UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIO, TIEMPO Y MOVIMIENTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ORLANDO BACA DE LA VEGA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ E. MARQUINA FÁBREGA
Ciudad Universitaria, Ciudad de México 2017

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Baca
Apellido materno	de la Vega
Nombre	Orlando
Teléfono	56503194
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Física
Número de cuenta	094557963
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Dr.
Nombre(s)	José Ernesto
Apellido paterno	Marquina
Apellido materno	Fábrega
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan Carlos
Apellido paterno	Alonso
Apellido materno	Huitrón
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dra.
Nombre(s)	Vicenta
Apellido paterno	Sánchez
Apellido materno	Morales
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Fís.
Nombre(s)	José Ramón
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Balanzar
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Dra.
Nombre(s)	Mirna
Apellido paterno	Villavicencio
Apellido materno	Torres
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Espacio, Tiempo y Movimiento
Número de páginas	128 p
Año	2017

Dedicatoria

La presente tesis la dedico a mi familia. Mis padres Pedro Baca Bracho e Isaura María de la vega Baca y mi hermano Francisco Javier Baca de la vega. Y también a Gaby.

Agradecimientos

Agradezco en primera instancia a mi familia. A mis padres, Pedro Baca Bracho e Isaura María de la vega Baca, por todos estos años de apoyo incondicional. Sin su respaldo, no hubiese sido posible concluir este proyecto, así como muchos otros aspectos de mi vida. A mi hermano, Francisco Baca de la Vega, su paciencia, solidaridad y amistad. Y a Gaby, por su incansable trabajo.

A mis amigos José Armando Reséndiz Arroyo, por ser cómplice en múltiples pasajes de mi vida y una roca firme en los momentos difíciles. A Alejandro Lugo García y su extraordinaria familia, por brindarme su amistad, cariño y respeto a lo largo de muchos años; mi gratitud es perpetua.

A mi amiga Elizabeth Martínez Gómez, y a Pedro Cervera, por su tolerancia y ejemplo.

A mi querido César Maya, amigo de verdad. Y a mis amigos de la infancia Juan Carlos Licona, Rodrigo Mendoza, Antonio Baca, Omar Vargas y Valente Calva.

Hubo muchos profesores a lo largo de la carrera que tuvieron una gran influencia en mi formación, pero deseo hacer una mención especial a mi querido profesor José Ernesto Marquina. Sus clases fueron siempre un motivo de inspiración y marcaron en forma decisiva mi rumbo en la facultad. Muchas gracias por todo, profe.

INDICE

Espacio, Tiempo y Movimiento

Resumen

Objetivo 1.- Hacer una breve exposición de los marcos de descripción clásicos del movimiento.

Objetivo 2.- Estudiar los conceptos de espacio y tiempo en la mecánica clásica.

Objetivo 3.- Estudiar el concepto de espacio-tiempo de la teoría de la relatividad.

Objetivo 4.- Hacer una breve descripción de cómo se modifican las leyes clásicas del movimiento bajo el concepto de espacio-tiempo.

Deseamos realizar una breve descripción de la forma en la que han evolucionado históricamente las diferentes teorías en el estudio del movimiento. Como primer lugar, las concepciones filosóficas de Aristóteles, de Descartes y Leibniz. Posteriormente, el gran cambio de paradigma protagonizado por Galileo Galilei, en el cual, la experimentación se convierte en la principal herramienta en el estudio del fenómeno.

La extraordinaria ecléctica de Newton que combina los resultados experimentales con una interpretación filosófica-matemática sin precedentes en su época. Resultado de ello, son las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal. Los absolutos Newtonianos, Espacio, Tiempo y Movimiento, constituyen las bases de la mecánica clásica, que a su vez, encontrará una reformulación a través del cálculo variacional efectuada por Lagrange, Hamilton y Jacobi, entre otros.

La síntesis de la mecánica y el electromagnetismo, dará origen a una de las grandes revoluciones conceptuales filosóficas y matemáticas de principios del siglo XX: La teoría de la relatividad especial de Einstein.

Para finalizar, nos centraremos en los esfuerzos realizados por el propio Einstein, para lograr una teoría en donde todo tipo de movimiento sea relativo: La Relatividad General. Como consecuencia de ésta última, se tendrá una teoría dinámica de la gravitación.

Capítulo 1: El origen del Movimiento

"Y sin embargo, se mueve…"

Frase atribuida a Galileo

"… quien con vigor mental casi divino, fue el primero en demostrar los movimientos y formas de los planetas, las trayectorias de los cometas y el flujo de las mareas."

Epitafio de Newton.

El origen del movimiento

1.1 Introducción

. Desde la antigüedad, el hombre se ha sentido fascinado por la repetición periódica de ciertos eventos y por su carácter dual: la salida y la puesta del sol, el día y la noche, el invierno y el verano; así como la aparición en el cielo de ciertos fenómenos aparentemente impredecibles, como los eclipses. Por otra parte, esa repetición periódica debió de llevar al Homo sapiens, en momentos muy tempranos de su evolución, a intentar medir el tiempo por razones prácticas. De hecho, la complejidad de su organización social estuvo quizá vinculada a ello; por ejemplo, la predicción de la naturaleza cíclica de las estaciones entronca con aspectos que debieron de condicionar el nacimiento de la agricultura y, por ende, el abandono del nomadismo. Por eso, no es arriesgado declarar que la astronomía es posiblemente una de las ramas más antiguas de la ciencia, muy vinculada desde sus orígenes con todo tipo de predicciones, unas de carácter natural y otras que entran en lo que podríamos llamar “artes adivinatorias”.

La observación del cielo permitió confirmar la repetición de las estaciones o ayudar a la orientación. Pero la simple observación no era suficiente; el uso de las matemáticas hizo posible añadir un elemento cuantitativo que debe considerarse como el inicio de una verdadera ciencia astronómica.

Desde hace cinco mil años está confirmada la existencia de calendarios que reflejan, con mayor o menor precisión, la sucesión temporal; se sabe que ya en la I dinastía egipcia se disponía de un calendario de carácter solar-lunar, que fijaba el inicio del año a partir de la reaparición de Sirio en el horizonte antes de la gran inundación anual.

Aunque probablemente el origen de los primeros calendarios haya que buscarlo en la necesidad de organizar el tiempo tanto de las fiestas comunes como de los trabajos con propósito religioso, administrativo o comercial – lo que no requiere una gran precisión-, la curiosidad científica llevó pronto a idear procedimientos que permitieran realizar medidas de la duración del año con un margen de error relativamente pequeño.

La medición precisa del día y su organización en partes iguales que pudieran, a su vez, medirse, formó parte de ese mismo afán. Pronto debieron nacer los relojes solares e incluso el concepto de portabilidad, ya que se ha encontrado un artilugio de este tipo en época del faraón Tutmosis III (ca. 1450 a.C.).

Los calendarios que usaban la Luna como referencia para los meses parecen ser los más antiguos. Se discuten evidencias de entre 15000 y el 25000 a. C. como pruebas concluyentes. Sin embargo, esos calendarios no son compatibles con el ciclo anual del Sol, por lo que hicieron su aparición otras opciones que combinaban los ciclos lunares y los solares y que, en general, requerían un complejo sistema de sincronización de ambos. Tal sistema se basó en la intercalación de períodos temporales cada cierto número de meses o años, para evitar el progresivo desfase de estos calendarios.

El calendario solar más antiguo que se conoce es de origen egipcio. En la IV dinastía (hacia el año 2500 a. C.) era usado ampliamente; constaba de 12 meses de 30 días, más 5 días extras que servían para evitar desfases. Más o menos en esa época, los sumerios contaban con un calendario similar, compuesto de 12 meses iguales de 30 días.

Además del calendario egipcio y el mesopotámico, también son muy conocidos los calendarios mesoamericanos, como el azteca o mexica, con ciclos de ajuste más complejos, ya que coexisten el año sagrado de 260 días y el año natural de 365, formando ciclos que se repiten cada 52 años; estos ciclos se agrupaban, a su vez, hasta formar grupos de 5200 años llamados "soles"

Griegos y romanos habían utilizado sucesivas medidas del año organizadas en un número de meses variable hasta que, en el siglo 46 a. C., Julio César –con la ayuda del astrónomo Sosígenes de Alejandría- impuso un calendario de 365 días, repartidos en 12 meses, con un día extra cada 4 años: así lo ajustaba más al ciclo solar de 365 días y casi $1/4$. Usando este calendario, la Iglesia estableció, durante el primer concilio de Nicea del año 325, las fiestas móviles de su liturgia.

Sin embargo, la duración del año no es exactamente de 365 días y 6 horas, como está implícitamente supuesto en el calendario juliano, sino 365 días, 5 horas y unos 49 minutos. Consecuentemente, cada año se iba produciendo un desfase progresivo: 11 minutos al año. Hacia el año 1500 esa diferencia venía a corresponder a un adelanto de unos 10 días, lo que motivó a grandes discusiones sobre la precisión de este sistema de medida y un creciente consenso en que era necesario modificar el calendario usado hasta entonces. Resultado de esto es el calendario gregoriano.

La observación del cielo ha ocupado a todas las culturas, que, dependiendo del grado de madurez evolutiva, han considerado su descripción bajo modelos que van de lo puramente mítico o religioso hasta lo científico. Hace más de cinco mil años, los egipcios ya intentaban encontrar una explicación de los fenómenos observados en el cielo y pretendían conectarlos con los sucesos que afectaban a los individuos o a las naciones. Nacieron así, fuertemente trabadas, la astronomía y la astrología, que combinaban el saber y la fantasía de quienes comenzaron a cultivarlas.

Quizá la idea más importante desarrollada por los antiguos egipcios en este ámbito fue el concepto de tiempo, distinguiendo su curso lineal y los comportamientos cíclicos asociados a ciertos fenómenos naturales (las inundaciones anuales del Nilo, por ejemplo). Aparte de los calendarios existen evidencias arqueológicas que se remontan al milenio II a. C. y que contienen datos bastante precisos sobre la trayectoria de Venus. Un ejemplo significativo es el reloj estelar hallado en la tumba del faraón Ramsés VI, en el valle de los reyes. En este sentido, se tiene constancia de que, unos 1300 años antes de nuestra era, los egipcios habían identificado ya 43 constelaciones y los cinco planetas visibles, existiendo numerosa información sobre ellos.

En otras civilizaciones también se compartió el mismo interés por la bóveda celeste. Los astrónomos chinos registraron el primer eclipse de sol conocido, unos dos mil setecientos años antes de nuestra era.

Pero probablemente fueron los babilonios quienes, hacia 1800 a. C., aplicaron por primera vez las matemáticas al estudio de la bóveda celeste, en particular a los fenómenos periódicos que en ella pueden observarse.

Entre las tablillas cuneiformes encontradas, la de Ammisaduqa, conservada en el museo británico, lista posiciones de Venus durante un período de 21 años, lo que podemos interpretar como la primera prueba de estudio sistemático sobre fenómenos planetarios.

Entre los caldeos, ya en el imperio neobabilónico, se hicieron numerosas observaciones que condujeron a tener conocimiento empírico sobre algunos planetas, aunque no parece que eso generara una cosmología que haya llegado hasta nuestros días. Por ejemplo, determinaron que el Sol no se mueve de manera uniforme a lo largo de la eclíptica, descubrieron formas de predecir eclipses y compilaron los primeros catálogos de estrellas conocidos.

Sin embargo, muchas de estas observaciones se encontraban en un estadio precientífico. Ninguna de esas civilizaciones, ni tampoco otras que llegaron a realizar precisas mediciones cronológicas –caso de los mesoamericanos y de los incas- han dejado trazas de que establecieran un modelo que reflejase los movimientos de los astros ni la posición de la Tierra respecto a ellos. Sus interpretaciones conducen a cosmologías que tienen más de míticas que de rigurosas.

Fueron los griegos quienes comenzaron a interesarse por establecer una cosmología que fuera más allá de una leyenda. Tales de Mileto (ca. 630-545 a. C.) predijo un eclipse de sol el 29 de mayo del 585 a. C. En su visión, la Tierra es un disco que flota en el mar y está cubierto por una cúpula: el cielo y sus estrellas. En ese mismo siglo, Anaximandro (610-546 a. C.) propuso un modelo en el que la Tierra habitada es una sección de un cilindro y ocupa el centro de todo. La altura del cilindro es un tercio de su diámetro. El sol, la Luna y los planetas son huecos en unas ruedas invisibles que rodean la Tierra. Pitágoras (ca. 580-495 a. C.) a su vez, sugirió que la Tierra es una esfera y que todo el universo es también esférico. Para ayudar a la navegación, Timocaris de Alejandría (320-260 a. C.) y Aristilo (siglo III a. C.) realizaron un catálogo con las posiciones aparentes de diversas estrellas.

Pero es Aristarco de Samos (310-230 a. C.) de quien tenemos constancia de que estableció un primer modelo en el que la Tierra gira alrededor del sol, y no al revés. Esta idea le valió un rechazo generalizado, al contradecir lo que parece ser la experiencia general de que nuestro planeta no se mueve.

Pocos debieron ser sus seguidores, porque astrónomos posteriores siguieron admitiendo una visión geocéntrica.

Por su parte, Eratóstenes (276-194 a. C.) midió con gran aproximación las distancias al sol y la luna, determinó el tamaño relativo de ambos astros respecto a la Tierra y calculó con bastante precisión la circunferencia terrestre, un hecho considerado como uno de los momentos estelares de la historia de la ciencia. Hiparco de Nicea (190- 120 a. C.) descubrió la precesión de los equinoccios, estudió el movimiento de la Luna y determinó la duración del año. Sólo Plutarco de Queronea (46-120), el autor de las vidas paralelas, se atrevería a plantear, ya en época cristiana, la imposibilidad de que el universo, si es infinito, pueda tener centro.

1.2 El origen del movimiento

El movimiento según Aristóteles.

El filósofo griego, distinguía entre movimiento y reposo. Se trataba de estados absolutos, radicalmente diferenciados. También hacía distinción entre dos tipos de movimiento: los naturales y los violentos. El movimiento natural es aquel que manifiestan los cinco elementos: aire, agua, tierra, fuego y éter. El movimiento propio del éter, la sustancia de las esferas celestes, es eterno y circular. El resto de los elementos manifiesta un movimiento rectilíneo en sentido ascendente (aire y fuego) o descendente (agua y tierra). El movimiento natural se explica entonces por la tendencia interior de cada elemento a ocupar su lugar natural y restaurar el orden perdido de las cosas. Una vez alcanzado su lugar, permanecen en reposo.

Los movimientos violentos, por el contrario, son aquellos que se producen de forma no natural y alejan al cuerpo del lugar que le es propio, como es el caso de una piedra ascendiendo al arrojarla con la mano. Como todo efecto tiene una causa, se deduce que el movimiento violento siempre está ligado a la fuerza que lo ha causado. Esta fuerza se ejerce siempre por contacto entre el motor del movimiento y el cuerpo movido. Para Aristóteles no puede existir nada parecido a una acción a distancia. Sin embargo, el movimiento de un proyectil parece desafiar la teoría aristotélica. Cuando una piedra sale disparada de una mano, llega un momento en que ya no hay contacto entre el motor y el objeto movido. La cuestión, entonces, es la siguiente: ¿cómo se explica que el objeto siga su trayectoria? Aristóteles se vio obligado a explicar dicho movimiento argumentando que era el propio medio, el aire, el que transmitía el movimiento al objeto: el motor inicial (la mano) mueve el cuerpo lanzado y, además, las capas de aire que están a su alrededor, de modo que son tales capas las que actúan como nuevo motor y transmiten el movimiento al objeto. Lo que conduce a la paradójica conclusión de que el medio no sólo actúa prestando resistencia al movimiento, sino también como motor del mismo.

Aristóteles llegó a establecer una correlación entre incremento de fuerza e incremento de velocidad. Expresando en notación actual, si F es la fuerza y v la velocidad, entonces:

$$F \propto v$$

Es decir, F es proporcional a v. Si se tienen en cuenta la resistencia del medio, esta actúa también de forma inversamente proporcional a la velocidad: a mayor resistencia, menor velocidad. Expresado de nuevo en términos actuales, se obtiene la siguiente expresión:

$$v \propto \frac{F}{R}$$

Es decir, la velocidad es proporcional a la razón entre la fuerza y la resistencia.

En el siglo VI, Filopón, acuñó el término *ímpetus* para señalar las fuerzas ejercidas sobre los cuerpos, las causantes del movimiento. En la edad Media, los escolásticos defendían que el movimiento es causa de una fuerza, que se mantiene mientras ésta actúa, extinguiéndose cuando cesa. En la física Newtoniana, por el contrario, se considera que el movimiento se conserva sin necesidad de una fuerza constante que actúe sobre el móvil.

Aunque muchos autores pensaban que ese *ímpetus* se conservaba indefinidamente si no encontraba resistencia, Nicolás de Oresme (1323- 1382) creía que era una fuerza que se agotaba espontáneamente. Esta idea le permitía explicar los movimientos de los péndulos, resortes o cuerdas vibrantes. Por su parte, el nominalista francés Jean Buridan (1300-1358) aplicó el ímpetus para estudiar la caída de los cuerpos y el desplazamiento de proyectiles. Según decía:

"Cuando un motor mueve un cuerpo móvil imprime un cierto ímpetus o fuerza motriz que actúa en la dirección hacia la que el motor movía el móvil, sea arriba o abajo, lateralmente o en círculo."

(Buridan, citado en José Muñoz Santoja, 2013, p.150).

Galileo Galilei

Pero quien realmente estableció las bases de la dinámica moderna fue Galileo Galilei. Regresando a Aristóteles, él concebía una física de lugares absolutos, con un centro del universo que ejercía como centro de gravedad. Suponer que dicho centro, la Tierra, estuviera en movimiento era totalmente absurdo por distintas razones, pero la más consistente y la que empleaban a menudo los seguidores del aristotelismo era la que se expone a continuación: en el caso de que la tierra se moviera, al arrojar un objeto pesado desde una torre alta, durante el descenso la base de la torre se desplazaría, de modo que en ningún caso el objeto caería a los pies del edificio.

Como, efectivamente, los objetos sí que caen en la base de los edificios, esto significa que la Tierra tiene que encontrarse inmóvil. Un simple lanzamiento de un objeto servía de prueba para demostrar la inmovilidad de la Tierra.

Así expone el propio Galileo este problema en sus *Diálogos,* a través de Salviati, defensor del sistema copernicano:

"Todos plantean como el mejor argumento el de los cuerpos graves que, cayendo de arriba abajo, llegan por una línea recta y perpendicular a la superficie de la Tierra. Lo que se considera un argumento irrefutable de que la Tierra está inmóvil. Porque si esta tuviese la rotación diurna, una torre desde cuya parte superior se deja caer una piedra, al ser transportada por la rotación de la Tierra, en el tiempo en el que la piedra tarda en caer, recorrería muchos cientos de brazas hacia oriente, y la piedra debería caer a tierra lejos de la base de la torre en un espacio correspondiente".

(Galileo, citado en Roger Corcho Orrit, 2012, p.95).

Aunque los aristotélicos estaban convencidos de que este experimento era concluyente, Galileo pudo desenmascarar su error mediante el principio de inercia. Según este principio, se observaría lo mismo en una Tierra en movimiento que en una Tierra inmóvil.

En esa misma obra, Galileo expone un segundo argumento contra la idea de la rotación terrestre, esta vez en boca del representante aristotélico Simplicio:

"[…] sostengo que si la Tierra se moviera, las piedras, los elefantes, las torres y las ciudades necesariamente volarían hacia los cielos. Y como esto no sucede, declaro que la Tierra no se mueve." (Galileo, citado en Roger Corcho Orrit, 2012, p.95).

Se trata de una experiencia que seguramente hubieron experimentado los coetáneos de Galileo con frecuencia: al girar en rotación, una fuerza ficticia parece expulsarnos hacia el exterior. En este argumento hay implícita la fuerza centrífuga, sobre la que Galileo no pudo dar una contaargumentación convincente.

En un famoso pasaje de *Diálogos,* Galileo propone subirse a un barco en un mar en calma y observar atentamente los movimientos de moscas y gotas de agua. Expone la situación de la siguiente manera:

"Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas y otros pequeños animales voladores […] colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma […] haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro […] Las gotas caerán […] en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire […]

las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si se cansaran de seguir el curso del barco […] "(Galileo, citado en Roger Corcho Orrit, 2012, p.96).

Este fenómeno, que en la actualidad se denomina invarianza, viene a demostrar que los estados de reposo y de movimiento uniforme son, en realidad, equivalentes. No son estados absolutos, como creía Aristóteles, sino relativos. Se trata de una cuestión de perspectiva, de puntos de vista o, como se dice en la actualidad, del sistema de referencia escogido. En el interior de un móvil sin ventanillas un observador sería incapaz de decir si se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme o en reposo.

Tal como se ha visto, Galileo hizo uso de una noción de inercia que le sirvió para atacar el aristotelismo y dar un paso a una nueva concepción del espacio. Sin embargo, no logró desembarazarse de todas las antiguas nociones, de modo que cuando tuvo que formular el principio de inercia de forma explícita, su planteamiento era válido, pero con una limitante.

En su obra, principalmente en los *Discursos,* se encuentran algunos experimentos mentales que hoy en día siguen constituyendo una introducción muy interesante a la comprensión de dicho principio. En el primero de estos ejemplos, Galileo planteaba la siguiente situación: una bola de bronce está sobre una superficie inclinada tan pulida que su resistencia se puede obviar. Al soltar la bola, esta se deslizará acelerándose constantemente. En un segundo momento, se coloca la superficie en posición horizontal y de nuevo se deposita la bola encima. En esta situación, al dar un ligero impulso a la bola, se plantea el siguiente interrogante*: "¿Qué distancia recorrerá el cuerpo en movimiento?"* Como no hay resistencia ni nada que frene el objeto, la velocidad será constante. Como señala Salviati, "si ese espacio fuese indefinido, el movimiento sobre él no tendría fin, esto es, sería perpetuo."

En otro experimento mental, Galileo llega a las mismas conclusiones, pero con un planteamiento aún más elegante. El experimento consiste en suponer que hay una superficie muy lisa y pulida hasta tal punto que no existe resistencia y en la que se distinguen tres partes: una inclinada, otra horizontal y otra con una inclinación igual pero opuesta a la primera.

En la primera parte del experimento, se suelta una bola, tan pulida que tampoco ejerce resistencia, desde uno de los extremos de la superficie. Como no hay rozamiento, la bola llegará al extremo de la superficie y ascenderá por la plataforma inclinada hasta alcanzar la misma altura que desde la que se había lanzado.

Ahora supongamos que la inclinación del lado ascendente disminuye. Se vuelve a lanzar la bola desde el otro extremo y de nuevo llegará hasta la misma altura, pero esta vez habrá tenido que recorrer un espacio mayor. A medida que descendamos la plataforma, la bola recorrerá más espacio para alcanzar la misma altura.

¿Qué ocurrirá en el límite, cuando la plataforma forme un ángulo de $180°$ y sea un plano? En esta situación límite, la distancia que tiene que cubrir es infinita. Esto significa que la bola proseguirá su camino a velocidad constante, sin detenerse, hasta el infinito. Como afirma Galileo:

"De modo que de la mayor inclinación hacia abajo se sigue mayor velocidad y. por el contrario, sobre el plano cuesta arriba el mismo móvil lanzado con la misma fuerza se mueve a tanta mayor distancia cuanto menor es la elevación. Ahora decidme lo que sucedería al mismo móvil sobre una superficie que no estuviese inclinada ni hacia arriba ni hacia abajo." (Galileo, citado en Roger Corcho Orrit, 2012, p.101).

A pesar de estas sucintas explicaciones y ejemplos, Galileo llegó a la conclusión errónea de que la inercia establecía que el movimiento infinito no era rectilíneo, sino circular. Para Galileo no tenía sentido que un objeto circulara eternamente en línea recta. En un mundo esférico y finito como el que seguía concibiendo Galileo (el universo infinito imaginado por Giordano Bruno no había encontrado eco en otros pensadores de la época) no puede haber lugar para líneas rectas que se proyectan infinitamente. El movimiento inercial tenía que trazar una trayectoria circular.

Sea como fuere, la inercia proporcionaría a Galileo la llave para desactivar las críticas aristotélicas respecto al movimiento de la Tierra: al formar parte del mismo sistema de referencia terrestre, no se observan efectos sobre la superficie de la Tierra, dado que el reposo que percibimos sólo es movimiento compartido. Todo aquello que participe del movimiento de la Tierra no lo percibirá como tal; dicho movimiento será invisible y sin efectos. Desde un punto de vista práctico, estar en reposo o en movimiento uniforme son equivalentes, y por esa razón los aristotélicos no pueden demostrar la inmovilidad terrestre arrojando una piedra.

Aunque esta conclusión le permitiera superar un escollo grave, su consideración de inercia rotacional le llevó a creer que no podían observarse efectos de la rotación sobre la superficie terrestre.

También en este aspecto Galileo se equivocó, porque la rotación supone que hay una aceleración, de modo que sí se observan efectos sobre la superficie, como es el caso del efecto Coriolis o el experimento del péndulo de Foucault.

La inercia supone equiparar velocidad y movimiento uniforme; de este modo, el movimiento que requiere explicación es el acelerado. A la labor de desentrañar el movimiento acelerado dedicaría Galileo parte de sus experimentos y reflexiones.

En su obra escrita durante su reclusión, cuando ya era un anciano, y titulada "*Discursos y demostraciones matemáticas, en torno a dos nuevas ciencias relativas a la mecánica y los movimientos locales",* se encuentran recopilados los principales logros y reflexiones sobre el movimiento que Galileo alcanzó a lo largo de su vida. Fue la base que Newton posteriormente aprovechó para desarrollar las ideas que en la actualidad se denominan como física clásica. Las principales ideas que se recogen en la obra son tres: su definición de movimiento uniforme, de movimiento uniformemente acelerado y sobre la trayectoria parabólica de los proyectiles. Galileo distingue, por tanto, entre movimiento a velocidad constante y acelerado.

La primera sección de su discurso, que es también la más breve, Galileo hizo explícita la relación entre espacio recorrido (s) y tiempo empleado (t) para definir la velocidad uniforme y rectilínea. Concluyó que el espacio recorrido es directamente proporcional al tiempo empleado y a la velocidad. Usando la notación algebraica actual, estas relaciones se expresan como:

$$s = v \cdot t$$

Galileo pensaba en un principio que el movimiento de caída libre era uniforme, no acelerado. Posteriormente llegó a considerar que era acelerado, pero proporcional al espacio recorrido. No se tiene constancia de que Galileo diera con la solución correcta, esto es, que la aceleración es proporcional al cuadrado del tiempo, hasta 1604. En una carta escrita a su amigo Sarpi, datada en el citado año, afirma lo siguiente:

"Repensando acerca de las cuestiones del movimiento, [...] demuestro luego el resto, esto es, que los espacios recorridos por el movimiento natural están en proporción cuadrática a los tiempos [...]".(Galileo, citado en Roger Corcho Orrit, 2012, p.110).

Galileo crea ya aquí una correlación entre el espacio recorrido y el cuadrado del tiempo.

De las cuatro jornadas que constituye los *Discursos, en las dos primeras (ciencias de materiales)* establece de nuevo correctamente que la velocidad se incrementa en proporción al tiempo en el caso de movimientos de caída naturales. Lo enuncia de este modo:

"Llamo movimiento igualmente o uniformemente acelerado a aquel que, a partir del reposo, va adquiriendo incrementos iguales de velocidad durante intervalos iguales de tiempo." *(Galileo, citado en Roger Corcho Orrit, 2012, p.110).*

Si expresamos esta formulación con la notación actual, donde v representa la velocidad, *a* la aceleración y t el tiempo, tenemos:

$$v = a.t.$$

Al principio aceptaba, como se hacía desde Aristóteles, que cuando un cuerpo cae va aumentando su velocidad hasta que llega un momento en el que alcanza una velocidad constante de caída. Más tarde sus experimentos le llevaron a describir el movimiento uniformemente acelerado. Dado que era muy complicado estudiar un cuerpo en caída libre, lo que hizo fue experimentar con bolas que caían por planos inclinados.

