UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
MATEMÁTICAS
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: UNA APLICACIÓN AL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA CIRCUNFERENCIA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

PRESENTA:

JAIME VERGARA PRADO

TUTOR PRINCIPAL:

DR. ARTURO ERDELY RUIZ (FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

MTRO. VÍCTOR JOSÉ PALENCIA GÓMEZ (FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN)

DR. SERGIO CRUZ CONTRERAS (FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN)

MTRA. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA (FACULTAD DE CIENCIAS)

DRA. GISELA MONTIEL ESPINOSA (FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN)

SANTA CRUZ ACATLÁN, NAUCALPAN, ESTADO DE MÉXICO, DiCIEMBRE DE 2017

Las matemáticas no son meramente un lenguaje, sino una actividad mental, y los conceptos matemáticos no son palabras, sino realidades.

Hans Freudenthal

Agradezco a la UNAM, por haberme formado en diferentes etapas y ámbitos de mi vida. Esto incluye a la gente cuya actividad diaria hace de ella la máxima casa de estudios de México y que he tenido la fortuna de conocer en los diferentes roles que he desempeñado dentro de la institución: profesores, funcionarios, trabajadores y compañeros… varios de ellos mis amigos ya.

Al mismo tiempo, dedico este trabajo a Paty, quien es la luz de mi vida, y a Sinuhé, quien se encarga de dar sentido a la misma.

Jaime Vergara Prado

Diciembre de 2017

Resumen

La investigación tiene por objetivo comprobar si la teoría instruccional de la Educación Matemática Realista (EMR) contribuye a lograr el aprendizaje significativo, al menos en el nivel general descrito por la propia teoría instruccional, de uno de los temas principales del curso de geometría analítica en el nivel medio superior: la circunferencia. La metodología de contrastación de la hipótesis consiste en un experimento, siendo sujetos del mismo 27 estudiantes de un grupo del tercer semestre en el plantel Tequixquiac del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México, inscritos en el periodo 2016-2017. Los instrumentos son materiales didácticos sobre circunferencia, realizados bajo la esencia de la EMR y el enfoque por competencias, los cuales corresponden a una secuencia didáctica con duración de ocho sesiones de 100 minutos cada una, diseñada de conformidad con los lineamientos del Sistema Nacional de Bachillerato en México. Al final del experimento, 11% de los estudiantes no obtiene uno de los cuatro niveles contemplados por la EMR, 22% se ubican en el nivel situacional, 26% en el referencial, 41% en el general y ninguno alcanza el nivel formal. Aun cuando el contraste de la hipótesis no la avala, una de las conclusiones principales es que la propuesta didáctica para construir la ecuación ordinaria de la circunferencia funciona para los estudiantes que la han aplicado en el examen al final del tema.

Palabras clave: Educación Matemática Realista (EMR), circunferencia, nivel medio superior.

Abstract

The target of this research is to probe that the instructional Realistic Mathematics Education (RME) theory, contributes significantly to achieve learning, at least in the general level described by the own Instructional Theory, of one of the most important Analytic Geometry topics at high school: the circumference. The hypothesis testing methodology consists of an experiment, with 27 students from a group at campus Tequixquiac of Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México, coursing their 3rd semester in the period 2016-2017. The instruments are didactic materials about circumference, they have been created under RME essence and the competency approach, which correspond to a didactic sequence with eight sessions of 100 minutes each; this has been designed under the National System of Highschool guidelines from Mexico. At the final experiment stage, 11% of the students do not achieve one of the fourth levels stablish by RME, 22% on situational level, 26% on reference level, 41% located on general level and none of them reaches out the formal level. Although the contrast of the hypothesis does not support it, one of the principal conclusions it is that the didactic proposal to create the circumference ordinary equation could work out for the students that have applied for the final test topic.

Key words: Realistic Mathematics Education (RME), circumference, high-school.

Contenido

Índice de ilustraciones

Índice de tablas

Introducción

Este proyecto surgió a partir de los resultados obtenidos en el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) por los alumnos del plantel Tequixquiac del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (Cecytem); en ellos se apreciaron carencias en varios temas de matemáticas. Particularmente, para el tema de la circunferencia, PLANEA 2016 incluyó el reactivo número 69 (ver ilustración 1). De acuerdo con los resultados oficiales (SEP, 2016), el 56% de los 70 estudiantes del turno matutino y el 50% de 35 del vespertino que aplicaron la prueba en el citado plantel respondieron correctamente dicho reactivo, es decir, apenas uno de cada dos.

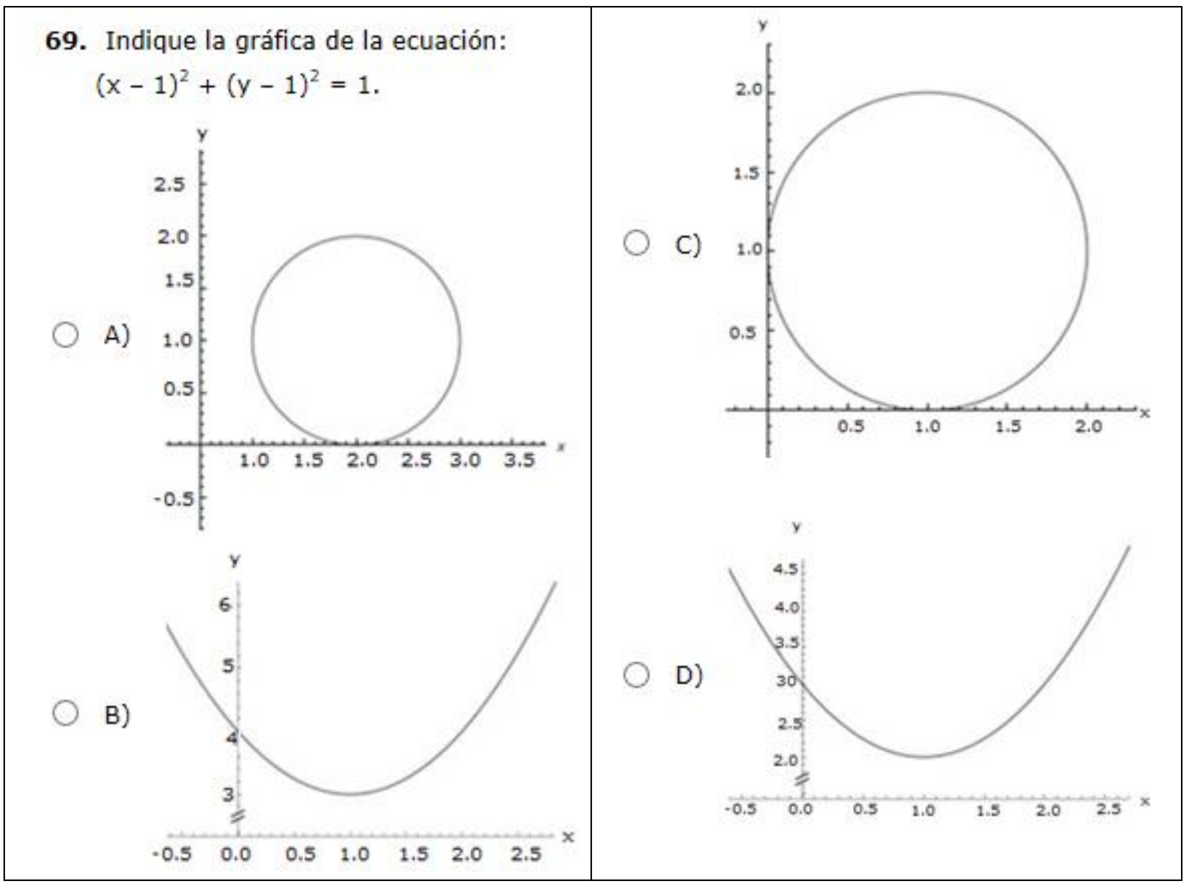


Ilustración 1. Reactivo 69 de la prueba PLANEA 2016. Fuente: tomado de (SEP, 2016).

El estudio de la circunferencia en la institución bajo estudio se ubica en el tercer semestre, mientras que PLANEA se aplica a quienes cursan el sexto. Como para estar inscrito en el último nivel del bachillerato un alumno debe tener aprobadas todas las asignaturas precedentes, los citados resultados muestran que en realidad los alumnos no aprendieron significativamente los conceptos relacionados con la circunferencia, aun cuando ya acreditaron la asignatura Geometría Analítica.

Así, la formulación del problema bajo estudio se propone de la siguiente manera:

¿En qué medida (5) una secuencia didáctica (6) basada en la Educación Matemática Realista (8) contribuye al aprendizaje significativo (7) de la circunferencia (4) en el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México (1), plantel Tequixquiac (2), periodo 2016-2017 (3)?

El objeto de estudio se explica a través de las siguientes definiciones:

(1) **Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México.** Es un subsistema de bachillerato tecnológico creado en 1994, con el objetivo de impulsar y consolidar los programas de educación media superior tecnológica en la entidad, abatiendo el rezago educativo, particularmente en zonas urbanas marginales y en la población rural (Cecytem, 2015).

(2) **Plantel Tequixquiac.** Tequixquiac es un municipio ubicado al norte del Estado de México, a 120 kilómetros de la ciudad de Toluca y se localiza en las coordenadas geográficas extremas del meridiano de Greenwich latitud norte 19°51'23" mínima, 19°57'28" máxima; longitud oeste 99°03'30" mínima, 99°13'35" máxima. Limita al norte con el municipio de Apaxco y el pueblo de Santa María Ajoloapan del municipio de Hueypoxtla, al sur con los ejidos de San Miguel Boca Negra y San Juan Zitlaltepec del municipio de Zumpango; al oriente con el municipio de Hueypoxtla; al poniente con el ejido de Santa María Apaxco, el municipio de Huehuetoca y el estado de Hidalgo (INAFED, 1986). El plantel del Cecytem en esta localidad fue inaugurado en el año 2000. Su oferta académica actual está conformada por dos carreras técnicas, Programación y Procesos de Gestión Administrativa.

(3) **Periodo 2016-2017.** Lapso de trabajo académico y administrativo en el Cecytem, comprendido entre el 16 de agosto de 2016 y el 15 de febrero de 2017.

(4) **Circunferencia.** De acuerdo con Lehmann (1990), la circunferencia es el lugar geométrico[1] de un punto que se mueve de tal manera que siempre se encuentra a una distancia constante (radio) de un punto fijo de dicho plano (centro).

(5) **Medida.** Para los efectos de este estudio, se alude al nivel de esquematización que un estudiante ha alcanzado en relación con un conocimiento matemático, según la teoría instruccional de la Educación Matemática Realista: situacional, referencial, general o formal (Gravemeijer, 1998).

(6) **Secuencia didáctica.** Serie coherente y ordenada de actividades de aprendizaje y de evaluación, diseñada por el docente para guiar la adquisición de saberes por parte de los estudiantes (Díaz-Barriga Á. , n.d.).

(7) **Aprendizaje significativo.** Ausubel (1983) desarrolla la teoría del aprendizaje significativo a partir de la idea de que los nuevos conocimientos se anclan a los saberes que el individuo ya posee sobre un determinado campo. La presencia de ideas, conceptos y proposiciones disponibles en la mente de quien aprende es lo que dota de significado a ese nuevo contenido.

(8) **Educación Matemática Realista.** Es una teoría de instrucción que privilegia el uso de situaciones realistas como la fuente para desarrollar conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos, los cuales de manera gradual se vuelven más formales y generales (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

[1] Previamente, el autor define el lugar geométrico como el conjunto de puntos que satisfacen una determinada ecuación.

Son tres los objetivos generales del proyecto:

- Comprobar si la Educación Matemática Realista es un instrumento didáctico útil para lograr el aprendizaje significativo de la circunferencia y en qué medida; esto en el contexto de un plantel de educación media superior regido por los lineamientos del Sistema Nacional de Bachillerato en México.
- Proporcionar una herramienta didáctica para los docentes de la materia de geometría analítica en el nivel medio superior, que les auxilie en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la circunferencia.
- Compartir con los profesores de matemáticas de bachillerato una modesta visión de la práctica docente que incluye aspectos psicopedagógicos, didácticos y éticos.

En tanto, los objetivos específicos son:

- Desarrollar una secuencia didáctica para el aprendizaje significativo de la circunferencia, diseñada bajo el enfoque de competencias y el paradigma constructivista (de conformidad con lo establecido en los lineamientos del Sistema Nacional de Bachillerato), cuyas actividades estarán sustentadas en la teoría de la Educación Matemática Realista.
- Diseñar un material didáctico sobre la circunferencia, basado en la perspectiva de la Educación Matemática Realista.
- Describir un marco teórico de apoyo a la práctica docente de los profesores de matemáticas de nivel medio superior.

En congruencia con lo antes expuesto, la hipótesis de trabajo es que la Educación Matemática Realista, aplicada a través de una secuencia didáctica apegada a los lineamientos del Sistema Nacional de Bachillerato, contribuye al aprendizaje significativo de la circunferencia en estudiantes del Cecytem Tequixquiac; al menos en el nivel general descrito por la propia teoría instruccional.

La metodología de contrastación de la hipótesis consistirá en un experimento, siendo sujetos del mismo los estudiantes de un grupo del tercer semestre del Cecytem Tequixquiac inscritos en el periodo 2016-2017. Los instrumentos por aplicar serán los materiales didácticos sobre la circunferencia, realizados bajo la esencia de la Educación Matemática Realista, el constructivismo y el aprendizaje por competencias; dichos materiales corresponderán a una secuencia didáctica diseñada de conformidad con los lineamientos del Sistema Nacional de Bachillerato en México. La secuencia didáctica y los materiales se aplicarán durante ocho clases de 100 minutos cada una, en las cuales se recabarán evidencias del desarrollo del experimento.

La revisión de la literatura no arroja resultados que combinen la Educación Matemática Realista con el aprendizaje de la circunferencia. En cambio, se encuentran resultados interesantes derivados de la aplicación de otros marcos teóricos.

Para ciertos autores (Gascón, 2002; Contreras, Contreras & García, 2002), en el currículum de matemáticas la geometría sintética (pura o euclidiana) y la geometría analítica suelen separarse, cuando en realidad son técnicas complementarias que podrían enseñarse simultáneamente. La propuesta de Wilhelmi (2005) para el tratamiento de la circunferencia en geometría analítica parte de la determinación del lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen una ecuación polinómica de segundo grado en dos variables con coeficientes racionales. Algunas tendencias en el diseño de las secuencias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la circunferencia aplican una de las siguientes teorías o incluso una mezcla de ellas: el modelo de Van Hiele, la visualización y la geometría dinámica (Carmona, 2011; Kerlegand, 2013; Mora, 2013; Sanes, 2014).

A partir del origen y planteamiento del problema, así como del estado del arte, se derivan las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Es posible instrumentar una secuencia didáctica para un tema de geometría analítica en el nivel bachillerato, que se base en la teoría instruccional de la Educación Matemática Realista cuando no hay antecedentes disponibles de ello?
- ¿Es la teoría instruccional de la Educación Matemática Realista compatible con el enfoque del modelo educativo aplicable a la institución donde se prevé la realización del experimento para el contraste de la hipótesis aquí planteada?
- ¿Mejorará el índice de aciertos en un reactivo sobre la circunferencia tipo PLANEA, luego de aplicar una secuencia didáctica sobre el tema basada en la Educación Matemática Realista?

Capítulo 1. Marco teórico-contextual

1.1 Didáctica general y didáctica de las matemáticas

1.1.1 Conocimientos base del docente

Ante la pregunta sobre qué conocimientos debería tener un profesor se han desarrollado diferentes modelos teóricos. En este sentido, Shulman (2005) propone siete categorías de conocimiento: del contenido; didáctico general; del currículo; didáctico del contenido; de los alumnos y sus características; de los contextos educativos, y de los objetivos, las finalidades, los valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos. Estos conocimientos pueden provenir de cuatro fuentes principales: la formación académica de la disciplina a enseñar, los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado, la literatura educativa especializada y la sabiduría producida por la propia práctica docente (pág. 11).

Las siete categorías citadas se entrelazan en lo que Shulman denomina aspectos del razonamiento pedagógico (págs. 19-26):

- Comprensión. El profesor debe comprender con profundidad las ideas de la materia que va a enseñar, así como la forma en que se relacionan con otras asignaturas. Otra cosa que debe comprender es el conjunto de objetivos planteados en la búsqueda de una educación integral del estudiante.
- Transformación. El conocimiento base para la enseñanza se localiza en la intersección entre la materia que se imparte y la didáctica, de manera que el docente transforma su conocimiento de la disciplina en formas variadas de enseñanza que lo haga llegar a la mente del alumno. Este aspecto incorpora varios procesos:
    - Preparación. Un análisis e interpretación crítica del contenido apropiado para ser enseñado, los objetivos educacionales y las concepciones de enseñanza específicamente aplicables. A partir de esto, el profesor da la estructura a sus clases.
    - Representación. En este punto se analizan las diferentes alternativas de presentar los contenidos a los estudiantes, tales como analogías, metáforas, ejemplos y demostraciones, entre otras tantas que deben integrar un amplio repertorio conocido por el docente.
    - Selección de metodologías didácticas. Una vez que el contenido se reformula mediante representaciones, procede la selección de una estrategia de enseñanza de entre todo un catálogo disponible por el docente (por ejemplo, clases expositivas, proyectos, problemas, aprendizaje cooperativo y trabajos extraclase).
    - Adaptación. El material representado debe adecuarse a las características generales del grupo y después a las características particulares de cada integrante (tutoría). En este punto deben tomarse en cuenta factores como los conocimientos previos, las aptitudes, el género, la cultura y el entorno social de los estudiantes.
- Enseñanza. Se incluyen aquí los componentes esenciales de la didáctica, tales como la organización y el manejo de clase, la presentación de explicaciones claras, la asignación y revisión de trabajos y la interacción con los estudiantes.

- Evaluación. Shulman habla en este punto de la evaluación del alumno a través de la retroalimentación y una necesaria calificación, pero también de la propia práctica docente, las lecciones, los materiales empleados y las estrategias aplicadas.
- Reflexión. Es el análisis retrospectivo del proceso de enseñanza y aprendizaje. La experimentación de los sucesos, las emociones, los logros y los errores conforman experiencias que generan conocimiento en el profesor.
- Nueva comprensión. Además de la reflexión, la documentación, el análisis y el debate con los pares son factores que pueden conducir hacia una nueva comprensión de los contenidos que deben enseñarse, los objetivos de aprendizaje, los estudiantes y los procesos ya explicados[2].

Esta visión de los conocimientos del profesor es, por decirle de alguna manera, de propósito general, dado que no habla de alguna disciplina específica, si bien tampoco puede aseverarse que sea aplicable a toda materia (Botia, 1993, págs. 118-119). El aspecto que Shulman denomina transformación implica una mezcla entre la disciplina a enseñar y la pedagogía (conocimiento didáctico del contenido); es posible que esto sugiera la necesidad de recurrir a los grandes clásicos de la psicología educativa, como Ausubel, Piaget, Vygotsky o Bruner. Gascón (1998) explica que el surgimiento de la didáctica de las matemáticas toma sustento de estas grandes teorías[3], en un afán por entender los hechos didácticos de la enseñanza y el aprendizaje de este campo, en contraposición al antiguo enfoque que considera esta labor como un arte dominado por un maestro quien "modela" al aprendiz en un proceso donde las reglas, el análisis y el control son inadmisibles (págs. 2-3).

El enfoque clásico en cuestión considera al aprendizaje general y al de las matemáticas en particular como un "*proceso psico-cognitivo* fuertemente influenciado por *factores motivacionales, afectivos y sociales*." (pág. 3); asimismo, ha influido en la concepción de los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas, al abarcar "además de la psicología educativa, la sociología, la historia de las matemáticas, la pedagogía y la epistemología de las matemáticas" (pág. 4). Sin embargo, según Gascón (1998), dicho enfoque tiene carencias, ya que se basa en lo que llama ideas dominantes en la cultura escolar. Es decir, ante las cuestiones de cómo enseñar y aprender matemáticas, se importan técnicas aplicables en otras disciplinas; al dirigir la atención hacia los fenómenos psicológicos del proceso de enseñanza y aprendizaje, se soslayan los fenómenos específicamente didácticos (pág. 4).

De acuerdo con el autor, la didáctica de las matemáticas evolucionó cuando su problematización alcanzó, entre otros, los siguientes cuestionamientos:

> ¿Qué papel juega o podría jugar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuál es la relación entre el aprendizaje de la "aritmética", el "álgebra elemental" y la "geometría"? ¿Qué significa "adquirir el concepto de proporcionalidad" o "adquirir el concepto de función"? ¿Qué criterios deben utilizarse para diseñar el currículo de matemáticas? (pág. 7).

---

[2] A través de este aspecto, Shulman establece una especie de modelo en espiral. Sin embargo, aclara que en ocasiones los procesos pueden darse en un orden distinto, con mayor o menor detalle o incluso algunos lleguen a omitirse.
[3] De hecho, lo llama punto de vista clásico de la didáctica de las matemáticas.

El enfoque clásico de la didáctica de las matemáticas no alcanza a responder estas preguntas porque para ello se requiere un modelo de la actividad matemática escolar y un modelo del proceso de enseñanza y aprendizaje propio de la disciplina. De acuerdo con Gascón (1998), la manera de abordar científicamente estas cuestiones no respondidas por dicho enfoque es convertir en objetos de estudio (objetos didácticos) nociones tradicionalmente consideradas como dadas y cita como ejemplos enseñar matemáticas, aprender matemáticas, problema de matemáticas, número decimal, proporcionalidad y función, entre otros; a esto le llama didáctica fundamental (pág. 9). El autor orienta su exposición sobre la didáctica fundamental hacia la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau. Sin embargo, se pueden citar nombres destacados por sus aportaciones a la didáctica de las matemáticas, tales como George Polya, Alan Schoenfeld, Hans Freudenthal, Juan D. Godino, Carmen Batanero, Carmen Azcárate, Ricardo Cantoral y Sonia Ursini, entre otros.

Riviere (1990) contribuye a la citada problematización de la matemática educativa a partir de las siguientes preguntas:

> ¿Son objetivamente difíciles las matemáticas o más bien sucede que no se enseñan bien? ¿Qué origen y significado tienen las enormes diferencias en la competencia matemática de los alumnos? ¿Hay alumnos que sufren alguna clase de alteración o trastorno real que les impide o dificulta el aprendizaje de las operaciones matemáticas más elementales? ¿Por qué son tan difíciles las matemáticas para tantos alumnos que no llegan a ese grado de supuesta alteración? ¿Qué hacer con esta situación? [...] Y, sobre todo, ¿cómo puede el profesor enfrentarse a ella? (pág. 2).

El autor expone una aproximación al tratamiento de las cuestiones anteriores desde un enfoque cognitivo, que estudia las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas otorgando un papel preponderante al análisis de los errores y sus causas. Según el autor, la psicología cognitiva encuentra en las matemáticas un terreno especialmente fértil para aproximarse a los procesos mentales relacionados con el aprendizaje por las siguientes razones:

> 1.- tratan con materiales formales que se prestan más que otros a poner de relieve la forma y la organización de los procesos mentales, 2.- facilitan la prestación de problemas con soluciones definidas y generalmente exactas (a diferencia de lo que sucede con los problemas mucho más difusos que son característicos de otras áreas, como las ciencias sociales, por ejemplo); 3.- tienen una estructura jerárquica más clara que las de otros campos del conocimiento; 4.- se organizan en algoritmos que acentúan la visibilidad de los algoritmos de la mente; 5.- los errores en matemáticas son más netos y fáciles de detectar que los de otros campos de conocimiento (esto es importante *porque* los errores son como “ventanas” para conocer el funcionamiento mental); y 6.- para algunos psicólogos (como Piaget) las matemáticas definen una especie de “axiomática del pensamiento” y son un producto de […] las propias operaciones intelectuales (y no de los hechos)[…] .
>
> Las razones anteriores explican la preferencia que han tenido los psicólogos cognitivos por la investigación del pensamiento matemático y el hecho de que la psicología de la instrucción haya avanzado más en el estudio de su enseñanza y aprendizaje que en cualquier otro campo” (pág. 5).

En este sentido, Godino, Batanero y Font (2003) aportan una interesante exposición acerca de errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas. Definen error como “una práctica no válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (pág. 73) y asocian la dificultad con el mayor o menor éxito de los estudiantes al resolver una tarea, medida en porcentaje de respuestas incorrectas. Enfatizan en la creencia que tienen algunos profesores sobre la necesidad de eliminar el error en el aprendizaje de las matemáticas es algo que hay que cambiar. Para los autores un obstáculo es un conocimiento que el estudiante aplica de manera general, cuando en realidad no es válido en ciertas circunstancias[4]. Los obstáculos son una fuente de dificultades para los estudiantes, pero no son las únicas, también está la secuencia de las actividades propuestas por el profesor, la organización administrativa del centro educativo, la falta de motivación del alumno, el desarrollo psicológico del estudiante y la falta de dominio de los contenidos anteriores (págs. 75-76)[5].

Tamayo (2005) analiza la enseñanza de las ciencias desde una interesante integración de lo que llama dominio de conocimiento de la naturaleza de la ciencia (NOS, por sus siglas en inglés) y el dominio del conocimiento pedagógico del contenido (CPC). El primer elemento alude a elementos de didáctica clásica descritos por Gascón y que debe contemplar cualquier teoría didáctica que se precie de serlo, mientras que el segundo engloba las siete categorías de conocimiento de Shulman. La esquematización de dicha integración puede interpretarse como un marco teórico que orienta la labor del profesor (ver ilustración 2).

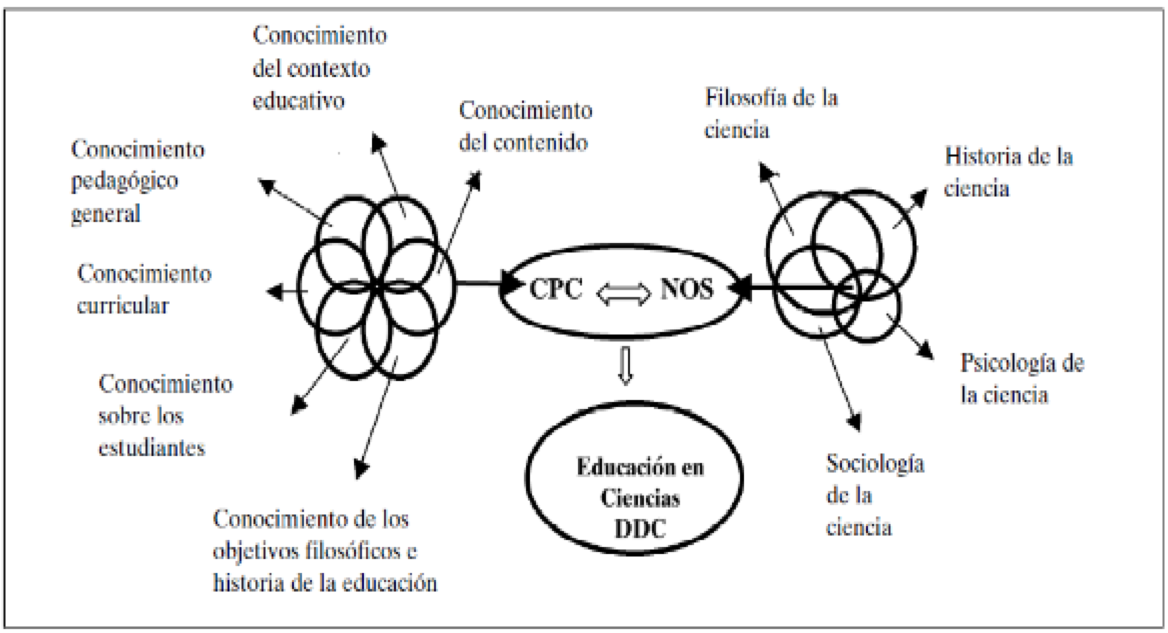


Ilustración 2. Integración de los dominios NOS y CPC. Fuente: tomado de (Tamayo, 2005, pág. 4).

[4] Para Bachelard (2000) un obstáculo epistemológico es un conocimiento anterior, mal adquirido, que entorpece la adquisición de nuevo conocimiento o conocimiento científico, ya que lo que se cree saber impide la adquisición de lo que debe saberse. Los obstáculos epistemológicos aparecen continuamente, en virtud de que es difícil iniciar los aprendizajes desde cero.

[5] Riviere (1990) menciona dificultades asociadas a problemas de lectoescritura, atención, retención de información numérica en la memoria de corta duración y de reglas y códigos matemáticamente correctos en la memoria de larga duración.

1.1.2 La teoría del aprendizaje significativo

David Ausubel desarrolla la teoría del aprendizaje significativo a partir de la idea de que los nuevos conocimientos se anclan de manera no arbitraria y sustancial a los saberes que el individuo ya posee sobre un determinado campo; a estas ideas previas, junto con su organización, les llama *estructura cognitiva*. La presencia de ideas, conceptos y proposiciones disponibles en la mente de quien aprende es lo que dota de significado a ese nuevo contenido (Ausubel, 1983, pág. 2). Por consecuencia, en el proceso educativo es importante diagnosticar lo que el estudiante sabe del tema en cuestión y qué tan estable es ese conocimiento.

De este modo, el aprendizaje significativo se presenta cuando la nueva información encuentra vinculación con un concepto que la persona registra claramente como relevante en su estructura cognitiva; a este último Ausubel le denomina *subsunsor* (pág. 2), mientras que al proceso mediante el que se da dicha vinculación lo denomina *asimilación* o *inclusión* (pág. 6). Sin la presencia del subsunsor, la nueva información se almacena arbitrariamente, sin interactuar con conocimientos previos. Esto da origen a lo que Ausubel llama aprendizaje mecánico (pág. 2).

Es precisamente el principio de asimilación lo que ilustra al aprendizaje como una evolución constante de los conocimientos preexistentes en el individuo (*diferenciación progresiva*, según Ausubel). La nueva información no se agrega simplemente a la estructura cognitiva, sino que modifica a su correspondiente subsunsor, para integrar un nuevo conocimiento organizado jerárquicamente (el autor llama a esto *reconciliación integradora*). La diferenciación progresiva puede utilizarse al principio del proceso educativo, presentando las ideas más generales e inclusivas que se enseñarán, para diferenciarlos a través del detalle y la especificidad (pág. 9). Mientras las nuevas ideas pueden recordarse de manera separada de sus subsunsores se da una etapa de retención. Ausubel llama *asimilación obliteradora* al momento en que las nuevas ideas se vuelven "espontánea y progresivamente menos disociables de sus subsunsores" hasta que definitivamente ya no se conciben independientemente (pág. 7). Se presenta entonces una etapa de olvido en la cual se pierde una cierta cantidad de información para dejar en el aprendiz únicamente la que le resulta relevante.

La teoría de la asimilación plantea tres formas de aprendizaje, dependiendo de cómo la nueva información interactúa con la estructura cognitiva (págs. 7-9):

- *Aprendizaje subordinado*. Existe una relación de subordinación entre el nuevo conocimiento y las ideas más generales e inclusivas de la estructura cognitiva existente. Para Ausubel, la estructura cognitiva es una jerarquía, donde la inclusividad de las ideas desciende de la punta a la base de dicha jerarquía. El aprendizaje subordinado es derivativo si su significado se desprende directamente de un conocimiento arraigado en la estructura cognitiva; prácticamente se trata de la adición de nuevos ejemplos. El aprendizaje subordinado correlativo extiende, modifica o limita proposiciones aprendidas previamente.
- *Aprendizaje supraordinado*. Es resultado del razonamiento inductivo, ya que el nuevo conocimiento se va a relacionar con ideas subordinadas ya establecidas.
- *Aprendizaje combinatorio*. La nueva información no es más inclusiva ni más específica, sino que se relaciona de manera general con la estructura cognitiva. Esto significa que la relación no se da en forma subordinada ni supraordinada.

Ausubel distingue también el *aprendizaje por recepción* y el *aprendizaje por descubrimiento*. En el aprendizaje por recepción, el objeto de estudio se presenta al estudiante en su forma final para que lo internalice y pueda recuperarlo posteriormente; el aprendizaje por recepción puede ser significativo o mecánico, dependiendo de si el nuevo conocimiento se ancla o no a un subsunsor. Por otro lado, el aprendizaje por descubrimiento implica que el nuevo conocimiento sea reconstruido por el alumno previamente a la incorporación en su estructura cognitiva; de nuevo, se puede presentar aprendizaje significativo o mecánico, en los mismos términos del caso por recepción (pág. 3).

Para Ausubel la generación de aprendizaje significativo debe cubrir ciertos requisitos. En principio, que el material de aprendizaje sea potencialmente significativo, es decir, el aprendizaje que brinda apunte hacia algún aspecto de la estructura cognitiva del aprendiz. En segunda instancia, que el alumno muestre disposición para realizar el proceso de anclaje del nuevo conocimiento en su estructura cognitiva, de manera sustantiva y no literal. Si el alumno desea memorizar arbitraria y literalmente el nuevo conocimiento, no habrá material que valga para producir aprendizaje significativo y viceversa (págs. 4-5).

De acuerdo con Ausubel, existen tres tipos de aprendizaje significativo (págs. 5-6):

- *Aprendizaje de representaciones*. Es el tipo más elemental y de él dependen los otros dos. Consiste en dar significado a un símbolo. Un ejemplo de este aprendizaje es la adquisición del lenguaje por parte de los infantes: el significado de una palabra se vuelve equivalente al objeto que representa.
- *Aprendizaje de conceptos*. Esto se da en principio a través de la experimentación, a partir de la cual se abstraen las características de un objeto de estudio. Los conceptos se adquieren por formación (experiencia directa con formulación y prueba de hipótesis) y asimilación (se da un incremento de vocabulario y el concepto se puede entender de diferentes maneras disponibles en la estructura cognitiva).
- *Aprendizaje de proposiciones*. Exige captar el significado de las ideas (proposiciones). Implica la combinación de varias palabras cuyo resultado impacta tanto al pensamiento como a la carga afectiva (emotiva y actitudinal) del estudiante. La combinación de los conceptos involucrados interactúa con las ideas ya establecidas en la estructura cognitiva y esto produce nuevos significados.

La teoría del aprendizaje significativo ha tenido más exponentes además de Ausubel. Rodríguez (2011, pág. 34) cita a Novak, quien resalta la importancia y la influencia del aspecto emocional durante el desarrollo de un aprendizaje significativo, dotando al término de una perspectiva humanista. Asimismo, destaca a Gowin como el constructor de un triángulo conformado por el profesor, el alumno y los materiales educativos del currículum con el objetivo de compartir significados.

1.1.3 El constructivismo

Hernández (2008) describe cómo las corrientes constructivistas proponen una explicación epistemológica alterna tanto a la postura empirista (el conocimiento se representa directamente en la mente del sujeto, quien lo recibe pasivamente) como a la idealista (el conocimiento está preformado en el sujeto y es independiente del contexto): se trata de generar y transformar el conocimiento a partir de una decisiva intervención tanto del sujeto como del objeto de conocimiento, que es la realidad, reflejada en la interacción entre ambos. Desde las posturas constructivistas, el conocimiento es construido, reconstruido, y co-construido entre estudiantes y profesores, por lo que el aprendiz deja de ser un receptor pasivo o reactivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje; lo que se conoce es resultado de "la actividad cognitiva, experiencial o subjetiva del sujeto" (pág. 42). Por su parte, el docente se convierte "en un guía, facilitador o mediador de la actividad constructiva de los alumnos" (pág. 71); esta guía es imprescindible para acercar las construcciones de estos hacia las interpretaciones que los contenidos curriculares adquieren, según los significados socialmente valorados. La mediación ayuda a la negociación grupal de significados y el desarrollo de herramientas cognitivas en los aprendices.

Waldegg (1998) ilustra tres tipos de hipótesis constructivistas: gnoseológicas, relativas a qué es el conocimiento; metodológicas, que definen cómo se construye el conocimiento, y éticas, ocupadas en determinar cuál es el valor del conocimiento. Así, el conocimiento es un acto intencional (hipótesis teleológica), basado en la experiencia del individuo (hipótesis fenomenológica). Se construye mediante la eliminación de discordancias entre la representación construida y la simbólica del conocimiento que se aborda (hipótesis de acción inteligente), al tiempo que "el comportamiento cognitivo tiende a buscar explicaciones holísticas que pongan en concordancia el mayor número de experiencias y fenómenos conocidos y que relacionen de manera articulada los conceptos, nociones e ideas de las estructuras teóricas o cognitivas ya construidas" (pág. 21) (hipótesis de modelación sistémica, de esencia decididamente multidisciplinaria). En cuanto al valor del conocimiento, se asume que es dependiente del sujeto cognoscente (no hay verdad objetiva).

A continuación, se describen de manera simplificada algunos aspectos de las corrientes constructivistas más icónicas.

- Constructivismo psicogenético (Piaget). Según Carretero (1997), en esta postura el individuo no es resultado de la realidad, sino una construcción propia, producto de la interacción entre los aspectos cognitivos y sociales, y los aspectos afectivos. Un constructor importante de esta teoría es el esquema, definido como la representación de una situación o un concepto que permite su manejo interno para enfrentarse a situaciones iguales o similares; la representación del mundo depende de los esquemas y la interacción con la realidad, los transforma. "[L]a inteligencia atraviesa fases cualitativamente distintas" (pág. 5); dependiendo de la fase (estadio), se utilizan estructuras para ordenar la realidad. La estructura es una serie de elementos cuya interacción produce un resultado diferente a la simple suma de los mismos. "Al pasar de un estadio a otro, se adquieren esquemas y estructuras nuevos" (pág. 5).
- Constructivismo social (Vygotsky). Para Vygotsky, "el conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura" (Carretero M. , 1997, pág. 5). Así, el conocimiento aparece primero dentro de un contexto social, para después internalizarse y pasar a una escala individual. La zona de desarrollo próximo es la brecha existente entre la capacidad real de resolver individualmente un problema y el nivel potencial que considera la guía de un adulto o la colaboración de un compañero más capaz; ambos niveles revelan el estado del desarrollo mental de un sujeto. La esencia del aprendizaje para esta corriente se puede apreciar en la siguiente cita:

> La cultura preexiste al individuo y lo determina; mediante procesos de aculturación y educativos, éste se apropia de ella y es capaz de transformarla junto con los otros, gracias a los procesos de construcción y negociación conjunta de los significados culturales (Hernández, 2008, pág. 53).

- Constructivismo cognitivo. Es derivado de la teoría del procesamiento de la información, basada en la idea de que la mente es como un procesador central de computadora, que organiza la memoria, así como el procesamiento y la recuperación de datos a través de diferentes rutinas programadas heurísticamente, ya que se modifican a partir de la experiencia (Ernest, 1994, pág. 3). A partir de dicha idea, se desprenden las posturas descritas a continuación.
    - Teoría de la asimilación (Ausubel), tratada en la sección anterior.
    - Teoría de los esquemas (Rumelhart, Anderson y otros). Inspirada en los trabajos de Piaget, recupera la idea de los esquemas que, siendo construidos por el sujeto, se consideran unidades de conocimiento representativo de la realidad, reflejan la organización de experiencias acumuladas y se construyen o reconstruyen inductivamente. Se agrupan en módulos o dominios de conocimiento, determinados por operaciones de diferenciación, jerarquización e integración parte-todo, que luego se almacenan en la memoria de largo plazo. Fungen como modelos de interpretación a aprender, lo cual, a su vez, provoca un proceso de ajuste progresivo (Hernández, 2008, págs. 48-49).
    - Teoría del aprendizaje estratégico (Flavell, Brown, Paris y otros). Este aprendizaje significa: establecimiento de metas y objetivos propios, planificación y adaptación en el uso de recursos, empleo de estrategias metacognitivas y cognitivas, instrumentación de procesos de autodirección y autocontrol de esfuerzo, así como componentes motivacionales; el aprendiz debe ser consciente de su responsabilidad sobre su propio futuro (Rodríguez-Mena & García, mayo-agosto, 2003, pág. 325). Se espera que la persona aprenda en cualquier contexto que se halle inserto, es decir, que haya sido capaz de aprender a aprender y, según Martín (2001) “[a]prender a aprender es aprender a pensar” (pág. 2).
- Constructivismo radical (von Glasersfeld). Según Hernández, (2008) esta corriente sostiene que “[m]ente y realidad son enteramente construidas” (pág. 55); no se acepta realismo alguno. No hay realidad que el conocimiento pretenda descubrir, solamente se conoce la realidad que se experimenta individualmente (el conocimiento entonces no puede ser transmitido). Todas las realidades son válidas y no se pueden contrastar entre sí, más que para considerar una de ellas como de mayor validez, a partir de su viabilidad, entendida como utilidad en el contexto para el que fue creada (pág. 56).
  Ernest (1994) cita el primer principio de von Glasersfeld: “el conocimiento no es recibido pasivamente por el sujeto cognitivo, sino activamente construido” (pág. 2); de acuerdo con el autor, los constructivismos que solamente se ciñen a él, reciben el calificativo de triviales (pág. 5). De este modo, para hablar de un constructivismo no trivial se requiere del segundo principio de von Glasersfeld: “la función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica” (pág. 5); con base en este principio, el aprendiz ya no busca propiedades estructurales de una realidad que le resulta inalcanzable, sino que se convierte en el constructor de las estructuras cognitivas que generan el aprendizaje (pág. 6).

- Construccionismo social (Edwards, Lemke, Driver y otros). El lenguaje se convierte en el medio para construir significados y desarrollar el pensamiento social. Se eliminan los procesos mentales como propiedad individual de las personas. Lo real se niega; se define como un texto que las comunidades elaboran. Se radicaliza entonces el papel del lenguaje en el proceso de construcción del conocimiento. “Realidad y mente son auténticas construcciones culturales y discursivas” (Hernández, 2008, pág. 57).

Ernest (1994) resume las implicaciones pedagógicas del constructivismo -a partir de las diferentes corrientes enlistadas arriba- en términos de una especial atención hacia: los conocimientos previos; una enseñanza diagnóstica que revele las concepciones erróneas del aprendiz (sugiere la aplicación de la técnica del conflicto cognitivo); la metacognición y autorregulación estratégica del aprendizaje (aprender a aprender); el conocimiento de los objetivos del estudiante y su empate con las metas académicas; los contextos en los que se presentan los aprendizajes; las teorías del aprendiz sobre el conocimiento; las teorías implícitas del profesor sobre la disciplina que imparte, la enseñanza y el aprendizaje; el aprendizaje como resultado de una interacción social, donde la colaboración y las discusiones llevan a la negociación de significados compartidos, así como a las cuestiones afectivas del estudiante que se relacionan con el aprendizaje (págs. 10-11). Se pueden agregar a esta lista los textos y materiales didácticos, así como la evaluación (Waldegg, 1998, pág. 29).

Pero ¿qué envuelve la aplicación del constructivismo en el aprendizaje de las matemáticas? Waldegg (1998) señala los siguientes aspectos. En el aula, no se trata de dejar solo al alumno, rodeado de materiales didácticos. La actividad del estudiante debe ser intelectual, de modo que se enfrente a situaciones novedosas, significativas (ubicadas en su contexto) y, por tanto, motivantes, las cuales puede abordar a partir de sus conocimientos previos, si bien deben representar un desafío intelectual que lo obligue a reestructurar sus conocimientos para resolverlas (en lugar de aplicar un simple algoritmo); discute conjeturas con sus compañeros y contrasta resultados contra ellas; valora su propio aprendizaje y lo comparte. Por su parte, el docente ya no ejerce el papel protagónico tradicional, pero su participación sigue siendo fundamental, mucho más activo, creativo y difícil que el entendido por la pedagogía tradicional: diseña las situaciones didácticas significativas ya mencionadas; promueve la actividad cognitiva de los estudiantes, respetando las diferencias individuales, pero privilegiando el trabajo en grupo; anima las discusiones; guía con base en preguntas, comentarios y sugerencias; aclara ideas, afirma conceptos, proporciona terminología, formaliza, y presenta contextos diferentes que admiten similares matematizaciones (págs. 23-25).

El orden de una clase constructivista es inverso al de la tradicional: primero, el profesor presenta una situación de aprendizaje que involucra el contenido a enseñar; los estudiantes, en el desarrollo de estrategias, utilizan dicho contenido, pero sin saberlo; al final, el docente formaliza el concepto mediante la terminología y su relación con otros conocimientos conocidos por el aprendiz. La organización del currículum debe estructurarse alrededor de las situaciones problemáticas (situaciones de aprendizaje); la esencia es pasar del aprendizaje de conceptos al de resolver problemas (Waldegg, 1998, págs. 26-27). Finalmente, la autora expone que la evaluación desde la perspectiva constructivista debe verse como parte del proceso de aprendizaje y una oportunidad más de adquisición de conocimientos para el alumno. El profesor debe usarla para detectar lo que los estudiantes “saben y entienden, cómo lo saben, cómo piensan, cuáles son sus conocimientos previos y si estos se modifican a lo largo del curso” (pág. 27), de modo que permita una toma de decisiones dirigida a mejorar el desempeño del aprendiz.

1.1.4 El enfoque de la educación basada en competencias

El término competencia se origina a partir del trabajo en la psicología industrial y organizacional estadounidense realizado entre el final de la década de 1960 y el principio de la de 1970. La esencia del concepto es que una amalgama de características perfectamente observables en una persona (como motivos, carácter, valores, conocimientos, destrezas, actitudes) ayuda a predecir el desempeño en un determinado puesto de trabajo (Gil, 2007, pág. 84).

Existen diferentes clasificaciones de las competencias. Se llaman esenciales las mínimas esperables y diferenciadoras, las que hacen que un individuo sobresalga. En otro contexto, se llaman generales las que soportan el aprendizaje de toda la vida (lectura, escritura, resolución de problemas matemáticos, comunicación, trabajo en equipo y dominio de tecnología, entre otras) y transferibles las que permiten adquirir nuevas competencias o adaptarse a nuevos contextos. Una última clasificación (pág. 85) identifica que las competencias profesionales se componen de técnicas (saber), metodológicas (saber hacer), personales (saber ser) y participativas (saber estar).

El concepto de competencia revolucionó la concepción de las personas al interior de las organizaciones: se pasó de un enfoque de personal hacia uno de recursos humanos; de un costo que había que minimizar hacia un potencial que había de maximizarse, y de la definición de los puestos de trabajo para después identificar a los mejores candidatos que habían de cubrirlos a un procedimiento exactamente inverso (pág. 83). De hecho, la influencia de dicho concepto trascendió hacia el ámbito donde se formaba la gente que aspiraría a incorporarse a las posiciones de trabajo: la escuela.

Díaz Barriga (2005) destaca el auge, tanto en México como en el mundo, del enfoque educativo basado en competencias desde mediados de la década de 1990, al tiempo que alerta sobre la instrumentación de planes de estudio que, orientados bajo esta perspectiva, se sustentan en análisis parciales o superficiales, así como en la inmediatez de beneficios -a veces ilusorios- que los gobiernos están obligados a generar; esto en realidad produce resultados lejanos a lo planeado y con un impacto casi nulo en la práctica educativa.

Bajo la consideración de que el tema de las competencias es importante para el ámbito educativo, el autor ofrece algunas ideas que pueden coadyuvar en su aplicación, con una mejor perspectiva de éxito (págs. 12-19).

- Configurar una genealogía del concepto de competencia que trascienda los espacios originales (laboral y de lingüística) para especificar sus connotaciones sociales y su sentido en el campo de la educación.
- Superar sus limitaciones en el campo educativo. En principio, ¿cómo determinar que ciertas competencias se tienen o no, cuando, como la matemática, en realidad se trata de un proceso que se desarrolla a lo largo de la vida? ¿Cómo eliminar la contradicción entre una competencia general formulada con un alto grado de integración que después se pulveriza en competencias menores, más semejantes a una propuesta curricular por objetivos clásica de la década de 1970?

- Controlar la prisa por aplicar el enfoque de competencias sin la adecuada reflexión conceptual[6], que involucre tanto a teóricos en la materia como a quienes lo deben poner en práctica, es decir, los docentes.
- Determinar las verdaderas aportaciones de las competencias en el ámbito de la educación y contraponerlas con las que ofrecen otras perspectivas.

1.1.5 Estrategias de enseñanza

Díaz Barriga y Hernández (2009) definen las estrategias de enseñanza como "los procedimientos o recursos utilizados por el agente de enseñanza para promover aprendizajes significativos" (pág. 80). Por el momento en que se aplican, dichas estrategias pueden ser (págs. 81-82):

- Pre-instruccionales. Informan al estudiante sobre qué y cómo va a aprender, activan sus conocimientos y experiencias previas y contextualizan el objeto de aprendizaje. Como ejemplos están los objetivos y el organizador previo.
- Co-instruccionales. Apoyan los conocimientos curriculares durante el proceso de la enseñanza o la lectura del texto de enseñanza. Detectan la información principal, conceptualizan contenidos, mantienen la motivación y la atención. A esta clasificación se pueden asociar ilustraciones, redes semánticas, mapas conceptuales y analogías.
- Post-instruccionales. Permiten al alumno formar una visión sintética, integradora y crítica del material, o bien, valorar su propio aprendizaje. Entran en esta categoría las preguntas intercaladas, resúmenes finales, redes semánticas y mapas conceptuales.

Por los procesos cognitivos que buscan, los autores establecen la siguiente clasificación de las estrategias de enseñanza (págs. 82-83):

- Estrategias para activar (o generar) conocimientos previos y establecer expectativas adecuadas en los alumnos. Se pueden catalogar como pre-instruccionales. Esclarecer a los alumnos las intenciones educativas u objetivos les ayuda a desarrollar expectativas adecuadas sobre el curso y a encontrar sentido o valor funcional en los aprendizajes. Ejemplos: pre-interrogantes, lluvia de ideas y enunciación de objetivos.
- Estrategias para orientar la atención de los alumnos. Son básicamente co-instruccionales. Entran aquí las preguntas insertadas, pistas o claves en textos y también las ilustraciones.
- Estrategias para organizar la información que se ha de aprender. Dan mayor contexto organizativo a la información nueva, lo que le agrega significatividad lógica. Pueden utilizarse en cualquier momento del proceso. Son ejemplos: el mapa contextual, las redes semánticas, los resúmenes y los cuadros sinópticos.
- Estrategias para promover el enlace entre los conocimientos previos y la información nueva que se ha de aprender. Contribuyen a aumentar la significatividad de los aprendizajes logrados. Se sugiere utilizarlas antes o durante la instrucción. En esta categoría se pueden incluir los organizadores previos y las analogías.

[6] De hecho, el autor sostiene como certeza en el momento de su investigación la ausencia de claridad sobre un procedimiento para poner en práctica el enfoque de competencias en la educación básica o en la superior.

1.1.6 Definición de objetivos de aprendizaje

De acuerdo con Zarzar (enero-marzo 1994, pág. 4), el planteamiento de los objetivos de aprendizaje es una de las habilidades básicas para que un profesor desarrolle eficazmente su labor[7] y responden a la pregunta ¿qué quiero que aprendan los alumnos? El autor minimiza la importancia de la redacción en aras de dársela al fondo de cada objetivo, por lo cual no expone una taxonomía para su definición, aunque sí proporciona una categorización que puede apreciarse en la tabla 1.

Tabla 1. Tipos de objetivos de aprendizaje por su nivel de apropiación o aspecto de formación. Fuente: elaboración propia con datos de (Zarzar, enero-marzo 1994, págs. 5-10).

Tipo de objetivo	Nivel de apropiación/aspecto de formación
Informativo. Se refieren a la información con que el alumno entra en contacto dentro del curso.	**Conocer un contenido.** Se conocen hechos, cosas, ideas que existieron, sin profundizar en su comprensión. Aquí se sitúa el aprendizaje memorístico. La exposición, complementada con lecturas, audiovisuales y conferencias, entre otras, son estrategias utilizadas en este nivel.
	Comprender un contenido. Implica profundidad en el conocimiento de los contenidos; la comprensión de estos se logra con ayuda de estrategias como debates en pleno o en grupos pequeños.
	Manejar un contenido. Se refiere a la aplicación de los contenidos en situaciones teóricas o prácticas. Aquí se utilizan ensayos, exposiciones, prácticas, experimentos; la técnica expositiva no tiene utilidad alguna.
Formativo. La función primordial, básica y sustancial de las instituciones educativas es formar (no informar) técnicos y profesionistas útiles a la sociedad.	**Formación intelectual.** Se relaciona con la adquisición de métodos, destrezas, actitudes y valores en el ámbito de la razón, el entendimiento, la mente. Los objetivos pueden ser, entre otros, que el alumno aprenda a razonar, analizar, sintetizar, deducir, abstraer, inducir, leer y comprender lo que lee, resumir, esquematizar, expresar sus ideas verbalmente y por escrito, investigar, comprobar y refutar sus hipótesis; que aprenda a estudiar, discutir con otros, argumentar sus ideas y defenderlas, al mismo tiempo que respeta las de otros; que tenga curiosidad, actitud científica y crítica.
	Formación humana. Tratan de la adquisición y fortalecimiento de valores en el alumno como individuo. Los objetivos pueden ser fomentar la honestidad, responsabilidad, valor civil, sentido de justicia, búsqueda de la verdad, respeto por su cuerpo; incentivar el deseo de superación continua, buscar la calidad y la excelencia; conocerse a sí mismo y aceptar sus limitaciones y capacidades.
	Formación social. El nivel incluye objetivos para fomentar actitudes y habilidades en el alumno como parte de un entorno social. Convivir armónicamente, trabajar en equipo, espíritu de colaboración y participación; conocer y respetar normas, culturas y tradiciones; discutir con otros respetando ideologías; compromiso y conciencia social.
	Formación profesional. Se incorporan actitudes, valores y habilidades del alumno enfocado como futuro profesionista. Sentido ético, dar lo mejor de sí mismo, buscar beneficios para la sociedad en general, trabajar coordinadamente, en equipo, según jerarquías organizacionales; desarrollar iniciativa, responsabilidad y creatividad; analizar problemas y conflictos y tomar decisiones para superarlos; aplicar los conocimientos e investigar lo que no sepa.

[7] Las otras cuatro habilidades, que dependen en gran medida de la definición de los objetivos de aprendizaje, son el diseño del plan de trabajo del curso y la redacción del programa para los estudiantes, desarrollo del encuadre de las primeras sesiones, el diseño e instrumentación de actividades de aprendizaje y evaluación del mismo y, finalmente, la integración y coordinación de equipos de trabajo y grupos de aprendizaje.

1.1.7 Evaluación

Para González (2001) el significado más aceptado de evaluación en la actualidad es el de

> [A]preciar, valorar, fijar el valor de una cosa, hecho o fenómeno. Este significado, que pudiera calificarse de ambiguo, no es casual ni responde a un desatino, ni a una expresión de superficialidad de los estudiosos, aun cuando a toda vista es insuficiente. Tiene la intención de abarcar la riqueza y complejidad de su contenido y de evitar simplificaciones abusivas que se han sucedido al pretender precisiones técnicamente "rigurosas", positivas; o, al reducir su objeto y funciones, como ocurre con la tan frecuente identificación de la evaluación con la calificación, entendida como el acto de otorgar una nota o, con una impronta cotidiana: la de aplicar exámenes (pág. 87).

La autora establece que los componentes de la evaluación deben verse como elementos de un sistema que se ubica en condiciones socio-históricas concretas, interrelacionados en un ciclo ascendente y progresivo que incluye: el establecimiento de objetivos; la caracterización del objeto de evaluación; la definición, selección, elaboración y aplicación de instrumentos para recolectar información; el procesamiento, análisis e interpretación de dicha información para establecer el juicio valorativo; la comunicación de resultados como un episodio necesario de interacción evaluado- evaluador, y, como efecto final en cada iteración, un acto de toma de decisiones (pág. 88).

