemente al poder discernir y caracterizar a los objetos que postula, aunque no sean, por ahora, directamente observables. Por último, antes de caracterizar a *TCB* en términos del esquema conceptual de la sección anterior, es pertinente describir brevemente una de las contribuciones que se han hecho en torno a la individualidad en esta teoría. Esta corresponde a *BEW* [Brown et al., 1996], donde hacen hincapié en la individualidad de las partículas Bohmianas (en términos de sus propiedades intrínsecas) desde diferentes interpretaciones.

En lo que respecta al estatus metafísico de las propiedades, *BEW* sugieren clasificar a las interpretaciones Bohmianas mediante la implementación de dos principios. En lugar de apelar a la distinción entre interpretaciones maximalistas y minimalistas, *BEW* proceden a clasificar el estatus metafísico de los parámetros dinámicos independientes del estado (la masa, la carga y el momento magnético)[162], de acuerdo a si la interpretación correspondiente satisface el *Principio de la Parsimonía*, ó bien, el *Principio de la Generosidad* [Brown et al., 1996]. Esta clasificación manifiesta una postura (aunque no definitiva) a favor de que los parámetros dinámicos independientes del estado no son propiedades que puedan instanciarse *únicamente* en la posición que ocupan las partículas. A este supuesto se le conoce como la *Tesis de la No-localicidad*, que puede ser heurísticamente motivado por diferentes experimentos de interferometría [Aharonov & Bohm, 1959, Brown et al., 1995][163]. El principio de parsimonía dictamina que los parámetros dinámicos independientes del estado son propiedades intrínsecas instanciadas únicamente en la función de onda. Este principio es adoptado en [Bell, 1971, p.39] y en [Brown, 2005, Dürr et al., 1996, 2004]. En cambio, en dirección opuesta al principio de parsimonía, y abarcando la tesis de la no localicidad, se encuentra el principio de generosidad, el cual afirma que dichos parámetros son propiedades intrínsecas instanciadas tanto en la función de onda como en las partículas. Este principio es adoptado en[164][Holland, 1995, *3.3.1*] y en [Brown et al., 1996]. Según [Valentini, 1992, Holland, 1995, Brown et al., 1996, 1999], existen dos razones para adoptar el principio de la generosidad (aunque no sean definitivos):

La primera razón comprende dos argumentos: i) se puede notar que la ley de movimiento que se postula en todas las interpretaciones (la ecuación guía), contiene explícitamente a la masa inercial de la partícula, a su carga y a su momento angular (al incorporar efectos electromagnéticos, véase en [Holland, 1995, p.124]). Al considerar a dichos parámetros como propiedades intrínsecas reales, es razonable pensar que estas últimas están instanciadas en las partículas. Por lo tanto, la masa, la carga y el momento angular parecen ser propiedades instanciadas en las partículas. Ahora bien, ii) al considerar un sistema de muchas partículas, resulta que la función de onda asociada a este sistema es, en general, no-separable. Si la carga, la masa y el momento angular son efectivamente propiedades intrínsecas de todas las partículas, entonces deben estar

[162]A diferencia de la clasificación de Albert Solé, *BEW* solo caracteriza a las interpretaciones en términos de los parámetros dinámicos independientes del estado, sin comprometerse con el resto de los parámetros.

[163]A este respecto, Peter Holland agrega en [Holland, 1995] que la función de onda es solución a la ecuación de Schrödinger que, a su vez, depende de estos parámetros.

[164]Según Holland, los parámetros dinámicos independientes del estado deben estar asociados a las partículas debido a que sólo de esta forma es posible dar cuenta de las propiedades de las partículas clásicas en el límite correspondiente. A este respecto, es posible apelar a la crítica de Valentini, quién argumenta que el límite clásico no se puede caracterizar en términos del potencial cuántico (cuando éste se aproxima a cero), debido a que la dinámica de las partículas clásicas es una consecuencia del comportamiento de los paquetes de onda y no de las partículas cuánticas.

asociadas a la función de onda total debido a que el enredamiento de los estados puros no permite discernir los paquetes asociados a cada una de las partículas. Por lo tanto, la masa, la carga y el momento angular parecen ser propiedades instancias en la función de onda, lo que quiera que esto signifique. La segunda razón se sigue al demostrar que el principio de parsimonía no es viable. En [Brown et al., 1996] se dispone de diferentes ejemplos concretos que demuestran heurísticamente la debilidad de este principio y adoptan el principio de generosidad. El primero de ellos, supone lo que se llama el *Problema de Reconocimiento*, que consiste en que no hay manera de identificar la posición precisa de un sistema de dos partículas, en el caso de que se encuentren en el soporte de la intersección entre sus correspondientes paquetes de onda (factorizables). A este respecto, la única salida para que este principio se satisfaga podría ser etiquetar a las partículas de acuerdo con una caracterización e individuación trascendental independiente de cualesquiera que sean sus propiedades, o bien, referirse a la evolución temporal de la trayectoria descrita por la misma (asumiendo algo así como una no-localidad temporal). Teller en su artículo acerca de ondas también habla al respecto [Teller, 1983]. El segundo ejemplo pone de manifiesto la posibilidad de que dos trayectorias correspondientes a la evolución temporal de dos partículas se crucen en algún punto. En este caso, el problema es análogo al ejemplo anterior y su solución también parece ser equivalente. Ahora bien, según *BEW* el principio de generosidad también se satisface en la *VAL*. Dado que la masa, la carga y el momento angular (para el caso general) son parámetros que aparecen tanto en la ley de movimiento (ecuación guía) como en la función de onda total, hay razones suficientes para considerarlas propiedades intrínsecas instanciadas en ambos objetos[165]. No obstante la razón más importante y a la cual *BEW* refieren de manera especial, es el hecho de que la función de onda es incapaz de existir y manifestarse independientemente de la partícula. Ambos objetos están dinámicamente relacionados y no hay manera de que puedan existir de forma separada. En este sentido, por el mismo argumento anterior, la *TOB* también satisface el principio de generosidad, aunado a que la noción de fuerza, y en particular, la masa inercial, desempeña un papel fundamental en dicha interpretación[166]. En efecto, no importa si se toman en cuenta los conceptos newtonianos presentes en la *TOB* (como son las aceleraciones y las fuerzas), o bien, los conceptos presentes en la *VAL* (como son las fuerzas “aristotélicas”), de cualquier forma ambas interpretaciones satisfacen el principio de generosidad en virtud de que consideran tanto a las partículas como a la función de onda como objetos dinámicamente inseparables.

Ahora bien, hasta ahora no se ha mencionado ningún aspecto relacionado con la noción de individuo en torno a la propuesta de *BEW*. Sin embargo, aunque los autores no lo mencionan explícitamente, los principios de generosidad y parsimonía abren la posibilidad de introducir una noción de individualidad en el

[165] Aquí valdría la pena recordar que la *MB* asume una noción de contextualidad para las “propiedades” extrínsecas e intrínsecas (con excepción de la posición), aunado a la dependencia matemática de estas propiedades con la función de onda total. Sin embargo, es importante enfatizar en que en el marco teórico de la *VAL*, según *BEW*, mientras que los parámetros dinámicos que dependen del estado siguen siendo contextuales, el resto de los parámetros, asociados a las propiedades intrínsecas, no lo son.

[166] Aunque las fuerzas cuánticas sean nulas, se puede probar que en algunos casos existen efectos perceptibles producidos por el potencial cuántico debido al potencial clásico (y eléctrico si es el caso), que a su vez, determinan la evolución de la función de onda por medio de la ecuación de Hamilton-Jacobi generalizada. Esto implica que la masa también puede ser una propiedad instanciada de la función de onda.

contexto de la *TCB*. Por un lado, el principio de parsimonía sugiere concebir una noción de individuo equivalente al que se propone en la *MB*. La razón es que tanto la carga, la masa y el momento angular son parámetros que no están asociadas a las partículas, lo que resulta en que su individualidad superviene únicamente en su posición. Por otro lado, el principio de generosidad sugiere concebir una noción de individuo distinta, quizá más parecido al que se tiene en la *TOB* y la *VAL*. Dado que la carga, la masa y el momento angular son propiedades intrínsecas instanciadas tanto en las partículas como en la función de onda, parece que es posible apelar a la individualidad desde la discernibilidad del campo y de las partículas. En este sentido, se puede sugerir una noción de individuo que comprenda la dualidad ontológica de la función de onda y las partículas (o bien, de solo una partícula representativa) como objetos particulares independientes que poseen tres propiedades en común (la carga, la masa y el momento angular). O por el contrario, se puede sugerir una noción de individuo que comprenda tanto a la función de onda y la partícula representativa como un único objeto particular que posee tres propiedades (la carga, la masa y el momento angular).
Ahora bien, es justo y pertinente considerar las críticas que se han hecho en torno a la incorporación de una noción de individualidad en la *TCB*, incluyendo algunas anomalías que presuntamente existen y que en la mayoría de los casos pasan desapercibidas.

14.6.2. La Individualidad Bohmiana No Es Trivial

En el caso particular de la *TCB*, uno esperaría que hubieran razones suficientes para comprometerse con una ontología de objetos con cierta individualidad. La razón principal reside en que, a diferencia de la *MCE*, esta teoría introduce partículas que constituyen la ontología de la teoría. Entonces parece natural sugerir que las partículas Bohmianas, que siguen distintas trayectorias en el espacio físico a lo largo del tiempo, son individuos en virtud de que pueden discernirse entre sí debido a las propiedades intrínsecas que poseen. En este contexto, parecería que la *TCB* evade el problema de sub-determinación metafísica y permite elucidar una noción epistémica de individualidad admisible desde la Física. En efecto, incluso si se tuviera un sistema de partículas idénticas con todas sus propiedades intrínsecas en común (masa, carga, momento angular, etc.), las partículas Bohmianas podrían discernirse en términos de su posición extendida a lo largo de trayectorias. Sin embargo, aunque sea posible incorporar una noción de individuo en estos términos relativa a cada interpretación, esta teoría no se encuentra exenta de problemas y objeciones al respecto. A continuación, se presentará y analizará una objeción que, a mi parecer, tiende a obscurecer el escenario (hasta por ahora positivo) que involucra individuos Bohmianos.
Esta objeción es consecuencia de dos premisas fundamentales respecto a las características atípicas de las partículas Bohmianas: i) la tesis de la no-localidad; y ii) la tesis de las etiquetas. La primera refiere a publicaciones anteriores [Aharonov & Bohm, 1959, Brown et al., 1995, 1996], mientras que la segunda la desarrollaré a partir de algunas ideas que provienen de la literatura (respecto a la discernibilidad de estas partículas) [Dürr et al., 1992, Brown et al., 1999]. En seguida, se demostrará que, al asumir ambas premisas, no es posible adoptar una noción de individualidad epistémica atribuida a las partículas Bohmianas sin prescindir de problemas conceptuales. Con base en lo que se discutió arriba, es posible afirmar que la *TCB*

confirma las siguientes tesis:

(1) *La tesis de la no-localidad*: Los parámetros independientes del estado (como la masa, la carga y el momento angular) no se instancian y localizan en un sólo punto del espacio físico donde se definen. Desde un punto de vista clásico, este hecho parecería no tener ningún sentido debido a que cualquier propiedad clásica se instancia localmente en la posición que ocupan las partículas. Sin embargo, aparentemente este tipo de fenómenos podrían explicarse de forma más natural desde los preceptos conceptuales de la *TCB*. En efecto, como bien se sabe, la velocidad de las partículas Bohmianas depende del estado y de la dinámica del sistema total, como es efectivamente el caso de cualquier otra propiedad dinámica. Además, en virtud de que la función de onda no se localiza puntualmente, sino que está dispersa a través del espacio de configuración, resulta que dichas propiedades dinámicas también tienen comportamientos no-locales en el espacio físico. Sin embargo, a pesar de la variedad de fenómenos misteriosos e insólitos que ocurren en este dominio, existen buenas razones para cuestionar el comportamiento no-local de los parámetros independientes del estado. En primer lugar, estos parámetros no son propiedades dinámicas y no dependen de la función de onda. Así mismo, independiente de su comportamiento, existe la posibilidad de adoptar una interpretación de *TCB* (llamada interpretación minimalista) [Bell, 1971, Dürr et al., 1995a, 2004, Goldstein et al., 2013], que excluye cualquier propiedad (son excepción de la posición) de las categorías ontológicas. En este sentido, no sólo es el caso de que la masa, la carga y el resto de las propiedades Bohmianas tienen características atípicas, sino que con excepción de la posición, todas las propiedades no existen. Pero como se verá a continuación, esta conclusión no ha escapado de serias objeciones. En efecto, algunos resultados experimentales, como es el caso del efecto Bohm-Aharonov y la interferometría de neutrones [Aharonov & Bohm, 1959, Brown et al., 1995], han abonado a motivar la premisa de que los parámetros independientes del estado no se pueden localizar puntualmente, pero que, sin embargo, pueden detectarse. Por ende, estos experimentos sugieren que dichos parámetros deben ser consideradas propiedades ya sea únicamente de la función de onda (principio de parsimonía), ó bien, de la función de onda y las partículas Bohmianas (principio de generosidad) [Brown et al., 1996]. A primera vista y como bien ya se dijo, el hecho de que la ecuación guía describe la evolución temporal de las trayectorias de las partículas asociadas a estos parámetros podría abonar a un argumento tentativo en favor del principio de generosidad [Valentini, 1992, Holland, 1995, Brown et al., 1996, 1999], quizá mediante su interpretación en términos de propiedades extrínsecas. Sin embargo, independientemente de si el principio de parsimonía (o el de generosidad) son correctos, los resultados experimentales antes mencionados implican que las partículas Bohmianas no son discernibles en términos de los parámetros independientes del estado debido a que no son propiedades intrínsecas, es decir, propiedades que no dependen de otros objetos sino sólo de las partículas donde se instancian [Brown et al., 1996].

Ahora bien, suponiendo que el principio de generosidad es correcto, estas observaciones permiten concluir que la mejor postura filosófica al respecto es que dichos parámetros sean interpretados como el resto de las propiedades dinámicas de *TCB* (por supuesto, únicamente si se les considera parte de la ontología de la teoría), es decir, como propiedades extrínsecas que, después de todo, remiten a una noción ‘estrecha’ de individualidad que se fundamenta en términos de las relaciones que se satisfacen entre la partícula donde dicha propiedad se instancia y el resto de las partículas. No obstante, de ser así, esta interpretación termina irremediablemente respaldando una tesis estructuralista debido a su perfil relacional. Recuérdese que la noción ‘estrecha’ de individualidad (que es estrictamente relacional) presupone la prioridad ontológica de los objetos y las propiedades sobre las relaciones que se satisfacen entre ellos, lo que implica un argumento circular. Por ende, cualquier interpretación relacional de la individualidad de las partículas parece ser, contrariamente a su objetivo, un argumento a favor *REO*, y pretende re-conceptualizar dichas partículas en términos de las relaciones que supuestamente constituyen a una estructura fundamental.

Ahora bien, en vista de la tesis de no-localidad, algunos filósofos han argumentado que si se desea introducir una noción de individualidad epistémica en el contexto de la *TCB*, es posible (y necesario) apelar únicamente a la posición de las partículas extendida a lo largo de trayectorias [French & Krause, 2006]. En estas circunstancias, se espera que esta estrategia sea la forma más directa y general para elucidar una noción de individualidad de las partículas Bohmianas en términos de su discernibilidad. Después de todo, existen sistemas como es el caso de partículas idénticas, donde todas las propiedades intrínsecas se comparten, con excepción de la posición. Por consiguiente, si es posible individualizar a dichas partículas de este modo, entonces todo parece indicar que es legítimo hablar de una Metafísica de objetos y propiedades en el ámbito de la *MCU*. Desafortunadamente, esta conclusión no es razonable por dos razones: primeramente, habría que notar que en el contexto de la *TCB*, no es que las partículas puedan compartir todas sus propiedades intrínsecas, en cuyo caso uno debe recurrir a las propiedades espacio-temporales como ocurre en un sistema de partículas idénticas. Al contrario, lo que ocurre es que, con la única excepción de la posición, las propiedades intrínsecas no existen. Por ende, la exclusión de propiedades intrínsecas de la ontología de la teoría (con excepción de la posición), implica que estas partículas se distinguen físicamente por medio de su posición, sin importar el tipo de sistema ni la forma específica de la función de onda; en segundo lugar, tomando en cuenta que las partículas Bohmianas únicamente poseen su posición, existe un problema en relación a las etiquetas (nombres propios) que las permite identificar. Como bien se explicó arriba, esto se sigue del hecho de que en la *TCB* las partículas deben etiquetarse por algún otro elemento que no sea su posición. En efecto, siguiendo con [Brown et al., 1999, Goldstein et al., 2005], se puede constatar que esta teoría satisface la siguiente premisa:

(2) *La tesis de las etiquetas*: Las partículas deben etiquetarse por medio de otro elemento que no sea su posición en el espacio físico.

Cualquier permutación entre las coordenadas de las partículas Bohmianas en el espacio físico induce un cambio en el orden de las coordenadas del espacio de configuración, lo que genera una nueva configuración (posición del conjunto total de partículas). Esto se debe a que las coordenadas de N partículas en el espacio físico $\mathbf{Q}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ genera un punto en el espacio de configuración $\mathbf{Q}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$, que contiene una estructura especial que consiste en N tuplas ordenadas de tres coordenadas, cada una de las cuales corresponde a una partícula en el espacio físico. Además, como la velocidad de la i-partícula depende de la función de onda a través de (13.2), y bajo su evaluación depende de la configuración instantánea $\mathbf{Q}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$ de todas las partículas, cualquier permutación entre dos o más coordenadas arbitrarias de las partículas en el espacio físico tendrá su contraparte física por medio de un cambio en la trayectoria de la i-partícula y en las trayectorias del resto de las partículas. Por supuesto, existe una excepción a esta conclusión cuando la función de onda es (anti)-simétrica, porque en dicho caso, (13.2) implica que las funciones de onda que difieren por un signo (después de la permutación de las coordenadas de las partículas) inducen velocidades que difieren únicamente por su sentido. Pero tomando en cuenta el caso general para funciones de onda arbitrarias, se sigue que diferentes estados asociados a sistemas de partículas que difieren bajo permutaciones resultan ser empíricamente equivalentes pero físicamente discernibles. En consecuencia, cuando se dice que las coordenadas de las partículas se intercambian, lo que significa es que sus posiciones realmente se intercambian. Tomando en cuenta este hecho importante, *debe* existir una manera de saber "cuál partícula es cual", en otras palabras, si se asume que las etiquetas son constitutivas de la individualidad de las partículas, entonces debe haber una etiqueta asociada a cada partícula Bohmiana en la forma de una propiedad física, ó bien un atributo metafísico, de tal manera que uno pueda discernirlas cuando permutan.

Uno bien podría argumentar que la manera más razonable de etiquetar a las partículas Bohmianas es mediante su posición instantánea en el espacio físico. Sin embargo, como en cualquier sistema de partículas discernibles que viven en el espacio físico, las etiquetas asociadas a las partículas no se pueden especificar por medio de su posición instantánea, al menos que siempre estuvieran en reposo. Esto debido a que, como bien se dijo arriba, dichas partículas realmente se mueven con respecto al espacio físico al permutarlas. Considérese el siguiente argumento por medio de su reducción al absurdo: supóngase que hay dos partículas, cada una de las cuales tienen posición $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en el espacio físico, respectivamente. La partícula "$\mathbf{x}$" se encuentra en la posición $\mathbf{x}$, mientras que "$\mathbf{y}$" se encuentra en la posición $\mathbf{y}$. Si las partículas se etiquetan de acuerdo a la posición que poseen, entonces cualquier permutación en su posición implica una situación física equivalente, es decir, la partícula " $\mathbf{x}$" se encuentra en la posición $\mathbf{x}$, mientras que "$\mathbf{y}$" se encuentra en la posición $\mathbf{y}$. Sin embargo, debido a que esta conclusión dista de lo que ocurre físicamente después de una permutación, en cuyo caso se obtienen diferentes trayectorias para una misma condición inicial, y por ende una situación física diferente, entonces no se puede asumir que las etiquetas de las partículas se pueden especificar por medio de su posición instantánea.

Otro tipo de estrategias para etiquetar a las partículas se pueden proponer. Por ejemplo, en términos de las trayectorias que describen en un lapso de tiempo determinado. Para este fin, una regla de asignación debe establecerse entre las etiquetas de las trayectorias y las que corresponden a las partículas. Desafortunadamente, esta labor no puede realizarse sin dificultades hasta que se sepa de antemano la posición inicial que corresponde a cada partícula. En efecto, contrariamente a lo que sucede en un sistema clásico de partículas idénticas, la trayectoria de cada partícula Bohmiana úni-

camente se puede especificar por medio de la configuración inicial y la función de onda del sistema total (incluyendo a todas las partículas), tal como lo dicta la forma del estado Bohmiano $(\Psi_t, \mathbf{Q})$ y la naturaleza determinista de las ecuaciones de movimiento. Nótese que esta especificación supone que las velocidades iniciales de las partículas no son grados de libertad del sistema, como bien ocurre en la *MC*, donde la especificación de las velocidades forma parte de las condiciones iniciales para saber la trayectoria que corresponde a cada partícula. En este sentido, en dirección contraria a la naturaleza dinámica de segundo orden en la *MC*, donde la trayectoria de cada partícula se puede identificar por medio de su velocidad inicial (sin importar su posición inicial y la del resto de las partículas), en el caso de la *TCB* no es posible fijar de antemano las velocidades iniciales, al menos que se especifique la posición inicial de cada partícula. Por ende, no hay manera de saber la trayectoria que corresponde a cada partícula sin antes saber la posición inicial que corresponde a cada una de ellas. Este hecho revela que las partículas Bohmianas deben poseer un atributo adicional a su posición para que sea posible establecer una regla de asignación entre el conjunto de partículas y el conjunto de posiciones iniciales (quizá por medio de una propiedad intrínseca). A continuación se explicará lo anterior en términos de un ejemplo:
Considérese un sistema de dos partículas, por ejemplo un electrón y un muon, cuyas masas (m_e y m_μ) son las únicas propiedades intrínsecas que sirven para etiquetarlas. Si la función de onda (escalar) del sistema es $\Psi_t(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, entonces *TCB* dictamina que las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_1 &= (\hbar/m_e)\, \mathrm{Im}\,(\nabla_1\Psi_t/\Psi_t)\,(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) \\ \dot{\mathbf{Q}}_2 &= (\hbar/m_\mu)\, \mathrm{Im}\,(\nabla_2\Psi_t/\Psi_t)\,(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) \end{aligned} \tag{14.5}$$

Como uno puede observar de (14.5), las etiquetas asociadas a la masa son constitutivas de las partículas en el sentido de que la masa m_e corresponde a la partícula con posición $\mathbf{Q}_1$ y velocidad $\dot{\mathbf{Q}}_1$, mientras que la masa m_e corresponde a la partícula con posición $\mathbf{Q}_2$ y velocidad $\dot{\mathbf{Q}}_2$. Pero si las masas de las partículas se esconden, entonces no existe una manera de saber la velocidad (ya sea $\dot{\mathbf{Q}}_1$, ó bien, $\dot{\mathbf{Q}}_1$) que corresponde a cada partícula (ya sea un electrón o un muon), al menos que se sepa la posición que corresponde a cada partícula desde un principio.
Este ejemplo ilustra básicamente el hecho de que las partículas Bohmianas deben etiquetarse, pero dado que esto solo puede pasar en términos de sus trayectorias, y estas últimas se determinan únicamente sabiendo la posición que corresponde a cada partícula, entonces se puede concluir que las partículas deben etiquetarse en términos de otro atributo adicional que no sea su posición en el espacio físico.

