UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

OPERADORES DE TOEPLITZ CON SÍMBOLOS DISTRIBUCIONALES DEFINIDOS EN ESPACIOS DE BERGMAN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA:
BEATRIZ DOMÍNGUEZ DURÁN

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO MARCOS LÓPEZ GARCÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD CUERNAVACA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, ENERO DEL 2018.

SINODALES

Presidente	Dr. Salvador Pérez Esteva
Vocal	Dr. Francisco Marcos López García
Secretario	Dr. Carlos Villegas Blas
Suplente	Dr. Emilio Marmolejo Olea
Suplente	Dr. Carlos Alfonso Cabrera Ocañas

Operadores de Toeplitz con símbolos distribucionales definidos en espacios de Bergman

Beatriz Domínguez Durán

30 de noviembre de 2017

Agradecimientos

A mis padres y queridos hermanos Lety, Rosa, Gisela, Reyna, Fer y Christian.

Agradezco a mis sinodales así como a mi asesor de tesis Dr. Francisco Marcos López Gracía, Dr. Salvador Pérez Esteva, Dr. Carlos Villegas Blas, Dr. Emilio Marmolejo Olea y Dr. Carlos Alfonso Cabrera Ocañas por el tiempo y apoyo para la revisión del presente trabajo.

También agradezco al Dr. Ángel Cano Cordero y Dr. Joseé Antonio Seade Kuri por el apoyo recibido del proyecto PAPIIT $A100112$ y el proyecto $CB - 2011/164447$ respectivamente, sin los cuales el presente trabajo no hubiera sido posible.

Índice general

Introducción

Los operadores de Toeplitz son una clase de operadores concretos que han sido ampliamente estudiados. El estudio de su comportamiento en el contexto de los espacios de Hardy y los espacios de Bergman ha generado una gran cantidad de resultados en la teoría de operadores y en la teoría de funciones analíticas.

La teoría de operadores de Toeplitz sobre espacios de Hardy es ahora un tema clásico que aún genera resultados pero que no abordaremos en esta oportunidad. En este trabajo estudiamos los operadores de Toeplitz definidos en los p-espacios de Bergman de funciones analíticas en el disco unitario. De particular interés es determinar condiciones para que tales operadores de Toeplitz sean continuos o compactos.

Para $1 \leq p < \infty$ el p-espacio de Bergman analítico en el disco $\mathbb{D}$, denotado por $L_a^p(\mathbb{D})$, consiste de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ que son p-integrables. La proyección de Bergman P es la única proyección ortogonal del espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{D})$ sobre el espacio de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$, y ahora es conocido que se puede definir en cualquier p-espacio de Bergman de tal manera que P es también una proyección continua de $L^p(\mathbb{D})$ en $L_a^p(\mathbb{D})$ para $1 < p < \infty$.

Dada una función u que es integrable en $\mathbb{D}$, el correspondiente operador de Toeplitz con símbolo u está dado por

$$T_u f = P(uf),$$

donde f está en el espacio de funciones acotadas y analíticas en $\mathbb{D}$, así que T_u es un operador densamente definido en cada p-espacio de Bergman. Del párrafo anterior se sigue que T_u se extiende como un operador acotado en $L_a^p(\mathbb{D})$ cuando u es una función medible y acotada en $\mathbb{D}$.

La cuestión es dar condiciones suficientes sobre el símbolo u para que el operador de Toeplitz T_u se pueda extender como un operador continuo en el espacio de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$, e incluso a cualquier p-espacio de Bergman, $1 < p < \infty$. Un elemento vital ligado a este planteamiento es la llamada transformada de Berezin $\tilde{u}$ del símbolo u, dada por

$$\tilde{u}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\overline{w}|^4} dA(w),$$

para $z \in \mathbb{D}$.

Por ejemplo, cuando u es además una función integrable y no negativa, se sabe que T_u se puede extender como un operador continuo en L_a^2 si y sólo si su tranformada de Berezin $\tilde{u}$ es acotada en $\mathbb{D}$. Además se sabe que T_u se extiende como un operador compacto en $L_a^2(\mathbb{D})$ si y sólo si $\tilde{u}(z) \to 0$ cuando z se aproxima a la frontera $\partial\mathbb{D}$ del disco. Un problema natural es extender la clase de símbolos u para los cuales este tipo de resultados sigan siendo válidos.

En general, se puede definir la transformada de Berezin de un operador A definido en el espacio de Bergman $L_a^2(\mathbb{D})$ y mostrar que si A es continuo (compacto), entonces su transformada de Berezin $\tilde{A}$ es acotada (respectivamente $\tilde{A}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$). En ambos casos, la implicación en el otro sentido no necesariamente se cumple, ver sección 1.5.

Precisamente en el 2003 Zorboska probó que si u es un símbolo en $BMO^1(\mathbb{D})$ cuya transformada de Berezin $\tilde{u}$ es acotada en el disco, entonces T_u es un operador acotado. Además probó que si $\tilde{u}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, entonces T_u es compacto en $L_a^2(\mathbb{D})$, ver [15]. Es conocido que $BMO^1(\mathbb{D})$ contiene a $L^\infty(\mathbb{D})$ y a las funciones positivas e integrables en $\mathbb{D}$, extendiendo así los resultados de Axler & Zheng en [1], Luecking y Zhu en [7, 12]. En el Capítulo 2 de este trabajo se muestran los resultados mencionados. A la fecha se desconoce si cualquier operador de Toeplitz acotado en $L_a^2(\mathbb{D})$ es compacto en cuanto su transformada de Berezin se anula en la frontera.

En este contexto, el siguiente avance se dió en el 2010 en un trabajo de Taskinen y Virtanen, ver [9]. Ellos consideran símbolos que son únicamente localmente integrables en $\mathbb{D}$. A un símbolo $u \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$ le asocian una familia de funciones

$$\hat{u}_D(\zeta) = \frac{1}{|D|}\int_D a(w)dA(w)$$

con $\zeta \in D$, donde $\{D : D \in \mathcal{D}\}$ es una familia de rectángulos hiperbólicos". Ellos prueban que si existe una constante $C > 0$ tal que $|\hat{u}_D(\zeta)| \leq C$ para todo $\zeta \in D$, $D \in \mathcal{D}$, entonces T_u se puede extender como un operador acotado en cada p-espacio de Bergman, $1 < p < \infty$.

Como corolario prueban que para un símbolo positivo $u \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$, el correspondiente operador de Toeplitz T_u es acotado en cada p-espacio de Bergman, $1 < p < \infty$, si y sólo si $\tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{D})$.

Cuando $u \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$ satisface

$$\lim_{d(D)\to 0} \sup_{\zeta \in D} |\tilde{a}_D(\zeta)| = 0,$$

donde $d(D) := dist(D, \partial\mathbb{D})$, entonces T_u se puede extender como un operador compacto en cada p-espacio de Bergman, $1 < p < \infty$. Nuevamente, como un corolario se tiene que si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$ es un símbolo positivo tal que $\tilde{u}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, entonces T_u es un operador compacto en cada p-espacio de Bergman. Todos los resultados recién mencionados se incluyen en el Capítulo 3.

Una definición alternativa de los operadores de Toeplitz fue dada en el 2011, cuando Perala, Taskinen y Virtanen consideran símbolos u en un espacio de Sobolev pesado de orden negativo, ver [10]. En este caso el operador de Toeplitz T_u correspondiente se define por

$$T_u f(z) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{D}} \left(D^{\alpha}_{\zeta} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \right) b_{\alpha}(\zeta) dA(\zeta),$$

con $f \in L^p_a(\mathbb{D})$, y donde D^{α}_{ζ} denota la derivada distribucional respecto a la variable ζ; además

$$\sup_{\mathbb{D}} ess (1 - |z|^2)^{-|\alpha|} |b_{\alpha}(z)| < \infty, \ 0 \leq |\alpha| \leq m.$$

Bajo estas condiciones, ellos muestran que el operador de Toeplitz está bien definido y es continuo en cada p-espacio de Bergman, $1 < p < \infty$. La condición sobre b_{α} muestra una relación natural entre la geometría hiperbólica del disco y el orden de la distribución u.

Finalmente muestran que si se cumple la condición

$$\lim_{r \to 1^-} \sup_{|z| \geq r} ess (1 - |z|^2)^{-|\alpha|} |b_{\alpha}(z)| < \infty,$$

entonces T_u es un operador compacto en cada p-espacio de Bergman, $1 < p < \infty$. Estos resultados son incluidos en el Capítulo 4 de la tesis.

En este último contexto quedan un par de problemas por abordar:

a) Dar condiciones suficientes sobre el símbolo distribucional para obtener operadores de Toeplitz que pertenezcan a las llamadas clases de Schatten.

b) Definir operadores de Hankel con símbolo distribucional y dar condiciones suficientes para que sean continuos o compactos.

Capítulo 1

Espacios de Bergman

En este capítulo establecemos el marco, las definiciones y los resultados básicos para el posterior desarrollo del estudio de operadores de Toeplitz definidos en espacios de Bergman. Los resultados de este capítulo se pueden encontrar en el libro de K. Zhu [13].

1.1. Núcleo reproductor y operador de Toeplitz

Sea $\mathbb{C}$ el plano complejo y $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco abierto unitario complejo. En este trabajo consideramos la medida de área normalizada sobre $\mathbb{D}$ y la denotamos por $\mathrm{d}A(z)$, de hecho, cuando escribimos $z = x + iy = re^{i\theta}$ tenemos que

$$\mathrm{d}A(z) = \pi^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi^{-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Por comodidad, escribiremos $|B| := \int_B dA$ cuando B es un conjunto de Borel en $\mathbb{D}$. A lo largo de la tesis denotamos por $B(z, r)$ a un disco euclidiano con centro en z y radio $r > 0$.

Para $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A)$ el espacio de Lebesgue usual en $\mathbb{D}$. Es conocido que el espacio dual de $L^p(\mathbb{D})$ es $L^{p'}(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$, con respecto al par dual

$$\langle f, g\rangle_{p,p'} = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}dA, \ \ f \in L^p(\mathbb{D}), g \in L^{p'}(\mathbb{D}) \tag{1.1}$$

donde p' es el exponente conjugado de p.

Para $1 \leq p < \infty$, el p-espacio de Bergman analítico $L^p_a(\mathbb{D})$ está dado por

$$L^p_a(\mathbb{D}) := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f \text{ es analítica en } \mathbb{D} \text{ y } f \in L^p(\mathbb{D})\},$$

que está dotado de la norma

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^p dA\right)^{1/p}.$$

Dada una función $f \in L^p_a(\mathbb{D})$, el teorema del valor promedio para funciones armónicas implica que para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$f(z) = \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} f dA$$

para cualquier disco euclidiano $B(z,r)$ en $\mathbb{D}$, por lo tanto

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |f|^p dA \leq \frac{1}{|B(z,r)|}\|f\|_p^p. \tag{1.2}$$

La desigualdad anterior implica lo siguiente:

- $L^p_a(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{D})$, así que cada p-espacio de Bergman es un espacio de Banach con la norma que hereda de $L^p(\mathbb{D})$. En particular $L^2_a(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno que hereda de $L^2(\mathbb{D})$, a este espacio le llamamos el espacio de Bergman (del disco).

- Para cada $z \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ fijo, el funcional valuación en el punto z es continuo en el espacio de Bergman, así que el teorema de representación de Riesz implica que existe una función $K_z \in L^2_a(\mathbb{D})$ tal que

  $$f(z) = \langle f, K_z\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}dA(w),$$

  para todo $z \in \mathbb{D}, f \in L^2_a(\mathbb{D})$.

A la función K_z se le conoce como el núcleo reproductor del espacio de Bergman en el punto z, es conocido que

$$K_z(w) = \frac{1}{(1-w\overline{z})^2},$$

además

$$\|K_z\|_2^2 = K_z(z) = (1-|z|^2)^{-2},$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. El llamado núcleo reproductor normalizado está dado por

$$k_z(w) := \frac{K_z(w)}{\|K_z\|_2} = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}.$$

Otro hecho conocido es que el dual normado del p-espacio de Bergman, $1 < p < \infty$, es $L^{p'}_a(\mathbb{D})$ con respecto al par dual

$$\langle f, g\rangle_{p,p'} = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}dA, \ f \in L^p_a(\mathbb{D}), g \in L^{p'}_a(\mathbb{D}).$$

Denotamos por $H^\infty(\mathbb{D})$ el espacio de funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$. Es conocido que $H^\infty(\mathbb{D})$ es denso en cada p-espacio de Bergman analítico.

A continuación presentamos un resultado que será útil en el desarrollo de nuestro trabajo.

Observación 1.1.1 *Sea $1 < p < \infty$, entonces para cada $z \in \mathbb{D}$ tenemos*

$$\|K_z\|_{p'} \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^{2/p}} = \|K_z\|_2^{2/p}. \tag{1.3}$$

En efecto, por el Lema 1.4.3 tenemos que para $z \in \mathbb{D}$

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2p'}} \mathrm{d}A(w) \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^{2(p'-1)}}.$$

Proposición 1.1.2 *Sea (f_n) una sucesión en $L^p_a(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$. Entonces $f_n \rightharpoonup 0$ débilmente en $L^p_a(\mathbb{D})$ si y sólo si $f_n \to 0$ uniformemente para todo conjunto compacto K en $\mathbb{D}$, y $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$.*

Prueba. Supongamos que (f_n) converge débilmente a 0 en $L^p_a(\mathbb{D})$. Entonces $\{f_n\}$ es débil-acotado en $L^p_a(\mathbb{D})$. Por lo que $\{f_n\}$ es acotado (en norma) en $L^p_a(\mathbb{D})$. Por la observación anterior se tiene que $K_z \in L^{p'}_a(\mathbb{D})$ para toda $z \in \mathbb{D}$, así que la hipótesis implica que para toda $z \in \mathbb{D}$,

$$f_n(z) = \langle f_n, K_z\rangle_{p,p'} \to 0 \text{ si } n \to \infty. \tag{1.4}$$

Por (1.2) tenemos que

$$|f_n(z)|^p \leq \frac{1}{|B(z,s)|}\int_{B(z,s)} |f(w)|^p \mathrm{d}A(w),$$

siempre que $B(z,s) \subset \mathbb{D}$.

Supongamos que $K = r\overline{\mathbb{D}}$ con $r \in (0,1)$ fijo. Entonces por la desigualdad anterior existe $r' \in (r,1)$ fijo y $C_r > 0$ tal que

$$|f_n(z)|^p \leq C_r \int_{r'\overline{\mathbb{D}}} |f_n(w)|^p \mathrm{d}A(w) \leq C_r \sup_n \|f_n\|_p^p,$$

para todo $z \in K$. Es decir, (f_n) es uniformemente acotada sobre cada subconjunto compacto en $\mathbb{D}$.

Luego, usando (1.4) y el teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z)|^p \leq C_r \lim_{n\to\infty} \int_{r'\overline{\mathbb{D}}} |f_n(w)|^p \mathrm{d}A(w) = C_r \int_{r'\overline{\mathbb{D}}} \lim_{n\to\infty} |f_n(w)|^p \mathrm{d}A(w) = 0.$$

Ahora probamos el recíproco. Fijamos $g \in L_a^{p'}(\mathbb{D})$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $r \in (0,1)$ cercano a 1 tal que

$$\sup_n \|f_n\|_p^{p'} \left(\int_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}} |g|^{p'} \mathrm{d}A \right) < \epsilon^{p'}.$$

Por hipótesis existe $N \geq 1$ tal que $\left(\int_{r\overline{\mathbb{D}}} |g| dA\right) \sup_{z\in r\overline{\mathbb{D}}} |f_n| < \varepsilon$ si $n \geq N$. Entonces

$$|\langle f_n, g\rangle_{p,p'}| = \left| \int_{\mathbb{D}} f_n \overline{g} \mathrm{d}A \right| \leq \int_{r\overline{\mathbb{D}}} |f_n||g| \mathrm{d}A + \int_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}} |f_n||g| \mathrm{d}A < 2\varepsilon$$

si $n \geq N$. ■

Dado que el espacio de Bergman es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$, existe una única proyección ortogonal P de $L^2(\mathbb{D})$ sobre el espacio de Bergman. En este contexto, a P se le conoce como la proyección de Bergman sobre el disco, de hecho P es un operador integral con núcleo

$$K(z,w) := \overline{K_z(w)} = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2},$$

es decir,

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w) \tag{1.5}$$

para todo $z \in \mathbb{D}, f \in L^2(\mathbb{D})$.