La evaluación "es un proceso que se aborda con intencionalidad" (Rizo, julio-diciembre 2004, pág. 11), es decir, responde a las preguntas ¿por qué, para qué y qué evaluar? En este sentido, González (2001) aporta como porqués dos funciones básicas de la evaluación. En principio, las sociales, que tienen que ver con la acreditación, selección, promoción y certificación de saber. Luego, las pedagógicas, que cumplen un papel importante en el diagnóstico, orientación, retroalimentación y afianzamiento del aprendizaje (págs. 89-91).

La respuesta a para qué se evalúa conlleva una clasificación de la evaluación en dos tipos, formativa (del proceso) y sumativa (de productos); ambas, lejos de ser disjuntas, son complementarias. La evaluación del proceso de elaboración de los productos es importante porque permite comprender el objeto de evaluación y la manera empleada por el estudiante para resolver situaciones; ello ayuda a detectar y analizar sus errores, a efecto de proyectar sus resultados, ajustar detalles y estar en condiciones de mejorar el citado proceso[8]. La evaluación de los resultados de aprendizaje y el nivel de calidad de los mismos es necesaria por la función social ya explicada, pero entonces se deben definir cuidadosamente tanto el patrón como el instrumento de medida (Rizo, julio-diciembre 2004, págs. 12-14).

En lo que respecta a qué evaluar, se han inducido ya las ideas de procesos y productos. Sin embargo, el proceso de evaluación incorpora la posibilidad de diferenciar el proceso de aprendizaje particular de cada estudiante (González, 2001, págs. 95-96). En este sentido, la presencia en los estudiantes de intereses personales, nociones previas[9], disposición por aprender, estilos y ritmos de aprendizaje conducen al establecimiento de estrategias específicas. El patrón de la evaluación no es la medida

---

[8] La evaluación así entendida se constituye en una herramienta de enseñanza y aprendizaje.

[9] Esto implica un tercer tipo de evaluación, adicional a la formativa y la sumativa: la diagnóstica.

grupal ni un simple promedio o suma numérica, sino el propio estudiante: cuánto avanza y cómo avanza en su desarrollo particular.

Otra posibilidad que da una evaluación bien entendida es la de apreciar al estudiante en su forma holística, es decir, en la totalidad de su ser, en lugar de visualizarlo de forma fragmentada (págs. 97-98). Para que la evaluación no se convierta en un fin en sí misma, debe acompañar al proceso de enseñanza y aprendizaje, facilitando al alumno información sobre sus fortalezas y debilidades. Los momentos evaluativos no deben existir solamente en los periodos de calificación parciales o finales; se trata de usar esos momentos para reflexionar sobre cómo mejorar el curso o sobre cómo los alumnos pueden corregir el camino para llegar a las metas logradas. Así la evaluación es un insumo de aprendizaje. Sin embargo, que la evaluación formativa se entienda como continua y permanente no es sinónimo de diaria; los momentos evaluativos deben darse en momentos que resulten significativos, con espacio para la reflexión y el análisis (Rizo, julio-diciembre 2004, págs. 14-15).

Serrano (octubre-diciembre 2002, págs. 249-252) concibe la evaluación como una actividad en la que se combinan dos dimensiones:

- Dimensión ética. La evaluación es un problema ético de decidir qué, por qué y para qué evaluar. Se evalúa desde el punto de vista educativo con el fin de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje; desde el punto de vista del aprendizaje, implica un interés de investigación, de análisis y reflexión del proceso en cada estudiante. Se deben responder preguntas sobre cómo está aprendiendo el alumno, cuáles son sus progresos, cuáles son los indicios de esos avances, cuáles dificultades enfrenta y cuáles son sus causas. El objeto de la evaluación puede ser el proceso en conjunto o algún componente (alumnos, docentes, planes, estrategias didácticas, recursos, clima educativo, funcionamiento de los centros educativos); también puede ser el proceso que sigue el aprendiz, las cualidades y competencias que desarrolla (evaluación de los aprendizajes).

  Para evaluar los aprendizajes, el profesor debe tener claro qué se propone enseñar, qué deben aprender sus alumnos, cómo apreciará sus logros y de qué manera se informará esto a lo largo del proceso. El accionar del profesor en la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación debe orientarse hacia el logro de los aprendizajes de los alumnos en términos de competencias, actitudes y comportamientos que propicien su formación científica, humanística y social, la cual debe repercutir en que sea un ser humano feliz. Entonces, el profesor debe identificar cuáles son las competencias que el alumno debe desarrollar y los criterios que muestren el grado de dominio o desempeño que alcance[10].

- Dimensión técnico-metodológica. Procedimientos e instrumentos para obtener información de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El profesor debe conocer las condiciones con las que el estudiante llegó al proceso, sobre qué bases comenzó o prosiguió su aprendizaje para saber cómo ha ido avanzando y la naturaleza de sus avances. Se trata de conocer al alumno mediante una atención consciente y reflexiva. La intención es que no haya separación entre las actividades de aprendizaje y la evaluación; esto requiere la exposición clara de los objetivos y los criterios de evaluación, en una comunicación fluida y

[10] Aquí entran en juego las creencias del profesor.

sin conflictos entre profesores y alumnos, así como evitar la separación entre los tiempos de enseñar y de aprender con los de evaluar.

El profesor debe cumplir las siguientes funciones: definir e identificar las competencias a desarrollar y sistematizarlas; definir los indicadores de evaluación de las competencias; decidir sobre los procedimientos de evaluación, otorgar responsabilidades a los alumnos para que sean ellos quienes revisen su trabajo, comprendan por qué se han equivocado y propongan soluciones; conceder importancia al trabajo en grupo, propiciando la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación; integrar la evaluación en las situaciones didácticas; sostener frecuentemente entrevistas con los estudiantes para analizar sus logros y dificultades, y acordar nuevas tareas acorde a sus fortalezas y debilidades, y reflexionar sobre su actuación pedagógica (saber qué funcionó y qué no).

El alumno debe tomar conciencia de su rol en el proceso de evaluación; reflexionar individualmente y con los compañeros sobre lo aprendido y sobre el proceso; valorar sus aprendizajes y participar activamente en su análisis, y reflexionar sobre sus intereses, actitudes, disposición y estrategias de aprendizaje.

El registro de la información requerida para evaluar una competencia puede apoyarse en una variedad de instrumentos (formatos). En este trabajo se mencionan la rúbrica, la lista de cotejo y el examen.

La rúbrica de evaluación es un cuadro de doble entrada que presenta explícitamente criterios e indicadores en diferentes niveles de concreción, que sirven a docente y estudiante para ubicar el nivel de consecución de una competencia (Barbera y otros, 2006). Valverde y Ciudad (2014, pág. 55) agregan que la rúbrica clarifica al estudiante lo que se espera de él y facilitan la retroalimentación por parte del profesor; asimismo mencionan tres características fundamentales de una rúbrica:

- Los criterios de evaluación, que, en opinión de los autores, es el elemento más importante del instrumento, ya que establecen los elementos a evaluar, mismos que pueden tener pesos iguales o diferenciados de acuerdo con el diseño del docente. Dichos criterios deben recoger los elementos esenciales de la competencia que se desea valorar.
- La escala de valoración describe niveles graduales de adquisición de la competencia a evaluar.
- Una estrategia de calificación, que puede ser holística (cualitativa) o analítica (puntuación cuantitativa).

Utilizadas como parte de una evaluación formativa, las rúbricas no solamente evalúan, también enseñan, pueden ser utilizadas por el estudiante para evaluar su propio desempeño y adoptar estrategias de mejora en su proceso de aprendizaje (pág. 56).

La lista de cotejo consta de una relación de elementos relevantes para el desarrollo de una actividad; cada uno de dichos elementos se presenta detalladamente para verificar su cumplimiento. Aunque el enfoque de este instrumento es esencialmente cualitativo, se puede ponderar y hacer cuantitativo (Flores & Gómez, 2009, pág. 136).

Hablar sobre el examen es adentrarse en un tema ciertamente escabroso. De acuerdo con Díaz Barriga (1993), el vínculo de este instrumento con la pedagogía aparece en la edad media, cuando se aplicaba solamente a aquellos estudiantes que a priori se sabía que lo aprobarían, es decir, que mostrarían la competencia adquirida; cita a Comenio y su *Didáctica Magna* de mediados del siglo XVII, en donde el examen era la última parte de un método para ayudar a aprender. Asimismo, relata cómo es hasta el siglo XIX que se utiliza como mecanismo para la calificación y la promoción del estudiante, situación que se agudiza en el siglo XX cuando el examen, separado de la metodología de aprendizaje, se convierte en el justificante de una perversión de la relación pedagógica imperante en la política educativa de corte neoliberal que centra los esfuerzos de estudiantes y profesores exclusivamente en la acreditación. El autor argumenta que atribuir al examen la medición objetiva del saber de un individuo es una falacia; que más bien el instrumento es un espacio sobredeterminado, puesto que se le atribuye una facultad que en realidad no tiene de resolver problemas políticos, sociales y educativos, y que cuando se somete a revisión únicamente se abordan sus aspectos técnicos (validez y confiabilidad), como un supuesto disparador de la mejoría en la educación.

A pesar de lo anterior, una cantidad significativa de instituciones educativas elabora sus calendarios académicos estableciendo fechas para exámenes parciales, comúnmente tres (González, 2001, pág. 15). Es por ello que el profesor debe diseñar su examen con la intención de obtener información de calidad para el proceso evaluativo, evitar su sobrevaloración y, por consiguiente, evitar que se instituya como la única fuente de evaluación (pág. 13).

1.1.8 Material didáctico

San Martín (1991, citado por Herrero, 2004) define los medios como “artefactos que […] incorporados en estrategias de enseñanza, coadyuvan a la reconstrucción del conocimiento aportando significaciones parciales de los conceptos curriculares”. Zabala (1990, citado por Herrero, 2004), define los materiales como “instrumentos y medios que proveen al educador de pautas y criterios para la toma de decisiones, tanto en la planificación como en la intervención directa en el proceso de enseñanza”. Herrero (2004, pág. 3) define los recursos didácticos como “la capacidad de decidir sobre el tipo de estrategias que se van a utilizar en los procesos de enseñanza”.

Para Graells (2010), los materiales didácticos cumplen con las siguientes funciones: proporcionar información, guiar los aprendizajes (organizar información y actividades), ejercitar habilidades, despertar y mantener el interés en los estudiantes (motivar), evaluar los conocimientos, proporcionar simulaciones que ofrecen entornos para la expresión y creación de los alumnos.

Godino y sus colegas (2003, págs. 127-141) exponen la siguiente clasificación de los materiales didácticos para el estudio de las matemáticas

- Ayudas al estudio. Son recursos que asumen parte de la función del profesor, tales como las pruebas de autoevaluación, los tutoriales de computadora, los libros de texto, los cuadernillos de problemas o las elaboraciones propias del profesorado.
- Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático. Son objetos físicos tomados del entorno o preparados exprofeso para una situación de aprendizaje. Un material de este tipo puede ser tangible o concreto (piedras, tazas, reglas, balanzas, etc.) y gráfico-textual-verbal (gráficas, software, textos, entre otros). Los autores son muy cuidadosos en observar que los materiales manipulativos concretos solamente sirven como herramienta de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje en función del diseño de una secuencia didáctica integral. Por el otro lado, los materiales manipulativos del tipo

gráfico-textual-verbal apoyan en la percepción visual o auditiva, así como en el establecimiento de las relaciones entre lenguaje y pensamiento, que son de especial relevancia para el aprendizaje de las matemáticas.

Los materiales didácticos se seleccionan tomando en cuenta factores como los objetivos educativos, los contenidos a tratar, las características de los estudiantes, las características del contexto (físico, curricular, cultural, de infraestructura) y la estrategia didáctica que se valdrá de ellos. La evaluación de los materiales se puede realizar considerando factores de calidad (comúnmente asociados con indicadores establecidos por expertos) y el contexto educativo específico (Graells, 2010).

1.1.9 Enfoque transversal y holístico de la educación; la ética del docente

Los valores son percepciones de la concepción humana de lo justo, bello o útil; son a la sociedad lo que el instinto de conservación a ciertas especies (Fabelo, 2004, pág. 15), ya que los hombres recurren a ellos para guiar su conducta y sus actividades (pág. 19), anteponiendo el bien común a los intereses personales. Uno *es* en función de sus valores (Ramírez Hernández, 2011, pág. 3). La axiología da entrada a la posibilidad de que las personas aprendan los valores de acuerdo con un contexto y un momento específicos. Autores como Durkheim sostienen que los valores son resultado de ciertas convenciones sociales que se legan de generación en generación a través de la cultura y las tradiciones; es valioso lo que la sociedad admite como tal (Fabelo, 2004, pág. 25). En este sentido, sí existen los valores universales como conceptos que se manejan desde los tiempos en que todo el círculo social del hombre se reducía a su familia y posiblemente a su pequeña tribu, hasta la época moderna en donde la universalidad aplica de manera literal en un entorno social globalizado; lo que cambia de acuerdo con una realidad histórica y cultural son los contenidos de esos conceptos, es decir, la manera como se conciben.

La teoría del desarrollo moral de Kohlberg expone que en la infancia (antes de los nueve años) el nivel preconvencional en que se encuentra dicho desarrollo indica que las reglas y las expectativas sociales se perciben como ajenas al yo y el individuo se somete a ellas por obediencia y temor al castigo; después lo hace solamente si se satisface un interés propio. En la etapa adolescente y adulta, el desarrollo es convencional y existe una identificación del yo con respecto a las reglas y expectativas de los otros, por lo cual se toma una conciencia de que actuar conforme a las mismas verdaderamente es lo correcto y que cumplir los deberes comprometidos mantiene el funcionamiento del sistema social. Finalmente, en el nivel poscondicional las personas orientan sus valores a partir de sus propios principios; distinguen su yo de las reglas y expectativas de la sociedad (Barra, 1987).

La familia es el entorno natural en el que el menor adquiere sus valores, de manera que son los padres los primeros responsables de su asimilación en el niño, mediante el propio ejemplo y la identificación de experiencias de valor en la vida cotidiana; la estafeta de esta labor se debe encontrar en la escuela (Prieto, 2008, pág. 341). Autores como Parra (2003), Ramírez (2011) y Nervi (agosto, 2004), explican el origen de la incorporación de valores en el currículo educativo bajo un enfoque de transversalidad, partiendo de una crisis general de los mismos a nivel social. Cortés (2002) entiende la comprensión de la totalidad de la persona “con la relación y la conexión de aspectos como son el razonamiento, el carácter, el compromiso, la sensibilidad o inteligencia emocional, la compasión y la sabiduría vital” (pág. 8); asimismo, señala que en las comunidades educativas actuales es necesario desarrollar cuatro aprendizajes: aprender a aprender, a hacer, a vivir juntos y a ser, orientados a lo que llama cuatro dimensiones de la educación holística: ciencia, sociedad, ecología y espiritualidad.

Quien tiene la responsabilidad de instrumentar en el aula la aplicación del enfoque transversal y holístico de la educación es el profesor. Para Prieto (2008), el docente no es un mero transmisor de conocimientos, sino que es un fuerte agente socializador: transmite valores que influyen en la formación de los jóvenes (pág. 325). La autora se cuestiona sobre la importancia del papel del profesorado en el entorno escolar, así como la responsabilidad máxima que tiene cuando se establecen las relaciones maestro-alumno. Expone que el docente traslada a su práctica docente sus creencias, convicciones y escalas de valores, transmitidas en su discurso pedagógico con los estudiantes, por lo cual debe ser consciente del compromiso que tiene con ellos y mostrarse con neutralidad para permitirles formarse con libertad de pensamiento (pág. 328). En este sentido, Ramírez (2011, págs. 4-5) expone algunos componentes del compromiso ético del docente:

- Guía de la información que recibe el estudiante. La globalización y la evolución de las tecnologías de la información y la comunicación ponen a disposición del estudiante una cantidad prácticamente inconmensurable de fuentes, cuya optimización es una de las responsabilidades del profesor.
- Guía del proceso de enseñanza y aprendizaje. En este rubro la autora hace énfasis en la formación continua del docente: es necesario que sepa enseñar, pero aún más saber cómo aprende el estudiante, situación que lo obliga a ser un experto en prácticas educativas.
- Ser un modelo que seguir. El profesor debe mostrar congruencia entre lo que dice y lo que hace, reflejo de sus principios y valores personales, pero también de los de la institución en la que realiza su labor.
- Buscar el beneficio común. En este punto la autora menciona como obligación del docente involucrarse en proyectos institucionales y comunitarios.
- Mantener e incrementar el prestigio de la tarea docente. A partir de los compromisos anteriores.

1.2 El currículum de matemáticas en el Cecytem

La presente investigación tiene como campo experimental al plantel Tequixquiac del Cecytem. El subsistema Cecytem se creó en 1994, con la firma de un convenio entre el gobierno federal (representado por la Secretaría de Educación Pública, SEP) y el gobierno del Estado de México, que establecía el apoyo financiero para poner en marcha la operación de la nueva institución, con el objetivo de “contribuir a impulsar y consolidar los programas de educación media superior (EMS) tecnológica en la entidad, abatiendo el rezago educativo particularmente en zonas urbanas marginales y en la población rural” (Cecytem, 2015a). Dicha institución se concibió como un organismo público descentralizado de carácter estatal con personalidad jurídica y patrimonio propios; arrancó con cuatro planteles y creció hasta 60 en 2013.

El proyecto Cecytem surge en un momento histórico, político y social de México marcado por la globalización, el desarrollo de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y las políticas educativas neoliberales. Estas responden a presiones internacionales de organismos como el Banco Mundial (BM), el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), así como de los países económicamente dominantes como Estados

Unidos, cuyo poder financiero determina a los países endeudados cómo deben asumir la educación desde una perspectiva económica, tecnócrata y eficientista (Gutiérrez L. L., enero-junio, 2009, pág. 174).

1994 significó la transición del mandato de las presidencias de Carlos Salinas a Ernesto Zedillo. El primero había promulgado un año antes la Ley General de Educación cuyos conceptos definitorios eran competitividad, productividad y excelencia; fue aquí donde se inició la implantación del modelo basado en competencias. El segundo culminó el proyecto y en tan solo dos años el citado modelo estaba extendido por todos los subsistemas del nivel medio superior dependientes de la SEP (págs. 180-182).

El Plan Nacional de Educación 2001-2006 de Vicente Fox destaca a la educación como el puntal en el esfuerzo por desterrar la pobreza y la desigualdad (SEP, 2001). Sin embargo, descubre su esencia neoliberal cuando considera que parte de la inversión que el país hace en educación es en realidad una pérdida a causa del fenómeno de la migración; también cuando habla sobre el contexto de competencia globalizada que provoca una disminución en la vida útil del conocimiento, la supuesta necesidad de privatizar los servicios educativos, la acreditación y certificación de capacidades, la adopción del enfoque educativo por competencias y la idea de una evaluación sistemática.

De este modo, no pasó mucho tiempo desde el nacimiento del Cecytem para que enfrentara su primera modificación a la estructura curricular. El Programa Nacional de Educación 2001-2006 y el Programa de Desarrollo de la Educación Tecnológica 2001-2006 hicieron su trabajo de diagnóstico de la situación de la EMS tecnológica que derivó en una reforma curricular (SEP, 2004a), aplicable a todos los subsistemas identificados con esta vertiente del bachillerato. El citado diagnóstico tenía elementos más que conocidos para quienes han leído los fundamentos de las últimas reformas en materia de educación: el aprendizaje de las personas a lo largo de su vida; aprovechamiento del potencial de las TIC; desarrollo integral del estudiante; evaluación, acreditación y certificación del aprendizaje, y ampliación de las posibilidades de calidad y pertinencia de los procesos educativos, entre otras.

La reforma curricular antes citada tuvo efectos notables en el nuevo plan de estudios de los bachilleratos tecnológicos como el Cecytem, enfocándolos mucho más hacia un entorno de competitividad, propio de las políticas educativas neoliberales. El área histórico-social, conformada por las asignaturas introducción a las ciencias sociales, estructura socioeconómica de México, historia de México y filosofía (256 horas en total) se transformó en tres cursos de ciencia, tecnología, sociedad y valores (192 horas); las materias de metodología de la investigación I y II desaparecieron, y los cursos de inglés pasaron de dos a cinco con un incremento de 144 horas. Por otro lado, las especialidades, originalmente integradas por un conjunto de asignaturas (contenidos), pasaron a una estructura modular, organizada en función de los sitios de inserción al trabajo. La suma de todos los cambios produjo una reducción del plan de estudios prácticamente en 900 horas (SEP, 2004b).

Muy pronto la reforma curricular de 2004 sería sustituida. Todo inició en 2005 con la creación en la SEP de la Subsecretaría de EMS. Se empezó a gestar un sistema de EMS bajo el supuesto de que la heterogeneidad de escuelas en el nivel, tanto en estructura como en modalidades curriculares, contribuía a una “indefinición” del mismo (Weiss, 2012, pág. 5). En 2008 se inició la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), que no buscaba conformar un bachillerato único ni crear planes homogéneos, sino solamente establecer un marco de organización común para garantizar la pertinencia de los estudios y facilitar el tránsito entre subsistemas. El marco curricular común estaría basado en competencias, en un enfoque educativo constructivista y en la acreditación, evaluación y becas de los estudiantes. Además, se definió un perfil básico del egresado compartido por todas las instituciones y enriquecido por lo que cada una ofrecía de forma adicional (Alcántara & Zorrilla, 2010, pág. 43).

La RIEMS establece como fines de la EMS el desarrollo de capacidades sociales que generen más y mejores oportunidades de desarrollo económico, así como empleos calificados en el contexto de la globalización, con el fin de reducir la pobreza y lograr la equidad; dichas capacidades deben incrementar el patrimonio científico, tecnológico, artístico y humanístico del país (Bustamante, 2014, pág. 12).

Como ya se ha mencionado, el modelo pedagógico de la RIEMS se basa en competencias, las cuales representan la objetivación de los saberes obtenidos (Bustamante, 2014, pág. 12). Retoma la definición de competencias de la ANUIES como "un conjunto de conocimientos, habilidades y destrezas, tanto específicas como transversales, que debe reunir un titulado para satisfacer plenamente las exigencias sociales" (Alcántara & Zorrilla, 2010, pág. 43).

El marco curricular común de la RIEMS delimita las siguientes competencias (SEP, 2008a):

- Genéricas: las que todo bachiller debe poseer, las que le permiten desarrollarse como parte activa de un entorno social y seguir aprendiendo a lo largo de la vida.
- Disciplinares: integran los saberes de campos específicos de estudio como las matemáticas, la física, la biología y la química, entre otras. Se subdividen en básicas (comunes a todos los egresados del nivel medio superior) y extendidas (particulares de cada modelo educativo).
- Profesionales: relacionadas con el quehacer laboral; pueden ser básicas o extendidas, de acuerdo con su grado de complejidad.

Según la RIEMS, es necesario adoptar estrategias didácticas centradas en el aprendizaje significativo de los alumnos, sobre la base de que lo que se aprende depende del modo en que se aprende (dicho en otras palabras, privilegiar las experiencias sobre los contenidos). Por otro lado, se requieren estructuras curriculares de los programas educativos que eviten la saturación de información, redundancia de contenidos y fragmentación de los campos de conocimiento (Bustamante, 2014, pág. 14).

La aplicación de la RIEMS en el Cecytem se puede apreciar en la descripción de las carreras de Técnico en Programación y Técnico en Procesos de Gestión Administrativa, que conforman la oferta del plantel Tequixquiac:

> La carrera de Técnico en Programación ofrece las competencias profesionales que permiten al estudiante realizar actividades dirigidas a: analizar, diseñar, desarrollar, instalar y mantener software de aplicación tomando como base los requerimientos de usuario. Todas estas competencias posibilitan al egresado su incorporación al mundo laboral o desarrollar procesos productivos independientes de acuerdo con sus intereses profesionales y necesidades de su entorno social. (Cecytem, 2015b).
>
> La carrera Técnico en Procesos de Gestión Administrativa estrecha la relación con el sector empresarial del país al desarrollar en los estudiantes las competencias profesionales que les permitan integrarse al mercado laboral e incidir en el ejercicio práctico de las empresas,

reafirmando y consolidando objetivamente sus conocimientos, habilidades, actitudes y creatividad dentro de las mismas. (Cecytem, 2015c).

La estructura curricular general del Cecytem se muestra en la ilustración 3. Como puede apreciarse, las asignaturas obligatorias correspondientes al área de matemáticas son Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Probabilidad y Estadística, de primero a sexto semestre, respectivamente. En el último periodo, los estudiantes pueden optar por la materia de Matemáticas Aplicadas.

Específicamente, el currículum de la disciplina considera a las matemáticas como "una herramienta de gran utilidad para las demás áreas del conocimiento, contribuyen al desarrollo de competencias genéricas y disciplinares que facilitan realizar el planteamiento, análisis y resolución de problemas" (SEP, 2013, pág. 8). El propósito formativo es que "el estudiante aplique conocimientos matemáticos en la resolución de problemas de distintos contextos (social, natural, científico y tecnológico, entre otros)" (pág. 9). Expresamente, el currículum establece la relación de las matemáticas con asignaturas como: Lectura, Expresión Oral y Escrita; Química; Bioquímica; Inglés; Ciencia, Tecnología, Sociedad y Valores; Tecnologías de la Información y la Comunicación; Biología; Ecología; Física; Temas de Administración; Introducción a la Economía, y Dibujo Técnico.

1er. semestre	2o. semestre	3er. semestre	4o. semestre	5o. semestre	6o. semestre
Álgebra 4 horas	Geometría y Trigonometría 4 horas	Geometría Analítica 4 horas	Cálculo Diferencial 4 horas	Cálculo Integral 5 horas	Probabilidad y Estadística 5 horas
Inglés I 3 horas	Inglés II 3 horas	Inglés III 3 horas	Inglés IV 3 horas	Inglés V 5 horas	Temas de Filosofía 5 horas
Química I 4 horas	Química II 4 horas	Biología 4 horas	Física I 4 horas	Física II 4 horas	Asignatura propedéutica* (1-12)** 5 horas
Tecnologías de la Información y la Comunicación 3 horas	Lectura, Expresión Oral y Escrita II 4 horas	Ética 4 horas	Ecología 4 horas	Ciencia, Tecnología, Sociedad y Valores 4 horas	Asignatura propedéutica* (1-12)** 5 horas
Lógica 4 horas	Módulo I 17 horas	Módulo II 17 horas	Módulo III 17 horas	Módulo IV 12 horas	Módulo V 12 horas
Lectura, Expresión Oral y Escrita I 4 horas					

Áreas propedéuticas			
Físico-matemática	Económico-administrativa	Químico-Biológica	Humanidades y ciencias sociales
1. Temas de Física 2. Dibujo Técnico 3. Matemáticas Aplicadas	4. Temas de Administración 5. Introducción a la Economía 6. Introducción al Derecho	7. Introducción a la Bioquímica 8. Temas de Biología Contemporánea 9. Temas de Ciencias de la Salud	10. Temas de Ciencias Sociales 11. Literatura 12. Historia

Componente de formación básica — Componente de formación propedéutica — Componente de formación profesional

* Las asignaturas propedéuticas no tienen prerrequisitos de asignaturas o módulos previos.
* Las asignaturas propedéuticas no están asociadas a módulos o carreras específicas del componente profesional.
** El alumno cursará dos asignaturas del área propedéutica que elija.

Ilustración 3. Estructura curricular del bachillerato tecnológico (semestres, asignaturas, módulos y horas por semana). Fuente: tomado de (SEP, 2013, pág. 7)

En las asignaturas de matemáticas se consideran ocho competencias disciplinares:

> 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
> 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, empleando diferentes enfoques.
> 3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
> 4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
> 5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
> 6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
> 7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
> 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. (SEP, 2013, pág. 10).

Las ocho competencias disciplinares se vinculan con once competencias genéricas en una de tres formas (SEP, 2013, pág. 10), dando por resultado la información de las tablas 2, 3 y 4:

- Relación fuerte (**F**). La relación es directa, ya sea instrumental o procedimental, que permite derivar de la competencia genérica o del atributo[11] una situación problemática y resolverla con la competencia disciplinar o viceversa.
- Relación media (m). Existe una relación conceptual que permite derivar de la competencia genérica o del atributo una situación problemática que puede resolverse con la competencia disciplinar.
- Relación débil (*d*). Es parecida a la relación media, pero a nivel actitudinal.

[11] Los atributos son una especie de subclasificación de las competencias genéricas.

Tabla 2. Vinculación entre competencias genéricas y disciplinares, primera parte. Fuente: elaboración propia con datos de (SEP, 2013, págs. 11-13).

Competencias genéricas y atributos	Competencias disciplinares							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue								
Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades	m	**F**	**F**	**F**	m	*d*	*d*	*d*
Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida	*d*	**F**	**F**	*d*	m	**F**	*d*	*d*
Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones	**F**	m	m	*d*	**F**	*d*	**F**	**F**
Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*	F	*d*	*d*
Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el desarrollo de sus metas	m	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	**F**
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros								
Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*	**F**
Participa en prácticas relacionadas con el arte	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	m	**F**
3. Elige y practica estilos de vida saludables								
Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social	*d*	*d*	*d*	*d*	m	*d*	*d*	m
Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*
Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados								
Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas	**F**	**F**	**F**	**F**	m	m	**F**	**F**
Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*	**F**	**F**	**F**
Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	**F**
Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas	*d*	*d*	*d*	m	*d*	*d*	*d*	m
Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas	**F**	**F**	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**

Tabla 3. Vinculación entre competencias genéricas y disciplinares, segunda parte. Fuente: elaboración propia con datos de (SEP, 2013, págs. 11-13).

Competencias genéricas y atributos	Competencias disciplinares							
	1	2	3	4	5	6	7	8
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos								
Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo	**F**	m	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**
Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones	**F**	**F**	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**
Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*
Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez	**F**	*d*	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*
Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas	*d*	*d*	**F**	m	**F**	**F**	*d*	*d*
Utiliza las tecnologías de información y comunicación para procesar e interpretar información	**F**	**F**	**F**	*d*	**F**	**F**	*d*	**F**
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva								
Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ella de acuerdo a su relevancia y confiabilidad	*d*	*d*	*d*	**F**	**F**	m	**F**	**F**
Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	M
Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta	*d*	*d*	F	F	*d*	*d*	m	*d*
Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida								
Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*
Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*
Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos								
Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*
Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva	*d*	*d*	m	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*
Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo	m	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*

Tabla 4. Vinculación entre competencias genéricas y disciplinares, tercera parte. Fuente: elaboración propia con datos de (SEP, 2013, págs. 11-13).

Competencias genéricas y atributos	Competencias disciplinares							
	1	**2**	3	4	5	6	7	8
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo								
Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos	*d*	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**
Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	**F**	d
Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado	**F**	*d*	**F**	**F**	m	*d*	*d*	*d*
Advierte que los fenómenos que se desarrollan en el ámbito local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global e interdependiente	m	*d*	**F**	m	m	*d*	*d*	m
10. Mantiene una actitud respetuosa ante la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales								
Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza todo tipo de discriminación	**F**	*d*	*d*	**F**	m	*d*	**F**	*d*
Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio	*d*	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**
Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica con acciones responsables								
Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional	*d*	**F**	**F**	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*
Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente	**F**	*d*	**F**	**F**	*d*	m	*d*	**F**
Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente	*d*	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	m

La estructura de las materias de matemáticas incluye los siguientes elementos (SEP, 2013, págs. 14-15):

- Conceptos fundamentales. Representan los aprendizajes principales de la materia y se encuentran en el segundo nivel de su estructura (el primer nivel es la materia como tal).
- Conceptos subsidiarios. Son temáticas que proporcionan información específica; integradas forman al concepto fundamental. Se ubican en el tercer nivel de la estructura.
- Contenidos de los conceptos subsidiarios. Ubicados en el cuarto nivel, son conocimientos conceptuales o procedimentales que en conjunto construyen los conceptos subsidiarios.
- Contenidos transversales. El programa de matemáticas define cinco contenidos transversales: comprensión de la situación problemática; identificación de datos y variables; representación de las relaciones entre variables a través de un modelo matemático; resolución de modelos mediante métodos matemáticos, e interpretación y argumentación de la solución, es decir, dar significado a los datos matemáticos en un contexto real.
- Contenidos procedimentales. Son las habilidades más representativas a promover, fortalecer y potenciar en el campo disciplinar de las matemáticas (ver ilustración 4).
- Contenidos actitudinales. Actitudes y valores más representativos que se pueden desarrollar a través de las matemáticas (ver ilustración 5).

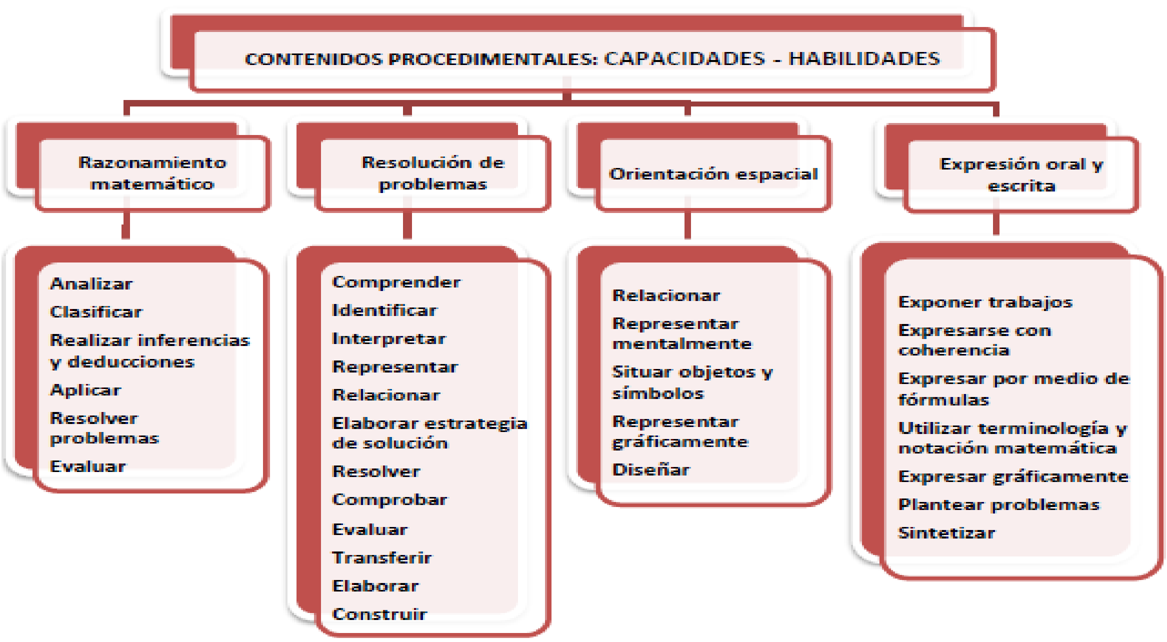


Ilustración 4. Contenidos procedimentales del programa de matemáticas. Fuente: tomado de (SEP, 2013, pág. 15).

El programa de matemáticas establece explícitamente que los docentes deben diseñar estrategias didácticas basadas en situaciones problemáticas vinculadas a un tema integrador y a contenidos fácticos (¿qué conocimientos aprenderá el alumno?), procedimentales (¿qué aprenderá a hacer y cómo lo hará?) y actitudinales (¿qué aprenderá como persona y para convivir con los demás?). La intención es lograr las competencias genéricas y disciplinares ya mencionadas (SEP, 2013, pág. 23).

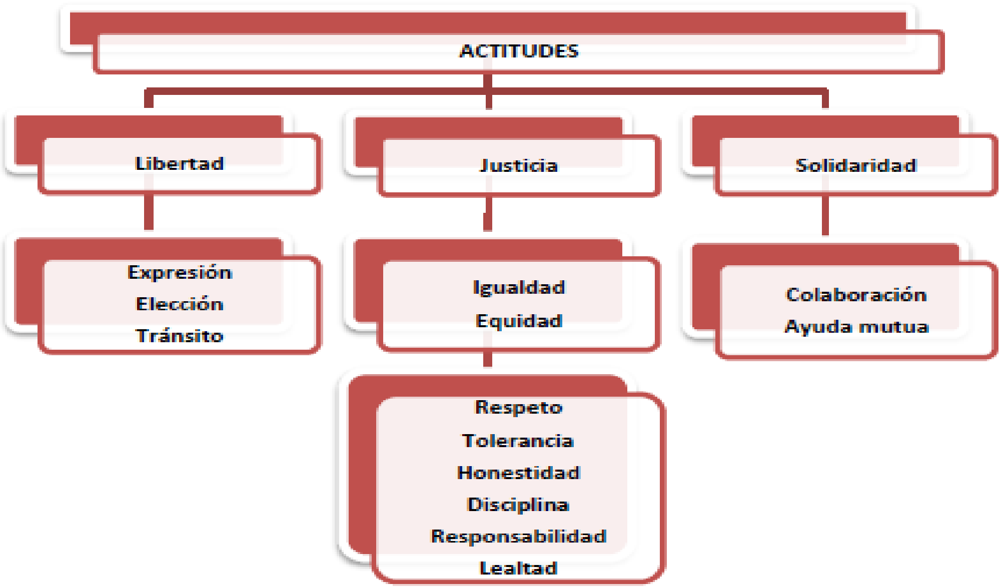


Ilustración 5. Contenidos actitudinales del programa de matemáticas. Fuente: tomado de (SEP, 2013, pág. 15)

La operación del citado programa de matemáticas se basa en las siguientes premisas (SEP, 2013, págs. 25-29):

- Trabajo colegiado en la elección del tema integrador que sea utilizado en varias asignaturas. El tema integrador debe: proporcionar situaciones problemáticas que contribuyan a lograr los objetivos establecidos; permitir la variedad de estrategias didácticas; ser conveniente para el nivel general de desarrollo del grupo y para el de cada estudiante; desarrollar el aprendizaje como proceso continuo de experiencias dentro y fuera del aula; ser relevante por vincularse con la vida cotidiana del alumno en diferentes contextos (regional, estatal, nacional y mundial) y fomentar la participación de los estudiantes en la planeación de las actividades.
- Fomento a la lectura, a través del análisis y la comprensión de textos mientras se desarrollan los contenidos disciplinares.
- La evaluación como un proceso continuo que permita recabar evidencias sobre el logro de los aprendizajes, retroalimentar al docente y al alumno sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje y establecer mejoras. Las estrategias de evaluación deben atender los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje. Se recomienda utilizar la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. De acuerdo con los momentos de la clase, se propone una evaluación diagnóstica para la apertura, formativa y continua en el desarrollo, así como sumativa e integral para constatar el nivel de desarrollo en las competencias en el cierre.

La exposición del currículo de matemáticas en el Cecytem culmina con la estructura conceptual de la materia Geometría Analítica, donde se encuentra la **circunferencia** como contenido del concepto subsidiario **las cónicas** (al lado de la parábola, la elipse y la hipérbola, según se aprecia en la ilustración 6), parte integrante del concepto fundamental **lugares geométricos**. El propósito formativo de la asignatura es que “el estudiante interprete, argumente comunique y resuelva diferentes situaciones problemáticas de su contexto por métodos gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano.” (SEP, 2013, pág. 9).

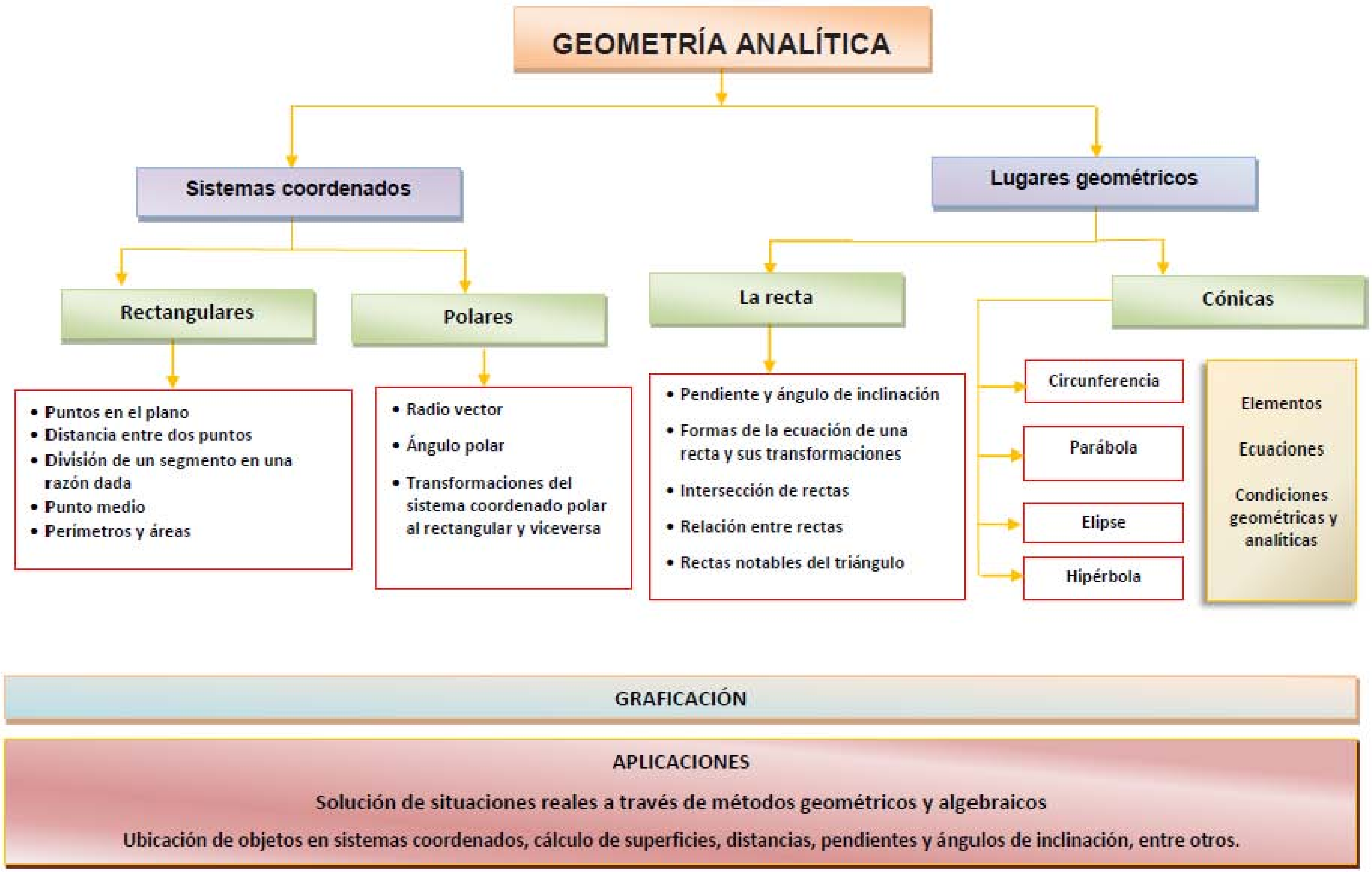


Ilustración 6. Estructura conceptual de la materia Geometría analítica. Fuente: tomado de (SEP, 2013, pág. 21).

1.3 La circunferencia

1.3.1 La circunferencia como objeto de aprendizaje

Conviene citar un poco de historia sobre el tratamiento de la circunferencia. Para Platón, la esfera y el círculo representaban "las formas geométricas perfectas, la armonía de la lira, las matemáticas y la música de la mano en la primera victoria del orden sobre el caos" (Pérez, 2005, pág. 3). Aristóteles basó su modelo geométrico del movimiento de los planetas en el círculo y la esfera, con la Tierra en el centro del universo (pág. 4). Los matemáticos y astrónomos de los siguientes cinco siglos tuvieron que realizar enormes esfuerzos para hacer coincidir el movimiento de los planetas con el modelo de órbitas circulares de Aristóteles. Particularmente, Ptolomeo ideó un modelo geométrico en donde asignaba un círculo imaginario a la Tierra, al que llamó *deferente*; en distintos puntos del mismo se situaban los centros de otros círculos, cada uno de ellos asignado como órbita (o e*piciclo*) a un planeta, el sol y la luna, dando la apariencia de círculos girando sobre otro círculo (pág. 5). La idea del desplazamiento en círculos de los planetas se mantendría vigente prácticamente dos mil años.

Entre Aristóteles y Ptolomeo se sitúa el trabajo de Euclides, en cuya obra *Los Elementos* aparece el círculo como única curva. Las siguientes definiciones en el libro primero se relacionan con el círculo:

> 15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
>
> 16. Y el punto se llama centro del círculo. (Euclides, 1991, págs. 193-194).

Las definiciones 17 y 18 corresponden, respectivamente, al diámetro y al semicírculo. El postulado 3 afirma que se puede construir un círculo a partir de cualquier centro y distancia o radio (pág. 197). Euclides se apoya en estas definiciones para probar varias de sus proposiciones. Es en el libro tercero donde demuestra las propiedades de los círculos.

Las definiciones en el libro tercero tratan aspectos como la igualdad de círculos, recta tangente, círculos tangentes, segmento de círculo, ángulo de un círculo y segmentos de círculo semejantes, entre otros. Euclides demuestra, por ejemplo, que se puede hallar el centro de un círculo; que si dos círculos se cortan entre sí o se tocan, no tienen el mismo centro; que un círculo no corta a otro en más de dos puntos; que si dos círculos se tocan uno a otro (ya sea por dentro o por fuera) y se toman sus centros, la recta que une estos al prolongarse toca el punto de contacto de los círculos; que un círculo no toca a otro círculo en más de un punto (ya sea por dentro o por fuera); que se puede trazar desde un punto una recta tangente a un círculo dado, y que si una recta toca a un círculo y se traza una recta desde el centro hasta el punto de contacto, la recta trazada será perpendicular a la tangente (págs. 291-315).

Finalmente, en este repaso de *Los Elementos*, el libro cuarto incluye en sus definiciones figuras rectilíneas inscritas y circunscritas en torno a un círculo, así como a círculos inscritos o circunscritos en torno a una figura. Las proposiciones demuestran, entre otras propiedades, que un círculo se puede inscribir o circunscribir en torno a un triángulo dado y viceversa, así como que un cuadrado se puede inscribir o circunscribir en torno a un círculo dado y viceversa (págs. 341-353).

En este breve recorrido por la historia de la circunferencia parece necesario vincular los antecedentes arriba citados con el desarrollo de la geometría analítica. Menecmo, de la escuela platónica y maestro de Aristóteles, descubrió las secciones cónicas a las cuales más tarde se llamó la "tríada de Menecmo", posiblemente la familia más útil de curvas de todas las ciencias, que posteriormente serían bautizadas como elipse, parábola e hipérbola por Apolonio (González Urbaneja, 2007, pág. 207). *El Tesoro del Análisis* de Pappus recuperó fragmentos de obras de Euclides en donde trabajó sobre cónicas, con una aproximación a lo que hoy conocemos como ecuaciones a través de *porismas*, una especie de descripción verbal de la ecuación de una curva (pág. 208). En *Las Cónicas* el trabajo de Apolonio superó ampliamente el de Menecmo y Euclides. Demostró que a partir de un único cono se podían obtener los tres tipos de cónica, variando la inclinación del plano que lo corta; esto abonó a la unificación del estudio de las tres curvas.

Uno de los problemas históricos de gran incidencia en la posterior obra de Descartes es el llamado "problema de Apolonio: dados tres elementos, punto, recta o circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres." (pág. 210); otro es el problema de Pappus (lugar geométrico determinado por tres o cuatro rectas):

> Dadas tres rectas (resp. cuatro) en un plano, encuéntrese el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (resp. el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias de las otras dos) si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes. (pág. 210).

En su *Arte Analítica*, Vieta conectó la geometría y el álgebra al obtener ecuaciones para diversas construcciones geométricas; sin embargo, solamente podía resolver problemas geométricos determinados, solamente con ecuaciones determinadas en donde la variable era una constante fija a localizar. Descartes y Fermat desarrollaron esta idea para cuestiones indeterminadas. A partir de esto, la ecuación se convierte en un elemento fundamental para el estudio de las propiedades de la curva; permite el tránsito de la geometría al álgebra para aprovechar su potencia de cálculo y luego regresar al ámbito geométrico (pág. 220).

En *La Geometría*, Descartes transforma el álgebra geométrica y el análisis geométrico de los griegos en lo que hoy se conoce como geometría analítica. Se deshace de varias limitaciones de la matemática griega: la inconmensurabilidad de Pitágoras, el uso exclusivo de regla y compás de Platón, la homogeneidad dimensional de Euclides, la sujeción a solamente las tres dimensiones percibidas por los sentidos, la dependencia de ciertas figuras geométricas y la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas (pág. 224). El método analítico de Descartes, su poderosa aportación a la deducción de las propiedades de los objetos geométricos a partir de objetos algebraicos, se puede resumir en los siguientes pasos (Hawkins, 2010, págs. 263-264):

1. Suponer efectuada la resolución.
2. Dar nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción (sean conocidas o desconocidas).
3. Identificar las relaciones entre las líneas de modo que se esté en posibilidades de plantear una ecuación por cada línea desconocida. Si no se puede encontrar una ecuación por cada línea desconocida y no se ha omitido algún detalle del problema, se dice que este no está completamente determinado, en cuyo caso se pueden elegir arbitrariamente líneas de longitud conocida para cada línea a la que no corresponda una ecuación.

4. Obtener el valor para cada línea desconocida a través de las ecuaciones restantes hasta que quede una sola línea desconocida que sea igual a alguna línea conocida o cuya potencia (cuadrado, cubo, etc.) sea igual a la suma de dos o más cantidades, una de las cuales sea conocida y las otras estén compuestas por medias proporcionales entre la unidad y esa potencia multiplicada por otras conocidas.

Resulta interesante la aplicación del método de Descartes en la construcción de la teoría que sustenta el estudio de la circunferencia desde el punto de vista de la geometría analítica.

En principio, supóngase que se desea obtener una ecuación para calcular la distancia d (positiva) entre cualquier par de puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dados. Conviene representar gráficamente el problema a través del plano cartesiano, como se muestra en la ilustración 7.

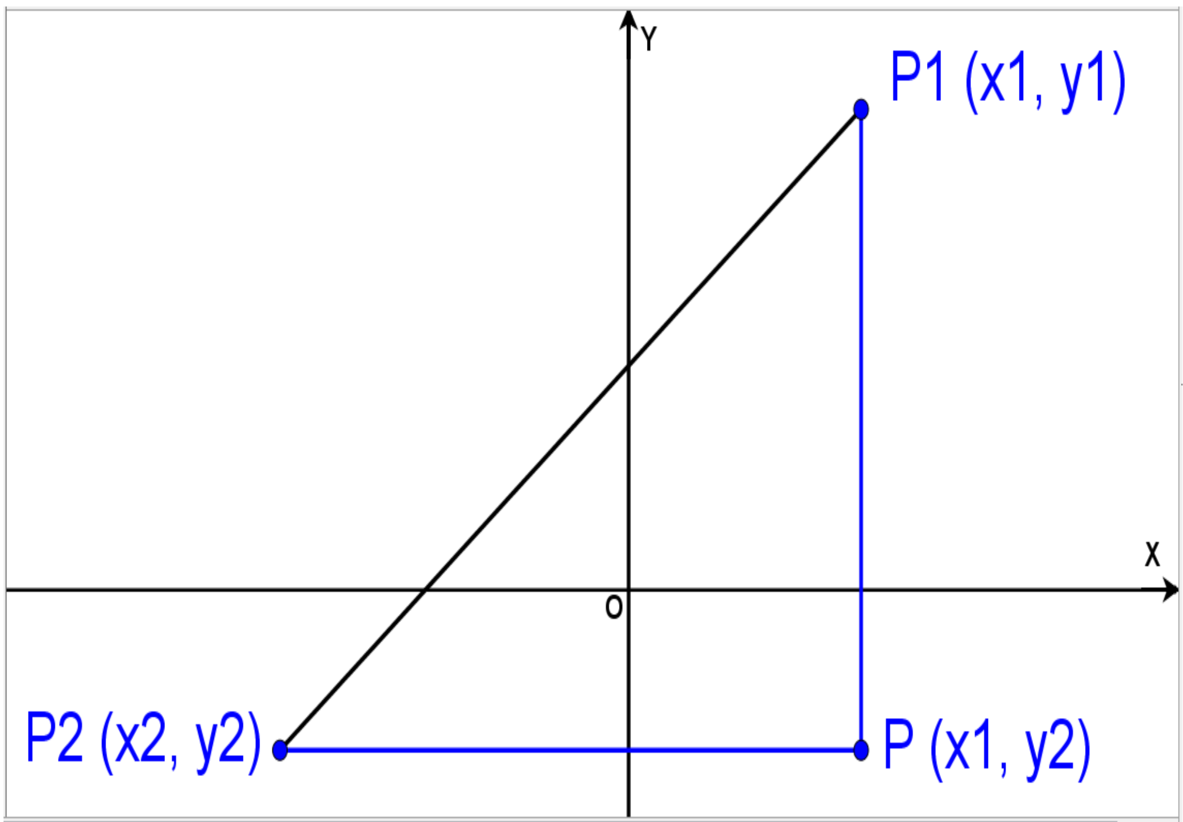


Ilustración 7. Ecuación de la distancia entre dos puntos

También es pertinente establecer la distancia lineal entre dos puntos $P_3(x_3)$ y $P_4(x_4)$ como $|\overline{P_3P_4}| = |x_4 - x_3|$. La solución por el método analítico se presenta en la tabla 5.

De acuerdo con Lehmann (1990, pág. 99), una circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que se conserva siempre una distancia constante (radio) de un punto fijo (centro) de dicho plano (ver ilustración 8). A partir de esta definición y del resultado anterior (distancia entre dos puntos), se puede aplicar nuevamente el método analítico para deducir la ecuación de la circunferencia, según se explica en la tabla 6.