De este modo, al demostrar que la *TCB* satisface la tesis de las etiquetas, cualquier físico esperaría que la mejor (y la única) manera de identificar a las partículas Bohmianas es mediante otro tipo de propiedades intrínsecas, que no involucren aspectos espacio-temporales, como por ejemplo, los parámetros independientes del estado (la masa, la carga y el momento angular) [Brown et al., 1999]. Sin embargo esta promesa corresponde precisamente al escenario que niega la tesis de la no-localidad. En efecto, no hay manera de discernir a las partículas Bohmianas por medio de propiedades intrínsecas que, como bien se ha dicho, corresponden los parámetros independientes del estado. Esto significa que la conjunción de la tesis de la no-localidad y la tesis de las etiquetas implica que las partículas deben etiquetarse, aunque *TCB* sea incapaz de hacerlo en términos de propiedades intrínsecas (admisibles para la teoría).

Hasta aquí, parecería que el argumento lógico que toma como premisas a ambas tesis conducen a una situación problemática. Sin embargo, habría que notar que si bien, es un hecho que todas las partículas Bohmianas deben identificarse, dicha petición puede lograrse sin considerar necesariamente elementos que sean accesibles para la *TCB*. Creo que es momento de pedirle ayuda a la Metafísica.

A falta de un método epistemológico para identificar a cada una de las partículas Bohmianas, y por ende, concebir una noción epistémica de individualidad en términos de su discernibilidad, parece que la única opción a la mano es recurrir a la Metafísica. En efecto, la *Haecceitas* parece ser el candidato más razonable debido a que esta noción metafísica de individualidad presupone la identificación de cada partícula en términos de una marca o etiqueta que es independiente de cualquier descripción y de las propiedades que se instancian en la misma. En estos términos, las partículas Bohmianas pueden ser consideras como individuos, independientemente de cualquier noción epistémica de discernibilidad. Las partículas son individuos que se nombran mediante números que denotan el i-ésimo término de un conjunto contable. Así mismo, dicha noción viene acompañada de una teoría híbrida de la referencia que permite identificar a cada partícula mediante números sin descripciones [Gracia, 1988]. Sin embargo, como se menciona más arriba, cada vez que se apela a dicha noción metafísica de individualidad, siempre existirá la manera en que su homólogo antagónico resurja de las cenizas: la no-individualidad. Es decir, es posible, de igual manera, apelar a una noción de partícula como no-individuo, lo que conlleva de nuevo a la tesis de la sub-determinación de la Metafísica por la Física, que se introdujo en el contexto de la *MCE*. En efecto, las partículas Bohmianas son compatibles con una Metafísica acerca de objetos individuales en términos de la *Haecceitas*, pero de igual modo, son compatibles con una Metafísica acerca de objetos como no-individuos. De este modo, debido a que esta teoría resulta ser objeto de la misma objeción, uno termina en la misma posición comparada a la que se tenía en la *MCE*. Es decir, debido a la presencia de este tipo de sub-determinación, una Metafísica acerca de objetos (como particulares), incluso en el contexto de la *TCB*, es problemática.

Ahora bien, es posible que el lector no se sienta convencido con esta conclusión debido a que existe una ligera intuición de que la *TCB* habla acerca de partículas puntuales individuales. Con el propósito de darle crédito a esta intuición, en seguida se demostrará que existen razones suficientes para introducir una noción de individualidad epistémica en este contexto. Para ello, nótese que, hasta el momento, se ha trabajado con una formulación Bohmiana específica, la que es objeto de discusión en la mayoría de los círculos filosóficos. No obstante, si uno dejara de lado esta formulación particular, y se enfocara en otras formulaciones Bohmianas empíricamente equivalentes, la conclusión podría ser más optimista en favor de una Metafísica acerca de objetos y propiedades. Con esta idea en mente, a continuación se establecerá una noción epistémica de individualidad en el contexto de una formulación particular de la *TCB*.

14.6.3. Puntillismo Cuántico

Antes que todo, recuérdese que existe una excepción a la tesis de las etiquetas, es decir, la conclusión de que las partículas deben etiquetarse por medio de otro elemento que no sea su posición en el espacio físico. Este caso excepcional ocurre cuando la función de onda es (anti)-simétrica, porque en este caso particular la velocidad de las partículas son invariantes (salvo el sentido) bajo permutaciones en su posición, así como lo expresa (13.2). Por ende, si la tesis de las etiquetas no se satisface, entonces los argumentos que socavan un realismo acerca de individuos en la *TCB* no se siguen (en particular el argumento de la sub-determinación de la Metafísica por la Física). Tomando en cuenta esta observación, en seguida se pretende profundizar en esta cuestión, y posteriormente se sugerirá otra formulación Bohmiana que es válida para funciones de onda arbitrarias.

Es importante enfatizar en que la *TCB* no puede describir un sistema de partículas idénticas de la misma forma en que lo hace la *MCE*. Esto debido a que la tesis de no-localidad implica que no existen las propiedades intrínsecas en esta teoría (con excepción de la posición). En consecuencia, en lo que respecta a la forma de la función de onda, generalmente no existe diferencia alguna entre un sistema de partículas idénticas y otro tipo de sistemas. Al contrario, existe una diferencia física entre funciones de onda (anti)-simétricas y arbitrarias, pero que se expresa en términos de la invarianza de la velocidad de las partículas. Si la función de onda es (anti)-simétrica, entonces la velocidad de las partículas es invariante (salvo el sentido) bajo permutaciones en su posición. Esta característica atípica de las partículas Bohmianas permite concluir que las funciones de onda (anti)-simétricas reflejan un caso particular en el que las etiquetas de las partículas (que las constituyen) se pueden fijar por medio de sus trayectorias. Esta conclusión puede entenderse a partir de algunos resultados previos como se verá a continuación:

En el contexto de la *MCE*, se ha demostrado que, bajo ciertas presuposiciones topológicas, como es el caso de la dimensión y la conexidad múltiple, el espacio reducido de configuración corresponde al espacio asociado a un sistema de partículas indistinguibles, mientras que el espacio estándar de configuración corresponde al espacio asociado a un sistema de partículas distinguibles. Sorprendentemente, algunas contribuciones han demostrado este resultado en un contexto particular de la *TCB*, es decir, bajo una "suposición de identidad", que se restringe al caso particular de un sistema de partículas con masa equivalente, potenciales simétricos y funciones de onda estrictamente simétricas, ó bien, anti-simétricas [Belousek, 2000]. Dicho de otro modo, bajo esta restricción la *TCB* puede formularse como si fuera una teoría acerca de partículas empíricamente indistinguibles pero "indiscernibles" (aunque no lo sea) para sistemas particulares bien definidos. En este caso particular, el espacio de configuración que, después de todo, es el espacio donde la función de onda se define, posee información redundante debido a la identificación de una clase de equivalencia de puntos que difieren por medio de permutaciones. Por supuesto que aquí el término "indiscernibilidad" significa que las partículas únicamente pueden etiquetarse por medio de sus trayectorias pero no por cualquier otra propiedad intrínseca.

Habiendo dicho esto, uno termina con un dilema: i) existe ya sea un problema de generalidad en lo que respecta a las funciones de onda (anti)-simétricas, debido que sólo son válidas para sistemas particulares donde se describen partículas discernibles que parecen "indiscernibles"; ó bien, ii) existe un problema de discernibilidad para funciones de onda arbitrarias, que inevitablemente colapsa en el problema de la sub-determinación, como se ha discutido arriba. En vista de este dilema, mi sugerencia es adoptar una interpretación en términos de partículas discernibles mediante otra formulación Bohmiana que sea válida para funciones de onda arbitrarias, y donde las partículas Bohmianas puedan etiquetarse únicamente en términos de su posición extendida a lo largo de trayectorias. Tomando en cuenta estas observaciones, uno esperaría encontrar una teoría Bohmiana empíricamente equivalente que se formulara en el espacio reducido de configuración y que, bajo condiciones más generales (que incluya casos arbitrarios como potenciales asimétricos, o bien, cualquier tipo de función de onda), describiera la dinámica de partículas *sin* etiquetas, excepto aquellas que son constitutivas de su posición extendida a lo largo de trayectorias.

Afortunadamente esta formulación (a la que se llamará *BRM*) existe pero debe considerarse una teoría diferente [Goldstein et al., 2005]. Esto debido a que *BRM* dispone de una ecuación guía distinta a la formulación estándar, en tanto que la corriente de probabilidad $\mathbf{j}_i = (\hbar/m_i)\Psi_t^*\nabla_i\Psi_t$, como la densidad de probabilidad $\rho = \Psi_t^*\Psi_t$ (asociadas al movimiento de partículas), corresponden a términos simetrizados (ver detalles en [Goldstein et al., 2005]):

$$\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{Q}, t) = \sum_{\sigma\in S_N} (\mathbf{j}_{\sigma(i)} \cdot \sigma) \,/ \sum_{\sigma\in S_N} (\rho \cdot \sigma)|_{\mathbf{q_j}=\mathbf{Q}_j(t)} \tag{14.6}$$

donde S_N es el conjunto de permutaciones de $\{1, ..., N\}$, y $\sigma(\mathbf{Q}_i) = \mathbf{Q}_{\sigma^{-1}(i)}$, de tal forma que $\mathbf{Q}_i$ se traslada a la posición $\sigma(i)$. Se debe enfatizar en que *BRM* es invariante bajo permutaciones en un sentido estricto, debido a que si cualquier par de trayectorias en el espacio de configuración (que son soluciones a (14.6)) son equivalentes bajo permutaciones en un instante de tiempo, lo serán para el resto del tiempo. Esto significa que (14.6) define una dinámica en el espacio de configuración reducido $\mathbb{R}^{3N}/S^N$ a través de una proyección. Para ilustrar las características más importantes de esta formulación, considérese otra vez el ejemplo del electrón-muon:

Considérese una configuración formada por un electrón en la posición $\mathbf{Q}_1$ y un muon en la posición $\mathbf{Q}_2$, y otra configuración formada por un muon en la posición $\mathbf{Q}_1$ y un electrón en la posición $\mathbf{Q}_2$. En ambas configuraciones, se obtiene a partir de (14.6) la misma velocidad para la partícula en $\mathbf{Q}_1$, sin importar si es un electrón o un muon (y la misma velocidad para la partícula en $\mathbf{Q}_2$):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Q}}_1 &= \frac{(\hbar/m_\mu)\,\mathrm{Im}\,(\Psi_t^*\nabla\Psi_t)\,(\mathbf{Q}_2,\mathbf{Q}_1) + (\hbar/m_e)\,\mathrm{Im}\,(\Psi_t^*\nabla\Psi_t)\,(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2)}{\Psi_t^*\Psi_t(\mathbf{Q}_2,\mathbf{Q}_1) + \Psi_t^*\Psi_t(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2)}\\
\dot{\mathbf{Q}}_2 &= \frac{(\hbar/m_e)\,\mathrm{Im}\,(\Psi_t^*\nabla\Psi_t)\,(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2) + (\hbar/m_\mu)\,\mathrm{Im}\,(\Psi_t^*\nabla\Psi_t)\,(\mathbf{Q}_2,\mathbf{Q}_1)}{\Psi_t^*\Psi_t(\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2) + \Psi_t^*\Psi_t(\mathbf{Q}_2,\mathbf{Q}_1)}
\end{aligned}$$

En este caso, la etiqueta que asigna la posición de las partículas es independiente de cualquier propiedad física (en este caso la masa), la cual sirve para saber si se trata de un electrón o un muon. En este sentido, no existe nada que distinga a la posición $\mathbf{Q}_1$ de la posición $\mathbf{Q}_2$. Ambas partículas se pueden discernir, más bien, en términos de sus posiciones que poseen en un instante de tiempo.

Ahora bien, como se ilustra con este ejemplo, el espacio de configuración reducido $\mathbb{R}^{3N}/S^N$ corresponde a un sistema de N partículas que se representa por medio de puntos sin etiquetas en el espacio físico, en el sentido de que no hay tipos de puntos en el mundo Bohmiano, tales como podría ser el caso de puntos de electrones, ó bien de muones (los cuales usualmente se identifican por medio de sus parámetros independientes del estado). Por lo tanto, desde el punto de vista de *BRM*, no existe tal cosa como un tipo de partícula instanciada en un punto del espacio físico, al contrario, lo que existe es sólo una partícula en cierta posición.

Hasta aquí, ha sido posible identificar una teoría distinta a la formulación estándar de la *TCB*, en el sentido de que describe trayectorias gobernadas por leyes diferentes, pero que resulta ser, después de todo, empíricamente equivalente. Así mismo, la función de onda asociada a dicha teoría se define en el espacio reducido de configuración, lo que garantiza la descripción de una familia de partículas sin etiquetas. Aquí es importante advertir que, aunque dichas partículas no tengan etiquetas, es un error afirmar que no tienen propiedades de ningún tipo. En efecto, esta teoría como cualquier formulación Bohmiana, describe una familia de partículas que tienen posiciones y trayectorias bien definidas, sin embargo, la única diferencia radica en que no es posible identificarlas independientemente de sus propiedades espacio-temporales[167].

Sin ignorar estas observaciones importantes, ahora es momento de volver a la discusión filosófica acerca de la individualidad en el contexto de la *MCU*, y en particular, en el ámbito de la *TCB*. Desde esta perspectiva, si lo que se tiene es un conjunto de partículas sin etiquetas pero que se pueden identificar por medio de su posición y las trayectorias que describen, entonces todo parece indicar que *BRM* es una teoría donde es posible introducir una noción de individualidad epistémica, de tal modo que cada partícula es discernible por medio de su posición extendida a lo largo de trayectorias (las únicas propiedades reales). De proceder así, uno evita el problema derivado de asumir tanto la tesis de la no-localidad como la tesis de las etiquetas. Esto debido a que esta nueva formulación no satisface la tesis de las etiquetas gracias a que el estado de un sistema de partículas sí es estrictamente invariante bajo permutaciones en su posición (simplemente porque la familia de partículas que difieren bajo permutaciones en su posición se ha identificado como una sola partícula). De este modo, *BRM* permite la individuación de las partículas sin problemas conceptuales de ningún tipo. Por supuesto que bajo esta suposición, algo se tiene que decir con respecto a la naturaleza del espacio y el tiempo donde las partículas se definen. A primera impresión, parecería que si las partículas son objetos de tipo ontológico, y su individuación se fundamenta estrictamente en términos del "telar" espacio-temporal donde radican, entonces debería de existir un compromiso ontológico del mismo peso respecto a las propiedades espacio-temporales, o dicho de otro modo, respecto a los puntos que individualizan a las partículas y sus trayectorias. En otras palabras, lo que se requiere es comprometerse con una tesis substantivalista respecto al espacio físico, de lo contrario, las partículas no podrían identificarse de algún modo, y las relaciones espacio-temporales podrían desplazar su individualidad. Sin dejar de advertir que esta discusión se retomará en la siguiente y última parte, es importante destacar que, bajo esta nueva formulación, y análogamente a lo que representan las obras puntillistas de Seurat, se esboza la imagen de un 'mundo Seuratiano' de puntos blancos y negros que construyen el espacio.

Siguiendo con la argumentación y la estructura de esta sección, se puede concluir que es posible introducir una noción epistémica de individualidad en el contexto de la *MCU*. Para dicho propósito no sólo es nece-

[167] Aquí habría que notar que por "propiedades espacio-temporales" uno se refiere a la posición extendida a lo largo de trayectorias.

sario ir más allá de un análisis filosófico en torno a la *MCE*, sino comprender que esta última teoría no es compatible con una tesis realista y que es preciso resolver, en primera instancia, problemas conceptuales que no permiten esbozar una imagen clara y correcta del mundo. Con este fin en mente, la *TCB* resulta ser un candidato razonable, y no menos importante, también permite diferentes formulaciones empíricamente equivalentes que abonan al cometido de esta sección. En este punto, es posible concluir que, en lo que respecta a la individualidad, *BRM* permite salvaguardar una noción de individualidad en este contexto, sin la necesidad de hacer un llamado a la Metafísica como último recurso. Quizá esta conclusión pudiera engendrar ciertas sospechas en relación al cometido y contenido del presente trabajo (en su totalidad). En efecto, habría que recodar que el objetivo del presente trabajo consiste en respaldar una tesis realista de perfil óntico mediante la "predicción" de sus premisas fundamentales, usando un esquema filosófico que, por un lado, caracteriza a dicha tesis identificando una estructura concreta que satisface criterios de claridad, adecuación empírica, unificación y continuidad, y que por otro lado, la justifica en el contexto de la teoría más exitosa (la *MCU*). Ahora bien, suponiendo que una noción de individualidad equivalente a la que se defiende aquí es antagónica al eliminativismo de los objetos y las propiedades, todo parece indicar que la conclusión de esta sección no justifica una tesis estructural, sino que por el contrario, la objeta. Para resistir a esta conclusión 'desastrosa', creo necesario cuestionar la suposición de que la noción de individualidad que se defiende aquí es antagónica al eliminativismo que defienden los estructuralistas de corte óntico. Con este fin en mente, en la siguiente y última parte se demostrará que una noción de individualidad estrictamente en términos de la posición de las partículas extendida a lo largo de trayectorias termina irremediablemente respaldando una tesis estructural, y despoja a los objetos y sus propiedades intrínsecas de cualquier categoría ontológica.

14.7. Una Salida Estructural Sobre la Individualidad Bohmiana

Con la finalidad de investigar si es posible introducir una noción de individualidad para el caso de la *MCU*, se ha recurrido a una formulación diferente de la *TCB*, y con ello, se ha podido articular una noción epistémica de individualidad para partículas cuánticas. Como bien se dijo, esta formulación se define formalmente en el espacio reducido de configuración y describe el movimiento de una familia de partículas sin etiquetas pero que se pueden identificar e individualizar por medio de su posición extendida a lo largo de trayectorias. Así mismo, para recurrir a dicha noción de individualidad se ha argumentado que es necesario asumir una tesis substantivalista con respecto al espacio físico. De no ser así, la ontología de la teoría, es decir, la familia de partículas que componen al sistema no pueden materializarse como objetos particulares (individuales). Ahora bien, aquí es preciso analizar este argumento de forma más rigurosa, sobre todo porque no queda claro la manera en que las partículas Bohmianas, como objetos particulares, pueden individuarse ontológicamente únicamente en términos de estas propiedades espacio-temporales, tomando en cuenta que estos últimos forman parte de una categoría ontológica. Para ello, creo necesario apelar al esquema metodológico que se ha empleado a lo largo de esta sección, es decir, el que refiere a los seis distintos problemas de la individualidad (la intensión, la extensión, etc.).

Considérese una familia de partículas sin etiquetas en el contexto de *BRM*. Dado que estos objetos, en tanto que individuos, se distinguen mediante sus propiedades espacio-temporales, la discernibilidad epistémica caracteriza su individualidad. Consecuentemente, a pesar de que no tienen etiquetas que las identifique, es posible referirse a ellas por medio de la teoría descriptiva, ya que sólo es posible denotarlas mediante una descripción en términos de sus propiedades espacio-temporales. Si uno se dirige al centro del esquema conceptual, se encuentran los aspectos ontológicos de la individualidad. A este respecto, es claro que *BRM* es compatible con la teoría de individuación de las propiedades agregadas, debido que la individuación de las partículas Bohmianas superviene en las propiedades espacio-temporales. En este punto, se debe apelar al principio de indiscernibles de Leibniz PPI(2)*, en tanto que dos o más partículas no pueden ocupar dichas propiedades en un tiempo determinado (principio de impenetrabilidad). Por último, en consonancia con este principio, la caracterización ontológica de la individualidad es compatible con la teoría de las propiedades, tomando en cuenta que, en este caso, las únicas propiedades reales son las "individualizantes", y que corresponden a la posición y las trayectorias de las partículas.

