



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
**Facultad de Estudios Superiores Zaragoza**  
**Ingeniería Química**

**Estudio experimental comparativo de la  
dinámica de flujo en  
contracción/expansión en geometrías  
axisimétrica y cuadrada de fluidos  
complejos.**

Tesis para obtener el título de:  
Ingeniero Químico

Presenta:  
Muñoz Garduño Kevin David

Dirigida por:  
Dr. Mariano Pérez Camacho

Ciudad de México    Diciembre 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*El principio de la ciencia es saber que ignoramos.*

-Fernando Pessoa

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Leticia Garduño, David Muñoz así como a Marco Olivares, por ser parte fundamental en todo lo que soy, tanto en la parte académica, como en la vida; por el apoyo, libertad y confianza brindados, incluso en ocasiones donde había perdido toda motivación. Una disculpa por todas las ausencias, espero poder compensar ese tiempo. Las palabras nunca serán suficientes para expresarlo.

A mis hermanos Brenda, David y Omar, espero ser un ejemplo para ustedes.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y en especial a la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza que me dieron el honor y placer de formar parte, así como representar con orgullo.

A mi director de Tesis, Dr. Mariano Pérez Camacho, mi más amplio agradecimiento por haberme confiado este trabajo; por su paciencia y su valiosa dirección, así como el apoyo para llegar a su culminación. Su experiencia y educación han sido una fuente de motivación para mi proyecto de vida. Y definitivamente vamos por más de lo que hemos logrado hasta ahora.

Al Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por su apoyo en la deducción matemática presente en este trabajo; así como por sus consejos y apoyo moral durante todo este tiempo. Espero seguir colaborando con usted, el Dr. Mariano y el equipo de investigación que se empieza a formar para hacer de FES Zaragoza punta de lanza en el estudio de la reología en el país.

A mis maestros, gracias por el tiempo, dedicación y sabiduría que permitieron mi formación profesional. Así como a los sinodales que evaluaron este trabajo y ayudaron con sus correcciones.

A mis amigos y compañeros: Hugo Vega, Javier Ayala, Alejandro Lozano, Miguel Reyes, Alfredo Ponce, Sergio Torres, Diego Arellano; personas con las que luché tantas batallas y con los que he compartido buenos y malos momentos, ya sea dentro o fuera del ámbito de mi carrera, sin su ayuda probablemente no hubiese llegado a este momento de mi vida. Muchas gracias por aguantarme y escucharme todos estos años. Agradezco al destino el coincidir con ustedes.

A Myriam Melo, tu ayuda ha sido fundamental. Este largo trayecto no fue fácil, pero estuve motivándome y ayudándome hasta donde tus alcances lo permitían, te lo agradezco muchísimo.

A todos aquellos familiares y amigos que no recordé al momento de escribir.

**Este trabajo de tesis contó con el respaldo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IA106818>>**

# CONTENIDO

<u>Fundamentación</u> .....	10
<u>Objetivos</u> .....	10
<u>Hipótesis</u> .....	11
<u>Capítulo 1: Antecedentes del flujo en contracción/expansión</u> .....	12
1.1 Geometría axisimétrica.....	12
1.2 Geometría cuadrada.....	20
<u>Capítulo 2: Dinámica de flujo en geometrías axisimétrica y cuadrada y su relación con la caída de presión</u> .....	26
2.1 Geometría axisimétrica.....	26
2.1.1 Interacción de la primera diferencia de esfuerzos normales en corte en el esfuerzo extensional uniaxial.....	28
2.1.2 Caída de presión total.....	30
a) Ecuación de Hagen-Poiseuille.....	30
b) Caída de presión total.....	31
c) Caída de presión en exceso.....	32
2.2 Geometría cuadrada.....	34
a) Ecuación de Hagen-Poiseuille para geometrías cuadradas.....	36
b) Caída de presión total en geometrías cuadradas.....	40
c) Caída de presión en exceso en geometrías cuadradas.....	43
2.3 Disipación viscosa en un flujo contracción/expansión.....	45
2.4 Propuesta de la evaluación de la viscosidad extensional.....	46
2.5 Estudio de la dinámica de flujo a partir de la formación de vórtices.....	46

<u>Capítulo 3 Desarrollo experimental</u> .....	48
a) Preparación de soluciones.....	48
b) Reología cortante de las soluciones viscoelásticos empleadas.....	50
c) Descripción del equipo experimental.....	53
<u>Capítulo 4 Resultados y análisis obtenidos para cada relación de contracción</u> .....	58
Relación de contracción 2:1:2.....	64
Relación de contracción 4:1:4.....	74
Relación de contracción 6:1:6.....	82
Relación de contracción 8:1:8.....	90
Relación de contracción 10:1:10.....	98
<u>Conclusiones</u> .....	100
<u>Referencias bibliográficas</u> .....	103
<i>Apéndice I – Caída de presión de un fluido newtoniano a través de un ducto cuadrado</i> .....	105
<i>Apéndice II - Caída de presión de un fluido newtoniano a través de un tubo cilíndrico</i> <i>(Ecuación de Hagen-Poiseuille) .....</i>	128

## Índice de figuras y tablas

- Figura 1.1-1 Tipos de sistemas de contracción en geometría axisimétrica .....12
- Figura 1.1-2 Diferente tipos de vórtices en flujos contracción/expansión.....14
- Figura 1.1-3 Régimen de crecimiento de vórtice y régimen de flujo divergente.....16
- Figura 1.1-4 Comparativa de la EPD vs No. We en una contracción/expansión 4:1:4.....19
- Figura 1.2-1 Tipos de sistemas de contracción en geometría cuadrada.....20
- Figura 1.2.2 Líneas de flujo en geometría cuadrada.....21
- Figura 2.1.1 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en geometría axisimétrica para un fluido newtoniano.....26
- Figura 2.1-2 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en contracción axisimétrica para un fluido viscoelástico.....28
- Figura 2.1-3 Interacción de la primera diferencia de esfuerzos normales a lo largo de la distancia radial en geometría axisimétrica.....29
- Figura 2.1-4 Caídas de presión en un sistema contracción/expansión axisimétrico.....31
- Figura 2.1-5 Contribuciones en el cálculo de la caída de presión total.....32
- Figura 2.2-1 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en geometría cuadrada.....34
- Figura 2.2-2 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en contracción/expansión en geometría cuadrada.....35
- Tabla 2.2-1 Comparativa entre valores de caída de presión en tubería cuadrada en dos modelos distintos.....39
- Figura 2.2-3 Ejes de referencia para los modelo de ductos cuadrados.....40
- Figura 2.5-1 Longitudes utilizadas en la caracterización de vórtices.....47
- Figura 3.1 Tipos de asociaciones moleculares del Hase.....48
- Figura 3.2 Reología comparativa entre Hase y Boger en geometría axisimétrica.....51
- Figura 3.3 Reología comparativa entre Hase y Boger en geometría cuadrada.....52

- Figura 3.4 Equipo experimental utilizado para evaluar caídas de presión en contracción/expansión.....53
- Tabla 3.1 Dimensiones de las placas de contracción utilizadas.....54
- Figura 3.5 Zona de control eléctrico.....55
- Figura 3.6 Sistema para la visualización de los vórtices generados a partir de flujos en contracción/expansión.....56
- Figura 4.1-1/2 Comparativa entre caídas de presión total vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 2:1:2).....59
- Figura 4.1-3/4 Comparativa entre caídas de presión en exceso vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 2:1:2).....60
- Figura 4.1-5/6 Comparativa entre la energía liberada por interacción viscosa (contracción/expansión 2:1:2).....61
- Figura 4.1-7 Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger (contracción/expansión 2:1:2).....62
- Figura 4.1-8/9 Comparativa entre viscosidad extensional vs rapidez de deformación (contracción/expansión 2:1:2).....63
- Figura 4.2-1/2 Comparativa entre caídas de presión total vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 4:1:4).....69
- Figura 4.2-3/4 Comparativa entre caídas de presión en exceso vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 4:1:4).....70
- Figura 4.2-5/6 Comparativa entre la energía liberada por interacción viscosa (contracción/expansión 4:1:4).....71
- Figura 4.2-7 Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger (contracción/expansión 4:1:4).....72
- Figura 4.2-8/9 Comparativa entre viscosidad extensional vs rapidez de deformación (contracción/expansión 4:1:4).....73
- Figura 4.3-1/2 Comparativa entre caídas de presión total vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 6:1:6).....77
- Figura 4.3-3/4 Comparativa entre caídas de presión en exceso vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 6:1:6).....78

- Figura 4.3-5/6 Comparativa entre la energía liberada por interacción viscosa (contracción/expansión 6:1:6).....79
- Figura 4.3-7 Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger (contracción/expansión 6:1:6).....80
- Figura 4.3-8/9 Comparativa entre viscosidad extensional vs rapidez de deformación (contracción/expansión 6:1:6).....81
- Figura 4.4-1/2 Comparativa entre caídas de presión total vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 8:1:8).....85
- Figura 4.4-3/4 Comparativa entre caídas de presión en exceso vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 8:1:8).....86
- Figura 4.4-5/6 Comparativa entre la energía liberada por interacción viscosa (contracción/expansión 8:1:8).....87
- Figura 4.4-7 Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger (contracción/expansión 8:1:8).....88
- Figura 4.4-8/9 Comparativa entre viscosidad extensional vs rapidez de deformación (contracción/expansión 8:1:8).....89
- Figura 4.5-1/2 Comparativa entre caídas de presión total vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 10:1:10).....93
- Figura 4.5-3/4 Comparativa entre caídas de presión en exceso vs flujo volumétrico y la referencia newtoniana (contracción/expansión 10:1:10).....94
- Figura 4.5-5/6 Comparativa entre la energía liberada por interacción viscosa (contracción/expansión 10:1:10).....95
- Figura 4.5-7 Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger (contracción/expansión 10:1:10).....96
- Figura 4.5-8/9 Comparativa entre viscosidad extensional vs rapidez de deformación (contracción/expansión 10:1:10).....97

## **Fundamentación**

Este trabajo es una investigación sobre la dinámica de flujo de fluidos viscoelásticos en flujo contracción/expansión analizadas a partir de caídas de presión. Este tipo de sistemas han sido punto de partida para numerosos estudios en distintos tipos de fluidos dado el gran interés que existe en la comprensión de los fenómenos de flujo que existen en muchas aplicaciones a la ingeniería, como la extrusión, procesos de moldeo por inyección, etc.

El presente estudio tiene su origen en trabajos previos que tienen que ver con la construcción y operación del equipo para realizar la experimentación de flujos en contracción/expansión, el cual tiene la posibilidad de operar con diferentes geometrías y con diferentes relaciones de contracción, con el fin principal de investigar el cambio en la dinámica del flujo de una amplia variedad de fluidos viscoelásticos a partir de la estimación de caídas de presión.

Para lograr esto se requiere la comparación de dos trayectorias de  $\Delta P_{Tot}$  vs  $Q$ ; una para un fluido newtoniano y otra de un fluido viscoelástico en la que ambos compartan la misma viscosidad al inicio del experimento ante una misma relación de contracción. Este procedimiento se realizará en dos geometrías distintas; una geometría cilíndrica o axisimétrica, así como una tubería con geometría cuadrada, con dimensiones iguales a las del primer sistema.

Asimismo, para fines de esta investigación, se dedujo una expresión analítica que proporciona los perfiles de velocidad y de flujo volumétrico para una geometría cuadrada, la cual es válida para cualquier geometría rectangular, cuyos resultados concuerdan con los obtenidos mediante cálculos computacionales complejos.

## **Objetivos**

En este trabajo se compararon los cambios en la dinámica de flujo de tres fluidos, el primero de ellos de viscosidad cortante constante pero elástico (fluido de Boger) el segundo de comportamiento adelgazante y elástico (Hase 2.5% W), y el tercero de características newtonianas que servirá como medio de referencia. Los tres fluidos se estudiaron a través de cinco relaciones de contracción (2:1:2, 4:1:4, 6:1:6, 8:1:8, 10:1:10). Tanto en geometría axisimétrica como geometría cuadrada.

En este trabajo se estudiarán y compararán los siguientes aspectos de la dinámica de flujo:

- Las condiciones dinámicas que permitan identificar la transición del flujo controlante de cortante a extensional en el sistema, mediante el estudio de trayectorias de  $\Delta P_{Tot}$  vs  $Q$ , a fin de esclarecer el efecto del cambio de geometría y su impacto respecto a otras variables como la relación de contracción, las propiedades reológicas (la viscosidad extensional o cortante) así como la elasticidad, sobre la dinámica de flujo en cada una de las dos geometrías.
- Investigar las trayectorias de caída de presión en exceso a valores bajos de flujo, a fin de explicar las condiciones dinámicas y reológicas, que provocan que los fluidos viscoelásticos presenten un descenso de la caída de presión en exceso a la que presenta un fluido newtoniano con el mismo valor de viscosidad cortante.
- El papel que desempeña la elasticidad del fluido en la dinámica de flujo. La formación, crecimiento y el tipo de vórtices son manifestaciones elásticas que fluidos viscosos no presentan por lo que su presencia debe influir en particular a la caída de presión y en general a la dinámica de flujo en el sistema.
- La presencia de un flujo extensional uniaxial de características homogéneas, condición que resulta de gran importancia en la determinación de la viscosidad extensional.

## **Hipótesis**

El cambio de geometría repercutirá en gran medida en el desarrollo de la dinámica de flujo en contracción/expansión, lo cual se verá reflejado en las trayectorias de caída de presión en exceso, y por tanto, en el desarrollo de flujo extensional a lo largo de las relaciones de contracción estudiadas.

# CAPÍTULO 1

## ANTECEDENTES EN EL ESTUDIO DE FLUJOS EN CONTRACCIÓN/EXPANSIÓN

### 1.1 Geometría axisimétrica

Un sistema en contracción consiste en dos tubos colocados en serie, uno de los cuales presenta una reducción en su radio. Cuando el flujo por el tubo con diámetro  $D_1$  se ve obligado a pasar por la tubería de diámetro menor  $D_2$ , este tiende a alcanzar el régimen estacionario con una cantidad de energía menor a la desarrollada a través del tubo en la parte superior. A este arreglo se le conoce como contracción simple. (Figura 1.1-1a)

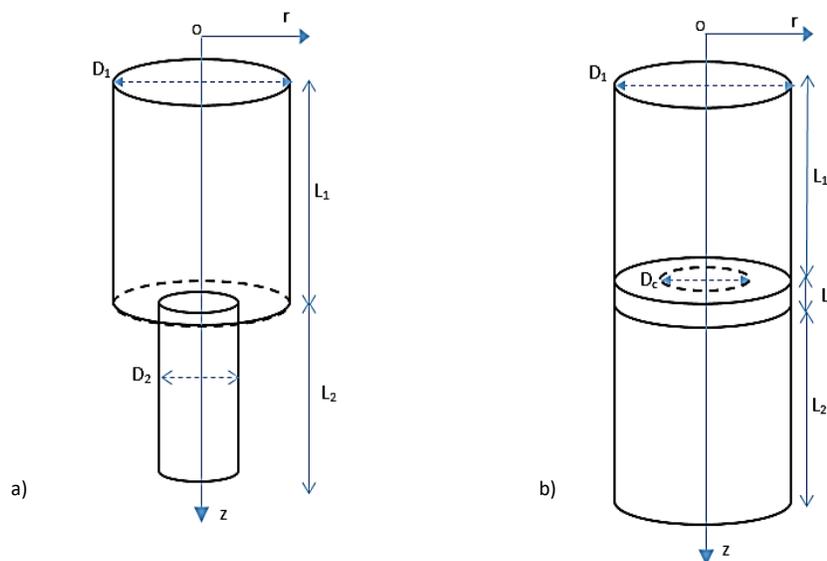


Figura 1.1-1 – Tipos de sistemas de contracción en geometría axisimétrica.  
(a) Contracción simple (b) contracción/expansión

Para el sistema contracción/expansión (figura 1.1-1b), la reducción de diámetro se da en una corta distancia, regresando súbitamente a su diámetro original; por lo que se esperaría que el flujo alcanzara las condiciones que se presentaban antes de la contracción.

Un parámetro de gran utilidad en el estudio de este tipo de sistemas de flujo es la relación de contracción, dada por:

$$\text{Relación de contracción} = \frac{D_1}{D_2} \quad [1.1]$$

Y permite estudiar el efecto de la liberación de energía que sufre el fluido en la contracción con el fin de alcanzar el régimen permanente, así su impacto en la dinámica de flujo del sistema.

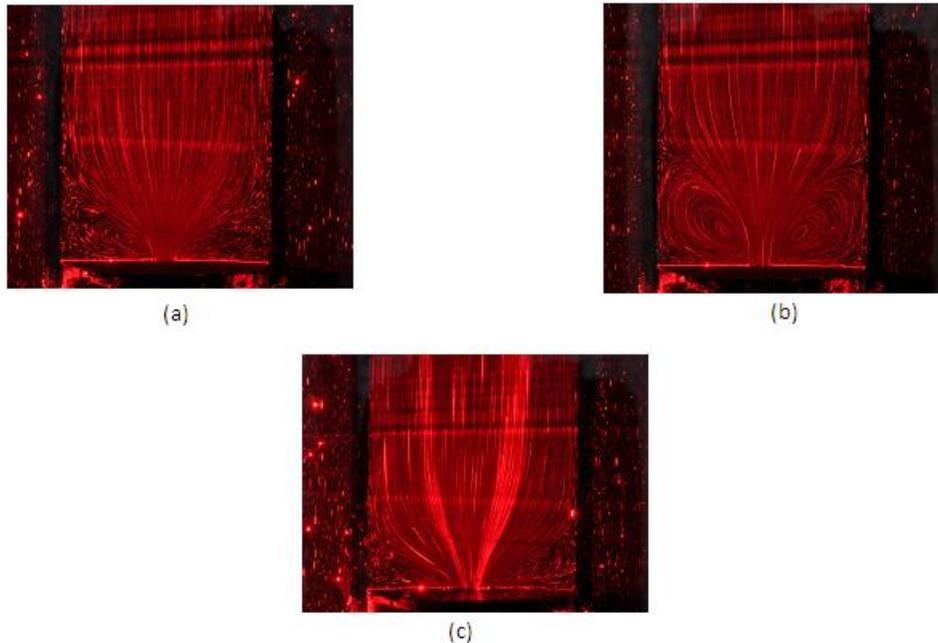
Para las relaciones de contracción/expansión empleadas en este trabajo, se emplea una nomenclatura del tipo n:1:n (para n=2,3,4...etc.), donde n proporciona el incremento del diámetro del tubo principal respecto al diámetro de contracción; por ejemplo, una contracción/expansión 2:1:2, indica que el diámetro del tubo principal es dos veces más grande que diámetro de la contracción.

Debido a que tanto el tubo principal, como la contracción, comparten el mismo eje de referencia (ubicado en el centro del círculo definido por el área de sección transversal), esta geometría es llamada axisimétrica y permite que la visualización de las líneas de flujo del sistema pueda darse a cualquier ángulo de observación, al dividir el flujo en dos partes exactamente iguales.

Cuando el fluido de estudio en un sistema de contracción o contracción/expansión es de características viscoelásticas, es frecuente la formación de vórtices en las cercanías de la contracción. Para un determinado número de Deborah del sistema (definido como el tiempo característico del material entre el tiempo de observación), se presentan diversos tamaños y formas de vórtice:

- Vórtice de labio o Lip vortex - Se presenta a números de Deborah bajos; inician su crecimiento en los bordes externos de la contracción. (figura 1.1-2a)
- Vórtices de esquina o Corner vortex – Se presentan a números de Deborah mayores. Son la evolución de los vórtices de labio; su crecimiento se realiza sobre las paredes del tubo de mayor diámetro (figura 1.1-2b)

- Vórtice secundario –Tienen origen en el borde de la contracción, y provoca una disminución de la distancia  $L_v$  del vórtice principal previamente formado. Puede darse que su crecimiento llegue a una única manifestación, suprimiendo al vórtice primario. (figura 1.1-2c)



*Figura 1.1-2 diferentes tipos de vórtices en flujos contracción/expansión.  
 (a) Lip vortex (b) Corner vortex (c) vórtice secundario (Pérez, 2016)*

Los primeros estudios concernientes al estudio de flujos en contracción con fluidos viscoelásticos fueron llevados por Nguyen y Boger en 1985 [14]. El propósito principal de este trabajo fue el de aminorar los efectos inerciales y la naturaleza adelgazante que presentaban la mayoría de los fluidos no newtonianos, para el cual los autores diseñaron un fluido específico: presenta elasticidad y su viscosidad cortante es constante a lo largo del tiempo. Este fluido, elaborado a partir de glucosa de maíz y poliacrilamida, fue posteriormente conocido bajo el nombre de fluido de Boger; con él, los autores realizaron estudios sobre el crecimiento de vórtices en contracciones axisimétricas a diferentes relaciones de contracción.

Para una variedad de fluidos elásticos, se observó el desarrollo de vórtices con un comportamiento similar; incluso para aquellos fluidos de naturaleza adelgazante, lo que llevó

a la conclusión que los vórtices presentes eran una consecuencia de la elasticidad del fluido. Esta es una de las premisas que generalmente se emplean para describir la dinámica de flujos en contracción. No obstante, los autores no consideraron predecir la reología ni la dinámica de flujo, aunque mostraron de forma indirecta la presencia de un flujo cortante en la contracción.

El siguiente paso lo dieron Cable & Boger [6,7] estudiando geometrías axisimétricas a diferentes relaciones de contracción (4 a 16) con dos fluidos de Boger; el primero a base de glucosa y poliacrilamida, y el segundo una mezcla de poliisobuteno/polibuteno, de características reológicas similares. Boger y sus colaboradores observaron una fuerte formación de vórtices en el primer fluido al variar la rapidez de corte en la contracción, en particular en la contracción 4:1, donde reportaron un cambio importante en la trayectoria de los vórtices. A valores bajos de rapidez de corte, los vórtices mostraron una serie de contornos cóncavos hacia fuera; al incrementar la rapidez de corte, dan lugar a vórtices de forma convexa.

Para el segundo fluido de Boger, la presencia de vórtices fue evidente a valores de rapidez de corte bajos ante una relación de contracción 4, en el cual al incrementar la rapidez de corte, la longitud del corner vortex formado disminuyó, mientras un vórtice secundario se empezaba a formar en la parte superior de la contracción. Un aumento en el flujo daba lugar a un predominio del vórtice secundario sobre el principal, hasta el punto de que el vórtice primario se reducía, incorporándose al vórtice secundario.

Estos resultados arrojaron que las condiciones de flujo en la contracción eran debidas principalmente por las características reológicas del fluido a estudiar. Boger, en un análisis posterior [5], atribuyó el cambio de las condiciones de flujo a un desarrollo desigual de la viscosidad extensional de ambos fluidos, a una misma relación de contracción.

La existencia de un segundo flujo, que ocasiona una respuesta diferente en fluidos viscoelásticos similares, para una misma relación de contracción y velocidad de corte, significó para Boger un avance en la comprensión del sistema en contracción; sin embargo aún no se tenía las respuestas acerca del origen y las condiciones para la formación de los vórtices. White y Kondo [33] dieron la propuesta, actualmente aceptada, de que los vórtices son un mecanismo que presenta el flujo para liberar energía, debido a un requerimiento

energético menor por parte del fluido en la contracción. Para el primer fluido de Boger utilizado en el estudio mencionado anteriormente, el crecimiento de un segundo vórtice, (el cual aumentó de tamaño para números de Deborah altos), se debe a un máximo valor en el consumo de energía involucrada para la disipación viscosa y el crecimiento del vórtice; por lo que la aparición del vórtice secundario representa un nuevo mecanismo de disipación energética, consumiendo una cantidad de energía mayor que el vórtice principal.

Boger y Cable [6,7], con toda la información obtenida hasta el momento, realizaron estudios puntuales de velocidad a lo largo del eje radial en la vecindad de la contracción, con relaciones 2:1 y 4:1 usando soluciones de poliacrilamida.

Los autores propusieron dos regímenes de flujo: el régimen de crecimiento de vórtice y el régimen divergente; con los cuales se plasmaba la idea de la presencia de un flujo cortante y un flujo extensional, así como la participación de ambos en la dinámica de flujo. (Figura 1.1-2)

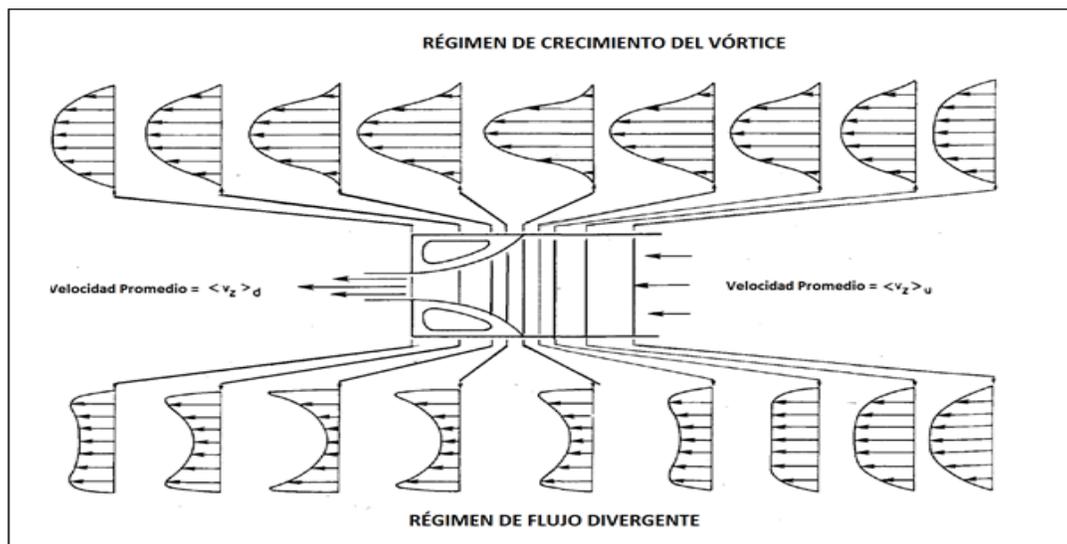


Figura 1.1-3 - Régimen de crecimiento del vórtice y régimen de flujo divergente

(Cable and Boger - AIChE Journal 24-1978-869)

En su texto se puede leer:

*“No está claro, sin embargo, la causa de la desaceleración de las partículas del fluido en la línea central. Es casi como pensar que el fluido es confrontado por un obstáculo invisible corriente arriba del pequeño tubo de entrada y el fluido es forzado a fluir alrededor de este, resultando un flujo divergente y una velocidad máxima cerca de la pared”*

La presencia del flujo extensional, que daba lugar a una viscosidad extensional uniaxial, es la responsable de este comportamiento desconocido en ese momento, así como el de la aparición de los vórtices, pero aún no mostraba indicios sobre la formación de los vórtices secundarios.

Binding [3] en su propuesta de dinámica de flujo, consideró dos aspectos: el flujo dominante en el fluido al pasar por la contracción y el efecto elástico de la solución empleada en flujo cortante, determinado a partir de la primera diferencia de esfuerzos normales.

Para ello propuso dos mecanismos:

- Flujo cuasi-radial – Presente a valores bajos de rapidez de corte. Considera que el flujo tiene una contribución radial, adicional a la llevada en dirección axial, la cual tiene su origen en la naturaleza elástica del fluido; desarrollando un flujo cortante incluso por encima del flujo extensional para relaciones de contracción grandes. Corresponde con el régimen de crecimiento de vórtices propuesto por Boger.
- Flujo tipo embudo – Se da a valores altos de rapidez de corte. Las líneas de corriente toman una forma cónica hacia el interior de la contracción, favoreciendo el desarrollo del flujo extensional uniaxial, sobre el flujo cortante. En esta etapa se manifiesta el vórtice secundario, inhibiendo el crecimiento del vórtice primario.

Rothstein y McKinley [19] estudiaron la dinámica de flujo contracción/expansión a diferentes relaciones en contracción, usando dos fluidos de Boger, uno a base de poliestireno (PS/PS) y otro de poliisobuteno/isobuteno (PIB/PB) a diferentes relaciones de contracción. Para una contracción 2:1:2, el fluido de Boger PS mostraba lip vortex a cualquier intervalo de rapidez de corte evaluada, con lo que para ese conjunto de condiciones, el flujo dominante era el cortante. En cambio, a relaciones 4:1:4 y 8:1:8, se manifestaban corner vortex, los

cuales indicaban una presencia dominante del flujo extensional uniaxial; dando como conclusión que las relaciones de contracción tienen efectos importantes sobre el tipo de flujo dominante.

Extrañamente, ante las mismas condiciones, en el fluido de Boger PIB/PB el efecto de la relación de contracción fue nulo, presentándose lip vortex en todas las observaciones, el cual los autores atribuyeron a la rigidez de la solución.

Los estudios sobre la dinámica de flujo a partir de mediciones de caída de presión son escasos. Uno de los primeros trabajos experimentales fue llevado a cabo por Cártalos y Piau [8] que estudiaron soluciones con moléculas flexibles (poliacrilamida parcialmente hidrolizada disuelta en glucosa con agua) y semirrígidas (poliacrilamida parcialmente hidrolizada en ausencia de sal) a través de un sistema contracción/expansión.

Para un gráfico de caída de presión total vs flujo volumétrico, los autores plantearon tres mecanismos para moléculas flexibles:

- Régimen viscoelástico lineal – Se da a valores de rapidez de corte bajos. La caída de presión total muestra una trayectoria lineal al incrementar el flujo; las moléculas son deformadas ligeramente.
- Régimen cuadrático intermedio – La caída de presión varía linealmente con el gasto al cuadrado; las moléculas se desenvuelven y se extienden por efecto del flujo extensional
- Régimen viscoso lineal – Las moléculas son fuertemente tensionadas debido a su interacción hidrodinámica, en esta condición las moléculas alcanzan su máxima longitud, dando lugar a un comportamiento newtoniano.

Rhotstein y McKinley [20] estudiaron un fluido de Boger base poliestireno en flujo cortante a través de una contracción/expansión a diferentes relaciones de contracción, donde encontraron que para toda relación de contracción evaluada, siempre se dio un incremento en la caída de presión en exceso adimensional respecto a la referencia newtoniana correspondiente. (Figura 1.1-4b)

Esto llevo a una discordancia entre los resultados numéricos y experimentales; donde para los primeros existe un ligero descenso en la caída de presión, debido a la presencia elástica de la solución desarrollada por la primera diferencia de esfuerzos normales en corte. Llegado a un valor mínimo, la caída de presión asciende, dando paso a la transición en el flujo dominante en la contracción, de cortante a extensional. (Figura 1.1-4a)

Diversos autores han propuesto avances desde el punto de vista numérico para explicar la dinámica de flujo relacionada a la caída de presión, utilizando generalmente como ecuación reológica el modelo de Oldroyd-B [26, 27]. Pero en opinión de investigadores [29, 30, 31] este no permite predecir valores de caída de presión en exceso a valores de rapidez de corte altos, ya que estos llegan a magnitudes mayores respecto a un fluido newtoniano con viscosidad cortante similar.

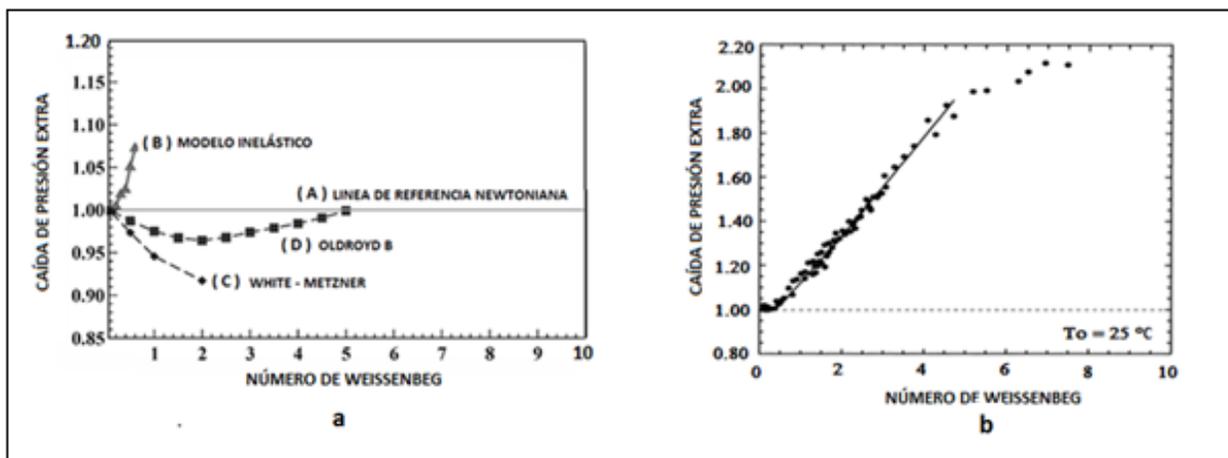


Fig 1.1-4 Comparativa de la EPD vs No. We en una contracción/ expansión 4:1:4  
 (a) Resultados numéricos obtenidos por Walters (b) Resultados experimentales por Rhotstein.  
 (Walters et al. Korea-Australia Rheology Journal 21(4)-2009-939  
 Rothstein and McKinley. Journal of Non Newtonian fluid Mechanics 86-1999 -61)

## 1.2 Geometría cuadrada

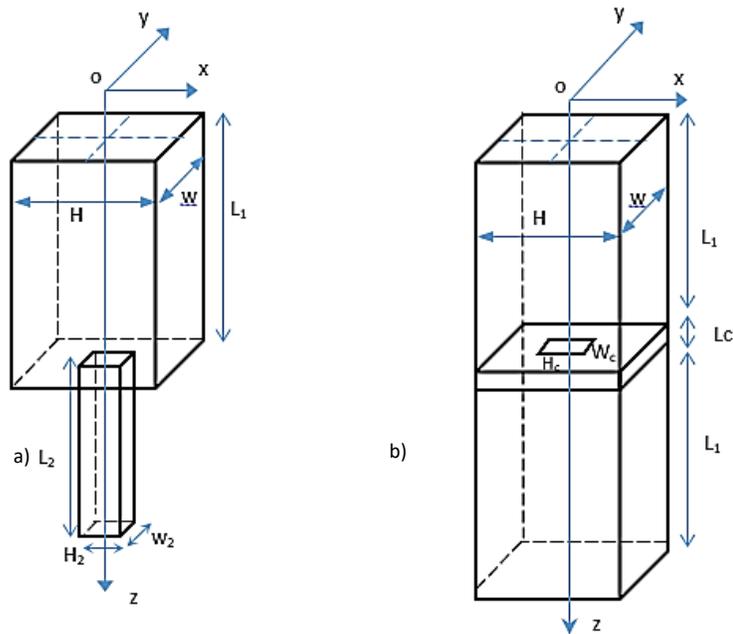


Figura 1.2-1 – Tipos de sistemas de contracción en geometría cuadrada.  
(a) Contracción simple      (b) contracción/expansión

Algunas de las diferencias que presenta un sistema de contracción en geometría cuadrada respecto al tipo de geometría anterior son el aumento en el área de sección transversal comparado con el tubo cilíndrico de radio equivalente, además de una mayor área de contacto del fluido con las paredes del tubo. (Véase tabla 3.1) En las contracciones en este tipo, el tramo principal y la contracción comparten el mismo eje de referencia en la línea central (figura 1.2-1), por lo que podrían considerarse axisimétricos; esto último carga con el inconveniente de que la visualización de los vórtices generados no se da de igual manera para todo ángulo de observación, sino que se tienen dos planos principales para su visualización: el plano central a la dirección a estudiar, y el plano formado por la diagonal principal. (Figura 1.2-2 a/b)

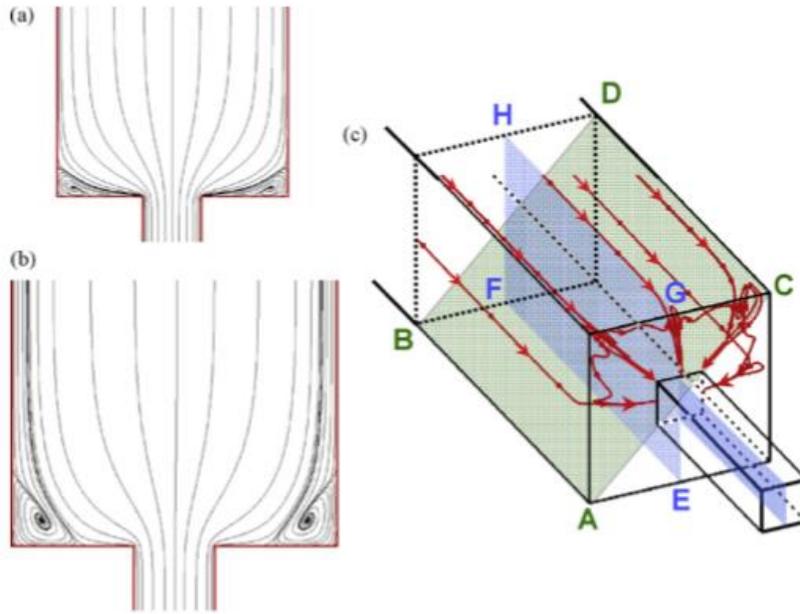


Figura 1.2-2 – Líneas de flujo predichas en (a) el plano central (EFGH), (b) en plano diagonal (ABCD), (c) seguimiento de las partículas trazadas, mostrando la tridimensionalidad del flujo.  
 (Sousa, Coelho, Oliveira, Alves, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 160(2009)-126)

La mayoría de las investigaciones de flujos en contracción (experimentales y numéricas) se han concentrado en el estudio de geometrías axisimétricas, planares o cuasi-planares. Una configuración planar resulta más sencilla al comparar con soluciones numéricas; usualmente los efectos tridimensionales son despreciables, y los resultados experimentales pueden ser descritos adecuadamente usando simulaciones bidimensionales. Los arreglos axisimétricos son más frecuentes en problemas de flujo real, y bajo condiciones de estado estacionario, menos demandantes para una simulación.

Como describe Boger [14], un fluido viscoelástico fluyendo a través de contracciones axisimétricas, presenta una gran variedad de patrones de flujo que dependen de la relación de contracción, la reología del fluido y las condiciones de flujo predominantes. Por ejemplo, los grandes vórtices de esquina, desarrollados arriba de la contracción, son normalmente precedidos por la formación de vórtices de labio en la entrada de la contracción, cuando el número de Deborah aumenta. Los trabajos de Evans & Walters [10, 11] y Walters & Webster [32], entre otros, estudiaron el flujo de soluciones de poliacrilamida en contracciones planares.