Tabla 5. Aplicación del método analítico para determinar la ecuación de la distancia entre dos puntos

Paso del método analítico	Aplicación al problema
Suponer efectuada la resolución	Se consideran dados los puntos P_1, P_2 y P, es decir, que se conocen sus coordenadas y con ello la distancia positiva d entre P_1 y P_2.
Dar nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, sean conocidas o desconocidas	Se puede trazar el punto P, de manera que los segmentos $\overline{P_2P} = x_1 - x_2$ y $\overline{P_1P} = y_1 - y_2$ resulten perpendiculares a los ejes X e Y, respectivamente. d es la hipotenusa del triángulo rectángulo así formado.
Identificar las relaciones entre las líneas de modo que se esté en posibilidades de plantear una ecuación por cada línea desconocida.	De este modo, d se puede obtener a través del teorema de Pitágoras.
Obtener el valor para cada línea desconocida a través de las ecuaciones restantes hasta que quede una sola línea desconocida que sea igual a alguna línea conocida o cuya potencia (cuadrado, cubo, etc.) sea igual a la suma de dos o más cantidades, una de las cuales sea conocida y las otras estén compuestas por medias proporcionales entre la unidad y esa potencia multiplicada por otras conocidas.	$d = \sqrt{(\overline{P_2P})^2 + (\overline{P_1P})^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

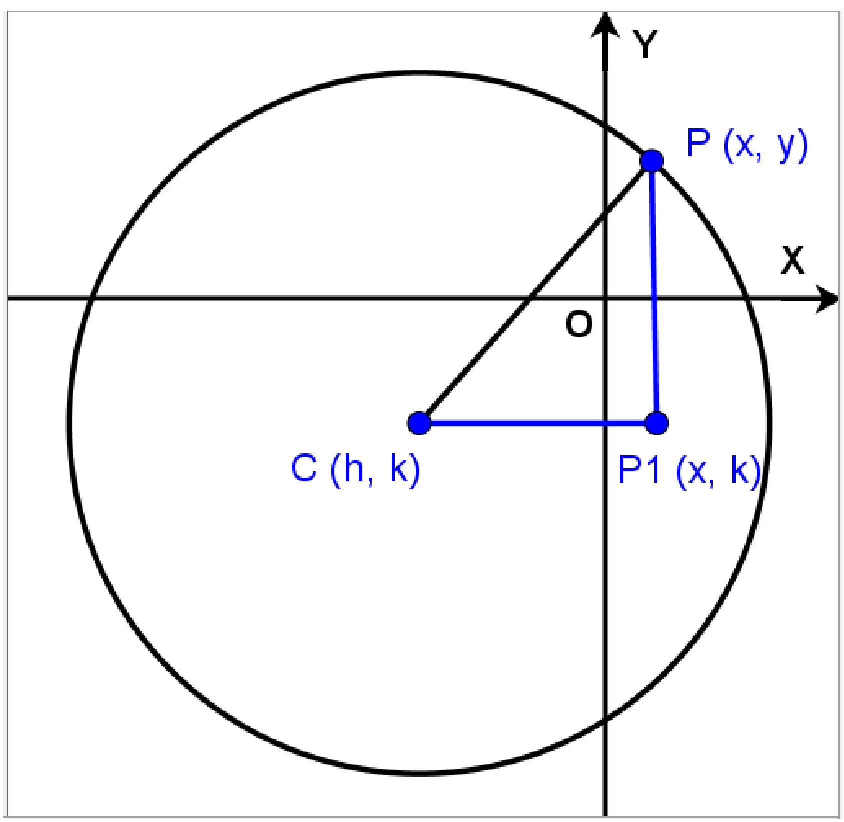


Ilustración 8. Ecuación de la circunferencia con centro en C(h, k) y radio r

Tabla 6. Deducción de la ecuación de la circunferencia por el método analítico

Paso del método analítico	Aplicación al problema
Suponer efectuada la resolución	Se consideran dados los puntos $C, P\ y\ P_1$, se conocen sus coordenadas y con ello la distancia d entre P y C.
Dar nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, sean conocidas o desconocidas	Sean $\overline{CP_1} = x - h, \overline{PP_1} = y - k$, perpendiculares respectivamente a los ejes X e Y; sea r la hipotenusa del triángulo rectángulo PCP_1.
Identificar las relaciones entre las líneas de modo que se esté en posibilidades de plantear una ecuación por cada línea desconocida.	r es la distancia entre los puntos C y P
Obtener el valor para cada línea desconocida a través de las ecuaciones restantes hasta que quede una sola línea desconocida que sea igual a alguna línea conocida o cuya potencia (cuadrado, cubo, etc.) sea igual a la suma de dos o más cantidades, una de las cuales sea conocida y las otras estén compuestas por medias proporcionales entre la unidad y esa potencia multiplicada por otras conocidas.	Por el resultado para la ecuación de la distancia entre dos puntos: $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$, de donde $$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

La expresión anterior recibe el nombre de ecuación ordinaria de la circunferencia (Lehmann, 1990, pág. 100) y permite obtener las características de la curva. Con la sustitución de los valores $x = 0, y = 0$, se puede establecer como corolario de la proposición anterior que la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es $r^2 = x^2 + y^2$. Esta última, por ser la representación más simple de la forma ordinaria, se denomina ecuación canónica.

La forma ordinaria permite trabajar problemas muy ilustrativos en donde se conozca (o se pueda deducir) uno de tres elementos: a) medida del radio y coordenadas del centro; b) gráfica, o c) ecuación. Con el elemento conocido, el problema se resuelve encontrando los dos restantes.

La forma general de la ecuación de la circunferencia se obtiene al desarrollar los cuadrados en la forma ordinaria: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, en donde $D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$ (pág. 104).

Cabe señalar que no toda ecuación de segundo grado corresponde a una circunferencia. Dada la ecuación general, al completar cuadrados se obtiene $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4}$. De este modo, si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, se trata de la ecuación de una circunferencia con centro en $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$; si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, en realidad se tiene el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, y si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, no es la representación de un lugar geométrico real.

La ecuación general permite resolver, entre otros, problemas de circunferencias sujetas a tres condiciones independientes (pág. 106), como podría ser el problema de Apolonio antes citado. Cualquiera que sea la forma de la ecuación, su aplicación en la resolución de interesantes problemas sobre tangentes, figuras inscritas o circunscritas, intersecciones con rectas u otras circunferencias y familias de circunferencias, entre otros, es un poderoso instrumento de cálculo y deducción de propiedades geométricas.

1.3.2 La circunferencia y su enseñanza

En el currículum de matemáticas, la geometría sintética (pura o euclidiana) y la geometría analítica suelen separarse, cuando en realidad son técnicas complementarias que podrían enseñarse simultáneamente (Gascón, 2002; Contreras, Contreras & García, 2002).

Para Wilhelmi (2005) la actividad matemática en geometría analítica, específicamente en el caso de la circunferencia, se centra en la transformación de una ecuación por equivalencias algebraicas, de manera que las técnicas empleadas "aparecen como instrumentos rígidos para la realización de tareas aisladas y estereotipadas." (pág. 3). A partir de lo anterior, se presentan algunos fenómenos didácticos tales como: el hecho de que la dimensión experimental de la matemática está reservada a la institución (representada por el profesor) y vedada prácticamente a los estudiantes; el profesor no es un guía de los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que, a la usanza tradicional, es un expositor de conocimientos abordados como si fuesen producto acabado, y el uso del plano cartesiano para representar la circunferencia es una especie de colofón del trabajo algebraico en lugar de convertirse en una herramienta utilizable de manera más profunda en el análisis. Según el autor, dichos fenómenos didácticos se reflejan tanto en una irresponsabilidad matemática de los estudiantes, como en un modelo epistemológico específico de la institución escolar.

La propuesta de Wilhelmi para el tratamiento de la circunferencia en geometría analítica parte de la determinación del lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen una ecuación polinómica de segundo grado en dos variables con coeficientes racionales:

$$R \equiv ax^2 + bx + cxy + dy^2 + ey + f = 0, a = d = 1, c = 0, b^2 + e^2 - 4f > 0.$$

De manera implícita $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, $a^2 + b^2 - 4c > 0$ (pág. 5). Con base en esto propone cinco técnicas para resolver un problema relativo a esta curva:

- Llama técnica experimental a la representación en el plano cartesiano de un número "suficiente" de puntos que cumplen la relación R, a partir de la cual se determinan el centro y el radio.
- En la técnica de las parábolas, el autor determina el centro de la circunferencia a partir de la intersección de los ejes de este tipo de cónicas asociadas a la relación $x^2 + ax + c = 0, y^2 + by + c = 0$. A partir de ello, determina dos puntos de la circunferencia (bastaría con uno) sustituyendo la abscisa o la ordenada del centro en la relación R; esto da la posibilidad de calcular el radio.
- La técnica del cuadrado interpreta la ecuación implícita como una ecuación de segundo grado en x o en y; el discriminante de la solución de ambas ecuaciones determina los intervalos de existencia de los parámetros x e y, los cuales forman regiones cuya intersección es un cuadrado circunscrito en la circunferencia en cuestión. El centro de dicho cuadrado coincide con el de la circunferencia y su semilado con el radio.
- La técnica híbrida determina el centro mediante la técnica de las parábolas y el radio por la técnica del cuadrado.
- La técnica de las transformaciones algebraicas es la clásica obtención de trinomios cuadrados perfectos a partir de la ecuación implícita.

Algunas tendencias en el diseño de secuencias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la circunferencia aplican una de las siguientes teorías o incluso una mezcla de ellas: el modelo de Van

Hiele, la visualización y la geometría dinámica (Carmona, 2011; Kerlegand, 2013; Mora, 2013; Sanes, 2014).

A finales de la década de 1950 los esposos Pierre y Dina Van Hiele, profesores de matemáticas en Holanda, presentaron en sus tesis doctorales un modelo que trataba de explicar la evolución del razonamiento geométrico en los estudiantes a partir de cuatro niveles (Gutiérrez & Jaime, Agosto, 1991, págs. 50-51):

- Nivel 1 (reconocimiento). El estudiante de este nivel percibe los objetos en su totalidad y como unidades, los describe por su aspecto físico y los clasifica con base en similitudes y diferencias.
- Nivel 2 (análisis). El estudiante percibe que los objetos se conforman de varios componentes y tienen ciertas propiedades, aunque no distingue relaciones entre estas; asimismo, es capaz de deducir a través de la experimentación nuevos componentes y propiedades, pero no llega a su formalización.
- Nivel 3 (clasificación). En este punto el estudiante es capaz de describir figuras formalmente a través de definiciones, así como de comprender los pasos individuales de un razonamiento lógico, aún sin llegar al nivel de una demostración.
- Nivel 4 (deducción). En el nivel más elevado del modelo el estudiante realiza razonamientos lógicos formales y comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Cada nivel del modelo de Van Hiele consta de cinco fases que debe desarrollar el profesor (Mata, 2013): información, donde el docente averigua los conocimientos previos del estudiante; orientación dirigida, que permite el descubrimiento y comprensión de los conceptos y propiedades por parte de los estudiantes con la asistencia del docente; explicitación, etapa en la que los estudiantes intercambian argumentos con sus pares; orientación libre, que representa la aplicación de los conocimientos adquiridos por el alumno en la resolución de problemas nuevos, diferentes y preferentemente con diversos caminos para resolverse, y la última fase es la integración, que representa la comprensión condensada del conocimiento adquirido.

La visualización implica la reflexión relacionada con imágenes y diagramas que pueden ubicarse sobre papel o sobre instrumentos tecnológicos (Acuña Soto, 2012). A partir de la década de 1990 se viene desarrollando una tendencia para hacer de la visualización una práctica aceptable y habitual para el aprendizaje de las matemáticas (Figueiras & Deulofeu, 2005, pág. 217). Se trata de "representaciones intuitivas y geométricas que pueden presentar las ideas y los conceptos matemáticos, que permiten al estudiante la exploración de un problema y, al menos, una primera aproximación a su solución." (pág. 218). En didáctica de la matemática se han desarrollado investigaciones sobre visualización a partir de tres perspectivas: la existencia de un obstáculo en muchos profesores y estudiantes para aceptar que una demostración visual pueda ser en realidad una demostración matemática (enfoque cultural); la traducción entre una imagen visual y su correspondiente representación analítica, así como las condiciones en que el empleo de la primera favorece o limita la resolución de un problema (enfoque cognitivo), y la diversidad de estudiantes y sus representaciones visuales (enfoque sociológico).

Para Carmona (2011, pág. 35) el diseño y la instrumentación de secuencias didácticas en el campo de la geometría analítica deben permitir la construcción de un razonamiento geométrico en el estudiante y el software de geometría dinámica (DGS, por sus siglas en inglés) proporciona un buen número de posibilidades para ello, ya que mediante su uso la demostración matemática puede pasar de una herramienta netamente verificativa a una de descubrimiento.

Sanes (2014) expone que el lápiz y el papel constituyen un entorno estático que dificulta al alumno la adquisición de significados para los lugares geométricos y sus propiedades, situación que se combina con la clásica enseñanza algorítmica de la geometría analítica. El autor define en la herramienta de arrastre incorporada en el DGS el mayor potencial de este tipo de programas, en virtud de que dota al alumno de una interactividad que rompe precisamente la rigidez del citado entorno del lápiz y el papel, de retroalimentación sobre las actividades que realiza, de análisis sobre diferentes condiciones en las que va obteniendo cada resultado y de visualización de diversas construcciones geométricas con variantes en los parámetros en un muy corto lapso de tiempo. Es la mencionada función de arrastre la que Stylianides (citado por Kerlegand, 2013, pág. 23) esgrime como forjadora de pruebas matemáticas válidas, siempre y cuando se cumplan dos condiciones:

1. Se mantienen invariantes las propiedades de la figura cuyos elementos se someten al arrastre.
2. Existe compatibilidad entre las herramientas del software utilizadas para la manipulación de las figuras y las operaciones equivalentes que tendrían que realizarse con regla y compás.

1.4 El alumno de tercer semestre en el Cecytem Tequixquiac

El estudiante en el nivel medio superior es un adolescente, es decir un individuo que estrena una nueva capacidad de razonamiento, la cual le permite construir una realidad propia a partir del establecimiento y comprobación de sus hipótesis. De acuerdo con Piaget, en la adolescencia se logra la estructura cognitiva de las operaciones formales, que representa el máximo desarrollo intelectual del individuo (Montealegre, 1992). El adolescente ingresa en una etapa donde toma conciencia de sí mismo y desarrolla valores (Horrocks, 1986). Entra en un periodo de afirmación del yo, en el que es egocéntrico y se enfrasca en la búsqueda de sí mismo; experimenta inestabilidad emocional a través de cambios inesperados de humor y presenta reacciones antes desconocidas para él (Álvarez, marzo, 2010). Derivado de lo anterior, manifiesta un egocentrismo caracterizado por el pensamiento de que todo lo que le pasa a nadie más le puede ocurrir (fábula personal) y por la preocupación en demasía de la opinión que los demás tengan de él, por lo que actúa para una audiencia imaginaria (Carretero, Palacios, & Marchesi, 1985).

Las crisis que enfrenta el adolescente le permiten definir su identidad que, según Erikson, es la mezcla de cualidades positivas y negativas que el individuo va forjando a lo largo de su vida, resultado de la solución que da a los conflictos que se presentan durante la transición entre las diferentes etapas de su desarrollo como persona; la identidad distingue a cada persona de las demás (Bordignon, julio-diciembre 2005). A medida que adquiere confianza en sus habilidades y sus características físicas para resolver los retos de la vida, refuerza su autoestima, al mismo tiempo que las opiniones del entorno y la valoración de sus propias cualidades contribuyen a la formación de su autoconcepto (Tourón & González, 1992); estos dos elementos se convierten en herramientas para que el joven tenga salud mental, logros escolares, aspiraciones vocacionales y se aleje de la delincuencia (Carretero, Palacios, & Marchesi, 1985). En la construcción de su identidad, el adolescente transita por diferentes estados: en principio, no muestra interés por comprometerse con la sociedad; posteriormente atraviesa un periodo en que no se puede distinguir cuáles metas de su vida las fijó él y cuáles sus padres; después vive una etapa de prueba de diferentes roles sociales, para finalizar con la resolución de sus crisis una vez que ha definido su ideología e incluso una vocación profesional (Marcia, 1996).

El adolescente establece una red de relaciones entre sus pares, que es un subconjunto de las relaciones sociales generales de su civilización. Para establecer estas redes de organización debe desarrollar el sentido de la moralidad, que consiste en la consideración y aceptación de un sistema normativo, ya no como en la infancia, donde aceptaba las reglas por obediencia, sino sobre la base de la reflexión (Bordignon, julio-diciembre 2005).

El adolescente de hoy en México vive cotidianamente los problemas sociales y económicos que enfrenta el país. Las condiciones de pobreza y desigualdad, asociadas con causas y consecuencias multifactoriales, tales como la inseguridad, la inestabilidad familiar y la falta de oportunidades para permanecer en el sistema educativo, se ciernen sobre el joven en una etapa ya de por sí difícil de su vida. El consumo de drogas (legales y no legales), el *bullying*, la anorexia y la bulimia son ejemplos de prácticas a las que está expuesta la juventud de estos días. Los embarazos no planeados y las enfermedades de transmisión sexual siguen siendo, a pesar de los esfuerzos informativos del sector salud, el pan de todos los días.

En el Cecytem Tequixquiac hay 264 estudiantes con posibilidades de cursar el tercer semestre, de los cuales 131 son mujeres y 133 hombres[12]. Un alumno de este nivel comúnmente vive con uno o dos hermanos, el financiamiento para su educación proviene del padre (57%), desea cursar estudios superiores (80%) y tiene una idea de la carrera que le gustaría estudiar (63% de los que manifestaron su inquietud por incorporarse a una licenciatura). Las materias que le representan un mayor índice de dificultad son Matemáticas, Inglés y Química (129, 93 y 65 menciones, respectivamente). Solamente cuatro colegiales manifiestan fumar y uno haber tenido contacto con la mariguana; no obstante, el 17% declara haber ingerido bebidas alcohólicas.

Los principales pasatiempos de las mujeres son, en orden de preferencia, escuchar música, leer, salir, practicar ejercicio o algún deporte, ver televisión y las redes sociales. En este rubro, los varones prefieren marcadamente hacer ejercicio o practicar algún deporte, aunque mencionan también escuchar música, ver televisión, jugar y leer. Los deportes que predominan en el gusto de los estudiantes son el futbol y el basquetbol; el primero impera realmente entre los hombres, en tanto que en las señoritas la preferencia se distribuye casi en partes iguales entre ambas disciplinas.

La edad de los padres de familia oscila entre los 25 y los 74 años, promediando 42; sus principales ocupaciones son albañil, chofer, obrero, empleado de oficina, comerciante y campesino (14%, 12%, 10%, 8%, 7% y 6%, respectivamente). Por su parte, la edad de las madres se encuentra en un rango que va de los 29 a los 56 años y su promedio es de 39; es preponderante en ellas la dedicación al hogar (58%). El nivel de estudios característico tanto de padres como de madres de familia es la secundaria.

[12] Datos recogidos de las fichas técnicas que obran en los expedientes de la institución.

1.5 La educación matemática realista (EMR)

1.5.1 Antecedentes

La EMR es una teoría de instrucción matemática desarrollada en Holanda e inspirada en los trabajos de Hans Freudenthal. Se caracteriza por el uso de situaciones realistas[13] como fuente para el desarrollo de conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos. De este modo, el aprendizaje de los estudiantes se da mediante la aplicación de conocimientos matemáticos en contextos específicos que después se formalizan y generalizan, como se muestra en la ilustración 9 (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, pág. 521).

A efecto de entender los fundamentos de la EMR, vale la pena resaltar algunos aspectos de una conferencia dictada por Freudenthal (2001), en donde, a través de una serie de cuestionamientos, expone lo que llama problemas fundamentales de la educación matemática. ¿Por qué un estudiante no puede hacer aritmética?[14]¿Cómo aprende la gente?[15]¿Cómo puede el estudiante beneficiarse del conocimiento derivado de los grandes procesos de aprendizaje de la humanidad?[16] ¿Cómo estimular la preservación del discernimiento, en particular en el proceso de esquematización?[17] ¿Cómo estimular la reflexión en las propias actividades físicas, mentales y matemáticas?[18] ¿Cómo desarrollar una actitud hacia las matemáticas?[19] ¿Cómo está estructurado el aprendizaje matemático de acuerdo a niveles y si puede ser usada esta estructura para intentar la

[13] El término realista no se toma en sentido literal. Admite la posibilidad de situaciones que el estudiante pueda imaginar en contextos generados por su propia fantasía o incluso enmarcados dentro de un ámbito puramente matemático (Gravemeijer, 1998, pág. 287).

[14] Podría proponerse una extensión de esta pregunta a ¿Por qué un estudiante no aprende matemáticas? A partir de la observación, comprensión y atención de las fallas en las cuales incurre, se puede develar la respuesta que conduzca a un diagnóstico preciso sobre la causa del problema y, por consecuencia, al diseño y aplicación de una estrategia efectiva para resolverlo.

[15] Para Freudenthal, aprender a observar procesos de aprendizaje es el inicio del camino para enseñar a aprender, centrándose en procesos en lugar de productos de aprendizaje; es un primer paso para resolver problemas y construir una teoría del aprendizaje basada en la evidencia y no en ideas preconcebidas.

[16] El autor expone cómo "cada etapa en el crecimiento de las matemáticas significó conocimiento adquirido por discernimiento intelectual transformado por esquematización y memorización (codificación) en habilidades y discernimiento intelectual de un orden más alto." (pág. 14). Al enseñar un tema de matemáticas el punto de partida no debiera ser el estatus actual del mismo, como si se tratase de un producto acabado; el estudiante debería estar en condiciones de desarrollar el conocimiento matemático de manera similar a como se originó históricamente, partiendo de situaciones empíricas hasta llegar a formalizaciones. En este sentido, el profesor es quien agiliza el recorrido del estudiante por un camino de cientos o miles de años sintetizado en unas cuantas horas de clase.

[17] Freudenthal reconoce una tendencia en la educación a sustituir el discernimiento del estudiante por el del profesor o hasta el escritor del libro de texto, generando matemáticas sí formales, pero también mal entendidas.

[18] La idea es que el estudiante reflexione sobre sus propios procesos de aprendizaje; debe ser guiado hacia la argumentación (verbalización) de sus reflexiones, así como de la actividad matemática propia y de sus pares.

[19] Entre las características de lo que el autor entiende por actitud hacia las matemáticas destaca "considerar la actividad matemática como materia de estudio para alcanzar un nivel más alto." (pág. 17).

diferenciación?[20] ¿Cómo crear contextos convenientes para enseñar la matematización?[21] ¿Puede usted enseñar geometría usando las reflexiones de estudiante acerca de sus intuiciones espaciales?[22] ¿Cómo se pueden usar las calculadoras y las computadoras para despertar el entendimiento matemático?[23]¿Cómo diseñar el desarrollo educativo para una estrategia de cambio?[24]

Uno de los pilares de la EMR es la idea de fenomenología didáctica, término inventado y desarrollado por el propio Freudenthal (1983), el cual se explica más adelante en este trabajo. A partir de los trabajos de otros investigadores, entre los que destacan Koeno Gravemeijer y Marja Van den Heuvel-Panhuizen, se han configurado seis principios básicos de la EMR: actividad, realidad, matematización progresiva, entrelazamiento, interactividad y reinvención guiada (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, págs. 522-523).

1.5.2 Principio de actividad

"Las matemáticas no son meramente un lenguaje, sino una actividad mental, y los conceptos matemáticos no son palabras, sino realidades" (Freudenthal, 1978, pág. 7). De este modo, los estudiantes son participantes activos del proceso de aprendizaje y deberían tener los mismos privilegios de un matemático en relación con la libertad de pensar, explorar diferentes campos, experimentar, analizar antes de sintetizar, equivocarse y aprender de sus errores, así como de adquirir expresiones verbales a partir de sus propios esfuerzos (págs. 43-44). Esto refleja una concepción de Freudenthal sobre la interpretación de las matemáticas como una actividad humana.

[20] Según Freudenthal, existen razones sociales por las cuales los estudiantes deben aprender juntos, a pesar de tener habilidades de aprendizaje, ritmos de progreso y metas divergentes. El aprendizaje cooperativo supone niveles de aprendizaje que son susceptibles de tomarse en cuenta en el proceso de enseñanza a través de la esquematización progresiva.

[21] Aquí el autor hace una crítica severa a la enseñanza tradicional de cualquier cantidad de contenidos matemáticos, sin el discernimiento real de qué temas son verdaderamente dignos de ser enseñados. Dicta el camino -adecuado en su opinión- en el sentido mundo real – matemáticas y no al revés. Para él, las matemáticas más abstractas deberían enseñarse dentro de los contextos más concretos, que envuelven a un problema matemático y están llenos de significados para los estudiantes. Matematizar es *hacer* matemáticas.

[22] Esta pregunta en el campo específico de la geometría tiene el propósito de ilustrar que los profesores no se ocupan de observar cómo es que los estudiantes saben algo relacionado con matemáticas antes de formalizarlo, matando así toda posibilidad de que aprovechen su intuición.

[23] No se trata de tecnología educativa, sino de un verdadero apoyo al desarrollo de habilidades matemáticas.

[24] En realidad, este no es un problema, sino la forma en la que Freudenthal propone resolver los diez anteriores. Menciona el desarrollo de un currículo como una actividad integrada educativamente, dirigida totalmente hacia la educación, más que a los detalles; en este contexto, totalmente significa longitudinal, simultáneamente en todos los niveles y viendo cada área temática en un contexto más grande, no solamente en el ámbito cerrado de sus conceptos y principios. Alcanza en su reflexión a la formación de los futuros docentes: considera que la preparación del profesor debería ser repensada y reformulada en su totalidad. Menciona que los estudiantes para profesores son adultos cuyas fuentes de discernimiento han sido obstaculizadas por el conocimiento y las habilidades adquiridas, y que saber una parte de matemáticas demasiado bien puede ser un serio impedimento para enseñarla adecuadamente, en tanto que el profesor es inconsciente de los procesos de aprendizaje que produjeron su excelencia; por ello necesita reaprender observando los procesos de aprendizaje de personas menos hábiles (los estudiantes). Termina su exposición diciendo que el desarrollo educativo incluye, entre otras cosas, la investigación educativa de calidad. Dice no a la investigación *de* la educación y sí a la investigación *en* la educación.

Gravemeijer (1998, pág. 277) abunda sobre el particular y sostiene que las matemáticas pueden y deben aprenderse por autonomía intelectual.

1.5.3 Principio de realidad (fenomenología didáctica)

Como se ha mencionado, Freudenthal acuñó el término fenomenología didáctica. Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014a) explican las dos partes que constituyen dicho término. Por fenomenología de las matemáticas se entiende "la descripción de conceptos matemáticos, estructuras o ideas como si fuesen objetos de pensamiento (*nooumena*) en su relación con fenómenos (*phainomena*) del mundo físico, social y mental" (pág. 174). De acuerdo con los autores, la didáctica entendida por Freudenthal se refiere a "la forma en que se enseña a los estudiantes y la organización del proceso de enseñanza" (pág. 174). Así, la combinación de términos representa una visión de la fenomenología didáctica desde una perspectiva didáctica, pero también epistemológica histórica y cultural (pág. 176). En la práctica, este enfoque dicta el tipo de situaciones de enseñanza y aprendizaje que se pueden manejar en la EMR.

Los problemas en la EMR parten de contextos ricos en significado para los estudiantes, los cuales requieren una organización matemática (matematización). De este modo, el primer paso en el proceso de aprendizaje es la creación de estrategias de resolución -sin mayor formalidad matemática- de estas situaciones realistas, lo cual da al estudiante la posibilidad de dar una significación personal a sus propias construcciones matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, pág. 523).

1.5.4 Principio de matematización progresiva

La EMR maneja dos tipos de matematización: la horizontal y la vertical. La primera representa para los estudiantes el reto de resolver problemas de la vida cotidiana que le impliquen pasar del mundo real al de los símbolos. La segunda se da dentro del mundo abstracto de dichos símbolos, supone una reorganización de conceptos y estrategias matemáticas que formalizan los conocimientos adquiridos. Ambos esquemas son igual de importantes; de hecho, se debe poner atención en no descuidar la matematización vertical por dar mayor énfasis a la perspectiva realista (pág. 522).

Así, luego de una primera aproximación informal a la solución de un problema en un contexto específico, el estudiante transita en su aprendizaje de las matemáticas por cuatro niveles de esquematización que lo deben conducir hacia la formalización de los conceptos matemáticos. Gravemeijer (1998, págs. 286-287) define los citados niveles de la siguiente forma:

1. Situacional. El conocimiento y las estrategias son específicas de una situación contextualizada en determinado dominio.
2. Referencial. La resolución de varios problemas similares inicia el camino hacia la generalización e independencia de los modelos y estrategias, los cuales apenas si referencian a la situación descrita en el problema.
3. General. El enfoque en estrategias matemáticas generales prevalece ya sobre la referencia al contexto.
4. Formal. Se trabaja con notaciones y procedimientos convencionales.

Los modelos son el enlace entre cada etapa del proceso. En la EMR se denomina modelos mediadores o emergentes a las construcciones propias de los estudiantes que permiten la conexión entre el conocimiento informal y el formal. De esta manera, inicialmente los modelos son básicamente imágenes de una situación en un entorno específico, mientras que en el nivel referencial se basan en la comprensión que los aprendices logran a través de la experimentación de ajustes al entorno originalmente planteado (modelo *de*). La actividad general emerge cuando el estudiante comienza a razonar sobre las relaciones matemáticas envueltas en la solución de los problemas. Gradualmente se da paso a la pérdida total de dependencia de aquel contexto específico planteado inicialmente y los modelos obtenidos responden completamente a un marco de relaciones matemáticas, cuyo significado se deriva de la interpretación que los alumnos han realizado durante todo el citado proceso (modelo *para*) (Gravemeijer, 2007, págs. 139-140).

1.5.5 Principio de entrelazamiento

Los diferentes campos como la geometría, el álgebra y el cálculo no deben considerarse como secciones aisladas de las matemáticas, sino al contrario, como entidades fuertemente integradas. De este modo, los problemas ofrecidos al estudiante deben ser ricos también en posibilidades de uso de herramientas y conocimientos matemáticos (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, pág. 523).

1.5.6 Principio de interactividad

El aprendizaje de las matemáticas debe considerarse una actividad social. En este sentido, la clase debe permitir al estudiante compartir estrategias con sus pares, discutir y reflexionar sobre ideas que mejoren sus resultados y los lleven a un nivel más alto de abstracción. Una discusión en el salón de clases es productiva solamente si existen soluciones sostenidas por los aprendices y además se corresponden con distintos niveles de los ya mencionados (Gravemeijer, 1998, pág. 289).

1.5.7 Principio de reinvención guiada[25]

El objetivo último de la RME es que los estudiantes reinventen las matemáticas con la guía del profesor, a partir de un programa que les presente diferentes escenarios (actividades instruccionales) que le permitan obtener los cambios deseados en su comprensión, abstracción y sistematización de las matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014, pág. 523).

El diseño de la instrucción por parte del profesor debe dar la posibilidad de que los modelos, descripciones, diagramas y notaciones producidas por los estudiantes puedan utilizarse en el paso del conocimiento informal hacia su generalización y consecuente formalización (Gravemeijer, 1998, pág. 286). De este modo, los contextos empleados en los procesos de enseñanza y aprendizaje deben satisfacer un criterio de idoneidad que se basa en tres cuestionamientos: ¿Los estudiantes hacen uso de puntos de apoyo ofrecidos por el contexto? ¿Aplican su propio conocimiento del dominio específico del problema? ¿La solución que aportan ofrece posibilidades de matematización vertical? (pág. 289).

[25] A partir de los seis principios de la teoría instruccional de la EMR se revela su carácter constructivista: el principio de actividad se corresponde con el primer principio de von Glasersfeld; el de realidad, con la hipótesis fenomenológica; el de matematización progresiva, con la asimilación de los nuevos conocimientos anclados a los preexistentes en la estructura cognitiva del sujeto; el de entrelazamiento, con la hipótesis de modelación sistémica; el de interactividad, con la concepción de conocimiento como un producto de la interacción social, y el de reinvención guiada con el rol del profesor como facilitador y guía del aprendizaje.

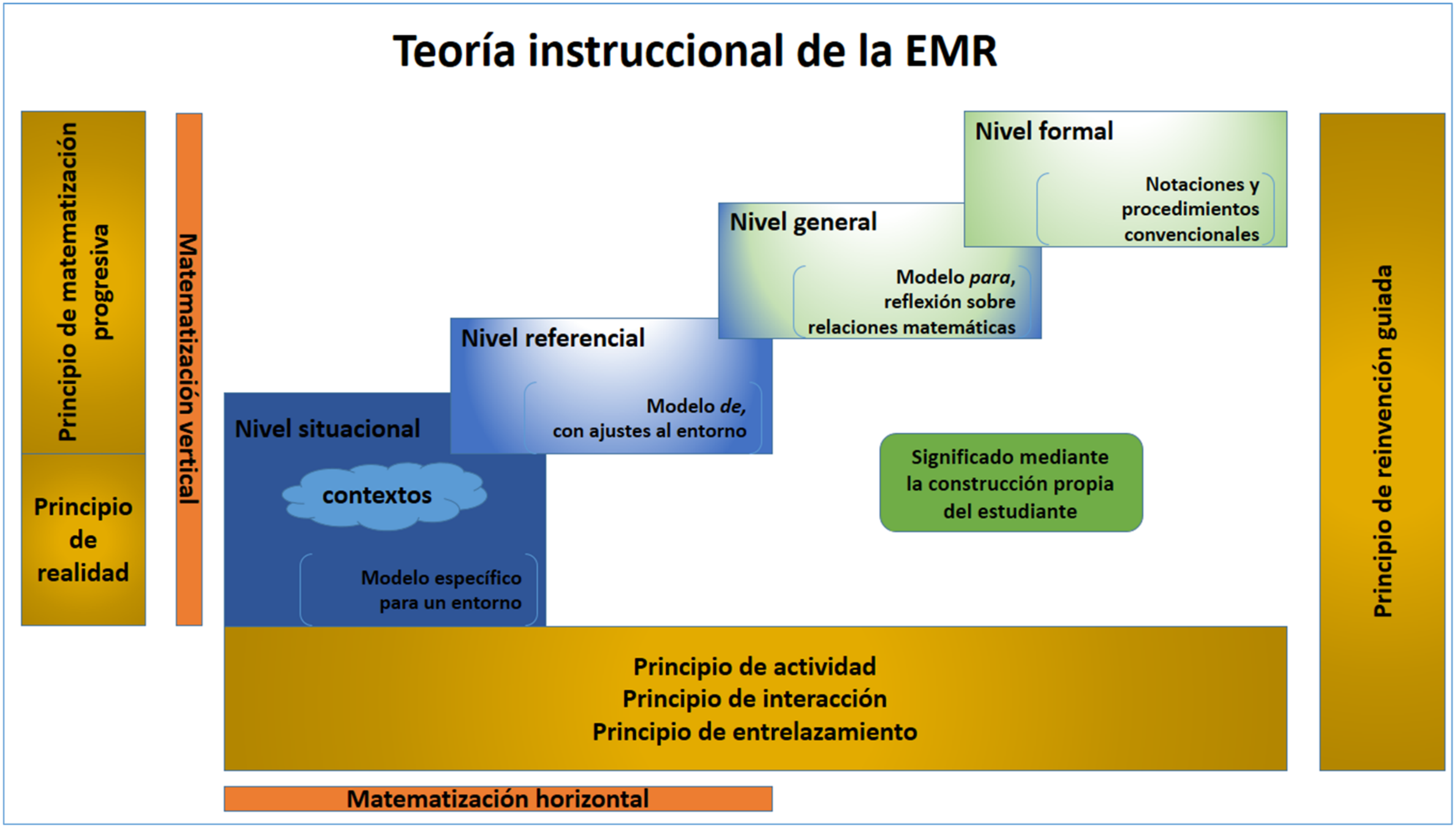


Ilustración 9. Teoría instruccional de la EMR. Fuente: elaboración propia.

Capítulo 2. Desarrollo y aplicación de la secuencia didáctica

2.1 Secuencia didáctica

Se utiliza el formato de planeación didáctica oficial en el Cecytem Tequixquiac. La secuencia correspondiente al tema de circunferencia es la tercera en el orden, ya que primero se abordan la distancia entre dos puntos y el punto medio (secuencia didáctica 1) y después la recta (secuencia didáctica 2).

SUBSECRETARIA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

INSTRUMENTO DE REGISTRO PARA LA SECUENCIA DIDÁCTICA 3

<table>
<tr><th colspan="10">A) IDENTIFICACIÓN</th></tr>
<tr><td>Institución:</td><td colspan="9">CECYTEM</td></tr>
<tr><td>Plantel:</td><td colspan="5">Tequixquiac</td><td>Profesor(es):</td><td colspan="3">Jaime Vergara Prado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Disciplina/ Módulo/ Submódulo:</td><td rowspan="2">Geometría analítica</td><td rowspan="2">Semestre:</td><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">Carrera:</td><td rowspan="2">Todas</td><td>Periodo de aplicación:</td><td>Octubre-noviembre de 2016</td><td rowspan="2">Fecha:</td><td rowspan="2">15/08/2016</td></tr>
<tr><td>Duración en horas:</td><td>16</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">B) INTENCIONES FORMATIVAS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Propósito de la secuencia didáctica: El estudiante aplicará el modelo gráfico y algebraico de la circunferencia a problemas prácticos ubicados en su contexto, así como a problemas teóricos de manejo matemático formal.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tema integrador:</td><td rowspan="2">Violencia de género</td><td>Otras asignaturas, módulos o submódulos que trabajan el tema integrador:</td><td>• Ética y Biología</td></tr>
<tr><td>Asignaturas, módulos y/o submódulos con los que se relaciona:</td><td>• TIC, Álgebra, Geometría y Trigonometría, Cálculo diferencial, Cálculo integral, Lectura, expresión oral y escrita I y II</td></tr>
<tr><th colspan="4">Contenidos fácticos:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Conceptos fundamentales: Lugares geométricos</td><td colspan="2">Conceptos Subsidiarios: Las cónicas</td></tr>
<tr><th colspan="4">Contenidos procedimentales:</th></tr>
<tr><td colspan="4">El razonamiento geométrico y algebraico será la base para analizar un problema y determinar una estrategia de acción para resolverlo. Es importante utilizar diferentes representaciones (al menos la gráfica y la algebraica), evaluar alternativas y comprobar resultados. Finalmente, la presentación de los desarrollos, mediante reportes escritos y exposiciones orales, complementará el trabajo matemático.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Contenidos actitudinales:</th></tr>
<tr><td colspan="4">El trabajo individual y colectivo, tanto dentro como fuera de clase, tenderá a desarrollar en el alumno la participación efectiva en equipos de trabajo, la reflexión, argumentación y defensa de sus ideas mediante el contraste con las de sus pares, el logro de metas a partir de los recursos disponibles y el respeto por las opiniones de los demás.</td></tr>
<tr><th colspan="4">Competencias genéricas y atributos:</th></tr>
<tr><td colspan="4">Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue: Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas (CG1).
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas (CG4).
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos: Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo (CG5).
Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento (CG7).
Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos (CG8).</td></tr>
<tr><th colspan="4">Competencias disciplinares</th></tr>
<tr><td colspan="4">Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales (CD1).
Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques (CD2).
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales (CD3).
Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación (CD4).
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos (CD8).</td></tr>
</table>

C) ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE				
Apertura				
Actividades	**Competencia(s)**		**Producto(s) de Aprendizaje**	**Evaluación**
	Genérica(s) y sus atributos	**Disciplinares**		
Sesión 1 • El profesor proyecta una presentación con el objetivo del tema, el cual es discutido para asegurar su comprensión (debe registrarse en el cuaderno). También se explica la forma de evaluar el tema a partir de la rúbrica de desempeño en clase, la lista de cotejo para evaluar tareas y el examen. **Duración aproximada: 20 minutos** • Se recuperan conceptos previos relevantes a partir de una evaluación diagnóstica (Anexo I) **Duración aproximada: 40 minutos** • Con objeto de ilustrar antecedentes históricos del uso de la circunferencia, se proyectan los videos *Cosmología aristotélica* (2012), *Geocentrismo y heliocentrismo* (2010) y *Cómo se midió por primera vez la Tierra* (TareasPlus, 2013). Se da paso a una breve discusión con el grupo. **Duración aproximada: 25 minutos** • Discusión de la cancha de futbol como contexto inicial para desarrollar el tema de circunferencia (Contexto, Anexo II). **Duración aproximada: 15 minutos** • Se indica al estudiante que, como tarea, resuelva el ejercicio 18 de su libro de texto. Asimismo, debe responder en su cuaderno las preguntas ¿qué quiero aprender sobre circunferencia? ¿Cómo lo voy a aprender? También se le solicita que busque en Google académico el artículo de Banchs (1996) y escriba en su cuaderno lo que entiende por violencia de género (se debe citar la fuente de conformidad con la norma APA).	**Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue:** Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas. **Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados:** Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas. **Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.** Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.	**Construye e interpreta modelos matemáticos** mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. **Formula y resuelve problemas matemáticos** aplicando diferentes enfoques.	• Apuntes • Contexto resuelto en el material didáctico (Anexo II)	• Examen diagnóstico (Anexo I)

<table>
<tr><th colspan="5">Desarrollo</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Actividades</th><th colspan="2">Competencia(s)</th><th rowspan="2">Producto(s) de Aprendizaje</th><th rowspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Genérica(s) y sus atributos</th><th>Disciplinares</th></tr>
<tr>
<td>Sesión 2
• El profesor realiza un breve recordatorio del contexto planteado al final de la sesión anterior (la cancha de futbol). Explica que el objetivo de la clase es construir una ecuación para localizar todos los puntos que están en una circunferencia cuyo centro se ubica en el origen.
Duración aproximada: 10 minutos
• El estudiante construye la ecuación canónica de la circunferencia mediante la realización de la Actividad 1 de la secuencia didáctica (Anexo II).
Duración aproximada: 70 minutos
• El profesor resume los resultados obtenidos en la sesión y presenta la forma canónica de la circunferencia. Se indica al estudiante que, como tarea, resuelva el ejercicio 19 de su libro de texto y realice la Actividad extraclase 1 de la secuencia didáctica (Anexo II). En su cuaderno, el alumno responderá también a las preguntas ¿Qué no entendí de la clase? Y ¿Qué estrategia emplearé para entenderlo?
Duración aproximada: 10 minutos
• El profesor determinará en qué momento de la sesión aborda la revisión del concepto de violencia de género que se solicitó a los estudiantes en la sesión anterior.
Duración aproximada: 10 minutos
• Se formarán cinco equipos para analizar el documento (INEGI, 2008) en los temas: violencia en el ámbito privado por parte de la pareja; violencia en el ámbito privado por otro familiar; violencia en espacios comunitarios; violencia en espacios escolares, y violencia en espacios laborales. Prepararán una presentación de PowerPoint que expondrán a por lo menos 10 mujeres de sus familias y recabarán sus opiniones. Esta exposición se grabará y se expondrán en clase cinco minutos de edición para las sesiones 4, 5 y 6.</td>
<td>Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue: Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas.
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos: Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.
Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</td>
<td>Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.</td>
<td>• Apuntes
• Actividad 1 resuelta en el material didáctico (Anexo II)
• Ejercicio 19 resuelto en el libro de texto</td>
<td>• Rúbrica para evaluar el desempeño en clase (Anexo IV)
• Lista de cotejo para evaluar tareas (Anexo V)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Desarrollo</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Actividades</th><th colspan="2">Competencia(s)</th><th rowspan="2">Producto(s) de Aprendizaje</th><th rowspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Genérica(s) y sus atributos</th><th>Disciplinares</th></tr>
<tr><td>Sesión 3
• El profesor realiza un breve recordatorio de los resultados obtenidos en la clase anterior. Explica que el objetivo de esta sesión y la siguiente es construir una ecuación para localizar todos los puntos que están en una circunferencia cuyo centro no se ubica en el origen.
Duración aproximada: 10 minutos
• El estudiante comienza la construcción de la ecuación ordinaria de la circunferencia mediante la realización de la Actividad 2 de la secuencia didáctica (Anexo II).
Duración aproximada: 80 minutos
• El profesor resume los resultados obtenidos en la sesión e indica al estudiante que debe hacer la Actividad extraclase 2 de la secuencia didáctica (Anexo II).
Duración aproximada: 10 minutos</td><td>Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue: Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas.
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos: Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</td><td>Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.</td><td>• Apuntes
• Actividad 2 resuelta en el material didáctico (Anexo II)</td><td>• Rúbrica para evaluar el desempeño en clase (Anexo IV)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Desarrollo</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Actividades</th><th colspan="2">Competencia(s)</th><th rowspan="2">Producto(s) de Aprendizaje</th><th rowspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Genérica(s) y sus atributos</th><th>Disciplinares</th></tr>
<tr>
<td>Sesión 4
El profesor realiza un breve recordatorio de los resultados obtenidos en la sesión anterior. Explica que el objetivo de esta clase es concluir la construcción de una ecuación para localizar todos los puntos que están en una circunferencia cuyo centro no se ubica en el origen.
Duración aproximada: 10 minutos
El estudiante culmina la construcción de la ecuación ordinaria de la circunferencia mediante la realización de la Actividad 3 de la secuencia didáctica (Anexo II).
Duración aproximada: 70 minutos
El profesor resume los resultados obtenidos en la sesión y presenta la ecuación ordinaria de la circunferencia; asimismo, indica al estudiante que debe hacer la Actividad extraclase 3 de la secuencia didáctica (Anexo II). Adicionalmente, el alumno responderá en su cuaderno las preguntas ¿Estoy dando seguimiento a las estrategias que he planteado para mejorar mi comprensión de los temas? En caso contrario, ¿Tengo la disponibilidad de hacerlo desde ahora?
Duración aproximada: 10 minutos
Presentación de las primeras dos exposiciones sobre el tema de violencia de género.
Duración aproximada: 10 minutos</td>
<td>Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue: Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas.
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos: Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.
Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</td>
<td>Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</td>
<td>Apuntes
Actividad 1 resuelta en el material didáctico (Anexo II)
Actividad extraclase 3 resuelta en el material didáctico (Anexo II)</td>
<td>Rúbrica para evaluar el desempeño en clase (Anexo IV)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Desarrollo</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Actividades</th><th colspan="2">Competencia(s)</th><th rowspan="2">Producto(s) de Aprendizaje</th><th rowspan="2">Evaluación</th></tr>
<tr><th>Genérica(s) y sus atributos</th><th>Disciplinares</th></tr>
<tr>
<td>Sesión 5
• El profesor realiza un breve recordatorio de los resultados obtenidos en la clase anterior. Los estudiantes intercambian con un compañero las soluciones de la Actividad extraclase 3 para su revisión, para lo cual participan los propios alumnos exponiendo sus respuestas. El profesor explica que el objetivo de esta sesión y la siguiente es identificar los elementos que conforman la ecuación de una circunferencia y encontrar una ecuación general de la misma.
Duración aproximada: 30 minutos
• El estudiante identifica en qué casos una ecuación algebraica similar a la forma ordinaria es o no una circunferencia. Para ello, realiza la Actividad 4 de la secuencia didáctica (Anexo II).
Duración aproximada: 50 minutos
• El profesor resume los resultados obtenidos en la sesión e indica al estudiante que, como tarea, resuelva los ejercicios 20 y 21 de su libro de texto.
Duración aproximada: 10 minutos
• Presentación del segundo par de exposiciones sobre el tema de violencia de género.
Duración aproximada: 10 minutos</td>
<td>Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue: Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas.
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos: Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</td>
<td>Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.</td>
<td>• Apuntes
• Actividad 4 resuelta en el material didáctico (Anexo II)
• Ejercicios 20 y 21 resueltos en el libro de texto</td>
<td>• Rúbrica para evaluar el desempeño en clase (Anexo IV)
• Lista de cotejo para evaluar tareas (Anexo V)</td>
</tr>
</table>

Desarrollo				
Actividades	**Competencia(s)**		**Producto(s) de Aprendizaje**	**Evaluación**
	Genérica(s) y sus atributos	**Disciplinares**		
Sesión 6 • El profesor realiza un breve recordatorio de los resultados obtenidos en la sesión anterior. Los estudiantes intercambian con un compañero las soluciones de los ejercicios 20 y 21 de su libro de texto para su revisión, para lo cual participan los propios alumnos exponiendo sus respuestas. El profesor recuerda que el objetivo de la clase es concluir la identificación de los elementos que conforman la ecuación de una circunferencia y obtener una ecuación general de la misma. **Duración aproximada: 20 minutos** • El estudiante construye un camino para transitar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la general y viceversa, identificando las condiciones para que una ecuación de segundo grado corresponda efectivamente a esa curva. Para ello, realiza la Actividad 5 de la secuencia didáctica (Anexo II). **Duración aproximada: 50 minutos** • El profesor resume los resultados obtenidos en la sesión, remarcando las características que debe tener una ecuación de segundo grado para corresponder a una circunferencia. Se indica al estudiante que debe hacer la Actividad extraclase 4 de la secuencia didáctica (Anexo II). **Duración aproximada: 20 minutos** • Presentación de las últimas dos exposiciones sobre el tema de violencia de género. **Duración aproximada: 10 minutos**	**Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue:** Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas. **Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados:** Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas. **Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos:** Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	**Construye e interpreta modelos matemáticos** mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. **Formula y resuelve problemas matemáticos** aplicando diferentes enfoques. **Explica e interpreta los resultados obtenidos** mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. **Argumenta la solución obtenida de un problema** con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.	• Apuntes • Actividad 5 resuelta en el material didáctico (Anexo II) • Actividad extraclase 4 resuelta en el material didáctico (Anexo II)	• Rúbrica para evaluar el desempeño en clase (Anexo IV)

Desarrollo				
Actividades	**Competencia(s)**		**Producto(s) de Aprendizaje**	**Evaluación**
	Genérica(s) y sus atributos	**Disciplinares**		
Sesión 7 • El profesor realiza un breve recordatorio de los resultados obtenidos en la clase anterior. Los estudiantes intercambian con un compañero las soluciones de la Actividad extraclase 4 para su revisión, para lo cual participan los propios alumnos exponiendo sus respuestas. El profesor explica que el objetivo de esta sesión es resolver algunos problemas clásicos relacionados con la circunferencia. **Duración aproximada: 30 minutos** • El profesor guía la resolución de la Actividad 6 de la secuencia didáctica (Anexo II). Se trata de un problema de una circunferencia sujeta a tres condiciones y uno relativo a tangentes. **Duración aproximada: 50 minutos** • Se indica al estudiante que, como tarea, resuelva los ejercicios 22 y 23 de su libro de texto. Adicionalmente, deberá redactar en su cuaderno, en un espacio de entre media a una cuartilla, una reflexión de su desempeño, trabajo individual, trabajo en equipo, aprendizajes, dudas, estrategias, objetivos logrados y objetivos no alcanzados durante el desarrollo del tema de la circunferencia.	**Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.** Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.	**Construye e interpreta modelos matemáticos** mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. **Formula y resuelve problemas matemáticos** aplicando diferentes enfoques.	• Actividad 6 resuelta en el material didáctico (Anexo II) • Ejercicios 22 y 23 resueltos en el libro de texto	• Rúbrica para evaluar el desempeño en clase (Anexo IV) • Lista de cotejo para evaluar tareas (Anexo V)

Cierre				
Actividades	**Competencia(s)**		**Producto(s) de Aprendizaje**	**Evaluación**
	Genérica(s) y sus atributos	**Disciplinares**		
• El profesor realiza una exposición final sobre todas las condiciones geométricas y analíticas de la circunferencia vistas durante la secuencia didáctica. **Duración aproximada: 20 minutos** **Sesión 8** • Examen **Duración aproximada: 100 minutos**		**Construye e interpreta modelos matemáticos** mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. **Formula y resuelve problemas matemáticos** aplicando diferentes enfoques. **Explica e interpreta los resultados obtenidos** mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. **Argumenta la solución obtenida de un problema** con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación. **Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.**	• Apuntes	• Examen (Anexo VI)

D) RECURSOS		
Equipo	**Material**	**Fuentes de información**
• Pizarrón • Pintarrones • Computadora • Video proyector	• Cuaderno y pluma • Libro de texto para Geometría Analítica • Secuencia didáctica "La circunferencia" • Software GeoGebra (App descargada en los celulares de los estudiantes). • Presentación de PowerPoint con los objetivos del tema. • Videos *Cosmología Aristotélica*, *Geocentrismo y heliocentrismo* y *Cómo se midió por primera vez la Tierra*. • Hojas de acetato tamaño carta.	• Banchs, M. A. (1996). Violencia de género. *Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura*, II(2), 11-23. Recuperado el 12 de julio de 2016, de http://www.ucv.ve/fileadmin/user_upload/faces/iies/ANALISIS_DE_COYUNTURA_VOLUMEN_II_No_2_JULIO_DICIEMBRE_1996.pdf#page=15 • *Cosmología Aristotélica*. (2012). Recuperado el 06 de julio de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=1B9htq12w1A • Figueroa, J. L., Perea, G., & Cruz, F. J. (2013). *Módulo de aprendizaje. Geometría Analítica.* México: Asesoría Empresarial, Compra y Venta de Material Didáctico Da' Vinci. • *Geocentrismo y heliocentrismo*. (2010). Recuperado el 06 de julio de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=pAK2t3znuYk • INEGI. (2008). *Panorama de violencia contra las mujeres en el Estado de México*. Recuperado el 12 de julio de 2016, de http://internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/productos//prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/estudios/sociodemografico/mujeresrural/2007/ENDIREH_edomex.pdf • Lehmann, C. H. (1990). *Geometría Analítica*. México: Limusa. • TareasPlus. (2013). *Cómo se midió por primera vez la Tierra*. Recuperado el 06 de julio de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=UeIQnjOEGUY

E) VALIDACIÓN		
Elabora: Jaime Vergara Prado **Profesor(es)**	**Recibe:**	**Avala:**

2.2 Argumentación de los elementos que integran la secuencia didáctica

2.2.1 Intenciones formativas

El formato oficial utilizado para la secuencia didáctica sistematiza los lineamientos establecidos en la sección del currículum: la interrelación de las matemáticas con otras áreas del conocimiento, los contenidos fácticos (conceptos fundamentales y subsidiarios), los contenidos procedimentales y actitudinales, las competencias genéricas y disciplinares. En tanto, el diseño de las actividades de aprendizaje, enmarcadas en las etapas de inicio, desarrollo y cierre, así como la elección de los recursos didácticos, encuentran su sustento en el marco teórico expuesto en el capítulo 1, de la forma que se describe a continuación.

El propósito de la secuencia didáctica (objetivo) se sitúa en el nivel de manejar un contenido, dentro de la categoría informativa. Siguiendo el espíritu de la EMR, se comienza el tratamiento de la circunferencia con problemas contextualizados en el entorno del estudiante (nivel situacional), para después, mediante la matematización progresiva, llevarlo al plano del formalismo matemático.

En los contenidos actitudinales está implícito un objetivo formativo de aspecto social y también profesional: fortalecer en el estudiante las habilidades de comunicación, trabajo en equipo y resolución de problemas.

En las asignaturas, módulos o submódulos con los que se relaciona Geometría Analítica se refleja la interdisciplinariedad que busca establecer la secuencia didáctica. TIC Aporta el conocimiento elemental para el manejo de navegadores y software de aplicación, ambos útiles con propósitos de investigación, desarrollo de tareas y material didáctico. Lectura, expresión oral y escrita I y II sustentan una competencia indispensable para la comprensión de los problemas que se han de resolver en matemáticas (como en cualquier disciplina). Álgebra, Geometría y Trigonometría comprenden la teoría básica para el estudio de la geometría analítica, que, en un sentido simplista, es una mezcla del álgebra y la geometría euclidiana. Finalmente, Cálculo Diferencial e Integral reciben de la geometría analítica la base para la representación gráfica de las funciones, eje fundamental para el estudio del cálculo.

El enfoque de transversalidad y sentido holístico lo da el tema integrador. La violencia de género es un resquicio de barbarie que desafortunadamente se da en muchos lugares del mundo, incluyendo México. De esta manera, en afán de fomentar valores como la equidad, respeto y la tolerancia, la secuencia didáctica destina tiempo para tratar esta temática.

2.2.2 Sesión 1

La apertura de las actividades de aprendizaje inicia con la presentación del objetivo del tema a tratar (la circunferencia) y la forma de evaluación[26]. Ambos, además de ser elementos clarificadores de lo que se espera logre el estudiante, se proyectan como una herramienta útil para su proceso de aprendizaje. Se utiliza una presentación electrónica que permite visualizar el objetivo de forma escrita sin que el profesor invierta tiempo en ello y que da elementos de dinamismo a la exposición en aras de diversificar la experiencia de aprendizaje.

[26] Los instrumentos de aprendizaje se argumentan un poco más adelante.

El examen diagnóstico (Anexo I) tiene el propósito de explorar los conocimientos previos del estudiante en relación con aspectos geométricos del círculo, tales como el radio, el perímetro y la tangente. El problema 1 está en el nivel situacional de la EMR, ya que se parte de un contexto sencillo que puede conceptualizarse como real por parte del estudiante; la intención subyacente es calcular la longitud de un arco de cierta circunferencia. El problema 2 se ubica en el nivel referencial, en virtud de que modifica ciertos parámetros del problema original y se espera que el estudiante afiance su **modelo** que le permita calcular la longitud de arco **de** cierta situación específica. El problema 3 pretende llevar al estudiante al tercer nivel de dominio según la EMR, precisamente mediante la generalización de un **modelo para** calcular la longitud de un arco correspondiente a un círculo cuyo radio puede adoptar cualquier valor y dividirse en una cantidad cualquiera de partes iguales. El nivel formal de conocimiento se bosqueja con la terminología que se cuestiona en los incisos c) a f) de la pregunta 1. Dado que el examen diagnóstico exige del alumno la expresión de ideas mediante representaciones matemáticas y gráficas, la resolución de problemas matemáticos que parten de una situación hipotética llevada posteriormente al plano de lo formal, la explicación y argumentación de sus resultados y la administración del recurso de tiempo para resolver el examen, se considera que se justifica la inclusión de las competencias genéricas (CG1 Y CG4) y las cinco disciplinares elegidas para la secuencia.