En este análisis, es posible identificar una característica (ontológica) peculiar que se le atribuye a las partículas que postula *BRM*: las únicas propiedades reales son las que individualizan a las partículas, es decir, las propiedades espacio-temporales. En este sentido, todo lo que hay (lo que caracteriza ontológicamente a dichos objetos) son sus propiedades espacio-temporales. Esto significa que, metafísicamente hablando, la ontología de la teoría (en lo que respecta a las partículas) corresponde a puntos y trayectorias espaciales y temporales sin ningún otro componente que las constituya. Nótese que en este caso, no se necesita de un principio de conglomeración con el que sea posible constituir metafísicamente a un objeto en términos de un agregado de propiedades. A decir verdad, lo que se requiere es explicar la manera en que un objeto se constituye ontológicamente en términos de una sola propiedad espacio-temporal, tomando en cuenta una continuidad conceptual entre los objetos (partículas) y las propiedades (posiciones y trayectorias). En este punto, es donde habría que caracterizar ontológicamente el "telar espacio-temporal" que constituye a las partículas, tomando en cuenta que hay puntos vacíos donde no hay partículas y puntos que *son* partículas. No obstante, siguiendo con la tradición aristotélica, de acuerdo con la cual los objetos son particulares y las propiedades son universales, parece no ser posible caracterizar ontológicamente a las partículas cuánticas (como objetos) por medio de una propiedad espacio-temporal que es, después de todo, otro tipo de categoría ontológica (un universal). Por supuesto que aquí uno bien podría ampararse ante semejante conclusión y argumentar que: i) las propiedades espacio temporales son, en realidad, objetos particulares; ó bien, que ii) dichas propiedades son *tropos*, entendiéndose estos últimos como propiedades con cierto tipo de individualidad, rompiendo así con la distinción aristotélica. En lo que respecta a (ii), es un hecho que puede haber estrategias de corte metafísico que puedan abonar a aclarar la caracterización ontológica de las partículas Bohmianas, pero en este caso, darle crédito a una propuesta como la de los tropos, sería cambiar la metodología y las definiciones que han servido para seguir con la misma línea argumentativa de este trabajo. En efecto, si desde un principio la extensión de la individualidad se estableció de acuerdo con la distinción aristotélica de objeto-propiedad, y bajo este supuesto, se han analizado las nociones asociadas a la individualidad en diferentes contextos teóricos, creo que considerar en serio a los tropos es lo mismo que asumir lo que al principio se negó. Por otro lado, en lo que respecta a (i), concebir a los puntos y trayectorias como objetos particulares no deja de lado la posibilidad de articular una objeción en contra esta noción de individualidad. Tomando como referencia el artículo de BEW [Brown, 2005], según Ladyman y Ross, la instanciación de propiedades espacio-temporales no es suficiente para individualizar a las partículas Bohmianas, lo que implica la necesidad de apelar a nociones metafísicas como la *Haecceitas*:

> [...] There is a version of quantum theory, namely Bohm theory, according to which QM is not complete and particles do have definite trajectories at all times. However, Harvey Brown et al. (1996) argue that the 'particles' of Bohm theory are not those of classical mechanics. The dynamics of the theory are such that the properties, like mass, charge, and so on, normally associated with particles are in fact inherent in the quantum field and not in the particles. It seems that the particles only have position. We may be happy that trajectories are enough to individuate particles in Bohm theory, but what will distinguish an 'empty' trajectory from an 'occupied' one? Since none of the physical properties ascribed to the particle will actually inhere in points of the trajectory, giving content to the claim that there is actually a 'particle' there would seem to require some notion of the raw stuff of the particle; in other words haecceities seem to be needed for the individuality of particles of Bohm theory too.[Ladyman et al., 2007, p.136]

En efecto, como bien se dijo arriba, una noción de individualidad que se caracteriza ontológicamente en términos del "telar espacio-temporal" debe tomar en cuenta una distinción entre puntos vacíos donde no hay partículas y puntos que son partículas. En ausencia de esta distinción, no es posible identificar la posición y la trayectoria que corresponde a cada una de las partículas. No obstante, antes de tomar en serio esta objeción, es importante advertir que en [Ladyman et al., 2007] se interpreta erróneamente la postura de *BEW* [Pylkka, et. al, 2014, p.11]. Específicamente, ignoran que los argumentos de *BEW* convergen al principio de generosidad que, como bien se dijo, dictamina que la masa, la carga y el momento angular son propiedades intrínsecas tanto de las partículas como de la función de onda. En este sentido, su objeción no es en contra de la *TCB* en general, sino en contra de una interpretación particular: *BRM*. La razón inmediata es que *BRM* corresponde a la interpretación que supone que las propiedades extrínsecas (la energía, el momento, etc.) se encuentran asociadas al campo y no a las partículas, y además, estas últimas únicamente pueden individuarse (si fuera el caso) por medio de sus propiedades espacio-temporales. De esta forma, la objeción que se puede leer en [Ladyman et al., 2007] en contra de la individualidad en la *TCB* es, en realidad, una objeción en contra de su implementación en *BRM*. En virtud del rechazo (ampliamente discutido páginas arriba) al principio de individuación trascendental o *Haecceitas*, se puede concluir que esta objeción desvirtúa la posibilidad de introducir una noción de individualidad de las partículas Bohmianas en *BRM*, aunado también a que la estrategia (ii) no es capaz de proveer un argumento a favor de dicha noción. Habiendo agotado las posibilidades interpretativas de la individualidad en *BRM*, se puede concluir que, en virtud de la distinción aristotélica de objeto-propiedad, no es posible caracterizar ontológicamente a las partículas cuánticas (como objetos particulares) por medio de una propiedad espacio-temporal que es parte de otra categoría ontológica (un universal). De este modo, lo que al principio se veía como una posibilidad razonable para salvaguardar una noción de individualidad en la *MCU* (por medio de *BRM*), ahora se presenta como una evidencia en contra de esta última. Y si una noción de individualidad epistémica no puede establecerse a partir de la teoría, entonces el presupuesto metafísico, de acuerdo con el cual el mundo se constituye de objetos y propiedades, entendiendo estas entidades como particulares (individuos) y universales, respectivamente, presenta problemas considerables.

Sin embargo, si de algo ha servido el argumento central de este trabajo, es para reivindicar el carácter estructural del mundo, con base en un eliminativismo de los objetos y las propiedades. De este modo, creo pertinente regresar secciones atrás para corroborar que si bien, una noción de individualidad en *BRM* puede establecerse únicamente en términos de las propiedades espacio-temporales de las partículas, dicha noción no puede concebirse, no sin antes suponer que el "telar espacio-temporal" debe interpretarse en términos de una estructura real y concreta que se representa por medio de un espacio matemático (una variedad euclidiana) donde actúa un grupo de simetría. En efecto, al re-conceptualizar a los puntos y trayectorias que constituyen ontológicamente a las partículas Bohmianas en términos estructurales, es posible evitar la objeción elucidada en [Ladyman et al., 2007], y del mismo modo, es posible conservar la distinción tradicional entre objeto y propiedad, tomando en cuenta que estas entidades ya no son objetos (genéricamente hablando) de tipo ontológico. Esto se debe a que las leyes de *BRM* podrían ser, en realidad, la Representación de un grupo de simetrías (el *Grupo Metapléctico*) en el espacio de Hilbert reducido $\mathscr{H}*$, entendiendo este último como el espacio de todas las funciones cuadrado-integrables cuyo dominio corresponde al espacio *reducido* de configuración. De este modo, se tiene una estructura espacio-temporal que se incluye en el espacio de Representación $\mathscr{H}*$ que corresponde a los puntos vacíos donde no se instancian las partículas, pero adicionalmente se tiene una estructura de grupo (el *Grupo Metapléctico*) que, bajo su acción en $\mathscr{H}*$, corresponde a los puntos y trayectorias de las partículas Bohmianas. No hace falta especificar los detalles de este procedimiento si lo que se tiene es un caso análogo a la correspondencia entre *Mp(n)* y la *TCB*. Recuérdese que *Mp(n)* (que es la *Doble Cubierta* de *Sp(n)*) admite una Representación en el espacio de Hilbert, que es equivalente a las layes dinámicas de la *TCB*. En este caso, lo único que cambia es el espacio de Representación, donde ya no se tienen funciones de onda cuyo dominio es el espacio de configuración, sino que, en realidad, se tienen funciones de onda cuyo dominio corresponde al espacio reducido de configuración[168].

Tomando en cuenta esta observaciones, al interpretar a las partículas Bohmianas (como puntos y trayectorias del espacio y el tiempo) en términos de la Representación de *Mp(n)* en el espacio de Hilbert reducido $\mathscr{H}*$, parece ser que una tesis realista con respecto a esta estructura y un eliminativismo de los objetos y propiedades es la opción más razonable en este contexto[169]. En este sentido, la sugerencia más apropiada es interpretar a las relaciones como entidades primarias y fundamentales en torno a la estructura de grupo que subyace a *BRM*, en tanto que representa la estructura real del mundo si la *MCU* fuera correcta. Así mismo, bajo esta suposición metafísica, se pretende eliminar cualquier referencia a los objetos y propiedades que se postulan por la teoría, de tal modo que se re-conceptualicen en términos estructurales.

[168]El lector que quiera ver los detalles en torno a la posibilidad de definir funciones de onda (sin perdida de generalidad) en dicho espacio puede recurrir a [Goldstein et al., 2005].

[169]La idea inicial fue propuesta por Steven French en una conversación privada.

14.8. Conclusiones

Los argumentos que forman parte de la conclusión de esta sección son, después de todo, razonables y convincentes ya que no presuponen de antemano una postura en relación al estatus metafísico de las entidades que postula la *MCU*, si esta última fuera correcta. Al contrario, lo que se ha hecho es una evaluación neutral y crítica con respecto a la noción de individualidad en el contexto de este dominio. Para ello, se ha investigado (con base en trabajos publicados, o bien críticas que, a mi parecer, deben tomarse en cuenta) si una noción de individualidad puede establecerse en el contexto de la *MCE* y en la *TCB* (incluyendo diferentes formulaciones de la misma). La conclusión es que la única noción de individualidad compatible con este dominio puede establecerse en el caso particular de *BRM*, pero que si bien, a primera vista parece reivindicar el carácter granular de esta teoría, termina irremediablemente objetando una Metafísica de objetos y propiedades. En este punto, conviene decir que, si se quiere ser realista con respecto a las teorías más exitosas, no se puede evitar hablar acerca de la *MCU*, un conjunto de teorías con diferentes interpretaciones y formulaciones (algunas ambiguas otras no) que, en conjunto, investigan el dominio de los objetos microscópicos. De este modo, si la *MCU* nos advierte que una noción de individualidad no puede establecerse, al menos si se considera correcta, entonces creo importante buscar la manera en que uno pueda seguir hablando del 'mundo cuántico' bajo otro tipo de suposiciones metafísicas. Es aquí donde el estructuralismo, bajo la suposición de que la *MCU* es correcta, encuentra una justificación sin ningún juicio a priori que lo niegue o lo sustente. En otras palabras, esta sección concluye que si uno es realista con respecto a la *MCU*, una tesis estructuralista de corte óntico es la opción más razonable, en tanto que puede articularse sobre la base de una supuesta noción de individualidad que, en lugar de aportar argumentos a favor de una tesis realista estándar que presupone la existencia de objetos y propiedades, corrobora la presencia de una estructura de grupo en este dominio.

Parte V

Conclusiones Generales

Bob es un filósofo obsesionado con la Metafísica que muy a menudo reflexiona acerca de cómo es el mundo en su extensión. Alicia, una filósofa de la ciencia, eventualmente le sugiere a Bob la idea de que es razonable creer en lo que las teorías científicas nos dicen acerca del mundo, es decir, adoptar una tesis realista con respecto a ellas. Bob parece no estar convencido, pues no es muy claro acerca del tipo de teorías a las que ella se refiere, aunado a que hoy en día existen una variedad de teorías científicas que difieren considerablemente. Según Alicia, hay buenas razones para creer en lo que dicen las teorías más exitosas de la ciencia, con base en lo que ella llama el argumento del no-milagro. Suponiendo que este argumento es convincente, Bob se pregunta si las teorías científicas, en general, son suficientemente claras y precisas respecto a lo que dicen del mundo al que refieren, y si su marco interpretativo es común a todas las teorías exitosas. Además, también se cuestiona si es posible confirmar la veracidad de los enunciados que aparecen en dichas teorías, en el sentido de que refieren exitosamente al mundo real. Gracias a que Alicia ha podido leer con detenimiento este trabajo, y suponiendo que su opinión es similar a la que he defendido, resulta que los cuestionamientos de Bob no son, después de todo, un problema para ella. De esta forma, teniendo en cuenta que Bob nunca desaparecerá de la escena, Alicia responde de la siguiente manera:

Tomando en cuenta que cualquier tesis realista respecto a la ciencia es, en general, una actitud filosófica con respecto a cualquier teoría científica, todo argumento a favor de ella debe estar vinculado a aspectos regulativos que refieran a la totalidad de la ciencia. De este modo, si el dominio en el que se sustenta dicha tesis filosófica involucra sólo a unas cuantas teorías de la Física, entonces para evitar un reduccionismo ontológico de semejante envergadura, es importante realizar tres tareas: i) caracterizar, de manera concreta, formal y refinada, la tesis filosófica en cuestión, y en particular, especificar la identidad concreta con respecto a la cual esta tesis se compromete ontológicamente; ii) involucrar aspectos pragmatistas dentro de su caracterización, de tal forma que, introduciendo una noción de parcialidad en la verdad, se adopte la tesis realista más razonable, restringida al dominio que investigan unas cuantas teorías exitosas; y iii) dar ejemplos concretos de algunas teorías científicas que puedan "predecir" y justificar a dicha tesis realista. Con base en estos tres lineamientos fundamentales, Alicia tiene en mente los siguientes argumentos que podrían abonar a responder a los cuestionamientos de Bob:

Una respuesta a la pregunta ¿Qué es y cómo es el mundo externo? la tiene el *Realismo Estructural Óntico* (*REO*). De acuerdo con esta tesis filosófica, existen buenas razones para creer parcialmente en la realidad de una estructura que, en conjunto, comparte el formalismo de la *Mecánica Clásica*, la *Mecánica Cuántica* y la *Relatividad Especial*. Pero ¿Qué es y cual es la estructura del mundo externo? Dicha estructura es (bajo una representación que alude a una correspondencia de verdad parcial) un conjunto de grupos abstractos y Representaciones. Específicamente un subgrupo (*SU(2)*) del *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* (salvo homomorfismos y contracciones de grupo), y sus respectivas Representaciones. A grandes rasgos, el *REO* se caracteriza de la siguiente manera:

(1) *La dimensión metafísica*: El mundo es *parcialmente* una estructura independiente de la cognición humana, *que es investigada por la Mecánica Clásica, la Mecánica Cuántica y la Relatividad Especial*.

(2) *La dimensión semántica*: La estructura de un mundo consistente con las observaciones (no necesariamente el real) se representa (por medio de una correspondencia tarskiana de verdad) mediante un formalismo matemático, específicamente, un subgrupo de Lie homomorfo al grupo simpléctico inhomogéneo y sus Representaciones de Lie, que es común al instrumental teórico que subyace a la *Mecánica Clásica*, la *Mecánica Cuántica* y la *Relatividad Especial*.

(3) *La dimensión epistémica*: Las proposiciones que constituyen a dicho formalismo son *parcialmente* verdaderas y refieren *parcialmente* al mundo real.

Esta caracterización se ha hecho tomando en cuenta que: i) el perfil estructural del mundo es la hipótesis metafísica más razonable que se puede hacer mediante una interpretación que sea coherente, universal, lógico, aplicable y adecuada, restringida al dominio de la *Mecánica Clásica*, la *Mecánica Cuántica* y la *Relatividad Especial*; ii) se ha identificado una estructura matemática común que comparten los formalismos de estas teorías, y que satisface condiciones de claridad y adecuación empírica. En relación con esta última, el programa de Wigner y Weyl ha servido para corroborar que las leyes, las ecuaciones de evolución, y las predicciones asociadas a estas teorías se han derivado de esta estructura en términos de sus Representaciones; y finalmente, iii) que dicho formalismo satisface las condiciones de unificación y continuidad, que se necesitan para que la interpretación tenga un carácter universal, y con ello, se pueda dar una respuesta a problemas epistemológicos que han desterrado los intentos de defender una tesis realista. Esto se ha hecho por medio de el meta-lenguaje de las *Estructuras Parciales*, que tiene su fundamento en una tesis de tintes pragmatistas. Tomando en cuenta este aspecto, se ha mostrado la posibilidad de articular una tesis filosófica donde pueda confluir el pragmatismo epistemológico y la Metafísica especulativa, y en la que el *REO* encuentra un nuevo perfil. Para ello, se han hecho algunas modificaciones a la caracterización mínima del *REO* introduciendo nociones como el de la verdad parcial.

En segunda instancia, se pueden dar dos ejemplos concretos que “predicen” y justifican al *REO*. Por un lado, se puede constatar la presencia de una sub-determinación respecto a la ontología de una de las teorías que han podido librarse de algunos problemas que aquejan al realista: la *Teoría Cuántica Bohmiana* (*TCB*). Para ello, se ha realizado un análisis filosófico riguroso en el contexto particular de esta teoría para elucidar la presencia de distintas interpretaciones compatibles con un formalismo en común. Esto desde el punto de vista de un realismo acerca de objetos y propiedades. Por otro lado, es posible constatar el perfil estructural de la individualidad en la *TCB*. Aunque se ha demostrado que esta teoría es el candidato ideal respecto al cual es posible salvaguardar una noción de individualidad en el contexto cuántico en general (de forma no trivial), se ha probado que su elucidación termina irremediablemente respaldando a *REO*.

Habiendo dicho esto, Alicia puede sentirse satisfecha ante sus respuestas. Después de todo, aunque pareciera que a la sombra de ambos interlocutores, la Metafísica parece estar divorciada de la ciencia, Alicia tiene a la mano los argumentos suficientes para aclarar el sentido en que sus ideas se encuentran correlacionadas. Pero bajo estos argumentos, también ha llamado a otro personaje que es necesario involucrar para adoptar una tesis realista lo más razonable posible: al amigo pragmatista. En este sentido, tanto la Metafísica, como la Filosofía de la Ciencia, incluyendo al Pragmatismo, encuentran un punto de convergencia, ó bien, una singularidad donde es posible encontrar un mensaje que he tratado de aclarar y justificar en este trabajo.

A. Apéndice A

A.1. Elementos Básicos

A.1.1. Elementos Básicos de Teoría de Grupos

A continuación se mencionan algunas definiciones importantes acerca de teoría de grupos (véase [Munkres, 2000, pp.330-331]):

Definición 18 (Homomorfismo)**.** Supóngase que G y G' son grupos. Un homomorfismo $f : G \to G'$ es un mapeo que preserva las operaciones de grupo, es decir, que para toda $x, y \in G$ se tiene $F(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, $f(e) = e'$ y $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, donde e y e' denotan la identidad de G y G' respectivamente y el exponente -1 denota la inversa.

Definición 19 (Monomorfismo)**.** Supóngase que G y G' son grupos. Un monomorfismo $f : G \to G'$ es un homomorfismo inyectivo, es decir, que su kernel es equivalente a la identidad e.

Definición 20 (Epimorfismo)**.** Supóngase que G y G' son grupos. Un monomorfismo $f : G \to G'$ es un homomorfismo suprayectivo.

Definición 21 (Homeomorfismo o Isomorfismo Topológico)**.** Supóngase que G y G' son grupos. Un homeomorfismo $f : G \to G'$ es un homomorfismo biyectivo.

Definición 22 (Acción de un Grupo)**.** Supóngase que G es un grupo y G' es un espacio topológico (ya sea un grupo, un espacio vectorial, etc.). La acción de $g \in G$ en $g' \in G'$ es un homomorfismo $g \triangleright g' : G' \to G'$ tal que manda cualquier elemento de G' a otro elemento de G'.

Definición 23 (Cosets-Izquierda (Derecha))**.** Supóngase que G es un grupo y H un subgrupo de G. Sea $xH(Hx)$ el conjunto de todos los productos $xh(hx)$, para $h \in H$. A este conjunto se le llama el coset-izquierda (derecha).

Definición 24 (Subgrupo Normal)**.** Supóngase que G es un grupo y H un subgrupo de G. Se le llama a H un subgrupo normal de G si $x \cdot h \cdot x^{-1} \in H$ para cada $x \in G$ y $h \in H$. En este caso $xH = Hx$ para toda x.

Definición 25 (Grupo Cociente)**.** Supóngase que G es un grupo y H un subgrupo normal de G. El grupo cociente G/H es el grupo de orden $n_x n_h$ formado por los elementos hx ó xh cuya operación tiene la forma:

$$(x_a H)(x_b H) \equiv (x_a h_i)(x_b h_j) = x_a x_b x_b^{-1} h_i x_b h = x_a x_b (y_b^{-1} h_i x_b) h_j = x_a x_b \hat{h}_i h_j \equiv x_c H. \tag{A.1}$$

El kernel del homomorfismo definido de G a G/H es H.

Definición 26 (Producto Semi-directo)**.** Un grupo G es un producto semi-directo de un subgrupo normal S y un subgrupo K, que se denota como $S \otimes_S K$, si G se expresa como una par ordenada (s, k), donde $s \in S$ y $k \in K$, tal que la regla del producto asociado es:

$$(s_a, k_i) \cdot (s_b, k_j) = (s_a s_b^{k_i}, k_i k_j) \tag{A.2}$$

donde $s_b^{k_i}$ es la acción de s_b por k_i. El orden de G es SK. Una posibilidad corresponde cuando K es el grupo de automorfismos de S, el cual actúa en los elementos de S de tal forma que permanecen en S.

Definición 27 (*Extensión Central*)**.** Una *Extensión* de un grupo H por un grupo N es un grupo G con un subgrupo normal M tal que $M \simeq N$ y $G/M \simeq H$. Entonces, existe una secuencia corta y exacta de grupos:

$$1 \to N \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \to 1 \tag{A.3}$$

donde $\alpha : N \to G$ es una función inyectiva, $\beta : G \to H$ es suprayectiva, y la imagen de α es el kernel de β. Una *Extensión* es una *Extensión Central* si el subgrupo normal N de G yace en el centro de G (el conjunto de elementos que conmutan con cada elemento de G). Las *Extensiones Centrales* se pueden descomponen en una secuencia exacta de una *Extensión Central Topológica* (llamada *Cubierta Universal*) y una *Extensión Central Algebraica*, es decir, una secuencia corta y exacta de sus respectivas Lie álgebras. Por lo tanto, la *Extensión Central Maximal* es, por definición, la *Cubierta Universal* de la *Extensión Central Algebraica*.

A.1.2. Elementos Básicos de Grupos de Lie

Todas las definiciones anteriores son válidas para un conjunto genérico de grupos, incluyendo los grupos de Lie. No obstante, estos últimos contienen estructura adicional que es importante de mencionar y que pretende restringir el estudio de los grupos continuos a variedades diferenciables.

Definición 28 (Grupo de Lie)**.** [Warner, 1971, p.82] Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable que posee una estructura de grupo tal que el mapeo (o propiedad multiplicativa de grupo) $G \times G \to G$ definido por $(g_1, g_2) \to g_1 g_2^{-1}$ es continuamente diferenciable C^∞.

Definición 29 (Álgebra de Lie)**.** [Warner, 1971, p.84] Un álgebra de Lie sobre el campo $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial $\mathbb{L}$ junto con un operador bilineal $[\ ,\ ] : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ (al que se le llama bracket de Lie), tal que para todo $x, y, z \in \mathbb{L}$, se tiene:

$$[x, y] = -[y, x]$$
$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

Se puede demostrar que el espacio vectorial de todos los campos vectoriales definidos en el espacio tangente a un punto de una variedad forma un Lie álgebra bajo el producto definido por el bracket de Lie:

Definición 30 (Campos Vectoriales Invariantes)**.** [Warner, 1971, p.84] Sea $\sigma \in G$. Una traslación por la derecha, o bien, una traslación por la izquierda, debido a σ son respectivamente difeomorfismos de G definidos como[170]:

$$\mathcal{L}_\sigma(\tau) = \sigma\tau$$
$$\mathcal{R}_\sigma(\tau) = \tau\sigma$$

[170]Tomando en cuenta el producto definido en G.

para todo $\tau \in G$. Un campo vectorial en G es invariante por la izquierda si para cada $\sigma \in G$, X es tal que:

$$d\mathcal{L}_\sigma \circ X = X \circ \mathcal{L}_\sigma \tag{A.4}$$

Definición 31 (Álgebra de Lie de un grupo de Lie)**.** [Warner, 1971, p.86] El álgebra de Lie de un grupo de Lie es un Lie álgebra compuesto de los campos vectoriales invariantes por la izquierda en G. En efecto, el Lie álgebra de G es el espacio tangente a la identidad de G.