Posteriormente, Purnode & Cochet [17] simulaban numéricamente los resultados experimentales obtenidos por Evans & Walters [10, 11] usando la ecuación constitutiva FENE-P. Era innegable el efecto de la concentración del polímero, la relación de contracción y la geometría empleada en el desarrollo y apariencia de los vórtices. Los autores encontraron que los vórtices de esquina observados, incrementaban su longitud con la concentración de polímero, mientras los vórtices de labio aparecían para soluciones con baja viscosidad.

Son muchos los casos donde el flujo es marcadamente tridimensional, por lo que una aproximación 2D es inadecuada para describir las condiciones de flujo; como las que podrían darse en una geometría cuadrada-cuadrada, donde la contracción ocurre en dos direcciones perpendiculares, ofreciendo ventajas para su estudio como lo son su relativa simplicidad y el desarrollo de un flujo complejo.

Muchas de las simulaciones de fluidos viscoelásticos en contracciones tridimensionales realizadas anteriormente, solo representan una extensión de modelos bidimensionales a lo largo de la dirección perpendicular, atribuyendo los efectos tridimensionales solamente a la presencia de las paredes. [2] Los estudios se han enfocado en los patrones de flujo existentes en estos sistemas, así como en comparaciones con contracciones circulares en términos de flujo y en las variaciones de velocidad de deformación. Estos patrones de flujo han sido frecuentemente documentados para fluidos newtonianos, así como fluidos de Boger.

Muchas de las investigaciones de fluidos viscoelásticos en geometrías 3D son para contracciones planares con paredes separadas una distancia finita, por ejemplo, el trabajo de Mompean & Deville [13]. Donde el flujo de un fluido Oldroyd-B fue simulado numéricamente usando cálculos bidimensionales y cuasibidimensionales.

Los autores encontraron que los resultados obtenidos por los cálculos 3D eran muy diferentes a los obtenidos asumiendo una aproximación a 2D. Xue [34], también estudio un flujo viscoelástico en 3D utilizando un método de volumen finito. Los resultados tridimensionales fueron comparados con modelos bidimensionales usando los modelos Convectivo superior de Maxwell (UCM) y Phan-Thien-Tanner (PTT), para describir fluidos de Boger y adelgazantes, respectivamente.

Sirakov [23] estudio el flujo de fluidos viscoelásticos en tubería cuadrada hacia una contracción circular, con un área de sección transversal pequeña. Los autores reportaron la formación de estructuras parecidas a vórtices en el flujo a través de la contracción. Este comportamiento tridimensional observado experimentalmente fue consistente con el resultado numérico. Alves [2] investigó el flujo en una contracción cuadrada/cuadrada 4:1 para fluidos newtonianos y no newtonianos. En ambos casos, Los diferentes tipos de patrones de flujo observados en estos experimentos fueron perfectamente simulados de forma numérica.

Sousa [25] investigó el efecto de la relación de contracción en el flujo a través de contracciones cuadrado/cuadrado para un fluido newtoniano y para un fluido de Boger. Para relaciones de contracciones 2.4, 4, 8 y 12 se observó que para fluidos newtonianos, el vórtice de esquina formado en la parte superior de la contracción decrece en tamaño de forma monótona conforme el número de Reynolds aumenta. Por otro lado, el fluido viscoelástico presenta una dinámica de flujo diferente que depende en gran medida de la relación de contracción que se estudie: para relaciones de contracción pequeñas, líneas de flujo divergentes arriba de la contracción son observadas, empezando a manifestarse como una disminución en el tamaño del vórtice inicial, al aumentar el número de Deborah. Este comportamiento se debe a que parte de la energía disipada, responsable del crecimiento del vórtice, es invertida en el desarrollo del flujo.

Para relaciones de contracción grandes, la zona de crecimiento de vórtices es definida perfectamente por el desarrollo de un flujo divergente, formado en las cercanías de la contracción, mostrando líneas de flujo anómalas que entran por debajo del vórtice, que indican el nacimiento de un vórtice secundario. A números de Deborah aún más grandes, la inestabilidad elástica aparece y el fluido se vuelve dependiente del tiempo.

Para el fluido viscoelástico estudiado, las partículas trazadas entran al vórtice desde el plano central y salen por el plano diagonal hacia el ducto inferior; cuando el fluido es newtoniano, el proceso es inverso: las partículas entran por el plano diagonal y salen por el plano central cerca de la contracción. (Figura 1.2.1c) Para las condiciones experimentadas, el flujo es simétrico respecto al plano diagonal ( $y \pm z$ ), excepto cuando el fluido se vuelve dependiente del tiempo a números de Deborah altos, y el flujo pierde toda simetría.

El flujo de fluidos viscoelásticos con un comportamiento adelgazante en contracciones cuadradas también ha sido estudiado numérica y experimentalmente por Alves [1] usando relaciones de contracción 4:1. Los autores encontraron un fuerte desarrollo de vórtices, donde el flujo tiende a ser inestable a números de Deborah grandes. La representación del comportamiento extensional del fluido empezaba a tomar importancia para la correcta predicción de los patrones de flujo.

Recientemente Sousa y sus colaboradores [24] han estudiado la dinámica de flujo a través de este tipo de geometrías, mediante experimentaciones comparadas con modelos computacionales, tanto para fluidos newtonianos como fluidos con propiedades adelgazantes.

Para el fluido newtoniano, para todo rango de contracciones de contracción estudiadas, un vórtice aparece encima del plano de la contracción, el cual disminuye sus dimensiones al incrementarse la inercia de flujo; para el fluido viscoelástico adelgazante, a números de Deborah bajos, el flujo presenta características newtonianas, pero al incrementarse, la longitud de los vórtices incrementa significativamente; para toda relación de contracción, además de presentarse el efecto elástico, el incremento de la longitud del vórtice es acompañada con una inversión en la trayectoria. Para relaciones de contracción bajas (2.4 y 4) líneas de flujo divergentes aparecen cuando el número de Deborah aumenta, las cuales no se presentan en las relaciones de contracción restantes. Independientemente de la relación de contracción estudiada, la elasticidad provoca que el flujo eventualmente se vuelva dependiente del tiempo, y el tamaño del vórtice sea variable.

Un estudio referente al efecto de la caída de presión en una contracción de tipo cuadrado fue la realizada por Sousa [25], para fluidos newtonianos y de Boger; el cual parte de la medida experimental de caída de presión entre dos puntos colocados en la parte superior e inferior de la contracción, y analizar su comportamiento en función del flujo.

En la curva de caída de presión contra flujo volumétrico evaluada en este estudio se mostraron características similares para toda relación de contracción estudiada, donde la caída de presión aumenta de manera no lineal con el flujo. Se evaluó una caída de presión en exceso (EPD) (Véase capítulo 2.1.1c), la cual es medida del desarrollo del flujo extensional en la contracción y es asociada al crecimiento de vórtices en flujos en contracción. Esta

cantidad es calculada restando la caída de presión totalmente desarrollada en flujo de Poiseuille arriba y debajo de la contracción, de la caída de presión total a través de la contracción.

Se estimó  $\frac{dP}{dx}$  de dos maneras distintas: considerando los valores teóricos calculados como un flujo de Poiseuille, y usando un valor experimental determinado por las medidas locales. Para relación de contracción bajas (2.4 y 4), se observó una diferencia considerable entre las curvas obtenidas usando las dos aproximaciones mencionadas arriba, donde los valores experimentales de EPD se vuelven negativos, lo que representaría una recuperación de la presión cuando el fluido pasa a través de la contracción; la EPD estimada analíticamente permanecía positiva e incrementaba al aumentar el flujo. Para cada relación de contracción, la caída de presión en exceso es muy pequeña comparada con la caída de presión total y por lo tanto hay un grado alto de incertidumbre en la estimación de EPD debido a su extrapolación de un perfil de presión ideal totalmente desarrollado a partir de dos medidas de presión lo suficientemente lejanas como para garantizar el total desarrollo de flujo.

Para relaciones de contracción altas (8 y 12) las diferencias entre las dos aproximaciones disminuyen significativamente y en particular para CR=12, los resultados obtenidos usando los dos métodos anteriores son aproximadamente iguales, indicando que para esta relación de contracción la caída de presión tiene una precisión razonable.

En conclusión, los estudios que preceden a este trabajo muestran que la dinámica de flujo en un sistema en contracción depende de la naturaleza del fluido, de la relación de contracción y rapidez de corte, pero también en gran medida de la geometría impuesta a la contracción estudiada. Asimismo para el flujo de un fluido viscoelástico, se pone en manifiesto la coexistencia de dos tipos de fluido: el flujo cortante y el flujo extensional; este último se ve favorecido con números de Deborah altos y por relaciones de contracción bajas.

## CAPÍTULO 2

### DINÁMICA DE FLUJO EN GEOMETRÍAS AXISIMÉTRICA Y CUADRADA Y SU RELACIÓN CON LA CAÍDA DE PRESIÓN.

#### 2.1 Geometría axisimétrica

Para un fluido newtoniano, de naturaleza viscosa, el desarrollo de esfuerzos extensionales es incipiente, debido a que presenta tiempos de relajación pequeños; el perfil de velocidad presenta su máximo en la línea central y se reduce a 0 en las paredes de la contracción. (Figura 2.1-1) Por otro lado, el esfuerzo cortante es máximo en las paredes del tubo, y es nulo en la línea central de flujo.

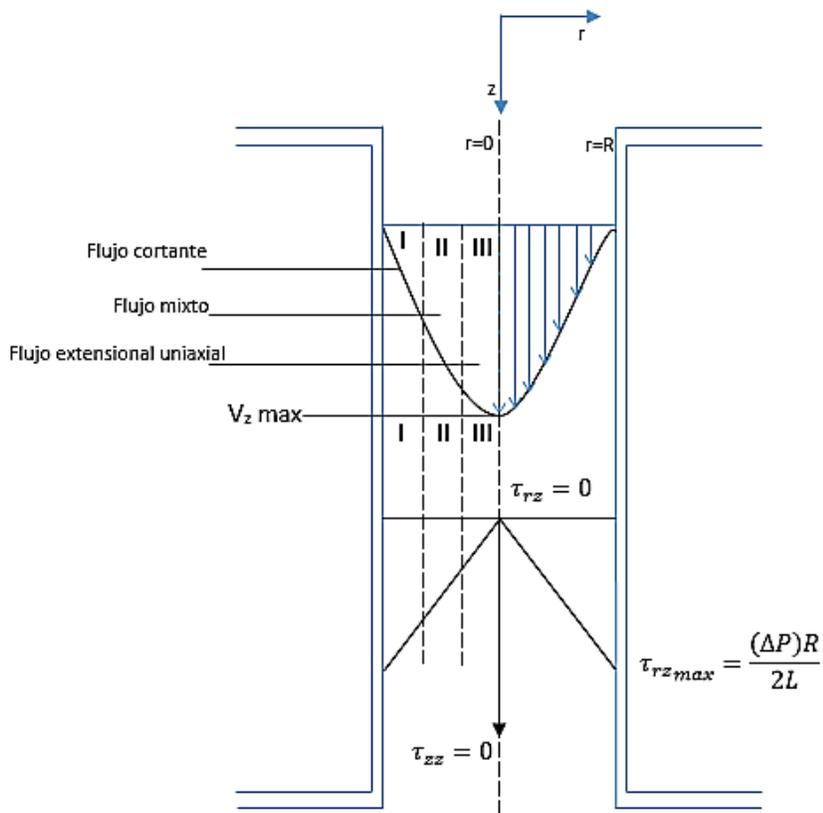


Figura 2.1-1 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en geometría axisimétrica para un fluido newtoniano

(Transport Phenomena Bird, Stewart, Lighfoot, John Wiley and Sons 1960)

Para el caso de un sistema de flujo en contracción o contracción/expansión axisimétrico, se pueden distinguir 3 zonas de dinámica de flujo a lo largo de la distancia radial:

- Zona I- Presenta una dinámica de flujo de naturaleza cortante, debido al contacto del fluido con las paredes de la contracción, zona donde el esfuerzo cortante es el máximo. (figura 2.1-2a/I)
- Zona II- Las líneas de flujo en esta zona presentan una contribución de ambos esfuerzos, cortante y extensional; el flujo que se presenta en esta zona es conocido como flujo mixto. (figura 2.1-2a/II)
- Zona III- Se presenta en la línea central de flujo y muestra el desarrollo de esfuerzos extensionales en la dirección del flujo, por lo que el esfuerzo cortante no se manifiesta. (figura 2.1-2a/III)

Las tres zonas anteriores se observan tanto en las zonas superior e inferior de la contracción, como en la contracción misma. Esto involucra que a lo largo del desarrollo del perfil de velocidad, existe una fuerte competencia entre el flujo extensional y el flujo cortante, y la predominancia de uno u otro de estos efectos modifican la dinámica de flujo presente en el sistema. En la parte superior de la contracción, el flujo exhibe características predominantemente cortantes; al entrar en la contracción, se empieza a evidenciar el desarrollo de esfuerzos extensionales en la dirección  $z$ , los cuales son observables en la mayoría de los fluidos viscoelásticos, mientras que para fluidos newtonianos, donde los esfuerzos, a pesar de que se presentan, son prácticamente despreciables.

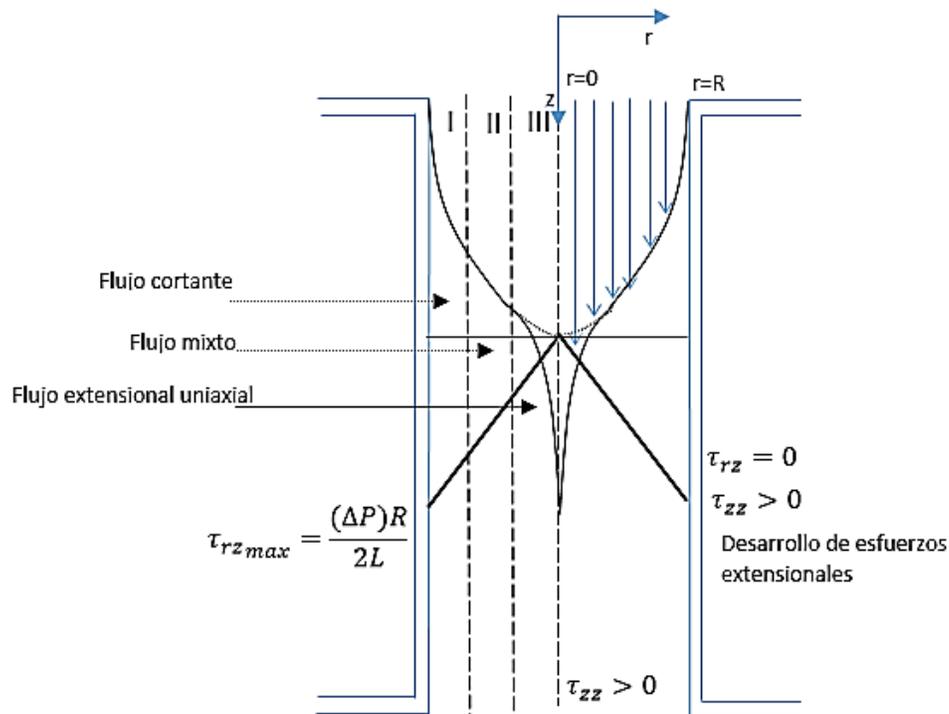


Figura 2.1-2 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en contracción axisimétrica para un fluido viscoelástico

### 2.1.1 Interacción de la primera diferencia de esfuerzos normales en corte con el esfuerzo extensional uniaxial

Las tres zonas propuestas en la teoría de flujo mixto, no están claramente definidas a lo largo de la distancia radial (excepto en la pared del tubo y en la línea central de flujo); por lo que no se puede tener certeza del grado de desarrollo de los esfuerzos cortantes y extensionales que se presentan en la zona de flujo mixto.

Sorprendentemente, el flujo de fluidos viscoelásticos presenta comportamientos diferentes a los esperados en sus perfiles de velocidad y esfuerzo cortante, los cuales no están contemplados en la teoría antes mencionada.

Se ha observado que a un determinado valor de velocidad de corte, la manifestación de la elasticidad del fluido toma un papel protagónico en el desarrollo de la dinámica de flujo del sistema. Este comportamiento se observa con mayor intensidad a números de Deborah bajos.

Una forma para cuantificar la manifestación elástica en un fluido viscoelástico, se da por medio de la primera diferencia de esfuerzos normales en corte.

$$N_1 = \tau_{zz} - \tau_{rr} \quad [2.1]$$

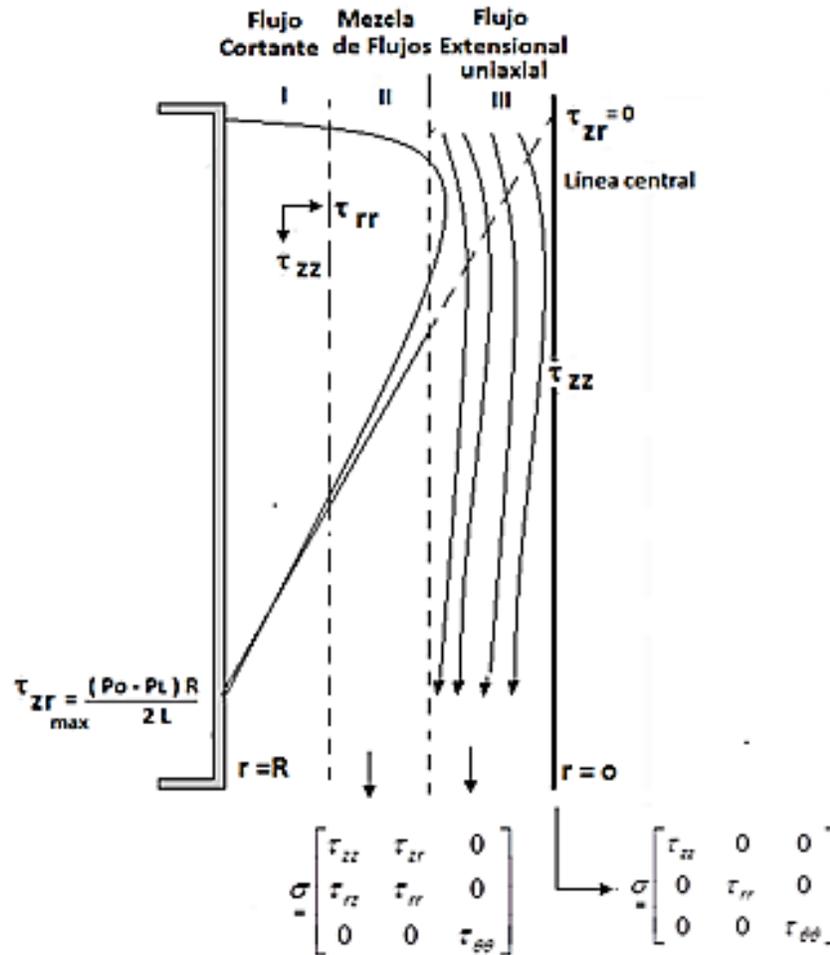


Figura 2.1-3 Interacción de la primera diferencia de esfuerzos normales a lo largo de la distancia radial en geometría axisimétrica.  
(Transport Phenomena Bird, Stewart, Lighfoot, John Wiley and Sons 1960)

A bajos números de Deborah, la componente radial  $\tau_{rr}$  llega a interactuar con la componente extensional del flujo  $\tau_{zz}$ , por lo que muestra una dinámica en mayor parte cortante, debido a una interacción elástica mayor en la dirección perpendicular del flujo. (Figura 2.1-3)

Este comportamiento se ha observado mediante simulaciones numéricas, como las llevadas a cabo por Walters [31], y representadas en la figura 1.1-2a, y justifica el descenso de la caída de presión en exceso por debajo de la línea de referencia newtoniana.

Al aumentar el número de Deborah, se tiende al desarrollo del esfuerzo extensional, hasta el punto donde las componentes radial y extensional son iguales, lo cual se muestra en el punto mínimo de la curva experimental de Walters, pasando por un ascenso de esta curva hacia la referencia newtoniana, indicativo de la preponderancia del flujo extensional sobre el cortante en la contracción.

No obstante, esta tendencia no se ha visto reflejada en los estudios experimentales, debido a que no se ha puesto la atención suficiente en los rangos de flujo donde se lleva a cabo este fenómeno, además del alto grado de incertidumbre que presenta la medición de la EPD en estos intervalos.

### **2.1.2 Caída de presión total**

#### **a) Ecuación de Hagen-Poiseuille**

El perfil de velocidad para el flujo a través de un tubo cilíndrico está dado por:

$$v_z(r) = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad [2.2]$$

La deducción de esta expresión se tiene a mayor detalle en el apéndice II. El perfil de velocidad en este tipo de geometría es función del radio. Integrando sobre el área de sección transversal, se obtiene una expresión para cuantificar el flujo volumétrico, conocida como ecuación de Hagen-Poiseuille.

$$Q = \frac{\Delta P \pi R^4}{8\mu L} \quad [2.3]$$

Esta expresión solo es válida para ciertas condiciones de flujo, las cuales son [4]:

- Flujo laminar ( $Re < 2100$ )
- Densidad constante (fluido incompresible)
- Flujo estacionario
- Fluido newtoniano
- Se ignoran los efectos de entrada y salida del flujo
- El fluido se comporta como un continuo
- En la pared de tubo no hay desplazamiento

La caída de presión a través de una distancia  $L$ , se obtiene mediante el despeje de la ecuación anterior.

$$\Delta P = \frac{8Q\mu L}{\pi R^4} \quad [2.4]$$

### b) Caída de presión total en contracción/expansión axisimétrica

En este trabajo se estudiarán tres medidas de caída de presión: antes, durante, y una después de la contracción; las cuales, para un fluido newtoniano, son evaluadas a través de la ecuación de Hagen-Poiseuille.

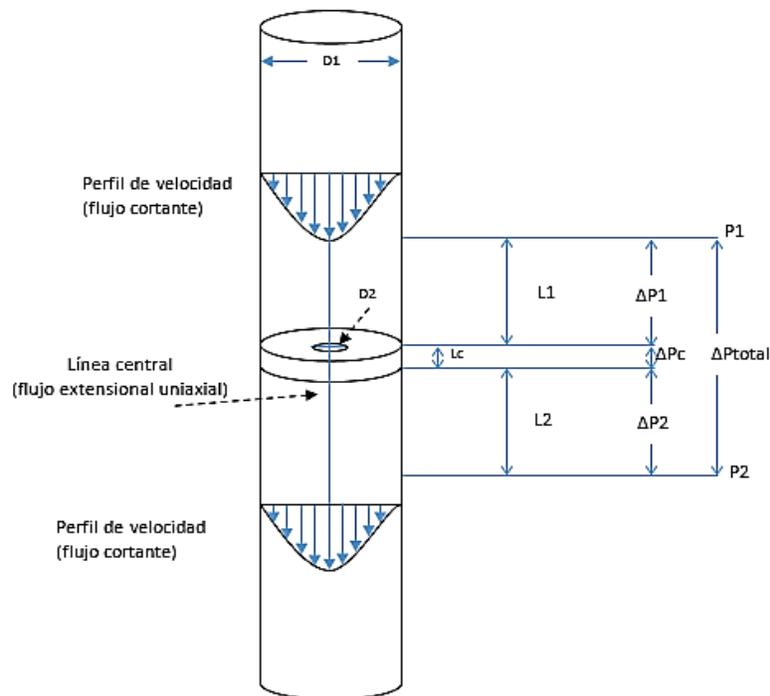


Fig.2.1-4 Caídas de presión en un sistema contracción/expansión axisimétrico.

Las caídas de presión a lo largo del sistema contracción/expansión (Figura 2.1-4) son las siguientes:

$$\text{Caída de presión antes de la contracción} \quad \Delta P_1 = \frac{8Q\mu L_1}{\pi R_1^4} \quad [2.5]$$

$$\text{Caída de presión después de la contracción} \quad \Delta P_2 = \frac{8Q\mu L_2}{\pi R_2^4} \quad [2.6]$$

$$\text{Caída de presión en la contracción} \quad \Delta P_c = \frac{8Q\mu L_c}{\pi R_c^4} \quad [2.7]$$

Ya que el radio de la sección superior e inferior del tubo principal es el mismo ( $R_1 = R_2$ ), la caída de presión antes y después de la contracción puede factorizarse de la manera siguiente:

$$\Delta P_{\text{tubos}} = \frac{8Q\mu(L_1 + L_2)}{\pi R_{\text{tubo}}^4} \quad [2.8]$$

### c) Caída de presión en exceso

Las caídas de presión calculadas mediante la ecuación de Hagen-Poiseuille son de naturaleza viscosa; debido a la interacción del fluido con las paredes internas de la contracción; por lo que para una evaluación completa de la caída de presión total, es necesario tomar en cuenta una cuarta caída de presión, presente exclusivamente en la entrada de la contracción y depende de la relación que establece cada geometría en el paso del flujo por la contracción.

$$\Delta P_{\text{total}} = \underbrace{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_c}_{\text{Efecto viscoso (por contacto)}} + \underbrace{\Delta P_e}_{\text{Efecto elástico (efectos de entrada)}} \quad [2.9]$$

Fig.2.1-5 Contribuciones en el cálculo de caída de presión total

Esta cuarta caída de presión, descrita por Sampson [21] en 1891, es denominada Caída de Presión en Exceso (EPD, por sus siglas en inglés).

Sampson estudió la caída de presión en exceso en una contracción axisimétrica infinitamente delgada, la cual podía evaluarse por medio de:

$$\Delta P_{exceso} = \frac{Q\mu}{R_c^3} \left[ \frac{8}{\pi} \left( \frac{L_{ideal}}{R_c} \right) \right] \quad [2.10]$$

Donde  $\left( \frac{L_{ideal}}{R_c} \right)$  fue denominada relación de apariencia ficticia, y es impuesta por la geometría de la contracción. Para fluidos newtonianos, Sampson encontró que la relación  $\left( \frac{8 L_{ideal}}{\pi R_c} \right)$  tiene un valor constante de 3; por lo tanto, para este tipo de fluido, la expresión de caída de presión total en contracción/expansión axisimétrica está dada por la siguiente ecuación.

$$\Delta P_{total} = \frac{8Q\mu(L_1 + L_2)}{\pi R^4} + \frac{8Q\mu L_c}{\pi R_c^4} + \frac{3Q\mu}{R_c^3} \quad [2.11]$$

Para fluidos con comportamiento no newtoniano, la caída de presión en exceso tiene una interpretación diferente: Para un fluido newtoniano (que no presenta esfuerzos extensionales), la EPD representa el grado de resistencia del fluido al pasar íntegramente por la contracción; en un fluido viscoelástico, la caída de presión en exceso representa la componente elástica del flujo, y como menciona Cogswell [9] es un indicativo del grado de desarrollo del flujo extensional del fluido a su paso por la contracción.

A pesar de que se conoce la caída de presión en exceso para un fluido newtoniano en contracción/expansión axisimétrica por medio del término propuesto por Sampson:

$$\Delta P_{exceso\ newtoniano} = \frac{3Q\mu}{R_c^3} \quad [2.12]$$

Para un fluido viscoelástico, ese término es desconocido, por lo que la ecuación (2.11) no puede ser directamente aplicable; por tanto, la caída de presión en exceso para un fluido viscoelástico puede obtenerse a partir de las lecturas de caída de presión total del sistema.

$$\Delta P_{exceso\ (axisimétrica)} = \Delta P_{total} - \frac{8Q\mu(L_1 + L_2)}{\pi R^4} - \frac{8Q\mu L_c}{\pi R_c^4} \quad [2.13]$$

## 2.2 Geometría cuadrada

Mientras que para una geometría axisimétrica el perfil de velocidad es solo función del radio, en un ducto cuadrado el perfil se presenta en dos dimensiones (figura 2.2-1). Esto provoca que la velocidad máxima en la línea central de flujo, sea menor que en la geometría axisimétrica; por otra parte, el esfuerzo cortante máximo se presenta por el contacto con las cuatro caras de la contracción, y se hace nulo en la línea central de flujo.

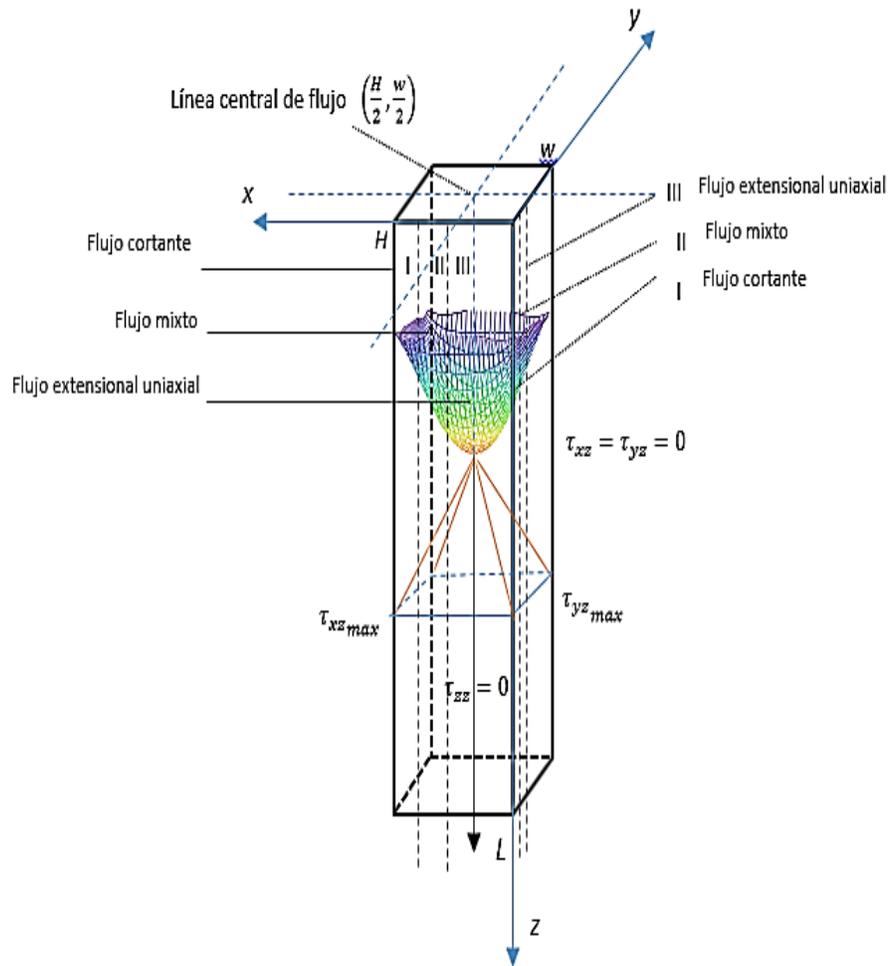


Figura 2.2-1 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en geometría cuadrada

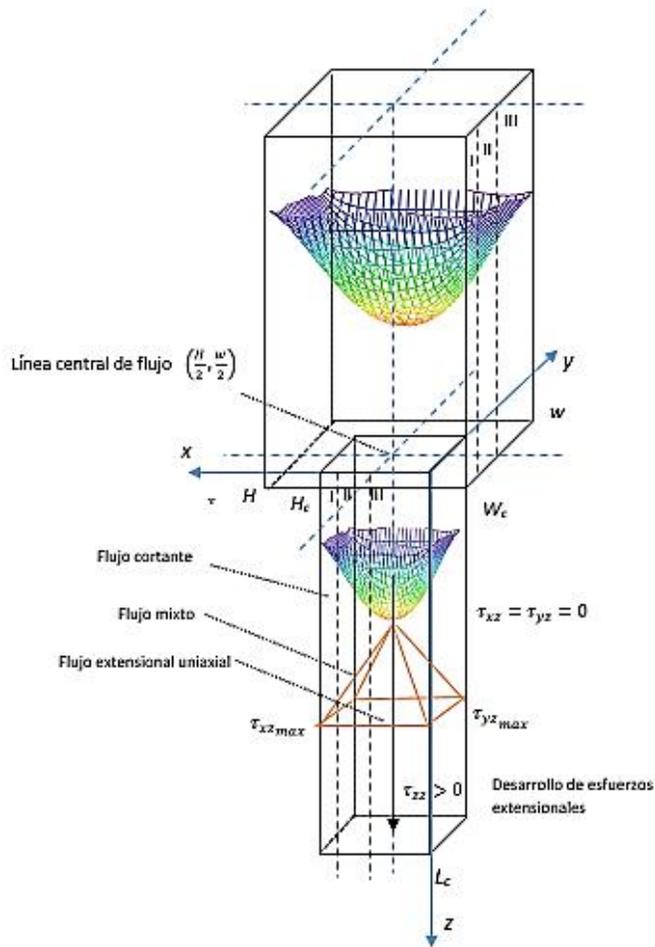


Figura 2.2-2 Perfiles de velocidad y esfuerzo cortante en contracción/expansión en geometría cuadrada

Las tres zonas de dinámica de flujo mencionadas en la sección 2.1 para el caso axisimétrico son igualmente válidas para este modelo, esta vez desarrollándose en las direcciones  $x/y$ . (Figura 2.2-2) Es de esperarse que los efectos cortantes y extensionales sean mayores que en el caso axisimétrico: antes de la contracción se observa la misma tendencia del flujo, siendo predominantemente cortante antes de la contracción, y de características extensionales en su paso por la contracción.

**a) Ecuación de Hagen-Poiseuille para geometrías cuadradas**

Para este estudio, se dedujo una expresión para el perfil de velocidad a través de un tubo cuadrado, el cual se presenta a continuación.

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = & \frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{H} y\right) \right] \\
 & + \frac{w^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{w} x\right) \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \\
 & + \frac{w^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\tanh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} x - \frac{n\pi}{w} H\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \\
 & + \frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\tanh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} y - \frac{n\pi}{H} w\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \frac{H^2}{2\mu L} (P_0 - P_L) \left[ \frac{x}{H} - \left(\frac{x}{H}\right)^2 \right] + \frac{w^2}{2\mu L} (P_0 - P_L) \left[ \frac{y}{w} - \left(\frac{y}{w}\right)^2 \right] \right]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Integrando por el área de sección trasversal, obtenemos una ecuación de flujo volumétrico análoga a la ecuación de Hagen-Poiseuille.

$$\begin{aligned}
Q = & \frac{H^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1 - (-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) - 1 \right] \right\} \\
& + \frac{w^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) - 1 \right] [1 - (-1)^n] \right\} \\
& + \frac{w^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) \right\} [1 - (-1)^n] \right\} \\
& + \frac{H^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1 - (-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) \right\} \right\} \\
& + \left\{ \frac{wH^3}{24\mu L} (P_0 - P_L) \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu L} (P_0 - P_L) \right\}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Los detalles acerca de la deducción de las expresiones 2.14 y 2.15, pueden ser consultados en el apéndice I.

Despejando de la expresión 2.15 la caída de presión a lo largo de una distancia L se obtiene:

$$\Delta P = Q \cdot \left[ \begin{aligned} & \frac{H^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[ \frac{1}{(n\pi)^3} \right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 [1 - (-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) - 1 \right] \right\} \\ & + \frac{w^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[ \frac{1}{(n\pi)^3} \right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) - 1 \right] [1 - (-1)^n] \right\} \\ & + \frac{w^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[ \frac{1}{(n\pi)^3} \right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) \right\} [1 - (-1)^n] \right\} \\ & + \frac{H^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[ \frac{1}{(n\pi)^3} \right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 [1 - (-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) \right\} \right\} \\ & + \left\{ \frac{wH^3}{24\mu L} \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu L} \right\} \end{aligned} \right]^{-1} \quad [2.16]$$

El modelo deducido proporciona valores consistentes al compararse respecto a modelos previos para tubos cuadrados, tal como el propuesto por Berker, [4] el cual fue obtenido mediante cálculo variacional.

$$\Delta P = \frac{Q\mu L}{0.563 B^4} \quad [2.17]$$

*Tabla 2.2-1 Comparativa entre valores de caída de presión en tubería cuadrada en dos modelos distintos*

<b>Flujo volumétrico</b> [cm <sup>3</sup> /s]	<b>Caída de presión</b> <b>(Modelo HP-cuadrado) [Pa]</b>	<b>Caída de presión</b> <b>(Modelo de Berker) [Pa]</b>
0.088	1.154	1.152673
0.144	1.889	1.886192
0.265	3.475	3.471117
0.305	4.000	3.995059
0.458	6.007	5.999137
0.535	7.016	7.007726
0.609	7.987	7.977019
0.764	10.02	10.007295
0.906	11.882	11.867289
1.157	15.174	15.155026

Es importante mencionar que ambos modelos presentan esta similitud en sus valores mientras se respeten en sus respectivos ejes de referencia; el modelo de Berker parte del centro del cuadrado dado por el área de sección transversal, mientras la ecuación de Hagen-Poiseuille en geometría cuadrada tiene su punto de referencia en uno de los vértices, por lo que las condiciones a la frontera propuestas son distintas en cada caso (Figura 2.2-3).

Una de las ventajas que presenta el modelo recae en su validez para cualquier geometría rectangular, a comparación del modelo de Berker, el cual es efectivo únicamente en geometrías cuadradas, y permite pasar a configuraciones planares donde solo se considera la contribución de un esfuerzo cortante.