Las leyes que rigen un movimiento con aceleración constante son bastante conocidas en la actualidad. Las fórmulas fundamentales son:

$$v = v_0 + at,$$

$$s = v_o t + \frac{1}{2}(v - v_o)t,$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

No obstante, quien calculó el valor de la constante de la gravedad para caída libre fue Huygens, que lo situó en $g = 9{,}81 \ m/s^2$.

En síntesis, Galileo planteó las siguientes leyes del movimiento:

1.- *Cualquier cuerpo en movimiento sobre un plano horizontal sin rozamientos continuará moviéndose indefinidamente con la misma velocidad.*

2.- En caída libre en el vacío, todos los objetos caen uniformemente acelerados.

3.- *El movimiento de un objeto en caída libre, o rodando sobre un plano inclinado, es uniformemente acelerado, es decir, se obtienen incrementos iguales de velocidad en tiempos iguales.*

Su discípulo Torricelli, el iniciador de la hidrodinámica, desarrolló la dinámica de los *Discursos.* Demostró la igualdad de las velocidades a lo largo de diferentes planos inclinados, que partían todos de la misma altura. Otro de sus seguidores, Pierre Gassendi, realizó el experimento que consistía en lanzar una piedra desde lo alto del mástil de un barco en movimiento. Recordemos que según la intuición, la piedra debería caer alejada del mástil, pues el barco estaba en movimiento, pero comprobó que caía al mismo pie, con lo que se demostraba que el movimiento es relativo y depende del sistema en que nos encontramos.

René Descartes.

René Descartes, también estudió el movimiento, que definía así: "El movimiento no es otra cosa que la acción, por la cual un cuerpo pasa de un lugar a otro". Para él el movimiento era relativo y debía ser definido en su relación entre cuerpos:

"El movimiento es la traslación de una parte de la materia, o de un cuerpo, de la vecindad de los cuerpos que lo tocan inmediatamente, y que consideramos como un reposo, a la vecindad de otros". (Descartes, citado en José Muñoz Santoja, 2013, p. 153)

Estudió también las fuerzas que se utilizan para elevar cuerpos en el espacio, indicando que:

"La fuerza que puede levantar un peso de 100 libras a la altura de 2 pies, puede también levantar uno de 200 a la altura de 1 pie […] Esa fuerza tiene siempre dos dimensiones, es decir, el producto de un peso por la altura." (Descartes, citado en José Muñoz Santoja, 2013, p. 153)

Si en vez de peso hablamos de masa, esa fuerza definida corresponde a lo que hoy entendemos por energía potencial de un cuerpo.

Debido al rechazo absoluto del vacío, Descartes defendía que el espacio estaba lleno de porciones de materia, que interactuaban al chocar, por lo que no aceptaba la fuerza o acción a distancia. Para explicar la gravedad, por ejemplo, hablaba de la propagación de impulsos a través de una materia etérea que llenaba el espacio.

Las leyes del movimiento de Descartes eran:

1.- Un cuerpo no cambia de movimiento (o reposo) sino por choque con otro cuerpo,

2.- Cada parte de la materia tiende a moverse en línea recta, salvo choque con otros cuerpos.

3.- Cuando un cuerpo choca con otro, no puede transmitirle movimiento a menos que pierda otro tanto del suyo, ni puede privarle de él a menos que aumente el suyo en la misma proporción.

Complementaba la última ley con una serie de reglas, donde estudiaba los distintos tipos de choque. Pero como no indicaba si eran elásticos o inelásticos y no consideraba las direcciones, la mayoría no son ciertas.

Lo que defendía como *cantidad de movimiento,* el producto de la masa por la velocidad, era un número y defendía que se conservaba. Algo erróneo si no se considera la dirección de la velocidad.

Con la intención de aclarar la confusión entre choques, en 1688 la Royal Society invitó a sus socios a estudiar los problemas derivados de estas situaciones, llegándose a la conclusión de que en los choques, la cantidad de movimiento sólo se conserva si se atiende a la dirección y el sentido de las velocidades, es decir, se trabaja con su carácter vectorial, no como un escalar.

A esa invitación respondieron John Wallis, con el estudio de los choques inelásticos; Chistopher Wren, con el del choque elástico, aunque sin basarlo en una verdadera demostración , y por último Huygens, que trató el choque elástico a partir del principio de inercia, de un principio de relatividad y el postulado de que dos cuerpos iguales con velocidades iguales que chocan directamente rebotan con la misma velocidad. Su estudio sobre los choques entre cuerpos desiguales apareció póstumamente en 1700.

Huygens encontró también la forma de la ley de la fuerza centrífuga.

Isaac Newton.

Isaac Newton, también estudió los choques sin elasticidad y defendió la necesidad de fuerzas externas para crear o destruir movimiento, cambiando la dirección o la rapidez.

El matemático inglés consideraba tres fuerzas distintas:

-*Vis insita o inerte:* Es un poder de resistencia de todos los cuerpos, en cuya virtud persevera cuanto está en ellos para mantenerse en su estado actual, ya sea de reposo o movimiento uniforme en línea recta.

-*Vis impresa:* Es una acción ejercida sobre el cuerpo para cambiar su estado.

-*Vis centrípeta:* Es aquella por la cual los cuerpos son arrastrados o impelidos, o tienden de cualquier modo hacia un punto como hacia un centro.

Las leyes de Newton, aparecen en los *Principia,* al principio de la obra, en la sección básica bajo el título de *Axiomata sive Leges Motus,* el encabezamiento de Axiomas o leyes de Movimiento.

La primera ley.- "*Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas."*

En su libro *La Tradición de Investigación Newtoniana,* Marquina (2006), comenta:

"El hecho de que Newton no introdujera el término vis inertiae en el enunciado de la primera ley, ha sido muy afortunado para el desarrollo de la TI newtoniana, ya que ha permitido seguir formulando, hasta nuestros días, el planteamiento inercial sin mayores cambios conceptuales y sin entrar en aclaraciones respecto a la supuesta fuerza interna, que no se comporta, en sentido alguno, como una fuerza, lo cual, afortunadamente, pareciera ser claro incluso para Newton ya que nunca, a lo largo de los Principia, la manipula como tal."(p.195)

En el Corolario V, también de los *Principia,* que tiene una estrecha relación con la primera ley, Newton plantea:

"Los movimientos de los cuerpos incluidos en un espacio dado son idénticos entre sí, ya se encuentre ese espacio en reposo o moviéndose uniformemente en línea recta sin movimiento circular alguno." (Newton, citado en Marquina, 2006, p.198)

Al respecto Marquina (2006), escribe:

"En el enunciado de este corolario, Newton está planteando el principio de invarianza (relatividad) Galileana, según el cual los marcos de referencia inerciales son indistinguibles, como Newton reconoce al asegurar en el comentario que se tiene "una prueba clara de esto en el experimento de un barco, donde todos los movimientos acontecen del mismo modo estando en reposo o siendo movido uniformemente en línea recta",.

Este planteamiento es de la mayor importancia pues muestra claramente que, independientemente de que Newton defienda la existencia de un espacio absoluto; éste, en caso de existir, sería indistinguible de la familia de espacios inerciales que se encuentran en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme respecto a dicho espacio absoluto." (p. 198)

La segunda Ley.- *"El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza."*

Nos dice Marquina (2006):

"Es evidente que lo que Newton dice es $\overrightarrow{F} = \Delta\vec{p}$. […] De forma tal que cuando Newton se refiere a una fuerza motriz que se imprime de una vez o por grados sucesivos como varios golpes cuyo efecto sería el de un golpe único, de lo que está hablando es de una fuerza impulsiva ($\emptyset$) que actúa de forma discreta (no continua) y para la que se cumple que $\overrightarrow{\emptyset} = \Delta m\vec{v}$, mientras que para el caso de fuerzas continuas lo que se tiene es que $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$."(p. 201)

Continúa diciendo (Marquina 2006):

"En el planteamiento del segundo axioma, Newton, efectivamente está pensando en fuerzas discretas, en particular en colisiones, lo cual es evidente por lo señalado en el escolio posterior a las leyes, en él asegura que Wallis, Huygens, y Wren han empleado sus leyes en el tratamiento del problema del impacto, en el que efectivamente han usado $\vec{\emptyset} = \Delta m\vec{v}$. Sin embargo, cuando Newton ataca fuerzas continuas utiliza $\vec{F} = m\vec{a}$, como una generalización válida y evidente. Por ello, en la definición VIII, en la que se refiere a una fuerza continua (la fuerza centrípeta) habla de $\vec{F} = m\,\vec{a}$ con la mayor naturalidad. […] Es notable observar cómo Newton usa consistentemente las dos segundas leyes, para los casos discretos en los que el factor tiempo es irrelevante y los continuos en los que no lo es, pero hablando, en ambos casos, de fuerzas, sin percatarse del problema conceptual que genera." (p.202)

La tercera Ley de Newton.- *"Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes contrarias."*

De la tercera ley, Marquina (2006) plantea:

"La relevancia de la tercera ley es innegable, pues introduce la idea de interacción mutua entre cuerpos materiales como responsable de los fenómenos observables, que aunque hoy en día nos puedan parecer una obviedad, ubicada en el contexto del siglo XVII, significa una aportación extremadamente original que, le permitió a Newton arribar a la idea de gravitación universal."(p.206)

Cabe mencionar que la tercera ley contiene de forma implícita la ley de conservación del momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. Supongamos dos partículas que están sujetas únicamente a su interacción. Designaremos $\overrightarrow{F_{12}}$ la fuerza sobre la partícula de masa m_1 debida a su interacción con la partícula de masa m_2, y con $\overrightarrow{F_{21}}$ la fuerza de m_2 debida a su interacción con m_1. La ley de acción y reacción requiere que

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$

Pero por la segunda ley, las ecuaciones de movimiento de cada partícula son:

$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} = \overrightarrow{F_{12}} \qquad \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = \overrightarrow{F_{21}}$$

Ya que la tercera ley requiere que $\overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} = 0$, encontramos que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}) = \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} = 0$$

Por lo que $\vec{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$ es constante respecto al tiempo.

Capítulo 2: El relacionismo y los absolutos Newtonianos

¨…Las leyes se hallaban ocultas en el manto de la noche de la naturaleza, hasta que Dios dijo: ¡hágase Newton!; y todo fue luz”

Alexander Pope

El relacionismo y los absolutos newtonianos

En la descripción de la naturaleza del movimiento, históricamente tuvo lugar uno de los grandes debates entre los relacionistas y Newton. Siendo los relacionistas representados sobre todo por Descartes y Leibniz. En su De *gravitatione et aequipondio fluidorum* , Newton(1684) arremete contra la doctrina cartesiana, la cual, según él, se puede resumir en tres proposiciones:

1.- Que en verdad de las cosas sólo un movimiento particular conviene a cada cuerpo, el que se define como traslación de una parte de materia o de un cuerpo, de la vecindad de los cuerpos que toca inmediatamente y que se consideran como estando en reposo, a la vecindad de otros.

2.- Que, por un cuerpo transferido en su movimiento particular conforme a esta definición, puede entenderse, no sólo cualquier partícula de materia o un cuerpo compuesto de partes relativamente en reposo, sino todo lo que se transfiere a la vez, aun cuando, claro está, esto puede constar de muchas partes que tienen diferentes movimientos relativos.

3.- Que, además de este movimiento que le es particular a cada cuerpo, también pueden surgir en él otros innumerables movimientos por participación (o en tanto que es parte de otros cuerpos que tienen otros movimientos) los que, sin embargo, no son movimientos en el sentido filosófico y hablando racionalmente y conforme a la verdad de las cosas, sino sólo impropiamente y conforme al sentido común. Ese tipo de movimiento parece describirlo como la acción mediante la cual cualquier cuerpo emigra de un lugar hacia otro. (p.31)

Newton comienza su exposición con cuatro definiciones. Nos dice: "Los términos cantidad, duración y espacio son muy bien conocidos como para ser susceptibles de definirlos con otras palabras":

Definición 1.- Lugar es una parte del espacio que algo llena uniformemente (que algo llena de manera adecuada).

Definición 2.- Cuerpo es lo que llena el espacio.

Definición 3.- Reposo es permanecer en el mismo lugar.

Definición 4.- Movimiento es cambio de lugar. (p.30)

Como un primer análisis, hace una clara distinción entre su planteamiento y el de Descartes. Escribe (Newton 1684): "*Por lo demás, cuando supongo en estas definiciones que el espacio es distinto del cuerpo y cuando determino que el movimiento es con respecto a las partes de ese espacio y no con respecto a la posición de los cuerpos vecinos, en contra de los cartesianos".(p.31)*

En su discurso, Descartes asegura que, hablando con propiedad y conforme al sentido filosófico, la Tierra y los otros planetas no se mueven y quien declara que se mueven debido a su traslación con respecto a las estrellas fijas habla sin razón y sólo a la manera del vulgo. Empero, posteriormente, les atribuye, a la Tierra y los otros planetas, una tendencia a alejarse del Sol como si éste fuera un centro alrededor del cual giran y una tendencia similar, del vórtice giratorio, los mantiene a sus distancias del Sol. Así, parece contradecirse; ya que, se sigue que la tierra intenta alejarse del centro del sol debido a un movimiento relativo a las estrellas fijas. En este punto, Newton (Newton 1684) declara: *"Hay que decir, más bien, que sólo el movimiento que causa la Tierra para intentar alejarse del sol ha de declararse que es su movimiento natural y absoluto. Sus traslaciones con respecto a cuerpos externos, no son sino designaciones externas."(p. 36)*

El detalle esencial en esta controversia lo exhibe Newton (Newton 1684) al exponer que " *se sigue de la doctrina cartesiana que el movimiento puede generarse en donde no está actuando ninguna fuerza". Argumenta: "Cuando una fuerza se imprime sobre la Tierra, esto hace que sus partes intenten alejarse del centro de la revolución así causada y, por esa razón, ella es el único cuerpo propia y absolutamente movido, aún cuando, haya el mismo movimiento relativo de los cuerpos. Y, por esto, el movimiento físico y absoluto ha de referirse por consideraciones distintas a la traslación, al designarse, dicha traslación, como meramente externa". (p.36)*

Continúa su ataque contra las ideas cartesianas cuando señala (Newton 1684) : *"Ha de mostrarse que, cuando cierto movimiento ha concluido, es imposible, conforme a Descartes, asignar un lugar en el cual el cuerpo estaba al principio del movimiento; no es posible decir de dónde se ha movido el cuerpo y la razón es que, conforme a Descartes, el lugar no puede definirse o asignarse, excepto por la posición de los cuerpos circundantes y, tras la conclusión de cierto movimiento, la posición de los cuerpos circundantes ya no es la misma que era antes". Prosigue: "como es imposible señalar el lugar en el que comenzó un movimiento (esto es, el principio del espacio recorrido), pues este lugar ya no existe una vez concluido el movimiento, así que el espacio recorrido, al no tener principio, no puede tener longitud y, por tanto, puesto que la velocidad depende de la distancia recorrida en un tiempo dado, se sigue que el cuerpo moviente no puede tener velocidad, tal como lo deseaba probar". "Se concluye, sin duda alguna, que el movimiento cartesiano no es movimiento, pues no tiene velocidad, ninguna definición y no hay espacio o distancia recorrido por él.*

Así, es necesario que la definición de los lugares y, por tanto, del movimiento local, se refiera a algunas cosas inmóviles, tales como la extensión por sí sola o el espacio en tanto es visto como realmente distinto de los cuerpos". (p. 38 y p. 40)

En *De Gravitatione*, una vez terminado este largo y demoledor ataque de los conceptos cartesianos, Newton pasa a plantear sus propias ideas acerca del espacio, tiempo y movimiento absolutos.

Respecto al espacio, Newton plantea que éste se extiende infinitamente en todas las direcciones.

Para él, las partes del espacio están inmóviles (Newton 1684). *"Si se moviesen, tendría que decirse o bien que el movimiento de cada parte es una traslación de la vecindad de otras partes contiguas, tal como Descartes definió el movimiento de los cuerpos y, que esto es absurdo". (p.47)*

Conectando esta inmovilidad con la duración pues (Newton 1684) *"Más aún, la inmovilidad del espacio la ejemplificará mejor la duración, pues así como las partes de la duración derivan su individualidad de su orden, de tal manera que si (por ejemplo) ayer pudiese cambiar su lugar con hoy, y se hiciese el último de los dos, perdería su individualidad y no sería ya ayer, sino hoy; así pues, las partes del espacio derivan su carácter de su posición, de tal manera que si dos pudiesen cambiar sus posiciones, al mismo tiempo cambiarían su carácter y cada una se convertiría, numéricamente en la otra".(p.47)*

Sigue en su discurso(Newton 1684): *"El espacio es una disposición del ser en tanto que ser. Ningún ser existe o puede existir si no está, de alguna manera, relacionado al espacio". "El espacio es un efecto emanativo que surge del ser primariamente existente, porque cuando se postula algún ser, se postula el espacio. Lo mismo puede aseverarse de la duración: ambos son afecciones del ser o atributos conforme a los cuales se denomina la cantidad de existencia de cada (ser) individual con respecto a su amplitud de presencia y su perseverancia en la existencia. Así pues, la cantidad de la existencia de Dios es eterna con respecto a la duración e infinita con respecto al espacio".(p.27)*

Además(Newton 1687): *"Las posiciones, distancias y movimientos locales de los cuerpos han de referirse a las partes del espacio y esto surge de las propiedades del espacio. A eso se le puede añadir que en el espacio no hay fuerza de ningún tipo que pueda impedir, ayudar o cambiar, de cualquier manera, el movimiento de los cuerpos y, por tanto, los proyectiles describen líneas rectas con un movimiento uniforme, a menos que se encuentren con un obstáculo de una u otra fuente."(p.48)*

Este espacio es *"eterno en duración e inmutable en naturaleza y esto es porque es el efecto que emana de un ser eterno e inmutable."*

En esta parte, Newton inicia una larga digresión acerca de Dios, que muestra claramente la relación existente entre los conceptos absolutos newtonianos y su idea de Dios.

En los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, la elucidación newtoniana está construida de forma tal que abandonando el tono polémico del *De Gravitatione,* empieza a discutir los aspectos relativos al tiempo, espacio, lugar y movimiento absolutos, en ese orden.

En el escolio posterior a las definiciones, respecto al tiempo absoluto, Newton empieza señalando que éste también puede denominarse como verdadero y matemático y que *"en sí y por su propia naturaleza sin relación a nada externo fluye uniformemente, y se dice con otro nombre duración".*

En los principia, Newton empieza la discusión con el tiempo, a diferencia del *De Gravitatione* en el que el énfasis está en el espacio absoluto, y es por el hecho de que el metafísico tiempo absoluto se puede anclar en la experiencia, identificándolo con el tiempo astronómico, que no sólo no es metafísico sino que es un concepto práctico que se utiliza de manera cotidiana en los cálculos astronómicos.

El siguiente concepto que ataca es el espacio absoluto, el cual (Newton 1684) *"tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil… El espacio absoluto y el relativo son idénticos en aspecto y magnitud, pero no siempre permanecen numéricamente idénticos".(p.49)*

Continúa diciendo que en la práctica*: "usamos lugares y movimientos relativos en vez de absolutos, sin inconveniente alguno en los asuntos comunes", pero introduciendo la salvedad de que "en disquisiciones filosóficas debamos hacer abstracción de nuestros sentidos y considerar las cosas mismas, distinguiéndolas de sus medidas sensibles".*

Newton reitera su concepción, discutida con amplitud en *De Gravitatione*, de no considerar el espacio respecto a los objetos, pero agregando una limitante adicional al señalar que "puede suceder que no haya cuerpo realmente en reposo, al cual referir los lugares y movimientos"

En los Principia se puede entender con mayor claridad a qué se refiere Newton al plantear sus ideas de que pueda no existir algún cuerpo en reposo absoluto, ubicando éste en un punto que representaría el referente absoluto. En el libro III aparece la hipótesis primera, en la que señala:

“Que el centro del sistema del mundo está inmóvil” *(Newton, citado por Marquina, 2006, p.180)*

En conexión con la hipótesis primera, la proposición XI. Teorema XI, en la que afirma:

“Que el centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y todos los planetas está inmóvil”.

De manera que ese referente absoluto es, efectivamente, un punto en el que no se ubica ningún cuerpo; ese punto es, a decir de Newton, el centro de gravedad del sistema solar. Señala:

“Pues ese centro está en reposo o avanza uniformemente por una línea recta; pero si ese centro se moviera, el centro del mundo se movería también, lo que contradice la hipótesis”.

Nuevamente en el escolio, el tercer absoluto analizado por Newton es el lugar, el cual *“es la parte del espacio que un cuerpo ocupa, siendo relativo o absoluto en razón del espacio”.*

Así el lugar absoluto se refiere íntegramente al espacio.

El último absoluto es el movimiento. Newton introduce el elemento dinámico, las fuerzas, que nos permitirán distinguir los movimientos absolutos de los relativos ya que el:

“ … movimiento verdadero no es generado ni alterado sino por alguna fuerza impresa en el mismo cuerpo movido, pero el movimiento relativo puede ser generado o alterado sin fuerza alguna impresa en el cuerpo. Por su parte, el movimiento verdadero padece siempre algún cambio debido a cualquier fuerza impresa en el cuerpo que se mueve, pero el movimiento relativo no sufre necesariamente ningún cambio debido a tales fuerzas”. *(Newton, citado en Marquina, 2006, p.188)*

Con este planteamiento, Newton, a diferencia de Descartes, deja en claro la congruencia existente entre su marco de referencia absoluto y sus leyes, en particular la primera, ya que para alterar un movimiento absoluto es necesaria la aplicación de una fuerza.

De acuerdo con la concepción newtoniana, el espacio absoluto no es, meramente, un contenedor, sino que es una entidad que tiene la capacidad de entrar en contacto causal con los objetos materiales. Él plantea el caso de dos globos mantenidos a una cierta distancia mediante un hilo que los conecta. Si estos globos fuesen puestos a girar alrededor de su centro común de gravedad, se podría descubrir, mediante la tensión del hilo, *"el esfuerzo de los globos por alejarse de su eje de movimiento, y a partir de ello calcular la cantidad de sus movimientos circulares[…] De ese modo podríamos descubrir tanto la cantidad como la determinación de ese movimiento circular, incluso en una inmensidad vacía donde no hubiese nada externo o sensible con lo cual comparar a los globos".* *(Newton, citado en Marquina 2006, p. 191)*

De acuerdo con Newton *"si en ese espacio estuviesen situados cuerpos remotos que mantuvieran siempre una posición dada entre sí, como sucede con las estrellas fijas en nuestras regiones, no podríamos determinar por la traslación relativa entre esos cuerpos si el movimiento pertenece a los globos o a los cuerpos. Pero si observásemos el hilo, y si descubriésemos que su tensión era exactamente la requerida por el movimiento de los globos, podríamos inferir que el movimiento está en los globos, y que los cuerpos están en reposo; y luego, por último, por la traslación de los globos entre los cuerpos descubriríamos la determinación sus movimientos". (Newton, citado en Marquina, 2006, p. 191)*

De lo anterior, se desprende que la cantidad de movimiento circular es independiente de los cuerpos remotos siendo, de alguna manera, absoluta, ya que el movimiento responsable de las fuerzas no puede ser considerado como movimiento relativo a algún objeto natural, pero como el movimiento debe ser relativo a algo, ese algo es el espacio absoluto.

Newton plantea un tipo específico de absoluto, la aceleración absoluta, la cual es capaz de generar efectos observables.

En su libro *La tradición de investigación newtoniana*, Marquina señala:

"*Para Sklar, el planteamiento newtoniano es paradójico, pues acepta que el movimiento es con respecto a algún objeto (concepción relacional), pero como no hay objetos que puedan ser los responsables de las fuerzas que aparecen,entonces la aceleración debe ser respecto a un objeto extraordinario, sustancial, el espacio absoluto. Es decir que Newton es, al mismo tiempo, relacional y sustancial". (p.192)*

Una síntesis, que además contrasta, las ideas newtonianas y la de los relacionistas, la describe Antonio Sarmiento Galán en su libro *Gravitación* (2004). Escribe:

"Un hecho familiar en la mecánica clásica, anterior a la formulación de Einstein, era el de que las fuerzas mecánicas producen los mismos efectos sobre los cuerpos en reposo. Las leyes de movimiento de Newton habían sido formuladas de manera que fuesen las mismas para todos los sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme, incluidos los que estuviesen en reposo relativo.

Es imposible entonces, aún en principio, diseñar un experimento mecánico que permita medir velocidades absolutas (Michelson- Morley).

En la formulación de la teoría especial de la relatividad, sólo ciertos tipos de movimiento son permitidos pues la teoría únicamente relaciona sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme. El movimiento uniforme en línea recta no tiene significado absoluto alguno pues sólo medimos movimiento uniforme respecto de algún otro objeto. Sin embargo, los movimientos no uniformes como rotación y aceleración pueden medirse de manera absoluta. Podemos asegurar, por ejemplo, que la Tierra está rotando en un sentido absoluto, porque podemos detectar dicha rotación sin utilizar otros objetos (como las estrellas): basta con observar que la Tierra está achatada en los polos y ensanchada en el ecuador (evidencia concluyente de rotación).

Este contraste del movimiento no uniforme llevó a Newton a concluir en su "Principia", que el espacio tiene propiedades absolutas, las cuales se manifiestan únicamente cuando un cuerpo se mueve de manera no uniforme en dicho espacio. En lenguaje Newtoniano, la forma de la Tierra se debe a la acción de fuerzas centrífugas ejercidas sobre ella por el espacio absoluto y no por otros cuerpos (como en el caso de otros tipos de fuerza), además, el espacio absoluto no ejerce fuerza alguna sobre los cuerpos que se mueven uniformemente, de manera que tal movimiento no se puede detectar.

Este aspecto de la teoría Newtoniana se mantiene intacto en la teoría de la relatividad especial. Para acabar con el contraste entre movimiento uniforme y movimiento no uniforme (lograr que todo tipo de movimiento sea igualmente relativo), Einstein volvió a las ideas del obispo Berkeley, quien, poco después de la publicación de Principia, intentó darle un significado físico a las fuerzas centrífugas atribuyendo su existencia a la acción de las estrellas: al girar las estrellas alrededor de la tierra ejercen fuerzas que achatan los polos y ensanchan el ecuador, mientras que las estrellas estacionarias no originan fuerza alguna. Desde este punto de vista, en lugar de hablar de rotación respecto del espacio absoluto, deberíamos hablar de rotación respecto de las estrellas, es decir, respecto del resto de materia en el universo. Los contemporáneos de Berkeley, Euler por ejemplo, recibieron con sorna la proposición".(p.1)

En los siguientes capítulos trataremos con más detalle lo descrito en el párrafo anterior.

Capítulo 3: Del Espacio y el Tiempo al Espacio-Tiempo

¨Dígote modestamente la verdad. Si el hombre, ese pequeño mundo extravagante, se tiene de ordinario por un todo, yo soy una parte de aquella parte que al principio lo era todo; una parte de las tinieblas, de las cuales nació la luz, la orgullosa luz que ahora disputa su antiguo lugar, el espacio a su madre la noche. Y a pesar de todo, no lo ha conseguido, pues por mucho que se afane, se halla fuertemente adherida a los cuerpos; emana de los cuerpos, embellece a los cuerpos, y un simple cuerpo la detiene en su camino. Así, espero que no durará mucho tiempo y que con los cuerpos desaparecerá¨

Goethe

.

