



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

Fundamentación estocástica de la estadística cuántica de la luz: el estado coherente y el estado comprimido

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ROSALÍO ALEJANDRO REYES REYES

TUTOR O TUTORES PRINCIPALES:
DRA. ANA MARIA CETTO KRAMIS (TUTOR PRINCIPAL)
Instituto de Física, UNAM

DR. JAIME AVENDAÑO LÓPEZ
Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN

DR. RUBÉN GERARDO BARRERA Y PÉREZ
Instituto de Física, UNAM

Ciudad Universitaria, CDMX.

Diciembre 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

Resumen	iv
1 Ecuaciones de Maxwell en el vacío	1
1.1 Ecuaciones de Maxwell en el vacío	1
1.2 Modos normales del campo electromagnético	2
1.3 Cuadraturas del campo	5
2 Cuantización del campo electromagnético	6
2.1 Oscilador armónico	6
2.2 Analogía entre un modo del campo de radiación y un oscilador armónico	8
2.3 Cuantización de un modo del campo	8
2.4 Fluctuaciones cuánticas de un modo del campo	10
2.5 Operadores de cuadratura	10
2.6 Campo multimodal	11
2.7 Distribución del campo	12
2.8 Distribución de \hat{q} y \hat{p}	13
2.9 Correlaciones de dos puntos del campo	15
2.10 El vacío cuántico	16
3 Campo de punto cero real	17
3.1 Estadística del campo de punto cero	19
3.2 Distribución de probabilidad de las variables p y q	20
3.3 Comparación con el vacío cuántico	22
3.3.1 Distribución del campo	23
3.3.2 Correlaciones del campo	24
3.3.3 Cuadraturas del campo	25
4 El estado coherente	26
4.1 Estados de mínima dispersión	28
4.2 Representación de número del estado coherente	30
4.3 El vacío desplazado	31
4.3.1 Campo desplazado	34
4.3.2 La distribución Poissoniana de $ n\rangle$ en $ \alpha\rangle$	36
4.4 Distribución del campo coherente	37
4.5 Correlaciones del campo	38
4.5.1 Correlación de primer orden	38
4.5.2 Correlación de segundo orden	38
4.6 Coherencia de la luz	39

5	Superposiciones del cpc con otras ondas	45
5.1	Vacío desplazado y estado de mínima dispersión	45
5.2	Cuadraturas del campo	46
5.3	Distribución del campo	47
5.4	Correlaciones del campo	48
5.5	Correlación de segundo orden	48
5.6	La energía del campo	48
5.7	Simetría de los operadores	49
6	El estado comprimido	51
6.1	Operador de compresión	51
6.2	Transformación del operador de campo eléctrico	52
6.2.1	Cuadraturas no rotadas	54
6.2.2	Distribución del campo	55
6.2.3	Correlaciones del vacío comprimido	55
6.3	Vacío desplazado y comprimido	56
6.4	Otra definición del vacío comprimido	58
6.5	Representación de número de los estados comprimidos	59
7	Amplificación paramétrica de un modo del cpc	61
7.1	Ecuaciones de Maxwell en medios materiales	61
7.1.1	Ecuación para el campo eléctrico en un medio no lineal	63
7.2	Solución a la ecuación para campo eléctrico en un medio no lineal	64
7.3	Generación del vacío comprimido	66
7.4	Modo del campo de punto cero amplificado paraméricamente	67
7.5	Distribución del campo	69
7.6	Correlaciones del campo	70
7.7	Energía del campo	70
7.8	Detección homodina del vacío comprimido	72
	Conclusiones	74

Resumen

En este trabajo se estudia el estado coherente y el estado comprimido, tal como se les define en óptica cuántica, y se demuestra que la superposición del campo de punto cero real (cpc), como se le emplea en la electrodinámica estocástica (EDE), con otras ondas clásicas de energía apropiada forma sistemas que en promedio se comportan como los sistemas cuánticos mencionados. En otras palabras, el objetivo de este trabajo es establecer contacto entre la electrodinámica cuántica y la óptica cuántica con el campo de punto cero real.

El objetivo buscado sigue la línea de los trabajos de T. H. Boyer (1975) y E. Santos (1981), quienes demostraron que el contacto entre ambas teorías se da a través de los operadores simetrizados. Específicamente Boyer demostró en [1] que tanto los valores esperados de la simetrización del campo electromagnético del vacío como las correlaciones de éste, coinciden con los valores esperados del campo de punto cero real. Logra demostrar lo mismo para el oscilador dipolar, y comenta que sería de gran interés demostrar que estos resultados se mantienen para otros sistemas. Por otra parte, E. Santos en [2] generaliza esta idea al establecer una correspondencia entre el álgebra de funciones continuas de variables aleatorias y el álgebra de operadores en el espacio de Hilbert. Más aún, estudia el sistema formado por una onda plana y el campo de punto cero, y concluye que las variables estocásticas del cpc se han transformado como los operadores de creación y aniquilación se transforman bajo el operador de desplazamiento. Define a estos sistemas como estados puros de la radiación y concluye que éstos son similares a los estados coherentes de la electrodinámica cuántica. Es así como surge la teoría llamada óptica estocástica, desarrollada principalmente por E. Santos y T. Marshall (ver, por ejemplo [3, 4, 5]), quienes han explicado por medio de ondas clásicas (y el campo de punto cero real), por ejemplo, la naturaleza discreta de las detecciones de la luz.

Es necesario mencionar que la línea de trabajo fue sugerida por A. M. Cetto, y a pesar de los trabajos de Santos y Marshall, la propuesta que aquí se hace del sistema cuyo comportamiento es similar al del estado coherente, fue encontrada a partir de notar que el operador de desplazamiento suma una onda plana clásica al operador de campo. Siguiendo esta idea se pudo concluir que el estado comprimido es una modulación del campo de punto cero real. Este acercamiento distinto al problema hace que ambos trabajos (éste y el de Santos) difieran notablemente; razón por la cual no aparecerán citados los trabajos [2, 3, 4, 5] (a no ser por este resumen). Mientras que Santos guió su trabajo hacia las distribuciones de Wigner, nosotros trabajaremos todo el tiempo con ondas planas, lo que hace a nuestro trabajo más elemental, pero físicamente más claro.

La estructura que sigue el trabajo es la siguiente. En el primer capítulo se presenta la solución a las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Esta solución es el punto de partida para los capítulos dos y tres. En el capítulo 2 se desarrolla la cuantización del campo electromagnético; es decir, los argumentos para expresar una onda plana como un operador. Se obtienen los valores esperados y las correlaciones del campo electromagnético, que posteriormente serán comparados con los valores esperados del campo de punto cero real. En el capítulo 3 se introduce el campo de punto cero real y se presentan sus propiedades estadísticas, que serán utilizadas de manera sistemática en los capítulos 5 y 7. Es necesario mencionar que la electrodinámica estocástica no será estudiada en este trabajo, pues en ningún momento trataremos la interacción de la radiación con la materia. Una exposición amplia de la EDE puede encontrarse en [6].

En los capítulos 4 y 6 se desarrolla la teoría correspondiente a los estados coherentes y comprimidos. El enfoque es diferente del presentado en los libros de óptica cuántica. La diferencia es muy sutil; a diferencia

de la literatura común, se ha analizado con cuidado los efectos del desplazamiento y la compresión sobre las propiedades del campo y su descripción. Finalmente en los capítulos 5 y 7 veremos que la superposición del campo de punto cero real con ondas clásicas de energía apropiada forman sistemas cuyas propiedades estadísticas coinciden con las de los estados coherentes y comprimidos. Además queda en evidencia que los cálculos llevados a cabo con el campo de punto cero real son notablemente más sencillos y transparentes que los cálculos con la teoría cuántica.

Capítulo 1

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

En este capítulo se presenta la solución a las ecuaciones de Maxwell en el vacío en términos de los modos normales del campo. La teoría desarrollada aquí será fundamental para los capítulos posteriores, pues en todos se usarán sistemáticamente los resultados presentados aquí.

La estructura del capítulo sigue el tratamiento usual para resolver las ecuaciones de Maxwell de los libros de electrodinámica clásica y cuántica. En particular este capítulo está basado en las referencias [6, 7, 8]. Aunque se ha visto fuertemente influenciado por el capítulo 3 de [6].

1.1 Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Las ecuaciones de Maxwell para el vacío sin fuentes son [9](sec. 2.2.5)

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (1.1d)$$

Estas ecuaciones pueden desacoplarse en dos ecuaciones de onda; una para \vec{E} y otra \vec{B} . Por ejemplo, tomando el rotacional de la ecuación (1.1b) y sustituyendo la ecuación (1.1a) se obtiene

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Usando la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}, \quad (1.2)$$

junto con la ecuación (1.1d), se obtiene [9] (sec. 16.2)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3)$$

Haciendo algo semejante con el campo magnético se obtiene

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.4)$$

Es decir, el campo electromagnético se propaga como una onda.

1.2 Modos normales del campo electromagnético

La solución de las ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{B} admiten soluciones en términos de sumas de ondas planas. Cada sumando es llamado modo normal del campo electromagnético y representa una solución estacionaria en un volumen V del espacio.

Para obtener la solución multimodal del campo electromagnético es usual introducir el potencial vector \vec{A} , y el potencial escalar ϕ .

El potencial vector se define de tal forma que [9] (sec. 16.2)

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.5)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (1.1b) se llega a $\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$. Es decir, la cantidad entre paréntesis es el gradiente de un potencial ϕ [9] (sec. 16.2),

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Empleando (1.5), (1.6) y (1.1), se siguen las siguientes ecuaciones, equivalentes a las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.7a)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.7b)$$

Las ecuaciones (1.5), (1.6), muestran que \vec{A} y ϕ no determinan \vec{E} y \vec{B} de manera unívoca, pues el campo magnético determinado por \vec{A} es el mismo que el determinado por \vec{A}' , definido como

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda.$$

Asimismo, el campo eléctrico es invariante frente a la transformación

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

donde Λ es una función arbitraria. Las transformaciones anteriores son conocidas como transformaciones de norma, y permiten simplificar las ecuaciones (1.7). Aquí se empleará la norma de Coulomb, que consiste en exigir que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (es decir, buscar una Λ apropiada, de tal forma que se cumpla la condición requerida). Bajo la norma de Coulomb las ecuaciones (1.7) se transforman en [9] (sec. 16.2)

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= 0, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Como no hay restricción para ϕ , y por tratarse del caso del vacío, podemos considerar $\phi = 0$ [6], de tal forma que el potencial vector satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.8)$$

Se procederá a buscar soluciones estacionarias de la ecuación (1.8). Una forma general de hacerlo, consiste en hacer una descomposición espectral del campo electromagnético en la forma

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} \left(\tilde{A}_{\alpha}(\vec{x}, t) \exp(-i\omega_{\alpha}t) + \tilde{A}_{\alpha}^*(\vec{x}, t) \exp(i\omega_{\alpha}t) \right), \quad (1.9)$$

donde α representa el conjunto de índices sobre los que es necesario sumar. Al sustituir (1.9) en (1.8) y en la condición que exige la norma de Coulomb se obtiene [6]

$$\nabla^2 \tilde{A}_\alpha + k_\alpha^2 \tilde{A}_\alpha = 0, \quad k_\alpha^2 = \omega_\alpha^2/c^2, \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \tilde{A}_\alpha = 0. \quad (1.11)$$

A continuación se considerará una región cúbica del vacío de volumen $V = L^3$ y se buscarán soluciones periódicas en términos de ondas planas para el campo \vec{A} . En ese caso la ecuación (1.10) tiene solución [6]

$$\tilde{A}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{V}} \hat{e}_\alpha \exp(i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x}). \quad (1.12)$$

La condición de periodicidad implica que el vector \vec{k}_α tiene las componentes

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (1.13)$$

y los modos de frecuencia quedan dados por

$$\omega_\alpha = c|\vec{k}_\alpha| = ck_\alpha = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}.$$

Considérese a $\vec{k}_{\vec{n}}$ en la dirección z (el subíndice \vec{n} hace referencia a $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$), es decir, $\vec{k}_{\vec{n}} = k_{\vec{n}} \hat{e}_z$. Entonces la norma de Coulomb, $\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \tilde{A}_\alpha = 0$, implica que la componente z de \tilde{A}_α es cero, es decir debemos considerar sólo dos polarizaciones del potencial vector. Cada polarización se distinguirá por el índice $\lambda = 1, 2$. Así, para cada vector $\vec{k}_{\vec{n}}$ existen dos vectores de polarización $\hat{e}_{\vec{n}}^\lambda$ tal que, junto con el vector unitario $\vec{k}_{\vec{n}}/k_{\vec{n}}$, forman un sistema ortogonal de vectores unitarios,

$$\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \hat{e}_{\vec{n}}^\lambda = 0, \quad \hat{e}_{\vec{n}}^\lambda \cdot \hat{e}_{\vec{n}}^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'},$$

$$\hat{k}_{\vec{n}} = \hat{e}_{\vec{n}}^1 \times \hat{e}_{\vec{n}}^2, \quad \hat{e}_{\vec{n}} = -\hat{k}_{\vec{n}} \times \hat{e}_{\vec{n}}^2, \quad \hat{e}_{\vec{n}}^2 = \hat{k}_{\vec{n}} \times \hat{e}_{\vec{n}}^1.$$

En resumen, hasta el momento se tiene

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{n,\lambda} \hat{e}_n^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{V}} b_{n,\lambda} \exp(i(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t)) + \frac{1}{\sqrt{V}} b_{n,\lambda}^* \exp(-i(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t)) \right), \quad (1.14)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = i \sum_{n,\lambda} \omega_n \hat{e}_n^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{V}} b_{n,\lambda} \exp(i(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t)) - \frac{1}{\sqrt{V}} b_{n,\lambda}^* \exp(-i(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t)) \right), \quad (1.15)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = i \sum_{n,\lambda} (\vec{k}_n \times \hat{e}_n^\lambda) \left(\frac{1}{\sqrt{V}} b_{n,\lambda} \exp(i(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t)) - \frac{1}{\sqrt{V}} b_{n,\lambda}^* \exp(-i(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t)) \right), \quad (1.16)$$

donde se han usado las ecuaciones (1.5) y (1.6) para obtener \vec{E} y \vec{B} . También se ha escrito n en lugar de \vec{n} . Se procederá a calcular la energía del campo a través de la ecuación [9] (sec. 15.4),

$$H = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d^3x \left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \right). \quad (1.17)$$

Para la componente eléctrica se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V d^3x \vec{E}^2 = \\ \frac{1}{2}\epsilon_0 \sum_{\alpha,\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \frac{1}{V} \int_V d^3x \left(\hat{e}_\alpha \exp(i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x}) b_\alpha \exp(-i\omega_\alpha t) - \hat{e}_\alpha \exp(-i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x}) b_\alpha^* \exp(i\omega_\alpha t) \right) \times \\ \left(\hat{e}_\beta \exp(-i\vec{k}_\beta \cdot \vec{x}) b_\beta \exp(i\omega_\beta t) - \hat{e}_\beta \exp(i\vec{k}_\beta \cdot \vec{x}) b_\beta^* \exp(-i\omega_\beta t) \right) \\ = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_\alpha^2 |b_\alpha|^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Para llegar al resultado anterior se ha tomado en cuenta que la ecuación (1.10) junto con la condición de frontera establecida, definen un problema de valores propios, cuyas soluciones son ortonormales, es decir [6] (cap. 3),

$$\frac{1}{V} \int_V d^3x \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta \exp(-i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x}) \exp(i\vec{k}_\beta \cdot \vec{x}) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.19)$$

En particular, existen en dos tipos de términos en (1.18). Aquellos que tienen un término de la forma $e^{-i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x}} e^{i\vec{k}_\beta \cdot \vec{x}}$ y aquellos que tienen un término de la forma $e^{i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x}} e^{i\vec{k}_\beta \cdot \vec{x}}$. Los del primer tipo contribuyen con la energía de cada modo, a través de la condición de ortonormalidad, ec. (1.19). Los últimos se anulan por la condición de periodicidad de las funciones en el volumen V,

$$\int_V \exp(i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x}) \exp(i\vec{k}_\beta \cdot \vec{x}) = \int_V \exp\left(\frac{2\pi}{L}(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \cdot \vec{x}\right) = \int_V \exp(\vec{k}'_\alpha \cdot \vec{x}) = 0. \quad (1.20)$$

Haciendo lo mismo para \vec{B} se obtiene que el campo magnético contribuye con la misma proporción a la energía.

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x c^2 \vec{B}^2 = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_\alpha^2 |b_\alpha|^2. \quad (1.21)$$

Entonces

$$H = \sum_{\alpha} H_{\alpha}, \quad (1.22)$$

donde H_{α} es la contribución a la energía de cada modo del campo,

$$H_{\alpha} = 2\epsilon_0 \omega_{\alpha}^2 |b_{\alpha}|^2$$

Definiendo a_{α}

$$a_{\alpha} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega_{\alpha}^2}{\mathcal{E}_{\alpha}}} b_{\alpha}, \quad (1.23)$$

se tiene que

$$H_{\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha} |a_{\alpha}|^2, \quad (1.24)$$

de manera que \mathcal{E}_{α} es la energía de cada modo campo, cuando $|a_{\alpha}|^2 = 1$.

En términos de a_{α} se obtiene

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2\epsilon_0 \omega_n^2 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(a_{n,\lambda} \exp\left(i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) + a_{n,\lambda}^* \exp\left(-i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) \right), \quad (1.25)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = i \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(a_{n,\lambda} \exp\left(i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) - a_{n,\lambda}^* \exp\left(-i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) \right), \quad (1.26)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = i \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2\epsilon_0\omega_n^2 V}} \left(\vec{k}_n \times \hat{e}_n^\lambda \right) \left(a_{n,\lambda} \exp \left(i \left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t \right) \right) - a_{n,\lambda}^* \exp \left(-i \left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t \right) \right) \right). \quad (1.27)$$

Sea

$$a_\alpha(t) = a_{n,\lambda} \exp(-i\omega_n t) \quad (1.28)$$

entonces el cambio de variable

$$q_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_\alpha}{2\omega_\alpha^2}} (a_\alpha^*(t) + a_\alpha(t)), \quad p_\alpha(t) = i\sqrt{\frac{\mathcal{E}_\alpha}{2}} (a_\alpha^*(t) - a_\alpha(t)), \quad (1.29)$$

cuya transformación inversa es

$$a_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha}} (\omega_\alpha q_\alpha(t) + ip_\alpha(t)), \quad a_\alpha^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_\alpha}} (\omega_\alpha q_\alpha(t) - ip_\alpha(t)), \quad (1.30)$$

permite escribir la energía del campo en la forma [6] (cap. 3)

$$H = \sum_\alpha H_\alpha = \sum_\alpha \mathcal{E}_\alpha a_\alpha^* a_\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{2} (\omega_\alpha^2 q_\alpha^2 + p_\alpha^2). \quad (1.31)$$

Esta ecuación jugará un papel importante cuando en la cuantización del campo electromagnético.

1.3 Cuadraturas del campo

Considérese un modo el campo eléctrico,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= i\sqrt{\frac{\mathcal{E}_\alpha}{2\epsilon_0 V}} \hat{e} \left(a \exp \left(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t \right) - a^* \exp \left(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega t \right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_\alpha}{2\epsilon_0 V}} \hat{e} \left[i(a - a^*) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) + (a + a^*) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right]. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} (a + a^*), \\ X_2 &= \frac{1}{2i} (a - a^*). \end{aligned}$$

Éstas son llamadas las cuadraturas del campo y permiten escribir el campo eléctrico como dos ondas desfazadas $\pi/2$,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \hat{e} \left(X_1 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - X_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right). \quad (1.32)$$

donde $E_0 = 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2\epsilon_0 V}}$.

Nótese que las cuadraturas del campo no son más que la adimensionalización de las variables q y p ,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\omega}{\sqrt{2\mathcal{E}}} q \\ X_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}} p, \end{aligned}$$

por esta razón también se suele llamar a q y p las cuadraturas del campo.

Capítulo 2

Cuantización del campo electromagnético

En este capítulo se desarrollarán los argumentos usuales para cuantizar el campo electromagnético. Este proceso de cuantización compara el oscilador mecánico con una onda electromagnética. La semejanza entre las ecuaciones para la energía de cada sistema da la pauta para transformar funciones reales en operadores del espacio de Hilbert. La teoría presentada aquí sigue la estructura de las referencias [10, 7, 8]. Sin embargo, las ecuaciones de los operadores de campo pueden diferir de las presentadas en tales referencias, pues aquí se ha tomado la solución de las ecuaciones de Maxwell tal y como se escribieron en el capítulo 1, mientras que en aquellas escriben la solución en otros términos (aunque son las mismas). Por ejemplo [10] considera modos normales estacionarios, mientras que en este trabajo se consideran modos con condición de frontera periódica. No obstante, los valores esperados de todos los operadores coinciden con los valores esperados presentados en las referencias citadas.

2.1 Oscilador armónico

El hamiltoniano del oscilador armónico clásico es [8] (sec. 2.2)

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2, \quad (2.1)$$

donde $T = \frac{p^2}{2m}$ es la energía cinética del oscilador y $V = \frac{m\omega^2}{2}q^2$ su energía potencial. La evolución de las variables dinámicas p y q está dada por las ecuaciones de Hamilton [8] (sec. 2.2)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Como H no depende explícitamente del tiempo, es una cantidad conservada, y coincide con la energía. La conservación de la energía implica que la energía del oscilador constantemente se transforma de energía cinética a energía potencial y viceversa.

En el caso cuántico, el hamiltoniano, ec. (2.1), se transforma en el operador [8] (sec. 2.2)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2, \quad (2.3)$$

donde \hat{q} y \hat{p} son osciladores que evolucionan según las ecuaciones de Heisenberg [11] (sec. 9.2),

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, \hat{H}] = \frac{\hat{p}}{m} \\ \dot{\hat{p}} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, \hat{H}] = -m\omega^2 \hat{q};\end{aligned}\tag{2.4}$$

[•] representa el conmutador de los operadores entre paréntesis. Para obtener las ecuaciones anteriores se ha usado que

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar.\tag{2.5}$$

Se suelen definir los operadores [8] (sec. 2.2)

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} + i\hat{p}), \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (m\omega\hat{q} - i\hat{p}),\end{aligned}\tag{2.6}$$

cuyas transformaciones inversas son

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

De (2.5) se obtiene

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.\tag{2.8}$$

El hamiltoniano se puede reescribir entonces de la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right).\tag{2.9}$$

Sea $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, $|n\rangle$ los eigenvectores normalizados de \hat{N} , y n sus eigenvalores. n sólo puede tomar valores positivos o ser cero, pues

$$|\hat{a}|n\rangle|^2 = (\hat{a}|n\rangle)^\dagger (\hat{a}|n\rangle) = \langle n|\hat{N}|n\rangle = n \geq 0$$

Por otra parte, notemos que

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\hat{n}\hat{N} + [\hat{N}, \hat{a}])|n\rangle = n\hat{a}|n\rangle + [\hat{N}, \hat{a}]|n\rangle = n\hat{a}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle,$$

donde se ha usado que $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$. Si $|n\rangle$ es eigenestado de \hat{N} con eigenvalor n , entonces $\hat{a}|n\rangle$ es eigenvector de \hat{N} con eigenvalor $n-1$. Es decir, $\hat{a}|n\rangle = C_n|n-1\rangle$. La normalización de este vector permite obtener $C_n = \sqrt{n}$. Así

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.\tag{2.10}$$

Haciendo algo semejante con \hat{a}^\dagger se obtiene

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.\tag{2.11}$$

Como la aplicación de \hat{a} y \hat{a}^\dagger implica subir y bajar de estado, estos operadores son llamados operadores escalera. En particular, al operador \hat{a} se le llama operador de descenso, y al operador \hat{a}^\dagger se le llama operador de ascenso.

Finalmente, ya que $n \geq 0$, entonces la ecuación (2.10) implica que $\hat{a}|n\rangle = 0$ únicamente cuando $n = 0$. Aplicaciones sucesivas del operador \hat{a}^\dagger indican que los eigenvalores \hat{N} son $0, 1, 2, \dots$. Entonces los niveles de energía del oscilador armónico son

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\};\tag{2.12}$$

ecuación que muestra que la energía del oscilador está cuantizada.

2.2 Analogía entre un modo del campo de radiación y un oscilador armónico

Considérese un modo del campo electromagnético del vacío. Es decir, considérese un sumando en las ecuaciones (1.25), (1.27), (1.26).

$$\vec{A}_{n,\lambda} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2\epsilon_0\omega_n^2 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(a_{n,\lambda} \exp\left(i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) + a_{n,\lambda}^* \exp\left(-i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) \right) \quad (2.13)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t)_{n,\lambda} = i\sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(a_{n,\lambda} \exp\left(i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) - a_{n,\lambda}^* \exp\left(-i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) \right), \quad (2.14)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t)_{n,\lambda} = i\sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2\epsilon_0\omega_n^2 V}} \left(\vec{k}_n \times \hat{e}_n^\lambda\right) \left(a_{n,\lambda} \exp\left(i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) - a_{n,\lambda}^* \exp\left(-i\left(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t\right)\right) \right). \quad (2.15)$$

Bajo la transformación (1.29) la energía del modo es [6] (cap. 3)

$$H_\alpha = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x (E_\alpha^2 + c^2 B_\alpha^2) = \frac{1}{2} (\omega^2 q_\alpha^2(t) + p_\alpha^2(t)), \quad (2.16)$$

que es idéntica a la energía del oscilador armónico, ec. (2.1), cuando $m = 1$. La energía del modo integrada sobre todo el espacio, H_α , es fija, pero las variables $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$ evolucionan en el tiempo. En analogía con el oscilador armónico podemos decir que la energía de un modo del campo electromagnético oscila de igual manera entre el campo eléctrico y magnético, como la energía de un oscilador armónico fluye entre su energía cinética y potencial [12].

2.3 Cuantización de un modo del campo

En resumen, la cuantización del oscilador armónico se basó en convertir la función Hamiltoniana H en el operador Hamiltoniano \hat{H} , transformando p y q en los operadores \hat{p} y \hat{q} que satisfacen la regla de conmutación dada por la ecuación (2.5).

El proceso de cuantización de un modo del campo electromagnético consiste en transformar la función hamiltoniana de un modo del campo, (2.17), en el operador [8] (sec. 2.4)

$$\hat{H}_\alpha = \frac{1}{2} (\omega^2 \hat{q}_\alpha^2(t) + \hat{p}_\alpha^2(t)), \quad (2.17)$$

donde [8] (sec. 2.4)

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\alpha] = i\hbar. \quad (2.18)$$

Ahora bien, comparando las ecuaciones (1.29) con (2.7), se observa que la cuantización implica el siguiente reemplazo

$$\begin{aligned} a_\alpha(t) &\rightarrow \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}_\alpha}} \hat{a}_\alpha(t) \\ a_\alpha^*(t) &\rightarrow \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}_\alpha}} \hat{a}_\alpha^\dagger(t), \end{aligned} \quad (2.19)$$

o bien

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha &\rightarrow \hbar\omega, \\ a_\alpha &\rightarrow \hat{a}_\alpha, \\ a_\alpha^* &\rightarrow \hat{a}_\alpha^\dagger. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.18) implica que

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha^\dagger] = 1.$$

A los operadores \hat{a}, \hat{a}^\dagger se les llama operadores de creación y aniquilación, respectivamente. En términos de ellos el hamiltoniano se escribe de la forma

$$\hat{H}_\alpha = \hbar\omega \left(\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha + \frac{1}{2} \right). \quad (2.21)$$

\hat{a} y \hat{a}^\dagger adquieren su nombre de la propiedad de escalera de los operadores del oscilador armónico de la mecánica cuántica. Mientras que los operadores escalera suben y bajan los niveles (estados) del oscilador material, los operadores de creación y aniquilación, se dice que, crean y destruyen fotones. Siguiendo el procedimiento empleado en el caso del oscilador se obtiene

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle,$$

luego

$$\begin{aligned} \hat{H} (\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= (E_n + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger |n\rangle), \\ \hat{H} (\hat{a} |n\rangle) &= (E_n - \hbar\omega) (\hat{a} |n\rangle), \end{aligned} \quad (2.22)$$

es decir, aplicar el operador de creación implica sumar la energía $\hbar\omega$ a la energía total del campo inicial, ‘se crea un fotón’. Aplicar el operador de aniquilación, en el lenguaje convencional, elimina un fotón del campo, y por eso hay que restarlo a la energía.

El vacío electromagnético $|0\rangle$ se define como

$$\hat{a} |0\rangle = 0. \quad (2.23)$$

y los niveles de energía resultan ser idénticos a los niveles del oscilador armónico,

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Finalmente, aplicando la transformación (2.20) el campo electromagnético es transformado en los siguientes operadores,

$$\hat{A}_{n,\lambda}(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} \hat{e}_n^\lambda \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) + \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right) \quad (2.25)$$

$$\hat{E}(\vec{x}, t)_{n,\lambda} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right), \quad (2.26)$$

$$\hat{B}(\vec{x}, t)_{n,\lambda} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} (\vec{k}_n \times \hat{e}_n^\lambda) \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right). \quad (2.27)$$

Al proceso seguido hasta aquí se le llama cuantización del campo electromagnético, y como se ha visto, consiste en reemplazar las variables dinámicas por operadores, manteniendo la forma de las ecuaciones.

