UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la cantidad de representaciones de un entero como suma de números polinomiales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

Ernesto Cruz Guerrero

DIRECTOR DE TESIS:

Mat. J. César Guevara Bravo

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. **2017**

Hoja de datos del Jurado

1. Datos del alumno
Ernesto
Cruz
Guerrero
044-55-3974-2061
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
414024270

2. Datos del Tutor
Mat.
Julio César
Guevara
Bravo

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Carmen
Martínez Adame
Isais

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Juan José
Alba
González

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Artico
Ramírez
Urrutia

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Gabriel
Gutiérrez
García

7. Datos del trabajo escrito
Sobre la cantidad de representaciones de un entero
como suma de números polinomiales
71 pp.
2017

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa UNAM-DGAPA-PAPIIT IN-403816 La comprensión matemática.

Igualmente deseo agradecer a:
A Carmen gracias por la beca, sin ese apoyo me habría resultado más complicado concluir mis estudios y realizar este trabajo de tesis.

A mi asesor gracias por ser tan exigente con la calidad de este trabajo.

A los profesores de teoría de números: Julio César Guevara, Juan José Alba, Artico Ramírez y Fernando Campos sin ustedes tal vez me dedicaría a algo más.

A mi Madre, Padre y Hermana gracias por siempre estar ahí para apoyarme y no dejar de creer en mí, aunque no tengan del todo claro de que se trata este trabajo.

A mis musas gracias, sin su belleza este mundo no sería lo mismo, lo mucho que me inspiran hacen que las dificultades de este oficio sean mucho más llevaderas.

Gracia “**Corazón**” por hacerme desear ser mejor persona, por estar ahí incluso cuando quiero odiarte incluso cuando odio quererte.

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo de todos ustedes.

Y gracias a ti por tomarte el tiempo para leer este trabajo,
ya que no tiene sentido escribir algo si nadie lo lee.

1.Prefacio

La teoría de los números desde sus orígenes siempre nos ha proporcionado problemas que en muchos casos son de fácil planteamiento, pero no así la solución. El estudio de los enteros no ha cesado desde la época euclidiana. Se estudian sus divisores; la suma de ellos; los primos que son factores; las clases de equivalencia a las que pertenecen y así podríamos proporcionar una lista muy grande de puntos de interés para estudiar a los enteros. Una de las vertientes de estudio que nos ha interesado es la que corresponde a las representaciones aditivas de un entero, es decir, las maneras en las que se puede expresar a un entero como suma de otros enteros.

Este trabajo de tesis se empezó a gestar cuando estudiábamos los problemas que planteó Fermat, aquéllos que enuncian que todo número es: "o bien triangular, o bien la suma de 2 o 3 números triangulares. Cuadrado, o suma de 2, 3 o 4 cuadrados. Pentagonal, o suma de 2, 3, 4 o 5 pentagonales. Y así sucesiva e indefinidamente, ya sea hexagonales, heptagonales o poligonales cualesquiera, pudiéndose enunciar según el número de ángulos".

Por otro lado, no tardamos en llegar a los conocidos *problemas* de Edward Waring, aquéllos que planteó en sus *Meditationes Algebraicae* [Waring 1991]. El problema se describe así: todo número natural puede expresarse como suma de no más de 4 cuadrados, 9 cubos, 19 cuartas potencias y en general s potencias k-ésimas positivas. En notación decimos que, para toda k denotamos como $g(k)$ al mínimo números de potencias k necesarias para representar todos los enteros. Por ejemplo, para $k = 1$, $g(1) = 1$; para $k = 2$, $g(2) = 4$; para $k = 3$, $g(3) = 9$; $k = 4$, $g(4) = 19$. La conjetura de Waring nos dice que para toda k existe $g(k), \text{con } g(k) < \infty$.

En 1909 David Hilbert demostró que $g(k)$ siempre existen para toda k, y con esto se tenía que la conjetura de Waring sí era verdadera, pero quedó la duda de cómo son las imágenes de $g(k)$ para cualquier k.

Estos problemas de representación aditiva de enteros nos llevaron a explorar en primera instancia la función *'cantidad de representaciones'* para un entero si lo expresamos como suma de cubos, pentagonales o cualquier conjunto generador de las representaciones. Por ejemplo, si pensamos en sumas de cuatro cuadrados, entonces con el número 31 pasa que

$$31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2$$

y es claro que la representación como suma de cuatro cuadrados no tiene porque ser única, en este caso mostramos dos formas y podrían ser más.

Para explorar las funciones *'cantidad de representaciones aditivas'* empleamos un software creado especialmente para el profesor César Guevara, y con él pudimos visualizar y extraer información importante sobre las cantidades de representaciones como suma de cuadrados, cubos y hasta decimas potencias. Para el caso de poligonales empezamos con suma de triangulares y terminamos con decagonales.

A partir de la exploración computacional pasamos al análisis teórico y nos planteamos trabajar con las representaciones donde ya no sólo se usan, en particular, k-ésimas potencias o poligonales, ahora las representaciones estarán formadas con sumandos tomados de la imagen no negativa de funciones polinomiales $f(x)$.

Problemas por abordar en este trabajo

Otra de las vertientes actuales de investigación en los problemas aditivos corresponde a las representaciones de un número natural como suma de alguna cantidad fija de números que forman parte de un conjunto determinado.

Sabemos que todo natural puede escribirse como suma de otros números naturales, si fijamos una cantidad $\boldsymbol{s}$ de sumandos, además, consideremos $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(\mathbb{N}_0)$ es el conjunto del cual tomamos los sumandos, entonces es pertinente preguntarnos ¿de cuántas formas podemos escribir el natural n como suma de s números del conjunto de sumandos tomados de $f(\mathbb{N}_0)$? De esta interrogante surgen dos casos, cuando nos importa el orden de los sumandos y cuando no, es decir, calcular $r_{f,s}(n)$ y $r^*_{f,s}(n)$. La complejidad de la solución de estos problemas depende de la función f que es la que genera los conjuntos de sumandos. Los casos que aquí nos interesan son más complicados cuando no importa el orden.

Analizaremos las propiedades de $r_{f,s}(n)$, $R_{f,s}(n)$, ${r^*}_{f,s}(n)$, ${R^*}_{f,s}(n)$ en casos tan generales como sea posible y proponemos una conjetura sobre una forma sencilla de aproximar dichas funciones, que será respaldada por los datos generados computacionalmente.

2.Introducción

Este trabajo de tesis está distribuido de la manera que ahora se indica.

Al Inicio se proporciona una lista con la notación que se considera importante tener presente para facilitar la lectura de este trabajo. Se tomará como base la notación utilizada en los trabajos de Nathanson [1996], pero con algunas modificaciones; también se usará notación propia, la cual podría hacer más manejable el problema de las representaciones en el cual resulta conveniente un tránsito fluido entre el conjunto asociado a las representaciones de un entero n que son $\Re_{f,s}(n)$, también la cantidad de representaciones de un entero n que son $r_{f,s}(n)$ y la cantidad de representaciones acumuladas $R_{f,s}(n)$ por mencionar algunos casos de la notación.

Los capítulos de la tesis son éstos:

3.Antecedentes. Se hará un recorrido de los hechos principales relacionados con el problema de las representaciones aditivas de los naturales.

4.Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales. Este capítulo se dividirá en tres partes, en la primera parte se verán propiedades generales de los números poligonales.

En la segunda se analizarán algunas propiedades de los números decagonales y a partir de ellos será posible construir números con la característica de que se podrán exhibir por lo menos m representaciones, para cada entero, que sean suma de decagonales. Después se dará una cota inferior de $R_{D,10}(n)$ la cual permitirá inferir resultados sobre $r_{D,10}(n)$. Enseguida se proporciona una desigualdad que mostrará la relación cercana entre la cantidad de representaciones de n como suma de 10 decagonales cuando importa el orden de los sumandos $r_{D,10}(n)$ y la cantidad de representaciones de n como suma de 10 decagonales cuando no importa el orden de los sumandos $r^*_{D,10}(n)$. Es decir, mostraremos que visualizadas como funciones, ellas comparten muchas de sus propiedades, y que al analizar la cantidad de representaciones acumuladas hasta n como suma de 10 decagonales cuando importa el orden de los sumandos $R_{D,10}(n)$, así como la cantidad de representaciones acumuladas hasta n como suma de 10 decagonales cuando no importa el orden de los sumandos $R^*_{D,10}(n)$, resulta que son válidas las mismas ideas, es decir, se pueden analizar esencialmente de la misma manera.

En la tercera parte veremos que el hecho de ser diez decagonales no es una condición necesaria para el análisis que se presentó, lo importante es que en su totalidad los resultados pueden generalizarse a una cantidad l de $l-$gonales, y más aún, pueden generalizarse a una cantidad s de $l-$ gonales, bajo cierta condición sobre el valor de s. Además, a través de una cota superior para $R_{L,s}(N)$ daremos otros resultados sobre $r_{L,s}(n)$.

5.Cantidad de representaciones como sumas de potencias. En este capítulo damos lugar a un estudio más amplio del uso de potencias para representar a cualquier entero positivo, es decir el uso de s elementos que sean potencias k de un entero con k fijo o $r_{K,s}(n)$. Extenderemos algunas de las propiedades del Capítulo **4. Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales** y agregaremos otras. Para simplificar las pruebas de dichas extensiones haremos uso de las representaciones canónicas para polinomios entero valuados.

También veremos que es una condición suficiente que $s > k$ para que la función $r_{K,s}(n)$ no esté acotada como función de n, y aunado a lo anterior veremos el hecho de que es creciente como función de s. Además se mostrarán cotas para $\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})$ y $\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})$, donde definimos a $\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})$ como la cantidad de representaciones acumuladas donde sí importa el orden de los sumandos, es decir, $\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{N}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{r}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})$, y respectivamente la expresión es semejante para el caso de $\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})$. Finalmente extenderemos algunas ideas de Sierpinski, Hardy y Landau, sobre suma de dos cuadrados como puntos de la retícula $\mathbb{Z}^2$ en el interior de un círculo, a suma de s potencias k como puntos en el interior de un hipertopo en la retícula ${\mathbb{Z}_{\geq 0}}^s$.

6.Cantidad de representaciones como sumas de números polinomiales. Comenzaremos este capítulo con una caracterización para los polinomios entero-valuados de grado 2. Veremos que las propiedades del Capítulo **5. Cantidad de representaciones como sumas de potencias** se pueden extrapolar a las potencias sin necesidad de hacer mayores modificaciones. Daremos unas cotas para las funciones $R^*_{P,s}(n)$ y $R_{P,s}(n)$ haciendo uso de una generalización de las cotas del Capítulo **5. Cantidad de representaciones como sumas de potencias** y una extensión de las ideas de Landau y Sierpinski. Posteriormente se verá que las propiedades se deben esencialmente al hecho de que las potencias y los números poligonales son polinomios por lo cual se pueden generalizar la mayor parte de los resultados del Capítulo **5. Cantidad de representaciones como sumas de potencias**. Concluiremos el capítulo mostrando que si k -el grado del polinomio- es igual que s -la cantidad de sumandos- entonces nos es posible extender los resultados del Capítulo **5. Cantidad de representaciones como sumas de potencias**.

6.Cantidad de representaciones como sumas de Números en sucesiones. Veremos que no todas las sucesiones son bases asintóticas de orden finito por ejemplo pasa con la sucesión de Fibonacci o con los números de Fermat. Para esto usamos una generalización de las cotas para la cantidad acumulada de representaciones $R_{\varepsilon,s}(n)$. También veremos una condición suficiente para garantizar que la función $r_{\varepsilon,s}(n)$ no sea acotada, ésta la ocuparemos para ver que la función de representación como suma de dos primos no es acotada. Además, se analiza una condición para la monotonía de $r_{\varepsilon,s}(n)$ como función de s y una cota inferior para el orden de una base asintótica.

3.Notación y definiciones

(página 5)
$\mathbb{N}_0$ **Los enteros no negativos**

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2,3,4,5, \dots\}.$$

(página 23)
$\delta\big(P(x)\big)$ **Grado de un polinomio**
Sea $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x \ + a_0$ con $a_k \neq 0$ el grado de $P(x)$ es $\delta\big(P(x)\big) = k$.

(página 34)
Función entero-valuada
Decimos que $f(x)$ es una función entera valuada si

Para toda $x \in \mathbb{N}_0 \ \rightarrow f(x) \in \mathbb{N}_0$.

Ejemplo
$T(x) = \frac{x(x+1)}{2} = \sum_{j=0}^{x} j$ la cual es entera para toda x entera

$$T(0) = 0, T(5) = 15, T(100) = 5050.$$

(página 33)
$b_k(x)$ **Polinomio binomial**
$b_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$.
Ejemplo

$$b_1(x) = x, b_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}, b_5(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}.$$

(página 34)
Forma canónica de un polinomio entero-valuado

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} u_i * b_i(x).$$

Ejemplo

$$T(x) = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2} + x = b_2(x) + b_1(x).$$

(página 22)
$\Delta f(x)$ **Diferencial entera**

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Ejemplo

$$\Delta T(x) = T(x+1) - T(x) = \left(\binom{x+1}{2} + \binom{x+1}{1}\right) - \left(\binom{x}{2} + \binom{x}{1}\right)$$
$$= \left(\binom{x+1}{2} - \binom{x}{2}\right) + \left(\binom{x+1}{1} - \binom{x}{1}\right) = \binom{x}{1} + 1.$$

(página 22)
$\Delta^n f(x)$ $\boldsymbol{n}$**-ésima diferencial entera**

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)).$$

Ejemplo

$$\Delta^2 T(x) = \Delta\left(\binom{x}{1} + 1\right) = (x+1+1) - (x+1) = 1.$$

(página 6)

$\mathfrak{R}_{f,s}(n)$ **El conjunto asociado a las representaciones de $\boldsymbol{n}$ como suma de $\boldsymbol{s}$ elementos en la imagen de $\boldsymbol{f}$ cuando importa el orden de los sumandos**

$$\mathfrak{R}_{f,s}(n) = \{(x_1, \dots, x_s)\epsilon \mathbb{N}_0{}^s : f(x_1) + \cdots + f(x_s) = n\}.$$

Ejemplo

$$\mathfrak{R}_{T(x),3}(0) = \{(0,0,0)\}, \mathfrak{R}_{T(x),3}(1) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$
$$\mathfrak{R}_{T(x),3}(2) = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$$
$$\mathfrak{R}_{T(x),3}(3) = \{(3,0,0), (0,3,0), (0,0,3), (1,1,1)\}$$
$$\mathfrak{R}_{T(x),3}(4) = \{(0,1,3), (1,0,3), (0,3,1), (3,1,0), (1,3,0), (3,0,1), \}$$
$$\mathfrak{R}_{T(x),3}(5) = \{(1,1,3), (3,1,1), (1,3,1)\}.$$

(página 6)

$r_{f,s}(n)$ **La cantidad de representaciones de $\boldsymbol{n}$ como suma de $\boldsymbol{s}$ elementos en la imagen de $\boldsymbol{f}$ cuando importa el orden de los sumandos**

$$r_{f,s}(n) = \left|\mathfrak{R}_{f,s}(n)\right|.$$

Ejemplo $\quad r_{T(x),3}(5) = 3.$

(página 6)

$R_{f,s}(n)$ **La cantidad de representaciones acumulada hasta $\boldsymbol{n}$ como suma de $\boldsymbol{s}$ elementos en la imagen de $\boldsymbol{f}$ cuando importa el orden de los sumandos**

$$R_{f,s}(n) = \sum_{i=0}^{n} r_{f,s}(i).$$

Ejemplo $\quad R_{T(x),3}(5) = 1 + 3 + 3 + 4 + 6 + 3 = 20.$

(página 6)

$\mathfrak{R}^*_{f,s}(n)$ **El conjunto asociado a las representaciones de $\boldsymbol{n}$ como suma de $\boldsymbol{s}$ elementos en la imagen de $\boldsymbol{f}$ cuando no importa el orden de los sumandos**

$$\mathfrak{R}^*_{f,s}(n) = \{(x_1, \dots, x_s)\epsilon \mathbb{N}_0{}^s : x_1 \le \cdots \le x_s, f(x_1) + \cdots + f(x_s) =)n\}.$$

Ejemplo

$$\mathfrak{R}^*_{T(x),3}(0) = \{(0,0,0)\}, \mathfrak{R}^*_{T(x),3}(1) = \{(0,0,1)\}$$
$$\mathfrak{R}^*_{T(x),3}(2) = \{(0,1,1)\}$$
$$\mathfrak{R}^*_{T(x),3}(3) = \{(0,0,3), (1,1,1)\}$$
$$\mathfrak{R}^*_{T(x),3}(4) = \{(0,1,3)\}$$
$$\mathfrak{R}^*_{T(x),3}(5) = \{(1,1,3)\}.$$

(página 6)

$r^*_{f,s}(n)$ **La cantidad de representaciones de $\boldsymbol{n}$ como suma de $\boldsymbol{s}$ elementos en la imagen de $\boldsymbol{f}$ cuando no importa el orden de los sumandos**

$$r^*_{f,s}(n) = \left|\mathfrak{R}^*_{f,s}(n)\right|.$$

Ejemplo $\quad r^*_{T(x),3}(5) = 1.$

(página 6)

$R^*_{f,s}(n)$ La cantidad de representaciones acumulada hasta $\boldsymbol{n}$ como suma de $\boldsymbol{s}$ elementos en la imagen de $\boldsymbol{f}$ cuando no importa el orden de los sumandos

$$R^*_{f,s}(n) = \sum_{i=0}^{n} r^*_{f,s}(i).$$

Ejemplo $\qquad R^*_{T(x),3}(5) = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7.$

Nota: Cuando importa el orden de los sumandos, entonces las sumas $1 + 2,\ \ 2 + 1$ se cuentan como dos representaciones distintas del 3. Cuando no importa el orden de los sumandos $1 + 2$ y $2 + 1$ se cuentan como la misma representación del 3.

(página 26)

$H(f(x), n)$ Parte entera generalizada

Definimos $H(f(x), n) = max_{x\in\mathbb{N}_0}\{ f(x) \leq\ n\}$.

A falta de una función inversa que sea más manejable haremos uso de $H(f(x), n)$, que nos facilitará expresar el número de naturales menores que alguno dado en la imagen de f.

Ejemplo

$$T(0) = 0, T(10) = 45, T(50) = 1275, T(99) = 4950, T(100) = 5050$$
$$H(T(x), 5000) = max_{x\in\mathbb{N}_0}\{ T(x) \leq\ 5000\} = 99.$$

(página 56)

$d_{i,j}(n)$ Cantidad de divisores congruentes con i modulo j

$$d_{i,j}(n) = \left|\{m \in \mathbb{N} : m|n \quad y \quad m \equiv i\ (mod(j))\ \}\right|.$$

(página 47)

$g(f(\mathbb{N}))$ y $G(f(\mathbb{N}))$ También redefiniremos $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{G}$

Usualmente se definen como

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(k) = \min\left(s \in \mathbb{N} : \left(\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}_0 : n_1^k + \dots +\ n_s^k = n\right)\right)$ y

$G: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$G(k) = \min\left(s \in \mathbb{N} : (\exists M\ tal\ que\ \forall (n \in \mathbb{N}_0\ y\ n \geq M)\ \exists n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}_0 : n_1^k + \dots +\ n_s^k = n)\right).$$

Sea $\dot{\text{Ṣ}} = \{f | f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales.

Redefiniremos g y G de la siguiente manera $g: \dot{\text{Ṣ}} \to \mathbb{N}$ tal que

$g(f(\mathbb{N})) = \min(s \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N}_0\ \exists n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}_0 : f(n_1) + \dots +\ f(n_s) = n))$ y

$G: \dot{\text{Ṣ}} \to \mathbb{N}$ tal que

$G(f(\mathbb{N})) = \min(s \in \mathbb{N} : (\exists M\ tal\ que\ \forall (n \in \mathbb{N}_0\ y\ n \geq M)\ \exists n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}_0 : f(n_1) + \dots +\ f(n_s) = n)).$

4.Antecedentes

El interés por los perfiles aditivos en la teoría de los números podría tener su origen a partir de las primeras prácticas con la aritmética de los enteros, pero en este trabajo queremos sugerir que fue a partir de Cardano y Galileo que con base en su interés por los juegos de azar comenzaron a interactuar con las representaciones de un entero como suma de otros enteros. Fue hasta el siglo XVIII cuando el estudio de las representaciones aditivas de los enteros tomó otro perfil y éste fue con el arribo de las particiones[1] de un entero. Así, a partir de este momento las representaciones aditivas de los enteros han ocupado un lugar cada vez más consolidado dentro del Álgebra. Actualmente existe una subárea de la teoría de los números llamada **teoría aditiva de los números.**

La teoría de particiones tomó un perfil propio, delimitando sus problemas y desarrollando sus métodos propios. Estos procesos dieron inicio con Jacob Bernoulli y Pierre Rémond de Montmort, y quien les dio el empuje dentro de la teoría de los números fue Leonhard Euler.

4.1. Los problemas de Philippe Naudé

Gracias a la extensa correspondencia que Euler sostuvo con sus contemporáneos y que gran parte de ella se conserva, ahora sabemos que un elemento importante para que Euler se adentrara en el tema de las particiones surgió de una carta que Philippe Naudé (1684-1747) le envió el 4 de septiembre de 1740. En ella, le preguntó, entre otras cosas, sobre *el número de formas diferentes en que un número entero positivo m podría expresarse como la suma de n sumandos naturales distintos* (también le preguntó el caso cuando se admite la repetición).

Sabemos que cuando Euler se interesaba en un tema no lo hacía apegado a una inquietud del momento; él no respondía exclusivamente lo que se le preguntaba, con frecuencia se adentraba en los problemas con mayor profundidad de lo que le exigía sólo la pregunta que se le planteaba. Era frecuente que desarrollara verdaderos paradigmas que dieron lugar a nuevas teorías en las ciencias matemáticas. Fue en este contexto en el que se puede ver que a partir de las preguntas de Naudé las particiones tomaron su camino gracias a Euler, y de la misma manera la teoría de las representaciones aditivas de los enteros.

Enseguida listamos cuatro artículos hasta el periodo 1770 en donde explícitamente Euler desarrolló sus ideas acerca de las particiones.[2] Son éstos:

1) La primera respuesta a las interrogantes de Philippe Naudé se encuentran en el documento E158,[3] originalmente presentado el 6 de Abril de 1741, pero publicado hasta 1751 con el título: *Observationes analyticae variae de combinationibus* ***(Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones)***.

2) En el documento con clasificación E101 y publicado en 1748 con el título *Introductio in analysin infinitorum* ***(Introducción al Análisis del Infinito).*** Se encuentra en el capítulo XVI otra versión de lo publicado en el artículo 1). Este capítulo de la *Introductio* tiene como título: ***De las particiones de números***. Cabe señalar que este trabajo aparece en el segundo lugar de la cronología, aun cuando apareció publicado antes que el 1).

---

[1]Pero antes de seguir con esta introducción consideramos que es oportuno recordar ¿Qué son las particiones? Entendemos por particiones de un número natural *n*, a todas las maneras de representarle como suma de números naturales. Por ejemplo, el número 5 puede ser representado por 4+1, 3+2 y por el 5 mismo, cuando se desea que todos los números sean diferentes; o bien 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1 y 5 si conviene que los números puedan ser iguales entre ellos.