3.1.- La transformación de Galileo y la transformación de Lorentz

Hemos visto que para Newton, los movimientos no uniformes como rotación y aceleración pueden medirse de manera absoluta, mientras que el movimiento uniforme en línea recta no tiene significado absoluto alguno, pues sólo medimos movimiento uniforme respecto de algún otro objeto, además, el espacio no ejerce fuerza alguna sobre los cuerpos que se mueven uniformemente, de manera que tal movimiento no se puede detectar.

Esta situación es descrita por el llamado principio de relatividad de Galileo, en el cual, dos observadores se mueven uno con respecto al otro con movimiento de traslación uniforme. Por ello, un observador O ve a un observador $O^{'}$moviéndose con velocidad v, mientras que $O^{'}$ve a O moviéndose con velocidad $-v$. Si escogemos, por simplicidad, a los ejes X y $X^{'}$a lo largo de la línea de movimiento relativo y los ejes YZ e $Y^{'}Z^{'}$ paralelos entre sí, y además suponemos también que para un tiempo $t = 0$, O y $O^{'}$coinciden, entonces, las mediciones de los dos sistemas de referencia inercial están relacionados por: $\vec{r}^{'} = \vec{r} - \vec{v}t$.

O en componentes:

$$x^{'} = x - vt,$$

$$y^{'} = y,$$

$$z^{'} = z,$$

$$t^{'} = t.$$

Hemos añadido $t^{'} = t$ a las tres ecuaciones espaciales para dar énfasis al hecho de que estamos suponiendo que los dos observadores están usando el mismo tiempo; esto es, suponemos que las mediciones de tiempo son independientes del movimiento del observador.

Definida de este modo la transformación Galileana, se encuentra que la relación entre las velocidades de los dos sistemas es: $\vec{V}^{'} = \vec{V} - \vec{v}$

O en componentes:

$$V_x^{\prime} = V_x - v,$$

$$V_y^{\prime} = V_y,$$

$$V_z^{\prime} = V_z.$$

De esta forma, las aceleraciones se describen como: $\vec{a}^{\prime} = \vec{a}$

O en componentes:

$$a_x^{\prime} = a_{x,}$$

$$a_y^{\prime} = a_y,$$

$$a_z^{\prime} = a_z.$$

En otras palabras, ambos observadores miden la misma aceleración. Esto es, la aceleración de una partícula es la misma para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme. El principio de relatividad de Galileo implica que las leyes de la física no cambian su forma ante estas transformaciones.

Si bien el principio de relatividad Galileana parece perfectamente sólido, las primeras dificultades con él empezaron cuando James Clerk Maxwell elaboró, alrededor de 1860, su famosa teoría electromagnética. El primer éxito, y el más notable, de la teoría de Maxwell fue la elucidación de la naturaleza de la luz. Maxwell demostró, a partir de sus ecuaciones matemáticas, que existen ondas electromagnéticas que consisten en oscilaciones del campo electromagnético. Estas ondas fueron identificadas con la luz misma, estableciendo así, más allá de cualquier duda, la naturaleza ondulatoria de la luz, tal como lo pensaba Huygens y en contra de la opinión de Newton.

Pero ¿qué sustenta a una onda en el espacio? No quedó más recurso a Maxwell que recurrir a la existencia de un éter, una misteriosa sustancia intangible, que permea todos los cuerpos en el universo y que sirve como medio físico para transportar a las ondas electromagnéticas. Pero el problema del éter estaba relacionado con otro aspecto, enigmático, de la teoría de Maxwell: la aparente necesidad de un espacio absoluto.

Como mencionamos anteriormente, las leyes de la física deben de ser independientes de todo sistema de referencia, de acuerdo con el principio de relatividad de Galileo. Sin embargo, las leyes del electromagnetismo, tal como las planteaba Maxwell, no cumplen este principio: al pasar de un sistema de referencia a otro, las ecuaciones de Maxwell toman una forma distinta, lo que parece implicar leyes de la física diferentes. De hecho, las ecuaciones del electromagnetismo en la forma deducida por Maxwell sólo podían ser válidas en un sistema de referencia muy especial, y los físicos especularon que ése no podía ser otro que el espacio absoluto.

Así, al final del siglo XIX, cuando se suponía que el espacio, vacío de materia, estaba lleno con éter, hubo una gran discusión en lo que respecta a cómo se movían los cuerpos a través del éter y cómo afectaría este movimiento la velocidad de la luz medida desde la Tierra. Los físicos al principio habían supuesto que las vibraciones de este éter hipotético estaban relacionadas con la luz del mismo modo que las vibraciones en el aire están relacionadas con el sonido. Suponiendo al éter estacionario, encontramos que la luz se desplaza con respecto al éter con una velocidad c (c= 2,9979 X 10^8 m/s). Si la Tierra se moviera a través del éter sin alterarlo, entonces la velocidad de la luz con respecto a la Tierra debía depender de la dirección de propagación de la luz. Así, debía ser c-v para un rayo de luz que se propaga en la misma dirección del movimiento de la tierra y c+v en la dirección opuesta.

En 1881, los físicos norteamericanos Michelson y Morley iniciaron una serie de experimentos para medir la velocidad de la luz en diferentes direcciones con respecto a la Tierra. Con gran sorpresa encontraron que la velocidad de la luz era la misma en todas las direcciones. Sin embargo, la transformación Galileana indica que ningún cuerpo puede tener la misma velocidad relativa a dos observadores en movimiento uniforme relativo, y que la velocidad relativa depende de la dirección de movimiento del observador. Una explicación posible podía ser que la Tierra arrastrara al éter con ella, como arrastra a la atmósfera, y por consiguiente cerca a la superficie terrestre el éter estaría en reposo relativo con respecto a la Tierra. Esta es una explicación poco probable, ya que el arrastre del éter se manifestaría en otros fenómenos relacionados con la propagación de la luz. Tales fenómenos no se han observado nunca.

En 1905, apareció la Teoría de la Relatividad Especial de Albert Einstein que solucionaba el problema de la invariancia de la velocidad lumínica en forma drástica.

Einstein postuló, en primer lugar, que las ecuaciones de Maxwell son rigurosamente válidas en cualquier sistema inercial de referencia. Para ello, Einstein declaró que el éter simplemente no existe; por lo tanto, no existe ningún sistema de referencia privilegiado. Pero al no haber éter ¿con respecto a qué debe medirse la velocidad de la luz? La respuesta de Einstein fue drástica: la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia; después de todo, eso es lo que indica el experimento de Michelson y Morley.

Así, los principios de la relatividad especial propuestos por Einstein son:

1.- La velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia inercial.

2.- En sistemas inerciales, las leyes de la física son covariantes frente a transformaciones de Lorentz.

Bajo estas suposiciones, la transformación Galileana no es la correcta por ser incompatible con las ecuaciones de Maxwell. Además, en particular, la cuarta ecuación en $t' = t$ no puede ser correcta. Puesto que la velocidad es la distancia dividida entre el tiempo, tenemos que ajustar el tiempo al igual que la distancia, si el cociente de los dos debe ser el mismo para observadores en movimiento relativo como en el caso de la velocidad de la luz. En otras palabras, el intervalo de tiempo entre dos eventos no tiene necesariamente que ser el mismo para observadores en movimiento relativo. Por consiguiente, debemos reemplazar la transformación Galileana por otra de modo que la velocidad de la luz sea un invariante. Como en el caso de la transformación Galileana, supondremos que los observadores O y O' se mueven con velocidad relativa $\vec{v}$ y que los ejes X y X' señalan en la dirección del movimiento relativo y que los ejes YZ e $Y'Z'$ son paralelos respectivamente. Podemos también suponer que ambos observadores ajustan sus relojes de modo que $t' = t = 0$ cuando ellos coinciden.

Supongamos que para $t = 0$ se emite un destello de luz en la posición común. Después de un tiempo t el observador O notará que la luz ha llegado al punto A y escribirá $r = ct$ siendo c la velocidad de la luz. Ya que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ podemos también escribir $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$. (ecuación 1)

Similarmente, el observador O'notará que la luz llega al mismo punto A en un tiempo t', pero también con velocidad c.

Luego él escribe $r' = ct'$ o $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ (ecuación 2)

Nuestro propósito es obtener una transformación que relacione la ecuación 1 con la ecuación 2. La simetría del problema sugiere $y^{\prime} = y$ y $z^{\prime} = z$. Se propone que $x^{\prime} = k(x - vt)$, donde k es una constante a determinarse. Ya que $t^{\prime}$ es diferente, podemos también suponer que $t^{\prime} = a(t - bx)$, donde a y b son constantes a determinarse. Realizando todas estas sustituciones en la ecuación 2 tenemos:

$$k = a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{v}{c^2}$$

La nueva transformación, compatible con la invariancia de la velocidad de la luz, es entonces:

$$x^{\prime} = k(x - vt) = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y^{\prime} = y,$$

$$z^{\prime} = z,$$

$$t^{\prime} = k(t - bx) = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Este conjunto de relaciones es denominado transformación de Lorentz debido a que fue obtenida por primera vez por el físico holandés Hendrik Lorentz, alrededor de 1890, en conexión con el problema del campo electromagnético de una carga en movimiento.

Puede demostrarse que la llamada transformación inversa de Lorentz está dada por las ecuaciones:

$$x = \frac{x^{\prime} + vt^{\prime}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y = y^{\prime},$$

$$z = z^{\prime},$$

$$t = \frac{t^{\prime}+\frac{vx^{\prime}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Si recordamos las definiciones para las velocidades en los dos sistemas de referencia como $V_x = \frac{dx}{dt}$, $V_y = \frac{dy}{dt}$, $V_z = \frac{dz}{dt}$, $V_x^{\prime} = \frac{dx^{\prime}}{dt^{\prime}}$, $V_y^{\prime} = \frac{dy^{\prime}}{dt^{\prime}}$, $V_z^{\prime} = \frac{dz^{\prime}}{dt^{\prime}}$, se llega a la transformación de velocidades:

$$V_x^{\prime} = \frac{dx^{\prime}}{dt^{\prime}} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}},$$

$$V_y^{\prime} = \frac{dy^{\prime}}{dt^{\prime}} = \frac{V_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vV_x}{c^2}},$$

$$V_z^{\prime} = \frac{dz^{\prime}}{dt^{\prime}} = \frac{V_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vV_x}{c^2}},$$

3.2.-Consecuencias de la transformación de Lorentz

El factor $k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ que aparece en la transformación de Lorentz, sugiere que las longitudes de los cuerpos y los intervalos de los tiempos entre eventos dados pueden no ser los mismos cuando se miden por observadores diferentes.

1.- **Contracción de la longitud.** La longitud de un objeto puede definirse como la distancia entre sus extremos. Sin embargo, si el objeto cuya longitud se mide se encuentra en movimiento relativo con respecto a un observador, las posiciones de sus dos extremos deben ser medidas simultáneamente. Consideremos una barra en reposo relativo a $O^{\prime}$ y paralela al eje $O^{\prime}X^{\prime}$. Designando sus dos extremos por a y b, su longitud medida por $O^{\prime}$ es $L^{\prime} = x_b^{\prime} - x_a^{\prime}$. La simultaneidad no es necesaria para $O^{\prime}$ ya que él ve la barra en reposo. Sin embargo, el observador O, quien ve la barra en movimiento, debe medir las coordenadas x_a y x_b de los extremos al mismo tiempo t, obteniendo $L = x_b - x_a$. Aplicando la primera relación de la transformación de Lorentz encontramos que

$$x_a' = \frac{x_a - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

y

$$x_b' = \frac{x_b - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nótese que escribimos el mismo tiempo en ambas expresiones. Ahora, sustrayendo

$$x_b' - x_a' = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ó} \quad L = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,L'.$$

Puesto que el factor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ es menor que la unidad, tenemos una situación en la cual L es menor que L', esto es el observador O, quien ve el objeto en movimiento, mide una longitud menor que el observador O', quien ve el objeto en reposo. En otras palabras, los objetos en movimiento parecen más cortos en la dirección de movimiento.

2.- **Dilatación del tiempo.** Un intervalo de tiempo puede definirse como el tiempo que transcurre entre dos eventos, medido por un observador. Un evento es una ocurrencia específica que sucede en un punto particular del espacio y en un tiempo particular. Así, un intervalo es el tiempo que toma hacer algo: oscilar para un péndulo, girar alrededor del núcleo para un electrón, etc.

Consideremos dos eventos que ocurren en el mismo lugar x' con respecto a un observador O'. El intervalo entre estos eventos es $T' = t_b' - t_a'$. Para un observador O con respecto a quien O'se está moviendo con velocidad constante v en la dirección positiva de las X, el intervalo es $T = t_b - t_a$. Para encontrar la relación entre los tiempos en los cuales ocurren los dos eventos, registrados por ambos observadores, usamos la última de las ecuaciones de la transformación inversa de Lorentz. Esto nos da

$$t_a = \frac{t_a' + vx'/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \quad t_b = \frac{t_b' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nótese que escribimos la misma $x^{´}$ en ambas expresiones. Por consiguiente, restando t_a de t_b tenemos

$$t_b - t_a = \frac{t_b^{´} - t_a^{´}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ó} \quad T = \frac{T^{´}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ahora $T^{´}$es el intervalo de tiempo medido por un observador $O^{´}$en reposo con respecto al punto en el cual tienen lugar los eventos, y T es el intervalo de tiempo medido por un observador O relativo al cual el punto está en movimiento cuando los eventos ocurren. Esto es, el observador O ve que los eventos ocurren en dos posiciones diferentes del espacio. Puesto que el factor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ es mayor que uno, la última ecuación indica que T es mayor que $T^{´}$. Por consiguiente los procesos parecen tomar más tiempo cuando ocurren en un cuerpo en movimiento relativo a un observador que cuando el cuerpo está en reposo relativo al observador.

3.- Relatividad de la simultaneidad

Otra de las consecuencias de la invariancia de la velocidad de la luz respecto de cualquier sistema de referencia inercial es la relatividad de la simultaneidad.

Imaginemos un carro de tren viajando sobre un riel recto. Una fuente luminosa es colocada justo en medio del carro, de manera que, la luz llegará al mismo tiempo a los extremos del vagón. Así lo ve un observador en el tren. Para él, los sucesos son simultáneos. Por otro lado, un observador en reposo respecto del tren encontrará que, ya que el tren se mueve, la distancia que tiene que recorrer la luz para llegar a uno de los extremos es menor en comparación al otro. Uno de los extremos se mueve en la dirección para encontrar la luz, mientras que el otro se aleja de ella. En consecuencia, para él los sucesos no ocurrirán al mismo tiempo.

Este fenómeno se puede ver directamente de la transformación de Lorentz. Suponer que un evento A ocurre en x=0 en el tiempo t=0, y un evento B ocurre en x=a en el mismo tiempo t=0. Los dos eventos son simultáneos en el sistema S. Pero ellos no son simultáneos en $S^{´}$, ya que de acuerdo con la transformación de Lorentz, las coordenadas de A y B en $S^{´}$ son:

$x^{´} = 0$ en $t^{´} = 0$ y $x^{´} = \gamma a, t^{´} = -\gamma\,(v/c^2)\ a$, respectivamente. De acuerdo al reloj de $S^{´}$, B ocurre antes que A.

Ahora, suponer que en el tiempo t=0 el observador en S decide examinar todos los relojes en $S^{´}$. Él encontrará que ellos leen diferentes tiempos, dependiendo de su localización, ya que

$$t^{´} = -\gamma \frac{v}{c^2}\, x.$$

Aquellos a la izquierda del origen (x negativas) estarán adelante y aquellos a la derecha estarán atrás, por una cantidad que se incrementa de a acuerdo a sus distancias. Sólo el reloj en el origen lee $t^{´} = 0$. Por lo tanto, la no sincronización de los relojes en movimiento, también se sigue de las transformaciones de Lorentz. Por supuesto que desde el punto de vista de $S^{´}$, son los relojes de S los que no están sincronizados. Esto se puede ver con $t^{´}$=0 en la transformada inversa de Lorentz.

3.3.- El espacio-tiempo

Un concepto extremadamente útil en la teoría de la relatividad es el de espacio-tiempo. La idea es muy simple: si queremos describir un suceso que ocurre en cierto lugar y en cierto momento, debemos especificar no sólo las tres coordenadas espaciales sino también una cuarta coordenada, el tiempo en que ocurrió el suceso.

Al conjunto de todos los sucesos podemos entenderlo como un espacio de cuatro dimensiones: tres espaciales y una temporal. Cada punto en este espacio es un suceso. Si un suceso ocurre en un punto con coordenadas (x,y,z) en el tiempo t, tendrá coordenadas (x,y,z,ct) en el espacio-tiempo. Hemos usado como cuarta coordenada el tiempo multiplicado por c, con el fin de que la coordenada temporal también tenga unidades de distancia.

En el espacio común y corriente de tres dimensiones es posible definir la distancia entre dos puntos. En coordenadas cartesianas , por ejemplo, la distancia ente los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) es, según el teorema de Pitágoras: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Una propiedad básica de esta distancia es ser invariante, en el sentido de que una transformación de coordenadas no debe afectar el valor de la distancia entre dos puntos dados.

Si consideramos ahora a la unión del espacio tridimensional y el del tiempo como un espacio de cuatro dimensiones, cabe la pregunta de si se puede definir una distancia entre dos sucesos (x_1, y_1, z_1, ct_1) y (x_2, y_2, z_2, ct_2).

La clave es el postulado de Einstein de que la velocidad de la luz es constante en cualquier sistema de coordenadas. Considere un sistema inercial S en el cual sucede lo siguiente: del punto (x_1, y_1, z_1) se emite, en el tiempo t_1, una señal luminosa que llega al punto (x_2, y_2, z_2) en el tiempo t_2. La velocidad de la señal luminosa es:

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1}.$$

De donde

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Consideremos ahora el mismo suceso visto desde otro sistema inercial S': la señal luminosa es emitida en el punto (x_1', y_1', z_1') en el tiempo t_1' y recibida en el punto (x_2', y_2', z_2') en el tiempo t_2'. Por la invariancia de la velocidad de la luz, tenemos

$$c = \frac{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}}{t_2' - t_1'}.$$

De donde

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0.$$

Si definimos ahora la seudodistancia (al cuadrado) entre dos sucesos (x_1, y_1, z_1, ct_1) y (x_2, y_2, z_2, ct_2) como

$$S_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2.$$

Vemos que si $S_{12}^2 = 0$ en un sistema S, también $S_{12}^{'2} = 0$ en otro sistema $S^{'}$, donde, por supuesto,

$$S_{12}^{'2} = (x_2^{'} - x_1^{'})^2 + (y_2^{'} - y_1^{'})^2 + (z_2^{'} - z_1^{'})^2 - c^2(t_2^{'} - t_1^{'})^2.$$

Es así como la pseudodistancia entre dos sucesos puede considerarse invariante si su valor es cero. Si queremos que esta propiedad de invariancia persista aun cuando el valor de la seudodistancia no sea cero, tenemos que tomar la definición para la seudodistancia S_{12}^2 y postular que ésta permanece invariante al pasar de un sistema inercial a otro. Como hemos visto, este postulado es enteramente compatible con la hipótesis de que la velocidad de la luz es invariante.

Es importante notar que el término $(t_2 - t_1)$ en la definición de la seudodistancia lleva un signo negativo, en contra de lo que se podría esperar generalizando directamente el teorema de Pitágoras. El hecho de que la seudodistancia entre dos sucesos sea cero no implica que estos coincidan.

Si la separación entre dos sucesos considerados es infinitesimal, la seudodistancia entre ellas es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2.$$

3.4.- El espacio de Minkowski

El espacio-tiempo de cuatro dimensiones es un concepto matemático perfectamente bien definido como lo notó Minkowski por primera vez, poco después de que apareciera la teoría de Einstein. Lo que ahora llamamos el espacio de Minkowski es, por definición, un espacio geométrico de cuatro dimensiones en el cual las distancias entre puntos se miden según la definición de la pseudodistancia.

Es imposible representar gráficamente un espacio de cuatro dimensiones, pero si podemos descartar una de las tres dimensiones espaciales y representar sólo una o dos de ellas, dibujando el eje del tiempo como un eje vertical.

Vimos que cada punto del espacio-tiempo es un suceso. Consideremos ahora la historia de una partícula: ésta es un conjunto de sucesos que ocurren en diversos lugares del espacio. Este conjunto de sucesos es una línea en el espaciotiempo que se llama línea de universo.

La línea de universo de una partícula en reposo es una recta paralela al eje de del tiempo, mientras que la línea de universo de una partícula que se mueve con velocidad constante V a lo largo del eje X es una recta de pendiente c/V en el plano (x, ct). Una señal luminosa tiene una línea de universo que es una recta a 45° con respecto al eje ct.

Uno de los resultados básicos de la teoría de la relatividad es que ningún objeto puede viajar más rápido que la luz: la velocidad de la luz es un límite natural. Podemos notar que, para V$> c$, las transformaciones de Lorentz pierden sentido físico, pues la raíz $\sqrt{1-v^2/c^2}$ se vuelve imaginaria.

El hecho de que exista una velocidad límite en la naturaleza tiene profundas implicaciones físicas. Si ocurre un cierto suceso en algún lugar y en algún momento, ese suceso puede influir sólo sobre aquellos sucesos que ocurren después: si un tiempo t después, dentro de un radio ct. Y lo mismo para el pasado: sobre un suceso dado sólo pueden influir aquellos sucesos que, si ocurrieron un tiempo t antes, se encontraba dentro de un radio de ct.

A cada suceso E podemos asociarle lo que se llama un cono de luz: éste es el conjunto de todos los sucesos a los cuales se puede llegar desde E viajando a la velocidad de la luz (cono futuro de E), o ..

desde los cuales se puede llegar a E viajando a la velocidad de la luz (cono pasado de E).

Como nada puede viajar más rápido que la luz, el suceso E sólo podrá influir sobre los sucesos que se encuentran dentro y sobre su cono futuro, y sólo podrá ser influenciado por los sucesos que se encuentran dentro y sobre su cono pasado.

Si un suceso puede influir sobre otro a través de una señal que no viaja más rápido que la luz, se dice que esos dos sucesos están causalmente conectados. Así, todos los sucesos que ocurren fuera del cono de luz del suceso E estarán causalmente desconectados de E.

3.5.- La estructura del espacio-tiempo

1.- **Los cuadrivectores.** La transformación de Lorentz toma una simple apariencia cuando se expresa en términos de nuevas cantidades:

$$x^0 = ct \ , \ x^1 = x \ , \ x^2 = y \ , \ x^3 = z, \ \beta = \frac{v}{c} \ , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Por lo que la transformación de Lorentz se puede escribir como:

$$(x^0)' = \gamma(x^0 - \beta x^1),$$

$$(x^1)' = \gamma(x^1 - \beta x^0),$$

$$(x^2)' = x^2,$$

$$(x^3)' = x^3.$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix},$$

la cual se puede escribir como la ecuación $(x^\mu)' = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda_\nu^\mu) \ x^\nu$, donde Λ es la matriz de transformación de Lorentz (μ indica renglones y ν columnas).

A todo vector que se transforma como lo hacen las coordenadas x^μ se le llama contravariante.

Un vector se dice que es covariante V_α si su regla de transformación es

$$V_\alpha' = \sum (\Lambda^{-1})_\alpha^\beta \ V_\beta.$$

Así, un vector contravariante se escribe de la forma $V^\alpha = (V^0, \boldsymbol{V})$, mientras que uno covariante $V_\alpha = (V_0, \boldsymbol{V}) = (-V^0, \boldsymbol{V})$.

Además, se define el producto escalar entre dos vectores como

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3.$$

Regresando a la representación matricial de la transformación de Lorentz, es conveniente hacer la analogía con un espacio común de tres dimensiones para poder contrastar la importancia de la pseudodistancia definida.

Como hemos visto, en un espacio tridimensional se define la distancia de un punto (x,y,z) al origen de coordenadas como $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Si ahora definimos la matriz columna

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Resulta que la distancia l^2 es

$$l^2 = x^T x = x^2 + y^2 + z^2,$$

donde

$$x^T = (x, y, z)$$

Es la matriz transpuesta de x.

Ahora, una rotación arbitraria alrededor del origen transforma x en

$$x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la fórmula

$$x' = Rx,$$

donde R es una matriz de 3x3, llamada matriz de rotación.

Para que se conserve la distancia del origen al punto P necesitamos que

$$x^T x = x'^T x' = x^T R^T R x.$$

Y como esta ecuación debe cumplirse para cualquier vector x, entonces, forzosamente

$$R^T R = 1,$$

ésta es la condición que debe satisfacer la matriz de rotación.

Ahora para un espacio de cuatro dimensiones, definimos un vector columna x y su transpuesta x^T

$$X = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad x^T = (ct, x, y, z).$$

La seudolongitud (al cuadrado) de este vector es

$$S^2 = x^T \boldsymbol{\eta} x = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

donde hemos definido la matriz

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para tomar en cuenta que el término $(ct)^2$ en la seudolongitud aparece con un signo negativo.

Ahora, una transformación de Lorentz es una transformación lineal de coordenadas de la forma

$$x' = \Lambda x,$$

donde Λ es una matriz de 4x4.

Para que la seudolongitud no se altere, necesitamos que

$$x'^T \boldsymbol{\eta} x' = \boldsymbol{x^T \Lambda^T \eta \Lambda x} = \boldsymbol{x^T x},$$

y esta condición se cumple en general sólo si

$$\Lambda^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\eta}.$$

Esta es la generalización en el espacio-tiempo.

3.6.- El tiempo propio

El tiempo medido en un reloj es una cantidad física perfectamente bien definida, aunque no coincida con el tiempo medido desde otros sistemas. Para ver esto más detalladamente, regresamos al concepto de espacio de Minkowski y notemos que la seudodistancia al cuadrado entre dos sucesos, puede tomar valores tanto positivos como negativos. O sea $S_{12}^2 \leq 0$ 0 $S_{12}^2 > 0$

Consideremos dos sucesos que en un sistema S ocurren en el mismo lugar pero en tiempos t_1 y t_2 distintos. La seudodistancia entre esos dos sucesos será:

$$S_{12}^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2.$$

O sea, $\sqrt{-s_{12}^2/c}$ es el tiempo medido por un reloj que está fijo en S.

Si ahora definimos el tiempo propio entre dos sucesos como

$$\tau_{12} = \frac{\sqrt{-s_{12}^2}}{c}.$$

O en forma diferencial,

$$d\tau = \frac{\sqrt{-ds^2}}{c}.$$

Vemos que el tiempo así definido es invariante mediante una transformación de Lorentz y corresponde exactamente al tiempo medido, $t_2 - t_1$ o dt, en el sistema S en el que el reloj está en reposo.

En general, un observador provisto de un reloj que describe una trayectoria

r= **r**(t)

en algún sistema de referencia S tendrá velocidad $\vec{v} = d\vec{r}(t)/dt$ (no necesariamente constante) en ese sistema S; el tiempo propio medido en su reloj estará dado por

$$\tau_{12} = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{-|d\vec{r}|^2 + c^2dt^2},$$

donde el tiempo t_1 y t_2 son dos tiempos medidos en el sistema fijo S.

Ahora bien, como $d\vec{r} = \vec{v}dt$, la última ecuación toma la forma

$$\tau_{12} = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt.$$

Así, **el tiempo propio de un reloj es la seudolongitud de la línea de universo que describe ese reloj.** En el caso particular en que la velocidad v es constante, obtenemos la fórmula para el tiempo propio

$$\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,t,$$

que ya habíamos encontrado con anterioridad. Pero es importante notar que la ecuación para el tiempo propio es válida para cualquier velocidad, incluso no constante.

3.7.-Cuadrivector unitario de velocidad

Un concepto básico y muy útil en mecánica relativista es el cuadrivector de velocidad. Una partícula que se mueve de algún modo describe en el espacio de Minkowski una línea de universo. Esta línea, como toda curva, puede describirse por medio de ecuaciones paramétricas:

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau).$$

Donde $x^\alpha = (ct, x, y, z)$, y τ es un parámetro que varía de manera continua.