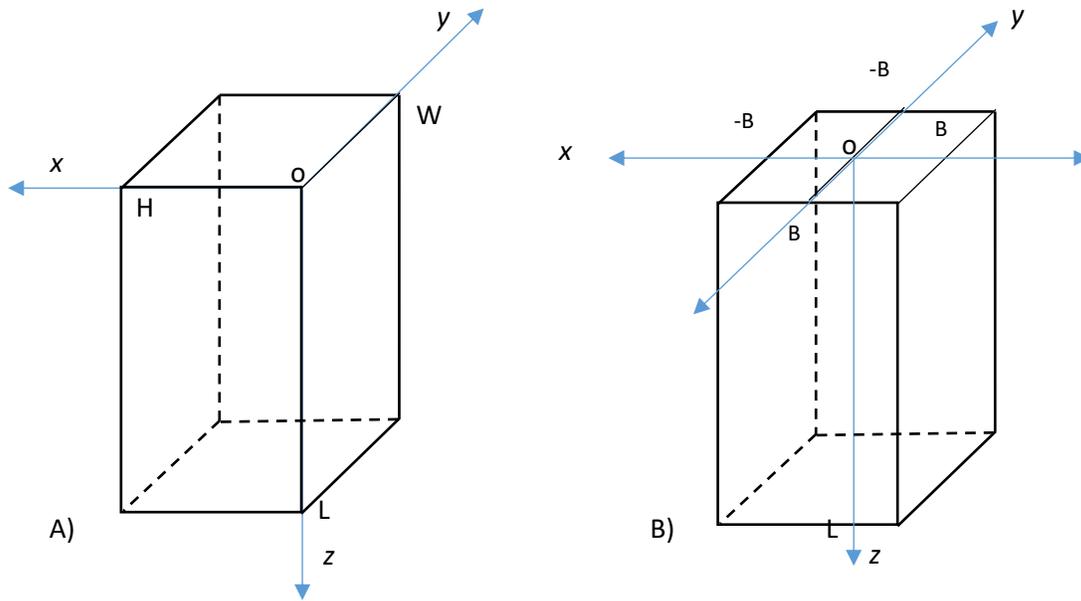


Fig.2.2-3 - Ejes de referencias para los modelos de ductos cuadrados  
 a) Modelo HMP b) Modelo de Berker

El modelo expuesto por Middleman [12] para el flujo en ducto cuadrado también es compatible con el propuesto en este trabajo; el cual parte del modelo planar, contemplando un factor de forma que depende de la relación entre las longitudes del tubo en las direcciones  $x/y$ . Las series de Fourier realizadas para la determinación de dicho factor son iguales a las desarrolladas en el apéndice I.

### b) Caída de presión total en geometrías cuadradas

En esta geometría, también se calculan tres caídas de presión a lo largo del sistema contracción/expansión: antes y después de la contracción, realizadas a una distancia equidistante respecto a la placa de contracción, además de la caída de presión dada en la misma zona; las tres medidas involucran el contacto del fluido con las paredes del sistema, por lo que exhiben un comportamiento cortante.

$$\Delta P_{Tubos} = Q \cdot \left[ \begin{aligned} & \frac{H^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) - 1 \right] \right\} \\ & + \frac{w^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) - 1 \right] [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{w^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) \right\} [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{H^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) \right\} \right\} \\ & + \left\{ \frac{wH^3}{24\mu(L_1 + L_2)} \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu(L_1 + L_2)} \right\} \end{aligned} \right]^{-1} \quad [2.18]$$

Caída de presión en la contracción

$$\Delta P_c = Q \cdot \left[ \begin{aligned} & \frac{H_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H_c} w_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H_c} w_c\right) - 1 \right] \right\} \\ & + \frac{w_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w_c} H_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w_c} H_c\right) - 1 \right] [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{w_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w_c} H_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w_c} H_c\right) \right\} [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{H_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H_c} w_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H_c} w_c\right) \right\} \right\} \\ & + \left\{ \frac{w_c H_c^3}{24 \mu L_c} \right\} + \left\{ \frac{H_c w_c^3}{24 \mu L_c} \right\} \end{aligned} \right]^{-1} \quad [2.19]$$

### c) Caída de presión en exceso en geometrías cuadradas

Como sucede en el caso de una geometría axisimétrica, la caída de presión total tiene que involucrar una caída de presión en exceso, adicional a las caídas de presión provenientes de la interacción viscosa.

$$\Delta P_{total} = \left[ Q \cdot \left[ \begin{aligned} & \frac{H^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) - 1 \right] \right\} \\ & + \frac{w^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) - 1 \right] [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{w^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) \right\} [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{H^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) \right\} \right\} \\ & + \left\{ \frac{wH^3}{24\mu(L_1 + L_2)} \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu(L_1 + L_2)} \right\} \end{aligned} \right]^{-1} + Q \cdot \left[ \begin{aligned} & \frac{H_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right) - 1 \right] \right\} \\ & + \frac{w_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right) - 1 \right] [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{w_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right) \right\} [1-(-1)^n] \right\} \\ & + \frac{H_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right) \right\} \right\} \\ & + \left\{ \frac{w_c H_c^3}{24\mu L_c} \right\} + \left\{ \frac{H_c w_c^3}{24\mu L_c} \right\} \end{aligned} \right]^{-1} + \Delta P_{Exceso}$$

[2.20]

Para esta configuración no se ha deducido un término similar al propuesto por Sampson para la caída de presión en exceso en fluidos newtonianos y/o viscoelásticos, por lo que el cálculo de la EPD es de forma indirecta, recurriendo a medidas experimentales de caída de presión total.

$$\Delta P_{\text{Exceso (cuadrado)}} = \Delta P_{\text{Total}} - Q \cdot \left[ \begin{aligned} & \left[ \frac{H^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) - 1 \right] \right\} \right. \right. \\ & + \frac{w^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) - 1 \right] [1-(-1)^n] \right\} \right. \\ & + \frac{w^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) \right\} [1-(-1)^n] \right\} \right. \\ & + \frac{H^4}{\mu(L_1 + L_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) \right\} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{wH^3}{24\mu(L_1 + L_2)} \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu(L_1 + L_2)} \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \right] \cdot \left[ \begin{aligned} & \left[ \frac{H_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right) - 1 \right] \right\} \right. \right. \\ & + \frac{w_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right) - 1 \right] [1-(-1)^n] \right\} \right. \\ & + \frac{w_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w_c}H_c\right) \right\} [1-(-1)^n] \right\} \right. \\ & + \frac{H_c^4}{\mu L_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right)} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H_c}w_c\right) \right\} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{w_c H_c^3}{24\mu L_c} \right\} + \left\{ \frac{H_c w_c^3}{24\mu L_c} \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \right]$$

[2.21]

### 2.3 Disipación viscosa en un flujo contracción/expansion

Debido a que los fluidos que presentan elasticidad muestran una mayor resistencia al flujo a su paso por una contracción/expansión axisimétrica, presentan caídas de presión más grandes respecto a un fluido newtoniano, además de la manifestación de vórtices en la parte superior de la contracción; los cuales afectan a la rapidez de corte que se aplica al sistema.

La disipación de energía es un mecanismo que permite al fluido alcanzar las condiciones estacionarias, y permite explicar algunos fenómenos presentes en la dinámica de flujo; esto es de gran utilidad ya que a partir de la evaluación de la caída de presión se puede cuantificar la cantidad de energía liberada proveniente de las interacciones viscosas entre el fluido y las paredes de los tubos. La cantidad de energía por unidad de tiempo que el sistema libera a lo largo del volumen de control por efecto de la interacción del fluido con las paredes de la tubería se calcula cómo:

$$\int_v \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} \, dv = \Delta P_g Q \quad [2.22]$$

La deducción de la ecuación 2.14 se explica con mayor profundidad en trabajos previos como el realizado por Pérez [16]. Como fue expuesto en la sección 2.1, el flujo experimenta simultáneamente un flujo cortante y un flujo extensional, de modo que las caídas de presión experimentales tendrán la influencia de ambos flujos, dominando uno u otro dependiendo de la rapidez de corte aplicada. En ausencia de comportamiento elástico (a gastos bajos) el valor de la ecuación 2.15 tendrá una disipación de energía con características viscosas, mientras que a valores altos de rapidez de corte, la elasticidad empezará a manifestarse, por lo que sería más apropiado denominarle disipación viscoelástica.

Existe una forma adicional para la disipación de energía por parte de un fluido viscoelástico en contracción/expansión; la aparición y desarrollo de vórtices puede contribuir o incluso desplazar a la disipación viscosa como mecanismo principal de liberación energética, lo cual tiene consecuencias en la dinámica de flujo, efectos los cuales se analizarán en capítulos posteriores.

## 2.4 Propuesta de la evaluación de la viscosidad extensional

Ober (15), propone una expresión para el cálculo de la viscosidad extensional:

$$\eta_e = \frac{\Delta P_{exceso}}{\mathcal{E}_H \dot{\mathcal{E}}_a} \quad [2.23]$$

Donde  $\Delta P_{exceso}$  es la caída de presión en exceso,  $\mathcal{E}_H$  es la extensión de Hencky dada por  $\ln\left(\frac{L}{L_c}\right)$  siendo L la longitud característica de cada geometría (siendo el diámetro para axisimétrico y las longitudes H o W para el cuadrado), y  $\dot{\mathcal{E}}_a$ , la rapidez de extensión calculada cómo la velocidad del fluido entre la longitud característica de cada relación de contracción.

## 2.5 Estudio de la dinámica de flujo a partir de la formación de vórtices

A partir de las imágenes de los vórtices generados (véase sección 1.1), se disponen de tres longitudes que proporcionan información referente a las condiciones presentes en el flujo. La medida de mayor interés es la longitud de crecimiento axial ( $L_v$ ), la cual se mide desde la placa de contracción hasta el límite de crecimiento del vórtice. Un alto valor en esta dimensión indica que el sistema ha disipado gran parte de la energía hacia el entorno. De igual manera, la distancia  $Z_v$  proporciona información complementaria a  $L_v$ ; sus dimensiones van desde el centro del vórtice a la placa de contracción. La distancia  $R_v$  comprende desde el centro del vórtice hacia la pared del tubo de mayor diámetro, y permite cuantificar la transición de lip vortex a corner vortex, relacionada con el tipo de flujo que gobierna la contracción.

Los resultados de referentes a la medida de las longitudes de los vórtices generados en ambas geometrías se tendrán en el capítulo 4.

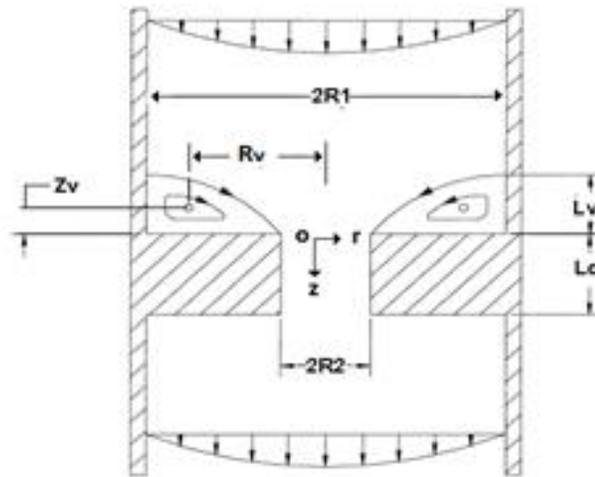


Figura 2.4.1 – Longitudes utilizadas en la caracterización de los vórtices

## CAPITULO 3

### DESARROLLO EXPERIMENTAL

#### a) Preparación de soluciones

##### Solución de Hase al 2.5%

Un fluido de Hase (Emulsión Asociativa Alcalina-Soluble, por sus siglas en inglés) está compuesto por cadenas de polímeros que forman estructuras micelares, las cuales se ven afectadas por las condiciones en el flujo. Su estructura química consta de una cadena hidrofílica de ácido metacrílico soluble en agua, unida a una molécula de acrilato de etilo, unida a su vez a monómeros hidrofóbicos insolubles en medio acuoso. Estas moléculas tienden a agruparse debido a interacciones electrostáticas, formando conglomerados.

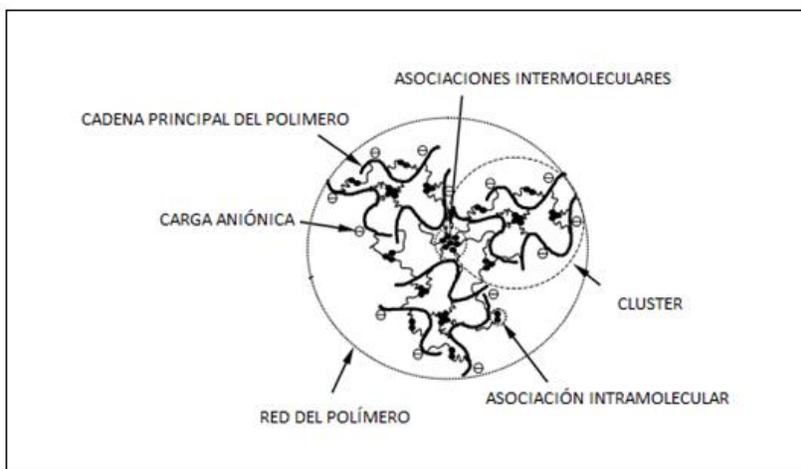


Figura 3.1 Tipos de asociaciones moleculares del Hase

(Tan H, Tirtaatmadja V, Jenkins R.D. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 92(2000)167)

La naturaleza de estas moléculas dan al fluido una de sus principales características desde el punto de vista reológico: a valores de rapidez de corte bajos, la viscosidad permanece constante, a valores más altos se empieza a manifestar un comportamiento adelgazante, disminuyendo su viscosidad, alcanzando la viscosidad del disolvente. Una de las hipótesis que explican este fenómeno [22, 28] sostiene que durante el corte se presenta un reacomodo

en la estructura de los conglomerados, de agrupaciones hidrofóbicas intramoleculares, pasando a estructuras de orden intermolecular debido a la extensión del fluido.

Para la preparación de este fluido se utilizó 500 ml de una solución 0.1 M de agente neutralizante y 2-amino-2-metil-1-propanol, dejándose reposar a temperatura ambiente durante 24 horas.

Se prepararon 10 litros de solución de Hase al 2.5%, para cubrir todas las corridas experimentales, para ello se empleó Acrisol TT-935, correspondiente a una suspensión de Hase disuelta en agua al 30% en peso, adicionando lentamente 833.33 ml de suspensión a 9.166 litros de agua destilada, la cual recibió agitación mecánica por 30 minutos para posteriormente dejar en reposo por 72 horas.

Debido a las variaciones de la viscosidad de este fluido, para garantizar un valor fijo, se dejó reposar por 2 semanas, después de las cuales, se procedió a su almacenamiento en recipientes sellados.

### **Fluido de Boger**

El fluido de Boger está constituido por una solución concentrada de glucosa de maíz en agua, con pequeñas cantidades de soluciones diluidas de poliácridamida. Usualmente es utilizado como fluido de referencia, debido a que su comportamiento es similar al de un fluido newtoniano, mientras presenta características elásticas. Para el estudio se debían presentar propiedades reológicas similares al fluido Hase, con una viscosidad cercana a los 13.5 Pa·s, para fines comparativos en la lectura de caída de presión experimental.

Se prepararon 50 ml de una solución de poliácridamida en agua 0.1% en peso, además de 10 litros de solución de glucosa y agua, midiendo constantemente su viscosidad hasta alcanzar el valor correspondiente al de la solución de Hase previamente preparada. Posteriormente se agregaron pequeñas cantidades de poliácridamida, cuidando de no modificar la viscosidad de la solución y al mismo tiempo alcanzar una diferencia de esfuerzos normales de 2000 Pa para una rapidez de corte de  $300 \text{ s}^{-1}$  correspondiente a Hase.

## **b) Reología cortante de las soluciones viscoelásticas empleadas**

El comportamiento de la viscosidad en ambas soluciones se mantiene a valores constantes para un intervalo una rapidez de corte de hasta  $30 \text{ s}^{-1}$ , a partir del cual las soluciones muestran cambios significativos: el fluido de Boger mantiene su viscosidad de  $13.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  mientras Hase descendió su viscosidad hasta  $1.3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  para una rapidez de corte de  $300 \text{ s}^{-1}$ . (Figuras 3.2-3.3)

Por otro lado, como se muestra en las figuras 3.2 y 3.3, la manifestación de la elasticidad en ambas soluciones tiene una diferencia evidente, principalmente a valores de rapidez de corte bajos. Hase mostro su primera diferencias de esfuerzos normales a una rapidez de corte de  $0.6 \text{ s}^{-1}$ , mientras Boger exhibió elasticidad a una rapidez de corte mayor, ( $\gamma=3 \text{ s}^{-1}$ ). A pesar de estas diferencias, la rapidez de corte máxima, muestra valores de  $N_1$  semejantes; la elasticidad es similar a valores altos de rapidez de corte para ambos fluidos, aunque el comportamiento elástico del fluido Hase se presente antes que para el fluido de Boger.

Los tiempos de relajamiento de ambos fluidos fueron determinados mediante el modelo Bautista-Manero-Puig para el caso del Hase, así como del modelo de Oldroyd-B y el modelo de la mancuerna para el fluido de Boger, procedimientos que se tienen a profundidad en los trabajos previos realizados por Pérez [16] y Quezada [18].

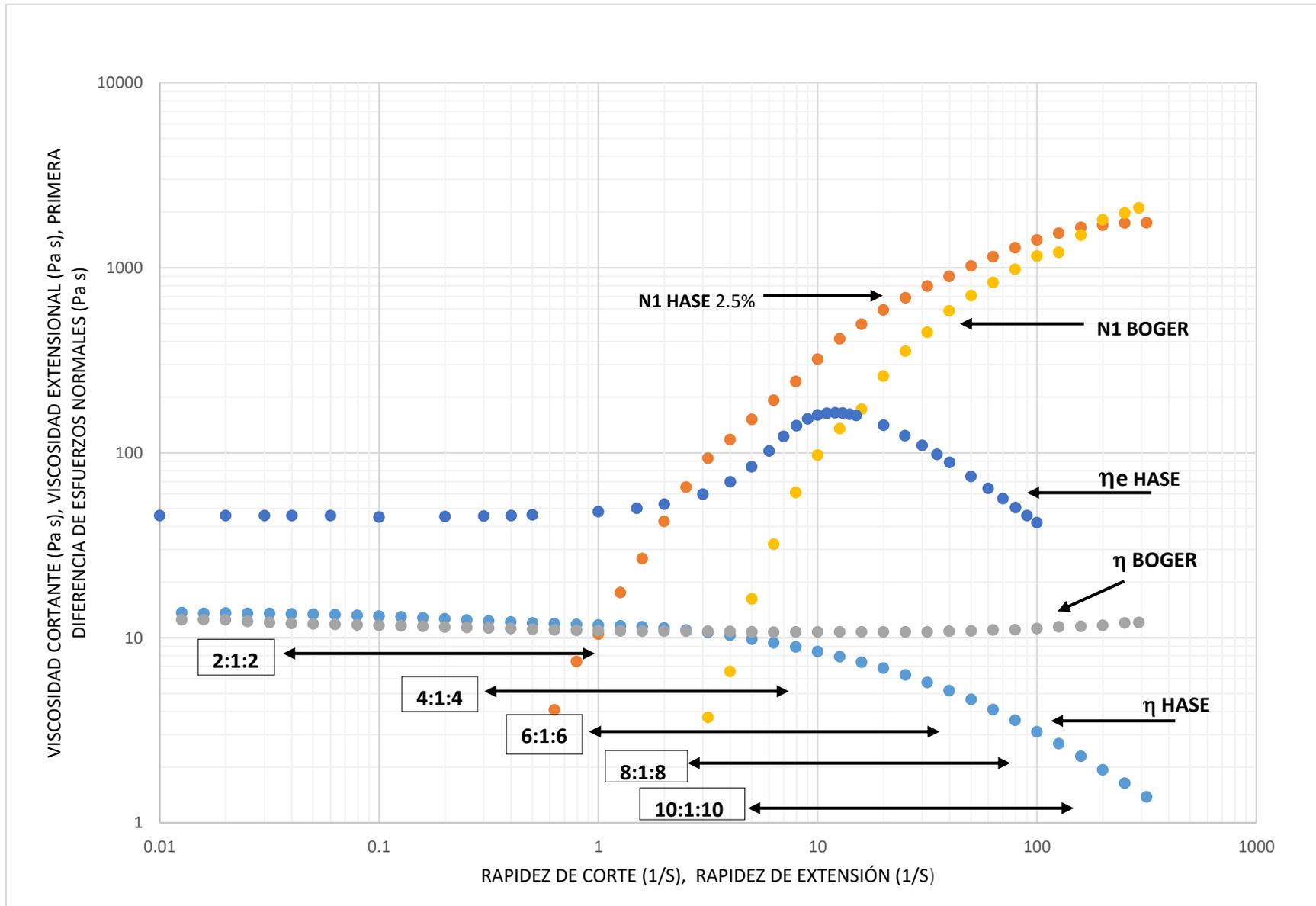


Figura.3.2 – Reología comparativa entre la solución Hase y fluido de Boger, indicando los intervalos de rapidez de corte evaluados para cada relación de contracción/expansión axisimétrica.

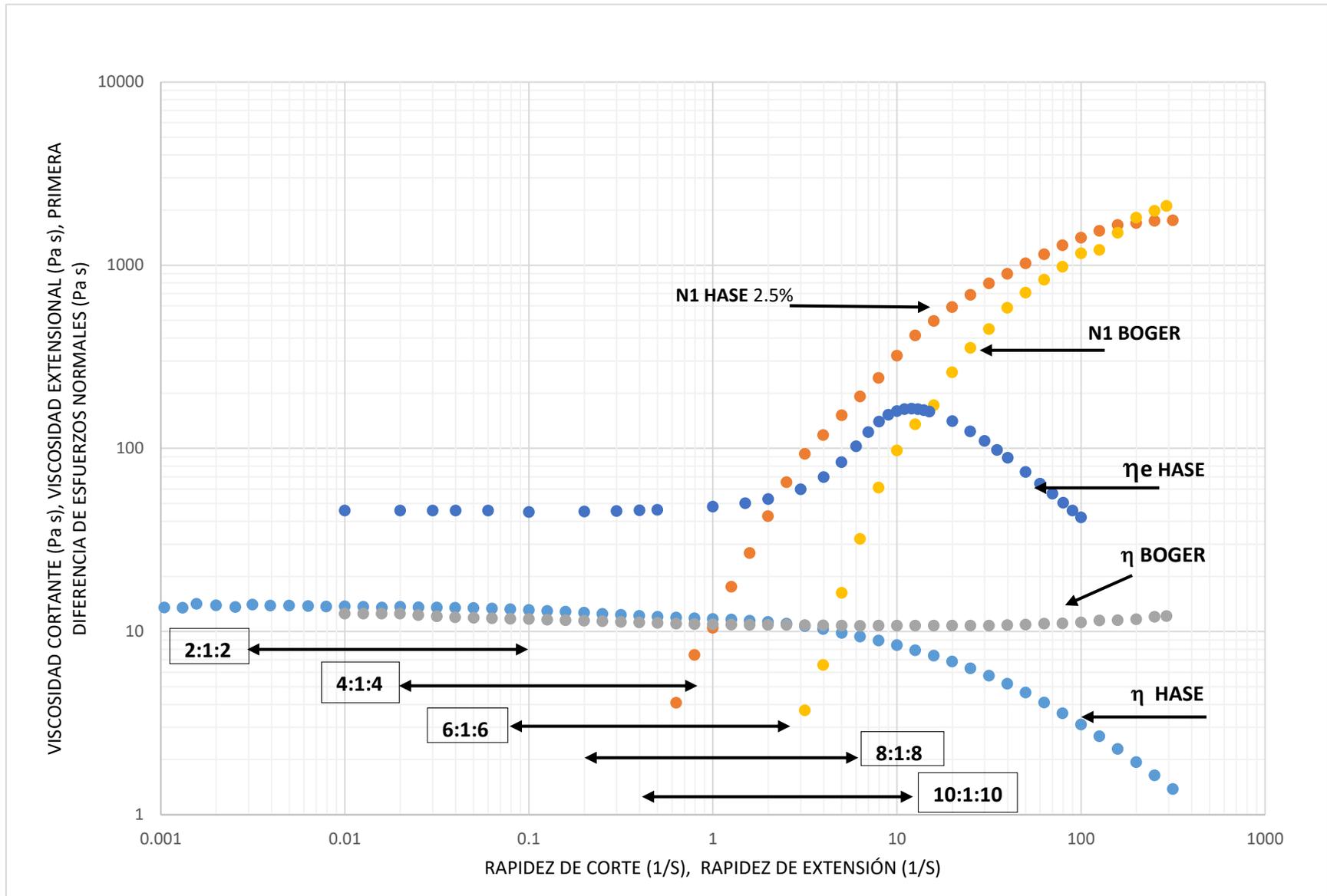


Figura 3.3 – Reología comparativa entre la solución Hase y fluido de Boger, indicando los intervalos de rapidez de corte evaluados para cada relación de contracción/expansión cuadrada.

### c) Descripción del equipo experimental empleado

El equipo utilizado para la experimentación (representado en la figura 3.4) consta de las siguientes partes:

#### Zona de suministro de fluido

Consta de un motor trifásico (G) de 1/12 de Hp de velocidad variable acoplado a un reductor de velocidad para suministrar gastos hasta 0.01 ml/s como mínimo, moviendo a su vez un par de engranes (H) con relación 2:1 intercambiables a 4:1 u 8:1, lo que permite el desplazamiento del émbolo del pistón a los valores requeridos. El pistón de aluminio (A) de 3 cm de diámetro, colocado a la superficie del embolo, cuenta con dos estabilizadores que permiten un desplazamiento continuo, siendo intercambiable con otro pistón de 10 cm de diámetro interno; mientras el primero permite un suministro de fluido a gastos bajos (0-1.5 ml/s), garantizando un flujo reptante, el pistón de 10 cm puede mantener una alimentación de fluido a gastos mayores (4-10 ml/s). Estas condiciones permiten alcanzar el flujo reptante y laminar en una contracción 2:1:2 con valores de número de Reynolds superiores a 1, lo que permite estudiar regímenes de flujo con contribuciones inerciales.

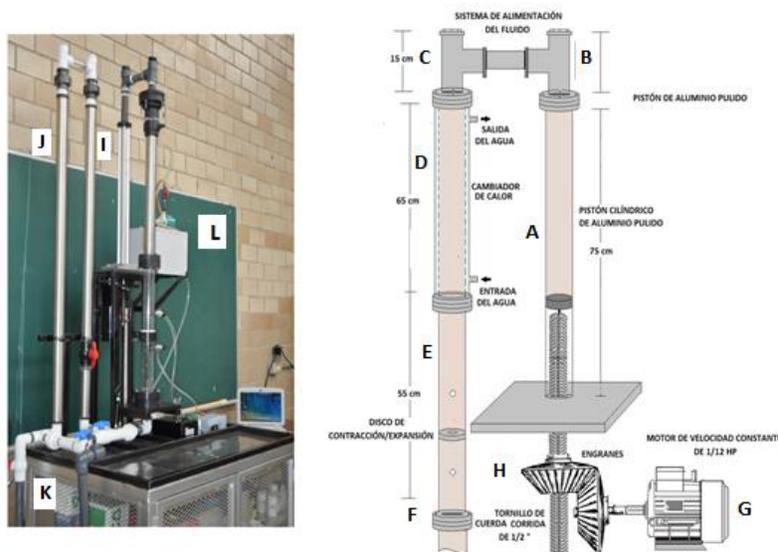


Figura 3.4 - Equipo Experimental utilizado para evaluar caídas de presión en contracción/expansión (Pérez, 2016)

## Zona de prueba

Cuenta con dos secciones: un intercambiador de calor de tubos concéntricos (D), y un baño térmico (L), donde el último proporciona agua a temperatura controlada. El fluido de estudio proveniente del pistón pasa a través del tubo interno del cambiador de calor para rectificar su temperatura a las condiciones requeridas.

La segunda sección consiste en un tubo recto de acrílico (E) que coincide con el tubo interno del cambiador de calor, en este tubo se encuentra el disco que genera la zona de contracción/expansión. Las longitudes de las placas en las geometrías de estudio se muestran en la tabla siguiente.

*Tabla 3.1 - Dimensiones de las placas de contracción utilizadas*

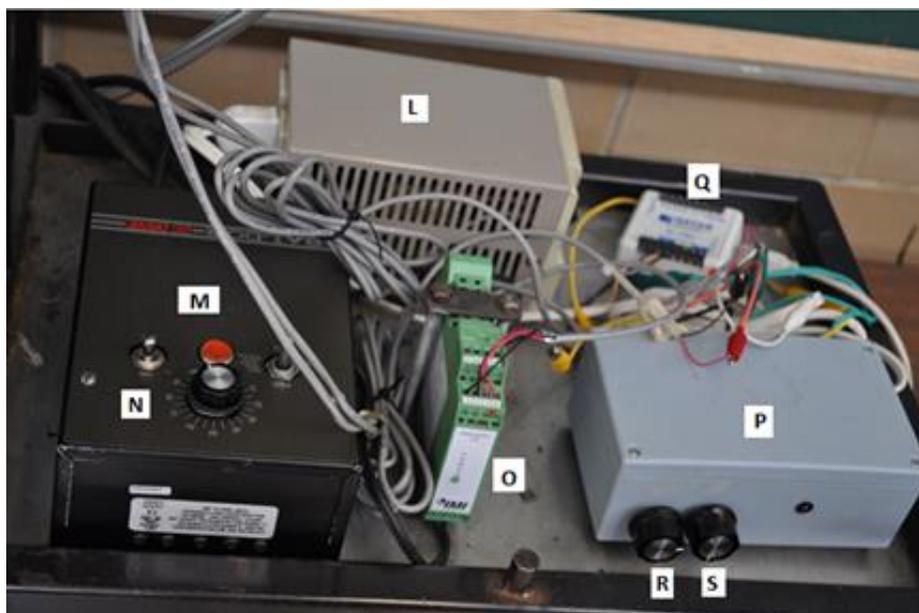
<b>Geometría axisimétrica</b>						
<b>Relación Contracción/expansión</b>	<b>Diámetro del disco <math>D_0</math> (cm)</b>	<b>Diámetro de la contracción <math>D_c</math> (cm)</b>	<b>Espesor de la contracción <math>L_c</math> (cm)</b>	<b>Relación de Apariencia <math>L_c/R_c</math></b>	<b>Área de sección transversal [cm<sup>2</sup>]</b>	<b>Superficie de contacto fluido/pared de contracción [cm<sup>2</sup>]</b>
<b>2:1:2</b>	4.5	2.25	0.6	0.44	3.976	4.2411
<b>4:1:4</b>	4.5	1.125	0.6	0.88	0.994	2.1205
<b>6:1:6</b>	4.5	0.750	0.6	1.33	0.4417	1.4137
<b>8:1:8</b>	4.5	0.5625	0.6	1.77	0.2485	1.0602
<b>10:1:10</b>	4.5	0.450	0.6	2.22	0.159	0.8482
<b>Geometría cuadrada</b>						
<b>Relación Contracción/expansión</b>	<b>Longitud de placa <math>H</math> (cm)</b>	<b>Longitud de la contracción <math>H_c</math> (cm)</b>	<b>Espesor de la contracción <math>L_c</math> (cm)</b>	<b>Relación de Apariencia <math>L_c/H_c</math></b>	<b>Área de sección transversal [cm<sup>2</sup>]</b>	<b>Superficie de contacto fluido/pared de contracción [cm<sup>2</sup>]</b>
<b>2:1:2</b>	4.5	2.25	0.6	0.2222	5.0625	5.4
<b>4:1:4</b>	4.5	1.175	0.6	0.4255	1.2656	4.7
<b>6:1:6</b>	4.5	0.750	0.6	0.6666	0.5625	1.8
<b>8:1:8</b>	4.5	0.5625	0.6	0.8888	0.3164	1.35
<b>10:1:10</b>	4.5	0.450	0.6	0.6666	0.2025	1.08

### Zona de control eléctrico

Dos transductores de presión están colocados en la zona de prueba, 7 cm por encima y por debajo de la placa de contracción, con el fin de evitar la interferencia de los vórtices con la señal, y tener un registro limpio de la caída de presión. La señal proveniente de los transductores se recibe a un equipo de adquisición de datos (Q), que envía la señal en forma de voltaje a un equipo de cómputo donde es capturada en tiempo real.

El fluido de prueba se regula a partir de un controlador de voltaje (M) acoplado al motor de la zona de suministro, permitiendo mediante el registro del tiempo, y conociendo el área transversal del pistón y la longitud de desplazamiento del émbolo, estimar el flujo volumétrico del fluido.

Antes de la experimentación, los transductores de presión deben ser ajustados a un voltaje cero correspondiente a la presión atmosférica, para ello se adaptó una fuente de poder (P), que suministra voltajes de hasta 0.0001 v para su calibración.



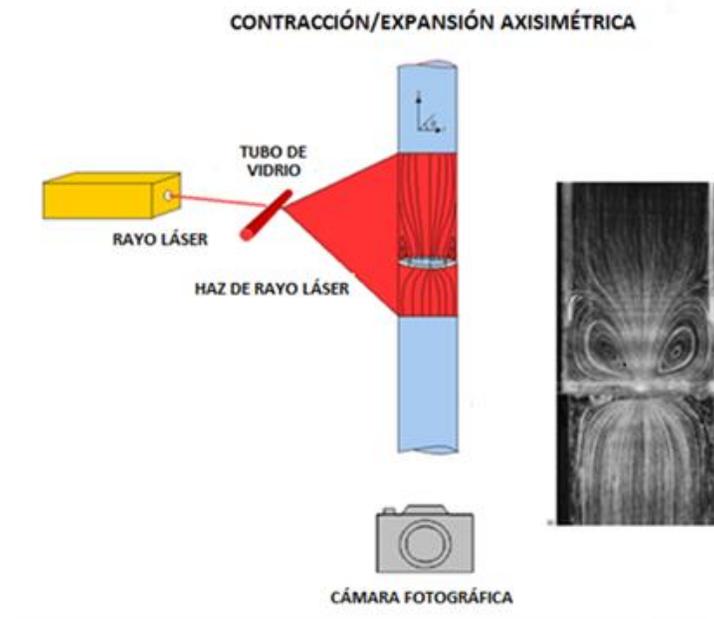
*Figura 3.5. Zona de control electrónico (Pérez, 2016)*

### Zona de recolección del fluido

El fluido proveniente de la parte inferior de la zona de prueba no puede descargarse a la presión atmosférica directamente, ya que el efecto de la gravedad interfiere en el flujo impuesto en el regulador de voltaje. Para sortear este inconveniente, al equipo se adaptó un segundo tubo de acero inoxidable (I) de dimensiones similares al tubo de prueba. Este tubo funciona bajo el principio de los vasos comunicantes, por lo que permite regular la salida del fluido en ausencia de la gravedad, descargándose por la parte superior del equipo, donde un tercer tubo (J) conduce el fluido hacia su tanque para posterior uso.

### Visualización de vórtices

La captura de las imágenes de los vortices, así como las líneas de corriente se logra mediante la proyección de un haz de rayo laser que se emite a través de un cuerpo de vidrio, el cual transforma el haz de luz en una forma plana que se proyecta en posición perpendicular a la zona de captura fotográfica,. El sistema es ilustrado en la figura 3.6



*Figura 3.6 - Sistema para la visualización de los vortices generados a partir de flujos en contracción/expansión. (Pérez, 2016)*

Para llevar a cabo el estudio del crecimiento de los vórtices tanto de la solución de Hase como la de Boger, se montó una cámara oscura 45cm x 45 cm x 40 cm alrededor de la zona de contracción/expansión.

Las imágenes se tomaron con una cámara fotográfica, la cual en todo momento estuvo en la misma posición durante toda la experimentación, el tiempo de obturación fue de 35 segundos obteniéndolo de un promedio entre el tiempo que se requería para obtener una adecuada fotografía a gastos pequeños y altos, las dimensiones de los vórtices se midieron empleando el programa ImageJ de libre uso proporcionado por Java Applications. Este programa proporciona las dimensiones medidas en pixeles por lo que fue necesario calibrar las fotografías tomadas, para esto se usó el diámetro interno de 4.5 cm del tubo de mayor diámetro del sistema de flujo y se obtuvo la relación de 0.0035 cm/pixel que se utilizó para hacer todas las mediciones relacionadas con los vórtices de cada una de las relaciones de contracción estudiadas.

## CAPITULO 4

### RESULTADOS Y ANÁLISIS OBTENIDOS PARA CADA RELACIÓN DE CONTRACCIÓN

La información que se obtiene de los resultados obtenidos en el presente trabajo se ven organizados en el orden siguiente para su discusión:

- Caída de presión total vs flujo volumétrico de los fluidos de estudio respecto a la referencia newtoniana, la cual permite visualizar el dominio de alguno de los dos tipos de flujo que coexisten en el sistema contracción/expansión. Se elige el flujo volumétrico como punto de comparación sobre el número de Deborah, debido a que los intervalos de rapidez de corte para cada relación de contracción en ambas geometrías no son iguales (figuras 3.2 y 3.3), mientras que los intervalos de flujo para cada relación de contracción fueron iguales en los dos casos.
- Caída de presión en exceso adimensional vs flujo volumétrico de ambos fluidos. Este grafico muestra el efecto de la geometría en el desarrollo del flujo extensional en los dos fluidos.
- Energía disipada por interacción viscosa de los fluidos de estudio y las longitudes características de los vórtices observados vs flujo volumétrico, que permiten estudiar la contribución de la reología y sus consecuencias en la liberación de energía de origen elástico por parte del sistema con el fin de alcanzar el régimen permanente, tal como se propuso en la sección 2.3.
- Viscosidad extensional vs rapidez de deformación. En este grupo de gráficas se persigue el objetivo principal de este trabajo, aunque la trayectoria de la viscosidad extensional pudo seguirse con anterioridad en las gráficas de caída de presión en exceso, en ellas se demuestra cómo es que la dinámica de flujo, estudiadas a partir de las EPD, son una manera de seguir indirectamente la trayectoria de crecimiento de la viscosidad extensional.