De hecho, es fácil ver que se puede extender la ecuación (1.5) para toda función integrable en el disco. Aún más, para $1 < p < \infty$ es conocido que la proyección de Bergman es continua en $L^p(\mathbb{D})$.

Ahora introducimos el actor principal de este trabajo, el llamado operador de Toeplitz definido en espacios de Bergman.

Fijamos una función φ que es integrable en $\mathbb{D}$. Mencionamos anteriormente que la proyección de Bergman está bien definida en funciones que son integrables, así que el llamado operador de Toeplitz con símbolo φ dado por

$$T_\varphi f(z) = P(\varphi f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w),$$

está bien definido para toda $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Se sigue que el operador de Toeplitz T_φ está densamente definido en cada p-espacio de Bergman.

La cuestión fundamental en este contexto, es dar condiciones suficientes (y necesarias) sobre el símbolo para que el correspondiente operador de Toeplitz se pueda extender como un operador continuo en un p-espacio de Bergman.

Mencionamos algunas propiedades básicas de los operadores de Toeplitz que son fáciles de verificar. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, y φ, ψ funciones acotadas en $\mathbb{D}$. Entonces

a) $T_{a\varphi+b\psi} = aT_\varphi + bT_\psi$.

b) $T_{\overline{\varphi}} = T_\varphi^*$.

c) $T_\varphi \geq 0$ si $\varphi \geq 0$.

1.2. Métrica de Bergman y el operador promedio

A un biholomorfismo $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ se le conoce como mapeo de Möbius o automorfismo del disco. Se suele denotar por $Aut(\mathbb{D})$ al grupo (bajo la operación dada por la composición de funciones) de automorfismos del disco.

Es bien conocido que $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ si y sólo si existe un número real θ y un punto $z \in \mathbb{D}$ tal que

$$\varphi(w) = e^{i\theta}\varphi_z(w), \; w \in \mathbb{D}$$

donde

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}$$

es un mapeo de Möbius especial que intercambia los puntos 0 y z.

A continuación listamos algunas propiedades del mapeo φ_z.

1. $\varphi_z \circ \varphi_z = id|_{\mathbb{D}}$, $\varphi_z(0) = z$, $\varphi_z(z) = 0$.
2. $\varphi_z'(w) = -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}$.
3. $$1 - |\varphi_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}.$$

Recordamos que el determinante jacobiano real del mapeo φ_z es

$$|\varphi_z'(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.$$

La métrica pseudo-hiperbólica en $\mathbb{D}$ está dada por

$$\rho(z,w) = |\varphi_z(w)|, \; z, w \in \mathbb{D}. \tag{1.6}$$

Notamos que $\rho(z,w)$ es una métrica que es invariante bajo transformaciones de Möbius. Es decir,

$$\rho(\varphi(z),\varphi(w)) = \rho(z,w) \text{ para toda } \varphi \in Aut(\mathbb{D}),\ z,w \in \mathbb{D}.$$

La métrica hiperbólica, también llamada métrica de Bergman o de Poincaré, está dada por

$$\begin{aligned} \beta(z,w) &:= \tanh^{-1}(\rho(z,w)) \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

para $z,w \in \mathbb{D}$. En particular,

$$\beta(z,0) = \frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|} = \tanh^{-1}(|z|),\ z \in \mathbb{D}. \tag{1.8}$$

Claramente la métrica de Bergman es invariante bajo transformaciones de Möbius.

Para toda $z \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, definimos el disco pseudo-hiperbólico como sigue

$$E(z,r) = \{w \in \mathbb{D} : \rho(z,w) < r\}.$$

Proposición 1.2.1 *El disco pseudo-hiperbólico $E(z,r)$ es un disco euclidiano con centro C' y radio R' dados por*

$$C' = \frac{1-r^2}{1-r^2|z|^2}z,\ R' = \frac{1-|z|^2}{1-r^2|z|^2}r.$$

Se sigue que para todo $z \in \mathbb{D}$ y $r > 0$, el disco hiperbólico

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(w,z) < r\}$$

es un disco euclidiano con centro C y radio R dados por

$$C = \frac{1-s^2}{1-s^2|z|^2}z,\ R = \frac{1-|z|^2}{1-s^2|z|^2}s,$$

donde $s = \tanh(r) \in (0,1)$.

Prueba. Para cualesquiera $z,w \in \mathbb{D}$, se tiene

$$\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| < r$$

si y sólo si

$$|z|^2 + |w|^2 - 2Re(z\overline{w}) < r^2(1+|z|^2|w|^2 - 2Re(z\overline{w}))$$

si y sólo si

$$(1 - r^2|z|^2)|w|^2 - 2(1 - r^2)Re(z\overline{w}) < r^2 - |z|^2,$$

como $1 - r^2|z|^2 > 0$, la desigualdad anterior es equivalente a lo siguiente

$$|w|^2 - 2\left(\frac{1 - r^2}{1 - r^2|z|^2}\right) Re(z\overline{w}) < \frac{r^2 - |z|^2}{1 - r^2|z|^2}$$

si y sólo si

$$\left| w - \left(\frac{1 - r^2}{1 - r^2|z|^2}\right) z\right|^2 < \frac{r^2 - |z|^2}{1 - r^2|z|^2} + \frac{(1 - r^2)^2|z|^2}{(1 - r^2|z|^2)^2} = \frac{r^2(1 - |z|^2)^2}{(1 - r^2|z|^2)^2}.$$

■

Proposición 1.2.2 *Sea $r > 0$, $z \in \mathbb{D}$ y consideramos el disco hiperbólico $D(z, r)$. Entonces*

1. $|D(z, r)| = \frac{s^2(1-|z|^2)^2}{(1-s^2|z|^2)^2}$.

2. $\text{ínf}\{|1 - z\overline{w}|^{-1} : w \in D(z, r)\} = \frac{1-s|z|}{1-|z|^2}$.

3. $\sup\{|1 - z\overline{w}|^{-1} : w \in D(z, r)\} = \frac{1+s|z|}{1-|z|^2}$.

donde $s = \tanh(r) \in (0, 1)$.

Prueba. El punto *1* se sigue de la Proposición 1.2.1. Para probar *2*, consideramos el hecho que $D(0, r)$ es un disco euclidiano con centro en el origen y radio $s = \tanh(r)$, además usamos el automorfismo del disco φ_z. Dado que φ_z es una involución tenemos

$$\begin{aligned}
\text{ínf}\left\{\frac{1}{|1 - z\overline{w}|} : w \in D(z, r)\right\} &= \text{ínf}\left\{\frac{1}{|1 - z\overline{w}|} : w \in \varphi_z(D(0, r))\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{\frac{1}{|1 - z\overline{\varphi_z(w)}|} : w \in D(0, r)\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{\frac{|1 - z\overline{w}|}{1 - |z|^2} : w \in D(0, r)\right\} \\
&= \frac{1 - s|z|}{1 - |z|^2}.
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba la propiedad *3* ■

De los incisos 2. y 3. de la proposición anterior se deduce que para $r > 0$ fijo y $\beta(z, w) < r$ se satisface

$$|1 - z\overline{w}| \sim 1 - |z|^2 \sim 1 - |w|^2. \tag{1.9}$$

Proposición 1.2.3 *Para toda $z, w \in \mathbb{D}$ se cumple*

$$\lim_{w \to z} \frac{\beta(z,w)}{|w-z|} = \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{1.10}$$

Prueba. En efecto, considerando que si $|h| \to 0$ se cumple que $\log(1+h) \approx h$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{w \to z} \frac{\beta(z,w)}{|w-z|} &= \lim_{w \to z} \frac{1}{2} \frac{1}{|w-z|} \log\left(\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}\right) \\
&= \lim_{w \to z} \frac{1}{2} \frac{1}{|w-z|} \log\left(1+\frac{2|w-z|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}\right) \\
&= \lim_{w \to z} \frac{1}{|1-z\overline{w}|-|z-w|} = \frac{1}{1-|z|^2}.
\end{aligned}$$

■

Proposición 1.2.4 *Sea $\alpha(t)$ una curva suave en $\mathbb{D}$. Si $s(t)$ es la longitud de arco de $\alpha(t)$ en la métrica de Bergman, entonces*

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{f}(\alpha(t)))\right| \leq 2\sqrt{2}\frac{|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}.$$

Prueba. Notamos que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}.$$

Para un punto $a \in \mathbb{D}$, se denota por Π_a a la proyección ortogonal de rango uno del espacio de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ sobre el subespacio unidimensional generado por k_a. Como f es analítica, tenemos

$$\Pi_a f = \langle f, k_a \rangle k_a = (1-|a|^2) f(a) k_a, \qquad a \in \mathbb{D}.$$

Si $\alpha(t)$ una curva suave en $\mathbb{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} k_{\alpha(t)}(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1-\alpha(t)\overline{\alpha(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\right) \\
&= \frac{-\left(\alpha'(t)\overline{\alpha(t)}+\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}\right)}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2} + \frac{2z\overline{\alpha'(t)}(1-|\alpha(t)|^2)}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^3}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha(t)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)(z) &= \frac{(1-|\alpha(t)|^2)^2}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\left(\frac{-\alpha'(t)\overline{\alpha(t)}\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}+\frac{2\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\right)\\
&= \frac{1}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}\left(-\alpha'(t)\overline{\alpha(t)}-\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}+2\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}\right)\\
&= \frac{-\alpha'(t)\overline{\alpha(t)}+\alpha(t)\overline{\alpha'(t)}}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^2}
\end{aligned}$$

También un cálculo directo muestra que

$$\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)(z)=\frac{2\overline{\alpha'(t)}(z-\alpha(t))}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^3}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)\right\|^2 &= \int_{\mathbb{D}}\left|\frac{2\overline{\alpha'(t)}(z-\alpha(t))}{(1-\overline{\alpha(t)}z)^3}\right|^2\mathrm{d}A(z)\\
&= \frac{4|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\int_{\mathbb{D}}\left|\frac{z-\alpha(t)}{1-\overline{\alpha(t)}z}\right|^2|k_{\alpha(t)}(z)|^2\mathrm{d}A(z)\\
&= \frac{4|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\int_{\mathbb{D}}|k_{\alpha(t)(w)}|^2|k_{\alpha(t)}(w)|^2|w|^2\mathrm{d}A(w)\\
&= \frac{4|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}\int_{\mathbb{D}}|w|^2\mathrm{d}A(z)\\
&= \frac{2|\alpha'(t)|^2}{(1-|\alpha(t)|^2)^2}
\end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad se hizo el cambio de variable dado por $w=\frac{\alpha(t)-z}{1-\overline{\alpha(t)}z}$ con lo que $z=\frac{\alpha(t)-w}{1-\overline{\alpha(t)}w}$ para obtener

$$k_{\alpha(t)}(z)=\frac{1}{k_{\alpha(t)}(w)}$$

y $\int_{\mathbb{D}}|w|^2=\frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$\left\|\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)\right\|=\frac{\sqrt{2}|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}=\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

Ahora, dado que

$$\widetilde{f}(\alpha(t))=\int_{\mathbb{D}}f(w)|k_{\alpha(t)}(w)|^2\mathrm{d}A(w), \tag{1.12}$$

y notando que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k_{\alpha(t)}(w)\overline{k_{\alpha(t)}(w)}\right) = 2Re\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}(w)(\overline{k_{\alpha(t)}(w)})\right) \tag{1.13}$$

y diferenciando bajo el signo de la integral a (1.12) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{f}(\alpha(t))) &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|k_{\alpha(t)}(w)|^2\mathrm{d}A(w)\\ &= 2\int_{\mathbb{D}} f(w)Re\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}(w)(\overline{k_{\alpha(t)}(w)})\right]\mathrm{d}A(w)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle k_{\alpha(t)}, k_{\alpha(t)}\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|k_{\alpha(t)}(w)|^2\mathrm{d}A(w)\\ &= 2Re\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}, k_{\alpha(t)}\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

Usando lo anterior y la fórmula

$$\Pi_{\alpha(t)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right) = \langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}, k_{\alpha(t)}\rangle k_{\alpha(t)} \qquad \alpha(t)\in\mathbb{D}. \tag{1.14}$$

tenemos que

$$Re\left(\Pi_{\alpha(t)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)(w)}\right)\overline{k_{\alpha(t)(w)}}\right) = Re\left(\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}(w), k_{\alpha(t)}(w)\rangle|k_{\alpha(t)(w)}|^2\right) = 0$$

También se tiene que

$$\int_{\mathbb{D}}\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)(w)\overline{k_{\alpha(t)}(w)}\mathrm{d}A(w) = \langle\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right), k_{\alpha(t)}\rangle = 0$$

Y de nuevo retomando $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{f}(\alpha(t)))$, obtenemos

$$2\int_{\mathbb{D}} f(w)Re\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}(w)(\overline{k_{\alpha(t)}(w)})\right]\mathrm{d}A(w) = 2\int_{\mathbb{D}} f(w)Re\left[\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)(w)\overline{k_{\alpha(t)}(w)}\right]\mathrm{d}A(w) \tag{1.15}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{f}(\alpha(t)))\right| &= 2\left|\int_{\mathbb{D}}(f(w)-\widetilde{f}(\alpha(t)))Re\left[\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)(w)\overline{k_{\alpha(t)}(w)}\right]\mathrm{d}A(w)\right|\\ &\le 2\int_{\mathbb{D}}\left|f(w)-\widetilde{f}(\alpha(t))\right|\left|k_{\alpha(t)}(w)\right|\left|\left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)(w)\right|\mathrm{d}A(w),\end{aligned}$$

por la ecuación (1.11) y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\left|\langle (f(w)-\widetilde{f}(\alpha(t)))k_{\alpha(t)}, \left(I-\Pi_{\alpha(t)}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k_{\alpha(t)}\right)(w)\rangle\right| \leq \left\|(f(w)-\widetilde{f}(\alpha(t)))k_{\alpha(t)}\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right\|^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{f}(\alpha(t)))\right| &= 2\sqrt{2}\frac{|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}\left(\left|f(w)-\widetilde{f}(\alpha(t))\right|^2\left|k_{\alpha(t)}(w)\right|^2\mathrm{d}A(w)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\sqrt{2}\frac{|\alpha'(t)|}{1-|\alpha(t)|^2}.\end{aligned}$$

■

Un elemento fundamental para determinar la continuidad de un operador de Toeplitz, es el llamado operador promedio del símbolo que introducimos a continuación

Definición 1.2.5 *Fijamos $r>0$. Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{D}$. El operador promedio de f en $\mathbb{D}$ está dado por*

$$\widehat{f}_r(z)=\frac{1}{|D(z,r)|}\int_{D(z,r)} f(w)dA(w),\ \ z\in\mathbb{D},$$

donde $D(z,r)$ es el disco hiperbólico con centro en z y radio $r>0$.

Reproducimos el resultado clásico cuya demostración se encuentra en el libro [13].

Teorema 1.2.6 *Sea f una función positiva e integrable en $\mathbb{D}$.*

1. *El operador de Toeplitz T_f es acotado si y sólo si $\widehat{f}_r$ es acotada en $\mathbb{D}$.*
2. *El operador de Toeplitz T_f es compacto si y sólo si $\widehat{f}_r(z)\to 0$ cuando $z\to\partial\mathbb{D}$.*

1.3. Espacios de Bergman pesados

En esta sección consideramos una familia de espacios de Bergman respecto a una medida que es radial en el disco. Como en el Capítulo 1, en este contexto presentamos algunos resultados básicos: existencia del núcleo reproductor, la fórmula reproductora y la continuidad de la respectiva proyección de Bergman. Asimismo presentamos algunos resultados que serán de utilidad.

Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ consideramos la medida de Borel positiva $\mathrm{d}A_\alpha$ en $\mathbb{D}$ dada por

$$\mathrm{d}A_\alpha(z)=c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha\mathrm{d}A(z), \tag{1.16}$$

donde $c_\alpha = \alpha + 1$ para $\alpha > -1$.

Como en el Capítulo 1, para $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > -1$, denotamos por $L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha)$ el espacio de Bergman pesado dado por

$$L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha) := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} | f \text{ es analítica en } \mathbb{D} \text{ y } f \in L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)\},$$

que está dotado de la norma

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^p dA_\alpha \right)^{1/p}.$$

Un primer resultado fundamental es el siguiente,

Proposición 1.3.1 *Sea $f \in L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha)$, con $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > -1$. Entonces*

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_{p,\alpha}}{(1 - |z|^2)^{(2+\alpha)/p}} \text{ para toda } z \in \mathbb{D}. \tag{1.17}$$

Prueba. Empezamos con la llamada propiedad del valor sub-medio para funciones de la forma $|F|^p$, donde F es analítica en $\mathbb{D}$,

$$|F(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

siempre que $\partial B(0, r) \subset \mathbb{D}$. Usando coordenadas polares obtenemos

$$|F(0)|^p \leq \int_{\mathbb{D}} |F|^p dA_\alpha. \tag{1.18}$$

Fijamos $f \in L^p_a(dA_\alpha)$ y $z \in \mathbb{D}$. Consideramos la función analítica

$$F(w) = f \circ \varphi_z(w) \frac{(1 - |z|^2)^{(2+\alpha)/p}}{(1 - w\overline{z})^{2(2+\alpha)/p}}, \; w \in \mathbb{D}.$$

Notamos que $\|F\|_{p,\alpha} = \|f\|_{p,\alpha}$ y el resultado se sigue de (1.3). ■

Del resultado anterior se sigue que $L^2_a(dA_\alpha)$ es un espacio de Hilbert, que existe un núcleo reproductor

$$K_\alpha(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}}$$

para $L^2_a(dA_\alpha)$, es decir,

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) f(w) \mathrm{d}A_\alpha(w) \text{ para toda } z \in \mathbb{D}, \tag{1.19}$$

cuya fórmula se puede extender para cualquier $f \in L^1_a(dA_\alpha)$. Además la proyección ortogonal $P_\alpha : L^2(dA_\alpha) \to L^2_a(dA_\alpha)$, llamada proyección de Bergman (con peso) en el disco, está dada por

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), \ z \in \mathbb{D}.$$

El siguiente resultado muestra que para cada $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > -1$, existen una infinidad de proyecciones acotadas de $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ a $L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha)$.

Proposición 1.3.2 *Sea $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ y $\gamma > -1$. Entonces el operador P_γ es una proyección acotada de $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$ en $L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha)$ si y sólo si $p(\gamma + 1) > \alpha + 1$.*

Prueba. Por la Proposición 1.4.4 se sigue el resultado. ∎

Proposición 1.3.3 *Supongamos que $\alpha > -1$, n es un entero positivo y f es una función analítica en $\mathbb{D}$ tal que*

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Entonces para toda $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \frac{1}{(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^n f^{(n)}(w) \mathrm{d}A_\alpha(w)}{\overline{w}^n (1 - z\overline{w})^{2+\alpha}}. \tag{1.20}$$

Prueba. Sea

$$g(z) = \frac{1}{(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^n f^{(n)}(w) \mathrm{d}A_\alpha(w)}{\overline{w}^n (1 - z\overline{w})^{2+\alpha}}$$

y usando coordenadas polares observamos que

$$g(0) = g'(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0.$$

Diferenciando bajo el signo de la integral n veces se tiene

$$g^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f^{(n)}(w) \mathrm{d}A_{\alpha+n}(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha+n}},$$

pero por la Proposición 1.19 se tiene que

$$f^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f^{(n)}(w) \mathrm{d}A_{\alpha+n}(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha+n}} = g^{(n)}(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Dado que $\mathbb{D}$ es conexo se sigue que $f \equiv g$. ∎

Ahora se da una caracterización de los espacios de Bergman en términos de derivadas de orden superior.

Teorema 1.3.4 *Sean $1 \leq p < \infty$, $n \geq 1$ y f analítica en $\mathbb{D}$. Entonces $f \in L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha)$ si y sólo si la función*

$$g(z) = (1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z) \tag{1.21}$$

está en $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$

Prueba. Supongamos que $f \in L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha)$. Por la Proposición 1.3.1 podemos considerar $\gamma > 0$ suficientemente grande tal que $f \in L^1_a(\mathrm{d}A_\gamma)$. De (1.19) obtenemos la siguiente representación integral de f

$$f(z) = (\gamma + 1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\gamma}{(1 - z\overline{w})^{2+\gamma}} f(w)\mathrm{d}A(w) \text{ para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Diferenciando bajo el signo de la integral n veces, obtenemos una constante $C_n > 0$ tal que

$$f^{(n)}(z) = C_n \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\gamma}{(1 - z\overline{w})^{n+2+\gamma}} \overline{w}^n f(w)\mathrm{d}A(w) \text{ para toda } \ z \in \mathbb{D},$$

es decir,

$$g(z) = C_n (1 - |z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^\gamma}{(1 - z\overline{w})^{n+2+\gamma}} \overline{w}^n f(w)\mathrm{d}A(w).$$

Podemos suponer que γ es suficientemente grande de tal manera que

$$-pn < \alpha + 1 < p(\gamma + 1).$$

Como $1 \leq p < \infty$ la Proposición 1.4.4 implica que $g \in L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$.

Ahora supongamos que $g \in L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. Dado que la hipótesis y la conclusión deseada no cambian al restarle un polinomio a la función f, podemos suponer

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0.$$

En este caso fijamos $\gamma > 0$ tal que $p(\gamma + 1) > \alpha + 1$ y usamos (1.20) para obtener

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{h(w)\mathrm{d}A_\gamma(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\gamma}} = P_\gamma h(z), \tag{1.22}$$

donde la función

$$h(z) = \frac{(1 - |z|^2)^n f^{(n)}(z)}{(2 + \gamma) \cdots (n + \gamma) c_\gamma \overline{z}^n}$$

está en $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$. Como $1 \leq p < \infty$, la representación integral (1.22) y la Proposición 1.3.2 implican que $f \in L^p_a(\mathrm{d}A_\alpha)$.

■

El espacio de Bloch $\mathcal{B}$ se define como el espacio de las funciones analíticas f en $\mathbb{D}$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup\{(1-|z|^2)|f'(z)| : z \in \mathbb{D}\} < \infty.$$

De hecho $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach respecto de la norma

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|(1-|z|^2)f'(z)\|_\infty$$

Teorema 1.3.5 *Sea f analítica en $\mathbb{D}$ y $n \geq 2$, entonces $f \in \mathcal{B}$ si y sólo si la función $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)$ es acotada en $\mathbb{D}$. Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$C^{-1}\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \sup\{(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| : z \in \mathbb{D}\} < C\|f\|_{\mathcal{B}} \tag{1.23}$$

para toda función f tal que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$.

Prueba. En efecto, sea f analítica en $\mathbb{D}$ y $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
Si $f \in \mathcal{B}$, por la Proposición 1.3.3 se tiene

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)f'(w)}{\overline{w}(1-z\overline{w})^2} dA(w) \text{ para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Diferenciando bajo el signo de la integral obtenemos

$$(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z) = (n+1)!(1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^{n-1}(1-|w|^2)f'(w)}{(1-z\overline{w})^{n+2}} dA(w).$$

Por el Lema 1.4.3 (con $c = n$), existe una constante $C' > 0$ independiente de f tal que

$$(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| \leq (n+1)!(1-|z|^2)^n \int_{\mathbb{D}} \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{|1-z\overline{w}|^{n+2}} dA(w) \leq C'\|f\|_{\mathcal{B}} \text{ para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Luego, si la función $(1-|z|^2)^n f^{(n)}(z)$ es acotada en $\mathbb{D}$ y $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, por la fórmula de reproducción (1.19) con $\alpha = n$ tenemos

$$f^{(n)}(z) = (n+1) \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)}{(1-z\overline{w})^{n+2}} dA(w) \text{ para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Considerando la integral de línea de 0 a z y que $f^{(n-1)}(0) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{(1-z\overline{w})^{n+1}} - 1 \right) \frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)}{\overline{w}} dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{1-(1-z\overline{w})^{n+1}}{\overline{w}} \frac{(1-|w|^2)^n f^{(n)}(w)}{(1-z\overline{w})^{n+1}} dA(w) \end{aligned}$$

Pero

$$\sup\left\{\frac{|1-(1-z\overline{w})^{n+1}|}{|\overline{w}|}: z, w \in \mathbb{D}\right\} < 2^{n+1},$$

así que usando nuevamente el Lema 1.4.3 (con $c = n-1$) tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$(1-|z|^2)^{n-1}|f^{(n-1)}(z)| \leq C \sup\{(1-|w|^2)^n |f^{(n)}(w)| : w \in \mathbb{D}\} \text{ para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Continuando este proceso se puede hallar una constante $C' > 0$ tal que para toda función analítica f que cumpla $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, se tiene que

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \leq C' \sup\left\{(1-|z|^2)^n |f^{(n)}(z)| : z \in \mathbb{D}\right\},$$

lo que prueba el resultado. ■

1.4. Operadores integrales en el disco unitario

En esta sección se dan condiciones suficientes para que ciertos operadores integrales sean continuos sobre los p-espacios de Lebesgue. Un resultado muy socorrido es el llamado criterio de Schur que introducimos a continuación.

Sean (X, μ) un espacio de medida y la función $K : X \times X \to \mathbb{C}$ el núcleo del operador integral T. Es decir,

$$Tf(x) = \int_X K(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y) \text{ para todo } f \in L^p(X, \mathrm{d}\mu). \tag{1.24}$$

El siguiente resultado da una condición suficiente sobre K para que el operador integral T sea continuo en $L^p(X, \mu)$, donde $1 < p < \infty$.

Teorema 1.4.1 *Criterio de Schur.*
Sea $K : X \times X \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa y T el operador integral dado en (1.24).
Si existen constantes positivas C_1, C_2 y una función h medible y positiva en X tal que

$$\int_X K(x,y) h(y)^{p'} \mathrm{d}\mu(y) \leq C_1 h(x)^{p'} \text{ para casi toda } x \in X, \tag{1.25}$$

y

$$\int_X K(x,y) h(x)^{p} \mathrm{d}\mu(x) \leq C_2 h(y)^{p} \text{ para casi toda } x \in X, \tag{1.26}$$

entonces T es un operador lineal acotado en $L^p(X, \mu)$ con $\|T\| \leq C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}}$.

Prueba. En efecto, si $f \in L^p(X,\mu)$ entonces para casi toda $x \in X$ tenemos

$$|Tf(x)| \le \int_X K(x,y)h(y)h(y)^{-1}|f(y)|\mathrm{d}\mu(y)$$

y por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|Tf(x)| \le \left[\int_X K(x,y)h(y)^{p'}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_X K(x,y)h(y)^{-p}|f(y)|^p\mathrm{d}\mu(y)\right]^{\frac{1}{p}},$$

de la desigualdad (1.25) se sigue que

$$|Tf(x)| \le C_1^{\frac{1}{p'}}h(x)\left[\int_X K(x,y)h(y)^{-p}|f(y)|^p\mathrm{d}\mu(y)\right]^{\frac{1}{p}} \text{ para casi toda } x \in X.$$

Elevando la desigualdad anterior a la p, integrando sobre X con respecto de $d\mu(x)$, por el teorema de Fubini y la desigualdad (1.26) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_X |Tf|^p\mathrm{d}\mu &\le C_1^{\frac{p}{p'}}\int_X |f(y)|^p h(y)^{-p}\int_X K(x,y)h(x)^p\mathrm{d}\mu(x)d\mu(y)\\ &\le C_1^{\frac{p}{p'}}C_2\int_X |f(y)|^p\mathrm{d}\mu(y),\end{aligned}$$

Así que T es un operador lineal acotado en $L^p(X,\mu)$ con norma menor o igual que $C_1^{\frac{1}{p'}}C_2^{\frac{1}{p}}$. ■

Corolario 1.4.2 *Sea $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Si existen constantes positivas C_1,C_2 y una función medible no negativa h en X tal que*

$$\int_X K(x,y)h(y)\mathrm{d}\mu(y) \le C_1h(x) \text{ para casi toda } x \in X \tag{1.27}$$

y

$$\int_X K(x,y)h(x)\mathrm{d}\mu(x) \le C_2h(y) \text{ para casi toda } x \in X. \tag{1.28}$$

Entonces el operador integral T con núcleo K es acotado en $L^2(X,\mu)$ con norma menor o igual que $\sqrt{C_1C_2}$.

La siguiente función aparecerá como núcleo de ciertos operadores integrales, por lo que es conveniente tener su representación en serie de potencias. Para $z,w \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ que no es cero o un entero negativo, tenemos

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)}z^n\overline{w}^n. \tag{1.29}$$

Las siguientes estimaciones integrales son fundamentales en el estudio de operadores definidos en espacios de funciones del disco.

Lema 1.4.3 *Sea $z \in \mathbb{D}$, $c \in \mathbb{R}$, $t > -1$ y*

$$I_{c,t}(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-z\overline{w}|^{2+t+c}} \mathrm{d}A(w). \tag{1.30}$$

1. *Si $c < 0$, entonces como una función de z, $I_{c,t}(z)$ es acotada superiormente e inferiormente en $\mathbb{D}$.*

2. *Si $c > 0$, entonces*
$$I_{c,t}(z) \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^c} \text{ cuando } |z| \to 1^-.$$

3. *Si $c = 0$, entonces*
$$I_{0,t}(z) \sim \log \frac{1}{(1-|z|^2)} \text{ cuando } |z| \to 1^-.$$

Prueba. Como $t > -1$, la integral $I_{c,t}(z)$ converge para toda $z \in \mathbb{D}$, así que la integral está bien definida. Ponemos
$$\lambda = \frac{1}{2}(2+t+c).$$
Si $\lambda = 0$, $2 + t = -c$ con lo cual $c < 0$ y se sigue que $I_{c,t}(z)$ es acotada en z. De igual manera, si λ es un entero negativo, entonces $c < -1$ y también $I_{c,t}(z)$ es acotada en z.

Si $\lambda > 0$, entonces consideramos (1.29) y la invariancia bajo rotaciones de la medida $(1-|w|^2)^t \mathrm{d}A(w)$ para obtener lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-z\overline{w}|^{2\lambda}} \mathrm{d}A(w) &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2}(1-|w|^2)^t|z|^{2n}|w|^{2n}\mathrm{d}A(w) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^t|w|^{2n}\mathrm{d}A(w) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2)^t r^{2n+1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2}|z|^{2n} \int_0^1 (1-r)^t r^n\mathrm{d}r \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2} \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+t+2)}|z|^{2n} \\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\lambda)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+t+2)^2}|z|^{2n}.
\end{aligned}$$

Por la fórmula de Stirling

$$\frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+t+2)^2} \sim \frac{n^{2n+t+c}}{n^n \cdot n^{n+t+1}} = n^{c-1} \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Luego, se analizan los siguientes casos

1. Si $c < 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{c-1}|z|^{2n}$ es acotada en $\mathbb{D}$.
2. Si $c > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{c-1}|z|^{2n} \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^c}$, cuando $|z| \to 1^-$.
3. Si $c = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1}|z|^{2n} = \log \frac{1}{(1-|z|^2)}$, cuando $|z| \to 1^-$.

puesto que

$$\frac{1}{(1-|z|^2)^c} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+c)}{n!\Gamma(c)}|z|^{2n}$$

y de nuevo por la fórmula de Stirling se tiene que,

$$\frac{\Gamma(n+c)}{n!} \sim n^{c-1},$$

por lo que se concluye

$$I_{c,t}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } c < 0, \\ \log \frac{1}{(1-|z|^2)}, & \text{si c=0}, \\ \frac{1}{(1-|z|^2)^c}, & \text{si } c > 0. \end{cases}$$

■

Proposición 1.4.4 *Sean a y b parámetros reales, $1 \leq p < \infty$ y*

$$Sf(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-z\overline{w}|^{2+a+b}} f(w)\mathrm{d}A(w) \tag{1.31}$$

y

$$Tf(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}} f(w)\mathrm{d}A(w). \tag{1.32}$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier real α.

a) El operador S es acotado en $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$.

b) El operador T es acotado en $L^p(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\alpha)$.

c) Los parámetros satisfacen $-pa < \alpha + 1 < p(b+1)$.