Es conveniente escoger como parámetro τ al tiempo propio de la línea de universo. Hay que recordar que el tiempo propio τ es un escalar, es decir, es invariante frente a transformaciones de Lorentz.

Definimos ahora

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{c\, d\tau}.$$

u^α es el vector tangente a la línea de universo y es un cuadrivector: en efecto, dx^α es un cuadrivector y dτ es un escalar; por lo tanto, frente a una transformación de Lorentz, u^αse transforma como un cuadrivector contravariante.

Veamos cuál es la relación entre las componentes de u^α y la velocidad $\vec{v}$. Tenemos

$$u^0 = \frac{dx^0}{c\, d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma,$$

$$u^1 = \frac{dx}{c\, d\tau} = \gamma \frac{dx}{c\, dt} = \gamma \frac{v_x}{c}, \text{ etc.}$$

De donde

$$u^\alpha = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c}\right).$$

O en componentes covariantes

$$u_\alpha = \left(-\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c}\right).$$

Recordar que $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ es el factor de Lorentz.

Notamos que la magnitud de u^α es

$$u^\alpha u_\alpha = -\gamma^2 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = -1,$$

por lo que u^α es un cuadrivector unitario.

También, podemos definir el cuadrivector aceleración

$$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau}.$$

Capítulo 4: La Reformulación de la Mecánica Clásica y La Dinámica en la Relatividad Especial.

¨…a saber, pues la forma de todo el universo es de lo más perfecto, y, de hecho diseñado por el creador más sabio, nada ocurriría en el mundo sin que destaque, de alguna manera, la presencia una regla máxima o mínima”

Leonhard Euler

La reformulación de la mecánica clásica y la mecánica relativista

4.1 Antecedentes

Gottfried Wilhelm Leibniz

En 1669 Leibniz estudió los trabajos de Wallis, Wren y Huygens sobre choques. Luego publicó su primera obra sobre el movimiento: *Nuevas hipótesis físicas* (1671), en el que trataba el problema del continuo, pues defendía, como los escolásticos, que la naturaleza no avanzaba mediante saltos. Tomaba el término *conatus* en el sentido de Hobbes, como una tendencia innata a continuar el movimiento en línea recta. Por eso, un cuerpo que abandona un recorrido circular lo hace a través de su tangente.

A finales de la década de los ochenta escribió *Dinámica sobre la fuerza y las leyes de los cuerpos naturales.* En la obra atacaba a Descartes planteando que no es la cantidad de movimiento lo que se conserva en el universo. Para ello ponía un ejemplo, que también incluyó en su *Discurso de Metafísica.* Descartes decía que se debía utilizar la misma fuerza para subir un cuerpo de 1 libra de peso a una altura de 4 pies que una masa de 4 a una altura de 1. Por tanto, los cuerpos A y B deberían tener la misma fuerza al caer. Aplicaba la ley de Galileo según la cual la velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la altura de caída. Según esto, al final de la caída, la velocidad de A será el doble que la de B y por tanto la cantidad de movimiento de A será la mitad que la de B, lo que contradecía el postulado de Descartes.

Leibniz defendía que lo que se conservaba era lo que hoy reconocemos como el producto de la masa por la velocidad al cuadrado (mv^2), lo que él llama *vis viva.* Esta fuerza viva es el doble de lo que hoy conocemos por energía cinética, algo que ya había defendido Huygens. Más adelante, en 1840, se plantearía la ley de la conservación de la energía tal como la consideramos, en la que se verifica que la suma de las energías potencial y cinética de un cuerpo es una constante. En la *Dinámica* planteaba sus dos leyes principales, la de la conservación de la fuerza viva y la de la continuidad del movimiento.

En 1692 escribió *Ensayo de dinámica,* en el que recogía y organizaba todas sus ideas sobre dinámica. En él hablaba de la diferencia entre fuerza estática o muerta, y fuerza cinética o viva.

Pone como ejemplo de la primera la tendencia centrífuga y la gravedad, manteniendo que en los choques la fuerza es viva, y surge de una infinidad de impresiones de la fuerza estática. La obra no se publicó hasta 1860, pero Leibniz presentó varios resúmenes en forma de artículos en *Acta Eruditorum.* Leibniz consideró por tanto la fuerza en un doble sentido. Por un lado, una fuerza pasiva o materia prima, que residía en la masa y que nunca aparecía aislada en la naturaleza. Y por otro, una segunda fuerza viva o activa, que era la que daba el movimiento. Esta segunda fuerza se dividía a su vez en dos: una fuerza primitiva, que existía en cada cuerpo en sí mismo, y una fuerza derivativa, que se consigue por el choque entre cuerpos, y que según él era la única que interviene en el movimiento.

Pierre de Fermat

La luz, para Descartes, es un impulso que se comunica por colisión entre partículas muy sutiles, como bolas de billar (prácticamente toda la física cartesiana se basa en colisiones). Como símil, Descartes hablaba del bastón de un ciego, que al chocar con algo, transmite el impulso de ese choque a la mano del ciego. La luz opera en el ojo de forma similar, siendo el bastón la sucesión de partículas que colisionan unas con otras. Su transmisión, además es instantánea.

Descartes seguía razonando que el impulso, al ser una fuerza (la fuerza cartesiana no es la misma que la fuerza newtoniana con la que estamos familiarizados), podía descomponerse vectorialmente. A partir de ello derivaba las leyes de la reflexión, que para él era como el choque de una bola de billar contra una pared inamovible (como se puede comprobar, dicho choque tiene la misma propiedad que la reflexión: el ángulo de incidencia y el de salida son iguales). De forma más polémica, Descartes derivaba la ley de la refracción (lo que hoy conocemos como ley de Snell) de la conjetura de que, al cambiar a un medio más denso, era necesario que la luz ejerciera más fuerza para poder transmitirse, contrarrestando la resistencia del medio.

El modelo de Descartes tenía un problema: en un universo de bolas de billar, si cambiar de medio es, por ejemplo, atravesar una tela muy delgada, el ángulo previsto por la bola que atraviesa dicha tela se aleja de la normal, es decir, el ángulo crece. En cambio, lo que se observa en óptica es que el ángulo decrece. Para explicar esta discrepancia, Descartes imaginó un apaño físico: una explicación ad hoc, sin ninguna base ya no digamos experimental, sino siquiera fundamentada en sus propios principios físicos.

Había un principio físico que ya se conocía desde la antigüedad: La naturaleza opta siempre por el camino más corto. Dicho principio había sido postulado específicamente para casos de reflexión por Herón de Alejandría. Fermat utilizó este principio para debatir las ideas cartesianas, pero en cambio, lo generalizaba a la refracción, añadiendo la hipótesis de que la razón entre la resistencia al paso de la luz de ambos medios determina el trayecto más corto.

Ahora bien, aunque Fermat lo planteó en dichos términos, un análisis detallado de su razonamiento revela que no estaba calculando el camino más corto. Estaba calculando, en realidad, el tiempo más corto. Fermat había cambiado el principio de Herón: no midió distancias, sino tiempos. Pero para hablar del tiempo que tarda la luz en atravesar un medio dado es obvio que hay que asumir que la velocidad de la luz es finita. Fermat derivó la ley de la refracción del principio que lleva su nombre, usando su método de máximos y mínimos.

El principio de Fermat es un ejemplo de lo que se conoce en física como principios extremales, que requieren calcular un máximo o un mínimo; en este caso, el tiempo mínimo. La formulación de la mecánica o de la óptica en términos de dichos principios son más básicos que las leyes de Newton y de una aplicación mucho mayor: el principio de mínima acción es válido tanto para la mecánica newtoniana como para la relatividad o la mecánica cuántica; lo único que cambia es la definición detallada de lo que hay que minimizar. Fermat, por tanto, estaba planteando un formalismo con un futuro inmenso.

4.2.- El formalismo Lagrangiano

Las dos grandes herramientas con que cuenta la física para describir a la naturaleza, el concepto de fuerza definido por Newton $\overrightarrow{F} = \Delta\vec{p}$ o $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$, y la vis viva de Leibniz que con el tiempo evolucionó al concepto de energía:

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

ahora son fusionadas en la síntesis de la mecánica, hecha por Lagrange, Hamilton y Jacobi en el cálculo variacional.

En forma diferencial, utilizando el principio de D´Alembert:

$$\sum_i (F_i^a - \dot{p_i}).\delta r_i = 0.$$

O en forma integral, bajo el principio de Hamilton:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q_1}, \dots, \dot{q_n}, t)\, dt = 0.$$

Ambos procedimientos conducen a la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

La ecuación de Euler-Lagrange es la versión variacional de la segunda ley de Newton. En esencia, el principio de Hamilton dice, que de todas las posibles trayectorias que tiene una partícula para ir de un punto A a un punto B, la partícula seguirá aquella que haga mínima la acción (la integral $\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$). La trayectoria que hace mínima la acción es justamente la que cumple con la ecuación de Euler-Lagrange.

Así, el momento generalizado se define como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}.$$

Y la lagrangiana del sistema es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

$$L = T - V.$$

Con la particularidad de que $T\ y\ V$ dependen de cualquier tipo de coordenadas q_i.

La ecuación de Euler-Lagrange no sólo es válida para potenciales V dependientes de la posición, como es el caso del potencial gravitacional. También los potenciales dependientes de la velocidad, como es el caso de los potenciales electromagnéticos U, la cumplen.

$$U = q\emptyset - \frac{q}{c}\,\vec{A}.\vec{v} \qquad\qquad L = T - q\emptyset + \frac{q}{c}\,\vec{A}.\,\vec{v}$$

Siendo $\vec{A}$ el potencial vectorial magnético, $\vec{v}$ la velocidad, y se cumple:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i.$$

Donde L contiene, como antes, el potencial de las fuerzas conservativas, mientras que las Q_i representan las fuerzas no derivables de un potencial.

4.3.- Leyes de conservación

El formalismo Lagrangiano es apropiado para obtener leyes de conservación físicas. En general, cada vez que el lagrangiano de un sistema es invariante frente a una cierta transformación, se tiene una cantidad conservada (teorema de Emmy Noether). Así, la invariancia frente a traslaciones en el tiempo implica que la energía se conserva. Del mismo modo, la invariancia frente a transformaciones en el espacio implica la conservación del momento.

Así, sea el lagrangiano L independiente del tiempo, es decir $L = L(q_i, \dot{q}_i)$. Entonces:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

Usando las ecuaciones de Euler –Lagrange, se tiene

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right).$$

De aquí resulta que

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] = 0.$$

La cantidad entre paréntesis es justamente el hamiltoniano H. El resultado final es que, si el lagrangiano no depende del tiempo, entonces H es una cantidad conservada; más precisamente, H es la energía del sistema.

$$H(p_i, q_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Veamos ahora el caso en el que el lagrangiano no depende de la posición espacial, es decir, L no cambia si se hace la transformación $r_i \rightarrow r_i + \delta r_i$; donde el índice i corresponde a la partícula número i. Esto implica que

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial r_i} . \delta r_i = 0,$$

siendo N el número total de partículas.

Como esta ecuación tiene que cumplirse para cualquier δr_i, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0.$$

Pero las ecuaciones de Euler –Lagrange implican entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) = 0,$$

y la cantidad entre paréntesis es la suma de los momentos de todas las partículas,

$$\sum_{i=1}^{N} P_{i,}$$

que es una cantidad conservada si el lagrangiano no depende de una posición particular en el espacio.

4.4.- Formalismo Hamiltoniano

Para el Hamiltoniano definido por la ecuación

$$H(p.q,t) = \sum \dot{q_i}\ p_i - L(q,\dot{q},t),$$

su diferencial viene dada por

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\ dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Pero también de su definición se puede obtener

$$dH = \sum \dot{q}_i \ dp_i + \sum p_i \, d\dot{q}_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ d\dot{q}_i - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \ dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} \ dt.$$

Los términos en $d\dot{q}_i$ se anulan como consecuencia de la definición de momento generalizado y de la ecuación de Lagrange se sigue que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

Por lo que se tiene

$$dH = \sum \dot{q}_i \ dp_i - \sum \dot{p}_i \, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} \ dt.$$

Haciendo la comparación entre las dos diferenciales de H, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Las dos primeras ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones canónicas de Hamilton; constituyen un sistema de 2n ecuaciones de primer orden que reemplazan a las ecuaciones de Lagrange. En principio, la primera etapa para resolver los problemas mecánicos mediante esta formulación canónica consiste en expresar la lagrangiana L como $L(q, \dot{q}, t)$.

A continuación se obtienen los momentos canónicos y con ellos se forma la Hamiltoniana H y finalmente se sustituye H en las ecuaciones canónicas de Hamilton, con todo lo cual se obtienen las ecuaciones de movimiento, que son de primer orden.

En general, una variable dinámica f es función de las q_i y las p_i y posiblemente del tiempo, $f = f(q_i, p_i, t)$; por ejemplo, el hamiltoniano y las propias coordenadas generalizadas son variables dinámicas. Para estudiar la evolución temporal de la variable dinámica genérica f, la derivamos con respecto al tiempo, para obtener

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right).$$

Ésta es una expresión matemática, que no contiene información física alguna; sin embargo, podemos transformarla en una ley dinámica introduciendo en ella las ecuaciones canónicas del movimiento o ecuaciones de Hamilton, que son

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Por lo que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right].$$

Para escribir este resultado en forma compacta introducimos el paréntesis de Poisson $[f, g]$ de las variables f y g, definido como sigue:

$$[f, g] = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right].$$

Así escribimos finalmente

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H].$$

Ésta es la ecuación de evolución de la variable dinámica arbitraria f; toda la física del sistema está contenida en esta expresión, por lo que podemos elevarla a la categoría de postulado dinámico, es decir, de ley fundamental de movimiento. Por estar escrita en términos de cualquier conjunto apropiado de parejas de variables canónicas $\{q_i, p_i\}$, ésta es invariante frente a las llamadas transformaciones canónicas.

Un caso particular de mucha importancia de la última ecuación se obtiene cuando f no depende explícitamente del tiempo:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = [f, H].$$

Esta ecuación contiene como caso particular las ecuaciones de Hamilton, evidentemente; para obtenerlas, basta tomar primero $f = q_i$ y después $f = p_i$:

$$\dot{q}_\imath = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H], \qquad \dot{p}_\imath = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H].$$

Ya que

$$[q_i, H] = \sum_k \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right] = \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta_{ik} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

y una expresión similar para $[p_i, H]$.

Sea ahora f una integral (o constante) de movimiento; por definición, tendremos que $\dot{f} = 0$ y por lo tanto sigue que su paréntesis de Poisson con el hamiltoniano se anula: $[f, H] = 0$. Vemos que si el paréntesis de Poisson del hamiltoniano de una variable dinámica que no depende explícitamente del tiempo se anula, entonces esta variable es una integral de movimiento. Como para toda $f, [f, f] = 0$, tendremos en particular que $[H, H] = 0$. Luego si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, entonces es constante; esta constante es precisamente la energía del sistema.

4.5.- De la dinámica clásica a la dinámica relativista

Recordando que ya hemos visto en el capítulo anterior la estructura del espacio de Minkowski, así como algunos detalles de su cinemática, ahora generalizaremos las condiciones dinámicas a un espacio- tiempo cuadridimensional.

Vamos a considerar el caso de una partícula libre, es decir, una partícula que se mueve sin la influencia de las fuerzas externas. Este caso es casi trivial en mecánica clásica: el lagrangiano de la partícula libre (de masa m y velocidad v) es

$$L = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Y la acción correspondiente se define como

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt.$$

Sin embargo, la transición al caso relativista ya no es tan trivial. En efecto, la acción debe ser necesariamente un escalar, pues, de lo contrario, podría ser un mínimo para un observador, pero no para otro. La condición de que la acción sea un escalar frente a transformaciones de Lorentz impone restricciones muy fuertes.

Para una partícula que se mueve libremente, el único escalar que se puede construir con sus variables es el tiempo propio τ. Esto implica que la acción debe tener la forma

$$A = \rho \int_{t_i}^{t_2} d\tau.$$

Donde $\propto$ es cierta constante. Esta forma de la acción garantiza que sea la misma en cualquier sistema de coordenadas.

Ahora bien, ¿cuál es la relación entre esta acción relativista y la acción clásica? Para elucidar esto, recordemos que

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, dt.$$

Así que, comparando con la acción clásica, resulta que el lagrangiano es

$$L = \propto \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Lo cual se reduce, en el límite no relativista, a

$$L \approx \propto \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Más términos de orden $\propto v^4/c^4$ que podemos ignorar.

Si ahora ponemos $\propto = -mc^2$, obtenemos

$$L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}\, mv^2.$$

Que es justamente el lagrangiano clásico, excepto por el término constante -mc^2. Pero esta constante es irrelevante, pues no entra en las ecuaciones de Euler – Lagrange, justamente por ser constante.

En resumen, podemos afirmar que el lagrangiano relativista de una partícula libre es

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Que se reduce al caso clásico, excepto por una constante irrelevante. Este lagrangiano es el único que garantiza que la acción sea invariante frente a transformaciones de Lorentz.

A partir de este lagrangiano, es fácil calcular el momento generalizado de la partícula. Se encuentra que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

O sea, el momento relativista es

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v},$$

que difiere del momento clásico por el factor $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Del mismo modo, el hamiltoniano resulta ser

$$H = \vec{p}.\vec{v} - L = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2.},$$

que es igual a la energía. Esta energía puede escribirse en función de la velocidad, y resulta ser

$$E = mc^2\gamma,$$

que es una cantidad conservada.

Esta ecuación para la energía implica que, incluso si la partícula está en reposo, posee una energía

$$E = mc^2.$$

Y esta es la famosa fórmula de Einstein que relaciona la masa con la energía. En su libro "*Relatividad especial para estudiantes de física",* Hacyan *(1995)*, comenta:

"Hay que recordar, sin embargo, que la energía siempre se mide con respecto a algún valor que se escoge por conveniencia. Estrictamente hablando, esta fórmula sólo pone de manifiesto que existe un valor natural, mc^2, para la energía de un cuerpo masivo. Einstein intuyó que existe una equivalencia entre masa y energía, y que, en principio, una puede transformarse en la otra. Esto es un hecho experimental que se ha verificado plenamente, y que encaja perfectamente en la teoría de la relatividad, tal como la hemos expuesto hasta aquí.

También mencionaremos que, $m\gamma$ puede interpretarse como la masa de un cuerpo en movimiento, la cual difiere de su masa en reposo por un factor γ. Algunas veces, se dice que la masa de un cuerpo aumenta si se mueve. Esta interpretación es válida, pero es más una cuestión de definición de la masa que un hecho físico.

La energía en reposo no es un simple concepto matemático. Uno de los hechos fundamentales de la física moderna es que, bajo condiciones adecuadas, la masa puede transformarse en energía y viceversa. La liberación de enormes cantidades de energía por reacciones nucleares es un ejemplo bien conocido."

4.6.- Cuadrivectores de momento, energía y de fuerza

Volvamos a nuestra definición de momento relativista: $\vec{p}$ es un vector en el espacio de tres dimensiones, pero en la teoría de la relatividad es más conveniente trabajar con cuadrivectores. Si recordamos nuestra definición del cuadrivector de velocidad u^α y ahora definimos el cuadrivector de momento como

$$p^\alpha = mc\, u^\alpha.$$

Tenemos que

$$p^\alpha = (mc\gamma, m\vec{v}\gamma).$$

Las componentes espaciales de este cuadrivector son, precisamente, las componentes del momento $\vec{p}$. Además, resulta que la componente temporal 0 es la masa en movimiento multiplicada por $c\gamma$, o sea, la energía total dividida por c. Tenemos así:

$$p^{\alpha} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right).$$

En la teoría de la relatividad, la energía y el momento forman un cuadrivector. La magnitud de p^{α} es

$$p_{\alpha}p^{\alpha} = -(mc)^2,$$

que es un escalar constante.

De la ecuación para la energía $E = mc^2\gamma$, se ve que la energía necesaria para que una partícula alcance la velocidad de la luz es infinita. Esto implica que, según la teoría de la relatividad, ninguna partícula puede viajar a la velocidad de la luz. La única excepción las constituyen las partículas cuya masa en reposo es nula: el fotón y posiblemente, el neutrino. La velocidad de tales partículas es siempre c.

De la definición de E y $\vec{p}$ resulta que

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\,\vec{v}.$$

Esta fórmula es muy útil, ya que es válida incluso para partículas sin masa en reposo.

Por último, también podemos definir el cuadrivector de la fuerza, como

$$g^{\alpha} = \frac{dp^{\alpha}}{d\tau}.$$

Cuyas componentes son

$$g^{\alpha} = \left(\gamma\vec{f}.\frac{\vec{v}}{c}, \gamma\vec{f}\right).$$

Donde $\vec{f} = d\vec{p}/dt$

Vemos que los cuadrivectores de velocidad u^α, de momento y energía p^α, y de fuerza g^α, por ser precisamente, cuadrivectores, se transforman igual que las coordenadas x^α bajo transformaciones de Lorentz, es decir, tienen la estructura

$$x'^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}.$$

En particular para el momento y la energía la transformación, resulta ser

$$p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$p'_y = p_{y,}$$

$$p'_z = p_z,$$

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

El punto que queremos resaltar es que, en la mecánica newtoniana, como hemos visto, el movimiento uniforme en línea recta no tiene significado absoluto pues sólo medimos movimiento uniforme respecto de algún otro objeto. Sin embargo, los movimientos no uniformes como rotación y aceleración pueden medirse de manera absoluta.

Este aspecto de la teoría newtoniana se mantiene intacto en la teoría de la relatividad especial.

Pues como se puede ver de la definición del cuadrivector de fuerza $g^\alpha = (\gamma\vec{f}.\vec{v}/c\,,\gamma\vec{f})$, aún en un sistema de referencia inercial en reposo, es decir, con $\vec{v} = 0$, se mantiene la componente espacial de la fuerza $\vec{f} = d\vec{p}/dt$, es decir $g^\alpha = (0,\vec{f})$, con el momento relativista definido como $\vec{p} = m\vec{v}\gamma$.

4.7.- Formulación Lagrangiana covariante

Ya hemos visto que uno de los postulados de la relatividad especial es la invariancia de la velocidad de la luz para cualquier sistema de referencia inercial. Esta condición, generaliza la norma del nuevo espacio de cuatro dimensiones o espacio-tiempo y además, nos permite definir el importantísimo concepto de tiempo propio.

El segundo postulado de la relatividad especial, demanda que: **En sistemas inerciales, las leyes de la física son covariantes frente a transformaciones de Lorentz.**

Esto se logra, sustituyendo el tiempo t por el invariante tiempo propio τ, además de las coordenadas cartesianas por los cuadrivectores de espacio y tiempo. Lo mismo aplica para la velocidad y el cuadrivector de velocidad.

Así, el principio de Hamilton clásico:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q_1}, \dots, \dot{q_n}, t)\, dt = 0,$$

se puede expresar en forma covariante como:

$$\delta I = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L'(x^\nu, u^\nu, \tau) d\tau = 0.$$

Evidentemente, las ecuaciones de Euler-Lagrange para una sola partícula, deducidas a partir del principio variacional covariante, son:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L'}{\partial u^\nu} - \frac{\partial L'}{\partial x^\nu} = 0.$$

El lagrangiano de una partícula libre debe cumplir

$$\frac{d}{d\tau} m u^\nu = 0.$$

Ya que en la expresión no relativista es $L = \frac{1}{2}mv^2$, la lagrangiana covariante es

$$L' = \frac{1}{2}\, m\, u^{\nu} u^{\nu}.$$

En esta forma, se tiene que

$$\frac{\partial L'}{\partial x^{\nu}} = 0, \qquad\qquad \frac{\partial L'}{\partial u^{\nu}} = mu^{\nu} = p^{\nu}.$$

Si las fuerzas que actúan sobre la partícula son de origen electromagnético, la lagrangiana invariante y los momentos canónicos son

$$L' = \frac{1}{2}\, mu^{\nu} u^{\nu} + \frac{q}{c} u^{\nu} A^{\nu},$$

$$p^{\nu} = \frac{\partial L'}{\partial u^{\nu}} = mu^{\nu} + \frac{q}{c} A^{\nu},$$

por lo que las ecuaciones de Euler –Lagrange se escribirán ahora

$$\frac{d}{d\tau}\left(mu^{\nu} + \frac{q}{c}A^{\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{q}{c}u^{\nu}A^{\nu}\right) = 0,$$

donde $A^{\nu} = (\emptyset, \vec{A})$ es el cuadrivector potencial.

En el apéndice 3 se demuestra que las ecuaciones de Maxwell también son covariantes frente a las transformaciones de Lorentz.

Capítulo 5: Sistemas de Referencia Acelerados: La Gravitación y la Relatividad General.

¨…sí, a esta idea vivo entregado por completo; es el fin supremo de la sabiduría: sólo merece la libertad, lo mismo que la vida, quién se ve obligado a ganarlas todos los días[…]. Hallarme en un suelo libre en compañía de un pueblo también libre. Entonces podría decir al fugaz momento: ¡detente, pues; eres tan bello!¨

Goethe

La gravitación

5.1.- Antecedentes

Como ya hemos mencionado, los primeros indicios en la descripción del movimiento de los astros, se dan desde la antigüedad en Egipto y Mesopotamia. Sin duda, fueron los griegos los que le dieron un impulso definitivo a la astronomía. Desde la visión de Aristóteles y el Almagesto de Ptolomeo, hasta llegar a la época del Renacimiento, donde nos encontramos con los trabajos de Copérnico, Tycho Brahe, Kepler, Galileo y, por supuesto, Newton.

En los *Principia,* Newton realiza la primera gran síntesis en la historia de la física: La de las leyes del movimiento (las tres leyes de Newton) y la de la fuerza de la gravitación universal. Del Apéndice 1, hacemos referencia a la estructura de la gravitación en palabras del propio Newton:

"Ya hemos probado antes que todos los planetas gravitan unos hacia otros, y también que la fuerza de gravedad hacia cada uno de ellos, considerada particularmente, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro del planeta. De donde se sigue (por la proposición LXIX, libro I, y sus corolarios) que la gravedad que tiende hacia todos los planetas es proporcional a la materia que éstos contienen".

Es decir:

$$\vec{F} \propto \frac{m_1\, m_{2.}}{r^2}$$

La difusión de los *Principia* generó la admiración del mundo científico hacia Newton; pero también las críticas, sobre todo de los abanderados del mecanicismo. Estos sostenían que era absurdo que la gravedad fuese una fuerza que actuara a distancia, sin necesidad de que los cuerpos estuvieran en contacto.
Son muchas las veces que Newton expresó su escepticismo sobre la acción a distancia, incluso en el vacío, de la gravedad, insistiendo en que lo que le interesaba no era la esencia de la gravedad sino sus efectos. Para ilustrar el tema, citamos aquí una de esas ocasiones que se remonta al año 1693, extraída de una carta que Newton envió a Richard Bentley:

“Es inconcebible que la materia bruta inanimada opere y afecte –sin la mediación de algo más que no sea material- sobre otra materia sin contacto mutuo, como debería ser si la gravitación (en el sentido de Epicuro) fuera esencial e inherente a ella. Y esta es una de las razones por las que expresé mi deseo de que usted no me adscribiese a mí la gravedad innata. Que la gravedad sea innata, inherente y esencial a la materia, de manera que un cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia a través del vacío sin que interceda algo más mediante lo cual su acción o fuerza pueda ser trasmitida de uno a otro, me parece un absurdo tan grande que no creo que pueda caer jamás en él ningún hombre que tenga la facultad y pensamientos de alguna competencia en asuntos filosóficos. La gravedad debe ser causada por un agente actuando de manera constante de acuerdo con ciertas leyes, pero si este agente es material o inmaterial es cuestión que Yo he dejado a la consideración de mis lectores”. (Newton, citado en Antonio Durán Guardeño, 2012)

5.2.- La Relatividad General

“El problema de la gravitación me convirtió en un racionalista creyente, es decir, en alguien que busca la única fuente confiable de la verdad en la simplicidad matemática”

Einstein.