Definición 32 (Homomorfismo de Grupo d Lie)**.** [Warner, 1971, p.89] Un mapeo $\psi : G \to H$ es homomorfismo de grupo de Lie si ψ es una función continuamente diferenciable C^∞ y un homomorfismo topológico.

Definición 33 (Homeomorfismo de Grupo de Lie)**.** [Warner, 1971, p.89] Un mapeo $\psi : G \to H$ es homeomorfismo de grupo de Lie si ψ es un difeomorfismo (continua, diferenciable y biyectiva) y un homomorfismo topológico.

Definición 34 (Automorfismo de Grupo de Lie)**.** [Warner, 1971, p.89] Un mapeo $\psi : G \to H$ es automorfismo de grupo de Lie ($Aut(G)$) si ψ es un homeomorfismo de grupo de Lie y $H = G$.

Definición 35 (Representación de Grupo de Lie)**.** [Warner, 1971, p.89] Un mapeo $\psi : G \to H$ es una representación de grupo de Lie si ψ es un homomorfismo de grupo de Lie tal que para algún campo vectorial V, $H = Aut(V)$, o bien, H=$GL(n)$ el grupo general lineal.

Definición 36 (Subgrupo de Lie)**.** [Warner, 1971, p.92] (H, ψ) es un subgrupo de Lie del grupo de Lie G si:

(1) H es un grupo de Lie.

(2) (H, ψ) es una subvariedad de G-

(3) $\psi : H \to G$ es un homomorfismo de grupo.

A.1.3. Elementos Básicos de Topología Algebraica

Ahora bien, en el campo de la topología algebraica se encuentran conceptos fundamentales que determinan la topología y propiedades globales de un espacio topológico, y en particular, de una variedad diferenciable:

Definición 37 (Homotopía de Curvas)**.** [Munkres, 2000, p.323] Sean f y f' dos curvas parametrizadas continuos del intervalo $[0, 1]$ a un espacio X. Se dice que f es homotópica por curvas a f' si tienen el mismo punto inicial x_0 y final x_1 y existe un mapeo continuo $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ tal que $F(s, 0) = f(s)$, $F(0, t) = x_0$ y $F(s, 1) = f'(s)$, $F(1, t) = x_1$ para cada $s \in [0, 1]$. El mapeo F se le llama homotopía de curvas entre f y f'.

Definición 38 (Primer Grupo Fundamental)**.** [Munkres, 2000, p.331] Sea X un espacio; sea $x_0 \in X$. Sea una curva cerrada en X de tal forma que su punto inicial y final coinciden en x_0. Al conjunto de las clases de equivalencia de curvas cerradas homotópicas cuyo punto inicial y final es x_0, y con una operación entre elementos de las clases bien definida[171], se le llama primer grupo fundamental de X relativa al punto x_0. Se denota como $\pi_1(X, x_0)$.

Cuando un grupo es homeomorfo al semi-producto de otros dos grupos, entonces es posible definir el primer grupo fundamental de la siguiente manera:

Teorema. Sea G un grupo conexo por curvas. Sea H un subgrupo de G con $y \in H$, y N un subgrupo normal con $x \in N$. Si $G = N \otimes_S H$, entonces para todo $x, y \in G$ se tiene que $\pi_1(G, (x, y))$ es homeomorfo a $\pi_1(N, x) \otimes_S \pi_1(H, y)$.

A manera de ejemplo, se puede calcular el grupo de homotopía del *Grupo Simpléctico*:

Teorema. El grupo de homotopía de *Sp(n)* corresponde al grupo $(\mathbb{Z}, +)$.

Dem. Dado que *Sp(n)* es el semi-producto del grupo unitario con el grupo euclidiano *Sp(n)* $\simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \otimes_S$ *U(n)*, entonces el problema se simplifica a encontrar el primer grupo fundamental de $U(n)$ (el primer grupo fundamental de $\mathbb{R}$ es trivial dado que el de cualquier grupo convexo[172] es trivial). Para ello, véase que, por definición, el determinante de un elemento de *U(n)*[173] resulta ser un número complejo con norma unitaria que, a su vez, corresponde a un elemento de *U(1)*, e isomorfo al círculo $e^{i\psi}$. Es decir, existe un homomorfismo $det : U(n) \to U(1)$, cuyo kernel corresponde al subgrupo de *U(n)* de matrices con determinante igual a la unidad. Dado que el *Grupo Especial Unitario* (*SU(n)*) es homeomorfo a este subgrupo, entonces también corresponde al kernel del homomorfismo definido por el determinante. Por el lema de la escisión (división) para grupos, se puede demostrar que $U(n)$ es isomorfo al semi-producto *SU(n)* $\otimes_S$ *U(1)* si y sólo si existe una sucesión exacta corta (con q un monomorfismo, r un epimorfismo, y $U(n)/Im(q) \cong U(1)$):

$$1 \to SU(n) \to^q U(n) \to^r U(1) \to 1 \tag{A.5}$$

y existe un homomorfismo $h : U(1) \to U(n)$ tal que $r \circ h = 1 \in U(1)$. Como este sí es el caso, dadas las propiedades de $U(n)$ y $U(1)$ arriba, entonces es posible construir un semi-producto cuya operación de grupo se determina mediante un homomorfismo $\psi : U(1) \to Aut(SU(n))$, que tiene la forma $\psi(s) = q^1(h(u)q(s)h(u^{-1}))$ para cualquier $s \in SU(n)$ y $u \in U(1)$.

Ahora bien, tomando este resultado en cuenta, solo faltaría calcular el primer grupo fundamental de los elementos del semi-producto. El primer grupo fundamental del círculo S^1 es $(\mathbb{Z}, +)$ (el número de vueltas que cualquier curva cerrada puede dar al círculo). Por otro lado, dado que el *Grupo Unitario Especial* (*SU(n)*) es homeomorfo a S^3, y el primer grupo fundamental de este último es trivial, entonces el primer grupo fundamental de $U(n)$ es $(\mathbb{Z}, +)$. Por lo tanto, se puede concluir que el primer grupo fundamental de *Sp(n)* es $(\mathbb{Z}, +)$. □

Para tener claro algunos conceptos importantes, en seguida se dan algunas definiciones básicas topológicas. Es importante mencionar que la conexidad por curvas se reduce a conexidad en el caso particular de variedades diferenciables, por lo que se definirá únicamente esta última.

[171] Se puede demostrar que dicha operación existe y está bien definida (véase en [Munkres, 2000, pp.326-327]).

[172] De manera informal, un conjunto es *Convexo* si para cualesquiera dos puntos de él existe una recta contenida en el conjunto y que los une.

[173] El *Grupo Unitario* (*U(n)*) es el conjunto de matrices con determinante distinto de cero del *Grupo General Lineal* (*GL(n)*), cuyos elementos satisfacen $U^\dagger = U^{-1}$.

Definición 39 (Conexidad por Curvas)**.** [Munkres, 2000, p.155] Sean x y y dos puntos en el espacio X. Una curva parametrizada en X de x a y es un mapeo continuo $f : [a, b]$
tal que f(a)=x y f(b)=y. Un espacio X se dice conexo por curvas si entre cada par de puntos de X se puede trazar una curva que esté completamente contenida en X.

Definición 40 (Conexidad Local por Curvas)**.** [Munkres, 2000, p161] Un espacio X se dice que es localmente conexo por curvas si para cada $x \in X$, y si para cada vecindad U de x, existe una vecindad V conexa por curvas de x, tal que $V \in U$.

Se puede demostrar que si un espacio X es conexo por curvas, entonces existe un isomorfismo entre el primer grupo fundamental definido en distintos puntos. Si el primer grupo fundamental es equivalente al punto en el que está definido en todo el espacio, se tiene otra noción de conexidad:

Definición 41 (Simple-Conexidad)**.** [Munkres, 2000, p.333] Un espacio X se dice simple-conexo si es conexo por curvas y el primer grupo fundamental en todos sus puntos es el trivial.

A.2. Espacios Cubierta

En seguida se dará una introducción a los espacios cubierta de espacios topológicos genéricos. Sin embargo, es importante tener en mente que si uno se restringe al caso particular de variedades diferenciables, todos los conceptos genéricos deben ser interpretados respecto a espacios topológicos con estructura diferenciable. Por ejemplo, un homomorfismo de cualquier tipo es, en este sentido, un homomorfismo de grupo de Lie, y en particular, un homeomorfismo es un difeomorfismo entre variedades diferenciables.

A.2.1. Definición de Espacios Cubierta

Para indicar lo que es un espacio cubierta es necesario definir la siguiente noción de conjunto:

Definición 42 (Conjunto Suavemente Cubierto)**.** [Munkres, 2000, p.336] Sea $p : E \to B$ un mapeo continuo suprayectivo. El conjunto abierto $U \subset B$ se dice que está suavemente cubierto por p si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ puede ser escrito como la unión de conjuntos abiertos disjuntos $V_\alpha \in E$ tal que para cada α, la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α en U.

Definición 43 (Espacio Cubierta)**.** [Munkres, 2000, p.336] Sea $p : E \to B$ un mapeo continuo suprayectivo. Si cada punto $b \in B$ tiene una vecindad U que es suavemente cubierta por p, entonces p se llama un mapeo de cubierta y E se le dice el espacio cubierta de B.

Se puede demostrar que el hecho de que un mapeo continuo suprayectivo $p : E \to B$ sea un mapeo de cubierta es una condición suficiente pero no necesaria para que p sea un homeomorfismo local de E con B. Un ejemplo de un homeomorfismo local que no es espacio cubierta es el mapeo que manda la recta real positiva al círculo $p : \mathbb{R}^+ \to S^1$ [Munkres, 2000, p.338].

A.2.2. Propiedades de Cubiertas

Teorema (Sub-Espacios Cubrientes)**.** [Munkres, 2000, p.339] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Si B_0 es un subespacio de B, y si $E_0 = p^{-1}(B_0)$, entonces el mapeo $p_0 : E_0 \to B_0$ que se obtiene al restringir p es un mapeo de cubierta.

Teorema (Producto entre Cubrientes)**.** [Munkres, 2000, p.339] Sea $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son dos mapeos de cubierta, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ es un mapeo de cubierta.

A.2.3. Propiedades de Funciones de Ascenso de Cubiertas

Defínase una función de ascenso:

Definición 44 (Función de Ascenso)**.** [Munkres, 2000, p.342] Sea $p : E \to B$ un mapeo. Si f es un mapeo continuo de un espacio X a B, la función de ascenso de f es un mapeo $\tilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

De esta definición se obtienen los siguientes dos lemas, que a su vez, resultan en un teorema importante:

Lemma (Función de Ascenso Para Curvas Cerradas)**.** [Munkres, 2000, p.342] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$. Cualquier curva parametrizada $f : [0, 1] \to B$ cuyo punto inicial es b_0 tiene una función de ascenso, o bien, una curva $\tilde{f}$ en E cuyo punto inicial es e_0

Lemma (Función de Ascenso Para Homotopías)**.** [Munkres, 2000, p.343] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$. Sea un mapeo continuo $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to B$ con $F(0, 0) = b_0$. Existe una única función de ascenso $\tilde{F} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to E$ tal que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$. Si F es una homotopía, entonces $\tilde{F}$ es también una homotopía.

Teorema (Función de Ascenso Para Curvas Homotópicas)**.** [Munkres, 2000, p.344] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$. Sean f y g dos curvas parametrizadas en B de b_0 a b. Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ las dos funciones de ascenso correspondientes en E cuyo punto de inicio es e_0. Si f y g son curvas homotópicas, entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ tienen su punto final de E en común y también son homotópicas.

Ahora bien, se procederá a definir una función de ascenso inducido entre el primer grupo fundamental de E y el de B.

Definición 45 (Función de ascenso correspondiente)**.** [Munkres, 2000, p.345] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento $[f] \in \pi_1(B, b_0)$, sea $\tilde{f}$ una función de ascenso de f a una curva parametrizada en E cuyo punto inicial es e_0. Sea $\psi([f])$ el punto final $\tilde{f(1)}$ de $\tilde{f}$. Entonces ψ es un mapeo bien definido llamado función de ascenso correspondiente que tiene la forma

$$\psi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0) \tag{A.6}$$

De esta manera se pueden obtener los siguientes teoremas que determinan las propiedades de la función ψ.

Teorema (Función de Ascenso Correspondiente Débil)**.** [Munkres, 2000, p.345] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$. Si E es un conjunto conexo por curvas, entonces la la función de ascenso correspondiente $\psi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$ es suprayectiva. Si E es simple-conexo entonces ψ es biyectiva.

Teorema (Función de Ascenso Correspondiente Fuerte)**.** [Munkres, 2000, p.346] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$.

(1) El homomorfismo $p_*(\pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es un monomorfismo.

(2) Sea $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. La función de ascenso correspondiente ψ induce un mapeo inyectivo

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/H \to p^{-1}(b_0) \tag{A.7}$$

de la colección de co-sets de H en $p^{-1}(b_0)$. Es biyectivo si E es conexo por curvas.

(3) Si f es una curva cerrada en B cuyo punto inicial y final es b_0, entonces $[f] \in H$ si y solo si existe una función de ascenso $\tilde{f}$ de f en E cuyo punto inicial y final es e_0.

A.2.4. Existencia de Cubiertas

Antes de enunciar el teorema de existencia de cubiertas es imprescindible definir la siguiente noción de conexidad:

Definición 46 (Conjunto Semi-Localmente Simple-Conexo)**.** [Munkres, 2000, p.494] Un espacio B se dice que es semi-localmente simple-conexo si para cada $b \in B$ existe una vecindad U alrededor de b tal que el homomorfismo $i_* : \pi_1(U, b) \to (B, b)$ es trivial.

Teorema (Teorema de Existencia de Cubiertas)**.** [Munkres, 2000, p.495] Sea B conexa por curvas, localmente conexa por curvas y semi-localmente simple-conexa. Sea $b_0 \in B$. Dado un subgrupo $H \subset \pi_1(B, b_0)$ existe un mapeo de cubierta $p : E \to B$ y un punto en $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ tal que $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$.

A.2.5. Unicidad de Cubiertas

Primeramente se define la equivalencia entre cubiertas:

Definición 47 (Equivalencia de cubiertas)**.** [Munkres, 2000, p.478] Sean $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son dos mapeos de cubierta. Se dice que son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : E \to E'$ tal que $p = p' \circ h$.

Una vez definida, es posible demostrar un lema y un teorema que determina la unicidad de las funciones de ascenso mediante ciertas condiciones:

Lemma (Lema General de la Función de Ascenso)**.** [Munkres, 2000, p.478] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$. Sea f un mapeo continuo, con $f(y_0) = b_0$. Supóngase Y es un conjunto conexo por curvas y localmente conexo por curvas. Existe una función de ascenso $\tilde{f} : Y \to E$ de f tal que $\tilde{f}(y_0) = e_e$ si y solo si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$. Si dicha función de ascenso existe entonces es única.

Teorema (Teorema General de Unicidad de la Función de Ascenso)**.** [Munkres, 2000, p.482] Sean $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ dos mapeos de cubierta. Sea $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$. Existe una equivalencia $h : E \to E'$ tal que $h(e_0) = e'_0$ si y solo si los subgrupos $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$ y $H'_0 = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ de $\pi_1(B, b_0)$ son iguales. Si h existe entonces es única y los subgrupos son conjugados. Es decir, existe $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ tal que $H'_0 = \alpha \cdot H_0 \cdot \alpha^{-1}$.

A.2.6. Cubierta Universal

Una cubierta universal se define como:

Definición 48 (Cubierta Universal)**.** [Munkres, 2000, p.484] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta. Sea $p(e_0) = b_0$. Si E es simple-conexo, entonces E es la cubierta universal.

Mediante dos lemas que se enuncian en [Munkres, 2000, pp.484-486] se obtiene el siguiente teorema que demuestra que la cubierta universal es la cubierta de todas las demás cubiertas:

Teorema (Cubierta Máxima)**.** [Munkres, 2000, p.486] Sea $p : E \to B$ un mapeo de cubierta con E simple-conexo. Dado un mapeo de cubierta $r : Y \to B$, existe un mapeo de cubierta $q : E \to Y$ tal que $r \circ q = p$.

Ahora bien, tomando en cuenta los teoremas de unicidad y existencia arriba, es posible demostrar que existe una única cubierta universal y que su existencia está condicionada por algunas propiedades topológicas:

Lemma (Existencia de Cubierta Universal)**.** [Munkres, 2000, p.498] B tiene una cubierta universal si y solo si B es conexa por curvas, localmente conexa por curvas y semi-localmente simple-conexa.

Lemma (Unicidad de Cubierta Universal)**.** [Munkres, 2000, p.484] Cualesquiera dos cubiertas universales son equivalentes.

B. Apéndice B

Esta parte será dedicada a ejemplos y propiedades de grupos de Lie, Representaciones de Lie y de la geometría del espacio fase que particularmente se referirán en este trabajo.

B.1. Ejemplos de Grupos de Lie y sus Propiedades

Definición 49 (*Grupo de Galileo*)**.** El *Grupo de Galileo Gal* es un grupo de Lie conexo que se define topológicamente de la siguiente manera:

$$\mathrm{Gal} \simeq \mathbb{R}^4 \otimes_S (\mathbb{R}^3 \otimes_S \mathrm{SO}(3)) \tag{B.1}$$

Los elementos del grupo se denotan como $g = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{R})$, donde $\mathbf{b}$ es un elemento de $\mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, y $\mathbf{R}$ matrices de 3×3 ortogonales. Estos elementos se Representan en el espacio-tiempo newtoniano como traslaciones temporales, espaciales, cambios de velocidad (boosts), y rotaciones, respectivamente. Así mismo, el grupo se genera mediante los operadores del álgebra de Lie **H**,**P**,**J** y **C** (en el mismo orden). Por ende, el álgebra de Lie se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} [P_i, P_j] = 0 & [J_i, P_j] = \epsilon_{ij}^k P_k & [J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^k J_k \\ [C_i, C_j] = 0 & [J_i, C_j] = \epsilon_{ij}^k C_k & [C_i, P_j] = 0 \\ [P_i, H] = 0 & [J_i, H] = 0 & [C_i, H] = P_i \end{array}$$

La acción de *Gal* en el espacio-tiempo newtoniano es:

$$g \triangleright (\mathbf{r}_0, t_0) \mapsto (\mathbf{r}, t) = (\mathbf{R}\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t_0 + \mathbf{a}, t_0 + b)$$

La acción de *Gal* en el espacio fase es:

$$g : (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \to (R\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}, R\mathbf{p}_0 + m\mathbf{v}) = (R\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, R\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}) \tag{B.2}$$

Dem. Supóngase que f es un cambio de coordenadas en el espacio de configuración $\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}$. Dado que el espacio fase es el fibrado cotangente de este espacio de configuración $T^*\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}$, el cambio de coordenadas induce una transformada de Mathieu $f^* : T^*\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}} \to T^*\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}$ en el fibrado cotangente de la siguiente forma:

$$f^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = (f(\mathbf{r}_0), (f'(\mathbf{r}_0)^T)^{-1}\mathbf{p}_0) \tag{B.3}$$

Entonces al tomar $n = 3$ y $f(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\mathbf{r}_0$, donde $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, entonces se obtiene:

$$f^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = (\mathbf{R}\mathbf{r}_0, \mathbf{R}\mathbf{p}_0) \tag{B.4}$$

□

Mientras que la acción en el espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrables y complejo-valoradas $L^2(\mathbb{R}^3_{\mathbf{r}})$ es[174]:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}\mathbf{r}, t) &= \psi(\mathbf{r}, t) \quad \psi_{\mathbf{a}}(\mathbf{r} + \mathbf{a}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t + b) &= \psi(\mathbf{r}, t) \quad \psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) = e^{im(\mathbf{v}^2 t/2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{r})/\hbar}\psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

[174] La demostración es directa al asumir la covarianza de la ecuación de Schrödinger.

donde $\psi_{\mathbf{a}} = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}/\hbar}\psi, \psi_{\mathbf{R}} = e^{-i\psi\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J}/\hbar}\psi, \psi_{\mathbf{b}} = e^{iHb/\hbar}\psi$.

Definición 50 (*Grupo Simpléctico*)**.** El *Grupo Simpléctico* (*Sp(n)*) es un subgrupo del *Grupo Especial Lineal (SL(2n,$\mathbb{R}$))* de dimensión $n(2n+1)$. Es el grupo de Lie de todas las matrices simplécticas $\mathbf{s}$ de $2n\times 2n$ con componentes reales tales que $\mathbf{s}^T\mathbf{J}\mathbf{s} = \mathbf{J}$ donde $\mathbf{J}$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Algunas propiedades y características de este grupo de Lie son:

Teorema. El grupo *Sp(n)* es homeomorfo al semi-producto del grupo unitario *U(n)* y el grupo euclidiano $\mathbb{R}^{(n(n+1)/2}$:

$$Sp(n) \simeq \mathbb{R}^{(n(n+1)/2} \otimes_S U(n)$$

Dem. Este resultado se sigue de un teorema que generaliza al teorema de E. Cartan acerca de subgrupos de Lie compactos maximales. Este dice que si un grupo de Lie G es conexo por curvas y semi-simple entonces existe un conjunto de subgrupos compactos maximales que difieren por conjugación. Entonces para cualquiera de estos subgrupos compactos maximales H, existe un subgrupo de Lie de G homeomorfo al *Grupo Euclidiano* (*E(3)*) tal que $H \times E$ es homeomorfo a G. Tomando en cuenta este teorema, solo faltaría probar que $U(n)$ es un subgrupo compacto maximal de *Sp(n)*. Para ello solo basta expresar a cualquier elemento del grupo unitario $u \in U(n)$ en su forma polar $u = A + iB$ y ordenar a la parte real e imaginaria de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Con las condiciones $A^TA + B^TB = AA^T + BB^T = \mathbb{I}$, $AB^T = BA^T$ y $A^TB = B^TA$.
Se puede probar mediante $\mathbf{s}^T\mathbf{J}\mathbf{s} = \mathbf{J}$ que esta matriz es simpléctica, por lo que *U(n)* $\subset$ *Sp(n)*. Que es compacto se sigue del teorema de Heine-Borel [Munkres, 2000, p.173] que determina una equivalencia entre la propiedad de compacidad y del hecho de que $U(n)$ es un subespacio cerrado y acotado de matrices complejas de $n \times n$. Finalmente, que sea maximal se demuestra por el hecho de que todos los subgrupos de *Sp(n)* corresponden a subgrupos homeomorfos a $U(n)$ o al *Grupo Ortogonal* ($O(n)$), que sin embargo, es subgrupo de $U(n)$. □

Teorema. *Sp(n)* es un grupo de Lie de dimensión $n(2n + 1)$.