Un caso importante que utilizaremos es cuando $\alpha = a = b = 0$. Lo enunciamos a continuación

Corolario 1.4.5

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{|1-z\overline{w}|^2} \mathrm{d}A(w)$$

es continuo en $L^p(\mathbb{D}$ para $1 < p < \infty$.

1.5. Transformada de Berezin de un operador

Ahora introducimos la noción de transformada de Berezin de un operador definido en el espacio de Bergman. Recordamos que k_z denota el núcleo de Bergman normalizado. Antes enunciamos un resultado básico de la teoría de operadores:

Observación 1.5.1 *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $S : X \to X$ un operador continuo. Entonces S es un operador compacto en X si y sólo si para cualquier sucesión (x_n) en X que converge débilmente a cero, se cumple que (Sx_n) converge a cero en norma.*

Definición 1.5.2 *Si S es un operador en $L^2_a(\mathbb{D})$ que está bien definido en $H^\infty(\mathbb{D})$, la transformada de Berezin de S es la función dada por*

$$\widetilde{S}(z) := \langle Sk_z, k_z\rangle, \ z \in \mathbb{D}.$$

Si S es un operador acotado en $L^2_a(\mathbb{D})$, entonces $\widetilde{S}$ es una función acotada en $\mathbb{D}$. Por otro lado, por la Proposición 1.1.2 tenemos que $k_z \rightharpoonup 0$ en $L^2_a(\mathbb{D})$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, se sigue que cuando S es compacto, entonces $\widetilde{S} \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. En ambos casos, el recíproco no se cumple necesariamente. Posteriormente daremos un par de ejemplos.

Para $f \in L^1(\mathbb{D})$, definimos la transformada de Berezin de f como la transformada de Berezin de T_f, es decir,

$$\widetilde{f}(z) := \widetilde{T_f}(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)|k_z(w)|^2 dA(w), \ z \in \mathbb{D}.$$

A continuación mencionamos algunas propiedades básicas de la transformada de Berezin.

1. El mapeo $A \to \widetilde{A}$ es inyectivo.
2. La función $\widetilde{A}$ está en $C^\infty(\mathbb{D})$. De hecho, $\widetilde{A}$ es real-analítica en $\mathbb{D}$ con la siguiente expansión en serie de potencias

$$\widetilde{A}(z) = \left(1 - |z|^2\right)^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} (m+1)(n+1)\langle Az^n, z^m\rangle z^n \overline{z}^m.$$

3. Para $f \in L^1(\mathbb{D})$, f es armónica en $\mathbb{D}$ si y sólo si $f = \widetilde{f}$.

Los dos primeros puntos son fáciles de deducir y el tercero fue una conjetura abierta durante muchos años. Fue resuelta por Ahern, Flores & Rudin en 1993 y por English en 1994, para detalles se puede consultar el libro [6].

Ahora consideramos la base estándar del espacio de Bergman dada por $e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n$, $n \geq 0$. Primero damos un ejemplo de un operador que no es continuo en el espacio de Bergman pero que tiene transformada de Berezin acotada, luego mostramos un operador continuo cuya transformada de Berezin se anula en $\partial\mathbb{D}$ pero que no es compacto.

Ejemplo 1.5.3 *Sea A el operador diagonal en $L^2_a(\mathbb{D})$ definido por*

$$Ae_n = \begin{cases} 0, & si\ n \neq 2^m, \\ e_n, & si\ n = 2^m, \end{cases}$$

donde $m \geq 0$. Así que A no es un operador continuo en el espacio de Bergman, que tiene transformada de Berezin

$$\widetilde{A}(z) = \left(1 - |z|^2\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} m(2^m + 1) \left(|z|^2\right)^{2^m}$$

que es acotada en $\mathbb{D}$. Esto es claro ya que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} m(2^m + 1) \left(|z|^2\right)^{2^m} &\leq 3 \sum_{m=1}^{\infty} m 2^{m-1} \left(|z|^2\right)^{2^m} \\ &= 3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} m \left(|z|^2\right)^{2^m} \\ &\leq 3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} (k+1) \left(|z|^2\right)^{k} \\ &= 3 \frac{2|z|^2}{\left(1 - |z|^2\right)^2},\ z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.4 *Sea A el operador diagonal en $L^2_a(\mathbb{D})$ definido por*

$$Ae_n = \begin{cases} 0, & si\ n \neq 2^m, \\ e_n, & si\ n = 2^m, \end{cases}$$

donde $m \geq 0$. Así que $\widetilde{A}(z) = \left(1 - |z|^2\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} (2^m + 1) \left(|z|^2\right)^{2^m} \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$ (ver [1, pág. 392]), pero no es compacto ya que es una proyección sobre un subespacio de dimensión infinita en el espacio de Bergman.

Es conocido (ver [14]) que ninguno de los operadores en los ejemplos anteriores son operadores de Toeplitz con símbolo integrable en $\mathbb{D}$. A pesar de los contraejemplos mencionados, en los últimos 15 años la transformada de Berezin ha sido determinante para estudiar el comportamiento de un operador de Toeplitz en el espacio de Bergman (continuidad, compacidad, pertenencia a las clases de Schatten).

Reproducimos el resultado clásico cuya demostración se encuentra en el libro [13].

Teorema 1.5.5 *Sea f una función positiva e integrable en $\mathbb{D}$.*

1. *El operador de Toeplitz T_f es acotado si y sólo si $\widetilde{f}$ es acotada en $\mathbb{D}$.*
2. *El operador de Toeplitz T_f es compacto si y sólo si $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$.*

En el siguiente capítulo mostramos que si f es un símbolo en $BMO^1(\mathbb{D})$ cuya transformada de Berezin $\tilde{f}$ es acotada en el disco, entonces T_f es un operador acotado. Además mostramos que si $\tilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, entonces T_f es compacto en $L_a^2(\mathbb{D})$.

Para referencia posterior, introducimos la transformada de Berezin de un operador definido en $L_a^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$, como sigue,

$$\widetilde{A}(z) = \langle Ak_{z,p}, k_{z,p'} \rangle, \; z \in \mathbb{D},$$

donde

$$k_{z,p}(\zeta) := \frac{K_z(\zeta)}{\|K_z\|_2^{2/p'}}, \; \zeta \in \mathbb{D}.$$

Observación 1.5.6 *Como $\|k_{z,p}\|_p = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, es claro que cuando A es un operador acotado en $L_a^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$, entonces su transformada de Berezin $\widetilde{A}$ es acotada en $\mathbb{D}$.*

De la Proposición 1.1.2 se sigue que $k_{z,p}$ converge débilmente a 0 cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, así que por la Observación 1.5.1 cuando A es un operador compacto en $L_a^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$, entonces $\widetilde{A}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$.

Capítulo 2

Operadores de Toeplitz con símbolos en $BMO^1(\mathbb{D})$

En este capítulo mostramos que si f es un símbolo en $BMO^1(\mathbb{D})$ cuya transformada de Berezin $\tilde{f}$ es acotada en el disco, entonces T_f es un operador acotado. Además mostramos que si $\tilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, entonces T_f es compacto en $L^2_a(\mathbb{D})$, ver [15]. Es conocido que $BMO^1(\mathbb{D})$ contiene a $L^\infty(\mathbb{D})$ y a las funciones positivas e integrables en $\mathbb{D}$, extendiendo así los resultados de Axler & Zheng (ver [1]), Luecking y Zhu (ver [7, 12]).

2.1. Funciones de oscilación media acotada

A continuación introducimos el p-espacio de funciones de oscilación media acotada en $\mathbb{D}$ con respecto la métrica de Bergman. Recordamos que ψ_z denota el automorfismo del disco que manda $z \in \mathbb{D}$ en 0.

Definición 2.1.1 *Para $1 \leq p < \infty$, decimos que una función integrable en $\mathbb{D}$ tiene oscilación media acotada con respecto la métrica de Bergman, denotado por $f \in BMO^p(\mathbb{D})$, siempre que*

$$sup_{z\in\mathbb{D}} \|f \circ \psi_z(\cdot) - \widetilde{f}(z)\|_p < \infty, \tag{2.1}$$

donde $\|\cdot\|_p$ denota la norma en $L^p(\mathbb{D})$. Definimos

$$\begin{aligned} \|f\|_{BMO^p} &:= sup_{z\in\mathbb{D}} \|f \circ \psi_z(\cdot) - \widetilde{f}(z)\|_p, \\ |||f|||_p &:= \|f\|_{BMO^p} + |\widetilde{f}(0)|. \end{aligned} \tag{2.2}$$

El espacio $BMO^2(\mathbb{D})$ fue introducido por Békollé et. al. en [3] y para un $p \geq 1$ general por Li & Luecking en [8]. En las referencias se muestra que $(BMO^p(\mathbb{D}), |\cdot|_p)$ es un espacio de Banach.

En la literatura existen varias normas equivalentes en $BMO^p(\mathbb{D})$. A continuación consideramos una norma que proporciona una visión geométrica de los espacios $BMO^p(\mathbb{D})$, ya que usa explícitamente la métrica de Bergman. En esta sección denotamos por $D(z)$ al disco hiperbólico con centro en z y radio $1/2$.

Para una funcion integrable f en $\mathbb{D}$, el (1/2-)operador promedio de f está dado por

$$\hat{f}(z) := \frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)} f(w)dA(w).$$

Usando propiedades de la métrica de Bergman y los resultados en [8], se sigue que $\|f\|_{BMO^p}$ es finito si y sólo si

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)} |f(w)-\hat{f}(z)|^p dA(w) < \infty.$$

Así que las funciones en $BMO^p(\mathbb{D})$ tienen oscilación media acotada respecto la métrica de Bergman. Aunque hemos fijado el radio de los discos hiperbólicos, el resultado es válido para cualquier otro radio fijo. Las funciones en $BMO^p(\mathbb{D})$ son localmente p-integrables en $\mathbb{D}$, así que los espacios son diferentes para diferentes p. Usando la desigualdad de Hölder es fácil ver que

$$L^\infty(\mathbb{D}) \subset BMO^p(\mathbb{D}) \subset L^p_{loc}(\mathbb{D}), \text{ para } p \geq 1,$$
$$BMO^q(\mathbb{D}) \subset BMO^p(\mathbb{D}) \subset BMO^1(\mathbb{D}), \text{ para } 1 \leq p < q.$$

Se pueden encontrar detalles adicionales en [8, 11, 13].

Dado que el espacio $BMO^1(\mathbb{D})$ es el más grande entre los $BMO^p(\mathbb{D})$, $p \geq 1$, en adelante estaremos interesados en las funciones en esta clase. La siguiente proposición profundiza sobre las propiedades de las funciones en $BMO^1(\mathbb{D})$. Se han probado propiedades similares para funciones en $BMO^2(\mathbb{D})$ (ver [3]).

Proposición 2.1.2 *Sea $f \in BMO^1(\mathbb{D})$. Entonces*

a) $sup_{z\in\mathbb{D}}(\widetilde{|f|}(z) - |\widetilde{f}(z)|) < \infty$,

b) $\widetilde{f}$ *es Lipschitz continua con respecto la métrica de Bergman,*

c) $sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|\nabla\widetilde{f}(z)| < \infty$,

d) $sup_{z\in\mathbb{D}}\widetilde{|f-\widetilde{f}|}(z) < \infty$.

Prueba. (a) Para $z \in \mathbb{D}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{|f|}(z) - |\widetilde{f}(z)| &= \int_{\mathbb{D}} \left(|f(w)| - |\widetilde{f}(z)|\right) |k_z(w)|^2 dA(w) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} |f(w) - \widetilde{f}(z)||k_z(w)|^2 dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |f \circ \psi_z(v) - \widetilde{f}(z)| dA(v) \\
&= \|f \circ \psi_z(\cdot) - \widetilde{f}(z)\|_1,
\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $w = \psi_z(v)$. Por la Definición 2.1.1 se sigue el resultado.

(b) Para $z, w \in \mathbb{D}$, sea $\alpha(t)$ la geodésica de $z = \alpha(0)$ a $w = \alpha(1)$ en la métrica de Bergman, además denotamos por $s = s(t)$ la longitud de arco de $\alpha(t)$ en la métrica de Bergman. Dado que

$$|\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}(w)| \leq \int_0^1 \left| \frac{d}{dt}\left(\widetilde{f}(\alpha(t))\right) \right| dt,$$

es suficiente estimar $\frac{d}{dt}\left(\widetilde{f}(\alpha(t))\right)$ para $f \in BMO^1(\mathbb{D})$. Usamos la siguiente desigualdad que probamos en la Proposición 1.2.4

$$\left| \frac{d}{dt}\left(\widetilde{f}(\alpha(t))\right) \right| \leq 4 \int_{\mathbb{D}} |f(w) - \widetilde{f}(\alpha(t))||k_{\alpha(t)}(w)| \frac{|\alpha'(t)||w - \alpha(t)|}{|1 - \overline{\alpha(t)}w|^3} dA(w).$$

Dado que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{|\alpha'(t)|}{1 - |\alpha(t)|^2}$$

y además

$$\frac{|w - \alpha(t)|}{|1 - \overline{\alpha(t)}w|} = |\psi_{\alpha(t)}(w)| \leq 1,$$

obtenemos

$$\frac{|\alpha'(t)||w - \alpha(t)|}{|1 - \overline{\alpha(t)}w|^3} = \frac{|\alpha'(t)|}{1 - |\alpha(t)|^2} \frac{1 - |\alpha(t)|^2}{|1 - \overline{\alpha(t)}w|^2} |\psi_{\alpha(t)}(w)| \leq \frac{ds}{dt} |k_{\alpha(t)}(w)|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt}\left(\widetilde{f}(\alpha(t))\right) \right| &\leq 4\frac{ds}{dt} \int_{\mathbb{D}} |f(w) - \widetilde{f}(\alpha(t))||k_{\alpha(t)}(w)|^2 dA(w) \\
&= 4\frac{ds}{dt} \|f \circ \psi_{\alpha(t)}(\cdot) - \widetilde{f}(\alpha(t))\|_1 \leq 4\frac{ds}{dt} \|f\|_{BMO^1}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$|\widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(w)| \leq 4\|f\|_{BMO^1}\int_{\mathbb{D}}\frac{ds}{dt}dt = 4\|f\|_{BMO^1}\beta(z,w).$$

(c) Mostraremos que existe una constante $c>0$ tal que $|\nabla\widetilde{f}(z)| \leq c/(1-|z|^2)$, $z\in\mathbb{D}$, donde $\nabla\widetilde{f}(z)$ es el vector complejo $(\partial\widetilde{f}/\partial x, \partial\widetilde{f}/\partial y)$ para $z=x+iy$ y

$$|\nabla\widetilde{f}(z)|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{f}(z)\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{f}(z)\right|^2.$$

Usando el hecho que $\lim_{h\to 0}(\beta(z+h,z)/|z|)) = 1/(1-|z|^2)$ y la parte (b), tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{f}(z)\right| &\leq \lim_{h\to 0}\frac{\left|\widetilde{f}(x+h+iy)-\widetilde{f}(x+iy)\right|}{|h|}\\ &\leq c\lim_{h\to 0}\frac{\beta(x+h+iy,x+iy)}{|h|} = \frac{c}{1-|z|^2}.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{f}(z)\right| \leq \frac{c}{1-|z|^2},$$

así que $|\nabla\widetilde{f}(z)|^2 \leq 2c^2/(1-|z|^2)^2$.