2.4 Fluctuaciones cuánticas de un modo del campo

A continuación se reescribirá un modo del campo eléctrico, ec. (2.26), de la siguiente manera

$$\hat{E}_\alpha = \tilde{E} \hat{a}_\alpha + \tilde{E}^* \hat{a}_\alpha^\dagger, \quad (2.28)$$

donde $\tilde{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \exp(i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{x})$. Nótese que no se ha escrito la polarización, porque sólo interesa las propiedades del módulo del campo. Entonces

$$[\hat{N}_\alpha, \hat{E}_\alpha] = \tilde{E} [\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha] + \tilde{E}^* [\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha^\dagger] = \tilde{E}^* \hat{a}_\alpha^\dagger - \tilde{E} \hat{a}_\alpha. \quad (2.29)$$

Esto implica que el campo eléctrico presentará fluctuaciones cuando se promedie sobre el estado de número. En efecto,

$$\langle n | \hat{E}_\alpha | n \rangle = 0,$$

$$\langle n | \hat{E}_\alpha^2 | n \rangle = (2n + 1) |\tilde{E}|^2,$$

por lo tanto

$$\langle n | (\Delta \hat{E})^2 | n \rangle = (2n + 1) |\tilde{E}|^2. \quad (2.30)$$

Cuando $n = 0$ se tiene la dispersión del vacío $|\tilde{E}|^2 = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}$.

Es un hecho interesante que el valor esperado del campo eléctrico sea cero para cualquier n . En mecánica cuántica suele resaltarse la importancia del principio de correspondencia, y para el caso del campo electromagnético, aún cuando n crezca indefinidamente, su valor esperado siempre será cero. En otras palabras, un estado $|n\rangle$ de un gran número de fotones no se comporta en promedio como una onda electromagnética.

2.5 Operadores de cuadratura

La evolución temporal del operador de aniquilación está dada por la ecuación de Heisenberg [10] (sec. 2.1),

$$\dot{\hat{a}} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H}, \hat{a}) = -i\omega \hat{a},$$

entonces

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) \exp(-i\omega t).$$

La adjunta de la ecuación anterior es

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) \exp(i\omega t).$$

Por lo tanto el campo electromagnético puede escribirse de la forma

$$\hat{A}_{n,\lambda}(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} \hat{e}_n^\lambda \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) + \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right) \quad (2.31)$$

$$\hat{E}(\vec{x}, t)_{n,\lambda} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right), \quad (2.32)$$

$$\hat{B}(\vec{x}, t)_{n,\lambda} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} (\vec{k}_n \times \hat{e}_n^\lambda) \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right), \quad (2.33)$$

donde se ha escrito $\hat{a}_\alpha(0) = \hat{a}_\alpha$, y se seguirá escribiendo de esa forma siempre que no exista motivo de confusión (lo mismo para \hat{a}^\dagger).

En analogía con las ondas electromagnéticas, consideremos los operadores de cuadratura definidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{X}_1 &= \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{X}_2 &= \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger).\end{aligned}\tag{2.34}$$

En términos de éstos, el campo eléctrico puede escribirse en la forma

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} \hat{e} \left(\hat{X}_1 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \hat{X}_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right),\tag{2.35}$$

que es semejante a la ecuación (1.32) obtenida en el capítulo 1; ahora con \hat{X}_1 y \hat{X}_2 operadores.

Los operadores de cuadratura satisfacen la relación de conmutación,

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}.\tag{2.36}$$

Para el estado de cero fotones se tiene

$$\begin{aligned}\langle 0 | \hat{X}_1 | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{X}_2 | 0 \rangle = 0 \\ \langle 0 | \hat{X}_1^2 | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{X}_2^2 | 0 \rangle = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

luego

$$\langle 0 | (\Delta \hat{X}_1)^2 | 0 \rangle \langle 0 | (\Delta \hat{X}_2)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{16}.\tag{2.37}$$

En general,

$$\begin{aligned}\langle n | \hat{X}_1 | n \rangle &= \langle n | \hat{X}_2 | n \rangle = 0, \\ \langle n | \hat{X}_1^2 | n \rangle &= \langle n | \hat{X}_2^2 | n \rangle = \frac{1}{4}(2n + 1),\end{aligned}$$

entonces

$$\left\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \right\rangle = \frac{1}{16}(4n^2 + 4n + 1) \geq \frac{1}{16},$$

la desigualdad (de Heisenberg) toma el mínimo cuando $n = 0$. El objetivo de calcular los valores esperados de estos operadores es para compararlos con los resultados que se obtienen en el capítulo 3.

2.6 Campo multimodal

La cuantización del campo multimodal es directa, porque simplemente se cuantiza cada modo del campo, de tal forma que [8] (sec. 2.5)

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} \hat{e}_n^\lambda \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) + \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right)\tag{2.38}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \sum_{n,\lambda} i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right),\tag{2.39}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \sum_{n,\lambda} i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n V}} (\vec{k}_n \times \hat{e}_n^\lambda) \left(\hat{a}_{n,\lambda} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right).\tag{2.40}$$

La relación de conmutación entre \hat{a} y \hat{a}^\dagger se escribe en la forma [8] (sec. 2.5)

$$[\hat{a}_{n,\lambda}, \hat{a}^\dagger_{n',\lambda'}] = \delta_{n,n'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.41)$$

En el caso multimodal se tiene un operador de número para cada modo del campo, $\hat{N}_{k,\lambda} = \hat{a}^\dagger_{n,\lambda} \hat{a}_{n,\lambda}$. El estado multimodal se representa con el ket $|\{n_{n,\lambda}\}\rangle$ y el número total de fotones en este estado es $\sum_{n,\lambda} n_{n,\lambda}$, donde cada $n_{n,\lambda}$ es el eigenvalor del operador $\hat{N}_{k,\lambda}$. El estado de cero fotones se representa por el ket $|\text{vac}\rangle = |0, 0, \dots\rangle$.

2.7 Distribución del campo

En la interpretación estadística o de ensemble de la mecánica cuántica se dice que “es posible asignar un valor único y bien definido a una variable dinámica *sólo* si el sistema ha sido preparado como eigenestado (o se encuentra en un eigenestado) del operador correspondiente.” ([11] p. 216), donde se entiende por ‘estar preparado como eigenestado’ el hecho que el sistema sea eigenfunción del operador dado. Esto se refleja en que la varianza del operador es cero.

Por otra parte, dado un operador \hat{O} podemos encontrar encontrar la n-ésima potencia de cada operador, calculada de la siguiente manera [11] (sec. 8.5),

$$\hat{O}^n = \underbrace{\hat{O} \cdot \hat{O} \cdots \hat{O}}_{n \text{ veces}} \quad (2.42)$$

y encontrar su valor esperado sobre un estado $|\psi\rangle$ dado. Siguiendo la terminología de la estadística se le llama a $\langle \psi | \hat{O}^n | \psi \rangle$ el momento n-ésimo del operador \hat{O} en el estado $|\psi\rangle$ [13, 14]. Entonces cada operador junto con un estado definen una estadística, que queda determinada por sus momentos (todos en conjunto). En este trabajo, en el capítulo 3, se planteará la existencia de un campo de radiación estocástico, que se considera, es el responsable de originar el comportamiento cuántico de las partículas y los campos. La pregunta que se plantea en este trabajo es ¿puede ser generada la estadística de un operador en un estado, a través de un campo de radiación estocástico? se considerará como una respuesta positiva si es posible obtener variables dinámicas del campo de radiación estocástico (posiblemente en interacción con otras campos) cuyos momentos estadísticos coinciden con los momentos de un operador sobre un estado determinado.

Una pregunta particular que se puede plantear es ¿Se puede obtener la estadística que define el operador de campo eléctrico sobre el estado coherente a través de un campo de radiación? La respuesta es positiva, pero será dada hasta el siguiente capítulo (allá se intentará dar una interpretación de estos resultados). Aquí sólo se calculará la estadística del vacío cuántico a través de los momentos del operador de campo eléctrico. Para comenzar, siguiendo a [6] (sec. 4.4.3), se escribirá de nuevo al operador de campo como en la ec. (2.28),

$$\hat{E} = \tilde{E} \hat{a}^\dagger + \tilde{E}^* \hat{a}.$$

La varianza del modo es $\sigma^2 = \langle 0 | \hat{E}^2 | 0 \rangle = |\tilde{E}|^2$. Por otra parte, la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff nos dice que [11] (cap. 10, problemas ilustrativos) si \hat{A} y \hat{B} conmutan con $[\hat{A}, \hat{B}]$ entonces $\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \exp(\hat{A} + \hat{B}) \exp\left(\frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]\right)$. Sea $\hat{A} = \beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger$ y $\hat{B} = \beta \tilde{E}^* \hat{a}$, entonces $[\hat{A}, \hat{B}] = -\beta^2 \tilde{E} \tilde{E}^* = -\beta^2 \sigma^2$, es una constante, de donde es claro que tanto \hat{A} como \hat{B} conmutan con $[\hat{A}, \hat{B}]$. Aplicando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff se obtiene que

$$\begin{aligned} \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger) \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a}) &= \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger + \beta \tilde{E}^* \hat{a}) \exp\left(-\frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2\right) \\ \Leftrightarrow \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger + \beta \tilde{E}^* \hat{a}) &= \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger) \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a}) \exp\left(\frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2\right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ya que

$$\langle 0 | \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a}^\dagger) \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}) | 0 \rangle = \sum_{n,k} \frac{\beta^{*n} \beta^k \tilde{E}^{*n} \tilde{E}^k}{n!k!} \langle 0 | \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^k | 0 \rangle = 1, \quad (2.44)$$

porque todos los términos se anulan, excepto cuando $n = k = 0$, entonces

$$\langle 0 | \exp(\beta \hat{E}) | 0 \rangle = \langle 0 | \exp(\beta (\tilde{E} \hat{a}^\dagger + \tilde{E}^* \hat{a})) | 0 \rangle = \langle 0 | \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a}^\dagger) \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}) | 0 \rangle \exp\left(\frac{\beta^2 \sigma^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2\right). \quad (2.45)$$

Como (2.45) es la función generadora de una distribución gaussiana, entonces el campo cuántico de vacío tiene una distribución gaussiana. Se suele mencionar que otro ordenamiento del operador $\exp(\beta \hat{E})$ conduce a otro resultado, y por lo tanto el campo tiene distribución normal sólo cuando el operador está ordenado normalmente. Sin embargo, siempre que usemos las operaciones establecidas para los operadores no existirá ningún cambio en el resultado. Por ejemplo, si se desea un ordenamiento antinormal del operador, entonces en la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff se debe tomar $\hat{A} = \beta \tilde{E}^* \hat{a}$ y $\hat{B} = \beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger$, entonces

$$\begin{aligned} \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a}) \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger) &= \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a} + \beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger) \exp\left(\frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2\right) \\ \Leftrightarrow \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger + \beta \tilde{E}^* \hat{a}) &= \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a}) \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger) \exp\left(-\frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2\right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como

$$\begin{aligned} \langle 0 | \exp(\beta \tilde{E}^* \hat{a}) \exp(\beta \tilde{E} \hat{a}^\dagger) | 0 \rangle &= \langle 0 | \sum_n \frac{(\beta \tilde{E}^*)^n}{n!} \hat{a}^n \sum_m \frac{(\beta \tilde{E})^m}{m!} \hat{a}^{\dagger m} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \sum_n \frac{(\beta \tilde{E}^*)^n}{n!} \sum_m \frac{(\beta \tilde{E})^m}{\sqrt{m!}} | m \rangle \\ &= \langle 0 | \sum_n \frac{(\beta^2 \tilde{E}^* \tilde{E})^n}{n!} | 0 \rangle \\ &= \exp(\beta^2 \sigma^2), \end{aligned}$$

entonces

$$\langle 0 | \exp(\beta \hat{E}) | 0 \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2\right),$$

por lo tanto, el campo de vacío cuántico tiene una distribución normal, sin importar el ordeamiento del operador, siempre y cuando no se rompan las reglas de conmutación de los operadores.

2.8 Distribución de \hat{q} y \hat{p}

De los resultados anteriores es muy sencillo calcular la función generadora de momentos de los operadores \hat{q} y \hat{p} , definidos en . Basta que los operadores se escriban de la forma

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \tilde{Q} \hat{a} + \tilde{Q}^* \hat{a}^\dagger, & \tilde{Q} &= \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\hbar}{\omega}}, \\ \hat{p} &= \tilde{P} \hat{a} + \tilde{P}^* \hat{a}^\dagger, & \tilde{P} &= -i \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\hbar}{\omega}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Entonces siguiendo los resultado de la sección anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle 0 | \exp(\beta \hat{q}) | 0 \rangle &= \exp\left(\frac{1}{2} \beta^2 \sigma_q^2\right), \\ \langle 0 | \exp(\beta \hat{p}) | 0 \rangle &= \exp\left(\frac{1}{2} \beta^2 \sigma_p^2\right),\end{aligned}\tag{2.48}$$

por lo tanto los operadores \hat{q} , \hat{p} tienen distribución gaussiana.

A continuación se calcularán los momentos de la energía. Para empezar las potencias del operador de energía están dados por

$$\hat{H}^n = (\hbar\omega)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k,\tag{2.49}$$

donde se ha utilizado el hecho que $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ y $\frac{1}{2}$ conmutan. Entonces el momento n-ésimo del hamiltoniano en el estado $|0\rangle$ es

$$\langle 0 | \hat{H}^n | 0 \rangle = \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^n,\tag{2.50}$$

ya que

$$\langle 0 | \hat{H}^n | 0 \rangle = (\hbar\omega)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \langle 0 | (\hat{a}^\dagger \hat{a})^{n-k} | 0 \rangle.\tag{2.51}$$

De donde es claro que el único término que sobrevive de la suma es $n = k$. Pues si $n \neq k$,

$$\langle 0 | (\hat{a}^\dagger \hat{a})^{n-k} | 0 \rangle = \langle 0 | (\hat{a}^\dagger \hat{a})^{n-k-1} \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle = 0.$$

Los momentos dados por (2.50) corresponden a una distribución de probabilidad degenerada, es decir, una función que toma el valor de $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$ en un punto y cero en los demás.

Es natural hacer la siguiente pregunta ¿Por qué si los operadores \hat{q} y \hat{p} tienen distribución gaussiana, la energía tiene distribución degenerada? Matemáticamente se debe a que los operadores \hat{q} y \hat{p} no son independientes, pues

$$\langle 0 | \hat{q}^n \hat{p}^m | 0 \rangle \neq \langle 0 | \hat{q}^n | 0 \rangle \langle 0 | \hat{p}^m | 0 \rangle.\tag{2.52}$$

Mas aún, al escribir el operador de energía en la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\omega^2 \hat{q}^2 + \hat{p}^2),\tag{2.53}$$

entonces

$$\hat{H}^2 = \frac{1}{4} [\omega^4 \hat{q}^4 + \hat{p}^2 + \omega^2 (\hat{q}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q}^2)].\tag{2.54}$$

Ahora bien, ya sea empleando el hecho que los operadores \hat{q} y \hat{p} tienen distribución gaussiana, o haciendo los cálculos en términos de los operados \hat{a} y \hat{a}^\dagger , se obtiene que

$$\omega^4 \langle 0 | \hat{q}^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{p}^4 | 0 \rangle = \frac{3\hbar^2 \omega^2}{4}\tag{2.55}$$

y

$$\langle 0 | \hat{q}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q}^2 | 0 \rangle = -\frac{\hbar^2}{2},\tag{2.56}$$

este último resultado es difícil de interpretar físicamente, pues el valor esperado de la suma de operadores cuadráticos es negativo (además el valor esperado de cada uno de los operadores es negativo; este resultado se verá en el capítulo siguiente). Nótese que este operador, $\hat{q}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q}^2$, es hermitiano, porque tanto \hat{q} como \hat{p} lo

son. El hecho que (2.56) sea negativo hace que la energía tome el valor dado por la distribución degenerada, pues

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{3\hbar^2\omega^2}{4} + \frac{3\hbar^2\omega^2}{4} - \frac{\hbar^2\omega^2}{2} \right) = \frac{\hbar^2\omega^2}{4}. \quad (2.57)$$

Ahora bien, si se toma el valor absoluto de (2.56), entonces

$$\langle 0 | \hat{H}^2 | 0 \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{3\hbar^2\omega^2}{4} + \frac{3\hbar^2\omega^2}{4} + \frac{\hbar^2\omega^2}{2} \right) = \frac{\hbar^2\omega^2}{2}, \quad (2.58)$$

que corresponde con el valor esperado de las variables \hat{q} y \hat{p} con distribución gaussiana e independientes.

2.9 Correlaciones de dos puntos del campo

Ahora se calculará la correlación del campo cuantizado de dos puntos, $(\vec{x}_1, t_1), (\vec{x}_2, t_2)$, definidas como $\langle \text{vac} | \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) | \text{vac} \rangle$. Aunque las correlaciones no definen una estadística en los términos planteados anteriormente, en general, las correlaciones de n puntos se reducen a los momentos del operador cuando los puntos coinciden.

Aquí se calculará únicamente las correlaciones de dos puntos (siguiendo a [1]), pues se ha visto que existe una comparación directa de esta propiedad del vacío cuántico con el campo de radiación estocástico que se planteará en el capítulo 3. La interpretación usual que se le da a la correlación cuántica se dejará hasta el capítulo 4.

$$\begin{aligned} \langle \text{vac} | \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) | \text{vac} \rangle &= - \sum_{n_1 \lambda_1} \sum_{n_2 \lambda_2} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2}} (e_{n_1}^{\lambda_1})_i (e_{n_2}^{\lambda_2})_j \times \\ &\quad \times \left(\langle \text{vac} | \hat{a}_{n_1 \lambda_1} \hat{a}_{n_2 \lambda_2} | \text{vac} \rangle \exp(i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 - i\omega_{n_1} t_1) \exp(i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 - i\omega_{n_2} t_2) \right) \\ &\quad - \langle \text{vac} | \hat{a}_{n_1 \lambda_1} \hat{a}_{n_2 \lambda_2}^\dagger | \text{vac} \rangle \exp(i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 - i\omega_{n_1} t_1) \exp(-i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 + i\omega_{n_2} t_2) \\ &\quad - \langle \text{vac} | \hat{a}_{n_1 \lambda_1}^\dagger \hat{a}_{n_2 \lambda_2} | \text{vac} \rangle \exp(-i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 + i\omega_{n_1} t_1) \exp(i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 - i\omega_{n_2} t_2) \\ &\quad + \langle \text{vac} | \hat{a}_{n_1 \lambda_1}^\dagger \hat{a}_{n_2 \lambda_2}^\dagger | \text{vac} \rangle \exp(-i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 + i\omega_{n_1} t_1) \exp(-i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 + i\omega_{n_2} t_2) \\ &= \sum_n \sum_\lambda \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} (e_{n_1}^{\lambda_1})_i (e_{n_2}^{\lambda_2})_j \exp(i\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega_n(t_1 - t_2)) \\ &= \sum_n \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \exp(i\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega_n(t_1 - t_2)). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Como los operadores no conmutan, resulta que $\langle \text{vac} | \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) | \text{vac} \rangle \neq \langle \text{vac} | \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) | \text{vac} \rangle$. En particular

$$\langle \text{vac} | \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) | \text{vac} \rangle = \sum_n \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \exp(-i\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + i\omega_n(t_1 - t_2)).$$

Nótese que

$$\begin{aligned} &\langle \text{vac} | \frac{1}{2} \left(\hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) + \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \right) | \text{vac} \rangle \\ &= \sum_n \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \cos \left[\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega_n(t_1 - t_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

De manera análoga se obtiene que

$$\langle \text{vac} | \hat{B}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{B}_j(\vec{x}_2, t_2) | \text{vac} \rangle = \langle \text{vac} | \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) | \text{vac} \rangle .$$

$$\langle \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{B}_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \sum_n \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{k_l}{k} \epsilon_{ijl} \exp \left(i \vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i \omega_n (t_1 - t_2) \right)$$

Como se ha mencionado, los resultados obtenidos en esta sección servirán para compararlos con los resultados del capítulo 3.

2.10 El vacío cuántico

Para el caso de un modo del campo se definió el estado $|0\rangle$ como aquel estado al cual es imposible aniquilarle fotones. Es decir $\hat{a}|0\rangle = 0$. Esto implicó que el eigenvalor correspondiente a $|0\rangle$ es $n = 0$ y que su energía es $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

En el caso multimodal, el estado de vacío, $|\text{vac}\rangle$, es el estado en el que cada modo se encuentra en su estado de vacío, es decir, cuando $n_{n,\lambda} = 0$ para toda n y toda λ . Este estado tiene una energía (energía de punto cero) infinita, pues hay infinitos modos, y cada uno contribuye con la energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Usando la ecuación (??), para pasar la energía al espectro continuo, se obtiene [8] (sec. 2.6)

$$\sum_{n,\lambda} \hbar\omega_n \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \sum_{\lambda} \int d^3k \frac{1}{2} \hbar\omega_n = \frac{2}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta d\phi \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{1}{2} \hbar\omega = \frac{\hbar}{2\pi c^3} \int_0^{\infty} d\omega \omega^3, \quad (2.61)$$

es decir, la densidad espectral del campo de vacío es [8] (sec. 2.6)

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}. \quad (2.62)$$

El campo de vacío genera efectos sobre los cuerpos cargados incluso si el término de energía de punto cero es despreciado en el hamiltoniano. P. Milonni [8] (pág. 48), por ejemplo, muestra que la ecuación de movimiento de un dipolo en el vacío contiene un término disipativo debido a la presencia del campo de punto cero, aún cuando éste no se haya tomado en cuenta de manera explícita.

Capítulo 3

Campo de punto cero real

En el desarrollo de su segunda teoría de la radiación de cuerpo negro, Planck obtuvo la fórmula [6] (cap. 4)

$$\mathcal{E}(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} + \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (3.1)$$

para la energía media de un oscilador armónico material de frecuencia ω , en equilibrio con la radiación, en un cuerpo negro a temperatura T . Esta fórmula implica que incluso a temperatura cero, los osciladores continúan vibrando, de tal forma que su energía media en ese caso es $\mathcal{E}(\omega, 0) = \frac{1}{2}\hbar\omega$; ésta es la llamada energía de punto cero.

Una vez formulada la mecánica cuántica, la energía de punto cero volvió aparecer en el problema del oscilador armónico. El nivel más bajo de energía es precisamente aquél con energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Este resultado se obtiene al resolver la ecuación de Schrödinger para el potencial $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$, es decir, por un camino que difiere del seguido por Planck. En el capítulo anterior se vio que la electrodinámica cuántica admite la existencia de un campo electromagnético cuya energía por modo es $\frac{1}{2}\hbar\omega$ en el vacío, de energía total infinita, no obstante que el campo promedio es cero. En general, la energía de punto cero surge en cualquier teoría cuántica, pero su existencia se considera limitada a un campo virtual, que aparece en las ecuaciones y genera efectos observables, pero de éste sólo existen sus fluctuaciones.

En este trabajo, se considerará que la energía de punto cero no refleja más que la existencia de un campo de radiación estocástico de punto cero (cpc). Entonces, cualquier sistema que se desee describir de manera completa debe incluir al campo de punto cero como elemento fundamental.

La teoría que describe la interacción del cpc con la materia se llama electrodinámica estocástica (EDE). Uno de los objetivos principales de la EDE es intentar explicar el comportamiento cuántico que se observa en la partículas microscópicas como resultado de la interacción de éstas con el cpc.

En este trabajo se considerará al campo de punto cero de la EDE y sus efectos al superponerse con otras ondas electromagnéticas. Se debe remarcar que no se considerará el problema general de la interacción de la radiación con la materia; de la EDE sólo se tomará el campo de punto cero.

Para iniciar este capítulo, se estudiarán las propiedades estadísticas de este campo. Para empezar, su densidad espectral se considera igual a la densidad espectral del campo de punto cero cuántico visto en el capítulo anterior. La razón de elegirlo así no es arbitraria. Esta densidad corresponde con la de un campo que tiene una energía por modo igual a $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Por otra parte, la ley de Wien dice que la densidad espectral de la radiación de cuerpo negro es de la forma

$$\rho(\omega, T) = \omega^3 \phi\left(\frac{\omega}{T}\right). \quad (3.2)$$

Según [15], es posible extender esta ley al caso en que la temperatura es cero. Entonces, la densidad espectral del campo atómico que surge de la ley de Planck es

$$\rho = \rho(\omega, 0) = \omega^3 \phi(\infty). \quad (3.3)$$

En la física clásica se considera $\phi(\infty) = 0$. Pero una solución del tipo $\phi(\infty) = \text{constante} = A$ es más general. Por otra parte, considerando a $N(\omega)d\omega$ como el número de modos de frecuencia ω por unidad de volumen contenidos en el intervalo $d\omega$, la densidad espectral se puede escribir de la forma [16] (cap. 3)

$$\rho(\omega, T)d\omega = N(\omega)\mathcal{E}(\omega, T)d\omega, \quad (3.4)$$

donde $\mathcal{E}(\omega, T)$ es la energía promedio del modo de frecuencia ω , a la temperatura T . Un resultado muy conocido es que [16] (cap. 3)

$$N(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \quad (3.5)$$

Luego

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \mathcal{E}(\omega, T). \quad (3.6)$$

Ya que $\mathcal{E}(\omega, 0) = \frac{1}{2}\hbar\omega$, entonces

$$\frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho(\omega, 0) = \pi^2 c^3 A\omega. \quad (3.7)$$

Entonces $A = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3}$. Por lo tanto [16] (cap. 3),

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}, \quad (3.8)$$

donde se ha escrito como $\rho(\omega)$ la densidad espectral del campo a temperatura cero. Al igual que el campo de punto cero cuántico, la energía del cpc de la EDE es infinita,

$$\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega = \infty. \quad (3.9)$$

Sin embargo, cuando la materia se pone en interacción con la radiación libre aparece un término de autofuerza, es decir, una fuerza sobre la partícula debida a su propia radiación. Una serie de aproximaciones, que pueden ser consultadas en [6], permite escribir ese término de autofuerza como $m\tau\ddot{\vec{x}}(t) - \delta m\ddot{\vec{x}}(t)$, donde el término con tercera derivada es llamada la reacción de radiación y el término con segunda derivada se debe una corrección a la masa de la partícula, en virtud de que se encuentra inmersa en el campo. Matemáticamente esta corrección δm es infinita, pues esta dada por la integral [6]

$$\delta m = \frac{4 \exp(2)}{3\pi c^3} \int_0^\infty d\omega, \quad (3.10)$$

que es divergente. En la teoría de renormalización se acepta que la masa de una partícula que se mide en el laboratorio, m_T , es la suma de la masa cuando la partícula no está en interacción con el campo, m , más la corrección δm . Como claramente m_T es finita, se propone un procedimiento de regularización; aquí se hace referencia al procedimiento más simple, que consiste en introducir una frecuencia de corte en el término de corrección. Se entiende entonces que a partir de esa frecuencia la partícula se vuelve transparente al campo, y el término de corrección resulta ser $\delta m = \frac{2}{\pi} m\tau\omega_c$, donde ω_c es la frecuencia de corte. Cuando se hace una descripción no relativista se suele tomar ω_c como la frecuencia de Compton, $\omega_C = mc^2/\hbar$.

Si en la integral (3.9) se sustituye el valor de la frecuencia de Compton, por ejemplo, para el electrón, se obtiene un valor finito para la energía, pero aún muy grande, del orden de 10^5 kg/m^3 , que corresponde a $10^{35} \text{ electrones/m}^3$. En sí, el problema de la energía del cpc sigue siendo un problema abierto, que surge en cualquier teoría que considere un campo de punto cero real. La electrodinámica cuántica elimina el problema considerando al vacío un campo virtual, del cual sólo existen sus fluctuaciones.

3.1 Estadística del campo de punto cero

Una vez que se han mencionado los argumentos usuales para introducir el campo de punto cero de la EDE, se procederá a obtener su expresión matemática y sus propiedades.

Considérese la solución a las ecuaciones de Maxwell, obtenida en el primer capítulo. El campo de punto cero está constituido por los modos de energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$. La estocasticidad del campo se obtiene al considerar a las variables $a_{n,\lambda}$ como variables estocásticas. En otras palabras, el campo de punto cero se construye haciendo el reemplazo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &\rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega \\ a_{n,\lambda}, a_{n,\lambda}^* &\rightarrow \{a_{n,\lambda}, a_{n,\lambda}^*\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $\{a_{n,\lambda}, a_{n,\lambda}^*\}$ son variables aleatorias, mientras que $a_{n,\lambda}, a_{n,\lambda}^*$ son números (fijos) para cada modo. Se recalca que el uso de llaves, $\{ \}$, hace referencia a que la variable $a_{n,\lambda}$ puede tomar valores aleatorios, mientras que la $a_{n,\lambda}$ sin llaves es un número fijo. Esta notación sólo se usará una vez, para la ecuación (3.11), con la cual se quiere hacer énfasis que la transición a la EDE está al mismo nivel que la transición a la electrodinámica cuántica (EDC), ec. (2.20), pues ambas requieren transformar la amplitud del campo real, a un operador (EDC) o a una variable estocástica (EDE).

Según se vio en el primer capítulo, la energía de cada modo esta dada por $H_{n,\lambda} = \mathcal{E}_n a_{n,\lambda} a_{n,\lambda}^*$. Al considerar que la energía de cada modo es \mathcal{E}_n se está considerando que [6] (cap. 4)

$$\langle |a_{n,\lambda}|^2 \rangle = 1, \quad (3.12)$$

donde $\langle \bullet \rangle$ representa el promedio sobre las variables aleatorias $a_{n,\lambda}, a_{n,\lambda}^*$.