Dem. Que *Sp(n)* es un grupo de Lie se sigue de $Sp(n) \simeq \mathbb{R}^{(n(n+1)/2} \otimes_S U(n)$, pues tanto $(\mathbb{R}, +)$ como $U(n)$ son grupos de Lie y $\simeq$ en este caso define un difeomorfismo. Otra demostración corresponde a verificar que *Sp(n)* es una subvariedad de $GL(n)$. Para ello basta con definir un difeomorfismo de antisimetrización f entre este último y *Sp(n)* tal que el elemento identidad del primero e lo mande a $e^{-1}Je = J$. Ahora bien, para calcular su dimensión, de la condición $\mathbf{s}^T\mathbf{J}\mathbf{s} = \mathbf{J}$ se obtienen restricciones al elemento de $GL(n)$ en (B.1) que en total tiene dimensión $4n^2$. Dado que J es una matriz antisimétrica, entonces existen exactamente $2n(2n-1)/2$ condiciones independientes. Por lo tanto cada elemento de *Sp(n)* depende en los siguientes parámetros independientes:

$$4n^2 - n(2n-1) = n(2n+1) \tag{B.5}$$

equivalente a la dimensión del grupo o variedad. □

Teorema. *Sp(n)* es un grupo conexo por curvas, localmente conexo por curvas y semi-localmente simple conexo.

Dem. Del teorema anterior, se sigue que para demostrar estas propiedades topológicas para *Sp(n)* es suficiente demostrarlas para $\mathbb{R}^{(n(n+1)/2}$ y *U(n)*. Para el primer caso, dado que el espacio euclidiano es convexo, entonces es conexo en todos los grados de conexidad que se tiene. Para el segundo caso, se sabe que cualquier matriz unitaria A se puede diagonalizar a otra matriz D por cualquier matriz unitaria S, es decir, $A = SDS^{-1}$. Así mismo, cualquier matriz unitaria diagonal D debe tener números complejos de norma unitaria en la diagonal, por lo que $D = D(diag(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}))$. Por esta razón, se puede construir una curva parametrizada $\alpha : [0,1] \to U(n)$ contenida en *U(n)* de la siguiente forma $\alpha(t) = SD(diag(e^{it\theta_1}, \ldots, e^{it\theta_n}))S^{-1}$, donde $\alpha(0) = \mathbb{I} \in U(n)$ y $\alpha(1) = A$. Dado que esta curva es continua y para cualquier vecindad V alrededor del origen $\mathbb{I} \in U(n)$ siempre existe $D \in V$ tal que $A = SDS^{-1}$, entonces *U(n)* tambien es localmente conexo por curvas. Finalmente para demostrar que es semi-localmente simple conexo basta con demostrar que *U(n)* tiene una cubierta universal. Este resultado se sigue de un teorema en [Munkres, 2000, p.486] que consiste en que si $p : E \to B$ es un mapeo de cubierta tal que $p(e_0) = b_0$, y si E es simple-conexo, entonces b_0 tiene una vecindad U tal que la función $i : U \to B$ induce un homomorfismo trivial $i_* : \pi : 1(U, b_0) \to \pi : 1(B, b_0)$. Dado que la existencia de este homomorfismo es precisamente la definición de un grupo semi-localmente simple conexo, entonces *U(n)* satisface esta propiedad para toda b_0. Se puede demostrar que la cubierta universal de *U(n)* corresponde a $\mathbb{R} \times SU(n)$. Este resultado se sigue de la existencia de un grupo cubierta de *U(n)* homeomorfo al *Grupo del Círculo* y el *Grupo Especial Unitario* $U^1\times SU(n)$[175], bajo el mapeo de cubierta $p(\lambda, A) = \lambda A$, donde $\lambda \in U(n)$ y $A \in SU(n)$. Por definición del grupo cociente se tiene que $U^1\times SU(n) = \mathbb{R}\times SU(n)/(\mathbb{Z}, +)$, pero como para toda b_0 el grupo fundamental es el mismo que *U(n)*: $\pi_1(U^1 \times SU(n), p^{-1}(b_0)) = \pi_1(U(n), b_0) = (\mathbb{Z}, +)$, entonces $\mathbb{R} \times SU(n)$ es el grupo universal de $U^1\times SU(n)$, que cubre todas las demás cubiertas. Pero como este último es un grupo cubierta de *U(n)*, entonces por el teorema de la cubierta máxima $\mathbb{R}\times SU(n)$ es también cubierta universal de *U(n)*. □

Un resultado que se sigue de las propiedades topológicas anteriores es:

Teorema. Las matrices simplécticas tienen determinante 1, o bien, $Sp(n) \subset SL(2n, \mathbb{R})$.

Dem. Un resultado premonitorio corresponde a que si $\mathbf{s}^T\mathbf{J}\mathbf{s} = \mathbf{J}$, entonces $det(\mathbf{s}^T)det(\mathbf{J})det(\mathbf{s}) = det(\mathbf{J}) = 1$, por lo tanto $det(\mathbf{s}) = \pm 1$. Ahora bien, la función determinante $det : Sp(n) \to \pm 1$ es una función continua que es localmente constante. Dado que *Sp(n)* es conexo por curvas, se sigue que *det* es una función contante en toda la variedad, pues de no ser así existiría por lo menos un punto en su dominio donde dicha función sería discontinua. Pero si se toma $\mathbf{s} \in Sp(n) = \mathbb{I}$, entonces se tiene que $det(\mathbf{s}) = det\mathbb{I} = 1$ para toda $\mathbf{s}$. Por lo tanto el determinante de *Sp(n)* es siempre la unidad. □

Definición 51 (*El Grupo Simpléctico Inhomogéneo*)**.** El *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* (*ISp(n)*) es un grupo de Lie conexo por curvas definido como el semi-producto de *Sp(n)* y el grupo abeliano de traslaciones

[175] Nótese que este producto es directo y no es un semi-producto, pues como bien se demostró arriba el semi-producto es homeomorfo a *U(n)*.

$A(2n)$, que es homeomorfo al grupo euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$:

$$IS_p(n) \simeq \mathbb{R}^{2n} \otimes_S S_p(n)$$

La operación del grupo es $(w_a, A_i)\cdot(w_b, A_j) = (w_a w_b^{A_i}, A_i A_j)$ donde $w_a w_b^{A_i} = w_a + A_i w_b$ y $w \in \mathbb{R}^{2n}$, $A \in S_p(n)$. Así mismo, $IS_p(n)$ tiene una presentación en matrices de $1 \times 2n$:

$$\begin{pmatrix} A & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 52 (*El Grupo de Heisenberg Polarizado*)**.** El *Grupo de Heisenberg Polarizado* $H_{pol}(n)$ es un grupo de Lie simple conexo y conexo por curvas que es homeomorfo a:

$$H_{pol}(n) = \mathbb{R} \otimes_S \mathbb{R}^{2n} \tag{B.6}$$

cuya expresión se debe a la existencia de una forma $\mathbb{R}$-bilineal no degenerada $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}' : \mathbb{R}^{2n} \otimes \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, tal que la regla multiplicativa es $(t, \mathbf{z}) \cdot (t', \mathbf{z}') = (t + t' + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}', \mathbf{z} + \mathbf{z}')$ donde $\mathbf{z} = (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $t \in \mathbb{R}$.

Definición 53 (*El grupo de automorfismos simplécticos del grupo de Heisenberg*)**.** Por construcción, el *Grupo de Automorfismos Simplécticos del Grupo de Heisenberg Polarizado HSp(n)* es un grupo de Lie conexo por curvas que es homeomorfo a:

$$HSp(n) \simeq H_{pol}(n) \otimes_S Sp(n)$$

La operación de grupo es $(X_a, A_i)\cdot(X_b, A_j) = (X_a X_b^{A_i}, A_i A_j)$ donde $X_b^{A_i} = A_i X_b = (A_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}), t)$, y $X = (\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \in H_{pol}(n)$, $A \in S_p(n)$.

Teorema (*Folland*)**.** El *Grupo de Automorfismos Simplécticos del Grupo de Heisenberg Polarizado HSp(n)* es un grupo de Lie conexo, que es a su vez, homeomorfo a la *Extensión Central* del componente traslacional del *Grupo Simpléctico Inhomogéneo* $\widetilde{ISp}(n) \simeq \mathbb{R} \otimes_S (\mathbb{R}^{2n} \otimes_S \mathrm{Sp(n)})$.

B.2. Representaciones de Grupos de Lie

Teorema (*Weinberg:* Representaciones proyectivas)**.** [Weinberg, 1995] Para cualquier *Representación proyectiva* de un grupo de Lie, la fase correspondiente a la Representación se puede eliminar si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Los generadores del grupo en esta Representación se puede re-definir (por medio de una *Extensión Central* apropiada) de tal manera que se eliminen las cargas centrales del álgebra de Lie.

(ii) El grupo es simple conexo (el primer grupo fundamental es la identidad).

Definición 54 (*Representación de Schrödinger*)**.** La Representación de Schrödinger es una *Representación ordinaria* unitaria del *Grupo de Heisenberg Polarizado* ($H_{pol}(n)$), definida por: $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = exp[2\pi i t]exp[2\pi i(\mathbf{rD} + \mathbf{pX})]$, tal que[176]:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}_0) = exp[2\pi i t + 2\pi i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0) + \pi i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})] f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{p}) \tag{B.7}$$

[176] Donde $h\mathbf{D}_j = \mathbf{P}_j$ y $\mathbf{X}_j = \mathbf{Q}_j$ son los operadores cuánticos de momento y posición. Detalles en [Folland, 1989, Ch. 1].

Definición 55 (*Grupo Metapléctico Inhomogéneo*)**.** El *Grupo Metapléctico Inhomogéneo* (*IMp(n)*) es la única *Representación Ordinaria* de *HSp(n)*. En otras palabras , el conjunto de operadores $\rho\mu$, donde $\mu \in$ *Mp(n)* es la *Representación Ordinaria* unitaria de la *Doble Cubierta* ($Sp_2(n)$), y ρ es la *Representación ordinaria* unitaria de $H_{pol}(n)$ (la *Representación de Schrödinger*). IMp(n) es, en realidad, una *Representación Ordinaria* univaluada de la siguiente forma:

$$\mathscr{W}(X, A') = \rho(X)\mu(A') \qquad \text{tal que} \qquad \mathscr{W}(X_1, A'_1)\mathscr{W}(X_2, A'_2) = \mathscr{W}(X_1(A'_1X_2), A'_1A'_2) \tag{B.8}$$

donde $X = (\mathbf{z}, t) \in H_{pol}(n)$ and $A' \in Sp_2(n)$.

B.3. Geometría del Espacio Fase

Teorema (Invarianza de la forma simpléctica)**.** Sea $\mathbf{s}(\mathbf{z_0})$ una matriz simpléctica definida en un punto del espacio fase $\mathbf{z_0} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$. Sea Ω_H la forma simpléctica. Entonces para todo par de campos vectoriales $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ en el espacio tangente al punto $\mathbf{z_0}$ del espacio fase, se tiene:

$$\Omega_H(\mathbf{s}(\mathbf{z_0})\mathbf{u}, \mathbf{s}(\mathbf{z_0})\mathbf{v}) = \Omega_H(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{B.9}$$

Dem. Se sabe por (B.3) y (10.9) que la contracción de la forma diferencial de Poincaré-Cartán con el campo vectorial hamiltoniano suspendido es nulo $\Omega_H[\,\cdot\,, X_H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] = 0$. Sea $\mathscr{L}_{X_H}\Omega_H$ la derivada de Lie de Ω_H en la dirección del campo X_H:

$$\mathscr{L}_{X_H}\Omega_H = \lim_{t\to 0} \frac{(f_t)^*\Omega_H - \Omega_H}{t} \tag{B.10}$$

Por la formula de homotopía de Cartan se obtiene:

$$\mathscr{L}_{X_H} = d\Omega_H[\,\cdot\,,\,\cdot\,, X_H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] + d(\Omega_H[\,\cdot\,, X_H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)]) \tag{B.11}$$

Pero como $d\Omega_H = 0$ entonces, $\mathscr{L}_{X_H} = 0$. Por lo tanto $(f_t)^*\Omega_H = \Omega_H + \alpha$, donde α es una 2-forma constante. Como en $t = 0$ $\alpha = 0$, entonces se obtiene:

$$(f_{t,t'})^*\Omega_H = \Omega_H. \tag{B.12}$$

Este resultado significa que la matriz jacobiana $f'_{t,t'}(\mathbf{z_0})$ es simpléctica en cada punto $\mathbf{z_0}$:

$$\Omega_H(f'_{t,t'}(\mathbf{z_0})\mathbf{u}, f'_{t,t'}(\mathbf{z_0})\mathbf{v}) = \Omega_H(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{B.13}$$

para todo $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ vectores en el espacio tangente al espacio fase. □

Teorema (Simplectomorfismo libre)**.** Un simplectomorfismo $f : \mathbf{z_0} \to \mathbf{z}$ definido en un conjunto abierto simple conexo del espacio fase es libre si y sólo si:

$$det\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p_0}} \neq 0 \tag{B.14}$$

en dicho conjunto.

Dem. Debido a la simple-conexidad del conjunto abierto es posible apelar al teorema de la función implícita, que consiste en que la ecuación $\mathbf{r} = g(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ se puede resolver localmente para $\mathbf{p}_0$ si la matriz jacobiana asociada a la función continuamente diferenciable $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ es invertible. Es decir, siempre y cuando:

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r_0}} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p_0}} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} = -det\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p_0}} \neq 0$$

entonces existen conjuntos abiertos U y V tales que $\mathbf{r}_0 \in U$ y $\mathbf{p}_0 \in V$, y existe una función continuamente diferenciable $h : U \to V$ tal que $\{(\mathbf{r}_0, h(\mathbf{r}_0))|\mathbf{r}_0 \in U)\} = \{(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \in U \times V|g(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{r}\}$. Esto garantiza que mediante el simplectomorfismo $f(\mathbf{r_0}, \mathbf{p_0}) = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$ y los valores de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_0$ sea posible determinar de manera única y localmente tanto a $\mathbf{p}$ como a $\mathbf{p}_0$. □

Teorema (Función Generadora y Simplectomorfismo I)**.** Sea f un simplectomorfismo con función generadora W. Entonces $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ se satisface sí y solo si:

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \qquad \mathbf{p}_0 = -\nabla_{\mathbf{r}_0} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \tag{B.15}$$

Dem. Se sabe que $dW = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0 = \nabla_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} + \nabla_{\mathbf{r}_0} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0$. Como de (10.36) se tiene que $dW = \mathbf{p} d\mathbf{r} - \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0$, entonces se obtiene el resultado deseado. □

Teorema (Función Generadora y Simplectomorfismo II)**.** $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ es una función generadora para un simplectomorfismo libre si y sólo si:

$$Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(W) \neq 0. \tag{B.16}$$

Donde $Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(W)$ es el determinante de la matriz hessiana.

Dem. Supóngase que W es una función generadora para un simplectomorfismo f. Por el teorema del simplectomorfismo libre (B.14), entonces se tiene que:

$$W''_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial \mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p_0}}\right)^{-1} \tag{B.17}$$

es invertible. Ahora bien, supóngase que $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p}, \mathbf{p}_0)$ es una función que es continuamente diferenciable y satisface $\mathrm{Hess}_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(W) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, se puede demostrar que existe una función f continuamente diferenciable $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = (\nabla_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), -\nabla_{\mathbf{r}_0} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ definida en conjuntos abiertos del espacio fase que contienen a los puntos $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{p}_0$. Dado este resultado, se sigue que esta función define un simplectomorfismo libre por el teorema anterior (B.15) y que W es una función generadora. □

Teorema (Funciones Generadoras de Matrices Simplécticas Libres)**.** Este teorema consta de tres partes:

(1) Supóngase que $\mathbf{s}$ es una matriz simpléctica libre. Una función generadora W para $\mathbf{s}$ es la forma cuadrática:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T D B^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^T B^{-1}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0^T B^{-1} A \mathbf{r}_0 \tag{B.18}$$

donde DB^{-1} y $B^{-1}A$ son matrices simétricas, $detB \neq 0$, y $\mathbf{s}$ se expresa como (10.38).

Dem. Considérese una transformación lineal generada por una matriz simpléctica libre:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r_0} \\ \mathbf{p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{B.19}$$

Al operar la matriz con el vector columna de la derecha se obtiene un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= C\mathbf{r}_0 + (DB^{-1})\mathbf{r} - (DB^{-1}A)\mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 &= (B^{-1})\mathbf{r} - (B^{-1}A)\mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

Ahora bien, se puede demostrar que cualquier matriz simpléctica satisface la condición $DA^T - CB^T = \mathbb{I}$. De las condiciones de simetría para $B^{-1}A$ se sigue la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} & DA^T - CB^T = \mathbb{I} \\ \Leftrightarrow \quad & D^T(B^{T(-1)}A^T)B^T - CB^T = \mathbb{I} \\ \Leftrightarrow \quad & D^T(B^{-1}A)B^T - CB^T = \mathbb{I} \\ \Leftrightarrow \quad & C - D^T B^{-1}A = -B^{T(-1)} \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (DB^{-1})\mathbf{r} - (B^{T(-1)})\mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 &= (B^{-1})\mathbf{r} - (B^{-1}A)\mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

De la expresión de W en términos de $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}$ (véase en (10.36)) se obtiene[177]:

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{p}d\mathbf{r} - \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0 \\ &= \int \Big((DB^{-1})\mathbf{r} - (B^{T(-1)})\mathbf{r}_0\Big)d\mathbf{r} - \Big((B^{-1})\mathbf{r} - (B^{-1}A)\mathbf{r}_0\Big)d\mathbf{r}_0 \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{r}^T(DB^{-1})\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^T(B^{-1})\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0^T(B^{-1}A)\mathbf{r}_0 \end{aligned}$$

□

(2) Si por el contrario W es una forma cuadrática:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{2}\mathbf{r}^T P\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^T L\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0^T Q\mathbf{r}_0 \\ P &= P^T \ , \ Q = Q^T \ , \ detL \neq 0 \end{aligned} \tag{B.20}$$

entonces la matriz:

$$\mathbf{s}_W = \begin{pmatrix} L^{-1}Q & L^{-1} \\ PL^{-1}Q - L^T & PL^{-1} \end{pmatrix} \tag{B.21}$$

es una matrix simpléctica libre cuya función generadora está dada por (10.40).

[177] Aquí es importante considerar la integración de escalares matriciales por vectores columna, y de vectores operados por una matriz por vectores columna.

Dem. De (B.20) y de las condiciones de simetría $P = P^T$ y $Q = Q^T$ se sigue que la diferencial de la forma cuadrática dW es[178]:

$$dW = (P\mathbf{r} - L^T\mathbf{r}_0)d\mathbf{r} + (Q\mathbf{r}_0 - L\mathbf{r})d\mathbf{r}_0 \tag{B.22}$$

Ahora bien, por (B.3) se sabe que si $\mathbf{s}_W$ es un simplectomorfismo libre con función generadora W entonces la siguiente ecuación se satisface:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= P\mathbf{r} - L^T\mathbf{r}_0 \\ \mathbf{p}_0 &= L\mathbf{r} - Q\mathbf{r}_0 \end{aligned} \tag{B.23}$$

sí y sólo si:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{s}_W(\mathbf{r_0}, \mathbf{p_0}) \tag{B.24}$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ P\mathbf{r} - L^T\mathbf{r}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r_0} \\ L\mathbf{r} - Q\mathbf{r}_0 \end{pmatrix} \tag{B.25}$$

Si se asume (B.23) y al tomar en cuenta $detL \neq 0$, entonces existe una matriz $\mathbf{s}_W$ que es solución a un sistema de ecuaciones lineales en $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ que tiene la forma:

$$\mathbf{s}_W = \begin{pmatrix} L^{-1}Q & L^{-1} \\ PL^{-1}Q - L^T & PL^{-1} \end{pmatrix} \tag{B.26}$$

y que resulta ser una matriz simpléctica libre. □

(3) Si $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{s}(\mathbf{r_0}, \mathbf{p_0})$ entonces la función generadora está dada por:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \tag{B.27}$$

Dem. Este teorema se demuestra usando la fórmula de Euler para funciones homogéneas. Esta fórmula consiste en que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua, diferenciable y homogénea de orden N:

$$f(tx) = t^n f(x) \tag{B.28}$$

para $t > 0$, entonces se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i f(x) x_i = n f(x) \tag{B.29}$$

Si se aplica esta fórmula específicamente a la función $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \boldsymbol{\nabla} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}d\mathbf{r} - \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0}{d\mathbf{r}}, \frac{\mathbf{p}d\mathbf{r} - \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0}{d\mathbf{r}_0} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{p}, -\mathbf{p}_0) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

□

[178] Aquí hay que considerar diferenciación de matrices escalares por vectores columna y de vectores operados por matrices por vectores columna.

Teorema (Producto de matrices simplécticas libres)**.** El producto $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$ define una matriz simpléctica libre si y solo si:

$$det(P' + Q) \neq 0 \tag{B.30}$$

Demostración. Se sabe que cualquier matriz simpléctica libre cuya función generadora está dada por (10.40), tiene la forma (B.21). Ahora bien, al calcular el producto de cualesquiera dos matrices simplécticas libres se obtiene una tercera matriz. Si el producto da como resultado una matriz simpléctica, entonces:

$$\mathbf{s}_W\mathbf{s}'_{W'} = \begin{pmatrix} L^{-1}Q & L^{-1} \\ PL^{-1}Q - L^T & PL^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L'^{-1}Q' & L'^{-1} \\ P'L'^{-1}Q' - L'^T & P'L'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L''^{-1}Q'' & L''^{-1} \\ P''L''^{-1}Q'' - L''^{T''} & P''L''^{-1} \end{pmatrix} \tag{B.31}$$

que resulta en un sistema de ecuaciones lineales. Después de algunas operaciones que no conviene poner aquí se obtiene una solución para la triada (P'', L'', Q''):

$$\begin{aligned} P'' &= P - L^T(P' + Q)^{-1}L \\ L'' &= L'(P' + Q)^{-1}L \\ Q'' &= Q' - L'(P' + Q)^{-1}L'^T \end{aligned} \tag{B.32}$$

□

Teorema (Inversa de Matrices Simplécticas Libres)**.** Las matrices simplécticas libres tienen definido un elemento inverso que tiene la forma:

$$\mathbf{s}^{-1}_{W(Q,L,P)} = \mathbf{s}_{W(-Q,-L^T,-P)} = \begin{pmatrix} L^{T(-1)}P & -L^{T(-1)} \\ -(QL^{T(-1)}P - L) & QL^{T(-1)} \end{pmatrix} \tag{B.33}$$

Demostración. Por definición, si $\mathbf{s}_W$ es una matriz simpléctica libre tal que:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{s}_W(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) \quad p = P\mathbf{r} - L^T\mathbf{r}_0 \quad p_0 = L\mathbf{r} - Q\mathbf{r}_0 \tag{B.34}$$

entonces la inversa $\mathbf{s}^{-1}_W$ debe ser una matriz simpléctica libre tal que:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \mathbf{s}^{-1}_W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad p = L\mathbf{r}_0 - Q\mathbf{r} \quad p_0 = P\mathbf{r}_0 - L^T\mathbf{r} \tag{B.35}$$

expresando a $\mathbf{s}^{-1}_W$ como matriz y resolviendo el sistema de ecuaciones generado por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ L\mathbf{r}_0 - Q\mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ P\mathbf{r}_0 - L^T\mathbf{r} \end{pmatrix} \tag{B.36}$$

se obtienen soluciones para A, B, C, D tal que:

$$\mathbf{s}^{-1}_{W(Q,L,P)} = \begin{pmatrix} L^{T(-1)}P & -L^{T(-1)} \\ -(QL^{T(-1)}P - L) & QL^{T(-1)} \end{pmatrix} \tag{B.37}$$

que es equivalente a $\mathbf{s}_{W(-Q,-L^T,-P)}$. □

Teorema (Generador de Matrices Simplécticas)**.** El conjunto de matrices simplécticas libres generan al grupo de matrices simplécticas *Sp(n)* mediante el producto $s = \mathbf{s}_W\mathbf{s}'_{W'}$.