(d) Dado que $|f-\widetilde{f}|\geq 0$, por [13] tenemos que $\widetilde{|f-\widetilde{f}|}$ es acotado si y sólo si $\widehat{|f-\widetilde{f}|}$ es acotado. Usando la parte (b) y el hecho de que para $w\in D(z)$ se cumple que $1/|D(z)| \sim |k_z(w)|^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{|f-\widetilde{f}|}(z) &= \frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}|f(w)-\widetilde{f}(w)|dA(w)\\ &\leq \frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}\Big(|f(w)-\widetilde{f}(z)|+|\widetilde{f}(z)-\widetilde{f}(w)|\Big)dA(w)\\ &\leq c\int_{\mathbb{D}}|f(w)-\widetilde{f}(z)||k_z(w)|^2dA(w) + \frac{c}{|D(z)|}\int_{D(z)}\beta(z,w)dA(w)\\ &\leq c\|f\circ\psi_z-\widetilde{f}(z)\|_1 + \frac{c}{2} < \infty,\end{aligned}$$

dado que $f\in BMO^1(\mathbb{D})$. ∎

Proposición 2.1.3 *Sea $f\in L^1(\mathbb{D})$.*

a) Sea $\widetilde{f}$ acotada en $\mathbb{D}$. Entonces $\sup_{z\in\mathbb{D}}(\widetilde{|f|}(z)-|\widetilde{f}(z)|)<\infty$ implica que $f\in BMO^1(\mathbb{D})$.

b) Existe $c>0$ tal que $(\widehat{f}(z)-\widetilde{f}(z)) \leq c\|f\circ\psi_z(\cdot)-\widetilde{f}(z)\|_1$ para todo $z\in\mathbb{D}$.

Prueba. (a) Si $\widetilde{f}$ es acotada en $\mathbb{D}$ y $sup_{z\in\mathbb{D}}(\widetilde{|f|}(z) - |\widetilde{f}(z)|) < \infty$, tenemos que $\widetilde{|f|}$ es acotada en $\mathbb{D}$. Por otro lado, como

$$\|f \circ \psi_z(\cdot) - \widetilde{f}(z)\|_1 \le \|f \circ \psi_z(\cdot)\|_1 + |\widetilde{f}(z)| \le \widetilde{|f|}(z) + |\widetilde{f}(z)|,$$

obtenemos que $f \in BMO^1(\mathbb{D})$
(b) Tenemos

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(z) - \widetilde{f}(z)| &\le \frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)} |f(w) - \widetilde{f}(z)| dA(w) \\ &\le c\int_{D(z)} |f(w) - \widetilde{f}(z)||k_z(w)|^2 dA(w) \\ &\le c\|f \circ \psi_z(\cdot) - \widetilde{f}(z)\|_1. \end{aligned}$$

■

2.2. Continuidad de operadores de Toeplitz con símbolo en BMO^1

Como consecuencia de las proposiciones anteriores obtenemos el siguiente corolario que da condiciones suficientes sobre el símbolo para que su correspondiente operador de Toeplitz sea continuo. En particular los incisos a) y c) implican el resultado clásico.

Corolario 2.2.1 *Sea $f \in L^1(\mathbb{D})$.*

a) Si $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ y $\widetilde{f}$ es acotada en $\mathbb{D}$, entonces T_f es acotado en $L^2_a(\mathbb{D})$.

b) Cada $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ se puede escribir como $f = f_1 + f_2$ con f_1 en el espacio de Bloch real y f_2 tal que $sup_{z\in\mathbb{D}}\widetilde{|f_2|}(z) < \infty$.

c) Si $f \ge 0$ en $\mathbb{D}$ y si $\widetilde{f}$ es acotada, entonces $f \in BMO^1(\mathbb{D})$.

d) Para $f \in BMO^1(\mathbb{D})$, $\widetilde{f}$ es acotada en $\mathbb{D}$ si y sólo si $\widehat{f}$ es acotada en $\mathbb{D}$.

Prueba. (a) Usando el hecho de que para cada función $f \in L^1(\mathbb{D})$ tenemos

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}(z)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} f(w)|k_z(w)|^2 dA(w) \right| \\ &\le \int_{\mathbb{D}} |f(w)||k_z(w)|^2 dA(w) = \widetilde{|f|}(z), \end{aligned}$$

se sigue de la Proposition 2.1.2 (a) que siempre que $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ y $\widetilde{f}$ es acotada en $\mathbb{D}$, entonces $\widetilde{|f|}$ también es acotada en $\mathbb{D}$. Dado que $|f| \ge 0$ se sigue del Teorema 1.5.5 (a)

que $T_{|f|}$ es acotado, por lo tanto T_f es acotado.
(b) Basta tomar $f_1 = \widetilde{f}$ y $f_2 = f - \widetilde{f}$. El resto se sigue de la Proposición 2.1.2 (c) y (d).
(c) Para $f \geq 0$ tenemos $\widetilde{|f|}(z) = |\widetilde{f}(z)| = \widetilde{f}(z)$. Si $\widetilde{f}$ es acotada, usando la Proposición 2.1.3 (a) se sigue que $f \in BMO^1(\mathbb{D})$.
(d) Se sigue directamente de la Proposición 2.1.3 (b). ∎

2.3. Compacidad de operadores de Toeplitz con símbolo en BMO^1

Lema 2.3.1 *Sea $f \in L^1(\mathbb{D})$ tal que T_f acotado en $L^2_a(\mathbb{D})$. Para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple lo siguiente:*

a) $(T_f K_z)(u) = K_z(u) P(f \circ \psi_z)(\psi_z(u))$,

b) $\|T_f k_z\|_2 = \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2$,

c) para $f \in BMO^1(\mathbb{D})$, cada $T_{f\circ\psi_z}$ es acotado en $L^2_a(\mathbb{D})$.

Prueba. (a) Tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
(T_f K_z)(u) &= \langle P(fK_z), K_u\rangle \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(w) K_z(w) \overline{K_u(w)} dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(\psi_z(v)) K_z(\psi_z(v)) \overline{K_u(\psi_z(v))} |k_z(v)|^2 dA(v),
\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $w = \psi_z(v)$ y el hecho de que $|\psi'(v)| = |k_z(v)|$. Usando las ecuaciones

$$\begin{aligned}
K_z(\psi_z(v)) k_z(v) &= \frac{1}{1-|z|^2}, \\
\overline{K_u(\psi_z(v)) k_z(v)} &= k_z(v) \overline{K_{\psi_z(u)}(v)},
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
(T_f K_z)(u) &= \int_{\mathbb{D}} (f\circ\psi_z)(v) \frac{1}{1-|z|^2} k_z(u) \overline{K_{\psi_z(u)}(v)} dA(v) \\
&= K_z(u) \int_D (f\circ\psi_z)(v) \overline{K_{\psi_z(u)}(v)} dA(v) \\
&= K_z(u) P(f\circ\psi_z)(\psi_z(u)).
\end{aligned}$$

(b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T_f k_z\|_2^2 &= \|P(fk_z)\|_2^2 \\
&= \int_{\mathbb{D}} |P(fk_z)(w)|^2 dA(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |P(fk_z(u))(\psi_z(u))|^2 |\psi_z'(u)|^2 dA(u).
\end{aligned}$$

Usando el hecho que

$$\overline{K_{\psi_z(u)}(w)}\psi_z'(u) = \overline{k_z(w)K_u(\psi_z(w))},$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |P(fk_z)(\psi_z(u))|^2 |\psi_z'(u)|^2 dA(u) &= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} f(w)k_z(w)\overline{K_{\psi_z(u)}(w)}\psi_z'(u) dA(w) \right|^2 dA(u) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} f(w)k_z(w)\overline{k_z(w)K_u(\psi_z(w))} dA(w) \right|^2 dA(u) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} f(w)|k_z(w)|^2\overline{K_u(\psi_z(w))} dA(w) \right|^2 dA(u) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \left| \int_{\mathbb{D}} f(\psi_z(v))\overline{K_u(v)} dA(v) \right|^2 dA(u) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |P(f\circ\psi_z)(u)|^2 dA(u) \\
&= \|P(f\circ\psi_z)\|_2^2 = \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2^2,
\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $v = \psi_z(w)$. Así $\|T_f k_z\|^2 = \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|^2$.

(c) Dado que $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ se sigue que $f\circ\psi_z \in BMO^1(\mathbb{D})$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Además,

$$\begin{aligned}
\widetilde{f\circ\psi_z}(w) &= \int_{\mathbb{D}} f\circ\psi_z(u)|k_w(u)|^2 dA(u) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(v)|k_w(\psi_z(v))|^2|\psi_z'(v)|^2 dA(v) \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(v)|k_{\psi_z(w)}(v)|^2 dA(v) = \widetilde{f}(\psi_z(w)),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $(\psi_w\circ\psi_z)(v) = \psi_{\psi(w)}(v)$. Así que cuando $\widetilde{f}$ es acotado se sigue que $\widetilde{f\circ\psi_z}$ es acotado para todo $z \in \mathbb{D}$. Por el Corolario 2.2.1 (a), se tiene que si $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ y $\widetilde{f}$ es acotada, entonces cada $T_{f\circ\psi_z}$ es acotado en $L_a^2(\mathbb{D})$. ∎

Lema 2.3.2 *Sean p y ε números positivos tal que $p > 3$ y $1/p < \varepsilon < (1/2)(1 - 1/p)$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |v|^2)^{-2p\varepsilon/(p-1)}}{|1 - \overline{z}v|^{2p(1-2\varepsilon)/(p-1)}} dA(v)$$

es acotado en z.

Prueba. Sean $t = -2p\varepsilon/(p-1)$ y $c = -t-2+2p(1-2\varepsilon)/(p-1)$. Entonces $-2p\varepsilon/(p-1) < (1-1/p)p/(p-1) = 1$ y $c < 0$ ya que

$$\begin{aligned} \frac{2p\varepsilon}{p-1} - 2 + \frac{2p(1-2\varepsilon)}{p-1} &= \frac{2p\varepsilon - 2p + 2 + 2p - 4p\varepsilon}{p-1} \\ &= \frac{2 - 2p\varepsilon}{p-1} < \frac{2 - 2p(1/p)}{p-1} = 0. \end{aligned}$$

Por **??**, dado que $t > -1$ y $c < 0$, tenemos que la integral es acotada en $z \in \mathbb{D}$. ■

Teorema 2.3.3 *Sea $f \in BMO^1(\mathbb{D})$. Si $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, entonces T_f es compacto en $L^2_a(\mathbb{D})$.*

Prueba. Paso 1 Sea $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ con $\widetilde{f}$ acotada en $\mathbb{D}$. Entonces

$$sup_{z\in\mathbb{D}} \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p < \infty, \text{ para todo } p \geq 1. \tag{2.3}$$

Prueba Paso 1 Para funciones analíticas g sabemos

$$\|g\|_p \sim |g(0)| + \|(1-|z|^2)g'(z)\|_p.$$

El espacio de Bloch B está definido como sigue

$$B = \{g \text{ analítica en } \mathbb{D} : sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)| < \infty\},$$

que es un espacio de Banach respecto la norma

$$\|g\|_B = |g(0)| + \|(1-|z|^2)g'(z)\|_\infty.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \|g\|_p &\leq c\left(|g(0)| + \|(1-|z|^2)g'(z)\|_p\right) \\ &\leq c\left(|g(0)| + \|(1-|z|^2)g'(z)\|_\infty\right) = c\|g\|_B. \end{aligned}$$

Se sabe que la proyección de Bergman es un operador acotado de $BMO^1(\mathbb{D})$ en B (ver [8]). Como $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ tenemos que $f \circ \psi_z \in BMO^1(\mathbb{D})$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que

$P(f\circ\psi_z)\in B$. Por lo tanto existe una constante $c>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|P(f\circ\psi_z)\|_p &\leq c\|P(f\circ\psi_z)\|_B \leq c\|\|f\circ\psi_z\|\|_1\\ &= c\left(|\widetilde{f\circ\psi_z}(0)+sup_{z\in\mathbb{D}}\|f\circ\psi_z\circ\psi_w(\cdot)-\widetilde{f\circ\psi_z}(w)\|_1\right)\\ &= c\left(|\widetilde{f}(z)|+sup_{\psi_z(w)\in\mathbb{D}}\|f\circ\psi_{\psi_z(u)}(\cdot)-\widetilde{f}(\psi_z(w))\|_1\right)\\ &= c\left(|\widetilde{f}(z)|+sup_{u\in\mathbb{D}}\|f\circ\psi_u(\cdot)-\widetilde{f}(u)\|_1\right).\end{aligned}$$

Se sigue que para $f\in BMO^1(\mathbb{D})$ con $\widetilde{f}$ acotada en $\mathbb{D}$ se tiene

$$sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\| = sup_{z\in\mathbb{D}}\|P(f\circ\psi_z)\|_p<\infty,\ \text{para todo } p\geq 1.$$

Paso 2 Sea T_f acotado en L^2_a y supongamos que $\widetilde{f}(z)\to 0$ cuando $z\to\partial\mathbb{D}$. Entonces $T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\to 0$ débilmente cuando $z\to\partial\mathbb{D}$.

Prueba Paso 2 Sea A un operador acotado en $L^2_a(\mathbb{D})$ y sea U_z el operador unitario en $L^2_a(\mathbb{D})$ definido por

$$U_z g = (g\circ\psi_z)\psi'_z.$$

Si $\widetilde{A}(z)\to 0$ cuando $z\to\partial\mathbb{D}$, entonces $U_zAU_z\mathbf{1}\to 0$ débilmente cuando $z\to\partial\mathbb{D}$, ver [1, pág. 396].

Paso 3 Sea $f\in BMO^1(\mathbb{D})$. Si $\widetilde{f}(z)\to 0$ cuando $z\to\partial\mathbb{D}$, entonces $\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2\to 0$ cuando $z\to\partial\mathbb{D}$.

Prueba Paso 3 Escribimos

$$\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2^2=\left(\int_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}}+\int_{r\overline{\mathbb{D}}}\right)|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}(w)|^2dA(w),$$

y hacemos estimaciones de los términos de la derecha. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y el Paso 1 tenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}}|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}(w)|^2dA(w) &\leq \left(\int_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}}|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}(w)|^4dA(w)\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}}dA(w)\right)^{1/2}\\ &\leq \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_4^2(1-r^2)^{1/2}\leq c(1-r^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Así que la integral sobre $\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}$ se puede hacer tan pequena como queramos eligiendo un r cercano a 1. Para tal r, la integral sobre $r\overline{\mathbb{D}}$ se puede hacer pequena para $|z|$ cerca de 1, ya que por el Paso 2, $T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\to 0$ débilmente y por lo tanto uniformemente a 0 en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, en particular en cada conjunto $r\overline{\mathbb{D}}$ con $0\leq r<1$.

Paso 4 Sea $f\in BMO^1(\mathbb{D})$. Si $\widetilde{f}(z)\to 0$ cuando $z\to\partial\mathbb{D}$, entonces $\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p\to 0$ cuando $z\to\partial\mathbb{D}$.

Prueba Paso 4 Aquí usamos la interpolación en los espacios $L^p(\mathbb{D})$. Para $1 \leq p < 2$ tenemos

$$\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p^p \leq \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_1^{2-p}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2^{2p-2} \leq \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2^p.$$

Cuando $p > 2$ tenemos

$$\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p^p \leq \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_{2p-2}^{p-1}.$$

En ambos casos el resultado se sigue de los Pasos 1 y 3.

Paso 5 Sea $f \in BMO^1(\mathbb{D})$ tal que $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. Para $0 < r < 1$ sea $T_r^f : L_a^2(\mathbb{D}) \to L^2(\mathbb{D})$ definido por

$$T_r^f = M_{\chi_{r\mathbb{D}}}T_f,$$

donde $M_{\chi_{r\mathbb{D}}}$ es el operador de multiplicación en $L_a^2(\mathbb{D})$, con $\chi_{r\mathbb{D}}$ la función caracteristica de $r\mathbb{D}$. Denotamos por T^f al operador T_f pensado como un operador de $L_a^2(\mathbb{D})$ en $L^2(\mathbb{D})$. Entonces T_r^f es compacto y $\lim_{\to 0}\|T^f - T_r^f\| \to 0$.