Aplicando (3.11) se obtiene [6] (cap. 4)

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = c \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{4\epsilon_0\omega_k V}} \hat{e}_n^\lambda \left(a_{n,\lambda} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_k t) + a_{n,\lambda}^* \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega_k t) \right), \quad (3.13)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = i \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{4\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(a_{n,\lambda} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_k t) - a_{n,\lambda}^* \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega_k t) \right), \quad (3.14)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = ic \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{4\epsilon_0\omega_k V}} \left(\hat{k} \times \hat{e}_n^\lambda \right) \left(a_{n,\lambda} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_k t) - a_{n,\lambda}^* \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\omega_k t) \right). \quad (3.15)$$

Las variables $a_{n,\lambda}$, que ahora ya no son constantes, sino variables aleatorias independientes para cada modo. Entonces [6] (cap. 4)

$$\langle a_{n,\lambda} \rangle = 0, \quad \langle a_{n,\lambda}^* \rangle = 0. \quad (3.16)$$

El hecho que dos modos del campo no interaccionen entre sí, sino que contribuyan de manera independiente a la energía total implica que [6] (cap. 4)

$$\langle a_{n,\lambda}^* a_{n',\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'}, \quad (3.17)$$

Asimismo [6] (cap. 4),

$$\langle a_{n,\lambda} a_{n',\lambda'} \rangle = 0, \quad \langle a_{n,\lambda}^* a_{n',\lambda'}^* \rangle = 0. \quad (3.18)$$

En analogía con las variables q, p introducidas en la ec. (1.29) del capítulo 1, se suele introducir las variables estocásticas $\{p, q\}$ de la forma [6] (cap. 4)

$$q_{n,\lambda} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2\omega_n^2}} (a_{n,\lambda}^* + a_{n,\lambda}), \quad p_{n,\lambda} = i\sqrt{\frac{\mathcal{E}_n}{2}} (a_{n,\lambda}^* - a_{n,\lambda}). \quad (3.19)$$

En base a las propiedades de a y a^* se tiene que

$$\langle q_{n,\lambda} \rangle = 0, \quad \langle p_{n,\lambda} \rangle = 0. \quad (3.20)$$

Asimismo

$$\langle q_{n,\lambda} p_{n,\lambda} \rangle = 0. \quad (3.21)$$

Si se calculan las dispersiones de las variables q y p se obtienen los resultados

$$\sigma_{p_\alpha}^2 = \langle p_\alpha^2 \rangle - \langle p_\alpha \rangle^2 = \mathcal{E}_\alpha = \frac{1}{2} \hbar \omega_\alpha. \quad (3.22)$$

$$\sigma_{q_\alpha}^2 = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{\omega_\alpha^2} = \frac{\hbar}{2\omega_\alpha}, \quad (3.23)$$

donde α representa un modo (n, λ) . De las relaciones anteriores se sigue que

$$\sigma_{p_\alpha}^2 \sigma_{q_\alpha}^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (3.24)$$

relación que también cumple el vacío cuántico (que dice que es un estado de mínima dispersión).

Se puede escribir la amplitud $a_{n,\lambda}$ en forma polar $a_{n,\lambda} = r_{n,\lambda} \exp(i\phi_{n,\lambda})$. Invirtiendo las ecuaciones (3.19) se obtiene

$$\begin{aligned} a_{n,\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}} (\omega q_{n,\lambda} + i p_{n,\lambda}) \\ a_{n,\lambda}^* &= \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}} (\omega q_{n,\lambda} - i p_{n,\lambda}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

de donde sigue que

$$\begin{aligned} q_{n,\lambda} &= \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_n}{\omega_n^2}} r_{n,\lambda} \cos \phi_{n,\lambda} \\ p_{n,\lambda} &= -\sqrt{2\mathcal{E}_n} r_{n,\lambda} \sin \phi_{n,\lambda}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La energía de un modo del cpc es

$$H_{n,\lambda} = \mathcal{E}_k |a_{n,\lambda}|^2 = \mathcal{E}_k r_{n,\lambda}^2. \quad (3.27)$$

Como se ha considerado $\langle |a_{n,\lambda}|^2 \rangle = 1$, entonces

$$\langle r_{n,\lambda}^2 \rangle = 1. \quad (3.28)$$

Tomando en cuenta que $\langle a_{n,\lambda} + a_{n,\lambda}^* \rangle = 0$ y $\langle a_{n,\lambda} - a_{n,\lambda}^* \rangle = 0$ se obtiene

$$\langle \sin \phi_{n,\lambda} \rangle = 0, \quad \langle \cos \phi_{n,\lambda} \rangle = 0, \quad (3.29)$$

es decir, $\phi_{n,\lambda}$ está uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 2\pi)$.

3.2 Distribución de probabilidad de las variables p y q

En base a la naturaleza que se le asignó al campo de punto cero (generado por un gran número de fuentes independientes) es natural suponer que sus modos están distribuidos normalmente (teorema del límite central). Esto implica que las variables p , q , tienen una distribución normal, de manera que sus distribuciones

de probabilidad son [6] (cap. 4)

$$\begin{aligned} P_q(q_{n,\lambda}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q} \exp\left(\frac{-q_{n,\lambda}^2}{2\sigma_q^2}\right), \\ P_p(p_{n,\lambda}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left(\frac{-p_{n,\lambda}^2}{2\sigma_p^2}\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Entonces la distribución de la energía es [6] (cap. 4)

$$P_{\mathcal{E}_\alpha}(H) = 2\pi P_q(q_{n,\lambda})P_p(p_{n,\lambda}) = \frac{1}{\sigma_q\sigma_p} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{\sigma_q^2} + \frac{p^2}{\sigma_p^2}\right)\right) = \frac{1}{\mathcal{E}_\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2\mathcal{E}_\alpha}(\omega^2 q^2 + p^2)\right) = \frac{1}{\mathcal{E}_\alpha} \exp\left(\frac{-H}{\mathcal{E}_\alpha}\right), \quad (3.31)$$

donde se han usado las ecuaciones (3.22) y (3.23) para las dispersiones de la variables p y q . El factor 2π que multiplica la segunda igualdad se debe a que $P_{\mathcal{E}_\alpha}$ es una distribución marginal, porque p y q están dadas salvo la variable ϕ de la ecuación (3.26).

Ahora bien, en términos de las variables de fase y amplitud, ϕ y r , se tiene que

$$\langle a_{n,\lambda}^{*m} a_{n,\lambda}^n \rangle = \langle r_{n,\lambda}^{n+m} \rangle \langle \exp(i(n-m)\phi_{n,\lambda}) \rangle = \delta_{n,m} \langle r_{n,\lambda}^{2n} \rangle.$$

Dada la función generadora de momentos de la distribución gaussiana, ec. (2.45), se tiene que los momentos pares de la distribución son

$$\langle X^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} (\sigma^2)^n;$$

los momentos impares son todos cero. Entonces

$$\langle q_{n',\lambda}^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} (\sigma_q^2)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle q_{n',\lambda}^2 \rangle^n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \left(\frac{\mathcal{E}_{n'}}{\omega_{n'}^2}\right)^n.$$

Por otra parte,

$$\langle (a_{n',\lambda} + a_{n',\lambda}^*)^{2n} \rangle = \left(\frac{2\omega_{n'}^2}{\mathcal{E}_{n'}}\right)^n \langle q_{n',\lambda}^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{n!}, \quad (3.32)$$

donde se ha usado la ecuación (3.19). Ahora bien, si se desarrolla la potencia en la ecuación (3.32) se obtiene que

$$\langle (a_{n',\lambda} + a_{n',\lambda}^*)^{2n} \rangle = \sum_i \binom{2n}{i} \langle a_{n,\lambda}^{2n-i} a_{n,\lambda}^{*i} \rangle = \binom{2n}{n} \langle a_{n',\lambda}^n a_{n',\lambda}^{*n} \rangle = \frac{(2n)!}{n! n!} \langle a_{n',\lambda}^n a_{n',\lambda}^{*n} \rangle, \quad (3.33)$$

luego

$$\langle a_{n',\lambda}^n a_{n',\lambda}^{*n} \rangle = \langle r_{n',\lambda}^{2n} \rangle = n!. \quad (3.34)$$

Por lo tanto, la variable r no tiene distribución normal. Según [6], todos los momentos de r son diferentes de cero. En particular

$$\langle r_{n,\lambda} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \langle r_{n,\lambda}^2 \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_r^2 = 1 - \frac{2}{\pi}. \quad (3.35)$$

Empleando integración por partes es fácil demostrar la relación

$$\langle H_\alpha^{n+1} \rangle = (n+1)\mathcal{E}_\alpha \langle H_\alpha^n \rangle, \quad (3.36)$$

de donde se sigue que

$$\langle H_\alpha^n \rangle = n! \mathcal{E}_\alpha^n. \quad (3.37)$$

Por lo tanto, la dispersión de la energía de cada modo del cpc es

$$\sigma_E = \mathcal{E}_\alpha^2 = \left(\frac{\hbar\omega_\alpha}{2} \right)^2, \quad (3.38)$$

resultado que difiere del vacío cuántico, pues en el caso cuántico la energía no fluctúa.

Como se menciona en [6], existe otra forma de construir el cpc, que no se usará aquí, que se basa en considerar la variable r como una constante de valor 1 para cualquier (n, λ) . Esto implica que [6] (cap. 4)

$$a_{n,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}}} (\omega q_{n,\lambda} + ip_{n,\lambda}) = \exp(i\phi_{n,\lambda}), \quad (3.39)$$

y que [6] (cap. 4)

$$\langle a_{n,\lambda} a_{n,\lambda}^* \rangle = \langle r_{n,\lambda}^{2n} \rangle = 1. \quad (3.40)$$

En esta representación del cpc, llamada representación de módulo fijo o fase aleatoria, las variables q y p dejan de ser independientes, y la energía de cada modo no presenta fluctuaciones, pues

$$\langle H_\alpha^n \rangle = \mathcal{E}_\alpha^n \langle a_\alpha^n a_\alpha^* \rangle = \mathcal{E}_\alpha^n, \quad (3.41)$$

como sucede con cada modo de energía del campo cuantizado. En el límite continuo, ambas representaciones coinciden; esto se debe a que pasar al límite continuo significa que $V \rightarrow \infty$, y cuando el volumen se hace arbitrariamente grande las fluctuaciones del campo se vuelen despreciables. Una demostración formal de este resultado se puede consultar en [6], sección 4.3.3.

3.3 Comparación con el vacío cuántico

Es claro el paralelismo que existe entre los resultados de este capítulo con los del capítulo 2. En particular, mientras que en la cuantización del campo electromagnético se sustituyeron los números a y a^* por los operadores de creación y aniquilación, en la EDE se hizo el reemplazo de los mismos por las variables aleatorias $\{a, a^*\}$. Como el objetivo general de este trabajo es establecer un contacto entre ambas teorías, se procederá a revisar algunos resultados que ya han sido encontrados en esta dirección.

Nótese que

$$\langle \text{vac} | \hat{a}_{n,\lambda} \hat{a}_{n',\lambda'}^\dagger | \text{vac} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (3.42)$$

mientras que

$$\langle a_{n,\lambda}^* a_{n',\lambda'} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (3.43)$$

Sin embargo, como $\hat{a} |0\rangle = 0$,

$$\langle \text{vac} | \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \hat{a}_{n',\lambda'} | \text{vac} \rangle = 0, \quad \forall n, n', \lambda, \lambda'. \quad (3.44)$$

No obstante el operador simetrizado $\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}$, cumplirá que

$$\langle \text{vac} | \hat{a}_{n,\lambda} \hat{a}_{n',\lambda'}^\dagger + \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger \hat{a}_{n',\lambda'} | \text{vac} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (3.45)$$

siempre.

Por simplicidad, se fijará el modo del campo, de manera que se escribirán a los operadores sin los subíndices n, λ . Los promedios se realizarán entonces sobre el estado $|0\rangle$, en lugar del estado $|\text{vac}\rangle = |0, 0, \dots\rangle$. Esta simplificación no hace perder generalidad.

El paralelismo entre las variables q y p definidas por (3.19) y los operadores \hat{q} y \hat{p} definidas por (2.7) va más allá de la semejanza entre las ecuaciones que lo definen, pues aunque

$$\langle 0 | \hat{q}\hat{p} | 0 \rangle = i\frac{\hbar}{2}, \quad (3.46)$$

se tiene que

$$\langle 0 | \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) | 0 \rangle = 0 = \langle qp \rangle = \langle pq \rangle, \quad (3.47)$$

es decir, los valores esperados de los operadores simetrizados parecen coincidir con los valores esperados de las variables correspondientes en la EDE. Este resultado fue estudiado por Boyer en [1].

Más aún, resulta que

$$\langle 0 | \hat{q}^2 \hat{p}^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{p}^2 \hat{q}^2 | 0 \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}, \quad (3.48)$$

lo cual no tiene sentido físico, mientras que

$$\langle q^2 p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (3.49)$$

Se podría pensar que en estos casos no se cumple que los valores esperados coinciden con el operador simetrizado, pues

$$\langle 0 | \frac{1}{2} (\hat{q}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q}^2) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{-\hbar^2}{2} \right) = -\frac{\hbar^2}{4} \neq \langle q^2 p^2 \rangle. \quad (3.50)$$

Sin embargo, la simetrización total del operador $\hat{q}^2 \hat{p}^2$ es

$$\frac{1}{6} (\hat{q}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q}^2 + \hat{p}\hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}^2\hat{p} + \hat{q}\hat{p}^2\hat{q}). \quad (3.51)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{p}\hat{q}\hat{p}\hat{q} | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{q}\hat{p}\hat{q}\hat{p} | 0 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}, \\ \langle \hat{p}\hat{q}^2\hat{p} \rangle &= \langle \hat{q}\hat{p}^2\hat{q} \rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

entonces

$$\langle 0 | S(\hat{q}^2 \hat{p}^2) | 0 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (3.53)$$

donde $S(\hat{O})$ significa la simetrización total del operador \hat{O} . Se puede apreciar que el valor esperado de un operador no siempre tiene sentido físico, pero el valor esperado de la simetrización del operador sí. Además coincide con el valor esperado de la EDE.

3.3.1 Distribución del campo

Ahora se escribirá en general un modo del campo eléctrico del cpc en la forma

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{E}a + \tilde{E}^* a^*). \quad (3.54)$$

Considérese p y q distribuidas según (3.30), entonces la función generadora de momentos del campo es

$$\begin{aligned} \langle \exp(\beta E) \rangle &= \left\langle \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} (\tilde{E}a + \tilde{E}^* a^*)\right)\right\rangle = \sum_n \frac{\beta^n}{2^{n/2} n!} \langle (\tilde{E}a + \tilde{E}^* a^*)^n \rangle \\ &= \sum_n \frac{\beta^n}{2^{n/2} n!} \sum_k \binom{n}{k} \tilde{E}^{n-k} \tilde{E}^{*k} \langle a^{n-k} a^{*k} \rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nótese que los términos impares se anulan. Por ejemplo, si $n = 3$, la suma sobre las k tendrá los términos $\langle a^3 \rangle, \langle a^2 a^* \rangle, \langle a a^{*2} \rangle, \langle a^{*3} \rangle$; todos iguales a cero. Luego,

$$\begin{aligned} \langle \exp(\beta E) \rangle &= \sum_n \frac{\beta^{2n}}{2^n (2n)!} \sum_k \binom{2n}{k} \tilde{E}^{2n-k} \tilde{E}^{*k} \langle a^{2n-k} a^{*k} \rangle = \sum_n \frac{\beta^{2n}}{2^n (2n)!} \binom{2n}{n} |\tilde{E}|^{2n} n! \\ &= \sum_n \frac{\beta^{2n}}{2^n n!} \sigma^{2n} = \exp\left(\frac{\beta^2 \sigma^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Esta es la función generadora de momentos de una distribución gaussiana, por lo tanto, el campo de punto cero real está distribuido de forma gaussiana, justo como la distribución del campo cuántico cuando el operador de campo se ordenan normalmente (ver. ec. (2.45)). Esto sugiere que los distintos ordenamientos de los operadores corresponden a distintas distribuciones de las variables q y p (es decir distintas distribuciones del campo de punto cero real).

3.3.2 Correlaciones del campo

La correlación del cpc, para el caso del campo eléctrico, su componente i es

$$E_i(\vec{x}, t) = i \sum_{n, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{4\epsilon_0 V}} (\hat{e}_n^\lambda)_i \left(a_{n, \lambda} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x} - i\omega_n t) - a_{n, \lambda}^* \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x} + i\omega_n t) \right). \quad (3.57)$$

La correlación, de dos puntos, del campo eléctrico es,

$$\begin{aligned} \langle E_i(\vec{x}_1, t_1) E_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle &= - \sum_{n_1 \lambda_1} \sum_{n_2 \lambda_2} \frac{\hbar}{4\epsilon_0 V} \sqrt{\omega_{n_1} \omega_{n_2}} \left(\langle a_{n_1 \lambda_1} a_{n_2 \lambda_2} \rangle \exp(i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 - i\omega_{n_1} t_1) \exp(i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 - i\omega_{n_2} t_2) \right. \\ &\quad - \langle a_{n_1 \lambda_1} a_{n_2 \lambda_2}^* \rangle \exp(i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 - i\omega_{n_1} t_1) \exp(-i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 + i\omega_{n_2} t_2) \\ &\quad - \langle a_{n_1 \lambda_1}^* a_{n_2 \lambda_2} \rangle \exp(-i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 + i\omega_{n_1} t_1) \exp(i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 - i\omega_{n_2} t_2) \\ &\quad \left. + \langle a_{n_1 \lambda_1}^* a_{n_2 \lambda_2}^* \rangle \exp(-i\vec{k}_{n_1} \cdot \vec{x}_1 + i\omega_{n_1} t_1) \exp(-i\vec{k}_{n_2} \cdot \vec{x}_2 + i\omega_{n_2} t_2) \right) \\ &= \sum_{\lambda} \sum_n \frac{\hbar \omega}{4\epsilon_0 V} (\hat{e}_n^\lambda)_i (\hat{e}_n^\lambda)_j \left[\exp(i\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega_n(t_1 - t_2)) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-i\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + i\omega_n(t_1 - t_2)) \right] \\ &= \sum_n \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \cos \left[\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega_n(t_1 - t_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Si se comparan con las correlaciones del campo cuántico, ec. (2.59) y ec. (2.60), se puede ver que

$$\langle E_i(\vec{x}_1, t_1) E_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle \neq \langle \text{vac} | \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) | \text{vac} \rangle, \quad (3.59)$$

pero

$$\langle E_i(\vec{x}_1, t_1) E_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle \text{vac} | \frac{1}{2} \left(\hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) + \hat{E}_j(\vec{x}_2, t_2) \hat{E}_i(\vec{x}_1, t_1) \right) | \text{vac} \rangle. \quad (3.60)$$

Las demás correlaciones del campo resultan ser [6] (cap. 4)

$$\langle B_i(\vec{x}_1, t_1) B_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle E_i(\vec{x}_1, t_1) E_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle. \quad (3.61)$$

$$\langle E_i(\vec{x}_1, t_1) B_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2\epsilon_0 V} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{k_l}{k} \epsilon_{ijl} \cos \left[\vec{k}_n \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega_n(t_1 - t_2) \right]. \quad (3.62)$$

En todos estos casos (correlaciones del campo) los valores esperados calculados con la EDE coinciden con los valores esperados de los operadores cuánticos totalmente simetrizados.

3.3.3 Cuadraturas del campo

Un modo del cpc escrito en términos de sus cuadraturas es

$$\begin{aligned}
 E &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left(a \exp\left(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\right) - a^* \exp\left(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\right) \right) \\
 &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\frac{a + a^*}{2\sqrt{2}} \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \frac{a - a^*}{2\sqrt{2}i} \text{cos}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right], \\
 &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[X_1 \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - X_2 \text{cos}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

donde

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (a + a^*), \\
 X_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} (a - a^*);
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

se ha introducido el factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ para que el campo tenga amplitud $2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$. Entonces

$$\langle X_1 \rangle = 0 = \langle X_2 \rangle, \tag{3.65}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
 X_1^2 &= \frac{1}{8} (a^2 + 2aa^* + a^{*2}), \\
 X_2^2 &= -\frac{1}{8} (a^2 - 2aa^* + a^{*2});
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

luego

$$\langle X_1^2 \rangle = \langle X_2^2 \rangle = \frac{1}{4}. \tag{3.67}$$

Por lo tanto,

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle \langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{16}, \tag{3.68}$$

es decir, el promedio de las cuadraturas del campo de punto cero real coinciden con el promedio de las cuadraturas del campo de punto cero cuántico.

Capítulo 4

El estado coherente

En el capítulo 4 se ha hecho notar que el campo eléctrico promediado sobre el estado $|n\rangle$ siempre es cero, sin importar cuán grande sea n . En otras palabras, el estado que contiene un gran número de fotones no se comporta en promedio como una onda electromagnética clásica.

La teoría cuántica de los estados coherentes es ampliamente conocida. Por ejemplo, las expresiones para el estado coherente en términos del estado de número son obtenidas de la misma manera en cualquier texto que los trate. En ese sentido podemos decir que la estructura de este capítulo es la que se sigue en cualquier texto de teoría cuántica, por ejemplo [10, 7, 11, 12]. No obstante, la forma en que empleamos aquí al operador de desplazamiento, nos ha permitido entender qué representa físicamente el estado coherente.

Los estados coherentes se definen de tal forma que el campo promedio sea una función continua, semejante a un campo clásico. $|\alpha\rangle$ se dice que es un estado coherente si [10] (sec. 3.1)

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

o bien

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|.$$

Cualquier operador de la forma $\hat{G} = A\hat{a} + A^*\hat{a}^\dagger$ promediará a

$$\langle\alpha|\hat{G}|\alpha\rangle = \langle\alpha|A\hat{a} + A^*\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha A + \alpha^* A^*.$$

En particular, un modo del campo eléctrico cuantizado (con polarización \hat{e}_λ)

$$\hat{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_\lambda \left(\hat{a} \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right) - \hat{a}^\dagger \exp\left(-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right) \right),$$

tendrá el valor esperado

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_\lambda \left(\alpha \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right) - \alpha^* \exp\left(-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right) \right) \\ &= 2\hat{e}_\lambda |\alpha| \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} - \theta\right), \quad \alpha = |\alpha| \exp(i\theta), \end{aligned} \quad (4.2)$$

de donde queda claro que el campo promedio es una onda plana electromagnética, solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. La energía de esta onda es $\mathcal{E} = \hbar\omega\alpha\alpha^*$ (ver capítulo 1). Así, el módulo de α da la energía de esta onda y su fase (como número complejo) da la fase del campo. ¿Cuáles son las diferencias del estado coherente con una onda electromagnética? Una es que el campo fluctúa, pues

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left(1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^2 \exp\left(2i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right) - \hat{a}^{\dagger 2} \exp\left(-2i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right) \right) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[1 + 4|\alpha|^2 \sin^2\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} - \theta\right) \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

por lo tanto

$$\langle \alpha | (\Delta \hat{E})^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{E}_x^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{E}_x | \alpha \rangle^2 = \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}. \quad (4.4)$$

Nótese que la dispersión del campo es igual a la dispersión del vacío. Como las fluctuaciones del vacío no pueden ser eliminadas, el estado coherente es el sistema más simple que se puede crear con un campo electromagnético.

¿Qué pasa con la energía?

$$\langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle = \hbar \omega \left(\langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle + \frac{1}{2} \right) = \hbar \omega \alpha \alpha^* + \frac{1}{2} \hbar \omega, \quad (4.5)$$

es decir, es la energía de la onda electromagnética clásica más la energía de punto cero. Para llegar al resultado anterior se ha usado una propiedad de los estados coherentes que se verá más adelante, que éstos están normalizados. Es de esperarse que la energía del campo también fluctúe. En efecto,

$$\langle \alpha | \hat{H}^2 | \alpha \rangle = \hbar^2 \omega^2 \left(\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{4} \right) = \hbar^2 \omega^2 \left(\alpha^{*2} \alpha^2 + 2\alpha \alpha^* + \frac{1}{4} \right), \quad (4.6)$$

luego

$$\langle \alpha | (\Delta \hat{H})^2 | \alpha \rangle = \hbar^2 \omega^2 \alpha^* \alpha. \quad (4.7)$$

Si se calcula el valor esperado del operador de número se obtiene [10] (sec. 3.1),

$$\bar{n} = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha = |\alpha|^2.$$

En consecuencia, (4.5) da la energía en términos del número medio de fotones asociados a la onda plana que se ha superpuesto al vacío, donde se entenderá por fotón como una cantidad de energía múltiplo entero de $\hbar \omega$. Ya que la energía presenta fluctuaciones, el operador de número también debe presentarlas. En efecto,

$$\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha^{*2} \alpha^2 + \alpha^* \alpha = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad (4.8)$$

entonces [10] (sec. 3.1)

$$\sqrt{\langle \alpha | (\Delta \hat{n})^2 | \alpha \rangle} = \sqrt{\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle^2} = \bar{n}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.9)$$

que es una propiedad característica de una distribución de Poisson. Más adelante se verá, y se discutirá, que el estado de número tiene una distribución de Poisson en los estados coherentes.

Para terminar esta sección se calculará la dispersión de las cuadraturas del campo. Primero,

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{X}_1 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \hat{X}_2 | \alpha \rangle = 0, \\ \langle \alpha | \hat{X}_1^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \hat{X}_2^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

luego,

$$\langle \alpha | (\Delta \hat{X}_1)^2 | \alpha \rangle \langle \alpha | (\Delta \hat{X}_2)^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{16}. \quad (4.11)$$

Por lo tanto el campo posee la mínima dispersión posible, ya que satisface la igualdad de la relación de Heisenberg. En realidad eso ya se sabía, pues la dispersión del campo se debe únicamente a las fluctuaciones del vacío. Lo que se verá en la siguiente sección es que esta característica define completamente a un estado coherente.

4.1 Estados de mínima dispersión

Para comenzar esta sección se deducirá la relación de Heisenberg para dos operadores \hat{A} y \hat{B} hermitianos con conmutador $i\hat{C}$ (esta sección está basada en [11], cap. 8, sec. 8.6).

Sean $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle A \rangle$, $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$, entonces

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}. \quad (4.12)$$

El resultado es muy sencillo,

$$\begin{aligned} [\hat{A} - \langle A \rangle, \hat{B} - \langle B \rangle] &= [\hat{A}, \hat{B} - \langle B \rangle] - [\langle A \rangle, \hat{B} - \langle B \rangle] \\ &= [\hat{A}, \hat{B}] - [\hat{A}, \langle B \rangle] - [\langle A \rangle, \hat{B}] + [\langle A \rangle, \langle B \rangle] \\ &= [\hat{A}, \hat{B}]. \end{aligned}$$

Por otra parte, la función $J(\alpha)$ definida como

$$J(\lambda) = \left\langle (\lambda\hat{A} + i\hat{B})^\dagger (\lambda\hat{A} + i\hat{B}) \right\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

es no negativa, $J(\alpha) \geq 0$ siempre, pues para cualquier operador \hat{O} ,

$$\langle \psi | \hat{O}^\dagger \hat{O} | \psi \rangle = \langle \hat{O}\psi | \hat{O}\psi \rangle = \|\hat{O}\psi\|^2 \geq 0. \quad (4.14)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} J(\lambda) &= \left\langle (\lambda\hat{A} - i\hat{B}) (\lambda\hat{A} + i\hat{B}) \right\rangle \\ &= \left\langle \lambda^2 \hat{A}^2 + \lambda i [\hat{A}, \hat{B}] + \hat{B}^2 \right\rangle \\ &= \lambda^2 \langle \hat{A}^2 \rangle - \lambda \langle \hat{C} \rangle + \langle \hat{B}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Derivando con respecto a λ e igualando a cero se obtiene que $J(\lambda)$ es mínima cuando

$$\lambda = \frac{\langle \hat{C} \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle}. \quad (4.16)$$

En ese caso,

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{4\langle \hat{A}^2 \rangle^2} \langle \hat{A}^2 \rangle - \frac{\langle \hat{C} \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle} + \langle \hat{B}^2 \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\langle \hat{C} \rangle^2}{\langle \hat{A}^2 \rangle} + \langle \hat{B}^2 \rangle \geq 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

de donde se sigue que

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2, \quad (4.18)$$

o bien

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2, \quad (4.19)$$

que no es más que la relación de Heisenberg para los operadores \hat{A} y \hat{B} .

Ahora bien, un paquete de mínima dispersión es aquel que cumple la igualdad en la ecuación anterior,

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle^2. \quad (4.20)$$

En esos casos $J_{\min} = 0$, es decir

$$\left\langle \left(\frac{\langle C \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle} \hat{A} - i\hat{B} \right) \left(\frac{\langle C \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle} \hat{A} - i\hat{B} \right)^\dagger \right\rangle = 0,$$

o bien

$$\left\| \left(\frac{\langle C \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle} \hat{A} - i\hat{B} \right) \psi \right\|^2 = 0, \quad (4.21)$$

es decir

$$\frac{\langle \hat{C} \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle} \hat{A} + i\hat{B} = 0, \quad (4.22)$$

pues el único operador que al aplicarlo a un ket arbitrario se obtiene un ket de módulo cero es el operador cero. El valor esperado del operador anterior claramente es cero,

$$\frac{\langle \hat{C} \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle} \langle \hat{A} \rangle + i\langle \hat{B} \rangle = 0, \quad (4.23)$$

por lo tanto se puede escribir,

$$\left(\frac{\langle \hat{C} \rangle}{2\langle \hat{A}^2 \rangle} \Delta\hat{A} + i\Delta\hat{B} \right) |\psi\rangle = 0. \quad (4.24)$$

Considérese aquellos paquetes de mínima dispersión que satisfacen

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle = \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle. \quad (4.25)$$

En estos casos la ecuación (4.24) se reescribe como

$$(\hat{A} + i\hat{B}) |\psi\rangle = (\langle \hat{A} \rangle + i\langle \hat{B} \rangle) |\psi\rangle, \quad (4.26)$$

que es equivalente a la ecuación (4.1). Para verlo de manera más clara se renombrará $\hat{A} = \hat{X}_1$ y $\hat{B} = \hat{X}_2$, entonces

$$(\hat{X}_1 + i\hat{X}_2) |\psi\rangle = (\langle \hat{X}_1 \rangle + i\langle \hat{X}_2 \rangle) |\psi\rangle, \quad (4.27)$$

definiendo $\hat{a} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2$, $\alpha = \langle \hat{X}_1 \rangle + i\langle \hat{X}_2 \rangle$, $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$ se obtiene

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (4.28)$$

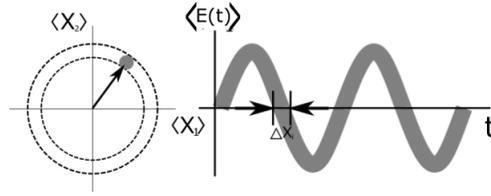


Fig. 4.1: Representación gráfica del estado coherente. Se aprecia como una onda clásica con grosor. El grosor es debido a las fluctuaciones del vacío.