Demostración. Primero considérese las siguientes matrices compuestas por $P = P^T$ y $detL \neq 0$:

$$\mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -P & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \mathbf{m}_L = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & L^T \end{pmatrix} \tag{B.38}$$

Se puede verificar fácilmente que estas matrices son simplécticas. Ahora bien, al operar estas matrices de cierta manera se puede generar una matriz simpléctica libre. Esto se logra de la siguiente manera:

$$\mathbf{s}_W = v_{-P} m_L J v_Q \quad = \quad \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ P & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & L^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ Q & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{B.39}$$

$$= \begin{pmatrix} L^{-1}Q & L^{-1} \\ PL^{-1}Q - L^T & PL^{-1} \end{pmatrix} \tag{B.40}$$

que es una matriz simpléctica libre. Tomando en cuenta este resultado, y calculando el producto de dos matrices simplécticas libres en términos de P y L se obtiene:

$$\mathbf{s} = (v_{-P} m_L J v_Q)(v'_{-P} m'_L J v'_Q) = v_{-P} m_L J v_{Q+P'} m'_L J v_{-Q} \tag{B.41}$$

que es una matriz simpléctica. □

C. Apéndice C

C.1. El Grupo Metapléctico

Definición 56 (Espacio de Schwartz)**.** El espacio de Schwartz es el espacio de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ rápidamente decrecientes en $\mathbb{R}^n$:

$$S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta\} \tag{C.1}$$

Definición 57 (Operadores generadores)**.** Sea $\psi(\mathbf{r})$ una función en el espacio de Schwartz. Se pueden definir dos operadores que actúan sobre ψ de la siguiente manera:

$$M_{L,m}\psi(\mathbf{r}) = i^m \sqrt{|detL|}\psi(L\mathbf{r}) \tag{C.2}$$

$$V_P\psi(\mathbf{r}) = e^{-\frac{-i}{2}P\mathbf{r}^2}\psi(\mathbf{r}) \tag{C.3}$$

Donde L es una matriz invertible de $n \times n$, P una matriz simétrica de $n \times n$, y m es un índice de Maslov.

Ahora bien, de la misma forma en que se definen operadores que generan a *Sp(n)*, es posible generar una *Transformada de Fourier Cuadrática* por medio de $M_{L,m}$ y V_P.

Teorema (Generadores de transformadas de Fourier cuadráticas)**.** Sea W una forma cuadrática y m un índice de Maslov. Entonces se tiene que:

$$S_{W,m} = V_{-P}M_{L,m}FV_{-Q} \tag{C.4}$$

Demostración. Al calcular directamente la siguiente expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} V_P S_{W,m} V_Q \Psi(\mathbf{r}) &= e^{-\frac{i}{2}P\mathbf{r}^2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2} i^m \sqrt{|detL|}\int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}} e^{iW(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}e^{-\frac{i}{2}Q\mathbf{r}^2}\Psi(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \\ &= i^m\sqrt{|detL|}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2}\int e^{-iL\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}\Psi(\mathbf{r}_0) \\ &= M_{L,m}F\Psi(\mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

Donde F es una transformada de Fourier ordinaria. Pero como $V_{-P} = V_P^{-1}$ y $V_{-Q} = V_Q^{-1}$ entonces se obtiene el resultado deseado. ◻

De igual manera es posible definir su inversa:

Teorema (Inversa de la transformada de Fourier cuadrática)**.** La inversa de la *Transformada de Fourier Cuadrática* ($S^{-1}_{W,m}$) es:

$$S^{-1}_{[(Q,L,P),m]}\Psi(\mathbf{r}_0) = S_{[W(-Q,L^T,-P),n-m \, mod\, 4]}\Psi(\mathbf{r}_0) \tag{C.5}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2} i^{n-m}\sqrt{|\mathrm{det}L|}\int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}} e^{iW(-Q,L^T,-P)}\Psi(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{C.6}$$

Demostración. Tomando en cuenta la siguiente igualdad:

$$i^{-m}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{n/2} = i^{n-m}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2} \tag{C.7}$$

y sabiendo que $F^{-1}M_{L^{-1},-m} = M_{L^T,-m}F^{-1}$, se obtiene la siguiente cadena de igualdades:

$$F^{-1}(M_{L,m})^{-1} = F^{-1}M_{L^{-1},-m} = M_{L^T,-m}F^{-1} = M_{-L^T,n-m}F. \tag{C.8}$$

Ahora, por definición de cualquier función inversa:

$$S_{W,m}S_{W,m}^{-1} = S_{W,m} = V_{-P}M_{L,m}FV_{-Q}(V_QF^{-1}(M_{L,m})^{-1}V_P) = \mathbb{I} \tag{C.9}$$

Por lo tanto, tomando el factor del paréntesis se obtiene el resultado deseado. □

Habiendo definido y probado algunos resultados concernientes con los generadores de $S_{W,m}$ se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema (Transformadas de Fourier Cuadráticas en el Espacio de Schwartz)**.** La *Transformada de Fourier Cuadrática* ($S_{W,m}$) es un automorfismo unitario del espacio de Schwartz de funciones cuadrado integrables y complejas $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$.

Demostración. Tomando en cuenta que $S_{W,m} = V_{-P}M_{L,m}FV_{-Q}$, entonces sólo basta probar que los generadores V_P y $M_{L,m}$ son automorfismos unitarios en $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$. Para ello, es necesario demostrar que ambos generadores son funciones $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$ y que son unitarios.
En primera instancia, es fácil dar una prueba de que $M_{L,m}$ es una función del espacio de Schwartz dado que sus derivadas en todos los ordenes difieren por una constante compleja, por lo que si $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces $M_{L,m} \in S(\mathbb{R}^n)$. Que sus cuadrados sean integrables es un resultado trivial del argumento anterior. Por lo tanto $M_{L,m} \in L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$.
Ahora considérese V_P. Para este caso, dado que este generador define una función exponencial, se sabe que cualquier derivada de una función exponencial es equivalente a la misma función, salvo los términos del exponente que se multiplican dependiendo del orden:

$$x^\alpha D^\beta V_P\Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^\alpha(-iP\mathbf{r})^\beta V_P\Psi(\mathbf{r}) \tag{C.10}$$

De esta forma, se puede probar que sin importar cuál sea el exponente de $\mathbf{r}$, si $\mathbf{r} \to \infty$ y $\Psi(\mathbf{r}) \in S^{\mathbb{R}^n}$, entonces $\mathbf{r}^\alpha(-iP\mathbf{r})^\beta V_P\Psi(\mathbf{r}) < \infty\ \forall\alpha,\beta$. Que la función es cuadrado integrable se sigue trivialmente de que es una función exponencial.
Finalmente, para demostrar que ambos generadores son unitarios es trivial dado que la primera define una función constante compleja y la segunda una función exponencial. Sólo basta con probar que bajo la norma definida en $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$, se satisface $||f(\psi)||^2 = ||\psi||^2$. □

A continuación se probará que el conjunto de *Transformadas de Fourier Cuadráticas* (*$Mp_0(n)$*) definen un grupo bajo condiciones específicas. Para llegar a este resultado primero considérese el siguiente teorema[179]:

[179] Aquí se omitirá la demostración de este teorema, sin embargo si el lector desea revisarlo, es posible encuentrarlo en [Leray, 1981, pp.11-12].

Teorema. Sea P' un polinomio real de segundo orden. Sea W una forma cuadrática tal que $Hess_{\mathbf{r}'}(P'(\mathbf{r}') + W(\mathbf{r},\mathbf{r}')) \neq 0$. Sea P el valor crítico del polinomio $W + P'$, que resulta ser un polinomio real de segundo orden. Entonces se tiene:

$$S_{W,m}(e^{iP'}) = \sqrt{det(L)}[Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(P'(\mathbf{r}') + W(\mathbf{r},\mathbf{r}')]^{-1/2}e^{iP} \tag{C.11}$$

Aquí es importante tomar en cuenta la siguiente observación. Como bien puede apreciarse, $\Delta(W)$ se ha definido de la siguiente manera:

$$\Delta(W) = i^m \sqrt{|det(L)|} \tag{C.12}$$

Dado que $arg(det(L)) = m\pi$, se tiene que:

$$\begin{aligned} &m \quad \text{es par si } det(l) > 0 \\ &m \quad \text{es impar si } det(l) < 0 \end{aligned}$$

Entonces se sigue que:

$$\Delta(W) = \sqrt{(-1)^m|det(L)|} = \sqrt{det(L)} \tag{C.13}$$

Teorema. Sean W, W', W'' formas cuadráticas tales que $\mathbf{s}_W\mathbf{s}'_{W'} = \mathbf{s}''_{W''}$. Entonces:

$$\frac{det(L)det(L')}{det(L'')} = [Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(W'(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') + W(\mathbf{r},\mathbf{r}')] \tag{C.14}$$

Demostración. Por (B.32) se tiene que $L'' = L'(P' + Q)^{-1}L$. De aquí se sigue que $(P' + Q) = LL''^{-1}L'$, y entonces $det(P' + Q) = det(L)det(L''^{-1})det(L')$. Ahora bien, tomando en cuenta que $Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(W + W') = det(P' + Q)$, entonces se obtiene el resultado deseado. □

Teorema (Producto de transformadas de Fourier cuadráticas)**.** Sean $S_{W,m}$ y $S'_{W',m'}$ dos *Transformadas de Fourier Cuadráticas* asociadas a W y W' respectivamente, y sea $S''_{W'',m''}$ la *Transformada de Fourier Cuadrática* asociada a la función generadora W'' del producto $\mathbf{s}_W\mathbf{s}'_{W'}$. Entonces en general se tiene:

$$S_{W,m}S'_{W',m'} = \pm S''_{W'',m''} \tag{C.15}$$

Demostración. Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Considérese la función de Dirac $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')$ (que es una función en $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$). La *Transformada de Fourier Cuadrática* de esta función es:

$$S_{W',m'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2}\Delta(W')\int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}} e^{iW'(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')d^n\mathbf{r}' \tag{C.16}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2}\Delta(W')e^{iW'(\mathbf{r},\mathbf{r}'')} \tag{C.17}$$

Si se vuelve a operar:

$$S_{W,m}S_{W',m'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2}\sqrt{det(L')}S_{W,m}(e^{iW'(\mathbf{r},\mathbf{r}'')}) \tag{C.18}$$

Ahora bien, sabiendo que $\mathbf{s}_W\mathbf{s}'_{W'} = \mathbf{s}''_{W''}$ entonces cualesquiera dos de las siguientes ecuaciones implica la tercera:

$$(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbf{s}_W(\mathbf{r}',\mathbf{p}') \quad (\mathbf{r}',\mathbf{p}') = \mathbf{s}_{W'}(\mathbf{r}'',\mathbf{p}'') \quad (\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbf{s}_{W''}(\mathbf{r}'',\mathbf{p}'') \tag{C.19}$$

Donde $W'' = W''(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$. De (B.15) se tiene que cualesquiera dos de las siguientes ecuaciones implica la tercera:

$$\nabla_{\mathbf{r}}(W + W' - W'') = 0 \quad \nabla_{\mathbf{r}'}(W + W' - W'') = 0 \quad \nabla_{\mathbf{r}''}(W + W' - W'') = 0 \tag{C.20}$$

Aplicando la fórmula de Euler para la forma cuadrática $W + W' - W''$ se obtiene que $W + W' - W'' = 1/2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \nabla(W + W' - W'') = 0$. Por lo tanto $W + W' = W''$. Se sigue que el valor crítico del polinomio $P' = W + W'$ es $P = W''$. Esto implica por el teorema que se acaba de probar que:

$$S_{W,m}S_{W',m'}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{n/2} \sqrt{det(L)}\sqrt{det(L')}[Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(W'(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + W(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))]^{-1/2}e^{iW''} \tag{C.21}$$

Si se multiplica la ecuación por $f''(\mathbf{r}'')d^n\mathbf{r}''$ e integrando se obtiene:

$$S_{W,m}S_{W',m'}f''(\mathbf{r}'') = \left[\frac{det(L)det(L')}{det(L'')}\right]^{1/2} [Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(W'(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]^{-1/2}S_{W'',m''}f''(\mathbf{r}'') \tag{C.22}$$

Finalmente, al tomar en cuenta (C.14), entonces se obtiene el resultado deseado:

$$S_{W,m}S_{W',m'}f''(\mathbf{r}'') = \pm S_{W'',m''}f''(\mathbf{r}'') \tag{C.23}$$

□

Definición 58 (Índice de inercia)**.** Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real doble diferenciable y el determinante de la matriz hessiana de Φ distinto de cero, $Hess(\psi) \neq 0$. El índice de inercia de ϕ, $Inert(\phi)$ se define de la siguiente manera:

$$arg(Hess(\phi)) = \pi Inert(\phi)\ mod\,2\pi \tag{C.24}$$

Y tiene por ende la propiedad $Inert(-\phi) = n - Inert(\phi)$.

Teorema. La siguiente igualdad se satisface $S_{W,m}S'_{W',m'} = S''_{W'',m''}$ para algún par (W'', m'') (donde W'' corresponde a la función generadora del producto $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$ (10.43)), sí y sólo si:

$$\det(P' + Q) \neq 0 \quad \text{y} \quad m'' = m + m' - \operatorname{Inert}(P' + Q)\ mod\,4 \tag{C.25}$$

Donde $\operatorname{Inert}(P' + Q)$ es el número de eigenvalores negativos de la matriz simétrica $P' + Q$.

Demostración. Por definición de índice de inercia (C.24) se tiene que para la forma cuadrática $W + W'$:

$$arg(Hess_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}(W + W'))^{1/2} = \pi/2(Inert(W + W'))\ mod\,2\pi \tag{C.26}$$

Además como $arg(detL) = m\pi\ mod\,2\pi$, entonces del teorema anterior:

$$\pm 1 = \left[\frac{det(L)det(L')}{det(L'')}\right]^{1/2} [Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(W'(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + W(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))]^{-1/2} \tag{C.27}$$

se obtiene que:

$$arg(\pm 1) = \pi/2(m + m' - m'' - Inert(W + W'))\ mod\,2\pi \tag{C.28}$$

donde es claro que $Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(W'(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = det(P' + Q)$ debe ser distinto de cero. □

Teorema. Si $\mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'}$ define una matriz simpléctica libre, o bien, si $det(P' + Q) \neq 0$), entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\Pi_0((S_{W,m})^{-1}) = (\mathbf{s}_W)^{-1} \tag{C.29}$$

$$\Pi_0(S_{W,m}S_{W',m'}) = \mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W'} \tag{C.30}$$

Demostración. Considérese la primera proposición. Se debe demostrar que para algún $(S_{W,m})^{-1} \in Mp_0(n)$ existe $(\mathbf{s}_W)^{-1} \in Sp_0(n)$ tal que $\Pi_0(S_{W,m})^{-1}) = (\mathbf{s}_W)^{-1} \in Sp_0(n)$. Por definición, si $(S_{W,m})^{-1} \equiv S_{W^*,m^*}$ es el elemento inverso de $S_{W,m} \in Mp_0(n)$ entonces $W^* = W(-Q, -L^T, -P) = -W$ y $m^* = n - m$. Tomando en cuenta la definición de Π se tiene:

$$\Pi_0(S_{W^*,m^*}) = (\mathbf{s}_{W^*}) \in Sp_0(n) \tag{C.31}$$

Faltaría demostrar que $\mathbf{s}_{W^*} \equiv (\mathbf{s}_W)^{-1}$. Para ello[180], si se considera que $\mathbf{s}_{W^*}$ es una matriz simpléctica libre tal que $W^* = W(-Q, -L^T, -P)$, entonces por (B.3) se tiene que $\mathbf{s}_{W^*}$ es el elemento inverso a $\mathbf{s}_W$.
Respecto a la segunda proposición, si $det(P' + Q) \neq 0$ entonces por el teorema (C.1), $S_{W,m}S_{W',m'} = S_{W'',m''} \in Mp_0(n)$ es el caso. Ahora bien, tomando en cuenta la definición de Π:

$$\Pi_0(S_{W'',m''}) = (\mathbf{s}_{W''}) \tag{C.32}$$

entonces del teorema B.3 y de la condición inicial $det(P' + Q) \neq 0$, se sigue que $\mathbf{s}_{W''} = \mathbf{s}_W\mathbf{s}'_{W'} \in Sp_0(n)$ es el caso. $\square$

Teorema. El mapeo $\Pi : Mp(n) \to Sp(n)$ es un homomorfismo de grupo que satisface:

(1) Se preservan las propiedades de grupo:

$$\Pi(SS') = \Pi(S)\Pi(S') \tag{C.33}$$

(2) $\Pi(S_{W,m})$ es una matriz simpléctica libre.

(3) Π es una proyección de cubierta de la forma $\Pi : Mp(n) \to Sp(n)$.

Demostración. La prueba de este teorema es muy extensa, sin embargo, por motivos de simplicidad se dará un bosquejo de la demostración de la primera proposición (la demostración completa se puede ver en [De Gosson, 1997]). La segunda y la tercera proposición (que tienen importancia respecto a la discusión presente) se harán conforme al rigor con el que se han demostrado los resultados hasta este momento.
En primera instancia, se sabe por definición que si $S \in Mp(n)$, entonces $S = S_{W_1,m_1}S_{W_2,m_2}\cdots S_{W_k,m_k}$. Se puede definir un mapeo $\Pi(S) : Mp(n) \to Sp(n)$ de la siguiente manera:

$$\Pi(S) = \mathbf{s}_{W_1}\mathbf{s}_{W_2}\cdots\mathbf{s}_{W_k} \tag{C.34}$$

No obstante, para que $\Pi(S)$ defina un homomorfismo de grupo faltaría demostrar que $\mathbf{s}_{W_1}\mathbf{s}_{W_2}\cdots\mathbf{s}_{W_k}$ no depende de la forma en que se ha factorizado a S, pues es un hecho que cualquier S se puede expresar de manera no única como el producto de elementos de $Sp_0(n)$. Esta demostración se detalla en [De Gosson, 1997].

[180]La demostración de De gosson no es muy convincente dado que asume en algún punto que $W^* = -W$, lo cual no es enteramente cierto. En general se satisface que $W^* = W(-Q, -L^T, -P)$ para alguna matriz L no necesariamente simétrica. Por esta razón se procederá a demostrar la proposición usando (B.3).

Para demostrar que si $S_{W,m} \in Mp_0(n)$ entonces $\Pi(S_{W,m})$ es una matriz simpléctica libre, es necesario definir un mapeo $\Pi_0 : Mp_0(n) \to Sp_0(n)$ que satisfaga (C.29) (que se le ha llamado proyección parcial). Una vez hecho esto, se debe demostrar que Π_0 es Π restringido al conjunto de transformadas de Fourier cuadráticas *Sp*$_0$*(n)*. En efecto, basta con probar que si $det(P' + Q) \neq 0$, o bien, $S_{W,m}S'_{W',m'} = S''_{W'',m''} \in Mp_0(n)$ y $\mathbf{s}_W\mathbf{s}'_{W'} = \mathbf{s}''_{W''} \in Sp_0(n)$, entonces $S''_{W'',m''} \in Mp(n)$ y $\mathbf{s}''_{W''} \in Sp(n)$. Para ello, solo es necesario recordar que el producto de dos elementos de *Sp*$_0$*(n)* es un elemento de *Sp(n)*, y por definición, dos elementos de *Mp*$_0$*(n)* es un elemento de *Mp(n)*.

Para demostrar la última proposición se deberá probar Π es un homomorfismo de grupo suprayectivo y dos-a-uno. Respecto a la primera, solo basta con tomar un elemento arbitrario $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{W_1}\mathbf{s}_{W_2}\cdots\mathbf{s}_{W_k}$ de *Sp*$_0$*(n)* y demostrar que es la imagen de al menos un elemento de *Mp*$_0$*(n)*. Tomando en cuenta la definición de Π, se tiene que para cualquier $j\,(1 \leq j \leq k)$:

$$\Pi(S_{W_1,m_1}S_{W_2,m_2}\cdots S_{W_k,m_k}) = \mathbf{s}_{W_1}\mathbf{s}_{W_2}\cdots\mathbf{s}_{W_k} \tag{C.35}$$

Por lo tanto Π es suprayectiva.

Para demostrar que Π es dos-a-uno es suficiente probar que $ker(\Pi) = \{\pm\mathbb{I}\}$. En efecto, para que $\{\pm\mathbb{I}\} \subset ker(\Pi)$ se satisfaga se debe probar que todo elemento de $\{\pm\mathbb{I}\}$ también es elemento de $ker(\Pi)$:

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbb{I}) &= \Pi(S_{W,m}S_{W^*,m^*}) = \Pi(S_{W,m})\Pi(S_{W^*,m^*}) = \mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W^*} = \mathbb{I} \\
\Pi(-\mathbb{I}) &= \Pi(-S_{W,m}S_{W^*,m^*}) = \Pi(S_{W,m+2}S_{W^*,m^*}) \\
&= \Pi(S_{W,m+2})\Pi(S_{W^*,m}) = \mathbf{s}_W\mathbf{s}_{W^*} = \mathbb{I}
\end{aligned}$$

Ahora bien, para demostrar que $ker(\Pi) \subset \{\pm\mathbb{I}\}$, se procederá por método de inducción en el índice correspondiente a la factorización $S = S_{W_1,m_1}S_{W_2,m_2}\cdots S_{W_k,m_k}$. Considérese S tal que $\Pi(S) = \mathbb{I}$, es decir, el kernel de Π. En primera instancia, debido a que la identidad no es un elemento de *Sp*$_0$*(n)* sino de *Sp(n)*, y el producto de al menos dos matrices simplécticas libres es una matriz simpléctica, entonces $k \geq 2$. Ahora bien, para $k = 2$ supóngase que:

$$\Pi(S_{W_1,m_1}S_{W_2,m_2}) = \mathbb{I} \tag{C.36}$$

entonces $S_{W_1,m_1}S_{W_2,m_2} = \mathbb{I}$ para $m_2 = m^*$, y $S_{W_1,m_1}S_{W_2,m_2} = -\mathbb{I}$ para para $m_2 = m^* + 2$. Lo cual prueba que $ker(\Pi) \subset \{\pm\mathbb{I}\}$ para k=2.