Prueba del Paso 5 Es bien conocido que el operador $M_{\chi_{r\mathbb{D}}}$ es compacto en $L^2(\mathbb{D})$ ya que la función caracteristica se anula en $|z| \geq r$. Así que T_r^f es compacto por que es la composición de un operador compacto y un operador acotado.

Para $g \in L_a^2(\mathbb{D})$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(T^f - T_r^f\right)g(z) &= ((1-\chi_{r\mathbb{D}})T_f g)(z) \\
&= \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)\langle T_f g, K_z\rangle = \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)\langle g, T_{\overline{f}}K_z\rangle \\
&= \int_{\mathbb{D}} g(u)\chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)\overline{T_{\overline{f}}K_z}(u)dA(u).
\end{aligned}$$

Así que $T^f - T_r^f$ es un operador integral con kernel $K_r^f(z,u) := K_r^f\chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)\overline{T_{\overline{f}}K_z}(u)$. Por el criterio de Schur, basta mostrar que existe una función medible h en $\mathbb{D}$ y constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}}\left|K_r^f(z,u)\right|h(z)dA(z) &\leq c_1 h(u), \text{ para todo } u \in \mathbb{D} \\
\int_{\mathbb{D}}\left|K_r^f(z,u)\right|h(u)dA(u) &\leq c_2 h(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{D},
\end{aligned}$$

para concluir que $\|T^f - T_r^f\|^2 \leq c_1c_2$.

Sean $p > 3$ y $\varepsilon > 0$ tal que $1/p < \varepsilon < (1-1/p)/2$. Ponemos $h(z) = (K_z(z))^\varepsilon = (1-|z|^2)^{-2\varepsilon}$. Mostraremos que se cumplen las hipótesis en el criterio de Schur con constantes

$$c_1 = c\sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p, \; c_2 = \sup_{|z|\geq r}\|T_{\overline{f}\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p.$$

Tenemos que

$$\int_{\mathbb{D}} \left|K_r^f(z,u)\right| h(u)dA(u) = \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z) \int_{\mathbb{D}} |T_{\overline{f}} K_z(u)|(K_u(u))^{\varepsilon} dA(u),$$

que por el Lema 2.3.1 es igual a

$$\chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z) \int_{\mathbb{D}} |K_z(u)||P(\overline{f}\circ\psi_z)(\psi_z(u))|(K_u(u))^{\varepsilon} dA(u).$$

Hacemos el cambio de variable $\psi_z(u) = v$ y por la desigualdad de Hölder con p como antes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \left|K_r^f(z,u)\right| h(u)dA(u) &= \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z) \int_{\mathbb{D}} |P(\overline{f}\circ\psi_z)(v)||K_z(\psi_z(v))| \\
&\quad \times (K_{\psi_z(v)}(\psi_z(v)))^{\varepsilon}|k_z(v)|^2 dA(v) \\
&= \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z) \int_{\mathbb{D}} |P(\overline{f}\circ\psi_z)(v)| \frac{1}{1-|z|^2}\frac{1}{1-|v|^2}\frac{dA(v)}{(1-|\psi_z(v)|^2)^{2\varepsilon-1}} \\
&\leq \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z) \frac{1}{1-|z|^2}\left(\int_{\mathbb{D}} |P(\overline{f}\circ\psi_z)(v)|^p dA(v)\right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|v|^2)^{-p/(p-1)}}{(1-|\psi_z(v)|^2)^{(2\varepsilon-1)p/(p-1)}} dA(v)\right)^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

Donde hemos usado la igualdad

$$1-|\psi_z(v)|^2 = \frac{(1-|z|)^2(1-|v|)^2}{|1-\overline{z}v|^2}.$$

Usando de nuevo la igualdad anterior y el Lema 2.3.2 en la última desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |K_r^f(z,u)|h(u)dA(u) &\leq \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)\frac{1}{1-|z|^2}\|P\left(\overline{f}\circ\psi_z\right)\|_p \\
&\times \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1-|v|^2)^{2p\varepsilon/(p-1)}} \frac{|1-\overline{z}v|^{2p(2\varepsilon-1)/(p-1)}}{(1-|z|^2)^{p(2\varepsilon-1)/(p-1)}} dA(v)\right)^{(p-1)/p} \\
&= \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)\|T_{\overline{f}\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p \frac{1}{(1-|z|^2)^{2\varepsilon}} \\
&\times \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|v|^2)^{-2p\varepsilon/(p-1)}}{|1-\overline{z}v|^{2p(1-2\varepsilon)/(p-1)}} dA(v)\right)^{(p-1)/p} \\
&\leq c\sup_{|z|\geq r} |T_{\overline{f}\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p h(z) = c_2 h(z).
\end{aligned}$$

De una manera similar obtenemos la primera desigualdad en la hipótesis del criterio de Schur, notando que

$$\int_{\mathbb{D}} |K_r^f(z,u)|h(z)dA(z) = \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)\int_{\mathbb{D}} |T_f K_u(z)|\,(K_z(z))^{\varepsilon}\,dA(z),$$

y usando la simetría.

Usando el mismo argumento de antes, el lado derecho es menor o igual que

$$c\sup_{|u|\geq r} |T_{\overline{f}\circ\psi_u}\mathbf{1}\|_p h(u) \leq c\sup_{u\in\mathbb{D}} |T_{\overline{f}\circ\psi_u}\mathbf{1}\|_p h(u) = c_1 h(u).$$

Así por el criterio de Schur tenemos $\|T^f - T_r^f\|^2 \leq c_1c_2$, donde c_1 no depende de r y por el Paso 4, $c_2 \to 0$ cuando $r \to 1$. ■

Lema 2.3.4 *Sea $f \in L^1(\mathbb{D})$ tal que T_f es acotado en $L_a^2(\mathbb{D})$ y $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. Si existe $p > 3$ tal que $sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p < \infty$, entonces para cada $q < p$ se cumple $sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q < \infty$ y $\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$.*

Prueba. Dado que $p > q$ se sigue que $sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q < \infty$. Sea $s = p/q$ y t tal que $1/t + 1/s = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q^q &= \int_{r\mathbb{D}} |T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}(w)|^q dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}(w)|^q dA(w)\\ &= I_1(z) + I_2(z).\end{aligned}$$

Como en el Paso 2 del teorema principal, dado que $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, se sigue que $T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1} \to 0$ débilmente cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, así que $I_1(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}I_2(z) &\leq \left(\int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}(w)|^{qs} dA(w)\right)^{1/s}\left(\int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} \mathbf{1}dA(w)\right)^{1/t}\\ &\leq \|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p^{p/s}\left(1-r^2\right)^{1/t}\end{aligned}$$

que se puede hacer arbitrariamente pequeno tomando r cerca de 1. Así que $\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. ■

Teorema 2.3.5 *Sea $f \in L^1(\mathbb{D})$ tal que T_f es acotado en $L_a^2(\mathbb{D})$ y supongamos que existe $p > 3$ tal que*

$$sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p < \infty,\ sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{\overline{f}\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p < \infty.$$

Si $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, entonces T_f es compacto en $L_a^2(\mathbb{D})$.

Prueba. Por el lema anterior existe $q > 3$ tal que $sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q < \infty$ y $\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. Lo mismo se cumple con $\|T_{\overline{f}\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_q$. Revisando el Paso 5 del Teorema 2.3.3 es suficiente probar que $\lim_{r\to 1}\|T_r^f - T^f\| = 0$. Por lo tanto, T_f es compacto en $L_a^2(\mathbb{D})$. ■

Hasta el momento se desconoce si para un símbolo general f tal que T_f es acotado en $L_a^2(\mathbb{D})$ y que satisface $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, se tiene que T_f es compacto. Cuando T_f es acotado en $L_a^2(\mathbb{D})$ se cumple que $\sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_2 < \infty$, así que tiene sentido plantearse el siguiente problema.

Problema Sea $f \in L^1(\mathbb{D})$ tal que T_f es acotado en $L_a^2(\mathbb{D})$ y que satisface

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{f\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p < \infty, \text{ y } \sup_{z\in\mathbb{D}}\|T_{\overline{f}\circ\psi_z}\mathbf{1}\|_p < \infty$$

para algún $p > 2$. Entonces ¿el operador de Toeplitz T_f es compacto si $\widetilde{f}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$?

Capítulo 3

Operadores de Toeplitz con símbolos localmente integrables

En este capítulo consideramos símbolos localmente integrables y damos condiciones suficientes para que su correspondiente operador de Toeplitz sea continuo o compacto en el p-espacio de Bergman $L^p_a(\mathbb{D})$.

3.1. Continuidad de operadores de Toeplitz con símbolo loc. integrable

Primero introducimos una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de $\mathbb{D}$ que son rectángulos en coordenadas polares y cuyos radios hiperbólicos están acotados superiormente e inferiormente.

Definición 3.1.1 *Denotamos por $\mathcal{D}$ la familia que consiste de los conjuntos*

$$D(r,\theta) = \left\{ \rho e^{i\phi} : r \leq \rho \leq \frac{1}{2} + \frac{r}{2}, \theta \leq \phi \leq \theta + \pi(1-r) \right\}$$

para todo $0 < r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Observación 3.1.2 *Cuando el símbolo a sólo es localmente integrable en $\mathbb{D}$, tenemos que dar una definición del correspondiente operador de Toeplitz T_a. Para ello elegimos y fijamos una sucesión $(D_n)_n \subset \mathcal{D}$. Para cada $f \in L^p_a(\mathbb{D})$ consideramos la sucesión de funciones*

$$F_n(z) := \int_{D_n} \frac{a(\zeta) f(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2} dA(\zeta),$$

y pedimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converga absolutamente para cada $z \in \mathbb{D}$ y defina una función en $L^p(\mathbb{D})$. Bajo este supuesto, $T_a f$ se define como la suma de tal serie.

Dado $D := D(r,\theta) \in \mathcal{D}$ y $\zeta = \rho e^{i\phi} \in D(r,\theta)$, consideramos la función

$$\widehat{a}_D(\zeta) := \frac{1}{|D|} \int_r^\rho \int_\theta^\phi a(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varphi d\varrho.$$

El siguente resultado da una condición suficiente para que un operador de Toeplitz sea continuo en $L_a^p(\mathbb{D})$ cuando su símbolo es localmente integrable en $\mathbb{D}$.

Teorema 3.1.3 *Supongamos que $a \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$ y que existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\widehat{a}_D(\zeta)| \leq C \tag{3.1}$$

para todo $D := D(r,\theta) \in \mathcal{D}$ y todo $\zeta \in \mathbb{D}$ Entonces el operador de Toeplitz $T_a : L_a^p(\mathbb{D}) \to L_a^p(\mathbb{D})$ está bien definido y es acotado para todo $1 < p < \infty$. Además existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|T_a\| \leq C_1 \sup_{D \in \mathcal{D}, \zeta \in D} |\widehat{a}_D(\zeta)|.$$

Prueba. Para $n = n(m,\mu)$ ponemos

$$\begin{array}{ll} r_n = 1 - 2^{-m+1}, & r'_n = 1 - 2^{-m}, \\ \theta_n = \pi(\mu - 1)2^{-m+1}, & \theta'_n = \pi\mu 2^{-m+1}, \end{array}$$

y consideramos el correspondiente rectángulo

$$D_n := D(r_n, \theta_n).$$

Sea $f \in L_a^p(\mathbb{D})$. Fijamos $n = n(m,\mu)$ y reescribimos la siguiente integral usando integración por partes,

$$
\begin{aligned}
F_n(z) &:= \int_{D_n} \frac{a(\zeta)f(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})^2} dA(\zeta) = \int_{r_n}^{r_n'} \int_{\theta_n}^{\theta_n'} \frac{a(re^{i\theta})f(re^{i\theta})}{(1-zre^{-i\theta})^2} r dr d\theta \\
&= \int_{r_n}^{r_n'} \left(\int_{\theta_n}^{\theta_n'} ra(re^{i\varphi}) d\varphi \right) \frac{f(re^{i\theta_n'})}{(1-zre^{-i\theta_n'})^2} dr \\
&\quad - \int_{r_n}^{r_n'} \int_{\theta_n}^{\theta_n'} \left(\int_{\theta_n}^{\theta} a(re^{i\varphi}) d\varphi \right) \partial_\theta \frac{f(re^{i\theta})}{(1-zre^{-i\theta})^2} d\theta r dr \\
&= \left(\int_{r_n}^{r_n'} \int_{\theta_n}^{\theta_n'} a(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varphi d\varrho \right) \frac{f(r_n' e^{i\theta_n'})}{(1-zr_n' e^{-i\theta_n'})^2} \\
&\quad - \int_{r_n}^{r_n'} \left(\int_{r_n}^{r} \int_{\theta_n}^{\theta_n'} a(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varphi d\varrho \right) \partial_r \frac{f(re^{i\theta_n'})}{(1-zre^{-i\theta_n'})^2} dr \\
&\quad - \int_{\theta_n}^{\theta_n'} \left(\int_{r_n}^{r_n'} \int_{\theta_n}^{\theta} a(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varphi d\varrho \right) \partial_\theta \frac{f(r_n' e^{i\theta})}{(1-zr_n' e^{-i\theta})^2} d\theta \\
&\quad + \int_{r_n}^{r_n'} \int_{\theta_n}^{\theta_n'} \left(\int_{r_n}^{r} \int_{\theta_n}^{\theta} a(\varrho e^{i\varphi}) \varrho d\varphi d\varrho \right) \partial_r \partial_\theta \frac{f(re^{i\theta})}{(1-zre^{-i\theta})^2} d\theta dr \\
&=: F_{1,n}(z) + F_{2,n}(z) + F_{3,n}(z) + F_{4,n}(z).
\end{aligned}
$$

A continuación acotamos los términos $F_{j,n}(z)$. Usando (3.1), la desigualdad

$$
\left| f(r_n' e^{i\theta_n'}) \right| \leq \frac{C}{|D_n|} \int_{D_n} |f(\zeta)| \, dA(\zeta), \tag{3.2}
$$

y dado que

$$
\left| 1 - zr_n' e^{-i\theta_n'} \right| \geq C \left| 1 - z\overline{\zeta} \right| \tag{3.3}
$$

para todo $\zeta \in D_n$, tenemos

$$
|F_{1,n}(z)| \leq C \int_{D_n} \frac{|f(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^2} dA(\zeta). \tag{3.4}
$$

Para estimar $F_{2,n}(z)$ primero calculamos

$$
\partial_r \frac{f(re^{i\theta})}{(1-zre^{-i\theta})^2} = \frac{2ze^{-i\theta} f(re^{i\theta})}{(1-zre^{-i\theta})^3} + \frac{e^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{(1-zre^{-i\theta})^2}.
$$

Usando la estimación para f' como en (3.2) y (3.3) tenemos

$$
\left| \partial_r \frac{f(re^{i\theta_n'})}{(1-zre^{-i\theta_n'})^2} \right| \leq \frac{C}{|D_n|} \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^3} + \frac{|f'(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta).
$$

Usando (3.1), que $|r_n' - r_n| \leq C|1 - z\overline{\zeta}|$ y $|r_n' - r_n| \leq C(1 - |\zeta|^2)$ para todo $\zeta \in D_n$, obtenemos

$$\begin{aligned} |F_{2,n}(z)| &\leq C' \int_{r_n}^{r_n'} \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^3} + \frac{|f'(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta)\, dr \\ &\leq C'' \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} + \frac{(1 - |\zeta|^2)\, |f'(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta)\, . \end{aligned}$$

Para estimar $F_{3,n}(z)$ procedemos de manera similar, calculamos

$$\partial_\theta \frac{f(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^2} = \frac{2izre^{-i\theta} f(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^3} + \frac{rie^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^2}.$$

Se sigue que

$$\left| \partial_\theta \frac{f(r_n' e^{i\theta})}{(1 - zr_n' e^{-i\theta})^2} \right| \leq \frac{C}{|D_n|} \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^3} + \frac{|f'(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta)\, .$$

Usando que $|\theta_n - \theta_n'| = \pi\, |r_n' - r_n|$ tenemos

$$\begin{aligned} |F_{3,n}(z)| &\leq C' \int_{\theta_n}^{\theta_n'} \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^3} + \frac{|f'(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta)\, dr \\ &\leq C'' \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} + \frac{(1 - |\zeta|^2)\, |f'(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta)\, . \end{aligned}$$

Finalmente para estimar $F_{4,n}$ calculamos

$$\partial_r \partial_\theta \frac{f(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^2} = \frac{4izrf'(re^{i\theta}) + 2ize^{-i\theta} f(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^3} + \frac{6iz^2 re^{-2i\theta} f(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^4} + \frac{rie^{2i\theta} f''(re^{i\theta}) + ie^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^2}.$$

Como antes, tenemos

$$\left| \partial_r \partial_\theta \frac{f(re^{i\theta})}{(1 - zre^{-i\theta})^2} \right| \leq$$

por lo tanto

$$|F_{4,n}(z)| \leq C \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} + \frac{(1 - |\zeta|^2)\, |f'(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} + \frac{(1 - |\zeta|^2)^2\, |f''(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta)\, .$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |F_n(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{4} |F_{j,n}(z)| \\ &\leq C \int_{D_n} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} + \frac{(1 - |\zeta|^2)\, |f'(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} + \frac{(1 - |\zeta|^2)^2\, |f''(\zeta)|}{|1 - z\overline{\zeta}|^2} \right) dA(\zeta)\, . \end{aligned}$$

La proyección de Bergman maximal es un operador acotado en $L^p(\mathbb{D})$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left\| \int_{\mathbb{D}} \frac{|g(\zeta)|}{|1 - z\bar{\zeta}|^2} dA(\zeta) \right\|_p \leq C \|g\|_p$$

para todo $g \in L^p(\mathbb{D})$, usar (1.31) con $\alpha = a = b = 0$. Además las funciones $(1-|\zeta|^2)\,|f'(\zeta)|$ y $(1-|\zeta|^2)^2\,|f''(\zeta)|$ pertenecen a $L^p(\mathbb{D})$ por el Teorema 1.3.4.