[2]Existen otros donde trabaja de manera particular el vínculo de los números poligonales con las particiones, y es en uno de ellos donde desarrolló el maravilloso teorema de los números pentagonales. Esto se verá más adelante.

[3] La clasificación E158 se refiere a la que desarrolló Eneström para toda la obra de Euler. A partir de esta clasificación todos sus trabajos se identifican con un número determinado y una E que le precede.

3) En 1750 retoma el tema y aporta más progresos en su escrito E191, mismo que apareció publicado en 1753 con el título: De *Partitione numerorum* (***De las Particiones de números***).

4) Pasó un largo periodo para que apareciera su artículo E394, que fue presentado en 1768 y publicado en 1770, con el título: De *Partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*. ***(Sobre la partición de números en partes de un cierto tipo de números determinados)***.

En estos documentos Euler responde también al problema generalizado de encontrar las maneras en que un número dado N puede ser expresado con un número n fijo de sumandos, y donde cada sumando se puede elegir de un conjunto con m elementos dados o, incluso, que para cada sumando se pueda tener un conjunto diferente.

La forma en que Euler plantea y resuelve los problemas es en opinión de Andrews (2007) insuperable en varios de sus párrafos y sin duda nos sumamos a esta opinión.

4.2. Particiones y números pentagonales

El estudio de las particiones de un entero no quedó sólo en un conjunto de propiedades temporales para ciertos números o en un tipo de divertimento matemático vinculado con representaciones aditivas interesante. Euler no tardó en proporcionarnos un resultado de carácter general para todos los enteros positivos, y gracias a él fue posible entender que a través de las particiones podríamos conocer más acerca de la estructura de los enteros.

El resultado al que nos referimos es el siguiente:

Teorema de los Números Pentagonales
Para todo entero positivo n

$$\prod_{n=1}^{\infty}(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^{\frac{\boldsymbol{n}(3\boldsymbol{n}+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^{\frac{\boldsymbol{n}(3\boldsymbol{n}-1)}{2}}$$

El resultado nos dice que si desarrollamos el producto de arriba se obtiene:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{1}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{x}^{5}+\boldsymbol{x}^{7}-\boldsymbol{x}^{12}-\boldsymbol{x}^{15}\ +\cdots,$$

y los exponentes son números pentagonales ($\frac{\boldsymbol{n}(3\boldsymbol{n}-1)}{2}$) o afines a ellos ($\frac{\boldsymbol{n}(3\boldsymbol{n}+1)}{2}$). Y además existe un vínculo importante entre los exponentes y coeficientes, pues éste proporciona el cálculo de particiones de un entero. Así, del *Teorema de los Números Pentagonales* se llega al polinomio

$$\mathbf{1}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{x}^{5}+\boldsymbol{x}^{7}-\boldsymbol{x}^{12}-\boldsymbol{x}^{15}\ +\cdots$$

y nótese que los coeficientes de este polinomio se forman sumando y restando términos semejantes, y como cada término nos representa una partición según su exponente, entonces los coeficientes que aparecen en el polinomio son el resultado de las sumas y restas de cantidades de particiones que representan al mismo número, y por esto podemos replantear el teorema de la siguiente forma:

Sean $p_{pd}(m) =$ el número de particiones de un entero positivo m, con la característica de que los sumandos de cada una son diferentes y la cantidad de sumandos en cada una es una cantidad par. Por otro lado $p_{id}(m) =$ el número de particiones de un entero positivo *m* en donde los sumandos de cada una son diferentes, pero ahora la cantidad de sumandos en cada partición es una cantidad impar, por ejemplo $2 = 1 + 1$ entonces $p_{pd}(2) = 0, p_{id}(2) = 1$.

Entonces

$$\boldsymbol{p_{pd}(m) - p_{id}(m) = \begin{cases} 0 & si \;\; m \neq \dfrac{n(3n \pm 1)}{2} \\ (-1)^n & si \;\; m = \dfrac{n(3n \pm 1)}{2} \end{cases}}$$

Notemos que $2 = \frac{1(3(1)+1)}{2}$ y $p_{pd}(2) - p_{id}(2) = -1 = (-1)^1$

Así, el *Teorema de los Números Pentagonales* ahora puede quedar bajo la forma siguiente:
Para todo entero positivo n:

$$\boldsymbol{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}}$$

también se puede ver como:

$$\boldsymbol{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 + \prod_{n=1}^{\infty}\left(p_{pd}(m) - p_{id}(m)\right) x^n.}$$

Con este resultado podemos percibir que los coeficientes de

$$\boldsymbol{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots}$$

son $\boldsymbol{p_{pd}(m) - p_{id}(m)}$, lo que significa que una infinidad de enteros positivos tienen las mismas cantidades de particiones -con elementos diferentes- con un número par de sumandos y con un número impar, y es así que se generan los ceros en los coeficientes que anulan una infinidad de las potencias de x, y los términos que aparecen en

$$\boldsymbol{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots}$$

son los que tienen a los coeficientes $\boldsymbol{p_{pd}(m) - p_{id}(m) = \pm 1}$, cuyas potencias correspondientes en los términos del polinomio sólo son pentagonales o afines a ellos, es decir, $\boldsymbol{\frac{x(3x+1)}{2}}$ o $\boldsymbol{\frac{x(3x-1)}{2}}$.

Este resultado fue verdaderamente sorprendente para sus contemporáneos y para los que lo retomaron posteriormente, como fue el caso de D'Alembert, Legendre, Franklin, Sylvester, Waring y Hardy, entre otros.

Después de este resultado el estudio de las representaciones aditivas de un entero ya estaba por encima de sólo generar propiedades, lo que ya se estaba aportando eran características estructurales de los enteros que hasta el momento no se estaban trabajando.

Para terminar esta parte proporcionamos datos sobre publicaciones de Euler correspondientes a este tema. Desde noviembre de 1740 Euler ya había intercambiado correspondencia con Daniel Bernoulli acerca de las propiedades del producto $\boldsymbol{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)}$, y unos meses después publicó su primer comentario al respecto en el artículo de 1741, *Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones* (E158). Durante la década de los 40 Euler siguió explorando la expresión, y en una carta que le escribe a Christian Goldbach en octubre 15, 1743 [véase: Juškevič, A. P. & Winter, E. 1965], le menciona sus ideas respecto al producto

$$\boldsymbol{(1 - n)(1 - n^2)(1 - n^3)(1 - n^4)(1 - n^5)(1 - n^6)} \ldots.$$

En 1783 se publicó el artículo De *mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium*, y en el mismo año publicó *Evolutio producto infiniti* $\boldsymbol{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)}$ …. *in series simplicen*.

4.3. Con Goldbach se popularizó la teoría aditiva.

El problema que es más conocido (incluso entre no matemáticos) respecto a representar a un entero como suma de otros enteros es la conjetura de Goldbach, ésta enuncia lo siguiente:

a) todo entero positivo par mayor que dos es suma de dos primos
b) todo impar positivo mayor que cinco es suma de tres primos.

Este problema llamó la atención desde finales del siglo XVIII. Éste problema se originó cuando Goldbach le escribió en una carta del 7 de junio de 1742 [Juškevič 1965, p. 103-105] lo siguiente:

> "[..]; de este modo quiero aventurar una conjetura: que todo número que está compuesto [como suma] de dos números primos es a la vez un agregado de tantos números primos como queramos (incluyendo la unidad), hasta alcanzar puras unidades [que es lo más a lo que se puede extender]"

Después de terminar la carta se nota que reflexionó sobre lo que escribió, pero al no tener espacio para agregar una observación directamente en el párrafo de la conjetura, escribe en el margen un comentario complementario

> "Después de leer esto otra vez, considero que pudiera ser demostrada con todo rigor para el caso $n+1$, si sucede para el caso n, y si $n+1$ puede ser dividido en dos primos. Entonces la demostración es muy fácil. Parece por lo menos que todo número mayor que dos es la suma de tres números primos."

La respuesta de Euler llegó en la carta del 30 de junio de 1742, en ella encontramos lo siguiente:

> "Supongamos que el número propuesto n sea par, por lo tanto, es una suma de dos números primos, y entonces $n-2$ también es una suma de dos números primos, por lo que n también es una de tres, y también 4 y así sucesivamente. Pero si n es un número impar, entonces es una suma de tres números primos, ya que $n-1$ es la suma de dos, y se puede seguir resolviendo las demás sumas. Sin embargo, que todo número par sea la suma de dos números primos, lo que considero un teorema correcto, es algo que no puedo demostrar".

La respuesta de Euler nos marca que si suponemos verdadera la relación binaria entonces la terciaria es posible. Pero lo que llama más nuestra atención es que a partir de esta conjetura el estudio de las representaciones aditivas de un entero ya tiene un lugar propio, es decir, ya no se explora la situación aditiva como parte de otro problema, que fue el de los dados en los juegos de azar.

4.4. Edward Waring y las potencias

¿Cuáles son los problemas de Waring?
Edward Waring [1991], en su libro *Meditationes algebraicae*, hizo conjeturas sobre la posibilidad de que los enteros pudieran escribirse como la suma de otros enteros, pero elevados a diversas potencias. Por ejemplo, $13 = 3^2 + 2^2$, de aquí se observa que 13 puede escribirse como la suma de dos cuadrados. Entonces nos preguntamos ¿cualquier número puede escribirse como suma de dos cuadrados? La respuesta es **NO**, por ejemplo, si consideramos el número 12, se observa que no se puede escribir de esa manera, al intentarlo obtenemos las siguientes combinaciones:

$$12 = 1^2 + 11 = 2^2 + 8 = 3^2 + 3,$$

de esta manera terminamos con las posibilidades de escribir a 12 como suma de dos cuadrados.

Acto seguido, sería natural preguntarnos: ¿cuál es el menor número de cuadrados necesarios para representar a todo entero positivo como suma de éstos? En 1770 Joseph-Louis Lagrange demostró lo siguiente:

Teorema de Lagrange
Todo entero positivo puede escribirse como la suma de no más de cuatro cuadrados.
Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tal que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n$

Para explicar cuántas potencias se requieren para representar a un entero, es conveniente definir a $g(k)$ como el menor número requerido de potencias k con la que cualquier entero positivo se puede representar. Así, ya sabemos (por Lagrange) que $g(2) = 4$, porque 4 es el menor número de cuadrados requeridos para representar a todos los enteros positivos. Waring propuso que $g(3) = 9$, de lo anterior podemos adentrarnos en dos preguntas:

1.- ¿Realmente existe $g(k)$ para toda k?
2.- Si ese es el caso, ¿cuál es su valor?

Lo que se conoce como los problemas de Waring para sumas de potencias radica precisamente en las dos preguntas anteriores. Esto es, Waring plantea que todo entero se puede representas como suma de n-ésimas potencias.

Sabemos gracias a Kubina y Wunderlich [1990] que $g(n) = 2^n + [(3/2)^n] - 2$ para toda $n \leq 471600000$. Se conjetura que esta fórmula es correcta para toda n, Mahler [1957] mostró que dicha igualdad se cumple salvo para un numero finito de valores de n. Algunos ejemplos para $g(n)$ son:

$$
\begin{gathered}
g(2) = 4 \\
g(3) = 9 \\
g(4) = 19 \\
g(5) = 37 \\
g(6) = 73 \\
g(7) = 143 \\
g(8) = 279 \\
g(9) = 548 \\
g(10) = 1079 \\
\vdots \\
g(33) = 8590581749
\end{gathered}
$$

Otra parte de este problema es preguntarnos: ¿Cuál es la menor cantidad de potencias de k en el que existirá sólo un número finito de excepciones? Por ejemplo, sabemos por el teorema de Lagrange que se necesitan cuatro cuadrados para representar a todos los enteros. ¿Pero si intentamos utilizar únicamente tres? ¿Será finito el número de enteros que no podemos representar? En otras palabras, ¿existe alguna n suficientemente grande tal que todos los números mayores que n puedan representarse con solo tres cuadrados? La respuesta es **NO**. Si intentamos utilizar solamente tres cuadrados para representar números enteros, entonces existirá una cantidad infinita de excepciones.

Ahora, sea $G(k)$ el menor número de potencias k con las que se tienen que existe sólo un número finito de excepciones, además por la definición de $g(k)$ tenemos que $G(k) \leq g(k)$. Es decir, si intentamos representar a los enteros con menos potencias k que $G(k)$, entonces obtendremos un número infinito de excepciones. Sabemos que $G(2) = 4$, así como que $g(2) = 4$. Ahora, sabemos que $g(3) = 9$, pero ¿cuánto vale $G(3)$? Sólo podemos decir que $4 \leq G(3) \leq 7$. De manera general sabemos que $k + 1 \leq G(k)$, se puede consultar el trabajo de Hardy y Wright [1975].

Este problema de Waring parece ser más difícil. Sin embargo, es de tanto interés como $g(k)$, porque parece ser que los números menores tienen sus propias peculiaridades que no comparten con los números más grandes. Esto significa que algunos teoremas sólo fallan en algunos números pequeños y nada más. Por lo tanto, $G(k)$ (que sólo tiene un número finito de fallas) es tan importante como $g(k)$ (que no tiene ninguna falla).

En general, podemos decir –por lo anterior- que $k+1 \leq G(k) \leq g(k)$. Por ejemplo, para $G(k)$ específicos, donde $k=2,\ldots,10$, sabemos sólo lo siguiente:

$$G(2)=4$$
$$4 \leq G(3) \leq 7$$
$$G(4)=16$$
$$6 \leq G(5) \leq 17$$
$$9 \leq G(6) \leq 24$$
$$8 \leq G(7) \leq 33$$
$$32 \leq G(8) \leq 42$$
$$13 \leq G(9) \leq 50$$
$$12 \leq G(10) \leq 59$$

En 1909 David Hilbert (1862-1943) demostró que para cualquier k existe $g(k)$ y que este número es finito. Si $g(k)$ existe, entonces sabemos que $G(k)$ también existe, porque en el peor de los casos tendríamos que $G(k)=g(k)$. Entonces, con la demostración de Hilbert las representaciones aditivas en k-ésimas potencias de un entero ocuparía un lugar relevante en la reciente fortalecida teoría de los números, pero más aún, estos problemas de Waring hasta nuestros días siguen dando lugar a la investigación así como fascinación.

4.5. Ramanujan

Las primeras décadas del siglo XX nos sorprenderían y actualmente no terminamos de comprender toda la importancia del trabajo de Srinivasa Ramanujan, matemático prácticamente autodidacta. Actualmente los expertos en teoría de números han descubierto por fin el sentido de una de sus afirmaciones más enigmáticas, escrita por él en 1920, poco antes de su muerte, y ésta concierne a las particiones o representaciones aditivas de los enteros.

Ramanujan planteaba la función partición $p(n)$ que cuenta las maneras de expresar a un número entero positivo n como suma de otros. Por ejemplo, para el número 5, existen siete opciones:

$$5 = 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+3 = 1+2+2 = 1+4 = 2+3.$$

Es decir, $p(5)=7$; para el número 6 hay 11 posibilidades, entonces $p(6)=11$. A medida que crece n, el número de particiones aumenta rápidamente. Por ejemplo, para $p(100)=190569292$, y $p(1000)$ es un número de 32 cifras.

Se puede observar que este problema aditivo no es fácil y ha mantenido a un sector de los matemáticos intentando comprender las particiones y las ideas de Ramanujan. Él se percató que si comenzaba con el número 9 y le sumaba múltiplos de 5, las particiones de los números resultantes eran divisibles entre 5:

$$\mathrm{p}(9)=30\,,\ \mathrm{p}(9+5)=135,\ \mathrm{p}(9+10)=490,\ p(9+15)=1575, \text{ etcétera.}$$

Propuso que algunas recurrencias de esa clase debían mantenerse indefinidamente y que podrían existir relaciones similares al considerar, en lugar de múltiplos de 5, ahora múltiplos de 7 o de 11, ambos, primos consecutivos. Además, deberían darse relaciones análogas para las potencias de 5, 7 y 11. Así, habría una sucesión infinita de números n separados por intervalos de 5^3 tales que todas las $p(n)$ correspondientes fuesen divisibles por 125. Después, Ramanujan escribió que no deberían existir «propiedades simples» de esa clase para los números primos mayores. En otras palabras, conjeturaba la ausencia de secuencias de particiones $p(n)$ tales que todas fuesen divisibles por 13, 17, 19, etcétera. Desde entonces, hasta nuestros días algunos matemáticos como Ken Ono, George Andrews o Kimmo Eriksson han buscado respuestas a estos patrones en los que intervienen esos números primos.

4.6. Ken Ono

En enero de 2011, Ken Ono, de la Universidad Emory, halló fórmulas que relacionaban las funciones de partición de series de números n separados por intervalos de las potencias de 13 $(13, 13^2, 13^3 \ldots)$, así como de los números primos mayores. Las fórmulas no resultan «simples», en el sentido de que las $p(n)$ no son divisibles entre las potencias de 13; en cambio, revelan relaciones entre los restos de dichas divisiones. Para cada número primo, a medida que el exponente crece, las recurrencias que se obtienen recuerdan a las que aparecen en los fractales, estructuras geométricas con patrones característicos que se repiten a todas las escalas.

En otro resultado hecho público también en enero, Ono encontró la primera fórmula para calcular directamente $p(n)$ para cualquier n, un logro que hasta ahora estaba en espera de ser encontrado entre los expertos en teoría de números.

Ya iniciada la segunda década del siglo XXI vemos que el interés por los problemas aditivos de los enteros está en el primer plano de las líneas de investigación de matemáticos como Ken Ono.

5.Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales

5.1. Números poligonales

Los pitagóricos están entre los primeros en representar números poligonales como arreglos de puntos en patrones geométricos regulares.

Los números poligonales más comunes son los números oblongos, 2, 6, 12, 20, … (Ver Figura A1), los cuales denotaremos por $O_n = n(n+1)$

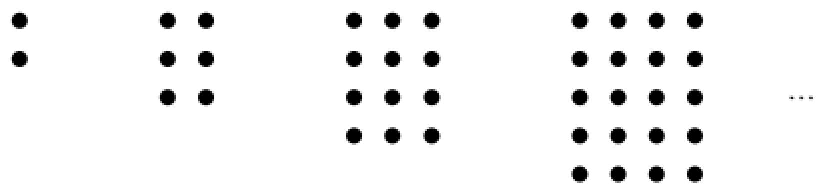

Figura A1

Los números triangulares, son 0, 1, 3, 6, 10, 15, … (Ver Figura A2), los cuales denotaremos por

$$P_1(k) = \frac{k(k+1)}{2}$$

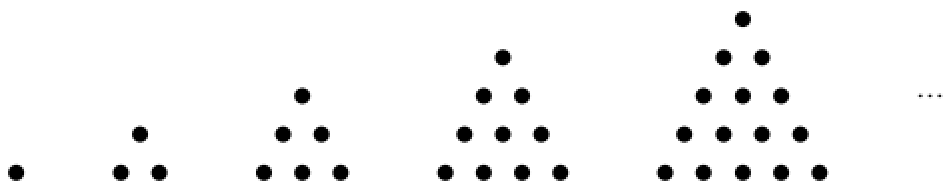

Figura A2

Los números cuadrados, 0, 4, 9, 16, 25, … (Ver Figura A3), los cuales denotaremos por $P_2(k) = k^2$

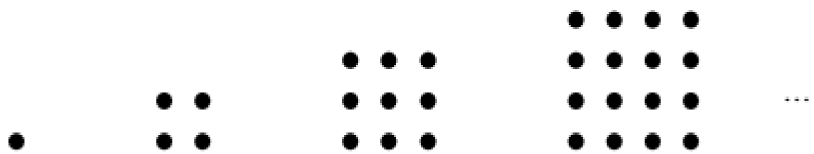

Figura A3

Los números pentagonales, 0, 5, 12, 22, 35, … (Ver Figura A4), los cuales denotaremos por

$$P_3(k) = \frac{3k^2 - k}{2}$$

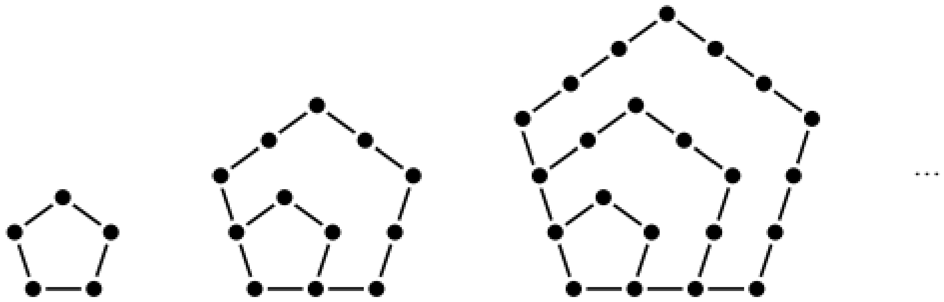

Figura A4

En general, los números poligonales son enteros no negativos construibles geométricamente a partir de polígonos regulares, como se muestra en los ejemplos anteriores.
De manera algebraica los números M-gonales asociados a un polígono con M lados los construimos de tal forma que para todo M mayor o igual que 3 con $m = M - 2$, se tiene que

$$P_m(k) = 1 + (m+1) + (2m+1) + \cdots + \big((k-1)m + 1\big) = \frac{mk(k-1)}{2} + k,$$

este es un polinomio de grado 2 en k

Los números poligonales tienen diversas propiedades y relaciones entre sí, por ejemplo: Fibonacci remarcó es su *Liber Quadratorum* que un cuadrado excede a su predecesor en las raíces de ambos, es decir

$$P_2(k) = P_2(k-1) + \sqrt{P_2(k)} + \sqrt{P_2(k-1)}$$

Los pitagóricos notaron que el k-ésimo cuadrado es igual a la suma de los primeros k impares, es decir, $P_2(k) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1)$ (Ver Figura A5), esta propiedad también aparece en el libro de Fibonacci.

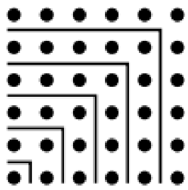

Figura A5

Otra interesante propiedad aparece en el *Platonic Questions* de Plutarco

$$8P_1(k) + 1 = P_2(2k+1) \text{ (Ver Figura A6)}$$

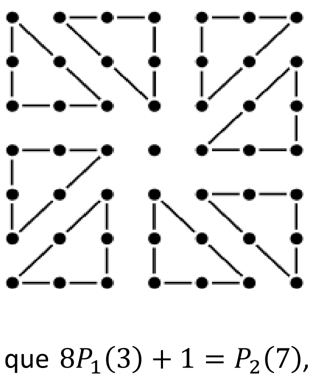

Figura A6

en la Figura A6 se puede ver que $8P_1(3) + 1 = P_2(7)$, es decir, la suma de ocho triangulares iguales más uno da lugar a un cuadrado.

5.2. Cantidad de representaciones como sumas de números decagonales

En este capítulo estudiaremos el caso de las representaciones de un entero como suma de números decagonales[4] y posteriormente realizaremos lo mismo, pero con los poligonales de l lados.