Ahora, supóngase que para k, $ker(\Pi) \subset \{\pm\mathbb{I}\}$ es válido. Entonces se debe demostrar que para $k+1$, $ker(\Pi) \subset \{\pm\mathbb{I}\}$ es válido. Para ello, como bien se demostró arriba, Π define un homomorfismo, por lo que se tiene que para $S' = S_{W_1,m_1}S_{W_2,m_2}\cdots S_{W_{k+1},m_{k+1}}$ y $\Pi(S') = \mathbb{I}$:

$$\Pi(S') = \Pi(S)\Pi(S_{W_{k+1},m_{k+1}}) = \mathbf{s}\mathbf{s}_{W'_{k+1}} = \mathbb{I} \tag{C.37}$$

Pero por la premisa de la inducción para k, entonces se tiene que:

$$S = S_{W^*_{k+1},m^*_{k+1}} \;\text{ ó }\; S = -S_{W^*_{k+1},m^*_{k+1}} \tag{C.38}$$

Esto significa que se tiene uno de estos casos:

$$\begin{aligned}
S' = S_{W^*_{k+1},m^*_{k+1}}S_{W_{k+1},m_{k+1}} &= \mathbb{I} \\
S' = S_{W^*_{k+1},m^*_{k+1}}S_{W_{k+1},m_{k+1}} &= -\mathbb{I}
\end{aligned}$$

lo que garantiza lo que se quería probar. □

Teorema. Sea $\mathbf{s}_W \in Sp_0(n)$ y ρ la representación de Schrödinger para el grupo de Heisenberg isotrópico. Las transformadas de Fourier cuadráticas $S_{W,m} \in Mp_0(n)$ satisfacen la ecuación:

$$\rho(\mathbf{s}_W(\mathbf{z}'), t) = S_{W,m}\rho(\mathbf{z}', t)S_{W,m}^{-1} \tag{C.39}$$

Demostración. Se pide probar lo anterior, que es equivalente a:

$$\rho(\mathbf{z}', t)S_{W,m} = S_{W,m}\rho(\mathbf{s}_W^{-1}\mathbf{z}', t).$$

Para ello, sea $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ y considérese la función:

$$g(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{z}', t)S_{W,m}\psi(\mathbf{r}) \tag{C.40}$$

Por definición de $S_{W,m}$ y ρ se tiene:

$$g(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{n/2} \Delta(W)e^{-\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}')+t} \int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}} e^{i/\hbar[W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\mathbf{r}_0)+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}]}\Psi(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{C.41}$$

Se puede demostrar que la función $W'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}$ es una función generadora del simplectomorfismo libre $T(\mathbf{z}')\mathbf{s}_W$. Para ello, basta con considerar las siguientes transformaciones $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = \mathbf{s}_W(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ y $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2) = \rho(\mathbf{z}')(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2 - \mathbf{p}_1 d\mathbf{r}_1 &= (\mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2 - \mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0) + (\mathbf{p}_0 d\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_1 d\mathbf{r}_1)\\
&= \mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2 - (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}')d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') + dW(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1)\\
&= d(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}_2 + W(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}', \mathbf{r}_1))\\
&= dW'(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)
\end{aligned} \tag{C.42}$$

Por lo tanto se tiene:

$$\rho(\mathbf{z}', t)S_{W,m} = S_{W',m}e^{-\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}')+t} \tag{C.43}$$

Ahora bien, considérese la función:

$$h(\mathbf{r}) = S_{W,m}\rho(S_{W,m}^{-1}\mathbf{z}', t)\psi(\mathbf{r})(\mathbf{r}'_0, \mathbf{p}'_0) = S_{W,m}^{-1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \tag{C.44}$$

entonces se tiene:

$$h(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{n/2} \Delta(W) \int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}} e^{i/\hbar[W(\mathbf{r},\mathbf{r}')]}e^{-\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}'_0)}e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}_0)+t}\Psi(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{C.45}$$

y con un cambio de variable $\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0$, se obtiene:

$$h(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{n/2} \Delta(W) \int_{\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}}} e^{i/\hbar[W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0+\mathbf{r}'_0)]}e^{\frac{i}{2\hbar}(\mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}'_0)}e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}_0)+t}\Psi(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{C.46}$$

Sólo faltaría demostrar que $g = h$. Para ello se debe probar que:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0) + \frac{1}{2}\mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}'_0 + \mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}_0 = W'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - \frac{1}{2}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}' \tag{C.47}$$

y considerando que $W'(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = W(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)+\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}$, y el cambio de variable $\mathbf{r} \to \mathbf{r}+\mathbf{r}'$, entonces se tiene que demostrar lo siguiente:

$$W(\mathbf{r}+\mathbf{r}', \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_0) + \frac{1}{2}\mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}'_0 + \mathbf{p}'_0\cdot\mathbf{r}_0 = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \frac{1}{2}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}' + \mathbf{p}'\cdot\mathbf{r} \tag{C.48}$$

Este resultado se sigue del hecho de que existe una función generadora $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ para un simplectomorfismo libre $\rho(\mathbf{z}',t)\mathbf{s}_W$, tal que[181]:

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{z},\mathbf{z}_0) = W(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\mathbf{r}_0) + \mathbf{p}'\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}' \tag{C.49}$$

entonces se puede probar que $\Phi(\mathbf{r}+\mathbf{r}',\mathbf{r}_0) = \Phi(\mathbf{r}+2\mathbf{r}',\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_0')$. □

C.2. El Origen Metapléctico de la Ecuación de Schrödinger

Teorema. Considérese un hamiltoniano del tipo Maxwelliano dependiente del tiempo:

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2m_j}(\mathbf{p}_j - A_j(\mathbf{r},\mathbf{t}))^{\mathbf{2}} + \mathbf{U}(\mathbf{r},\mathbf{t})) \tag{C.50}$$

Para cada $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $f_{t,t'}$ es un simplectomorfismo libre cerca de $\mathbf{z}_0$ para $0 < |t-t'| < \epsilon$.

Dem. Sea $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0)$. Considérese la expansión a segundo orden del difeomorfismo:

$$z = f_{t,t_0}(z_0) \tag{C.51}$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r},\mathbf{p}) &= (\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + (t-t_0)\frac{d(\mathbf{r},\mathbf{p})}{dt}(\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + \Theta((t-t_0)^2) \\
&= (\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + (t-t_0)\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt},\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)(\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + \Theta((t-t_0)^2) \\
&= (\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + (t-t_0)\left(\nabla_{\mathbf{p}}H, -\nabla_{\mathbf{r}}H\right)(\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + \Theta((t-t_0)^2) \\
&= (\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + (t-t_0)\left(m^{-1}(\mathbf{p}-A), m^{-1}(\mathbf{p}-A)\nabla_{\mathbf{r}}A - \nabla_{\mathbf{r}}U\right)(\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0) + \Theta((t-t_0)^2)
\end{aligned}$$

Y por ende:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{p}_0} &= (t-t_0)m^{-1} + \Theta_{2n}((t-t_0)^2) \\
&= (t-t_0)m^{-1}(\mathbb{I} + \Theta_{2n}(t-t_0))
\end{aligned}$$

donde $\Theta_{2n}((t-t_0)^k), (k = 1,2)$ es una matriz de $2n \times 2n$ cuyas entradas son funciones de $(t-t_0)$. Ahora bien, cuando $(t-t_0) \to 0$ pero $(t-t_0) \neq 0$, entonces:

$$det\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{p}_0}\right) \sim (t-t_0)m^{-1} \neq 0$$

Lo cual significa que f_{t,t_0} es libre. □

Teorema (Determinante de Vleck y simplectomorfismos libres)**.** Existe $\epsilon > 0$ tal que la densidad de trayectorias esta definida para $0 < |t-t_0| < \epsilon$. En efecto, $\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)$ está definida cuando el simplectomorfismo f_{t,t_0} definido mediante $(\mathbf{r},\mathbf{p}) = f_{t,t_0}(\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0)$ es libre. Si este es el caso entonces el *Determinante de Vleck* (ρ) está dado mediante la fórmula:

$$\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0) = det\left(\frac{\partial p_0}{\partial\mathbf{r}}\right) \tag{C.52}$$

[181] Este resultado se sigue de (C.42) y aplicando la fórmula de Euler para funciones homogéneas. Ver demostración en [De Gosson, 2010, p.34].

Demostración. La existencia de ρ se sigue del hecho de que existe $\epsilon > 0$ tal que f_{t,t_0} es libre, aunado a que $0 < |t - t_0| < \epsilon$ (por el teorema de arriba C.2). Entonces, dado que f_{t,t_0} es libre:

$$det\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}_0}\right) \neq 0 \tag{C.53}$$

Y debido a que $\mathbf{p}_0 = -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_0} W$ entonces se obtiene:

$$det\left(\frac{\partial \mathbf{p}_0}{\partial \mathbf{r}}\right) = Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(-W) \tag{C.54}$$

□

Teorema. Sea f_{t,t_0} un *Flujo hamiltoniano* dependiente del tiempo. Sea t_0 fijo tal que para $\epsilon > 0$, f_{t,t_0} es un simplectomorfismo libre definido para cualquier tiempo corto $0 < |t - t_0| < \epsilon$. Sea W la función generadora en t, determinada por el Hamiltoniano H y ρ su *Determinante de Vleck* asociada. Considérese la siguiente función (llamada el propagador de la ecuación de Schrödinger para tiempos cortos):

$$G^{sh} = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)} \sqrt{\rho} e^{(i/\hbar)W} \tag{C.55}$$

entonces el propagador G^{sh} es una *Función de Green de la ecuación de Schrödinger* para cualquier tiempo si y solo sí H es un polinomio de segundo orden en la posición y el momento.

Demostración. Esta demostración es extensa y consiste en tres proposiciones. Se procederá a demostrar cada una de ellas a continuación:

(1) Sea $\epsilon > 0$ tal que la función generadora W determinada por el Hamiltoniano H existe para todo tiempo corto t, es decir, $0 < |t - t_0| < \epsilon$. Entonces el propagador G^{sh} y la función $(\mathbf{r}, t) \to G^{sh}$ satisfacen:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} G^{sh}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ i\hbar \frac{\partial G^{sh}}{\partial t} &= (\hat{H} - Q) G^{sh} \end{aligned}$$

donde $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{r}} \sqrt{|\rho|}}{\sqrt{|\rho|}}$.

Para demostrar esta proposición considérese el caso más simple ($n = 1$). Para el caso $n > 1$, el procedimiento es análogo. Tomando en cuenta que $t - t_0 \to 0$, se puede demostrar que[182]:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = m \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2(t - t_0)} - \bar{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + O(t - t_0)$$

donde $\bar{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t_0)$ es el promedio de A en $[\mathbf{r}_0, \mathbf{r}]$ al tiempo t_0:

$$\bar{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t_0) = \int_0^1 A(s\mathbf{r}_0 + (1 - s)\mathbf{r}, t_0) ds$$

Por definición del *Determinante de Vleck* se tiene:

$$\sqrt{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t_0) = \left(\frac{m}{t - t_0}\right)^{1/2} + O((t - t_0)^{1/2})$$

[182] Véase la demostración en [De Gosson, 2001, p.152].

para $t > t_0$. Entonces se tiene el propagador para tiempos cortos:

$$G^{sh}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)=\left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)}\left(\frac{m}{t-t_0}\right)^{1/2}e^{\left[\frac{i}{\hbar}\left(m\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2(t-t_0)}-\bar{A}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right)\right]}+O((t-t_0)^{1/2})$$

para $t > t_0$. Ahora bien, se sabe que:

$$\lim_{t\to t_0^-}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)}\left(\frac{m}{t-t_0}\right)^{1/2}e^{\left[\frac{im}{\hbar}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2(t-t_0)}\right]}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

donde δ es la función delta de Dirac. Dado que los términos de segundo orden se eliminan, se tiene:

$$\lim_{t\to t_0^-}G^{sh}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)=e^{\left[\frac{i}{\hbar}\bar{A}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right]}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

y como $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$, entonces a primer orden en la exponencial se obtiene:

$$\lim_{t\to t_0^-}G^{sh}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$

Para el límite superior el procedimiento es análogo. Lo que cambia es que se debe definir G^{sh} para el caso $t < t_0$:

$$G^{sh}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)=\left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)}i\left(\frac{m}{t-t_0}\right)^{1/2}e^{\left[\frac{i}{\hbar}\left(m\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2(t-t_0)}-\bar{A}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right)\right]}+O(i(t-t_0)^{1/2})$$

Por lo tanto, se obtiene el resultado deseado.

(2) Para cada $\psi\in L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$ la función:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\int G^{sh}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)\psi_0(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{C.56}$$

satisface el problema integro-diferencial de Cauchy:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (\hat{H}-\hat{Q})\psi \\ \psi(\mathbf{r},t_0) &= \psi_0(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

donde $\hat{Q}$ es un operador $L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})\to L^2(\mathbb{R}^n_{\mathbf{r}})$ definido por:

$$\hat{Q}\psi(\mathbf{r},t)=\int Q(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)G^{sh}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)\psi_0(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{C.57}$$

Esta proposición se prueba diferenciando (C.56) con respecto a t, por lo que se obtiene:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}-\hat{H}\psi=\int\left(i\hbar\frac{\partial G^{sh}}{\partial t}-\hat{H}G^{sh}\right)\psi_0d^n\mathbf{r}_0=\frac{\hbar^2}{2m}\int\frac{\nabla^2_{\mathbf{r}}\sqrt{|\rho|}}{\sqrt{|\rho|}}G^{sh}\psi_0d^n\mathbf{r}_0$$

debido a la proposición anterior.

(3) Cuando H es un Hamiltoniano cuadrático de la forma:

$$H=\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-A\mathbf{r})^2+\frac{1}{2}K\mathbf{r}^2+a\cdot\mathbf{r} \tag{C.58}$$

entonces el propagador G^{sh} es la *Función de Green de la Ecuación de Schrödinger*:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_0}G^{sh} &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \\ i\hbar\frac{\partial G^{sh}}{\partial t} &= \hat{H}G^{sh} \end{aligned}$$

La función generadora W es en sí misma un polinomio cuadrático en las variables $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ (con coeficientes dependiendo de t,t_0), por lo que el *Determinante de Vleck* dependerá únicamente de t y t_0. Esto significa que:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2_{\mathbf{r}}\sqrt{|\rho|}}{\sqrt{|\rho|}}e^{\frac{i}{\hbar}W} = 0$$

Por lo que si se asume la primera proposición de arriba se obtiene el resultado deseado.

□

Teorema. La solución a la ecuación de Schrödinger:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{r}, t_0) &= \Psi_0(\mathbf{r}) \\ i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \hat{H}\Psi\end{aligned}$$

está dada por la fórmula:

$$S^{\hbar}_{t,t_0}\Psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{(n/2)} i^m(t, t_0)\sqrt{|detL(t)|}\int e^{(i/\hbar)W(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;t,t_0)}\Psi(\mathbf{r}_0)d^n\mathbf{r}_0 \tag{C.59}$$

donde el índice Maslov $m(t, t_0)$ es:

$$m(t, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t - t_0 < \epsilon \\ 1 & \text{si } -\epsilon < t - t_0 < 0 \end{cases} \tag{C.60}$$

si W se define en $0 < |t - t_0| < \epsilon$. O bien, para cualquier intervalo de tiempo no necesariamente corto (t, t_0) es:

$$m(t_2, t_0) = m(t_2, t_1) + m(t_1, t_0) - n + Inert[Hess_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}(-(W(0, \mathbf{r}_0; t_2, t_1) + W(\mathbf{r}_0, 0; t_1, t_0)))]$$

si W se define en $0 < |t_2 - t_1| < \epsilon$ y $0 < |t_1 - t_0| < \epsilon$.

D. Apéndice D

D.1. Estructuras Parciales

Definición 59 (*Estructura Parcial*)**.** Cuando se investiga un cierto dominio de conocimiento Δ (por ejemplo, los fenómenos de la *MC*, uno trata de construir un sistema conceptual donde se despliega la información parcial que se obtiene acerca de Δ. Este dominio se representa por un conjunto D de objetos (una N-tupla de elementos), que incluyen tanto objetos observables, e inobservables, tales como sillas, mesas, partículas clásicas, etc. D se analiza en en términos de las relaciones que se satisfacen entre sus elementos. Sin embargo, regularmente pasa que si se tiene una relación R definida en D, se se sabe con exactitud si R relaciona todos los objetos de D . Esto refleja la parcialidad del conocimiento que se obtiene acerca de D, y se puede representar formalmente mediante el concepto de *Relación Parcial* que se caracteriza de la siguiente manera:
Sea D un conjunto no vacío. Una relación R para N elementos de D es una 3-tupla (R_1, R_2, R_3), donde R_1, R_2, y R_3 son conjuntos mutuamente disjuntos, con $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = D^n$, y tal que R_1 corresponde al conjunto de N-tuplas que se sabe que pertenece a R, R_2 es el conjunto de N-tuplas que se sabe que no pertenece a R, y R_3 es el conjunto de N-tuplas que no se sabe si (o no) pertenece a R. Nótese que si R_3 es un conjunto vacío, R resulta ser la relación de N elementos equivalente a R_1. Por lo tanto, una *Estructura Parcial A* es un par ordenado $(D, R_i)_{i\in\mathbb{I}}$, donde D es un conjunto no vacío, y $(R_i)_{i\in\mathbb{I}}$ es una familia de relaciones parciales definidas en D.

Definición 60 (*Estructura Normal*)**.** Sea S una estructura parcial. Se dice que una estructura B es una estructura S-normal (no parcial) si: i) su dominio es D; ii) las relaciones en B extienden las relaciones parciales S; y iii) si c es una constante en el lenguaje considerado, entonces tanto B como S se interpretan mediante el mismo elemento. En particular, B es relativo a S, y por tanto sólo se define en término de este último. No necesariamente existe una estructura S-normal para toda estructura S.

Definición 61 (*Verdad Parcial*)**.** Se dice que un enunciado a es parcialmente verdadero en una estructura parcial S de acuerdo con B si: i) S es una estructura parcial; ii) B es una estructura S-normal; y iii) a es verdadera en B, en conformidad con la definición de verdad Tarskiana.

Definición 62 (*Isomorfismo Parcial*)**.** Sean $S = (D, R_i)_{i\in\mathbb{I}}$ y $S' = (D', R'_i)_{i\in\mathbb{I}}$ estructuras parciales. Una función parcial $f : D \to D'$ es entonces un isomorfismo parcial entre S y S' si: i) f es biyectiva; y ii) para cada x y y en D, $R_1xy \leftrightarrow R'_1 f(x)f(y)$, y $R_2xy \leftrightarrow R'_2 f(x)f(y)$. Entonces cuando R_3 y R'_3 son conjuntos vacíos (que es, cuando se tienen estructuras totales), se obtiene la noción estándar de isomorfismo.

Definición 63 (*Homomorfismo Parcial*)**.** Sean $S = (D, R_i)_{i\in\mathbb{I}}$ y $S' = (D', R'_i)_{i\in\mathbb{I}}$ estructuras parciales. Una función parcial $f : D \to D'$ es entonces un homomorfismo parcial entre S y S' si para cada x y y en D, $R_1xy \to R'_1 f(x)f(y)$ y $R_2xy \to R'_2 f(x)f(y)$. Entonces cuando R_3 y R'_3 son conjuntos vacíos (que es, cuando se tienen estructuras totales), se obtiene la noción estándar de homomorfismo.

Definición 64 (*Estructura Parcialmente Inmersa*)**.** Se dice que una estructura parcial A está parcialmente inmersa en una estructura B si existe una subestructura parcial C de B, tal que C es parcialmente isomorfa a A. Una estructura parcial $N = (D', R'_i)_{i \in \mathbb{I}}$ es una subestructura parcial de una estructura parcial $N = (D, R_i)_{i \in \mathbb{I}}$ si $D' \subseteq D$ y $R'^N_i = R^N_i \cap D'^N$ (Donde R_i y R'_i son relaciones parciales).

Referencias

Acuña, P. (2013). On the Empirical Equivalence Between Special Relativity and Lorentz's Ether Theory. [Preprint]

Addison, J. (1965). Some Notes on the Theory of Models. En J. Addison, L. Henkin, & A. Tarski (Eds.), *The Theory of Models* (pp.438–441), North-Holland: Elsevier.

Adler, S. (2003). Why Decoherence has not Solved the Measurement Problem: A Response to P. W. Anderson, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 34B,135-42.

Albert.D, *Elementary Quantum Metaphysics*. En J. Cushing, A. Fine, & S. Goldstein (Eds.), *Bohmian Mechanics and Quantum theory: An Appraisal* (pp. 277-84). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

—. (1996). *After Physics*, Massachusetts: Harvard University Press.

Allori, V. (2012). Primitive Ontology and the Structure of Fundamental Physical Theories. En D. Albert, & A. Ney (Eds.), *The Wave Function: Essays in the Metaphysics of Quantum Mechanics* (pp.58-75), Oxford: Oxford University Press.

Aharonov, Y., & Bohm, D. 1959. Significance of Elecromagnetic Potentials in the Quantum Theory, *Physical Review*, 115, 485-91.

Armstrong, D. (1985). *What is a Law of Nature?*, Cambridge: Cambridge University Press.

Arnold, V. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Second Edition)*, Springer Verlag.

Azcárraga, J., & Izquierdo, J. (1995). *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology Groups and Some Applications in Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bacciagaluppi, G. (2003). Derivation of the Symmetry Postulates for Identical Particles from Pilot-Wave Theories, *arXiv:quant-ph/0302099*.

Bain, J. (2000). Against particle/field duality: Asymptotic Particle States and Interpolating Fields in Interacting QFT (or: Who's afraid of Haag's theorem?), *Erkenntnis*, 53(3), 375-406.

Baker, A. (2016). Simplicity, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/simplicity/¿.

Ballentine, L. (1970). The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics, *Reviews of Modern Physics*, 42, 358-81.

Bargmann,V. (1954). On Unitary Ray Representations of Continuous Groups, *Annals of Mathematics*, 59(1), 1-46.