Se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(z)|$$

está acotada puntualmente por una función en $L^p(\mathbb{D})$, así que converge para casi todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, el operador de Toeplitz se puede definir como se explicó en la Observación 3.1.2. Además por los mismos argumentos,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z) \right\|_p \leq CC_\alpha \|f\|_p,$$

lo que prueba el acotamiento de T_a. ∎

Ejemplo 3.1.4 *La siguiente función no es integrable en $\mathbb{D}$ pero es localmente integrable,*

$$a(re^{i\theta}) := \begin{cases} \frac{1}{r(1-r)} \sin \frac{1}{(1-r)}, & r \geq \frac{1}{2} \\ 1, & r < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dado un rectángulo $D = D(1-2\delta, \theta)$ con δ suficientemente pequeno y $\zeta = \rho e^{i\phi} \in D$, usamos el cambio de variable $y = 1/(1-\rho)$ para obtener

$$|D||\widehat{a}_D(\zeta)| = \int_\theta^\phi \left| \int_{1-2\delta}^{\rho} \frac{1}{(1-\eta)} \sin \frac{1}{(1-\eta)} d\eta \right| \leq \pi\delta \left| \int_{1/(2\delta)}^{1/(1-\rho)} \frac{1}{y} \sin y dy \right|.$$

Dividimos el intervalo de integración en subintervalos de la forma $I_n = [2\pi n, 2\pi(n+1)]$, reemplazamos (por la periodicidad de la función seno) sobre cada I_n la función y^{-1} por $y^{-1} - (2\pi(n+1))^{-1}$, la cual se acota por Cn^{-2} sobre I_n. Sumando sobre n y acotando $|\sin y|$ por 1, el módulo de la integral $\int_{1/(2\delta)}^{1/(1-\rho)} y^{-1} \sin y dy$ está acotado por $C\delta$. Dado que $|D|$ es del orden de δ^2, se sigue que a satisface las hipótesis del teorema.

Corolario 3.1.5 *Sean $1 < p < \infty$ y $a \geq 0$ una función localmente integrable en $\mathbb{D}$. Entonces el operador de Toeplitz $T_a : L^p_a(\mathbb{D}) \to L^p_a(\mathbb{D})$ es acotado si y sólo si $\widetilde{a}$ es acotado en $\mathbb{D}$ si y sólo si $\hat{a}$ es acotado en $\mathbb{D}$.*

Prueba. Una parte se sigue de la Observación 1.5.6. ∎

3.2. Compacidad de operadores de Toeplitz con símbolo loc. integrable

A continuación consideramos una condición suficiente sobre un símbolo localmente integrable en $\mathbb{D}$ para que su correspondiente operador de Toeplitz sea compacto en $L_a^p(\mathbb{D})$, $1 < p < \infty$.

Teorema 3.2.1 *Supongamos que* $a \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$ *y que*

$$\lim_{d(D)\to 0} \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} |\hat{a}_D(\zeta)| = 0, \tag{3.5}$$

donde

$$d(D) := dist(D, \partial\mathbb{D}) = \inf\{|z-w| : z \in D, |w| = 1\}.$$

Entonces el operador de Toeplitz $T_a : L_a^p(\mathbb{D}) \to L_a^p(\mathbb{D})$ *es un operador compacto para todo* $1 < p < \infty$.

Prueba. Tomamos una sucesión arbitraria $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset L_a^p(\mathbb{D})$ con $\|f_k\|_p \leq 1$ para todo k y tal que $f_k \to 0$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Es suficiente probar que $\|T_a f_k\|_p \to 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Consideramos las expresiones $F_{j,n}(z)$ de la sección anterior y hacemos $F_{j,n,k}(z)$ igual a $F_{j,n}(z)$ con f_k en vez de f. Usando (3.5), procediendo como en la obtención de (3.2), (3.3) y (3.4) obtenemos la estimación

$$|F_{1,n,k}(z)| \leq C\varepsilon_n \int_{D_n} \frac{|f_k(\zeta)|}{|1-z\bar{\zeta}|} dA(\zeta),$$

donde podemos suponer que $\varepsilon_n \to 0$. Elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n < \varepsilon$ for $n \geq N$.

Dado que la cerradura del conjunto $D^{(N)} := \cup_{n\leq N} D_n$ es compacto, existe una constante $C_N > 0$ tal que

$$\sum_{n\leq N} \int_{D_n} \frac{1}{|1-z\bar{\zeta}|^2} dA(\zeta) \leq C_N$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Dado que la sucesión converge a 0 sobre subconjuntos compactos, podemos elegir $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_k(\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{1+C_N}$$

para todo $k \geq M$ y $\zeta \in D^{(N)}$.

Para todo $k \geq M$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |F_{1,n,k}(z)| &\leq \sum_{n\leq N} \int_{D_n} \frac{|f_k(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^2} dA(\zeta) + \sum_{n>N} \int_{D_n} \varepsilon_n \frac{|f_k(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^2} dA(\zeta) \\ &\leq \sum_{n\leq N} \frac{\varepsilon}{1+C_N} \int_{D_n} \frac{1}{|1-z\overline{\zeta}|^2} dA(\zeta) + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} \frac{|f_k(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^2} dA(\zeta) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \int_{\mathbb{D}} \frac{|f_k(\zeta)|}{|1-z\overline{\zeta}|^2} dA(\zeta).\end{aligned}$$

Las otras expresiones $F_{j,n,k}(z)$, $j = 2, 3, 4$ se tratan de manera similar, teniendo en mente que las derivadas de las funciones f_k convergen a 0 uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Argumentando como en la prueba del Teorema 3.1.3 obtenemos que $\|T_a f_k\|_p \leq C\varepsilon$ para k suficientemente grande. ■

Corolario 3.2.2 *Supongamos que $a \in L^1_{loc}(\mathbb{D})$ y que*

$$\lim_{d(D)\to 0} \sup_{\zeta \in D} |\widehat{a}_D(\zeta)| = 0,$$

donde

$$d(D) := dist(D, \partial\mathbb{D}) := inf\{|z-w| : z \in D, |w| = 1\}.$$

Entonces el operador de Toeplitz $T_a : L^p_a(\mathbb{D}) \to L^p_a(\mathbb{D})$ es compacto para todo $1 < p < \infty$.

Prueba. La demostración es similar a la del Corolario 3.1.5. Sólo notamos que dado que $k_{z,p} \to 0$ débilmente en $L^p_a(\mathbb{D})$, tenemos que $\widetilde{a} \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. ■

Capítulo 4

Operadores de Toeplitz con símbolos distribucionales

En este capítulo consideramos una definición alternativa de operador de Toeplitz, cuyo símbolo está en un espacio de Sobolev pesado de orden negativo.

En este contexto, se dan condiciones suficientes sobre el símbolo para que el correspondiente operador de Toeplitz sea continuo o compacto.

4.1. Espacios de Sobolev con peso

Definimos la función de peso estándar $\nu : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+$ como sigue

$$\nu(z) = 1 - |z|^2.$$

Dado $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $W_\nu^{m,1} := W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$ el espacio de Sobolev pesado que consiste de funciones medibles en $\mathbb{D}$ tal que sus derivadas distribucionales satisfacen

$$\begin{aligned} \|f; W_\nu^{m,1}\| &:= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f(z) : L^1_{\nu^\alpha}\| \\ &:= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{D}} |D^\alpha f(z)| \nu(z)^{|\alpha|} dA(z) < \infty. \end{aligned}$$

Observación 4.1.1 *Recordamos que el espacio de funciones de prueba $C_0^\infty(\mathbb{D})$ en el disco no es denso en el espacio de Sobolev (sin peso) $W^{m,1}(\mathbb{D})$. Este hecho desagradable complica el tratamiento del espacio dual.*

No obstante el siguiente hecho se cumple en el caso de nuestros espacios de Sobolev pesados. El resultado es conocido pero hacemos un bosquejo de la prueba.

Lema 4.1.2 *The subespacio vectorial $C_0^\infty(\mathbb{D})$ es denso en $W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$.*

Prueba. Primero notamos que si el soporte de una función $g \in W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$ está contenido en un disco compacto $\Omega_r := |z| \leq r$ con $0 < r < 1$, entonces puede ser aproximado en $W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$ por un elemento en $C_0^\infty(\mathbb{D})$. Esto se sigue al elegir el conjunto Ω' como el disco Ω_s con $s > r$. La convergencia $\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon \star g = g$ en $W^{m,1}(\Omega')$ (usando la notación del libro de Adams) también implica la convergencia en $W^{m,1}(\mathbb{D})$.

En consecuencia, es suficiente aproximar una función arbitraria $f \in W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$ por un elemento de soporte compacto en $W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$. Para esto, notamos que es posible definir una sucesión de funciones de corte, radiales, $\chi_n \in C_0^\infty$, con $n \geq 4$ tal que $\chi_n(z) = \chi_n(|z|)$ para $z \in \mathbb{D}$, $0 \leq \chi_n(r) \leq 1$ para todo $0 \leq r < 1$, $\chi_n(r) = 1$ para $0 \leq r \leq 1 - 3/n$, $\chi_n(r) = 0$ para $1 - 1/n \leq r \leq 1$, y que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{d^k \chi_n(r)}{dr^k} \right| \leq C_k n^k \tag{4.1}$$

para todo $0 < r < 1$. De hecho, podemos definir χ_n como la convolución usual

$$\chi_n(r) = \int_{-\infty}^{\infty} X_{[-1+2/n,1-2/n]}(\varrho) J_n(r-\varrho) d\varrho, \tag{4.2}$$

donde $X_{[-1+2/n,1-2/n]}$ es la función característica del intervalo $[-1+2/n, 1-2/n]$ y J_n es la función alisadora estándar

$$J_n(r) = \begin{cases} Cne^{-1/\left(1-(nr)^2\right)} & \text{si } |r| \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } |r| > 1/n, \end{cases}$$

y $C > 0$ es una constante independiente de n que hace $\int_{-\infty}^{\infty} J_n dr = 1$. La propiedad(4.1) se sigue ahora al diferenciar J_n bajo el signo integral en (4.2).

Entonces una buena aproximación de una función dada $f \in W_\nu^{m,p}$ es $\chi_n f$ para un n suficientemente grande. Para ver esto, en el caso $m = 1$, definimos $D_n := \{z : |z| \geq 1 - 3/n\}$ y estimamos uno de los términos ($\alpha = (1,0)$) como sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial}{\partial x}(f - \chi_n f) \right| \nu dA &\leq \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |1 - \chi_n| \nu dA + \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right| |f| \nu dA \\ &\leq C \int_{D_n} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \nu dA + C \int_{D_n} |f| n \left(1 - \left(1 - \frac{3}{n}\right)\right) \nu dA \\ &= \int_{D_n} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \nu dA + C' \int_{D_n} |f| \nu dA. \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde hemos usado los hechos que $\partial\chi_n/\partial x$ se anula fuera de D_n y $|\partial\chi_n/\partial x| \leq Cn$ en D_n por (4.1). Se sigue que (4.4) se aproxima a 0 cuando $n \to 0$, dado que el área de D_n tiende a 0 y las integrales

$$\int_{\mathbb{D}} |f| dA \text{ y } \int_{\mathbb{D}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \nu dA$$

son acotadas por $\|f; W_\nu^{m,1}\|$. Los otros términos en la definición de la norma de $W_\nu^{m,1}$ tienen estimaciones más fáciles o similares, lo cual prueba el lema para $m = 1$. La idea para m más grandes es parecido: las potencias más altas de ν cancelan el crecimiento de las derivadas más altas. ■

Como consecuencia de lo anterior es posible describir el espacio dual de $W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$.

Definición 4.1.3 *Dado $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $W_\nu^{-m,\infty} := W_\nu^{-m,\infty}(\mathbb{D})$ el espacio de Sobolev pesado consistente de distribuciones a en $\mathbb{D}$, que pueden ser escritas en la forma*

$$a = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha b_\alpha, \tag{4.4}$$

donde

$$b_\alpha \in L^\infty_{\nu^{-\alpha}} := L^\infty_{\nu^{-\alpha}}(\mathbb{D}),$$

es decir,

$$\|b_\alpha; L^\infty_{\nu^{-\alpha}}\| := \sup ess_{\mathbb{D}} \nu(z)^{-\alpha} |b_\alpha(z)| < \infty.$$

Aquí la función b_α es considerada una distribución como lo es una función localmente integrable, y la identidad (4.4) contiene derivadas distribucionales.

Dado tal símbolo a, la representación (4.4) no es única en general. Por lo tanto, definimos la norma de a por

$$\|a\| := \|a; W_\nu^{-m,\infty}\| := \text{ínf} \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|b_\alpha; L^\infty_{\nu^{-\alpha}}\|, \tag{4.5}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones posibles (4.4).

Lema 4.1.4 *El dual de $W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$ es isométricamente isomorfo a $W_\nu^{-m,\infty}(\mathbb{D})$ con respecto al par dual*

$$\langle f, a\rangle := \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{D}} (D^\alpha f) b_\alpha dA, \tag{4.6}$$

donde $f \in W_\nu^{m,1}(\mathbb{D})$, $a \in W_\nu^{-m,\infty}(\mathbb{D})$ y las funciones b_α son como en (4.4).

Prueba. Primero, consideramos los productos de espacios de Banach siguientes,

$$X := \prod_{|\alpha|\leq m} L^1_{\nu^{|\alpha|}}(\mathbb{D}),\ Y := \prod_{|\alpha|\leq m} L^\infty_{\nu^{-|\alpha|}}(\mathbb{D})$$

los cuales tienen las normas

$$\|f;X\| = \sum_{|\alpha|\leq m} \|f_\alpha; L^1_{\nu^\alpha}\|$$

y

$$\|g;Y\| = \max_{|\alpha|\leq m} \|g_\alpha; L^\infty_{\nu^{-\alpha}}\|,$$

donde $f = (f_\alpha) \in X$ y $g = (g_\alpha) \in Y$. Dado que $L^\infty_{\nu^{-\alpha}}$ es el dual de $L^1_{\nu^\alpha}$ con respecto el par dual estándar

$$\langle h, k\rangle = \int_{\mathbb{D}} hk dA,$$

Y es también el dual de X con respecto el par dual

$$\langle f, a\rangle := \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{D}} f_\alpha g_\alpha dA, \tag{4.7}$$

y el dual normado de X^* coincide con la norma de Y.