Las propiedades que aquí mostramos las podríamos clasificar en cuatro rubros, que son los siguientes:

a) A través de la teoría de las diferencias de los elementos consecutivos de una sucesión se puede ver que si fijamos una m, entonces es posible obtener un entero, con al menos m representaciones, como suma de $2m$ decagonales números de la forma $D(n) = n(4n - 3)$.

b) Por el teorema de Cauchy[5] sabemos que la función $r_{D,10}(n)$ es positiva para todo entero no negativo n (es decir, $r_{D,10}(n) \geq 1$). En esta parte abordamos la idea de valores inversos de la función $r_{D,10}(n)$, es decir, no se pretende llegar a una inversa de $r_{D,10}(n)$, pero sí mostrar que para toda $k \in \mathbb{N}$ existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_{D,10}(m) \geq k$.

c) El tamaño de $r_{D,s}(m)$ aumenta si también lo hace la cantidad de sumandos, es decir, $r_{D,s}(m)$ es creciente sobre s.

d) Aquí mostraremos que para cualquier real, no necesariamente imagen de $D(x)$, es posible encontrar los enteros consecutivos k y $k + 1$, tal que $D(k) \leq y < D(k + 1)$, a la más grande de las k es lo que denotamos como $H(D(x), y) = k$, este valor será importante en el Capítulo **5. Cantidad de representaciones como sumas de potencias** para acotar a $R_{K,s}(n)$ y $R^*_{K,s}(n)$.

Los cuatro temas mencionados en este resumen son planteados sólo para decagonales, pero lo correspondiente se hará para los poligonales de l lados, que será lo abordado en la tercera parte de este capítulo.

Definición

Sea $L(n) = \frac{(l-2)n^2-(l-4)n}{2}$ definida en los enteros positivos y que da lugar a la sucesión de los números poligonales con l lados. Para el caso particular de los números decagonales tomamos $l = 10$ y a partir de $L(n)$ obtenemos la función $D(n)) = \frac{(10-2)n^2-(10-4)n}{2} = n(4n - 3)$, que es la sucesión de los números decagonales (Ver Figura D1).

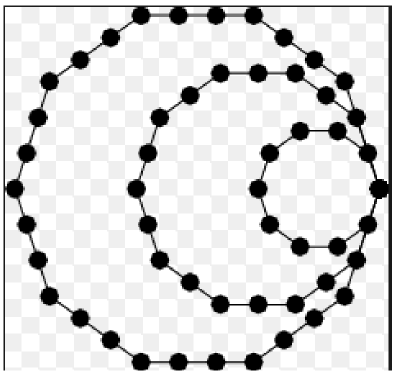

Figura D1

[4] Son los números poligonales asociados a polígonos de diez lados.

[5] En el Apéndice se enuncia y demuestra el teorema de Cauchy correspondiente a la representación de los enteros como suma de poligonales.

Mediante el software mencionado en el Capítulo **1. Prefacio** pudimos visualizar y contar la cantidad de representaciones aditivas que tienen los números naturales, pero se considera que los sumandos (que pueden ser repetidos o no) son de distintos conjuntos, es decir, los sumandos pueden ser números impares, cúbicos, primos, cuadrados, etc., pero todos del mismo conjunto.

A continuación, se muestra la gráfica (Ver Figura D2) de la cantidad de representaciones que tiene cada natural entre 1 y 26001 como suma de diez decagonales, aquí sólo se considera el caso cuando no importa el orden de los sumandos.[6]

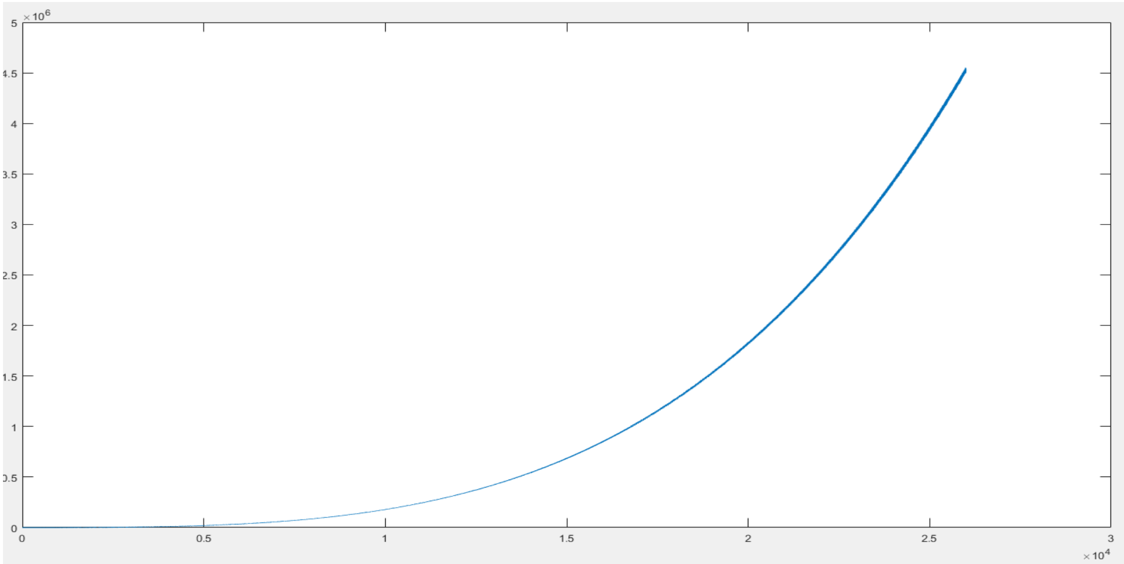

Figura D2 (Gráfica de la función $D(x)$)

Por ejemplo, el número 1375 se puede escribir como suma de los siguientes decagonales

$$1 + 10 + 27 + 52 + 85 + 126 + 175 + 232 + 297 + 370$$

y el total de sus representaciones como suma de diez decagonales cuando no importa el orden es 569.

Con base en los elementos que nos proporciona la gráfica podemos decir que los datos atienden a un comportamiento sorprendentemente estable que permite interpolar una función que nos llevará a conocer el comportamiento general de las cantidades de representaciones con sumandos que son decagonales.

Ahora, si ya nos percatamos que una función que en principio no es fácil de calcular, como lo es $r^*_{D,10}$, pero que en la visualización de sus imágenes sorprende por tener características muy estables, entonces lo normal sería preguntarnos ¿por qué?

Un entero como suma de poligonales.

El punto de inicio para este análisis de las representaciones aditivas es el método de las diferencias finitas, esta teoría nos permitirá construir las primeras representaciones de un entero con sumas de decagonales[7].

Recordemos que ya se definió a la diferencial entera $\Delta f(x)$ y a la n-ésima diferencial entera $\Delta^n f(x)$.

Definición: $\Delta f(x)$ **Diferencial entera** $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

---

[6] Es decir, consideramos $1+0+0+0+0+0+0+0+0+0$ y $0+0+0+0+0+0+0+0+0+1$ como la misma representación de 1.

[7] Las bases de esta teoría se pueden estudiar en [Chrystal 1964, p.398-409].

Definición: $\Delta^n f(x)$ **n-ésima diferencial entera** $\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$.

Para el caso de los decagonales $D(n) = n(4n - 3)$ notemos lo siguiente

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$D(n)$	0	1	10	27	52	85	126	175	232
$\Delta D(n)$	1	9	17	25	33	41	49	57	65
$\Delta^2 D(n)$	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Tabla D1

A partir de esta tabla sería natural preguntarnos si el último renglón siempre es igual a ocho, en la Proposición D2 veremos que esto es verdad.

Proposición D1

El grado del polinomio que corresponde a la diferencial entera de $D(n)$, $\Delta D(x)$ es uno, es decir $\delta\big(\Delta D(x)\big) = 1$.

Demostración

$\Delta D(x) = D(x+1) - D(x) = (x+1)(4(x+1)-3) - (x)(4x - 3) = 8x + 1.$

Así, se obtiene un polinomio de grado uno.

QED

Proposición D2

La segunda diferencial entera de $D(n)$ es igual a ocho, es decir, $\Delta^2 D(x) = 8$

Demostración

$$\Delta^2 D(x) = \Delta D(x+1) - \Delta D(x) = (8(x+1)+1) - (8x+1) = 8$$

QED

Ahora, con base en las proposiciones anteriores podemos presentar los primeros resultados que nos darán la representación de un entero positivo en términos de suma de decagonales.

Proposición D3

Existe un entero con al menos m representaciones como suma de $2m$ decagonales

Demostración

Por definición $\Delta D(x) = D(x+1) - D(x)$ es una combinación entera de $D(x)$ y $D(x+1)$ y de esto se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta^2 D(x) &= \Delta D(x+1) - \Delta D(x) = \big(D(x+2) - D(x+1)\big) - \big(D(x+1) - D(x)\big) \\ &= D(x+2) - 2D(x+1) + D(x), ----------------- \text{(d1)} \end{aligned}$$

es una combinación entera de $D(x), D(x+1), D(x+2)$. Por la Proposición D2 sabemos que $\Delta^2(x) = 8$ para toda x, y por lo tanto podemos tomar m valores en el dominio y tener que

$$\Delta^2 D(0) = \cdots = \Delta^2 D(m-1) = 8,$$

y al retomar la ecuación (d1) sabemos que

$$\mathrm{D(2) - 2D(1) + D(0) = \cdots = D(m+1) - 2D(m) + D(m-1) = 8.}$$

Si sumamos el término $2\sum_{i=1}^{m} D(i)$ en cada una de las partes de la igualdad anterior, tendremos que

$$\mathrm{D}(2)+2\left(\sum_{i\in\{1,\dots,m\}\setminus\{1\}}^{m} D(i)\right)+\mathrm{D}(0)=\cdots=\mathrm{D}(\mathrm{m}+1)+2\left(\sum_{i\in\{1,\dots,m\}\setminus\{m\}}^{m} D(i)\right)+\mathrm{D}(\mathrm{m}-1)$$
$$=8+2\left(\sum_{i=1}^{m} D(i)\right).--------(d2)$$

Así, llegamos a m sumas, cada una con $2m$ sumandos y todas generan al mismo entero

QED

Este ejemplo nos permite ver que podemos construir un número con cinco o más representaciones como suma de diez decagonales. De (d1) se tiene que

$$8=10-(2)(1)+0=27-(2)(10)+1=52-(2)(27)+10=85-(2)(52)+27$$
$$=126-(2)(85)+52,$$

y de la ecuación (d2) obtenemos que

$$358=8+(2)(1+10+27+52+85)=10+(2)(10+27+52+85)+0$$
$$=27+(2)(1+27+52+85)+1=52+(2)(1+10+52+85)+10$$
$$=85+(2)(1+10+27+85)+27=126+(2)(1+10+27+52)+52.$$

Con esto se llega a que el número 358 tiene al menos cinco representaciones como suma de diez decagonales

Proposición D4

La función representaciones como suma de diez números decagonales $r_{D,10}(n)$ no es una función acotada.

Ejemplo, $r_{D,10}(0)=1$, $r_{D,10}(1)=10$, $r_{D,10}(10)=11$, $r_{D,10}(27)=370$ y así para todo k existe un m tal que $r_{D,10}(m)\geq k$.

Demostración

Si tomamos los primeros $m+1$ decagonales $D(0),\dots,D(m)$ entonces podemos formar al menos $(m+1)^{10}$ representaciones para el caso en el que sí nos importa el orden de los sumandos. $D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)$,

$D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(0)+D(1),\dots$,

$D(m)+D(m)+D(m)+D(m)+D(m)+D(m)+D(m)+D(m)+D(m)+D(m)$.

Estas representaciones son menores que $10D(m)$, por lo tanto

$$(m+1)^{10}\leq R_{D,10}\big(10D(m)\big),$$

entonces tenemos $10D(m)+1$ números (De 0 a $10D(m)$) y al menos $(m+1)^{10}$ representaciones de esos números.

Ahora calculemos el número de representaciones promedio.

$$\frac{(m+1)^{10}}{1+10D(m)}\leq\frac{R_{D,10}\big(10D(m)\big)}{1+10D(m)}.$$

Si hacemos m tender a infinito

$$\infty=\lim_{m\to\infty}\frac{m^{10}}{m^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^{10}}{1+10D(m)}\leq\lim_{m\to\infty}\frac{R_{D,10}\big(10D(m)\big)}{1+10D(m)},$$

entonces las representaciones promedio divergen y por lo tanto $r_{D,10}(m)$ no es una función acotada

QED

Ahora podemos determinar que la cantidad de representaciones sin importar el orden y cuando sí importa se encuentran en una relación biunívoca, esto lo planteamos en la proposición que sigue.

Proposición D5
$r^*_{D,10}(n)$ está acotada si y sólo si $r_{D,10}(n)$ está acotada, y
$r^*_{D,10}(n) = 0$ si y sólo si $r_{D,10}(n) = 0$

Demostración
Cada representación del caso en que no importa el orden puede asociarse al menos a una representación del caso donde sí nos importa el orden, pero no a más de $10!$ representaciones del caso donde nos importa el orden, es decir:

$$r^*_{D,10}(n) \leq r_{D,10}(n) \leq 10!\, r^*_{D,10}(n)$$

QED

Proposición D6
La cantidad de representaciones promedio (como suma de 10 decagonales) entre $D(m)$ y $10D(m)$ también divergen.

Demostración
Podemos construir $(m+1)^{10}$ representaciones donde cada una no sea mayor que $10D(m)$, usando los sumandos $D(0), \dots, D(m)$; además podemos construir $(m)^{10}$ representaciones que no ocupan a $D(m)$ y son menores que $10D(m)$ usando como sumandos a $D(0), \dots, D(m-1)$. Si al primer conjunto de representaciones le quitamos el segundo, entonces obtenemos $(m+1)^{10} - (m)^{10}$ representaciones menores que $10D(m)$ y que sí ocupan a $D(m)$, es decir

$$\frac{(m+1)^{10} - (m)^{10}}{(9)D(m)+1} \leq \frac{|\{reprecentaciones\ que\ ocupan\ a\ D(m) entre\ D(m)\ y\ 10 * D(m)\}|}{(9)D(m)+1}$$
$$\leq \frac{R_{D,10}(10D(m)) - R_{D,10}\big(-1 + D(m)\big)}{(9)D(m)+1}$$

y si hacemos m tender a infinito

$$\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^9}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^{10} - (m)^{10}}{(9)D(m)+1} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{D,10}(10D(m)) - R_{D,10}\big(-1 + D(m)\big)}{(9)D(m)+1}$$

QED

Proposición D7
La cantidad de representaciones de n como suma de s decagonales es creciente como función de s, es decir $r_{D,s}(n) \leq r_{D,s+1}(n)$.

Ejemplo $r_{D,1}(1) = 1 \leq r_{D,2}(1) = 2 \leq r_{D,3}(1) = 3 \leq r_{D,4}(1) = 4 \leq \cdots \leq r_{D,s}(1) = s$.

Demostración
Podemos tomar una representación de $r_{D,s}(n)$ y sumarle cero obteniendo una representación de $r_{D,s+1}(n)$, por esta razón siempre se puede llegar a

$$r_{D,s}(n) \leq r_{D,s+1}(n),$$

es decir $r_{D,s}(n)$ es creciente en s.

QED

Recordemos que $H(f(x), n)$ es el mayor entero tal que $f(H(f(x), n))$ es menor o igual que n

También notemos que $D(x)$ es convexa ya que $\frac{d^2}{dx^2} D(x) = 8 > 0$ de lo cual se sigue $D(x)$ como una función convexa en $\mathbb{R}$, es decir, no toma el mismo valor más de dos veces.

Lo anterior se hereda a $D(x) - u$, para toda $u \in \mathbb{R}$

Proposición D8

$$H[D(x), u] = H\left[x, \frac{3 + \sqrt{9 + 16u}}{8}\right]$$

Por ejemplo

$$H[D(x), 1] = 1, \qquad H[D(x), 2] = 1, \qquad H[D(x), 2] = 1, \ldots\ldots, H[D(x), 9] = 1,$$
$$H[D(x), 10] = 2, \ldots, H[D(x), 235] = 8.$$

Demostración

Por lo anterior tiene sentido calcular las raíces del polinomio $D(x) - u = x(4x - 3) - u$, ya que $H[D(x), u]$ debe ser un entero inmediatamente anterior a alguna de las raíces, resolviendo tenemos que $x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16u}}{8}$, si

$$u > 0 \; \rightarrow \; \sqrt{9 + 16u} > 3 \; \rightarrow \; \frac{3-\sqrt{9+16u}}{8} < 0\,! \text{ por lo tanto } x = \frac{3+\sqrt{9+16u}}{8}$$

Pero $H[D(x), u]$ debe ser un valor entero, notemos lo siguiente

$$H\left[x, \frac{3 + \sqrt{9 + 16u}}{8}\right] \leq \frac{3 + \sqrt{9 + 16u}}{8} < 1 + H\left[x, \frac{3 + \sqrt{9 + 16u}}{8}\right]$$

entonces $D\left(H\left[x, \frac{3+\sqrt{9+16u}}{8}\right]\right) \leq D\left(\frac{3+\sqrt{9+16u}}{8}\right) = u < D\left(1 + H\left[x, \frac{3+\sqrt{9+16u}}{8}\right]\right)$

por lo tanto $H[D(x), u] = H\left[x, \frac{3+\sqrt{9+16u}}{8}\right]$.

QED

5.3. Cantidad de representaciones como sumas de números poligonales

Recordemos que $L(n)=\frac{(l-2)n^2-(l-4)n}{2}$ es la sucesión de los números poligonales con l lados.

Proposición L1
El grado del polinomio correspondiente a la primera diferencial entera de $L(n)$ es uno, es decir,

$$\delta\big(\Delta L(x)\big)=1$$

Demostración

$$\Delta L(x)=L(x+1)-L(x)=\frac{(l-2)(x+1)^2-(l-4)(x+1)}{2}-\frac{(l-2)(x)^2-(l-4)(x)}{2}$$
$$=(l-2)x+1$$

QED

Proposición L2
La segunda diferencial entera de $L(n)$ es igual a $l-2$, es decir

$$\Delta^2L(x)=l-2$$

Demostración

$$\Delta^2L(x)=\Delta L(x+1)-\Delta L(x)=((l-2)(x+1)+1)-((l-2)x+1)=(l-2)$$

QED

Proposición L3
Existe un entero con al menos m representaciones como suma de $2m$ L-gonales

Demostración

Por definición $\Delta L(x)=L(x+1)-L(x)$ es una combinación entera de $L(x)$ y $L(x+1)$, y

$$\Delta^2L(x)=\Delta L(x+1)-\Delta L(x)=\big(L(x+2)-L(x+1)\big)-\big(L(x+1)-L(x)\big)$$
$$=L(x+2)-2L(x+1)+L(x)$$

es una combinación entera de $L(x),L(x+1),L(x+2)$ y por el resultado anterior $\Delta^2L(x)=l-2$ para toda x, es decir, que podemos tomar

$$\Delta^2L(0)=\cdots=\Delta^2L(m-1)=L-2$$
$$L(2)-2L(1)+L(0)=\cdots=L(m+1)-2L(m)+L(m-1)=l-2.$$

Si sumamos $2\sum_{i=1}^{m}L(i)$ tenemos que

$$L(2)+2\left(\sum_{i\in\{1,\dots,m\}\setminus\{1\}}^{m}L(i)\right)+L(0)=\cdots=L(m+1)+2\left(\sum_{i\in\{1,\dots,m\}\setminus\{m\}}^{m}L(i)\right)+L(m-1)$$
$$=l-2+2\sum_{i=1}^{m}L(i).$$

Por lo tanto $l-2+2\sum_{i=1}^{m}L(i)$ es un entero con al menos m representaciones como suma de $2m$ L-gonales.

QED

Proposición L4
La función representaciones como suma de l números L-gonales $r_{L,l}(n)$ no es una función acotada.

Demostración
Si tomamos $L(0), \ldots, L(m)$ podemos formar al menos $(m+1)^l$ representaciones en el caso que nos importa el orden de los sumandos tales que todas son menores que l veces el más grande de los números que ocupamos ($L(m)$), es decir

$$(m+1)^l \leq R_{L,l}\left(l\big(L(m)\big)\right).$$

Entonces tenemos $lL(m)+1$ números y al menos $(m+1)^l$ representaciones de esos números. Ahora para calcular la cantidad de representaciones promedio se tiene que

$$\frac{(m+1)^l}{1+l\big(L(m)\big)} \leq \frac{R_{L,l}\left(l\big(L(m)\big)\right)}{1+l\big(L(m)\big)},$$

y si hacemos m tender a infinito con $l \geq 3$

$$\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^l}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^l}{1+l\big(L(m)\big)} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{L,l}\left(l\big(L(m)\big)\right)}{1+l\big(L(m)\big)},$$

así las representaciones promedio divergen, por lo tanto, $r_{L,l}(n)$ no es una función acotada.

QED

Proposición L5
$r^*_{L,l}(n)$ está acotada si y sólo si $r_{L,l}(n)$ está acotada y
$r^*_{L,l}(n) = 0$ si y solo si $r_{L,l}(n) = 0$

Demostración
Cada representación del caso en que no nos importa el orden puede asociarse al menos a una representación del caso donde nos importa el orden, pero no a más de $l!$ representaciones del caso donde nos importa el orden, es decir:

$$r^*_{L,l}(n) \leq r_{L,l}(n) \leq l!\, r^*_{l,L}(n)$$

QED

Consideremos las representaciones promedio entre $L(m)\ y\ l\big(L(m)\big)$

Proposición L6
Las representaciones promedio entre $L(m)\ y\ l\big(L(m)\big)$ también divergen.

Demostración
Podemos construir $(m+1)^l$ representaciones que sean menores que $l\big(L(m)\big)$ usando como sumandos a $L(0),\dots,L(m)$; tambien podemos construir $(m)^l$ representaciones que no ocupan a $L(m)$ y son menores que $l*L(m)$ usando como sumandos a $L(0),\dots,L(m-1)$. Si al primer conjunto de representaciones le quitamos el segundo obtenemos $(m+1)^l-(m)^l$ representaciones menores que $l\big(L(m)\big)$ y que sí ocupan a $L(m)$, es decir

$$\frac{(m+1)^l-(m)^l}{(l-1)\big(L(m)\big)+1} \le \frac{\left|\left\{reprecentaciones\ que\ ocupan\ a\ L(m)\ entre\ L(m)\ y\ l\big(L(m)\big)\right\}\right|}{(l-1)\big(L(m)\big)+1}$$
$$\le \frac{R_{L,l}\Big(l\big(L(m)\big)\Big)-R_{L,l}\big(-1+L(m)\big)}{(l-1)\big(L(m)\big)+1}$$

y si hacemos m tender a infinito

$$\infty=\lim_{m\to\infty}\frac{m^{l-1}}{m^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^l-(m)^l}{(l-1)\big(L(m)\big)+1}\le\lim_{m\to\infty}\frac{R_{L,l}\Big(l\big(L(m)\big)\Big)-R_{P,l}\big(-1+L(m)\big)}{(l-1)\big(L(m)\big)+1}.$$

Esta función también diverge a infinito si l es 4 o más

QED

Proposición L7
El número de representaciones es mayor o igual si aumenta el número de sumandos, es decir $r_{L,s}(n)$ es no decreciente en s

Demostración
Esto será claro del hecho de que podemos tomar una representación de $r_{L,s}(n)$ y sumarle cero obteniendo una representación de $r_{L,s+1}(n)$

$$r_{L,s}(n)\le r_{L,s+1}(n),$$

es decir, $r_{L,s}(n)$ es creciente en s

QED

Recordemos que $H(f(x),n)$ es el mayor entero tal que $f(H(f(x),n))$ es menor o igual que n. También notemos que $L(x)$ es convexa ya que $\frac{d^2}{dx^2}L(x)=l-2>0$ de lo cual se sigue $L(x)$ como una función en $\mathbb{R}$ que no toma el mismo valor más de dos veces. Lo anterior se hereda para $L(x)-u$, con cualquier $u\in\mathbb{R}$.