Más aún, ya que

$$\hat{a}^\dagger = \hat{X}_1 - i\hat{X}_2, \quad (4.29)$$

porque se consideró \hat{A} y \hat{B} hermitianos desde el principio, entonces

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ X_2 &= \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (4.30)$$

de donde es claro que \hat{X}_1 y \hat{X}_2 son los operadores de cuadratura. Con esto queda demostrado que los estados coherentes son paquetes de mínima dispersión en el caso particular cuando las cuadraturas del campo tienen la misma dispersión.

Los operadores de cuadratura permiten hacer una representación temporal del campo coherente. En la figura 4.1 se aprecia que el campo promedio es semejante a la onda plana E_α , pero con un grosor que representa las fluctuaciones del vacío.

4.2 Representación de número del estado coherente

Como los estados de número $\{|n\rangle\}$, forman una base ortonormal del espacio de Hilbert, se puede expresar al estado coherente en términos de esta base, es decir [10] (sec. 3.1)

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (4.31)$$

Para determinar el valor de C_n se puede hacer lo siguiente,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha C_n |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha C_{n-1} |n-1\rangle. \quad (4.32)$$

Luego,

$$C_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1} \Rightarrow C_n = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \quad (4.33)$$

Por lo tanto

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.34)$$

Normalizando el estado $|\alpha\rangle$ se puede conocer el valor de C_0 ,

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = |C_0|^2 \sum_{n,m} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle n | m \rangle = |C_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^2}{n!} = |C_0|^2 \exp(|\alpha|^2) = 1, \quad (4.35)$$

es decir, $C_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)$. Finalmente el estado coherente se puede escribir como [10] (sec. 3.1)

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.36)$$

El estado coherente mismo es una base del espacio de Hilbert, pues satisface la relación de completez [10] (sec. 3.5)

$$\int |\alpha\rangle \langle\alpha| \frac{d\alpha^2}{\pi} = 1. \quad (4.37)$$

La demostración es sencilla

$$\int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha = \int \exp\left(-|\alpha|^2\right) \sum_{m,n} \frac{\alpha^m \alpha^{*n}}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle \langle n| d^2\alpha = \sum_{m,n} \frac{|m\rangle \langle n|}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle \langle n| \int \exp\left(-|\alpha|^2\right) \alpha^m \alpha^{*n} d^2\alpha. \quad (4.38)$$

Sea $\alpha = r \exp(i\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d^2\alpha &= \sum_{m,n} \frac{|m\rangle \langle n|}{\sqrt{m!n!}} |m\rangle \langle n| \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r^{m+n} \exp(i(m-n)\theta) r dr d\theta \\ &= 2\pi \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty \exp(-r^2) r^{2n+1} dr = \pi \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \Gamma(n+1) = \pi \sum_n |n\rangle \langle n| = \pi, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde se ha usado que $\int_0^{2\pi} \exp(i(m-n)\theta) = 2\pi\delta_{mn}$.

Por lo tanto, cualquier vector del espacio de Hilbert de un modo del campo cuantizado puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle \quad (4.40)$$

No obstante la base no es ortogonal. Sean $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ dos estados coherentes, entonces

$$\begin{aligned} \langle\beta|\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 + |\beta|^2\right]\right) \sum_{m,n} \frac{\beta^{*m} \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 + |\beta|^2\right]\right) \sum_n \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 + |\beta|^2\right] - 2\beta^* \alpha\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^* \beta)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2\right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

entonces [10] (sec. 3.5)

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp\left(-|\beta - \alpha|^2\right) \neq 0. \quad (4.42)$$

Con la teoría desarrollada hasta el momento es posible demostrar que el estado $|n\rangle$ se distribuye de manera Poissoniana en el estado $|\alpha\rangle$. Sin embargo, antes de obtener ese resultado se analizará otra definición, equivalente a las dos anteriores, de los estados coherentes, que permitirá entender qué significa que los fotones estén distribuidos de manera Poissoniana en un haz coherente.

4.3 El vacío desplazado

Los estado coherentes también pueden definirse como el resultado de aplicar el operador $\hat{D}(\alpha)$, definido abajo, al estado de vacío cuántico [10] (sec. 3.2),

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad (4.43)$$

Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff el operador $\hat{D}(\alpha)$ se puede escribir de la forma [10] (sec. 3.2)

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha\hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^*\hat{a}), \quad (4.44)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} \sum_m \frac{\alpha^{*m}}{m!} \hat{a}^m |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= |\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Intercambiando el orden de los operadores en la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff se obtiene la siguiente representación del operador \hat{D} ,

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(-\alpha^*\hat{a}) \exp(\alpha\hat{a}^\dagger), \quad (4.46)$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_m \frac{(-\alpha^*)^m}{m!} \hat{a}^m \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_m \frac{(-\alpha^*)^m}{m!} \hat{a}^m \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!} |n\rangle \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{m,n} \frac{(-\alpha^*)^m \alpha^n}{m! \sqrt{n!}} \hat{a}^m |n\rangle \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{m < n} \sum_n \frac{(-\alpha^*)^m \alpha^n}{m! \sqrt{n!}} \sqrt{n(n-1)\cdots(n-m)} |n-m\rangle \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{m < n} \sum_n \frac{(-\alpha^*)^m \alpha^n}{(m!)^{3/2}} |n-m\rangle, \end{aligned} \quad (4.47)$$

esto no parece un estado coherente. Sin embargo, $D(\alpha)|0\rangle$ es un eigenestado del operador de aniquilación,

$$\hat{a}D(\alpha)|0\rangle = \sum_{m < n} \sum_n \frac{(-\alpha^*)^m \alpha^n}{(m!)^{3/2}} |n-m-1\rangle = \alpha \sum_{m < n'} \sum_{n'} \frac{(-\alpha^*)^m \alpha^{n'}}{(m!)^{3/2}} |n'-m\rangle = \alpha \hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (4.48)$$

Por lo tanto, $\hat{D}(\alpha)$, definido en (4.43), genera un estado coherente sin importar su ordenamiento.

El operador $\hat{D}(\alpha)$ es unitario. Si se calcula el adjunto de este operador usando la primer representación se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) &= \left(\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha\hat{a}^\dagger) \exp(-\alpha^*\hat{a}) \right)^\dagger \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) (\exp(-\alpha^*\hat{a}))^\dagger (\exp(\alpha\hat{a}^\dagger))^\dagger \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(-\alpha\hat{a}^\dagger) \exp(\alpha^*\hat{a}), \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde se ha usado que

$$(\exp(\alpha \hat{a}^\dagger))^\dagger = \sum_n \left(\frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} \right)^\dagger = \sum_n \frac{\alpha^{*n}}{n!} \hat{a}^n = \exp(\alpha^* \hat{a}), \quad (4.50)$$

como si \dagger se aplicara al exponente; lo mismo vale para $(\exp(-\alpha^* \hat{a}))^\dagger$. Entonces

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) \exp\left(\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) \exp(-\alpha \hat{a}^\dagger) \exp(\alpha^* \hat{a}) \exp(-\alpha^* \hat{a}) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) = 1, \quad (4.51)$$

donde se ha usado dos veces la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. De manera análoga se cumple que

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) = 1, \quad (4.52)$$

por lo tanto $\hat{D}(\alpha)$ es unitario.

Al operador $\hat{D}(\alpha)$ se le llama operador de desplazamiento porque transforma a los operadores de creación y aniquilación en los mismos operadores desplazados. Si se escribe

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \alpha^* \hat{a}\right) \equiv \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) F_0(\hat{a}), \quad (4.53)$$

entonces

$$\hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} \exp(\alpha \hat{a}^\dagger) F_0(\hat{a}) = \hat{a} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n} F_0(\hat{a}), \quad (4.54)$$

tomando en cuenta que $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger n}] = n \hat{a}^{\dagger(n-1)} + \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} [n \hat{a}^{\dagger(n-1)} + \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}] F_0(\hat{a}) \\ &= \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} [n \hat{a}^{\dagger(n-1)} F_0(\hat{a}) + \hat{a}^{\dagger n} F_0(\hat{a}) \hat{a}] \\ &= \alpha \sum_{n'} \frac{\alpha^{n'}}{n'!} F_0(\hat{a}) + \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} F_0(\hat{a}) \hat{a} \\ &= \alpha \hat{D}(\alpha) + \hat{D}(\alpha) \hat{a} \\ &= \hat{D}(\alpha) [\hat{a} + \alpha]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Por lo tanto

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha. \quad (4.56)$$

De manera análoga se demuestra que

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \quad (4.57)$$

es decir, el operador $\hat{D}(\alpha)$ desplaza la cantidad α a los operadores de creación y aniquilación.

4.3.1 Campo desplazado

Es importante conocer cómo transforma el operador de desplazamiento al operador de campo eléctrico,

$$\begin{aligned}
D^{-1}(\alpha)\hat{E}(\vec{x},t)D(\alpha) &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0V}} \left[D^{-1}(\alpha)\hat{a}D(\alpha) \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) - D^{-1}(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha) \exp\left(-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) \right] \\
&= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0V}} \left[\hat{a} \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) - \hat{a}^\dagger \exp\left(-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) \right] \\
&\quad + i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0V}} \left[\alpha \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) - \alpha^* \exp\left(-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) \right] \\
&= \hat{E}(\vec{x},t) + E_\alpha(\vec{x},t),
\end{aligned} \tag{4.58}$$

donde

$$E_\alpha(\vec{x},t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0V}} \left[\alpha \exp\left(i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) - \alpha^* \exp\left(-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)\right) \right], \tag{4.59}$$

es la onda electromagnética clásica, un modo solución de las ecuaciones de Maxwell, de energía $\hbar\omega\alpha\alpha^*$, que habíamos identificado anteriormente y que era el campo promedio, sobre el estado $|\alpha\rangle$, del operador de campo eléctrico. El operador de desplazamiento bien podría llamarse operador de creación clásico, porque “crea” fotones como una ondas planas de energía $\hbar\omega$.

Ahora queda claro por qué el estado coherente promedia a una onda plana, pues el operador de desplazamiento ha sumado una onda plana al operador de campo eléctrico. Al promediar sobre el vacío, el operador de campo se anula y nos quedamos con la onda E_α . Incluso queda muy claro por qué el estado coherente tiene las fluctuaciones del vacío; porque el campo E_α es una constante y el operador de campo promedia a cero.

$$\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{E} + E_\alpha|0\rangle = E_\alpha. \tag{4.60}$$

$$\langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{E}^2 + 2\hat{E} + E_\alpha^2|0\rangle = \langle 0|\hat{E}^2|0\rangle + E_\alpha^2, \tag{4.61}$$

luego,

$$\langle\alpha|(\Delta\hat{E})^2|\alpha\rangle = \langle 0|(\Delta(\hat{E} + E_\alpha))^2|0\rangle = \langle 0|\hat{E}^2|0\rangle + E_\alpha^2 - E_\alpha^2 = \langle 0|\hat{E}^2|0\rangle, \tag{4.62}$$

donde \hat{E} es el operador de campo eléctrico. En conclusión el operador de desplazamiento superpone una onda plana al vacío cuántico.

Esta es una propiedad muy importante del operador de desplazamiento, porque a través de la onda electromagnética clásica podemos obtener información de lo que está sucediendo físicamente en el laboratorio. En este caso, podemos decir que sólo se ha agregado una onda plana, y el sistema en sí no ha sido alterado.

Se demostrará cómo se transforma \hat{a}^n bajo $\hat{D}(\alpha)$. Primero, a partir de $\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}D(\alpha) = \hat{a} + \alpha$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\hat{a}\hat{D}(\alpha) &= \hat{D}(\alpha)\hat{a} + \alpha\hat{D}(\alpha) \\
\Leftrightarrow \hat{a}^2\hat{D}(\alpha) &= \hat{a}\hat{D}(\alpha)\hat{a} + \alpha\hat{a}\hat{D}(\alpha) \\
\Leftrightarrow \hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^2\hat{D}(\alpha) &= \hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)\hat{a} + \alpha\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) \\
&= (\hat{a} + \alpha)\hat{a} + \alpha(\hat{a} + \alpha) \\
&= \hat{a}^2 + 2\alpha\hat{a} + \alpha^2 = (\hat{a} + \alpha)^2.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Haciendo lo mismo se puede ver que $\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^3\hat{D}(\alpha) = (\hat{a} + \alpha)^3$. Si se supone que $\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^n\hat{D}(\alpha) = (\hat{a} + \alpha)^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{a}^n\hat{D}(\alpha) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \hat{a}^{n-k} \alpha^k \\
\Leftrightarrow \hat{a}^{n+1}\hat{D}(\alpha) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \hat{a}\hat{D}(\alpha)\hat{a}^{n-k} \\
\Leftrightarrow \hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^{n+1}\hat{D}(\alpha) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)\hat{a}^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \hat{a}^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{k+1} \hat{a}^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} \hat{a}^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \alpha^k \hat{a}^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{k+1} \hat{a}^{n-k} + \binom{n}{n} \alpha^{n+1}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Recorriendo todos los índices del tercer término del lado derecho, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{k+1} \hat{a}^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \alpha^k \hat{a}^{n+1-k}, \tag{4.65}$$

y usando la identidad

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \tag{4.66}$$

se obtiene que

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^{n+1}\hat{D}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \hat{a}^{n+1-k} \alpha^k = (\hat{a} + \alpha)^{n+1}. \tag{4.67}$$

Por lo tanto

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^n\hat{D}(\alpha) = (\hat{a} + \alpha)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.68}$$

Tomando el adjunto de toda la igualdad se sigue una identidad semejante para el operador de creación,

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^{\dagger n}\hat{D}(\alpha) = (\hat{a}^{\dagger} + \alpha^*)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.69}$$

Siguiendo la misma idea es sencillo demostrar que

$$\begin{aligned}
\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^m\hat{D}(\alpha) &= (\hat{a}^{\dagger} + \alpha^*)^n (\hat{a} + \alpha)^m \\
\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger n}\hat{D}(\alpha) &= (\hat{a} + \alpha)^m (\hat{a}^{\dagger} + \alpha^*)^n.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

El objetivo de obtener las fórmulas anteriores es para destacar la importancia de aplicar el operador de desplazamiento una vez que el campo ha sido transformado bajo otra transformación. Por ejemplo, considérese el caso en que \hat{F} es un operador que transforma a los operadores de creación y aniquilación de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\hat{F}^{-1}\hat{a}\hat{F} &= \lambda_1\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^m \\
\hat{F}^{-1}\hat{a}^{\dagger}\hat{F} &= \lambda_2\hat{a}^{\dagger k}\hat{a}^l
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Al escribir el operador de campo eléctrico de la siguiente forma,

$$\hat{E} = \tilde{E}\hat{a} + \tilde{E}^*\hat{a}^{\dagger}, \tag{4.72}$$

y aplicar el operador de desplazamiento al campo se obtiene

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{E}\hat{D}(\alpha) = \hat{E} + \tilde{E}\alpha + \tilde{E}^*\alpha^*, \quad (4.73)$$

donde $E_\alpha = \tilde{E}\alpha + \tilde{E}^*\alpha^*$ es la onda plana identificada anteriormente, ec. (4.2). Por otra parte, bajo \hat{F} el campo se transforma en

$$\hat{F}^{-1}\hat{E}\hat{F} = \lambda_1\tilde{E}\hat{a}^\dagger{}^n\hat{a}^m + \lambda_2\tilde{E}^*\hat{a}^\dagger{}^k\hat{a}^l. \quad (4.74)$$

Entender lo que sucede físicamente con el campo es difícil; sin embargo al aplicarle el operador de desplazamiento se puede extraer esa información

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{F}^{-1}\hat{E}\hat{F}\hat{D}(\alpha) &= \lambda_1\tilde{E}(\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^n(\hat{a} + \alpha)^m + \lambda_2\tilde{E}^*(\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^k(\hat{a} + \alpha)^l \\ &= \lambda_1\tilde{E}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\alpha^j\alpha^{*i}\hat{a}^{\dagger n-i}\hat{a}^{m-j} \\ &\quad + \lambda_2\tilde{E}^*\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{l-1}\binom{k}{i}\binom{l}{j}\alpha^j\alpha^{*i}\hat{a}^{\dagger k-i}\hat{a}^{l-j} + \lambda_1\tilde{E}\alpha^{*n}\alpha^m + \lambda_2\tilde{E}^*\alpha^{*k}\alpha^l, \end{aligned} \quad (4.75)$$

es decir, la onda plana E_α se ha transformado en otra onda de amplitud diferente,

$$\tilde{E}\alpha + \tilde{E}^*\alpha^* \xrightarrow{\hat{F}} \lambda_1\tilde{E}\alpha^{*n}\alpha^m + \lambda_2\tilde{E}^*\alpha^{*k}\alpha^l. \quad (4.76)$$

Aunque aún difícil, es factible entender lo que le sucede a una onda clásica.

4.3.2 La distribución Poissoniana de $|n\rangle$ en $|\alpha\rangle$

Los resultados de la sección 4.2 permiten conocer la probabilidad de que el estado $|n\rangle$ esté contenido en el estado $|\alpha\rangle$ [10] (sec. 3.1),

$$\langle n|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}}\langle n|m\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}}\delta_{nm} = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.77)$$

Por lo tanto, la distribución del estado $|n\rangle$ en $|\alpha\rangle$ es [10] (sec. 3.1)

$$P(n) \equiv |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha|^2\right)\frac{\left(|\alpha|^2\right)^n}{n!}. \quad (4.78)$$

Ya que $\bar{n} = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$, entonces [10] (sec. 3.1)

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!}\exp(-\bar{n}). \quad (4.79)$$

Esta es la distribución de Poisson anunciada anteriormente. En óptica cuántica el resultado se interpreta como que en un haz coherente los fotones están distribuidos espacialmente de manera Poissoniana. Por ejemplo, M. Fox incluye en su libro [12] una imagen parecida a la que se muestra en figura 4.2, para hacer una representación de un haz coherente. En la imagen se representa un haz de cierta potencia que contiene 4 fotones (bolitas negras) distribuidos al azar sobre una distancia d del haz. Considérese un intervalo de tiempo Δt tal que la luz en ese tiempo recorre una distancia d . Entonces si el haz de la figura 4.2 se hace incidir sobre una placa fotodetectora, en el intervalo de tiempo Δt se detectarán 4 fotones. Haciendo lo mismo un gran número de veces se puede obtener el conteo [12]

1, 6, 3, 1, 2, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 1, 3, 6, 5, 0, 4, 1, 1, 6, 2, 2, 6, 4, 1, 4, 3, 4, 6,

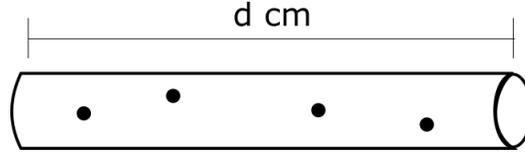


Fig. 4.2: Imagen con la que se suele representar un haz coherente. La potencia en este caso no se especifica, pero se da a entender que en una distancia d el haz contiene n fotones distribuidos de manera aleatoria.

que corresponde a una distribución de Poisson de media 3.16 y desviación estándar 1.81. Es decir, un estado coherente de $|\alpha|^2 = 3$.

La pregunta que sería apropiado responder es ¿la estadística poissoniana está definida por cómo está distribuida la energía en el haz de luz o por el proceso de detección de éste? El operador de desplazamiento puede ser útil para responder esta pregunta. Recuérdese que el operador de campo eléctrico se transforma bajo $\hat{D}(\alpha)$ como él mismo más la onda E_α superpuesta. Es claro que la energía de E_α no fluctúa, y si se recuerda del capítulo 2, la energía del vacío cuántico tampoco fluctúa. ¿Por qué fluctúa entonces la energía de la suma? Se puede transformar al operador hamiltoniano; para ello vamos a usar la fórmula (4.70) con $m = n = 1$, para ver como transforma $\hat{D}(\alpha)$ al operador de número,

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{D}(\alpha) = (\hat{a}^\dagger + \alpha^*)(\hat{a} + \alpha) = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \alpha\hat{a}^\dagger + \alpha^*\hat{a} + \alpha^*\alpha, \quad (4.80)$$

entonces

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{H}\hat{D}(\alpha) = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \alpha\hat{a}^\dagger + \alpha^*\hat{a} + \alpha^*\alpha + \frac{1}{2} \right), \quad (4.81)$$

de donde queda claro que el hamiltoniano ya no está en su representación diagonal (matemáticamente por eso presenta fluctuaciones); y únicamente se debe a que el operador de número ya no está en su representación diagonal. Por lo tanto las fluctuaciones de la energía, y la distribución poissoniana, se deben a la preparación del sistema, es decir, al conjunto de dispositivos que sean empleados para generar el estado coherente. De alguna manera, arreglos distintos pueden modificar las propiedades locales del vacío de distinta forma.

4.4 Distribución del campo coherente

En esta sección se calculará la distribución del campo coherente, de manera semejante a como se hizo para el caso del campo de punto cero cuántico, es decir, a través de su función generadora de momentos. Los resultados obtenidos aquí servirán para compararlos con resultados que se obtienen en el capítulo 5.

Primero se escribirá el campo de la siguiente forma

$$\hat{E} = \left[\left(i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \exp\left((\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t - \theta)\right) \right) \hat{a} + \left(i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \exp\left((\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t - \theta)\right) \right)^* \hat{a}^\dagger \right] = \left(\tilde{E}\hat{a} + \tilde{E}^*\hat{a}^\dagger \right), \quad (4.82)$$

donde $\tilde{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \exp\left((\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t - \theta)\right)$. Entonces la función generadora de momentos está dada por

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \exp(\beta E) | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \exp\left(\beta \left(\tilde{E}\hat{a} + \tilde{E}^*\hat{a}^\dagger \right)\right) | \alpha \rangle \\ &= \exp\left(\beta \left(\tilde{E}\alpha + \tilde{E}^*\alpha^* \right) + \frac{1}{2}\beta^2\sigma^2\right), \end{aligned} \quad (4.83)$$

donde se ha usado fórmula de Baker-Campbell-Housdorff y el hecho que

$$\begin{aligned}\exp\left(\beta\tilde{E}\hat{a}\right)|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n \tilde{E}^n}{n!} \hat{a}^n |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n \tilde{E}^n}{n!} \alpha^n |\alpha\rangle = \exp\left(\beta\tilde{E}\alpha\right)|\alpha\rangle, \\ \langle\alpha|\exp\left(\beta\tilde{E}^*\hat{a}^\dagger\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle\alpha|\hat{a}^{\dagger n} \frac{\beta^n \tilde{E}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\alpha|\frac{\beta^n \tilde{E}^{*n}}{n!} \alpha^{*n} = \langle\alpha|\exp\left(\beta\tilde{E}^*\alpha^*\right).\end{aligned}$$

La función generadora de momentos corresponde a una distribución gaussiana desplazada; resultado obvio si recordamos que el estado coherente es el vacío desplazado. Al igual que en el caso del vacío cuántico, el resultado dependió del ordenamiento normal de los operadores. Otro ordenamiento genera otro resultado.

4.5 Correlaciones del campo

4.5.1 Correlación de primer orden

Ahora se calculará la correlación de primer orden, de dos puntos, del campo. Como en la sección anterior, los resultados aquí obtenidos servirán para compararlos con los de capítulos posteriores.

$$\begin{aligned}\langle\alpha|E(\vec{x}_1, t_1)\vec{E}(\vec{x}_2, t_2)|\alpha\rangle &= -\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \langle\alpha|\left(\hat{a}\exp\left(i\vec{K}\cdot\vec{X}_1\right) - \hat{a}^\dagger\exp\left(-i\vec{K}\cdot\vec{X}_1\right)\right) \\ &\quad \times \left(\hat{a}\exp\left(i\vec{K}\cdot\vec{X}_2\right) - \hat{a}^\dagger\exp\left(-i\vec{K}\cdot\vec{X}_2\right)\right)|\alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[2\alpha^*\alpha\cos\left(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)\right) + \exp\left(i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)\right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2\exp\left(i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)\right) - \alpha^{*2}\exp\left(-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + i\omega(t_1 - t_2)\right)\right],\end{aligned}\tag{4.84}$$

donde $\vec{K}\cdot\vec{X}_i = \vec{k}\cdot\vec{x}_i - \omega t_i$.

Como los operadores no conmutan se puede calcular su simétrico,

$$\begin{aligned}\langle\alpha|E(\vec{x}_2, t_2)\vec{E}(\vec{x}_1, t_1)|\alpha\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[2\alpha^*\alpha\cos\left(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)\right) + \exp\left(-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)\right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2\exp\left(i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)\right) - \alpha^{*2}\exp\left(-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + i\omega(t_1 - t_2)\right)\right].\end{aligned}\tag{4.85}$$

Nótese que (4.84) y (4.85) sólo difieren en que el término $\exp\left(i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)\right)$ de la primera ecuación cambia de signo (en el exponente) en la segunda, $\exp\left(-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + i\omega(t_1 - t_2)\right)$. Cuando se simetriza al operador, ambos términos conducirán a $\cos\left(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)\right)$, de manera que la simetrización del operador será

$$\begin{aligned}\langle\alpha|S\left(E(\vec{x}_2, t_2)\vec{E}(\vec{x}_1, t_1)\right)|\alpha\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[(1 + 2\alpha\alpha^*)\cos\left(\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)\right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2\exp\left(i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)\right) - \alpha^{*2}\exp\left(-i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + i\omega(t_1 - t_2)\right)\right].\end{aligned}\tag{4.86}$$

4.5.2 Correlación de segundo orden

La correlación de segundo orden se define como

$$\langle\alpha|E(\vec{x}_1, t_1)E(\vec{x}_1, t_1)E(\vec{x}_2, t_2)E(\vec{x}_2, t_2)|\alpha\rangle.$$

El cálculo de esta correlación es un poco engorroso. Más aún, necesitamos el valor esperado de la simetrización del operador, para compararlo posteriormete; lo cual vuelve más engorroso el cálculo.

La simetrización total del operador $\hat{E}(\vec{x}_1, t_1)\hat{E}(\vec{x}_1, t_1)\hat{E}(\vec{x}_2, t_2)\hat{E}(\vec{x}_2, t_2)$ es

$$\frac{1}{6} (E_1 E_1 E_2 E_2 + E_2 E_2 E_1 E_1 + E_1 E_2 E_1 E_2 + E_2 E_1 E_2 E_1 + E_1 E_2 E_2 E_1 + E_2 E_1 E_1 E_2), \quad (4.87)$$

donde $E_i = \hat{E}(\vec{x}_i, t_i)$.

Ahora bien, el valor esperado del operador $E_i E_j E_k E_l$ es

$$\begin{aligned} & \langle \alpha | \left(\hat{a} e^{i\theta_j} - \hat{a}^\dagger e^{-i\theta_j} \right) \left(\hat{a} e^{i\theta_k} - \hat{a}^\dagger e^{-i\theta_k} \right) \left(\hat{a} e^{i\theta_l} - \hat{a}^\dagger e^{-i\theta_l} \right) \left(\hat{a} e^{i\theta_n} - \hat{a}^\dagger e^{-i\theta_n} \right) | \alpha \rangle \\ &= \alpha^2 e^{i(\theta_j + \theta_k + \theta_l + \theta_n)} - (3\alpha^2 + \alpha^* \alpha^3) e^{i(\theta_j + \theta_k + \theta_l - \theta_n)} - (2\alpha^2 + \alpha^* \alpha^3) e^{i(\theta_j + \theta_k - \theta_l + \theta_n)} \\ &+ (\alpha^{*2} \alpha^2 + 4\alpha^* \alpha + 2) e^{i(\theta_j + \theta_k - \theta_l - \theta_n)} - (\alpha^* \alpha^3 + \alpha^2) e^{i(\theta_j - \theta_k + \theta_l + \theta_n)} + (\alpha^{*2} \alpha^2 + 3\alpha^* \alpha + 1) e^{i(\theta_j - \theta_k + \theta_l - \theta_n)} \\ &+ (\alpha^{*2} \alpha^2 + 2\alpha^* \alpha) e^{i(\theta_j - \theta_k - \theta_l + \theta_n)} - (3\alpha^{*2} + \alpha^* \alpha^3) e^{i(\theta_j - \theta_k - \theta_l - \theta_n)} - \alpha^* \alpha^3 e^{-i(\theta_j - \theta_k - \theta_l - \theta_n)} \\ &+ (\alpha^{*2} \alpha^2 + 2\alpha^* \alpha) e^{-i(\theta_j - \theta_k - \theta_l + \theta_n)} + (\alpha^{*2} \alpha^2 + \alpha^* \alpha) e^{-i(\theta_j - \theta_k + \theta_l - \theta_n)} - (2\alpha^{*2} + \alpha^* \alpha^3) e^{(\theta_j - \theta_k + \theta_l + \theta_n)} \end{aligned} \quad (4.88)$$

donde $\theta_i = \vec{k} \cdot \vec{x}_i - \omega t_i$. Este resultado permite obtener el valor esperado de cualquier ordenamiento de la correlación de segundo orden, tomando i, j, k, l de manera apropiada. Por ejemplo $\langle \alpha | E_1 E_2 E_2 E_1 | \alpha \rangle$ se calcula sustituyendo $i = 1, j = 2, k = 2, l = 1$.