Ahora afirmamos que para cada elemento L en el espacio dual $(W^{m,1}_\nu)^*$, existe un elemento $g = (g_\alpha) \in Y$ tal que

$$L(f) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{D}} (D^\alpha f) g_\alpha \tag{4.8}$$

para todo $f \in W^{m,1}_\nu$. Además $\|L; X^*\| = inf \|g;Y\|$, donde el ínfimo se toma sobre toda $g = (g_\alpha)$ que cumple la identidad anterior.
Primero, el operador $P : W^{m,1}_\nu \to X$, dado por $Pf = (D^\alpha)$ es una isometría. Ponemos $W := P(W^{m,1}_\nu) \subset X$, definimos el funcional lineal L^* en W como sigue

$$L^*(Pf) = L(f),\ f \in W^{m,1}_\nu.$$

Dado que P es isometría, $L^* \in W^*$ y $\|L^*; W^*\| = \|L; (W^{m,1}_\nu)^*\|$. Denotamos por $\tilde{P}$ la extensión de Hahn-Banach de L^* a todo el espacio X y, usando la dualidad antes descrita, encontramos un $g = (g_\alpha) \in Y$ tal que

$$\tilde{L}(f) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{D}} f_\alpha g_\alpha \text{ para } f = (f_\alpha) \in X.$$

Así, para $f \in W_\nu^{m,1}$ tenemos

$$L(f) = L^*(Pf) = \tilde{L}(Pf) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{D}} (D^\alpha f) g_\alpha dA$$

y además $\|L; (W_\nu^{m,1})^*\| = \|g; Y\|$. Si $h \in Y$ es otro elemento tal que se cumple (4.8), entonces corresponde a una extensión L^*, y asi $\|h; Y\|$ es al menos $\|L; (W_\nu^{m,1})^*\|$. Esto completa la prueba de las afirmaciones.
Supongamos que $L \in (W_\nu^{m,1})^*$ y el correspondiente $g \in Y$ son dados. Observamos que L es una extensión a $W_\nu^{m,1}$ de la distribución

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha, \tag{4.9}$$

donde las derivadas son distribucionales y g_α es la distribución

$$\varphi \to \int_{\mathbb{D}} g_\alpha \varphi dA$$

donde φ son funciones de prueba. Esto se sigue de aplicar (4.8) y (4.9) a una función de prueba arbitraria. Finalmente, la extensión de (4.9) a $W_\nu^{m,1}$ es única. La correspondencia de L y esta extensión única de T establece el resultado. ■

4.2. Continuidad de operadores de Toeplitz con símbolo distribucional

Teorema 4.2.1 *Supongamos que la distribución $a \in \mathcal{D}'$ pertenece a $W_\nu^{-m,\infty}$ para algún m, entonces el operador de Toeplitz T_a definido por la fórmula*

$$T_a f(z) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{D}} \left(D_\xi^\alpha \frac{f(\xi)}{(1-z\bar{\xi})^2} \right) b_\alpha(\xi) dA(\xi), \ \ f \in L_a^p(\mathbb{D}), \tag{4.10}$$

está bien definido y acotado $L_a^p(\mathbb{D}) \to L_a^p(\mathbb{D})$ para todo $1 < p < \infty$. El operador resultante es independiente de la elección de la representación (4.4). Además existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|T_a : L_a^p(\mathbb{D}) \to L_a^p(\mathbb{D})\| \leq C\|a; W_\nu^{-m,\infty}\|. \tag{4.11}$$

Prueba. Para probar la continuidad, fijamos una representación (4.4) tal que

$$\|a; W_\nu^{-m,\infty}\| \geq \frac{1}{2} \max_{0\leq|\alpha\|\leq m} \|b_\alpha; L^\infty_{\nu^{-|\alpha|}}\|. \tag{4.12}$$

Dado que $2|1-z\overline{\xi}|| \geq 1-|\xi|$, podemos estimar para cada $f \in A^p$,

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\left|D_\xi^\alpha \frac{f(\xi)}{(1-z\overline{\xi})^2}\right||b_\alpha(\xi)| &\leq C\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{\beta\leq\alpha}|(D^\beta f)(\xi)D^{\alpha-\beta}(1-z\overline{\xi})^{-2}||b_\alpha(\xi)| \\
&\leq C_1\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{\beta\leq\alpha}|(D^\beta f)(\xi)(1-z\overline{\xi})^{-2-|\alpha|+|\beta|}||b_\alpha(\xi)| \\
&\leq C_2\|a;W_\nu^{-m,\infty}\|\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{\beta\leq\alpha}|(D^\beta f)(\xi)(1-z\overline{\xi})^{-2}|(1-|\xi|^2)^{|\beta|} \\
&\leq C_3\|a;W_\nu^{-m,\infty}\|\sum_{j=0}^{m}\frac{|f^{(j)|}(\xi)(1-|\xi|^2)^j}{|1-z\overline{\xi}|^2}.
\end{aligned}$$

Notamos que $|D^\beta f| = |f^{(|\beta|)}$ para todas las funciones analíticas. Recordamos que, dada una función $g \in L_a^p(\mathbb{D})$, las funciones $|g^{(l)}(z)|\,(1-|z|^2)^l$ pertenecen a $L^p(\mathbb{D})$ con normas acotadas por $C_l\|g\|_p$. Además, la proyección maximal de Bergman es acotado en $L^p(\mathbb{D})$, es decir, para alguna constante $C>0$,

$$\left\|\int_{\mathbb{D}}\frac{|g(\xi)|}{|1-z\overline{\xi}|^2}dA(\xi)\right\|_p \leq \|g\|_p$$

para toda $g \in L^p(\mathbb{D})$. Estos hechos junto con la definición (4.10) y la estimación anterior, prueban que $Tf \in L_a^p(\mathbb{D})$ con la estimación de norma de operador (4.11).

La unicidad de la definición de T_a en (4.10) es una consecuencia directa de la Observación 4.1.1, en cuanto probemos que para todo $f \in A^p$ y cada $z \in \mathbb{D}$ fijo, la función

$$F_z(\xi) := \frac{f(\xi)}{(1-z\overline{\xi})^2}$$

de la variable ξ pertenece al espacio de Sobolev $W_\nu^{m,1}$. Pero esto se sigue del hecho de que $|f^{(l)}(\xi)|(1-|\xi|^2)^l \in L^p(\mathbb{D}) \subset L^1(\mathbb{D})$ para todo $l \in \mathbb{N}$. También obtenemos que $|\left(D_\xi^\alpha\right)(\xi)|\,(1-|\xi|^2)^{|\alpha|} \in L^1(\mathbb{D})$ para todo multiíndice α, $|\alpha| \leq m$ dado que el factor $(1-z\overline{\xi})^{-2}$ y todas sus derivadas son funciones acotadas con respecto la variable ξ (para cada $z \in \mathbb{D}$ fijo). ∎

Ejemplo 4.2.2 *Consideramos el símbolo*

$$a := b_{(0,0)} + D^{(1,0)}b_{(1,0)} = b_{(0,0)} + \frac{\partial}{\partial x}b_{(1,0)},$$

donde, para $z = x+iy = re^{i\theta}$,

$$b_{(0,0)}(z) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0, \\ 2x & si\ x > 0, \end{cases}$$

y

$$b_{(1,0)}(z) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0, \\ 1 - r^2 & si\ x > 0. \end{cases}$$

Notamos que la función $b_{(1,0)}$ se puede escribir como el producto $Y(x)(1 - r^2)$, donde Y es la función escalón usual (continua por la derecha en $x = 0$). Denotando por $\delta_0(x)$ la medida de Dirac concentrada en 0 con respecto la variable $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} a &= b_{(0,0)} + (1 - r^2)D^{(1,0)}Y(x) + Y(x)D^{(1,0)}(1 - r^2) \\ &= \delta_0(x)(1 - r^2) = \delta_0(x)(1 - y^2), \end{aligned}$$

dado que $D^{(1,0)}(1 - r^2) = -2x$. Así que el símbolo a es una medida de Dirac con peso del segmento $\{z \in \mathbb{D} : \Re z = 0\}$. Claramente $a \in W_\nu^{-1,\infty}$ y por lo tanto define un operador de Toeplitz acotado de A^p en A^p. Hacemos notar que el soporte de a no es compacto en $\mathbb{D}$

4.3. Compacidad de operadores de Toeplitz con símbolo distribucional

Proposición 4.3.1 *Cualquier distribución $a \in \mathcal{D}'$ con soporte compacto pertenece al espacio de Sobolev $W_\nu^{-m,\infty}$. Vía la fórmula (4.10), el simbolo a define un operador de Toeplitz que es un operador compacto de $L_a^p(\mathbb{D})$ en $L_a^p(\mathbb{D})$.*

Prueba. Es bien conocido en teoría de distribuciones que cualquier distribución a con soporte compacto tiene un orden finito m y se puede escribir como sigue

$$a = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha b_\alpha,$$

donde las funciones b_α se pueden suponer continuas y con soporte en una vecindad arbitraria del soporte de a. En particular, podemos suponer que la cerradura $\overline{V}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Notamos $a \in W_\nu^{-m,\infty}$. También la compacidad de los soportes de b_α implica que el operador dado por (4.10) es compacto en A^p. ∎

Teorema 4.3.2 *Supongamos que el simbolo $a \in \mathcal{D}'$ pertenece a $W_\nu^{-m,\infty}$ para algún $m \geq 1$. El operador de Toeplitz dado por (4.10) es compacto si a tiene una representación tal que las funciones b_α satisfacen*

$$\lim_{r \to 1} \sup ess_{|z| \geq r} |b_\alpha(z)| = 0.$$

Prueba. Si las funciones b_α satisfacen la condición mencionada y $0 < r < 1$, definimos para todo multiíndice las siguientes funciones de soporte compacto:

$$b_{\alpha,r}(z) = \begin{cases} b_\alpha(z) & \text{si } |z| \leq r, \\ 0 & \text{si } |z| > r, \end{cases}$$

También definimos la distribución con soporte compacto

$$a_r = \sum_{0\le|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} b_{\alpha,r},$$

donde consideramos derivadas distribucionales. Por la proposición anterior, el operador de Toeplitz T_{a_r} es compacto en $L_a^p(\mathbb{D})$ para cada r. Por otro lado, debido a la hipótesis sobre b_α y la estimación de la norma, la norma del operador siguiente

$$\|T_a - T_{a_r} : L_a^p(\mathbb{D}) \to A^p\| = \|T_{a-a_r} : L_a^p(\mathbb{D}) \to L_a^p(\mathbb{D})\|$$

se puede hacer suficientemente pequeña eligiendo r cerca de 1. ■

Ejemplo 4.3.3 *Consideramos el símbolo*

$$a := b_{(0,0)} + D^{(1,0)} b_{(1,0)} = b_{(0,0)} + \frac{\partial}{\partial x} b_{(1,0)},$$

donde, para $z = x + iy = re^{i\theta}$,

$$b_{(0,0)}(z) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0, \\ 2cx(1-r^2)^{c-1} & si\ x > 0, \end{cases}$$

y

$$b_{(1,0)}(z) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0, \\ (1-r^2)^{c} & si\ x > 0. \end{cases}$$

donde $c > 1$ *es arbitrario. Como antes, el simbolo es una de medida de Dirac con peso del segmento* $\{z \in \mathbb{D} : \Re z = 0\}$ *con soporte no compacto. En este caso el operador de Toeplitz resultante es compacto en* $L_a^p(\mathbb{D})$.

4.4. Conclusiones

El objetivo fundamental del presente trabajo es abordar la condición que debe cumplir el operador de Toeplitz T_u para que sea un operador compacto en cada p-espacio de Bergman, donde $1 < p < \infty$.

Las conclusiones que se derivan del trabajo de investigación a presentar relaciona entre sí los temas tratados y son los que se exponen a continuación.
Primero se enfatiza que T_u se extiende como un operador acotado en $L_a^p(\mathbb{D})$ cuando u es una función medible y acotada en $\mathbb{D}$. Enseguida se plantea dar condiciones suficientes sobre el símbolo u que permita al operador de Toeplitz T_u extenderse como un operador continuo a cualquier p-espacio de Bergman, para ello se hace uso de la transformada de Berezin. De suerte que la trasformada de Berezin tiene una propiedad fundamental: es

inyectiva, lo cual significa que al asignar a cada operador una transformada de Berezin, toda la información de ese operador queda condensada en ésta función, y es mucho más fácil estudiar una función que un operador. Se sabe que la transformada de Berezin de un operador de Toeplitz con símbolo generador una función acotada, es la transformada de Berezin de una función. Por esta razón es la importancia de estudiar de manera muy breve la trnasformada de Berezin de funciones. Además se define la transformada de Berezin de un operador lineal acotado.
Posteriormente se define el espacio BMO y es natural preguntarse si el operador de Toeplitz puede extenderse continuamente a un espacio más grande de tipo BMO.

Todo lo anterior permite estudiar los resultados del trabajo de Zorboska, quien probó que si u es un símbolo en $BMO^1(\mathbb{D})$ cuya transformada de Berezin $\tilde{u}$ es acotada en el disco, entonces T_u es un operador acotado y que si $\tilde{u}(z) \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, entonces T_u es compacto en $L_a^2(\mathbb{D})$.

Así mismo se analiza el trabajo que en el 2010 en un trabajo de Taskinen y Virtanen, ver [9]. Ellos consideran símbolos que son únicamente localmente integrables en $\mathbb{D}$.

El resultado es por tanto en base a los trabajos mencionados dar las condiciones que debe cumplir el símbolo u para que el operador de Toeplitz T_u sea un operador compacto en cada p- espacio de Bergman, pasar a una definición alternativa de los operadores de Toeplitz la cual fue dada en el 2011, cuando Perala, Taskinen y Virtanen consideran símbolos u en un espacio de Sobolev pesado de orden negativo, ver [10]. Por último quedaría plantear las futuras líneas de investigación posibles.

Bibliografía

[1] S. Axler and D. Zheng, Compact operators via the Berezin transform, Indiana Univ. Math. J. 47 (1998), no. 2, 387-400.

[2] S. Axler, A.L. Shields, Algebras generated by Analytic and Harmonic Functions, Indiana Univ. Math. J. 36(1987)

[3] D. Békollé, C. A. Berger, L. A. Coburn, and K. H. Zhu, BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains, J. Funct. Anal. 93 (1990), no. 2, 310-350.

[4] Boo Rim Choe, Young Joo Lee, Commuting Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space, Michigan Math.J. 46 (1999) 166-174.

[5] K. Guo. D. Zheng, Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space, J. Math. Anal. Appl. 276 (2002) 213-230.

[6] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Graduate Texts in Mathematics, vol. 199, Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] D. H. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 73 (1987), no. 2, 345-368.

[8] H. Li and D. H. Luecking, BMO on strongly pseudoconvex domains: Hankel operators, duality and -estimates, Trans. Amer. Math. Soc. 346 (1994), no. 2, 661-691.

[9] J. Taskinen, J. A. Virtanen, Toeplitz operators on Bergman spaces with locally integrable symbols, Rev. Mat. Ibero. 26(2) (2010), 693-706.

[10] A. Perala, J. Taskinen, J. Virtanen, Toeplitz operators with distributional symbols on Bergman spaces, Proc. Edin. Math. Soc. (2011) 54, 505-514.

[11] J. L. Wang and Z. Wu, Multipliers between BMO spaces on open unit ball, Integral Equations Operator Theory 45 (2003), no. 2, 231-249.

[12] K. H. Zhu, Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains, J. Operator Theory 20 (1988), no. 2, 329-357.

[13] K. H. Zhu, Operator theory in function spaces, Second Edition, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 138, American Mathematical Society.

[14] N. Zorboska, The Berezin transform and radial operators, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 3, 793-800.

[15] N. Zorboska, Toeplitz operators with BMO symbols and the Berezin transform. Int. J. Math. Sci. 2003, no. 46, 2929-2945.