Por lo expuesto, tiene sentido calcular las raíces del polinomio

$$D(x)-u=\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}-u$$

ya que $H[L(x),u]$ debe ser un entero inmediatamente anterior a alguna de las raíces, resolviendo tenemos la proposición que sigue.

Proposición L8

$$H[L(x),u] = H\left[x, \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}\right]$$

Demostración

Por lo anterior tiene sentido calcular las raíces del polinomio

$$L(x) - u = \frac{(l-2)n^2 - (l-4)n}{2} - u$$

ya que $H[L(x),u]$ debe ser un entero inmediatamente anterior a alguna de las raíces, entonces se tiene lo siguiente

$$x = \frac{l-4 \pm \sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}$$

Si $u > 0 \rightarrow \sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)} > l-4 \rightarrow$
$$\frac{l-4 \pm \sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)} < 0\,!$$

por lo tanto $x = \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}$.

Pero $H[L(x),u]$ debe ser un valor entero, notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} H\left[x, \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}\right] &\leq \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)} \\ &< 1 + H\left[x, \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}\right] \\ &\rightarrow L\left(H\left[x, \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}\right]\right) \\ &\leq L\left(\frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}\right) = u \\ &< L\left(1 + \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}\right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$H[L(x),u] = H\left[x, \frac{l-4+\sqrt{(l-4)^2+2u(L-2)}}{2(L-2)}\right]$$

QED

Proposición L9
Si L y s son mayores o iguales a tres entonces existe algún entero con una cantidad arbitrariamente grande de representaciones como suma de s números L-gonales

Demostración
Si tomamos $L(0),\ldots,L(m)$ podemos formar al menos $(m+1)^s$ representaciones en el caso que nos importa el orden de los sumandos tales que todas son menores que s veces el más grande de los números que ocupamos ($L(m)$), es decir

$$(m+1)^s \leq R_{L,s}\big(sL(m)\big).$$

Entonces tenemos $sL(m)+1$ números y al menos $(m+1)^s$ representaciones de esos números

Ahora calculemos la cantidad de representaciones promedio.

$$\frac{(m+1)^s}{1+sL(m)} \leq \frac{R_{L,s}(sL(m))}{1+sL(m)}$$

si hacemos m tender a infinito con $s \geq 3$

$$\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^s}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^s}{1+sL(m)} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{L,s}\big(sL(m)\big)}{1+sL(m)},$$

es decir, las representaciones promedio divergen y significa que $r_{L,s}(n)$ no es una función acotada

QED

Proposición L10
$r^*_{L,s}(n)$ está acotada si y sólo si $r_{L,s}(n)$ está acotada y
$r^*_{L,s}(n) = 0$ si y sólo si $r_{L,s}(n) = 0$.

Demostración
Cada representación del caso en que no importa el orden puede asociarse al menos a una representación del caso donde nos importa el orden, pero no a más de $s!$ representaciones del caso donde nos importa el orden, es decir:

$$r^*_{L,s}(n) \leq r_{L,s}(n) \leq s!\, r^*_{s,L}(n)$$

QED

Proposición L11
Si $s \geq 4$ entonces las representaciones promedio entre $L(m)\ y\ sL(m)$ divergen.

Demostración
Podemos construir $(m+1)^s$ representaciones que sean menores que $sL(m)$ usando como sumandos a $L(0),\ldots,L(m)$, y podemos construir $(m)^s$ representaciones que no ocupen a $L(m)$ y son menores que $sL(m)$, usando como sumandos a $L(0),\ldots,L(m-1)$. Si al primer conjunto de representaciones le quitamos el segundo obtenemos $(m+1)^s-(m)^s$ representaciones menores que $sL(m)$ y que sí ocupan a $L(m)$, es decir,

$$\frac{(m+1)^s-(m)^s}{(s-1)L(m)+1} \leq \frac{|\{reprecentaciones\ que\ ocupan\ a\ L(m)\ entre\ L(m)\ y\ sL(m)\}|}{(s-1)L(m)+1}$$
$$\leq \frac{R_{L,s}(sL(m))-R_{L,s}\left(-1+L(m)\right)}{(s-1)L(m)+1}$$

$$\infty = \lim_{m\to\infty}\frac{m^{s-1}}{m^2} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^s-(m)^s}{(s-1)L(m)+1} \leq \lim_{m\to\infty}\frac{R_{L,s}(sL(m))-R_{P,s}\left(-1+L(m)\right)}{(s-1)L(m)+1}$$

por lo tanto, esta función también diverge a infinito

QED

Para terminar esta parte de la tesis recapitularemos los resultados obtenidos. Planteándolo *grosso modo*, recordemos a partir de la Figura D2, que el comportamiento de los valores de $r_{D,10}(n)$ parecen atender a un arreglo más determinista que azaroso. En este capítulo hemos tratado de dar los primeros pasos para entender en comportamiento de $r_{D,10}(n)$ (así como de $r_{L,s}(n)$). En primera instancia encontramos que para todo valor k existe una n en el dominio tal $r_{D,10}(n)$ fuera mayor o igual a esa k; o que es posible encontrar para cualquier entero λ las imágenes más cercanas de $D(x)$ tal que $D(x) \leq \lambda < D(x+1)$ (Ver Figura D3). Entonces ya podemos sugerir que el comportamiento de $r_{L,s}(n)$ puede ser modelado y caracterizado con base en los primeros resultados obtenidos en este capítulo.

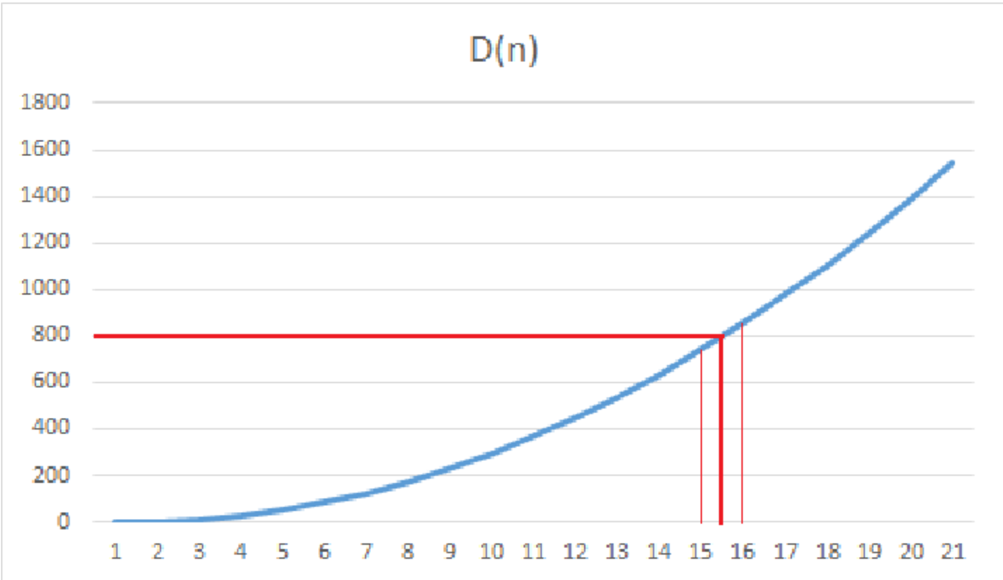

Figura D3

En esta grafica se puede apreciar que $D(15) \leq 800 < D(16)$ por lo tanto $H[D(x), 800] = 15$.

6. Representaciones como sumas de k-ésimas potencias

En el capítulo anterior ya proporcionamos los elementos de inicio para analizar la representación de un entero como suma de las imágenes de cierto tipo de polinomios entero valuados de grado dos. En este capítulo damos lugar a un estudio más amplio del uso de potencias, es decir, ahora emplearemos k-ésimas potencias para representar a cualquier entero positivo, y para evitar confusiones, cabe señalar que cualquier representación siempre será como suma de números tomados del conjunto $\{1^k, 2^k, \ldots, n^k, \ldots\}$ con k fija, pero también pueden ser de k no fija y el conjunto es $\{1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, n^{k_n}, \ldots\}$.
Las propiedades que mostraremos en este capítulo las enunciamos a continuación:

a) Con base en los coeficientes $b_k(x) = \binom{x}{k}$ asociados a las representaciones canónicas de los polinomios $K(x) = x^k$, mostraremos diversas maneras en las que se puede representar a la h-ésima diferencial entera, la que denotamos por $\Delta^h K(x)$.
b) Si se fija una m, entonces es posible obtener un entero con al menos $m2^{k-1}$ potencias k como sumandos en su representación aditiva.
c) De manera semejante a lo hecho en el Capítulo **5. Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales**, mostraremos que la función $r_{K,s}(n)$ es no acotada, es decir que para toda k existe una m tal que $r_{K,s}(m) \geq k$.
d) El tamaño de $r_{K,s}(n)$ aumenta si también lo hace la cantidad de sumandos, es decir, $r_{K,s}(s)$ es creciente sobre s.
e) En esta parte se mostrarán cotas para $R_{K,s}(n)$ y $R^*_{K,s}(n)$, donde definimos a $R^*_{K,s}(n)$ como la cantidad de representaciones acumuladas donde sí importa el orden de los sumandos, es decir,

$$R^*_{K,s}(N) = \sum_{n=0}^{N} r^*_{K,s}(n),$$

y respectivamente la expresión es semejante para el caso de $R_{K,s}(n)$.

El punto e) que mencionamos tiene una relevancia especial ya que encontrar las cotas para este tipo de sumas ha sido un problema que llamó la atención desde hace un poco más de 100 años. Sierpinski, Hardy y Landau trabajaron en el problema de que dado un entero positivo n y con $r(n)$ la cantidad de representaciones como suma de dos cuadrados, es decir $\gamma_{x^2,2}(k) = \mathrm{card}\{n = t^2 + s^2, \mathrm{t,s\ enteros}\}$, entonces su objetivo era encontrar una buena aproximación para

$$\Upsilon_{x^2,2}(n) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{x^2,2}(k).$$

Este problema es un caso particular que quedará inmerso en uno más general que planteamos en la tesis, es decir, en el punto e).

Representación canónica de $P(x)$
Un polinomio entero valuado tiene una representación canónica si es posible escribirlo como una combinación lineal y entera de polinomios binomiales, es decir, los de la forma

$$b_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

Proposición K0
Todo polinomio $P(x)$ entero valuado tiene una representación canónica.

Demostración
Sea $b_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ y $P(x) = P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ un polinomio entero valuado.

Ahora construimos los polinomios siguientes:

$P_{k-1}(x) = P_k(x) - u_k b_k(x)$ con un real u_k tal que $P_{k-1}(x)$ sea de grado $k-1$.
$P_{k-2}(x) = P_{k-1}(x) - u_{k-1} b_{k-1}(x) = P_k(x) - u_k b_k(x) - u_{k-1} b_{k-1}(x)$ con un real u_{k-1} tal que $P_{k-2}(x)$ sea de grado $k-2$.

Si procedemos así sucesivamente, entonces podemos encontrar reales $u_0, u_1, \dots, u_k$ tales que $0 = P(x) - \sum_{i=0}^{k} u_i b_i(x)$, es decir $P(x) = \sum_{i=0}^{k} u_i b_i(x)$.

Ahora, mostraremos que el conjunto de coeficientes $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ es de enteros. Si evaluamos en cero tenemos que $P(0) = \sum_{i=0}^{k} u_i b_i(0) = u_0 b_0(0) = u_0$ y como $P(x)$ es entero valuado, entonces $P(0)$ es un entero, es decir u_0 es un entero. Por otro lado,

$P(x) - u_0 b_0(x) = P(x) - u_0 = \sum_{i=1}^{k} u_i b_i(x)$ es una combinación entera de polinomios entero valuados, es decir es entero valuado. Si la última igualdad se evalúa en 1 se llega a que

$$P(1) - u_0 b_0(1) = \sum_{i=1}^{k} u_i b_i(1) = u_1 b_1(1) = u_1,$$

por lo anterior u_1 también es un entero. Si se continua la construcción de esta manera

$$P(x) - \sum_{i=0}^{j-1} u_i b_i(x) = \sum_{i=j}^{k} u_i b_i(x),$$

y como $b_j(j) = 1$ y además $b_j(l) = 0$, para toda $i > j$, entonces

$$P(j) - \sum_{i=0}^{j-1} u_i b_i(j) = u_j b_j(j) + \sum_{i=j+1}^{k} u_i b_i(j),$$

y se puede concluir que $P(j) - \sum_{i=0}^{j-1} u_i b_i(j) = u_j$, es decir que u_j es entero si los anteriores son enteros, por lo tanto $u_0, u_1, \dots, u_k$ son enteros.

Potencias K

Sea $K(x) = x^k$, y veamos un ejemplo de la representación canónica de $K(x) = x^2$.
De la Proposición P0 se infiere que $K(x) = x^2 = u_0 b_0(x) + u_1 b_1(x) + u_2 b_2(x)$, si se evalúa en cero, se obtiene lo siguiente $K(0) = 0 = u_0 b_0(0) + u_1 b_1(0) + u_2 b_2(0) = u_0$, por lo tanto $K(x) = x^2 = u_1 b_1(x) + u_2 b_2(x)$.

Ahora si se evalúa en $x = 1$, tenemos que $K(1) = 1 = u_1 b_1(1) + u_2 b_2(1) = u_1$, entonces $K(x) - b_1(x) = x^2 - b_1(x) = u_2 b_2(x)$.

Si se hace lo mismo para $x = 2$, nos queda que $K(2) - b_1(2) = 4 - 2 = u_2$. Por lo tanto, la representación canónica de $K(x) = x^2$ es $x^2 = 0b_0(x) + 1b_1(x) + 2b_2(x)$.

Proposición K1
El grado del polinomio correspondiente a la primera diferencial entera de $K(x)$ es $k-1$, es decir
$$\delta\big(\Delta K(x)\big)=k-1$$

Demostración[8]
Sabemos que por ser un polinomio entero valuado $K(x)$ tiene una representación canónica, es decir $K(x)=\sum_{i=0}^{k}u_ib_i(x)$ entonces $\Delta K(x)=\sum_{i=0}^{k}u_i\Delta b_i(x)$.

También, consideramos que como $\Delta b_k(x)=b_{k-1}(x)$, entonces
$$\Delta K(x)=\sum_{i=1}^{k}u_ib_{i-1}(x)=\sum_{j=0}^{k-1}u_{j+1}b_j(x)$$
que es un polinomio de grado $k-1$.

QED

Ejemplo. $K(x)=x^2=0b_0(x)+1b_1(x)+2b_2(x)$,
entonces $\Delta\big(K(x)\big)=1b_0(x)+2b_1(x)=1+2x$,
además $\Delta^2K(x)=\Delta\Big(\Delta\big(K(x)\big)\Big)=2b_0(x)=2$.

Proposición K2
La h-ésima diferencial entera de $K(x)$ se puede expresar en términos de sus coeficientes canónicos, junto con los polinomios binomiales, y queda de la siguiente manera
$$\Delta^hK(x)=\sum_{i=h}^{k}u_ib_{i-h}(x)$$

Demostración
Se puede demostrar por inducción que $\Delta^hK(x)=\sum_{i=h}^{k}u_ib_{i-h}(x)$.

Base de inducción) Como parte de la prueba de la Proposición K1 vimos que la primera diferencial entera de $K(x)$ es $\Delta K(x)=\sum_{i=1}^{k}u_ib_{i-1}(x)$.
Hipótesis de inducción) Supongamos que la h-ésima diferencial es $\Delta^hK(x)=\sum_{i=h}^{k}u_ib_{i-h}(x)$.
Paso inductivo) Para la $(h+1)$ −ésima diferencial se tiene que
$$\Delta^{h+1}K(x)=\Delta\left(\Delta^hK(x)\right)=\Delta\left(\sum_{i=h}^{k}u_ib_{i-h}(x)\right)=\sum_{i=h}^{k}u_i\Delta(b_{i-h}(x))=\sum_{i=h+1}^{k}u_ib_{i-h-1}(x),$$
por lo tanto $\Delta^hK(x)=\sum_{i=h}^{k}u_ib_{i-h}(x)$ para toda $h\in\mathbb{N}$.

QED

[8] Cabe mencionar que la demostración de este caso $K(x)=x^k$ podría ser de manera directa como se presentó en el teorema D1 del Capítulo **5. Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales**, es decir, se considera la diferencia
$K(x+1)-K(x)=(x+1)^k-x^k$ y se llegará a un polinomio de grado $k-1$. Pero se usa un proceso con base en las representaciones canónicas porque consideramos que es lo más adecuado porque el proceso de los resultados que siguen en este capítulo y el cuatro requerirán esta clase de representaciones.

Proposición K3

La k-ésima diferencial entera de un polinomio $K(x)$ entero valuado de grado k coincide con el k-ésimo coeficiente de su representación canónica, es decir

$$\Delta^k K(x) = k!\, a_k = u_k$$

Demostración

Sea $K(x) = \sum_{i=0}^{k} u_i b_i(x)$ en su forma canónica, y por la Proposición K2 tenemos la primera igualdad

$\Delta^k K(x) = \sum_{i=k}^{k} u_i b_{i-h}(x) = u_k b_0(x) = u_k$, ahora notemos lo siguiente,

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = \sum_{i=0}^{k} u_i b_i(x) - - - - - - - - (\text{k1})$$

y $b_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i x^i$ para algunos β_i números reales.

Si calculamos la k-ésima derivada de ambos lados de la fórmula (k1) tenemos

$$k!\, a_k = u_k \frac{d^k}{dx^k} b_k(x) = u_k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{x^k}{k!} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i x^i\right) = u_k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = u_k,$$

por lo tanto $\Delta^k K(x) = k!\, a_k = u_k$.

QED

A continuación daremos un ejemplo que nos muestra que podemos expresar la m-ésima diferencial entera de $K(x) = x^2$ como una combinación lineal y entera de $K(x), K(x+1)$ y $K(x+2)$, y además se ve que la suma de los coeficientes de dicha combinación es 0.

Sabemos que $K(x) = x^2 = u_0 b_0(x) + u_1 b_1(x) + u_2 b_2(x)$ y por definición

$$\Delta\, K(x) = (x+1)^2 - (x)^2 = \binom{1}{1}(-1)^{1-1}(x+1)^2 + \binom{1}{0}(-1)^{1-0}(x)^2\,,$$

además $1 - 1 = 0$, y como

$$\begin{aligned} \Delta^2\, K(x) = \Delta\,\Delta\, K(x) &= ((x+2)^2 - (x+1)^2) - ((x+1)^2 - (x)^2) \\ &= (x+2)^2 - 2(x+1)^2 + (x)^2 \\ &= \binom{2}{2}(-1)^{2-2}(x+2)^2 + \binom{2}{1}(-1)^{2-1}(x+1)^2 + \binom{2}{0}(-1)^{2-0}(x)^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\Delta^2\, K(x)$ es una combinación lineal de $K(x+2)$, $K(x+1)$ y $K(x)$ y al sumar los coeficientes tenemos que $1 - 2 + 1 = 0$.

En la proposición siguiente veremos que lo anterior se cumple en general.

Proposición K4

Es posible expresar la m-ésima diferencial entera como una combinación lineal y entera de $K(x), \dots, K(x+m)$, dicha combinación lineal está dada por

$$\Delta^m K(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}(-1)^{m-j}\, K(x+j).$$

Además, la suma de los coeficientes $\binom{m}{j}(-1)^{m-j}$ negativos y por otro lado los positivos tienen la misma magnitud.

Demostración

Una forma de probar que la suma de los coeficientes negativos es igual en magnitud que la suma de los coeficientes positivos es a través de verificar que la suma de todos los coeficientes es cero, esto es, que $\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}(-1)^{m-j} = 0$, pero

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j}(1)^{j} = (1-1)^{m} = 0,$$

por lo tanto, los coeficientes negativos y positivos tienen la misma magnitud. Por otra parte se puede demostrar por inducción la igualdad $\Delta^m K(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} K(x+j)$.

Base de inducción)

$$\Delta K(x) = K(x+1) - K(x) = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} (-1)^{1-j} K(x+j)$$

Hipótesis de inducción)

Supongamos que se cumple para la m-ésima diferencial,

$$\Delta^m K(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} K(x+j)$$

Paso inductivo)

Veamos que se cumple para la $m+1$ diferencial, es decir

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1} K(x) &= \Delta(\Delta^m K(x)) = (\Delta^m K(x+1)) - (\Delta^m K(x)) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} K(x+1+j) - \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} K(x+j)\end{aligned}$$

Bajo el proceso de las operaciones llegamos a

$\Delta^{m+1} K(x) = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} (-1)^{m+1-j} K(x+j)$ por lo tanto

$\Delta^m K(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} K(x+j)$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

QED

La Proposición K4 nos permite dar lugar a la posibilidad de construir un numero del cual podemos exhibir una cantidad determinada de representaciones como suma de k-ésimas potencias. Antes de enunciar la proposición mostraremos un ejemplo.

En el este ejemplo que sigue veremos que existe un entero que tiene al menos 3 representaciones como suma de 6 cuadrados.

Sabemos que $\Delta^2 K(x) = (x+2)^2 - 2(x+1)^2 + (x)^2 = 2$, evaluando en 0, 1 y 2 tenemos que $\Delta^2 K(0) = \Delta^2 K(1) = \Delta^2 K(2) = 2$, entonces $(2)^2 - 2(1)^2 + (0)^2 = (3)^2 - 2(2)^2 + (1)^2 = (4)^2 - 2(3)^2 + (2)^2 = 2$, si sumamos $2(1)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2$ en cada parte de la igualdad obtenemos que:

$$\begin{aligned}(2)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2 + (0)^2 &= (3)^2 + 2(1)^2 + 2(3)^2 + (1)^2 \\ &= (4)^2 + 2(1)^2 + 2(2)^2 + (2)^2 = 2 + 2(1)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2 = 30\end{aligned}$$

por lo tanto 30 tiene por lo menos 3 representaciones como suma de 6 cuadrados.

Proposición K5

Existe un entero con al menos m representaciones como suma de $m * (2)^{k-1}$ potencias k.

Demostración

Por la Proposición K3 $\Delta^k K(x) = u_k$ y por la Proposición K4 tenemos que

$$\Delta^m K(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} K(x+j).$$

Si usamos ambas igualdades obtenemos, por un lado que

$$\Delta^k K(0) = \cdots = \Delta^k K(m-1) = u_k,$$

y por otro

$$\Delta^k K(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} K(x+j) =$$

$$\sum_{\substack{j=0 \\ (k-j\ par)}}^{k} \binom{k}{j} K(x+j) - \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(x+j),$$

esto es

$$u_k = \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j} K(j) - \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(j) = \cdots$$

$$= \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j} K(m-1+j) - \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(m-1+j).$$

Si sumamos en cada parte de la igualdad

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(i+j)$$

obtenemos

$$u_k + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(i+j) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(i+j) + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j} K(j) = \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(i+j) + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j} K(m-1+j).$$

Así, construimos m representaciones de

$$u_k + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(i+j)$$

como suma de

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j}$$

números polinomiales.