La estrella polar que guió a Einstein a lo largo de su ardua travesía hacia la relatividad general (que duró casi ocho años marcados por la incertidumbre) se encendió en el mes de Noviembre de 1907. Más tarde la calificaría como la idea más feliz de su vida. Una anécdota sitúa su origen en la caída de un pintor desde lo alto de un andamio. Al interesarse Einstein por su estado, el hombre le contó que por un momento de su descenso, durante un brevísimo instante, había sentido que flotaba en el aire. “Una persona en caída libre (recordaría años más tarde) no sentirá su propio peso. Me quedé sobrecogido. Esa idea tan simple me dejó una profunda huella y me impulsó hacia la teoría de la gravitación”. La historia por desentrañar la gravedad escribía así un nuevo capítulo de su particular mitología, protagonizada por tres físicos legendarios. Primero Galileo había dejado caer una bola de madera y otra de plomo desde lo alto de la torre inclinada de Pisa. Después, vino Newton con una manzana y, por fin, se incorporó el accidente laboral de un pintor de Einstein. Casi con seguridad, ninguno de los tres episodios sucedió en realidad.

En el capítulo 2, donde describimos brevemente el debate entre Newton y los relacionistas, expusimos las ideas que hay detrás de los absolutos newtonianos: Espacio, Tiempo y movimiento. Recordemos también, las ideas del obispo de Berkeley quien, poco después de la publicación de los *Principia*, intentó darle un significado físico a las fuerzas centrífugas atribuyendo su existencia a la acción de las estrellas: al girar las estrellas alrededor de la Tierra ejercen fuerzas que achatan los polos y ensanchan el ecuador, mientras que las estrellas estacionarias no originan fuerza alguna. Desde este punto de vista, en lugar de hablar de rotación respecto del espacio absoluto (como Newton), deberíamos hablar de rotación respecto de las estrellas, es decir, respecto del resto de materia del universo.

Ernst Mach revivió la misma idea. La influencia de Mach sobre Einstein fue determinante, éste último acuñó el nombre de principio de Mach para la idea de que los objetos distantes determinan el estado local de aceleración cero y por ello, juegan un papel fundamental en la dinámica local.

La sugerencia de Einstein consiste en que las fuerzas centrífugas son de hecho fuerzas gravitacionales debidas al sistema rotante de las estrellas.

En su libro *Gravitación,* Sarmiento Galán (2004), escribe:

"En lenguaje Einsteniano, un observador dentro de una caja cerrada que se encuentra en reposo sobre la superficie de la Tierra, sentirá la atracción gravitacional terrestre y encontrará que objetos de diferente masa caen con la misma rapidez. Las mismas experiencias tendrá si, lejos de la gravedad terrestre, la caja se encuentra propulsada por un cohete, pues, si bien para un observador en el exterior los objetos no están acelerados (y ninguna fuerza actúa sobre ellos) sino es el observador en la caja quien se aleja de los mismos, para el observador en la caja son los objetos los que se aceleran y caen con la misma rapidez, ya que ésta es igual pero opuesta a la aceleración del observador en la caja (que, a su vez, es igual y opuesta a la atracción terrestre).

El observador en la caja no puede, entonces, decir si se encuentra en reposo sobre la Tierra o en el espacio exterior y propulsado por un cohete". (p.3)

Einstein consideró que ambas situaciones eran exactamente iguales en todos los aspectos físicos y que no se podían diferenciar mediante algún fenómeno físico; esta afirmación constituye el llamado ***Principio de equivalencia.***

Continúa diciendo Sarmiento Galán (2004):

"Por audaz que parezca el principio, es fácilmente explicable en términos de la acción gravitacional de estrellas aceleradas sobre objetos locales. La idea es igualmente aplicable a estrellas rotando alrededor de la Tierra que a estrellas aceleradas en línea recta. Cuando un observador es acelerado por un cohete verá que las estrellas son las que se aceleran en dirección opuesta y que actúan gravitacionalmente sobre él. De manera que no es sorprendente que todos los procesos físicos en su alrededor ocurran en la misma manera que cuando la atracción terrestre es la que actúa. Un campo gravitacional es igual a otro.

De una manera similar, si la caja estuviera cayendo libremente bajo la acción gravitacional, el hombre en ella podría pensar que se encontraba en el espacio exterior y que ninguna fuerza actuaba sobre él. Alternativamente cuando va en caída libre encuentra que la gravitación terrestre se cancela exactamente por los efectos gravitacionales de las estrellas que, aceleradas, lo pasan. En otras palabras, en ninguno de los dos casos existen fuerzas actuando sobre él, y por ello tampoco es sorprendente que no pueda encontrar diferencia alguna. Este es un problema familiar para los astronautas, quien viven en condiciones donde la atracción gravitacional está ausente."(p.4)

Así, pues, en la teoría de Newton, los planetas, por ejemplo, permanecen en su órbita respecto del sol, porque debido a su movimiento generan una fuerza centrífuga que contrarresta a la acción gravitacional del mismo sol. Mientras que en la visión de Einstein, las fuerzas centrífugas son de hecho fuerzas gravitacionales debidas a las estrellas rotantes. Nuevamente, dichas fuerzas gravitacionales cancelan la acción de la fuerza gravitacional del sol, por lo que los planetas en órbita o en caída libre se encuentran en un estado de gravedad cero, es decir, no sienten fuerza gravitacional alguna. Se puede pensar, que la órbita o trayectoria de los planetas es la resultante de su acción gravitacional con el universo. En principio, uno podría suponer que las estrellas más distantes (a miles de años luz) tendrían que contribuir con una fuerza gravitacional despreciable, pero el hecho de que sean tantas contribuye de forma neta con una fuerza gravitacional considerable. Einstein demostró en algunos cálculos, que son de hecho las que más determinan el estado local de gravedad cero.

Veremos a continuación que el principio de equivalencia tiene su fundamento en la igualdad entre la masa inercial y la masa gravitacional. Principio demostrado por Newton, Huygens y Bessel, entre otros.

Considérese un sistema de N partículas que se mueven a velocidades no relativistas bajo la influencia de ciertas fuerzas $\vec{F}\,(\overrightarrow{r_n} - \overrightarrow{r_m})$ (fuerzas que dependen de la separación entre partículas) y bajo la influencia de un campo gravitacional externo $\vec{g}$. Las N ecuaciones de movimiento son:

$$m_N \frac{d^2\overrightarrow{r_N}}{dt^2} = m_N\vec{g} + \sum_M \vec{F}\,(\overrightarrow{r_N} - \overrightarrow{r_M}).$$

Una para cada partícula. Realicemos la transformación (no Galileana) dada por

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}'} = \vec{\boldsymbol{r}} - \frac{1}{2}\,\vec{g}t^2, \qquad\qquad t' = t.$$

Para obtener

$$m_N \frac{d^2}{dt'^2}\left(\overrightarrow{r'_N} + \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t'^2\right) = m_N\vec{g} + \sum_M \vec{F}\,\left(\overrightarrow{r'_N} + \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t'^2 - \overrightarrow{r'_M} - \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t'^2\right),$$

$$m_N \frac{d^2\,\overrightarrow{r'_N}}{dt'^2} + m_N\vec{g} = m_N\vec{g} + \sum_M \vec{F}\,\left(\overrightarrow{r'_N} - \overrightarrow{r'_M}\right).$$

Es decir, el campo gravitacional $\vec{g}$ se cancela por una fuerza inercial. Por lo tanto, el observador O (en el sistema $\vec{r}, t$) y su amigo O' en caída libre ($\overrightarrow{r'}, t$) no detectarán diferencia alguna en las leyes de la mecánica, la única diferencia será que O dirá que siente un campo gravitacional mientras que O' dirá que no lo siente.

Si $\vec{g}$ dependiese de $\vec{r}$ o de t (campo gravitacional inhomogéneo o no estacionario) no se hubiera podido eliminar mediante la introducción de una fuerza inercial. Por ejemplo: la Tierra está en caída libre alrededor del Sol y, aun cuando prácticamente no sentimos el campo gravitacional solar, la pequeñísima inhomogeneidad en dicho campo (1 parte en 6000 entre medio día y media noche) es suficiente para originar las impresionantes mareas en los océanos. Aún dentro del elevador en caída libre podríamos, en principio, detectar el campo terrestre pues los objetos caerían radialmente hacia el centro de la Tierra y se irían aproximando entre sí a medida que el elevador descendiese.

Si bien, un campo gravitacional inhomogéneo o no estacionario no puede ser cancelado por fuerzas inerciales, podríamos pensar, que dicho campo gravitacional se le consideraría como constante en una primera aproximación dentro de algún intervalo. De modo similar como en mecánica clásica, los fenómenos no lineales, se les puede considerar como lineales en algún intervalo. Aceptando esta aproximación, podemos establecer, que para un cierto campo gravitacional dado, siempre es posible encontrar una región o una vecindad en el espacio-tiempo, tal que los efectos de la gravitación son nulos. Es decir, encontrar un sistema de referencia inercial, donde las leyes de la relatividad especial sigan siendo válidas en ausencia de gravitación.

Einstein, encontró que sus ideas podían ser representadas matemáticamente, utilizando el formalismo que Gauss empleó para describir las superficies curvas y los sistemas localmente cartesianos. La analogía es inmediata. Gauss entendió que las propiedades de una curva son descritas por la relación que existe entre un sistema coordenado cartesiano y un sistema de coordenadas curvo. Dicha relación es dada por las derivadas $\partial\xi^{\alpha}/\partial x^{\mu}$, de la transformación $x \rightarrow \boldsymbol{\xi}$**.** En el caso del principio de equivalencia se necesita, de igual forma, una transformación de un sistema localmente inercial de coordenadas ξ^{α}a un sistema de coordenadas acelerado x^{μ}.

Así pues, consideremos una partícula que se mueve libremente bajo la influencia de fuerzas puramente gravitacionales. De acuerdo al principio de equivalencia, existe un sistema de coordenadas en caída libre en el que la ecuación de movimiento de la partícula es la de una línea recta en el espaciotiempo

$$\frac{d^2\xi^{\alpha}}{d\tau^2} = 0.$$

Donde $d\tau$ denota al intervalo de tiempo propio

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^{\alpha}\, d\xi^{\beta}.$$

Supongamos que ahora, utilizamos cualquier otro sistema de coordenadas x^{μ} (un sistema Cartesiano en reposo respecto del laboratorio, o un sistema curvilíneo, o uno acelerado, o rotando, o el que se quiera). Las coordenadas ξ^{α} son funciones de las x^{μ} por lo que podemos escribir

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right) = \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}.$$

Que al multiplicarse por $\partial x^{\lambda}/\partial \xi^{\alpha}$ y usando la regla del producto

$$\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} = \delta_{\mu}^{\lambda},$$

da como resultado

$$\boldsymbol{0 = \frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}}, \qquad (\boldsymbol{Ecuación\ de\ caída\ libre}),$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ es la conexión afín definida mediante

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}.$$

El tiempo propio puede también expresarse en un sistema arbitrario de coordenadas

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu},$$

o bien

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu},$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico definido por

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}.$$

Así pues, el campo que determina la fuerza gravitacional actuando sobre una partícula libre en un sistema no inercial es $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ y el intervalo de tiempo propio entre dos eventos separados infinitesimalmente está determinado por $g_{\mu\nu}$. Se puede demostrar que $g_{\mu\nu}$ también es un potencial gravitacional, es decir, que sus derivadas determinan al campo $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$.

Es decir, se cumple la relación

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right).$$

El lado derecho de esta última ecuación recibe ocasionalmente el nombre de símbolo de Christoffel y se denota mediante $\{{}^{\sigma}_{\lambda}\mu\}$.

Es pues el principio de equivalencia, la igualdad entre la gravitación y la aceleración, la que le permitió a Einstein deducir la ecuación de caída libre en términos de la conexión afín. Dicha ecuación contiene la generalización de la ley de la gravitación universal de Newton, haciéndola compatible con los postulados de la teoría de la relatividad.

La teoría de la relatividad especial, en donde se tienen sistemas de referencia inerciales, no modifica las leyes del electromagnetismo establecidas; de hecho, las ecuaciones de Maxwell son covariantes frente a transformaciones de Lorentz (Apéndice 3). Aunque el contenido físico no cambia, la teoría de la relatividad sí nos permite hacer una nueva interpretación de los fenómenos magnéticos. Es decir, los fenómenos magnéticos se pueden considerar como fenómenos relativistas de los fenómenos electrostáticos. En otras palabras, los fenómenos magnéticos surgen como consecuencia del movimiento relativo de las cargas estáticas.

Bajo esta concepción, en la teoría de la relatividad general, con sistemas de referencia acelerados, los efectos gravitacionales también pueden ser considerados como fenómenos relativistas de los fenómenos inerciales de la relatividad especial. En este sentido, la teoría de la relatividad general, es la versión dinámica de la gravitación de la teoría estática de Newton.

Por ser una teoría que incorpora los fundamentos relativistas, como la velocidad límite de la propagación de los efectos electromagnéticos (la velocidad de la luz), la teoría de la gravitación de Einstein, en principio, podría darnos una explicación acerca de la naturaleza de la propagación de los fenómenos gravitacionales. En efecto, este es el caso, y en el siguiente capítulo tocaremos el tema.

Como ya hemos mencionado, el punto esencial en la ecuación de caída libre es, que al menos en una pequeña vecindad del espacio-tiempo, podemos considerar como nulos los efectos de la gravitación. De inmediato, uno puede preguntarse por el sentido contrario: ¿Qué efectos físicos puede haber en un marco de referencia, cuyas dimensiones sean mucho mayores, no sólo que los sistemas inerciales sino también que los sistemas acelerados, en donde la aceleración es constante? Es decir, ¿Los sistemas de referencia acelerados, son a su vez, una aproximación de marcos de referencia donde la aceleración no es constante?

La ecuación de caída libre describe la dinámica de los fenómenos gravitacionales en dimensiones comparables, por ejemplo, al sistema solar.

Las órbitas de los planetas están en caída libre. ¿Pero para dimensiones mayores al sistema solar, es correcta la ecuación de caída libre? En principio, uno podría pensar, que le estructura de las ecuaciones a escala del universo tendría la forma:

$$0 = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + fR^\lambda_{\mu\nu k} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} S^k.$$

Los dos primeros términos son precisamente la ecuación de caída libre, mientras que en el tercero, aparece un nuevo tensor $R^\lambda_{\mu\nu k}$, llamado tensor de curvatura. De momento, sólo diremos que el tensor de curvatura está relacionado con los cambios en la aceleración. También en el siguiente capítulo hablaremos más de él.

Lo que deseamos resaltar aquí es que ésta última ecuación, al igual que la ecuación sin el último término, ambas se reducen, en ausencia de gravitación, a la ecuación correcta en relatividad especial $dU^\alpha/d\tau = 0$. Por consiguiente, las dimensiones del campo gravitacional, son esenciales en la descripción de la dinámica. Se debe tener en claro, cuáles son las dimensiones del campo a describir y en qué escala se trabaja.

5.3.- Límite Newtoniano

Volvamos a la ecuación de caída libre

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

Consideramos el caso de una partícula que se mueve lentamente en un campo gravitacional débil y estacionario. Si la velocidad es lo suficientemente pequeña, podemos despreciar a $d\vec{x}/d\tau$ respecto de $dt/d\tau$ y escribir

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0.$$

Como el campo es estacionario ($g_{\mu\nu} \neq g_{\mu\nu}(t)$), las derivadas de $g_{\mu\nu}$ con respecto al tiempo se anulan y por lo tanto:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

Finalmente, como el campo es débil, adoptamos un sistema de coordenadas casi cartesiano en el que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad con \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1.$$

De manera que a primer orden en $h_{\alpha\beta}$:

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}.$$

Y las ecuaciones de movimiento quedan como

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00}, \qquad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0.$$

La solución de la segunda ecuación de movimiento es $dt/d\tau = constante$ (que también se obtiene de calcular $d\tau$ despreciando $h_{\alpha\beta}$), por lo que dividiendo la primera ecuación de movimiento por $(dt/d\tau)^2$, obtenemos

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}.$$

El resultado Newtoniano correspondiente es

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\emptyset,$$

donde $\emptyset$ es el potencial gravitacional que, para los puntos a una distancia r del centro de un cuerpo esférico de masa M, toma la forma

$$\emptyset = -\frac{GM}{r}.$$

Comparando las ecuaciones, concluimos que

$$h_{00} = -2\emptyset + constante.$$

Además, el sistema de coordenadas debe volverse Minkowskiano a grandes distancias y, por ello, h_{00} se debe anular en infinito. Si definimos $2\emptyset$ de manera que se anule en infinito, encontramos que la constante es cero y en consecuencia $h_{00} = -2\emptyset$. La métrica dada se vuelve entonces

$$g_{00} = -(1 + 2\emptyset).$$

El potencial gravitacional $\emptyset$ es del orden de 10^{-39} en la superficie de un protón, 10^{-9} en la superficie de la Tierra, 10^{-6} en la superficie del Sol y de 10^{-4} en la superficie de una estrella enana blanca; de manera que la distorsión en $g_{\mu\nu}$ producida por la gravitación es generalmente muy pequeña.

5.4.- El Principio de Covariancia General

En la teoría de Newton, el movimiento es un fenómeno relativo, es decir, depende del sistema de referencia inercial desde el cual se mida, pero sólo si el movimiento es uniforme. Los movimientos no uniformes, como la aceleración, pueden medirse de manera absoluta. Como ya hemos visto, estas ideas son sintetizadas en el llamado principio de relatividad de Galileo, en el cual, velocidades y momentos son de naturaleza relativa, pero la aceleración y la fuerza son independientes del sistema de referencia que se escoja. Por consiguiente, si se mide aceleración o fuerza en un sistema inercial, entonces esa misma aceleración o fuerza se medirá en todos los demás sistemas.

En la teoría especial de la relatividad, la velocidad y el momento siguen manteniendo su naturaleza relativa, pero para la aceleración o fuerza, la nueva teoría, hace una descripción distinta. La forma en que se relacionan diferentes sistemas de referencia es a través de las transformaciones de Lorentz, las cuales transforman cuadrivectores de un sistema de referencia en cuadrivectores de otro sistema de referencia. En particular, el cuadrivector de fuerza definido por $g^{\alpha} = \left(\gamma\vec{f}.\frac{\vec{v}}{c},\ \gamma\vec{f}\right)$, nos muestra que si se mide una fuerza en un sistema de referencia dado, dicha fuerza aparecerá en todos los demás sistemas de referencia inercial, aunque el valor de la misma variará de un sistema a otro. Así, por ejemplo, para un sistema donde $\vec{v} = 0$, se tendrá que $g^{\alpha} = \left(0, \vec{f}\right)$, pero la fuerza no desaparece. Es decir, aunque el valor de la fuerza ya no es absoluto, la existencia de la fuerza es independiente del sistema de referencia inercial. Como en el principio de Galileo, la existencia de la velocidad o el momento depende del sistema de referencia, pero en la relatividad especial, la existencia de la energía también es independiente del sistema seleccionado. Recordando que el cuadrivector de momento y energía se define como $p^{\alpha} = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$. Para un sistema donde $\vec{v} = 0$, se tiene que $p^{\alpha} = (mc, 0)$. Es decir, el valor de la energía es $E = mc^2$ y no desaparece.

Para acabar con el contraste entre movimiento uniforme y movimiento no uniforme y, lograr que todo tipo de movimiento sea igualmente relativo, Einstein volvió a las ideas de Berkeley y Mach. Como hemos visto, esas ideas son la base del principio de equivalencia y por consiguiente de la ecuación de caída libre. De esta forma, la aceleración y por ende la gravedad, son también un fenómeno relativo en la teoría de la relatividad general.

El principio de relatividad de Galileo, expresa el principio de ***invariancia*** del mismo Galileo, para las leyes del movimiento de Newton. La transformación de Lorentz, manifiesta el principio de ***covariancia,*** para los sistemas inerciales de la relatividad especial. En la relatividad general, es el principio ***covariancia general,*** el que relaciona los diferentes sistemas de referencia.

El principio de covariancia general es una versión alternativa del principio de equivalencia, que asegura la validez de una ecuación física en un campo gravitacional general si:

1.- La ecuación es válida en ausencia de gravitación; es decir, concuerda con las leyes de la teoría especial de la relatividad cuando el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ se vuelve igual al tensor de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ y la conexión afín se anula.

2.- La ecuación es generalmente covariante; es decir, preserva su forma bajo una transformación general de coordenadas $x \rightarrow x'$.

En las leyes del movimiento de Newton, establecidas en el principio de relatividad de Galileo para sistemas de referencia inercial, el estado de reposo, estado con $\vec{v} = 0$, pasa a ser un caso particular de un principio más general, que es el principio de inercia $\vec{p} = cte$. En esencia, el principio de inercia conserva sus propiedades en la teoría de la relatividad especial. (Ahora con el cuadrivector de momento y energía). En la teoría de la relatividad general, con sistemas de referencia acelerados, el principio de inercia es ahora, a su vez, un caso particular de un principio más general aún. Insistimos que en ausencia de gravitación (sistema de referencia acelerado), la ecuación de caída libre se reduce al principio de inercia de la relatividad especial.

Cuando restringimos nuestras observaciones a sólo sistemas de referencia inerciales, uno podía esperar que el movimiento fuera un fenómeno relativo cuando se medían velocidades.

Como hemos dicho, cuando el sistema se movía con la partícula, entonces $\vec{v} = 0$. Pero en general, uno esperaría que cada sistema de referencia inercial midiera distintas velocidades para la partícula en cuestión. Ahora que extendemos nuestras posibilidades a sistemas de referencia acelerados, es decir, a sistemas de referencia que se mueven de forma relativa entre sí bajo aceleración constante, uno esperaría que cada sistema midiera al menos una aceleración diferente (aunque constante). Siendo el caso $\vec{a} = 0$, un caso particular donde el sistema se mueve con la partícula (en caída libre). En este sistema, se cumple la ley de inercia de la relatividad especial.

Como una generalización de la teoría de Newton, uno esperaría que ahora en la teoría de la relatividad general, un cambio en la medición de la aceleración en uno de los sistemas de referencia acelerados, tendría que manifestarse en un cambio en la aceleración de todos los demás sistemas de referencia acelerados. De forma similar a los cambios de la velocidad en la teoría de Newton. Veremos en el siguiente capítulo que esos cambios están relacionados con el tensor de curvatura.

A diferencia de lo que se hace con la invariancia de Lorentz, al hacer una ecuación generalmente covariante, uno no exige que los nuevos términos que aparecen en la ecuación (el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y la conexión afín $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$) desaparezcan en la formulación final y por lo tanto no se obtiene restricción alguna sobre la ecuación original; por lo contrario, se explota la presencia de $g_{\mu\nu}$ y de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ para representar a los campos gravitacionales.

En el caso de un cuadrivector contravariante la ley de transformación es

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}.$$

Para un cuadrivector covariante

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} V_{\rho}.$$

Y para la ecuación de caída libre se tiene

$$\frac{d^2 x'^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx'^{\nu}}{d\tau} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{k}} \left(\frac{d^2 x^{k}}{d\tau^2} + \Gamma^{k}_{\sigma\rho} \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \right).$$

Así pues, las ecuaciones para el tiempo propio y para la caída libre:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0,$$

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

son de manera manifiesta covariantes. De acuerdo al principio de covariancia general, ambas ecuaciones son válidas en presencia de campos gravitacionales en general porque son válidas en todos los sistemas de coordenadas si son válidas en uno cualquiera y, como ya hemos visto, son válidas en el sistema de coordenadas localmente inercial. Con $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$ y $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0,$$

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

que son las ecuaciones correctas para una partícula libre en la relatividad especial.

Capítulo 6: El Espacio-Tiempo y la Generalización de las Leyes del Movimiento.

¨La candente mañana de febrero en que Beatriz Viterbo murió, después de una imperiosa agonía que no se rebajó un solo instante ni al sentimentalismo ni al miedo, noté que las carteleras de fierro de la plaza constitución habían renovado no sé que aviso de cigarrillos rubios; el hecho me dolió, pues comprendí que el incesante y vasto universo ya se apartaba de ella y que se cambio era el primero de una serie infinita. Cambiará el universo, pero yo no, pensé con melancólica vanidad; alguna vez, lo sé, mi vana devoción la había exasperado; muerta, yo podía consagrarme a su memoria, sin esperanza, pero también sin humillación¨

Borges

6.1.- La Ecuación de caída libre como un principio variacional

En una superficie plana, dos individuos que tracen perpendiculares a una misma línea recta dibujarán dos paralelas, que no se encontrarán mientras les dure la paciencia, aunque esta sea infinita. Si se mudan al ecuador de una esfera, la situación cambia. En función del tamaño del globo, tarde o temprano acabarán cruzándose. En una esfera gigantesca, pueden de que nunca se percaten de que el terreno que habitan no es plano. La humanidad tardó miles de años en convencerse de la curvatura de la Tierra, lo que no tiene nada de particular si no puedes echar un vistazo desde el espacio o emprender la vuelta alrededor del mundo. Probablemente la primera intuición de su convexidad la tuvieron los marineros que emprendían largos recorridos guiados por las estrellas. El experimento de las paralelas proporciona a los nativos de una superficie una herramienta deductiva para averiguar si viven en una Tierra plana o redonda. Basta con que partan perpendicularmente del ecuador y dejen pasar el tiempo suficiente. En cuanto se den cuenta que se acercan, estarán detectando la curvatura. ¿Qué sucede si reducimos drásticamente el tiempo de su investigación? Alcanzarán a dibujar dos segmentos extremadamente cortos, casi puntos, paralelos. Después de analizarlos no podrán resolver si habitan un plano o una esfera.

El matemático lituano Hermann Minkowski (1864- 1909) fue quien despejó el camino para que las ideas de Einstein se pudieran expresar en lenguaje de Gauss. Como ya hemos visto en el capítulo 3 (del espacio y el tiempo al espacio-tiempo) introdujo la noción de espaciotiempo tetradimensional. Con un tono algo teatral proclamó:

"De ahora en adelante el espacio y el tiempo, separados, están condenados a desvanecerse como meros espectros, y sólo una especie de unión de ambos gozará de una existencia independiente".

Minkowski dio el mismo tratamiento matemático al espacio que al tiempo.

Tras este salto conceptual, que Minkowski aplicó para reformular con elegancia la relatividad especial, los paralelismos entre la caída libre y la ingravidez y entre una superficie curva y su plano tangente dejan de ser simples analogías. Por su parte las geodésicas y los invariantes de la métrica adquieren de inmediato sentido físico.

El espacio-tiempo de Minkowski ofrece una cierta austeridad porque es plano, como corresponde a un escenario donde los cuerpos se desplazan con velocidad constante. Desde la perspectiva de las cuatro dimensiones, los objetos sin aceleración se pueden representar mediante puntos o líneas rectas. Al introducir la gravedad y la aceleración, las rectas se tuercen. La gravedad acerca los cuerpos igual que la curvatura de la esfera aproxima a los dibujantes de paralelas. Del mismo modo que la línea recta de un mundo plano se transforma en un arco al recorrer una esfera, las trayectorias rectas de la relatividad especial se convierten en geodésicas curvas al acelerarse en el universo de la relatividad general.

Igual que en una superficie curva podemos aproximar el espacio alrededor de un punto mediante su plano tangente, físicamente podemos aproximar la trayectoria de un cuerpo acelerado mediante una caída libre, aunque sea durante muy poco tiempo.