A manera de contexto histórico sobre el uso de la circunferencia, se ha elegido la proyección de tres videos como material manipulativo gráfico-textual-verbal. La intención es despertar en el estudiante la curiosidad sobre el tema a través de una explicación que combina elementos tanto auditivos como visuales. La discusión permitirá a los estudiantes verbalizar algunas de las ideas derivadas de los videos.

El contenido de la secuencia didáctica comienza propiamente con la presentación de un contexto ubicado en el nivel situacional de la EMR. Se toma como pretexto una cancha de futbol, muy cotidiana para una buena parte de los mexicanos y particularmente para la población del Cecytem Tequixquiac, para reflexionar en su trazo como una aplicación de la geometría analítica.

La resolución del ejercicio 18 del libro de texto implica un recordatorio de las rectas asociadas con la circunferencia (radio, cuerda, diámetro, tangente y secante), en teoría vistas durante el semestre previo, en la materia Geometría y Trigonometría.

La competencia genérica de aprender por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida se aborda mediante la formulación de dos preguntas que el estudiante debe responder con base en la identificación de metas académicas y caminos para lograrlas, con la intención de que tenga una guía para gestionar su propio proceso de aprendizaje.

Finalmente, se deja al estudiante la tarea de comprender el concepto de la violencia de género. Al solicitar la búsqueda en Google académico se pretende que el estudiante se acostumbre a consultar fuentes confiables y citarlas adecuadamente para el desarrollo de su tarea.

2.2.3 Sesión 2

Se presenta el objetivo de la sesión, que, en esencia, es construir la ecuación canónica de la circunferencia, para lo cual se ha propuesto la Actividad 1 del Anexo II. La intención es dar significado a la distancia entre dos puntos a través de la trigonometría y derivar de forma natural la citada ecuación; esto cumple con los principios de reinvención guiada y entrelazamiento de la EMR y con la competencia disciplinar de construir e interpretar modelos matemáticos.

Partiendo de un contexto inicial de una cancha de futbol (nivel situacional) que puede manipularse mediante un Applet de GeoGebra (principio de actividad), se pretende que el estudiante construya su conocimiento y llegue a la expresión algebraica que relaciona el radio de la circunferencia con las coordenadas de los puntos que la conforman (competencia genérica de expresar ideas y conceptos mediante representaciones matemáticas o gráficas), siempre explicando y argumentando sus resultados (competencias disciplinares CD3 y CD4 incluidas). El inciso d) de la actividad requiere del estudiante la estructuración de estrategias de solución (competencia disciplinar de formular y resolver problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques) y la participación en equipos le permite desarrollar las habilidades interpersonales fijadas en el objetivo de la secuencia didáctica (principio de interacción y competencia genérica).

La administración del tiempo como recurso disponible y el seguimiento de instrucciones de manera reflexiva para alcanzar el objetivo de la sesión reflejan también competencias genéricas a desarrollar en el estudiante durante la actividad a trabajar.

El software GeoGebra como material manipulativo gráfico-textual-verbal permite el manejo de los objetos matemáticos por parte del estudiante y le genera economía de tiempos en cuestión de construcciones y trazos que puede aprovechar en análisis y reflexiones.

El ejercicio 19 del libro de texto (material didáctico clasificado como ayuda al estudio) permite probar la efectividad del aprendizaje obtenido por los propios estudiantes en la resolución de problemas con la naturaleza exigida por el programa oficial, relacionados con la ecuación canónica de la circunferencia.

La actividad extraclase 1 tiene la intención de introducir al estudiante al siguiente tema, así como darle la oportunidad de manipular el Applet de GeoGebra en un ambiente menos restringido en cuestión de tiempo con la consecuente posibilidad de profundizar más en su trabajo.

Al final, el estudiante reflexionará sobre su proceso de aprendizaje mediante la respuesta a un par de preguntas, que constituyen la evidencia del nivel de cumplimiento de la competencia genérica de aprender por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

En relación con el tema integrador, se trabajará el análisis de una encuesta publicada por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía referente al panorama de violencia contra las mujeres en el Estado de México. Los estudiantes conocerán estadísticas de este tema, esperando que comprendan su gravedad. La preparación en equipo de una exposición para mujeres de su familia (hombres no, por considerar que podrían provocarse conflictos si entre los presentes hay situaciones como las que se abordan en la presentación) les permitirá compartir esta información y tal vez generar conciencia sobre este problema en el mismo contexto en que viven, es decir, su entidad y su propia familia. El alumno pondrá en juego su capacidad de análisis, síntesis, de elaboración de una presentación electrónica efectiva, de exposición e interacción con personas diversas y de colaboración en equipos de trabajo.

2.2.4 Sesión 3

El objetivo de esta sesión consiste en iniciar el camino en la construcción de la ecuación ordinaria de la circunferencia, para lo cual el estudiante resolverá la Actividad 2 del Anexo II. Se espera dar significado a la expresión $x - 11$ como el desplazamiento hacia la izquierda que sufren todos puntos de la circunferencia del plano azul para que el punto de penalti (su centro) coincida con el origen.

En esta sesión se mueven algunas variables en relación con la anterior (las coordenadas del centro de la circunferencia), tomando como base una adecuación al contexto de la cancha de futbol. Se busca guiar al estudiante para que, a través de una matematización horizontal y también vertical, transite al nivel referencial de la EMR.

Los ejercicios por responder para esta clase y la dinámica de trabajo son similares a los propuestos en la sesión 2, de manera que se involucran los mismos principios de la EMR y competencias, tanto genéricas como disciplinares. El uso de GeoGebra también cobra el mismo sentido. La excepción es que en esta ocasión no se incluyen al final las reflexiones del estudiante sobre el proceso de aprendizaje; esto lleva la intención de no saturarlo y evitar respuestas mecánicas o poco profundas que en nada contribuyen al logro de los objetivos académicos.

La Actividad extraclase 2 solamente tiene la finalidad de preparar el material didáctico que se utilizará en la siguiente sesión.

2.2.5 Sesión 4

En esta clase se consolida la construcción de la ecuación ordinaria de la circunferencia; se espera guiar al estudiante al nivel general de la EMR. Aplican aquí el principio de reinvención guiada y la competencia disciplinar de construir e interpretar modelos matemáticos.

Utilizando los planos y los círculos de acetato construidos en la Actividad extraclase 2 como material manipulativo concreto, el alumno pasará de la ecuación canónica de la circunferencia a la ecuación ordinaria, significando esta como un desplazamiento de los ejes coordenados (superposición de los acetatos) h posiciones horizontales y k verticales hasta hacer coincidir el centro con el origen. En este punto el contexto planteado en las sesiones 1 y 2 ha quedado olvidado, de manera que se aplica el principio de matematización progresiva (la cual es básicamente vertical).

En la Actividad 3 del anexo II, el alumno grafica, argumenta, redacta y se integra al trabajo colaborativo; adicionalmente, también debe administrar recursos humanos, materiales y de tiempo, así como seguir instrucciones de manera reflexiva para lograr el objetivo trazado. Por ello, se justifica la inclusión de los principios de actividad e interacción de la EMR, así como de las competencias genéricas CG1, CG4, CG5 Y CG8. Del mismo modo, se trabajan las competencias disciplinares CD3 y CD4.

La Actividad extraclase 3 tiene como finalidad reforzar la comprensión de lo que el estudiante ha desarrollado en clase y el significado que se quiso dar a la ecuación ordinaria. Aquí debe poner en práctica las competencias disciplinares CD2 y CD8.

Con las preguntas de reflexión se busca dar seguimiento al proceso de aprendizaje del estudiante y corroborar la presencia de la competencia genérica referente a aprender por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

Finalmente, se retoma el tema integrador con las primeras dos exposiciones de los resultados del trabajo solicitado a los alumnos en la sesión 2.

2.2.6 Sesión 5 y sesión 6

El objetivo es construir la ecuación general de la circunferencia. Mediante el principio de matematización (vertical en este caso), se pasa del nivel general de la EMR al formal, ya que el trabajo de construcción realizado por el estudiante se desarrolla en un ámbito netamente algebraico. Nuevamente se ven involucrados en este proceso el principio de reinvención guiada, el de actividad y la competencia disciplinar de construir e interpretar modelos matemáticos. Además, ya que el estudiante requiere de habilidades algebraicas como desarrollar binomios al cuadrado, completar trinomios cuadrados perfectos y factorizar, se cumple con el principio de interrelación.

En las actividades 4 y 5 del Anexo II se espera del estudiante que identifique las características de forma que distinguen a la ecuación ordinaria de la circunferencia, así como que logre significar la ecuación general, particularmente los coeficientes de los términos lineales y el término constante. La aplicación de este conocimiento se da cuando se presenta al alumno una ecuación de segundo grado y es capaz de determinar si se trata o no de una circunferencia.

El estudiante debe graficar, argumentar y redactar sus soluciones; además, también debe administrar el tiempo como recurso restringido para realizar su trabajo, así como seguir instrucciones de manera reflexiva para lograr el objetivo trazado. Por ello, se justifica la inclusión en la planeación de tres competencias genéricas: conocerse y cuidar de sí; escuchar, interpretar y emitir mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados; desarrollar innovaciones y proponer soluciones a partir de métodos establecidos. En el rubro de competencias disciplinares, el alumno también debe explicar e interpretar sus resultados y argumentar sus soluciones.

La exactitud del desarrollo algebraico en la Actividad extraclase 4 puede comprobarse mediante GeoGebra (material manipulativo gráfico-textual-verbal), lo que da al estudiante la posibilidad resolver problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques (otra competencia disciplinar).

Los ejercicios 20 y 21 del libro de texto (material didáctico clasificado como ayuda al estudio) permiten probar la efectividad del aprendizaje obtenido por los propios estudiantes en la resolución de problemas con la naturaleza exigida por el programa oficial, relacionados con las ecuaciones ordinaria y general de la circunferencia.

Al final se destina tiempo para las exposiciones de los alumnos derivadas de su trabajo con el tema integrador.

2.2.7 Sesión 7

La Actividad 6 programada para la sesión es opcional, ya que la resolución de problemas sobre circunferencias sujetas a tres condiciones y los relacionados con tangentes requieren de mucho tiempo para trabajo analítico por parte de los estudiantes. Se propone la actividad por aquellos estudiantes cuyo desarrollo matemático les permite alcanzar esta complejidad y entonces el objetivo tendría que ser de la categoría informativa a nivel de manejar un contenido; para el resto, el tema se quedaría en un nivel de conocer un contenido. Será el profesor quien decida, con base en el avance alcanzado de la secuencia, si realiza o no dicha actividad.

La técnica utilizada en esta sesión sería expositiva, con la participación de los estudiantes en momentos requeridos por el profesor. Por ello las competencias disciplinares elegidas son CD1 y CD2.

Los ejercicios 22 y 23 del libro de texto (material didáctico clasificado como ayuda al estudio) prueban el aprendizaje de los estudiantes a través de la resolución de problemas con la naturaleza exigida por el programa oficial, relacionados con la ecuación general de la circunferencia.

Finalmente, la última reflexión de la secuencia didáctica se enfoca a una autoevaluación del estudiante sobre su proceso de aprendizaje a lo largo del tema, abarcando así la competencia genérica de aprender por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

El cierre de la secuencia didáctica incluye una recapitulación del profesor acerca de las condiciones geométricas y analíticas de la circunferencia revisadas en las siete sesiones.

2.2.8 Rúbrica para evaluar el desempeño en clase

Este instrumento (Anexo IV) tiene el propósito de trabajar una evaluación formativa; por ello adopta un enfoque cualitativo en el que se da prioridad a la observación del desarrollo de las competencias genéricas en el estudiante a través de la hetero, co y autoevaluación.

Los criterios A, B y C hacen alusión a competencias que se espera observar durante el trabajo en equipo. La evaluación para el aspecto A será registrada por el profesor en forma grupal, en tanto que las otras dos adoptarían la modalidad de coevaluación.

Será el alumno quien realice una autoevaluación para el aspecto D, relativo a la resolución de problemas. Para el aspecto E, el estudiante se valdrá de las reflexiones sobre su propio proceso de aprendizaje que le fueron requeridas en diferentes sesiones de la secuencia didáctica para, de manera conjunta con el profesor, generar una retroalimentación que le permita encontrar fortalezas, debilidades y establecer estrategias que coadyuven a la mejoría de los resultados de dicho proceso.

La estrategia propuesta de calificación para la rúbrica es: excelente=10, satisfactorio=8, puede mejorar=6 e insuficiente=5.

2.2.9 Lista de cotejo para evaluar tareas

Como una parte de la evaluación del producto (sumativa), se propone una lista de cotejo para evaluar de manera cuantitativa cada una de las tres tareas del libro de texto que se dejan en el transcurso de la secuencia didáctica (Anexo V). Se evalúa que las soluciones obtenidas por los alumnos sean correctas, tanto en resultado como en desarrollo (argumentación). Asimismo, se pondera qué tan completo está el trabajo entregado y que el estudiante sea capaz de articular más de un enfoque o estrategia de solución.

El último aspecto a considerar responde a un ejercicio de honestidad por parte del alumno, quien es responsable de asignar el valor que corresponda al rubro de originalidad. Es un intento por mostrarle que no tiene sentido copiar la tarea, ya que no le genera aprendizaje; más bien evidencia que no tiene sólidos ciertos valores que se pretende desarrolle por su paso en este nivel educativo.

2.2.10 Examen

El examen (Anexo VI) también es parte de la evaluación del producto. Programado en la secuencia didáctica para la sesión 8, en el ejercicio 1 se pide al estudiante que interprete la gráfica de una circunferencia para identificar la ecuación que le corresponde, además de argumentar su respuesta. En el ejercicio 2 debe construir un modelo matemático sencillo sobre una situación de la vida real y resolver el problema planteado. A partir de lo anterior, se están explorando las cinco competencias disciplinares contempladas en la secuencia didáctica, así como el nivel de cumplimiento de su objetivo.

A manera de resumen sobre la evaluación propuesta, el examen tiene peso de cinco puntos, cada una de las tres tareas equivale a un punto y el desempeño en clase completaría los dos restantes en una escala de cero a diez.

Capítulo 3. Resultados

3.1 Información preliminar

La secuencia didáctica se aplicó al grupo 303 de Geometría analítica en el Cecytem Tequixquiac, entre el 7 de noviembre y el 5 de diciembre de 2016, los lunes, en horario de 10:40 a 12:20, y los miércoles, de 8:40 a 10:20. En todas las sesiones, el trabajo del docente se apoyó de una presentación de PowerPoint, la cual estaba estructurada de tal manera que no diera ideas a los estudiantes acerca del trabajo que deberían realizar durante las sesiones, pero que apoyara al profesor en el establecimiento de objetivos, el resumen de resultados y la asignación de las tareas extraclase.

Se dio a los alumnos la instrucción de que cualquier anotación que tuvieran que hacer durante el desarrollo del tema, la realizaran en el cuadernillo de trabajo, el cual estuvo disponible para su adquisición en la papelería del plantel desde una semana antes de iniciar el tratamiento de la circunferencia.

Los estudiantes fueron numerados del 1 al 31, según la lista oficial del grupo. Los estudiantes 13, 16 y 25 no entregaron cuadernillo, de manera que fueron excluidos del análisis de resultados, al igual que el Estudiante 17, quien se dio de baja en el transcurso del semestre.

Las tablas 8 a 40 del anexo VII son la base para el reporte de los resultados de todas las actividades del experimento, excepto en lo referente a los videos sobre violencia de género.

3.2 Examen diagnóstico en clase

El experimento dio inicio el 7 de noviembre de 2016. Previo al examen, se proyectaron diapositivas de PowerPoint con el objetivo del tema (el cual fue anotado por los estudiantes en el propio cuadernillo), la explicación de los instrumentos de evaluación (los cuales ya estaban en poder de los alumnos desde el inicio del semestre), así como los videos *Cosmología aristotélica* (2012), *Geocentrismo y heliocentrismo* (2010) y *Cómo se midió por primera vez la Tierra* (TareasPlus, 2013). Se hicieron preguntas a los alumnos, en relación con el contenido de los videos: la trascendencia de la circunferencia en la visión aristotélica del universo, los personajes (Aristóteles, Ptolomeo, Copérnico, Kepler y Galileo) y la creatividad de Eratóstenes para medir la Tierra. Los alumnos participaban levantando la mano o por pregunta directa del profesor, sin tener al parecer un plan de turnos.

Fueron 25 los estudiantes que realizaron el diagnóstico en clase. Se permitió el uso de calculadora y se indicó a los alumnos que argumentaran todas las respuestas a los ejercicios. Se dieron 50 minutos para la resolución de la prueba.

Una vez finalizado el examen, se proyectó la imagen de una cancha de futbol y se preguntó a los estudiantes para qué servía la llamada media luna del área penal. Lo que inicialmente se preveía como una actividad incentivadora para los alumnos, por la afición al futbol que se detectó en ellos a través del estudio de sus gustos en las fichas técnicas, no resultó tal; los estudiantes no atinaban a decir la respuesta. Se les tuvo que guiar con preguntas acerca de la distancia a la que debía estar una barrera cuando se cobraba un tiro libre y luego asociar esto con la pregunta inicial.

Al final de la sesión, se proyectó la diapositiva con las preguntas de tarea extraclase relacionadas con los intereses de los estudiantes sobre el tema, el artículo que debían consultar para obtener una definición de violencia de género y la descarga en su celular de los dos Applets para el trabajo en las siguientes sesiones. Dado que el tiempo de la sesión se consumía, se conminó a los estudiantes a tomar foto de la citada diapositiva.

Pregunta 1, inciso a). Todos los diagnósticos tienen respuesta a esta pregunta. 24 estudiantes parecen tener la idea de que el vigilante se ubica en el centro de una circunferencia y que esta tiene que dividirse en cinco partes iguales para ubicar los cuadros; el Estudiante 31 se limita a cuadricular un círculo. Tres alumnos hacen explícito que la división de la circunferencia entre cinco da por resultado 72°. Cuatro de los examinados bosquejan un pentágono inscrito en un círculo, en cuyos vértices posicionan las pinturas, pero solamente uno de ellos incluye el dato ya referido de 72°. Ocho estudiantes incluyen la medida del radio en su esquema; el Estudiante 10 considera que hay ocho unidades lineales de distancia entre cuadro y cuadro. Ninguno de los 13 casos en los que el dibujo incluye los marcos parece ubicar a estos en forma tangencial a la circunferencia: en uno, las pinturas están por fuera de la sala, tocándola con una de sus esquinas; en cuatro los cuadros están por fuera del recinto, ceñidos a él como si fueran también circulares; siete alumnos colocan las pinturas en el interior del círculo, y dos hacen pasar la circunferencia sobre los cuadros.

Pregunta 1, inciso b). 16 alumnos la responden; solamente el Estudiante 1 argumenta su respuesta. Aunque ocho estudiantes tienen un resultado numérico razonable, solamente seis calculan el perímetro del círculo, de los cuales cinco hacen la división posterior entre 5 para encontrar el resultado requerido (un alumno equivocó las operaciones aritméticas), mientras que el restante obtuvo raíz. Dos estudiantes escriben las ecuaciones $P = l \times l$ y $P = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$. El Estudiante 7 escribe $F = l \times l^2$ y sustituye 8×8^2. El Estudiante 8 realiza la operación $1.5 \times 5 = 16.05$. El Estudiante 12 da un resultado de 22.5 centímetros, sin mayor desarrollo. Y dos alumnos más escriben 1.6 metros, también sin operaciones ni argumentación.

Pregunta 1, inciso c). La respondieron 22 estudiantes (88%), de acuerdo con la información mostrada en la ilustración 10.

Pregunta 1, inciso d). La respondieron 12 alumnos (48%); ninguno de ellos consideró que las pinturas podrían ubicarse en la sala en forma tangente a la circunferencia. Las diferentes contestaciones se aprecian en la ilustración 11.

Pregunta 1, inciso e). En esta pregunta hubo 18 respuestas (72%), con la categorización presentada en la ilustración 12.

Pregunta 1, inciso f). 13 alumnos contestaron el reactivo (52%); ninguno dio la medida correcta de la circunferencia en radianes, según se ve en la ilustración 13.

Pregunta 2. En esta pregunta se encuentran ocho respuestas (32%), ninguna correcta ni argumentada. Tres estudiantes (12%) reconocen al parecer que se requiere el cálculo del perímetro y lo realizan correctamente; entre estos, el Estudiante 2 ya no sigue el desarrollo del problema, el Estudiante 26 extrae la raíz y el Estudiante 1 llega hasta la obtención del diámetro a partir de la división del perímetro entre π, pero ya no calcula el radio, que es lo que solicita el problema. El Estudiante 12 responde $\frac{360}{30} = 12cm$. El Estudiante 21 probablemente considera que la medida de

15 metros dada por el problema es el diámetro, ya que escribe $R = 7.5$ metros y la ecuación $\pi \times D/2$, en la cual hace la sustitución $8 \times 1.6 = 12.8$; sin embargo, termina dando como respuesta 21.93. El estudiante 22 plantea una regla de tres: 10 es a 8 como 15 es a x y obtiene como resultado 12 metros. El Estudiante 23 únicamente escribe 3m. Y el Estudiante 27 divide $225 \div 2$ y obtiene su raíz, por lo que su respuesta es 10.6 m.

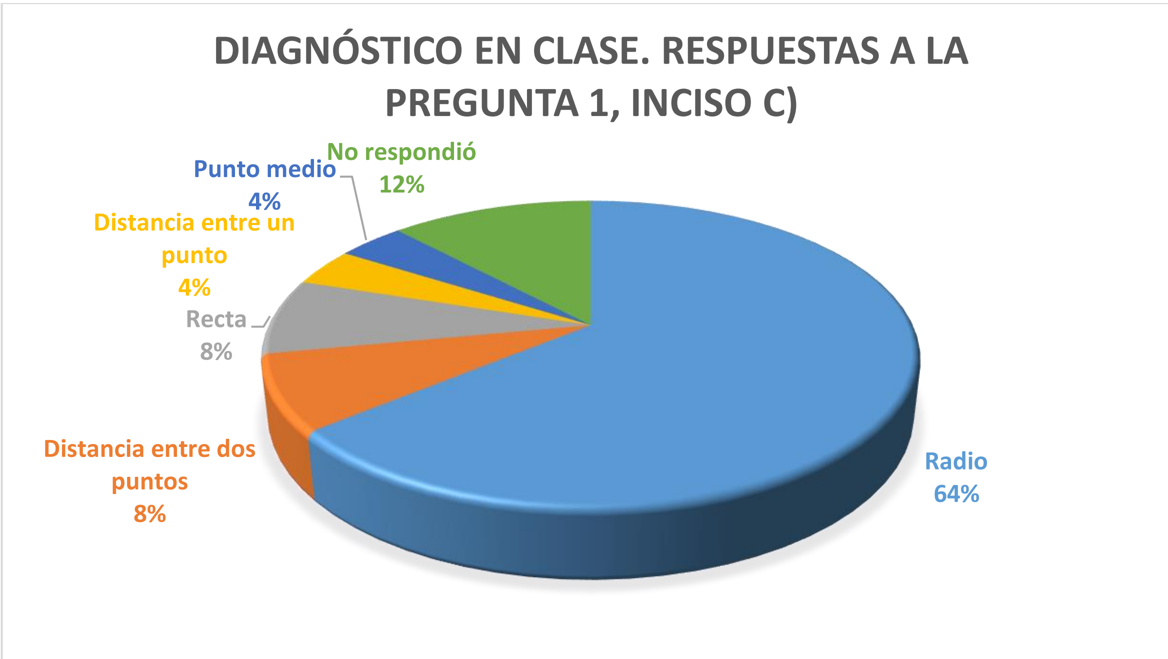


Ilustración 10.Diagnóstico en clase. Respuestas a la pregunta 1, inciso c)

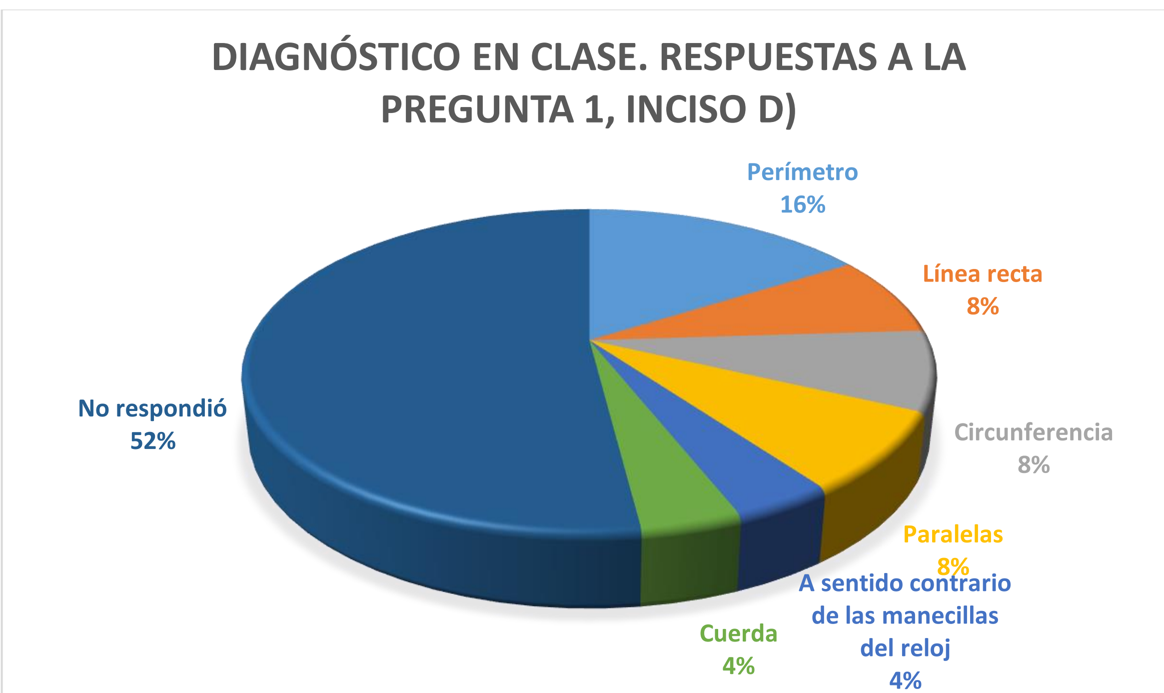


Ilustración 11. Diagnóstico en clase. Respuestas a la pregunta 1, inciso d).

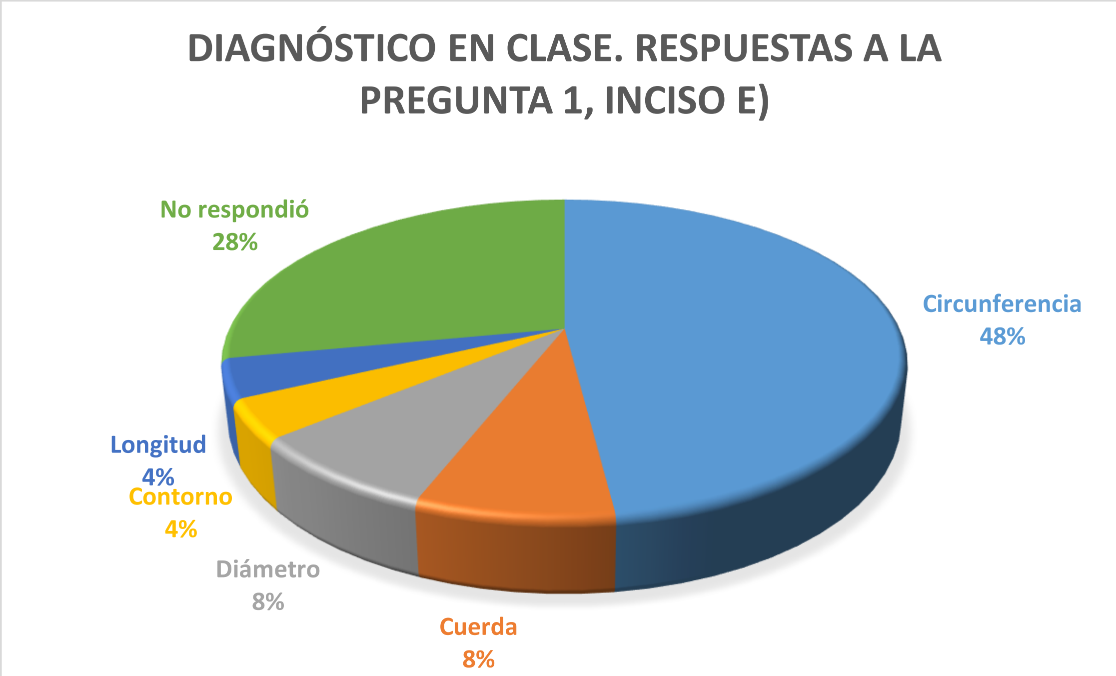


Ilustración 12. Diagnóstico en clase. Respuestas a la pregunta 1, inciso e).

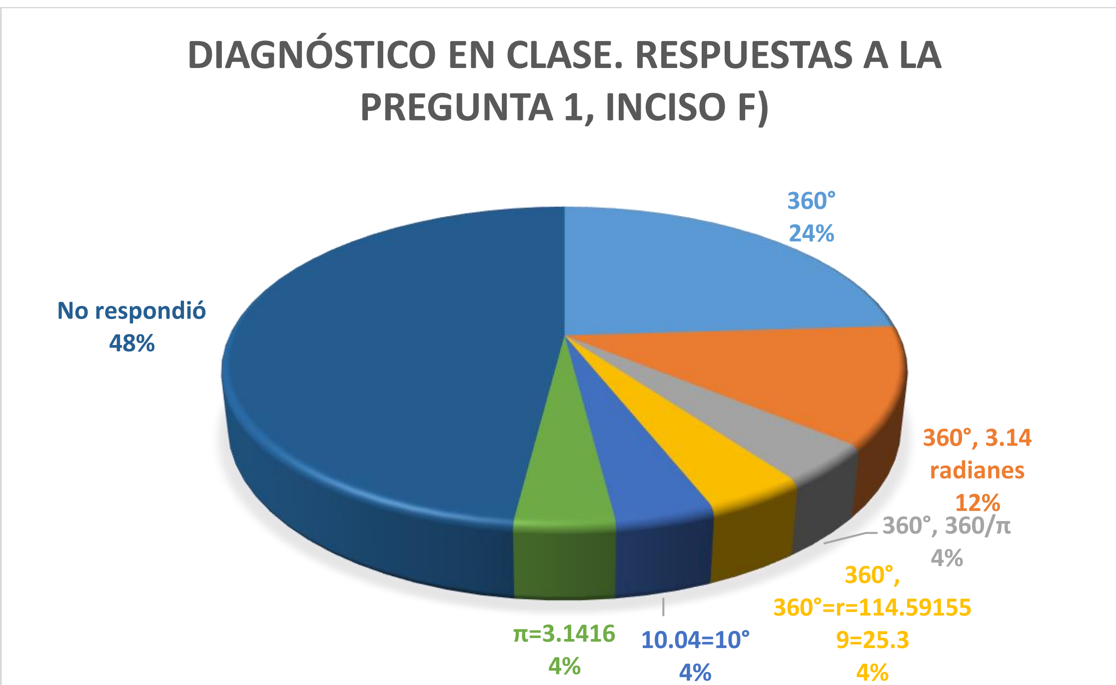


Ilustración 13. Diagnóstico en clase. Respuestas a la pregunta 1, inciso f).

Pregunta 3. Hay siete respuestas para este reactivo (28%). El estudiante 1 responde acertadamente $\frac{\pi \times Diámetro}{n} = Longitud\ un\ pedazo\ perímetro$. El estudiante 23 está cerca, pero, al parecer confunde el cálculo del diámetro a partir del cuadrado del radio, ya que escribe $\frac{\pi \times r^2}{n}$. Tanto el Estudiante 21 como el Estudiante 22 responden que la solución se encuentra utilizando la fórmula

$\pi \times Diámetro$. El Estudiante 12 encuentra una similitud entre este problema y el de la pregunta 1, inciso a). El Estudiante 12 escribe $360 \div r \div n$ y el Estudiante 27 considera que "podría invertir el procedimiento del teorema de Pitágoras".

3.3 Examen diagnóstico en casa

Se dio a los estudiantes la oportunidad de resolver el examen diagnóstico en casa, a efecto de que repasaran temas previos de los que no se acordaron durante la prueba en clase. Aun cuando los estudiantes tuvieron para realizar este diagnóstico todo el tiempo que duró la secuencia, solamente 22 de ellos trabajaron en él, incluyendo a los dos que no habían resuelto el diagnóstico en clase; es decir, solamente se pudieron comparar respuestas en clase y en casa de 20 alumnos.

Pregunta 1, inciso a). 20 diagnósticos tienen respuesta a esta pregunta (91%). 19 estudiantes parecen tener la idea de que el vigilante se ubica en el centro de una circunferencia y que esta tiene que dividirse en cinco partes iguales para ubicar los cuadros; el Estudiante 31 se limita a cuadricular un círculo, tal como lo hizo en el diagnóstico en clase. Ahora solamente el Estudiante 7 hace explícito que la división de la circunferencia entre cinco da por resultado $72°$, como lo hizo en el diagnóstico en clase. Dos de los examinados bosquejan un pentágono inscrito en un círculo en cuyos vértices posicionan las pinturas, pero ninguno incluye el dato ya referido de $72°$; el Estudiante 29 es el único que repite esta respuesta en relación con el diagnóstico en clase. Siete estudiantes incluyen la medida del radio en su esquema; de ellos, el Estudiante 9 considera que hay ocho unidades lineales de distancia entre cuadro y cuadro (esto lo había manifestado el Estudiante 10 en el diagnóstico en clase, pero para este segundo examen ya no). Ninguno de los 12 casos en los que el dibujo incluyó los marcos parece ubicar a estos en forma tangencial a la circunferencia: en dos los cuadros están por fuera del recinto, ceñidos a él como si fueran también circulares y 10 alumnos colocaron las pinturas en el interior del círculo.

Pregunta 1, inciso b). 17 alumnos responden (77%); solamente el Estudiante 10 argumenta su respuesta (no lo había hecho en el examen en clase). De 13 estudiantes que tienen un resultado numérico razonable, ocho calculan el perímetro del círculo y hacen la división posterior entre 5 para encontrar el resultado requerido. El Estudiante 30 ofrece el perímetro del círculo como solución al ejercicio. Dos estudiantes escriben $360 \div 16 = 22.5$. Y el Estudiante 21 mantiene su respuesta de 1.6 en relación con su solución en clase.

Pregunta 1, inciso c). La respondieron 20 estudiantes (91%); aproximadamente tres de cada cuatro dieron como respuesta al radio (ver ilustración 14). El Estudiante 3 y el Estudiante 12 mantuvieron su respuesta en relación con el diagnóstico en clase (distancia entre dos puntos y recta, respectivamente); en tanto, El Estudiante 27 cambió de radio a recta.

Pregunta 1, inciso d). La contestaron 14 alumnos (63%); ninguno de ellos consideró que las pinturas podrían ubicarse en la sala en forma tangente a la circunferencia. Solamente tres examinados mantuvieron la respuesta ofrecida en el diagnóstico en clase. Las diferentes menciones para el reactivo se aprecian en la ilustración 15.

Pregunta 1, inciso e). En esta pregunta hubo 17 respuestas (77%), prácticamente todas refiriéndose a la circunferencia (ver ilustración 16). El Estudiante 7 mantuvo su respuesta del primer diagnóstico (cuerda).

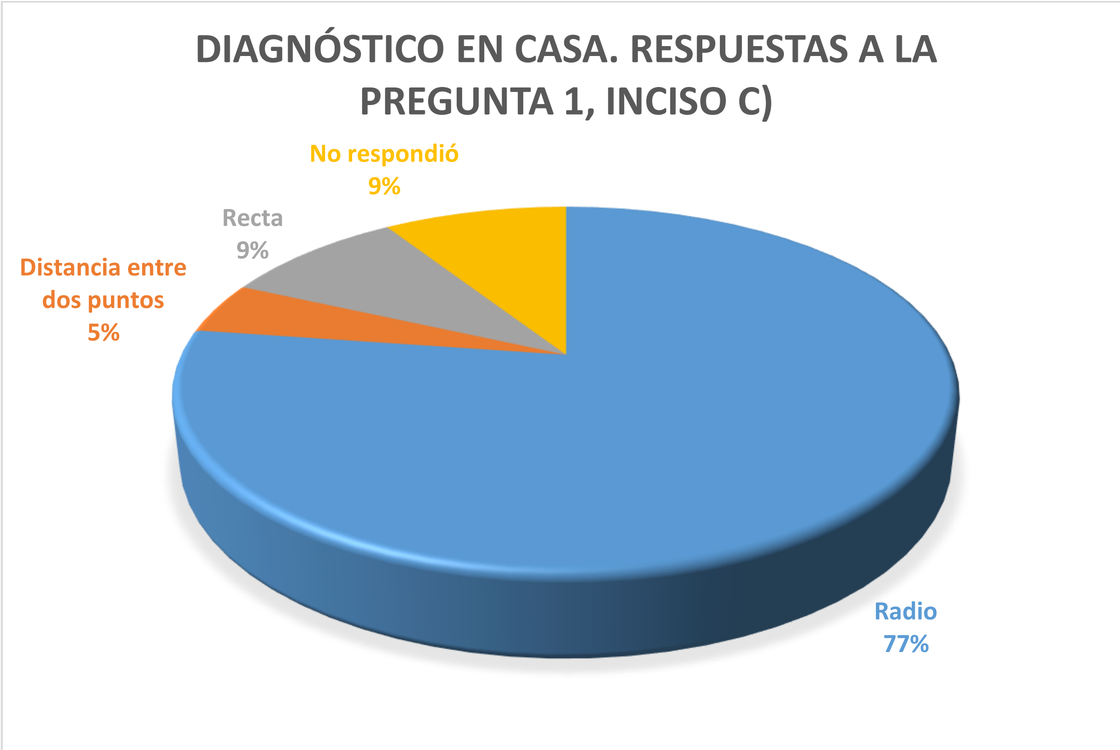


Ilustración 14. Diagnóstico en casa. Respuestas a la pregunta 1, inciso c).

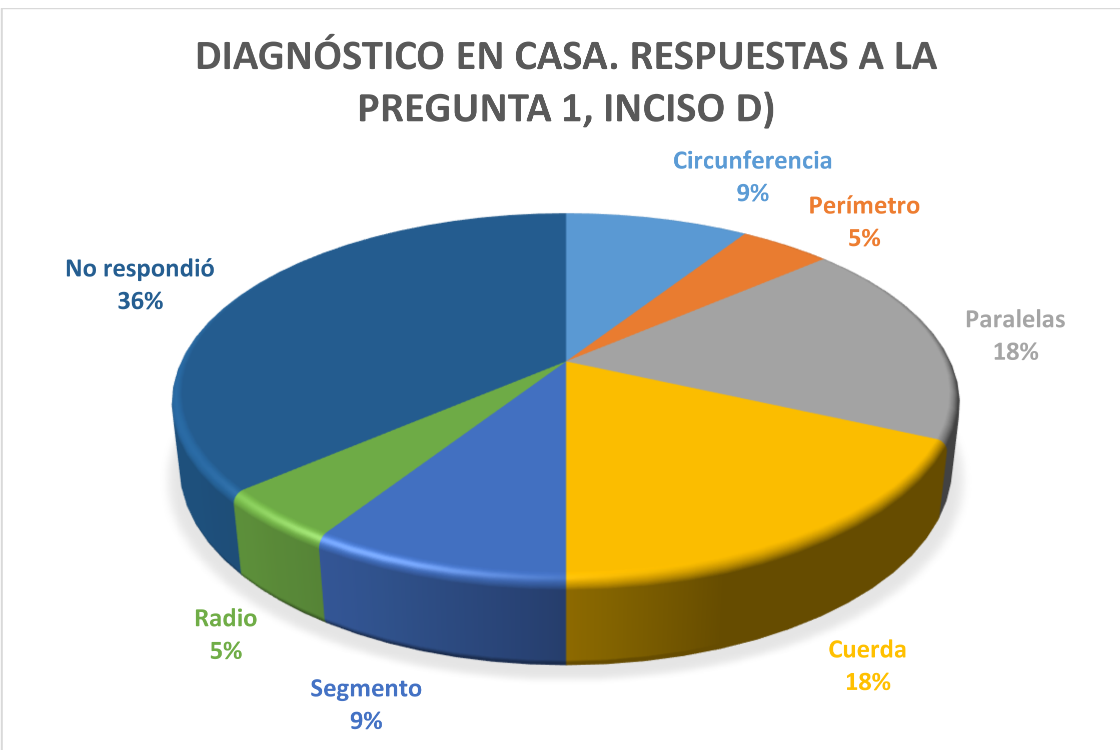


Ilustración 15. Diagnóstico en casa, Respuestas a la pregunta 1, inciso d).

Ilustración 16. Diagnóstico en casa. Respuestas a la pregunta 1, inciso e).

Pregunta 1, inciso f). 17 alumnos contestaron el reactivo (77%), de acuerdo con lo mostrado en la ilustración 17. En esta ocasión, cuatro respuestas incluyeron la medida de $360°$ y 2π radianes o 6.28, pero no indicaban que el perímetro se obtenía multiplicando esta cantidad por el radio.

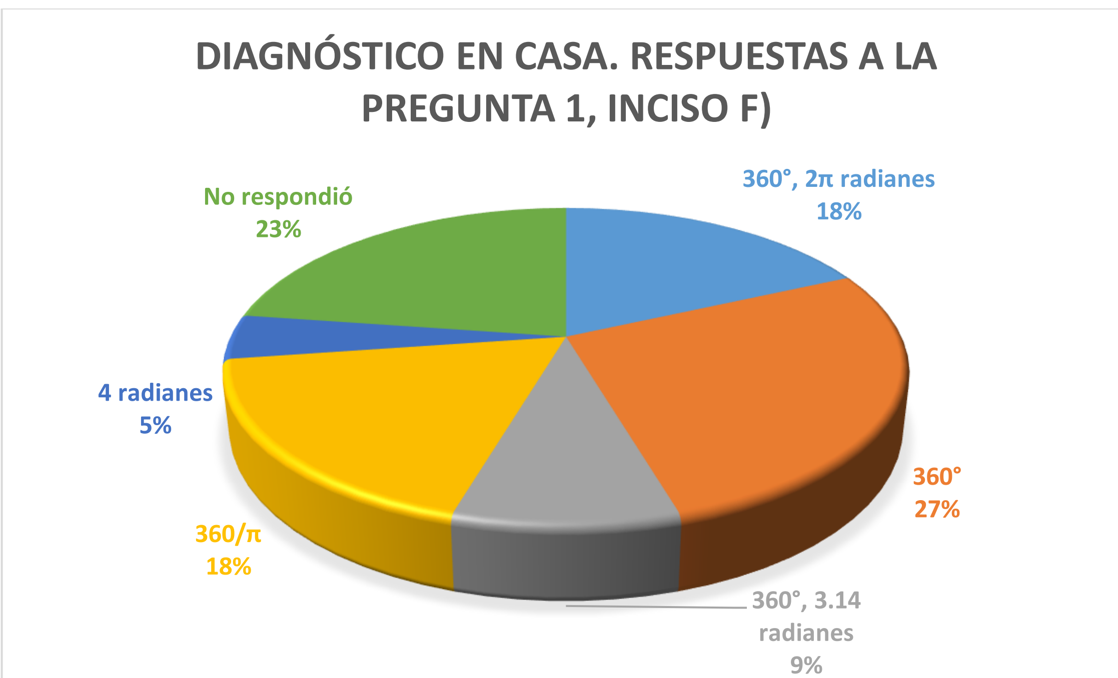


Ilustración 17. Diagnóstico en casa. Respuestas a la pregunta 1, inciso f).

Pregunta 2. Esta pregunta encontró 12 respuestas (54%), ninguna argumentada. Cuatro alumnos desarrollaron el cálculo del perímetro, su división entre 2π y consiguieron el resultado correcto (dos de ellos fueron de los que se ocuparon de averiguar a cuántos radianes equivalen 360 grados). Dos estudiantes dividieron los 360 grados entre dos veces el diámetro y obtuvieron $360 \div 30 = 12$ (entre ellos el Estudiante 12, que fue el único que mantuvo su respuesta en relación con el diagnóstico en clase). El Estudiante 28 llegó a la expresión $2 \cdot \pi \cdot r = 75$, de manera que solamente le faltó despejar el radio. El Estudiante 6 realizó varios cálculos con el resultado de elevar 15 al cuadrado. El Estudiante 7 al parecer identificó que requería el cálculo del perímetro del círculo: escribió $\pi \times 15$ pero no hizo desarrollo alrededor de la multiplicación de los 15 metros que separaban a las cinco pinturas sobre el contorno de la sala de arte. El Estudiante 9 solamente bosquejó la citada sala. El Estudiante 26 dividió $15 \div 5 = 3$ y multiplicó el resultado por π. Finalmente, el Estudiante 30 multiplicó dos veces el radio por π: $3.1416 \times 30 = 94.24$.

Pregunta 3. Hay 11 respuestas para este reactivo (50%); solamente dos alumnos mantuvieron su solución en relación con el diagnóstico en clase. Seis alumnos dieron una respuesta en la que dividían el perímetro entre el número de cuadros (uno de ellos fue el Estudiante 1, que había respondido lo mismo en el primer diagnóstico); cuatro de estos alumnos también acertaron en su respuesta a la pregunta 2. El Estudiante 6 escribió $\frac{360 \cdot \pi \cdot r}{n}$. Dos estudiantes contestaron la fórmula para el área del círculo y dos más expresaron la operación $360 \div r \div n$ (el Estudiante 12 mantuvo esta respuesta en relación con el diagnóstico en clase).

3.4 Cuadernillo de trabajo

3.4.1 Actividad 1

Se llevó a cabo el 9 de noviembre de 2016. La puesta en marcha de la sesión tardó prácticamente 27 minutos. En este tiempo los alumnos prepararon su cuadernillo, se instaló el videoproyector, se mostró la presentación con el objetivo (el cual tenía que anotarse en el cuadernillo, en la parte trasera de la Actividad 1), se recordó, con la participación de los estudiantes, la utilidad que la sesión previa se había encontrado para la media luna del área penal. El profesor aprovechó para que los alumnos tomaran fotografías a la liga donde encontrarían un documento del INEGI sobre la violencia contra las mujeres en el Estado de México, sobre el cual tendrían que preparar en equipos una exposición para 10 mujeres de su familia, sesión que sería videograbada para editar cinco minutos que posteriormente serían mostrados a todo el grupo.

Se tuvo que incluir en esta presentación la manipulación del Applet con la cancha de futbol para llenar los primeros datos de la Actividad, ya que solamente un estudiante lo descargó en su celular, como se solicitó en la clase anterior. La presentación de PowerPoint hacía énfasis en el triángulo rectángulo que se podía formar tomando como un vértice al punto de penalti y como otro de los vértices al jugador Messi. Con el videoproyector los estudiantes pudieron observar el movimiento del futbolista a lo largo de la media luna del área penal. En este sentido, resultó conveniente para la actividad que los dos valores de y para una coordenada x de la posición del futbolista fueran, en valor absoluto, lo más parecidos que se pudiera.

Antes de que diera inicio el trabajo de los alumnos, el Estudiante 15 preguntó desde su lugar si se podía utilizar el teorema de Pitágoras para los cálculos; para no dar una respuesta que indujera la actividad, se dijo que cada uno de los alumnos tenía que buscar la herramienta matemática adecuada para el caso.

Los estudiantes no parecían reparar en el tiempo disponible para la realización de la actividad y dedicaban una cantidad considerable de tiempo al esquema del primero de cuatro ejercicios (algunos incluso intentaban dibujar una pequeña cancha de futbol). Al observar esto, surgió en el docente la idea de incluir el sistema de coordenadas en los cuadernillos para futuras ocasiones, en aras de economizar tiempo; sin embargo, a la luz de los defectos mostrados por los alumnos en la construcción de sus planos cartesianos, habría que evaluar la pertinencia de la citada idea.

Durante el desarrollo de la sesión, el profesor recorrió los lugares de los alumnos para observar su trabajo, al mismo tiempo que revisaba la definición de violencia de género solicitada como tarea extraclase en la sesión previa.

Luego de 58 minutos, únicamente tres estudiantes habían terminado la actividad, los cuales fueron tomados como base para armar tres grupos pequeños para que los estudiantes intercambiaran sus ideas y trataran de resolver sus dudas con los pares. Finalmente, se discutieron brevemente los resultados. En realidad, la dinámica de la clase pareció apresurada en los últimos 20 minutos.

La sesión concluyó al dictar a los estudiantes dos preguntas para dar seguimiento a su proceso de aprendizaje. Se dejó como Actividad extraclase 1 la resolución del ejercicio 19 en el cuadernillo y el avance del inciso a) en la Actividad 2.

Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$. Fueron 25 los estudiantes que respondieron esta actividad. 23 alumnos dibujaron triángulos rectángulos para apoyar su trabajo, mientras que dos omitieron el esquema.

15 alumnos bosquejaron un sistema de coordenadas para representar la posición del jugador; solamente uno de ellos ubicó al cero en su sistema coordenado, apenas uno colocó las flechas para indicar el sentido positivo de los ejes y solamente seis pusieron rótulos a estos. 14 de ellos colocaron el punto de penalti en el origen de su sistema de coordenadas (a la izquierda del futbolista); el Estudiante 31 posicionó al jugador sobre el eje vertical, de manera que el punto penal quedaba a la derecha de Messi.

19 estudiantes plantearon inicialmente la expresión que relacionaba la distancia entre el futbolista y el manchón de penalti, a través del teorema de Pitágoras. Nueve de ellos desarrollaron las operaciones hasta llegar a una identidad del tipo $9 = 9$, $9^2 = 81$ o $9 = \sqrt{81}$, lo cual tendría que haberse supuesto por la construcción de la citada expresión.

Los errores detectados fueron quitar la raíz en el teorema de Pitágoras sin elevar al cuadrado el otro miembro, expresar la medida de la hipotenusa como -9^2, sustituir incorrectamente los valores de los catetos y elevar al cuadrado un número negativo manteniendo el signo; cada uno de estos errores tuvo dos ocurrencias.

Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$. Fueron 25 los estudiantes que respondieron esta actividad. 21 alumnos dibujaron triángulos rectángulos para apoyar su trabajo, mientras que cuatro omitieron el esquema.

13 alumnos bosquejaron un sistema de coordenadas para representar la posición del jugador; dos de ellos ubicaron al cero en su sistema coordenado, ninguno incluyó las flechas para indicar el

sentido positivo de los ejes y solamente seis colocaron rótulos a estos. Todos colocaron el punto de penalti en el origen de su sistema de coordenadas (a la izquierda del futbolista).

21 estudiantes plantearon inicialmente la expresión que relacionaba la distancia entre el futbolista y el manchón de penalti, a través del teorema de Pitágoras; los cuatro restantes no hicieron trabajo en la última columna del ejercicio. Nueve desarrollaron las operaciones hasta llegar a una identidad del tipo $9 = 9$, $9^2 = 81$ o $9 = \sqrt{81}$, lo cual tendría que haberse supuesto por la construcción de la ecuación.

Los errores detectados fueron quitar la raíz en el teorema de Pitágoras sin elevar al cuadrado el otro miembro, expresar la medida de la hipotenusa como -9^2 (dos casos), sustituir incorrectamente los valores de los catetos (cuatro ocasiones) y realizar operaciones en un renglón del desarrollo que no se habían indicado en las líneas previas.

Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$. Fueron 25 los estudiantes que respondieron esta actividad. 21 alumnos dibujaron triángulos rectángulos para apoyar su trabajo, mientras que cuatro omitieron el esquema.

13 alumnos bosquejaron un sistema de coordenadas para representar la posición del jugador; dos de ellos ubicaron al cero en su sistema coordenado, apenas uno incluyó las flechas para indicar el sentido positivo de los ejes y solamente seis colocaron rótulos a estos. Todos colocaron el punto de penalti en el origen de su sistema de coordenadas (a la izquierda del futbolista).

22 estudiantes plantearon inicialmente la expresión que relacionaba la distancia entre el futbolista y el manchón de penalti, a través del teorema de Pitágoras; los tres restantes no hicieron trabajo en la última columna del ejercicio. Nueve desarrollaron las operaciones hasta llegar a una identidad del tipo $9 = 9$, $9^2 = 81$ o $9 = \sqrt{81}$, lo cual tendría que haberse supuesto por la construcción de la ecuación.

Los errores detectados fueron quitar la raíz en el teorema de Pitágoras sin elevar al cuadrado el otro miembro, sustituir incorrectamente los valores de los catetos (cuatro ocasiones) y realizar operaciones en un renglón del desarrollo que no se habían indicado en las líneas previas (tres casos).

Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$. Fueron 25 los estudiantes que respondieron esta actividad, tres de los cuales omitieron el esquema.

13 alumnos bosquejaron un sistema de coordenadas para representar la posición del jugador; dos de ellos ubicaron al cero en su sistema coordenado, uno incluyó las flechas para indicar el sentido positivo de los ejes y solamente siete colocaron rótulos a estos. Todos colocaron el punto de penalti en el origen de su sistema de coordenadas (a la izquierda del futbolista). De estos 13 casos, únicamente en dos se aprecia la intención de señalar la medida de nueve metros para la posición del jugador.

De los nueve estudiantes restantes que hicieron esquema, uno de ellos dibujó un triángulo, a pesar de que, en realidad, en este ejercicio no se formaba tal figura. Los otros ocho trazaron una recta, pero cinco ni siquiera indicaron su medida.

19 estudiantes plantearon inicialmente la expresión que relacionaba la distancia entre el futbolista y el manchón de penalti, a través del teorema de Pitágoras; los seis restantes no hicieron trabajo en

la última columna del ejercicio. Nueve desarrollaron las operaciones hasta llegar a una identidad del tipo $9 = 9$, $9^2 = 81$ o $9 = \sqrt{81}$, lo cual tendría que haberse supuesto por la construcción de la ecuación.

Los errores detectados fueron quitar la raíz en el teorema de Pitágoras sin elevar al cuadrado el otro miembro, sustituir incorrectamente los valores de los catetos, incluir la igualdad dentro de la raíz. Dos estudiantes indicaron que el resultado era cero.

Actividad 1, inciso b). Lo contestaron 21 estudiantes. Diez de ellos llegaron a la ecuación de una circunferencia de radio 9 y centro en el origen: $9^2 = x^2 + y^2$; cinco más escribieron $9 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ocho estudiantes de los 21 que responden el ejercicio asocian la ecuación obtenida con una aplicación del teorema de Pitágoras. Cuatro de estos especifican que el radio es la hipotenusa de un triángulo rectángulo y dos hacen explícito que la distancia entre el punto de penalti y el jugador que se mueve sobre el semicírculo del área no cambia. La argumentación de 12 estudiantes no se relaciona con alguna de las ideas antes expuestas.

Actividad 1, inciso c). De los 21 estudiantes que ofrecieron respuesta para el inciso b), el 86% coincidió en que su ecuación para la primera portería tendría que funcionar para la otra; solamente el Estudiante 12 opinó diferente (ver ilustración 18). Se pueden destacar argumentaciones tales como que la x tendría coordenadas negativas (en realidad la x sería la abscisa del punto que representaría la posición del jugador), que se aplicaría el mismo método y, la más socorrida, que la otra área penal tendría las mismas medidas.