Después de hacer los cálculos correspondientes se obtiene,

$$\begin{aligned} \langle \alpha | S(E_1^2 E_2^2) | \alpha \rangle &= \frac{\hbar^2 \omega^2}{4\epsilon_0^2 V^2} \left[\alpha^4 e^{2i(\theta_1 + \theta_2)} + \alpha^{*4} e^{-2i(\theta_1 + \theta_2)} - (3\alpha^2 + 2\alpha^* \alpha^3) \left(e^{2i\theta} + e^{2i\theta_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (3\alpha^{*2} + 2\alpha^* \alpha^3) \left(e^{2i\theta_1} + e^{-2i\theta_2} \right) + \left(\alpha^{*2} \alpha^2 + 2\alpha^* \alpha + \frac{1}{2} \right) \left(e^{2i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{-2i(\theta_1 - \theta_2)} + 4 \right) \right] \\ &= \frac{\hbar^2 \omega^2}{4\epsilon_0^2 V^2} \left[\alpha^4 e^{2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)} + \alpha^{*4} e^{-2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)} - (3\alpha^2 + 2\alpha^* \alpha^3) \left(e^{2i\vec{K} \cdot \vec{X}_1} + e^{2i\vec{K} \cdot \vec{X}_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (3\alpha^{*2} + 2\alpha^* \alpha^3) \left(e^{-2i\vec{K} \cdot \vec{X}_1} + e^{-2i\vec{K} \cdot \vec{X}_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha^{*2} \alpha^2 + 2\alpha^* \alpha + \frac{1}{2} \right) \left(e^{2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)} + e^{-2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)} + 4 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.89)$$

donde se ha escrito $\theta_i = \vec{K}_i \cdot \vec{X}_i = \vec{k} \cdot \vec{x}_i - \omega t_i$.

Siguiendo la idea de Boyer [1] el objetivo de realizar estos cálculos un poco grandes es simplemente para compararlos con los resultados obtenidos con el campo de punto cero real. Es decir, no hay que fijarse en cuán grande son las expresiones, sino en el hecho de que coinciden.

4.6 Coherencia de la luz

En esta sección se presentarán las funciones de coherencia de diversos órdenes, que son importantes porque muestran que luz puede presentar distintas estadísticas de detección. Sin embargo, dado que las funciones de coherencia implican un proceso de detección, los resultados encontrados presentados aquí no podrán ser comparados con los resultados encontrados en el siguiente capítulo, pues como se verá allá, no ha sido posible reproducir ningún resultado que implique interacción de la radiación con la materia.

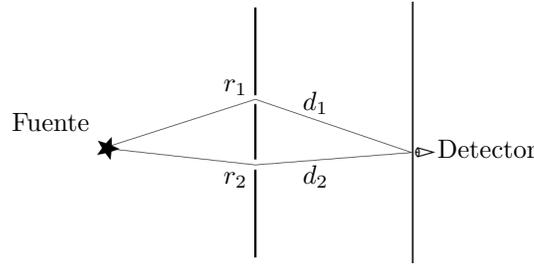


Fig. 4.3: Experimento de Young de la doble rendija

Coherencia de primer orden clásica

La coherencia de primer orden, tanto clásica como cuántica, determina que tan cercana es una fuente de luz a una fuente monocromática. El experimento de Young de la doble rendija es muy útil para definir este tipo de coherencia. Considérese que la fuente de luz, en el experimento planteado en la figura 4.3, tiene un ancho de banda $\Delta\omega$. Si la diferencia de caminos de los haces provenientes de cada una de las aberturas r_1 y r_2 es $\Delta d = |d_1 - d_2|$, entonces se observará interferencia en la pantalla si $\Delta d \leq c/\Delta\omega$. Se suele definir el tiempo de coherencia Δt_C , como el lapso de tiempo sobre el cual la fase de un tren de ondas emitido por la fuente se mantiene estable. La longitud de coherencia se define como $\Delta d_C = c\Delta t_C$. Entonces un patrón de franjas de interferencia es observado en la pantalla si $\Delta t_C \Delta\omega \approx 1$.

El campo que llega al detector al tiempo t puede escribirse como la superposición de los campos que pasaron por cada una de las rendijas al tiempo $t_1 = t - d_1/c$ y $t_2 = t - d_2/c$, es decir

$$E(\vec{x}, t) = K_1 E(\vec{x}_1, t_1) + K_2 E(\vec{x}_2, t_2), \quad (4.90)$$

donde $E(\vec{x}_i, t_i)$ es el campo que pasó por la rendija r_i al tiempo t_i . Las cantidades K_1 y K_2 son factores complejos que toman en cuenta el desfazamiento de las ondas.

Un detector sólo es capaz de medir el promedio de la intensidad de la luz que recibe en un lapso de tiempo, así la intensidad de luz que arroja un detector está dada por [10] (sec. 5.1)

$$I(\vec{x}) = \langle |E(\vec{x}, t)|^2 \rangle, \quad (4.91)$$

donde, en este caso, el promedio se realiza sobre un intervalo de tiempo específico, es decir

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (4.92)$$

Empleando la ecuación (4.90) se obtiene que [10] (sec. 5.1)

$$I(\vec{x}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re} \left(K_1 K_2 \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right), \quad (4.93)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= |K_1|^2 \langle |E(\vec{x}_1, t_1)|^2 \rangle \\ I_2 &= |K_2|^2 \langle |E(\vec{x}_2, t_2)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.94)$$

son las intensidades de cada haz y

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}}, \quad (4.95)$$

es llamado el factor de correlación de primer orden; se ha usado la notación $x_i = \vec{x}_i, t_i$. Escribiendo $K_i = |K_i| e^{i\phi_i}$ y $\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| e^{i\Phi_{12}}$ se puede escribir (4.93) de la forma [10] (sec. 5.1)

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \left| \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right| \cos(\Phi_{12} - \phi), \quad (4.96)$$

donde $\phi = \phi_1 - \phi_2$. Entonces existirá interferencia entre los haces cuando $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \neq 0$. En general, se pueden definir tres tipos de coherencia [10] (sec. 5.1)

$$\begin{aligned} \left| \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right| &= 1, & \text{coherencia completa,} \\ 0 < \left| \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right| &< 1, & \text{coherencia parcial,} \\ \left| \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right| &= 0, & \text{incoherencia completa.} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Introduciendo el factor de visibilidad de Rayleigh [10] (sec. 5.1)

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}}, \quad (4.98)$$

donde

$$I_{\text{máx}} = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} \left| \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right|, \quad (4.99)$$

se tiene que para el caso de coherencia completa, la visibilidad de las franjas, \mathcal{V} , toma su valor máximo y para la incoherencia completa, la visibilidad es cero. Además, es claro que si en (4.95) se tiene que

$$\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle = \langle E^*(x_1) \rangle \langle E(x_2) \rangle, \quad (4.100)$$

entonces $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$, se tendrá coherencia completa. Este criterio de factorización es la guía para definir la coherencia cuántica completa.

Coherencia cuántica de primer orden

La coherencia cuántica de primer orden se define de manera semejante a como se hizo en el caso clásico. En general, la teoría de la coherencia cuántica se desarrolló alrededor de 1960 en una serie de trabajos de Glauber y otros [24, 26, 27], que surgieron a partir de experimentos llevados a cabo principalmente por Hanbury Brawn y Twiss [22]. En el caso cuántico, donde la luz se considera formada de fotones, medir la intensidad de un haz se entiende como una atenuación de éste por la absorción de sus fotones. Un dispositivo ideal para medir la intensidad de una haz se puede considerar que consta de un átomo, de dimensión menor a la longitud de onda de la luz. La absorción de un fotón genera la expulsión de un electrón por efecto fotoeléctrico. La detección de dicho electrón constituye el mecanismo de detección del fotón absorbido.

La interacción de un átomo con un campo cuantizado puede describirse a través del acoplamiento dipolar, dado por el hamiltoniano [10] (sec. 5.2)

$$\hat{H}^{(1)} = -\vec{d} \cdot \vec{E}, \quad (4.101)$$

donde \vec{d} es el operador de momento dipolar y

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = i \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \left(\hat{a}_{n,\lambda}(t) \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger(t) \exp(-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right). \quad (4.102)$$

Ya que el tamaño del átomo es despreciable con respecto a la longitud de onda de la luz, es posible aplicar la aproximación dipolar, $|\vec{k} \cdot \vec{x}| \ll 1$ por lo tanto el campo puede ser aproximado por

$$\vec{E} \approx i \sum_{n,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda [\hat{a}_{n,\lambda}(t) - \hat{a}_{n,\lambda}^\dagger(t)] \quad (4.103)$$

Ahora bien, el operador de campo puede descomponerse en dos términos, una que contiene al operador de aniquilación y que describe la absorción del campo

$$\vec{E}^{(+)} = i \sum \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \hat{e}_n^\lambda \hat{a}_{n,\lambda}(t), \quad (4.104)$$

y otro que describe la emisión y que contiene al operador de creación

$$\vec{E}^{(-)} = [\vec{E}^{(+)}]^\dagger. \quad (4.105)$$

Sea $|i\rangle$ el estado inicial del campo y $|f\rangle$ el estado final, después de que el detector ha absorbido un fotón. Entonces, la probabilidad de que el campo sufra una transición de $|i\rangle$ a $|f\rangle$ es proporcional a [10] (sec. 5.2)

$$\left| \langle f | \vec{E}^{(+)}(\vec{x}, t) | i \rangle \right|^2. \quad (4.106)$$

Si se suma sobre todos los posibles estados finales se obtiene que [10] (sec. 5.2)

$$\sum_f \left| \langle f | \vec{E}^{(+)}(\vec{x}, t) | i \rangle \right|^2 = \langle i | \vec{E}^{(-)}(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}^{(+)}(\vec{x}, t) | i \rangle, \quad (4.107)$$

donde se ha considerado que el conjunto de estados finales es completo, pues es posible volverlo un conjunto completo agregando estados no permitidos [10] (p. 121). El lado derecho de la ecuación anterior es la intensidad inicial del campo. Si los campos se encuentran polarizados en la misma dirección la intensidad en el punto $x = \vec{x}, t$ se denota como

$$G^{(1)}(x, x) = \langle i | \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x) | i \rangle. \quad (4.108)$$

Siguiendo la idea del campo que se detecta en un experimento de Young, el campo cuantizado equivalente a (4.90) se escribe de la forma

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{x}, t) = K_1 \hat{E}^{(+)}(\vec{x}_1, t_1) + K_2 \hat{E}^{(+)}(\vec{x}_2, t_2). \quad (4.109)$$

La intensidad que mide un fotodetector es

$$\begin{aligned} I(\vec{x}, t) &= \langle i | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} | i \rangle = |K_1|^2 G^{(1)}(x_1, x_1) + |K_2|^2 G^{(1)}(x_2, x_2) \\ &\quad + 2\text{Re} \left[K_1^* K_2 G^{(1)}(x_1, x_2) \right]. \end{aligned} \quad (4.110)$$

En analogía al caso clásico, se define la función de coherencia de primer orden normalizada como [10] (sec. 5.2)

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{\sqrt{G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)}}, \quad (4.111)$$

que permite identificar tres tipos de coherencia, como en el caso clásico,

$$\begin{aligned} \left| g^{(1)}(x_1, x_2) \right| &= 1 && \text{coherencia completa,} \\ 0 < \left| g^{(1)}(x_1, x_2) \right| &< 1 && \text{coherencia parcial,} \\ \left| g^{(1)}(x_1, x_2) \right| &= 0 && \text{incoherencia completa.} \end{aligned} \quad (4.112)$$

Para un modo del campo cuantizado que se propaga en la dirección \vec{k} se tiene que

$$\hat{E}^{(+)} = iK \hat{a} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t}, \quad K = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}, \quad (4.113)$$

además [10] (sec. 5.2)

$$\left| g^{(1)}(x_1, x_2) \right| = 1, \quad (4.114)$$

tanto para el estado de número $|n\rangle$ como para el estado coherente $|\alpha\rangle$, es decir, ambos estados tienen coherencia total.

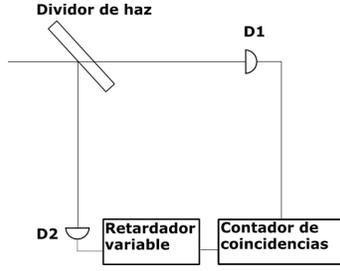


Fig. 4.4: Representación esquemática del experimento de Hanbury Brown y Twiss.

Coherencias de órdenes superiores

Se comenzará con el estudio de la coherencia de orden dos, que puede ser entendida con ayuda del experimento de Hanbury Brown y Twiss, presentado en la figura 4.4.

En el experimento de Hanbury Brown y Twiss un haz de luz se divide en dos haces iguales, y son enviados a fotodetectores, que se encuentran a la misma distancia del divisor. Un equipo se encarga de medir las coincidencias entre las detecciones de un detector al tiempo t y las detecciones del otro detector al tiempo $t + \tau$. Si el tiempo de retardo, τ , es menor que el tiempo de coherencia Δt_C , puede ser obtenida información sobre la estadística del haz dividido.

Se tiene que la razón de coincidencias en el conteo es proporcional a

$$C(t, t + \tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle, \quad (4.115)$$

donde $I(t)$ son las intensidades instantáneas de cada detector al tiempo dado. Esto da lugar a definir la función de coherencia clásica de segundo orden como [10] (sec. 5.4)

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \\ &= \frac{\langle E^*(t)E^*(t + \tau)E(t + \tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

donde se ha considerado un campo estacionario, por lo que la función de correlación sólo depende de τ . Si los detectores están a distancias distintas la función de correlación de segundo orden se define como

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) &= \frac{\langle I(x_1)I(x_2) \rangle}{\langle I(x_1)I(x_2) \rangle} \\ &= \frac{\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle^2}{\langle |E^*(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Esta función satisface las siguientes dos propiedades

$$\begin{aligned} 1 &\leq \gamma^{(2)}(0) < \infty \\ \gamma^{(2)}(\tau) &\leq \gamma^{(2)}(0), \end{aligned} \quad (4.118)$$

que la distingue de la función de coherencia cuántica.

Hanbury Brown y Twiss consideraron que si analizaban la luz de una fuente que consiste de un gran número de átomos radiantes, la razón de conteos no debería depender del tiempo de retardo. Sin embargo, lo que observaron fue que la razón para $\tau = 0$ era el doble que la razón para retardos muy grandes. Es decir, parecía que los fotones llegaban en pares, para tiempo muy cortos, pero independientes en tiempos de retardo muy largos. Este efecto luego fue conocido como agrupamiento fotónico (photon bunching), y está de acuerdo con la relación (4.118).

La función de coherencia cuántica se define de manera semejante a la función clásica. La probabilidad de una transición de absorber dos fotones es proporcional a [10] (sec. 5.4)

$$\left| \langle f | \hat{E}^{(+)}(x_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(x_1, t_1) | i \rangle \right|^2. \quad (4.119)$$

Después de sumar sobre todos los estados finales se obtiene

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \langle i | \hat{E}^{(-)}(x_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(x_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(x_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(x_1, t_1) | i \rangle. \quad (4.120)$$

Así, la función de coherencia de segundo orden se define como [10] (sec. 5.4)

$$g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \frac{G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)}, \quad (4.121)$$

que se interpreta como la probabilidad conjunta de detectar un fotón en x_1 al tiempo t_1 y un segundo fotón en x_2 al tiempo t_2 . Un campo cuántico se dice que es coherente de segundo orden si

$$\left| g^{(1)}(x_1, x_2) \right| = 1 \quad \text{y} \quad g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = 1, \quad (4.122)$$

lo cual implica la factorización $G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)$.

Para un detector ideal, formado por un átomo, la función de coherencia de segundo orden se reduce a

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}. \quad (4.123)$$

De donde se sigue que para un estado coherente

$$g^{(2)}(\tau) = 1, \quad (4.124)$$

que significa que la probabilidad de coincidencia retardada es independiente del tiempo, y para un único estado termal de la luz

$$g^{(2)}(\tau) = 2, \quad (4.125)$$

que significa una alta probabilidad de detectar coincidencia de fotones. En general, la función de coherencia cuántica de segundo orden puede satisfacer una de las tres propiedades

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0) & \quad \text{agrupamiento fotónico} \\ g^{(2)}(\tau) = 1 & \quad \text{coherencia} \\ g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau) & \quad \text{anti-agrupamiento fotónico} \end{aligned} \quad (4.126)$$

que conducen a estadísticas fotónicas diferentes. En el primer caso, como se ha visto, los fotones tienden a llegar agrupados en pares. En el segundo caso, la llegada de los fotones es aleatoria y en el último caso los fotones se encuentran espaciados temporalmente, es decir, la probabilidad de obtener una coincidencia de fotones es menor que para el estado coherente.

La función de coherencia de orden n se define como [10](sec. 5.4)

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) = \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1)}(x_n, x_n)}, \quad (4.127)$$

donde

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) = \left\langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \dots \hat{E}^{(-)}(x_n) \hat{E}^{(+)}(x_n) \dots \hat{E}^{(+)}(x_1) \right\rangle. \quad (4.128)$$

De manera semejante a los ordenes inferiores, se dice que un estado es coherente de orden n si

$$\left| g^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) \right| = 1. \quad (4.129)$$

Lo cual se satisface si es posible hacer la factorización

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) = G^{(1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1)}(x_n, x_n); \quad (4.130)$$

una condición que satisface el estado coherente para cualquier n .

Capítulo 5

Superposiciones del cpc con otras ondas

En el capítulo 4 se ha visto que el estado coherente se puede definir como un desplazamiento del vacío, es decir, la acción del operador de desplazamiento sobre $|0\rangle$. También se vio que el operador de campo eléctrico se transforma bajo $\hat{D}(\alpha)$ como él mismo más una onda plana clásica. En general, los resultados del capítulo 4 llevan a la conclusión de que el estado coherente surge cuando se superpone una onda plana al vacío. En este capítulo se realizará esta superposición al campo de punto cero real, presentado en el capítulo 3, para demostrar que este sistema en promedio se comporta como el estado coherente.

5.1 Vacío desplazado y estado de mínima dispersión

Considérese un modo del campo real de punto cero de frecuencia ω y polarización \hat{e}_λ ,

$$\vec{E}_0(\vec{x}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}}\hat{e}_\lambda \left(a \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - a^* \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right), \quad (5.1)$$

donde a y a^* son las variables estocásticas definidas en (3.11). En particular hay que recordar que

$$\langle aa^* \rangle = 1, \quad \langle aa \rangle = \langle a^* a^* \rangle = 0. \quad (5.2)$$

Se desea superponerle a este modo del campo la onda

$$\vec{E}_\alpha(\vec{x}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_\lambda \left(\alpha \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - \alpha^* \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right). \quad (5.3)$$

Entonces la onda suma es,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\alpha = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}}\hat{e}_\lambda \left[(a + \sqrt{2}\alpha) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - (a^* + \sqrt{2}\alpha^*) \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right]. \quad (5.4)$$

Este campo es un campo fluctuante, por la acción del cpc; el campo promedio es

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_0 + \vec{E}_\alpha \rangle &= \vec{E}_\alpha = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_\lambda \left(\alpha \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - \alpha^* \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right), \\ &= 2|\alpha| \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta), \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde se ha escrito $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$. El resultado es claro porque, como se vio en el capítulo 3, el campo de punto cero promedia a cero. Luego, si se le suma una constante (E_α), promediará a esa constante. Estadísticamente el resultado se debe a que $\langle a + \alpha \rangle = \alpha$; lo mismo para su compleja conjugada.

Ahora se calculará la dispersión del campo; para empezar

$$\begin{aligned} \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle &= -\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V} \left(\alpha^2 \exp\left(2i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\right) + \alpha^{*2} \exp\left(-2i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\right) - 2\alpha\alpha^* - 1 \right) \\ &= \frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V} \left[1 + 4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \theta) \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por lo tanto

$$(\Delta E)^2 = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}, \quad (5.7)$$

que es igual a la dispersión del vacío, es decir, es un estado de mínima dispersión. El resultado es claro, al modo del cpc sólo se le ha sumado una constante, de manera que sólo contribuyen las fluctuaciones del cpc.

5.2 Cuadraturas del campo

Es posible escribir el campo \vec{E} en términos de sus cuadraturas,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}} \hat{e}_\lambda \left[\left(a + \sqrt{2}\alpha \right) \left(\cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + i\sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) - \text{c.c.} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}} \hat{e}_\lambda \left[\left(a + a^* + \sqrt{2}(\alpha + \alpha^*) \right) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \frac{1}{i} \left(a - a^* + \sqrt{2}(\alpha - \alpha^*) \right) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}} \hat{e}_\lambda \left[\frac{a + a^* + \sqrt{2}(\alpha + \alpha^*)}{2\sqrt{2}} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \frac{a - a^* + \sqrt{2}(\alpha - \alpha^*)}{2\sqrt{2}i} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}} \hat{e}_\lambda \left(X_1 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - X_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(a + a^* + \sqrt{2}(\alpha + \alpha^*) \right), \\ X_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left(a - a^* + \sqrt{2}(\alpha - \alpha^*) \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

son las cuadraturas del campo, cuyas dispersiones son

$$\begin{aligned} \langle X_1 \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle a + a^* + \sqrt{2}(\alpha + \alpha^*) \rangle = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*), \\ \langle X_1 \rangle^2 &= \frac{1}{8} \langle a^2 + 2aa^* + a^{*2} + 2\sqrt{2}(a + a^*)(\alpha + \alpha^*) + 2(\alpha + \alpha^*)^2 \rangle = \frac{1}{4} [1 + (\alpha + \alpha^*)^2], \end{aligned} \quad (5.10)$$

entonces

$$(\Delta X_1)^2 = \frac{1}{4}. \quad (5.11)$$

Asimismo

$$\begin{aligned} \langle X_2 \rangle &= \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^*), \\ \langle X_2 \rangle^2 &= \frac{1}{4} [1 - (\alpha - \alpha^*)^2], \end{aligned} \quad (5.12)$$

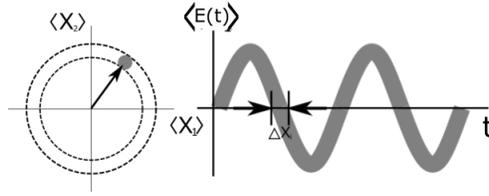


Fig. 5.1: Representación del campo \vec{E} , suma de un modo del cpc más una onda plana. Esta representación es típica del estado coherente cuántico, como vimos en el capítulo 4.

de manera que

$$(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4}. \quad (5.13)$$

Luego

$$(\Delta X_1)^2 (\Delta X_2)^2 = \frac{1}{16}, \quad (5.14)$$

que muestra que el sistema es un estado de mínima dispersión (cosa que ya se sabía). Los operadores de cuadratura permiten hacer una representación gráfica de la evolución temporal de \vec{E} idéntica a la presentada para el estado coherente, ya que ambas cuadraturas se comportan de manera semejante (ver fig. 5.1).

5.3 Distribución del campo

Si se reescribe el cpc y el campo \vec{E}_α de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_\lambda (\tilde{E}a + \tilde{E}^* a^*), & \tilde{E} &= i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \\ \vec{E}_\alpha &= \hat{e}_\lambda (\tilde{E}\alpha + \tilde{E}^* \alpha^*), \end{aligned} \quad (5.15)$$

entonces, la función generadora de momentos de la distribución del campo resulta ser

$$\langle \exp(\beta(E_\alpha + E_0)) \rangle = \exp(\beta E_0) \left\langle \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} (\tilde{E}a + \tilde{E}^* a^*)\right) \right\rangle. \quad (5.16)$$

En el capítulo 3, ec. (3.55), se calculó que el campo de punto cero tiene distribución gaussiana

$$\left\langle \exp\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} (\tilde{E}a + \tilde{E}^* a^*)\right) \right\rangle = \exp\left(\frac{\beta^2 \sigma^2}{2}\right). \quad (5.17)$$

Luego

$$\langle \exp(\beta E) \rangle = \exp\left(\beta(E\alpha + \tilde{E}^* \alpha^*) + \beta^2 \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad (5.18)$$

es decir, el campo \vec{E} tiene una distribución gaussiana desplazada,

$$\begin{aligned} \mu = 0 &\rightarrow \mu = E\alpha + \tilde{E}^* \alpha^*, \\ \sigma^2 &= |\tilde{E}|^2 = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

El resultado coincide con la función generadora de momentos del estado coherente cuántico, ec. (4.83). Es decir, ambos campos se distribuyen de la misma forma y presentan la misma estadística.

5.4 Correlaciones del campo

La correlación del campo en dos puntos está dada por

$$\begin{aligned}
\langle \vec{E}(\vec{x}_1, t_1) \cdot \vec{E}(\vec{x}_2, t_2) \rangle &= -\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V} \left\langle \left[(a_1 + \sqrt{2}\alpha) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}_1 - i\omega_1 t) - (a_1^* + \sqrt{2}\alpha^*) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}_1 + i\omega_1 t) \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[(a_2 + \sqrt{2}\alpha) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}_2 - i\omega_2 t) - (a_2^* + \sqrt{2}\alpha^*) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}_2 + i\omega_2 t) \right] \right\rangle \\
&= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[(1 + 2\alpha\alpha^*) \cos(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \omega(t_1 - t_2)) \right. \\
&\quad \left. - \alpha^2 \exp(i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)) - \alpha^{*2} \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + i\omega(t_1 - t_2)) \right]. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

El resultado coincide con la correlación de primer orden cuántica, del operador $S(\hat{E}(\vec{x}_1, t_1)\hat{E}(\vec{x}_2, t_2))$, es decir, la simetrización total del operador de correlación (ver ec. (4.86)).

5.5 Correlación de segundo orden

Siguiendo la misma idea, se calculó la correlación de segundo orden del campo

$$\begin{aligned}
&\langle \exp(2)(\vec{x}_1, t_1) \exp(2)(\vec{x}_2, t_2) \rangle \\
&= \frac{\hbar^2\omega^2}{4\omega^2 V^2} \left[\alpha^4 \exp(2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)) + \alpha^{*4} \exp(-2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)) \right. \\
&\quad - (3\alpha^2 + 2\alpha^3\alpha^*) \left(\exp(2i\vec{K} \cdot \vec{X}_1) + \exp(2i\vec{K} \cdot \vec{X}_2) \right) \\
&\quad - (3\alpha^{*2} + 2\alpha^*\alpha^3) \left(\exp(-2i\vec{K} \cdot \vec{X}_1) + \exp(-2i\vec{K} \cdot \vec{X}_2) \right) \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + 2\alpha\alpha^* + \alpha^{*2}\alpha^2 \right) \left(\exp(2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)) + \exp(-2i\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)) + 4 \right) \right], \tag{5.21}
\end{aligned}$$

el resultado también coincide con la simetrización del operador de correlación de segundo orden, ec. (4.89). Es notable la facilidad con la que se puede hacer el cálculo usando el cpc real; que contrasta con lo laborioso de obtener el resultado cuántico. Esta observación ya había sido notada por Boyer [1] para el caso del vacío.

5.6 La energía del campo

Finalmente se calculará la energía del campo electromagnético identificado con el estado coherente. Según la ecuación (2.17), la energía del campo es

$$H = \frac{1}{2} (\omega^2 q^2 + p^2). \tag{5.22}$$

Como se ha visto en (5.9), las cuadraturas del campo suma de $E_0 + E_\alpha$, son iguales a la suma de cada una de sus cuadraturas, entonces en la ecuación (5.22)

$$\begin{aligned}
q &= q_0 + q_\alpha \\
p &= p_0 + p_\alpha, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

donde las variables q_0 y p_0 son las variables canónicas del campo de punto cero (que son proporcionales a las cuadraturas X_i del campo) y q_α , p_α son las variables canónicas del campo E_α . Entonces

$$H = \frac{1}{2} (\omega^2 q^2 + p^2) = \frac{1}{2} (\omega^2 q_0^2 + 2\omega^2 q_0 q_\alpha + \omega^2 q_\alpha^2 + p_0^2 + 2p_0 p_\alpha + p_\alpha^2) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha + \omega^2 q_0 q_\alpha + p_0 p_\alpha, \tag{5.24}$$

donde $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ es la energía del campo de punto cero y $\mathcal{E}_\alpha = \hbar\omega\alpha\alpha^*$ es la energía del campo E_α . Luego

$$\langle H \rangle = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha = \hbar\omega \left(\alpha\alpha^* + \frac{1}{2} \right), \quad (5.25)$$

que es igual a la energía del estado coherente cuántico, ec. (4.5).

La energía al cuadrado es

$$H^2 = (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha)^2 + 2(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha) (\omega^2 q_0 q_\alpha + p_0 p_\alpha) + \omega^4 q_0^2 q_\alpha^2 + 2\omega^2 q_0 q_\alpha p_0 p_\alpha + p_0^2 p_\alpha^2 \quad (5.26)$$

su valor esperado es

$$\langle H^2 \rangle = (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha)^2 + 2\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_\alpha = \hbar^2 \omega^2 \left(\alpha^2 \alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^* + \frac{1}{4} \right) \quad (5.27)$$

que es exactamente el mismo valor encontrado para el estado coherente cuántico, ec. (4.6). De manera que la dispersión de la energía es

$$\langle (\Delta H)^2 \rangle = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \hbar^2 \omega^2 \alpha\alpha^*, \quad (5.28)$$

que es igual a la dispersión de la energía del estado coherente cuántico, ec. (4.7). Sin embargo, no es posible recuperar toda la estadística de la energía, pues, por ejemplo, para la tercera potencia de la energía se tiene que

$$\langle H^3 \rangle = (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha)^3 + 6\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_\alpha (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha), \quad (5.29)$$

donde se ha usado, como en los casos anteriores, el hecho que q_0 y p_0 tienen distribución gaussiana, como se vio en el capítulo 3. Mientras que en el caso cuántico

$$\langle \alpha | \hat{H}^3 | \alpha \rangle = (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha)^3 + 6\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_\alpha (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_\alpha) + 4\mathcal{E}_0^2 \mathcal{E}_\alpha. \quad (5.30)$$

Esto quiere decir que no es posible con la descripción empleada hasta aquí obtener la distribución poissoniana del campo coherente que se detecta. Esto se debe a que dicha descripción hace referencia a un campo libre, mientras que el campo detectado es un campo que interactúa con la materia. También hay otra forma de interpretar esta discrepancia, que a la vez nos ayudará a relacionar la simetrización de un operador con los campos libres.