# Contracción/expansión 2:1:2

## Caída de presión total vs flujo volumétrico

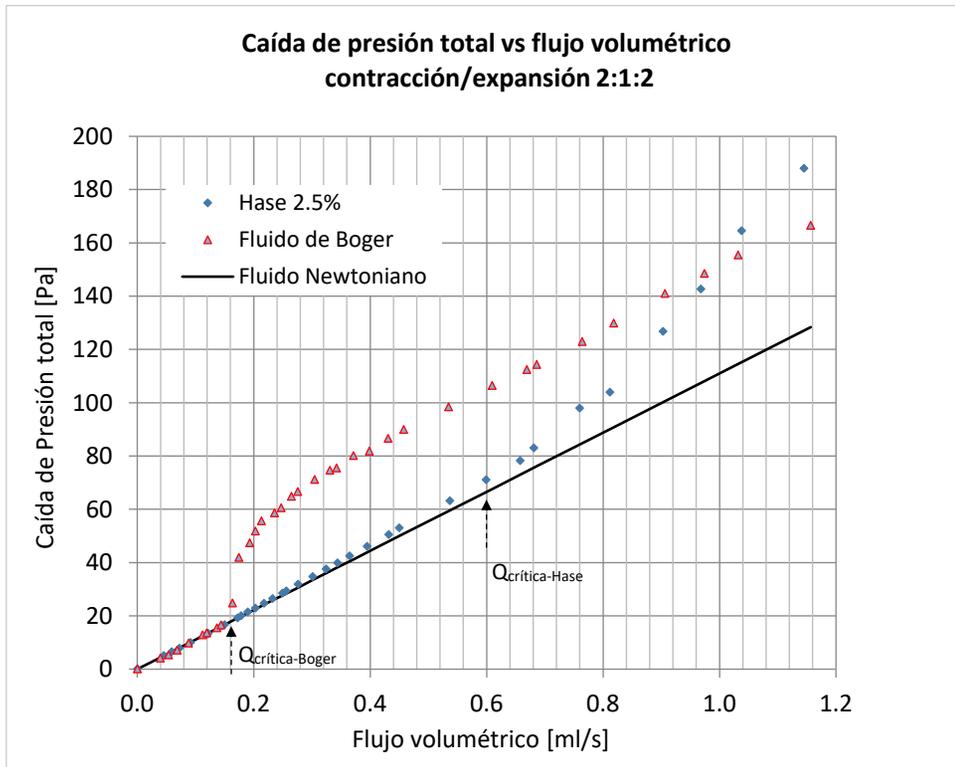


Figura 4.1.1 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 2:1:2 (geometría cuadrada)

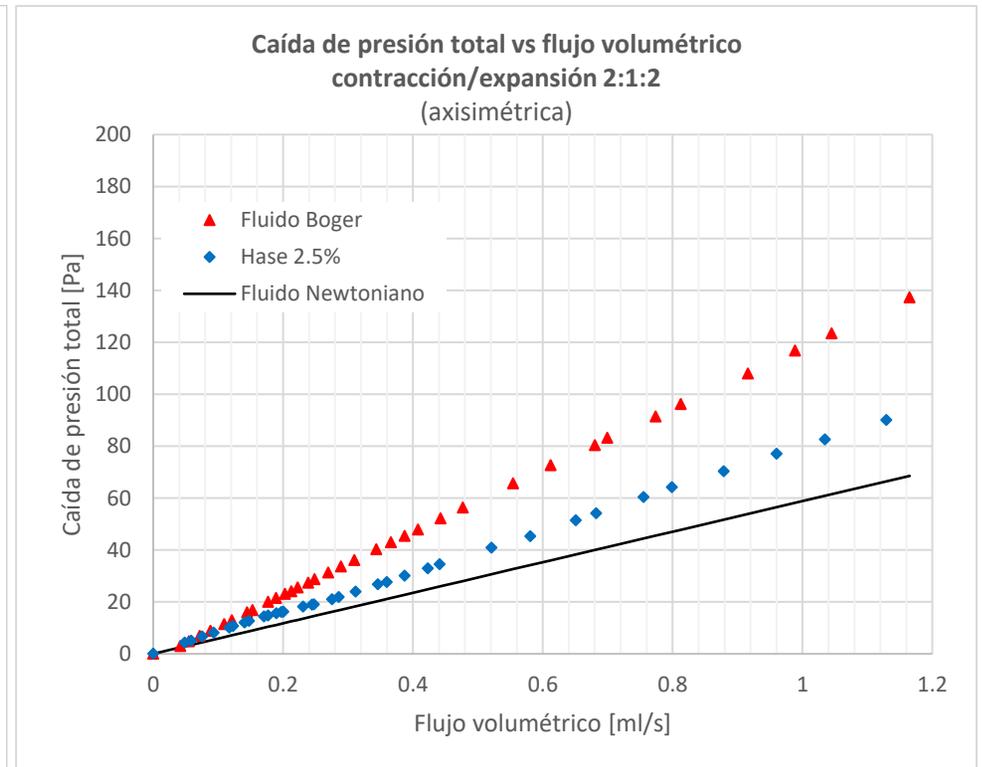


Figura 4.1.2 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 2:1:2 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 2:1:2

## Caída de presión en exceso adimensional vs flujo volumétrico

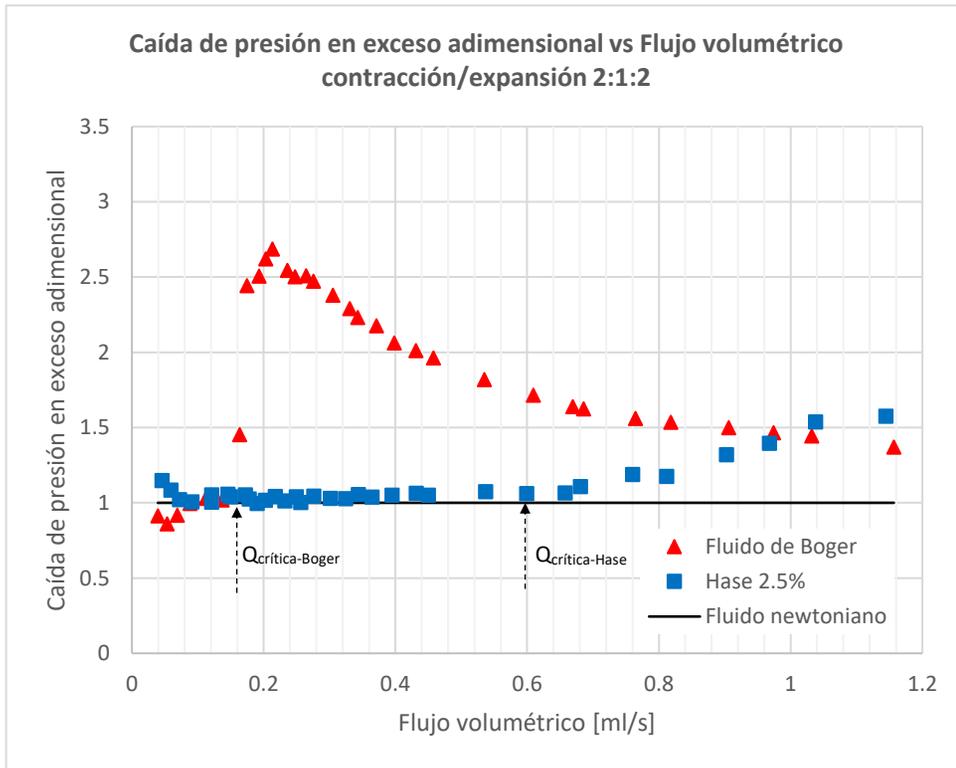


Figura 4.1.3 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 2:1:2 (geometría cuadrada)

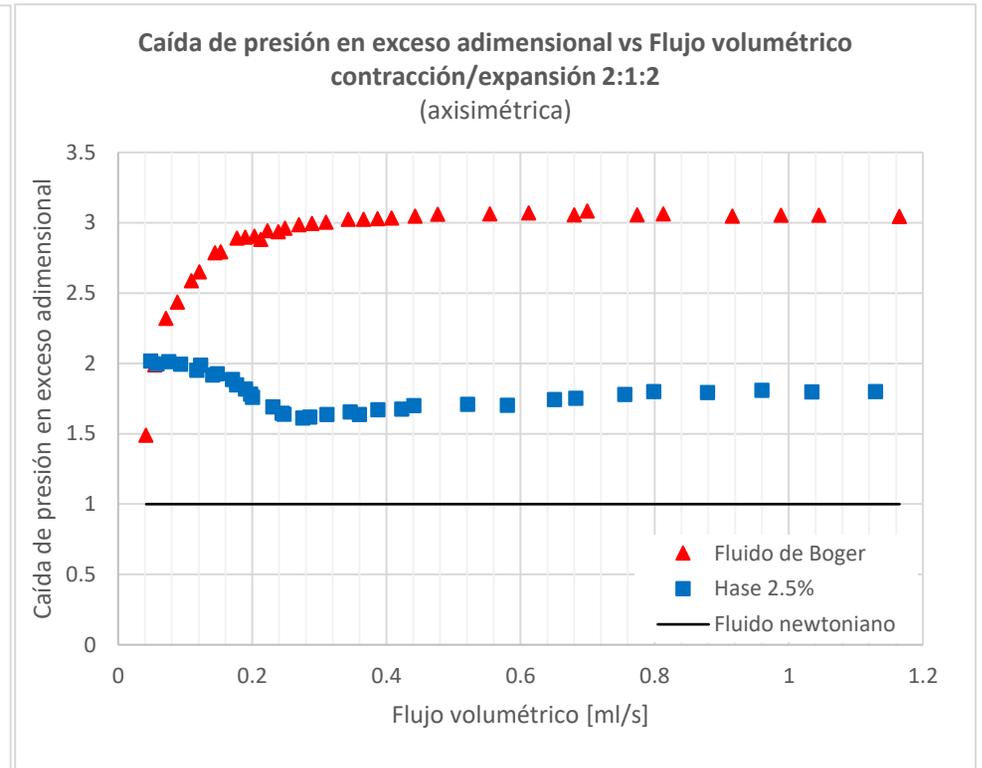


Figura 4.1.4 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 2:1:2 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 2:1:2

## Disipación viscosa vs flujo volumétrico

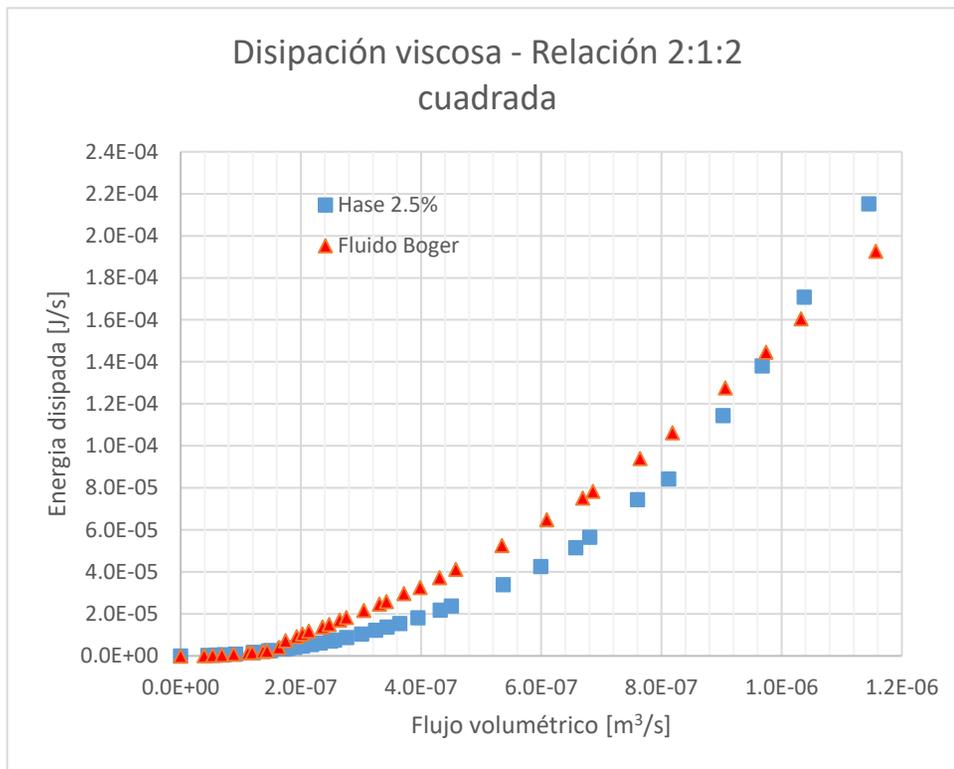


Figura 4.1.5 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 2:1:2 (geometría cuadrada)

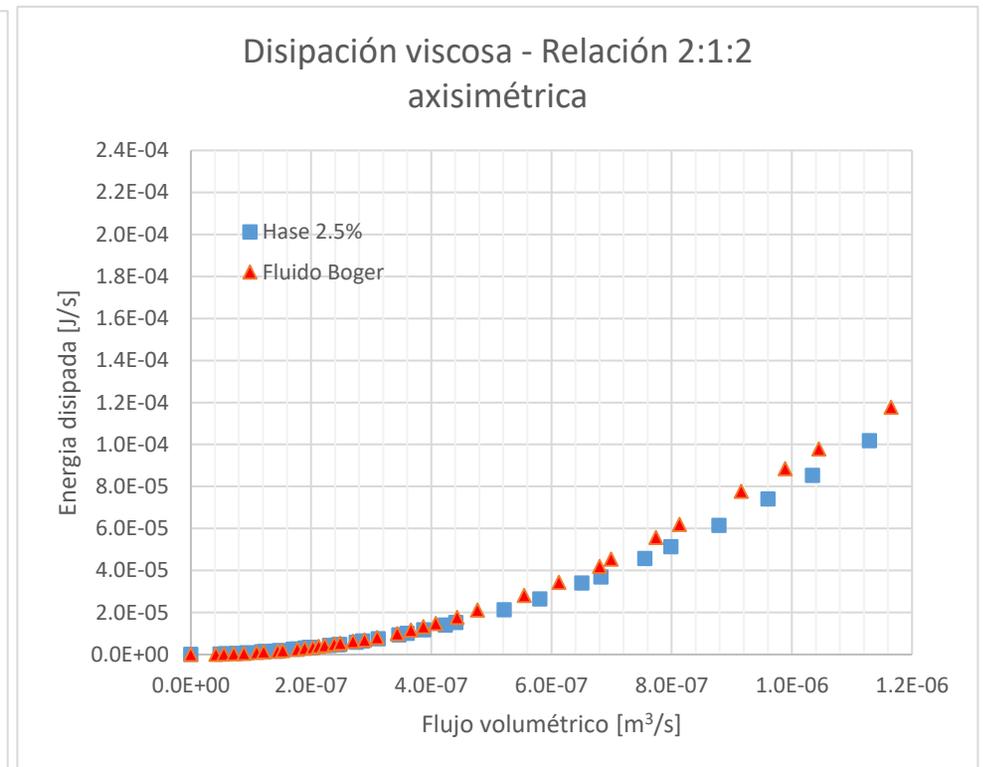


Figura 4.1.6 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 2:1:2 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 2:1:2

## Longitudes características de vórtices vs flujo volumétrico

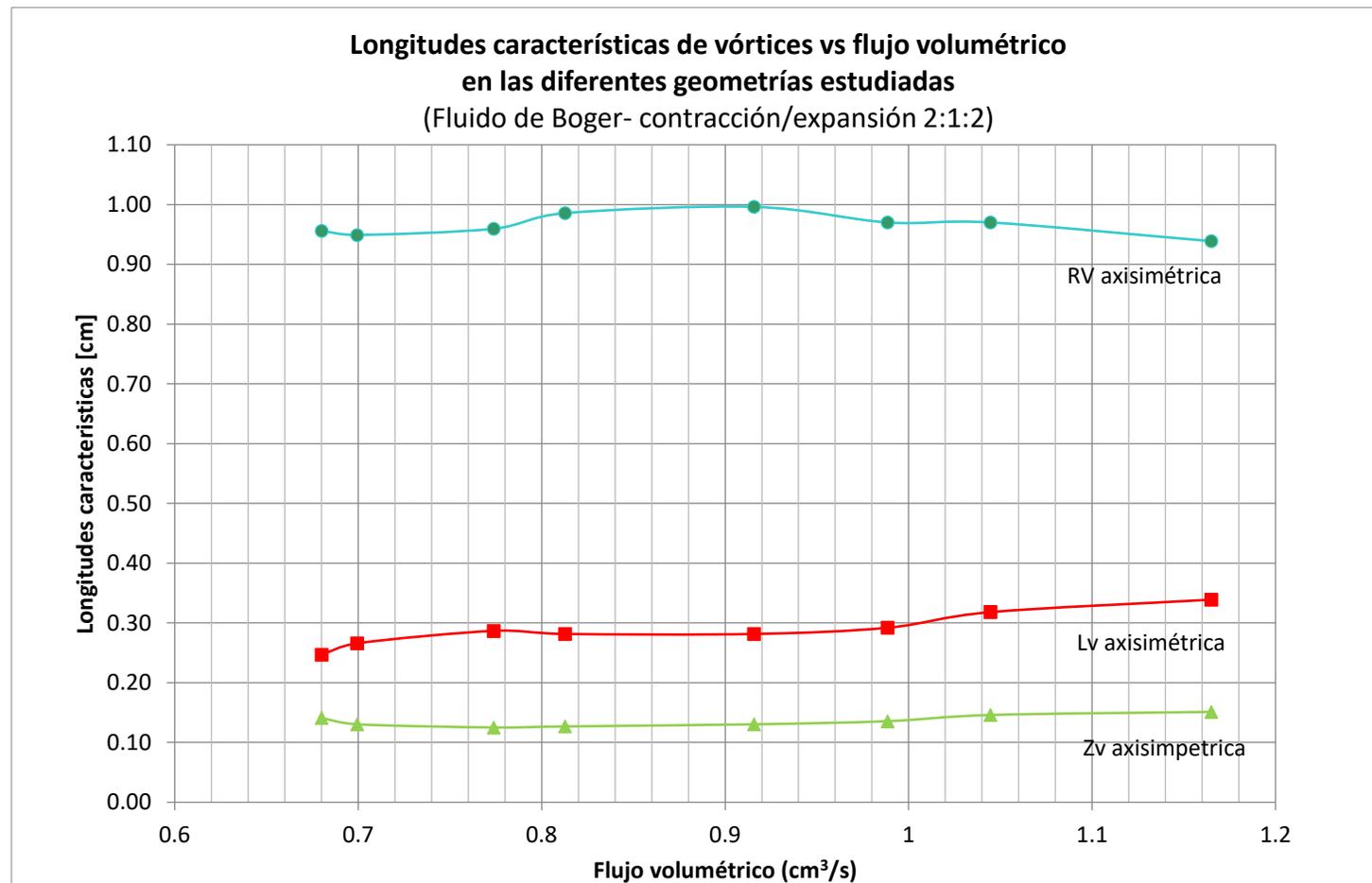


Figura 4.1.7 –Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger en contracción/expansión 2:1:2 (geometrías axisimétrica y cuadrada)

# Contracción/expansión 2:1:2

## Viscosidad extensional vs Rapidez de deformación

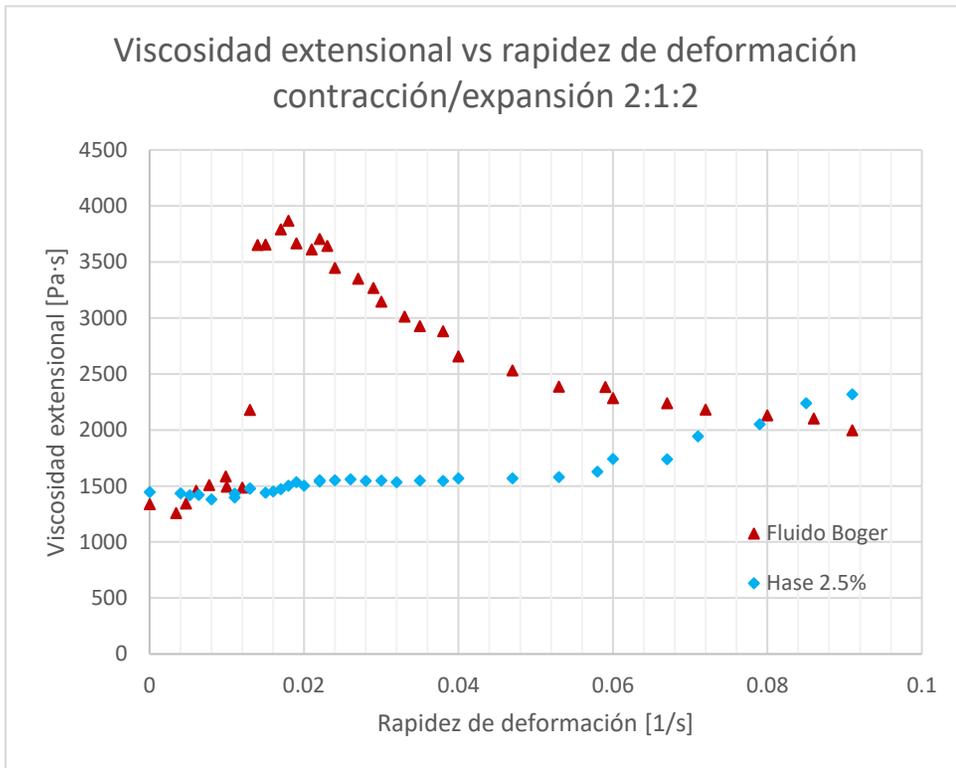


Figura 4.1.8 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 2:1:2 (geometría cuadrada)

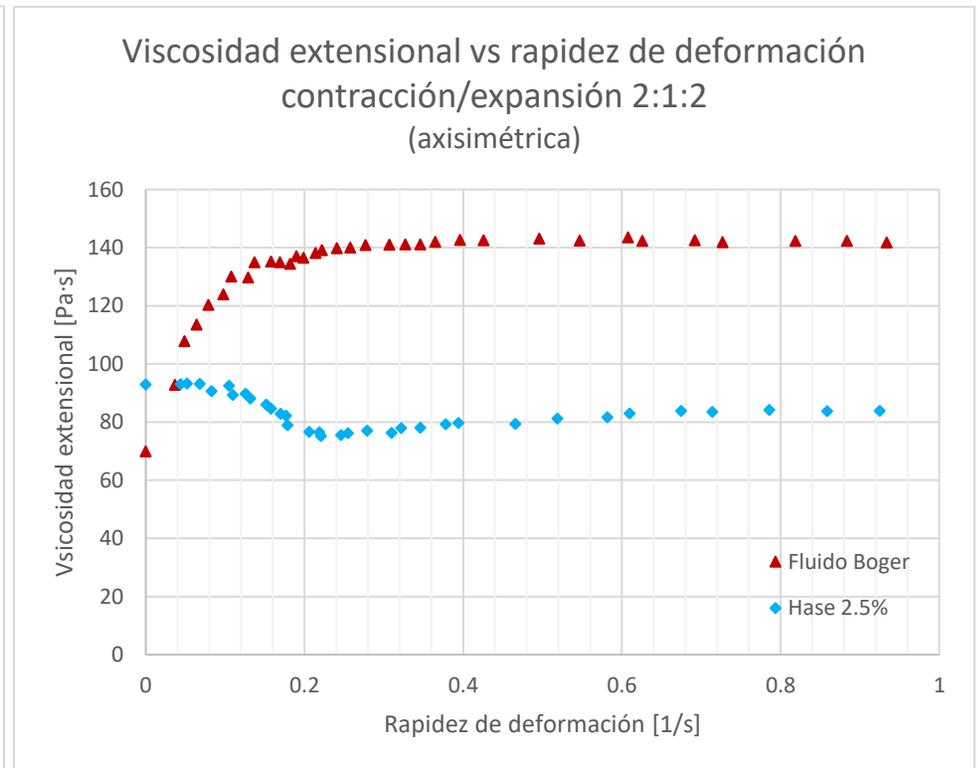


Figura 4.1.9 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 2:1:2 (geometría axisimétrica)

## INTERPRETACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

### CONTRACCIÓN EXPANSIÓN 2:1:2

#### Caída de presión total

Para la caída de presión total en la geometría cuadrada (figura 4.1.1) se observa que para los fluidos Hase y Boger existe un intervalo de flujo en el cual exhiben un comportamiento dentro de la línea de referencia newtoniana, y por tanto, con características primordialmente cortantes. A partir de un gasto crítico ( $Q=0.16$  ml/s para Boger,  $Q=0.6$  ml/s para Hase), las caídas de presión aumentan, lo que implica el inicio del predominio del flujo extensional.

No obstante, el crecimiento en las caídas de presión total no se dan en la misma magnitud en ambos fluidos; el fluido de Boger presenta una mayor caída de presión respecto a la solución Hase, debida a un alto desarrollo de la primera diferencia de esfuerzos normales en extensión. A flujos mayores, la caída de presión de Hase sobrepasa a la de Boger, provocada por la naturaleza mayormente elástica del primero en estos intervalos de rapidez de corte.

Para la geometría axisimétrica (figura 4.1.2), ambos fluidos no siguen la trayectoria newtoniana, por lo que desarrollan flujos exclusivamente extensionales en todo intervalo de flujo. Esta diferencia en las trayectorias es provocada por el aumento en la superficie de contacto del fluido con las paredes de la contracción de la geometría cuadrada sobre la axisimétrica. (Véase tabla 3.1), favoreciendo al desarrollo del flujo extensional sobre el cortante en esta geometría.

Es preciso mencionar que a pesar de que la geometría axisimétrica para esta relación de contracción favorece el desarrollo del flujo extensional en todo el intervalo de flujo analizado, el efecto extensional alcanzado por la geometría cuadrada posterior a la zona de dominio cortante presenta valores más altos. El fluido de Boger en geometría axisimétrica alcanza caídas de presión máximas de 140 Pa, en geometría cuadrada llega a 160 Pa aproximadamente; por otra parte, la solución Hase presenta caídas de hasta 190 Pa en geometría cuadrada, a comparación de los 90 Pa obtenidos en axisimétrica.

### Caída de presión en exceso adimensional

La caída de presión en exceso adimensional está dada por:

$$\Delta P_{exceso_{adim}} = \frac{\Delta P_{exceso_{viscoelástico}}}{\Delta P_{exceso_{Newtoniano}}} \quad [4.1]$$

Y es un cociente que proporciona un punto de comparación entre la  $\Delta P$  asociada al desarrollo del flujo extensional de los fluidos viscoelástico y newtoniano; este último, al no desarrollar esfuerzos extensionales, representa el grado de dificultad del fluido para pasar por la contracción y tiene características de flujo cortantes.

El aumento drástico de la EPD adimensional del fluido de Boger a bajos valores de gasto en geometría cuadrada (figura 4.1.3), marca el inicio del desarrollo del flujo extensional por encima de la contribución del flujo cortante dada por el fluido de referencia, hasta un punto máximo (2.5 aproximadamente), condición límite donde se manifiesta este tipo de flujo. A flujos mayores, la trayectoria de EPD disminuye, lo cual implica que el efecto cortante impuesto por el flujo newtoniano supera el efecto extensional del fluido de Boger.

No obstante, para el mismo fluido en geometría axisimétrica (figura 4.1.4), el efecto extensional del fluido es lo suficientemente fuerte, superando al generado en la geometría cuadrada, por lo que puede mantener su valor sobre el desarrollo cortante del fluido newtoniano, lo cual se ve reflejado en un comportamiento constante de la trayectoria de EPD a flujos altos.

Para la solución Hase en ambas geometrías, a bajos valores de gasto se tiene presencia de un descenso en la trayectoria de EPD, debida al reacomodo por parte del fluido para entrar por la contracción, por lo que este efecto no es considerado en este análisis. Pasado este intervalo, se observa la lenta aparición del efecto extensional en el fluido (siendo más notorio en geometría axisimétrica), pero con magnitudes muchos menores a las alcanzadas por el fluido de Boger.

Por último, La fuerte interacción del fluido con las paredes de la contracción en geometría cuadrada, favorece el desarrollo del flujo cortante, lo cual da origen a un fenómeno aún en estudio por las investigaciones más recientes. A bajos valores de rapidez de corte, el fluido

de Boger en geometría axisimétrica presenta apenas un apreciable descenso de la EDP adimensional que no presenta el fluido newtoniano, a pesar de que ambos comparten los mismos valores de viscosidad cortante a estos valores de rapidez de deformación. Las interpretaciones más recientes han sido propuestas por Binding [3] en la que considera que la componente radial  $\sigma_{rr}$  de la primera diferencia de esfuerzos normales en corte, interactúa fuertemente con la componente  $\sigma_{zz}$  del flujo extensional que se desarrolla principalmente sobre la línea central. Esto ocasiona que las caídas de presión en exceso desciendan por debajo de la trayectoria newtoniana, donde incluso se observa la existencia de un mínimo, seguido de un fuerte incremento de los valores de la EPD hasta alcanzar un máximo; este mínimo representa aquella condición en donde los esfuerzos extensionales superan en magnitud a los esfuerzos  $\sigma_{rr}$  de la primera diferencia de esfuerzos normales en corte.

### Disipación energética

Como se ha mencionado en capítulo 1, el flujo en la contracción tiene una cantidad de energía menor a la desarrollada en el tubo principal, por lo que la energía restante proveniente del tubo superior de mayor diámetro, es liberada con el fin de garantizar el régimen estacionario del sistema; en la sección 2.3, se ha planteado uno de los postulados de mayor impacto en este trabajo; donde se propone que la liberación de energía para un fluido viscoelástico en contracción tiene dos mecanismos principales:

- Una disipación de energía de origen viscoso, proveniente de la interacción del fluido con las paredes del tubo superior e inferior así como en la contracción, la cual da origen a la caída de presión en el sistema.
- La generación y desarrollo de vórtices en la parte superior de la placa de contracción, dando lugar a una disipación de energía de origen elástico.

El último planteamiento tiene origen en la propuesta sobre la formación de vórtices expuesta por White y Kondo [33]. En un fluido newtoniano, la disipación de energía tiene una naturaleza exclusivamente viscosa, mientras que para fluidos viscoelásticos los dos

mecanismos de disipación antes mencionados deben coexistir en mayor o menor magnitud, dando lugar a una disipación de características viscoelásticas.

El estudio de los vórtices se ha realizado de forma cualitativa, a partir de las tres longitudes características de los vórtices (Sección 2.5) a lo largo de los gastos estudiados, de las cuales, solo se analizara la longitud del vórtice  $L_v$ , por ser la que nos proporciona mayor información sobre su desarrollo y la cual solo se realizó para el fluido de Boger; mientras que la disipación viscosa puede analizarse de forma cuantitativa con ayuda de la ecuación 2.14, la cual se realizó para ambos fluidos.

La gráfica de longitudes características en contracción axisimétrica (figura 4.1.7) muestra que la longitud del vórtice  $L_v$  aumenta de forma ligera (0.25-0.35 cm), lo cual es indicio de que la disipación elástica no toma importancia en la liberación de energía por parte del sistema, dominando la disipación de orden viscoso. Por otra parte, debido a que en la geometría cuadrada para esta relación de contracción no se observó la presencia de vórtices, esto implica que la energía asociada a la interacción viscosa es la única forma de disipación del sistema, por lo que esta debe ser mayor que la desarrollada en geometría axisimétrica, lo cual es demostrado numéricamente por las figuras 4.1.5 y 4.1.6.

### Viscosidad extensional

Uno de los objetivos principales de este trabajo es encontrar si existe alguna geometría y una relación de contracción en particular que favorezca la evaluación de la viscosidad extensional. Si bien en todas las geometrías se desarrolla este tipo de flujo, estas pueden no mantener una característica de flujo reométrico u homogéneo, consistente en el desarrollo del flujo a través de un intervalo de rapidez de extensión pequeño; en particular, resulta interesante observar que la geometría 2:1:2 de la geometría cuadrada presenta un crecimiento de viscosidad extensional sustancialmente grande a un rango de rapidez de extensión pequeño. La figura 4.1.8, donde se muestran los valores de viscosidad extensional contra rapidez de deformación, muestra que a valores de rapidez de deformación de 0.012-0.014 1/s, la viscosidad extensional crece de 1500 a hasta 3800 Pa·s, seguida de un descenso de la viscosidad a medida que crece la rapidez de extensión, por lo que puede asumirse que en esta

contracción se favorece el desarrollo del flujo extensional uniaxial homogéneo, sólo a valores muy bajos de rapidez de extensión. La trayectoria posterior al punto máximo no puede considerarse un flujo extensional uniaxial reométrico, ya que existen fuertes variaciones de la viscosidad a medida que crece la rapidez de extensión, por lo que no proporcionan valores de viscosidad absolutos.

Es de particular atención que en la geometría axisimétrica también existe una zona en la que se puede considerarse un flujo extensional uniaxial de características reométricas, para valores similares alcanzados en geometría cuadrada, en un intervalo de rapidez de corte mayor (0.02-0.06 1/s.) y una viscosidad extensional máxima de 110 Pa·s (figura 4.1.9).

# Contracción/expansión 4:1:4

## Caída de presión total vs flujo volumétrico

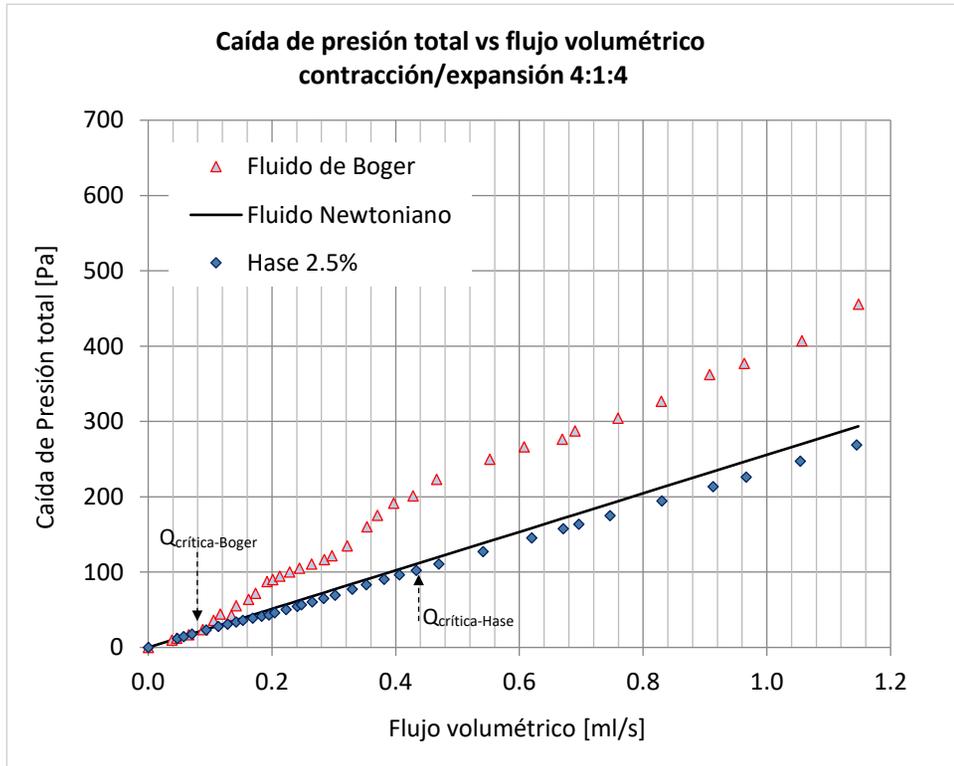


Figura 4.2.1 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 4:1:4 (geometría cuadrada)

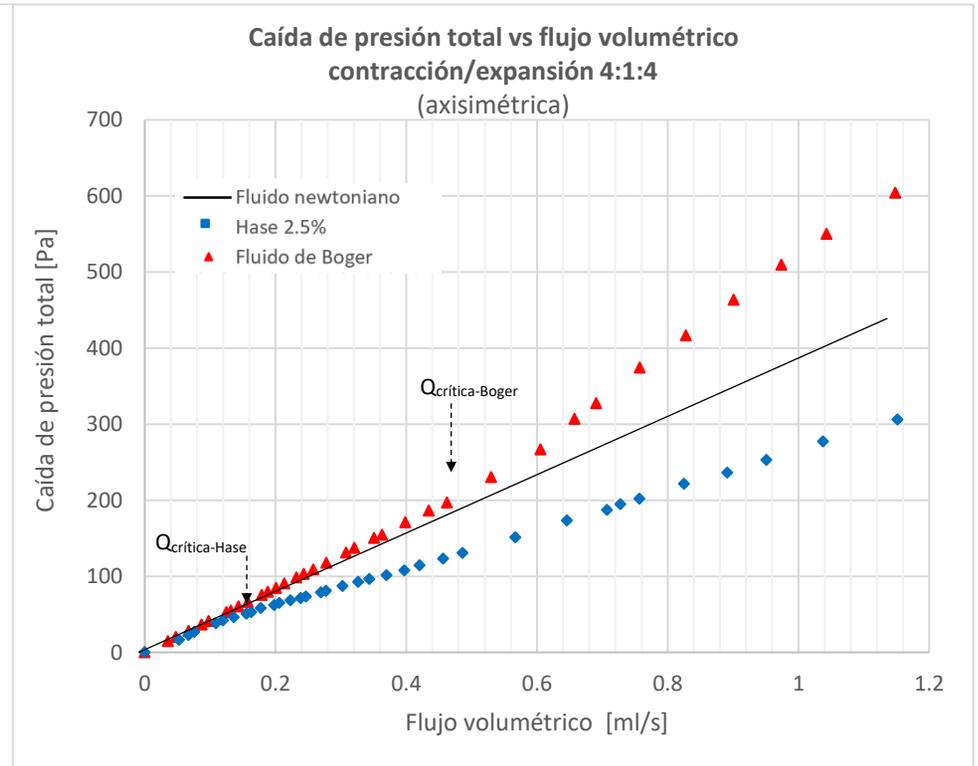


Figura 4.2.2 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 4:1:4 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 4:1:4