Hemos querido ser lo más explícito e intuitivo posible en nuestra descripción de la curvatura, porque la relatividad general, es, sin duda, la máxima manifestación de la geometría en la física. Se llegó a pensar en su momento, que como resultado de la teoría de la relatividad, toda la física sería igualmente geometrizable. La aparición de la mecánica cuántica, puso fin a esa concepción.

Regresemos a nuestra visión de la geodésica, en donde en un intervalo infinitesimal, la curva parece estar compuesta por “pequeñas líneas rectas. Esto nos trae a la mente, la construcción de las trayectorias en el cálculo variacional. Recordemos, que de forma diferencial, la variación se expresa mediante el principio de D´Alembert:

$$\sum\left(F_i^{(a)} - \dot{p}_i\right).\delta r_i = 0.$$

En donde de forma infinitesimal, la trayectoria pasa por los puntos de equilibrio estático, donde $F_i^{(a)} - \dot{p}_i = 0$. Es decir, por puntos donde la fuerza inercial $\dot{p}_i$ cancela a la fuerza $F_i^{(a)}$. De inmediato notamos que, justamente, ese es el argumento del principio de equivalencia y de la ecuación de caída libre. Por lo que es razonable pensar que la ecuación de caída libre se puede enunciar como un principio variacional. En efecto, esto ocurre. En analogía con el principio integral de Hamilton, parametrizamos la trayectoria con un parámetro arbitrario p, de manera que el tiempo propio transcurrido mientras una partícula cae del punto A al punto B está dado por:

$$T_{BA} = \int_A^B \frac{d\tau}{dp}\, dp = \int_A^B \left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}\right)^{1/2} dp.$$

Si en la forma usual, mantenemos los extremos fijos y variamos la trayectoria de $x^\mu\,(p)$ a $x^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$, el cambio en T_{BA} será:

$$\delta T_{BA} = \int_A^B \left(\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right) g_{\lambda\nu}\,\delta x^\lambda d\tau.$$

Por lo que, la trayectoria espaciotemporal de una partícula que obedece la ecuación para caída libre será tal que el tiempo propio transcurrido es un extremal (usualmente un mínimo), es decir, $\delta T_{BA} = 0$

Desde este punto de vista geométrico, una partícula en caída libre a través del espaciotiempo curvo llamado campo gravitacional, se moverá sobre la trayectoria más corta (o más larga) posible entre dos puntos; la “longitud” de la trayectoria midiéndose por el tiempo propio. A tales trayectorias, como ya dijimos, se les llama geodésicas.

Así pues, la ecuación de caída libre

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0,$$

es la generalización relativista de la ecuación de Euler –Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Queremos también mencionar, que la ecuación de caída libre mantiene automáticamente la forma del intervalo de tiempo propio, $d\tau$, ya que

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = 0,$$

de manera que

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -\epsilon = constante\ de\ movimiento.$$

6.2.- La Derivada Covariante

En mecánica clásica, cuando derivamos una función el resultado es también una función; cuando derivamos un vector, el resultado es otro vector. En la relatividad general se desea que, cuando se derive un tensor, el resultado sea también un tensor. Con esta finalidad es que se define la derivada covariante. Por supuesto que, cuando decimos que es covariante, hacemos referencia al modo en que se transforma de un sistema de referencia a otro.

Aquí introduciremos algunas definiciones, dejando para después la interpretación de su contenido físico.

De la ley de transformación de un cuadrivector contravariante

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}.$$

Si deseamos que la derivada de un tensor sea a su vez un tensor, obtenemos:

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'^{\mu}_{\lambda k} V'^{k} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} V^{\sigma}\right),$$

lo que nos conduce a definir una ***derivada covariante***

$$\boldsymbol{V^{\mu}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda k} V^{k}}.$$

Reescribiendo su ley de transformación

$$V'^{\mu}_{;\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}_{;\rho}.$$

También podemos definir la derivada covariante de un cuadrivector covariante V_{μ} cuya ley de transformación es

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} V_{\rho},$$

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda}.$$

Consideremos ahora tensores que sólo se encuentran definidos sobre una curva $x^{\mu}(\tau)$. Ejemplos obvios: momento $p^{\mu}(\tau)$ y espín $s_{\mu}(\tau)$ de una partícula. Para estos tensores no tendrá sentido hablar de derivación covariante respecto de x^{μ}, pero podemos definir una derivación covariante con respecto al invariante τ que parametriza la curva.

Consideremos un vector contravariante $A^{\mu}(\tau)$, cuya regla de transformación es

$$A'^{\mu}(\tau) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(\tau).$$

Definimos ***la derivada covariante a lo largo de la curva*** $\boldsymbol{x^{\mu}(\tau)}$ como

$$\boldsymbol{\frac{DA^{\mu}}{D\tau} = \frac{dA^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu}},$$

cuya regla de transformación es

$$\frac{DA'^{\mu}}{D\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{DA^{\nu}}{D\tau}.$$

De manera análoga, llegamos a la definición de la derivada covariante de un vector covariante $B_{\mu}(\tau)$ a lo largo de una curva $x^{\mu}(\tau)$:

$$\boldsymbol{\frac{DB_{\mu}}{D\tau} = \frac{dB_{\mu}}{d\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} B_{\lambda}},$$

cuya regla de transformación es

$$\frac{DB'_{\mu}}{D\tau} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{DB_{\nu}}{D\tau}.$$

6.3.- Transporte paralelo

De la definición anterior de la derivada covariante a lo largo de la curva $x^{\mu}(\tau)$, cuando un vector $A^{\mu}(\tau)$, llevado por una partícula a lo largo de la curva, no cambia con τ visto desde un sistema de referencia $\xi_x(\tau)$ que es localmente inercial en $x(\tau)$, tenemos que

$$\frac{DA^{\mu}}{D\tau} = 0,$$

pues tanto $\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}$ como $dA^{\mu}/d\tau$ se anulan.

Tratándose de una aseveración covariante y válida en $x(\tau)$ con el sistema localmente inercial $\xi_x(\tau)$, es por lo tanto, una aseveración válida en cualquier sistema de coordenadas. El vector A^{μ} queda entonces sujeto a satisfacer la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dA^{\mu}}{d\tau} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu}.$$

que, dada A^{μ} para una cierta τ, define a A^{μ} para toda τ.

Cuando un vector $A^{\mu}(\tau)$ se encuentra definido de esta manera a lo largo de una curva $x^{\mu}(\tau)$ se dice que dicho vector está definido por transporte paralelo. Cualquier tensor se puede definir a lo largo de una curva mediante transporte paralelo, requiriendo simplemente que se anule la derivada covariante del tensor en cuestión a lo largo de la curva.

6.4.- La generalización de la ley de inercia

La principal consecuencia de los principios de la relatividad especial es la modificación de las leyes del movimiento de Newton. En la mecánica Newtoniana, la trayectoria de una partícula es descrita por el cambio de las coordenadas espaciales en función del parámetro tiempo:

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)),$$

en donde la velocidad está definida por el vector tangente en cada punto de la trayectoria

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right).$$

A su vez, la aceleración se expresa como un vector

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(x''(t), y''(t), z''(t)\right).$$

Por lo que el momento $\vec{p} = m\,\vec{v}$, y la fuerza $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ tienen una expresión matemática bien definida.

Como ya hemos visto, en la relatividad especial, los conceptos de espacio y tiempo se fusionan en un solo concepto: el espaciotiempo cuadridimensional $\xi^{\alpha} = (x, y, z, ct)$.

El concepto de tiempo propio es fundamental en la nueva dinámica. Así, bajo este parámetro, la velocidad, el momento, la aceleración y la fuerza de la teoría newtoniana encuentran su nueva representación en los cuadrivectores de velocidad, momento y fuerza, definidos como:

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau).$$

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{cd\tau} = \left(\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c}\right),$$

$$p^\alpha = mc\,u^\alpha = (mc\gamma, m\gamma\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right),$$

$$g^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \left(\gamma\vec{f}.\frac{\vec{v}}{c}, \gamma\vec{f}\right),$$

.

con el momento definido ahora como $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

Por otro lado, también hemos visto que la generalización de la ley de la gravitación de Newton se deduce de los principios de la relatividad general, como una aproximación de la ecuación de caída libre.

El punto en que deseamos hacer énfasis es que en los "*Principia*", Newton realiza la síntesis de las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal (Apéndice 1). Newton, identifica a la aceleración centrípeta, una fuerza inercial, con la fuerza gravitacional.

Así, recapitulando, vemos que la generalización de las leyes del movimiento de Newton se da en el marco de la teoría especial de la relatividad, mientras que la generalización de la ley de la gravitación se da en el marco de la relatividad general. En retrospectiva, uno podría haber esperado que las cosas se dieran de ese modo, ya que, en la relatividad especial se emplean sistemas de referencia inercial para la descripción del movimiento, mientras que en la relatividad general son los sistemas acelerados los empleados para la descripción.

Pero entonces, uno podría preguntarse, la síntesis newtoniana se logra al encontrar una equivalencia entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitacional, pero en la ecuación de caída libre, por un lado se tienen sistemas de referencia localmente inerciales donde los efectos de la gravitación son nulos, y por otro lado sistemas acelerados donde aparecen los efectos de la gravitación. En otras palabras, ¿cómo es posible, encontrar una nueva síntesis entre las leyes del movimiento de la relatividad especial y los sistemas acelerados de la relatividad general? La respuesta no es trivial, pero Einstein encontró una elegante forma de resolver el problema.

Así, una partícula sobre la que no actúa fuerza alguna, tendrá en el marco de la relatividad especial un cuadrivector velocidad U^{α} constante y un cuadrivector de espín S_{α} también constante. Por lo que las ecuaciones de movimiento serán:

$$\frac{dU^{\alpha}}{d\tau} = 0, \qquad \left(U^{\alpha} \equiv \frac{d\xi^{\alpha}}{d\tau}\right),$$

$$\frac{dS_{\alpha}}{d\tau} = 0, \qquad \left(S_{\alpha} \equiv (0, \vec{S}\right).$$

Recordemos que en un sistema de Lorentz arbitrario $S_{\alpha}U^{\alpha} = 0$.

Definimos $U^{\mu}\ y\ S_{\mu}$ en un sistema general de coordenadas mediante la regla de transformación:

$$U^{\mu} \equiv \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} U_f^{\alpha} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \qquad S_{\mu} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} S_{f\alpha}.$$

Donde $U_f^{\alpha}\ y\ S_{f\alpha}$ son las componentes de U y S en el sistema de coordenadas de caída libre ξ^{α}. Si bien $U^{\mu}\ y\ S_{\mu}$ son vectores, $dU^{\mu}/d\tau\ \ y\ \ dS_{\mu}/d\tau$ ***no lo son;*** pero ya sabemos que las derivadas covariantes a lo largo de una curva $DU^{\mu}/D\tau\ \ y\ \ DS_{\mu}/D\tau$ ***sí lo son*** y que se reducen a las derivadas ordinarias $dU^{\mu}/d\tau\ \ y\ \ dS_{\mu}/d\tau$ cuando $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$.

Aquí, debemos recordar que, las dos propiedades más importantes de la derivación covariante son:

1.- Convierte tensores en tensores.

2.- Se reduce a derivación ordinaria en ausencia de gravitación, cuando $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$.

Estas propiedades sugieren el siguiente algoritmo para analizar los efectos de la gravitación sobre sistemas físicos:

1.- Escríbanse las ecuaciones apropiadas en la relatividad especial que son válidas en ausencia de gravitación.

2.-Sustitúyanse $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ y todas las derivadas por derivadas covariantes.

Por lo tanto, las ecuaciones que dicta el principio de covariancia general para la posición y el espín de la partícula son:

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = 0, \qquad y \qquad \frac{DS_\mu}{D\tau} = 0,$$

o explícitamente

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, U^\nu\, U^\lambda = 0, \qquad y \qquad \frac{dS_\mu}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, U^\nu\, S_\lambda = 0.$$

Que son las ecuaciones de **caída libre o de transporte paralelo** para los cuadrivectores U^μ y S_μ. Con la relación (producto punto) $S_\mu\, U^\mu = 0$.

Repitiendo lo visto anteriormente, tenemos que estas ecuaciones son válidas en presencia de campos gravitacionales porque son generalmente covariantes y válidas en ausencia de gravitación (se reducen a las ecuaciones de la relatividad especial cuando $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$). Es decir, el principio de equivalencia nos dice que existen sistemas de coordenadas localmente inerciales en los que las últimas cinco ecuaciones son válidas (siempre que la partícula sea lo suficientemente pequeña), y la covariancia general nos asegura que las ecuaciones son válidas en el sistema de referencia del laboratorio.

Las ecuaciones explícitas para U^μ y S_μ son las ecuaciones diferenciales para el transporte paralelo de dichos vectores. Como $U^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$, la ecuación para U^μ es la de caída libre (que se obtiene derivando respecto a τ la definición de U^μ en términos de U^α_f y usando la ecuación de la relatividad especial para U^α). La ecuación para S_μ describe la precesión de los giroscopios en caída libre. Nótese que $S_\mu\, S^\mu$ es constante pues la derivada ordinaria de un escalar es lo mismo que la derivada covariante:

$$\frac{d}{d\tau}\left(S_\mu\, S^\mu\right) = \frac{D}{D\tau}\left(S_\mu\, S^\mu\right) = 0.$$

Si la partícula no está en caída libre, entonces $\boldsymbol{DU^\mu/D\tau}$ no se anula sino que tenemos

$$\boldsymbol{\frac{DU^\mu}{D\tau} \equiv \frac{f^\mu}{m}},$$

donde $\boldsymbol{m}$ es la masa de la partícula y $\boldsymbol{f^\mu}$ es el cuadrivector (contravariante) de fuerza. Reescribiendo esta última ecuación:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = f^\mu - m\,\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\,\frac{dx^\lambda}{d\tau},$$

donde el término conteniendo a $m\,\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ juega, evidentemente, el papel de la fuerza gravitacional.

Es decir, con el nuevo lenguaje de la derivada covariante a lo largo de la curva $\boldsymbol{x^{\mu}(\tau)}$, hemos identificado a la ecuación de caída libre o de transporte paralelo para el vector $\boldsymbol{U^{\mu}}$, como un nuevo *principio de inercia generalizado.*

Como ya hemos visto, las trayectorias que sigue la partícula en este principio de inercia generalizado, son las geodésicas. Así, las líneas rectas del principio de inercia Newtoniano son generalizadas por curvas geodésicas a través del espacio-tiempo curvo en la teoría general de la relatividad.

La estructura matemática de la ecuación de caída libre $DU^{\mu}/D\tau = 0$ es la de una línea recta, pero la de una línea recta en un espacio-tiempo curvo. Es decir, la definición de geodésica. Así, las líneas rectas en el espacio y el tiempo absolutos de Newton, son ahora líneas rectas pero en un espaciotiempo curvo.

Es interesante recordar aquí el principio de inercia de Galileo, en donde el movimiento inercial tenía que describir una trayectoria circular. En este sentido, el principio de inercia generalizado de la teoría general de la relatividad, “reproduce” las dos concepciones de inercia previas, la de Newton y la de Galileo. La de Newton porque como señalamos la ecuación de transporte paralelo es la ecuación de una línea recta, pero también es verdad que, una línea recta en un espacio-tiempo curvo se puede interpretar como una curva, en particular, como arcos de circunferencia.

Los planetas, por ejemplo, se encuentran en caída libre respecto del Sol, por lo que su trayectoria curva en el espacio y el tiempo Newtonianos (elipses), son líneas rectas en el espacio-tiempo curvo.

Por otro lado, si conocemos el valor de f en un sistema de coordenadas en caída libre ξ^{α} (y por lo tanto, sabemos cómo es f_f^{α}) podremos calcular su valor f^{μ} en cualquier otro sistema mediante

$$f^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}}\, f_f^{\alpha}.$$

Que es la condición para que f^{μ} se comporte como un vector.

Sólo queremos mencionar respecto del espín, la precesión de Thomas (de la relatividad especial), descrita por la ecuación

$$\frac{dS^\beta}{d\tau} = \left(S_\alpha\,\frac{f^\alpha}{m}\right)\,U^\beta.$$

Al introducir ahora un campo gravitacional, la ecuación anterior y el principio de covariancia general nos dice que el espín de la partícula precesará de acuerdo a:

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = \left(S_\nu\,\frac{f^\nu}{m}\right)\,U^\mu = S_\nu\,\frac{DU^\nu}{D\tau}\,U^\mu.$$

A cualquier vector que satisfaga esta última ecuación se le considera definido por *transporte de Fermi.* El transporte paralelo constituye un caso particular cuando $f^\mu = 0$ y $DS^\mu/D\tau = 0$, por lo que lo podemos considerar una generalización del principio de conservación del momento angular.

6.5.- La generalización de la segunda ley del movimiento

Así, pues, si la partícula no está en caída libre, entonces $DU^\mu/D\tau$ no se anula sino que tenemos

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} \equiv \frac{f^\mu}{m}.$$

Ésta es la generalización de la segunda ley de movimiento.

En el caso clásico Newtoniano, se tiene que $\vec{F} = d\vec{p}/dt = m\vec{a}$. Así, la presencia de una fuerza, cambia el estado de movimiento uniforme de una partícula. Dicho cambio, se manifiesta en que las líneas rectas ahora son trayectorias curvas. Newton identificó a la aceleración como una medida de esa curvatura. Por lo tanto, las componentes de la aceleración son: en la dirección tangencial del movimiento $\vec{a}_T = d\vec{v}/dt$ y en la dirección normal, la aceleración centrípeta $\vec{a}_c = v^2/r$. Donde r es el radio de curvatura y $1/r$ es la curvatura, por supuesto.

De esta forma, el cuadrivector f^μ debe estar también relacionado con el concepto de curvatura, pero ahora en un espacio-tiempo tetradimensional.

6.6.- Tensor de Curvatura

Si para construir el tensor utilizamos sólo $g_{\mu\nu}$ y sus primeras derivadas, no encontraremos tensor nuevo alguno.

Esto se debe a que para cada punto podemos encontrar un sistema de coordenadas en el cual, las primeras derivadas de $g_{\mu\nu}$ se anulan y el tensor sería igual a alguno de los tensores que se construyen con $g_{\mu\nu}$ únicamente; como se trata de tensores, esta aseveración es válida para cualquier sistema de coordenadas.

Intentémoslo con $g_{\mu\nu}$ y sus primeras y segundas derivadas. Definiremos el tensor:

$$R^{\lambda}_{\mu\nu k} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu k}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\, \Gamma^{\lambda}_{k\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu k}\, \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta},$$

cuya regla de transformación es

$$R^{\prime\tau}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x^{\prime\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime\sigma}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{\prime\eta}}\, R^{\lambda}_{\mu\nu k}.$$

Este es el tensor llamado de curvatura Riemann- Christoffel. No demostraremos aquí la unicidad del tensor de curvatura, pero a partir de $R^{\lambda}_{\mu\nu k}$ y el tensor métrico podemos construir combinaciones lineales de R. Las dos combinaciones más conocidas son

1.- El tensor de Ricci

$$R_{\mu k} = R^{\lambda}_{\mu\lambda k}.$$

2.- El escalar de curvatura

$$R = g^{\mu k}\, R_{\mu k}.$$

6.7.- Transporte paralelo sobre circuitos cerrados

En la mecánica Newtoniana, podemos definir a la integral de línea de una trayectoria parametrizada, de la forma:

Sea $\vec{\sigma}$ una trayectoria parametrizada por un parámetro t. $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}\left(x(t), y(t), z(t)\right)$.

Definimos la integral de línea como

$$\int \vec{F} \,.\, d\vec{s} = \int_{a}^{b} \vec{F}\left(\vec{\sigma}(t)\right) \cdot \vec{\sigma}^{\prime}(t) dt.$$

Es decir, a cada punto sobre la trayectoria $\vec{\sigma}(t)$, le asociamos un vector en el campo vectorial $\vec{F}(t)$ y hacemos su producto punto con el vector tangente a la trayectoria $\vec{\sigma}'(t)$.

Si el campo vectorial $\vec{F}$, se debe al gradiente de una función escalar $\emptyset$, la integral de línea toma la forma

$$\int \vec{F}.d\vec{s} = \int_a^b \nabla\emptyset(\vec{\sigma}\ (t)).\vec{\sigma}'\ dt,$$

en donde, recordando que por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dt}\emptyset\big(\vec{\sigma}(t)\big) = \nabla\emptyset\big(\vec{\sigma}(t)\big)\cdot\ \vec{\sigma}'(t).$$

Por lo que utilizando el teorema fundamental del cálculo, la integral de línea queda

$$\int \vec{F}.d\vec{s} = \int_a^b \frac{d}{dt}\ \emptyset\big(\vec{\sigma}(t)\big)dt = \emptyset\big(\vec{\sigma}(b)\big) - \emptyset\big(\vec{\sigma}(a)\big).$$

Cuando el campo vectorial de la fuerza $\vec{F}$, es debido al gradiente de una función escalar $\emptyset$, se dice que dicho campo vectorial es ***conservativo.*** Para una trayectoria cerrada donde los puntos $a = b$, la integral de línea se reduce

$$\oint \vec{F}.d\vec{s} = \emptyset\big(\vec{\sigma}(a)\big) - \emptyset\big(\vec{\sigma}(a)\big) = 0.$$

Así pues, recordando la definición de rotacional, la condición para que un campo vectorial sea conservativo, se puede escribir como

$$\nabla\times\vec{F} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\oint \vec{F}.d\vec{s} = 0,$$

en donde el teorema de Stokes, resume:

$$\oint \vec{F}.d\vec{s} = \iint \big(\nabla\times\vec{F}\big).d\vec{a}.$$

Una vez más, veremos la generalización de estas ideas al caso de la relatividad general. Regresemos a nuestras ecuaciones de caída libre o transporte paralelo para los vectores $U^{\mu}\ \ y\ S_{\mu}$:

$$\frac{DU^{\mu}}{D\tau} = 0 \qquad\qquad y \qquad\qquad \frac{DS_{\mu}}{D\tau} = 0$$

Al transportar a un vector S_μ a lo largo de una curva cerrada C mediante transporte paralelo,

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} S_\lambda,$$

nos podemos preguntar como en el caso newtoniano, ¿regresará dicho vector a su valor original después de una vuelta completa? Utilizando nuevamente el método de Stokes, se puede demostrar que para el vector S_μ, se cumple la relación:

$$\Delta S_\mu = \frac{1}{2} R^\sigma_{\mu\nu\rho} S_\sigma(\tau_0) \oint x^\rho dx^\nu.$$

Es decir que, en conclusión, un vector S_μ arbitrario no cambiará cuando se le transporte paralelamente alrededor de una curva cerrada arbitrariamente pequeña que pasa por X sí y sólo sí $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ se anula en X. Para el caso general, si $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ se anula sobre toda la superficie A, entonces cualquier vector arbitrario S no cambiará cuando se le transporte paralelamente alrededor de C.

Ésta es una justificación más, del por qué el tensor de curvatura $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$ es una medida del cuadrivector fuerza f^μ. Si $R^\sigma_{\mu\nu\rho} = 0$, entonces un vector S_μ cumplirá con la ecuación de transporte paralelo o caída libre, es decir, cumplirá con el principio de inercia generalizado.

Por este motivo, debemos interpretar en la ecuación

$$\boldsymbol{\frac{DU^\mu}{D\tau} \equiv \frac{f^\mu}{m}}.$$

<u>**Al cuadrivector de fuerza $\boldsymbol{f^\mu}$ o al tensor de curvatura $\boldsymbol{R^\sigma_{\mu\nu\rho}}$, como una medida del efecto de la gravitación sobre sí misma. Es decir, así como en la teoría de Newton, el efecto de la gravedad sobre una partícula, se manifiesta curvando su trayectoria, en la teoría de Einstein, el efecto de la gravedad sobre sí misma, se manifiesta a través de los efectos del tensor de curvatura $\boldsymbol{R^\lambda_{\mu\nu k}}$ sobre el principio de inercia generalizado o ecuación de caída libre.**</u>

6.8.- Las ecuaciones de campo de Einstein

En el Apéndice 2 se muestra una descripción más detallada de las consideraciones que derivan las ecuaciones de campo de Einstein. Aquí sólo mencionaremos que la ecuación clásica de Poisson,

$$\nabla^2 \emptyset = 4\pi G\rho,$$

es generalizada por la ecuación de caída libre en el límite Newtoniano, como

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00},$$

que a su vez, se generaliza como

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu},$$

que en forma explícita, se escribe:

$$\boldsymbol{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}},$$

donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R,$$

con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrica, R el escalar de curvatura. El término $\lambda\, g_{\mu\nu}$ fue introducido por Einstein por razones cosmológicas ya desaparecidas y por ello λ se conoce como la constante cosmológica. $T_{\mu\nu}$ es el tensor de momento y energía.

En general, un tensor de energía- momento $T^{\alpha\beta}$ es un tensor de rango 2, simétrico, cuyas componentes se pueden interpretar como:

1.- $T^{00} \rightarrow$ densidad de energía.

2.- $T^{0a} \rightarrow$ densidad de flujo de energía y momento.

3.- $T^{ab} \rightarrow$ tensor de tensiones.

Así, en la relatividad general, el espacio-tiempo plano de Minkowski, es curvado por el tensor $G_{\mu\nu}$. ¿Quién es el responsable? El tensor de momento y energía $T^{\mu\nu}$, es decir, la presencia de masa y energía. En palabras del físico estadounidense John Wheeler: "La gravedad no es una fuerza ajena y física que actúa en el espacio, sino una manifestación de la geometría del espacio justo allí donde se encuentra la masa (o la energía)".

Hemos llegado al punto que deseábamos. Estamos en la posibilidad de hacer una síntesis de todo lo expuesto en los capítulos anteriores. ¿Cuál es la relación más general entre los conceptos de Espacio, Tiempo y Movimiento? Recurrimos de nuevo a Wheeler para resumir:

"***El espacio-tiempo le dice a la materia cómo debe moverse, y la materia le dice al espacio-tiempo cómo debe curvarse".***

En el vacío $T_{\mu\nu}$ se anula, de manera que las ecuaciones de campo de Einstein implican

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

En un espacio-tiempo de 2 0 3 dimensiones esta ecuación implicaría la anulación del tensor de curvatura $R_{\lambda\mu\nu k}$ y la consecuente ausencia de campo gravitacional. Sin embargo, es posible que en 4 o más dimensiones existan campos gravitacionales verdaderos en el espacio vacío.

6.9.- La ecuación de onda gravitacional

Einstein demostró que sus ecuaciones de campo también satisfacen una ecuación de onda. Para un espacio-tiempo casi Minkowskiano, utilizamos $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ para campos débiles. Se puede demostrar que bajo estas consideraciones, las ecuaciones de campo de Einstein toman la forma

$$\begin{aligned} -16\pi T_\mu^\nu = 2R_\mu^\nu - g_\mu^\nu R &= \delta^{\sigma\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} \left(h_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu h \right) \\ &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(h_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu h \right). \end{aligned}$$

Esta "ecuación de onda" tiene la muy conocida solución familiar en la teoría de los potenciales retardados:

$$\left(h_\mu^\nu - \frac{1}{2}\,\delta_\mu^\nu h\right) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left[-16\pi T_\mu^\nu\right]dxdydz}{r}.$$

Así, de forma “similar” a los campos electromagnéticos, los efectos gravitacionales se propagan a través de ondas en el espacio-tiempo con una velocidad igual a la velocidad de la luz. También con analogía al campo electromagnético, las ondas gravitacionales transportan energía y momento. De esta manera, la teoría de la relatividad general, resuelve el problema de la ley de la gravitación universal de Newton, en donde los efectos de la gravitación se manifestaban de forma instantánea.

6.10.- Otras generalizaciones de las ecuaciones de movimiento debidas al espacio-tiempo.