5.7 Simetría de los operadores

Hasta el momento se ha obtenido que

$$\begin{aligned} \langle E^n \rangle &= \langle \alpha | \hat{E}^n | \alpha \rangle, \\ \langle E_1 E_2 \rangle &= \langle \alpha | S \left(\hat{E}_1 \hat{E}_2 \right) | \alpha \rangle, \\ \langle E_1^2 E_2^2 \rangle &= \langle \alpha | S \left(\hat{E}_1^2 \hat{E}_2^2 \right) | \alpha \rangle, \\ \langle H^n \rangle &\neq \langle \alpha | \hat{H}^n | \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde $E_i = E(x_i, t_i)$ y $S(\bullet)$ representa la simetrización del operador entre paréntesis.

¿Qué papel juega la simetrización en estos resultados? Primero nótese que la simetrización de las potencias del operador de campo, con respecto a sí mismo, es el mismo operador, es decir,

$$S(\hat{E}^n) = \hat{E}^n; \quad (5.32)$$

asimismo, la simetrización del operador de correlación con respecto a sí mismo es $\frac{1}{2} \left(\hat{E}_1 \hat{E}_2 + \hat{E}_2 \hat{E}_1 \right)$, como se había visto anteriormente. En general, si se tiene m operadores, cada uno elevado a la potencia n_i , entonces la simetrización del producto de los m operadores es

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_m)!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \times (\text{suma de las permutaciones sin repetición del operador producto}). \quad (5.33)$$

Así se obtuvo, por ejemplo, la simetrización del operador $\hat{E}_1^2 \hat{E}_2^2$, ec. (4.87),

$$\frac{1}{6} (E_1 E_1 E_2 E_2 + E_2 E_2 E_1 E_1 + E_1 E_2 E_1 E_2 + E_2 E_1 E_2 E_1 + E_1 E_2 E_2 E_1 + E_2 E_1 E_1 E_2).$$

Entonces, la simetrización de las potencias del operador de energía, \hat{H}^n es igual a sí mismo, como en el caso del operador de campo, ec. (5.32), pero ya se vio que $\langle H^n \rangle \neq \langle 0 | \hat{H}^n | 0 \rangle = \langle 0 | S(\hat{H}^n) | 0 \rangle$ ¿Por qué entonces la simetrización funciona con un operador pero no con otro? La respuesta es que en realidad no se está simetrizando con respecto al mismo operador, sino con respecto a las variables canónicas del campo, p y q . Escribáse al operador de campo en la forma

$$\hat{E} = \bar{E} \hat{q} + \bar{E} \hat{p}, \quad (5.34)$$

que es semejante a cuando escribimos al operador en términos de sus cuadraturas (recuérdese que también \hat{p} y \hat{q} son cuadraturas del campo, proporcionales a \hat{X}_1 y \hat{X}_2 . La barra sobre E , \bar{E} , no representa ningún promedio, sólo es un símbolo). Es claro que \hat{E} es simétrico respecto a \hat{q} y \hat{p} . Así mismo,

$$\exp(\hat{E}) = \bar{E}^2 \hat{q}^2 + \bar{E}^* \hat{p}^2 + \bar{E} \bar{E}^* (\hat{p} \hat{q} + \hat{q} \hat{p}), \quad (5.35)$$

es simétrico respecto a \hat{q} y \hat{p} . También se tiene que

$$\hat{E}^3 = \bar{E}^3 \hat{q}^3 + \bar{E}^* \hat{p}^3 + \bar{E}^2 \bar{E}^* (\hat{q}^2 \hat{p} + \hat{q} \hat{p} \hat{q} + \hat{p} \hat{q}^2) + \bar{E} \bar{E}^* (\hat{q} \hat{p}^2 + \hat{p} \hat{q} \hat{p} + \hat{p}^2 \hat{q}), \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}^4 = & \bar{E}^4 \hat{q}^4 + \bar{E}^* \hat{p}^4 + \bar{E} \bar{E}^* (\hat{q} \hat{p}^3 + \hat{p} \hat{q} \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q} \hat{p} + \hat{p}^3 \hat{q}) + \bar{E}^3 \bar{E}^* (\hat{p} \hat{q}^3 + \hat{q}^3 \hat{p} + \hat{q}^2 \hat{p} \hat{q} + \hat{q} \hat{p} \hat{q}^2) \\ & + \bar{E}^2 \bar{E}^* (\hat{q}^2 \hat{p}^2 + \hat{q} \hat{p} \hat{q} \hat{p} + \hat{q} \hat{p}^2 \hat{q} + \hat{p} \hat{q}^2 \hat{p} + \hat{p} \hat{q} \hat{p} \hat{q} + \hat{p}^2 \hat{q}^2), \end{aligned} \quad (5.37)$$

de donde se puede ver que las potencias del operador de campo eléctrico aparecen simetrizadas con respecto a \hat{p} y \hat{q} , pues siempre que aparece, por ejemplo, el operador $\hat{q}^2 \hat{p}^2$, aparecen todas las posibles permutaciones sin repetición de los operadores $\hat{q} \hat{q} \hat{p} \hat{p}$.

Para el caso del operador de correlación, se tiene que

$$\hat{E}_1 \hat{E}_2 = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \hat{q}_1 \hat{q}_2 + \bar{E}_1 \bar{E}_2^* \hat{q}_1 \hat{p}_2 + \bar{E}_1^* \bar{E}_2 \hat{p}_1 \hat{q}_2 + \bar{E}_1^* \bar{E}_2^* \hat{p}_1 \hat{p}_2, \quad (5.38)$$

no es simétrico respecto a los operadores p_1, p_2, q_1, q_2 , pero la simetrización sí lo es

$$\hat{E}_1 \hat{E}_2 + \hat{E}_2 \hat{E}_1 = \bar{E}_1 \bar{E}_2 (\hat{q}_1 \hat{q}_2 + \hat{q}_2 \hat{q}_1) + \bar{E}_1 \bar{E}_2^* (\hat{q}_1 \hat{p}_2 + \hat{p}_2 \hat{q}_1) + \bar{E}_1^* \bar{E}_2 (\hat{p}_1 \hat{q}_2 + \hat{q}_2 \hat{p}_1) + \bar{E}_1^* \bar{E}_2^* (\hat{p}_1 \hat{p}_2 + \hat{p}_2 \hat{p}_1). \quad (5.39)$$

Sin embargo, \hat{H}^n , que ya está simetrizado con respecto a sí mismo, no aparece simetrizado con respecto a \hat{p} y \hat{q} . Por ejemplo, para $n = 2$,

$$\hat{H}^2 = \frac{1}{4} (\omega^4 \hat{q}^4 + \hat{p}^4 + \omega^2 \hat{q}^2 \hat{p}^2 + \omega^2 \hat{p}^2 \hat{q}^2), \quad (5.40)$$

el operador no es simétrico respecto a \hat{p} y \hat{q} porque aparecen los términos $\hat{q}^2 \hat{p}^2$ y $\hat{p}^2 \hat{q}^2$ pero no aparecen $\hat{q} \hat{p} \hat{q} \hat{p}$, $\hat{p} \hat{q} \hat{p} \hat{q}$, $\hat{q} \hat{p}^2 \hat{q}$, $\hat{p} \hat{q}^2 \hat{p}$. En realidad no existe una forma clara de simetrizar este operador con respecto a \hat{q} y \hat{p} . Si se le agregan los términos necesarios para simetrizarlo, el resultado no coincide con la energía del campo clásico propuesto arriba. ¿Qué sucede? Primero, el campo clásico que se propuso al inicio del capítulo, es un campo libre. Si los momentos del operador de campo son idénticos a los momentos del campo clásico, entonces el campo cuántico se comporta como un campo libre. Arreglando de manera conveniente el sistema, se podrían medir las correlaciones del campo cuántico libre — que correspondería a considerar el operador de correlación totalmente simetrizado — pero, el hecho que el operador de energía no aparezca simetrizado, hace pensar que no es posible medir la energía del campo sin que éste siga comportándose como un campo libre; a la vez nos lleva a sugerir que todo operador que sea simétrico con respecto a \hat{q} y \hat{p} describe propiedades de un campo libre.

Si se deseara encontrar la estadística poissoniana de la luz posiblemente se necesite modificar la estadística normal del campo de punto cero. Esto se puede interpretar como que el equipo de medición ha modificado localmente la estadística del campo por su interacción con él.

Capítulo 6

El estado comprimido

Se ha estudiado a los estados coherentes como aquellos estados del campo electromagnético cuyas cuadraturas minimizan la relación de Heisenberg y a la vez sus dispersiones son iguales. Sin embargo, para satisfacer la igualdad de la relación de Heisenberg no es necesario que las dispersiones de ambas cuadraturas sean iguales. A los estados que satisfacen

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle < \frac{1}{4}, \quad \langle (\Delta X_2)^2 \rangle > \frac{1}{4} \quad (\text{o viceversa}) \quad \text{y} \quad \langle (\Delta X_1)^2 \rangle \langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{16}, \quad (6.1)$$

se les llama estados comprimidos.

La estructura de este capítulo sigue a [10], capítulo 7. En particular las secciones 6.4 y 6.5 son muy cercanas al desarrollo presentado en el capítulo 7 de la referencia citada.

6.1 Operador de compresión

Una forma de generar estados comprimidos es a partir de la aplicación del operador de compresión definido como [10] (sec. 7.1)

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})\right), \quad (6.2)$$

donde $\xi \in \mathbb{C}$. Si se escribe $\xi = r \exp(i\theta)$ entonces r es llamado parámetro de compresión ($0 \leq r < \infty$). Nótese que se tiene una compresión ($r \neq 0$) y una rotación ($\theta \neq 0$) simultáneamente.

Sea $|\psi\rangle$ un ket arbitrario, entonces un estado comprimido se define como [10] (sec. 7.1)

$$|\psi\rangle_S = \hat{S}(\xi) |\psi\rangle. \quad (6.3)$$

Si $|\psi\rangle = |0\rangle$ entonces se tiene al vacío comprimido y se suele denotar como $|\xi\rangle$.

El primer objetivo de este capítulo será determinar como transforma $\hat{S}(\xi)$ al operador de campo eléctrico. Para ello se necesita saber como transforma a los operadores de creación y aniquilación. Para llegar a este resultado se puede usar el lema de Baker-Hausdorff que dice

$$\exp(\lambda i \hat{A}) \hat{B} \exp(-i \lambda \hat{A}) = \hat{B} + i \lambda [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{(i \lambda)^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots + \frac{(i \lambda)^n}{n!} \underbrace{[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \dots [\hat{A}, \hat{B}]]]]}_{n \text{ veces}} + \dots \quad (6.4)$$

Sea $\hat{A} = \frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})$, $\hat{B} = \hat{a}^\dagger$ y $\lambda = i$, entonces el lema de Baker-Hausdorff implica que

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger - [\hat{A}, \hat{a}^\dagger] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{a}^\dagger]] + \dots \quad (6.5)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{a}^\dagger] &= \left[\frac{1}{2} (\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}), \hat{a}^\dagger \right] = \xi^* \hat{a}, \\ [\hat{A}, \hat{a}] &= \left[\frac{1}{2} (\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}), \hat{a} \right] = \xi \hat{a}^\dagger, \end{aligned} \quad (6.6)$$

luego

$$\begin{aligned} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{a}^\dagger]] &= [\hat{A}, \xi^* \hat{a}] = \xi^* \xi \hat{a}^\dagger \\ [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{a}^\dagger]]] &= [\hat{A}, \xi^* \xi \hat{a}^\dagger] = \xi^{*2} \xi \hat{a} \\ [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{a}^\dagger]]]] &= [\hat{A}, \xi^{*2} \xi \hat{a}^\dagger] = \xi^{*2} \xi^2 \hat{a}^\dagger \\ [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{a}^\dagger]]]]] &= [\hat{A}, \xi^{*3} \xi^2 \hat{a}^\dagger] = \xi^{*3} \xi^2 \hat{a} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.7)$$

entonces

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a} + \frac{1}{2!} \xi^* \xi \hat{a}^\dagger - \frac{1}{3!} \xi^{*2} \xi \hat{a} + \frac{1}{4!} \xi^{*2} \xi^2 \hat{a}^\dagger + \dots \quad (6.8)$$

Escribiendo $\xi = r \exp(i\theta)$ se tiene que [10] (sec. 7.1)

$$\begin{aligned} \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) &= \hat{a}^\dagger \left(1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \dots \right) - \hat{a} \exp(-i\theta) \left(r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} \exp(-i\theta) \operatorname{senh} r. \end{aligned} \quad (6.9)$$

La ecuación adjunta es

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \operatorname{senh} r. \quad (6.10)$$

Estas ecuaciones serán de utilidad posteriormente.

6.2 Transformación del operador de campo eléctrico

Ahora es muy fácil saber como se transforma el operador de campo eléctrico bajo $\hat{S}(\xi)$,

$$\begin{aligned} \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{E} \hat{S}(\xi) &= i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} \left[(\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \operatorname{senh} r) \exp\left(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\right) \right. \\ &\quad \left. - (\hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} \exp(-i\theta) \operatorname{senh} r) \exp\left(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Este campo transformado también se puede escribir de la forma

$$\hat{E}_S = 2 \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\mathcal{X}_1 \operatorname{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \mathcal{X}_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right], \quad (6.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}}_1 &= \frac{1}{2} (\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \operatorname{senh} r + \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} \exp(-i\theta) \operatorname{senh} r), \\ \hat{\mathcal{X}}_2 &= \frac{1}{2i} (\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \operatorname{senh} r - \hat{a}^\dagger \cosh r + \hat{a} \exp(-i\theta) \operatorname{senh} r), \end{aligned} \quad (6.13)$$

son las cuadraturas del campo comprimido. Es claro que

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{X}}_1 | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\mathcal{X}}_1 | 0 \rangle = 0. \quad (6.14)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}}_1^2 = \frac{1}{4} [& \hat{a}^2 \cosh^2 r - \hat{a} \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \cosh r \sinh r + \hat{a} \hat{a}^\dagger \cosh^2 r - \hat{a}^2 \cosh r \sinh r \\ & - \hat{a}^\dagger \hat{a} \exp(i\theta) \cosh r \sinh r + \hat{a}^{\dagger 2} \exp(2i\theta) \sinh^2 r - \hat{a}^{\dagger 2} \exp(i\theta) \sinh r \cosh r + \hat{a}^\dagger \hat{a} \sinh^2 r \\ & + \hat{a}^\dagger \hat{a} \cosh^2 r - \hat{a}^{\dagger 2} \exp(i\theta) \sinh r \cosh r + \hat{a}^{\dagger 2} \cosh^2 r - \hat{a}^\dagger \hat{a} \exp(-i\theta) \cosh r \sinh r \\ & - \hat{a}^2 \exp(-i\theta) \cosh r \sinh r + \hat{a} \hat{a}^\dagger \sinh^2 r - \hat{a} \hat{a}^\dagger \exp(-i\theta) \cosh r \sinh r + \hat{a}^2 \exp(-2i\theta) \sinh^2 r], \end{aligned} \quad (6.15)$$

escribir explícitamente los operadores incluso cuando éstos son muy largos se ha hecho a propósito, para poder comparar la versatilidad de los cálculos entre el enfoque basado en el campo de punto cero real y el de la teoría cuántica.

Luego

$$\begin{aligned} \langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_1)^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\mathcal{X}}_1^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{4} (\cosh^2 r + \sinh^2 r - \exp(i\theta) \cosh r \sinh r - \exp(-i\theta) \cosh r \sinh r) \\ &= \frac{1}{4} (\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos \theta). \end{aligned} \quad (6.16)$$

De manera análoga se obtiene que

$$\langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_2)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{4} (\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \sinh r \cosh r \cos \theta). \quad (6.17)$$

Si $\theta \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ entonces

$$\langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_1)^2 | 0 \rangle < \langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_2)^2 | 0 \rangle,$$

pero si $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ entonces la desigualdad se invierte. Para cualquier $\theta \in (0, 2\pi)$

$$\langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_1)^2 | 0 \rangle \langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_2)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{16} [1 + (\sinh^2 r + \sinh^4 r) (3 + \sin^2 \theta)], \quad (6.18)$$

que es una función positiva, con mínimo igual a 1 en $r = 0$. Esto puede hacer creer que el operador de compresión no siempre crea un estado comprimido, pues la igualdad de la relación de Heisenberg sólo se cumple para $r = 0$, pero esto es sólo aparente. Si se definen las rotaciones de las cuadraturas,

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{X}}_1 \\ \hat{\mathcal{X}}_2 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

entonces para cualquier $\theta \in (0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} \langle 0 | (\Delta \hat{Y}_1)^2 | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{Y}_1^2 | 0 \rangle = \frac{1}{4} (\exp(-2r)), \\ \langle 0 | (\Delta \hat{Y}_2)^2 | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{Y}_2^2 | 0 \rangle = \frac{1}{4} (\exp(2r)), \end{aligned} \quad (6.20)$$

luego,

$$\langle 0 | (\Delta \hat{Y}_1)^2 | 0 \rangle \langle 0 | (\Delta \hat{Y}_2)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{16}, \quad (6.21)$$

el estado transformado satisface la igualdad de la relación de Heisenberg.

6.2.1 Cuadraturas no rotadas

A continuación se analizará el caso $\theta = 0$, pues una fase diferente simplemente implica una rotación de los ejes. En esos casos

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}}_1 &= \exp(-r) \hat{X}_1, & \hat{X}_1 &= \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger); \\ \hat{\mathcal{X}}_2 &= \exp(r) \hat{X}_2; & \hat{X}_2 &= \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger),\end{aligned}\tag{6.22}$$

de donde es claro que

$$\begin{aligned}\langle 0 | \left(\Delta \hat{\mathcal{X}}_1 \right)^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{4} (\exp(-2r)), \\ \langle 0 | \left(\Delta \hat{\mathcal{X}}_2 \right)^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{4} (\exp(2r)), \\ \langle 0 | \left(\Delta \hat{\mathcal{X}}_1 \right)^2 | 0 \rangle \langle 0 | \left(\Delta \hat{\mathcal{X}}_2 \right)^2 | 0 \rangle &= \frac{1}{16}.\end{aligned}\tag{6.23}$$

El operador de campo eléctrico se reduce a

$$\hat{E}_S = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\exp(-r) \hat{X}_1 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \exp(r) \hat{X}_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right],\tag{6.24}$$

o bien,

$$\begin{aligned}\hat{E}_S &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\hat{a} \left(\cosh r \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) + \sinh r \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}^\dagger \left(\cosh r \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) + \sinh r \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right) \right] \\ &= A\hat{a} + B\hat{a}^\dagger,\end{aligned}\tag{6.25}$$

donde

$$\begin{aligned}A &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left(\cosh r \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) + \sinh r \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right), \\ B &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left(\cosh r \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) + \sinh r \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right).\end{aligned}\tag{6.26}$$

El campo promedio es cero,

$$\langle 0 | \hat{E}_S | 0 \rangle = A \langle 0 | \hat{a} | 0 \rangle + B \langle 0 | \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = 0,\tag{6.27}$$

pero fluctúa

$$\langle 0 | \hat{E}_S^2 | 0 \rangle = \langle 0 | A^2 \hat{a}^2 + AB \hat{a} \hat{a}^\dagger + AB \hat{a}^\dagger \hat{a} + B^2 \hat{a}^{\dagger 2} | 0 \rangle = AB,\tag{6.28}$$

entonces $\sigma_E^2 = \langle 0 | \left(\Delta \hat{E}_S \right)^2 | 0 \rangle = AB$. Las fluctuaciones del campo han cambiado. Antes (vacío no comprimido) la varianza del campo era constante, $\hbar\omega/2\epsilon_0 V$. Ahora depende tanto del tiempo como de la posición,

$$\sigma_E^2 = AB = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2\sinh r \cosh r \cos(2\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right].\tag{6.29}$$

De hecho, para ciertos puntos x o t la dispersión del vacío comprimido es menor que la dispersión del vacío sin comprimir. No obstante en promedio las fluctuaciones son mayores, pues el promedio de la función $\cos(2\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ sobre todas las x o todo t es cero, de manera que

$$\overline{(\sigma_E^2)^{x,t}} = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} [\cosh^2 r + \sinh^2 r] \geq \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V},\tag{6.30}$$

la igualdad se da únicamente cuando $r = 0$.

6.2.2 Distribución del campo

La función generadora de momentos del campo eléctrico se puede encontrar de forma análogo a como se hizo en la sección 2.7 del capítulo 2.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \exp(\beta \hat{E}_S) | 0 \rangle &= \langle 0 | \exp(A\hat{a} + B\hat{a}^\dagger) | 0 \rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma_E^2\right) \langle 0 | \exp(\beta B\hat{a}^\dagger) \exp(\beta A\hat{a}) | 0 \rangle \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma_E^2\right) \langle 0 | \sum_n \frac{(\beta B)^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n \sum_k \frac{(\beta A)^k}{k!} \hat{a}^k | 0 \rangle \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma_E^2\right) \langle 0 | \sum_n \frac{(\beta B)^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n | 0 \rangle \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\beta^2\sigma_E^2\right),
\end{aligned} \tag{6.31}$$

es decir, el campo sigue teniendo distribución gaussiana, pero con la nueva varianza, dada por la ecuación (6.29).

6.2.3 Correlaciones del vacío comprimido

Finalmente se calcularán las correlaciones de dos puntos del campo comprimido, para comparar estos resultados con los que se obtienen en el siguiente capítulo. El cálculo es un poco largo, así que será resumido.

Primero se escribirá el operador,

$$\begin{aligned}
\hat{E}_S(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_S(\vec{x}_2, t_2) &= -\left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\right) \left[\left(\hat{a} e^{i\vec{K}\cdot\vec{X}_1} - \hat{a}^\dagger e^{-i\vec{K}\cdot\vec{X}_1} \right) \cosh r + \left(a e^{-i\vec{K}\cdot\vec{X}_1} - \hat{a}^\dagger e^{i\vec{K}\cdot\vec{X}_1} \right) \sinh r \right] \\
&\quad \times \left[\left(\hat{a} e^{i\vec{K}\cdot\vec{X}_2} - \hat{a}^\dagger e^{-i\vec{K}\cdot\vec{X}_2} \right) \cosh r + \left(a e^{-i\vec{K}\cdot\vec{X}_2} - \hat{a}^\dagger e^{i\vec{K}\cdot\vec{X}_2} \right) \sinh r \right].
\end{aligned} \tag{6.32}$$

donde $\vec{K}\cdot\vec{X}_1 = \vec{k}\cdot\vec{x}_1 - \omega t_1$. Si se realizan los productos se verá que el operador tiene cuatro términos; todas las combinaciones entre los dos términos de cada operador de campo. Por ejemplo, el primer término del que se hace mención es

$$\left(a e^{i\vec{K}\cdot\vec{X}_1} - \hat{a}^\dagger e^{-i\vec{K}\cdot\vec{X}_1} \right) \left(a e^{i\vec{K}\cdot\vec{X}_2} - \hat{a}^\dagger e^{-i\vec{K}\cdot\vec{X}_2} \right) \cosh^2 r, \tag{6.33}$$

el valor esperado de este operador es

$$\langle 0 | \text{primer término} | 0 \rangle = -\exp\left(i(\vec{K}\cdot\vec{X}_1 - \vec{K}\cdot\vec{X}_2)\right) \cosh^2 r. \tag{6.34}$$

Después de calcular todos los valores esperados se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{E}_S(\vec{x}_1, t_1) \hat{E}_S(\vec{x}_2, t_2) | 0 \rangle &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[\exp\left(i(\vec{K}\cdot\vec{X}_1 - \vec{K}\cdot\vec{X}_2)\right) \cosh^2 r \right. \\
&\quad \left. + \exp\left(-i(\vec{K}\cdot\vec{X}_1 - \vec{K}\cdot\vec{X}_2)\right) \sinh^2 r + 2 \cos(\vec{K}\cdot(\vec{X}_1 + \vec{X}_2)) \sinh r \cosh r \right].
\end{aligned} \tag{6.35}$$

El valor esperado de su simétrico es

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{E}_S(\vec{x}_2, t_2) \hat{E}_S(\vec{x}_1, t_1) | 0 \rangle &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[\exp\left(-i(\vec{K}\cdot\vec{X}_1 - \vec{K}\cdot\vec{X}_2)\right) \cosh^2 r \right. \\
&\quad \left. + \exp\left(i(\vec{K}\cdot\vec{X}_1 - \vec{K}\cdot\vec{X}_2)\right) \sinh^2 r + 2 \cos(\vec{K}\cdot(\vec{X}_1 + \vec{X}_2)) \sinh r \cosh r \right].
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Por lo tanto, el valor esperado de la simetrización del operador de correlación es

$$\langle S(\hat{E}_1 \hat{E}_2) \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[\cos(\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)) \cosh^2 r + \cos(\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)) \sinh^2 r + 2 \cos(\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)) \sinh r \cosh r \right]. \quad (6.37)$$

Tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \cosh^2 r + \sinh^2 r &= \frac{\exp(2r) + \exp(-2r)}{2} \\ \sinh r \cosh r &= \frac{\exp(2r) - \exp(-2r)}{4}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

la ecuación (6.37) se puede escribir de la forma,

$$\begin{aligned} \langle S(\hat{E}_1 \hat{E}_2) \rangle &= \frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V} \left[\exp(2r) \left(\cos(\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)) + \cos(\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-2r) \left(\cos(\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 - \vec{X}_2)) - \cos(\vec{K} \cdot (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)) \right) \right] \\ &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[\exp(-2r) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}_1 - \omega t_1) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}_2 - \omega t_2) \right. \\ &\quad \left. + \exp(2r) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}_1 - \omega t_1) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}_2 - \omega t_2) \right], \end{aligned} \quad (6.39)$$

para llegar a la última expresión se han usado las identidades

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2) &= 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2) &= 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

Se escribió la correlación como en (6.39) para que la comparación con los resultados que serán obtenidos en 7 sea directa.

6.3 Vacío desplazado y comprimido

Ahora se aplicará el operador de desplazamiento al estado comprimido para obtener el estado desplazado y comprimido, $|\alpha, \xi\rangle$. Para estudiar este estado, primero se transformará cada operador bajo $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)$. Es necesario notar que $\hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)$ se transforma de manera muy diferente a los operadores. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{D}(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\xi) &= \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) + \alpha \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \sinh r + \alpha, \\ \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{D}(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\xi) &= \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) + \alpha^* \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} \exp(-i\theta) \sinh r + \alpha^*, \end{aligned} \quad (6.40)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha)^\dagger \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) &= (\hat{a} + \alpha) \cosh r - (\hat{a}^\dagger + \alpha^*) \exp(i\theta) \sinh r, \\ \hat{D}(\alpha)^\dagger \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) &= (\hat{a}^\dagger + \alpha^*) \cosh r - (\hat{a} + \alpha) \exp(-i\theta) \sinh r. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Es necesario remarcar que en la literatura el vacío analizado es $|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)|\xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle$, es decir, los operadores transforman bajo (6.40).

¿Qué le pasa al campo bajo la transformación $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)$? Primero hay que recordar que bajo $\hat{D}(\alpha)$ el operador de campo eléctrico se transforma como

$$\hat{E}_D = \hat{E} + E_\alpha, \quad (6.42)$$

donde \hat{E} es el operador de campo eléctrico y E_α es la onda plana vista en el capítulo anterior, ec. (5.3),

$$E_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left(\alpha \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - \alpha^* \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right).$$

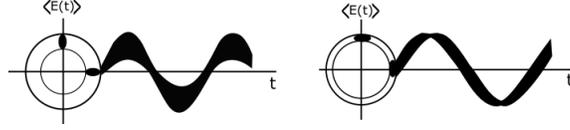


Fig. 6.1: Representación gráfica de la evolución temporal del campo desplazado y comprimido. Izquierda: El campo inicia en la cuadratura $\hat{\mathcal{X}}_1$. Derecha: El campo inicia en la cuadratura $\hat{\mathcal{X}}_2$

Ahora bien, como el operador de compresión no actúa sobre la onda plana E_α entonces el operador bajo $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)$ se transforma como

$$\hat{E}_{DS} = \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{E} \hat{S}(\xi) + E_\alpha, \quad (6.43)$$

donde el operador de campo eléctrico comprimido está dado por la ecuación (6.11). Físicamente se puede decir que el dispositivo que ‘comprime’ al vacío no altera a la onda E_α .

Por otra parte,

$$\hat{E}_{SD} = \hat{D}(\alpha)^\dagger \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{E} \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) = \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{E} \hat{S}(\xi) + E_{\alpha,S}, \quad (6.44)$$

donde

$$E_{\alpha,S} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[(\alpha \cosh r - \alpha^* \exp(i\theta) \sinh r) \exp\left(i\left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t\right)\right) - (\alpha^* \cosh r - \alpha \exp(-i\theta) \sinh r) \exp\left(-i\left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t\right)\right) \right], \quad (6.45)$$

que no es más que la onda E_α con amplitud modificada. Es decir, el dispositivo que altera al campo de vacío también modifica a la onda plana E_α .