Belot, G. (2006). The Representation of Time and Change in Mechanics. En J. Butterfield, & J. Earman (Eds.), *Philosophy of physics* (pp.133-228). Dordrecht: Handbook of the Philosophy of Physics.

Belousek, D. (2000). Statistics, Symmetry, and (In)Distinguishability in Bohmian Mechanics, *Foundations of Physics*, 30, 153-64.

Bell, J. (1971). Introduction to the Hidden-Variable Question. En J. Bell, &A. Aspect (Eds.),*Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (pp.29-39). Cambridge: Cambridge University Press.

—. (1971). Against Measurement. En J. Bell, &A. Aspect (Eds.),*Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (pp.213-231). Cambridge: Cambridge University Press.

Bohm, D. (1952). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of 'Hidden' Variables. I, *Physical Review*, 85, 166-79.

—. (1952). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of 'Hidden' Variables. II, *Physical Review*, 85, 180-93.

—. (1953). Proof that Probability Density Approaches $|\Psi|^2$ in Causal Interpretation of the Causal Theory, *Physical Review*, 89(2), 458-66.

—. (1957). *Causality and Chance in Modern Physics*, Londres: Routledge and Kegan Paul.

—. (1969). Further Remarks on Order. En C. Waddington (Ed.), *Towards a Theoretical Biology* (pp.42-60). Chicago: Aldine.

Bohm, D., & Hiley, B. (1993). *The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory*, Londres: Routledge.

Boothby, W. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Londres: Academic Press.

Borges, J. (1944). *Ficciones*, España: Editorial Alianza, 1997.

Bott, R., &Tu, L. (1986). *Differential Forms in Algebraic Topology*, Nueva York: Springer Verlag.

Brading, K., & Landry, E. (2006). Scientific Structuralism: Presentation and Representation, *Philosophy of Science*, 73(5), 571-81.

Braithwaite, R. (1929). Professor Eddington's Gifford Lectures, *Mind*, 38(152), 409-35.

de Broglie, L. (1927). *An Introduction to the Study of Wave Mechanics*, Nueva York: E.P. Button and Company, Inc.

Brown, H. (2005). *Physical Relativity Space-time Structure from a Dynamical Perspective*, Oxford: Oxford University Press.

Brown, H., Dewney, C., & Horton, G. (1995). Bohm Particles and Their Detection in the Light of Neutron Interferometry, *Foundations of Physics*, 25, 329-47.

Brown, H., Elby, A., & Weingard, R. (1996). Cause and Effect in the Pilot-Wave Interpretation of Quantum Mechanics. En J. Cushing, A. Fine, & S. Goldstein (Eds.), *Bohmian Mechanics and Quantum theory: An Appraisal* (pp. 309-19). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, H., Sjöqvist, E., & Bacciagaluppi, G. (1999). Remarks on Identical Particles in the de Broglie-Bohm Theory, *Physics Letters A*, 251, 229-35.

Bueno, O. (1997). Empirical Adequacy: A Partial Structures Approach, *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 28(4), 585-610.

—. (2000a). Empiricism, Scientific Change and Mathematical Change, *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 31(2), 269-96.

—. (2000b). Empiricism, mathematical truth and mathematical knowledge, *Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*, 71, 219-42.

—. (2008). Structural realism, scientific change, and partial structures. *Studia Logica*, 89(2), 213-35.

Bueno, O., French, S., & Ladyman, J. (2002). On representing the relationship between the mathematical and the empirical, *Philosophy of Science*, 69(3), 452-73.

Cameron, R. (2008). Truthmakers and Ontological Commitment: Or How to Deal with Complex Objects and Mathematical Ontology without Getting into Trouble, *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*,140(1),1-18.

Chakravartty, A. (1988). Semirealism, *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 29(3), 391-408.

—. (1988). *Scientific realism*, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/scientific-realism/¿.

Cohen, B. (1980). *The Newtonian Revolution*, Cambridge: Cambridge University Press.

Curd, M., & Cover, J. (1998). *Philosophy of Science: The Central Issues*, Nueva York: Norton & Company.

Curiel, E. (2014). Classical mechanics is Lagrangian; it is not Hamiltonian. *British Journal of Philosophy of Science*, 65(2), 269-321.

Da Costa, N., & French, S. (1990). The model-theoretic approach in the philosophy of science. *Philosophy of Science*, 57(2), 248-65.

—. (2003). *Science and partial truth: a unitary approach to models and scientific reasoning*. Oxford: Oxford University Press.

Dalla Chiara, M., & Toraldo Di Francia, G. (1993). Individuals, Kinds and Names in Physics. En G. Corsi, M. Dalla Chiara, & G. Ghirardi (Eds.), *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, and Physics* (pp.261-283). Boston: Boston Studies in the Philosophy of Science.

Dickson, M. (1998). *Quantum Chance and Non-Locality*, Cambridge: Cambridge University Press.

Deotto, E., & Ghirardi, G. (1998). Bohmian Mechanics Revisited, *Foundations of Physics*, 28(1),1-30.

Dieks, D. (2011), Foundations of Quantum Mechanics, *Lectures Notes*, Utrecht: Utrecht University.

Do Carmo, M. (2013). *Riemannian geometry*, Boston: Birkh auser Boston.

Dürr, D., Goldstein, S., & Zanghi, N. (1992). Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty, *Journal of Statistical Physics*, 67, 843-907.

—. (1995). Bohmian Mechanics and the Meaning of the Wave Function, *Boston studies in the philosophy of science*, 193, 25-38.

—. (1995). Quantum Physics without Quantum Philosophy, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, 26, 137-149.

—. (1996). Naive realism about operators, *Springer*, 45(2-3), 379-397.

—. (2004). Quantum Equilibrium and the Role of Operators as Observables in Quantum Theory, *Journal of Statistical Physics*, 116, 959-1055.

Eddington, A. (1939). *The Philosophy of Physical Science*, New York: Macmillan.

Esfeld, M., & Lam, V. (2008). *Moderate Structural Realism about Space-time*, *Synthese*, 160, 27-46.

Everett, H. (1957). Relative State Formulation of Quantum Mechanics, *Reviews of Modern Physics*, 29, 454-62.

Feynman, R. (1985). *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Nueva Jersey: Princeton University Press.

Fields, C. (2014). A Physics-Based Metaphysics is a Metaphysics-Based Metaphysics, *Acta Analytica*, 29(2), 131-48.

Folland, B. (1989). *Harmonic Analysis in Phase Space*, Nueva Jersey: Princeton University Press.

French, S. (1988). Wittering Away of Physical Objects. En E. Castellani (Ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics* (pp. 93-113). Nueva Jersey: Princeton University Press.

—. (1999). Models and Mathematics in Physics: The Role of Group Theory. En J. Butterfield & C. Pagonis (Eds.), *From Physics to Philosophy* (pp.187–207), Cambridge: Cambridge University Press.

—. (2000). The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics. *Synthese*, 125(1), 103-20.

—. (2011). Metaphysical Underdetermination: Why Worry?", *Synthese*,180, 205-21.

—. (2014). *The structure of the world. Metaphysics and Representation*, Oxford: Clarendon Press.

—. (2015). (Structural) realism and its representational vehicles. *Synthese*, doi: 10.1007/s11229-015-0879-x.

French, S., & Krause, D. (2006). *Identity in Physics: A Historical, Philosophical, and Formal Analysis.*, Oxford: Clarendon Press.

Frigg, R. (2006). Scientific Representation and the Semantic View of Theories. *Theoria*, 21(1), 49-65.

Frigg, R., & Votsis, I. (2011). Everything You Always Wanted to Know About Structural Realism But Were Afraid to Ask, *European Journal of Philosophy of Science*,1, 227-76.

Ghirardi, G. (2016). Collapse Theories, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2016 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/qm-collapse/¿.

Goldstein, S. (1996). Review essay: Bohmian Mechanics and the Quantum Revolution, *Synthese*. 107, 145-65.

—. (2017). Bohmian Mechanics, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/qm-bohm/¿.

Goldstein, S., Tumulka, T., & Zanghi, N. (2005). Are All Particles Real?, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 36, 103-12.

Goldstein, S., & Zanghi, N. (2013). Reality and the Role of the Wavefunction in Quantum Theory. En A. Ney & D. Albert (Eds.), *The Wave Function: Essays on the Metaphysics of Quantum Mechanics* (pp.263-278). Oxford: Oxford University Press.

de Gosson, M. (1990). Maslov Indices on the Metaplectic Group Mp(n), *Annales de l'institut Fourier*, 40(3), 537-55.

—. (1997). *Maslov Classes, Metaplectic Representation and Lagrangian Quantization*, Michigan: Akademie Verlag.

—. (2001). *The Principles of Newtonian and Quantum Mechanics: The Need for Planck's Constant h*, London: Imperial College Press.

—. (2010). *Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics*, Basel: Birkhauser.

De Gosson, M., & Hiley, B. (2011). Imprints of the Quantum World in Classical Mechanics, *Foundations of Physics*, 41(9), 1415-36.

Downing, L. (2013). George Berkeley, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/berkeley/¿.

Ellis. B, (1985). *What Science Aims to Do?*. En D. Papineau (Ed.), *The philosophy of Science* (pp.93-106), Oxford: Oxford University Press.

Gracia, J. (1988). *Individuality*, New york: State University of New York Press.

Greenberger, D. (2001). Inadequacy of the Usual Galilean Transformation in Quantum Mechanics, *Physical Review Letters*, 87(10), 1004051-54.

Hall, B. (2003). *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*, Nueva York: Springer.

Hardin, C., & Rosenberg, A. (1982). In Defense of Convergent Realism, *Philosophy of Science*, 49(4), 604-15.

Hawley, K. (2006). Science As a Guide to Metaphysics?, *Synthese*, 149(3), 451-70.

Hernandez, H. (2012). From Bargmann Superselection Rule to Newtonian Quantum Spacetime, *Foundations of Physics*, 42(10), 1350-64.

Hesse, M. (1980). *Revolutions and Reconstructions in the Philosophy of Science*, Brighton: Harvester Press.

Hiley, B. (2010). Process, Distinction, Groupoids and Clifford Algebras: An Alternative View of the Quantum Formalism, *Lecture Notes in Physics*, 813(1), 705-52.

Hodges, W. (2014). Tarski's Truth Definitions, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2014 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/tarski-truth/¿.

Holland, P. (1995). *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*, Cambridge:Cambridge University Press.

Hoookway, C. (2016). Pragmatism, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2016 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/sum2016/entries/pragmatism/¿.

Horgan, T., & Potrc, M. (2008). *Austere Realism*, Massachusetts: MIT Press.

Inönü, E., & Wigner, E. (1953). On the Contraction of Groups and Their Representations, *Proceedings of Natural Academy of Science*, 39(6), 510-24.

Jammer, M. (1974). *The Philosophy of Quantum Mechanics*, New York: Wiley.

Jauch, J. (1966). *Foundations of Quantum Mechanics*, Massachusetts: Addison-Wesley.

Jones, R. (1991). Realism About What?, *Philosophy of Science*, 58(2), 185-202.

Jordan, T., & Sudarshan, E. (1961). Lie Group Dynamical Formalism and the Relation Between Quantum Mechanics and Classical Mechanics, *Reviews of Modern Physics*, 33, 515-24.

Kitcher, P. (1989). Explanatory Unification and the Causal Structure of the World. En P. Kitcher, & W. Salmon (Eds.), *Scientific Explanation* (pp.410–505). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Koyré, A. (1968). *The Significance of the Newtonian Synthesis*, Chicago: University of Chicago Press.

Ladyman, J. (1998). What is Structural Realism?, *Studies in History and Philosophy of Science*, 29(3), 409-24.

—. (2002). *Understanding Philosophy of Science*, London: Routledge.

—. (2007). Scientific Structuralism: On the Identity and Diversity of Objects in a Structure", *The Aristotelian Society*, 81:23-43.

Ladyman, J., Ross, D., Spurret, D., & Collier, J. (2007). *Every Thing Must Go: Metaphysics Naturalized*, Oxford: Oxford University Press.

Ladyman, J., & Bigaj, T. (2010). The Principle of the Identity of Indiscernibles and Quantum Mechanics, *Philosophy of Science*, 77, 117-36.

Laidlaw, M., & DeWitt, C. (1971). Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles, *Physical Review D*, 3, 1375-78.

Langton, R., & Lewis, D. (1998). Redefining 'Intrinsic', *Philosophy and Phenomenological Research*, 58(2), 333-45.

—. (2001). Marshall and Parsons on 'Intrinsic', *Philosophy and Phenomenological Research*, 63, 353-5.

Pierre Simon Laplace, *Oeuvres de Laplace, Vol. VII: Théorie des Probabilités*, Paris: Imprimerie Royale, 1847.

Laudan, L. (1981). A Confutation of Convergent Realism, *Philosophy of Science*, 48, 19-49.

Leifer, M. (2014). Is the Quantum State Real? A Review of Ψ-Ontology Theorems, *Quanta*, 3(1), 67-155.

Leinaas, J., & Myrheim, J. (1977). On the Theory of Identical Particles, *Il Nuovo Cimento B*, 37: 1-23.

Leray, J. (1981). *Lagrangian analysis and quantum mechanics*, Massachusetts: MIT Press.

Lewis, D. (1983). Extrinsic Properties, *Philosophical Studies*, 44,197-200.

Levy-Leblond, J. (1967). Nonrelativistic particles and wave equations, *Communications in Mathematical Physics*, 6, 286-311.

Maudlin, T. (1995). Three Measurement Problems, *Topoi*,14, 7-15.

—. (1988). Part and Whole in Quantum Mechanics. En E. Castellani (Ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics* (pp.46-60). Nueva Jersey: Princeton University Press.

—. (2012). *Philosophy of Physics. Space and Time*, Nueva Jersey: Princeton University Press.

Mikenberg, I., da Costa, N., and Chuaqui, R. (1986), Pragmatic Truth and Approximation to Truth, *Journal of Symbolic Logic*, 51, 201–21.

Miller, A. (2016). Realism, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/realism/¿.

Monton, B. (2011). Prolegomena to Any Future Physics-Based Metaphysics. En J. Kvanvig (Ed.), *Oxford Studies in Philosophy of Religion III* (pp.142-165). Oxford: Oxford University Press.

Muller, F. (1997). The Equivalence Myth of Quantum Mechanics-Part I, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 28(1), 35-61.

—. (2010). The Characterization of Structure: Definition Versus Axiomatization. In F. Stadler (Ed.), *The present Situation in the Philosophy of Science* (pp. 399-416). Berlin: Springer.

—. (2011). Withering Away, Weakly, *Synthese*, 180, 223-33.

Muller, F., & David, S. (2008). Discerning Fermions, *British Journal of Philosophy of Science*, 59, 499-548.

Muller, Fred, & Seevinck, M. (2009). Discerning Elementary Particles, *Philosophy of Science*, 76, 179-200.

Munkres, J. (2000). *Topology*, Upper Saddle River: Prentice Hall.

Musgrave, A. (1992). Discussion: Realism About What?, *Philosophy of Science*, 59(4), 691-7.

von Neumann, J. (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Nueva Jersey: Princeton University Press.

Newman, M. (1928). Mr. Russell's Causal Theory of Perception, *Mind*, 37, 137-48.

North, J. (2009). The "Structure" of Physics: a Case Study, *Journal of Philosophy*, 106(2), 57-88.

Peirce, C. (1877). The Fixation of Belief, *Popular Science Monthly*, 12, 1-15.

—. How to Make Our Ideas Clear, *Popular Science Monthly*, 12, 286-302.

Atkin, A. (2013). Peirce's Theory of Signs, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (Ed.), URL=¡https://plato.standford.edu/archives/sum2013/entries/peirce-semiotics/¿.

Peirce, C. (1871). Fraser's The Works of George Berkeley, *North American Review*, 113, 449-72.

Petersen, A. (1963). The Philosophy of Niels Bohr, *Bulletin of the Atomic Scientists*, 19(7), 8-14.

Pooley, O. (2006). Points, Particles and Structural Realism. En D. Rickles, S. French, & J. Saatsi (Eds.), *Structural foundations of quantum gravity* (pp. 83-120). Oxford: Oxford University Press.

Post, H. (1971). Correspondence, Invariance and Heuristics: In Praise of Conservative Induction. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 2(3), 213-55.

Psillos, S. (1999). *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*, London: Routledge.

Putnam, H. (1981). *Reason, Truth and History*, Cambridge: Cambridge University Press.

Pylkka, P., Hiley, B., & Pattiniemi, I. (2014). *Bohm's approach to Quantum Mechanics and Individuality.*, http://arxiv.org/abs/1405.4772, 2014.

Quine, W. (1960). *Word and Object*, Massachusetts: MIT Press.

Ramond, P. (2010). *Group Theory. A Physicist Survey*, Cambridge: Cambridge University Press.

Redhead, M. (1975). Symmetry in Intertheory Relations. *Synthese*, 32(1), 77-112.

Reichenbach, H. (1988). The Genidentity of Quantum Particles. En E. Castellani (Ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics* (pp.61-72). Nueva Jersey: Princeton University Press.

Roberts, B. (2011). Group Structural Realism. *British Journal of Philosophy of Science*, 62(1), 47-69.

Rosen, G. (2001). Abstract Objects, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/abstract-objects/¿.

Saatsi, J. (2005). Reconsidering the Fresnel–Maxwell Theory Shift: How the Realist Can Have Her Cake and EAT it Too. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 36(3), 509-38.

Sakurai, K., & Napolitano, K. (1994). *Modern Quantum Mechanics* (Second Edition), San Francisco: Addison-Wesley.

Salmon, W. (1989). *Four Decades of Scientific Explanation*, Minneapolis: University of Minnesota Press.

Saunders, S. (1993). To What Physics Corresponds. En S. French, & H. Kaminga (Eds.), *Correspondence, Invariance, and Heuristics; Essays in Honour of Heinz Post* (pp. 295-325). Dordrecht: Kluwer.

—. (2003). Physics and Leibniz's Principles. En K. Brading, & E. Castellani (Eds.), *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections* (pp.287-307). Cambridge: Cambridge University Press.

—. (2003). Structural Realism Again, *Synthese*, 136(1), 127-33.

—. (2006). Are Quantum Particles Objects?, *Analysis*, 66, 52-63.

Sher, G. (1999). What is Tarski's Theory of Truth?, *Topoi*,18,149-66.

Sklar, L. (1981). Time, Reality, and Relativity. En R. Healey (Ed.), *Reduction, time, and reality* (pp. 129-142). Cambridge: Cambridge University Press.

Stachel, J. (2005). Structural Realism and Contextual Individuality. En Yemima B. (Ed.), *Hilary Putnam* (pp.203-219). Cambridge: Cambridge University Press.

Stanford, K. (2016). Underdetermination of Scientific Theory, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2016 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/scientific-underdetermination/¿.

Solé, A. (2010). Realismo e Interpretación en Mecánica Bohmiana, Tesis Doctoral.

Souriau, J. (1983). Physics and Geometry, *Foundations of Physics*, 13(1), 133-51.

Summhammer, J., Badurek, G., & Rauch, H. (1982). Explicit Experimental Verification of Quantum Spin-state Superposition, *Physics Letters A*, 90(3), 110-2.

Suppe, F. (1989). *The Semantic Conception of Theories and Scientific Realism*, Illinois: University of Illinois Press.

Suppes, P. (1960). A Comparison of the Meaning and Uses of Models in Mathematics and the Empirical Sciences, *Synthese*, 12(2-3), 287-301.

Tarski, A. (1935), The Concept of Truth in Formalized Languages. En A. Tarski (Ed.), *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938* (pp.152–278). Oxford: Clarendon Press, 1956.

Tegmark, M. (2007). The Mathematical Universe. *Foundations of Physics*, 38(2), 101-50.

Teller, P. (1983). Quantum Physics, the Identity of Indiscernibles, and Some Unanswered Questions, *Philosophy of Science*, 50, 309-19.

—. (1988). Quantum Mechanics and Haecceities. En E. Castellani (Ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics* (pp.114-141). Nueva Jersey: Princeton University Press.

Thebault, K. (2016). Quantization as a Guide to Ontic Structure, *British Journal of Philosophy of Science*, 67(1), 89-114.

Toraldo di Francia, G. (1988). A World of Individual Objects. En E. Castellani (Ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics* (pp.21-29). Nueva Jersey: Princeton University Press.

Tumulka, R. (2015). The Assumptions of Bell's Proof. En M. Bell, & S. Gao (Eds.), *Quantum Nonlocality and Reality, 50 Years of Bell's Theorem* (pp.79-90). Cambridge: Cambridge University Press.

Valentini, A. (1991). Signal-locality, Uncertainty, and the Sub-quantum H-theorem I, *Physical Letters A*, 156(1-2), 5-11.

—. (1992). *On the Pilot-Wave Theory of Classical, Quantum and Subquantum Physics*, PhD dissertation, Trieste: SISSA.

—. (1997). On Galilean and Lorentz Invariance in Pilot-wave Dynamics, *Physical Letters A*, 228, 215-22.

van Fraassen, B. (1980). *The scientific Image*, Oxford: Oxford University Press.

—. (1989). *Laws and Symmetry*, Oxford: Oxford University Press.

—. (1991). *Quantum Mechanics: an Empiricist View*, Oxford: Clarendon Press Oxford.

—. (1998). *The Problem of Indistinguishable Particles*. En E. Castellani (Ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics* (pp.73-92). Nueva Jersey: Princeton University Press.

—. (2006). Structure: its Shadow and Substance, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 57(2), 275-307.

Vickers, P. (2016). Understanding the Selective Realist Defence Against the PMI, *Synthese*, https://doi.org/10.1007/s11229-016-1082-4.

Wallace, D. (2006). In Defence of Naiveté: The Conceptual Status of Lagrangian Quantum Field Theory, *Synthese*, 151(1), 33-80.

Warner, F. (1971). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Berlin: Springer.

Wayne, A. (2011). Expanding the Scope of Explanatory Idealization, *Philosophy of Science*, 78(5), 830-41.

Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields I*. Cambridge: Cambridge University Press.

Woodward, J. (2017). Scientific Explanation, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (Ed.), URL = ¡https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/scientific-explanation/¿.

Worrall, J. (1989). Structural Realism: The Best of Both Worlds?. *Dialectica*, 43(1), 99-124.

Whitehead, A. (1929). *Process and Reality*, D. Griffin, & D. Sherburne (Eds.), New York: The Free Press, 1978.

—. (1933). *Adventures of Ideas*, New York: The Free Press.

—. (1938). *Modes of Thought*, New York: The Free Press.

Wulfman, C. (2011). *Dynamical Symmetries*, Singapore: World Scientific.

Zurek, W. (1991). Decoherence and the Transition from Quantum to Classical, *Physics Today*, 44, 36-44.