## Caída de presión en exceso adimensional vs flujo volumétrico

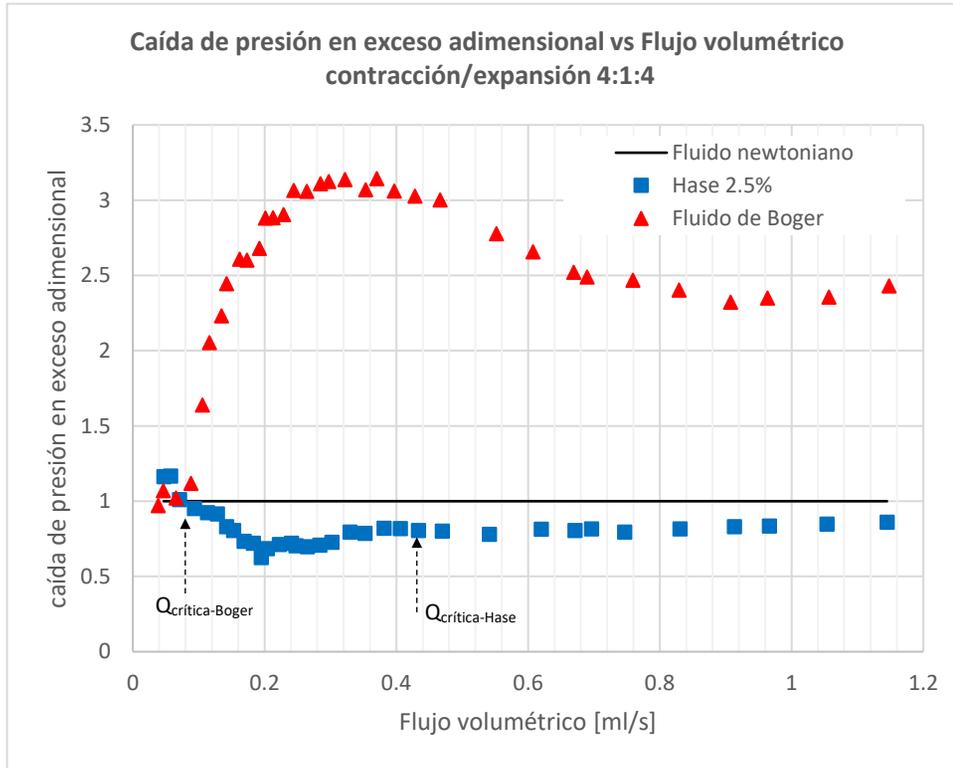


Figura 4.2.3 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 4:1:4 (geometría cuadrada)

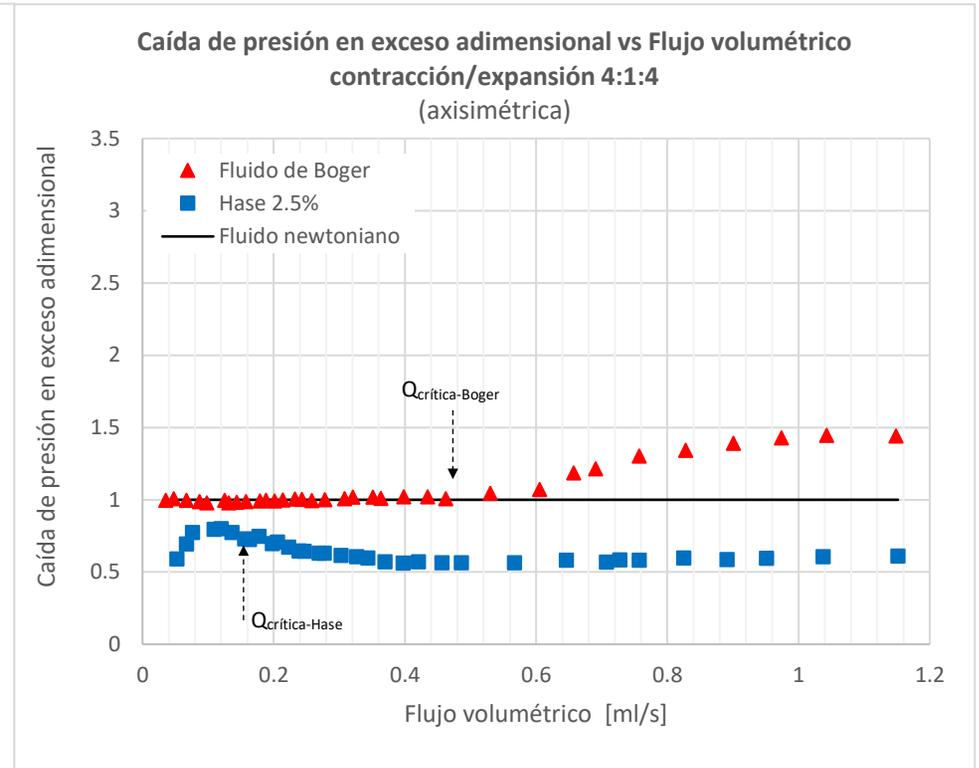


Figura 4.2.4 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 4:1:4 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 4:1:4

## Disipación viscosa vs flujo volumétrico

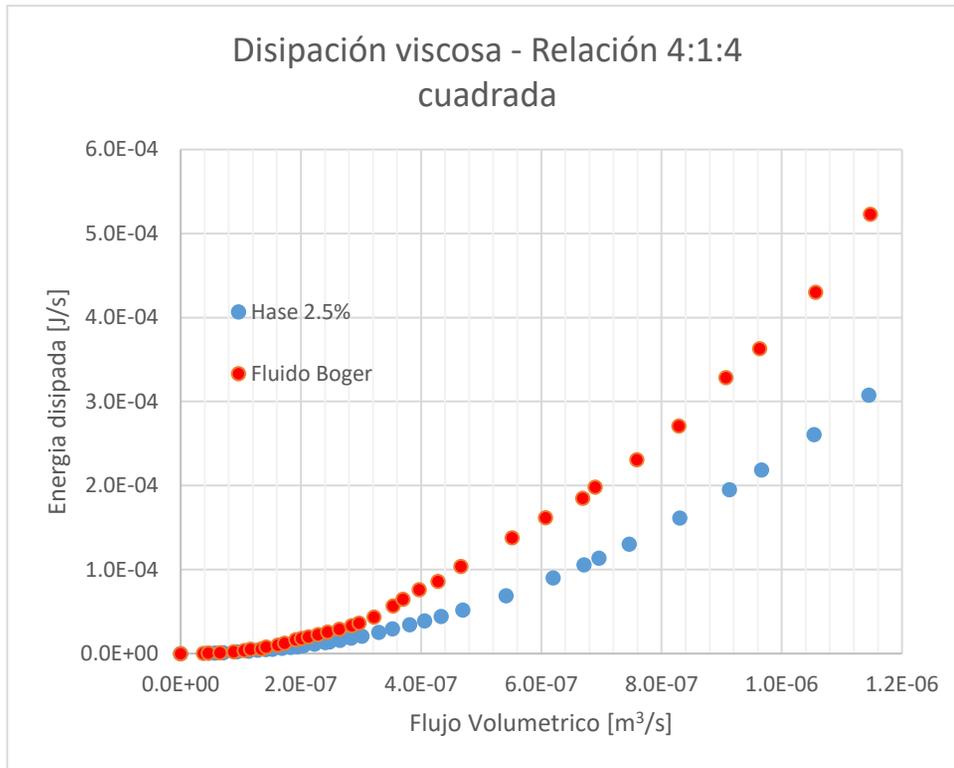


Figura 4.2.5 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 4:1:4 (geometría cuadrada)

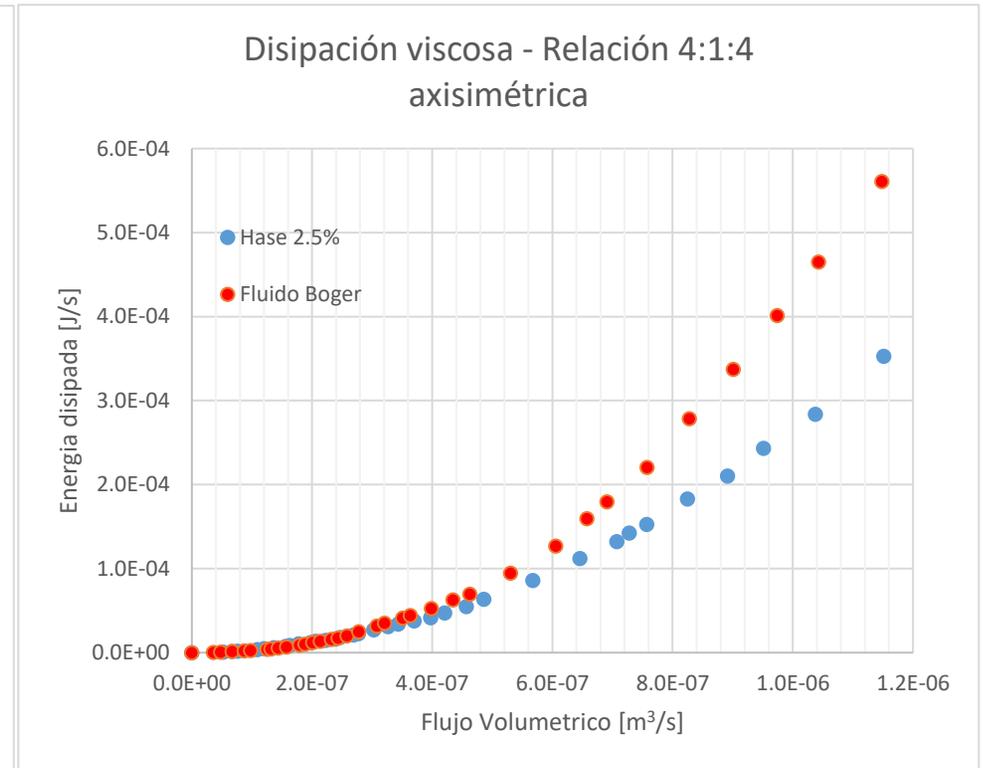


Figura 4.2.6 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 4:1:4 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 4:1:4

## Longitudes características de vórtices vs flujo volumétrico

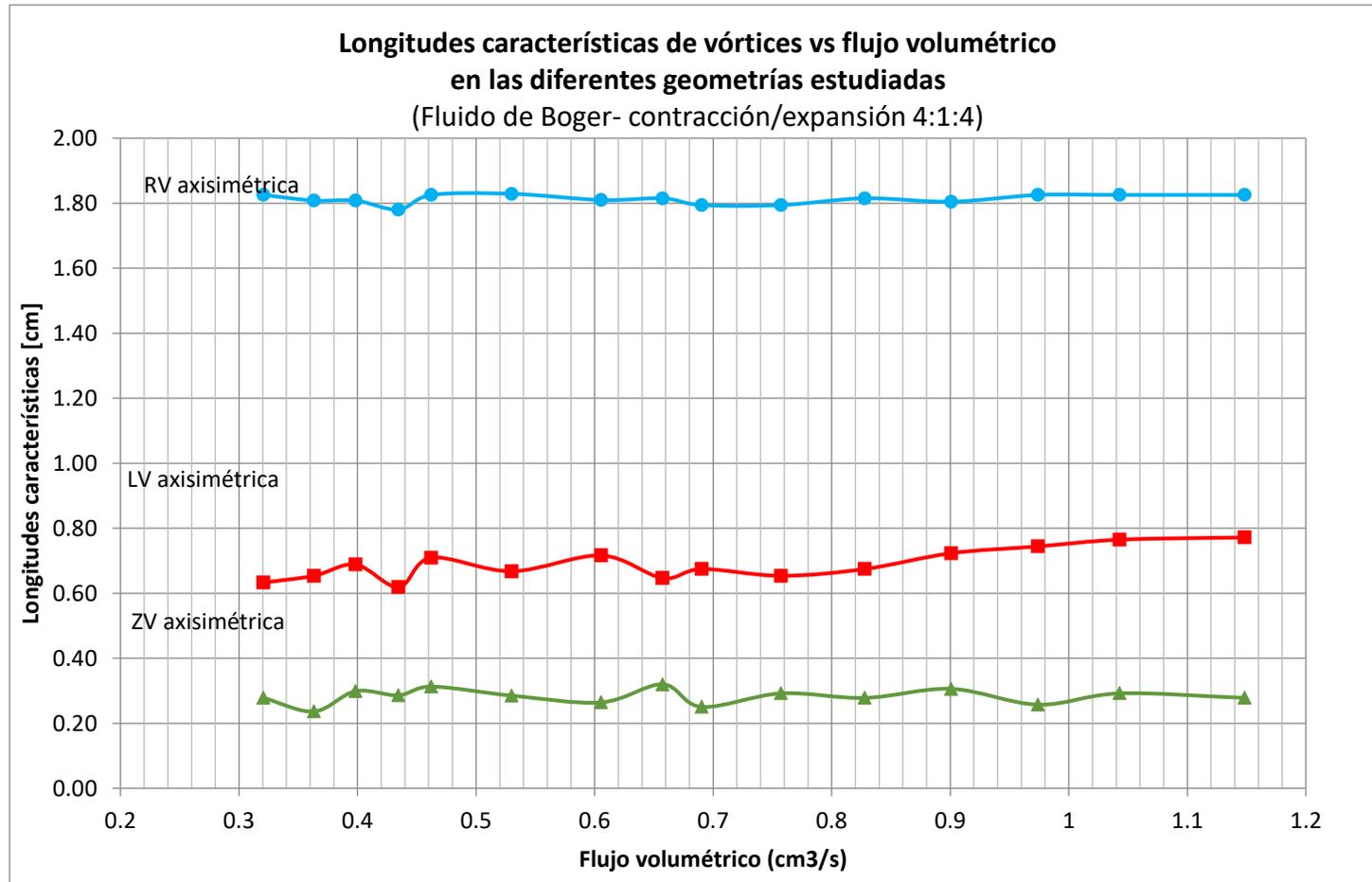


Figura 4.2.7 –Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger en contracción/expansión 4:1:4 (geometrías axisimétrica y cuadrada)

# Contracción/expansión 4:1:4

## Viscosidad extensional vs Rapidez de deformación

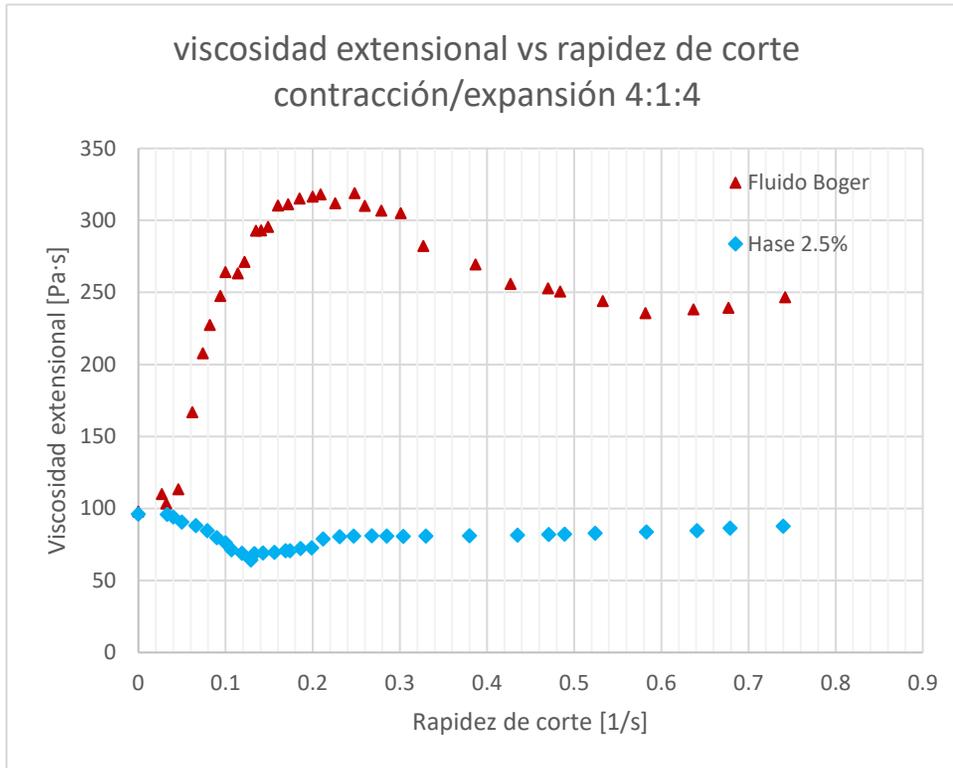


Figura 4.2.8 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 4:1:4 (geometría cuadrada)

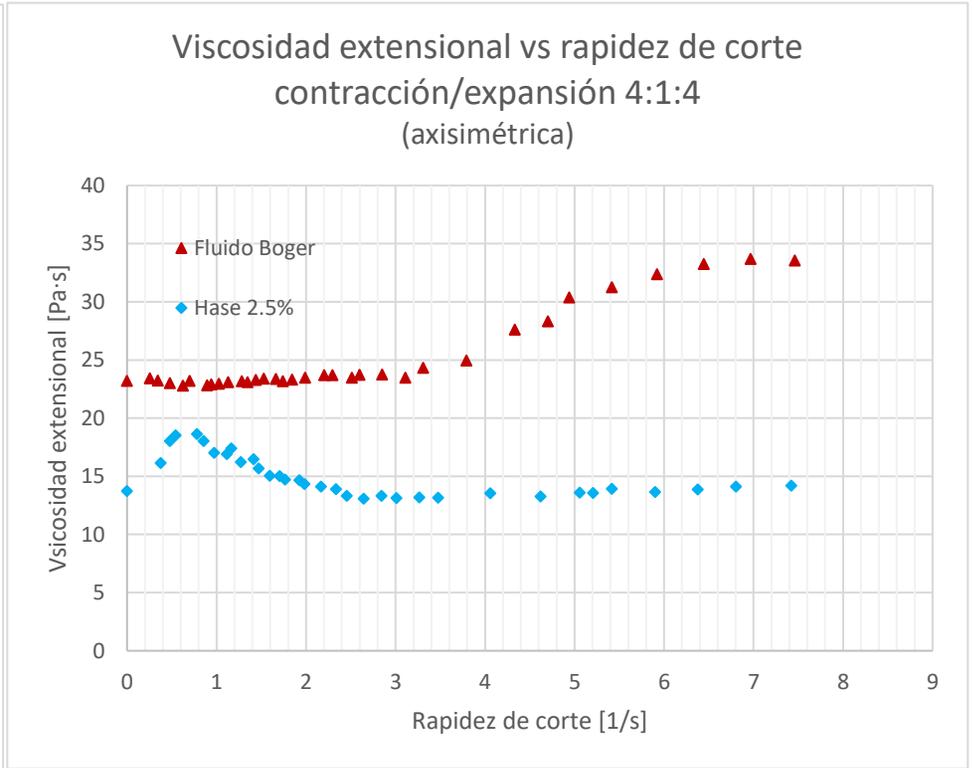


Figura 4.2.9 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 4:1:4 (geometría axisimétrica)

## INTERPRETACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

### CONTRACCIÓN EXPANSIÓN 4:1:4

#### Caída de presión total

A partir de esta relación de contracción se manifiestan variables adicionales que afectan a la dinámica de flujo en contracción/expansión. La reducción de área de sección transversal, modifica los intervalos en donde los fluidos viscoelásticos presentan comportamiento newtoniano, por lo que es de esperar que los gastos críticos para cada fluido se desplacen respecto a los observados en la relación de contracción anterior. Los fluidos Boger y Hase en geometría axisimétrica (figura 4.2.2), empiezan a manifestar zonas de comportamiento cortante, las cuales no se presentaban en la relación 2:1:2 (con  $Q_c=0.48$  ml/s para Boger y 0.16 ml/s para Hase), mientras que en geometría cuadrada (figura 4.2.1) se presenta un descenso en el gasto crítico, llegando a 0.08 ml/s para el fluido de Boger y 0.4 ml/s para la solución Hase.

Esta diferencias de trayectorias entre geometrías, como entre relaciones de contracción, tiene origen en favorecimiento del flujo extensional en la geometría cuadrada, propiciada por la reducción del área de sección transversal respecto a la relación 2:1:2. El fluido de Boger a flujos altos muestra un valor de caída de presión mayor en geometría axisimétrica respecto a la cuadrada por esta razón (Tabla 3.1). Por otro lado, en la geometría axisimétrica, el fenómeno que impacta en el flujo es la interacción entre el fluido y las paredes de la contracción, donde la sección donde el flujo puede pasar libremente es menor, dando como consecuencia una dinámica de naturaleza cortante.

Al contrario de lo que sucede en el fluido de Boger, en la solución Hase la caída de presión no aumenta en ninguna de las dos geometrías, sino que disminuye respecto a la línea de referencia newtoniana. Este comportamiento es causado por la fuerte interacción de la componente perpendicular al flujo de la primera diferencia de esfuerzos normales en corte para este fluido, de la cual se hablará con mayor detalle en el apartado siguiente.

### Caída de presión en exceso adimensional

El aumento del efecto extensional provocado por la geometría cuadrada (figura 4.2.3) justifica el incremento de la EPD adimensional del fluido de Boger sobre el comportamiento newtoniano hasta un punto máximo, ligeramente superior al alcanzado por la relación 2:1:2, tras el cual el efecto cortante empieza a tomar fuerza para gastos mayores. Un caso totalmente diferente se tiene cuando se observa el comportamiento de este fluido en geometría axisimétrica (figura 4.2.4), donde la interacción fluido-pared en la contracción provoca que el efecto extensional sea igual al efecto cortante desarrollado por el fluido de referencia, por lo que la EPD tiene un valor cercano a 1 en gran parte del intervalo de flujo estudiado. A gastos elevados, el desarrollo extensional del fluido se manifiesta en una magnitud mucho menor a la desarrollada en geometría cuadrada.

Por otro lado, en la solución Hase, la trayectoria por debajo de la referencia newtoniana, es provocada por el denominado efecto Binding (estudiado en la sección 2.1.1), donde es común la presencia de un punto mínimo, a partir del cual los esfuerzos extensionales vuelven a imponer sus características al flujo. A pesar de que este efecto se desarrolla en ambas geometrías, para el caso axisimétrico, este comportamiento no es tan pronunciado, y muestra un desarrollo de esfuerzos extensionales lento, lo cual implica que el efecto radial de la primera diferencia de esfuerzos cortantes se presenta con mayor intensidad para esta geometría y esta relación de contracción en particular (Figura 3.3). En contraparte, el flujo extensional desarrollado en geometría cuadrada supera rápidamente al efecto elástico perpendicular, a pesar de presentarse dos esfuerzos perpendiculares al flujo en esta geometría, sobre todo a que el efecto de la primera diferencia de esfuerzos normales de Hase para esta relación de contracción es incipiente. (Figura 3.2).

### Disipación energética

En esta contracción en particular, la longitud  $L_v$  de los vórtices exhibidos por el fluido de Boger en geometría axisimétrica (figura 4.2.7) muestran una tendencia a la alza respecto a la relación de contracción anterior (0.62-0.79 cm), lo cual indica que la mayor parte de la energía disipada por este tipo de contracción se da por medio de interacciones viscosas,

ligeramente mayores a las obtenidas en la relación 2:1:2 (figuras 4.2.5 y 4.2.6). Es interesante hacer la comparativa con la geometría cuadrada, donde la energía disipada de forma viscosa es ligeramente menor para ambos fluidos. La ausencia de vórtices en el intervalo de estudio, se atribuye a la inversión de gran parte de la energía en el favorecimiento del flujo extensional por lo que la cantidad de energía liberada por el sistema en esta geometría se ve reducida.

Sobrepasando el alcance de este análisis, es importante hacer notar al lector la disminución de la energía disipada por interacción viscosa para el fluido de Hase respecto a la relación 2:1:2, la cual, partiendo de la información obtenida anteriormente, se debe al fuerte desarrollo de vórtices por parte del fluido en ambas geometrías, por lo que parte de la energía total disipada por el sistema contracción/expansión se ha liberado de forma elástica.

#### Viscosidad extensional

Al contrario de lo que sucede en la relación 2:1:2, donde las dos geometrías presentaban intervalos de rapidez de deformación donde se considera la presencia de un flujo extensional uniaxial homogéneo, para esta relación de contracción, solo geometría cuadrada presenta una zona donde el flujo extensional presenta estas características reométricas, en un rango de rapidez de corte de 0.06-0.08 1/s dando una viscosidad extensional máxima de 260 Pa·s. (Figura 4.2.8). La ausencia de este comportamiento en la geometría axisimétrica (figura 4.2.9) se debe a la gran dependencia de la rapidez de deformación respecto a la evaluación de la viscosidad extensional, propiciada por la interacción fluido-pared en el sistema, dando clara muestra del efecto de la relación de contracción en la dinámica del flujo en contracción/expansión.

# Contracción/expansión 6:1:6

## Caída de presión total vs flujo volumétrico

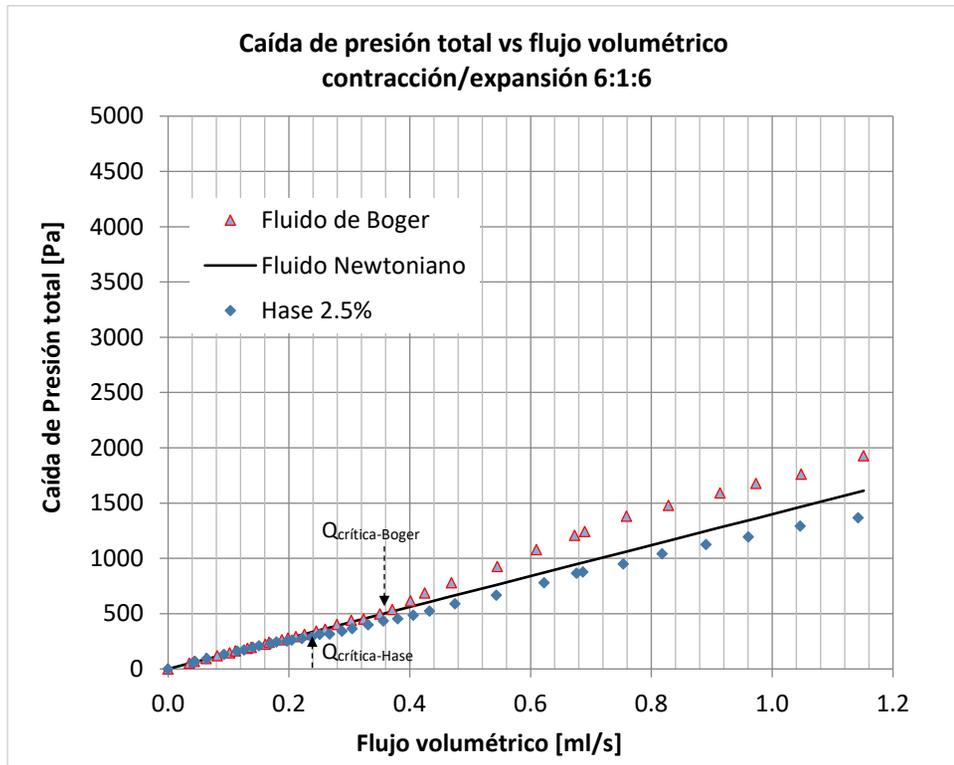


Figura 4.3.1 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 6:1:6 (geometría cuadrada)

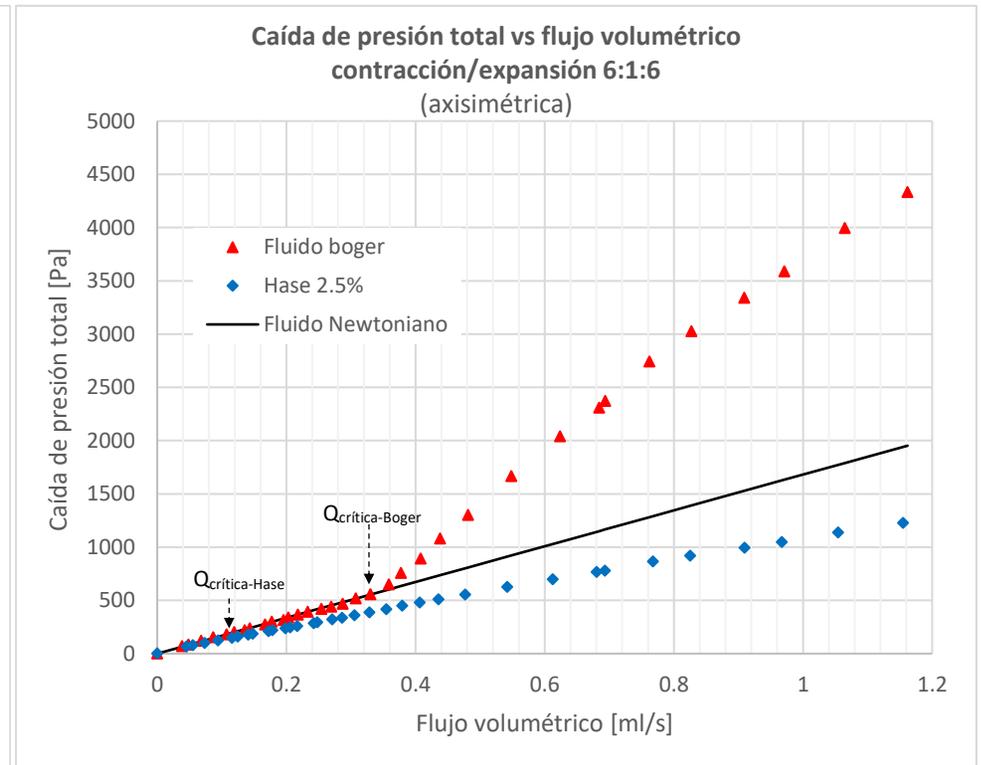


Figura 4.3.2 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 6:1:6 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 6:1:6

## Caída de presión en exceso adimensional vs flujo volumétrico

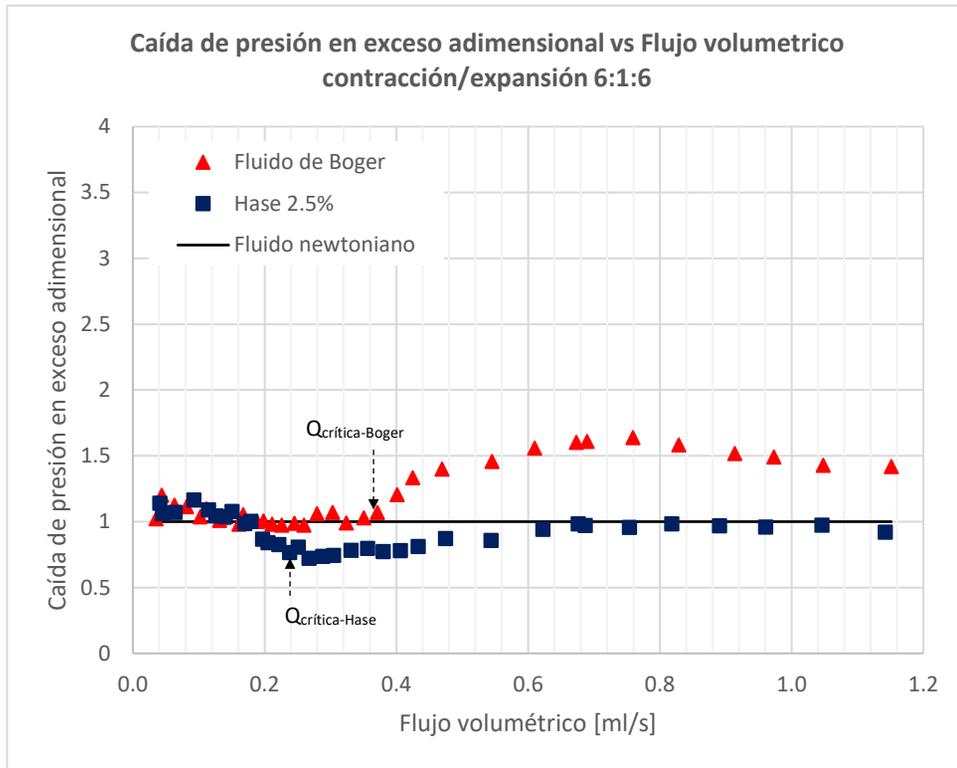


Figura 4.3.3 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 6:1:6 (geometría cuadrada)

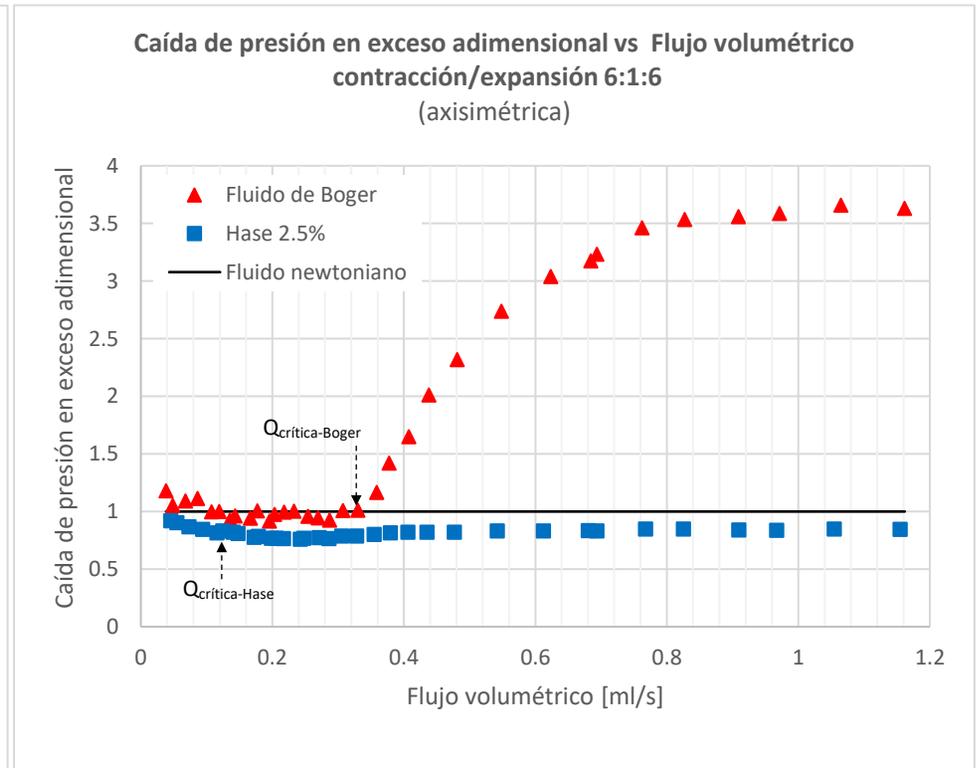


Figura 4.3.4 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 6:1:6 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 6:1:6

## Disipación viscosa vs flujo volumétrico

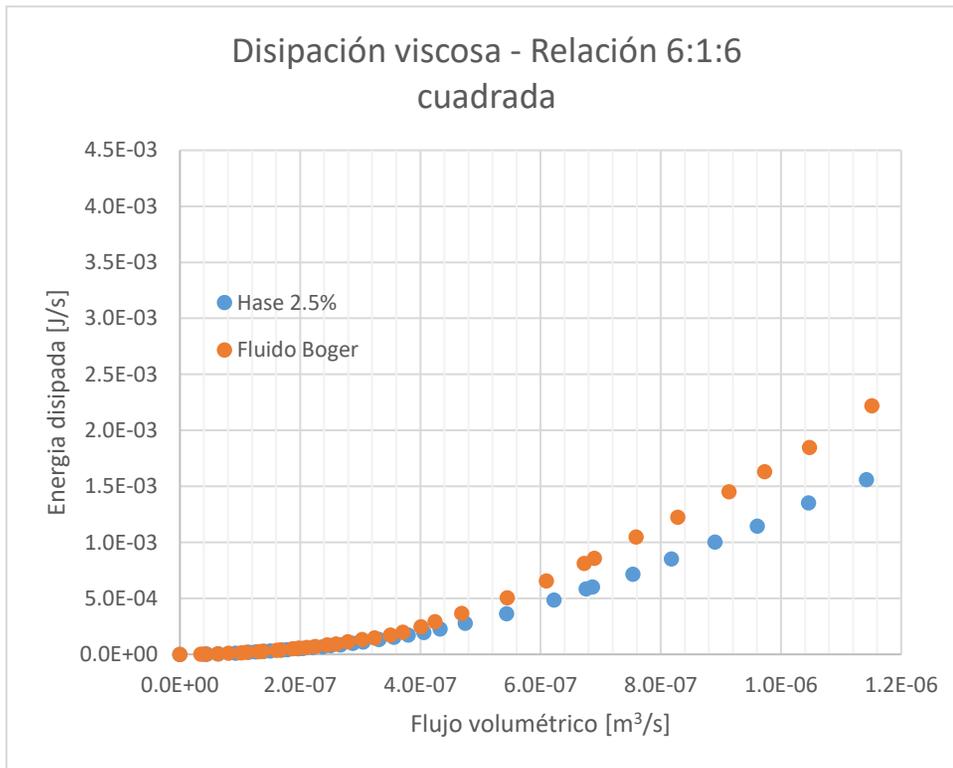


Figura 4.3.5 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 6:1:6 (geometría cuadrada)

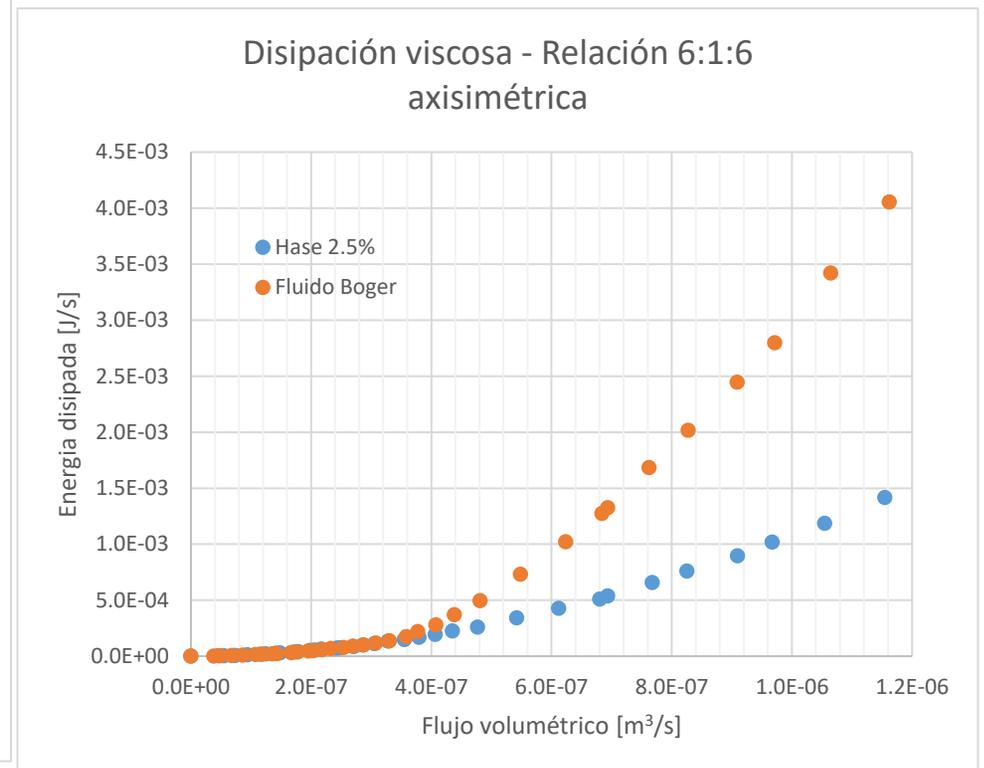


Figura 4.3.6 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 6:1:6 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 6:1:6