Para concluir el presente trabajo, sólo mencionaremos que existen otras generalizaciones de las ecuaciones de movimiento. En la mecánica cuántica, por ejemplo, las dos grandes representaciones con las que nace la teoría son: la representación matricial de Heisenberg y la mecánica ondulatoria de Schrödinger. Paul Dirac, realizó la síntesis de la mecánica cuántica, en donde demostró que, tanto la representación de Heisenberg como la de Schrödinger son casos particulares de una representación abstracta más general. Dirac, generalizó el formalismo hamiltoniano de la mecánica clásica al caso cuántico. La generalización del formalismo lagrangiano al caso cuántico fue hecha por el propio Dirac y Richard Feynman.

Dirac, también logró la síntesis de la relatividad especial y la mecánica cuántica. La ecuación de Dirac, para partícula libre, tiene la forma:

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + \frac{mc}{h/2\pi}\right)\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}.$$

Además de predecir correctamente el valor del spín para el electrón, la ecuación de Dirac, también predice la existencia de la antimateria (el positrón, para ser exacto). Aquí, sólo mencionaremos una característica de dicha ecuación con respecto al principio de inercia. La partícula libre de Dirac se mueve siempre con velocidad c (lo que en principio, parece contradecir a la teoría de la relatividad especial).

Para entender cómo es posible que la partícula libre se mueva siempre con la velocidad de la luz, Schrödinger introdujo el concepto de *Zitterbewegung,* que se refiere a un movimiento vibratorio o de bailoteo del electrón (con velocidad c) alrededor de su trayectoria. Son tan violentas las fluctuaciones que, aunque la velocidad instantánea es c, sólo se detecta la velocidad asociada al desplazamiento efectivo, que es $c^2 p_k/H \approx p_k/m$. El origen del Zitterbewegung está en el acoplamiento entre los estados con energías +E y –E; su promedio sobre un estado con energía definida (+E o –E) es cero.

En la teoría del campo cuántico, se demuestra que las oscilaciones del Zitterbewegung son a su vez el acoplamiento entre dos campos cuánticos. Uno correspondiente al "electrón zurdo" y otro al "electrón derecho" (se define zurdo o derecho como consecuencia del concepto de helicidad, que es la proyección del espín en la dirección del momento lineal.). El causante de ese acoplamiento entre los campos es el llamado campo de Higgs, y la frecuencia de la oscilación es proporcional a la masa de la partícula, en este caso el electrón.

Así, podemos interpretar que, al ganar masa (oscilar de un campo al otro), el electrón deja de viajar a la velocidad de la luz, como lo predice la teoría de la relatividad especial. Es válido interpretar a la masa, como la resistencia de los cuerpos para moverse a la velocidad de la luz. Tal vez, la excepción sean los neutrinos.

Conclusiones

Hemos realizado una breve descripción de la forma en la que han evolucionado históricamente las diferentes teorías en el estudio del movimiento. Comenzando con la manera en que Galileo llegó a su principio de inercia y el debate entre los relacionistas (Descartes) y Newton. De la visión Newtoniana de las leyes del movimiento, son consecuencia los conceptos absolutos de Espacio, Tiempo y movimiento, representados en su cinemática, por el principio de relatividad de Galileo.

Fue necesaria la síntesis de los fenómenos electromagnéticos hecha por Maxwell, para que, en el intento por conciliar ambas teorías, naciera la relatividad especial. En la estructura de la nueva teoría, no sólo el espacio y el movimiento uniforme eran de naturaleza relativa, también lo era el tiempo. Su representación cinemática es a través de la transformación de Lorentz. El postulado de la invariancia de la velocidad de la luz para cualquier sistema de referencia inercial (basado en el experimento de Michelson- Morley), hizo posible la definición de una nueva métrica del espacio en cuatro dimensiones, el llamado espacio-tiempo. Consecuencia de esta métrica, es el concepto de tiempo propio, que, por supuesto, también es un invariante. Con esta estructura, las leyes del movimiento de Newton son reformuladas en términos de cuadrivectores y a través de ellos, las leyes de la mecánica se expresan de forma covariante.

La relatividad especial no resuelve el problema de los absolutos Newtonianos. Los movimientos no uniformes, como la aceleración, siguen manteniendo su carácter absoluto. Si en un sistema de referencia inercial se mide una fuerza, dicha fuerza se manifestará en todos los demás sistemas inerciales de referencia (aunque con distinto valor). Es en la teoría general de la relatividad, donde el movimiento se describe bajo sistemas de referencia acelerados, cuando movimiento de todo tipo, movimiento uniforme y movimiento no uniforme, es igualmente relativo. Resultado que es expresado en el principio de covariancia general.

La teoría general de la relatividad es una teoría dinámica de la gravitación, donde se generaliza la versión estática de la gravedad hecha por Newton. El principio de equivalencia que relaciona a la gravedad y la aceleración nos permite deducir la ecuación de caída libre. Esta importantísima ecuación, deja de manifiesto el principio de covariancia general, y por ende, la naturaleza relativa del fenómeno de movimiento. La ecuación de caída libre relaciona los sistemas de referencia inercial de la teoría de la relatividad especial con los sistemas acelerados de la relatividad general.

Mediante el lenguaje matemático de la derivada covariante, la ecuación de caída libre expresa explícitamente un principio de inercia generalizado. Es decir, la estructura del espacio-tiempo produce una generalización de las leyes de movimiento. Cuando una partícula no está en caída libre, entonces, decimos que hay un efecto de la gravedad sobre sí misma. Dicho efecto se manifiesta a través de la curvatura del espacio-tiempo plano de Minkowski.

De las ecuaciones de campo de Einstein se deduce que la curvatura del espacio-tiempo es debida a la presencia de masa y energía.

En síntesis: el espacio, el tiempo, la masa, la energía, y el movimiento, no son conceptos independientes uno de otro. La forma en que se correlacionan se manifiesta en una complejísima estructura. Aunque podemos afirmar que el fenómeno del movimiento es por naturaleza relativo. El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse.

Apéndice 1: Newton y la ley de la gravitación universal

En *La tradición de Investigación Newtoniana,* Marquina (2006) escribe:

"No obstante que es prácticamente un hecho probado el que la gravitación universal no puede ser anterior a 1684, la leyenda newtoniana la sigue relacionando con la mítica manzana de 1666, que le otorga al concepto, más allá de sus virtudes propias, el carácter fundacional vinculado al bíblico árbol del conocimiento".(p.209)

En Agosto de 1684 tuvo lugar en Cambridge, el decisivo encuentro, entre Edmund Halley e Isaac Newton. Decimos que fue decisivo, entre muchas otras cuestiones, sobre todo por la personalidad tan reservada de Newton. Hoy es muy conocida la reticencia que tuvo para publicar muchos de sus trabajos, lo cual, en vida, le trajo algunas de las controversias más ilustres que hoy forman parte de la historia de la ciencia. Halley se encargaría de publicar la primera edición de los *Principia*, un poco más tarde.

Sobre lo que ocurrió en aquella cita sabemos lo que Newton contó años más tarde a Abraham de Moivre (1667-1754). El matemático francés relató posteriormente el trascendental encuentro entre Newton y Halley como sigue:

"El Doctor Halley le preguntó a Sir Isaac cuál pensaba que podría ser la curva que describiera el movimiento de los planetas suponiendo que la fuerza de atracción hacia el Sol fuera inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias. Sir Isaac respondió de inmediato que serían elipses. El Doctor dió muestras de gran excitación y, sorprendido, le preguntó que cómo lo sabía. "Porque lo he calculado", respondió Newton; después de lo cual, el Doctor Halley le pidió que sin retraso le mostrara sus cálculos. Sir Isaac buscó entre sus papeles, aunque no encontró los cálculos; pero prometió rehacerlos de nuevo y entonces enviárselos".(citado en Antonio Durán,2012,p.33)

Era la típica respuesta que cabía esperar de un Newton siempre remiso a dar a conocer sus descubrimientos. Y, efectivamente, Newton no había perdido esos papeles; sin embargo, dado el tiempo que había pasado desde la última vez que reflexionó sobre el movimiento de los planetas, quería revisar sus cuentas antes de mostrarlas a otros. Pero esta vez iba a ser distinto: la pregunta de Halley llegaba en un momento en que Newton estaba especialmente receptivo, y desató su creatividad científica en forma desmedida.

Pero no sólo fue su creatividad la que se desencadenó, sino también su enorme capacidad de trabajo.

Es contrastante que Newton tratara, sobre todo en sus últimos años, de crearse cierta leyenda de misterio y fantasía que lo acercase al rango de mito, para lo cual dio rienda suelta a anécdotas y mistificaciones o promovió las de otros.

El camino que llevó a Newton a elaborar los *Principia* fue largo, y comenzó durante la reclusión en su casa natal con motivo del cierre de la universidad de Cambridge por la epidemia de peste de 1665.

Los primeros meses de esa estancia en Woolsthorpe, Newton estuvo mayormente dedicado a su idilio con las matemáticas, fruto del cual resultó su concepción del cálculo infinitesimal –que no desarrollara plenamente hasta tres o cuatro años después-. Sin embargo, a principios de 1666, empezó a dedicar también tiempo a los asuntos relacionados con la mecánica. Motivado por sus lecturas de Descartes y Galileo, empezó a manejar lo que después él mismo acuñaría como “principio de inercia”.

Siguiendo a Descartes, inició un estudio del movimiento circular, y en este contexto trató de entender y resolver los problemas que el sistema copernicano imponía al movimiento de la Tierra y los otros planetas (recogidos por Galileo en sus Diálogos). Newton planteó el problema del movimiento planetario dentro de la teoría de vórtices cartesiana (que había estudiado por su cuenta en los años anteriores de formación en Cambridge) y, por tanto, partiendo de una ley de inercia rectilínea y el par gravedad- fuerza centrífuga para modificar las trayectorias rectas, tal y como también lo había hecho el astrónomo y matemático neerlandés Cristiaan Huygens (1629-1695). Huygens fue el primero que cuantificó la tendencia de los cuerpos en movimiento circular a alejarse del centro. Llamó a esa tendencia “fuerza centrífuga” en su trabajo *De vi centrifuga,* publicado en 1673, y con ella pretendía explicar fenómenos naturales tan fundamentales como el movimiento de la luz o la gravedad de los cuerpos. Así pues, con este planteamiento inicial, Newton otorgaba más relevancia a la tendencia de los planetas a separarse (la fuerza centrífuga) que al poder de atracción del Sol, y haciendo entrar en juego la tercera ley de Kepler, consiguió encontrar que las fuerzas centrífugas generadas por los planetas variaban inversamente al cuadrado de sus distancias al Sol.

Supongamos que un cuerpo de masa m se mueve con velocidad constante igual a v sobre una circunferencia de radio r. Newton había deducido que la fuerza total en un movimiento circular uniforme como este viene dada por $2\pi mv$. Si convertimos esta fuerza total en fuerza por instante, dividiendo por el tiempo que tarda en dar una vuelta $2\pi r/v$, obtenemos

$$\boldsymbol{f = \frac{mv^2}{r}}.$$

Esta sería la expresión de la fuerza centrífuga. En este punto, Newton hizo entrar en juego la tercera ley de Kepler para encontrar la fuerza centrífuga que hace que los planetas se alejen del Sol. En efecto, sean $T_1 \ y \, T_2$ los períodos de revolución de dos planetas, y $R_1 \ y \, R_2$ sus distancias medias al Sol. La tercera ley de Kepler establece que los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los radios, esto es:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = k \ \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

donde k es una constante universal de proporcionalidad. Añadamos ahora $v_1 \, y \, v_2$ para las velocidades con las que se mueven los planetas; según la fórmula encontrada antes, los resultados para las fuerzas centrífugas respectivas son:

$$f_1 = \frac{m_1 \, v_1^2}{R_1} \qquad y \qquad f_2 = \frac{m_2 \, v_2^2}{R_2}$$

y, por lo tanto

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 \, v_1^2 \, R_2}{m_2 \, v_2^2 \, R_1}.$$

Teniendo en cuenta que las velocidades son el cociente entre el espacio y el tiempo, tenemos:

$$v_1 = \frac{R_1}{T_1} \qquad y \qquad v_2 = \frac{R_2}{T_2},$$

lo que, sustituyendo en la fórmula anterior, da:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 \, T_2^2 \, R_1}{m_2 T_1^2 \, R_2}.$$

Finalmente, aplicando la tercera ley de Kepler, Newton obtuvo:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 \, R_2^2}{k \, m_2 \, R_1^2}.$$

Obviando el factor que incluye las masas, Newton llegó así a la conclusión de que las fuerzas centrífugas son inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias:

$$\frac{f_1}{f_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \ k \ \frac{R_{2.}^2}{R_1^2}$$

Después de sus investigaciones de 1666, Newton perdió interés en el asunto de los planetas, que retomó trece años después (en 1679), cuando recibió una carta de Robert Hooke en la que proponía volver a reiniciar sus intercambios epistolares, tras la pelea, ruptura y posterior reconciliación que ambos habían protagonizado unos años antes a raíz de las primeras publicaciones de Newton sobre la teoría de la luz y los colores. En la carta, Hooke le preguntaba a Newton su opinión sobre las órbitas que seguirían unos planetas afectados por la inercia y por una atracción hacia el cuerpo central alrededor del que giran. A Newton le resultó muy sugerente este planteamiento de Hooke, y acabó poniéndole en el buen camino para resolver el problema del movimiento planetario. En efecto, a partir de entonces desechó la tendencia de los planetas a separarse (fuerza centrífuga), inspirada por Huygens, y se quedó sólo con la inercia y con la fuerza de atracción dirigida al centro de la órbita: la fuerza centrípeta, como más tarde la bautizaría el propio Newton.

Newton contestó a Hooke que no deseaba realizar ningún intercambio epistolar, pues en ese momento le interesaban otros estudios distintos a los que la filosofía natural, a la que sólo dedicaba ya "algunas horas ociosas, como diversión"; se refería a la teología y a la alquimia. No obstante, se permitió sugerirle un experimento para demostrar la rotación diaria de la Tierra sobre su eje. La precipitación de su respuesta hizo errar a Newton en los resultados de ese experimento, y tuvo que soportar la corrección que Hooke le hizo. Esto provocó que, contra los deseos de Newton, fueran y vinieran más cartas de un científico a otro. En una de ellas, Hooke hizo explícita su ley del inverso del cuadrado como medida de la fuerza de atracción entre los cuerpos, cosa que Newton ya había deducido cuando estudió por primera vez el problema durante los años de la peste.

La consulta de Hooke provocó que Newton, a pesar de su aparente desinterés, retomara con fuerza el problema del movimiento planetario. Como resultado de su nueva dedicación al asunto, encontró que las dos primeras leyes de Kepler implican fuerzas de atracción inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Esos son los cálculos a los que se refirió durante la visita de Edmund Halley en agosto de 1684.

El intercambio de cartas iba a generar también otro colosal enfrentamiento entre Hooke y Newton. La nueva pelea estalló mientras Newton redactaba los *Principia,* al acusarle Hooke de plagio.

La disputa casi logró dar al traste con la obra cumbre de Newton, quien en un acto que mostraba su naturaleza rencorosa eliminó de la versión final de su libro casi todas las menciones que había hecho a Hooke en versiones anteriores.

Del "*De Motu Corporum*" a los *"Principia".-* Retomemos ahora el curso de los acontecimientos desatados por la visita de Halley a Cambridge en agosto de 1684. Newton, que no había perdido sus cálculos, los revisó, los completó y en noviembre de 1684 envió a Halley un pequeño tratado de nueve páginas de título *Motu coporum in gyrum* (sobre el movimiento de los cuerpos en una órbita): allí se esbozaba una demostración de que la trayectoria que genera una fuerza de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es una cónica que para velocidades por debajo de cierto límite es, en efecto, una elipse –incluía también el resultado recíproco, que como sabemos, había descubierto a raíz de la carta de Hooke-.

Este pequeño tratado fue el germen de los posteriores estudios sobre dinámica. En él, y en sus diversas versiones, vieron la luz las célebres leyes de Newton. Inicialmente fueron cinco, y después las redujo a tres que hoy son habituales; su formulación, aparece en los *Principia*, como ya hemos mencionado antes.

El pequeño tratado que Newton había enviado a Halley no dejó de engordar conforme Newton afinaba sus investigaciones; así, en apenas un año el *De Motu corporum in gyrum* pasó de ser un opúsculo de nueve páginas a un tratado en dos libros con cerca de cien páginas –su título, en cambio, se redujo a *De Motu corporum-.* En él ya se incluía uno de sus descubrimientos cruciales: las distancias para el cálculo de la fuerza de atracción entre cuerpos esféricos había que medirlas desde sus centros. Eso era, según reconocía el propio Newton, algo difícil de creer, pero a lo que había que rendirse por la fuerza de sus demostraciones matemáticas: "Sin mis demostraciones, ningún filósofo juicioso podría aceptarlo", escribió a Halley en 1686.

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.- El 5 de julio de 1687, Halley comunicó a Newton que el trabajo de composición de los *Principia* había finalizado. La versión que salió de la imprenta estaba dividida en tres libros, además de unos preliminares donde, entre otras cosas, se enunciaban las tres leyes newtonianas del movimiento.

El concepto de gravitación universal es planteado por Newton en el libro III (El sistema del mundo), una vez que, al final del libro II, ha logrado desechar los vórtices cartesianos. Newton escribe ahí:

"Si una esfera sólida gira con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada en un fluido uniforme e infinito y el fluido sólo es obligado a girar por el impulso de esta esfera, y cada parte del fluido persiste en su movimiento uniforme, afirmo que los tiempos periódicos de las partes del fluido son como los cuadrados de sus distancias al centro de la esfera". (citado en Marquina, 2006)

Una vez demostrado este resultado, Newton plantea, en el escolio a la proposición, que ha "intentado investigar las propiedades de los vórtices con el fin de determinar si los fenómenos celestes pueden explicarse recurriendo a ellas". El argumento newtoniano se cierra, apelando (sin decirlo textualmente) a la tercera ley de Kepler, al señalar:

"Pues el hecho es que con los tiempos periódicos de los planetas que giran en torno a Júpiter son como la $3/2$ ava potencia de sus distancias al centro de Júpiter, y la misma regla se aplica también a los planetas que giran en torno al Sol. Y estas reglas prevalecen con la mayor exactitud en lo hasta ahora descubierto por la observación astronómica. En consecuencia si los mencionados planetas se desplazan en vórtices que giran en torno a Júpiter y el Sol, los vórtices deberán girar conforme a aquella ley. Pero aquí hemos determinado que los tiempos periódicos de las partes del vórtice son como el cuadrado de las distancias al centro de movimiento y esta razón no puede ser disminuida y reducida a la $3/2$ava potencia". (Newton, citado en Marquina, 2006,p.210)

Más adelante, Newton concluye:

"Por tanto, es evidente que los planetas no son transportados en vórtices corpóreos. En efecto, según la hipótesis de Copérnico, los planetas que se mueven alrededor del Sol giran en elipses con el Sol como foco común y describen áreas proporcionales a los tiempos con radios trazados hasta el Sol. Pero las partes de un vórtice jamás pueden girar con semejante movimiento".

Así, Newton desecha los vórtices cartesianos, con la aceptación explícita de las tres leyes de Kepler. Doce de las trece primeras proposiciones del libro III apelan, a dieciocho proposiciones del libro I, tres del libro II, las reglas I, II y IV del libro III, la tercera ley y el corolario a las leyes del movimiento.

En la sección II del libro I, bajo el rubro general de "Sobre la determinación de fuerzas centrípetas", Newton afirma, en la proposición I, que:

"*Las áreas de los cuerpos en revolución describen mediante radios trazados hasta un centro de fuerza inmóvil se encuentra en los mismos planos inmóviles y son proporcionales a los tiempos en los que se describen" (Newton, citado en Marquina 2006,p.212).*

Este resultado se complementa con la proposición II, en la que señala que:

"Todo cuerpo que se mueve en cualquier curva descrita en un plano y -mediante un radio trazado hasta un punto inmóvil o que progresa con movimiento rectilíneo uniforme- describe alrededor de ese punto áreas proporcionales a los tiempos es urgida por una fuerza centrípeta dirigida hacia ese punto".

Marquina (2006) comenta en su libro:

"En las proposiciones I y II, Newton demuestra, por un lado, que una fuerza centrípeta genera una trayectoria que cumple con la ley de las áreas iguales en tiempos iguales (segunda ley de Kepler) y por el otro, que un movimiento a lo largo de una curva descrita por la ley de las áreas, implica la existencia de una fuerza centrípeta, de forma tal que con las dos proposiciones se demuestra que la ley de las áreas es condición necesaria y suficiente para el movimiento inercial en un campo central (de fuerzas)".(p.213)

Newton comenta:

"…podemos descubrir la proporción de una fuerza centrípeta a cualquier otra fuerza conocida, como la gravedad. Pues si por medio de su gravedad un cuerpo gira en un círculo concéntrico a la Tierra, esa gravedad es la fuerza centrípeta de tal cuerpo".(citado en Marquina, 2006)

Las proposiciones de la sección II (libro I), la proposición X, XI, XII, XIII, se resumen en un corolario, en el que plantea:

"Cualquier cuerpo […] urgido por la acción de una fuerza centrípeta que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia […] se moverá en una de las secciones cónicas, teniendo su foco en el centro de fuerza".(citado en Marquina 2006)

La sección XI, que lleva por título "Sobre los movimientos de cuerpos que tienden unos a otros con fuerzas centrípetas", empieza con una importante aclaración sobre el concepto de atracción, ya que:

"Hasta aquí he estado exponiendo las atracciones de cuerpos hacia un centro inmóvil, aunque muy probablemente no exista cosa semejante en la naturaleza de las cosas. Pues las atracciones suelen dirigirse hacia cuerpos, y las acciones de los cuerpos atraídos y atrayentes son siempre recíprocas e iguales, por la tercera ley; con lo cual si hay dos cuerpos ni el atraído ni el atrayente se encuentran verdaderamente en reposo, sino que ambos […] giran en torno a un centro común de gravedad, estando por así decirlo mutuamente atraídos. Y si existen más cuerpos, que o bien están atraídos por un cuerpo, atraído a su vez por ellos, o que se atraen todos mutuamente entre sí, tales cuerpos se moverán de modo tal entre sí que su centro común de gravedad se encontrará o bien en reposo o se moverá

uniformemente hacia adelante en línea recta. En consecuencia, pasaré ahora a tratar el movimiento de cuerpos que se atraen los unos a los otros, considerando las fuerzas centrípetas como atracciones, aunque en estricto rigor físico, pudieran llamarse más apropiadamente impulsos".(Newton, citado en Marquina 2006, p. 216)

Bajo estas consideraciones, plantea posteriormente:

"Los cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de sus distancias respecto de sus centros, pueden moverse entre sí en elipses; y mediante radios trazados hasta los focos pueden describir áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos".(citado en Marquina, 2006)

Con el acervo de demostraciones de los libros I y II, Newton está preparado para construir, en el libro III, el concepto de gravitación universal. En la proposición VI. Teorema VI, Newton introduce un nuevo elemento, la masa de los cuerpos, al plantear:

"Que todos los cuerpos gravitan hacia todos los planetas, y que los pesos de los cuerpos hacia cualquier planeta, a distancias iguales del centro del planeta, son proporcionales a las cantidades de materia que respectivamente contienen".(citado en Marquina, 2006)

A este punto, Marquina (2006) comenta: "*Como señala Chandrasekhar {esta proposición es el centro y el núcleo de los argumentos de Newton para la universalidad de su ley de gravitación: la igualdad universal de las masas inerciales y gravitacionales}".(p.223)*

Continúa Newton:

"Que el poder de la gravedad pertenece a todo cuerpo en proporción a la cantidad de materia de que cada uno contiene". (citado en Marquina, 2006)

En la demostración a esta última proposición, Newton apela a la proposición LXIX del libro I, al señalar:

"Ya hemos probado antes que todos los planetas gravitan unos hacia otros, y también que la fuerza de gravedad hacia cada uno de ellos, considerada particularmente, es inversamente proporcional al cuadrado de

la distancia de los lugares al centro del planeta. De donde se sigue (por la proposición LXIX, libro I, y sus corolarios) que la gravedad que tiende hacia todos los planetas es proporcional a la materia que éstos contienen". (Newton, citado en Marquina, 2006, p.223)

Es decir:

$$\vec{F} \propto \frac{m_1\, m_2}{r^2}.$$

Marquina (2006) escribe, citando a Newton:

{La imagen de todos los cuerpos gravitando entre sí, es llevada hasta las partes de los cuerpos, en una especie de danza cósmica, que no obstante su endemoniada complejidad, produce lo que Newton califica (en el Escolio General) como el "elegantísimo sistema del Sol, los planetas y los cometas".

En el proceso de transformaciones conceptuales que le permiten a Newton arribar a la gravitación universal, hay que resaltar el importante papel que juega la tercera ley, pues es a través de ella que se transforma la fuerza proveniente del Sol que actúa sobre los planetas, en una fuerza mutua entre el sistema Sol-planeta, y entre los propios planetas y éstos con sus satélites, en un juego de interacciones en las que, como señala Newton en De Mundi, "puede considerarse a un cuerpo como atrayente y al otro como atraído, pero esta distinción es más matemática que natural. En realidad la atracción es de cada cuerpo sobre cada cuerpo y por tanto del mismo género en todos".

[…] En este punto, Newton está mostrando las diferencias existentes entre trabajar en el mundo matemático, que es exacto, o trabajar en el mundo físico. Las leyes de Kepler son exactas en el mundo matemático mientras que en el físico son aproximaciones, ya que, como señala en la tercera versión de De Motu "considerar simultáneamente todas estas causas de movimiento y definir estos movimientos mediante leyes exactas que permitan un cálculo apropiado, si no me equivoco, excede la capacidad de todo el entendimiento humano".}(p.224, 225, 226)

Una vez construido el concepto de gravitación universal, Newton se dedica a aplicarlo para explicar el comportamiento de la Luna, la causa de las mareas, la precesión de los equinoccios y el movimiento de los cometas.

Los *Principia* terminan con el famoso Escolio General:

"Hasta aquí hemos explicado los fenómenos de los cielos y de nuestro mar por la fuerza gravitatoria, pero no hemos asignado aún causa a esa fuerza. Es seguro que debe proceder de una causa que penetra hasta los cuerpos mismos del Sol y los planetas, sin sufrir la más mínima disminución de su fuerza, que no opera de acuerdo con la cantidad de las superficies de las partículas sobre las que actúa […] sino de acuerdo con la cantidad de materia sólida contenida en ellas, propagándose en todas direcciones y hasta inmensas distancias y decreciendo siempre como el cuadrado inverso de las distancias […] Pero hasta el presente no he logrado descubrir la causa de esas propiedades de gravedad a partir de los fenómenos y no finjo hipótesis".(citado en Marquina)

La difusión de los *Principia* generó la admiración del mundo científico hacia Newton; pero también las críticas, sobre todo de los abanderados del mecanicismo. Estos sostenían que era absurdo que la gravedad fuese una fuerza que actuara a distancia, sin necesidad de que los cuerpos estuvieran en contacto. Esa acepción la emparentaba con las viejas propiedades ocultas animistas consideradas por Aristóteles y los escolásticos para explicar el movimiento de los cuerpos. Huygens y Leibniz hicieron este tipo de críticas.

Son muchas las veces que Newton expresó su escepticismo sobre la acción a distancia, incluso en el vacío, de la gravedad, insistiendo en que lo que le interesaba no era la esencia de la gravedad sino sus efectos. Para ilustrar el tema, citamos aquí una de esas ocasiones que se remonta al año 1693, extraída de una carta que Newton envió a Richard Bentley:

"Es inconcebible que la materia bruta inanimada opere y afecte –sin la mediación de algo más que no sea material- sobre otra materia sin contacto mutuo, como debería ser si la gravitación (en el sentido de Epicuro) fuera esencial e inherente a ella. Y esta es una de las razones por las que expresé mi deseo de que usted no me adscribiese a mí la gravedad innata. Que la gravedad sea innata, inherente y esencial a la materia, de manera que un cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia a través del vacío sin que interceda algo más mediante lo cual su acción o fuerza pueda ser trasmitida de uno a otro, me parece un absurdo tan grande que no creo que pueda caer jamás en él ningún hombre que tenga la facultad y pensamientos de alguna competencia en asuntos filosóficos. La gravedad debe ser causada por un agente actuando de manera constante de acuerdo con ciertas leyes, pero si este agente es material o inmaterial es cuestión que Yo he dejado a la consideración de mis lectores" (citado en Antonio Durán 2012).