Considérese de nuevo el caso $\theta = 0$ (recuérdese que otro ángulo implica sólo una rotación de los ejes). En este caso las cuadraturas del campo \hat{E}_{DS} son

$$\begin{aligned} \hat{X}_{DS1} &= \hat{\mathcal{X}}_1 + X_{\alpha 1} \\ \hat{X}_{DS2} &= \hat{\mathcal{X}}_2 + X_{\alpha 2}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

donde $X_{\alpha 1} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$ y $X_{\alpha 2} = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*)$ son las cuadraturas de la onda E_α . Es claro que

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{X}_{DS1} | 0 \rangle &= X_{\alpha 1}, \\ \langle 0 | \hat{X}_{DS2} | 0 \rangle &= X_{\alpha 2}, \\ \langle 0 | (\Delta \hat{X}_{DS1})^2 | 0 \rangle &= \langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_1)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{4} \exp(-2r), \\ \langle 0 | (\Delta \hat{X}_{DS2})^2 | 0 \rangle &= \langle 0 | (\Delta \hat{\mathcal{X}}_2)^2 | 0 \rangle = \frac{1}{4} \exp(2r), \end{aligned} \quad (6.47)$$

de donde sigue la típica representación de un estado comprimido, presentada en la figura 6.1, una onda sinusoidal con grosor variable, que representa las diferentes dispersiones de las cuadraturas.

Por otra parte, las cuadraturas del campo \hat{E}_{SD} son

$$\begin{aligned} \hat{X}_{SD1} &= \hat{\mathcal{X}}_1 + \hat{\mathcal{X}}_{\alpha 1} \\ \hat{X}_{SD2} &= \hat{\mathcal{X}}_2 + \hat{\mathcal{X}}_{\alpha 2}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

donde $\hat{\mathcal{X}}_{\alpha 1} = \frac{\exp(-r)}{2}(\alpha + \alpha^*)$ y $\hat{\mathcal{X}}_{\alpha 2} = \frac{\exp(r)}{2}(\alpha - \alpha^*)$ son las cuadraturas de la onda E_α comprimida. Éstas cumplen propiedades muy semejantes a las del campo E_{DS} , (6.47), pero hay que hacer el reemplazo de $\hat{X}_{\alpha i}$ por $\hat{\mathcal{X}}_{\alpha i}$. Asimismo, es posible hacer una representación del campo semejante a la mostrada en la figura 6.1, pero con una amplitud modificada.

6.4 Otra definición del vacío comprimido

A continuación se buscará de qué operador es eigenestado el vacío comprimido. Para ello primero se debe obtener la transformación $\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger$. A partir de la ecuación (6.10) se obtiene que

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger \cosh r = \hat{a} + \hat{S}(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi)^\dagger \exp(i\theta) \sinh r. \quad (6.49)$$

Asimismo, de la ecuación (6.9) se sigue que

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi)^\dagger \cosh r = \hat{a}^\dagger + \hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger \exp(-i\theta) \sinh r. \quad (6.50)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para $\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger$ se obtiene el resultado buscado [10] (sec. 7.1),

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger = \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \sinh r. \quad (6.51)$$

Ahora bien, nótese que

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger |\xi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{S}(\xi) |0\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{a} |0\rangle = 0, \quad (6.52)$$

es decir, el vacío comprimido es eigenestado del operador $\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger$ con eigenvalor cero. Esta ecuación de eigenvalores se suele escribir de la forma [10] (sec. 7.1)

$$(\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger) |\xi\rangle = 0, \quad (6.53)$$

donde $\mu = \cosh r$ y $\nu = \exp(i\theta) \sinh r$.

Por otra parte, ya que

$$\hat{D}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)^\dagger = \hat{a} - \alpha, \quad (6.54)$$

entonces,

$$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger\hat{D}(\alpha)^\dagger = (a - \alpha) \cosh r + (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) \exp(i\theta) \sinh r, \quad (6.55)$$

luego

$$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)^\dagger\hat{D}(\alpha)^\dagger |\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)\hat{a} |0\rangle = 0, \quad (6.56)$$

por lo tanto [10] (sec. 7.1)

$$(\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger) |\alpha, \xi\rangle = \gamma |\alpha, \xi\rangle, \quad (6.57)$$

es decir, el es eigenestado del operador $\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger$ con eigenvalor $\gamma = \alpha \cosh r + \alpha^* \exp(i\theta) \sinh r$.

Ya que [10] (sec. 7.1),

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2) \exp(i\theta), \\ \hat{a}^\dagger &= (\hat{Y}_1 - i\hat{Y}_2) \exp(-i\theta), \end{aligned} \quad (6.58)$$

la ecuación (6.57) se puede escribir de la forma [10] (sec. 7.1)

$$(\hat{Y}_1 + i \exp(-2r) \hat{Y}_2) |\alpha, \xi\rangle = \gamma \exp(-i\theta) \exp(-r) |\alpha, \xi\rangle. \quad (6.59)$$

Más aún, como $\gamma \exp(-i\theta) \exp(-r) = \langle \hat{Y}_1 \rangle + i \langle \hat{Y}_2 \rangle \exp(-2r)$ la ecuación se puede escribir de la forma

$$(\hat{Y}_1 + i \exp(-2r) \hat{Y}_2) |\alpha, \xi\rangle = (\langle \hat{Y}_1 \rangle + i \langle \hat{Y}_2 \rangle \exp(-2r)) |\alpha, \xi\rangle, \quad (6.60)$$

que es semejante a la ecuación (4.24) obtenida en el capítulo 4, para los paquetes de mínima dispersión. Tomando $\hat{A} = \hat{Y}_1$ y $\hat{B} = \hat{Y}_2$ (ver capítulo 4 sección 4.1) se obtiene que [10] (sec. 7.1)

$$\left\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \exp(-2r), \quad \left\langle (\Delta \hat{Y}_2)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \exp(2r), \quad (6.61)$$

es decir se minimiza la desigualdad de Heisenberg.

6.5 Representación de número de los estados comprimidos

Ahora se escribirá el vacío comprimido en términos de la base $\{|n\rangle\}$,

$$|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (6.62)$$

Para encontrar C_n se puede hacer lo siguiente,

$$(\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger)|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger)|n\rangle = 0, \quad (6.63)$$

entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\mu\sqrt{n+1}|n\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1}\nu\sqrt{n}|n\rangle = 0, \quad (6.64)$$

por lo tanto

$$C_{n+1} = -\frac{\nu}{\mu}\sqrt{\frac{n}{n+1}}C_{n-1}. \quad (6.65)$$

Nótese que para n par, la fórmula de recurrencia determina el valor de la constante C_i para i impar. Mientras que n impar determina las C_i pares. Para incluir el vacío como elemento de la suma debemos considerar n impar, es decir,

$$C_{2n+2} = -\frac{\nu}{\mu}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\frac{1}{2}}C_{2n}, \quad (6.66)$$

haciendo $2n+2 = 2m$ se puede escribir la fórmula anterior como

$$\begin{aligned} C_{2m} &= -\frac{\nu}{\mu}\left(\frac{2m-1}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}C_{2m-2} \\ &= \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\left[\frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m)(2m-2)}\right]^{\frac{1}{2}}C_{2m-4} \\ &\quad \vdots \\ &= (-1)^m\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^m\left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\right]^{\frac{1}{2}}C_0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Para encontrar el valor de C_0 simplemente se normaliza el estado, es decir,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |C_{2m}|^2 = |C_0|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \tanh^{2m} r \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = 1, \quad (6.68)$$

donde se ha sustituido $\nu/\mu = \exp(i\theta)\tanh r$. Dado que

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\tanh^2 r)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 r}} = \frac{1}{\operatorname{sech} r}, \quad (6.69)$$

entonces $C_0 = \sqrt{\operatorname{sech} r}$. Finalmente el vacío comprimido se puede escribir de la forma [10] (sec. 7.1)

$$|\xi\rangle = \sqrt{\operatorname{sech} r} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{2m!}}{2^m m!} (\exp(i\theta)\tanh r)^m |2m\rangle, \quad (6.70)$$

donde se ha usado que $(2m)!! = 2^m m!$ y $(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$. Una vez obtenido este resultado es muy sencillo conocer la distribución del estado $|n\rangle$ en $|\xi\rangle$. Aunque hay que distinguir si n es par o impar [10] (sec. 7.1),

$$\begin{aligned} P_{2m} &= |\langle 2m|\xi\rangle|^2 = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \operatorname{sech} r \tanh^{2m} r, \\ P_{2m+1} &= |\langle 2m+1|\xi\rangle|^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Entonces cuando se comprime el vacío el estado resultante contiene únicamente fotones en un número par. Es necesario remarcar que, a semejanza del estado coherente, esta distribución depende de la forma en que se prepara el sistema, pues la distribución obtenida es reminiscencia de que el operador de número (y la energía) no está en su representación diagonal.

Por otra parte, el operador de número se transforma como,

$$\begin{aligned} \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) &= \hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) [\hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \exp(i\theta) \operatorname{senh} r] \\ &= \cosh(2r) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \operatorname{senh} r \cosh r (\exp(i\theta) \hat{a}^{\dagger 2} + \exp(-i\theta) \hat{a}^2) + \operatorname{senh}^2 r, \end{aligned} \quad (6.72)$$

de donde queda claro que el operador tiene elementos fuera de la diagonal. Entonces el hamiltoniano se transforma como

$$\hat{H}_S = \hbar\omega \left(\cosh(2r) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \operatorname{senh} r \cosh r (\exp(i\theta) \hat{a}^{\dagger 2} + \exp(-i\theta) \hat{a}^2) + \operatorname{senh}^2 r + \frac{1}{2} \right), \quad (6.73)$$

por lo tanto,

$$\langle 0|\hat{H}_S|0\rangle = \hbar\omega \left(\operatorname{senh}^2 r + \frac{1}{2} \right), \quad (6.74)$$

es decir, el ‘proceso de compresión’ ha aumentado la energía de vacío. Es claro que el dispositivo que comprime al vacío de alguna manera cede energía.

Finalmente, siguiendo un procedimiento análogo se obtiene que [10] (sec. 7.1)

$$\begin{aligned} |\alpha, \xi\rangle &= \sqrt{\operatorname{sech} r} \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\alpha^{*2} \exp(i\theta) \tanh r\right) \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\frac{1}{2} \exp(i\theta) \tanh r]^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} H_n \left[\gamma (\exp(i\theta) \operatorname{senh}(2r))^{-\frac{1}{2}} \right] |n\rangle, \end{aligned} \quad (6.75)$$

donde H_n es el polinomio de Hermite de grado n . La distribución del estado $|n\rangle$ en $|\alpha, \xi\rangle$ resulta ser [10] (sec. 7.1)

$$\begin{aligned} P_n &= |\langle n|\alpha, \xi\rangle|^2 = \frac{(\frac{1}{2} \operatorname{sech} r \tanh r)^n}{n!} \exp\left(-|\alpha|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^{*2} \exp(i\theta) + \alpha^2 \exp(-i\theta)) \tanh r\right) \\ &\times \left| H_n \left[\gamma (\exp(i\theta) \operatorname{senh}(2r))^{-\frac{1}{2}} \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Nuevamente, esta expresión complicada depende del hecho que el operador de número no esté en una base ortogonal, es decir, depende de como se prepare el sistema.

Capítulo 7

Amplificación paramétrica de un modo del cpc

En este capítulo se analizará lo que le sucede a un modo del campo de punto cero real cuando penetra un medio no lineal. En particular el análisis se centrará en medios no lineales de segundo orden, pues de este tipo son los cristales que se usan en los laboratorios de óptica cuántica para generar el vacío comprimido, además de otra multitud de experimentos.

7.1 Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

Cuando un campo electromagnético penetra un medio material genera efectos sobre el medio, lo que a la vez produce campos eléctricos y magnéticos, llamados polarización (\vec{P}) y magnetización (\vec{M}), que deben ser sumados al campo entrante para hacer una descripción completa del campo electromagnético total dentro del material. Al campo eléctrico total se le llama desplazamiento (\vec{D}); el campo magnético sigue llamándose igual, pero se denota con \vec{H} . Se tiene que [12] (sec. 2.1)

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{x}, t) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{P}(\vec{x}, t) \\ \vec{H}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{x}, t) - \vec{M}(\vec{x}, t).\end{aligned}\tag{7.1}$$

Las ecuaciones que satisfacen \vec{D} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} en conjunto son llamadas ecuaciones de Maxwell en medios materiales o macroscópicas, y son [12] (sec. 2.1)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f,\tag{7.2a}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,\tag{7.2b}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\tag{7.2c}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\tag{7.2d}$$

donde ρ_f y \vec{j}_f son la densidad de cargas libres y la densidad de corriente libre, respectivamente.

Las cuatro ecuaciones (7.2) no bastan para determinar todas las componentes de los cuatro campos. Es necesario introducir ecuaciones constitutivas que consideran a los campos \vec{D} y \vec{H} como funciones de \vec{E} y \vec{B} . La forma más simple de estas ecuaciones es una relación lineal de la forma [12] (sec. 2.4)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H},\tag{7.3}$$

donde $\epsilon_r = (1 + \chi_e)$ es llamada la permitividad relativa y χ_e es llamada susceptibilidad eléctrica. Asimismo $\mu_r = (1 + \chi_m)$ es llamada la permeabilidad relativa y χ_m la susceptibilidad magnética. En realidad lo que se ha hecho es suponer que la polarización eléctrica es un campo proporcional al campo eléctrico, y que la magnetización es un campo proporcional al campo magnético \vec{H} ,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}; \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (7.4)$$

Es claro que no todos los medios cumplirán las ecuaciones anteriores. En particular a nosotros nos interesa precisamente la solución a (7.2) para medios no lineales.

Considérese medios cuya susceptibilidad magnética sea muy pequeña, de tal forma que se pueda despreciar la magnetización, y que la polarización sea no lineal, es decir que sea necesario escribirla en la forma [12] (sec. 2.4),

$$P = \epsilon_0 \chi^{(1)} E + \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} \exp(3) + \dots \quad (7.5)$$

Nótese que $\chi^{(1)} = \chi_e$. En general $\chi^{(n)}$ es llamada la susceptibilidad eléctrica de orden n y $P^{(n)} = \epsilon_0 \chi^{(n)} E^n$ es llamada la polarización no lineal de orden n , para $n > 1$. La ecuación (7.5) es válida para medios no absorbentes y no dispersivos. Para medios que no cumplen con tales requisitos la susceptibilidad eléctrica se vuelve un tensor, de tal forma que la polarización a segundo orden debe escribirse en la forma [12] (sec. 2.4),

$$P_i^{(2)} = \epsilon_0 D \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k, \quad (7.6)$$

donde $\chi_{ijk}^{(2)}$ son las componentes del tensor de susceptibilidad, que han sido medidas para los medios más usuales en el laboratorio. Sin embargo, aquí se usará la ecuación (7.5) para la polarización de segundo orden pues es una aproximación suficiente para el objetivo buscado, que es comparar el promedio de un modo del campo de punto cero real que atraviesa un cristal no lineal, con el valor esperado del operador de campo eléctrico transformado bajo el operador de compresión y promediado sobre el estado del vacío. Se verá que ambos resultados coinciden.

Antes de continuar analizando la polarización de segundo orden, se procederá a describir cualitativamente los fenómenos que genera un cristal no lineal de segundo orden. La descripción que se derá es idéntica a la presentada por [17] en términos de fotones. No obstante sólo interesarán descripciones (cuantitativas) clásicas del problema. El primer fenómeno es la generación de segundo armónico o doblamiento de frecuencia (fig. 7.1 a), se basa en excitar el medio no lineal con un haz de frecuencia ω para generar un haz de frecuencia 2ω . En términos cuánticos, un átomo (sucede lo mismo con el resto) del medio absorbe un fotón de frecuencia ω que le permite pasar a un nivel virtual de energía $\hbar\omega$ por arriba del estado base, donde absorbe otro fotón de frecuencia ω subiendo de nuevo a otro estado virtual del doble de energía. Cuando el átomo vuelve a su estado base emite un fotón de frecuencia 2ω . El siguiente fenómeno es llamado suma de frecuencias (fig. 7.1 b), en el cual el medio es excitado por dos haces de frecuencia ω_1 y ω_2 , respectivamente. Un átomo del medio absorbe un fotón de energía ω_1 , subiendo a un primer estado virtual, donde absorbe un fotón de frecuencia ω_2 que lo lleva a un segundo estado virtual. Cuando el átomo regresa a su estado base, emite un fotón de frecuencia $\omega_1 + \omega_2$. Finalmente el fenómeno llamado diferencia de frecuencias (fig. 7.1 c) consiste en excitar el medio con dos haces de frecuencia ω_1 y ω_2 , respectivamente. Un átomo del medio absorbe un fotón de frecuencia ω_1 ($\omega_1 > \omega_2$), entonces se eleva a un estado virtual de energía $\hbar\omega_1$ por arriba del estado base, de donde decae a otro nivel virtual, emitiendo a un fotón de frecuencia ω_2 . Cuando el átomo regresa al estado base emite un fotón de frecuencia $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$.

Considérese que se excita al medio con dos haces de frecuencia ω_1 y ω_2 , respectivamente. Escribese cada haz como las ondas electromagnéticas,

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= E_1 \exp(i(k_1 z - \omega_1 t)) + E_1^* \exp(-i(k_1 z - \omega_1 t)), \\ E_2(z, t) &= E_2 \exp(i(k_2 z - \omega_2 t)) + E_2^* \exp(-i(k_2 z - \omega_2 t)), \end{aligned} \quad (7.7)$$

entonces el campo con que se excita al medio es $E_1 + E_2$. Luego la polarización de segundo orden es

$$P(z, t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} (E_1 \exp(i(k_1 z - \omega_1 t)) + E_2 \exp(i(k_2 z - \omega_2 t)) + \text{c.c.})^2, \quad (7.8)$$

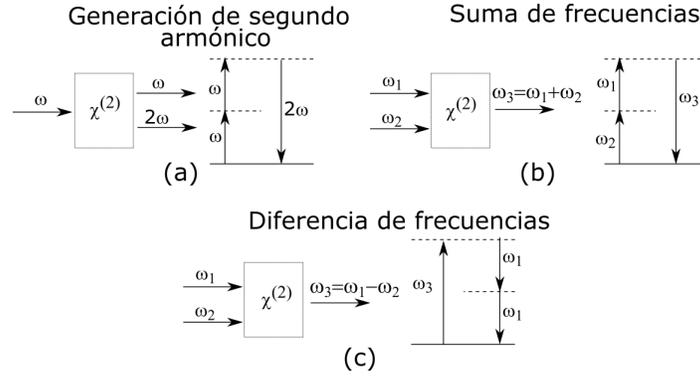


Fig. 7.1: Fenómenos no lineales

donde c.c. significa el complejo conjugado de la expresión antecesora. Si se desarrolla la ecuación (7.8) se obtiene

$$P^{(2)}(z, t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} [E_1^2 \exp(2i(k_1 z - \omega_1 t)) + E_2^2 \exp(2i(k_2 z - \omega_2 t)) + 2E_1 E_2 \exp(i(k_1 + k_2)z - i(\omega_1 + \omega_2)t) + 2E_1 E_2^* \exp(i(k_1 - k_2)z - i(\omega_1 - \omega_2)t) + c.c.] + 2\epsilon_0 \chi^{(2)} [E_1 E_1^* + E_2 E_2^*]. \quad (7.9)$$

Nótese que aparecen términos con las frecuencias $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ y $\omega_1 - \omega_2$, que corresponden a fenómenos de generación de segundo armónico (primeros dos términos), suma de frecuencias y diferencia de frecuencias. El término constante genera un efecto llamado rectificación óptica, que no es más que un campo estático.

Un cristal no lineal no suele generar todos los efectos descritos de manera eficiente. Bajo ciertas condiciones en el laboratorio puede amplificarse el efecto que se desea. Por ejemplo, si se requiere observar un haz de frecuencia igual a la diferencia de frecuencias de los haces entrantes, entonces el cristal se orienta en cierta dirección respecto al haz, o bien se calienta a cierta temperatura, de tal forma que el término $\exp(i(k_1 - k_2)z - i(\omega_1 - \omega_2)t)$ se encuentre en fase espacial con la onda generada por este efecto. Si $E_3(z, t) = E_3 \exp(i(k_3 z - \omega_3 t))$ es la onda generada por diferencia de frecuencias y se cumple que,

$$k_3 = k_1 - k_2, \quad (7.10)$$

entonces a la salida del cristal se observará un haz de frecuencia $\omega_1 - \omega_2$, pero no se observarán haces de frecuencias $2\omega_1$, $2\omega_2$ o $\omega_1 + \omega_2$; en realidad no es que no se generen tales haces, pero son prácticamente imperceptibles. La condición (7.10) se llama coincidencia de fases, y suele escribirse de la forma $k_1 = k_2 + k_3$ [12] (sec. 2.4).

De todos los fenómenos no lineales, aquí interesa el llamado amplificación paramétrica degenerada, que es un caso particular de la diferencia de frecuencias cuando $\omega_2 = \omega$, $\omega_1 = 2\omega$ y el haz de frecuencia ω_1 es más intenso que el haz de frecuencia ω_2 . En este caso, el haz generado por diferencia de frecuencias es un haz de frecuencia ω . Cuando eso sucede al haz de frecuencia ω_1 se le llama de bombeo, al haz de frecuencia ω_2 inactivo (idler) y al haz ω_3 señal. La razón por la que interesa este caso es que bajo estas condiciones se puede generar el vacío comprimido.

7.1.1 Ecuación para el campo eléctrico en un medio no lineal

En esta sección se encontrará la ecuación que satisface el campo eléctrico dentro de un medio no lineal. Se seguirá muy de cerca a [12]; el procedimiento seguido aquí servirá de guía para obtener la ecuación del campo magnético en un medio no lineal. Para comenzar se escribirá el desplazamiento eléctrico de la forma,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} + \vec{P}_{NL} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} + \vec{P}_{NL}, \quad (7.11)$$

es decir, se ha separado la polarización en su parte lineal, $\epsilon_0\chi_e\vec{E}$, y su parte no lineal denotada por \vec{P}_{NL} . En este caso la ecuación (7.2d), sin corrientes libres, se reescribe como

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_{NL}}{\partial t}. \quad (7.12)$$

De (7.2c) se sigue que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} = -\mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (7.13)$$

Usando la identidad

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (7.14)$$

la ecuación anterior se transforma en

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (7.15)$$

En ausencia de cargas libres la ecuación (7.2a) implica que

$$\epsilon_0\epsilon_r \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{P}_{NL}. \quad (7.16)$$

Seguendo a [12], se buscarán ondas transversales como solución a las ecuaciones de Maxwell, entonces $\nabla \cdot \vec{P}_{NL} = 0$, luego

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (7.17)$$

y esta es la ecuación que se tiene que resolver para el campo eléctrico en medios no lineales.

7.2 Solución a la ecuación para campo eléctrico en un medio no lineal

El siguiente objetivo es resolver la ecuación (7.17) cuando \vec{P}_{NL} corresponde a la polarización de segundo orden, y se ha montado el experimento para generar una amplificación paramétrica.

Sea ω_p la frecuencia del haz de bombeo y ω_i la frecuencia del haz inactivo. Recuérdese que en la amplificación paramétrica degenerada

$$\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2}, \quad (7.18)$$

donde ω_s es la frecuencia del haz señal.

Interesa conocer al haz señal dentro de un medio no lineal de segundo orden (en realidad importa cuando salga del medio, pero para eso primero se debe saber qué le sucedió adentro). Entonces se resolverá la ecuación (7.17) para el haz señal, cuando el medio es excitado por los haces de bombeo e inactivo. Considérese que cada uno de esos haces está dado por cada una de las siguientes ondas

$$\begin{aligned} \vec{E}_p(z, t) &= E_p(z) \exp(i(k_p z - \omega_p t)) \\ \vec{E}_i(z, t) &= E_i(z) \exp(i(k_i z - \omega_i t)) \\ \vec{E}_s(z, t) &= E_s(z) \exp(i(k_s z - \omega_s t)). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Se tomarán a las ondas electromagnéticas complejas y al final se obtendrá la parte real de la solución.

Ahora bien,

$$\nabla^2 \vec{E}_s = \frac{\partial^2 E_s(z, t)}{\partial z^2} = \left(-k_s E_s(z) + 2ik_s \frac{dE_s(z)}{dz} + \frac{d^2 E_s(z)}{dz^2} \right) \exp(i(k_s z - \omega_s t)). \quad (7.20)$$

Por otra parte, la aproximación de onda corta, implica que

$$\left| k_i \frac{dE_i}{dz} \right| \gg \left| \frac{d^2 E_i}{dz^2} \right|, \quad (7.21)$$

que significa que la longitud de onda de los haces son mucho más pequeñas que la amplitud de los mismos. Cuando eso se cumple

$$\nabla^2 \vec{E}_s = \frac{\partial^2 E_s(z, t)}{\partial z^2} = \left(-k_s E_s(z) + 2ik_s \frac{dE_s(z)}{dz} \right) \exp(i(k_s z - \omega_s t)). \quad (7.22)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_s}{\partial t^2} = -\omega_s^2 E_s(z) \exp(i(k_s z - \omega_s t)), \quad (7.23)$$

entonces la ecuación (7.17) se reduce a

$$\left(-k_s E_3(z) + 2ik_s \frac{dE_3(z)}{dz} \right) \exp(i(k_s z - \omega_s t)) = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega_s^2 E_3(z) \exp(i(k_s z - \omega_s t)) + \mu_0 \frac{d^2 P_{NL}}{dt^2}, \quad (7.24)$$

Esta ecuación se resuelve sin condiciones de frontera especificadas, pues al final de cuentas lo que se mide es el campo promedio. Tomando en cuenta que $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2$, se puede eliminar el primer término de ambos lados de la igualdad en (7.24), de tal forma que

$$2ik_s \frac{dE_s(z)}{dz} \exp(i(k_s z - \omega_s t)) = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}. \quad (7.25)$$

Como se está en el caso de amplificación paramétrica degenerada, P_{NL} corresponde al término de la polarización de segundo orden que genera la diferencia de frecuencias, es decir,

$$P^{(2)} = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_p E_i^* = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_p(z) E_i^*(z) \exp(i(k_p - k_i)z - i(\omega_p - \omega_i)t). \quad (7.26)$$

Recuérdese que es fundamental que se dé la condición de coincidencia de fases

$$k_p = k_i + k_s. \quad (7.27)$$

Por otra parte, de la ecuación (7.26) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} &= -\epsilon_0 \chi^{(2)} E_p(z) E_i(z) (\omega_p - \omega_i)^2 \exp(i(k_p - k_i)z - i(\omega_p - \omega_i)t) \\ &= -\epsilon_0 \chi^{(2)} \omega_s^2 E_p(z) E_i(z) \exp(i(k_p - k_i)z - i(\omega_p - \omega_i)t), \end{aligned} \quad (7.28)$$

donde se ha usado el hecho que en la amplificación paramétrica $\omega_p - \omega_i = \omega_s$. La ecuación para E_s resulta ser

$$2ik_s \frac{dE_s(z)}{dz} \exp(i(k_s z - \omega_s t)) = -\epsilon_0 \chi^{(2)} \omega_s^2 E_p(z) E_i(z) \exp(i(k_p - k_i)z - i(\omega_p - \omega_i)t), \quad (7.29)$$

⇔

$$\frac{dE_s(z)}{dz} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_r}} \omega_s \chi^{(2)} E_p(z) \exp(*)_i(z) \exp(i(k_p - k_i - k_s)z); \quad (7.30)$$

se ha usado de nuevo que $\omega_p - \omega_i = \omega_s \Leftrightarrow \omega_p - \omega_i - \omega_s = 0$.

Usando (7.18) y (7.27), la ecuación (7.30) se reduce a

$$\frac{dE_s(z)}{dz} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_r}} \omega_s \chi^{(2)} E_p(z) E_i^*(z) = ig E_p(z) E_i^*(z), \quad (7.31)$$

donde $g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_r}} \omega \chi^{(2)} = \frac{\omega \chi^{(2)}}{2nc}$; se ha escrito $\omega_s = \omega$, n es el índice de refracción del medio y c la velocidad de la luz. Ahora bien, las ondas $\vec{E}_s(z, t)$ y $\vec{E}_i(z, t)$ se consideran indistinguibles, por lo tanto (7.31) se transforma en

$$\frac{dE_\omega}{dz} = igE_p E_\omega^*, \quad (7.32)$$

donde se ha escrito $E_s = E_i = E_\omega$. La ecuación conjugada de (7.32) es

$$\frac{dE_\omega^*}{dz} = -ig^* E_p^* E_\omega. \quad (7.33)$$

Dada la definición de g , para un medio no absorbente, se tiene que ésta es real. Asimismo, si se considera $E_p = \text{constante} = E_0 \exp(i\phi)$ se puede tomar E_p imaginario puro cuando $\phi = \pm\pi/2$. Considérese que éste es el caso y tómesese $\gamma = igE_p$ real. Entonces (7.32) y (7.33) se reescriben como

$$\begin{aligned} \frac{dE_\omega}{dz} &= \gamma E_\omega^*, \\ \frac{dE_\omega^*}{dz} &= \gamma E_\omega. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Sumando y restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d \exp(+)}{dz} &= \gamma \exp(+), \\ \frac{d \exp(-)}{dz} &= \gamma \exp(-), \end{aligned} \quad (7.35)$$

donde $\exp(\pm) = E_\omega^* \pm E_\omega$, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \exp(+)(z) &= E_0^+ \exp(\gamma z), \\ \exp(-)(z) &= E_0^- \exp(-\gamma z). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Ahora bien, regresando a la onda señal $E_s(z, t) = E_s(z) \exp(i(k_s z - \omega_s t))$ se tiene que su parte real es

$$\begin{aligned} E_s(z, t) &= \frac{1}{2} [E_s(z) \exp(i(k_s z - \omega_s t)) + E_s^*(z) \exp(-i(k_s z - \omega_s t))] \\ &= \frac{E_s(z) + E_s^*(z)}{2} \cos(k_s z - \omega_s t) + \frac{E_s^*(z) - E_s(z)}{2i} \text{sen}(k_s z - \omega_s t) \\ &= \frac{E_0^+}{2} \exp(\gamma z) \cos(k_s z - \omega_s t) + \frac{E_0^-}{2i} \exp(-\gamma z) \text{sen}(k_s z - \omega_s t). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Por lo tanto, la onda señal, dentro del medio no lineal de segundo orden, ha sido amplificada exponencialmente en una de sus cuadraturas y deamplificada exponencialmente en la otra cuadratura. La amplificación del campo puede apreciarse en la figura 7.2. Como se dijo arriba, aquí interesa la onda señal cuando sale del medio, pues las mediciones que se realicen del campo se hacen fuera del cristal. Se supondrá que el medio es tal que la onda señal se transmite totalmente hacia fuera del cristal, como se ha representado en la figura 7.2. Se verá que esta suposición no es errónea, pues los cristales usados para amplificar el vacío están fabricados de tal forma que sean transparentes al modo amplificado. Además, comparando los resultados que se obtendrán en este capítulo con los del capítulo anterior se concluirá que el operador de compresión arroja resultados correctos bajo la aproximación de que el medio no lineal transmite íntegramente al haz señal.