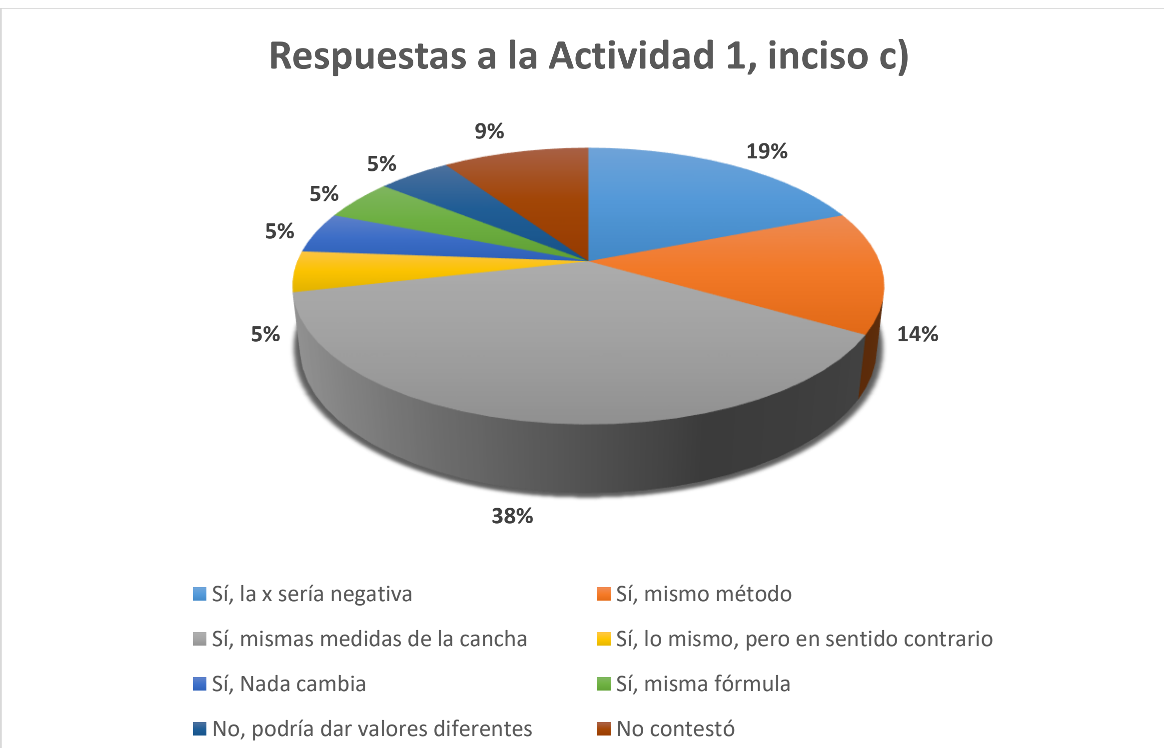


Ilustración 18. Actividad 1. Respuestas al inciso c).

Actividad 1, inciso d). En este caso, ocho estudiantes dan argumentaciones apoyadas en la visualización de la posición del jugador para determinar si invadía o no el área penal; únicamente cuatro estudiantes aludieron la necesidad de obtener analíticamente la distancia que hay entre el punto de penalti y el jugador. Cabe señalar que seis jóvenes que habían dado respuesta al inciso b) no argumentaron en el d).

Actividad 1, inciso e). Solamente ocho estudiantes ofrecieron alguna argumentación para este ejercicio, casi todos ellos refiriéndose a la elección de la ecuación definitiva ($x^2 + y^2 = 9$).

3.4.2 Actividad 2

Se efectuó el 14 de noviembre de 2016. Se proyectaron diapositivas con el resultado obtenido la sesión anterior (la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 9), el objetivo de la sesión (el cual anotaron los alumnos en su cuadernillo, atrás de la Actividad 2) y la problemática a abordar en la sesión. Se explicó a los estudiantes el recorrido que se hizo en la cancha de futbol para que ahora el origen quedara a la mitad de la portería.

Para esta ocasión, casi todos los estudiantes llevaron a clase las medidas que se requerían en la Actividad extraclase 1. A quienes no tenían los datos, se les permitió copiarlos de algún compañero. Inicialmente, la mayoría de los estudiantes quería medir la distancia de 9 unidades desde el origen (portería) hasta el semicírculo del área (Messi); no parecían reparar en que, así medida, dicha distancia era mayor a las citadas 9 unidades. Se les guió a través de cuestionamientos, básicamente centrados en la comparación de lo hecho en la Actividad 1 con lo que se pedía ahora.

El trabajo resultó más fluido que en la Actividad 1, probablemente por la experiencia que el desarrollo de la misma dejó para los estudiantes. No hubo problemas de tiempo y se desarrollaron sin prisas las etapas de discusión en grupo pequeño y en plenaria.

Se cerró la sesión solicitando a los estudiantes la elaboración del material indicado en la Actividad extraclase 2; se aclararon las dudas que surgieron al respecto. Asimismo, se aclaró a los alumnos que su proyecto sobre violencia de género tendría que entregarse el martes 22 de noviembre, en una sesión especial (ya que los martes no había clase de Geometría analítica para el grupo).

Actividad 2, incisos a) y b), $\boldsymbol{x = 17}$. Trabajaron 22 estudiantes. Aunque 17 de ellos se apoyaron en un sistema de referencia, no hubo un sistema de coordenadas que tuviera simultáneamente los rótulos de los ejes, las flechas indicativas del sentido positivo y la identificación de origen.

16 de los estudiantes dibujaron dos triángulos rectángulos para representar la posición del jugador Messi en relación con el punto de penal; cuatro solamente hicieron una figura. Ocho de los alumnos dibujaron el triángulo desde el origen, a pesar de que se indicó que en esa ubicación se encontraba la portería; así trazada, la hipotenusa del triángulo rectángulo no correspondía con el radio de la circunferencia insinuada por el penal y la media luna del área. Cuatro estudiantes sí ubicaron el centro de la circunferencia en las coordenadas $(11, 0)$; otros cuatro hicieron lo propio, una cierta distancia a la derecha de lo que parecería ser el origen (su sistema de referencia no ayudó a precisar los detalles).

Todos los estudiantes se apoyaron en el teorema de Pitágoras para establecer una relación entre la posición del jugador y lo que al parecer consideraban el centro de la circunferencia. Seis obtuvieron una expresión deseable: $9 = \sqrt{(17-11)^2 + (6.7)^2}$ o bien $(17-11)^2 + 6^2 = 9^2$. Cinco más llegaron a una expresión del tipo de la Actividad 1: $\sqrt{6^2 + (6.68)^2} = 9$; cuatro de ellos escribieron que $17 - 11 = 6$, al parecer indicando con ello el desplazamiento de la circunferencia en relación con el origen. Siete alumnos desarrollaron hasta una identidad del tipo $9 = 9$, $9^2 = 81$, $81 = 81$. Solamente dos de los participantes reflejaron en su resultado el esquema donde la hipotenusa partía desde el origen: escribieron $\sqrt{17^2 + 6.7^2} = 18$.

Se aprecia un par de expresiones con omisiones en su escritura: $9^2 = (7 - 11) + 6.67$ y $(17 - 11) + 6^2 = 9^2$.

Actividad 2, incisos a) y b), $\boldsymbol{x = 18}$. Trabajaron 21 estudiantes. Aunque 14 de ellos se apoyaron en un sistema de referencia, no hubo un sistema de coordenadas que tuviera simultáneamente los rótulos de los ejes, las flechas indicativas del sentido positivo y la identificación de origen; de hecho, de estos tres elementos solamente los rótulos estuvieron presentes en dos de los esquemas.

16 de los estudiantes dibujaron dos triángulos rectángulos para representar la posición del jugador Messi en relación con el punto de penal; tres solamente hicieron una figura. Nueve de los alumnos dibujaron el triángulo desde el origen, a pesar de que se indicó que en esa ubicación se encontraba la portería; así trazada, la hipotenusa del triángulo rectángulo no correspondía con el radio de la circunferencia insinuada por el penal y la media luna del área. Tres estudiantes sí ubicaron el centro de la circunferencia en las coordenadas $(11, 0)$; otros cuatro hicieron lo propio, una cierta distancia a la derecha de lo que parecería ser el origen (su sistema de referencia no ayudó a precisar los detalles).

Casi todos los estudiantes se apoyaron en el teorema de Pitágoras para establecer una relación entre la posición del jugador y lo que al parecer consideraban el centro de la circunferencia. Seis obtuvieron una expresión deseable: $9 = \sqrt{(18 - 11)^2 + (5.52)^2}$. Cinco más llegaron a una expresión del tipo de la Actividad 1: $\sqrt{7^2 + (5.57)^2} = 9$; todos estos escribieron $18 - 11 = 7$, al parecer indicando con ello el desplazamiento de la circunferencia en relación con el origen. Cuatro alumnos desarrollaron hasta una identidad del tipo, $9^2 = 81, 81 = 81$. Solamente dos participantes reflejaron en el resultado su esquema donde la hipotenusa partía desde el origen: escribieron $c = 18.85$.

En cuanto a los errores apreciados, cinco estudiantes equivocaron la sustitución del valor de los catetos en el teorema de Pitágoras.

Actividad 2, incisos a) y b), $\boldsymbol{x = 19}$. Trabajaron 20 estudiantes. Aunque 14 de ellos se apoyaron en un sistema de referencia, no hubo un sistema de coordenadas que tuviera simultáneamente los rótulos de los ejes, las flechas indicativas del sentido positivo y la identificación de origen; de hecho, de estos tres elementos solamente los rótulos estuvieron presentes en uno de los esquemas y el origen en dos.

15 de los estudiantes dibujaron dos triángulos rectángulos para representar la posición del jugador Messi en relación con el punto de penal; cuatro solamente hicieron una figura. Ocho de los alumnos dibujaron el triángulo desde el origen, a pesar de que se indicó que en esa ubicación se encontraba la portería; así trazada, la hipotenusa del triángulo rectángulo no correspondía con el radio de la circunferencia insinuada por el penal y la media luna del área. Tres estudiantes sí ubicaron el centro de la circunferencia en las coordenadas $(11, 0)$; otros cinco hicieron lo propio, una cierta distancia

a la derecha de lo que parecería ser el origen (su sistema de referencia no ayudó a precisar los detalles).

Prácticamente todos los estudiantes se apoyaron en el teorema de Pitágoras para establecer una relación entre la posición del jugador y lo que al parecer consideraban el centro de la circunferencia. Tres obtuvieron una expresión deseable: $9 = \sqrt{(19-11)^2 + (4)^2}$. Cuatro más llegaron a una expresión del tipo de la Actividad 1: $\sqrt{8^2 + (5.57)^2} = 9$; todos estos escribieron que $19 - 11 = 8$, al parecer indicando con ello el desplazamiento de la circunferencia en relación con el origen. Cuatro alumnos desarrollaron hasta una identidad del tipo, $9^2 = 81,\ 81 = 81$. Solamente dos de los participantes reflejaron en el resultado su esquema donde la hipotenusa partía desde el origen: escribieron $c = 19.41$.

En cuanto a los errores apreciados, tres estudiantes equivocaron la sustitución del valor de los catetos en el teorema de Pitágoras. Además, se presentaron omisiones en la escritura de la expresión: $9^2 = (19 - 11 + 4)$ y $(19 - 11)8^2 = 9^2$.

Actividad 2, incisos a) y b), $x = 20$. Trabajaron 19 estudiantes. Uno de ellos dibujó en su esquema triángulos rectángulos, a pesar de que no había los elementos necesarios para ello. Dos estudiantes llegaron a una expresión deseable: $9 = \sqrt{(20-11)^2 + 0^2}$. Cuatro de ellos finalizaron con $9 = \sqrt{9^2 + 0^2}$, todos escribieron que $20 - 11 = 9$, al parecer, indicando con ello el desplazamiento de la circunferencia en relación con el origen. Dos alumnos llegaron a una identidad del tipo $9^2 = 81$.

Dos alumnos consideraron que la distancia buscada era igual a cero y dos más que era 20 (aparentemente por no considerar el desplazamiento de la circunferencia 11 unidades a la derecha del origen). En dos ocasiones se presentó la expresión $(20 - 11)^2 + 9^2 = 9^2$. El Estudiante 31 escribió $20 - 11 = 9$. Tres participantes no llegaron a establecer relación alguna.

Actividad 2, incisos c) y d). 20 estudiantes trabajaron este ejercicio. Todos ellos al parecer entendieron que había que desplazar la circunferencia 11 posiciones a la izquierda; sin embargo, cinco alumnos manifestaron problemas para expresar algebraicamente que no había repercusión de dicho desplazamiento sobre el eje vertical, de ahí expresiones como:

$$y' = y - y, y' = y - y', y' = 4.$$

16 alumnos escribieron una ecuación del tipo $\sqrt{(x-11)^2 + y^2} = 9$ o bien $9^2 = (x - 11)^2 + y^2$; sin embargo, ninguno de ellos incorporó x' a su ecuación. Los tres estudiantes que sí trabajaron x' escribieron $9^2 + (x - x')^2 + y^2$ o $9^2 = (x - x') + y^2$.

Se detectan errores en la escritura de dos de las ecuaciones: en un caso, la raíz cubre el signo de igual (Estudiante 31), mientras que en el segundo toda la ecuación queda dentro de la raíz (Estudiante 7).

Actividad 2, inciso e). 17 estudiantes argumentaron una respuesta para la pregunta (todos dijeron que sí), siendo la respuesta más socorrida -con siete menciones- que habría que invertir la posición “que pasa a ser de izquierda a derecha y derecha a izquierda” (ver ilustración 19).

Actividad 2, inciso f). 19 estudiantes ofrecieron respuestas para este ejercicio. La similitud más mencionada entre las circunferencias fue el radio (ver ilustración 20), mientras que la diferencia con mayor frecuencia fue la ecuación, seguida por la ubicación (ver ilustración 21). Cabe señalar que los estudiantes podían anotar cuantas similitudes y diferencias desearan.

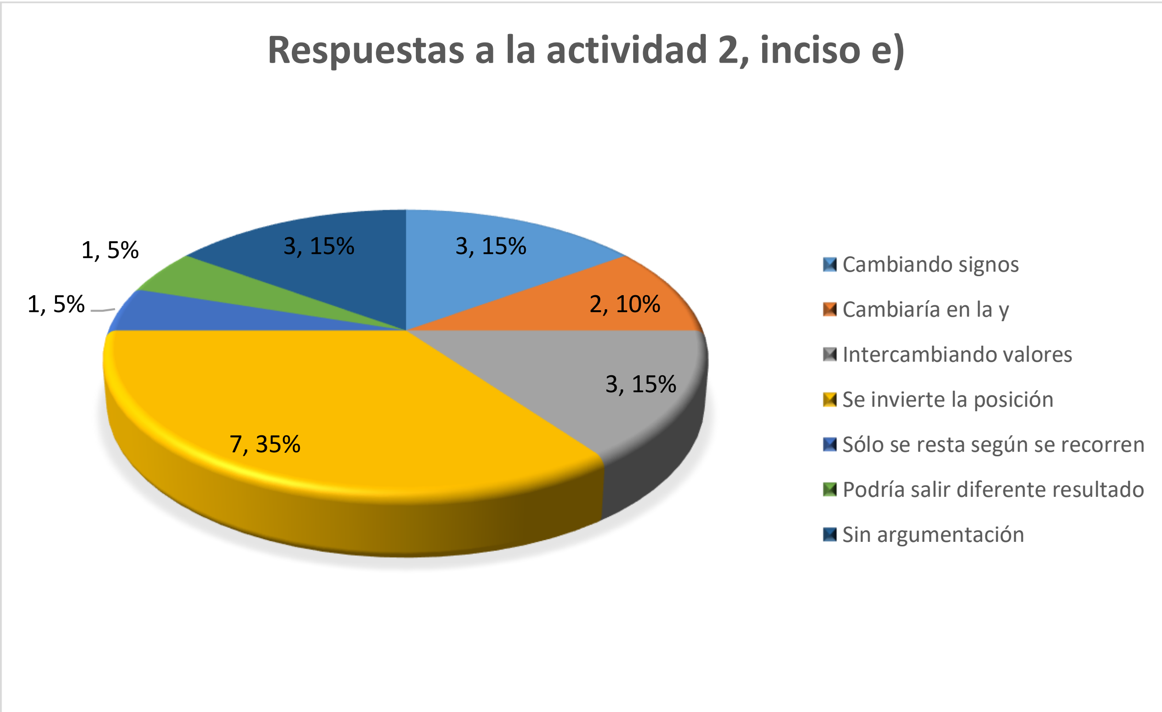


Ilustración 19. Actividad 2. Respuestas al inciso e).

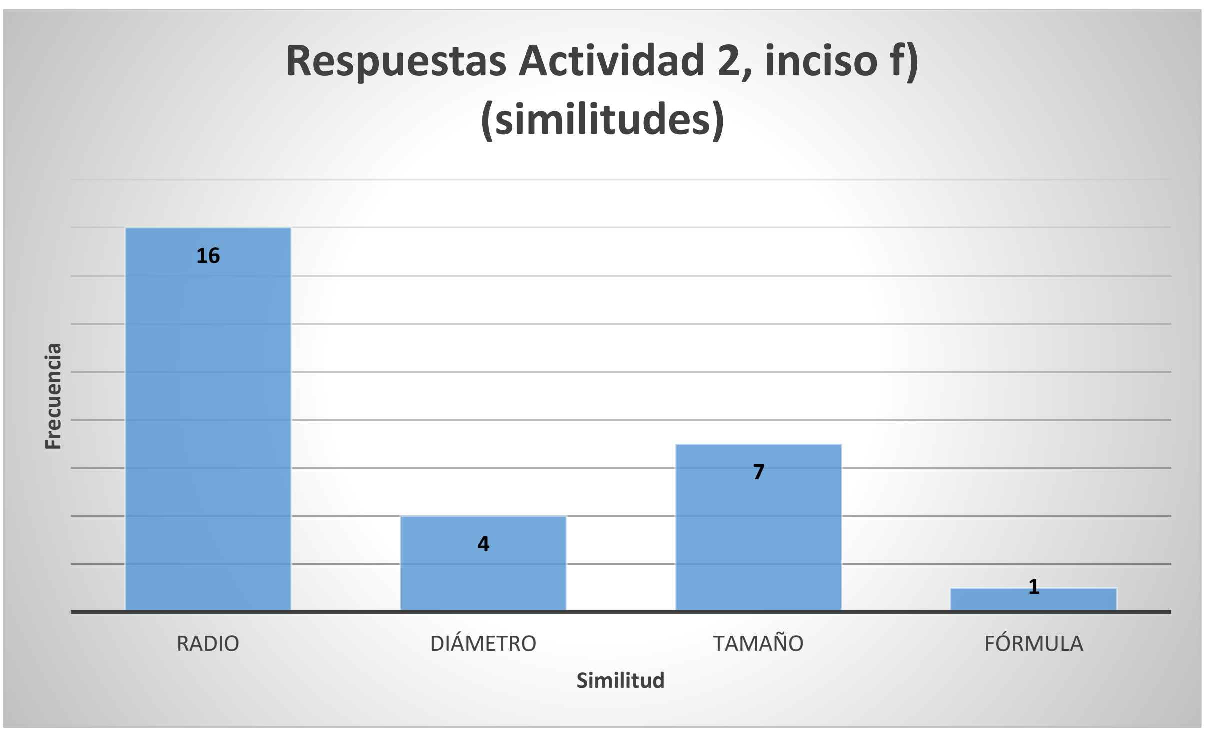


Ilustración 20. Actividad 2. Respuestas al inciso f) (similitudes).

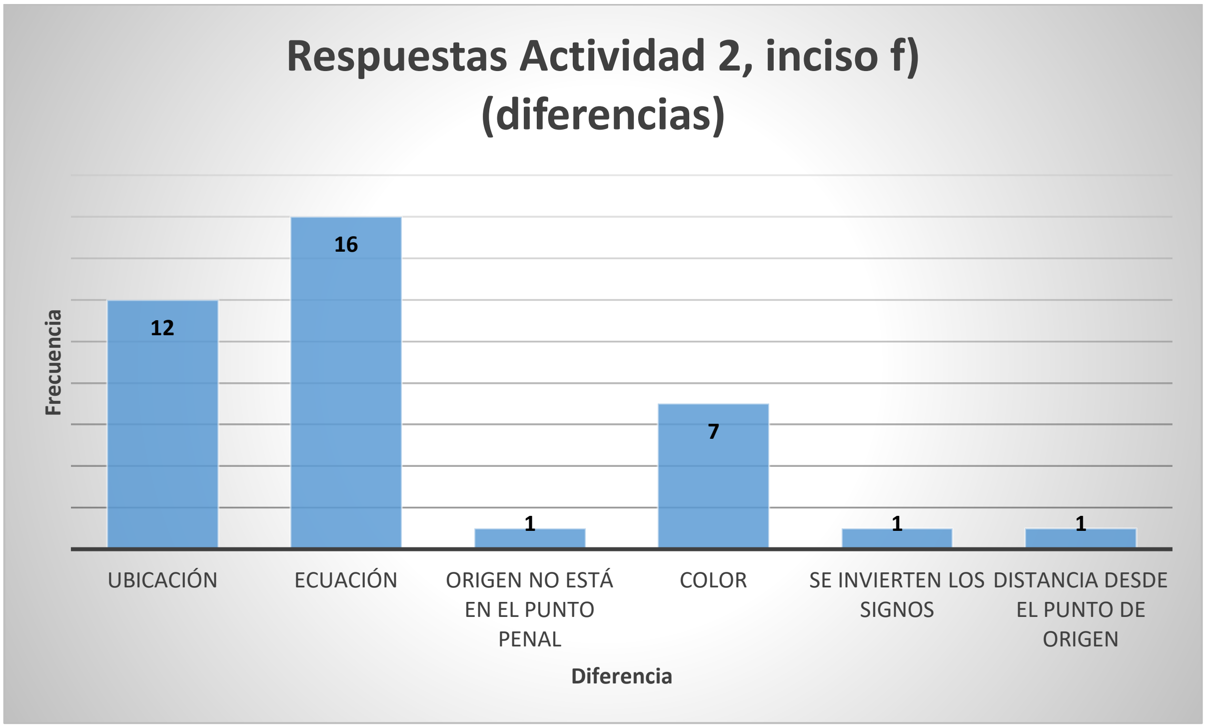


Ilustración 21. Actividad 2. Respuestas al inciso f) (diferencias).

3.4.3 Actividad 3

Se llevó a cabo el 23 de noviembre de 2016. Con apoyo de una diapositiva de PowerPoint, se hizo el recordatorio del resultado obtenido en la sesión anterior (la ecuación de una circunferencia con centro en $C(11,0)$ y radio 9), esto mediante participaciones de los alumnos a preguntas abiertas. Los estudiantes anotaron en su cuadernillo de trabajo, atrás de la Actividad 3, el objetivo de la sesión. Aprovechando el videoproyector, se mostró la diapositiva donde se solicitaba la elaboración de la Actividad extraclase 3 y la respuesta a dos preguntas de seguimiento al proceso de aprendizaje.

Algunos estudiantes no llevaron al aula el material que debían elaborar, de conformidad con la Actividad extraclase 2; se les permitió trabajar en parejas con otro compañero que sí cumplió el requerimiento. En un momento de la clase, los estudiantes tenían dudas acerca de si habían resuelto la actividad "correctamente", pero se les indicó que arriesgaran una respuesta, la cual sería corroborada primero en el trabajo en equipo y, posteriormente, en la discusión grupal. Los 100 minutos de duración de la sesión alcanzaron bien para toda la dinámica.

Actividad 3, inciso a). 24 estudiantes ofrecieron respuesta a este ejercicio. 19 de ellos hicieron un bosquejo de su trabajo mediante un plano, aunque sin todos los elementos de un sistema coordenado: solamente seis incluyeron flechas para indicar el sentido positivo de los ejes, también seis (no necesariamente los mismos) incluyeron los rótulos x, y para los ejes y ninguno indicó explícitamente el origen; cabe señalar, que tres alumnos rotularon el eje horizontal como h y el vertical como k.

La redacción de los estudiantes deja ver que 11 tienen presente que el desplazamiento de los planos coordenados para lograr que el centro del círculo 2 quede en el origen implica un movimiento horizontal y uno vertical o bien una resta. Uno de ellos indica que dicha circunferencia recorre h

posiciones a la izquierda y k hacia abajo; dos hacen una descripción semejante, pero mencionan que el corrimiento de h posiciones es sobre x y el de k trabaja sobre y. Solamente uno expresa claramente que a x se le resta h y que a y se le resta k.

En este sentido, las respuestas al cuestionamiento de las coordenadas del punto (x, y) cuando el centro de la circunferencia se trasladaba al origen fueron variadas. Nueve estudiantes indican como respuesta $(x - h, y - k)$, aunque cuatro de ellos incurren en cierta contradicción, al expresar en su esquema que $x = h, y = k$.

Finalmente, en lo referente a la ecuación, cuatro estudiantes escribieron $(x - h)^2 + (y - k)^2 = 1$, que es la ecuación específica buscada. Los otros 20 escribieron $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; al parecer no tomaron en cuenta que el radio de la circunferencia trabajada era 1.

Actividad 3, inciso b). 22 estudiantes respondieron el ejercicio. Sin embargo, se aprecia una disminución de argumentación y producción de esquemas en relación con el inciso a). Ahora solamente 11 alumnos bosquejaron un plano, aunque la mayoría sin los elementos requeridos por un sistema de coordenadas (flechas para indicar el sentido positivo de los ejes, rótulos para estos e indicación del origen).

De las argumentaciones disponibles, tres hacen alusión al corrimiento de la circunferencia 2 sumando h a x y restando k a y. En relación con las respuestas al cuestionamiento de las coordenadas del punto (x, y) cuando el centro de la circunferencia se trasladaba al origen, se apreció una mayor variedad en comparación con el inciso a) (13 por 7, respectivamente), pero una disminución en la ocurrencia de la respuesta esperada $(x + h, y - k)$, con cuatro menciones.

En la ecuación también hubo mayor variedad de respuestas que en el inciso a). 11 estudiantes escribieron la expresión $(x + h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, que era la esperada, excepto por no contemplar el radio dado de 2 para el círculo con el que se trabajó. Dos estudiantes no respondieron esta parte del ejercicio. Cuatro expresiones intentaron incorporar coordenadas específicas en donde los alumnos ubicaron el centro de la circunferencia 2: $(x - (-h8))^2 + (y - 9k) = 2^2$, también $(5 - 3) + (7 - 4) = 2^2$ y $(x - 5h)^2 + (y - 5k)^2 = r^2$. Dos estudiantes escribieron en su ecuación el cuadrado del radio con signo negativo; dos más equivocaron el signo para k, y el Estudiante 4 dio como respuesta la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 3.

Actividad 3, inciso c). 16 estudiantes ofrecieron respuestas al ejercicio (seis menos que en el inciso b) y nueve menos que en el a). 10 alumnos bosquejaron un plano para representar su trabajo, pero solamente cuatro incluyeron rótulos para los ejes, flechas para indicar e sentido de los mismos y ninguno identificó el origen.

De los 16 participantes, seis ofrecieron argumentación a su respuesta. Son tres los alumnos que mencionan un recorrido de h posiciones sobre el eje x y k sobre el eje y o bien que hay que sumar x y h y también y con k para llevar el centro de la circunferencia hacia el origen.

En relación con las respuestas al cuestionamiento de las coordenadas del punto (x, y) cuando el centro de la circunferencia se trasladaba al origen, cinco alumnos respondieron $(x + h, y + k)$; tres indicaron las coordenadas en donde ubicaron el centro de su circunferencia; hubo tres menciones del tipo (x, y) y dos con $(-h, -k)$.

En lo referente a la ecuación, 13 estudiantes escribieron $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$; como se puede apreciar, no tomaron en cuenta que la circunferencia trabajada tenía un radio dado de 3 unidades. Los otros tres alumnos intentaron incorporar las coordenadas específicas en donde ubicaron el centro de la circunferencia 2: $(x-(-4h))^2+(y-(-2k))^2=r^2$, $(7-5)+(2-3)$ y $(x+6h)^2+(y+4k)^2=3^2$.

Actividad 3, inciso d). 13 estudiantes respondieron este ejercicio, alrededor de la mitad de los que trabajaron el inciso a). En esta ocasión, nueve alumnos bosquejaron en un plano su respuesta y de ellos tres incluyeron rótulos para los ejes de su sistema de coordenadas y flechas para indicar el sentido positivo de los mismos. De las seis argumentaciones disponibles, tres mencionaron un recorrido de h posiciones en el eje horizontal y k en el eje vertical para llevar el centro de la circunferencia 2 al origen, o bien, restar h posiciones de x y k de y.

Sobre el cuestionamiento de las coordenadas del punto (x,y) cuando el centro de la circunferencia se trasladaba al origen, dos estudiantes escribieron $(x-h,y+k)$; el resto de las respuestas tuvieron un sentido similar al ya relatado para el inciso c).

11 estudiantes escribieron la ecuación $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$; como se puede apreciar, no tomaron en cuenta que la circunferencia trabajada tenía un radio dado de 4 unidades. Los otros dos alumnos intentaron incorporar las coordenadas específicas en donde ubicaron el centro de la circunferencia 2: $(x-(-7h))^2+(y+5k)^2=4^2$ y $(x-6h)^2+(y-(-6k))^2=r^2$.

Actividad 3, inciso e). Se cuenta con dos respuestas completas para este inciso, ambas haciendo referencia a lo que se conoce como la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $C(h,k)$ y radio r: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

3.4.4 Actividad extraclase 3

La revisión de esta tarea se efectuó el 28 de noviembre de 2016. La sesión dio inicio con el repaso del resultado obtenido en la clase anterior: la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $C(h,k)$ y radio r, así como del procedimiento para construirla, a través del desplazamiento de la circunferencia para llevar su centro hacia el origen.

Posteriormente, dio inicio a la revisión de la Actividad extraclase 3. Debido a que 12 estudiantes no la tenían resuelta, se les dieron 15 minutos para resolverla. Acto seguido, se integraron parejas para proceder a la revisión de los resultados. La dinámica consistió en preguntar a los estudiantes quiénes tenían como respuesta las diferentes opciones de cada reactivo y ellos iban argumentando sus soluciones. Al final, se concluía con la respuesta correcta para cada reactivo. En un ejercicio de coevaluación, cada estudiante evaluó el trabajo del compañero con el que hizo pareja. La revisión se llevó aproximadamente una hora.

Actividad extraclase 3, incisos a) y b). Ofrecieron respuesta 26 estudiantes. La ilustración 22 muestra que casi la mitad de los alumnos alcanzó tres de los cuatro aciertos en la actividad.

La distribución de respuestas por cada reactivo se aprecia en la ilustración 23 (en rojo se resalta la respuesta correcta), mientras que en la ilustración 24 se listan las estrategias reportadas por los estudiantes para resolver el inciso a).

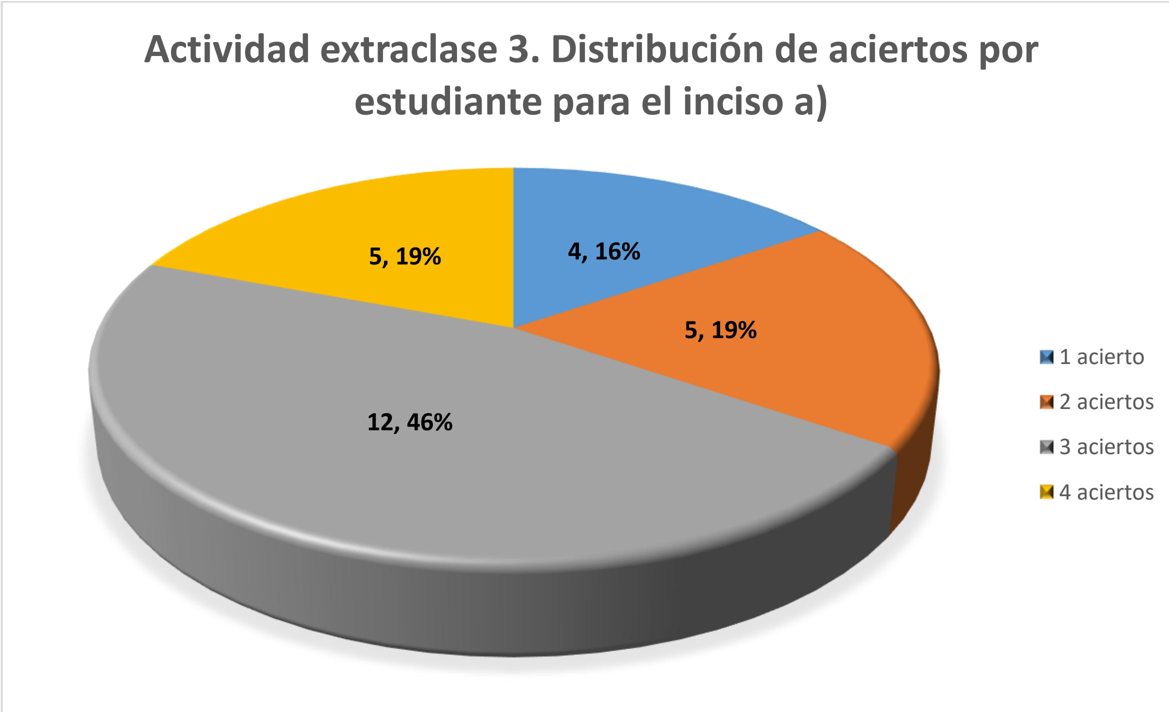


Ilustración 22. Actividad extraclase 3. Distribución de aciertos por estudiante, el inciso a).

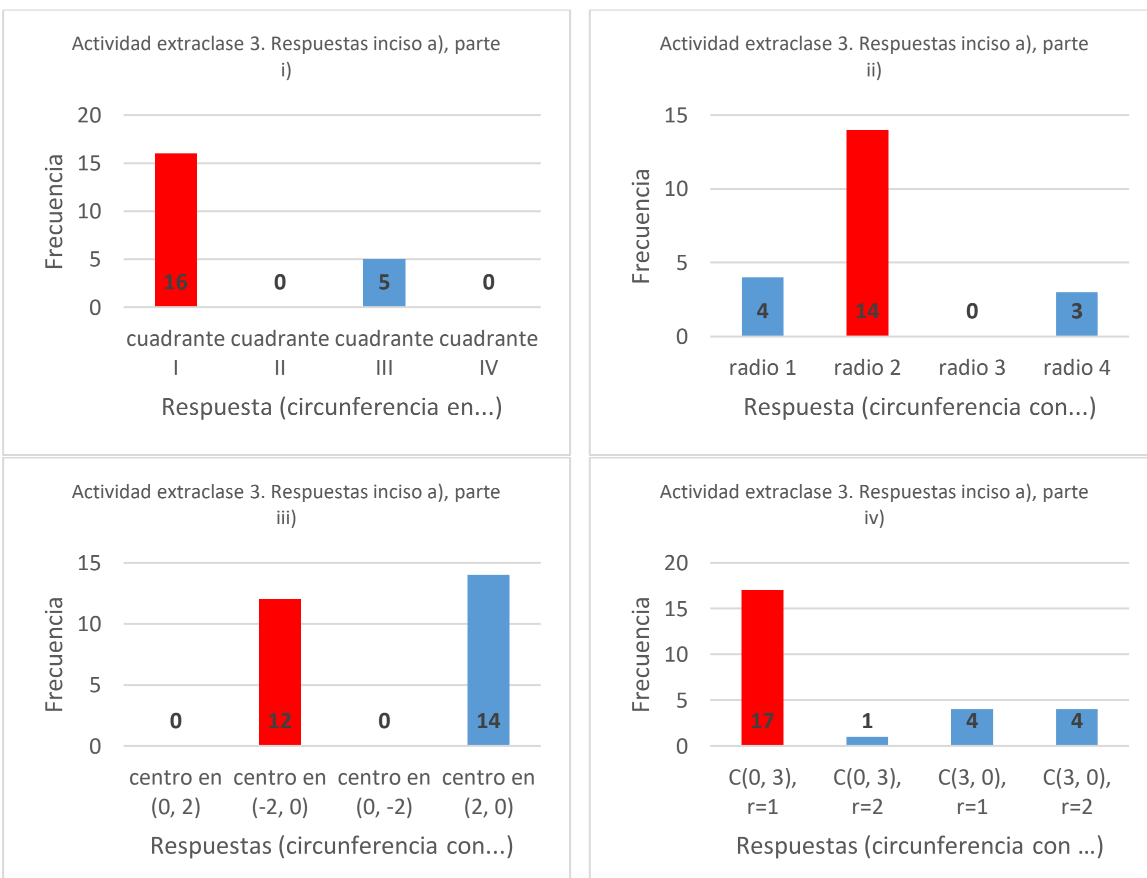


Ilustración 23. Actividad extraclase 3. Respuestas al inciso a).

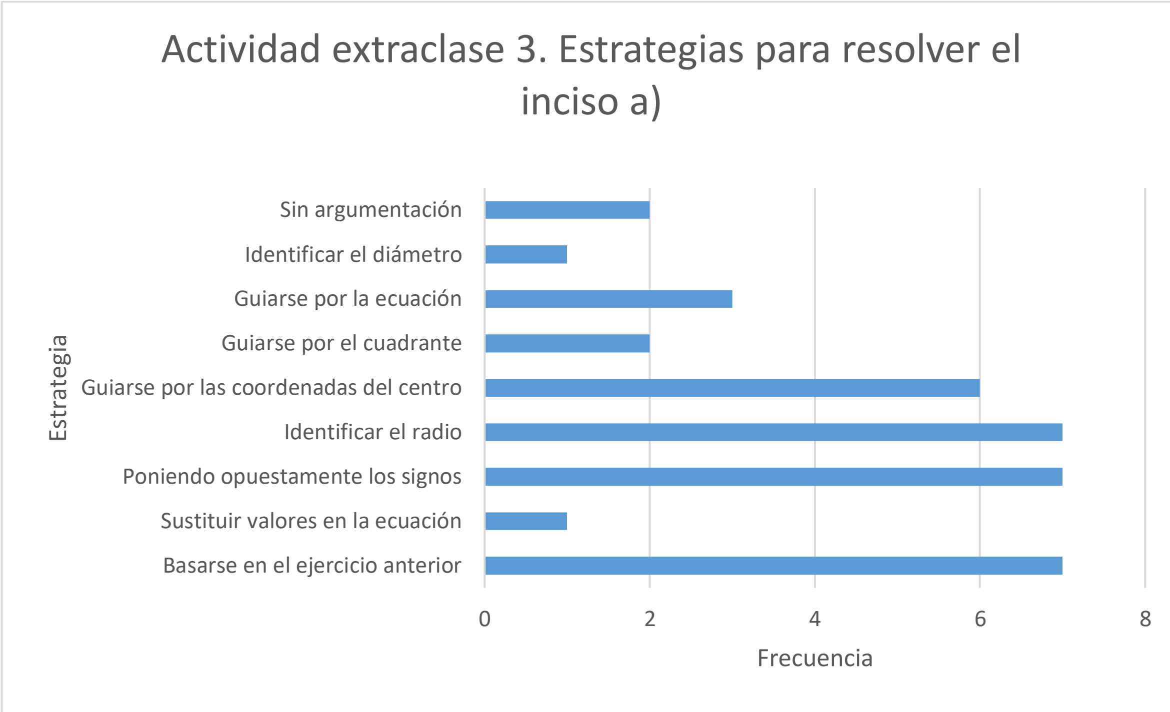


Ilustración 24. Actividad extraclase 3. Respuestas al inciso b).

Actividad extraclase 3, incisos c) y d). Respondieron 25 estudiantes. La ilustración 25 muestra que uno de cada tres alumnos alcanzó los tres aciertos en la actividad. Asimismo, hubo seis participantes con cero soluciones correctas.

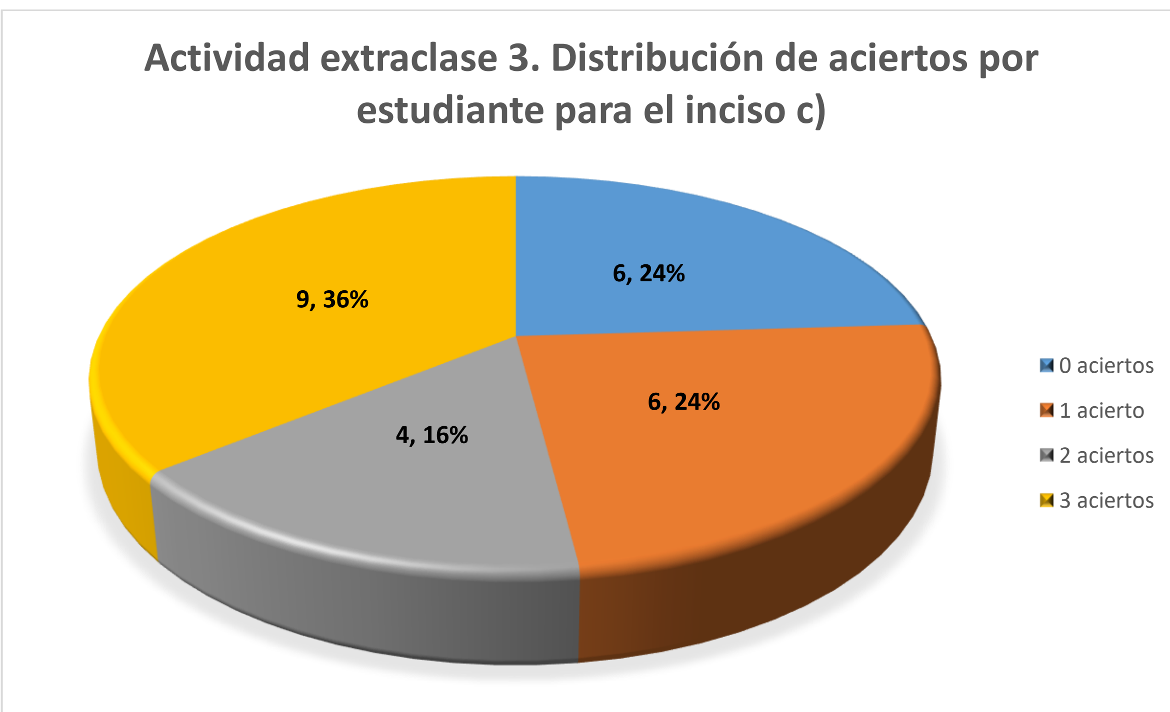


Ilustración 25. Actividad extraclase 3. Distribución de aciertos por estudiante, inciso c).

La distribución de respuestas por cada reactivo se aprecia en la ilustración 26 (en rojo se resalta la respuesta correcta), mientras que en la ilustración 27 se listan las estrategias reportadas por los estudiantes para resolver el inciso c).

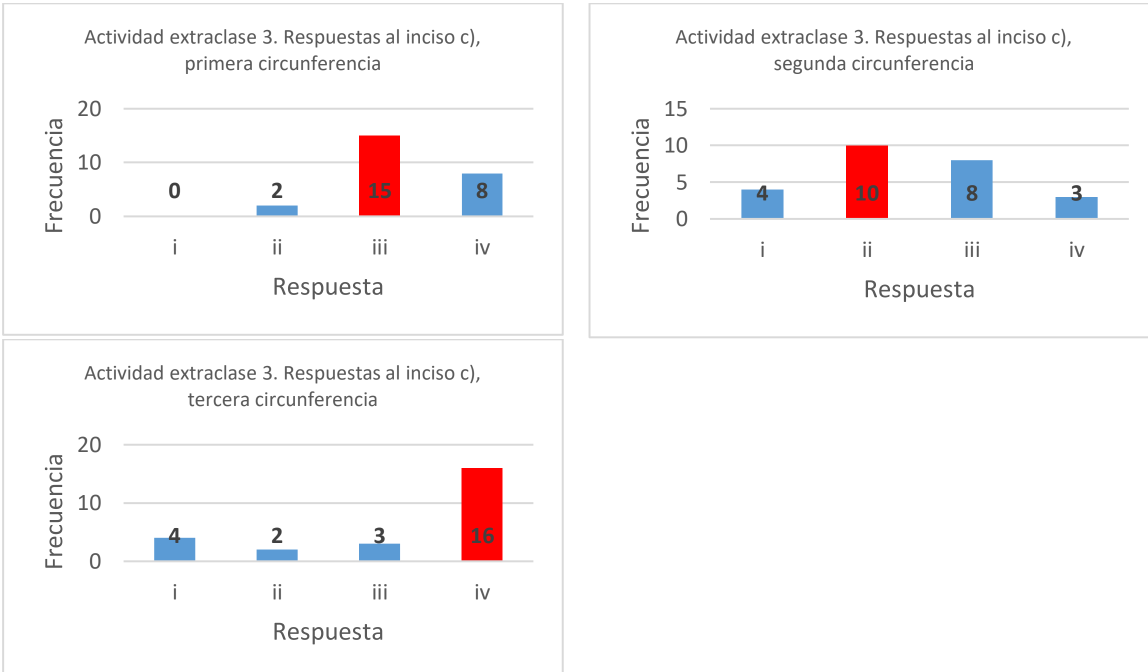


Ilustración 26. Actividad extraclase 3. Respuestas al inciso c).

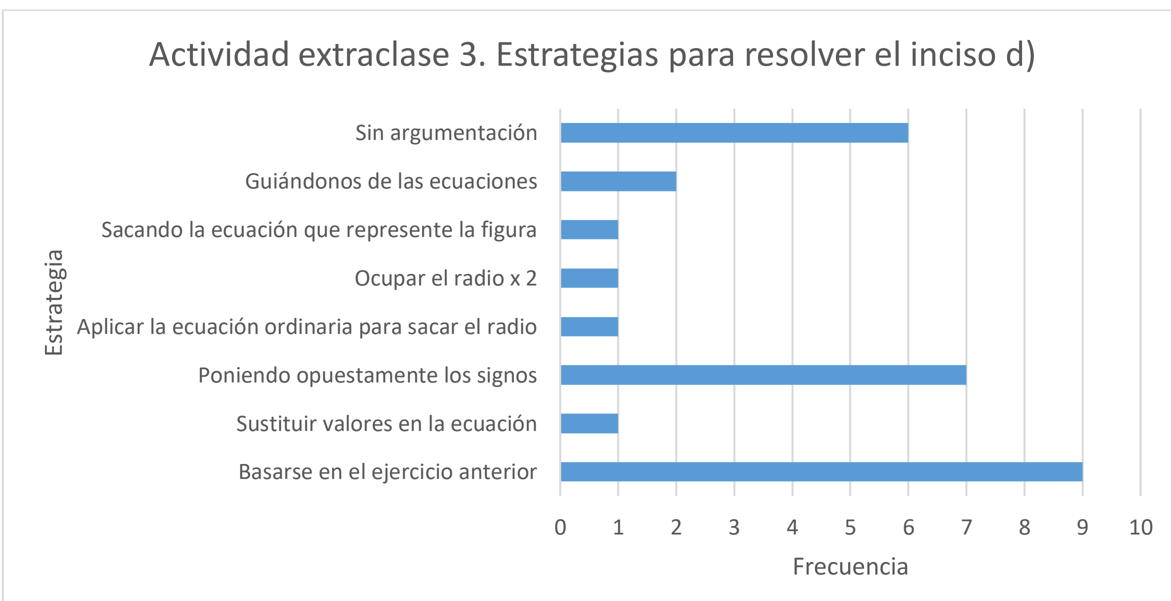


Ilustración 27. Actividad extraclase 3. Respuestas al inciso d).

3.4.5 Actividad 4

Una vez revisada la Actividad extraclase 3, se proyectó una diapositiva de PowerPoint con los objetivos de la sesión, los cuales fueron registrados por los estudiantes en el cuadernillo de trabajo, atrás de la Actividad 4. De una buena vez se indicó a los estudiantes que, como tarea extraclase, debían realizar los ejercicios 20 y 21 del citado cuadernillo.

La Actividad podría enriquecerse si se agregaran algunos ejercicios para graficarlos con GeoGebra: $(x-3)^2+(y+1)^2=-3$ (lugar geométrico no real), $(x-3)^2+4(y+1)^2=1$ (elipse) y $4(x-3)^2+4(y+1)^2=1$ (circunferencia, aun cuando hay números multiplicando a los binomios al cuadrado).

La actividad fue realizada por 23 estudiantes. Todos identificaron una circunferencia en el inciso b), pero se presentaron varias combinaciones en el tratamiento del ejercicio, como se muestra en la ilustración 28.

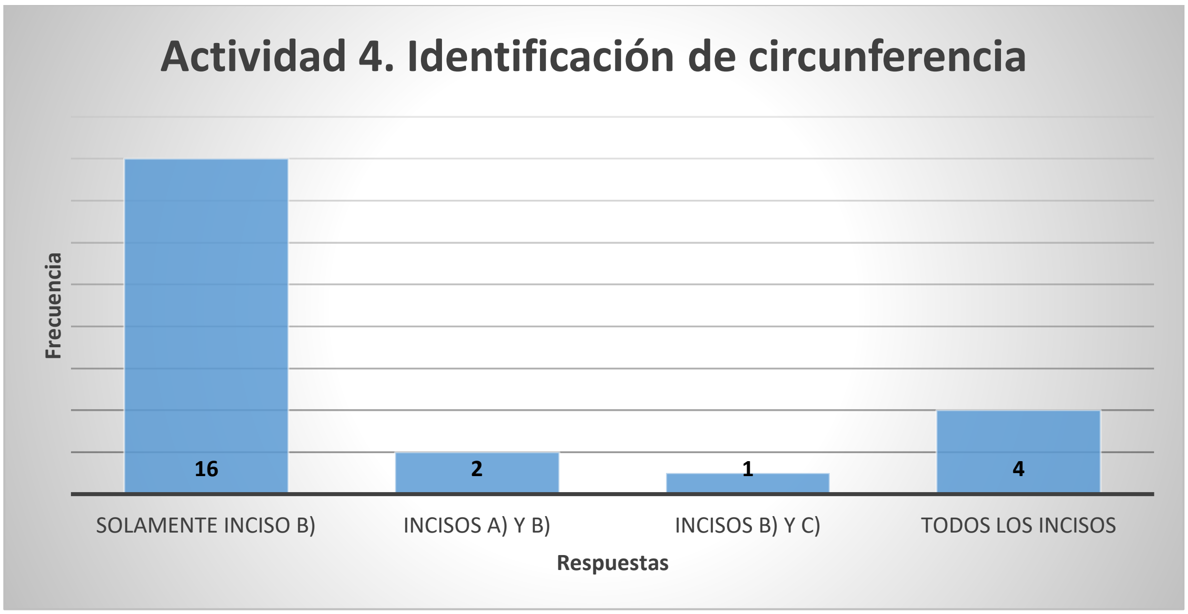
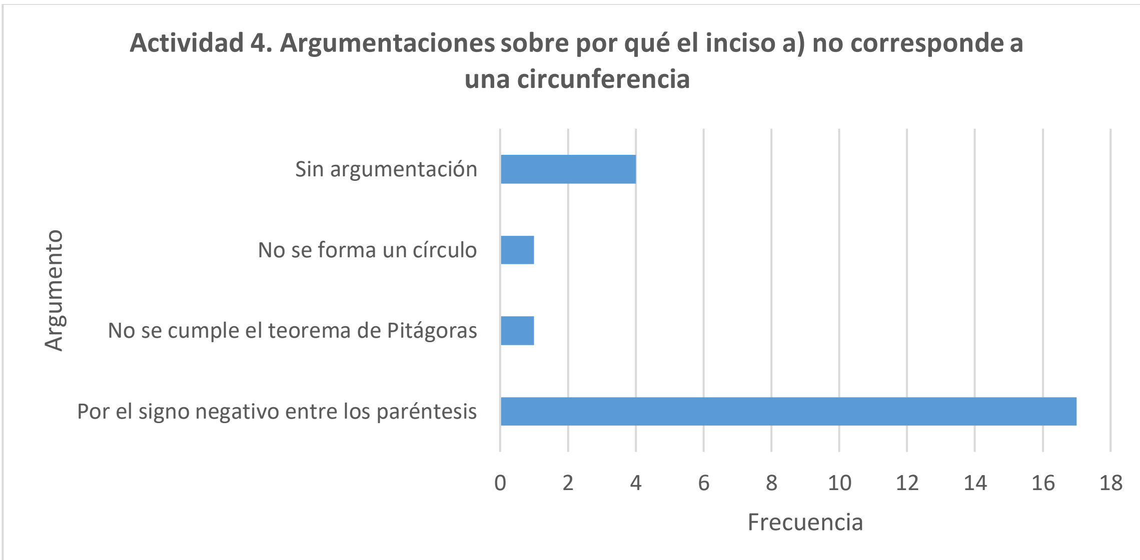


Ilustración 28. Actividad 4. Identificación de circunferencia.

Específicamente en lo que respecta al trabajo con la ecuación del inciso b), que sí correspondía a una circunferencia, 17 estudiantes identificaron el centro en el punto $C(3,-1)$, cuatro lo ubicaron en $C(3,1)$, el Estudiante 4 escribió $(3)(-1)$ y el Estudiante 7 no respondió esta parte. Por otro lado, en lo que respecta al radio, solamente el Estudiante 27 escribió un valor de $\sqrt{3}$ unidades; tres alumnos respondieron 1.73 y $\sqrt{3}$; 15 estudiantes registraron una aproximación a $\sqrt{3}$ (en su gran mayoría 1.73), y dos participantes dieron por resultado 1.5, probablemente confundiendo el miembro derecho de la ecuación con el diámetro. Con los defectos ya descritos en otras actividades en relación con la construcción del sistema de coordenadas, 13 alumnos graficaron una circunferencia cuyo centro podría localizarse en $C(3,-1)$ y el radio podría ser aproximadamente $\sqrt{3}$; entre estos estudiantes están dos que originalmente habían identificado el citado centro en $C(3,1)$. Para concluir con el aspecto gráfico del tratamiento al inciso b), cabe señalar que el Estudiante 21 sí construyó un sistema de coordenadas con rótulos para los ejes, flechas para indicar su sentido positivo y cero para cada uno; precisamente por haber colocado dichos ceros, es probable que el uso de GeoGebra y una buena observación de su parte le ayudaran en la construcción de su plano.

En la ilustración 29 se puede apreciar la variedad de argumentaciones de los estudiantes para justificar por qué los incisos a) y c) no correspondían a una circunferencia. En el primer caso, destaca la identificación del signo negativo entre los binomios al cuadrado (16 menciones). Para el segundo, hay menos argumentaciones (nueve alumnos no redactaron respuesta, a cambio de cuatro para el inciso a) y solamente tres estudiantes identificaron que tanto el número 4 multiplicando a uno de los binomios como la falta de un cuadrado eran la razón de que la ecuación en cuestión no representara una circunferencia.



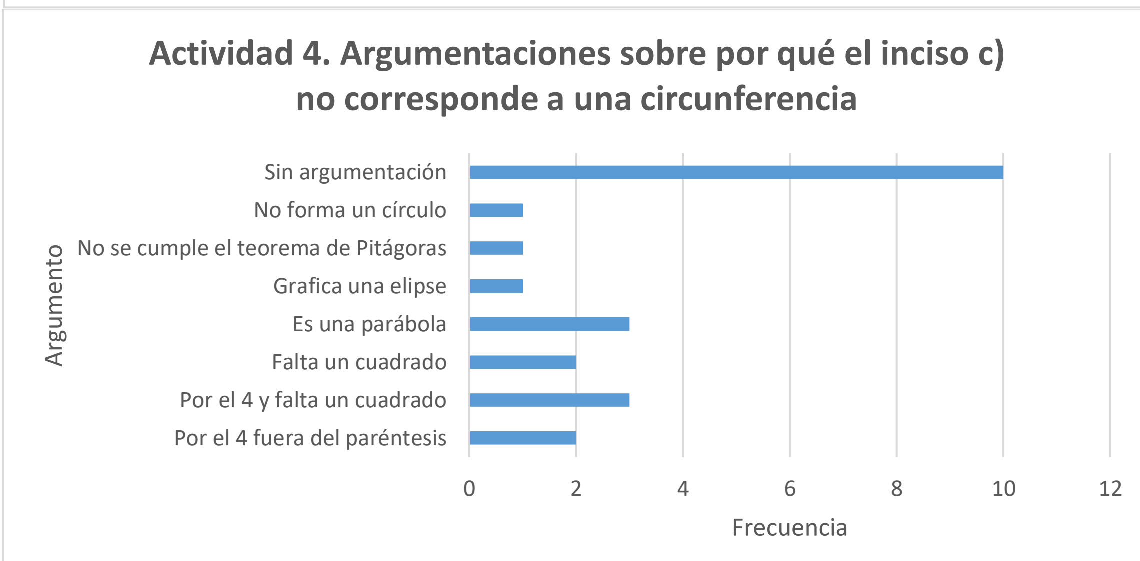


Ilustración 29. Actividad 4. Argumentaciones en relación con los incisos a) y c).