La tumba de Newton se halla en una coqueta capilla gótica de la abadía de Westminister. "Lo que de Newton es mortal" reposa en un sarcófago de mármol negro con vetas marrones, arropado por un grupo escultórico quizá de dudoso gusto.

De la magnificencia del entierro de Newton nos queda la descripción de Voltaire: *"Vivió honrado por sus compatriotas y fue enterrado como un rey que ha hecho el bien a sus súbditos".*

Es también famoso, el célebre epitafio propuesto por Alexander Pope a la muerte de Newton, que finalmente fue rechazado:

"La naturaleza y sus leyes yacían ocultas en la noche. Dijo Dios "¡Hágase Newton!", y todo se hizo luz".

Apéndice 2: Las Ecuaciones de Campo de Einstein

Hermann Minkowski fue el culpable de que el virus de la relatividad se adueñara de la Universidad de Gotinga. Dentro de su círculo íntimo figuraba uno de los matemáticos más prolíficos e influyentes del siglo XX: David Hilbert. A pesar de su amistad, Minkowski tardó años en inocularle su debilidad por la física. Incluso llegó a esgrimirla como pretexto para no visitarlo durante unas vacaciones de Navidad: *"Dadas las circunstancias, no sé si necesitas que te consuele. Creo que me habrías encontrado infectado hasta la médula por la física. Puede que incluso deba someterme a una cuarentena antes de que Hurwitz y tú me queráis admitir de nuevo en vuestros paseos, matemáticamente puro y abstracto*".(Minkowski citado en Blanco Laserna, 2012)

Minkowski inauguró su primera conferencia sobre relatividad, en 1907, con una pobre semblanza de los físicos: "Parece que la teoría electromagnética de la luz está dando lugar a una completa transformación de nuestras representaciones del espacio y el tiempo, que debería suscitar un interés extraordinario entre los matemáticos. El matemático se halla en una situación privilegiada para asumir los nuevos puntos de vista, ya que le suponen una mera aclimatación a esquemas conceptuales ya familiares. El físico, por el contrario, se ve obligado a redescubrir estos conceptos y abrirse camino a través de un bosque primigenio de oscuridades. A su lado, el viejo camino, dispuesto con primor por el matemático, permite progresar con toda comodidad". En vista de esta clara desventaja, la clarividencia de uno de sus antiguos alumnos en la Politécnica de Zúrich casi le incomodaba: *"Oh, ese Einstein, siempre saltándose clases. ¡La verdad es que nunca le hubiera creído capaz de esto!"*

Una apendicitis impuso un brusco final a la vida de Minkowski, dejando su labor inconclusa. Supuso un duro golpe para Hilbert, cuya actitud hacia la física acusó un notable cambio.

A partir de entonces, sus palabras adoptaron el tono de un médium a través del cual Minkowski siguiera pregonando sus inquietudes: *"En su exposición escrita, el físico pasa por alto con ligereza pasos lógicos importantes […] mientras que a menudo el matemático se queda la llave para entender los procesos físicos".* (Minkowski, citado en Blanco, 2012). En un ambiente informal se lo tomaba con más humor: "La física se está volviendo demasiado complicada para dejársela a los físicos".

De manera consciente o no, se propuso ejecutar el programa de su viejo amigo. Uno de los principales logros de Hilbert había sido la axiomatización de la geometría. Ahora daría el mismo tratamiento a la física, reconstruyéndola desde los cimientos con un rigor desconocido y aplicando las técnicas más modernas. Resumía su programa en una consigna: "Hemos reformado las matemáticas, a continuación debemos reformar la física y después le llegará el turno a la química".

En esas estaba cuando Einstein se cruzó en su camino, con una teoría general de la relatividad a medio hacer y formulada en un lenguaje geométrico que no terminaba de dominar.

En vísperas de cumplir su primer año, la Primera Guerra Mundial, lejos de apuntar a un desenlace, se recrudecía. En abril de 1915 los alemanes habían estrenado la guerra química, sumiendo las trincheras de Ypres en una neblina verdosa y amarillenta de gas mostaza. En la historia de la relatividad se avecinaba una batalla menos sangrienta, pero no exenta de sobresaltos. A finales de junio, Einstein aceptó una invitación de Hilbert y viajó hasta Gotinga para impartir un ciclo de seis conferencias, donde dio a conocer el estado en el que se encontraba su teoría general de la relatividad. Durante su estancia se alojó en casa del matemático, con quien tuvo ocasión de conversar animadamente, sin sospechar que avivaba en exceso su curiosidad.

Cada uno se llevó una excelente impresión del otro. "Para mi gran alegría, he tenido un éxito completo a la hora de convencer a Hilbert y a Klein", *se felicitaba Einstein. Hilbert tampoco ocultaba su satisfacción: "Durante el verano contamos con los siguientes invitados: Sommerfeld, Born y Einstein. En particular, las conferencias de este último sobre teoría de gravitación fueron todo un acontecimiento". (Einstein y Hilbert, citados en Blanco Laserna, 2012)*

Sin duda, Einstein había logrado seducir a los matemáticos de Gotinga con su geometrización de la gravedad. Lo que no podía adivinar era que también lo habían visto perdido en una encrucijada: el punto donde la física se volvía demasiado complicada para dejársela a los físicos.

El gran patriarca de la escuela de Gotinga, Felix Klein, se lamentaba: *"En la obra de Einstein, hay imperfecciones que no llegan a dañar sus grandes ideas, pero que las ocultan de la vista"*(Klein, citado en Blanco Laserna, 2012). Hilbert se permitía alguna broma al respecto: *"Cualquier chico en las calles de Gotinga entiende más de geometría cuadridimensional que Einstein".* (Hilbert, citado en Blanco Laserna, 2012)

Las cartas se pusieron sobre la mesa en el mes de noviembre. Einstein comenzó reconociendo que había "perdido toda la fe en las ecuaciones de campo" que había venido defendiendo a lo largo de los últimos tres años. Decidió retomar una línea de ataque que había abandonado en 1912, con demasiada precipitación, al asumir una restricción que se reveló sin fundamento.

La noticia de que Hilbert había detectado sus imperfecciones y había iniciado por su cuenta el asalto a las ecuaciones de campo le cayó como un jarro de agua helada. Hilbert disponía de la ventaja de una superioridad matemática innegable, en un problema donde parecía un factor decisivo; en su favor, Einstein contaba con su inigualable instinto físico.

Espoleado por la rivalidad, se sumió en un vértigo de ecuaciones, que llenaba de tachones, tanteos y enmiendas, hasta agotar cada alternativa. Prácticamente descartó cualquier actividad que amenazara su tensa concentración. No distinguía las horas del día de la noche y a veces hasta se olvidaba de comer. Esta tenacidad extenuante terminó por dar frutos. La niebla se disipaba en torno a las matemáticas de la teoría… cuando el 14 de noviembre asomó en su buzón una carta con el matasellos de Gotinga. En ella Hilbert se ufanaba de sus progresos, que consideraba casi definitivos: "*Lo cierto es que me gustaría pensar primero en alguna aplicación muy tangible para los físicos, como alguna relación fiable entre constantes físicas, antes de ofrecer la solución axiomática a tu gran problema".* (Hilbert, citado en Blanco Laserna, 2012). La correspondencia entre ambos se convirtió en un fuego cruzado de sugerencias y también de cautelas. El 18 de noviembre Einstein vio por fin la luz. Su última versión de la teoría predecía una irregularidad en la órbita de Mercurio, descrita por el matemático francés Urbain Le Verrier en 1859, que desafiaba las previsiones newtonianas. También corregía la estimación clásica de la curvatura de la luz bajo efectos gravitatorios. Por último, sus ecuaciones se reducían a las de Newton en campos gravitatorios de baja intensidad. La revelación le reportó una taquicardia y un rapto de euforia que lo dominó durante días.

El 25 de noviembre de 1915, Einstein al límite de sus fuerzas presentaba su versión de las ecuaciones de campo ante la Academia de Berlín: "Por fin la teoría general de la relatividad muestra una estructura lógica cerrada"

Cinco días antes, Hilbert resumía las conclusiones de su programa axiomático ante la Academia de Ciencias de Gotinga. ¿Quién había ganado la carrera? De entrada se puede afirmar que, a pesar de las apariencias, habían participado en competiciones distintas.

Aunque Hilbert se anticipara a la hora de hacer públicos sus resultados, en las pruebas originales del artículo que recoge su conferencia de Gotinga no aparecen las ecuaciones de campo correctas, aunque sí figuran en la versión que terminó publicando en marzo de 1916. Por tanto, la prioridad corresponde a Einstein.

Si medimos el resultado atendiendo al objetivo que se había fijado cada uno, este acertó de lleno en la diana, mientras que Hilbert erró el tiro por un amplio margen.

El matemático ignoró casi por completo el paisaje experimental. La lectura relativista de la gravitación era sólo un aspecto de su vasta ambición axiomática, que pretendía conquistar no solo la gravedad, sino también el electromagnetismo y su interacción con la materia. Las ecuaciones fundamentales de la física debían surgir a partir de una función, que llamó "función de universo", cuyas propiedades había definido en un par de axiomas. Hilbert tituló su conferencia "Los fundamentos de la física", una disciplina de la que, a partir de entonces, "surgiría una ciencia como la geometría".

Supo desplegar una artillería formalmente superior a la de Einstein, y resolver algunos de sus problemas técnicos de un modo más directo, pero sus pretensiones de haber unificado la relatividad y el electromagnetismo, dando cuenta, de paso, de los fenómenos que tenían lugar dentro del átomo, resultaron infundadas. Einstein opinaba que el propósito de Hilbert escondía "bajo un camuflaje de técnicas" la pretensión "de un superhombre".

Quizá Hermann Weyl, un alumno de Hilbert que hizo importantes contribuciones a la física teórica, supo captar mejor que nadie la atmósfera del desenlace: "Los hombres como Einstein y Niels Bohr se abren camino a tientas, en la oscuridad, hasta alcanzar sus concepciones de la relatividad general o de la estructura atómica mediante una clase de experiencia e imaginación distinta de la que sirve al matemático, aunque sin duda las matemáticas constituyen un ingrediente esencial".

Einstein juzgó el trabajo de Hilbert como una intromisión, algo que se refleja de modo velado en alguna de sus cartas. No obstante, sus suspicacias pronto se disiparon, sobre todo después de que Hilbert no hiciera el menor movimiento por disputar su prioridad.

El 20 de diciembre Einstein le escribía una carta conciliadora:

"Se ha producido una cierta hostilidad entre nosotros, cuya causa no pretendo analizar. He luchado contra el sentimiento de amargura que ha despertado en mí y lo he vencido por completo. Vuelvo a pensar en ti con un afecto sobre el que no pesa sombra alguna y te ruego que hagas los mismo conmigo." (Einstein, citado en Blanco, 2012).

Ironías del destino, después de que Minkowski contagiara a Hilbert su fscinación por la física, Hilbert, a su vez, transmitió sus aspiraciones de superhombre a Einstein. Este consagró las últimas décadas de su vida a construir una teoría donde se fusionaran los campos electromagnético y gravitatorio. Una búsqueda que también estaba condenada al fracaso.

Los campos gravitacionales transportan energía y momento por lo que, a diferencia de los campos electromagnéticos que no transportan carga, deben contribuir a su propia fuente; las ecuaciones de campo gravitacional son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, en donde la no linealidad representa el efecto de la gravitación sobre sí misma.

Utilicemos nuevamente el principio de equivalencia. En cualquier punto X en un campo gravitacional arbitrariamente intenso, podemos definir un sistema de coordenadas localmente inercial, tal que

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} \qquad y \qquad \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right)_{x=X} = 0.$$

De manera que para cualquier x cerca de X, el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ puede diferir de $\eta_{\alpha\beta}$ sólo mediante términos cuadráticos en x- X. En este sistema de coordenadas el campo gravitacional es débil alrededor de X y podemos esperar que el campo se pueda describir mediante ecuaciones diferenciales parciales que sean lineales. Una vez que conozcamos estas ecuaciones de campo débil, podemos encontrar las ecuaciones de campo generales, invirtiendo la transformación de coordenadas que volvió débil al campo.

Recordemos primero que en un campo estático débil producido por una densidad de masa no-relativista ρ, la componente tiempo-tiempo (o cero-cero) del tensor métrico está, aproximadamente, dada por

$$g_{00} \cong -(1 + 2\emptyset).$$

Donde ∅ es el potencial Newtoniano determinado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\emptyset = 4\pi G\rho,$$

en donde G denota la constante de Newton (6.670 x 10^{-8} en unidades cgs). Además, la densidad de energía T_{00} (donde $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de momento y energía) para materia no-relativista es igual a la densidad de masa

$$T_{00} \cong \rho.$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, tenemos

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}.$$

Una ecuación que es supuestamente válida para campos estáticos débiles generados por materia no-relativista y que ni siquiera es invariante de Lorentz. Sin embargo, nos conduce a pensar que las ecuaciones de campo débil para una distribución general de energía y momento $T_{\alpha\beta}$ son de la forma:

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}.$$

Donde $G_{\alpha\beta}$ es una combinación lineal de la métrica y sus primeras y segundas derivadas.

Aquí, debemos recordar que, las dos propiedades más importantes de derivación covariante son:

1.- Convierte tensores en tensores.

2.- Se reduce a derivación ordinaria en ausencia de gravitación, cuando $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$.

Estas propiedades sugieren el siguiente algoritmo para analizar los efectos de la gravitación sobre sistemas físicos:

1.- Escríbanse las ecuaciones apropiadas en la relatividad especial que son válidas en ausencia de gravitación.

2.-Sustitúyanse $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ y todas las derivadas por derivadas covariantes.

Las ecuaciones resultantes serán generalmente covariantes y válidas en ausencia de gravitación, por lo que, de acuerdo al principio de covariancia general, serán válidas en presencia de campos gravitacionales siempre que se trabaje en una escala espaciotemporal suficientemente pequeña en comparación con la escala del campo gravitacional.

Así, mediante el principio de equivalencia sabemos que las ecuaciones que gobiernan campos gravitacionales de intensidad arbitraria deben ser de la forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es un tensor que se reduce a $G_{\alpha\beta}$ en el caso de campos débiles. En general habrá una variedad de tensores $G_{\mu\nu}$ que se pueden formar a partir del tensor métrico y sus derivadas y que se reducen en el límite de un campo débil a un $G_{\alpha\beta}$ dado. Algunas de las características que sabemos de $G_{\mu\nu}$ son:

1.- Por definición $G_{\mu\nu}$ es un tensor.
2.- Por suposición $G_{\mu\nu}$ consiste únicamente de términos que son lineales en las segundas derivadas o cuadráticos en las primeras derivadas de la métrica.
3.- Como $T_{\mu\nu}$ es simétrico entonces $G_{\mu\nu}$ también lo es.
4.- Como $T_{\mu\nu}$ se conserva (bajo derivación covariante), también $G_{\mu\nu}$ se conserva:

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0.$$

5.- Para un campo débil estacionario producido por materia no-relativista, la componente 00 se debe reducir a

$$G_{00} \cong \nabla^2 g_{00.}$$

Con algunas otras consideraciones, se puede demostrar que, las ecuaciones de campo de Einstein son:

$$\boldsymbol{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}.}$$

Donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

Con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ la métrica, R el escalar de curvatura. El término $\lambda\, g_{\mu\nu}$ fue introducido por Einstein por razones cosmológicas ya desaparecidas, y por ello λ se conoce como la constante cosmológica.

En general, un tensor de energía- momento $T^{\alpha\beta}$ es un tensor de rango 2, simétrico, cuyas componentes se pueden interpretar como:

1.- T^{00} → densidad de energía.

2.- T^{0a} → densidad de flujo de energía y momento.

3.- T^{ab} → tensor de tensiones.

Apéndice 3: La generalización de la estructura electrodinámica al caso gravitacional

Las ecuaciones de onda y la propagación de los campos.- El fundamento de la electrodinámica son las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$:

$$\nabla.\vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\nabla x\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla.\vec{B} = 0,$$

$$\nabla x\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

donde ρ es la densidad de carga y $\vec{j}$ la densidad de corriente eléctrica.

Estas ecuaciones resumen en forma diferencial todos los fenómenos clásicos relacionados con el electromagnetismo. La primera ecuación corresponde a la ley de Gauss, que generaliza la fórmula de Coulomb para la fuerza ejercida por una carga sobre otra; la ecuación 2 expresa la ley de inducción de Faraday; la tercera ecuación es la condición de que no existan cargas magnéticas aisladas (monopolos magnéticos) en la naturaleza; la última ecuación es la ley de Ampere con el término adicional de Maxwell para la corriente de desplazamiento.

La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.\vec{j} = 0.$$

En general, una densidad de carga ρ con velocidad $\vec{v}$ produce una corriente

$$\boldsymbol{\vec{j}} = \rho\boldsymbol{\vec{v}}.$$

Por otra parte, La fuerza que actúa sobre una partícula de carga e está dada por la fuerza de Lorentz:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\,x\,\vec{B}\right).$$

Hay que notar que las ecuaciones de Maxwell describen el campo electromagnético producido por cargas en movimiento, pero no describen el movimiento de una carga en un campo electromagnético dado.

Esto último se complementa con la expresión para la fuerza de Lorentz.

Es conveniente expresar el campo electromagnético en términos de potenciales. La tercera ecuación de Maxwell implica que existe un vector $\vec{A}$ tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Metiendo esto en la segunda ecuación de Maxwell, se obtiene

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Lo cual implica, a su vez, que existe una función ∅ tal que

$$\vec{E} = -\nabla\emptyset - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Es importante notar que las dos últimas ecuaciones no cambian si en lugar de $\vec{A}$ y ∅ usamos

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi, \qquad \emptyset' = \emptyset - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

donde φ es una función totalmente arbitraria. Esto se llama invariancia de norma y permite imponer alguna condición adicional sobre los potenciales. Por ejemplo, consideremos el escalar definido por

$$\nabla.\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\emptyset}{\partial t}.$$

Frente a una transformación de norma se vuelve

$$\nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\emptyset'}{\partial t} = \nabla.\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\emptyset}{\partial t} + \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\varphi.$$

De aquí se ve que siempre se puede escoger una φ tal que

$$\nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\emptyset'}{\partial t} = 0.$$

La norma que cumple esta condición se llama norma de Lorentz.

Volviendo a las ecuaciones de Maxwell, mediante el uso de potenciales, podemos escribir

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla^2\emptyset - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla.\vec{A}}{\partial t} = 4\pi\rho.$$

De la misma forma, escribimos

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla x\left(\nabla x\vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla.\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} - \frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\emptyset}{\partial t} - \frac{\partial^2\vec{A}}{c^2\partial t^2}.$$

Con la norma de Lorentz, estas dos ecuaciones se reducen a

$$-\blacksquare\emptyset = 4\pi\rho,$$

$$-\blacksquare\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J},$$

donde

$$\blacksquare = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2.$$

Es el operador D´Alembertiano u operador de onda, y las ecuaciones para $\emptyset$ y $\vec{A}$ son una ecuación de onda. Se puede demostrar que los campos $\vec{E}\ y\ \vec{B}$, también satisfacen una ecuación de onda. En ausencia de cargas y corrientes, estas ecuaciones toman la forma

$$\blacksquare\vec{E} = \nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\blacksquare\vec{B} = \nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Es decir, los campos electromagnéticos se propagan como una onda, cuya velocidad es la velocidad de la luz c. En otras palabras, la luz es una onda electromagnética, cuya velocidad de propagación en el vacío es c.

El operador D´Alembertiano se puede escribir en la forma

$$\blacksquare = \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta},$$

y, por lo tanto, el D´Alembertiano es un operador escalar frente a transformaciones de Lorentz. En la relatividad especial, la densidad de carga y de corriente forman un cuadrivector, definido como

$$j^\alpha = (c\rho, \rho\vec{v}) = (c\rho, \vec{J}).$$

De manera similar, se fefine el cuadrivector potencial

$$A^{\alpha} = \left(\emptyset, \vec{A}\right).$$

Con lo que las ecuaciones de onda se pueden escribir

$$-\blacksquare A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^{\alpha}.$$

También se define el tensor antisimétrico de rango 2

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}.$$

Este tensor, llamado tensor de campo, tiene la forma explícita

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

y el tensor dual $F^{*}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\gamma\delta}, se\ expresa$

$$F^{*\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

De tal forma, que las ecuaciones de Maxwell ahora se expresan como

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\alpha},$$

$$\frac{\partial F^{*\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0.$$

Ya hemos mencionado en el segundo capítulo, que las ecuaciones de Maxwell son covariantes frente a transformaciones de Lorentz de la relatividad especial, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} = \Lambda_{\beta}^{-1\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\nu} \Lambda^{\beta}_{\rho} F^{\nu\rho},$$

$$j^{\prime\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\nu}\, j^{\nu},$$

por lo que

$$\frac{\partial F^{\prime\alpha\beta}}{\partial x^{\prime\beta}} = -\frac{4\pi}{c}\, j^{\prime\alpha}, \qquad\qquad \frac{\partial F^{*\prime\alpha\beta}}{\partial x^{\prime\beta}} = 0.$$

Aquí, sólo mencionaremos, que para el caso de la gravitación, Einstein demostró que sus ecuaciones de campo también satisfacen una ecuación de onda. Nuevamente, para un espacio-tiempo casi Minkowskiano, utilizamos $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ para campos débiles. Se puede demostrar que bajo estas consideraciones, las ecuaciones de campo de Einstein toman la forma

$$\begin{aligned} -16\pi T^{\nu}_{\mu} = 2R^{\nu}_{\mu} - g^{\nu}_{\mu}R &= \delta^{\sigma\lambda}\, \frac{\partial^2}{\partial x^{\sigma}\partial x^{\lambda}} \left(h^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}h\right) \\ &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(h^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}h\right). \end{aligned}$$

Esta “ecuación de onda” tiene la muy conocida solución familiar en la teoría de los potenciales retardados

$$\left(h^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\nu}_{\mu}h\right) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left[-16\pi T^{\nu}_{\mu}\right] dxdydz}{r}.$$

Así, de forma “similar” a los campos electromagnéticos, los efectos gravitacionales se propagan a través de ondas en el espacio-tiempo con una velocidad igual a la velocidad de la luz. También con analogía al campo electromagnético, las ondas gravitacionales transportan energía y momento. De esta manera, la teoría de la relatividad general, resuelve el problema de la ley de la gravitación universal de Newton, en donde los efectos de la gravitación se manifestaban de forma instantánea.

Leyes de conservación.- Las leyes de conservación de la energía y el momento de la mecánica clásica son fusionadas en la relatividad especial en el principio de conservación del cuadrivector de momento y energía

$$\sum p^{\alpha} = constante.$$

En el caso más general, se puede demostrar que el tensor de momento y energía $T^{\alpha\beta}$ cumple la relación:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \sum_{n} \delta^{3}\big(\vec{r} - \vec{r}_n(t)\big)\frac{d\tau}{dt}\, f_n^{\alpha}(t) = G^{\alpha}.$$

donde G^{α} es la densidad de fuerza.

Si las partículas están libres, p_n^{α} permanece constante y $T^{\alpha\beta}$ se conserva, y por lo tanto

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0.$$

Lo mismo es válido si las partículas interaccionan únicamente durante colisiones que están estrictamente localizadas en el espacio. Si $T^{\alpha\beta}$ representa el tensor de momento y energía puramente electromagnético en el vacío (es decir, en una región donde no hay cargas o corrientes), también se cumple la ecuación.

$$\frac{\partial T_{em}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0.$$

Si en la región del espacio hay cargas y corrientes el tensor de momento y energía electromagnético cumple

$$\frac{\partial T_{em}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{c}\, F^{\alpha\mu} j_{\mu},$$

donde $F^{\alpha\mu}$ es el tensor de campo y j_{μ} es el cuadrivector de carga y corriente y el término $F^{\alpha\mu} j_{\mu}$ representa la fuerza de Lorentz. Es decir, aquí $T_{em}^{\alpha\beta}$ no se conserva. También se puede demostrar que el tensor de momento y energía correspondiente a la presencia de materia sin presión cumple

$$\frac{\partial T_{mat}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = -\frac{1}{c} F^{\alpha\beta} j_{\beta}.$$

Por lo que sumando las últimas dos ecuaciones, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\mathrm{T}_{\boldsymbol{mat}}^{\boldsymbol{\alpha\beta}} + \mathrm{T}_{\boldsymbol{em}}^{\alpha\beta}\right) = \mathbf{0}.$$

Así vemos que el tensor de momento y energía total es la suma de los tensores del campo electromagnético y de la materia y se conserva. Ésta es la generalización relativista de teorema de Poiynting y la coservación del tensor de esfuerzos de Maxwell de la electrodinámica clásica:

$$\nabla.\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t}\,(U_{em} + U_{mat}),$$

$$\nabla.(-T) = \frac{\partial}{\partial t}(P_{em} + P_{mat}).$$

En el caso de la gravitación, al pasar a sistemas que no son localmente inerciales la ecuación $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = G^{\beta}$ tendrá que ser reescrita en forma generalmente covariante, por lo que tenemos que definir $T^{\mu\nu}$ y G^{ν} como tensores contravariantes que se reducen a la forma válida en la relatividad especial $T^{\alpha\beta}$ y G^{β} en ausencia de gravitación. Entonces, la ecuación generalmente covariante que se reduce a la ecuación anterior en sistemas localmente inerciales es

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = G^{\nu},$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{g}\, T^{\mu\nu}\right) = G^{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\, T^{\mu\lambda}.$$

El factor $\sqrt{g}$ aparece como consecuencia de que el volumen invariante es $\sqrt{g}d^4x$. El segundo término de la derecha representa una densidad de fuerza gravitacional que, como esperaríamos, depende del sistema sobre el que actúa a través del tensor de momento y energía únicamente. Se puede demostrar que para un tensor de momento y energía puramente material $T^{\mu\nu}$ el factor $\partial\left(T^{\mu\nu}g^{1/2}\right)/\partial x^{\nu}$ no se anula por el intercambio de energía y momento entre la materia y la gravitación.

Bibliografía

Corcho Orrit, Roger, *Galileo*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U, España (2012).

Durán Guardeño, Antonio, *Newton*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U, España (2012).

Muñoz Santonja, José, *Leibniz*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U, España (2013).

Blanco Laserna, David, *Einstein*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U, España (2012).

Areán Álvarez, Luis Fernando, *Fermat,* RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U, España (2012).

Marquina, José E., *La Tradición de Investigación Newtoniana*, Universidad Autónoma Metropolitana, México (2006).

Newton, Isaac, *De Gravitatione et aequipondio fluidorum*, (ca. 1684).

Goldstein, Herbert, *Classical Mechanics*, Aguilar, S.A, Madrid, (1963).

De la Peña, Luis, *Introducción a la mecánica cuántica*, Fondo de cultura económica, S.A de C.V, México (2006).

Hacyan, Shahen, *Relatividad especial para estudiantes de física*, Fondo de cultura económica, México (1995).

Tolman, Richard C., *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, Dover Publications, E.U.A (1987).

Sarmiento Galán, Antonio, *Gravitación*, Coordinación de servicios editoriales, Facultad de ciencias, UNAM, México (2004).

Blanco Laserna, David, *El bosón de Higgs*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U, España (2015).