7.3 Generación del vacío comprimido

En el laboratorio el vacío comprimido se puede generar de la siguiente manera (hay una representación esquemática del montaje experimental en la fig. 7.3). Un haz de frecuencia ω (En el experimento realizado

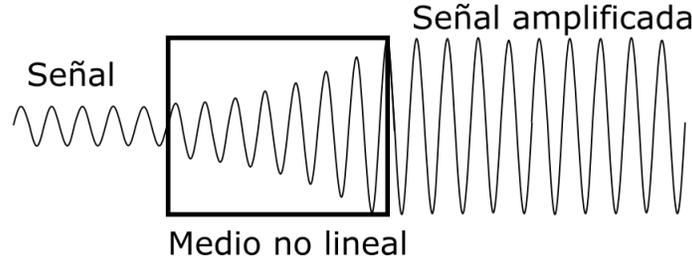


Fig. 7.2: Representación de la amplificación paramétrica de una onda por un medio no lineal de segundo orden. El campo dentro del medio no lineal es modulado exponencialmente en sus cuadraturas (una creciente y otra decreciente), como resultado el campo es amplificado. No se ha representado la onda de bombeo ni la onda inactiva.

por Wu *et al* [18] se empleó una frecuencia de $1.06\mu\text{m}$) es generado por un láser. El haz se divide en dos haces de la misma frecuencia. Uno de ellos se hace pasar por un cristal no lineal de segundo orden para doblarle su frecuencia por generación de segundo armónico (para ello se usa, por ejemplo en [18], un cristal de $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$). Este haz de frecuencia 2ω ($0.53\mu\text{m}$) se usa como haz de bombeo en un segundo cristal no lineal (por ejemplo, en [18], de $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$ de dimensiones $25 \times 9 \times 8$ mm calentado a 98°C). El cristal se calienta para que se cumpla la condición de coincidencia de fases. Cabe destacar que este cristal transmite un haz de frecuencia ω casi íntegramente, en un 98% o 99%) para hacer amplificar paraméricamente un modo de frecuencia ω del cpc. Finalmente los haces se hacen pasar por un medio que absorbe al haz de bombeo y deja pasar libremente al modo del cpc amplificado. Las cuadraturas del modo del cpc amplificado se detectan empleando la técnica de detección homodina. Con el dispositivo descrito se logra reducir el ruido generado por el vacío en un 50% por debajo del normal [18]. Esto corresponde a un parámetro de compresión de 0.3. Por el momento el enfoque será dirigido al proceso de amplificación del haz, pues la descripción con el campo de punto cero real será llevada hasta ese punto; la detección homodina se dejará para el final del capítulo, simplemente como un complemento.

7.4 Modo del campo de punto cero amplificado paraméricamente

Considérese un modo del campo de punto cero real de frecuencia ω ,

$$E(\vec{x}, t) = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[X_1 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - X_2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right]. \quad (7.38)$$

Según la ecuación (7.37), si este modo es amplificado paraméricamente y transmitido de manera íntegra, cuando salga del medio el campo será

$$E_A(\vec{x}, t) = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[X_1 \exp(-r) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - X_2 \exp(r) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right], \quad (7.39)$$

donde se ha escrito $r = \gamma l$, donde l es la anchura del medio no lineal. Las propiedades estadísticas globales del cpc no han cambiado, éste sigue siendo un campo azaroso, pues sólo se le ha modificado la amplitud a un modo. Entonces se seguirán tomando las mismas propiedades estadísticas del campo consideradas en el capítulo 3. Las cuadraturas del modo amplificado son

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \exp(-r) X_1 = \frac{\exp(-r)}{2\sqrt{2}} (a + a^*) \\ \mathcal{X}_2 &= \exp(r) X_2 = \frac{\exp(r)}{2\sqrt{2}i} (a - a^*). \end{aligned} \quad (7.40)$$

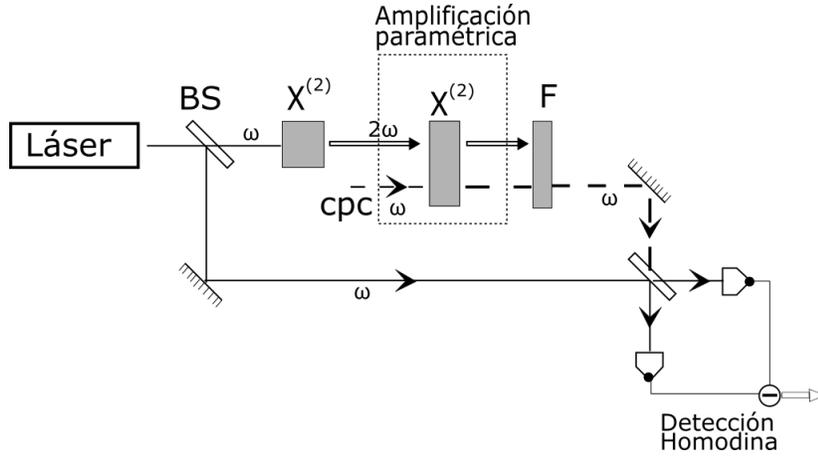


Fig. 7.3: Representación esquemática del arreglo para comprimir el vacío. El haz de un láser de frecuencia ω se divide en dos haces. Uno de ellos se hace pasar por un cristal no lineal de segundo orden (señalado con $\chi^{(2)}$ en la figura) para doblar su frecuencia. El nuevo haz de frecuencia 2ω se usa como haz de bombeo para amplificar paraméricamente un modo del campo de punto cero de frecuencia ω . La amplificación se da en el segundo cristal de segundo orden. Las haces que salen del segundo cristal se hacen pasar por un medio F que absorbe al haz de bombeo, pero deja pasar libremente al modo del cpc amplificado. Finalmente se detectan las cuadraturas del cpc empleando detección homodina. La imagen ha sido tomada de [12], pág 144.

Entonces las cuadraturas promedio, y por lo tanto el campo promedio, son cero,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{X}_1 \rangle &= \exp(-r) \langle X_1 \rangle = 0 \\
 \langle \mathcal{X}_2 \rangle &= \exp(r) \langle X_2 \rangle = 0 \\
 \langle E_A \rangle &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\langle X_1 \rangle \exp(-r) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \langle X_2 \rangle \exp(r) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right] = 0,
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

donde se ha usado la ecuación (3.65), que el promedio de las cuadraturas del campo son cero. A continuación se calcularán las dispersiones de las cuadraturas,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{X}_1^2 \rangle &= \exp(-2r) \langle X_1^2 \rangle = \frac{\exp(-2r)}{4}, \\
 \langle \mathcal{X}_2^2 \rangle &= \exp(2r) \langle X_2^2 \rangle = \frac{\exp(2r)}{4},
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

donde se ha usado la ec. (3.67). Por lo tanto,

$$\langle (\Delta \mathcal{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \mathcal{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{16}, \tag{7.43}$$

es decir, las cuadraturas del campo minimizan la desigualdad de Heisenberg. Esto quiere decir que el campo de punto cero amplificado paraméricamente sigue siendo de mínima dispersión. Aunque es claro que una de sus cuadraturas tiene mayor dispersión que la otra. Los resultados obtenidos en (7.41), (7.42) y (7.43) son análogos a los encontrados para el estado comprimido, ecuaciones (6.22) y (6.23).

7.5 Distribución del campo

La función generadora de momentos del campo eléctrico amplificado, dado por la ecuación (7.39) se puede calcular fácilmente si antes se escribe al campo (7.39) de la forma

$$\begin{aligned} E_A(\vec{x}, t) &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}} \left[a \left(\cosh r \exp \left(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) + \sinh r \exp \left(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - a^* \left(\cosh r \exp \left(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) + \sinh r \exp \left(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Aa + Ba^*), \end{aligned} \quad (7.44)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left(\cosh r \exp \left(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) + \sinh r \exp \left(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) \right), \\ B &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left(\cosh r \exp \left(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) + \sinh r \exp \left(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \right) \right). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Nótese que A y B son las mismas que las definidas por la ecuación (6.26), para el campo comprimido cuántico. El cálculo de la varianza da

$$\langle E_A^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle A^2 a^2 + 2ABaa^* + B^2 a^{*2} \rangle = AB, \quad (7.46)$$

igual al caso cuántico, ec. (6.29). Ahora queda claro por qué la varianza, en promedio, es mayor a la del campo ‘comprimido’; porque en realidad el campo ha sido amplificado. De (7.46) se sigue que

$$\sigma_E^2 = \langle (\Delta E_A)^2 \rangle = AB. \quad (7.47)$$

Con estos resultados se puede calcular de manera fácil la función generadora de momentos del campo eléctrico amplificado. Para hacerlo se seguirá el procedimiento de la sección 3.3.1 del capítulo 3.

$$\begin{aligned} \langle \exp(\beta E_A) \rangle &= \left\langle \exp \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} (Aa + Ba^*) \right) \right\rangle = \sum_n \frac{\beta^n}{2^{\frac{n}{2}} n!} \langle (Aa + Ba^*)^n \rangle \\ &= \sum_n \frac{\beta^n}{2^{\frac{n}{2}} n!} \sum_k \binom{n}{k} A^{n-k} B^k a^{n-k} a^{*k} \langle a^{n-k} a^{*k} \rangle \\ &= \sum_n \frac{\beta^{2n}}{2^n (2n)!} \sum_k \binom{2n}{n} A^{2n-k} B^k \langle a^{2n-k} a^{*k} \rangle, \end{aligned} \quad (7.48)$$

donde se han dejado en la última suma únicamente los términos con potencias pares, pues los términos con potencias impares se anulan, como se ha visto en la sección 3.3.1. Recordando que $\langle a^n a^{*m} \rangle = \delta_{nm} n!$, entonces

$$\langle \exp(\beta E_A) \rangle = \sum_n \frac{\beta^{2n}}{2^n (2n)!} A^n B^n n! = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^2 \sigma_E^2}{2} \right)^n = \exp \left(\frac{\beta^2 \sigma_E^2}{2} \right), \quad (7.49)$$

donde σ_E^2 está dada por la ecuación (7.48). Por lo tanto, el campo sigue teniendo distribución gaussiana; ahora con la varianza dada por (7.47). Este resultado es exactamente el mismo al encontrado para el campo comprimido cuántico, ec. (6.31), por lo tanto, ambos campos tienen la misma estadística.

7.6 Correlaciones del campo

La correlación de dos puntos del campo modulado, dado por (7.39), es

$$\begin{aligned}
 \langle E(\vec{x}_1, t_1)E(\vec{x}_2, t_2) \rangle &= \frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V} \left\langle \left[\exp(-r)(a + a^*)\text{sen}(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{x}_1) + i \exp(r)(a - a^*) \cos(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{x}_1) \right] \right. \\
 &\quad \times \left. \left[\exp(-r)(a + a^*)\text{sen}(\omega t_2 - \vec{k} \cdot \vec{x}_2) + i \exp(r)(a - a^*) \cos(\omega t_2 - \vec{k} \cdot \vec{x}_2) \right] \right\rangle \\
 &= \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[\exp(-2r) \text{sen}(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{x}_1) \text{sen}(\omega t_2 - \vec{k} \cdot \vec{x}_2) \right. \\
 &\quad \left. + \exp(2r) \cos(\omega t_1 - \vec{k} \cdot \vec{x}_1) \cos(\omega t_2 - \vec{k} \cdot \vec{x}_2) \right], \tag{7.50}
 \end{aligned}$$

que es igual a la simetrización de la correlación de dos puntos cuántica, obtenida en la ecuación (6.39). No está de más remarcar que en el tratamiento empleado aquí no se ha usado en ningún momento operadores, sino ondas planas reales. Tampoco está de más comentar que el cálculo hecho en este capítulo es notablemente más sencillo que el hecho en el capítulo 6.

7.7 Energía del campo

A continuación se calculará la energía del campo de punto cero amplificado. Para empezar, el módulo al cuadrado del campo eléctrico comprimido es

$$|E|^2 = \frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \left[\exp(-2r) X_1^2 \text{sen}^2(\omega t - kz) + \exp(2r) X_2^2 \cos^2(\omega t - kz) - 2X_1 X_2 \text{sen}(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz) \right]. \tag{7.51}$$

Una vez que el campo sale del cristal es de nuevo una onda libre, por lo tanto el campo magnético contribuye de igual forma al campo total. La energía por unidad de volumen es

$$U = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \left[\exp(-2r) X_1^2 \text{sen}^2(\omega t - kz) + \exp(2r) X_2^2 \cos^2(\omega t - kz) - 2X_1 X_2 \text{sen}(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz) \right]. \tag{7.52}$$

Entonces la energía media del campo en un volumen V es

$$H = \hbar\omega \left[\exp(-2r) X_1^2 + \exp(2r) X_2^2 \right], \tag{7.53}$$

Por lo tanto el valor esperado de la energía es

$$\langle H \rangle = \hbar\omega \left[\frac{\exp(-2r)}{4} + \frac{\exp(2r)}{4} \right] = \frac{\hbar\omega}{2} \cosh(2r) = \hbar\omega \left(\text{senh}^2 r + \frac{1}{2} \right), \tag{7.54}$$

justo la energía del vacío comprimido cuántico. Pero las fluctuaciones ya no son las mismas, pues

$$\left\langle (\Delta H^2)^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2 \omega^2}{4} \cosh 4r, \tag{7.55}$$

mientras que para el vacío comprimido cuántico

$$\left\langle (\Delta \hat{H}^2)^2 \right\rangle = 2\hbar^2 \omega^2 \text{senh}^2 r \cosh^2 r = \hbar^2 \omega^2 [\cosh^4 r + 1]. \tag{7.56}$$

Considérese el campo identificado como coherente en el capítulo 5,

$$E(\vec{x}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\epsilon_0 V}} \left[(a + \sqrt{2}) \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) - (a^* + \sqrt{2}\alpha^*) \exp(-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \right],$$

Se vio que este campo puede ser escrito de la forma

$$E = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[X_1 \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - X_2 \text{cos}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right],$$

donde

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[a + a^* + \sqrt{2}(\alpha + \alpha^*) \right], \\ X_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}i} \left[a - a^* + \sqrt{2}(\alpha - \alpha^*) \right]. \end{aligned}$$

Si este campo se hace pasar por un cristal de segundo orden, que a la vez es bombeado por un haz potente de frecuencia 2ω , entonces a la salida el campo será

$$\begin{aligned} E &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\exp(-r) X_1 \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \exp(r) X_2 \text{cos}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right] \\ &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\mathcal{X}_1 \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \mathcal{X}_2 \text{cos}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \frac{\exp(-r)}{2\sqrt{2}} \left[a + a^* + \sqrt{2}(\alpha + \alpha^*) \right], \\ \mathcal{X}_2 &= \frac{\exp(r)}{2\sqrt{2}i} \left[a - a^* + \sqrt{2}(\alpha - \alpha^*) \right]. \end{aligned}$$

En este caso las cuadraturas del campo ya no promedian a cero, sino

$$\langle \mathcal{X}_1 \rangle = \frac{\exp(-r)}{2} (\alpha + \alpha^*); \quad \langle \mathcal{X}_2 \rangle = \frac{\exp(r)}{2i} (\alpha - \alpha^*). \quad (7.57)$$

$$\langle \mathcal{X}_1^2 \rangle = \frac{\exp(-2r)}{4} [1 + (\alpha + \alpha^*)^2]; \quad \langle \mathcal{X}_2^2 \rangle = \frac{\exp(2r)}{4} [1 - (\alpha - \alpha^*)^2]. \quad (7.58)$$

Luego, las dispersiones de las cuadraturas corresponden a las del campo obtenido al transformar primero bajo el operador de compresión y luego bajo el operador de desplazamiento, es decir al estado $\hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle$, ec. (6.48). Además satisfacen la igualdad de la relación de Heisenberg,

$$(\Delta \mathcal{X}_1)^2 = \frac{f^2(x)}{4}; \quad (\Delta \mathcal{X}_2)^2 = \frac{(f^{-1}(x))^2}{4}; \quad (\Delta \mathcal{X}_1)^2 (\Delta \mathcal{X}_2)^2 = \frac{1}{16}. \quad (7.59)$$

Ahora bien, si el campo E_α (la onda de energía $\hbar\alpha\alpha^*$ identificada en el capítulo 4 y 5) no se hace pasar por el cristal, de manera que sólo el vacío es amplificado, entonces el campo final será

$$\begin{aligned} E(\vec{x}, t) &= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[\hat{\mathcal{X}}_1 \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - \hat{\mathcal{X}}_2 \text{cos}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right] \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left[X_{\alpha 1} \text{sen}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) - X_{\alpha 2} \text{cos}(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \right], \end{aligned} \quad (7.60)$$

donde $\mathcal{X}_1 = \frac{\exp(-r)}{2\sqrt{2}}(a + a^*)$, $\mathcal{X}_2 = \frac{\exp(r)}{2\sqrt{2}i}(a - a^*)$ son las cuadraturas del campo de punto cero amplificado paraméricamente y $X_{\alpha 1} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)$, $X_{\alpha 2} = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*)$ son las cuadraturas del campo E_α sin amplificar. Es claro que las cuadraturas del sistema total son

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathcal{X}_1 + X_{\alpha 1}, \\ X_2 &= \mathcal{X}_2 + X_{\alpha 2}, \end{aligned} \quad (7.61)$$

luego

$$\langle X_1 \rangle = X_{\alpha 1}, \quad \langle X_2 \rangle = X_{\alpha 2}, \quad (7.62)$$

y

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle = \langle (\Delta \mathcal{X}_1)^2 \rangle, \quad \langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \langle (\Delta \mathcal{X}_2)^2 \rangle, \quad (7.63)$$

por lo tanto las cuadraturas minimizan la desigualdad de Heisenberg. El campo así formado se comporta de la misma manera que el campo cuántico obtenido al transformar primero bajo el operador de desplazamiento y luego bajo el operador de compresión, es decir, el estado $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle$ (ver ec. 6.47).

7.8 Detección homodina del vacío comprimido

Se ha dejado esta sección hasta el final porque sólo servirá para complementar la sección 7.3, acerca de la generación del vacío comprimido. No se ha llevado la descripción con el campo de punto cero real hasta el proceso de detección, a sabiendas de que los momentos de la energía según dicha descripción no coinciden con los momentos de la energía según la descripción cuántica.

El diagrama experimental de la detección homodina está representado en la parte inferior de la figura 7.3. Consiste de un divisor de haz y dos fotodiodos, representados con el símbolo ∇ en la figura 7.3. El proceso de detección necesita de dos entradas, un haz señal y otro llamado oscilador local; ambos haces tienen la misma frecuencia, pero el oscilador local es más intenso. En particular, en el experimento para comprimir el vacío, descrito en la sección 7.3, el oscilador local es generado con el mismo haz de bombeo antes de doblarle la frecuencia. Por esa razón en la figura 7.3 se hace pasar el haz por un divisor, antes de doblarle la frecuencia. Ambos fotodiodos son conectados a un dispositivo que mide la diferencia de corriente producida por éstos. La diferencia de frecuencias elimina cualquier ruido generado por ‘efectos clásicos’. Si no se introduce un haz señal, se entiende que la señal se debe al vacío cuántico, y el ruido medido por la diferencia de corrientes es únicamente ruido generado por el vacío.

Los campos que entran a cada detector se escribirán de la forma

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{LO} \exp(i\theta_{LO}) + E_s)$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{LO} \exp(i\theta_{LO}) - E_s);$$

el signo menos en la segunda expresión se debe a que un divisor de haz 50:50 genera un desfazamiento de π entre ambas salidas. θ_{LO} es la fase, relativa a la señal, del oscilador local.

Se puede escribir la señal en términos de sus cuadraturas,

$$E_s = E_s^{X_1} + iE_s^{X_2};$$

las cuadraturas son ondas desfazadas $\pi/2$ una de otra (por ejemplo $X_1 \sin(kz - \omega t)$ es una cuadratura), no sólo el término X_1 que se ha estado llamando cuadratura; esta terminología es común, y se usa siempre que no exista motivo de confusión. Los campos que entran a los detectores se pueden reescribir de la forma

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(E_{LO} \cos \theta_{LO} + E_s^{X_1}) + i(E_{LO} \sin \theta_{LO} + E_s^{X_2})],$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(E_{LO} \cos \theta_{LO} - E_s^{X_1}) + i(E_{LO} \sin \theta_{LO} - E_s^{X_2})]. \quad (7.64)$$

La corriente generada por cada campo es proporcional al cuadrado del módulo de éste, luego, la diferencia de las corrientes es

$$i_1 - i_2 \propto (E_1 E_1^* - E_2 E_2^*) \propto 2E_{LO} (\cos \theta_{LO} E_s^{X_1} + \sin \theta_{LO} E_s^{X_2}), \quad (7.65)$$

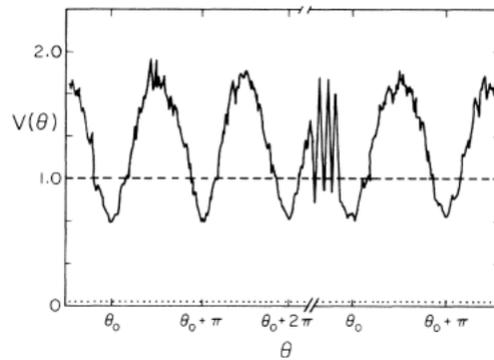


Fig. 7.4: Medida de la reducción del ruido del vacío comprimido, con respecto a la fase relativa entre un modo del vacío y el oscilador local. El ruido ha sido normalizado respecto al ruido del vacío sin comprimir. La línea punteada representa el ruido unidad. Imagen tomada de [18]

por lo tanto, si la fase relativa entre la señal y el oscilador local es $0, \pi, 2\pi \dots$, se estará detectando un campo proporcional a la primera cuadratura de la señal. Si la fase relativa es de $\pi/2, 3\pi/2 \dots$ se estará detectando un campo proporcional a la segunda cuadratura. Si la señal es el vacío el ruido debe bajar con respecto al ruido generado por el vacío sin comprimir, cuando se detecta la cuadratura deamplificada exponencialmente, y debe subir cuando se detecta la cuadratura amplificada exponencialmente. La figura 7.4 muestra el voltaje generado por la diferencia de corrientes cuando se comprime el vacío según el experimento descrito en la sección 7.3. Se puede apreciar que el ruido sube y baja, dependiendo de la fase del oscilado local.

Conclusiones

El objetivo del trabajo fue establecer un contacto entre el campo de punto cero de la electrodinámica estocástica y la óptica cuántica, comparando los valores esperados de las variables de campo definidas en ambas teorías. Se demostró, para los estados cuánticos coherente y comprimido, que el operador de campo eléctrico de ambos estados tienen la misma estadística que un sistema formado por el campo de punto cero real y una onda electromagnética de energía apropiada, pues todos los valores esperados de sus momentos coinciden con los valores esperados de los momentos del sistema clásico. Sin embargo no sucedió lo mismo con los operadores de correlación de dos puntos y de energía; en estos casos, los valores esperados coincidieron a lo más, hasta el segundo momento (para el caso de la energía). No obstante, cuando el operador de correlación se simetriza con respecto a sí mismo, su valor esperado coincide con la correlación del campo clásico correspondiente al estado coherente, hasta la correlación de segundo orden de dos puntos. Por otra parte, se hizo notar que tanto las potencias del operador de campo eléctrico como la simetrización del operador de correlación, son operadores que aparecen totalmente simetrizados respecto a los operadores canónicos del campo, \hat{p} y \hat{q} . Sin embargo, las potencias del operador de energía no resultan simétricas respecto a éstas y si se simetrizan agregando los términos restantes; el resultado tampoco coincidía con la energía del campo clásico. Entonces en conjunto podemos concluir que los operadores totalmente simetrizados, en óptica cuántica, describen sistemas libres, pues sus momentos coinciden con los momentos de un sistema clásico libre, que incluye a un campo de punto cero electromagnético estocástico. La energía que se mide de los estados cuánticos de la luz en el laboratorio es la energía de un campo en interacción con la materia (los detectores); matemáticamente esto se refleja en que el operador que describe el proceso no es simétrico respecto a \hat{q} y \hat{p} . En una investigación futura, será necesario profundizar más sobre los posibles ordenamientos de un mismo operador y su relación con el campo de punto cero real. Sobre todo será fundamental conectar los resultados del ordenamiento normal, muy importante en la óptica cuántica porque describe a los estados que se miden en el laboratorio, con el campo de punto cero real. En base a la experiencia adquirida en este trabajo, se cree que el camino a seguir es modificar la estadística de las variables canónicas del campo, porque los equipos de medición modifican localmente las propiedades estadísticas de éste. Es decir, se cree que los distintos ordenamientos de un operador pueden describir a las distintas maneras en que se pueden modificar localmente las propiedades estadísticas del campo de punto cero real.

Bibliografía

- [1] Boyer T. H. General connection between random electrodynamics and quantum electrodynamics for free electromagnetic fields and for dipole oscillator systems. *Phys. Rev. D*, 11:809–830, Feb 1975.
- [2] Santos E. Foundations of stochastic electrodynamics. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 22(2):201–214, 1974.
- [3] Marshall T. W. and Santos E. *Stochastic Optics: A Wave Theory of Light Based on Classical Probabilities*, pages 271–288. Springer Netherlands, Dordrecht, 1989.
- [4] Marshall T. W. and Santos E. Stochastic optics: A reaffirmation of the wave nature of light. *Foundations of Physics*, 18(2):185–223, 1988.
- [5] Gadella M. and Santos E. A generalized weyl correspondence: Applications. *Journal of Mathematical Physics*, 22(8):1651–1659, 1981.
- [6] de la Peña L. and Cetto A. M. *The Quantum Dice, An Introduction to Stochastic Electrodynamics*. Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [7] Mandel M. and Wolf E. *Optical Coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [8] Milonni P. *The quantum vacuum. An introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press, Inc., 1994.
- [9] Zangwill A. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [10] Gerry C. and Knight P. *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [11] de la Peña L. *Introducción a la mecánica cuántica*. Fondo de la cultura económica, 2006.
- [12] Fox M. *Quantum optics, an introduction*. Oxford University Press, 2006.
- [13] Papoulis A. *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill, third edition, 1991.
- [14] Shohat J. A. and Tamarkin J. D. *The problem of moments*. Number 1. American Mathematical Soc., 1943.
- [15] Cole D. C. Derivation of the classical electromagnetic zero-point radiation spectrum via a classical thermodynamic operation involving van der waals forces. *Physical Review A*, 42(4):1847, 1990.
- [16] de la Peña L., Cetto A. M., and Valdés A. *The emerging quantum, the physics behind quantum mechanics*. Springer, 2014.
- [17] Boyd R. *Nonlinear optics*. Elsevier, Academic Press, 2008.
- [18] Wu L., Kimble H., Hall J., and Wu H. Generation of squeezed states by parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2520–2523, Nov 1986.

- [19] Boyer T. H. Random electrodynamics: The theory of classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation. *Physical Review D*, 11(4):790, 1975.
- [20] Boyer T. H. The classical vacuum. *Scientific American*, 253(2):70–78, 1985.
- [21] Landau L. J. Gaussian quantum fields and stochastic electrodynamics. *Physical Review A*, 37(11):4449, 1988.
- [22] Hanbury-Brown R. and Twiss R. Q. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177(4497):27–29, 1956.
- [23] Hanbury-Brown R. and Twiss R. Q. Lxxiv. a new type of interferometer for use in radio astronomy. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 45(366):663–682, 1954.
- [24] Glauber R. J. Photon correlations. *Physical Review Letters*, 10(3):84, 1963.
- [25] Glauber R. J. Nobel lecture: One hundred years of light quanta. *Reviews of modern physics*, 78(4):1267, 2006.
- [26] Sudarshan E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Physical Review Letters*, 10(7):277, 1963.
- [27] Glauber R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766, 1963.
- [28] Klauder J. and Skagerstam B. *Coherent states: applications in physics and mathematical physics*. World scientific, 1985.
- [29] Mandel L. and Wolf E. Correlation in the fluctuating outputs from two square-law detectors illuminated by light of any state of coherence and polarization. *Physical Review*, 124(6):1696, 1961.
- [30] Purcell E. M. The question of correlation between photons in coherent light rays. *Nature*, 178:1449–1450, 1956.
- [31] Jackson J. D. *Classical electrodynamics*. John Wiley, third edition, 1999.
- [32] Loudon R. *The quantum theory of the light*. Oxford University Press, third edition, 2001.
- [33] Klauder J. and Sudarshan E. C. G. *Fundamentals of quantum optics*. Courier Corporation, 2006.
- [34] Scully M. and Suhail M. *Quantum optics*. Cambridge University Press, 2001.
- [35] Kuzyk M. G. *Lecture Notes in Nonlinear Optics: A student's perspective*. Createspace Independent Publishing Platform, 2013.