En el espacio correspondiente a la graficación con GeoGebra para los casos de circunferencia, 12 de los 23 estudiantes dibujaron una gráfica similar a la de una circunferencia con centro en $C(3,-1)$ y radio $\sqrt{3}$. En lo que respecta al espacio para graficar los incisos a) y c), 11 estudiantes ofrecieron un bosquejo de una hipérbola y una parábola; tres dibujaron una hipérbola y una elipse (probablemente inventaron el cuadrado en la tercera ecuación); dos más solamente ilustraron una hipérbola y siete terminaron por no responder.

3.4.6 Actividad 5

Se realizó el 30 de noviembre de 2017. Antes de ello, los estudiantes trabajaron en parejas para evaluar los ejercicios 20 y 21 realizados por un compañero, basándose en la lista de cotejo para evaluar tareas. Se abrió un espacio de participación de los alumnos para exponer sus respuestas a esta tarea extraclase, hasta que se llegara a un resultado aceptado por el grupo.

Posteriormente, se proyectó una diapositiva con el objetivo de la sesión, el cual copiaron los estudiantes en el cuadernillo de trabajo, atrás de la Actividad 5.

Ya en el trabajo con la actividad, los estudiantes presentaron serias dificultades para elevar binomios al cuadrado. Se formaron equipos de cinco personas para ver si entre todos los integrantes recordaban los aspectos operativos de esta tarea algebraica, pero el tiempo transcurría y no podían iniciar siquiera la actividad. Entonces, se apoyó al grupo explicando el procedimiento, lo que contribuyó a que dos de los equipos avanzaran con el inciso a).

El siguiente problema fue que los alumnos tampoco recordaban la forma de completar el trinomio cuadrado perfecto. Esto también se ilustró en el pizarrón con un ejemplo distinto al de la actividad. Al final, ya no dio tiempo de terminar el inciso b) y se dejó como tarea extraclase.

La Actividad extraclase 4, la Actividad 6 y los ejercicios 22 y 23 del libro de texto ya no se realizaron. Los tiempos del plantel aceleraron la aplicación de las evaluaciones parciales, además de que estos trabajos requerían el dominio de ciertos temas algebraicos que, a la luz de los resultados obtenidos con la Actividad 5, los estudiantes no parecían tener.

Actividad 5, inciso a). 23 estudiantes ofrecieron respuesta. Nueve de los alumnos desarrollaron los cuadrados e identificaron acertadamente los valores de D, E y F, mientras que dos no lograron elevar los binomios al cuadrado. 12 estudiantes tenían el desarrollo de los cuadrados, pero no identificaban adecuadamente los citados valores. Seis de ellos escribieron una ecuación del tipo $D = 2hx, E = -2ky, F = h^2 + k^2 - r^2$ y el Estudiante 23 hizo algo parecido, pero con los signos correctos para los dos primeros valores; al parecer, estos estudiantes presentaron una confusión al identificar los coeficientes de x y de y, ya que en ellos incluían las propias literales. Dos alumnos solamente respondieron para F: el Estudiante 29 ofreció la respuesta correcta para esta literal, mientras que el Estudiante 30 consideró, al parecer, que tendría que corresponder al cuadrado del radio.

3.5 Otras actividades

Proyecto sobre violencia de género. Los estudiantes conformaron cinco equipos de seis integrantes para abordar el tema, a partir de un estudio realizado por el INEGI (2008). Como ya se mencionó, cada equipo tendría que preparar una exposición -apoyada en una presentación electrónica- para 10 mujeres de su familia, videograbar la sesión, editar los cinco minutos de la misma y presentar los resultados ante el grupo. A la postre, los estudiantes hicieron modificaciones a la dinámica (incluso al tema).

La exposición de los trabajos se efectuó el martes 22 de noviembre de 2016. Fue una sesión especial que se solicitó para recuperar la clase del 16 de noviembre, que no se llevó a cabo, y se ocupó totalmente para la presentación de los videos.

El Equipo 1 solicitó permiso para exponer su presentación en la cafetería de una secundaria, a la cual asistieron empleadas de la cafetería, alumnas y alumnos (ocho personas en total). Utilizaron una laptop para correr su archivo de PowerPoint. En realidad, el video que entregaron no fue una edición, ya que toda su plática duró 6:24 minutos. En las imágenes se pudo apreciar una participación dominante del Estudiante 26 quien, con buena dicción y expresión corporal, se llevó prácticamente la mitad de la charla; el Estudiante 9 titubeaba y su intervención fue de aproximadamente 15 segundos; el Estudiante 27 habló 15 segundos, también con titubeos; el Estudiante 12 expuso 12 segundos de manera fluida, y el Estudiante 30 llevó la segunda voz cantante, ocupando cerca de dos minutos con buen dominio del tema y facilidad de palabra. En general, los estudiantes no leyeron directamente de la presentación lo que decían y la información que dieron pareció interesar al improvisado auditorio.

El Equipo 2 decidió hacer su exposición para un grupo de cuarto grado de primaria. Su video duraba 6:40 minutos y tampoco fue una edición, era la charla completa. Al inicio hicieron participar a los niños preguntándoles si sabían lo que era violencia de género, cuestión que fue correctamente respondida por uno de los escolares. El Estudiante 4 llevó el peso de la sesión, exponiendo, haciendo preguntas a los asistentes, dando la palabra a sus compañeros; su participación rebasó la mitad de la exposición, con buena dicción y lenguaje corporal, aunque algunas muletillas. El Estudiante 22 habló por espacio de 40 segundos, casi todos ellos leyendo de la presentación y hablando hacia la pantalla, no hacia los niños. El Estudiante 18 repartió sus 35 segundos de aportación entre leer de la diapositiva y dirigirse hacia su auditorio. El Estudiante 21 intervino durante 50 segundos, tiempo que ocupó en leer una diapositiva de la pantalla, sin voltear hacia la audiencia. Al final de la exposición, el Estudiante 4 hizo un cierre de la sesión, remarcando la importancia de erradicar la violencia de género[27].

El Equipo 3 se apegó a los requerimientos de la actividad. Convencieron a ocho mujeres de la familia de uno de sus integrantes para hablarles sobre violencia de género. Al inicio de la plática hicieron participar a dos de las invitadas para dar su idea de lo que era violencia. Posteriormente, hubo una exposición donde la participación fue, en general, equitativa entre los miembros del equipo. Los estudiantes 23, 31 y 28 hicieron una presentación fluida, dirigiéndose a sus escuchas y apoyándose adecuadamente en la presentación (la cual se ejecutaba en una computadora). El Estudiante 3 también tuvo una intervención fluida, mirando a las asistentes, aunque con un volumen de voz bajo y sus manos siempre en la espalda. El Estudiante 19 leyó de las diapositivas prácticamente todo lo que duró su turno y apenas destinó unos minutos para dirigir su vista hacia la concurrencia. Al final, hubo lugar para las opiniones de cuatro asistentes; como una de las conclusiones más interesantes destacaron que la violencia de género no se daba solamente del hombre hacia la mujer. En esta ocasión, el video duró 5:48 minutos y sí se notaban partes de la dinámica que no entraron en la edición.

El video del equipo 4 no pudo extraerse del dispositivo móvil en el que sus integrantes hicieron la grabación, de manera que no se pudo proyectar para todo el grupo y se revisó al final de la clase. Los estudiantes fueron a la presidencia municipal de Zumpango y expusieron su tema ante un grupo de personas (hombres y mujeres) de un grupo de educación para adultos; solamente que

[27] En este equipo intervino el Estudiante 13, pero, como se recordará, no está incluido en el reporte, en virtud de que no entregó su cuadernillo de trabajo.

equivocaron el tema y en lugar de hablar sobre violencia de género lo hicieron sobre bullying. No hubo edición del video, los integrantes del equipo entregaron los más de 18 minutos que duró su charla. A los pocos minutos de iniciada su exposición, un tecladista ubicado a pocos metros de ellos conectó su equipo de sonido para dar un concierto; esto hizo que en la grabación no se escuchara lo que hablaban los expositores, si bien había evidencia de que el público asistente los podía oír, mostraba interés e incluso participaba. Se alcanzaba a apreciar en el video una participación extensa del Estudiante 25, en relación con las intervenciones de los estudiantes 1, 2 y 16[28].

El Equipo 5 cambió por completo la dinámica. Sus miembros decidieron diseñar una encuesta sobre la violencia de género con 10 preguntas. Cada estudiante aplicaría 10 encuestas a vecinos o familiares. Como evidencia, el equipo entregó sus encuestas, sin mayor análisis que algunas reflexiones por parte del Estudiante 14.

Una vez agotados los videos, se organizó una discusión grupal que duró unos 15 minutos, en la cual los alumnos compartieron sus experiencias al hablar frente a un público con la variedad de orígenes ya relatada. Cabe resaltar que la constante fue la curiosidad que causó entre sus oyentes el hecho de que este trabajo sobre violencia de género fuera para la materia de Geometría Analítica; al parecer, las personas con las que interactuaron los estudiantes no entendían la relación del tema con las matemáticas. Se finalizó la sesión indicando que la intención de todas las materias del currículum del Cecytem perseguían esencialmente la formación integral de los estudiantes.

Definición sobre violencia de género. 13 estudiantes realizaron esta tarea extraclase. El Estudiante 8 tenía la misma respuesta que el Estudiante 22. Aparentemente los alumnos hicieron el esfuerzo de redactar una definición con sus propias palabras, derivada de la lectura propuesta (Banchs, 1996), a excepción del Estudiante 6, que utilizaba palabras y frases que parecían más propias del texto original. Ninguno de los estudiantes cumplió el requerimiento de citar su fuente de conformidad con la norma APA y no hubo un trabajo al respecto por parte del docente.

Ejercicio 18 en el libro de texto. 16 estudiantes hicieron este trabajo. 12 alumnos no calculan el área del triángulo, si bien dos de ellos utilizaron una regla para medir sus lados. En tres de los casos, intentaron aplicar el teorema de Pitágoras apoyados en la cuadrícula; el Estudiante 3 explícitamente habló de utilizar la distancia entre dos puntos. En relación con las rectas y segmentos de recta asociados con la circunferencia, la mitad de los alumnos acertaron en la identificación de todas ellas.

Entre los errores cometidos por los aprendices se pueden destacar las siguientes (el primero tuvo tres incidencias, mientras que el resto solamente una):

- Asumir que un lado del triángulo es su altura, aunque no necesariamente forme un ángulo recto con lo que sería la base.
- No utilizar las medidas correctas para calcular el área.
- No identificar correctamente las coordenadas de un punto ubicado en el plano.
- Confundir el radio con el centro.
- Confundir la secante con la cuerda.
- Confundir el diámetro con el centro.

[28] Recuérdese que el Estudiante 16 y el Estudiante 25 no entregaron sus cuadernillos de trabajo y no hay en este reporte otra referencia de ellos.

Ejercicio 19 en el libro de texto. Lo respondieron 12 estudiantes. Daba la impresión que varios de ellos no se percataron de que, si bien los incisos que indicaban las posibles ecuaciones estaban todos en la misma página, las gráficas estaban distribuidas en dos; incluso tres de los alumnos asocian dos de ellas a la misma ecuación. En general se aprecian serias dificultades para asociar la gráfica con su respectiva ecuación (o viceversa); es probable que contribuyera a esto la calidad de la impresión del texto.

Ejercicio 20 en el libro de texto. 21 estudiantes resolvieron el ejercicio; la ilustración 30 resume las respuestas recogidas en el cuadernillo de trabajo.

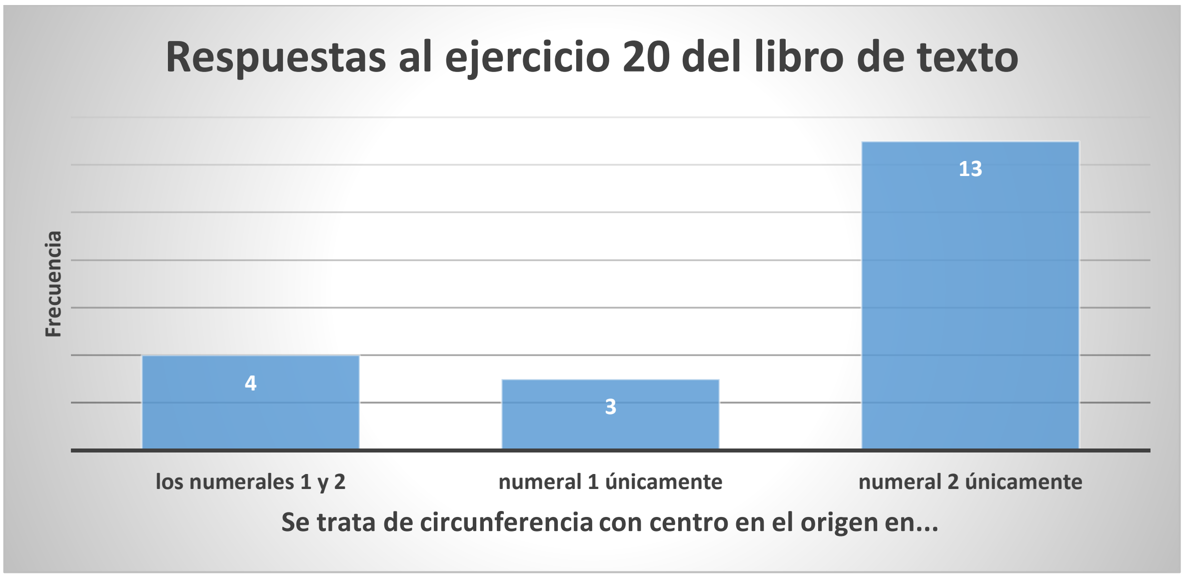


Ilustración 30. Respuestas al ejercicio 20 del libro de texto.

Fueron 17 los alumnos que identificaron correctamente al numeral 2 como una circunferencia. De los 13 que solamente marcaron como circunferencia el ejercicio 2, cuatro escribieron que los casos 3 y 4 correspondían a una parábola. De los 7 estudiantes que consideraron como circunferencia al numeral 1, hubo quienes escribieron que el radio sería cero, pero también quienes indicaron que su centro estaría en el origen, posiblemente confundidos por las coordenadas (h, k).

Entre los errores cometidos por los estudiantes se encuentran los siguientes:

- No identificar que el numeral 1 se trata de un punto.
- Considerar al numeral 1 como una circunferencia con centro en el origen.
- Identificar la ecuación del ejercicio 1 como correspondiente a un punto en el origen.
- Desarrollar incorrectamente los binomios.
- Intentar graficar el numeral 2, pero ubicar incorrectamente el centro.

Ejercicio 21 en el libro de texto. Fueron 21 estudiantes los que ofrecieron respuesta a este ejercicio, seis de los cuales resolvieron correctamente todos los casos. Lo más común fue que los alumnos tuvieran un error, aunque siete presentaron más de dos errores en sus desarrollos. Destaca que dos de los 21 participantes usan radicales para obtener el radio en los casos en que el segundo miembro de la ecuación de la circunferencia no tiene raíz exacta.

Cuatro estudiantes escribieron la ecuación $(x-2)^2+(y)^2=9$ para una circunferencia con centro en $C(2,1)$ y radio $r=3$. Pareciera una omisión de edición, ya que en todos los casos fue el único error que cometieron. Al mismo tiempo, habría la posibilidad de que hubiesen hecho el ejercicio juntos.

El Estudiante 6 aporta varios errores para el análisis. Escribe la ecuación $x^2+3=49$ para una circunferencia con centro en $C(0,3)$ y radio $r=7$; es decir, sustituye la ordenada del centro en la ecuación en el lugar que ocuparía y, aunque ni siquiera eleva al cuadrado. En dos ocasiones, escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el origen cuando en realidad el centro no se encuentra ahí. En todos los casos eleva correctamente el radio al cuadrado en el segundo miembro de la ecuación.

Manejar incorrectamente los signos en los binomios se presentó en seis casos, casi todos ellos cuando los centros tenían coordenadas negativas. Dos alumnos no indicaron las coordenadas del centro o la medida del radio. Finalmente, el Estudiante 26 escribió $2^2+1^2=16$ para una circunferencia con centro en $C(2,1)$ y radio $r=4$, de manera que sustituyó las coordenadas del centro en los lugares de la ecuación que corresponderían a x y a y.

Preguntas de seguimiento al aprendizaje. 18 estudiantes dieron respuesta a alguna de las seis preguntas de seguimiento al aprendizaje, es decir, un 33% de ellos en ningún momento tomó en cuenta esta actividad; solamente cuatro contestaron todas las preguntas.

La ilustración 31 ofrece un resumen de cómo fue la participación global en este rubro, mientras que las ilustraciones 32 a 37 dan detalles de las respuestas a cada pregunta por separado. Para facilitar la comprensión de las preguntas y respuestas, recuérdese que se dejaron por pares como tarea extraclase y que las preguntas 3 y 4 corresponden a la sesión 2 (ahí se construyó la primera ecuación de la circunferencia).

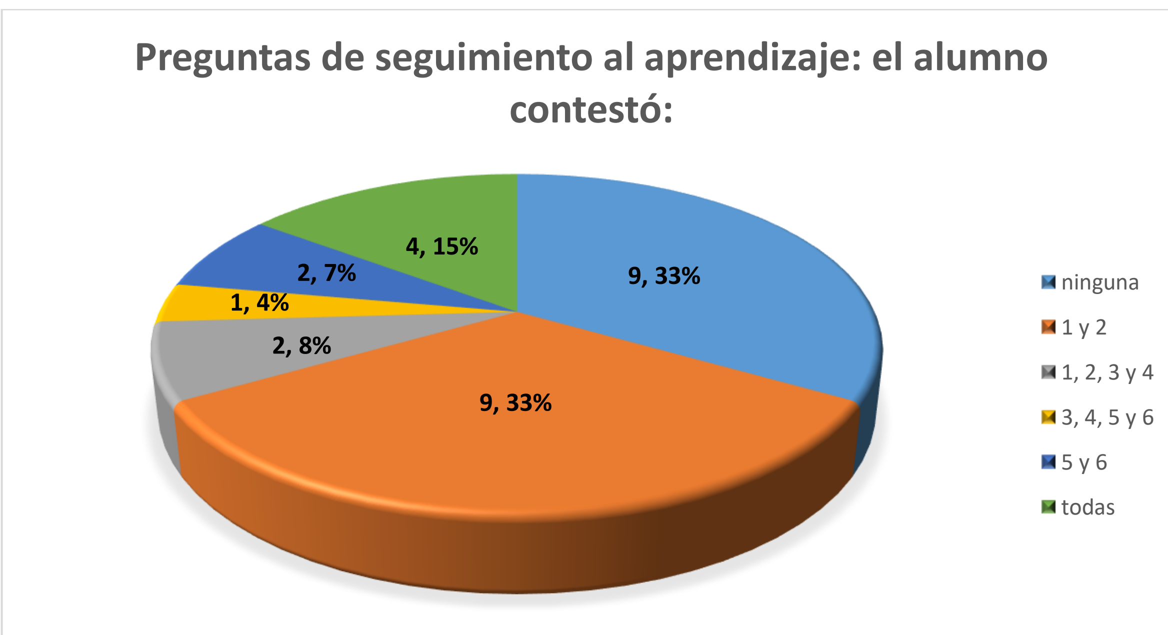


Ilustración 31. Distribución de respuestas a las preguntas de seguimiento al aprendizaje.

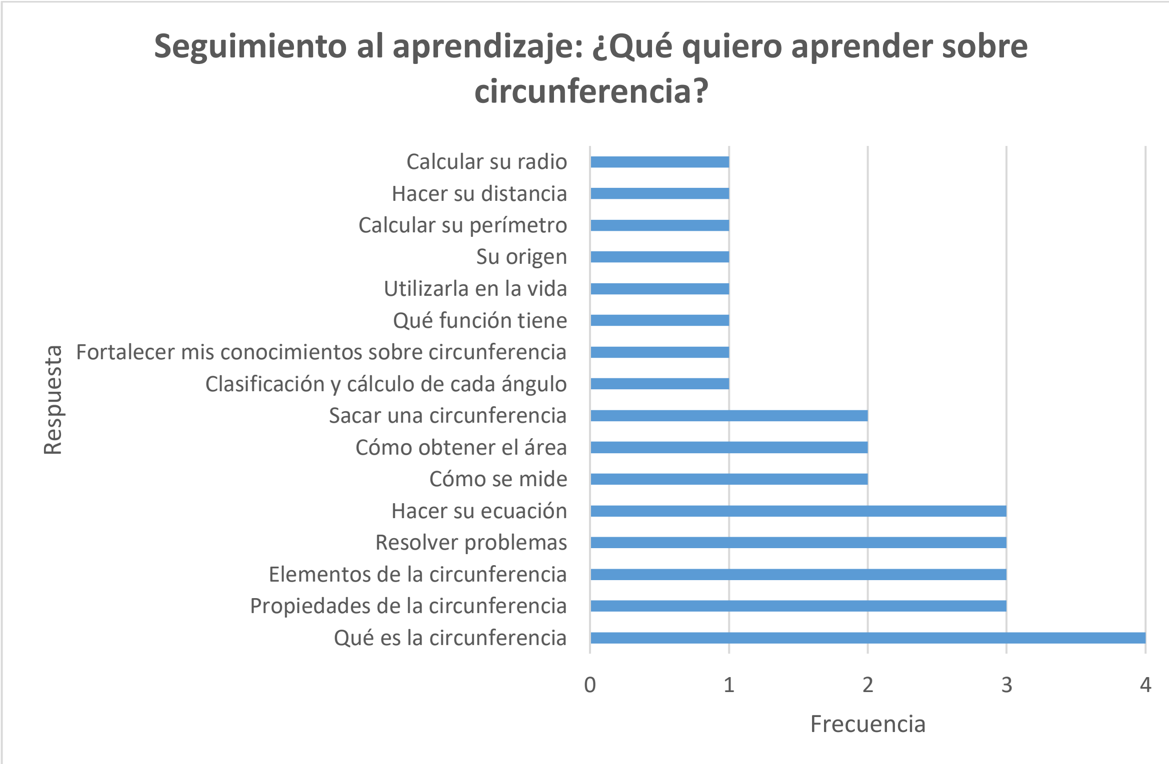


Ilustración 32. Seguimiento al aprendizaje: respuestas a ¿Qué quiero aprender sobre circunferencia?

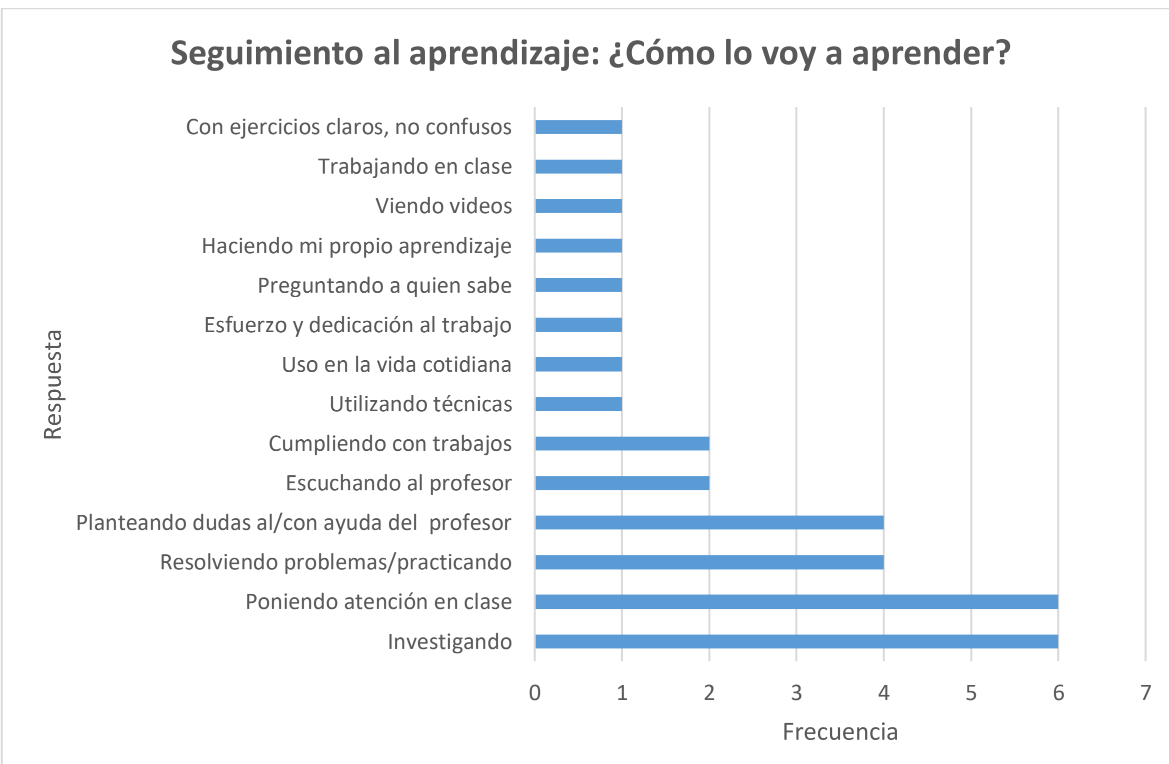


Ilustración 33. Seguimiento al aprendizaje: respuestas a ¿Cómo lo voy a aprender?

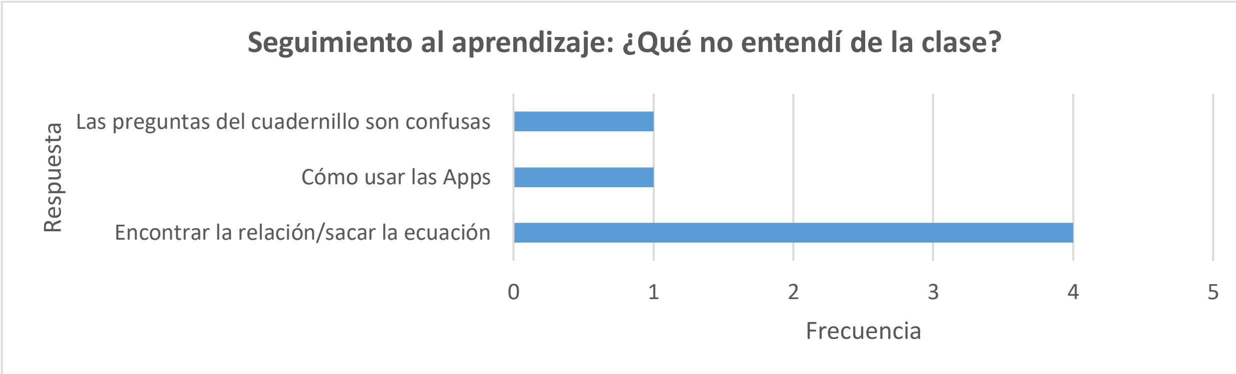


Ilustración 34. Seguimiento al aprendizaje: respuestas a ¿Qué no entendí de la clase?

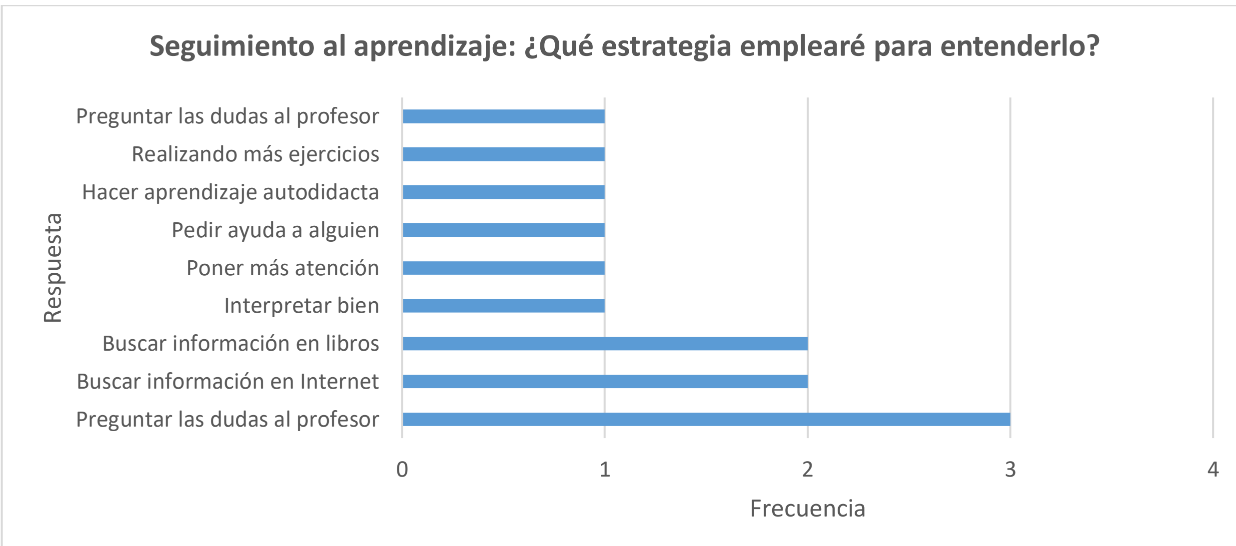


Ilustración 35. Seguimiento al aprendizaje: respuestas a ¿Qué estrategia emplearé para entenderlo?

Ilustración 36. Seguimiento al aprendizaje: respuestas a ¿Estoy dando seguimiento a las estrategias que he planteado para mejorar la comprensión de los temas?

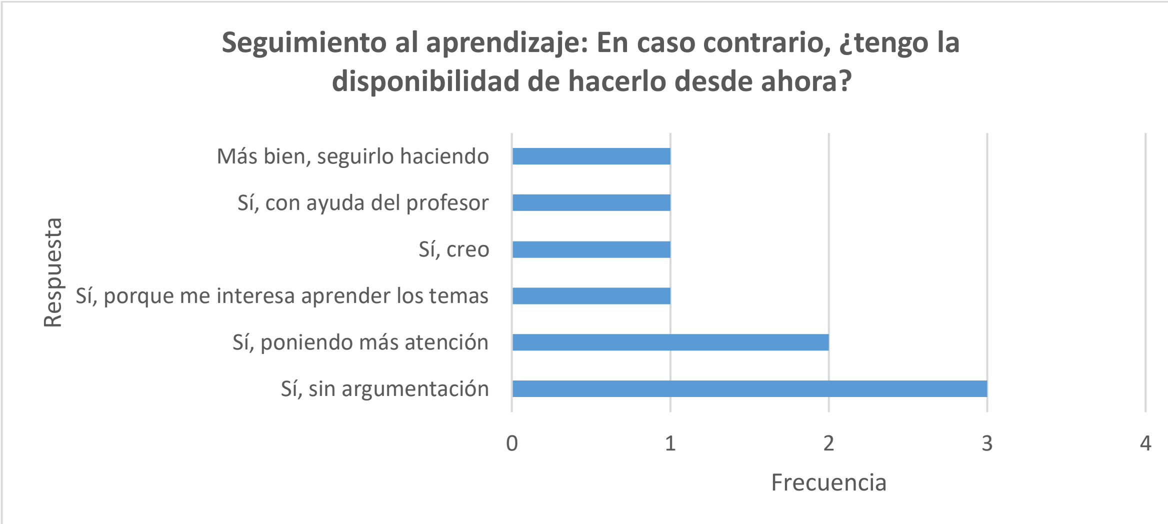


Ilustración 37. Seguimiento al aprendizaje: respuestas a En caso contrario, ¿tengo la disponibilidad de hacerlo desde ahora?

3.6 Examen

El examen se aplicó el 5 de diciembre de 2017 a 26 de los estudiantes considerados en este análisis, con los resultados que se detallan a continuación.

Reactivo 1. Lo contestaron correctamente 20 estudiantes (77%). Se considera que 17 alumnos (65%) sustentan con argumentos que su respuesta no fue casual. 16 examinados (62%) siguieron la estrategia de clase consistente en construir la ecuación de la circunferencia desplazándola de manera que su centro quedase en el origen; de ellos, 14 acertaron en su respuesta, de manera que la estrategia fue efectiva en el 87% de los casos en que fue aplicada.

La ilustración 38 muestra la distribución de respuestas al primer reactivo del examen, el que tiene una similitud con la prueba PLANEA. Se aprecia que el distractor d) no fue efectivo, ya que ningún examinado lo tomó en cuenta.

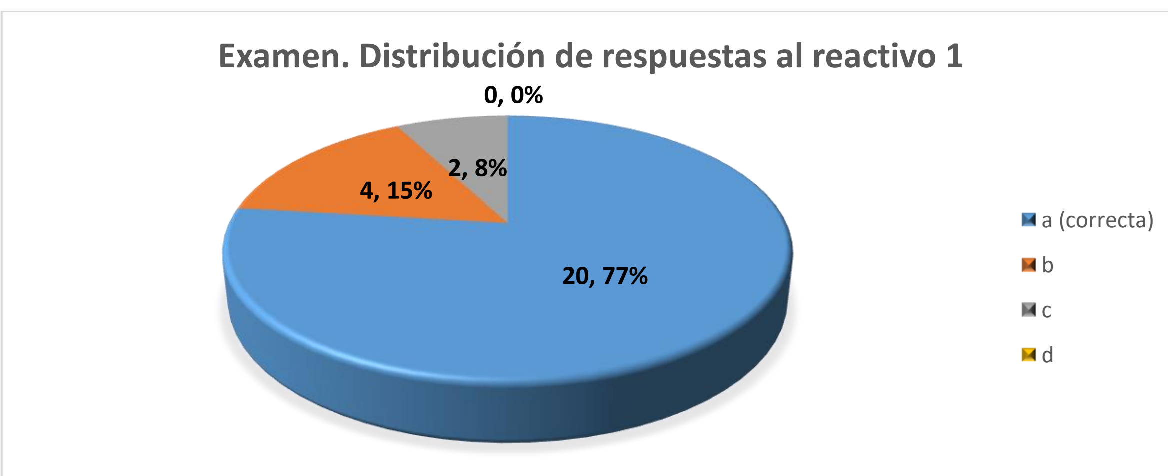


Ilustración 38. Examen. Distribución de respuestas al reactivo 1.

Las ilustraciones 39 y 40 muestran, respectivamente, las estrategias empleadas por los estudiantes que respondieron el reactivo 1 correcta e incorrectamente.

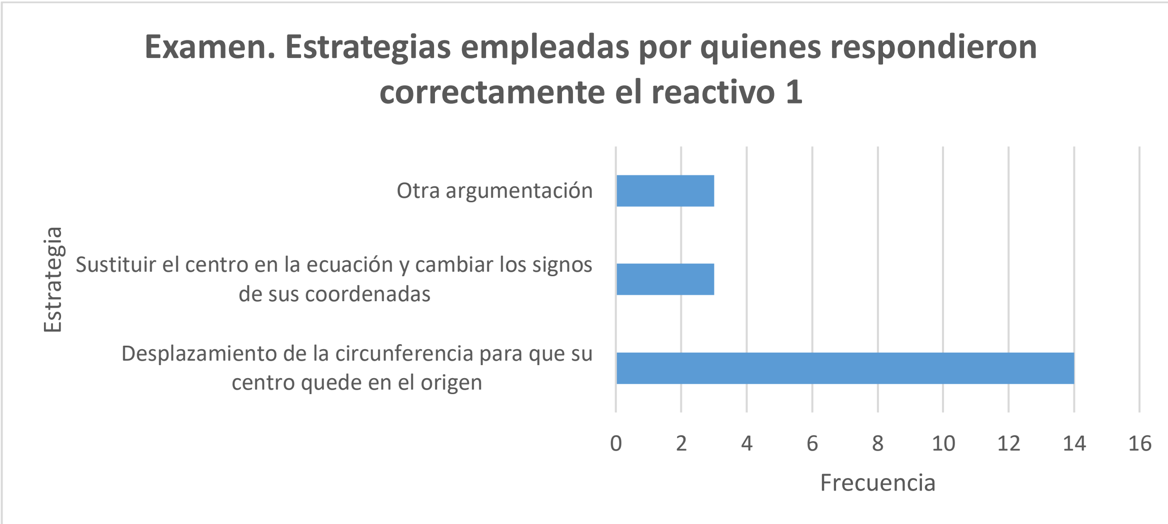


Ilustración 39. Examen. Estrategias empleadas por quienes respondieron correctamente el reactivo 1.

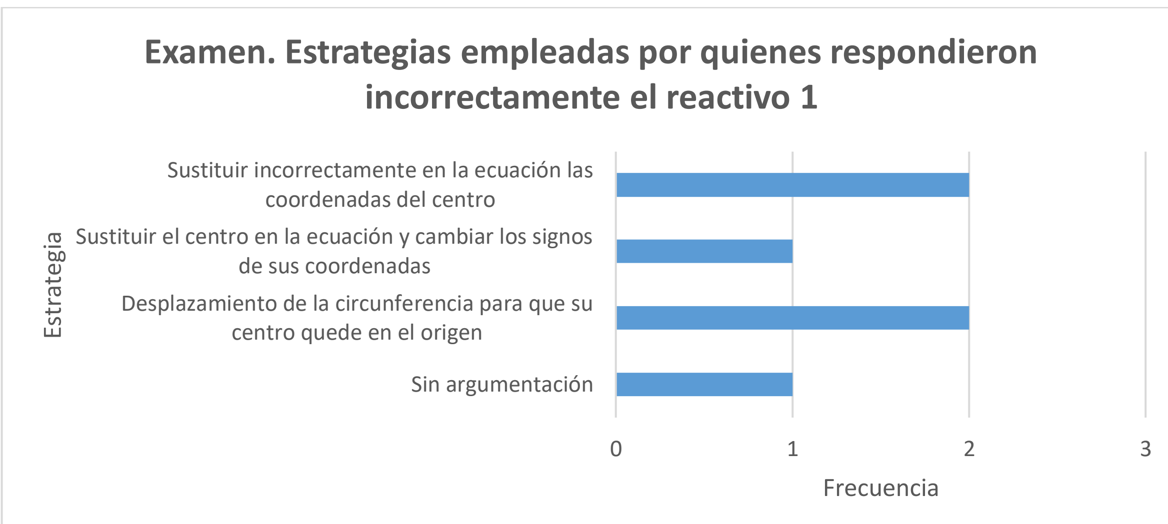


Ilustración 40. Estrategias empleadas por quienes respondieron incorrectamente el reactivo 1.

Reactivo 2. Lo contestaron correctamente 20 estudiantes, sin embargo, solamente cinco (19%) argumentaron su respuesta de tal manera que no dejaban lugar a dudas de que acertaron con conocimiento de causa y no por casualidad (utilizaron el teorema de Pitágoras).

Casi la totalidad de los alumnos hicieron un bosquejo gráfico para el problema. Destacaron los esquemas de 13 de ellos que elaboraron un plano donde ubicaban el punto $(1, 1.2)$, mientras que cinco más dibujaron una circunferencia con centro en el origen y radio $r = 1.2$. En relación con las actividades del cuadernillo, se incrementó a 15 (58%) el número de estudiantes que al menos incluyeron en su sistema de coordenadas los rótulos de los ejes y las flechas para indicar el sentido positivo de los mismos; incluso dos examinados señalaron el origen.

3.7 Análisis por estudiante

A efecto de facilitar la lectura de esta parte del reporte, conviene recuperar la codificación de las competencias genéricas y disciplinares incorporadas a la secuencia didáctica propuesta en este estudio:

- **CG1.** Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue: Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.
- **CG4.** Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados: Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas.
- **CG5.** Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos: Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **CG7.** Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.
- **CG8.** Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- **CD1.** Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- **CD2.** Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- **CD3.** Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- **CD4.** Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.
- **CD5.** Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

La competencia genérica CG1 se considera lograda o no a partir del desarrollo en clase de las actividades propuestas en el cuadernillo de trabajo. Las competencias genéricas CG4 y CG5 se consideran logradas con base en las respuestas vertidas por los estudiantes en el citado cuadernillo y apoyadas en el nivel de EMR alcanzado, que tendría que ser al menos el referencial; en el caso de CG4, también cuenta el desarrollo argumentativo del alumno. La competencia genérica CG7 se considera lograda si el estudiante respondió al menos cuatro de las preguntas de seguimiento al aprendizaje, y realizó al menos tres ejercicios extraclase en el libro de texto; en ocasiones, se pondera si complementó los trabajos que quedaron pendientes en clase, o bien un desarrollo excelente de las actividades que dispense la respuesta a las citadas preguntas. La competencia genérica CG8 no tiene manera de evaluarse, en virtud de que durante el desarrollo del experimento no se utilizó la rúbrica de desempeño en clase propuesta inicialmente, ni fue sustituida por algún otro instrumento o técnica.

Las competencias disciplinares se observan en los resultados del examen al final del tema. El estudiante tiene que haber respondido de manera correcta los dos ejercicios de la prueba para considerar que logró CD1, CD2 y CD5. Asimismo, la argumentación de ambos ejercicios tiene que considerarse lo suficientemente consistente para determinar que se lograron CD3 y CD4. En relación con los niveles de la EMR, la observación de los resultados en el cuadernillo de trabajo es lo que indique si están logrados o no.

La tabla 7 muestra, para cada estudiante, si logró, no logró o no se pudo observar en él las competencias genéricas, disciplinares y los niveles de la EMR. En el caso de estos últimos, se indica el nivel máximo logrado por el estudiante antes de su primera etiqueta de no logrado, o bien, el último concretado antes de una secuencia de no observado. En tanto, las ilustraciones 41, 42 y 43 resumen, respectivamente, los resultados por competencias genéricas, disciplinares y niveles de la EMR.

Estudiante 1. En su diagnóstico en clase calculó la longitud de arco que se requería. En el problema 2 le faltó dividir su resultado (el diámetro) entre dos, lo cual corrigió para el diagnóstico en casa. Su modelo en el problema 3 estuvo bien logrado. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y no proporcionó la medida en radianes del perímetro de un círculo (ni en clase ni en casa).

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Si bien solamente respondió las dos primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje, cubrió todas las tareas extraclase y su desarrollo a lo largo del tema fue sobresaliente, por lo que se considera lograda la competencia CG7.

En el examen respondió los dos reactivos de manera correcta, con una argumentación razonablemente consistente. Por ello, se consideran logradas por el alumno las cinco competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 2. En su diagnóstico en clase no calculó la longitud de arco que se requería ni respondió los problemas 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y no proporcionó la medida en radianes del perímetro de un círculo. No resolvió el diagnóstico en casa.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, no logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR), pero corrigió esta situación para la Actividad 2, con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5,

Resolvió dos de los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto y respondió las últimas dos preguntas de seguimiento al aprendizaje, por lo que no desarrolló la competencia genérica CG7.

En el examen no resolvió de manera correcta ambos reactivos, si bien la argumentación del primero de ellos describía consistentemente su idea. Por ello, se considera lograda la competencia disciplinar CD4, pero no CD1, CD2, CD3 y CD8.

Estudiante 3. En su diagnóstico en clase no calculó la longitud de arco que se requería y no respondió los problemas 2 y 3. En la terminología incluida en el problema 1 ninguna de sus respuestas fue correcta. En el diagnóstico en casa no cambiaron sus resultados.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR), pero no la ecuación correspondiente al caso en que dicho punto estaba recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y desarrolló el procedimiento para pasar de la segunda a la primera, solamente que fuera de clase, con la asesoría de un familiar; por esto se considera que no logró el nivel formal de la EMR.

Concluyó la mayoría de las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Aunque no argumentó algunos incisos en las primeras actividades, sus justificaciones parecían más consistentes hacia los últimos ejercicios. Así, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5,

Resolvió los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto. Respondió las primeras dos y las últimas dos preguntas de seguimiento al aprendizaje; a partir de esto se sabe que no daba seguimiento constante a las estrategias que se planteó para mejorar la comprensión de los temas, por lo que se considera no lograda la competencia CG7.

Dado que no se presentó el día del examen y se le aplicó la prueba correspondiente a otro grupo, se consideran como no observadas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 4. No hizo diagnóstico en clase. En su diagnóstico en casa no calculó la longitud de arco que se requería y no respondió los problemas 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y no proporcionó la medida en radianes del perímetro de un círculo.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR). Por inasistencia, no se pudo observar su desarrollo de la ecuación correspondiente al caso en que dicho punto estaba recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). También por inasistencia no se observó su trabajo en el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Cuando asistió, concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 3. Argumentó de manera clara su trabajo en la Actividad 1, pero nada más. Así, se considera que no logró las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5,

Resolvió los primeros dos ejercicios extraclase en el libro de texto. Respondió las últimas cuatro preguntas de seguimiento al aprendizaje, pero, por ejemplo, no complementó en casa las tareas que no realizó en clase por inasistencia. Por lo anterior, se considera no lograda la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, pero su respuesta al segundo fue equivocada; en ambos casos, su argumentación presentó falta de claridad. Se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 5. En su diagnóstico en clase calculó la longitud de arco que se requería en el problema 1, pero no respondió los ejercicios 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y tampoco proporcionó la medida en grados ni en radianes del perímetro de un círculo. Para el diagnóstico en casa ya incorporó las soluciones a los ejercicios 2 y 3. Ya no respondió el inciso e) y no complementó las respuestas a los incisos d) y f) en relación con su diagnóstico en clase.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió las dos primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje y las dos últimas (con un par de palabras cada una), pero solamente realizó dos de los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto, por lo que no desarrolló la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, pero su respuesta al segundo fue equivocada; en ambos casos, su argumentación presentó falta de claridad. Se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 6. En su diagnóstico en clase no logró el cálculo correcto de la longitud de arco que se requería en el problema 1, ni respondió los ejercicios 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y tampoco proporcionó la medida correcta en radianes del perímetro de un círculo. Para el diagnóstico en casa no solventó los errores cometidos en la descripción previa y, aunque incorporó las soluciones a los ejercicios 2 y 3, no fueron correctas.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió todas las preguntas de seguimiento al aprendizaje, aunque las dos últimas con un simple sí, afirmando con ello que estaba trabajando sus estrategias para mejorar la comprensión de los temas. También resolvió todos los ejercicios extraclase en el libro de texto, por lo que se considera lograda la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, con una argumentación consistente. Su respuesta al segundo problema fue correcta, aunque su justificación presentó falta de claridad. Se consideran como logradas las competencias disciplinares CD1, CD2 y CD8; no logró CD3 y CD4.

Estudiante 7. En su diagnóstico en clase no calculó la longitud de arco que se requería y no respondió los problemas 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y no proporcionó la medida en radianes del perímetro de un círculo. Para su diagnóstico en casa no corrigió uno solo de los detalles antes descritos.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR), a pesar de que tuvo un error al expresarla. Por inasistencia, no se pudo observar su construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

Cuando asistió, concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Sus argumentaciones fueron parcas, poco descriptivas. Así, se considera que logró las competencias genéricas CG1 y CG5, pero no la CG4.

Resolvió los últimos dos ejercicios extraclase en el libro de texto. Respondió las primeras dos preguntas de seguimiento al aprendizaje, pero, por ejemplo, no complementó en casa las tareas que no realizó en clase por inasistencia. Por lo anterior, se considera no lograda la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, con una argumentación consistente. Su respuesta al segundo problema fue correcta, aunque su justificación presentó falta de claridad. Se consideran como logradas las competencias disciplinares CD1, CD2 y CD8; no logró CD3 y CD4.

Estudiante 8. En su diagnóstico en clase no calculó correctamente la longitud de arco que se requería y no respondió los problemas 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, solamente respondió acertadamente el inciso e). Para su diagnóstico en casa corrigió el inciso c) y agregó en el f) la medida en grados de una circunferencia; también dio una respuesta al problema 3, pero incorrecta.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR). Por inasistencia, no se pudo observar su desarrollo de la ecuación correspondiente al caso en que dicho punto estaba recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente; de hecho, ni siquiera terminó la actividad (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Cuando asistió, no concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento. Sus argumentaciones fueron parcas, poco descriptivas. Así, se considera que no logró las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Resolvió los últimos dos ejercicios extraclase en el libro de texto. Respondió las primeras dos preguntas de seguimiento al aprendizaje, pero, por ejemplo, no complementó en casa las tareas que no realizó en clase por inasistencia. Por lo anterior, se considera no lograda la competencia CG7.

En el examen no resolvió de manera correcta ambos reactivos. Incluyó una argumentación para el primero de ellos, pero no describió consistentemente su idea. Por ello, se consideran no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 9. En su diagnóstico en clase calculó la longitud de arco que se requería en el problema 1, pero no respondió los ejercicios 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, solamente respondió acertadamente el inciso c). Para el diagnóstico en casa complementó el inciso

e) y también incluyó la medida de la circunferencia en grados, junto con un cálculo incorrecto de la medida en radianes.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró construir la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Tampoco logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó aproximadamente la mitad de las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que no logró las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió las cuatro primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje, pero solamente realizó el primero de los ejercicios extraclase en el libro de texto y no concluyó las actividades que le quedaron pendientes en clase, por lo que no desarrolló la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, pero su respuesta al segundo fue equivocada; en ambos casos, su argumentación presentó falta de claridad. Se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 10. En su diagnóstico en clase calculó la longitud de arco que se requería en el problema 1, pero no respondió correctamente los ejercicios 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, respondió acertadamente los incisos c) y e). Para el diagnóstico en casa no agregó respuestas.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR), pero no con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró construir la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Por inasistencia no se observó su trabajo en el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Cuando asistió a clase concluyó las tareas del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 3. Sin embargo, por el nivel de EMR alcanzado por el alumno y sus argumentaciones poco sólidas, se consideran logradas las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

No dio respuesta a una sola pregunta de seguimiento al aprendizaje, realizó tres de los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto y no concluyó las actividades que le quedaron pendientes en clase, por lo que no desarrolló la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, con una argumentación consistente. Su respuesta al segundo problema fue correcta, aunque su justificación presentó falta de claridad. Se consideran como logradas las competencias disciplinares CD1, CD2 y CD8; no logró CD3 y CD4.

Estudiante 11. En su diagnóstico en clase no calculó la longitud de arco que se requería y no respondió los problemas 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no respondió el inciso e), no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y tampoco proporcionó la medida en radianes del perímetro de un círculo. No realizó el diagnóstico en casa.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, no se pudo observar por inasistencia su construcción de la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR). En lo que respecta a la actividad con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas, (nivel referencial de la EMR), logró la ecuación, a pesar de que tuvo un error al expresar los ejercicios gráficamente. Logró la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR), aunque le faltó el último inciso de la actividad. Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

Cuando asistió, concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Sus argumentaciones fueron parcas, poco descriptivas. Así, se consideran logradas las competencias genéricas CG1 y CG5, pero no la CG4.

Resolvió los últimos dos ejercicios extraclase en el libro de texto. No respondió las preguntas de seguimiento al aprendizaje ni complementó en casa las tareas que no realizó en clase por inasistencia. Por lo anterior, se considera no lograda la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio y su respuesta al segundo problema fue correcta, aunque su argumentación en ambos casos presentó falta de claridad. Se consideran como logradas las competencias disciplinares CD1, CD2 y CD8; no logró CD3 y CD4.

Estudiante 12. En su diagnóstico en clase no calculó correctamente la longitud de arco que se requería en el problema 1, ni respondió acertadamente los ejercicios 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, solamente expresó bien la medida de la circunferencia en grados. Para el diagnóstico en casa no cambió sus respuestas.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR), pero no con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Logró construir la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se consideran cubiertas las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió todas las preguntas de seguimiento al aprendizaje (aunque las últimas dos con monosílabos) y realizó los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto, por lo que se considera lograda la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, con una argumentación consistente. Su respuesta al segundo problema fue incorrecta y su justificación presentó falta de claridad. Se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 14. No respondió un solo ejercicio del diagnóstico en clase y tampoco resolvió el examen en casa.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, no logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR). Por inasistencia, no se pudo observar su construcción de la ecuación con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró construir la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

En general, el cuadernillo del alumno está sumamente incompleto. Por esto y no haber logrado un solo nivel de la EMR, se considera que no logró las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Resolvió los últimos dos ejercicios extraclase en el libro de texto. No respondió las preguntas de seguimiento al aprendizaje ni complementó en casa las tareas que no realizó en clase. Por lo anterior, se considera no lograda la competencia CG7.

En el examen no acertó en ambos ejercicios ni desarrolló argumentación alguna, por lo que se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 15. Por inasistencia no realizó el examen diagnóstico en clase. En el diagnóstico en casa calculó la longitud de arco que se requería. También resolvió correctamente el problema 2. Su modelo en el problema 3 estuvo bien logrado. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte; en la medida en radianes del perímetro de un círculo incluyó un valor de 6.28, pero no involucró al radio.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Si bien solamente respondió las dos primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje, cubrió todas las tareas extraclase y su desarrollo a lo largo del tema fue sobresaliente, por lo que se considera lograda la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, con una argumentación consistente. Su respuesta al segundo problema fue incorrecta, aunque su idea de solución fue argumentada con claridad. Se consideran logradas las competencias genéricas CD3 y CD4 y como no logradas CD1, CD2 y CD8.

Estudiante 18. Del examen diagnóstico en clase solamente respondió los incisos a) y c); es decir, no calculó la longitud de arco que se requería ni resolvió los ejercicios 2 y 3. No realizó el diagnóstico en casa.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, solía responder solamente los primeros incisos, sin ofrecer mayor argumentación. Por ello, en realidad no se pudo observar si logró o no los diferentes niveles de la EMR involucrados en el tema ni las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

No respondió una sola de las preguntas de seguimiento al aprendizaje y no resolvió los cuatro ejercicios del libro de texto que se dejaron como tarea extraclase, por lo cual no logró la competencia genérica CG7.

En el examen no resolvió correctamente el primer ejercicio, pero el segundo sí. En ambos casos su argumentación fue poco clara. Se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 19. En el diagnóstico en clase no resolvió un solo inciso. En el diagnóstico en casa respondió correctamente los incisos c) y d); no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte, y en la medida en radianes del perímetro de un círculo solamente incluyó los grados. Logró el modelo requerido para el problema 3, pero no bosquejó la sala de arte, ni calculó la longitud de arco que pedía el problema 1; tampoco respondió el ejercicio 2.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR), aunque no concluyó la Actividad 3. Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

No concluyó todas las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento. Por esto, el nivel de EMR alcanzado por el alumno y sus argumentaciones poco consistentes, se considera que logró las competencias genéricas CG4 y CG5, pero no CG1.

No respondió una sola pregunta de seguimiento al aprendizaje ni realizó las últimas dos tareas extraclase en el libro de texto, por lo que no logró la competencia CG7.

En el examen, resolvió correctamente el primer problema, no así el segundo. En ambos casos, su argumentación fue inconsistente. Se consideran no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 20. En el diagnóstico en clase solamente hizo el bosquejo de la sala de arte y respondió el inciso c) de manera incorrecta; es decir, no calculó la longitud de arco requerida por el problema 1 ni resolvió los ejercicios 2 y 3. No realizó el diagnóstico en casa.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR), aunque solamente resolvió el primer inciso. Por inasistencia, no se pudo observar su construcción de la ecuación con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR), aunque no concluyó la Actividad 3. No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

No concluyó todas las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento. Por esto, el nivel de EMR alcanzado por el alumno y argumentaciones poco consistentes, se considera que logró las competencias genéricas CG4 y CG5, pero no CG1.