También sabemos por la primera parte de la Proposición K4 que

$$\sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} = \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j},$$

además

$$\sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = (2)^k,$$

lo que implica que

$$\sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} = \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j} = (2)^{k-1},$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} + \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ par}}^{k} \binom{k}{j} = \sum_{i=1}^{m-1} (2)^{k-1} + (2)^{k-1} = m * (2)^{k-1}.$$

De lo anterior concluimos que

$$u_k + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ k-j\ impar}}^{k} \binom{k}{j} K(i+j)$$

tiene al menos m representaciones como suma de polinomiales $m(2)^{k-1}$.

QED

Proposición K6

Si $s-k \geq 1$ la función representaciones como suma de s potencias k $r_{K,s}(n)$ no es una función acotada.

Demostración

Si tomamos $K(0), \dots, K(m)$ podemos formar al menos $(m+1)^s$ representaciones para el caso en el que importa el orden de los sumandos de tal manera que todas son menores que s veces el más grande de los números que ocupamos, que en este caso es $(K(m))$, por lo tanto $(m+1)^s \leq R_{K,s}(sK(m))$. Entonces tenemos $1+sK(m)$ números y al menos $(m+1)^s$ representaciones de esos números.

Ahora, calculemos el número de representaciones promedio, para esto se tiene que

$$\frac{(m+1)^s}{1+sK(m)} \leq \frac{R_{K,s}\big(sK(m)\big)}{1+sK(m)}.$$

Si hacemos m tender a infinito

$$\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^s}{m^k} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^s}{1+sK(m)} \le \lim_{m\to\infty} \frac{R_{K,s}(sK(m))}{1+sK(m)},$$

es decir, si $s-k \ge 1$, entonces las representaciones promedio divergen y por lo tanto $r_{K,s}(n)$ no es una función acotada.

QED

Proposición K7
$r^*_{K,s}(n)$ está acotada si y sólo si $r_{K,s}(n)$ está acotada.
$r^*_{K,s}(n) = 0$ si y sólo si $r_{K,s}(n) = 0$.

Demostración
Cada representación del caso en que no importa el orden puede asociarse al menos a una representación del caso donde sí importa el orden, pero no a más de $s!$ representaciones del caso donde nos importa el orden, es decir:

$$r^*_{K,s}(n) \le r_{K,s}(n) \le s!\, r^*_{K,s}(n) .$$

QED

Consideremos las representaciones promedio entre $K(m)$ y $sK(m)$.

Proposición K8
Si $s-k \ge 2$, entonces las representaciones promedio entre $K(m)$ y $sK(m)$ también divergen.

Demostración
Podemos construir $(m+1)^s$ representaciones que sean menores que $sK(m)$, donde $K(0),\ldots,K(m)$ se usan como sumandos; además podemos construir $(m)^s$ representaciones que no ocupan a $K(m)$ y son menores que $sK(m)$, con el uso de los sumandos a $K(0),\ldots,K(m-1)$. Si al primer conjunto de representaciones le quitamos el segundo, obtenemos $(m+1)^s-(m)^s$ representaciones menores que $sK(m)$ y que si ocupan a $K(m)$, es decir

$$\frac{(m+1)^s-(m)^s}{(s-1)K(m)+1} \le \frac{|\{reprecentaciones\ que\ ocupan\ a\ K(m)\ entre\ K(m)\ y\ sK(m)\}|}{(s-1)K(m)+1}$$

$$\le \frac{R_{K,s}\big(sK(m)\big) - R_{K,s}\big(-1+K(m)\big)}{(s-1)K(m)+1},$$

si m tiende a infinito entonces

$$\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^{s-1}}{m^k} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^s-(m)^s}{(s-1)K(m)+1} \le \lim_{m\to\infty} \frac{R_{K,s}(sK(m)) - R_{K,s}\big(-1+K(m)\big)}{(s-1)K(m)+1}$$

QED

Esto podría llevarnos a pensar que los números con una cantidad de representaciones más grandes son los números más grandes siempre que $s-k \ge 2$. Lo cual a su vez explicaría el comportamiento aparentemente creciente de las funciones de representaciones.

Proposición K9
El número de representaciones aumenta si aumentan los sumandos, es decir $r_{K,s}(n)$ es creciente en s.

Demostración
Podemos tomar una representación de $r_{K,s}(n)$ y sumarle cero obteniendo una representación de $r_{K,s+1}(n)$ por lo tanto $r_{K,s}(n) \leq r_{K,s+1}(n)$, de ahí se infiere que $r_{K,s}(n)$ es creciente en s

QED

Cotas para $\mathbf{R_{K,s}(n)}$ y $\mathbf{R^*_{K,s}(n)}$

Ahora damos lugar a mostrar cotas para $R_{K,s}(n)\ y\ R^*_{K,s}(n)$, donde ya definimos a $R^*_{K,s}(n)$ como la cantidad de representaciones acumuladas donde sí importa el orden de los sumandos, es decir,

$$R^*_{K,s}(N) = \sum_{n=0}^{N} r^*_{K,s}(n),$$

y respectivamente la expresión es semejante para el caso de $R_{K,s}(n)$.

En la introducción de este capítulo mencionamos la relevancia de encontrar las cotas para este tipo de sumas, éstas han sido de interés para Sierpinski, Hardy y Landau. Ellos trabajaron en el problema de que dado un entero positivo n y $r(n)$ la cantidad de representaciones como suma de dos cuadrados, es decir, $\gamma_{x^2,2}(k) = \ card\{n = t^2 + s^2, t, s\ enteros\}$, entonces el objetivo era encontrar una buena aproximación para

$$\Upsilon_{x^2,2}(n) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{x^2,2}(k).$$

Este problema es un caso particular que se extenderá en la proposición que sigue. Después de enunciar y demostrar esta proposición, consideramos que es adecuado profundizar en la idea de las sumas acumuladas y lo hacemos para el caso particular de la suma de cuadrados ya que éste nos permite relacionarlo con las representaciones geométricas anidadas en una retícula. Esto nos da lugar a pensar que dicha proposición es una generalización para cualquier tipo de potencias enteras, y que si bien ya no las podemos visualizar en retículas, sí las podemos acotar.

Hasta aquí se ha trabajado con una cota inferior para $R_{K,s}(sK(m))$, la siguiente nota nos ayudará a mostrar que se puede acotar $R_{K,s}(n)$ por arriba y por abajo.

Notemos lo siguiente

Si $(x_1, \dots, x_s)\epsilon\mathbb{N_0}^s\ y\ K(x_i) \leq \frac{n}{s}\ \forall i \rightarrow K(x_1) + \cdots + K(x_s) \leq s * \frac{n}{s} = n.$
Si $K(x_1) + \cdots + K(x_s) \leq n \rightarrow K(x_i) \leq n\ \ \forall i.$

Proposición K10

a) $\left(1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]\right)^s \leq R_{K,s}(n) \leq (1+H[K(x),n])^s$

b) $\binom{1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]}{s} \leq R_{K,s}^{*}(n) \leq \binom{1+H[K(x),n]}{s}$

Demostración

Notemos las siguientes contenciones entre conjuntos

$$\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: K(x_i) \leq \frac{n}{s}\ \forall i\} \subseteq$$
$$\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: K(x_1)+\cdots+K(x_s) \leq n\} \subseteq \{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: K(x_i) \leq n\ \forall i\},$$

Si calculamos las carnalidades de los conjuntos tenemos que

$$\left|\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: K(x_i) \leq \frac{n}{s}\ \forall i\}\right| = \left|\{x_1\epsilon\mathbb{N}_0: K(x_1) \leq \frac{n}{s}\}\right| * \ldots * \left|\{x_s\epsilon\mathbb{N}_0: K(x_s) \leq \frac{n}{s}\}\right|$$
$$= \left(1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]\right)^s.$$

Por otro lado

$$|\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: K(x_1)+\cdots+K(x_s) \leq n\}| = R_{K,s}(n),$$

por lo tanto

$$R_{K,s}(n) \ \geq\ \left(1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]\right)^s.$$

Para las cardinalidades de los otros conjuntos se tiene que

$$|\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: K(x_i) \leq n\ \forall i\}| = |x_1\epsilon\mathbb{N}_0: K(x_1) \leq n\ \}| * \ldots * |x_s\epsilon\mathbb{N}_0: K(x_s) \leq n\}|$$
$$= (1+H[K(x),n])^s,$$

por lo tanto

$$\left(1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]\right)^s \geq R_{K,s}(n)$$

entonces

$$\left(1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]\right)^s \leq R_{K,s}(n) \leq (1+H[K(x),n])^s.$$

y con esto queda demostrada la parte a).

Ahora de las siguientes contenciones entre conjuntos

$$\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: x_1 \leq \cdots \leq\ x_s, K(x_i) \leq \frac{n}{s}\ \forall i\} \subseteq \{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: x_1 \leq \cdots$$
$$\leq\ x_s\ , K(x_1)+\cdots+K(x_s) \leq n\} \subseteq \{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: x_1 \leq \cdots \leq\ x_s\ , K(x_i) \leq n\ \forall i\}$$

si calculamos las carnalidades de los conjuntos tenemos que

$$\left|\left\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: x_1 \leq \cdots \leq\ x_s, K(x_i) \leq \tfrac{n}{s}\ \forall i\right\}\right| = \binom{1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]}{s}$$
$$|\{(x_1,\ldots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s: x_1 \leq \cdots \leq\ x_s\ , K(x_1)+\cdots+K(x_s) \leq n\}| = R_{K,s}^{*}(N).$$

Y por otro lado

$$|\{(x_1,\dots,x_s)\epsilon\mathbb{N}_0{}^s : x_1 \le \cdots \le x_s, K(x_i) \le n\ \forall i\}| = \binom{1+H[K(x),n]}{s},$$

entonces

$$\binom{1+H\left[K(x),\frac{n}{s}\right]}{s} \le R^*_{K,s}(N) \le \binom{1+H[K(x),n]}{s}.$$

QED

El caso suma de dos cuadrados

A continuación exhibimos una forma geométrica que permite estimar aproximaciones de $\gamma_{x^2,2}(n)$, y con ello es posible visualizar la idea de que la suma acumulada es la suma de los puntos enteros en curvas anidadas.

Sea $\gamma_{x^2,2}(n)$ el conjunto de puntos de coordenadas enteras sobre una circunferencia de radio n. Así, dado $n \in \mathbb{N}$, entonces a $\gamma_{x^2,2}(n)$ la podemos considerar también como la cantidad de representaciones que tiene n como suma de dos cuadrados. Así

$$\gamma_{x^2,2}(n) = \mathrm{card}\{\mathrm{n} = \mathrm{t}^2 + \mathrm{s}^2, \mathrm{con\ t, s\ enteros}\},$$

ejemplo

$1 = (\pm 1)^2 + 0 = 0 + (\pm 1)^2 \to \gamma_{x^2,2}(1) = 4.$
Para $\gamma_{x^2,2}(2) = 4;\ \gamma_{x^2,2}(3) = 0;\ \gamma_{x^2,2}(4) = 4;\ \gamma_{x^2,2}(5) = 8;\ \gamma_{x^2,2}(8) = 4.$

Como es difícil visualizar el comportamiento de $\gamma_{x^2,2}(n)$ ya que esta función es muy irregular, entonces consideramos que lo más adecuado es recurrir a la siguiente función

$$\Upsilon_{x^2,2}(\mathrm{n}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \gamma_{x^2,2}(\mathrm{k}),$$

de tal forma que $\Upsilon_{x^2,2}(\mathrm{n})$ sea el acumulado de las partes $\gamma_{x^2,2}(k)$, y de esta manera se podría trabajar con un promedio de las n cantidades $\gamma_{x^2,2}(k)$ y este resultado sí nos proporciona datos más estables. Para esto consideramos que ambas funciones se pueden interpretar geométrica con base en una retícula. Así, cada una de las $\gamma_{x^2,2}(\mathrm{k})$ será vista como la cantidad de puntos reticulares de $\mathbb{Z}^2$ que se encuentran sobre la circunferencia de radio k. El acumulado $\Upsilon_{x^2,2}(\mathrm{n})$ será el total de puntos sobre las circunferencias correspondientes de radio menor o igual que $\sqrt{\mathrm{n}}$.

El teorema que sigue proporciona el orden de magnitud de $\Upsilon_{x^2,2}(\mathrm{n})$ para valores grandes de n.

Teorema K1

Demostrar que $\Upsilon_{x^2,2}(n) = \pi n + O(\sqrt{n})$

Demostración

Cada punto de $\mathbb{Z}^2$ puede ser vinculado con un cuadro del plano. Así, al punto v le asociamos el cuadrado C_v el cual tiene a v como vértice inferior izquierdo (Ver Figura K1).[9]

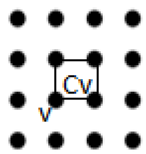

Figura K1

Ahora, $\Upsilon_{x^2,2}(n)$ puede ser visualizada en términos de un área F que no es exactamente igual que el área del círculo de radio $\sqrt{n}$, ésta es una aproximación ya que dicho círculo y F difieren en fracciones de cuadrados que no pertenecen al área F (Ver Figura K2). Esto es, la región F del plano que está formada por la unión de los cuadrados C_v está dentro del círculo de radio $\sqrt{n}$.

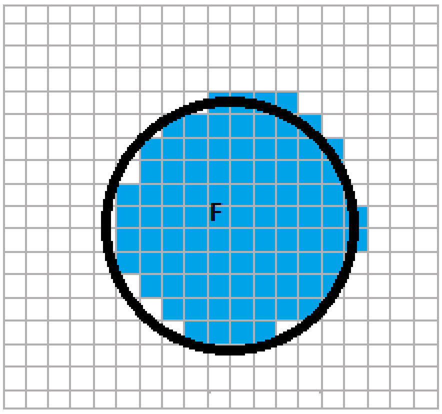

Figura K2

Para construir la aproximación se trazan dos circunferencias C y C' de radios $\sqrt{n} - \sqrt{2}$ y $\sqrt{n} + \sqrt{2}$, respectivamente, y de esta manera se tiene que $C \subseteq F \subseteq C'$ (Ver Figura K3) y, por lo tanto

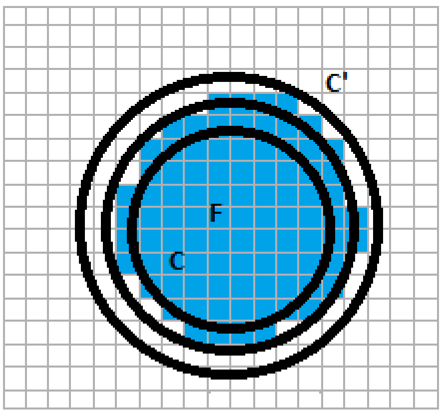

Figura K3

[9] No perdamos de vista que no todos los puntos en el interior de la circunferencia pertenecen a alguna circunferencia de radio $\sqrt{n}$ con n natural).

$$\pi\left(\sqrt{n}-\sqrt{2}\right)^2 \leq \Upsilon_{x^2,2}(n) \leq \pi\left(\sqrt{n}+\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow \Upsilon_{x^2,2}(n),$$

y de esto se tiene que

$$\Upsilon_{x^2,2}(n) = \pi n + O\left(\pi\left(\sqrt{n}+\sqrt{2}\right)^2 - \pi\left(\sqrt{n}-\sqrt{2}\right)^2\right)$$

Es decir, el error no puede ser mayor que el área del anillo generado por las circunferencias C y C'

$$\Upsilon_{x^2,2}(n) = \pi n + O\left(\left(2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{n}\right)\right) = \pi n + O\left(\sqrt{n}\right).$$

QED

Aunado a lo anterior también podríamos decir que $\Upsilon_{x^2,2}(n) = \pi n + \varepsilon_n$ con

$$|\varepsilon_n| \leq \pi\left(\sqrt{n}+\sqrt{2}\right)^2 - \pi\left(\sqrt{n}-\sqrt{2}\right)^2 = 4\pi\sqrt{2n}.$$

De manera similar, y con base en el teorema K10 se tiene que

$$\left(1 + H\left[x^2, \frac{n}{2}\right]\right)^2 \leq R_{x^2,2}(n) \leq (1 + H[x^2, n])^2,$$

y, por lo tanto

$$R_{x^2,2}(n) = (1 + H[x^2, n])^2 + \varepsilon_n = (1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2 + \varepsilon_n$$

con

$$|\varepsilon_n| \leq \left(1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)^2 - \left(1 + \left\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rfloor\right)^2 \approx \left(1 + \sqrt{n}\right)^2 - \left(1 + \sqrt{\frac{n}{2}}\right)^2 = \frac{n}{2} + \left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{n}.$$

Con base en lo anterior podemos plantear en términos de orden lo siguiente:

$R_{x^2,2}(n) = O\left(\left(1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)^2\right)$ y $\left(1 + \left\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rfloor\right)^2 = O\left(R_{x^2,2}(n)\right)$, que se puede ver como $R_{x^2,2}(n) = O(n)$ y $n = O\left(R_{x^2,2}(n)\right)$ entonces $R_{x^2,2}(n) \leq c_1 n$ y $n \leq c_2 R_{x^2,2}(n)$ para n suficientemente grande. Así se tiene que $\frac{n}{c_2} \leq R_{x^2,2}(n) \leq c_1 n$, y dividiendo entre n obtenemos $0 < \frac{1}{c_2} \leq \frac{R_{x^2,2}(n)}{n} \leq c_1$ por lo tanto es posible aproximar $R_{x^2,2}(n)$ con un múltiplo de n y más aún de existir $\lim_{n\to\infty} \frac{R_{x^2,2}(n)}{n}$ podemos afirmar que $\frac{1}{c_2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{R_{x^2,2}(n)}{n} \leq c_1$, además, si hacemos $a = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{x^2,2}(n)}{n}$ tendríamos que $R_{x^2,2}(n) \sim an$.

La relación entre $R_{x^2,2}(n)$ y $\Upsilon_{x^2,2}(n)$ seria de esta manera:

$$4R_{x^2,2}(n) \leq \Upsilon_{x^2,2}(n),$$

comparando la propuesta de cota del Teorema K1 con la propuesta de cota del teorema K10, es decir $R_{x^2,2}(n) \leq \frac{\pi}{4} n + \pi\sqrt{2n}$ vs $R_{x^2,2}(n) \leq (1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2$ podemos ver que $\frac{\Upsilon_{x^2,2}(n)}{4}$ es mejor, pero $\left(1 + \left\lfloor\sqrt{\frac{n}{2}}\right\rfloor\right)^2$ resulta más fácil de generalizar.

Puntos enteros en dimensión s.
Con base en el teorema K10 ya se tiene que

$$\left(1+\mathrm{H}\left[\mathrm{K(x)},\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{s}}\right]\right)^{\mathrm{s}} \leq \mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) \leq (1+\mathrm{H}[\mathrm{K(x)},\mathrm{n}])^{\mathrm{s}}$$

y

$$\binom{1+\mathrm{H}[\mathrm{K(x)},\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{s}}]}{\mathrm{s}} \leq \mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) \leq \binom{1+\mathrm{H}[\mathrm{K(x)},\mathrm{n}]}{\mathrm{s}},$$

por lo tanto

$$\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) = (1+\mathrm{H}[\mathrm{K(x)},\mathrm{n}])^{\mathrm{s}} + \varepsilon_{\mathrm{n}} \text{ y } \mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) = \binom{1+\mathrm{H}[\mathrm{K(x)},\mathrm{n}]}{\mathrm{s}} + \varepsilon^*_{\mathrm{n}} \text{ con}$$
$$|\varepsilon_{\mathrm{n}}| \leq (1+\mathrm{H}[\mathrm{K(x)},\mathrm{n}])^{\mathrm{s}} - (1+\mathrm{H}\left[\mathrm{K(x)},\tfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{s}}\right])^{\mathrm{s}}$$

y

$$|\,\varepsilon^*_{\mathrm{n}}| \leq \binom{1+\mathrm{H}[\mathrm{K(x)},\mathrm{n}]}{\mathrm{s}} - \binom{1+\mathrm{H}\left[\mathrm{K(x)},\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{s}}\right]}{\mathrm{s}}.$$

Por lo anterior podemos plantear en términos de orden lo siguiente:

$$\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) = O\left(\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}\right), \left(\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}\right) = O\left(\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})\right),$$

$$\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) = O\left(\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}\right) \text{ y } \left(\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}\right) = O\left(\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})\right)$$

y de la misma forma que en el caso particular, si existe $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})}{\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}}$ por lo tanto $\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) \sim \mathrm{a}\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}$, con $\mathrm{a} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})}{\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}}$. Si $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})}{\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}}$ entonces $\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) \sim \mathrm{a}^*\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}$, para alguna $\mathrm{a}^* = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{R}^*_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n})}{\mathrm{n}^{\mathrm{s/k}}}$.

Aunado a lo anterior podemos replantear la idea del Teorema K1 para que ahora se trabaje con puntos enteros alojados en hipervolumenes de politopos del tipo $\mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}} + \cdots + \mathrm{x}_{1}^{\mathrm{k}} \leq \mathrm{n}$. Y de manera semejante al caso de los círculos concéntricos ahora se tratara de mejorar la cota superior en el caso de las potencias k del conjunto de los volúmenes $\mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}} + \cdots + \mathrm{x}_{1}^{\mathrm{k}} \leq \mathrm{n}$. Esto se hace a través del cálculo de la integral que sigue:

$$\int_0^{\mathrm{n}^{\frac{1}{\mathrm{k}}}} \int_0^{(\mathrm{n}-\mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}})^{\frac{1}{\mathrm{k}}}} \cdots \int_0^{(\mathrm{n}-\mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}}-\cdots-\mathrm{x}_{2}^{\mathrm{k}})^{\frac{1}{\mathrm{k}}}} \mathrm{d}\,\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{d}\,\mathrm{x}_{\mathrm{s}}\,,$$

la cual nos da como resultado

$$\mathrm{R}_{\mathrm{K,s}}(\mathrm{n}) \leq \int_0^{\mathrm{n}^{\frac{1}{\mathrm{k}}}} \int_0^{(\mathrm{n}-\mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}})^{\frac{1}{\mathrm{k}}}} \cdots \int_0^{(\mathrm{n}-\mathrm{x}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}}-\cdots\mathrm{x}_{2}^{\mathrm{k}})^{\frac{1}{\mathrm{k}}}} \mathrm{d}\,\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{d}\,\mathrm{x}_{\mathrm{s}} = \circledast,$$

si hacemos $\mathrm{x}_{\mathrm{i}} = \mathrm{n}^{\frac{1}{\mathrm{k}}}\mathrm{y}_{\mathrm{i}}$, sustituyendo tenemos que

$$\circledast = \mathrm{n}^{\frac{s}{k}} \int_0^1 \int_0^{(1-y_s^k)^{\frac{1}{k}}} \cdots \int_0^{(1-y_s^k-\cdots-y_2^k)^{\frac{1}{k}}} \mathrm{d}\,y_1 \ldots \mathrm{d}\,y_s\,,$$

por lo tanto

$$\mathrm{R}_{K,s}(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^{\frac{s}{k}} \int_0^1 \int_0^{(1-y_s^k)^{\frac{1}{k}}} \ldots \int_0^{(1-y_s^k-\cdots y_2^k)^{\frac{1}{k}}} \mathrm{d}\,y_1 \ldots \mathrm{d}\,y_s \;+\; \mathrm{O}\big(\mathrm{n}^{(s-1)/k}\big)\,.$$

Notemos que $\int_0^1 \int_0^{(1-y_s^k)^{\frac{1}{k}}} \ldots \int_0^{(1-y_s^k-\cdots y_2^k)^{\frac{1}{k}}} \mathrm{d}\,y_1 \ldots \mathrm{d}\,y_s$ es una constante que es menor que 1 con lo cual $\mathrm{n}^{\frac{s}{k}} \int_0^1 \int_0^{(1-y_s^k)^{\frac{1}{k}}} \ldots \int_0^{(1-y_s^k-\cdots y_2^k)^{\frac{1}{k}}} \mathrm{d}\,y_1 \ldots \mathrm{d}\,y_s \;+\; \mathrm{O}\big(\mathrm{n}^{(s-1)/k}\big)$ mejora la cota de $(1 + \lfloor \mathrm{n}^{\frac{1}{k}} \rfloor)^s$.