## Longitudes características de vórtices vs flujo volumétrico

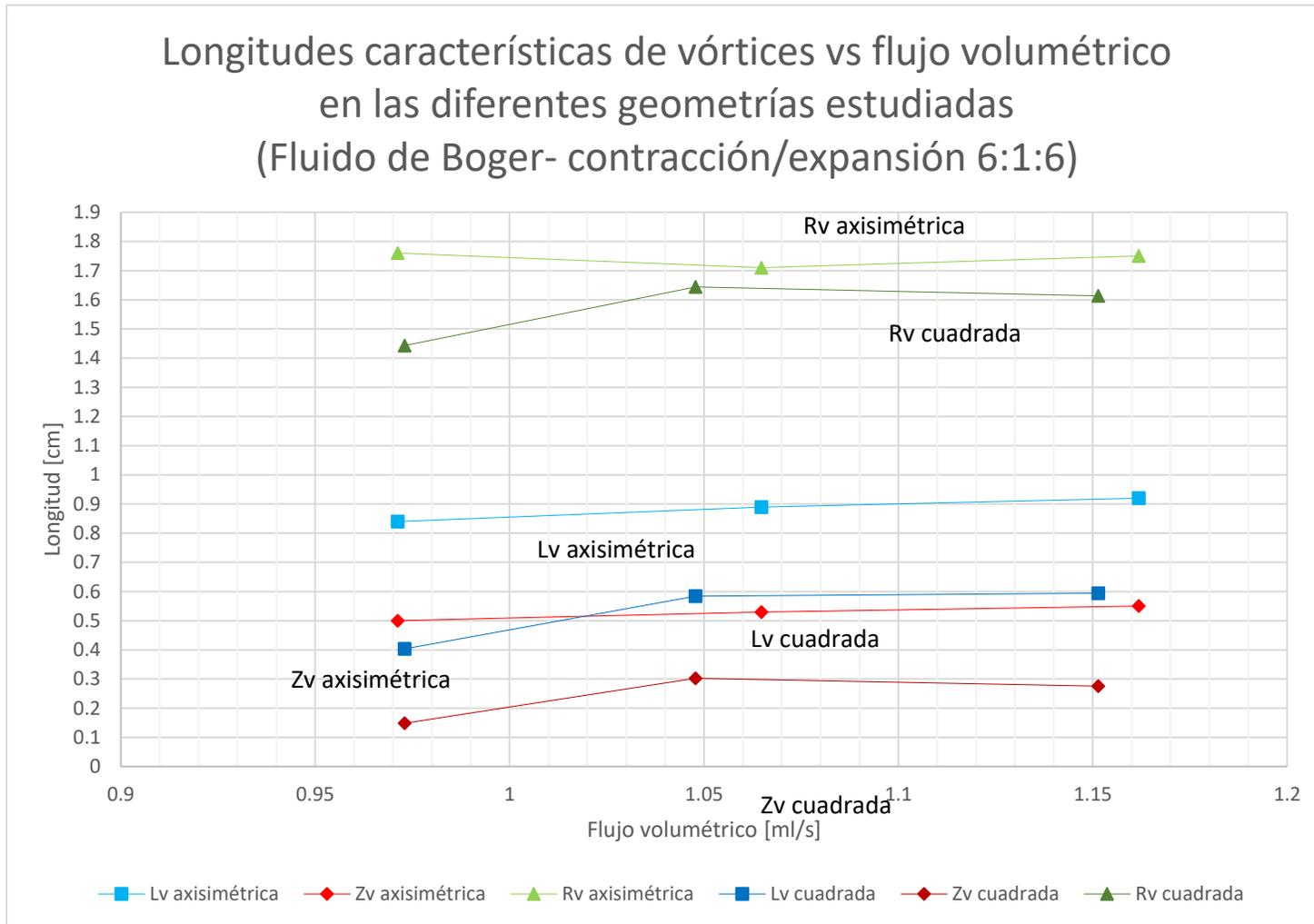


Figura 4.3.7 – Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger en contracción/expansión 6:1:6 (geometrías axisimétrica y cuadrada)

# Contracción/expansión 6:1:6

## Viscosidad extensional vs Rapidez de deformación

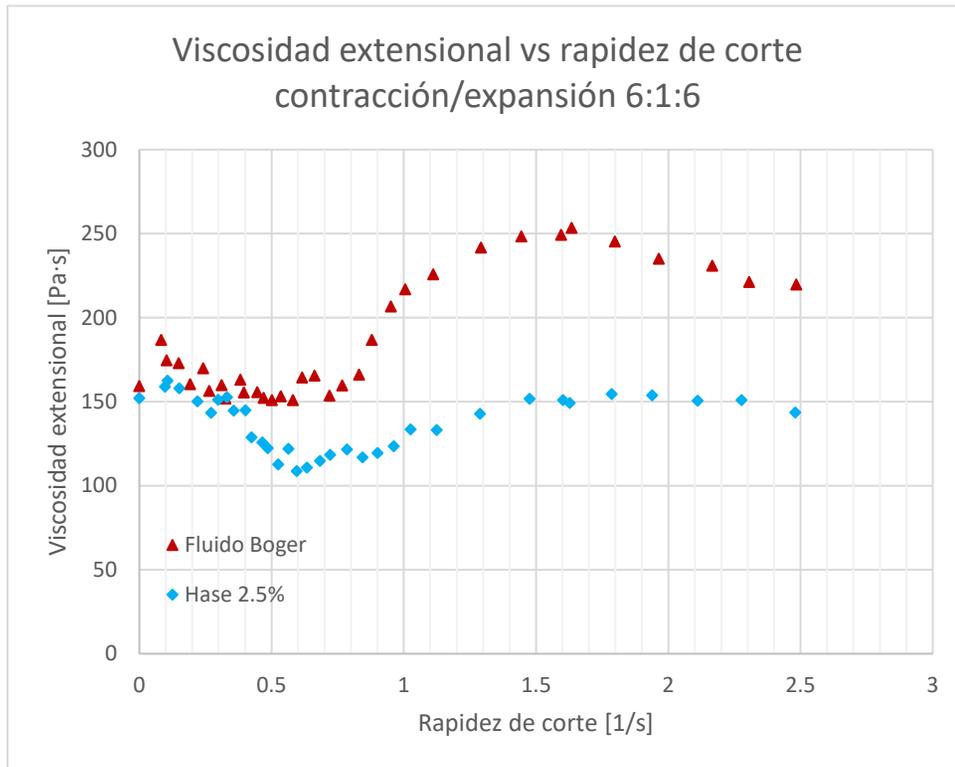


Figura 4.3.8 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 6:1:6 (geometría cuadrada)

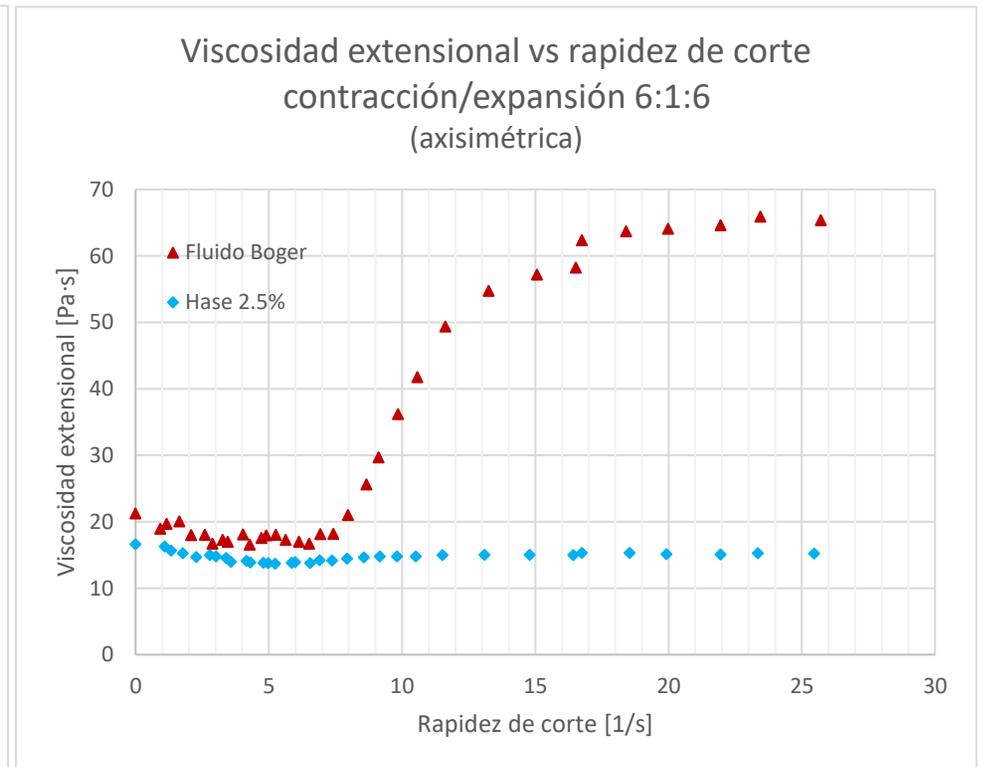


Figura 4.3.9 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 6:1:6 (geometría axisimétrica)

## INTERPRETACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

### CONTRACCIÓN EXPANSIÓN 6:1:6

#### Caída de presión total

En esta relación de contracción y las siguientes, el comportamiento elástico de los fluidos empieza a tomar protagonismo en la dinámica de flujo. El fluido de Boger en las figuras 4.3.1 y 4.3.2 muestra un intervalo de comportamiento newtoniano similar para ambas geometrías, con valores de gasto crítico similares (0.36 ml/s en cuadrado y 0.34 ml/s en axisimétrico).

No obstante, al compararse estos valores con los correspondientes a la relación de contracción 4:1:4, El fluido de Boger la geometría cuadrada registra un ascenso en el desarrollo de flujo cortante, mientras que en geometría axisimétrica tiene un comportamiento inverso: el gasto crítico desciende, mostrando preferencia al comportamiento extensional. El fluido de Hase actúa de forma similar en ambas geometrías, descendiendo respecto a la relación anterior, (0.24 ml/s en cuadrado y 0.12 ml/s en axisimétrico).

Estos desplazamientos entre intervalos de predominancia de un tipo de flujo u otro, tiene origen en dos fenómenos distintos: las pequeñas diferencias las áreas de sección de flujo así como áreas de contacto fluido-pared entre las relaciones de contracción 4:1:4 y 6:1:6, que no son tan abruptas a las comparables entre relaciones 4:1:4 y 2:1:2 (Tabla 3.1), por lo que, en primera instancia, el efecto que favorecía al flujo extensional debido a la reducción de área de flujo, la cual es cada vez menor, se ve desplazada por la fuerte interacción del fluido con la pared de la contracción,.

El segundo efecto que entra en juego es el inicio de la manifestación del comportamiento elástico por parte del fluido de Boger, expresado por la primera diferencia de esfuerzos normales, tal como se muestra en la reología del fluido (figuras 3.2-3.3) y donde es evidente que la geometría axisimétrica tiene una mayor presencia de este comportamiento, por lo que es natural que presente caídas de presión mayores a la geometría cuadrada.

### Caída de presión en exceso adimensional

El contacto fluido-pared en geometría cuadrada (figura 4.3.3) es de tal magnitud que no permite un desarrollo total de los esfuerzos extensionales, por lo que la EPD adimensional presenta valores muy bajo respecto a los obtenidos en la relación 4:1:4. El efecto elástico del fluido Boger para la rapidez de corte aplicada al sistema en geometría axisimétrica (figura 4.3.4) favorece a tal grado el flujo extensional que el valor de EPD crece de forma importante, sobre el comportamiento cortante del fluido newtoniano, el cual aumenta lentamente.

El descenso respecto a la línea de referencia newtoniana del fluido de Hase en geometría axisimétrica ya no es causado por la presencia del efecto Binding como en la relación de contracción 4:1:4, de hecho, el efecto de la componente radial es tan pequeño que se hace despreciable; por lo que los comportamientos observados en este fluido tienen origen en la competencia de dos fenómenos nuevos: la naturaleza elástica y las propiedades adelgazantes del fluido, lo cual se visualiza en la figura 4.3.3, donde a pesar de desarrollar efectos elásticos mayores a flujos altos, la EPD en exceso adimensional vuelve a disminuir, esta vez por efecto del adelgazamiento del fluido. En la geometría cuadrada, los intervalos de rapidez de corte estudiados superan ligeramente al valor donde se empieza a manifestar el efecto adelgazante (figura 3.4), por lo que su comportamiento sigue teniendo origen en la geometría, expresando el efecto elástico con un descenso casi imperceptible en los últimos puntos estudiados.

### Disipación energética

El comportamiento elástico del fluido de Boger observado en la sección anterior empieza a manifestarse de forma visual por medio de la generación de vórtices, los cuales estuvieron ausentes en las dos relaciones de contracción anteriores. La longitud  $L_v$  en geometría axisimétrica para este fluido (figura 4.3.7) presenta valores más altos que los correspondientes a la misma longitud en geometría cuadrada, lo cual implica que se disipa más energía de forma elástica en una geometría que en otra. Sin embargo, la disipación de origen viscoso (figuras 4.3.5 y 4.3.6) sigue siendo mayor en geometría axisimétrica, donde el área de sección transversal propicia una mayor interacción entre el fluido y la pared de la

contracción. El fluido Hase muestra un descenso importante en la cantidad de energía disipada de origen viscoso, debido al alto desarrollo de vórtices para ambas geometrías.

### Viscosidad extensional

Es preciso notar que, al contrario que en las dos relaciones de contracciones analizadas con anterioridad, ninguna de las geometrías presenta flujo reométrico, debido a que los valores de viscosidad cambian constantemente para cada rapidez de corte estudiada. (Figura 4.3.8 y 4.3.9).

# Contracción/expansión 8:1:8

## Caída de presión total vs flujo volumétrico

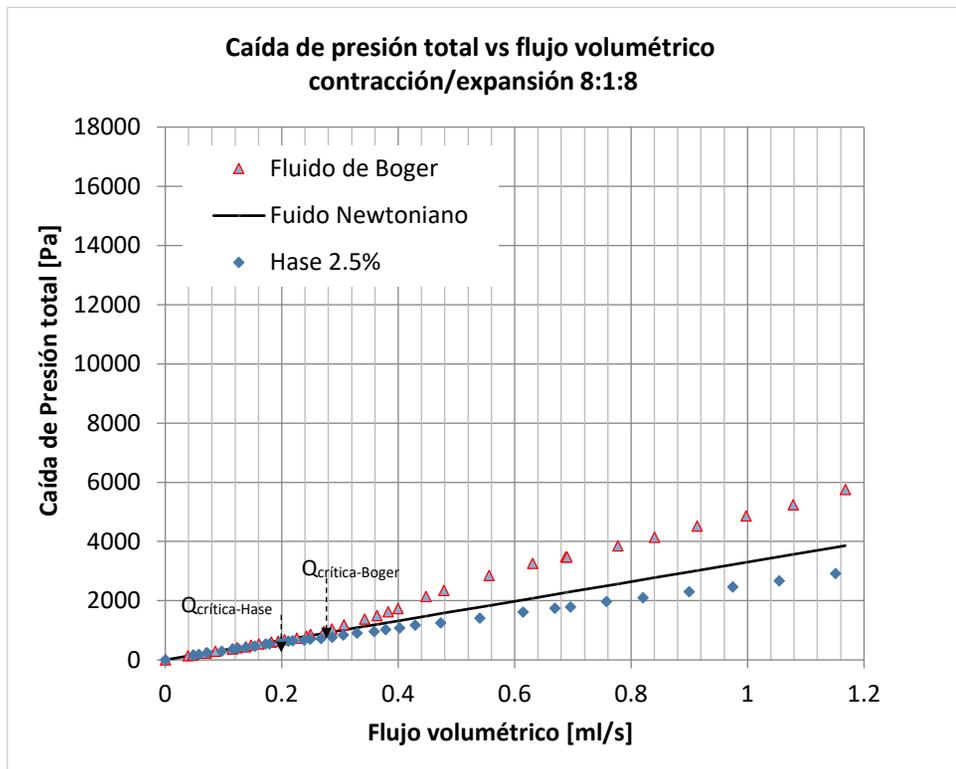


Figura 4.4.1 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 8:1:8 (geometría cuadrada)

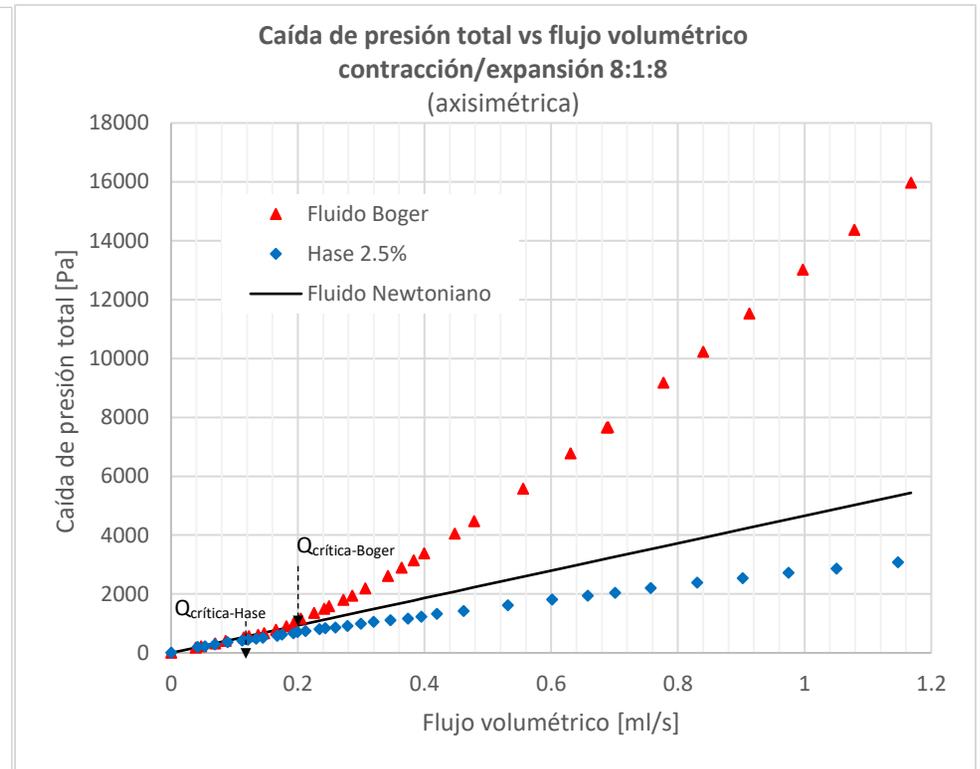


Figura 4.4.2 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 8:1:8 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 8:1:8

## Caída de presión en exceso adimensional vs flujo volumétrico

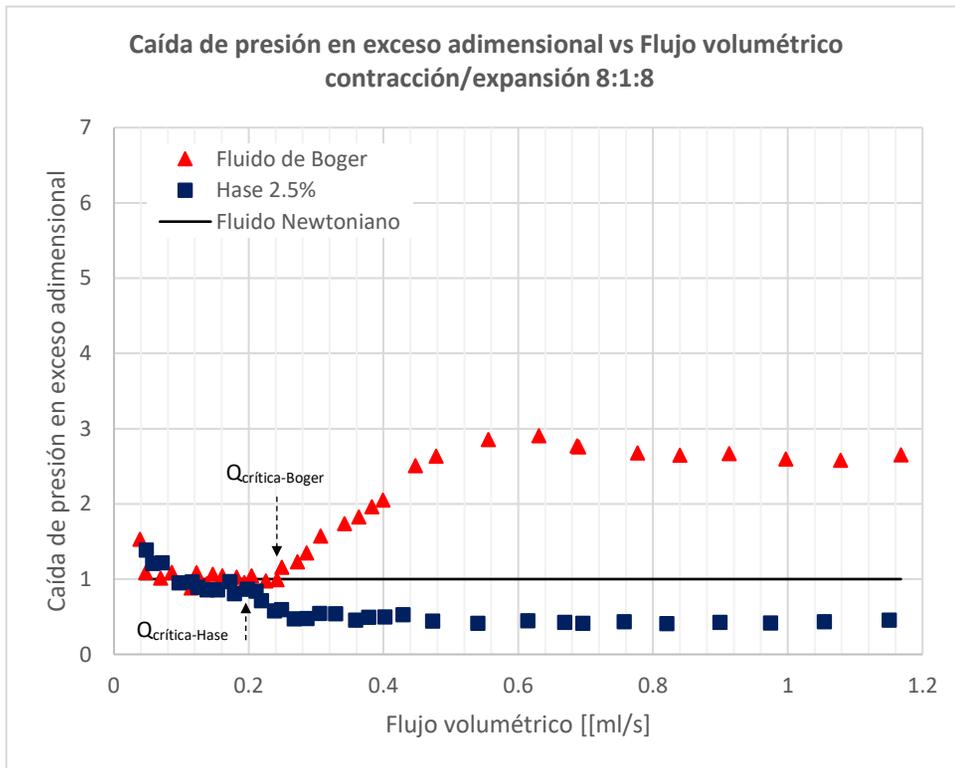


Figura 4.4.3 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 8:1:8 (geometría cuadrada)

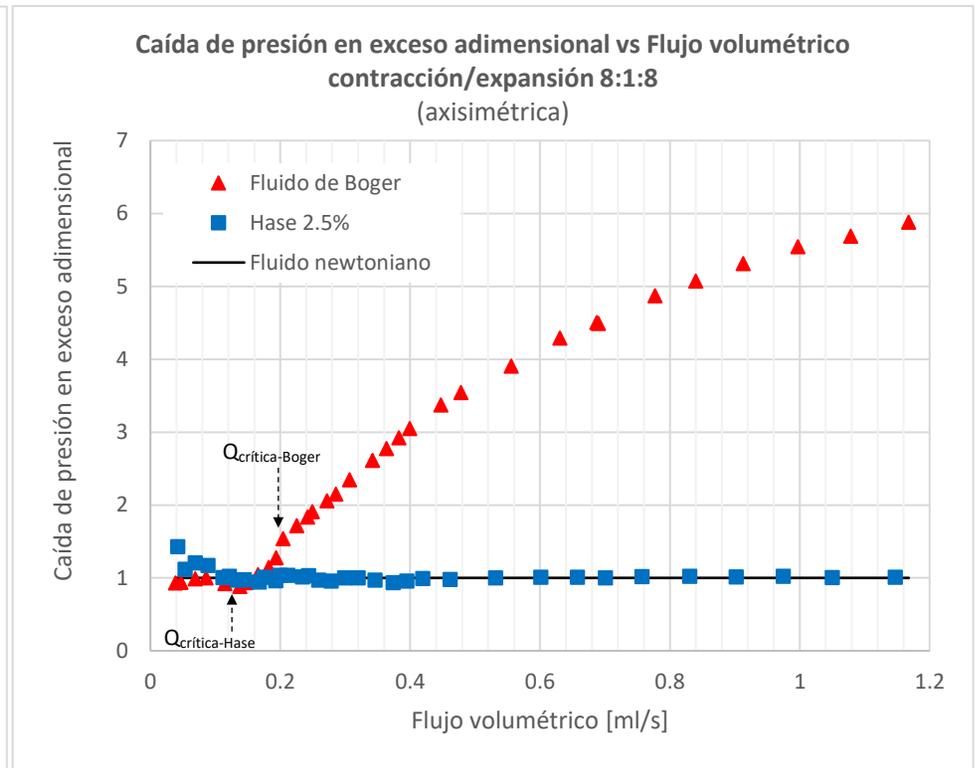


Figura 4.4.4 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 8:1:8 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 8:1:8

## Disipación viscosa vs flujo volumétrico

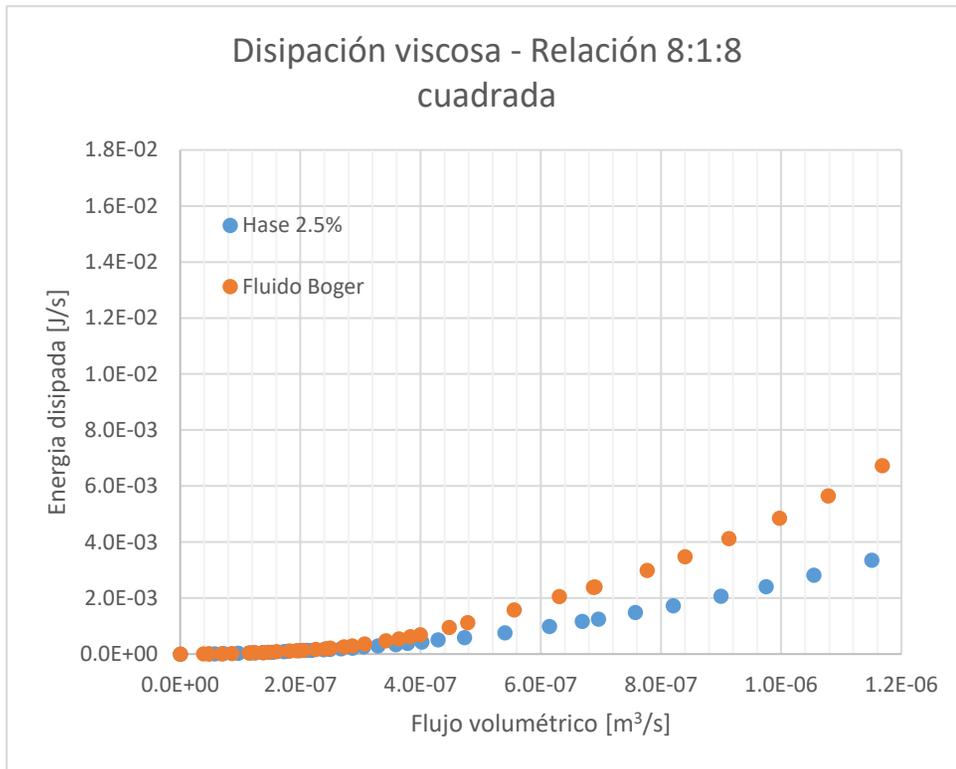


Figura 4.4.5 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 8:1:8 (geometría cuadrada)

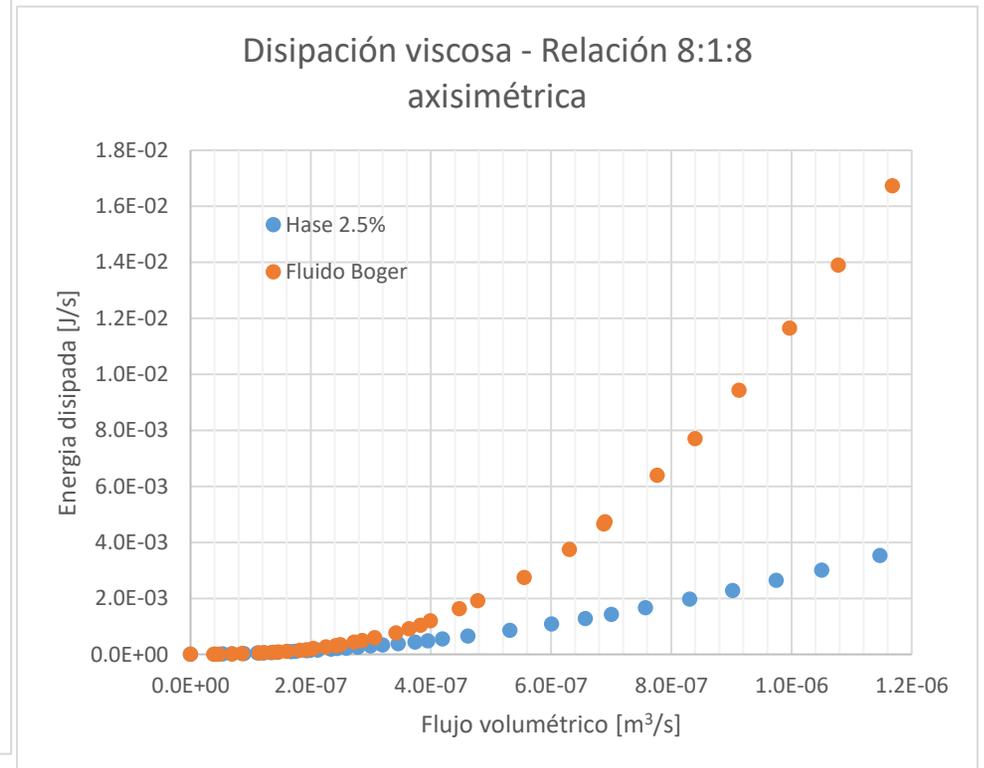


Figura 4.4.6 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 8:1:8 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 8:1:8

## Longitudes características de vórtices vs flujo volumétrico

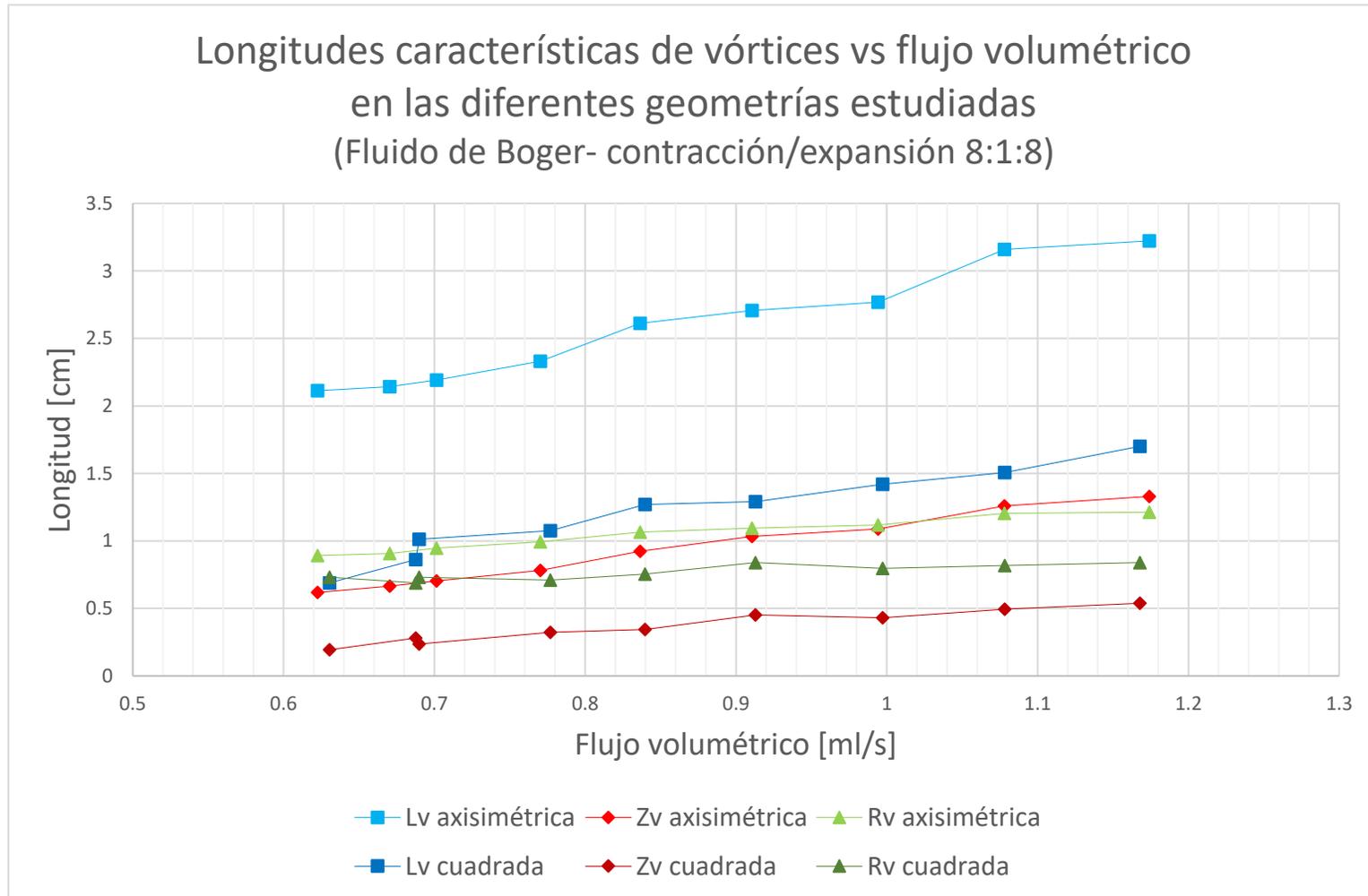


Figura 4.4.7 –Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger en contracción/expansión 8:1:8 (geometrías axisimétrica y cuadrada)

# Contracción/expansión 8:1:8

## Viscosidad extensional vs Rapidez de deformación

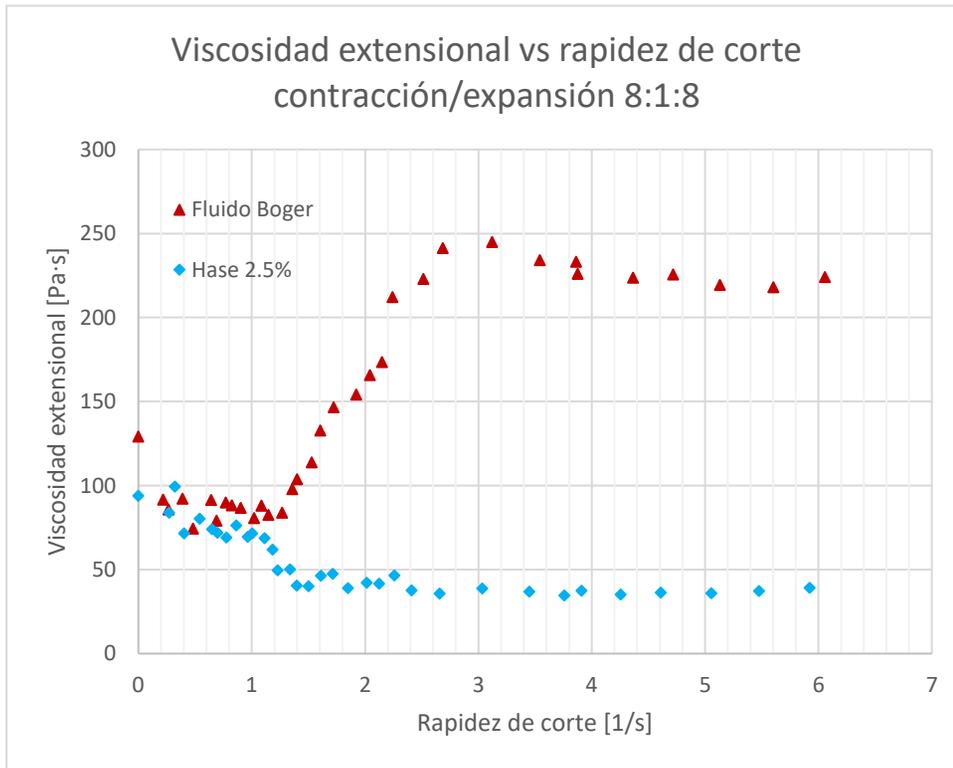


Figura 4.4.8 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 8:1:8 (geometría cuadrada)

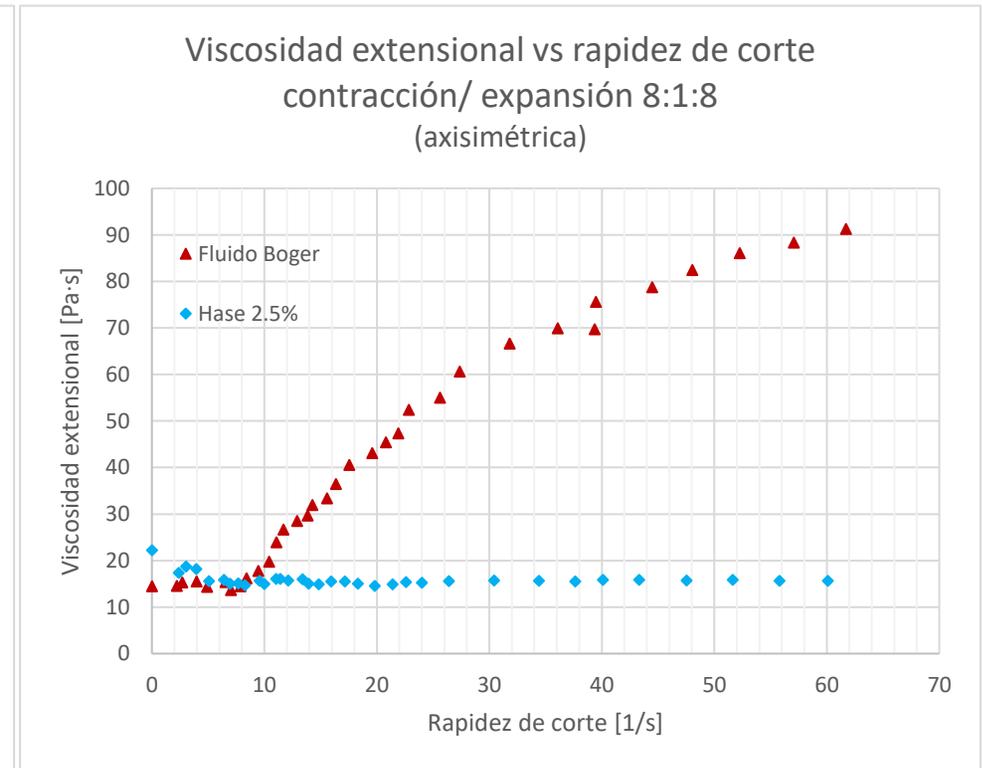


Figura 4.4.9 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 8:1:8 (geometría axisimétrica)

## **INTERPRETACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS**

### **CONTRACCIÓN EXPANSIÓN 8:1:8**

#### Caída de presión total

Los comportamientos de las trayectorias de caída de presión total en los dos fluidos (figura 4.4.1 y 4.4.2) siguen las mismas tendencias respecto a las observadas en la relación de contracción anterior; donde el desplazamiento del gasto crítico, es cada vez menor (de 0.20-0.24 ml/s para el fluido de Boger y de 0.12-0.13 ml/s para Hase), lo que lleva a afirmar que el cambio de flujo deja de depender de la geometría del sistema contracción/expansión y la manifestación de la elasticidad empieza a marcar la presencia de este punto de transición de la dinámica de flujo.