No respondió una sola pregunta de seguimiento al aprendizaje y realizó solamente las últimas dos tareas extraclase en el libro de texto, por lo que no logró la competencia CG7.

En el examen respondió los dos reactivos de manera correcta, con una argumentación razonablemente consistente. Por ello, se consideran logradas por el alumno las cinco competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 21. En su diagnóstico en clase no calculó correctamente la longitud de arco que se requería ni los problemas 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1 no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y tampoco proporcionó la medida correcta en radianes del perímetro de un círculo. En el diagnóstico en casa no corrigió los detalles antes señalados, incluso ya ni siquiera ofreció respuesta para los ejercicios 2 y 3.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Por inasistencia no se pudo observar su construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Tampoco asistió a la sesión en la que se buscaba el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Cuando asistió, concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento. Sus argumentaciones fueron parcas, poco descriptivas. Así, se considera que logró las competencias genéricas CG1 y CG5, pero no la CG4.

Respondió las dos primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje. No hizo un solo ejercicio del libro de texto como tarea extraclase, ni complementó en casa las tareas que no realizó en el aula por inasistencia. Por lo anterior, se considera no lograda la competencia CG7.

En el examen respondió los dos reactivos de manera correcta, con una argumentación razonablemente consistente. Por ello, se consideran logradas por el alumno las cinco competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 22. En su diagnóstico en clase ofreció una aproximación a la longitud de arco que se requería en el problema 1, pero no mostró su desarrollo. No respondió acertadamente los ejercicios 2 y 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y tampoco proporcionó la medida correcta en radianes del perímetro de un círculo. Para su diagnóstico en casa no varió sus respuestas, excepto porque ya no ofreció respuesta para el ejercicio 2.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR). Por inasistencia, no se pudo observar su construcción de la ecuación con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró construir la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

En general, el cuadernillo del alumno está sumamente incompleto. Por esto y el nivel de la EMR alcanzado, se considera que no logró las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió las dos primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje. Realizó las últimas dos tareas extraclase en el libro de texto y no complementó en casa las tareas que no realizó en el aula por inasistencia. Por lo anterior, no logró la competencia CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio y su respuesta al segundo problema fue correcta, aunque su argumentación en ambos casos presentó falta de claridad. Se consideran como logradas las competencias disciplinares CD1, CD2 y CD8; no logró CD3 y CD4.

Estudiante 23. Logró el cálculo de la longitud de arco requerida por el problema 1. No resolvió el ejercicio 2 y su solución en el problema 3 fue incorrecta. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y tampoco proporcionó la medida correcta en radianes del perímetro de un círculo. Para su diagnóstico en casa corrigió su respuesta al problema 3 e incluyó solución correcta para el segundo ejercicio; no respondió el inciso d) y en el f) agregó 6.28 radianes, pero no tomó en cuenta el radio para el cálculo del perímetro de un círculo.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Si bien solamente respondió las dos primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje, cubrió todas las tareas extraclase y su desarrollo a lo largo del tema fue sobresaliente, por lo que se considera lograda la competencia CG7.

En el examen respondió los dos reactivos de manera correcta, con una argumentación razonablemente consistente. Por ello, se consideran logradas por el alumno las cinco competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 24. En el examen diagnóstico en clase dio respuesta incorrecta tanto a la longitud de arco como al problema 2, sin desarrollo ni argumentación; respondió los incisos c) y e) de manera incorrecta y no escribió algo en los incisos d) y f). No realizó el diagnóstico en casa.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR); sin embargo, en ambos casos omitió la respuesta a las preguntas de argumentación. Por inasistencia no se pudo observar su construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). También por inasistencia no se pudo observar su trabajo en el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

En general, el cuadernillo del alumno está sumamente incompleto. Por esto y el nivel de la EMR alcanzado, se considera que no logró las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

No respondió una sola pregunta de seguimiento al aprendizaje. Realizó las últimas dos tareas extraclase en el libro de texto y no complementó en casa las tareas que no realizó en el aula por inasistencia. Por lo anterior, se considera no lograda la competencia CG7.

En el examen, resolvió equivocadamente el primer problema y de forma correcta el segundo; en ambos casos, sus argumentaciones fueron poco consistentes. Por lo anterior, se consideran no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 26. En el diagnóstico en clase logró el cálculo de la longitud de arco requerida por el problema 1. No resolvió correctamente el ejercicio 2 y no dio solución para el problema 3. En relación con la terminología incluida en el problema 1, no tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y tampoco proporcionó la medida correcta en radianes del perímetro de un círculo. Para su diagnóstico en casa dio la respuesta correcta en el problema 3 y expresó que 360 grados equivalen a 2π radianes.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). Asimismo, construyó la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió las cuatro primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje y resolvió todos los ejercicios extraclase en el libro de texto, por lo cual se considera lograda la competencia genérica CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, con una argumentación consistente. Su respuesta al segundo problema fue incorrecta, aunque su idea de solución fue argumentada con claridad. Se consideran logradas las competencias genéricas CD3 y CD4 y como no logradas CD1, CD2 y CD8.

Estudiante 27. En el examen diagnóstico en clase dio respuesta incorrecta tanto a la longitud de arco como a los problemas 2 y 3; respondió el inciso c) correctamente y el e) de manera incorrecta; en el f) solamente dio la medida en grados de la circunferencia. En el diagnóstico en casa, corrigió el inciso e) del problema 1, pero modificó erróneamente su respuesta en clase al inciso c).

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5; la Actividad 1 en el cuadernillo no tiene sus desarrollos iniciales, porque perdió las hojas. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se considera que cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió las últimas dos preguntas de seguimiento al aprendizaje y, aunque realizó tres de los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto, se considera como no lograda la competencia genérica CG7.

En el examen respondió los dos reactivos de manera correcta, con una argumentación razonablemente consistente, si bien la del problema 2 le condujo al resultado correcto, pero por la razón equivocada. Por ello, se consideran logradas por el alumno las cinco competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 28. En el examen diagnóstico en clase solamente ofreció respuestas para los incisos c) y e) del problema 1. Para el diagnóstico en casa logró el cálculo de la longitud de arco requerida por el problema 1 y avanzó en el desarrollo del 2, aunque no llegó al resultado; respondió correctamente los incisos c) y e), además de incluir la medida en grados para el inciso f) y un valor de 6.28 radianes (es decir, no incluyó el radio en el cálculo del perímetro del círculo).

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No logró la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, se consideran cubiertas las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió a todas las preguntas de seguimiento al aprendizaje y resolvió los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto, de manera que logró la competencia disciplinar CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio, con una argumentación consistente. Su respuesta al segundo problema fue incorrecta y su justificación presentó falta de claridad. Se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 29. En el examen en clase respondió el inciso c). En el examen en casa agregó el cálculo correcto de la longitud de arco solicitada en el problema 1.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). No se considera lograda la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR), ya que solamente resolvió el primer inciso de la Actividad 3. No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

No concluyó todas las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento. Sus argumentaciones fueron parcas, poco descriptivas. Así, se considera que no logró las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

No respondió una sola pregunta de seguimiento al aprendizaje. Realizó las últimas dos tareas extraclase en el libro de texto y no complementó en casa las tareas que no realizó en el aula por inasistencia. Por lo anterior, no logró la competencia CG7.

En el examen no acertó en ambos ejercicios. Su argumentación en el primer problema es entendible, no así la del segundo. Por lo anterior, se consideran como no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

Estudiante 30. En el diagnóstico en clase respondió los incisos c), d) y f); en este último dio como respuesta el valor de π. En el diagnóstico en casa avanzó en el cálculo de la longitud de arco solicitada en el problema 1, pero le faltó dividir su resultado entre los cinco cuadros de la sala. No tomó en cuenta a la tangente como una posibilidad para representar la posición de los cuadros en la sala de arte y dio la medida en grados de la circunferencia. También hizo un desarrollo del ejercicio 2, pero no llegó a la solución.

En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR). También logró la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). No logró el paso de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general y viceversa (nivel formal de la EMR).

Concluyó casi todas las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento. Sus argumentaciones fueron poco descriptivas. Así, se considera que logró las competencias genéricas CG1 y CG5, pero no la CG4.

Respondió las cuatro primeras preguntas de seguimiento al aprendizaje y resolvió todos los ejercicios extraclase en el libro de texto, por lo cual logró la competencia genérica CG7.

En el examen resolvió correctamente el primer ejercicio y su respuesta al segundo problema fue correcta, aunque su argumentación en ambos casos presentó falta de claridad. Se consideran como logradas las competencias disciplinares CD1, CD2 y CD8; no logró CD3 y CD4.

Estudiante 31. No resolvió el diagnóstico en clase ni en casa. En el desarrollo de las actividades del cuadernillo, logró construir la ecuación de la circunferencia sugerida por el semicírculo del área en la cancha de futbol con el punto de penalti en el origen del plano (nivel situacional de la EMR) y también con dicho punto recorrido 11 posiciones sobre el eje horizontal del sistema de coordenadas (nivel referencial de la EMR), aunque presentó un error al escribir la ecuación (su raíz incluyó al signo de igual). También logró la construcción de la ecuación de la circunferencia con la estrategia de desplazar su centro hacia el origen sumando o restando posiciones tanto horizontal como verticalmente (nivel general de la EMR). Consiguió pasar de la ecuación ordinaria de la circunferencia a la ecuación general, pero no de esta a la primera, por lo que no logró el nivel formal de la EMR.

Concluyó las actividades del cuadernillo que pudieron abordarse en el periodo del experimento, excepto la Actividad 5. Por esto y el nivel de EMR alcanzado por el alumno, cubrió las competencias genéricas CG1, CG4 y CG5.

Respondió todas las preguntas de seguimiento al aprendizaje y resolvió tres de los cuatro ejercicios extraclase en el libro de texto, por lo que se considera lograda la competencia genérica CG7.

En el examen, resolvió equivocadamente el primer problema y de forma correcta el segundo; en ambos casos, sus argumentaciones fueron poco consistentes. Por lo anterior, se consideran no logradas las competencias disciplinares CD1, CD2, CD3, CD4 y CD8.

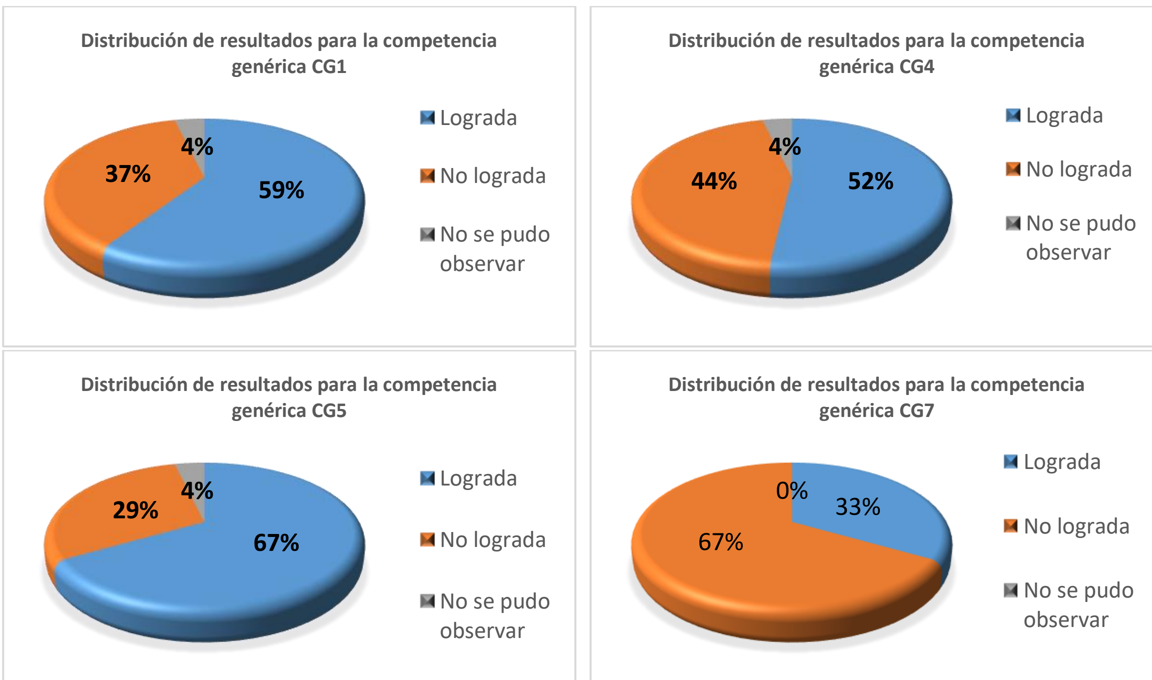
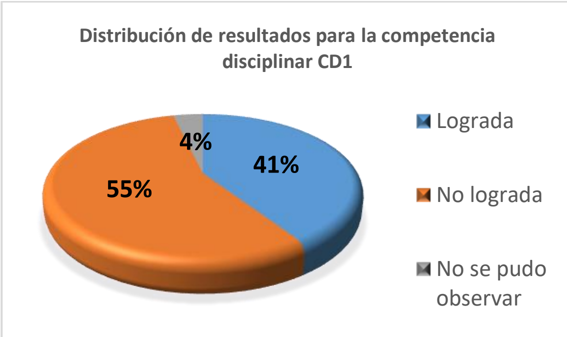
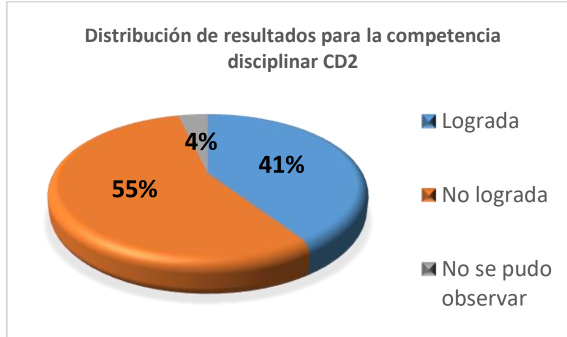
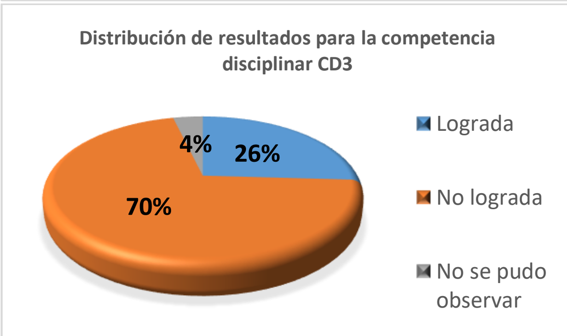
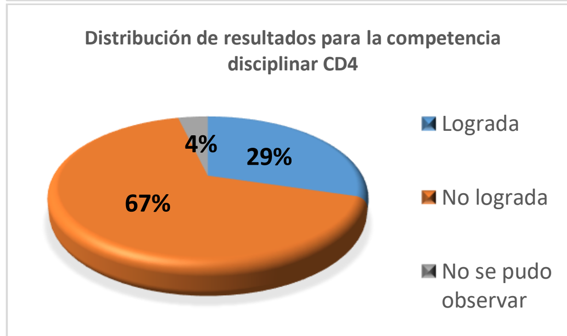


Ilustración 41. Distribución de resultados obtenidos por los estudiantes en las competencias genéricas.









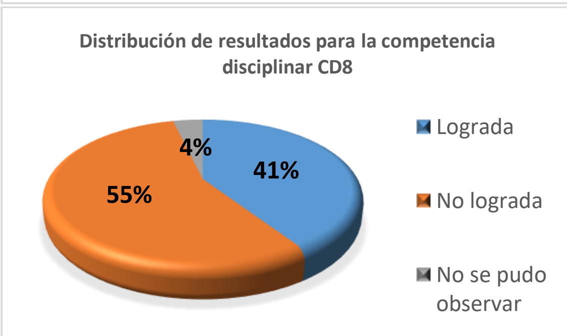


Ilustración 42. Distribución de resultados obtenidos por los estudiantes en las competencias disciplinares.

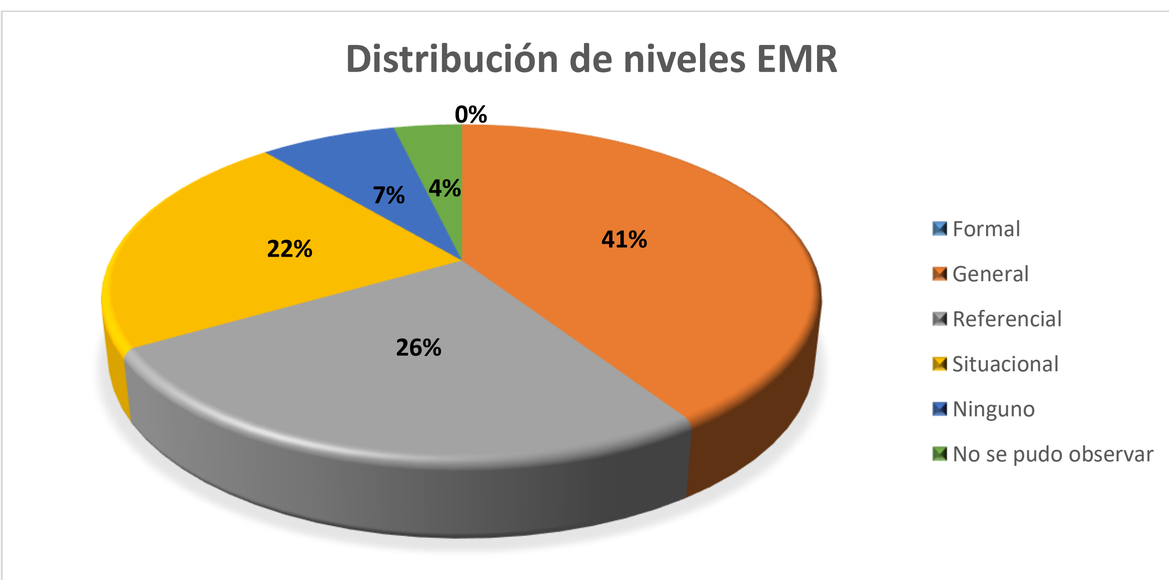


Ilustración 43. Distribución de resultados obtenidos por los estudiantes en los niveles de la EMR.

Tabla 7. Resumen de competencias genéricas y disciplinares, así como de niveles de la EMR logrados por los estudiantes durante el tema de circunferencia. L=logrado. NL=no logrado. NSO=no se pudo observar.

	Competencias genéricas					Competencias disciplinares					Niveles EMR				Nivel
Estudiante	**CG1**	**CG4**	**CG5**	**CG7**	**CG8**	**CD1**	**CD2**	**CD3**	**CD4**	**CD8**	**Situacional**	**Referencial**	**General**	**Formal**	**logrado**
1	L	L	L	L	NSO	L	L	L	L	L	L	L	L	NL	**General**
2	L	L	L	NL	NSO	NL	NL	NL	L	NL	NL	L	L	NL	**Ninguno**
3	L	L	L	NL	NSO	NSO	NSO	NSO	NSO	NSO	L	NL	L	NL	**Situacional**
4	NL	NL	NL	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	NSO	NL	NSO	**Situacional**
5	L	L	L	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	L	L	NL	**General**
6	L	L	L	L	NSO	L	L	NL	NL	L	L	L	L	NL	**General**
7	L	NL	L	NL	NSO	L	L	NL	NL	L	L	L	NSO	NL	**Referencial**
8	NL	NL	NL	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	NSO	NL	NL	**Situacional**
9	NL	NL	NL	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	L	NL	NL	**Referencial**
10	NL	NL	NL	NL	NSO	L	L	NL	NL	L	L	NL	NL	NSO	**Situacional**
11	L	NL	L	NL	NSO	L	L	NL	NL	L	NSO	L	L	NL	**General**
12	L	L	L	L	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	NL	L	NL	**Situacional**
14	NL	NL	NL	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	NL	NSO	NL	NL	**Ninguno**
15	L	L	L	L	NSO	NL	NL	L	L	NL	L	L	L	NL	**General**
18	NSO	NSO	NSO	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	NSO	NSO	NSO	NSO	**NSO**
19	NL	L	L	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	L	L	NL	**General**
20	NL	L	L	NL	NSO	L	L	L	L	L	L	NSO	L	NL	**General**
21	L	NL	L	NL	NSO	L	L	L	L	L	L	L	NSO	NSO	**Referencial**
22	NL	NL	NL	NL	NSO	L	L	NL	NL	L	L	NSO	NL	NL	**Situacional**
23	L	L	L	L	NSO	L	L	L	L	L	L	L	L	NL	**General**
24	NL	NL	NL	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	L	NL	NL	**Referencial**
26	L	L	L	L	NSO	NL	NL	L	L	NL	L	L	L	NL	**General**
27	L	L	L	NL	NSO	L	L	L	L	L	L	L	NL	NL	**Referencial**
28	L	L	L	L	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	L	NL	NL	**Referencial**
29	NL	NL	NL	NL	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	L	NL	NL	**Referencial**
30	L	NL	L	L	NSO	L	L	NL	NL	L	L	L	L	NL	**General**
31	L	L	L	L	NSO	NL	NL	NL	NL	NL	L	L	L	NL	**General**

Conclusiones

La secuencia didáctica y el material de apoyo diseñados en este trabajo representan una propuesta de herramienta didáctica para los docentes de bachillerato al momento de abordar el tema de la circunferencia; se basa en una teoría instruccional, busca tanto el aprendizaje significativo del estudiante a partir de la construcción de su propio conocimiento, como el desarrollo de algunas competencias específicas, de conformidad con los lineamientos del Sistema Nacional de Bachillerato en México. La citada propuesta se sometió a prueba a través de un experimento en un contexto específico, y los resultados obtenidos pusieron de manifiesto no solamente sus cualidades y defectos, sino, en cierta medida, también los de quien la diseñó e instrumentó.

En el capítulo 2 se compartió con los profesores de nivel medio superior una visión de la práctica docente, en donde el trabajo de clase se sustente necesariamente en un marco teórico específico de la disciplina que se imparte -en este caso la Educación Matemática Realista-, pero también en conocimientos de didáctica general, de psicología del adolescente y del ambiente específico de trabajo (currículum, sistema educativo, entorno social, económico, histórico y cultural).

El examen diagnóstico reveló que, en general, los estudiantes no tenían un buen dominio de los aspectos geométricos del círculo, que se asumieron como conocimientos previos requeridos para el tratamiento de la circunferencia a través de la geometría analítica. Luego de los resultados en clase, se pensó que los alumnos tendrían la inquietud de resolver en casa los ejercicios pendientes y eventualmente revisar los temas que no pudieron abordar, pero fueron contados quienes lo hicieron. Como causas posibles de este resultado están que este trabajo no contaba con valor en la escala de calificaciones y que la tarea como tal no resultaba lo suficientemente estimulante para los aprendices.

Hacia el final del experimento se detectaron varios fallos en el diseño del examen diagnóstico. En principio, tendría que haber incluido elementos de construcción del sistema de coordenadas, ya que en las diferentes actividades de la secuencia didáctica se apreció que muy pocos estudiantes lograban un plano cartesiano con flechas para indicar el sentido positivo de los ejes, rótulos para los mismos y la identificación del origen; aquí también hay un posible fallo del profesor, al no instrumentar una estrategia efectiva para corregir esta situación -disponiendo de varias sesiones para ello-, aun cuando en el examen al final del tema un 58% de los estudiantes incluyeron al menos las flechas y los rótulos a su sistema de coordenadas. Otras temáticas que debió abordar el diagnóstico fueron el desarrollo de binomios al cuadrado y la compleción del trinomio cuadrado perfecto; la imposibilidad de los estudiantes de realizar tareas de ese tipo impidió la conclusión de las últimas actividades originalmente planificadas (aunque aquí sí hubo un intento de repaso exprés por parte del profesor).

A la luz de los resultados, la hipótesis sostenida por este estudio no se comprobó. El trabajo con el cuadernillo evidenció el nivel de Educación Matemática Realista alcanzado por los estudiantes. El 11% no obtuvo uno de los cuatro niveles contemplados por la teoría instruccional en cuestión; 22% se ubicaron en el nivel situacional, 26% en el referencial y el general alcanzó la mayor proporción, con el 41%. Posiblemente por las dificultades ya comentadas de los alumnos para manejar ciertas herramientas algebraicas, ninguno de ellos alcanzó el nivel formal. Como consecuencia directa de esto, tampoco se cubrió la parte del propósito de la secuencia didáctica relativa a que el estudiante fuera capaz de aplicar sus conocimientos sobre circunferencia a problemas teóricos de manejo formal.

El examen al final del tema arrojó evidencia de que la estrategia propuesta para construir la ecuación ordinaria de la circunferencia (teóricamente apoyada por las actividades extraclase y los ejercicios en el libro de texto) tuvo una efectividad bruta del 52%; en términos relativos, funcionó para el 87% de los estudiantes que en su argumentación mostraron que la aplicaron. Sin embargo, el diseño de la secuencia didáctica no alcanzó para que los alumnos extendieran sus conocimientos hacia la comprobación de que un punto dado se encontraba o no en una circunferencia (problema 2), ya que solamente el 19% dio una respuesta satisfactoria al reactivo, identificando con ello un posible fallo en dicho diseño o bien una expectativa demasiado alta para el examen.

El tema integrador no resultó tal, ya que las situaciones problemáticas que se resolvieron en la secuencia didáctica no estaban relacionadas con él, además de que no fue resultado de una propuesta colegiada; en realidad, fungió más como parte de un esfuerzo por contribuir a la formación integral de los estudiantes. Una circunstancia negativa de su tratamiento en clase fue que, en la definición encomendada a los alumnos, el profesor no tomó acción alguna en relación con el hecho de que los estudiantes omitieron citar su fuente de conformidad con la norma APA; posiblemente una razón fuera la falta de tiempo. En lo que respecta al proyecto por equipos, destacó el empeño de los estudiantes por preparar y exponer un tópico como la violencia de género ante una audiencia incluso desconocida para ellos, así como la curiosidad que despertó en esta saber la materia en la que se les había encomendado el trabajo.

En relación con lo planificado, los contenidos y actividades de la secuencia didáctica se cubrieron en buena medida. Como era de esperarse, ya en la práctica surgieron cuestiones imprevistas que requirieron ajustes por parte del profesor. Sin embargo, de acuerdo con lo expuesto en el marco teórico contextual, quedó una asignatura pendiente de cubrir por parte del docente: la integración de la evaluación con la enseñanza y el aprendizaje. Y es que, sin la observación constante del profesor, la pertinente recolección de información y la retroalimentación oportuna al estudiante, ningún instrumento de evaluación cumplirá con una misión formativa en el proceso de aprendizaje. Los instrumentos de evaluación propuestos en la secuencia didáctica no terminaron por utilizarse de conformidad con lo planeado, particularmente la rúbrica de desempeño en clase. En el desarrollo de la secuencia didáctica, el docente nunca encontró los tiempos propicios para interactuar con el alumno, valorar sus avances, establecer estrategias y tomar decisiones en relación con dicho proceso. Esto derivó, por ejemplo, en que no se pudiera observar de manera concreta si los estudiantes lograron la competencia genérica relacionada con proponer maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. En lo referente a la lista de cotejo, esta se utilizó básicamente para calificar, en un intento de coevaluación, los ejercicios en el libro de texto, pero nada más.

Aproximadamente dos de cada tres estudiantes lograron las competencias genéricas relacionadas con administrar los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas, así como con seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

Solamente uno de cada tres alumnos tiene lograda la competencia genérica relativa a definir metas y dar seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento; parecen acostumbrados a no asumir la responsabilidad de su aprendizaje, esperar que el profesor sea quien les suministre todos los conocimientos posibles en el breve espacio de tiempo y lugar que representa la clase. En este sentido, cabe el cuestionamiento de hasta dónde realmente la formación que se proporciona a los estudiantes en el plantel Tequixquiac del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México, en el subsistema mismo y en el Sistema Nacional de Bachillerato en general cumple con las exigencias de su propio programa, relativas a propiciar el aprendizaje significativo de los estudiantes de manera constructiva.

Apenas uno de cada dos alumnos ha logrado expresar ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas. Esta competencia genérica va muy de la mano con las cinco competencias disciplinares que incluye la secuencia didáctica puesta en práctica y que, de acuerdo con los criterios ya explicados en la sección de resultados, tienen un nivel de logro promedio de apenas uno de cada tres estudiantes. Combinando esta información con la que proporcionan el examen al final del tema y el nivel de Educación Matemática Realista obtenido por los escolares, cabe la reflexión de si el segundo reactivo del examen se encuentra en una especie de segunda espiral dentro del tratamiento del tema, que no fue abordada por la planeación de clase sometida a prueba.

Este ha sido un primer esfuerzo por integrar la Educación Matemática Realista a un tema de geometría analítica de nivel medio superior en una institución educativa específica. Por delante quedan temas y contextos educativos que representan un campo fértil de investigación para probar la utilidad de esta teoría instruccional en la enseñanza de esta hermosa disciplina en el nivel bachillerato. Asimismo, el trabajo aquí expuesto puede apoyar una investigación posterior sobre los errores cometidos por los estudiantes de dicho nivel al abordar el tema de la circunferencia. Las características ya señaladas del material didáctico aquí diseñado no se encuentran, por ejemplo, en el libro de texto aceptado por la institución educativa donde se inserta el grupo experimental de la investigación; sería interesante saber hasta qué punto el uso de materiales didácticos basados en teorías instruccionales verdaderamente constructivistas contribuyen al aprendizaje significativo de las matemáticas.

Anexo I. Examen diagnóstico

Instrucciones. Contesta las preguntas derivadas de cada problema utilizando los recuadros indicados para ello. Incluye tus operaciones (solamente en caso necesario utiliza el reverso de la hoja, indicando el número de problema y el inciso). Puedes utilizar calculadora.

1. Una sala de arte en forma circular incluye cinco pinturas con marco rectangular colocadas a la misma distancia una de la otra. El vigilante está ubicado dentro de la sala de tal manera que entre él y cada cuadro hay ocho metros de distancia. Los cuadros tocan el círculo de la sala solamente en un punto.

a) Bosqueja gráficamente la sala de arte en cuestión.	b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro?
c) ¿Cómo se llama la distancia desde el vigilante a cualquiera de los cuadros?	d) ¿Con qué línea relativa a los círculos es adecuado representar a las pinturas?
e) ¿De qué otra manera se le llama al perímetro del círculo?	f) ¿Cuál es la medida en grados y en radianes del perímetro de un círculo?

2. La misma sala de arte sufre una remodelación que separa cada cuadro a 15 metros y mantiene al vigilante en un punto equidistante de todas las pinturas. ¿Cuál es ahora la distancia que hay del vigilante a cada cuadro?

3. ¿Podrías encontrar una fórmula para calcular la longitud de un pedazo de perímetro de círculo a partir de cualquier radio r y cualquier número n de divisiones de igual tamaño?

Anexo II Material didáctico: La circunferencia

Contexto: la cancha de futbol

¿Para qué sirve el semicírculo del área grande en una cancha de futbol? La ilustración A1 muestra un aspecto del área penal en una cancha de futbol. Nos ocupa la utilidad de su semicírculo. Utiliza el recuadro para redactar tu respuesta.

Ilustración A 1. Área penal en un campo de futbol.

¿Cómo sé si un jugador está dentro, sobre o fuera del semicírculo del área? Probablemente en una cancha real de futbol esta pregunta sea intrascendente, porque podemos ver a los jugadores y las líneas de cal en el campo; sin embargo, esto no aplicaría en un videojuego (ver ilustración 3), donde el programa de computadora tendría que responderla sin ese apoyo visual (que por supuesto no tiene).

Ilustración A 2. Aspecto del área penal en un videojuego. Fuente: tomado de (Futbolred, 2015).

¿Cómo sabe un videojuego si un jugador está dentro, sobre o fuera del semicírculo del área? Para responder esta pregunta, la geometría analítica es una estupenda herramienta. Una opción es modelar la cancha de futbol en el plano cartesiano (ilustración 4), de manera que el origen coincida con el punto de penalti; por simplicidad, consideremos que son 9 metros la distancia de dicho punto al semicírculo del área.

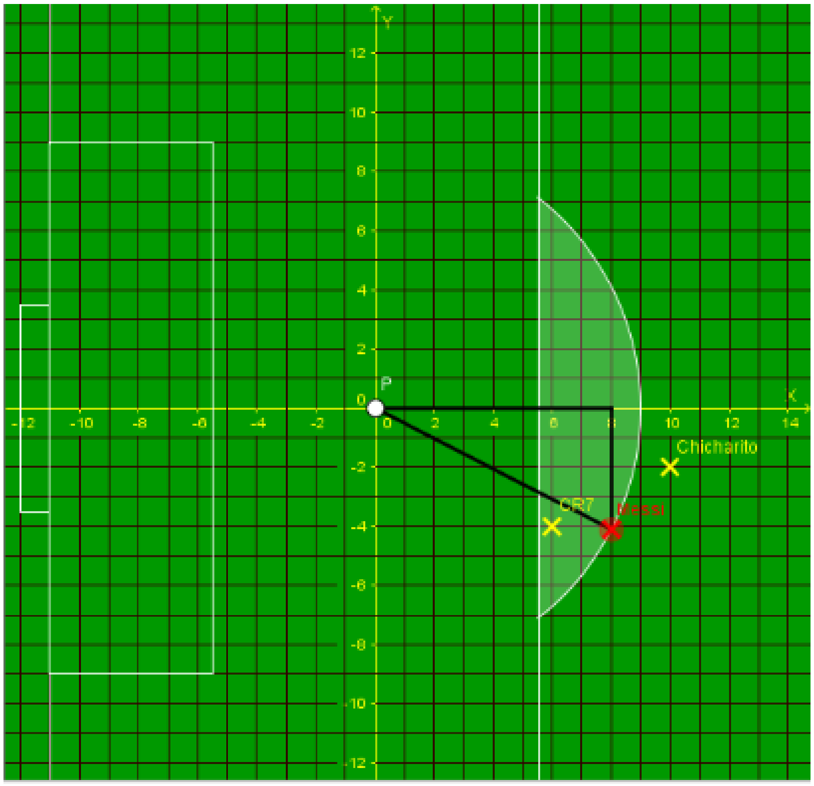


Ilustración A 3. Modelo de cancha de futbol con el punto penal como origen.

Actividad 1

Considera que Messi se mueve siempre sobre la curva que forma el semicírculo del área; su ubicación en el plano cartesiano puede representarse en cualquier momento a partir de las coordenadas (x, y).

a) Realiza un esquema para cada una de las posiciones del jugador en los puntos solicitados (dos respuestas). Establece en todos los casos una relación entre la distancia del punto penal hacia el lugar donde está el futbolista. Puedes auxiliarte del siguiente Applet de GeoGebra: [cancha 1](), en el cual puedes manipular el punto que representa a Messi.

Valor para x	Valor 1 para y	Valor 2 para y	Esquema	Relación entre la distancia del punto penal hacia el lugar donde está el futbolista
6				
7				
8				
9				

b) ¿Puedes generalizar tu relación para cualesquiera valores de la distancia, coordenada en x y coordenada en y? Presenta y argumenta tu respuesta en el siguiente cuadro.

c) ¿Tu relación generalizada funciona también para la otra portería? Argumenta tu respuesta.

d) Proporciona dos maneras de determinar si CR7 y Chicharito están invadiendo o no el espacio reservado para el cobrador del penalti.

e) En equipos de cuatro personas compara tus resultados, discute las ideas del grupo y complementa tus soluciones. Redacta las modificaciones a tus respuestas originales en el siguiente recuadro y las razones por las cuales cambiaste tus opiniones (**no hagas correcciones en las páginas previas**).

Actividad extraclase 1

Realiza el inciso a) de la Actividad 2.

Actividad 2

¿Qué pasaría si el origen fuese el centro de la portería y no el punto penal? Ahora representamos la cancha de interés en color azul (los puntos sobre ella son P, Messi, Chicharito y CR7) y mantenemos la cancha de nuestro problema original en color blanco (los puntos ahí son ahora P', Messi', Chicharito' y CR7'). Imagina que cada cancha está dibujada sobre un acetato diferente, de manera que se pueden superponer.

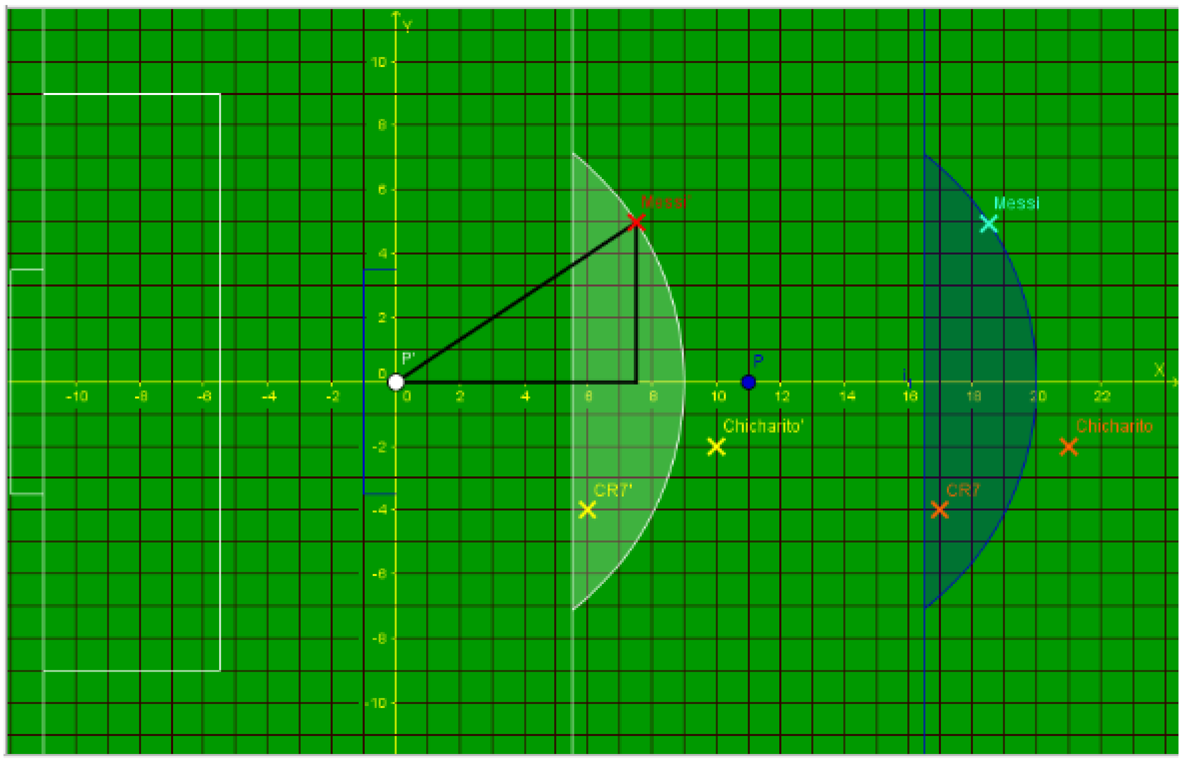


Ilustración A 4. Modelo de cancha de futbol con el centro de la portería como origen.

Realiza de forma individual el inciso a) de la actividad. Posteriormente, integra equipos de cinco personas para resolver el resto de los ejercicios. Al final de la sesión, expondrán sus respuestas ante el grupo.

a) A partir de la cancha azul, realiza un esquema para cada una de las posiciones de Messi en los puntos solicitados (dos respuestas). Establece en todos los casos una relación entre la distancia del punto penal (azul) hacia el lugar donde está el futbolista. Puedes auxiliarte del siguiente Applet de GeoGebra: [cancha 2](), en el cual puedes manipular el punto que representa al futbolista argentino.

b) Discute tus resultados con los integrantes del equipo, argumenta tus ideas y valora las de tus compañeros; entre todos elijan la solución que en cada caso les parece más adecuada.

Valor para x	Valor 1 para y	Valor 2 para y	Esquema	Relación entre la distancia del punto penal hacia el lugar donde está el futbolista
17				
18				
19				
20				

c) ¿Cómo calculas las coordenadas del punto P' (blanco) a partir del punto P (azul)? Si las coordenadas de los puntos en la semicircunferencia azul son (x, y) y los de la blanca son (x', y'), ¿Cómo calculas x' a partir de x y y' a partir de y? Argumenta tus respuestas (puedes usar el supuesto de que las canchas "están" en diferentes acetatos).

$P'_x =$

$P'_y =$

$x' =$

$y' =$

d) A partir de estas nuevas coordenadas, ¿cómo quedaría la ecuación que encontraste para el inciso b) de la Actividad 1?

e) ¿Funciona esta expresión para la otra portería? Argumenta tu respuesta.

f) ¿Cuáles son las similitudes y diferencias que encuentras entre ambas circunferencias?

Similitudes	**Diferencias**

Actividad extraclase 2

Traza un plano cartesiano en cada una de dos hojas de acetato tamaño carta. También en acetato dibuja y recorta dos círculos con los siguientes radios: 1, 2, 3 y 4 centímetros (ocho círculos en total); de preferencia auxíliate de un compás para que el centro de los círculos quede identificado con un orificio y traza un radio en todos ellos.

Actividad 3

Utiliza el material que construiste en la Actividad extraclase 2 para resolver los siguientes ejercicios. Numera tus planos cartesianos como 1 y 2; también numera los círculos de cada radio como 1 y 2.

a) Pega el círculo 1 de radio 1 en el plano 1, de manera que el centro coincida con el origen. Ahora pega el círculo 2 de radio 1 en cualquier lugar del primer cuadrante del plano 2 y considera que las coordenadas del centro son (h, k). ¿Qué debes hacer para que el centro de ambas circunferencias coincida con el origen? Redacta tu respuesta y represéntala gráficamente (sugerencia: desliza el plano 2 bajo el 1). Si las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia en el plano 2 son (x, y), ¿Cuáles son cuando trasladas su centro al origen? ¿Cuál es la ecuación que te permite ubicar cada punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen?

<table>
<tr><td colspan="2">Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta</td></tr>
<tr><td>Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:

(,   )</td><td>Ecuación:</td></tr>
</table>

b) Pega el círculo 1 de radio 2 en el plano 1, de manera que el centro coincida con el origen. Ahora pega el círculo 2 de radio 2 en cualquier lugar del segundo cuadrante del plano 2 y considera que las coordenadas del centro son (h, k). ¿Qué debes hacer para que el centro de ambas circunferencias coincida con el origen? Redacta tu respuesta y represéntala gráficamente (sugerencia: desliza el plano 2 bajo el 1). Si las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia en el plano 2 son (x, y), ¿Cuáles son cuando trasladas su centro al origen? ¿Cuál es la ecuación que te permite ubicar cada punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen?

<table>
<tr><td colspan="2">Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta</td></tr>
<tr><td>Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:

(,   )</td><td>Ecuación:</td></tr>
</table>

c) Pega el círculo 1 de radio 3 en el plano 1, de manera que el centro coincida con el origen. Ahora pega el círculo 2 de radio 3 en cualquier lugar del segundo cuadrante del plano 2 y considera que las coordenadas del centro son (h, k). ¿Qué debes hacer para que el centro de ambas circunferencias coincida con el origen? Redacta tu respuesta y represéntala gráficamente (sugerencia: desliza el plano 2 bajo el 1). Si las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia en el plano 2 son (x, y), ¿Cuáles son cuando trasladas su centro al origen? ¿Cuál es la ecuación que te permite ubicar cada punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen?

<table>
<tr><td colspan="2">Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta</td></tr>
<tr><td>Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:

(,   )</td><td>Ecuación:</td></tr>
</table>

d) Pega el círculo 1 de radio 3 en el plano 1, de manera que el centro coincida con el origen. Ahora pega el círculo 2 de radio 3 en cualquier lugar del segundo cuadrante del plano 2 y considera que las coordenadas del centro son (h, k). ¿Qué debes hacer para que el centro de ambas circunferencias coincida con el origen? Redacta tu respuesta y represéntala gráficamente (sugerencia: desliza el plano 2 bajo el 1). Si las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia en el plano 2 son (x, y), ¿Cuáles son cuando trasladas su centro al origen? ¿Cuál es la ecuación que te permite ubicar cada punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen?

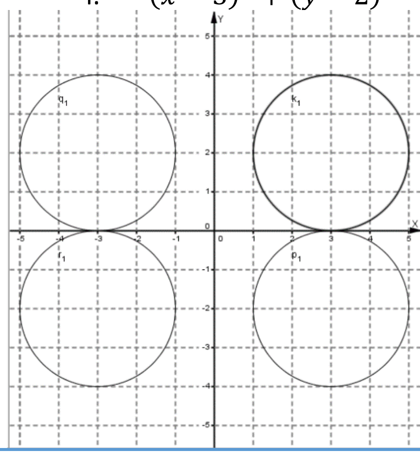
Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta	
Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (,)	**Ecuación:**

e) Integra equipos de cinco personas para construir una única ecuación que considere los cuatro casos vistos anteriormente. Argumenten su respuesta.

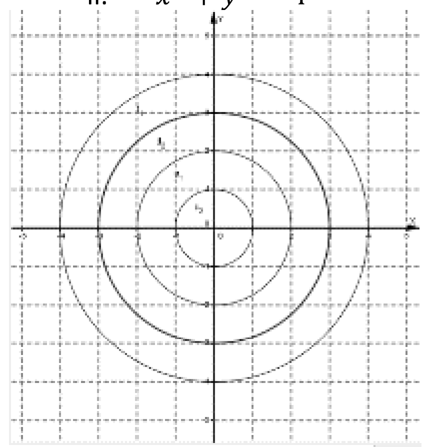
Actividad extraclase 3

a) Remarca con color la circunferencia que corresponde a la ecuación.

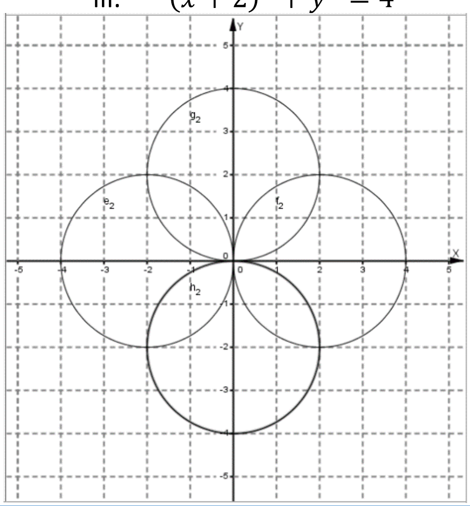
i. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$



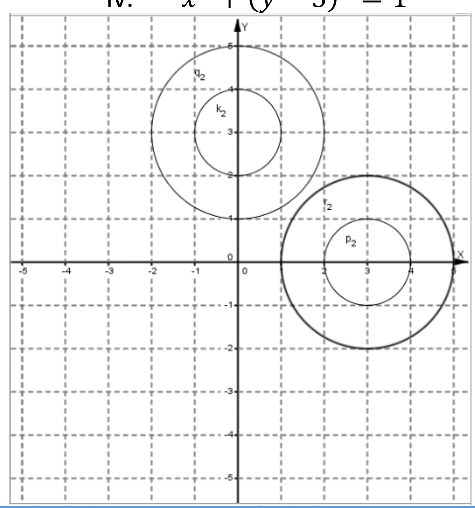
ii. $x^2+y^2=4$



iii. $(x+2)^2+y^2=4$

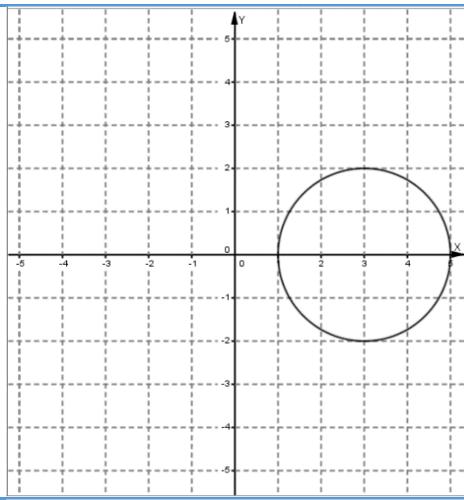
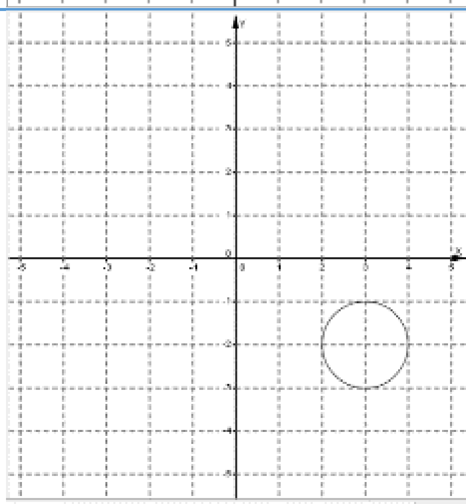
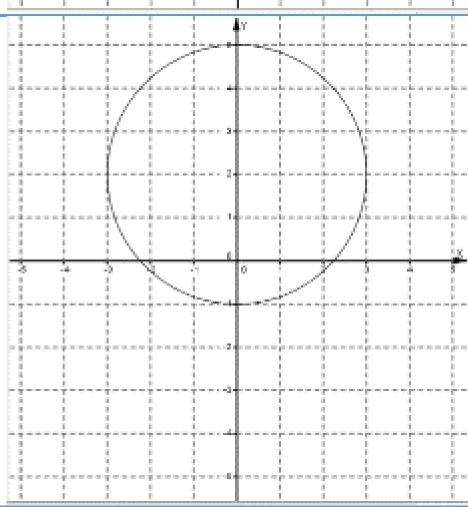


iv. $x^2+(y-3)^2=1$



b) Argumenta en el siguiente recuadro al menos dos de tus respuestas al inciso anterior. Recuerda indicar el numeral al que corresponde tu explicación.

c) Selecciona la ecuación que corresponde a la gráfica e identifica las coordenadas del centro y la medida del radio.

	i. $x^2 + (y-3)^2 = 4$ ii. $x^2 + (y+3)^2 = 4$ iii. $(x-3)^2 + y^2 = 4$ iv. $(x+3)^2 + y^2 = 4$
	i. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ ii. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$ iii. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 2$ iv. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2$
	a) $(x-2)^2 + y^2 = 9$ b) $(x-2)^2 + y^2 = 3$ c) $x^2 + (y-2)^2 = 6$ d) $x^2 + (y-2)^2 = 9$

d) Argumenta cuál es tu estrategia para resolver este tipo de ejercicios.

Actividad 4

En los siguientes casos, identifica los que corresponden a una circunferencia, obtén las coordenadas de su centro, la medida del radio y su gráfica; si la ecuación no es de una circunferencia, argumenta por qué (si este es el caso, no tienes que encontrar centro y radio). Posteriormente, utiliza GeoGebra para comprobar tus resultados, los cuales discutirás con tus compañeros al final de la sesión.

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$		
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$		
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$		

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	**Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia**
Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	**Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia**

Actividad 5

¿Cualquier ecuación de segundo grado es una circunferencia? Para descubrirlo, tendrás que aplicar tus habilidades algebraicas.

a) Desarrolla los cuadrados de la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h,k)$ hasta que llegues a una expresión del tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. ¿Cuánto valen D, E y F en términos de las coordenadas del centro de la circunferencia?

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados:	$\boldsymbol{D=}$
	$\boldsymbol{E=}$
	$\boldsymbol{F=}$

b) Ahora aplica reversa. Parte de la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ y llega a una expresión de la forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (sugerencia: completa el trinomio cuadrado perfecto). ¿Cuáles son las coordenadas del centro? ¿Cuánto vale r^2 en términos de D, E y F? Argumenta qué pasa si el segundo miembro de la ecuación resultante es positivo, negativo o cero.

<table>
<tr><td colspan="3">Desarrollo de $\boldsymbol{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$ a $\boldsymbol{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{C=\left(—,—\right)}$</td><td>$\boldsymbol{r^2=}$</td></tr>
<tr><td>Segundo miembro $\boldsymbol{>0}$</td><td>Segundo miembro $\boldsymbol{<0}$</td><td>Segundo miembro $\boldsymbol{=0}$</td></tr>
</table>

c) Describe un procedimiento para saber si una ecuación $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ o una de la forma $\frac{G(Ix+J)^2}{H}+\frac{K(My+N)^2}{L}=P$ pertenece a una circunferencia.

Actividad extraclase 4

¿Eres capaz de descubrir cuál de las siguientes dos ecuaciones es una circunferencia? Para lograrlo, deberás probar el procedimiento que describiste en la Actividad 5. En los casos donde se trate de una circunferencia, indica además las coordenadas de su centro y la medida del radio. Comprueba tus resultados con GeoGebra y bosqueja la gráfica obtenida con el paquete.

Ecuación	¿Es circunferencia?	Centro	Radio
a) $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$		(,)	
b) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$		(,)	
c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$		(,)	
d) $\frac{(3x+1)^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$		(,)	
e) $\frac{(3x+1)^2}{9} + y^2 = 2$		(,)	
Gráfica (señala el inciso)			

Actividad 6

En geometría analítica resulta de interés la resolución de ciertos problemas relativos a circunferencias, tales como aquellos donde la curva está sujeta a tres condiciones dadas o los relativos a tangentes.

a) Describe los pasos que seguirías para encontrar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1,-4)$, $(2,-1)$ y cuyo centro está sobre la recta $4x + 7y + 5 = 0$.

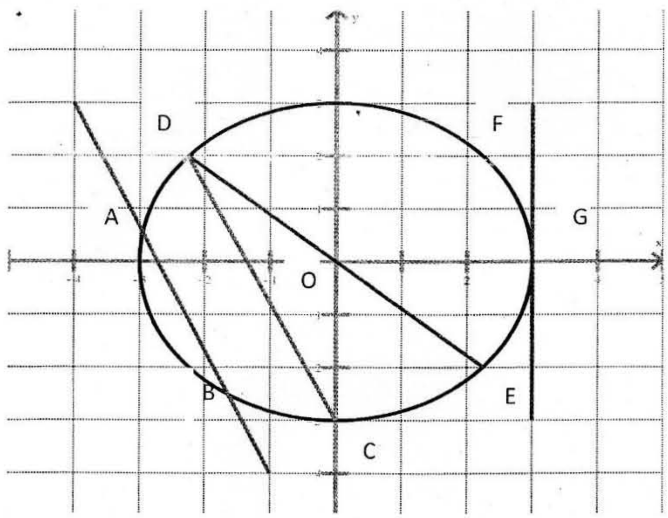
b) Describe el procedimiento que seguirías para hallar la ecuación de la recta tangente a una circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, conociendo el punto de contacto.

CIERRE

Con base en la información y actividades desarrolladas en este tema, realiza los siguientes ejercicios, que te permitirán reafirmar tus conocimientos y tener una idea de lo aprendido y de lo que aun debes reforzar para lograr tus aprendizajes.

Ejercicio no.18 **Individual**

Calcular la altura del triángulo que se encuentra en la figura siguiente.



Anota la letra que corresponde a cada elemento de acuerdo a la figura

Radio	( )
Tangente	( )
Cuerda	( )
Diámetro	( )
Secante	( )

108

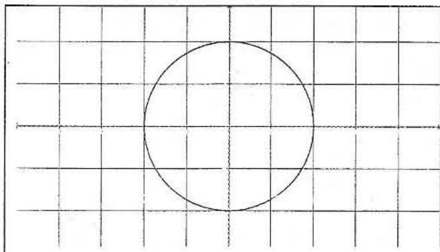
Ilustración A 5. Ejercicio 19 del libro de texto. Fuente: tomado de (Figueroa, Perea, & Cruz, 2013, pág. 108).