Con lo anterior hemos abordado dos formas de plantear el problema de estimar $\mathrm{R}_{K,s}(\mathrm{n})$ mediante cotas, una mediante el uso de una idea geométrica y la otra mediante una idea aritmética. Entre mejores sean las cotas será más sencillo dar una estimación para $\mathrm{R}_{K,s}(\mathrm{n})$ con un error menor y esto a su vez nos permitirá estimar $\mathrm{r}_{K,s}(\mathrm{n})$.

A continuación se hará uso de la cota superior para dar una condición sobre $\mathrm{G}\big(K(\mathbb{N}_0)\big)$.

Proposición K11

Si $k - s \geq 1$ existe una infinidad de números sin representación como suma de s potencias k.

Demostración

Haciendo uso de la Proposición K10 tenemos que

$$0 \leq \frac{R_{K,s}\big(sK(m)\big)}{1 + sK(m)} \leq \frac{(1 + H[K(x), sK(x)])^s}{1 + sK(m)} = \frac{O(m^s)}{1 + sK(m)} = O\left(\frac{m^s}{m^k}\right),$$

y cuando m tiende a infinito obtenemos

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} O\left(\frac{m^s}{m^k}\right) \leq O\left(\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^s}{m^k}\right)\right) = O(0) = 0.$$

Por la ley de extremos y medios $\lim_{m\to\infty} \frac{R_{K,s}(sK(m))}{1+sK(m)} = 0$. Esto quiere decir que la cantidad promedio de representaciones es 0, por lo tanto existe una infinidad de números sin representación como suma de s polinomiales. Esto nos permite saber si existe una cota inferior para $\mathrm{G}\big(K(\mathbb{N}_0)\big)$, pues si $k - s \geq 1$ existe una infinidad de n_i tal que $r_{K,s}(n_i) = 0$, de donde es inmediato concluir que $\mathrm{G}\big(K(\mathbb{N}_0)\big) \geq k$.

QED

Proposición K12
Por la prueba de Hilbert sobre el problema de Waring Sabemos que existe s_* tal que todo número tiene al menos una representación como suma de s_* elementos de $K(x)$ por lo tanto $\forall s_0 \geq s_*, s_1 > s_0$ tenemos que $r_{K,s_1}(n) > r_{K,s_0}(n)$

Demostración

Si tomamos una representación de un número no cero y le agregamos un cero en el peor de los casos tenemos $s_0 - 1$ ceros esto es s_0 representaciones si agregamos un cero tendríamos $s_0 + 1$ representaciones lo cual estrictamente mayor.

De lo anterior deducimos que conforme crece s podemos ver que hay bloques vacíos tan largos y anchos como queramos por debajo de $r_{K,s}(n)$ esto en el caso donde nos importa el orden de los sumandos.

QED

7.Cantidad de representaciones como sumas de números polinomiales

En este capítulo extenderemos los resultados de los Capítulos **5. Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales** y **6. Cantidad de representaciones como sumas de potencias** hacia polinomios más generales, y para esto será suficiente pedir que dichos polinomios cumplan que

$$P(0) = 0, P(1) = 1 \text{ y } P(n) < P(n+1).$$

Estas tres propiedades permiten extender los resultados de una manera muy natural. También usaremos funciones generadoras y series de Taylor para expresar el valor de $r_{P,s}(n)$ lo cual nos permite llevar este problema al área de teoría analítica de números. Veremos que algunas propiedades aún se cumplen si se disminuye el conjunto de sumandos quitándole al cero. Terminamos el capítulo con una cota general para el orden, lo cual nos dará una condición necesaria para que tales polinomios formen una base asintótica; también veremos bajo qué casos la función de representaciones no está acotada y mostraremos porque en general dichas cotas no se pueden mejorar, es decir los casos donde se pueden mejorar son algunos en particular.

Definición P

Sea $P(x)$ un polinomio entero valuado de grado k, tal que $P(0) = 0,\ P(1) = 1$ $P(n) < P(n+1)$. Llamaremos números polinomiales al conjunto $P(\mathbb{N})$.

Proposición P0

Los únicos polinomios entero valuados de grado 2 que cumplen la Definición P son los números poligonales.

Demostración

Sabemos que $L(n) = \frac{(l-2)n^2-(l-4)n}{2}$ es la sucesión de los números poligonales con l lados.
Si usamos la Definición P para polinomios de grado dos tenemos que

$$P(0) = 0, P(1) = 1 \text{ y } P(n) < P(n+1).$$

Como $P(x)$ tiene que ser de la siguiente forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, entonces si se evalúa en 0 y en 1 se tiene que
$0 = P(0) = a0^2 + b0 + c$ y $1 = P(1) = a + b + c$,
y por lo tanto $0 = c$ y $1 = a + b$.
De lo anterior se sigue que

$$P(x) = ax^2 + bx = ax^2 + bx + ax - ax = ax(x-1) + x(a+b) = ax(x-1) + x.$$

Por otro lado $P(x)$ es un entero para toda x entera, entonces también lo es $P(x) - x$, lo cual nos dice que $ax(x-1)$ también es un entero para toda x entera, ya que $P(x) - x = ax(x-1)$.
Lo anterior implica que a es un racional, es decir a es de la siguiente forma $a = \frac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$.
Como $\frac{px(x-1)}{q}$ es un entero para toda x, entonces $q|px(x-1)$, pero $(p,q) = 1$, por lo tanto $q|x(x-1)$ para toda x entera, es decir

$$q|mcd\big((1)(0),(2)(1),(3)(2),\ldots,2k(2k-1),(2k+1)2k,\ldots\big),$$

y el mcd es 2, entonces $q = 1$ ó $q = 2$ por lo tanto a es de la forma $a = \frac{a'}{2}$ con a' un entero.
Entonces para $P(x)$ se tendrá que $P(x) = \frac{a'}{2}\,x(x-1) + x = a'\frac{x(x-1)}{2} + x$.
Además tenemos que $P(n) < P(n+1)$ lo cual implica que

$$a'\frac{x(x-1)}{2}+x<a'\frac{x(x+1)}{2}+x+1, \text{ entonces } 0<a'\left(\frac{x(x+1)}{2}-\frac{x(x-1)}{2}\right)+1,$$

por lo tanto $0<a'x+1$ para todo x natural, en particular si $x=1$, entonces $0<a'+1$ y pasa que $-1<a'$ lo cual implica que $0\leq a'$. Si $a'=0$ entonces $P(x)$ sería de grado 1 lo cual es una contradicción ya que $P(x)$ es de grado 2, por lo tanto $0<a'$.

Hasta ahora tenemos que $P(x)=a'\frac{x(x-1)}{2}+x$ con $a'\epsilon\mathbb{N}\ y\ a'>0$ y ya sabíamos que

$$L(n)=\frac{(l-2)n^2-(l-4)n}{2}=\frac{(l-2)(n^2-n)+2n}{2}=(l-2)\frac{n(n-1)}{2}+n$$

con $l\,\epsilon\,\mathbb{N}$ y $l\geq 3$ es decir con $l-2\epsilon\mathbb{N}\ y\ l-2>0$. Si hacemos $l-2=a'$ entonces llegamos al resultado que se pide.

QED

Si $P(n)$ cumple la Definición P es posible extender los resultados del Capítulo **6. Cantidad de representaciones como sumas de potencias** a polinomios de la forma expuesta en este capítulo (Proposiciones P1-P12) y las pruebas son análogas.
Las proposiciones a las que nos referimos son las siguientes:

Proposición P1
El grado de la primera diferencial entera de $P(x)$ es $k-1$, es decir

$$\delta\big(\Delta P(x)\big)=k-1.$$

Proposición P2
La k-ésima diferencial entera de $P(x)$ se puede expresar en términos de sus coeficientes canónicos y los polinomios binomiales de la siguiente manera
$\Delta^h P(x)=\sum_{i=h}^{k}u_i b_{i-h}(x)$.

Proposición P3
La k-ésima diferencial entera de un polinomio entero valuado de grado k coincide con el k-ésimo coeficiente de su representación canónica, es decir

$$\Delta^k P(x)=k!\,a_k=u_k.$$

Proposición P4
Es posible expresar la m-ésima diferencial entera como una combinación lineal y entera de $P(x),\ldots,P(x+k)$ más aún dicha combinación lineal está dada por
$\Delta^m P(x)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^{m-j}\,P(x+j)$ y la suma de los coeficientes $\binom{m}{j}(-1)^{m-j}$ negativos y positivos tienen la misma magnitud.

Proposición P5
Existe un entero con al menos m representaciones como suma de $m(2)^{k-1}$ potencias k.

Proposición P6
Si $s-k\geq 1$ la función representaciones como suma de s números polinomiales $r_{P,s}(n)$ no es una función acotada.

Proposición P7
$r^*_{P,s}(n)$ está acotada si y sólo si $r_{P,s}(n)$ está acotada y $r^*_{P,s}(n)=0$ si y sólo si $r_{P,s}(n)=0$.

Proposición P8
Si $s-k\geq 2$ entonces las representaciones promedio entre $P(m)\ y\ sP(m)$ también divergen.

Proposición P9
El número de representaciones aumenta si aumentan los sumandos, es decir $r_{P,s}(n)$ es creciente en s.

Cotas para $\mathbf{R_{P,s}(n)}$ y $\mathbf{R^*_{P,s}(n)}$

De la misma manera que en el capítulo anterior se puede dar una interpretación geométrica de $r_{P,s}(n)$, que puede ser como la cantidad de puntos en la retícula $\mathbb{Z}^s$, a través del conjunto $\{x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{s} P(x_i) = n\}$, donde

$$r_{P,s}(n) = \left| \left\{ x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{s} P(x_i) = n \right\} \right|.$$

Como en el Capítulo **6. Cantidad de representaciones como sumas de potencias** podemos notar que $r_{P,s}(n)$ es una función bastante inestable, por esta razón se trabajará con

$R_{P,s}(n) = \sum_{i=0}^{n} r_{P,s}(n)$. Si procedemos de la misma manera que Landau y Sierpinsky se puede acotar $R_{P,s}(n)$ haciendo uso del siguiente hipervolumen

$$\{ \textstyle\sum_{i=1}^{s} P(x_i) \leq n \, , x_i \in \mathbb{R}\},$$

y este hipervolumen junto con $R_{P,s}(n)$ se relacionarán de la siguiente manera

$$R_{P,s}(n) \leq Vol\ (\{ \textstyle\sum_{i=1}^{s} P(x_i) \leq n \, , x_i \in \mathbb{R}^+\}).$$

y es porque se puede asociar cada punto de la retícula $\mathbb{Z}^s$ con un 'cubo' en $\mathbb{Z}^s$ de volumen 'unitario'.

El cálculo de dicho hipervolumen puede volverse algo complicado por esta razón trabajaremos con las siguientes cotas que en general resultan más sencillas de manejar.

Proposición P10
Las funciones $R^*_{P,s}(n)$ y $R^*_{P,s}(n)$ pueden ser acotadas de la siguiente manera

$$(1 + H\left[P(x), \tfrac{n}{s}\right])^s \leq R_{P,s}(n) \leq (1 + H[P(x), n])^s$$

$$\binom{1 + H\left[P(x), \frac{n}{s}\right]}{s} \leq R^*_{P,s}(n) \leq \binom{1 + H[P(x), n]}{s}.$$

En el siguiente ejemplo veremos qué tanto varía la complejidad entre hacer uso del Hipervolumen $Vol\ (\{ \sum_{i=1}^{s} P(x_i) \leq n \, , x_i \in \mathbb{R}^+\})$ y $(1 + H[P(x), n])^s$, para acotar $R_{P,s}(n)$ en el caso de dos números triangulares, es decir, los números de la forma $T(x) = \frac{x^2 - x}{2}$ con x un natural.

La suma de dos triangulares igual a n nos da la siguiente ecuación $\frac{x^2+x}{2} + \frac{y^2+y}{2} = n$, que es la ecuación de un círculo. Si reescribimos la ecuación de la siguiente forma

$(x + 0.5)^2 + (y + 0.5)^2 = 2n + 0.5$, podemos notar que es el círculo con centro en $(-0.5, -0.5)$ y radio $(2n + 0.5)^{1/2}$ (Ver Figura P1), recordemos que sólo nos interesan los cuadrantes con entradas no negativas, lo cual se ve gráficamente de la siguiente manera.

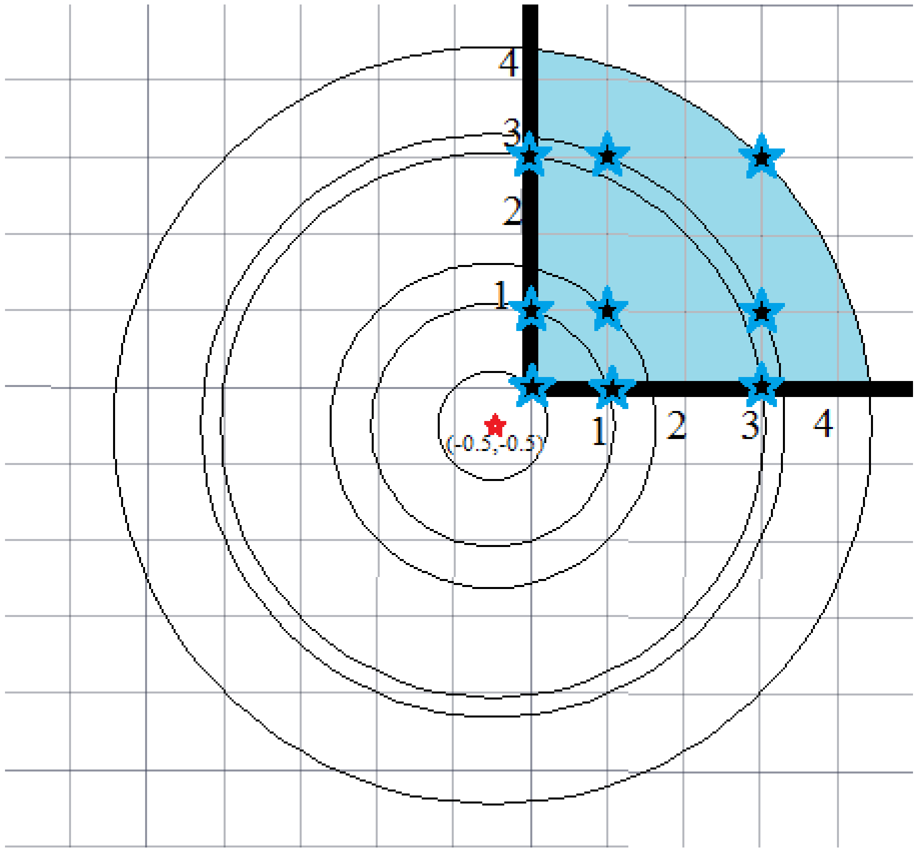

Figura P1

Procedamos al cálculo numérico de las cotas.
Por un lado

$$Vol\left(\left\{\sum_{i=1}^{2} T(x_i) \leq n\,, x_i \in \mathbb{R}^+\right\}\right)$$
$$= \int_0^{\frac{-1+\sqrt{8n+2}}{2}} \int_0^{\frac{-1+\sqrt{8n+1-4(x^2+x)}}{2}} dydx$$
$$= \int_0^{\frac{-1+\sqrt{8n+2}}{2}} \frac{-1+\sqrt{8n+1-4(x^2+x)}}{2} dx = \cdots,$$

a partir de este punto la integral complica las cuentas.
Por otro lado

$$(1+H[T(x),n])^2 = \left(1+\left\lfloor\frac{-1+\sqrt{8n+2}}{2}\right\rfloor\right)^2 \approx \left(1+\frac{-1+\sqrt{8n+2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{8n+2}}{2}\right)^2$$
$$= 2n+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8n+2}}{2}+\frac{1}{4},$$

en este caso las cuentas más directas.

Si abordamos el problema más en general, entonces pensemos en la suma de s poligonales de l lados. Así, $\sum_{i=1}^{s} L(x_i) = n$, es decir $\sum_{i=1}^{s} \frac{(l-2)x_i^2-(l-4)x_i}{2} = n$, despejando tenemos que $\sum_{i=1}^{s} x_i^2 - 2\frac{(l-4)x_i}{2(l-2)} = \frac{2n}{(l-2)}$, si completamos cuadrados nos queda la siguiente ecuación $\sum_{i=1}^{s}\left(x_i^2 - 2\frac{(l-4)x_i}{2(l-2)} + \left(\frac{(l-4)}{2(l-2)}\right)^2\right) = \frac{2n}{(l-2)} + s\left(\frac{(l-4)}{2(l-2)}\right)^2$, es decir

$\sum_{i=1}^{s}\left(x_i - \frac{(l-4)}{2(l-2)}\right)^2 = \frac{2n}{(l-2)} + s\left(\frac{(l-4)}{2(l-2)}\right)^2$. Esta ecuación nos describe la s-esfera de radio $\left(\frac{2n}{(l-2)} + s\left(\frac{(l-4)}{2(l-2)}\right)^2\right)^{1/2}$ y centro $\left(\frac{(l-4)}{2(l-2)}, \frac{(l-4)}{2(l-2)}, \ldots, \frac{(l-4)}{2(l-2)}\right)$.

El cálculo del volumen de estas porciones de s-esfera sólo es sencillo cuando está centrada en cero, lo cual solo pasa en el caso $l = 4$, es decir sumas de cuadrados.

Proposición P11

Si $k - s \geq 1$ existe una infinidad de números sin representación como suma de s poligonales.

Proposición P12

Por la prueba de Linnik sobre la generalización del problema de Waring para polinomios sabemos que existe s_* tal que todo número tiene al menos una representación como suma de s elementos de P(x), por lo tanto para toda $s_0 \geq s_*$, $s_1 > s_0$ tenemos que $r_{P,s_1}(n) > r_{P,s_0}(n)$.

A continuación, mostraremos dos resultados sobre funciones los cuales nos permiten plantear $r_{P,s}(n)$ en términos de teoría analítica de números.

El primero es que haciendo uso de funciones generadoras podemos obtener la siguiente igualdad $\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{P(i)}\right)^s = \sum_{i=0}^{\infty} r_{P,s}(n)x^i$.

El segundo es que haciendo uso de derivadas podemos encontrar una expresión que relaciona los coeficientes de la serie anterior con la función de representaciones.

Sabemos que podemos expresar una función como serie de potencias de la siguiente manera $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, con $a_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}f(x)|_{x=0}$, entonces $\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{P(i)}\right)^s = \sum_{i=0}^{\infty} r_{P,s}(n)x^i$ implica que $r_{P,s}(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{P(i)}\right)^s|_{x=0}$.

Proposición P13

Cualquier polinomio entero valuado que cumpla las propiedades de que

$$P\,(0) = 0, P\,(1) = 1 \quad P(n) < P\,(n + 1) \text{ también cumple que } P(n) \geq n$$

Demostración

Por el proceso de inducción tenemos lo siguiente:
Base de inducción) $P\,(0) = 0 \geq 0$
Hipótesis de inducción) $P(n) \geq n$
Paso inductivo)
$P(n+1) > P(n) \geq n$, entonces $P(n+1) > n$,
por lo tanto $P(n+1) \geq n+1$.

QED

Ahora gracias a la Proposición P12 podemos ver que no será necesario hacer uso de la serie infinita para calcular el n-ésimo valor de $r_{P,s}(n)$, es decir bastara

$r_{P,s}(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n\left(\sum_{i=0}^{n} x^{P(i)}\right)^s}{dx^n}|_{x=0}$ en lugar de $r_{P,s}(n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{P(i)}\right)^s|_{x=0}$.

Además, si definimos $r_{P,\infty}^*(n) = \lim_{s\to\infty} r_{P,s}^*(n)$, tenemos que $\frac{1}{1-z^{P(m)}} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{iP(m)}$ que a su vez implica que $\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^{P(m)}} = \sum_{i=0}^{\infty} r_{P,\infty}^*(n)z^i$ y al usar el método del círculo tenemos que

$$r^*_{P,\infty}(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-z^{P(m)}}}{z^{n+1}}\,dz.$$

Proposición P14

Si $s-k \geq 1$ existe algún entero con una cantidad arbitrariamente grande de representaciones como suma de s números polinomiales sin usar el cero.

Demostración

Si usamos los primeros m polinomiales $P(1),\dots,P(m)$ y generamos todas las posibles representaciones entonces tenemos al menos $(m)^s$ representaciones de números menores que $sP(m)$, es decir $(m)^s \leq R_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(sP(m))$. Ahora para el número de representaciones promedio tenemos

$\frac{(m)^s}{sP(m)} \leq \frac{R_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(sP(m))}{sP(m)}$, si hacemos m tender a infinito

$$\infty = \lim_{m\to\infty}\frac{m^s}{m^k} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m)^s}{sP(m)} \leq \lim_{m\to\infty}\frac{R_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(sP(m))}{sP(m)},$$

por lo tanto $r_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(n)$ es una función no acotada.

QED

Proposición P15

$r^*_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(n)$ está acotada si y sólo si $r_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(n)$ está acotada

Demostración

Cada representación del caso en que no nos importa el orden puede asociarse al menos a una representación del caso donde nos importa el orden, pero no a más de $s!$ representaciones del caso donde nos importa el orden, es decir:

$$r^*_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(n) \leq r_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(n) \leq s!\,r^*_{P(\mathbb{N}\backslash\{0\}),s}(n).$$

QED

Consideremos las representaciones promedio entre $P(m)\ y\ sP(m)$

Proposición P16

Si $s-k \geq 2$ las representaciones promedio entre $P(m)\ y\ sP(m)$ también divergen.

Demostración

Si usamos los primeros m polinomiales $P(1),\dots,P(m)$ y generamos todas las posibles representaciones entonces tenemos al menos $(m)^s$ representaciones de números menores que $sP(m)$. Si usamos los primeros $m-1$ polinomiales $P(1),\dots,P(m-1)$ y generamos todas las posibles representaciones entonces tenemos al menos $(m-1)^s$ las cuales forman parte del primer conjunto de representaciones. Si hacemos diferencia de conjuntos, y como uno está contenido en el otro entonces la cardinalidad de la diferencia es $(m)^s-(m-1)^s$, es decir, tenemos $(m)^s-(m-1)^s$representaciones que ocupan a $P(m)$ y no usan el cero entre $P(m)$ y $sP(m)$, lo cual a su vez implica que

$$(m)^s-(m-1)^s \leq |\#representaciones\ que\ ocupan\ a\ P(m)\ y\ no\ usan\ el\ cero\ entre\ P(m)\ y\ sP(m)|,$$

al sacar promedios se tiene que

$$\frac{(m)^s-(m-1)^s}{(s-1)P(m)+1} \leq \frac{representaciones\ que\ ocupan\ a\ P(m)\ y\ no\ usan\ el\ cero\ entre\ P(m)\ y\ sP(m)}{(s-1)P(m)+1}$$
$$\leq \frac{R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}\big(sP(m)\big)-R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}\big(-1+P(m)\big)}{(s-1)P(m)+1},$$

haciendo m tender a infinito

$$\infty = \lim_{m\to\infty}\frac{m^{s-1}}{m^k} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^s-(m)^s}{(s-1)P(m)+1}$$
$$\leq \lim_{m\to\infty}\frac{R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}\big(sP(m)\big)-R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}\big(-1+P(m)\big)}{(s-1)P(m)+1},$$

por lo tanto, los bloques de representaciones promedio también divergen a bloques.