En el caso particular del fluido de Boger, el comportamiento elástico en geometría cuadrada se muestra por un ascenso considerable de la caída de presión total, incluso al compararse con la relación anterior, desarrollando caídas máximas de hasta 18000 Pa, respecto a la 5000 obtenidas en la relación 6:1:6. Para el caso de la geometría cuadrada, la interacción fluido-pared es tan intensa que no permite el desarrollo del flujo extensional a las magnitudes alcanzadas por su contraparte axisimétrica, con valores máximos de 6000 Pa aproximadamente.

La solución Hase muestra comportamientos similares al compararse las geometrías estudiadas, visualizando caídas de presión menores en geometría axisimétrica, originadas tanto por el efecto elástico del fluido, así como por efecto adelgazante, el cual cada vez se presenta con mayor fuerza.

#### Caída de presión en exceso adimensional

Mediante el estudio de la reología de los fluidos en ambas geometrías (figuras 3.2 y 3.3), se ha visualizado que los intervalos de rapidez de corte en los sistemas contracción/expansión no son iguales; la geometría cuadrada presenta valores de rapidez de deformación menores a las desarrolladas en geometría axisimétrica, por lo que es de esperar que algunos efectos se

presenten con anterioridad en esta última geometría, como lo fue la influencia de la primera diferencias de esfuerzos normales en corte en el fluido de Boger.

Para la relación de contracción 8:1:8 este efecto se empieza a manifestar ahora en geometrías cuadrada (figura 4.4.3), el cual lleva a que el fluido presente zonas donde La EDP tenga valores cercanos a uno, y por tanto, con valores similares a los desarrollados en el fluido newtoniano. Esto último, sumado al efecto cortante propiciado por la propia geometría, hace que la caída de presión en exceso adimensional no permita el ascenso de su trayectoria por el desarrollo del flujo extensional a pesar de ser cada vez mayor, por lo que nuevamente desciende lentamente. Caso totalmente contrario se tiene en geometría axisimétrica (figura 4.4.4), donde el efecto elástico del fluido Boger es tan grande que supera a cualquier efecto de naturaleza cortante que pudiese presentarse, por lo que la trayectoria de EPD adimensional sigue una tendencia ascendente hacia un valor cercano a 6 a valores de flujo altos.

El efecto de la elasticidad de la solución Hase en geometría axisimétrica es plasmado por el ascenso de su trayectoria de EPD adimensional, la cual permanece a valores cercanos a los desarrollados por el fluido newtoniano, a pesar de que el intervalo estudiado en esta geometría ya presente el efecto de la disminución de la viscosidad. Para el caso de la geometría cuadrada, la dependencia de la geometría sigue manifestándose, por lo que el descenso observado sigue siendo causado por el efecto Binding, no obstante el flujo extensional supera rápidamente al efecto de la componente perpendicular al flujo.

### Disipación energética

Como se puede observar en las figuras 4.4.5 y 4.4.6, la energía total disipada por el sistema contracción/expansión es menor en geometría cuadrada un ascenso considerable respecto a la relación 6:1:6, lo cual efectivamente es corroborado tanto en los gráficos de disipación viscosa así como en las longitud  $L_v$  de los vórtices observados en ambos fluidos (figura 4.4.7). Las causas de este comportamiento se deben a la liberación de energía de naturaleza elástica por medio de vórtices, así como en la inversión de energía en el propio desarrollo del flujo extensional en esta geometría. Esto lleva a afirmar que los fluidos (sobre todo Hase) tienden a disipar energía en forma elástica. Y donde el fluido de Boger disipa mayor energía por interacción viscosa, a pesar de que no se pueda percibir en los gráficos de caída de presión total y de EPD.

### Viscosidad extensional

Nuevamente, ninguna de las geometrías presenta zonas de flujo extensional homogéneo; la viscosidad se vuelve cada vez más dependiente de la rapidez de deformación aplicada (Figura 4.4.8 y 4.4.9).

# Contracción/expansión 10:1:10

## Caída de presión total vs flujo volumétrico

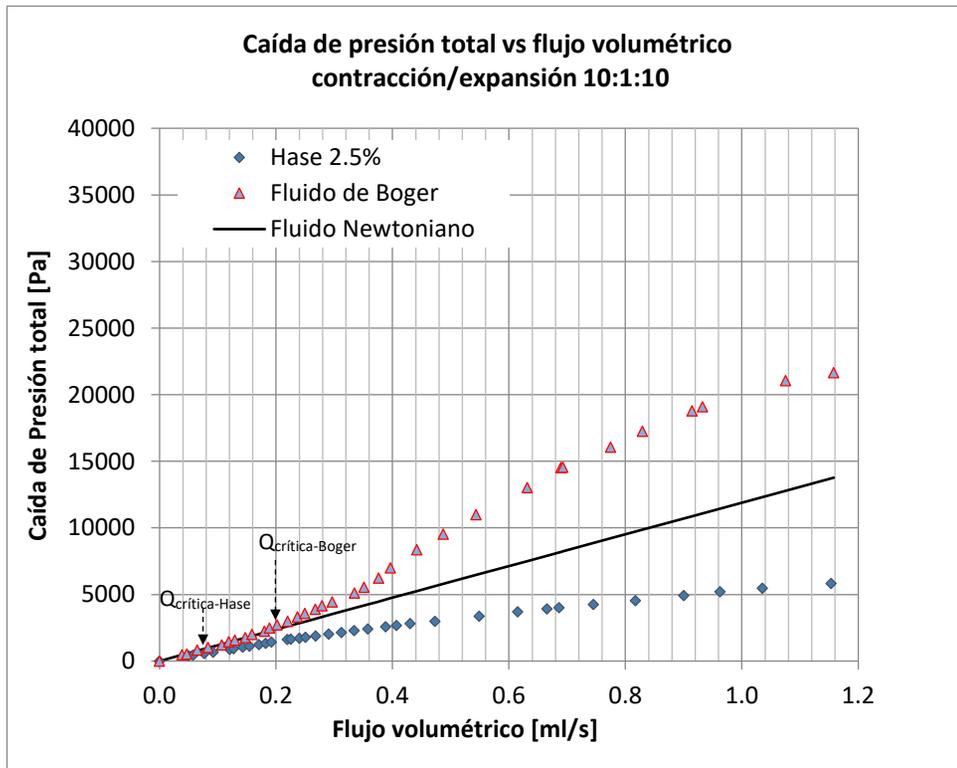


Figura 4.5.1 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 10:1:10 (geometría cuadrada)

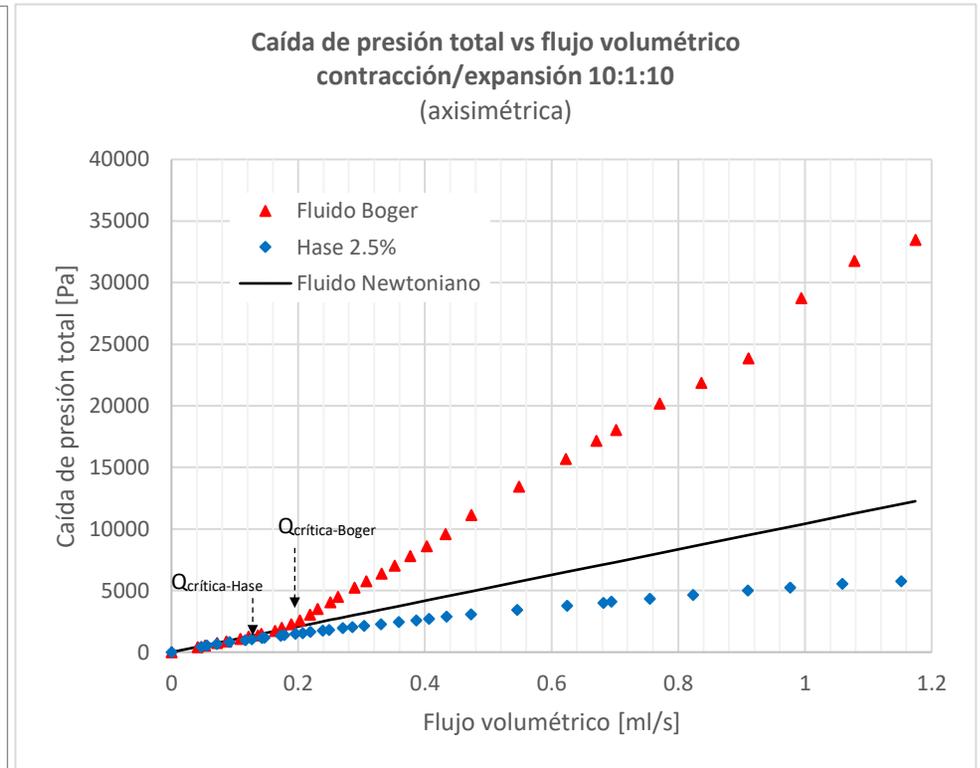


Figura 4.5.2 – Comparativa entre las caídas de presión totales de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 10:1:10 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 10:1:10

## Caída de presión en exceso adimensional vs flujo volumétrico

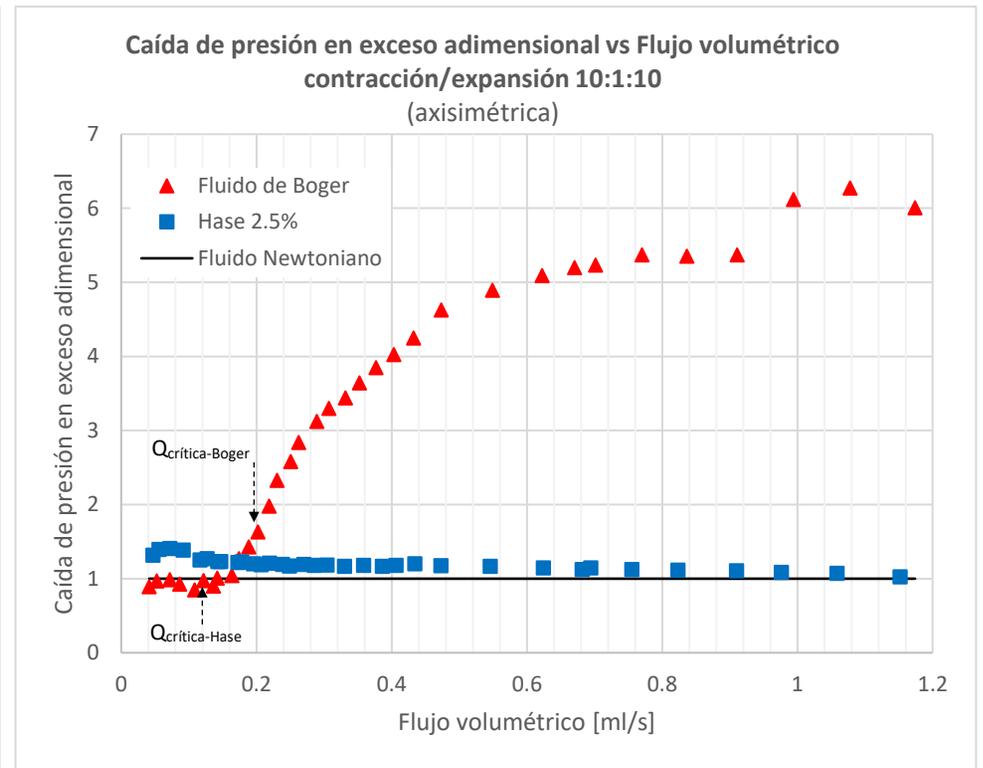
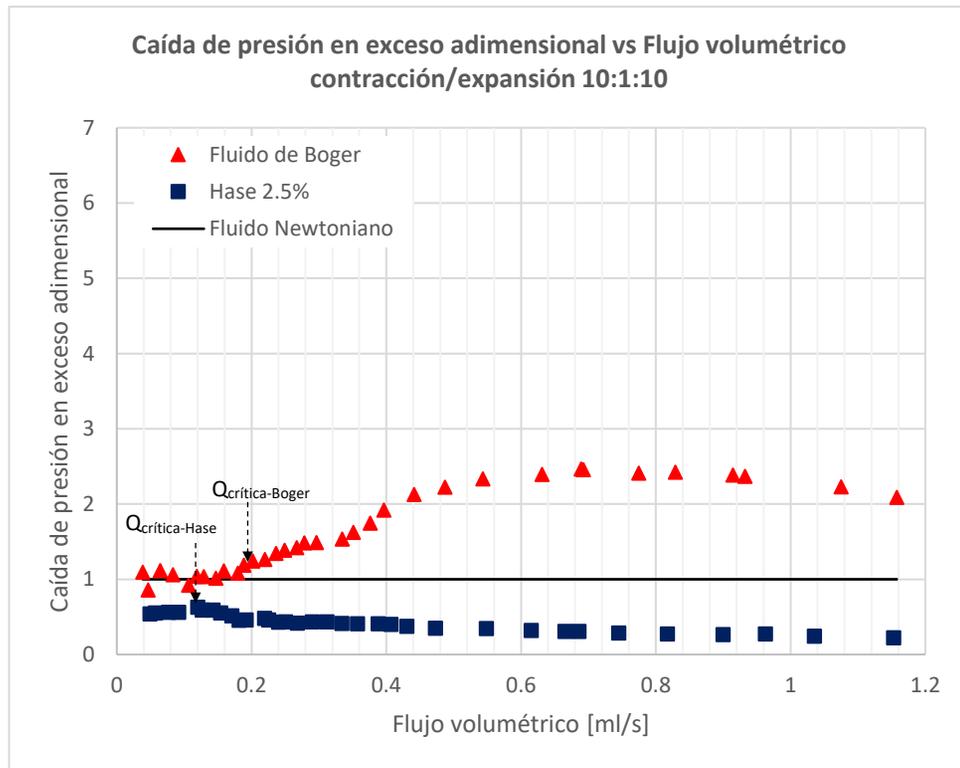


Figura 4.5.3 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 10:1:10 (geometría cuadrada)

Figura 4.5.4 – Comparativa entre las caídas de presión en exceso adimensional de los fluidos Hase Boger y la referencia newtoniana en contracción/expansión 10:1:10 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 10:1:10

## Disipación viscosa vs flujo volumétrico

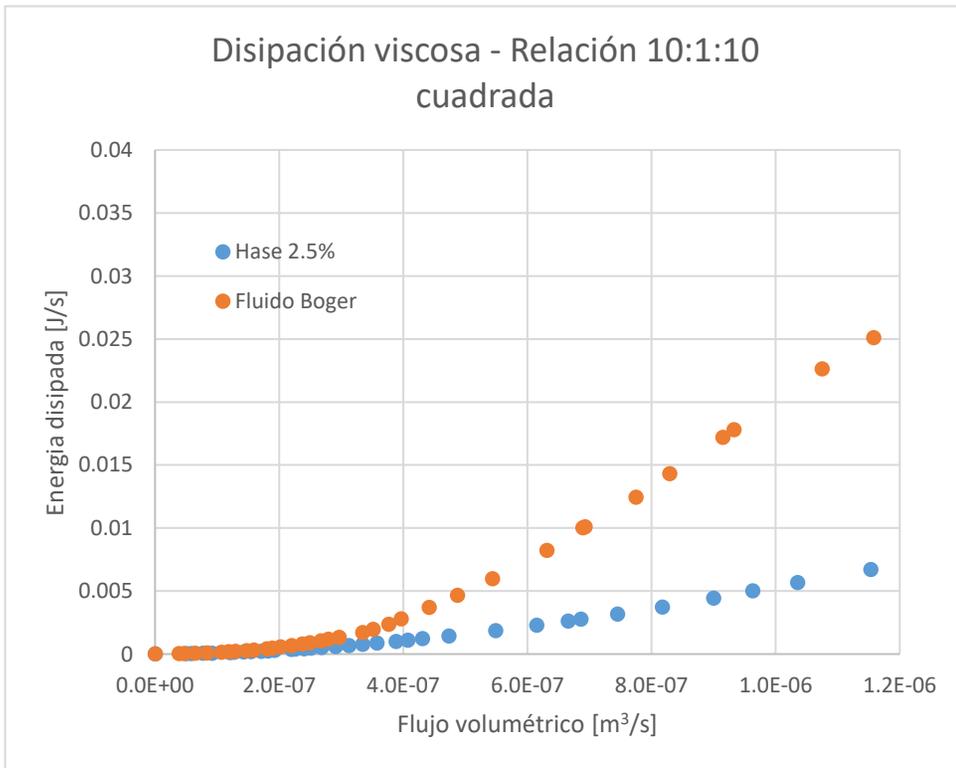


Figura 4.5.5 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 10:1:10 (geometría cuadrada)

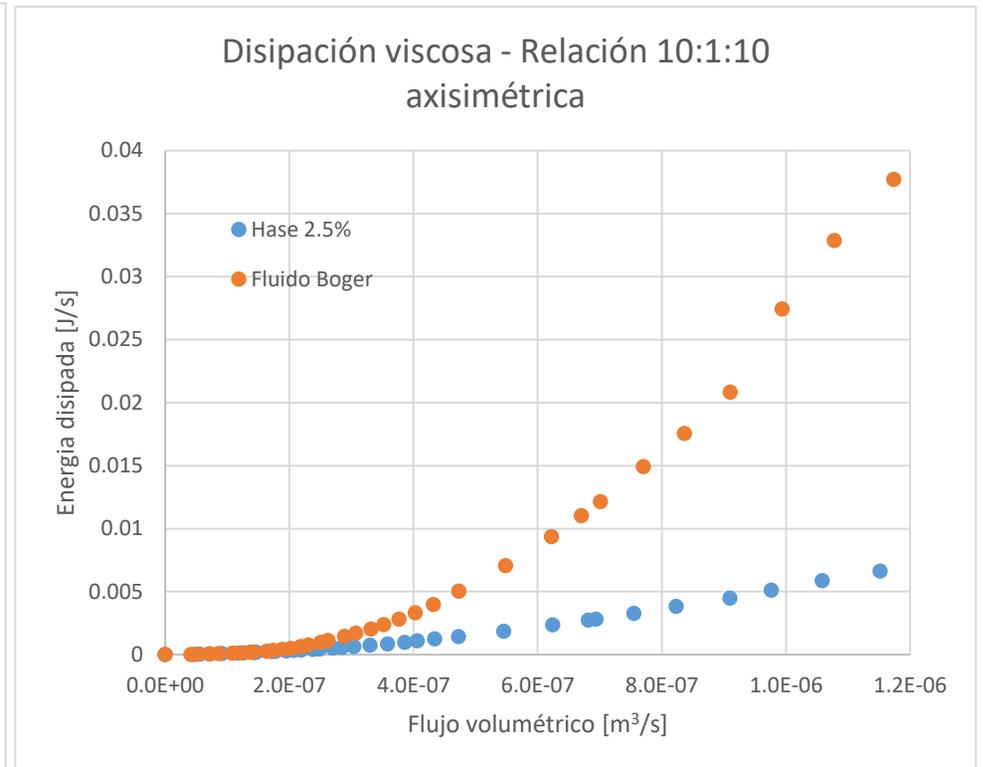


Figura 4.5.6 –Cantidad de energía liberada por interacción viscosa en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 10:1:10 (geometría axisimétrica)

# Contracción/expansión 10:1:10

## Longitudes características de vórtices vs flujo volumétrico

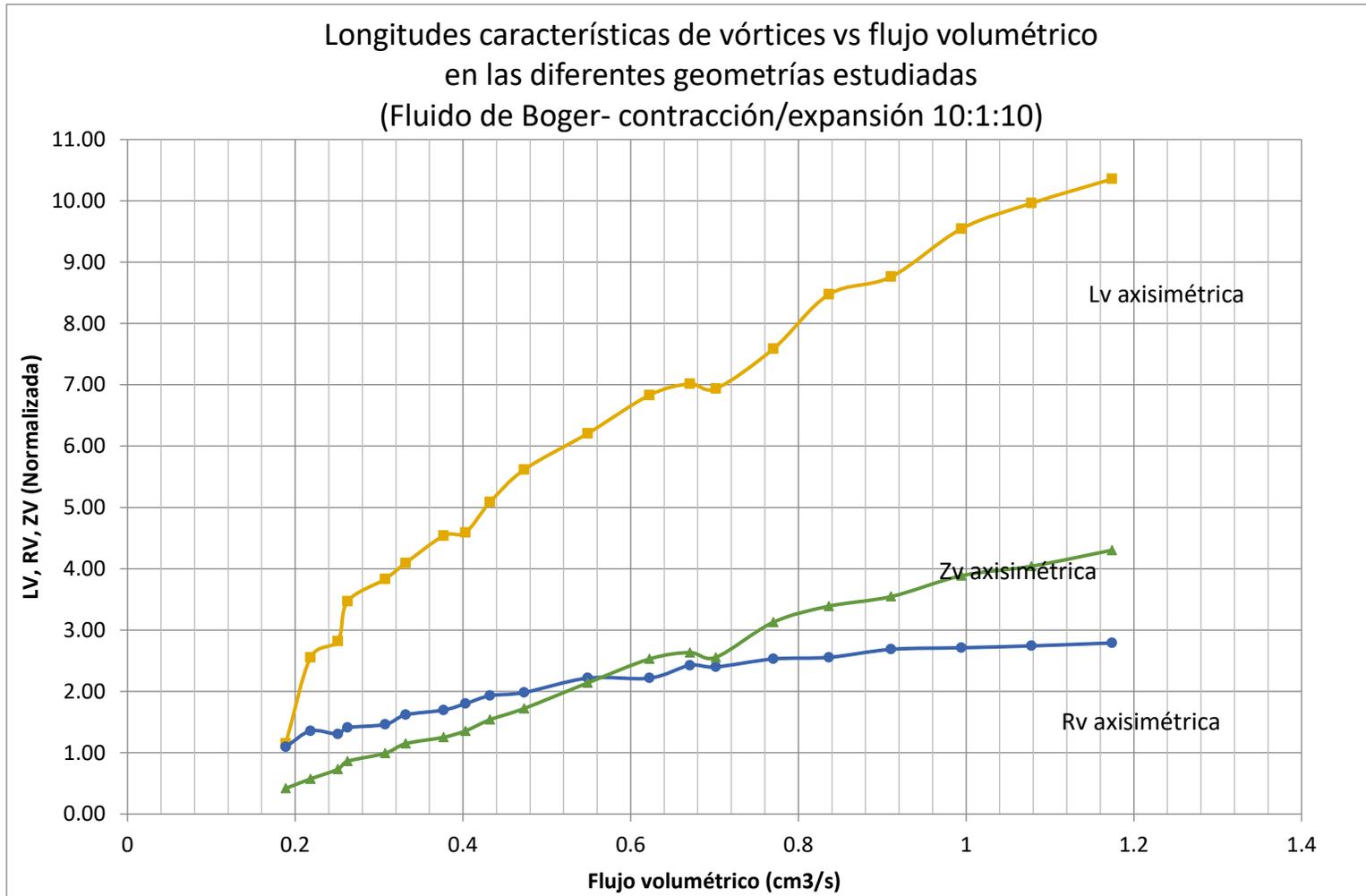


Figura 4.5.7 –Longitudes características de los vórtices formados en el fluido de Boger en contracción/expansión 10:1:10 (geometrías axisimétrica y cuadrada)

# Contracción/expansión 10:1:10

## Viscosidad extensional vs Rapidez de deformación

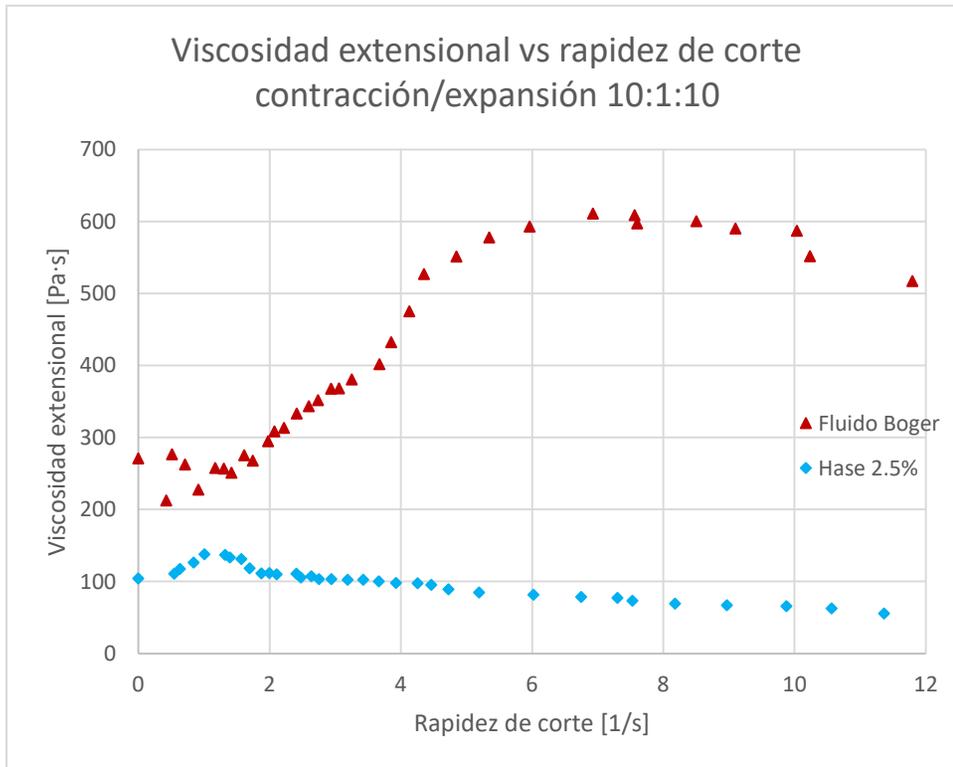


Figura 4.5.8 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 10:1:10 (geometría cuadrada)

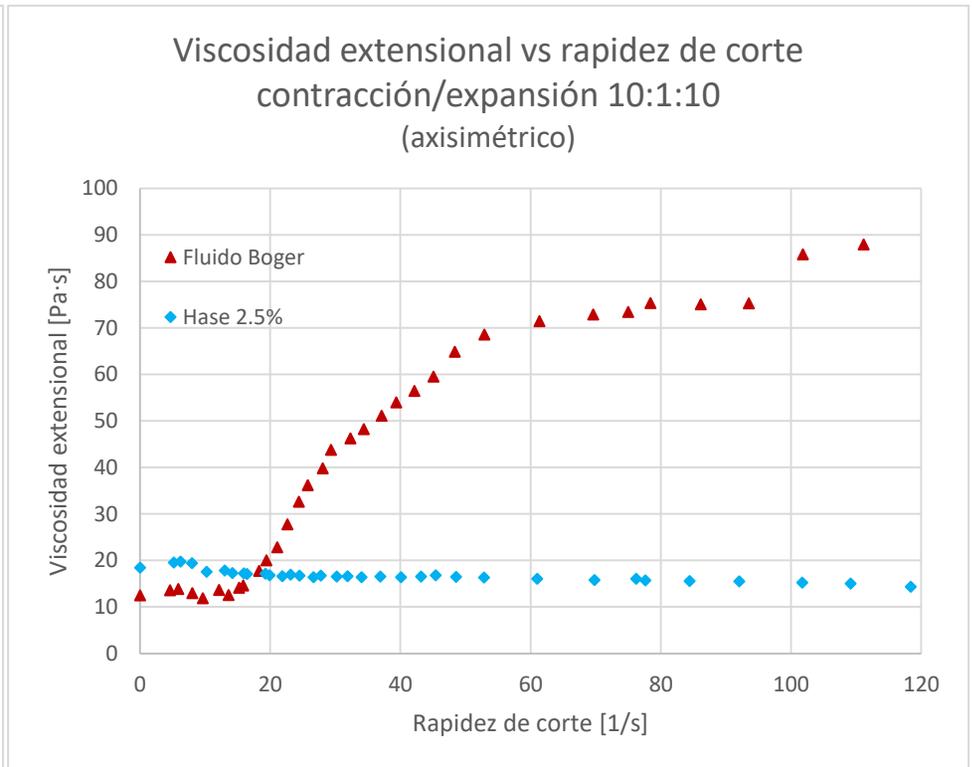


Figura 4.5.9 –Viscosidad extensional en los fluidos Hase y Boger en contracción/expansión 6:1:6 (geometría axisimétrica)

## INTERPRETACIONES DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

### CONTRACCIÓN EXPANSIÓN 10:1:10

#### Caída de presión total

La relación 10:1:10 es la última relación de contracción estudiada, y presenta la menor reducción de área, por lo que el efecto elástico de los fluidos Boger y Hase ahora se manifiesta ahora en ambas geometrías, y demuestra que la transición entre las zonas de dinámica de flujo cortante y extensional se dan prácticamente en los mismos puntos para ambos fluidos respecto a la contracción anterior (0.20 ml/s para Boger y 0.12 para Hase). No obstante, el fluido de Boger en geometría axisimétrica (figura 4.5.2) desarrolla un aumento exponencial de las caídas de presión, al compararse con las obtenidas en la relación 8:1:8 pasando a máximos de 16000 a 34000 Pa. El efecto del flujo cortante aminora el desarrollo del flujo extensional en la geometría cuadrada (figura 4.5.1) por lo que el aumento de las caídas de presión correspondientes es mucho menor, pasando de los 6000 Pa máximos, a caídas de presión de cerca de 20000 Pascales a flujos altos.

La solución Hase presenta un comportamiento similar en ambas geometrías, trayectoria que a gastos mayores cae por debajo de la línea de referencia newtoniana de forma importante, debido al adelgazamiento del fluido, el cual llega a presentar viscosidades cercanas a las del propio disolvente con el que fue trabajado. (Figura 3.2 y 3.3)

#### Caída de presión en exceso adimensional

El efecto del flujo extensional en la dinámica sistema contracción/expansión para el fluido de Boger en geometría axisimétrica (figura 4.5.4) es tan intenso que supera ligeramente los valores alcanzados por la relación 8:1:8, Por otra parte, el efecto de la interacción fluido pared es igualmente apreciable en geometría cuadrada (figura 4.5.3), donde a pesar de que el efecto elástico del fluido es cada vez mayor, no logra superar al efecto en competencia, por lo que las EPD de su trayectoria son significativamente menores.

El fluido Hase en geometría cuadrada (figura 4.5.3) Exhibe el efecto adelgazante del fluido, por lo que el efecto de la geometría se vuelve cada vez más despreciable. En la geometría axisimétrica, el efecto de la elasticidad empieza a dominar sobre las variaciones de viscosidad

del fluido, dando valores de EPD superiores a los de la línea de referencia. A gastos mayores, es perceptible un ligero incremento del adelgazamiento en la dinámica del sistema.

#### Disipación energética

En esta relación como en la anterior, es preciso notar que la geometría axisimétrica libera gran parte de su energía por medio de las interacciones de origen viscoso, a pesar que el efecto del fluido con la pared de la contracción sea más intenso en geometría cuadrada. El desarrollo de los vórtices observados para el fluido de Boger (figura 4.5.7) muestra un ascenso importante en su longitud de crecimiento, por lo que en general, cada vez más energía se disipa de forma elástica. Esto también se puede observar en el comportamiento del fluido de Hase en las figuras 4.5.5 y 4.5.6 donde se observa que el fluido tiende a liberar más energía por medio de vórtices, relegando a la interacción viscosa como mecanismo de disipación de energía principal.

#### Viscosidad extensional

Por último, las figuras 4.4.8 y 4.4.9 muestran que para esta relación de contracción, a pesar de desarrollar fuertes flujos extensionales, estos nunca muestran intervalos donde el incremento de la viscosidad extensional para un intervalo de rapidez de deformación reducido, por lo que no se exhibe un flujo extensional uniaxial homogéneo en ninguna de las geometrías.

## CONCLUSIONES

A partir de los resultados y análisis de los resultados obtenidos, se pueden tener las siguientes conclusiones:

- A relaciones de contracción bajas como la 2:1:2, los fluidos de estudio en geometría axisimétrica presentan un flujo de características extensionales en todo intervalo estudiado; caso contrario a la geometría cuadrada, donde si se presenta flujo cortante a bajos valores de gasto. Esta interacción da origen a que la presencia del efecto Binding solo se exhiba en un pequeño intervalo del fluido de Boger en geometría cuadrada.

Aunque el valor máximo de la EPD es ligeramente menor en geometría cuadrada, esta geometría muestra un desarrollo abrupto de EPD en un corto intervalo de flujo, por lo que en esos valores de gasto se tiene un flujo extensional uniaxial homogéneo. No obstante, en geometría axisimétrica también se tiene una zona donde podría considerarse la presencia de este tipo de flujo, el intervalo de gasto donde se presenta es mayor.

Los fenómenos anteriormente estudiados, causan que la energía disipada por interacción viscosa sea mayor en geometría cuadrada Sin embargo, el desarrollo de vórtices no muestra gran desarrollo, por lo que la disipación viscosa es el mecanismo principal de liberación de energía por parte del sistema contracción/expansión.

- Con relación de contracción 4:1:4, el efecto del flujo cortante aumenta en geometría axisimétrica, mientras que en geometría cuadrada disminuye. Es evidente que el efecto de la geometría afecta a la dinámica de flujo dependiendo de la geometría: para la geometría axisimétrica, el fenómeno que impacta en la dinámica es la interacción fluido pared, mientras que en geometría cuadrada es la reducción de área de flujo es la que propicia el desarrollo del flujo extensional. Esto ocasiona el descenso de la caída de presión en exceso en geometría axisimétrica, a valores cercanos a los desarrollados por el fluido newtoniano de referencia; mientras el valor de EPD resulta mayor que en la contracción anterior, descendiendo ligeramente por la competencia del flujo cortante para imponer sus características.

El fluido Hase en estas condiciones desciende por debajo de la línea de referencia newtoniana, debido al efecto Binding, presente en ambas geometrías.

La disipación viscosa tiene valores ligeramente similares en ambas geometrías, siendo mayor en la geometría axisimétrica. La trayectoria para el fluido de Hase desciende respecto a la desarrollada por Boger, debido al fuerte desarrollo de vórtices observados en este fluido.

- A partir de una relación de contracción mayor (6:1:6) el efecto elástico de las soluciones empleadas se empieza a manifestar, principalmente en geometría axisimétrica, donde el intervalo donde se presenta la transición de flujo cortante a extensional es cada vez menor, por lo que la geometría ya no impacta con la misma magnitud en la transición de la dinámica de flujo.

El efecto de la componente perpendicular en geometría cuadrada empieza a aumentar considerablemente, dando resultado en una disminución en los valores máximos dados por la caída de presión en exceso, mientras en geometría axisimétrica el efecto elástico supera muy rápidamente a cualquier interacción cortante que pudiese presentarse, dando como resultado un ascenso constante de la trayectoria de EPD.

La solución Hase sigue con un comportamiento por debajo de la referencia newtoniana, sin embargo, sus propiedades reológicas son las causantes de este comportamiento, por lo que su dinámica de flujo depende ahora de la elasticidad del fluido, así como de sus propiedades adelgazantes.

- A partir de relaciones de contracción altas (como 8:1:8 y 10:1:10), la elasticidad de los fluidos se presenta en ambas geometrías, por lo que la dinámica de flujo difiere completamente: en la geometría axisimétrica exhibe un predominio total del flujo extensional, mientras que la geometría cuadrada muestra un comportamiento de características cortantes.

Para el caso del fluido Hase, sus propiedades adelgazantes son las que dominan en gran medida su dinámica de flujo, superando a la elasticidad del fluido, por lo que sus

trayectorias tanto de caída de presión como de EPD descienden por debajo de las del fluido newtoniano.

Los fluidos en estas condiciones tienden a disipar gran parte de su energía por medio de la formación de vórtices, los cuales se desarrollan con mayor fuerza en el fluido Hase, y justifican que las trayectorias de disipación viscosa para este fluido sean menores a las correspondientes para el fluido de Boger.

Es interesante notar que aunque la geometría axisimétrica desarrolla mayor flujo extensional, la disipación viscosa tiene valores mayores a comparación de la axisimétrica, lo cual da una idea de la magnitud del flujo extensional desarrollado.

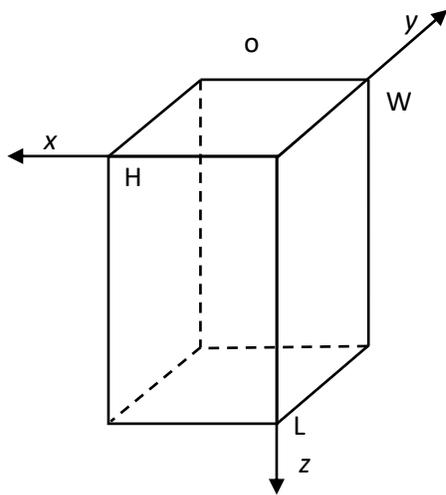
## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alves, M.A., Pinho, F.T., Oliveira, P.J., Viscoelastic flow in a 3D square/square contraction: visualizations and simulations. *J. Rheol.* 52 (2008) 1347-1368.
- [2] Alves, M.A., Pinho, F.T., Oliveira, P.J., Visualizations of Boger fluid flows in a 4:1 square-square contraction *AIChE J.* 51 (2005) 2908-2922.
- [3] Binding D.M, Phillips P.M, Phillips T.N., Contraction/expansion flows: the pressure drop and related issues, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 137 (2006) 31-38.  
Binding D.M., Further considerations of axisymmetric contraction flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 41 (1991) 27-42.
- [4] Bird, R., Byron, W.E., Stewart, E.N., Lightfoot. *Transport Phenomena.* John Willey & sons. 1960
- [5] Boger D.V. Viscoelastic Flows Through contractions *Ann. Rev. Fluid Mech.* (1987). 19: 157-182.
- [6] Cable P.J. and Boger D.V. A Comprehensive Experimental Investigation of Tubular Entry Flow of Viscoelastic Fluids, Part I. Vortex Characteristic in Stable Flow, *AIChE Journal.* 24 (1978) 869.
- [7] Cable P.J. and Boger D.V., A Comprehensive Experimental Investigation of Tubular Entry Flow of Viscoelastic Fluids, Part II. Vortex Characteristic in Stable Flow, *AIChE Journal.* 24 (1978) 992.
- [8] Cártalos U. and J.M. Piau J.M., Creeping flow regimes of low concentration polymer solutions in thick solvents through an orifice die, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mech.* 45 (1992) 231-285.
- [9] Cogswell F.N., Converging flow and stretching flow: a compilation, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 4 (1978) 23-38.
- [10] Evans, R.E., Walters, K., Flow characteristics associated with abrupt changes in geometry in the case of highly elastic flows, *J. Non-newt. Fluid Mech.* 20 (1986) 11-29.
- [11] Evans, R.E., Walters, K., Further remarks on the lip-vortex mechanism of vortex enhancement in planar contraction flows *J. Non-newt. Fluid Mech.* 32 (1989) 95-105  
*J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 3 (1977) 41-64.
- [12] Middleman, S. *Fundamentals of polymer processing.* McGraw-Hill, 1977
- [13] Mompean, G., Deville, M., Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a tree-dimensional planar contraction. *J. Non-newt. Fluid Mech.* 72 (1997) 253-279.
- [14] Nguyen G.H. and Boger D.V., The Kinematics and Stability of die entry flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 5 (1979) 353-368.
- [15] Ober T.J., Haward S.J., Pipe C.J., Soulages J., McKinley G.H., microfluidic extensional rheometry using a hyperbolic contraction geometry. *Rheol. Acta* 52 (2013) 529-546.
- [16] Pérez M., Estudio experimental de fluidos complejos en flujo contracción/expansión. Tesis para obtener el grado de Doctor en Ingeniería Química. Universidad Nacional Autónoma de México (2016).
- [17] Purnode, B., Crochet, M., Flows of polymer solutions through planar contractions Part 1: flows of polyacrylamide solutions through planar contractions. *J. Non-newt. Fluid Mech.* 65 (1996) 269-289.
- [18] Quezada A.P., Evaluación experimental de la viscosidad extensional uniaxial a partir de un flujo contracción-expansión rectangular empleando fluidos viscoelásticos complejos. Tesis para obtener el grado de Ingeniero Químico. UNAM, Facultad de estudios Superiores Zaragoza (2017).
- [19] Rothstein J.P., McKinley G.H., Extensional flow of a polystyrene Boger fluid through a 4:1:4 axisymmetric contraction/expansion, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 86 (1999) 61-88.