QED

Proposición P17

La función $r_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}(n)$ está acotada superiormente por $r_{P,s}(n)$, es decir $r_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}(n) \leq r_{P,s}(n)$ y esto a su vez implica las siguientes dos desigualdades,

$R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}(n) \leq R_{P,s}(n)$ y $R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}\big(sP(m)\big) \leq (1+H[P(x),sP(x)])^s = O(m^s)$.

Demostración

Las primeras dos desigualdades son resultado del hecho de que tenemos más elementos para sumar en $P(\mathbb{N})$ que en $P(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ y $\mathbb{N}\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{N}$.

La tercera es consecuencia inmediata de la segunda desigualdad y de la Proposición P10 $R_{P,s}(n) \leq (1+H[P(x),n])^s$.

QED

Proposición P18

Las representaciones promedio también divergen si hacemos tender s a infinito.

Demostración

De la Proposición P14 tenemos que $\frac{(m+1)^s}{1+sP(m)} \leq \frac{R_{P,s}(sP(m))}{1+sP(m)}$, si hacemos s tender a infinito, entonces $\infty = \lim_{m\to\infty}\frac{m^s}{sm^k} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m)^s}{sP(m)} \leq \lim_{m\to\infty}\frac{R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}(sP(m))}{sP(m)}$.

QED

De las proposiciones P17 y P18 la intuición nos dice que los números con más representaciones son los más grandes, es decir nos gustaría probar o refutar

$$\frac{R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}(sP(m))}{sP(m)} \leq \frac{R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s+1}((s+1)P(m))}{(s+1)P(m)}$$

que es equivalente con

$$R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s}(s*P(m))\left(\frac{s+1}{s}\right) \leq R_{P(\mathbb{N}\setminus\{0\}),s+1}((s+1)P(m)).$$

Recapitulación

Hasta aquí hemos generado resultados para los siguientes casos:

- Cuando la cantidad de sumandos es menor que el grado del polinomio, es decir cuando

$s < k$, entonces de manera directa se tiene que $k - s \geq 1$, y por la Proposición P11 existe una infinidad de números sin representación como suma de s poligonales, lo cual es equivalente a decir que $P(\mathbb{N})$ no es una base asintótica de orden s.

Esto nos da una cota para uno de los problemas de Waring[10]

$$k \leq G\big(P(\mathbb{N})\big) \leq g\big(P(\mathbb{N})\big).$$

• Cuando la cantidad de sumandos es mayor que el grado del polinomio, es decir $s > k$, entonces de manera directa se tiene que $s - k \geq 1$, y por la Proposición P6 existe algún entero con una cantidad arbitrariamente grande de representaciones como suma de s números polinomiales, es decir $r_{P,s}(x)$ no es una función acotada.

A continuación veremos que esos resultados no aplican en general para el caso $s = k$, es decir que existe al menos un ejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Existe un polinomio $P(x)$ talque el conjunto $P(\mathbb{N})$ es una base asintótica de orden s.
b) Existe un polinomio $P(x)$ talque el conjunto $P(\mathbb{N})$ no es una base asintótica de orden s.
c) Existe un polinomio $P(x)$ talque la función $r_{P,s}(n)$ es una función acotada.
d) Existe un polinomio $P(x)$ talque la función $r_{P,s}(n)$ no es una función acotada.

Es decir no se puede determinar si el conjunto $P(\mathbb{N})$ es o no una base asintótica de orden s si sólo sabemos que el grado de $P(x)$ es s, ni decir si $r_{P,s}(n)$ es o no una función acotada.

d) Proposición P19

$r_{P,s}(x)$ puede ser una función no acotada.

Demostración

Haciendo uso del siguiente resultado sobre triangulares[11]

$$r^*_{T,2}(n) = d_{1,4}(4n+1) - d_{3,4}(4n+1).$$

donde $d_{i,j}(n) = \left|\left\{m \in \mathbb{N} : m|n \quad y \quad m \equiv i\ \big(mod(j)\big)\right\}\right|$, es decir la cantidad de divisores congruentes con i modulo j.

Veamos que $r^*_{T,2}(n)$ no está acotada, tomemos $M_N = \dfrac{-1+\prod_{\substack{i=1 \\ p_i \equiv 1 mod\, 4}}^{N} p_i}{4}$ de aquí que podemos hacer $r^*_{T,2}(n)$ tan grande como queramos, ya que

$$r^*_{T,2}(M_N) = d_{1,4}\left(\prod_{\substack{i=1 \\ p_i \equiv 1 mod\, 4}}^{N} p_i\right) - d_{3,4}\left(\prod_{\substack{i=1 \\ p_i \equiv 1 mod\, 4}}^{k} p_i\right) = 2^N - 0 = 2^N,$$

esto nos da un ejemplo de un caso en que las representaciones no están acotadas con $k = s = 2$

QED

b) Proposición P20

$P(\mathbb{N})$ puede no ser una base asintótica de orden s.

Demostración

x^2 es un ejemplo donde no todo número tiene representación si $k = s = 2$ pues el grado es 2 y ninguna potencia impar de 3 puede representarse como suma de 2 cuadrados.

[10] En esta parte nos referiremos a $G(n)$ como la cantidad mínima de potencias requeridas con las cuales sólo existe una cantidad finita de fallas.
[11] Para la igualdad que sigue ver Ewell [1992].

Bastara notar que los cuadrados módulo 3 son 1 y 0, lo cual implica que ambos sumandos serian múltiplos de 3, esto reducirá el problema eventualmente a $x_0^2 + y_0^2 = 3$.

Si ${x_e}^2 + {y_e}^2 = 3^{2e+1} \rightarrow 3|x_e$ y $3|y_e \rightarrow x_e = 3x_{e-1}$ y $y_e = 3y_{e-1} \rightarrow (3x_{e-1}\ )^2 + (3x_{e-1}\ )^2 = 3^{2e+1} \rightarrow (x_{e-1}\ )^2 + (x_{e-1}\ )^2 = 3^{2(e-1)+1} \rightarrow \cdots \rightarrow {x_0}^2 + {y_0}^2 = 3$ en este caso es sencillo verificar que no hay soluciones por lo tanto ninguna potencia impar de 3 puede representarse como suma de 2 cuadrados.

QED

a) y c) Proposición P21

El conjunto $P(\mathbb{N})$ puede ser una base asintótica de orden s.

Y $r_{P,s}(x)$ puede ser una función acotada.

Demostración

Tomemos $P(x) = x$, $k = s = 1$, notemos que $r_{x,1}(n) = 1$ ya que todo número se puede escribir como suma de sí mismo 1 sola vez.

QED

8. Cantidad de representaciones como sumas de números en sucesiones

En el Capítulo **7. Cantidad de representaciones como sumas de números polinomiales** se generalizó la teoría de los Capítulos **5. Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales** y **6. Cantidad de representaciones como sumas de potencias** para polinomios que cumplían la Definición P del Capítulo **7. Cantidad de representaciones como sumas de números polinomiales**. En este capítulo exhibiremos que no cualquier sucesión es una base asintótica de orden finito, por ejemplo, los números de Fibonacci y los de Fermat no son bases asintóticas de orden finito, esta afirmación se podrá ver en la primera proposición de este capítulo. Posteriormente extenderemos los resultados de los Capítulos **5. Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales**, al Capítulo **7. Cantidad de representaciones como sumas de números polinomiales** para sucesiones más generales, y para esto será suficiente pedir que dichas sucesiones cumplan algunas propiedades. Terminaremos el capítulo mostrando que la función de representaciones como suma de dos primos no es una función acotada.[12]

Propiedad de las representaciones de Waring

En este contexto de las representaciones aditivas sería natural preguntarnos si cualquier sucesión $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ podría cumplir con la propiedad de las representaciones de Waring, esto es, que existe s^* tal que $r_{S,s^*}(n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. La respuesta a esto es no, como se verá en las proposiciones F1 y F2.

Proposición F1

No existe s^* tal que $r_{f,s^*}(m) > 0$ para toda m natural donde $f(x)$ representa la sucesión de Fibonacci.

Demostración

Usaremos la siguiente desigualdad la cual verificaremos posteriormente

$$(1 + H\left[\varepsilon(x), \frac{n}{s}\right])^s \leq R_{\varepsilon,s}(n) \leq (1 + H[\varepsilon(x), n])^s,$$

para $\varepsilon(x)$ una sucesión de naturales.

Entonces, para toda s se tiene que

$$0 \leq \frac{R_{f,s}\big(f(m)\big)}{1 + f(m)} \leq \frac{(1 + H[f(x), f(m)])^s}{1 + f(m)} = \frac{(1 + m)^s}{1 + f(m)}.$$

Como la sucesión de Fibonacci es asintótica a la exponencial entonces existe k tal que $f(m) \sim ke^m$, y cuando m tiende a infinito

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{f,s}\big(f(m)\big)}{1 + f(m)} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{(1 + m)^s}{1 + f(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1 + m)^s}{f(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1 + m)^s}{ke^m} = 0$$

Por lo tanto $\lim_{m\to\infty} \frac{R_{f,s}(f(m))}{1+f(m)} = 0$, lo cual implica que el número de representaciones promedio son cero para todo s, por lo tanto no existe s^* tal que $r_{f,s^*}(n) > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

QED

12 Se puede ver que existen conjuntos de impares cuya cantidad de representaciones no es acotada en Powell [1985, 1986]. Además, ver que $(k + 1) \leq G(k)$ en [Hardy y Wright 1975].

Proposición F2
No existe s^* tal que $r_{F,s^*}(m) > 0$ para toda m natural, donde $F(x)$ es la sucesión de números de Fermat

Demostración
Como en la Proposición F1, usamos $\left(1 + H\left[\varepsilon(x), \frac{n}{s}\right]\right)^s \leq R_{\varepsilon,s}(n) \leq (1 + H[\varepsilon(x), n])^s$.

Ahora, para toda s se tiene que

$$0 \leq \frac{R_{F,s}(F(m))}{1 + F(m)} \leq \frac{(1 + H[F(x), F(m)])^s}{1 + F(m)} = \frac{(1 + m)^s}{1 + F(m)}.$$

Cuando m tiende a infinito (como los números de Fermat son asintóticamente 2^{2^m} existe k tal que $f(m) \sim 2^{2^m}$)

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{F,s}(F(m))}{1 + F(m)} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{(1 + m)^s}{1 + F(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1 + m)^s}{F(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(1 + m)^s}{2^{2^m}} = 0$$

de donde se sigue que $\lim_{m\to\infty} \frac{R_{F,s}(F(m))}{1+F(m)} = 0$. Por lo tanto el número de representaciones promedio son cero para todo s, entonces no existe s^* tal que $r_{F,s^*}(n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

QED

Se generaliza para sucesiones

Definición
Sea $\varepsilon(x)$ una sucesión de naturales tal que $0 < \Delta(\varepsilon(\mathrm{x}))$.

Con las propiedades F1 y F2 notamos que no cualquier sucesión $\varepsilon(\mathrm{x})$ podría cumplir con la propiedad de las representaciones de Waring. Después de la proposición G6 veremos que es una condición necesaria para $\varepsilon(x)$ el que esté acotada por un polinomio.

Proposición G1
Si $\lim_{m\to\infty} \frac{m^s}{\varepsilon(\mathrm{m})} = \infty$ la función de representaciones como suma de s números de la imagen de $\varepsilon(\mathrm{x})$ $r_{\varepsilon,s}(n)$ es una función no es acotada.

Demostración
Si tomamos $\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(m)$ podemos formar al menos $(m + 1)^s$ representaciones en el caso en el que nos importa el orden de los sumandos tales que todas son menores que s veces el más grande de los números que ocupamos ($\varepsilon(m)$), es decir $(m + 1)^s \leq R_{\varepsilon,s}(s\varepsilon(m))$

Entonces tenemos $s\varepsilon(m) + 1$ números y al menos $(m + 1)^s$ representaciones de esos números.

Si calculamos el número de representaciones promedio tenemos que $\frac{(m+1)^s}{1+s\varepsilon(m)} \leq \frac{R_{\varepsilon,s}(s\varepsilon(m))}{1+s\varepsilon(m)}$.

Si hacemos m tender a infinito

$\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^s}{\varepsilon(\mathrm{m})} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^s}{1+s\varepsilon(m)} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{\varepsilon,s}(s\varepsilon(m))}{1+s\varepsilon(m)}$, por lo tanto, la función $r_{\varepsilon,s}(n)$ no es acotada.

QED

Proposición G2
$r^*_{\varepsilon,s}(n)$ está acotada si y sólo si $r_{\varepsilon,s}(n)$ está acotada y
$r^*_{\varepsilon,s}(n) = 0$ si y sólo si $r_{\varepsilon,s}(n) = 0$

Demostración
La prueba es análoga a la de la Proposición L7

QED

Lo anterior nos muestra que algunas propiedades de $r_{\varepsilon,s}(n)$ y $r^*_{\varepsilon,s}(n)$ son propiedades compartidas, y esto nos permitirá en gran medida generar resultados usando el mismo análisis para ambas funciones.

Proposición G3
Las representaciones promedio entre $\varepsilon(m)\ y\ s\varepsilon(m)$ divergen si $\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^{s-1}}{\varepsilon(m)}$

Demostración
Podemos construir $(m+1)^s$ representaciones que sean menores que $s\varepsilon(m)$ usando como sumandos a $\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(m)$ y podemos construir $(m)^s$ representaciones que no ocupan a $\varepsilon(m)$ y son menores que $s\varepsilon(m)$ usando como sumandos a $\varepsilon(0), \dots, \varepsilon(m-1)$. Si al primer conjunto de representaciones le quitamos el segundo obtenemos $(m+1)^s - (m)^s$ representaciones menores que $s\varepsilon(m)$ y que sí ocupan a $\varepsilon(m)$, es decir

$$\frac{(m+1)^s-(m)^s}{(s-1)\varepsilon(m)+1} \leq \frac{|\{reprecentaciones\ que\ ocupan\ a\ \varepsilon(m) entre\ \varepsilon(m)\ y\ s\varepsilon(m)\}|}{(s-1)\varepsilon(m)+1}$$
$$\leq \frac{R_{\varepsilon,s}\big(s\varepsilon(m)\big) - R_{\sigma,s}\big(-1+\varepsilon(m)\big)}{(s-1)\varepsilon(m)+1},$$

si n tiende a infinito, entones

$$\infty = \lim_{m\to\infty} \frac{m^{s-1}}{\varepsilon(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^s-(m)^s}{(s-1)\varepsilon(m)+1} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{R_{\varepsilon,s}(s\varepsilon(m))-R_{\varepsilon,s}\big(-1+\varepsilon(m)\big)}{(s-1)\varepsilon(m)+1}.$$

QED

Proposición G4
Si $\varepsilon(0)\ =\ 0$ entonces $r_{\varepsilon,s}(n)$ es creciente en s

Demostración
La prueba es análoga a la de la Proposición L9

QED

Hasta aquí hemos trabajado con una cota inferior para $R_{\varepsilon,s}(s\varepsilon(m))$, si replanteamos las desigualdades de la Proposición P10 en términos de sucesiones crecientes obtenemos lo siguiente.

Proposición G5
Es posible acotar las funciones de representaciones acumuladas $R_{\varepsilon,s}(n)$ y $R^{*}_{\varepsilon,s}(n)$ de la siguiente manera.

$$\left(1+H\left[\varepsilon(x),\frac{n}{s}\right]\right)^{s}\leq R_{\varepsilon,s}(n)\leq(1+H[\varepsilon(x),n])^{s}$$

Demostración
La prueba es análoga a la de la Proposición L10

QED

Observación O1
Si existe M en los naturales tal que $\varepsilon(m)>m^{s+1}$ para toda $m>M$ entonces $\frac{m^s}{\varepsilon(m)}<\frac{m^s}{m^{s+1}}=\frac{1}{m}$, por lo tanto $0\leq\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^s}{\varepsilon(m)}\right)\leq\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)\leq 0$ entonces $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^s}{\varepsilon(m)}\right)=0$.

Proposición G6
Si $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^s}{\varepsilon(m)}\right)=0$ entonces existe una infinidad de números sin representación como suma de s elementos de la imagen de $\varepsilon(x)$

Demostración
Tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$0\leq\frac{R_{\varepsilon,s}(\sigma(m))}{1+\varepsilon(m)}\leq\frac{(1+H[\varepsilon(x),\varepsilon(m)])^s}{1+\varepsilon(m)}\leq\frac{(m+1)^s}{\varepsilon(m)}$, si n tiende a infinito llegamos a

$0\leq\lim_{m\to\infty}\frac{R_{\sigma,s}(s\varepsilon(m))}{1+s\varepsilon(m)}\leq\lim_{m\to\infty}\frac{(m+1)^s}{\varepsilon(m)}\leq\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^s}{\varepsilon(m)}\right)=0,$

entonces $\lim_{m\to\infty}\frac{R_{\varepsilon,s}(s\varepsilon(m))}{1+s\varepsilon(m)}=0$. Esto significa que la cantidad promedio de representaciones es cero, por lo tanto existe una infinidad de números sin representación como suma de s elementos de la imagen de $\varepsilon(x)$.

QED

Proposición G6.1
Si $\lim_{m\to\infty}\frac{R_{\sigma,s}(s\varepsilon(m))}{1+s\varepsilon(m)}=c\neq\infty$, entonces existe una infinidad de números $m_1,m_2,\ldots$ tal que $r_{\varepsilon,s}(m_i)\leq c$ y también una infinidad de números $M_1,M_2,\ldots$ tal que $r_{\varepsilon,s}(M_i)\geq c$.

Demostración
Notemos que, si calculamos las representaciones promedio de todos salvo un número finito, el promedio es el mismo esto es, $\lim_{m\to\infty}\frac{R_{\varepsilon,s}(s\varepsilon(m))-k_2}{1+s\varepsilon(m)-k_1}=c$.

Si existe una infinidad de números $m_1,m_2,\ldots$ tal que $r_{\varepsilon,s}(m_i)<c$ y una cantidad finita de números $M_1,M_2,\ldots$ tal que $r_{\varepsilon,s}(M_i)>c$, entones

$c=\lim_{m\to\infty}\frac{R_{\sigma,s}(s\varepsilon(m))-k_2}{1+s\varepsilon(m)-k_1}<c$ lo cual es una contradicción, el otro caso es análogo.

QED

Condición C1
De la observación y la Proposición G6 podemos notar que es una condición necesaria que exista M y s en los naturales tal que $\varepsilon(\mathrm{m}) \leq \mathrm{m}^{s+1}$ para toda $\mathrm{m} > \mathrm{M}$. Llamaremos a esta condición C1

Si existen M y s en los naturales tal que $\varepsilon(\mathrm{m}) \leq \mathrm{m}^{s+1}$ para toda $m > M$, entonces tenemos dos posibilidades.
1.-Para toda s en los naturales existe M en los naturales tal que $\varepsilon(m) \leq m^{s+1}$ para toda $m > M$.
2.- Existen s_1, s_2, M_1, M_2 tal que $\varepsilon(\mathrm{m}) \leq \mathrm{m}^{s_1+1}$, para toda $\mathrm{m} > M_1$ y $\varepsilon(m) > m^{s_2+1}$ para toda $m > M_2$, entonces por la Observación O1 $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^{s_2}}{\varepsilon(m)}\right) = 0$.

En este caso podemos hacer $s_* = \sup\left(s \in \mathbb{N} : \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^s}{\varepsilon(m)}\right) = 0\right)$, es decir podemos tomar el número más grande s_* tal que $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^{s_*}}{\varepsilon(m)}\right) = 0$ con lo cual podemos afirmar que $s_* < G\big(\varepsilon(\mathbb{N})\big)$, o dicho de otra manera $\varepsilon(m)$ no es una base asintótica de orden s_*.

Proposición G7
A través del uso de las cotas dadas por la Proposición G4 podemos dar cotas superiores para las funciones $r_{\sigma,s}(n)$ y $r^*_{\sigma,s}(n)$, es decir

$$0 \leq r_{\varepsilon,s}(n) \leq (1 + H[\varepsilon(x), n])^s - \left(1 + H\left[\varepsilon(x), \frac{n-1}{s}\right]\right)^s$$

$$0 \leq r^*_{\varepsilon,s}(n) \leq \binom{1 + H[\varepsilon(x), n]}{s} - \binom{1 + H\left[\varepsilon(x), \frac{n-1}{s}\right]}{s}$$

Demostración
Si tomamos las desigualdades de la Proposición G4 podemos efectuar las siguientes restas: $R_{\varepsilon,s}(n) - R_{\varepsilon,s}(n-1)$ y $R^*_{\varepsilon,s}(n) - R^*_{\varepsilon,s}(n-1)$.
Notemos que $R_{\varepsilon,s}(n) \leq (1 + H[\varepsilon(x), n])^s$ y $-(1 + H\left[\varepsilon(x), \frac{n-1}{s}\right])^s \geq -R_{\varepsilon,s}(n-1)$ y al sumar ambas tenemos que

$$r_{\varepsilon,s}(n) = R_{\varepsilon,s}(n) - R_{\varepsilon,s}(n-1) \leq (1 + H[\varepsilon(x), n])^s - (1 + H\left[\varepsilon(x), \tfrac{n-1}{s}\right])^s.$$

El otro caso es análogo $r^*_{\varepsilon,s}(n) \leq \binom{1 + H[\varepsilon(x), n]}{s} - \binom{1 + H\left[\varepsilon(x), \frac{n-1}{s}\right]}{s}$.

Proposición X1
Existe algún entero con una cantidad arbitrariamente grande de representaciones como suma de 2 números primos y cero.

Demostración
Por la Proposición G4 $(1 + H\left[p(x), \frac{n}{2}\right])^2 \leq R_{p,2}(n) \leq (1 + H[p(x), n])^2$, equivalente a $\left(1 + \pi\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 \leq R_{p,2}(n) \leq (1 + \pi(x))^2$, con $\pi(x)$ la función contadora de primos. Por otro lado sabemos que $\pi(n) \sim \left(\frac{(n)}{\ln(n)}\right)$, es decir $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(n)}{\ln(n)}\right)}{\pi(n)} = 1$, y si hacemos n tender a infinito

entonces $\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\left(\frac{n}{2}\right)}{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\pi\left(\frac{n}{2}\right))^2}{1+n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{R_{p,s}(n)}{1+n}$, por lo tanto las representaciones promedio divergen, es decir, que $r_{p,2}(n)$ no es una función acotada.