- [20] Rothstein J.P., McKinley G.H., The axisymmetric contraction-expansion: the role of extensional rheology on vortex growth dynamics and the enhanced pressure drop, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 98 (2001) 33-63.
- [21] Sampson R.A; on Stokes's current function, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*; Vol 182 (1891) 449-518.
- [22] Seng W.P., Tam K.C., Jenkins R.D., Rheological properties of model alkali-soluble associative (HASE) polymer in ionic and non-ionic surfactant solutions, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Eng. Aspects* 154 (1999) 365-382.
- [23] Sirakov, I., Ainsier, A., Haouche, M., Guillet, J., Three-dimensional numerical simulation of viscoelastic contraction flows using the Pom-Pom differential constitutive model. *J. Non-newt. Fluid Mech.* 126 (2005) 163-173.
- [24] Sousa, P.C., Coelho, P.M., Oliveira M.S.N., Alves, M.A., Effect of the contraction ratio upon viscoelastic fluid flow in three-dimensional square-square contractions. *Chemical Engineering Science* 66 (2011) 998-1009.
- [25] Sousa, P.C., Coelho, P.M., Oliveira M.S.N., Alves, M.A., Three-dimensional flow of Newtonian and Boger fluids in square-square contractions. *J. Non-newt. Fluid Mech.* 160 (2009) 122-139.
- [26] Tamaddon-Jahromi H.R., Webster M.F., Walters K., Predicting numerically the large increases in extra pressure drop when Boger fluids flow through axisymmetric contractions, *J. Nat. Sci.* 2 (2010) 1-11.
- [27] Tamaddon-Jahromi H.R., Webster M.F., Williams P.R., Excess pressure drop and drag calculations for strain-hardening fluids with mild shear-thinning: contraction and falling sphere problems, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 166 (2011) 939-950.
- [28] Tan H., Tam K.C., Tirtaatmadja V., Jenkins R.D., Bassett R.D., Extensional properties of model hydrophobically modified alkali-soluble associative (HASE) polymer solutions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 92 (2000) 167-185.
- [29] Walters K, Webster M.F., Tamaddon-Jahromi M.F, The numerical simulation of some contraction flows of highly elastic liquids and their impact on the relevance of the Couette correction in extensional rheology, *Chemical Engineering Science* 64 (2009) 4632-4639.
- [30] Walters K., M.F. Webster M.F, Tamaddon-Jahromi H.R., Experimental and Computational aspects of some contraction flows of highly elastic liquids and their impact on the relevance of the Couette correction in extensional Rheology, *Proc. 2nd Southern African Conference on Rheology (SASOR 2)*, (2008) 1-6.
- [31] Walters K., Tamaddon-Jahromi H.R, Webster M.F., Tomé M.F., S McKee, The competing roles of extensional viscosity and normal stress differences in complex flows of elastic liquids, *Korea-Australia Rheology Journal* 21 (4) (2009) 225-233.
- [32] Walters, K., Webster, M.F., On dominating elastic-viscous response in some complex flows. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* 308 (1982) 199-218.
- [33] White J.L. and Kondo A., *Flow Patterns in Polyethelene and Polystyrene Melts During Extrusion Through a die Entry Region: Measurements and Interpretation*
- [34] Xue, S.-C., Phan-Thien, N., Tanner, R.I., Three dimensional numerical simulations of viscoelastic flows through planar contractions *J. Non-newt. Fluid Mech.* 74 (1998) 195-245.

# APÉNDICE I

## CAÍDA DE PRESIÓN DE UN FLUIDO NEWTONIANO A TRAVÉS DE UN TUBO CUADRADO



### Suposiciones:

- Flujo unidireccional (eje z)  
 $v = [v_x, v_y, v_z] = [0, 0, v_z]$
- Flujo laminar
- Flujo estacionario
- Fluido incompresible
- La variación de velocidad en las paredes es nula (condición de no-deslizamiento)
- El esfuerzo extensional en z es despreciable

De la ecuación de movimiento en coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad [\text{I.1}]$$

$$\rho \left( \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}} \right) + \rho g_z$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + \rho g_z \quad [\text{I.2}]$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad [\text{I.3}]$$

Para un fluido newtoniano

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad [\text{I.4}]$$

$$\tau_{yz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad [\text{I.5}]$$

Y  $\wp$  representa el efecto combinado de la presión estática y la fuerza de gravitación.

$$\wp = P + \rho g_z \quad [\text{I.6}]$$

Sustituyendo en (II.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\mu \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{I.7}]$$

Factorizando

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{I.8}]$$

La presente ecuación diferencial, se requiere convertir a una ecuación diferencial del tipo homogénea, por lo que se propone que la velocidad en la dirección z tenga la forma siguiente:

$$v(x, y) = \phi(x, y) + \frac{1}{2} [h(x) + g(y)] \quad [\text{I.9}]$$

La cual consta de una función  $\phi$  que dependa tanto de  $x$  y  $y$ ; más un promedio de las velocidades en cada dirección.

Aplicando la función (II.10) en (II.9)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \phi(x, y) + \frac{1}{2} [h(x) + g(y)] \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \phi(x, y) + \frac{1}{2} [h(x) + g(y)] \right\} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{I.10}]$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} \right\} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{I.11}]$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} \quad [\text{I.12}]$$

Si  $h(x)$  y  $g(y)$  son funciones que se comportan bajo el modelo de la rendija; es decir, solo consideran un esfuerzo cortante en la dirección correspondiente (véase apéndice I), entonces:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{I.13}]$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{I.14}]$$

Sustituyendo

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = 0 \quad [\text{I.15}]$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea resultante se obtiene por el método de separación de variables, el cual plantea soluciones de la forma

$$\phi(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad [\text{I.16}]$$

Donde X es función solo de x y Y depende únicamente de y.

Derivando dos veces  $\phi(x, y)$ , respecto a x tanto respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) = Y(y) \cdot X'(x) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) = X(x) \cdot Y'(y) \quad [\text{I.17}]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, y) = Y(y) \cdot X''(x) \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi(x, y) = X(x) \cdot Y''(y) \quad [\text{I.18}]$$

Sustituyendo

$$Y(y) \cdot X''(x) + X(x) \cdot Y''(y) = 0 \quad [\text{I.19}]$$

Dividiendo entre  $X(x) \cdot Y(y)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \quad [\text{I.20}]$$

Como ambos lados dependen únicamente de  $x$  y  $y$  respectivamente, ambos lados de la ecuación deben ser constantes

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \quad [\text{I.21}]$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \quad [\text{I.22}]$$

Lo cual nos deja con las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad ; \quad Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \quad [\text{I.23}]$$

Cuyas soluciones son, para  $X(x)$

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 & \quad m^2 + \lambda^2 m = 0 & \quad m = \pm \sqrt{-\lambda^2} \\ X(x) = C_1 \text{sen}(\lambda x) + C_2 \text{cos}(\lambda x) & & \end{aligned} \quad [\text{I.24}]$$

Para  $Y(y)$

$$\begin{aligned} Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 & \quad m^2 - \lambda^2 m = 0 & \quad m = \pm \sqrt{\lambda^2} \\ Y(y) = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y} & & \end{aligned}$$

Dejando el resultado en términos de senos y cosenos hiperbólicos

$$Y(y) = C_3 \sinh(\lambda y) + C_4 \cosh(\lambda y) \quad [\text{I.25}]$$

Asimismo, la ecuación (II.22) puede ser expresada cómo

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad [\text{I.26}]$$

Dando lugar a otro conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad ; \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \quad [\text{I.27}]$$

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \quad ; \quad Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0 \quad [\text{I.28}]$$

Cuyas soluciones son, para  $X(x)$

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \quad m^2 - \lambda^2 m = 0 \quad m = \pm \sqrt{\lambda^2}$$

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

En términos de senos y cosenos hiperbólicos

$$X(x) = C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) \quad [\text{I.29}]$$

Para  $Y(y)$

$$Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0 \quad m^2 + \lambda^2 m = 0 \quad m = \pm \sqrt{-\lambda^2}$$

$$Y(y) = C_3 \sin(\lambda y) + C_4 \cos(\lambda y) \quad [\text{I.30}]$$

Con lo que la solución de  $\phi$  se puede expresar de dos formas equivalentes

$$\phi(x, y) = [C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)] [C_3 \sinh(\lambda y) + C_4 \cosh(\lambda y)] \quad [\text{I.31}]$$

$$\phi(x, y) = [C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x)] [C_3 \sin(\lambda y) + C_4 \cos(\lambda y)] \quad [\text{I.32}]$$

La elección de las expresiones II.43 o II.35 viene por la conveniencia de utilizar las funciones periódicas seno y coseno en la dirección  $x$  o  $y$  en la solución de las condiciones a la frontera.

De la propuesta de velocidad (II.10)

$$\phi(x, y) = v(x, y) - \frac{1}{2} [h(x) + g(y)] \quad [\text{I.33}]$$

Aplicando las condiciones de frontera

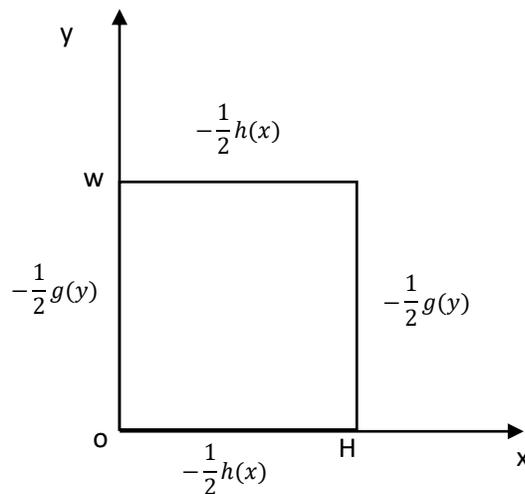
$$\phi(x=0, y) = -\frac{1}{2} g(y) \quad [\text{I.34}]$$

$$\phi(x, y=0) = -\frac{1}{2} h(x) \quad [\text{I.35}]$$

$$\phi(x=H, y) = -\frac{1}{2} g(y) \quad [\text{I.36}]$$

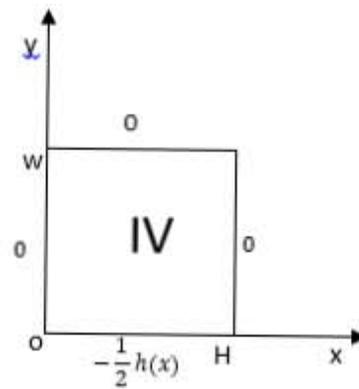
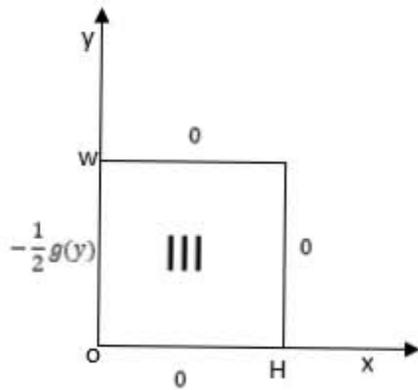
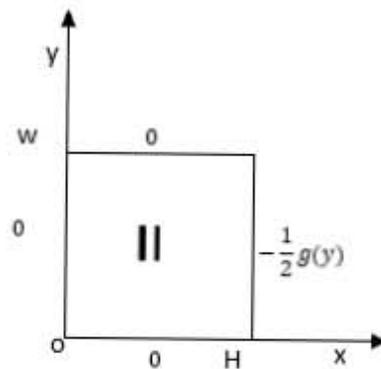
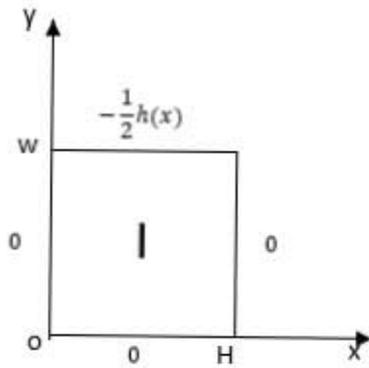
$$\phi(x, y=W) = -\frac{1}{2} h(x) \quad [\text{I.37}]$$

Da como resultado un problema de contorno en las direcciones  $x$  y  $y$

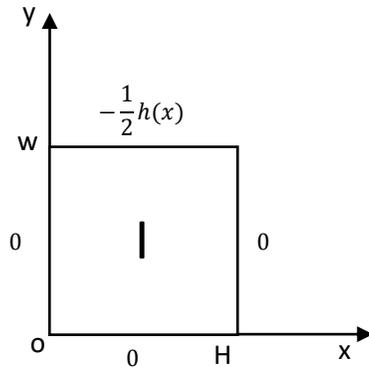


Por el principio de superposición, se segmenta en cuatro cuadrantes, de forma que la suma de cada una de las soluciones sea también una solución para el problema.

$$\phi(x, y) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad [\text{I.38}]$$



## CASO I



Condiciones a la frontera

$$\phi(x=0, y) = 0$$

$$\phi(x, y=0) = 0$$

$$\phi(x=H, y) = 0$$

$$\phi(x, y=W) = -\frac{1}{2}h(x)$$

Usando la expresión (II.34)

$$\text{Para } \phi(x=0, y) \quad 0 = [c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)][c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)]$$

$$0 = [c_1] [c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)] \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\text{Para } \phi(x=H, y) \quad 0 = [c_1 \cos(\lambda H) + c_2 \sin(\lambda H)][c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)]$$

$$0 = [c_2 \sin(\lambda H)][c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)]$$

Omitiendo las soluciones triviales ( $c_2 \neq 0$  y  $Y(y) \neq 0$ )

$$\sin(\lambda H) = 0 \quad [\text{I.39}]$$

Donde  $\lambda H = n\pi$ , para  $n = 1, 2, 3 \dots \mathbb{Z}^+$ , valores propios que cumplen el cero en la función seno, para lo cual

$$\lambda = \frac{n\pi}{H} \quad [\text{I.40}]$$

Para  $\phi(x, y = 0) = 0 = [c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)][c_3 \cosh(0) + c_4 \sinh(0)]$

$$0 = [c_2 \sin(\lambda x)][c_3] \quad \therefore \quad c_3 = 0$$

Sustituyendo las constantes en la expresión (II.34)

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= c_2 c_4 \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{H} y\right) \right] \\ \phi(x, y) &= c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{H} y\right) \right] \end{aligned} \quad \text{[I.41]}$$

Dado que  $\lambda$  es función de  $n$ , siendo cualquier número entero positivo, aplicando el principio de superposición, sabemos que toda suma de soluciones, es solución de la expresión

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{H} y\right) \right] \quad \text{[I.42]}$$

Para  $\phi(x, y = w) = -\frac{1}{2} h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) \right]$

La constante  $C_n$  puede obtenerse considerando la expansión en términos de funciones ortogonales.

Para un conjunto de funciones  $g_1(x), g_2(x) \dots g_n(x)$ , se dice que son ortogonales en el dominio  $a \leq x \leq b$  si

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad \text{para } m \neq n \quad \text{[I.43]}$$

Su utilidad en este problema reside en el hecho de que toda función  $f(x)$  puede ser expresada en términos de una serie infinita de funciones ortogonales

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) \quad \text{[I.44]}$$

El coeficiente  $A$  se determina multiplicando cada lado de la ecuación (II.45) por  $g_m(x)$  e integrando entre los límites  $a$  y  $b$

$$\int_a^b f(x) g_m(x) dx = \int_a^b g_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) dx \quad [\text{I.45}]$$

De la definición de ortogonalidad, todos los términos de la suma son cero, excepto cuando  $n=m$

$$\int_a^b f(x) g_m(x) dx = A_m \int_a^b g_m^2(x) dx \quad [\text{I.46}]$$

Resolviendo para  $A_n$ , y haciendo válida esta expresión para toda  $n$

$$A_n = \frac{\int_0^H f(x) g_n(x) dx}{\int_0^H g_n^2(x) dx} \quad [\text{I.47}]$$

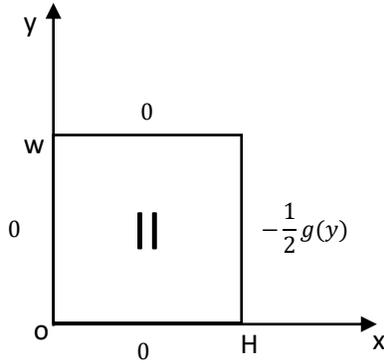
Aplicando este criterio para nuestro problema, con  $f(x) = -\frac{1}{2}h(x)$  y  $g_m = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{H}x\right)$

$$C_{m1} = \frac{-\frac{1}{2} \int_0^H h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{H}x\right) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) \int_0^H \sin^2\left(\frac{n\pi}{H}x\right) dx} \quad [\text{I.48}]$$

Resolviendo las integrales

$$C_{m1} = \frac{-\frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \left\{ \frac{1}{(n\pi)^3} \right\} \{1 - (-1)^n\}}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \quad [\text{I.49}]$$

CASO II



Condiciones a la frontera

$$\phi(x=0, y) = 0$$

$$\phi(x, y=0) = 0$$

$$\phi(x=H, y) = -\frac{1}{2}g(y)$$

$$\phi(x, y=W) = 0$$

Usando la expresión (II.35)

$$\text{Para } \phi(x=0, y) \quad 0 = [c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0)][c_3 \cos(\lambda y) + c_4 \sin(\lambda y)]$$

$$0 = [c_1][c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)] \quad \therefore c_1 = 0$$

$$\text{Para } \phi(x, y=0) \quad 0 = [c_2 \sinh(\lambda x)][c_3 \cos(0) + c_4 \sin(0)]$$

$$0 = [c_2 \sinh(\lambda x)][c_3] \quad \therefore c_3 = 0$$

$$\text{Para } \phi(x, y=w) \quad 0 = [c_1 \cosh(\lambda x) + c_2 \sinh(\lambda x)][c_3 \cos(\lambda w) + c_4 \sin(\lambda w)]$$

$$0 = [c_2 \sin(\lambda x)][c_4 \sinh(\lambda w)] \quad \therefore \lambda w = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{w} \quad [I.50]$$

Sustituyendo en (7b)

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{w}x\right) \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w}y\right) \right] \quad [I.51]$$

$$\text{Para } \phi(x=H, y) \quad -\frac{1}{2}g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w}y\right) \right]$$

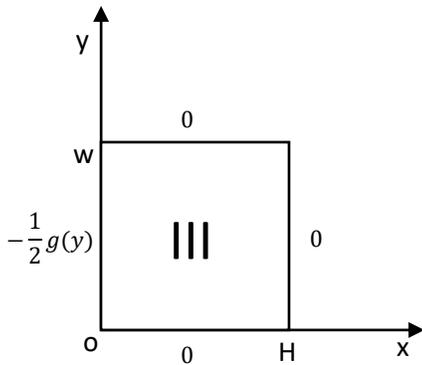
Aplicando el criterio de ortogonalidad

$$C_{m2} = \frac{-\frac{1}{2} \int_0^w g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) dy}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) \int_0^w \sin^2\left(\frac{n\pi}{w} y\right) dy} \quad [I.52]$$

Resolviendo las integrales

$$C_{m2} = \frac{-\frac{w^2}{2\mu L} (P_0 - P_L) \left\{ \frac{1}{(n\pi)^3} \right\} \{1 - (-1)^n\}}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \quad [I.53]$$

### CASO III



Condiciones a la frontera

$$\phi(x=0, y) = -\frac{1}{2} g(y)$$

$$\phi(x, y=0) = 0$$

$$\phi(x=H, y) = 0$$

$$\phi(x, y=W) = 0$$

Usando la expresión II.35

$$\text{Para } \phi(x, y=0) \quad 0 = [c_1 \cosh(\lambda x) + c_2 \sinh(\lambda x)] [c_3 \cos(0) + c_4 \sin(0)]$$

$$[c_1 \cosh(\lambda x) + c_2 \sinh(\lambda x)] [c_3] = 0 \quad \therefore c_3 = 0$$

$$\text{Para } \phi(x, y=w) \quad 0 = [c_1 \cosh(\lambda x) + c_2 \sinh(\lambda x)] [c_3 \cos(\lambda w) + c_4 \sin(\lambda w)]$$

$$[c_1 \cosh(\lambda x) + c_2 \sinh(\lambda x)] [c_4 \sin(\lambda w)] = 0$$

$$[c_4 \sin(\lambda w)] = 0 \quad \therefore \lambda w = n\pi \quad \lambda = \frac{n\pi}{w}$$

$$\text{Para } \phi(x = H, y) \quad 0 = [c_1 \cosh(\lambda H) + c_2 \sinh(\lambda H)][c_3 \cos(\lambda y) + c_4 \sin(\lambda y)]$$

$$[c_1 \cosh(\lambda H) + c_2 \sinh(\lambda H)][c_4 \sin(\lambda y)] = 0$$

$$[c_1 \cosh(\lambda H) + c_2 \sinh(\lambda H)] = 0$$

$$c_1 = -\frac{c_2 \sinh(\lambda H)}{\cosh(\lambda H)}$$

Sustituyendo en (II.35)

$$\phi(x, y) = \left[ \left( -\frac{c_2 \sinh(\lambda H)}{\cosh(\lambda H)} \right) \cosh(\lambda x) + c_2 \sinh(\lambda x) \right] [c_4 \sin(\lambda y)]$$

$$\phi(x, y) = c_2 c_4 \left[ \sinh(\lambda x) - \frac{\sinh(\lambda H) \cosh(\lambda x)}{\cosh(\lambda H)} \right] [\sin(\lambda y)]$$

$$\phi(x, y) = c_n [\sin(\lambda y)] \left[ \frac{\sinh(\lambda x - \lambda H)}{\cosh(\lambda H)} \right] \quad [\text{I.54}]$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\sin(\lambda y)] \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} x - \frac{n\pi}{w} H\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right] \quad [\text{I.55}]$$

$$\text{Para } \phi(x = 0, y) \quad -\frac{1}{2} g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \left[ \frac{\sinh\left(-\frac{n\pi}{w} H\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right]$$

$$-\frac{1}{2} g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \left[ -\tanh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) \right]$$

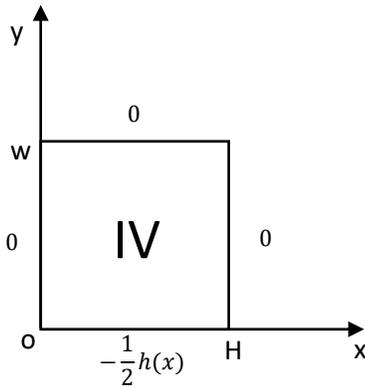
Aplicando el criterio de ortogonalidad

$$C_{m3} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^w g(y) \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) dy}{\tanh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) \int_0^w \sin^2\left(\frac{n\pi}{w} y\right) dy} \quad [\text{I.56}]$$

Integrando

$$C_{m3} = \frac{\frac{w^2}{2\mu L} (P_0 - P_L) \left\{ \frac{1}{(n\pi)^3} \right\} \{1 - (-1)^n\}}{\tanh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \quad [\text{I.57}]$$

#### CASO IV



Condiciones a la frontera

$$\phi(x=0, y) = 0$$

$$\phi(x, y=0) = -\frac{1}{2} h(x)$$

$$\phi(x=H, y) = 0$$

$$\phi(x, y=W) = 0$$

Usando la expresión II.34

$$\text{Para } \phi(x=0, y) \quad 0 = [c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)] [c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)]$$

$$0 = [c_1] [c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)] \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\text{Para } \phi(x=H, y) \quad 0 = [c_1 \cos(\lambda H) + c_2 \sin(\lambda H)] [c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)]$$

$$0 = [c_2 \sin(\lambda H)] [c_3 \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y)]$$

$$\lambda H = n\pi \quad \lambda = \frac{n\pi}{H}$$

$$\text{Para } \phi(x, y = w) \quad 0 = [c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)][c_3 \cosh(\lambda w) + c_4 \sinh(\lambda w)]$$

$$0 = [c_2 \sin(\lambda x)][c_3 \cosh(\lambda w) + c_4 \sinh(\lambda w)] \quad c_2 \neq 0$$

$$[c_3 \cosh(\lambda w) + c_4 \sinh(\lambda w)] = 0$$

$$c_3 = -\frac{c_4 \sinh(\lambda w)}{\cosh(\lambda w)}$$

Sustituyendo en (II.34)

$$\phi(x, y) = [c_2 \sin(\lambda x)] \left[ \left( -\frac{c_4 \sinh(\lambda w)}{\cosh(\lambda w)} \right) \cosh(\lambda y) + c_4 \sinh(\lambda y) \right]$$

$$\phi(x, y) = c_2 c_4 [\sin(\lambda x)] \left[ \frac{\sinh(\lambda y - \lambda w)}{\cosh(\lambda w)} \right]$$

$$\phi(x, y) = c_n [\sin(\lambda x)] \left[ \frac{\sinh(\lambda y - \lambda w)}{\cosh(\lambda w)} \right] \quad [\text{I.58}]$$

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} y - \frac{n\pi}{H} w\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right] \quad [\text{I.59}]$$

$$\text{Para } \phi(x, y = 0) \quad -\frac{1}{2} h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \frac{\sinh\left(-\frac{n\pi}{H} w\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right]$$

$$-\frac{1}{2} h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ -\tanh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) \right]$$

Aplicando el criterio de ortogonalidad

$$C_{m4} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^H h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) dx}{\tanh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) \int_0^H \sin^2\left(\frac{n\pi}{H} x\right) dx} \quad [\text{I.60}]$$

Resolviendo integrales

$$C_{m4} = \frac{\frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \left\{ \frac{1}{(n\pi)^3} \right\} \left\{ 1 - (-1)^n \right\}}{\tanh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \quad [\text{I.61}]$$

La función  $\phi$  queda finalmente expresada como:

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) = & \frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{H} y\right) \right] \\
 & + \frac{w^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{w} x\right) \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \\
 & + \frac{w^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\tanh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} x - \frac{n\pi}{w} H\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \\
 & + \frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\tanh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} y - \frac{n\pi}{H} w\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right]
 \end{aligned} \tag{I.62}$$

El perfil de velocidad queda expresado como:

$$\begin{aligned}
v(x, y) = & \frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{H} y\right) \right] \\
& + \frac{w^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left[ \sinh\left(\frac{n\pi}{w} x\right) \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \\
& + \frac{w^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\tanh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} x - \frac{n\pi}{w} H\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right] \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{w} y\right) \right] \\
& + \frac{H^2}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\tanh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{H} x\right) \right] \left[ \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} y - \frac{n\pi}{H} w\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ \frac{H^2}{2\mu L} (P_0 - P_L) \left[ \frac{x}{H} - \left(\frac{x}{H}\right)^2 \right] + \frac{w^2}{2\mu L} (P_0 - P_L) \left[ \frac{y}{w} - \left(\frac{y}{w}\right)^2 \right] \right]
\end{aligned} \tag{I.63}$$

El flujo volumétrico se obtiene integrando la expresión (II.66) sobre el diferencial de área en las direcciones x y y.

$$Q = \int_0^w \int_0^H v_z(x, y) dx dy = \int_0^w \int_0^H \left[ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \frac{1}{2}(h(x) + g(y)) \right] dx dy \quad [\text{I.64}]$$

A)

$$\int_0^w \int_0^H \phi_1 dx dy = \frac{H^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[ \frac{1}{(n\pi)^3} \right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 [1 - (-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) - 1 \right] \right\} \quad [\text{I.65}]$$

B)

$$\int_0^w \int_0^H \phi_2 dx dy = \frac{w^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[ \frac{1}{(n\pi)^3} \right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) - 1 \right] [1 - (-1)^n] \right\} \quad [\text{I.66}]$$

C)

$$\int_0^w \int_0^H \phi_3 dx dy = \frac{w^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[ \frac{1}{(n\pi)^3} \right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) \right\} [1 - (-1)^n] \right\} \quad [\text{I.67}]$$

D)

$$\int_0^w \int_0^H \phi_4 dx dy = \frac{H^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left| \frac{1}{(n\pi)^3} [1 - (-1)^n] \right|}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1 - (-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) \right\} \right\}$$

[I.68]

E)

$$\int_0^w \int_0^H \frac{1}{2} [h(x) + g(y)] dx dy = \left\{ \frac{wH^3}{24\mu L} (P_0 - P_L) \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu L} (P_0 - P_L) \right\} \quad [\text{I.69}]$$

Así el flujo volumétrico, se expresa cómo:

$$\begin{aligned}
Q = & \frac{H^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1 - (-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) - 1 \right] \right\} \\
& + \frac{w^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) - 1 \right] [1 - (-1)^n] \right\} \\
& + \frac{w^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w} H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w} H\right) \right\} [1 - (-1)^n] \right\} \\
& + \frac{H^4}{\mu L} (P_0 - P_L) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right] [1 - (-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H} w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1 - (-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H} w\right) \right\} \right\} \\
& + \left\{ \frac{wH^3}{24\mu L} (P_0 - P_L) \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu L} (P_0 - P_L) \right\}
\end{aligned} \tag{I.70}$$

Despejando la caída de presión de (II.78)

$$\Delta P = Q \cdot \left[ \begin{aligned}
 & \frac{H^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) - 1 \right] \right\} \\
 & + \frac{w^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left[ \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) - 1 \right] [1-(-1)^n] \right\} \\
 & + \frac{w^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{w}H\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{w}H\right) \right\} [1-(-1)^n] \right\} \\
 & + \frac{H^4}{\mu L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{1}{(n\pi)^3}\right][1-(-1)^n]}{\sinh\left(\frac{n\pi}{H}w\right)} \right\} \left\{ \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 [1-(-1)^n] \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{n\pi}{H}w\right) \right\} \right\} \\
 & + \left\{ \frac{wH^3}{24\mu L} \right\} + \left\{ \frac{Hw^3}{24\mu L} \right\}
 \end{aligned} \right]^{-1} \quad [I.71]$$

Donde:

$$Q = \text{caudal volumetrico} \left[ \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \right]$$

$$H = \text{distancia en el eje } x \text{ [cm]}$$

$$w = \text{distancia en el eje } y \text{ [cm]}$$

$$L = \text{distancia en el eje } z \text{ [cm]}$$

$$\mu = \text{viscosidad [Pa * s]}$$

$$\Delta P = (P_0 - P_L) = \text{caida de presion en el tubo [Pa]} \text{ ó } \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right]$$

$$n = 1, 2, 3, 4 \dots \text{valores propios que cumplen}$$

$$n\pi = 0 \text{ en las funciones trigonométricas}$$

### Análisis dimensional

$$P = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \left[ \frac{\frac{\text{kg} * \text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right]$$

$$\frac{H^2}{\mu L} = \left[ \frac{\text{m}^2}{\left( \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}} \right) * \text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{m}^2 * \text{s}}{\text{kg}} \right]$$

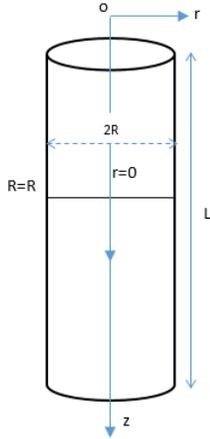
$$v = \frac{H^2}{\mu L} \Delta P = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right] \left[ \frac{\text{m}^2 * \text{s}}{\text{kg}} \right] = \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$Q = \frac{wH^3}{\mu L} \Delta P = \left[ \frac{\text{m}^4}{\left( \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}} \right) * \text{m}} \right] \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right] = \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$P = \frac{Q\mu L}{wH^3} = \left[ \frac{\left( \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) \left( \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}} \right) \text{m}}{\text{m}^4} \right] \left[ \frac{\frac{\text{m}^3 \text{kg}}{\text{s}^2}}{\text{m}^4} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right]$$

## APÉNDICE II.

### CAÍDA DE PRESIÓN DE UN FLUIDO NEWTONIANO A TRAVÉS DE UN DUCTO CILÍNDRICO (ECUACIÓN DE HAGEN-POISEUILLE)



#### Suposiciones:

- Flujo unidireccional (eje z)
- Flujo laminar
- Flujo estacionario
- Fluido incompresible
- La variación de velocidad en las paredes es nula (condición de no-desplazamiento)
- Los esfuerzos en  $\theta$  y  $z$  son despreciables

De la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ )

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad \text{[II.1]}$$

$$\rho \left( \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_r \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial r}} + \frac{v_\theta}{r} \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}} \right) + \rho g_z$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \rho g_z \quad \text{[II.2]}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad \text{[II.3]}$$

Para un fluido newtoniano

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad [\text{II.4}]$$

Y considerando  $\wp$  representa el efecto combinado de la presión estática y la fuerza de gravitación.

$$\wp = P + \rho g_z \quad [\text{II.5}]$$

Sustituyendo en las expresión (2)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = -\frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{II.6}]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = -\frac{\partial \wp}{\partial z} r \quad [\text{II.7}]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} r \quad [\text{II.8}]$$

Integrando respecto a r

$$\left[ r \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \left( \frac{r^2}{2} \right) + c_1 \quad [\text{II.9}]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} + \frac{c_1}{r} \quad [\text{II.10}]$$

Integrando nuevamente

$$v_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} + c_1 \ln(r) + c_2 \quad [\text{II.11}]$$

Aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} r = R & \quad v_z = 0 \\ r = 0 & \quad r \left( \frac{dv_z}{dr} \right) = 0 \end{aligned}$$

Se determinan las constantes  $c_1$  y  $c_2$  a partir de las condiciones a la frontera

$$0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \left( \frac{(0)^2}{2} \right) + c_1 \quad [\text{II.12}]$$

$$c_1 = 0 \quad [\text{II.13}]$$

$$0 = \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} + c_2 \quad [\text{II.14}]$$

$$c_2 = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{II.15}]$$

Sustituyendo las constantes obtenidas en (5)

$$v_z = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} - \frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \quad [\text{II.16}]$$

Factorizando por  $-\frac{1}{4\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} R^2$

$$v_z = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial \wp}{\partial z} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad [\text{II.17}]$$

Multiplicando por  $\partial z$

$$v_z \partial z = -\frac{R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \partial \wp \quad [\text{II.18}]$$

Integrando

$$v_z \int_0^L \partial z = -\frac{R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \int_{P_0}^{P_L} \partial \wp \quad [\text{II.19}]$$

$$v_z (L-0) = -\frac{R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] (P_L - P_0) \quad [\text{II.20}]$$

Finalmente obtenemos una expresión para el perfil de velocidad en un tubo cilíndrico

$$v_z = \frac{R^2}{4\mu L} (P_0 - P_L) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad [\text{II.21}]$$

La velocidad máxima se tiene cuando  $r=0$

$$v_z = \frac{R^2}{4\mu L} (P_0 - P_L) \left[ 1 - \left( \frac{(0)}{R} \right)^2 \right] \quad [\text{II.22}]$$

$$v_{z \max} = \frac{R^2}{4\mu L} (P_0 - P_L) \quad [\text{II.23}]$$

El flujo volumétrico se obtiene

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta \quad [\text{II.24}]$$

$$Q = \frac{R^2}{4\mu L} (P_0 - P_L) \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad [\text{II.25}]$$

$$Q = \frac{\pi R^2}{2\mu L} (P_0 - P_L) \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr \quad [\text{II.26}]$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu L} (P_0 - P_L) \quad [\text{II.27}]$$

Despejando de la última expresión obtenemos la caída de presión

$$(P_0 - P_L) = \frac{8Q\mu L}{\pi R^4} \quad [\text{II.28}]$$

### Análisis dimensional

$$P = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \left[ \frac{\text{kg} * \text{m}}{\text{s}^2} \right] \left[ \frac{1}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right]$$

$$\frac{R^2}{\mu L} = \left[ \frac{\text{m}^2}{\left( \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}} \right) * \text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{m}^2 * \text{s}}{\text{kg}} \right]$$

$$v = \frac{R^2}{\mu L} \Delta P = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right] \left[ \frac{\text{m}^2 * \text{s}}{\text{kg}} \right] = \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$Q = \frac{R^4}{\mu L} \Delta P = \left[ \frac{\text{m}^4}{\left( \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}} \right) * \text{m}} \right] \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right] = \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$P = \frac{Q\mu L}{R^4} = \left[ \frac{\left( \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) \left( \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}} \right) \text{m}}{\text{m}^4} \right] \left[ \frac{\text{m}^3 \text{kg}}{\text{s}^2} \right] = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} * \text{s}^2} \right]$$