QED

De la Proposición G5 tenemos que existen $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tal que

$$\alpha_1 m^s \leq R_{\varepsilon,s}\big(s\varepsilon(m)\big) \leq \alpha_2 m^s$$

A continuación se dará una propuesta de aproximación asintótica de $R_{\varepsilon,s}(n)$ y con base en eso una aproximación de $r_{\varepsilon,s}(n)$.

Hipótesis G1

$$R_{\varepsilon,s}\big(s\varepsilon(m)\big) \sim \propto m^s$$

Para alguna $\propto > 0$.

O similarmente si hacemos $H\left[\varepsilon(x), \frac{n}{s}\right] = m$

$$R_{\varepsilon,s}(n) \sim \propto \left(H\left[\varepsilon(x), \frac{n}{s}\right]\right)^s$$

Para alguna $\propto > 0$

Una parte importante para poder concluir esto es ver que $\lim_{n\to\infty} \frac{R_{\varepsilon,s}(n)}{H\left[\varepsilon(x),\frac{n}{s}\right]}$ existe.

Nosotros sabemos que $\lim_{n\to\infty} R_{\varepsilon,s}(n) = \infty$; $\lim_{n\to\infty} H\left[\varepsilon(x), \frac{n}{s}\right] = \infty$ y $\alpha_1 \leq \frac{R_{\varepsilon,s}(n)}{H\left[\varepsilon(x),\frac{n}{s}\right]} \leq \alpha_2$. La intuición nos dice que bajo esas condiciones dicho límite debería existir, y así tendríamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{R_{\varepsilon,s}(n)}{H\left[\varepsilon(x),\frac{n}{s}\right]} = \propto$

Hipótesis G2

$$r_{\varepsilon,s}(n) \sim \propto \left[\left(H\left[\varepsilon(x), \frac{n}{s}\right]\right)^s - \left(H\left[\varepsilon(x), \frac{n-1}{s}\right]\right)^s\right]$$

Para alguna $\propto > 0$

Lo anterior en el caso de los polinomios nos llevaría a la siguiente aproximación $r_{P,s}(n) \cong \propto \left[(n)^{\left(\frac{s-k}{k}\right)}\right] + error$, con un error de un orden menor que $(n)^{\left(\frac{s-k}{k}\right)}$. Si aplicamos eso al caso de la suma de diez decagonales obtenemos que $r_{D,10}(n) \cong \propto n^4$.

Para terminar este capítulo señalamos que después de hacer regresión sobre los datos con el fin de minimizar el error obtuvimos lo siguiente. La primera gráfica es $R^*_{D,10}(n)\, VS \propto n^5$ y la segunda gráfica es $r^*_{D,10}(n)\, VS \propto n^4$, de tal forma que $R^*_{D,10}(n)\ y\ r^*_{D,10}(n)$ están en azul y $\propto n^5\ y\ \propto n^4$ en naranja (Ver Figura C1).

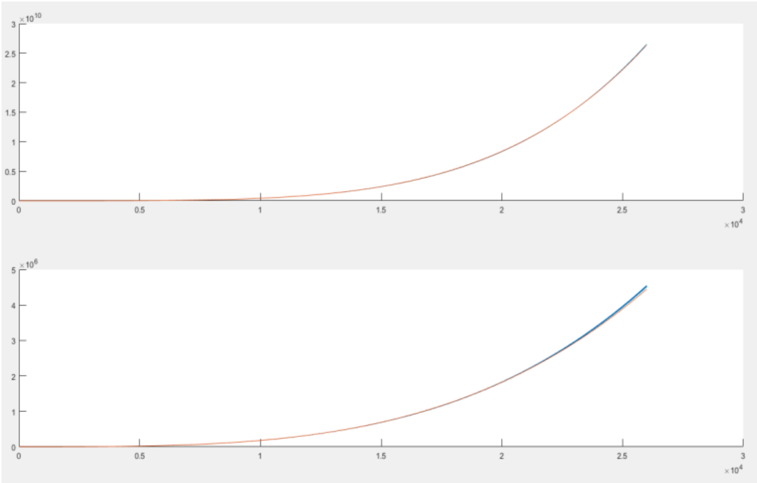

Figura C1

En ambos casos el valor absoluto del error tiene un orden mucho menos que las funciones de representaciones.

Conclusión

La conclusión que presentamos contiene elementos que formar parte de aquello que motivó el desarrollo de este trabajo.

Después de explorar los datos computacionales que tenemos para las formas en las que se puede representar a un entero como suma de diez decagonales quedamos sorprendidos de ver que el comportamiento de los valores de la función $r_{D,10}(n)$ generaba una apariencia trifásica. Pero vamos por partes, en primer lugar, ya mencionamos que la función muestra una trayectoria estable (Figura 1). Pero en la medida en la que nos acercamos se percibe que la trayectoria se bifurca (Figura 2).

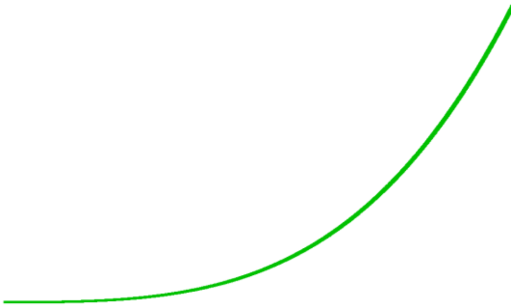

Fig. 1. Para n entre 1-15999.

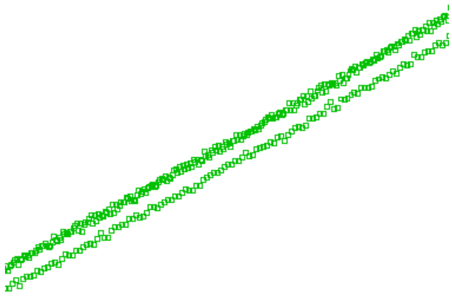

Fig. 2. Para n entre 11000-12000.

Cuando proseguimos de la misma manera en el sentido de acercarnos para obtener mayor precisión, encontramos con sorpresa que para un rango corto de sólo 500 números la trayectoria se trifurca, como se puede ver en la Figura 3.

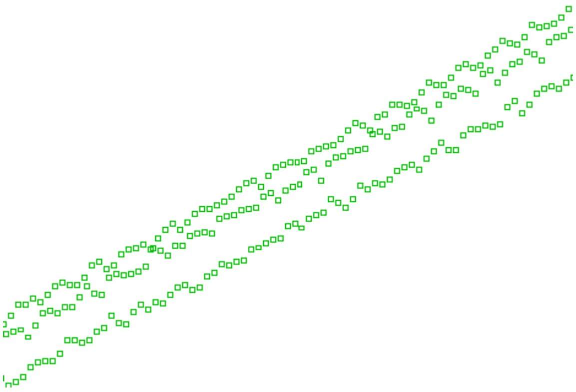

Figura 3. Para n entre 16000-16500.

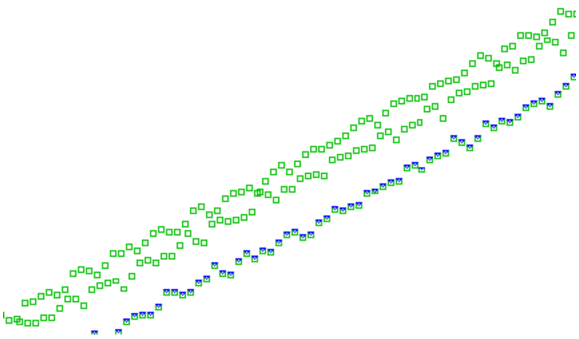

Figura 4. Los azules son congruentes con 1 mod 3.

Pero aún había más, resultaba que clases de equivalencia módulo 3 se alojan de manera perfectamente definida en la representación trifásica. Los congruentes con 1 módulo 3, los que son congruentes con 2 módulo 3 y con congruentes cero módulo 3 se pueden ver en las gráficas de las Figura 4, 5 y 6, respectivamente.

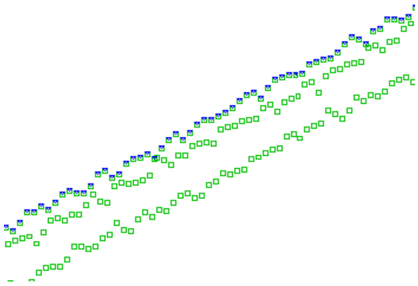

Figura 5. Los azules son congruentes con 2 mod 3.

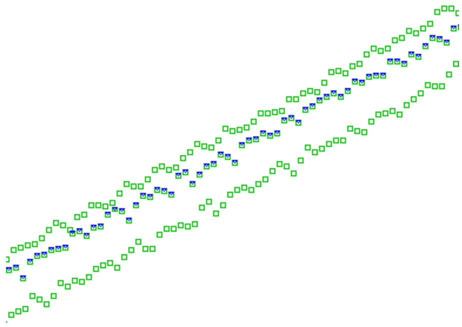

Figura 6. Los azules son congruentes con cero mod 3.

Con base en lo anterior pensamos que lo más natural era preguntarnos si las tres trayectorias atendían a una modelación matemática, y sin duda, por lo ya analizado sabíamos que sí existe tal modelación, pero, entonces llegó la pregunta ¿cómo la caracterizamos?

Al retomar lo planteado con este comportamiento trifásico concluimos que lo procedente era conocer de manera explícita la función de representación como suma de diez decagonales, es decir a $r_{D,10}(n)$, que son los números tomados del conjunto

$$D(\mathbb{N}) = \{0, 1, 10, 27, 52, \dots, 4n(n-3), \dots\}.$$

A partir de este conjunto observamos las diferencias, así como la diferencia de las diferencias y notamos que era posible verificar que $\Delta^2 D(n) = 8$. La tabla que sigue -que ya fue analizada en el Capítulo **5. Números poligonales y cantidad de representaciones como sumas de números poligonales** - nos muestra el desarrollo de las diferenciales.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$D(n)$	0	1	10	27	52	85	126	175	232
$\Delta D(n)$	1	9	17	25	33	41	49	57	65
$\Delta^2 D(n)$	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Este fue el inicio que nos llevó a obtener resultados para las representaciones como sumas de decagonales. En esta parte pudimos construir un número con una cantidad de representaciones mayor a un número dado. Esto nos llevó a analizar de forma indirecta a $r_{D,10}(n)$ y deducir la cota

$$(m+1)^{10} \leq R_{D,10}\big(10D(m)\big),$$

la cual nos llevó a trabajar con promedios, y para esto la desigualdad

$$\frac{(m+1)^{10}}{1+10D(m)} \leq \frac{R_{D,10}\big(10D(m)\big)}{1+10D(m)}$$

nos permitió saber que los promedios resultaron divergentes, lo cual nos garantizó que la función $r_{D,10}(n)$ no es acotada. Esto nos garantizó la existencia de un número con una cantidad de representaciones mayor que un número dado como suma de diez decagonales. Esta forma de plantear el problema no exhibe tales representaciones, pero sí mejoró notablemente la cantidad de sumandos necesarios.

Se llegó a un punto que resultó de gran utilidad al notar que la naturaleza de $r_{D,10}(n)$ y $r^*_{D,10}(n)$, llevó a que $r^*_{D,10}(n) \leq r_{D,10}(n) \leq 10!\, r^*_{D,10}(n)$ y esto permitió que $r^*_{D,10}(n)$ heredara varias de las propiedades de $r_{D,10}(n)$ y viceversa. Lo anterior nos llevó a presentar principalmente resultados sobre $r_{D,10}(n)$ ya que éstos resultaban más directos para el análisis.

Con base en lo analizado para el caso de las representaciones con decagonales entonces se extendió el trabajo para llegar a los resultados pero ahora con números más generales que son los poligonales. Ya que los números poligonales son funciones polinomiales entonces dicha extensión se planteó posteriormente para polinomios más abstractos y esta abstracción resultó más apropiada para ver la naturaleza esencial de tales propiedades, lo que permitió seguir extendiendo el problema y gran parte de las propiedades para sucesiones de números naturales.

Este trabajo de tesis originalmente estuvo motivado por la búsqueda de las respuestas para comprender el comportamiento de los enteros como suma de decagonales vistos en el comportamiento trifásico (Ver Figura 3), pero esta búsqueda nos llevó a responder otras interrogantes de una manera tan general como fue posible.

Finalmente podemos decir que nuestro problema original del comportamiento trifásico ya no fue abordado de manera prioritaria, pero después del estudio que nos llevó hasta el análisis de las representaciones con polinomiales, sí podemos plantear una hipótesis de trabajo para tratar de respondes el comportamiento trifásico.

La hipótesis final plantea la ubicación escalonada de las representaciones acorde a la clase residual a la que pertenece cada número, y donde cada función $r_{D,10}(n)$ nos indica la cantidad de representaciones de n usando diez decagonales. Demostrar la hipótesis nos lleva entender el comportamiento trifásico.

Hipótesis final

Existe M tal que para todo $m > M$

$$r_{D,10}(3m+1) < r_{D,10}(3m) < r_{D,10}(3m-1)$$

$$r_{D,10}(3m-2) < r_{D,10}(3m) < r_{D,10}(3m+2).$$

Con esta propuesta de línea de trabajo terminamos esta tesis.

Apéndice [13]

En esta sección se abordarán los teoremas que demuestran que todo N puede escribirse como suma de $m+2$ poligonales de orden $m+2$, además de los lemas y teoremas que forman parte de las demostraciones (de los cuales no se darán las demostraciones aquí).
Para los poligonales de orden 6 o más

Lema 1 Sea $m \geq 3$ y $N \geq 2m$. Sea L el tamaño del intervalo
$I = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6N}{m} - 3}, \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{8N}{m} - 8}\right)$ entonces $L > 4$ si $N \geq 108m$ y $L > lm$ si $l \geq 3 \; y \; N \geq 7\, l^2 m^3$.

Lema 2 Sea $m \geq 3$ y $N \geq 2m$ dado $a, b \; y \; r$ enteros no negativos tal que $0 \leq r < m$ y $N = \frac{m}{2}(a - b) + b + r$
Considera el intervalo abierto $I = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6N}{m} - 3}, \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{8N}{m} - 8}\right)$ si $b\epsilon I$ entonces
$b^2 < 4a$ y $3a < b^2 + 2b + 4$.

Lema 3 Dado a y b impares tal que $b^2 < 4a$ y $3a < b^2 + 2b + 4$ entonces existen enteros no negativos s, t, v, u tal que $a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$ y $b = s + t + u + v$.

Con base en los lemas anteriores damos lugar a los siguientes dos teoremas que nos permitirán entender más sobre las representaciones aditivas usando poligonales de orden cinco o más.

Para los poligonales de orden 6 o más

Teorema 1 (Cauchy)

$Si \; m \geq 4 \; y \; N \geq 108m$, entonces N puede escribirse como suma de $m+1$ números poligonales de orden $m+2$, con a lo más cuatro de los poligonales distintos de 0 o 1.

Demostración.

Por el Lema 1 el tamaño del intervalo

$$I = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{6N}{m} - 3}, \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{8N}{m} - 8}\right)$$

es más grande que cuatro cuando $N \geq 108m$, entonces I contiene cuatro enteros consecutivos y en consecuencia dos impares consecutivos $b_1, b_2 \; si \; m \geq 4$ el conjunto de números de la forma $b + r$, donde $b\epsilon\{b_1, b_2\}$ y $r\epsilon\{0, 1, \ldots, m-3\}$, contiene un conjunto completo de representaciones de las clases de congruencias modulo m, y entonces podemos escoger $b\epsilon\{b_1, b_2\} \subseteq I \; y \; r\epsilon\{0, 1, \ldots, m-3\}$ tal que $N \equiv b + r \; (mod \; \mathrm{m})$ entonces

$$a = 2\left(\frac{N - b - r}{m}\right) + b = \left(1 - \frac{2}{m}\right)b + 2\left(\frac{N - r}{m}\right) - - - - - - - - - - \quad \text{(b1)}$$

es un impar, y $N = \frac{m}{2}(a - b) + b + r$. Por el Lema 2, como $b\epsilon I$, tenemos
$b^2 < 4a$ y $3a < b^2 + 2b + 4$. Por el Lema 3 existen enteros no negativos s, t, v, u tal que

---

[13] Este apéndice está hecho a partir de lo que expone Nathanson [1996], en la sección “The polygonal number theorem”.

$a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$ y $b = s + t + u + v$ entonces

$$N = \frac{m}{2}(a - b) + b + r = \frac{m}{2}(s^2 + t^2 + u^2 + v^2 - s + t + u + v) + s + t + u + v + r$$

$$N = \frac{ms(s-1)}{2} + s + \frac{mt(t-1)}{2} + t + \frac{mu(u-1)}{2} + u + \frac{mv(v-1)}{2} + v + r$$

$$N = P_m(s) + P_m(t) + P_m(u) + P_m(v) + r$$

Ya que $0 \leq r \leq m - 3$ y 0 y 1 son números poligonales de orden $m + 2$ para cada m, obtenemos el teorema de Cauchy para cada $m \geq 4$, eso es para números poligonales de orden al menos 6.

Para los poligonales de orden 5

Teorema 2 (Legendre)

Dado $m \geq 3$ y $N \geq 28m^3$ Si m es impar entonces N es suma de 4 números poligonales de orden $m + 2$. Si m es par, entonces N es suma de cinco números poligonales de orden $m + 2$ de los cuales al menos uno es 0 o 1.

Demostración

Por el Lema 1 el tamaño del intervalo I es más grande que $2m$, entonces contiene m impares consecutivos. Si m es impar ese conjunto tiene todas las clases residuales modulo m, entonces $N \equiv b(mod\ m)$ para algún impar $b \epsilon I$. Sea $r = 0$ y definiendo a por la fórmula (b1). Entonces $N = \frac{m}{2}(a - b) + b$ por el Lema 2, como $b \epsilon I$, Tenemos $b^2 < 4a$ y $3a < b^2 + 2b + 4$

Por el Lema 3 existen enteros no negativos s, t, v, u tal que

$a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$ y $b = s + t + u + v$ entonces

$$N = \frac{m}{2}(a - b) + b = \frac{m}{2}(s^2 + t^2 + u^2 + v^2 - s + t + u + v) + s + t + u + v$$

$$N = \frac{ms(s-1)}{2} + s + \frac{mt(t-1)}{2} + t + \frac{mu(u-1)}{2} + u + \frac{mv(v-1)}{2} + v$$

$$N = P_m(s) + P_m(t) + P_m(u) + P_m(v)$$

Si m es par y N es impar, entonces $N \equiv b(mod\ m)$ para algún impar $b \epsilon I$. Sea $r = 0$ y definiendo a por la fórmula (b1). Entonces $N = \frac{m}{2}(a - b) + b$ por el Lema 2, como $b \epsilon I$, tenemos $b^2 < 4a$ y $3a < b^2 + 2b + 4$.

Por el Lema 3 existen enteros no negativos s, t, v, u tal que

$a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$ y $b = s + t + u + v$ entonces

$$N = \frac{m}{2}(a - b) + b = \frac{m}{2}(s^2 + t^2 + u^2 + v^2 - s + t + u + v) + s + t + u + v$$

$$N = \frac{ms(s-1)}{2} + s + \frac{mt(t-1)}{2} + t + \frac{mu(u-1)}{2} + u + \frac{mv(v-1)}{2} + v$$

$$N = P_m(s) + P_m(t) + P_m(u) + P_m(v)$$

Si m es par y N es par entonces $N - 1 \equiv b(mod\ m)$ para algún impar $b \epsilon I$. Sea $r = 0$ y definiendo a por la fórmula (b1) tal que $N - 1 = \frac{m}{2}(a - b) + b$ por el Lema 2, como $b \epsilon I$, Tenemos $b^2 < 4a$ y $3a < b^2 + 2b + 4$

Por el Lema 3 existen enteros no negativos s, t, v, u tal que

$a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$ y $b = s + t + u + v$ entonces

$$N - 1 = \frac{m}{2}(a - b) + b = \frac{m}{2}(s^2 + t^2 + u^2 + v^2 - s + t + u + v) + s + t + u + v$$

$$N - 1 = \frac{ms(s-1)}{2} + s + \frac{mt(t-1)}{2} + t + \frac{mu(u-1)}{2} + u + \frac{mv(v-1)}{2} + v$$

$$N - 1 = P_m(s) + P_m(t) + P_m(u) + P_m(v)$$

$$N = P_m(s) + P_m(t) + P_m(u) + P_m(v) + 1 = P_m(s) + P_m(t) + P_m(u) + P_m(v) + P_m(1) .$$

Esto completa la prueba.

El teorema de Legendre prueba que los poligonales de orden 5 o más son bases asintóticas de orden 4 para polígonos con cantidad impar de lados y de orden 5 para polígonos con cantidad par de lados.

Para los pentagonales, por **el teorema de Legendre** (con $m = 3$) todo $N \geq 28(3)^3 = 756$ puede escribirse como suma de a lo más 5 pentagonales.
Haciendo uso de cómputo es posible verificar la valides de la afirmación para los números entre 0 y 755.

Para los poligonales de orden 4

Teorema 3 (LaGrange)
Todo entero no negativo es suma de 4 cuadrados

Para los poligonales de orden 3

Teorema 4 Todo entero positivo N es suma de tres cuadrados si y solo si no es de la forma $N = 4^a(8k + 7)$.

Teorema 5 Todo entero positivo congruente con 3 modulo 8 es suma de tres cuadrados impares.

Teorema 6 (Gauss) Todo entero no negativo es suma de tres triangulares.

Las demostraciones de estos cuatro teoremas se pueden consultar en libros como el de Koshy [2002], Nathanson [1996] o Rosen [2000].

Bibliografía

Andrews, George E. 1986. “EYPHKA! num = Δ+Δ+Δ”. *Journal of Number Theory*, 23:285-293.

Chrystal, G. 1964. *Algebra, Part II*. New York: Chelsea Publishing.

Dickson, L.E. 1928 “Simpler proofs of Waring´s theorem on cubes with various generalizations”. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 30, No. 1, pp. 1-18.

Ewell, John A. 1992 “On representations of numbers by sums of two triangular numbers”. *Fibonacci Quarterly* **30** (1992), 752-7.

Grosswald, Emil. 1984. “Representations of integers as sum of squares”. New York: Springer-Verlag.

Hardy, G. H. & Wright E. 1975. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford At The Clarendon Press.

Juškevič, A. P. & Winter, E. 1965. *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729-1764*. Berlin: Akademie-Verlag.

Koshy, Thomas, 2007. *Elementary Number Theory with Applications*. Estados Unidos de América: Academic Press, Segunda Edición.

Kubina , J. M. y Wunderlich, M. C. 1990. “Extending Waring's conjecture to 471, 600 000”, *Math. Comp*. 55, 815{820.

Mahler, K. 1957. “On the fractional parts of the powers of a rational number (II)”. *Mathematika* 4 (1957), 122-124.

Nathanson, Melvyn. 1996. *Additive Number Theory, the Classical Bases*. New York: Springer-Verlag.

Nathanson, Melvyn. 2000. *Elementary Methods in Number Theory*. New York: Springer- Verlag.

Powell, Barry. 1985. Problem 1207 (A generalized weakened Goldbach theorem). *Mathematics Magazine*, **58**, pp. 46; **59**, 1986 pp. 48-49.

Rosen, Kenneth H. 2010. *Elementary Number Theory and Its Application.* Ed. Pearson 6th Edition.

Waring, Edward. 1991. *Meditationes Algebraicae*. Traducción de la edición de 1782. Rhode Island: American Mathematical Society.