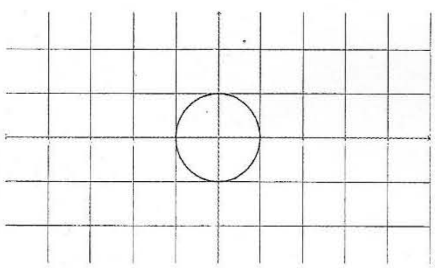
Las actividades siguientes te permitirán desarrollar tus conocimientos en relación a circunferencia. Realiza cada una de ellas de acuerdo a como se te indique en cada caso.

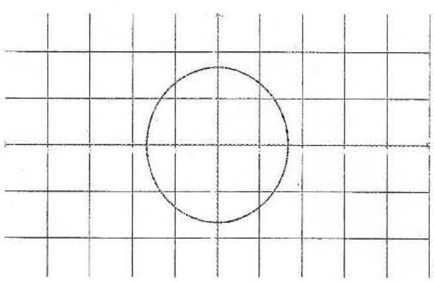
DESARROLLO

Ejercicio no.19 **Individual**

Relaciona cada una de las siguientes ecuaciones con su figura representativa correspondiente.


(A)


(B)


(C)

$X^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow (\ \ )$

$7x^2 + 7y^2 = 9 \Longrightarrow (\ \ )$

$X^2 + y^2 - 9 = 0 \Longrightarrow (\ \ )$

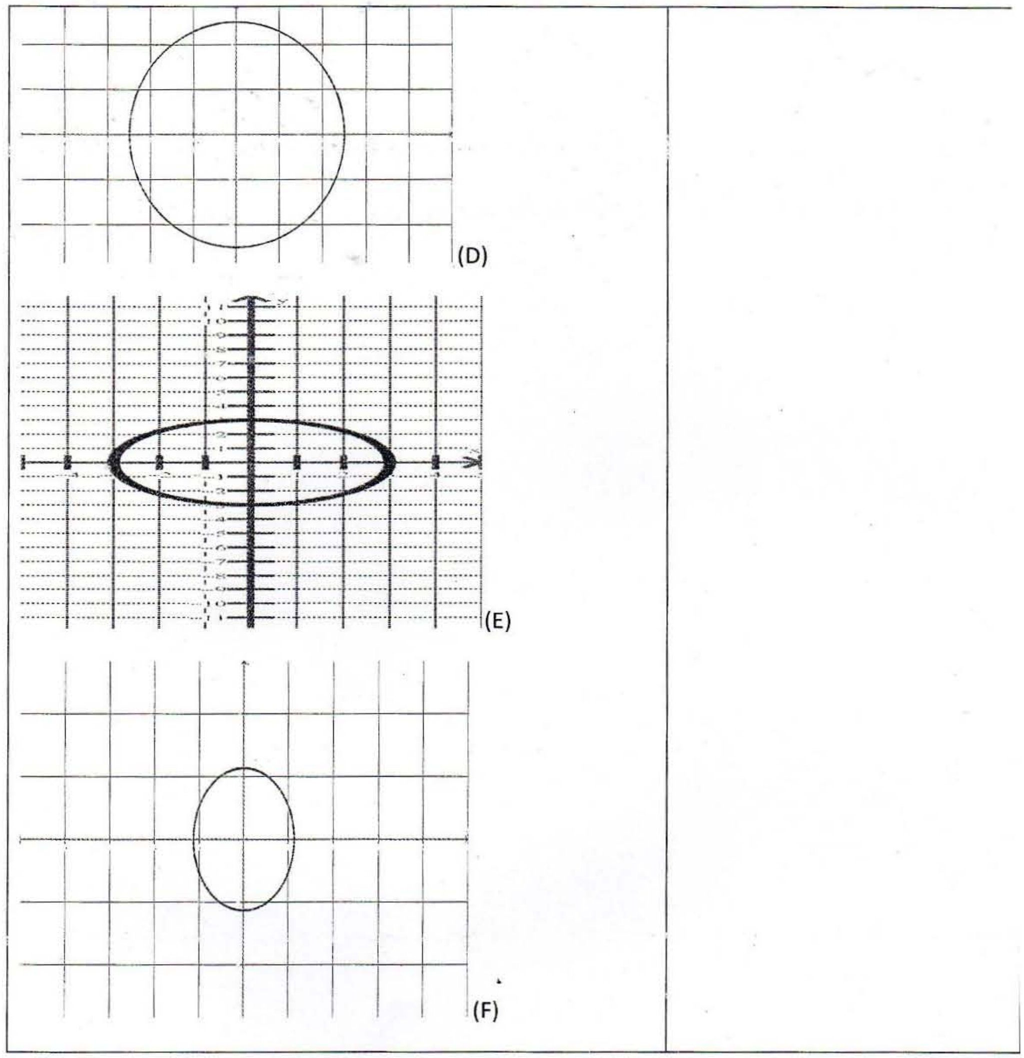
$X^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow (\ \ )$

$9X^2 + 9y^2 = 25 \Longrightarrow (\ \ )$

$4X^2 + 4y^2 = 25 \Longrightarrow (\ \ )$

110

Ilustración A 6. Ejercicio 19 del libro de texto (primera parte). Fuente: tomado de (Figueroa, Perea, & Cruz, 2013, pág. 110).

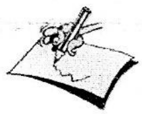


111

Ilustración A 7. Ejercicio 19 del libro de texto (segunda parte). Fuente: tomado de (Figueroa, Perea, & Cruz, 2013, pág. 111).

Realiza el siguiente ejercicio según se indica, de tal manera que logres retroalimentar lo visto en clase.

Ejercicio no. 20 **Individual**



Identifica cuál de las siguientes ecuaciones representa a la circunferencia con centro en el origen.

1. $(x\text{-}h)^2 + (y\text{-}k)^2 = 0$
2. $(x\text{-}3)^2 + (y\text{-}2)^2 = 9$
3. $Y^2 = 12x$
4. $Y^2 = 12x+4$

Ilustración A 8. Ejercicio 20 del libro de texto. Fuente: tomado de (Figueroa, Perea, & Cruz, 2013, pág. 112).

Las actividades siguientes te permitirán desarrollar tus conocimientos en relación a la circunferencia. Realiza cada una de ellas de acuerdo a como se te indique en cada caso

Ejercicio no. 21 **Grupo**

Reúnete en equipos de dos integrantes para completar la siguiente tabla.

Centro **C(h,k)**	**Radio** **r**	**Ecuación de la circunferencia**	**Centro** **C(h,k)**	**Radio** **r**	**Ecuación de la circunferencia**
C(0,0)	9	$X^2 + y^2 = 81$	C(0,0)	3	
C(0,0)			C(0,0)	6	
C(0,0)	12				$X^2 + y^2 = 625$
		$X^2 + y^2 = 4$	C(2,4)	5	$(x-2)^2+(y-4)^2=25$
C(0,3)	7				$(x-4)^2+(y-2)^2=64$
C(2,4)	4				$(x-3)^2+(y-4)^2=10$
C(2,1)	3				$(x+2)^2+(y-3)^2=39$
		$(x-7)^2+(y+10)^2=100$			$(x-1)^2+(y-4)^2=25$
		$(x+2)^2+(y+1)^2= 5$	C(0,0)	7	
		$(x-9)^2+(y-3)^2=32$	C(0,0)	1	

114

Ilustración A 9. Ejercicio 21 del libro de texto. Fuente: tomado de (Figueroa, Perea, & Cruz, 2013, pág. 114).

Ejercicio no. 22 **Grupo**

Después de la exposición del profesor, en equipos de dos integrantes completa la siguiente tabla.

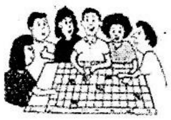
Transformaciones de la ecuación ordinaria a la forma general y viceversa.

Forma ordinaria $(x-4)^2+(y+5)^2= 9$ *Forma general* $X^2+ y^2-8x+10y+32=0$	Procedimiento : $(x-4)^2+(y+5)^2= 9$ *Desarrollando los binomios:* $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 2\,5 - 9 = 0$ *Reduciendo términos semejantes* $x^2+ y^2-8x + 10y+32 =0$
Forma ordinaria $(x+1)^2+(y-5)^2= 16$ *Forma general*	
Forma ordinaria $(x-7)^2+(y-6)^2= 89$ *Forma general*	
Forma ordinaria $(x+3)^2+(y+5)^2= 49$ *Forma general*	
Forma ordinaria $(x-2)^2+(y-1)^2= 1$ *Forma general*	

115

Ilustración A 10. Ejercicio 22 del libro de texto. Fuente: tomado de (Figueroa, Perea, & Cruz, 2013, pág. 115).

Ejercicio no. 23 **Grupo**



Reunidos en equipos de dos integrantes, completar la siguiente tabla con la información correspondiente.

Forma general $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ *Forma ordinaria* $(x-2)^2+(y-1)^2=10$	Procedimiento $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ *Completando cuadrados* $x^2- 4x+\_\_\_ + y^2- 2y+\_\_\_=5$ $x^2- 4x+ (4) + y^2- 2y+ 1 =5+4+1$ $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

Forma general *x2 + y2 - 12x - 16y = 0* *Forma ordinaria*	
Forma general *x2 + y2 + 5x + 6y - 9 = 0* *Forma ordinaria*	
Forma general *x2 + y2 + 6x - 14y - 64 = 0* *Forma ordinaria*	
Forma general *x2 + y2 + 4x - 8y = 0* *Forma ordinaria*	
Forma general *x2 + y2 - 10y = 0* *Forma ordinaria*	

Ilustración A 11. Ejercicio 23 del libro de texto. Fuente: tomado de (Figueroa, Perea, & Cruz, 2013, págs. 116-117).

Anexo III. Respuestas a la secuencia didáctica

Contexto: la cancha de futbol

El futbol es el deporte favorito en gran parte del mundo, particularmente en México, situación que se intenta aprovechar para significar la construcción de la ecuación de la circunferencia. A pesar de ver una gran cantidad de partidos en un mes, en realidad son pocos los aficionados que identifican aplicaciones de la geometría en el trazo de la cancha. Particularmente, el semicírculo del área permite al árbitro saber que los jugadores se encuentran a la distancia reglamentaria de 9.15 metros en relación con el punto de penalti cuando este se va a cobrar, sin tener que estar midiendo la distancia hacia cada jugador. Se trata de una circunferencia con centro en el manchón penal y radio 9.15 metros, solamente que no hay necesidad de trazarla completa.

Actividad 1

La geometría analítica encuentra un amplio campo de aplicación en el desarrollo de los videojuegos, elemento que ayuda en la significación ya mencionada para la construcción de la ecuación de la circunferencia. Podemos imaginar entonces un videojuego en donde la posición de jugadores, balón, árbitro y porterías, así como el trazo de la cancha, se identifica en un sistema de coordenadas. La distancia entre dos puntos es la herramienta que nos permite saber si un jugador está dentro, sobre o fuera del semicírculo del área al cobrarse un penalti.

En el inciso a), el alumno podría idear diferentes estrategias, incluso utilizar el Applet sugerido para medir. La discusión puede orientarse hacia el cálculo de la distancia entre dos puntos o, equivalentemente, a la aplicación del teorema de Pitágoras. Es este el caso que nos interesa, porque la intención es dar significado a la ecuación canónica de la circunferencia a través de la trigonometría. Cabe señalar que los valores para y son aproximados.

Valor para x	**Valor 1 para y**	**Valor 2 para y**	**Esquema**	**Relación entre la distancia del punto penal hacia el lugar donde está el futbolista**
6	6.71	-6.71		$6^2 + (\pm 6.71)^2 \approx 9$
7	5.64	-5.64		$7^2 + (\pm 5.64)^2 \approx 9$
8	4.1	-4.1		$8^2 + (\pm 4.1)^2 \approx 9$
9	0			$9^2 + 0^2 = 9$

Para el inciso b), si Messi se mueve libremente por el semicírculo del área, podemos suponer que las coordenadas de su ubicación son (x, y). Ya que el jugador se encuentra a una distancia horizontal x y a una distancia vertical y del manchón de penalti, la distancia del punto penal hacia él puede representarse por la relación $r^2 = x^2 + y^2$. La intención es orientar al estudiante a llegar a esta expresión y hacer notar que es válida sin importar el signo de la ordenada en la posición de Messi.

En el inciso c), el estudiante puede darse cuenta de que en realidad se trata del mismo problema planteado en los incisos anteriores, visualizando la cancha como si se girara horizontalmente. Es deseable hacer notar las combinaciones de signos que podrían tener las coordenadas (x, y) para el jugador y hacer ver que la expresión construida en el inciso anterior es igualmente válida.

Por otra parte, en el inciso d) se puede obtener la distancia del punto penal hacia cada jugador y compararla con el radio; si el resultado es menor o igual a 9, hay invasión del espacio destinado al cobrador. Ya que Messi se mueve sobre el semicírculo, es posible también comparar directamente la coordenada en x de las ubicaciones de él y los otros jugadores.

El inciso d) lleva la intención de que el estudiante obtenga aprendizaje a partir de la reflexión sobre las diferencias entre sus respuestas originales y las que obtuvo al final del trabajo en equipo.

Actividad 2

Aquí se prepara el camino para que el participante construya el significado de la ecuación ordinaria de la circunferencia sin tener que aprenderla como fórmula, a través de la comprensión de lo que significa una traslación de los ejes coordenados y tomando como base la ecuación canónica previamente obtenida por razonamientos trigonométricos.

En el inciso a) se puede orientar la discusión con el estudiante hacia la comparación de sus resultados con el mismo inciso de la actividad 2. Nuevamente, los valores para y son aproximados.

Valor para x	**Valor 1 para y**	**Valor 2 para y**	**Esquema**	**Relación entre la distancia del punto penal hacia el lugar donde está el futbolista**
17	6.7	-6.7		$(17-11)^2+(\pm 6.7)^2 \approx 9$
18	5.75	-5.75		$(18-11)^2+(\pm 5.75)^2 \approx 9$
19	4.05	-4.05		$(19-11)^2+(\pm 4.05)^2 \approx 9$
20	0			$(20-11)^2+0^2=9$

La esencia del inciso c) es que el alumno se dé cuenta de que la coordenada en x del plano blanco la puede obtener restando 11 unidades a la coordenada en x del plano azul. En este caso la coordenada en y no sufre modificaciones.

En el inciso d) se espera dar significado a la expresión $x-11$ como el desplazamiento hacia la izquierda que sufren todos puntos de la circunferencia del plano azul para que el punto de penal (su centro) coincida con el origen. De este modo, $x'=x-11$; sustituyendo en la ecuación canónica tendríamos $(x-11)^2+(y')^2=r^2$.

El inciso e) es análogo al c) de la actividad 2. En tanto, el inciso f) se presta a la reflexión de que las circunferencias tienen el mismo radio y perímetro, pero difieren en las coordenadas de su centro y en la ecuación que representa a todos los puntos que las conforman.

Actividad 3

En este punto el asesor puede apoyar al participante estableciendo las ideas para llegar al significado de la ecuación ordinaria de la circunferencia. En principio, las coordenadas del centro de la circunferencia que se quiere trasladar son (h,k). En este caso, el desplazamiento en la coordenada en x de todos los puntos de dicha circunferencia se puede expresar por $x'=x-h$ o $x'=x+h$, dependiendo de si su centro se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha, respectivamente. En tanto, el desplazamiento en y de todos los puntos de la circunferencia queda determinado por $y' = y - k$ o $y' = y + k$, dependiendo de si el centro baja o sube.

Para los primeros cuatro incisos es posible que el estudiante llegue, respectivamente, a los siguientes resultados: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = 1^2$, $(x-h)^2 + (y+k)^2 = 1^2$, $(x+h)^2 + (y+k)^2 = 2^2$ y $(x+h)^2 + (y-k)^2 = 2^2$.

En el inciso e) los alumnos podrían llegar a cuatro expresiones como las planteadas en el párrafo anterior, cambiando solamente el radio específico por r. Quizás algunos lleguen a deducir que $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ en realidad funciona sin importar en qué cuadrante se encuentre la circunferencia. La hipótesis es que el estudiante no tiene que memorizar ni una ni cuatro ecuaciones, ya que dar significado a la traslación de las circunferencias hace irrelevante aprenderse la ecuación ordinaria y hacer las sustituciones clásicas de las coordenadas del centro, con las consecuentes problemáticas del trabajo con signos. El resultado de este experimento se podrá apreciar en la actividad extraclase 3.

Actividad extraclase 3

Se espera un trabajo de visualización por parte del estudiante, en el que identifique claramente las nociones de centro y radio y las aplique en la identificación de la gráfica de una circunferencia a partir de su ecuación y viceversa. En teoría, el alumno ha dado significado a la ecuación ordinaria de la circunferencia como un desplazamiento de los ejes coordenados h posiciones horizontales (restar significa ir a la izquierda y sumar es moverse a la derecha) y k[29] verticales (restar es bajar y sumar es subir) hasta hacer coincidir el centro con el origen, como si estuviera superponiendo dos acetatos.

En el inciso a) se proporcionan las ecuaciones y hay que elegir la gráfica correspondiente a la circunferencia.

i. El radio de todas las circunferencias es el mismo, de manera que no es factor para discriminar entre las gráficas. Se podría identificar que la circunferencia en el primer cuadrante es la única que al restar 3 unidades a la coordenada en x y 2 a la coordenada en y de todos sus puntos (recorrer el acetato hacia abajo y hacia la izquierda), su centro coincide con el origen.
ii. El centro de todas las circunferencias es el origen, por lo que este dato no ayuda a resolver el ejercicio. El estudiante debe reflexionar en el valor del radio, recordando que en la ecuación este se encuentra elevado al cuadrado y entonces elegir la circunferencia cuyo radio es 2.
iii. El radio de todas las circunferencias es el mismo, de manera que no es factor para discriminar entre las gráficas. Se podría identificar que la circunferencia ubicada entre el segundo y tercer cuadrante es la única tal que al sumar 2 unidades a la coordenada en x de todos sus puntos (recorrer hacia la derecha el acetato), se logra que su centro coincida con el origen.
iv. El radio en la ecuación es 1, por lo que deben descartarse las dos circunferencias de radio 2. La circunferencia de radio 1 ubicada entre el primero y el segundo cuadrante es la única

[29] En este caso, h y k se consideran valores sin signo.

tal que restar 3 unidades a la coordenada en y de todos sus puntos (desplazar hacia abajo el acetato), hace que su centro coincida con el origen.

En el inciso c) se da la gráfica y hay que elegir la ecuación de la circunferencia que le corresponde.

En el primer caso todas las ecuaciones tienen radio 2, de manera que no es factor para discriminar ecuaciones. Identificar que para hacer coincidir el centro de la circunferencia con el origen hay que restar 3 unidades a la coordenada en x de todos sus puntos (recorrer hacia la izquierda el acetato), puede conducir a elegir la respuesta iii.

En el segundo ejercicio el radio de la circunferencia graficada es 1, lo que descarta las respuestas iii y iv. Para hacer coincidir el origen con el centro de la circunferencia es necesario restar 3 unidades a las coordenadas en x y sumar 2 a las coordenadas en y de todos sus puntos (recorrer el acetato hacia la izquierda y hacia arriba), lo que conduce al inciso ii como respuesta.

Finalmente, en el tercer ejercicio el radio de la circunferencia graficada es 3, lo que descarta a los incisos ii y iii. Para hacer coincidir el centro de la circunferencia con el origen, es necesario restar 2 unidades a la coordenada en y de todos sus puntos (desplazar hacia abajo el acetato), lo que conduce al inciso iv como respuesta.

Actividad 4

En el inciso a) una diferencia de cuadrados en modo alguno puede corresponder a la ecuación de una circunferencia, dado que esta se construye a partir del teorema de Pitágoras; en realidad se trata de una hipérbola. El inciso b) sí corresponde a una circunferencia con centro en $(3,-1)$ y radio $r=\sqrt{3}$. Finalmente, en el inciso c) solamente una de las dos variables está elevada al cuadrado y la ecuación de la circunferencia requiere de términos cuadráticos tanto en x como en y; en realidad se trata de una parábola. Dado que en este punto del curso no se han estudiado ni la parábola ni la hipérbola, el uso de GeoGebra es un auxiliar en la gráfica para los incisos a) y c).

Actividad 5

En esta actividad se espera que el participante sepa cómo se construye la ecuación general de la circunferencia, a través de dar significado a los coeficientes de los términos lineales y el término constante. La aplicación de este conocimiento se da en la identificación de circunferencias cuando se le presenta una ecuación en la citada forma.

En el inciso a) se desarrollan los cuadrados y se iguala a cero la ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$; $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$. Tomando en cuenta valores $D=-2h, E=-2k, F=h^2+k^2-r^2$, se llega a la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

Ahora bien, dada la ecuación general en el inciso b), al completar cuadrados se obtiene $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$. De este modo, si $D^2+E^2-4F>0$, se trata de la ecuación de una circunferencia con centro en $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$; si $D^2+E^2-4F=0$, en realidad se tiene el punto $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$, y si $D^2+E^2-4F<0$, no es la representación de un lugar geométrico real.

Estos resultados dan la respuesta para el inciso c). Dada una ecuación de segundo grado en dos variables sin término mixto, se debe buscar que los coeficientes de los dos términos cuadráticos sean uno y analizar el valor de D^2+E^2-4F. El otro tipo de ecuación es más complejo; una posibilidad es llevar la expresión a la ecuación de segundo grado y aplicar el procedimiento descrito un par de líneas atrás.

Actividad extraclase 4

a) Luego de dividir la ecuación entre 2 se tiene:
$$-2h=-5 \therefore h=\frac{5}{2};\ -2k=3 \therefore k=-\frac{3}{2};\ h^2+k^2-r^2=-\frac{15}{2} \therefore r=4.$$
La circunferencia tiene centro en $C\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y radio $r=4$.

b) Después de dividir toda la ecuación entre 36, se tiene que
$$-2h=\frac{4}{3} \therefore h=-\frac{2}{3};\ -2k=-3 \therefore k=\frac{3}{2};\ h^2+k^2-r^2=97 \therefore r=0.$$
Se trata del punto $\left(-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$.

c) $-2h=-8 \therefore h=4;\ -2k=6 \therefore k=-3;\ h^2+k^2-r^2=29 \therefore r^2=-4$. No es un lugar geométrico real.

d) Podría parecer que se trata de una circunferencia, ya que al multiplicar por 9 ambos miembros de la ecuación, tenemos una suma de cuadrados igualada a una cantidad positiva. Sin embargo, el coeficiente de x^2 no será el mismo que el de y^2. Se trata de una elipse.

e) Sí es una circunferencia; al multiplicar por 9 toda la ecuación, se desarrolla el cuadrado en el primer binomio y se divide entre 9, se obtiene la ecuación $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=2$, que corresponde a una circunferencia con centro en $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ y radio $r=\sqrt{2}$.

Actividad 6

Una forma de resolver el inciso a) puede ser sustituir los puntos dados en la ecuación ordinaria de la circunferencia y desarrollar los cuadrados hasta llegar a dos ecuaciones de segundo grado donde las incógnitas son las coordenadas del centro; ambas ecuaciones se reducen a una sola de primer grado. Dado que las coordenadas del centro satisfacen la ecuación resultante y también la que se da en el enunciado del problema, solamente resta resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por cualquier método (analítico o gráfico) para obtener las coordenadas del centro. A partir de esto, el radio se puede encontrar sustituyendo dichas coordenadas en alguna de las ecuaciones de segundo grado o incluso con la distancia hacia alguno de los puntos dados por el problema. Finalmente, con estos elementos ya es posible encontrar la ecuación ordinaria (directa) o la ecuación general de la circunferencia buscada (a través de los valores para D, E y F).

Aunque no se solicita el resultado, sino la descripción de los pasos, la solución parte entonces de reducir el sistema de dos ecuaciones de segundo grado a $h+k+2=0$. La intersección con la recta $4h+7k+5=0$ se da con $h=-3$ y $k=1$. Sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones de segundo grado, se obtiene $r = \sqrt{29}$. La ecuación ordinaria de la circunferencia buscada es $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 29$ y la general $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 19 = 0$.

En el inciso b), se parte de la ecuación general de la circunferencia dada (conocida) para encontrar el centro $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$. Se calcula la pendiente m_r del radio trazado del centro al punto de contacto. Dado que el radio es perpendicular a la tangente, se busca la pendiente m_t tal que multiplicada por m_r dé por resultado -1. Con m_t y el punto de contacto se encuentra la ecuación de la tangente buscada.

Anexo IV. Rúbrica para evaluar el desempeño en clase

Nombre del estudiante:	Nombre del profesor:
Institución: Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México, plantel Tequixquiac	

Criterios **Evalúa**	**Nivel** **4. Excelente**	**3. Satisfactorio**	**2. Puede mejorar**	**1. Insuficiente**
A. Administración de recursos disponibles (tiempo, materiales, compañeros de equipo) **Profesor**	Administra los recursos disponibles y logra las metas establecidas	Logra las metas, pero se excede ligeramente en el uso de los recursos disponibles o manifiesta un grado bajo de desperdicio de los mismos	Se excede consistentemente en el uso de los recursos o en el desperdicio de los mismos, y se queda corto en relación con la meta	Termina no entregando los trabajos, o bien los entrega en forma tardía y con baja calidad, con desperdicio evidente de recursos
B. Habilidades comunicativas **Equipo**	Consigue comunicar sus ideas a los demás, utilizando correctamente la expresión oral y la expresión escrita. Aplica varios tipos de representaciones (lingüistas, matemáticas o esquemáticas)	Consigue comunicar sus ideas a los demás, utilizando correctamente la expresión oral y la expresión escrita. Aplica frecuentemente el mismo tipo de representación (lingüista matemática o esquemática)	Consigue comunicar sus ideas y opiniones ante los demás, pero solamente lo hace de manera correcta en forma oral o en forma escrita, a pesar de sus esfuerzos evidentes por hacerlo correctamente	No muestra interés por desarrollar sus habilidades comunicativas
C. Participación y colaboración en equipos de trabajo **Equipo**	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, respetando las opiniones de los demás, argumentando y defendiendo sus puntos de vista	No es propositivo, pero trabaja al parejo del equipo, a partir de un plan aceptado por el equipo. Respeta las opiniones de los demás argumentando y defendiendo sus puntos de vista	Es propositivo en el equipo, pero desea imponer su opinión sin respetar las ideas de sus compañeros o sin argumentar debidamente sus puntos de vista	Participa al mínimo en el trabajo o en definitiva no colabora en los trabajos. Busca que sus compañeros le regalen la calificación anotándolo en la entrega
D. Resolución de problemas **Alumno**	Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye a la resolución de un problema	Resuelve los problemas por casualidad, sin reflexión ni método	No alcanza a resolver los problemas que se le plantean, aunque es evidente el esfuerzo que realiza en su actividad	No llega a la resolución del problema y no muestra un mínimo de interés y esfuerzo por trabajar
E. Aprendizaje para la vida por iniciativa e interés propio **Alumno y Profesor**	Define metas académicas y da seguimiento a su proceso de aprendizaje fuera de clases de manera consistente	Define metas académicas, pero escasamente da seguimiento a su proceso de aprendizaje fuera de clases	No define metas académicas y el seguimiento que le da a su proceso de aprendizaje es dentro de la clase, porque en ella sí toma interés por él	No es capaz de articular los nuevos conocimientos con los ya existentes, ni de relacionarlos con su vida cotidiana

Anexo V. Lista de cotejo para evaluar tareas

Nombre del estudiante:
Nombre del profesor:
Institución: Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de México, plantel Tequixquiac

Objetivo del instrumento:	Evaluar el trabajo extraclase del estudiante consistente en la resolución de problemas del libro de texto, correspondientes al tema de la circunferencia.

Número de aspecto	**Aspecto específico a verificar**	**Puntaje posible**	**Puntaje alcanzado Tarea 1**	**Puntaje alcanzado Tarea 2**	**Puntaje alcanzado Tarea 3**
A1	La solución proporcionada por el estudiante es correcta	**1.0 a 3.0**			
A2	El estudiante argumenta de manera coherente los procedimientos realizados	**1.0 a 3.0**			
A3	El trabajo está completo	**1.0 a 3.0**			
A4	El estudiante aplica diferentes enfoques en la resolución de los problemas	**0.0 ó 1.0**			
A5	El trabajo es original (no copiado)	**-5.0 / 0.0**			
	TOTAL	**-2.0 a 10.0**			

Observaciones: ____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

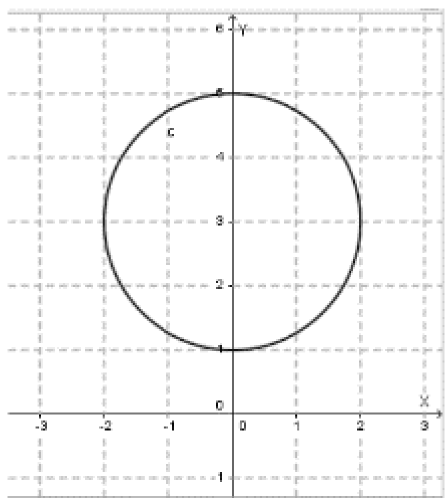
____

____

Anexo VI. Examen

Instrucciones. Lee detenidamente el planteamiento de los siguientes dos ejercicios y utiliza únicamente los recuadros para redactar la argumentación o el desarrollo de tus soluciones.

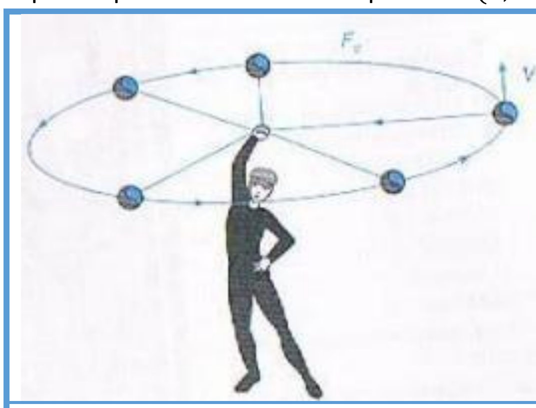
1. Dada la siguiente circunferencia, subraya la ecuación que le corresponde (**valor 1 punto**) y argumenta tu respuesta (**valor 1.5 puntos**).



a) $x^2 + (y-3)^2 = 4$
b) $x^2 + (y+3)^2 = 4$
c) $(x-3)^2 + y^2 = 4$
d) $(x+3)^2 + y^2 = 4$

Argumentación:

2. Una gimnasta hace girar una pelota atada a un lazo de 1.2 metros de longitud, como se muestra en la imagen. Auxíliate de un plano cartesiano (**valor 1 punto**) para determinar si la pelota podría ubicarse en la posición $(1, 1.2)$ (**valor 1.5 puntos**).



Gráfica

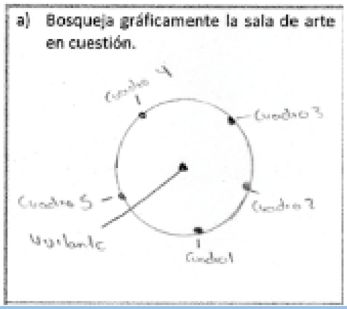
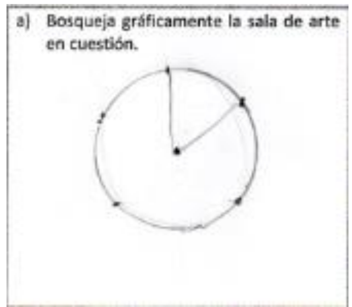
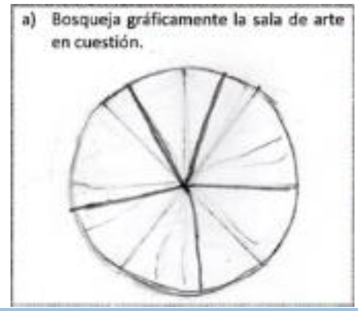
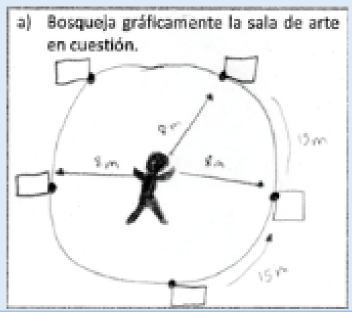
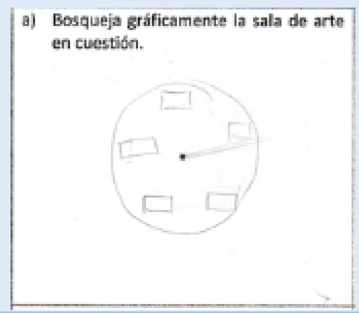
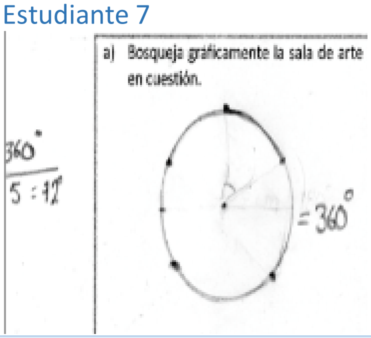
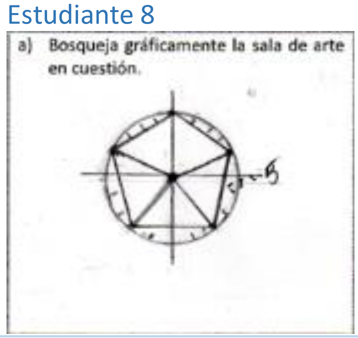
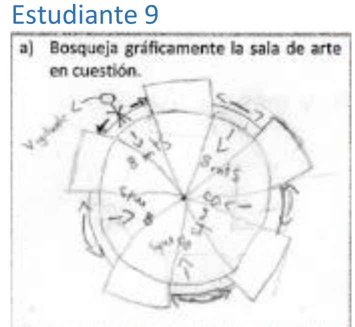
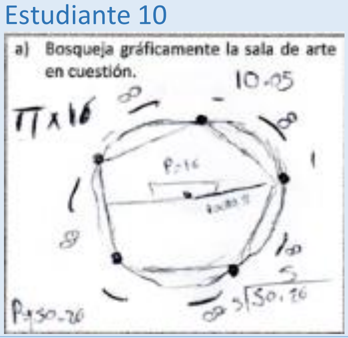
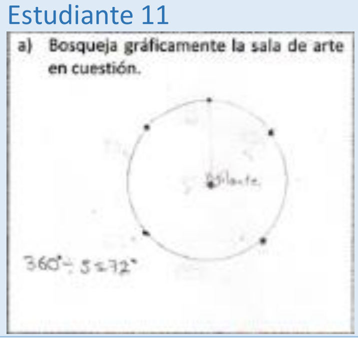
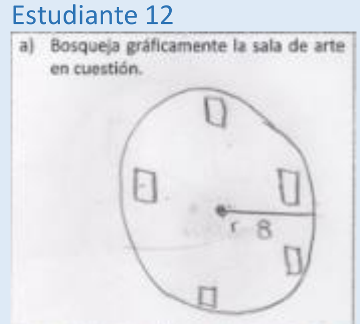
De acuerdo con tu gráfica, ¿la pelota puede ubicarse en la posición $(1, 1.2)$?

Sí (   )   No (   )

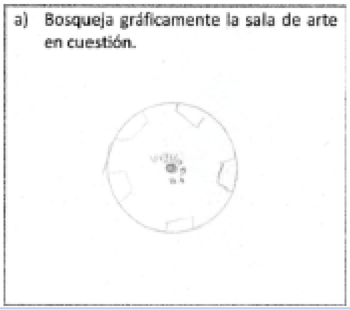
Desarrollo:

Anexo VII. Tabulación de resultados

Tabla 8. Respuestas al examen diagnóstico en clase: pregunta 1, inciso a).

Estudiante 1 	Estudiante 2 	Estudiante 3 
Estudiante 4 No hizo el examen en clase	Estudiante 5 	Estudiante 6 
Estudiante 7 	Estudiante 8 	Estudiante 9 
Estudiante 10 	Estudiante 11 	Estudiante 12 

Estudiante 14

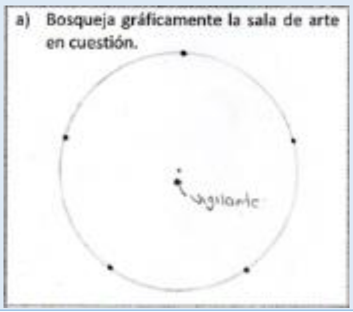


Estudiante 15

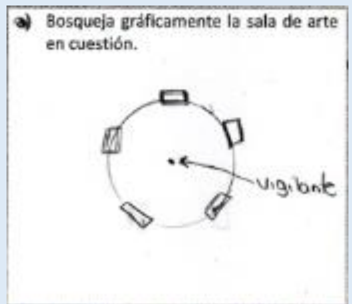
No hizo el examen en clase

Estudiante 18

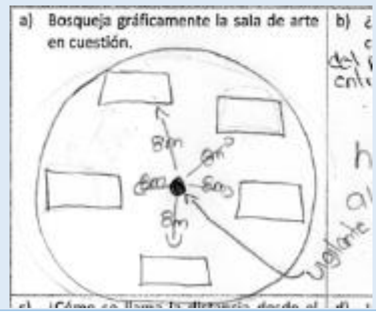
Estudiante 19



Estudiante 20

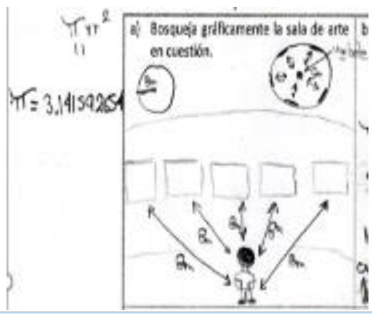


Estudiante 21

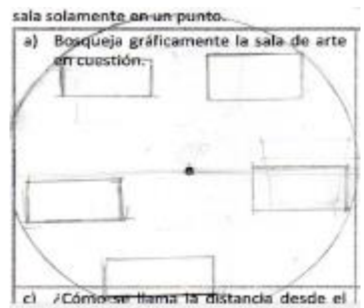


Estudiante 22

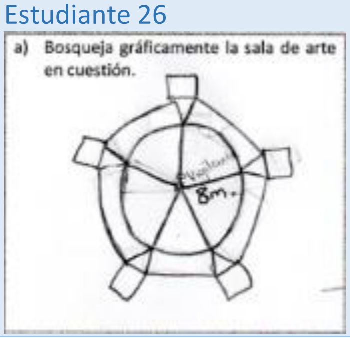
Estudiante 23



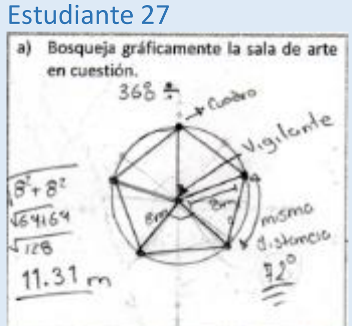
Estudiante 24



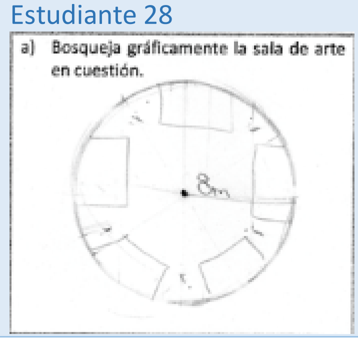
Estudiante 26



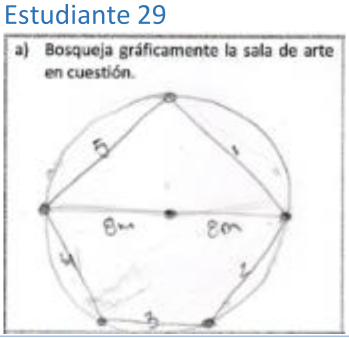
Estudiante 27



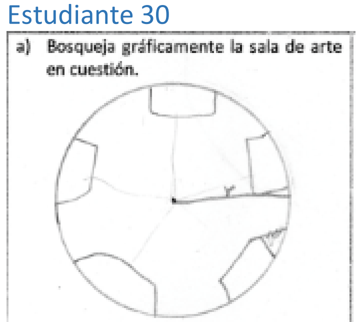
Estudiante 28



Estudiante 29



Estudiante 30



Estudiante 31

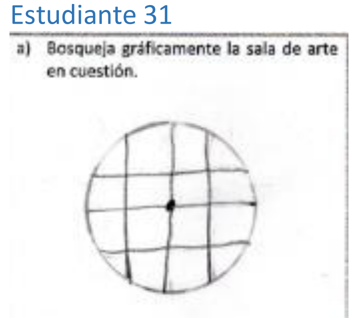


Tabla 9. Respuestas al examen diagnóstico en clase: pregunta 1, inciso b).

Estudiante 1 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? es decir que porcion del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro R = 72° R = 10.05 Sacar Perimetro y dividirlo entre 5 π x Diametro	Estudiante 2 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? es decir que porcion de perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro P = l x l P = 8x8x8x8x8	Estudiante 3 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? Es decir que porción del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro.
Estudiante 4 No hizo el examen en clase	Estudiante 5 b) ~~¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro?~~ π x Diametro → Perimetro $3.14 \times 16 = \frac{50.24}{5} = 10.04$	Estudiante 6 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? Es decir que porción del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro. Distancia 7.11 3.16 x16 50.56 $\sqrt{50.56} = 7.11$
Estudiante 7 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? Es decir que porción del Perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro. $F = l \times l^2$ 8×8^2	Estudiante 8 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? [illegible] R = 1.5 x 5 1.6.0 5	Estudiante 9 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? es decir que porción del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro. $P = \frac{\pi \times r}{2}$ 3.14 x 16 50.24 $\frac{50.24}{5} = 10.04$
Estudiante 10 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? R = 10.05	Estudiante 11 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? Es decir que porción del perimetro de la Sala hay entre cuadro y cuadro. P = l x l P = 8 x 8 x 8 x 8 x 8	Estudiante 12 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? que porcion del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro 22.5 cm 360 ÷ 16
Estudiante 14	Estudiante 15 No hizo el examen en clase	Estudiante 18

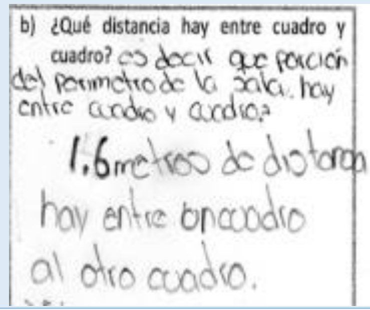
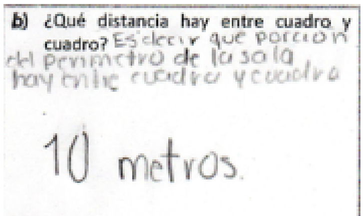
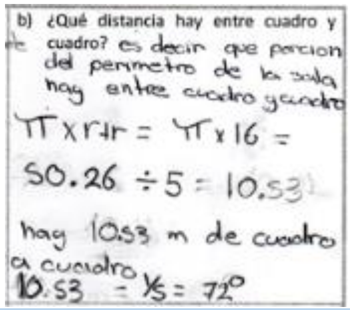
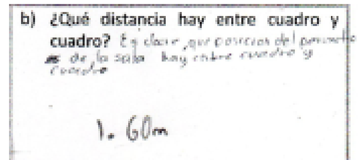
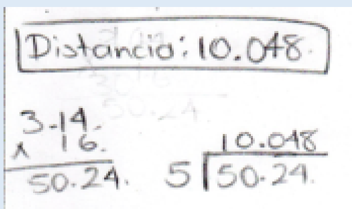
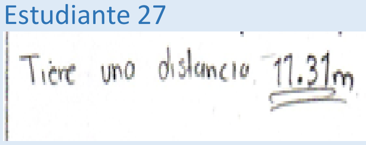
<table>
<tr>
<td>Estudiante 19</td>
<td>Estudiante 20</td>
<td>Estudiante 21

b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? es decir que porción del perimetro de la sala. hay entre cuadro y cuadro?
1.6metros de distancia hay entre un cuadro al otro cuadro.</td>
</tr>
<tr>
<td>Estudiante 22

b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? Es decir que porción del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro
10 metros.</td>
<td>Estudiante 23

b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? es decir que porcion del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro
$\pi \times r + r = \pi \times 16 =$
$50.26 \div 5 = 10.53$
hay 10.53 m de cuadro a cuadro
$10.53 = \frac{1}{5} = 72°$</td>
<td>Estudiante 24

b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? Es decir, que porción del perimetro de la sala hay entre cuadro y cuadro
1.60m</td>
</tr>
<tr>
<td>Estudiante 26

Distancia: 10.048
3.14 × 16. = 50.24.
5 ⟌ 50.24 = 10.048</td>
<td>Estudiante 27

Tiene una distancia 11.31m</td>
<td>Estudiante 28</td>
</tr>
<tr>
<td>Estudiante 29</td>
<td>Estudiante 30</td>
<td>Estudiante 31</td>
</tr>
</table>

Tabla 10. Respuestas al examen diagnóstico en clase: pregunta 1, incisos c), d), e) y f).

Estudiante	c)	d)	e)	f)
1	Radio	Perímetro	Circunferencia	360°
2	Radio	Perímetro	Cuerda	360°
3	Distancia entre dos puntos	Línea recta	Longitud de la circunferencia	
4	No hizo el examen en clase			
5	Radio	Circunferencia	Circunferencia	
6	Radio		Circunferencia	360° $\frac{360}{\pi} = 114$ radianes
7	Radio	Perímetro	Cuerda	360°
8	Distancia entre un punto	A sentido con las manecillas del reloj	Circunferencia	
9	Radio		Longitud de la circunferencia	10.04=10°
10	Radio	Circunferencia	Circunferencia	
11	Radio	Perímetro		360°
12	Recta	En línea recta	Diámetro	$360° = r$ $= 114.591559$ $= 25.3$
14				
15	No hizo el examen en clase			
18	Radio			
19				
20	Distancia entre un punto			
21	El radio	Paralelas	Circunferencia	360° y 3.14 radianes
22	Radio	Paralelas	Circunferencia	360° y 3.14 radianes
23	Radio		Contorno	Grados=360°
24	Punto medio		Longitud	
26	Radio	Cuerda	Circunferencia	360° o 3.14 radianes
27	Se llama radio		Diámetro	360°=
28	Distancia entre dos puntos		Longitud de la circunferencia	
29	Radio			
30	Radio		Circunferencia	$\pi = 3.1416$
31				

Tabla 11. Respuestas al examen diagnóstico en clase: pregunta 2.

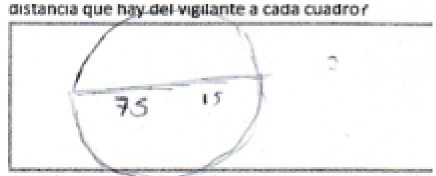
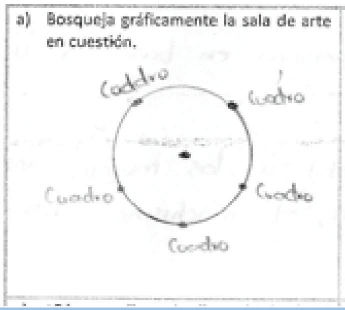
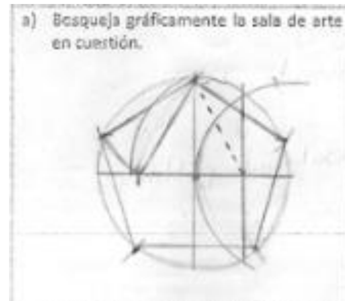
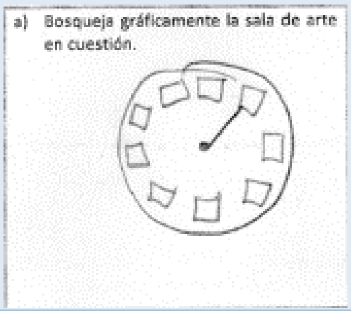
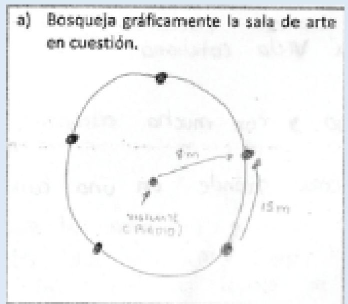
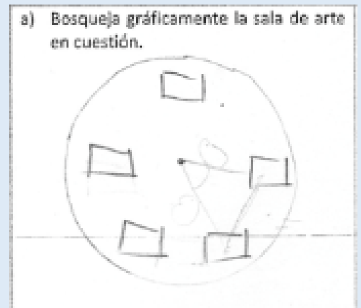
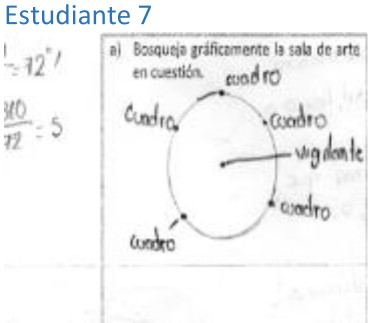
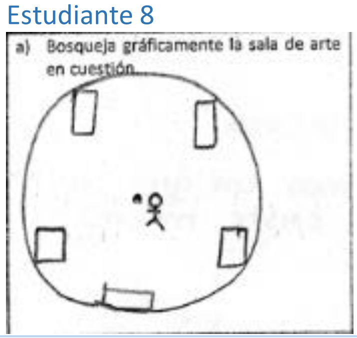
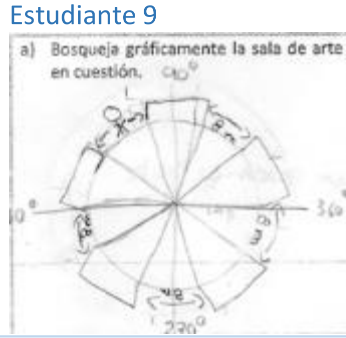
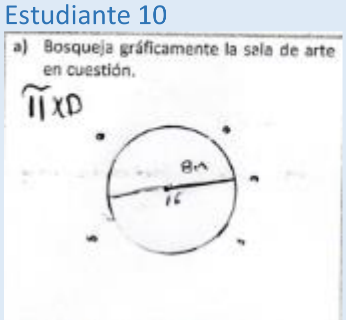
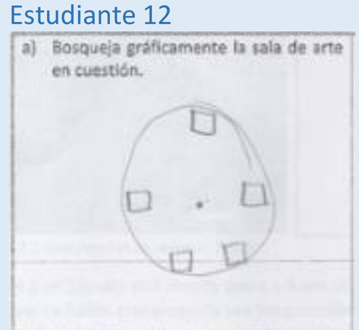
Estudiante 1 R= 23.87 15 x 15 =75 Perimetro $\frac{75}{3.1416} = 23.87$	Estudiante 2 distancia que hay del vigilante a cada cuadro?  ¿Podrías encontrar ... fórmula para calcular la long
Estudiante 3	Estudiante 4 No hizo el examen en clase
Estudiante 5	Estudiante 6
Estudiante 7	Estudiante 8
Estudiante 9	Estudiante 10
Estudiante 11	Estudiante 12 $\frac{360}{30} =$ 12 cm
Estudiante 14	Estudiante 15 No hizo el examen en clase
Estudiante 18	Estudiante 19
Estudiante 20	Estudiante 21 R= 7.5 metros 8 x 1.6 = 12.8 $\pi \times D/2$ = 21.93 es la distancia
Estudiante 22 $\frac{10-8}{15-x}$ = 15 x 8 = 120 ; 120 ÷ 10 = 12 : 12 metros	Estudiante 23
Estudiante 24 3 m	Estudiante 26 15 x 5 = 75 → Perimetro 3.14 | 75 $\sqrt{75} = 8.66$
Estudiante 27 15_m = Distancia entre cuadros 225 ÷ 2 = $\sqrt{112.36}$ = 10.60 m → Vigilante a cualquier cuadro	Estudiante 28
Estudiante 29	Estudiante 30
Estudiante 31	

Tabla 12. Respuestas al examen diagnóstico en clase: pregunta 3.

Estudiante 1 $\frac{\pi \times \text{Diametro}}{\text{n diviciones}}$ = Longitud un pedazo perimetro	Estudiante 2
Estudiante 3	Estudiante 4 No hizo el examen en clase
Estudiante 5	Estudiante 6
Estudiante 7	Estudiante 8
Estudiante 9	Estudiante 10 Si por que se tendria que hacer algo parecido al ejercicio (d)
Estudiante 11	Estudiante 12 r · n 360 ÷ r ÷ n
Estudiante 14	Estudiante 15 No hizo el examen en clase
Estudiante 18	Estudiante 19
Estudiante 20	Estudiante 21 Si, por la formula: π x diametro. y cualquier número 3.1416 x el diametro = ?? sustituir al diametro y la radio.
Estudiante 22 Por la formula. π x Diametro	Estudiante 23 $\frac{\pi \times r^2}{n}$
Estudiante 24	Estudiante 26
Estudiante 27 Podria invertir el procedimiento del teorema de pitagoras	Estudiante 28
Estudiante 29	Estudiante 30
Estudiante 31	

Tabla 13. Respuestas al examen diagnóstico en casa: pregunta 1, inciso a).

Estudiante 1 	Estudiante 2 No hizo el examen en casa	Estudiante 3 
Estudiante 4 	Estudiante 5 	Estudiante 6 
Estudiante 7 	Estudiante 8 	Estudiante 9 
Estudiante 10 	Estudiante 11 No hizo el examen en casa	Estudiante 12 

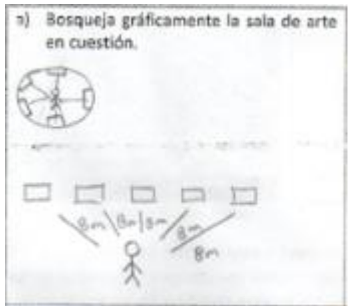
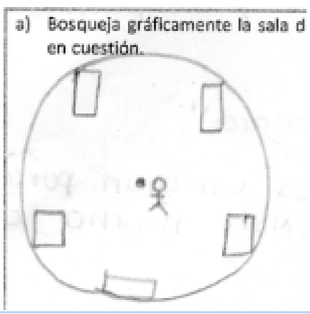
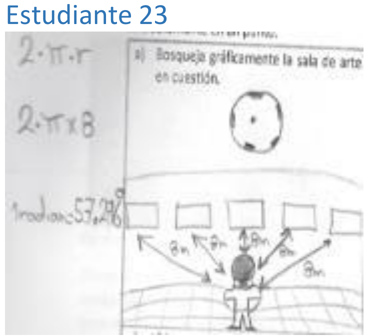
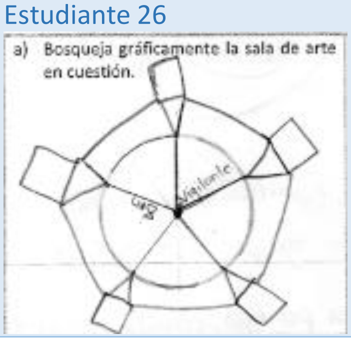
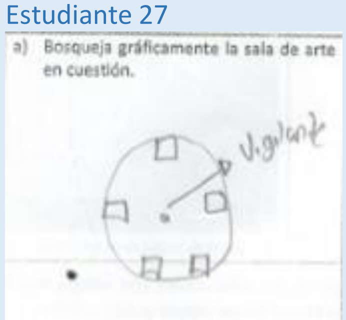
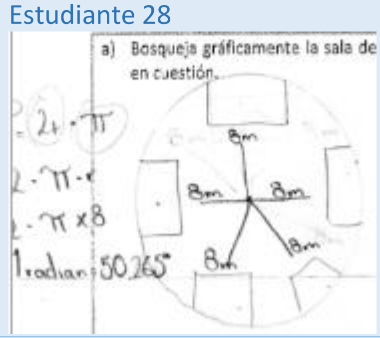
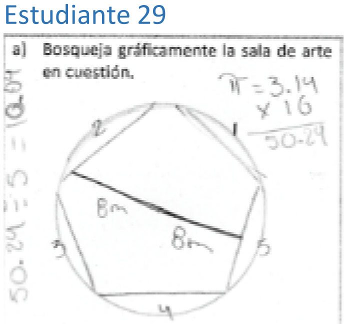
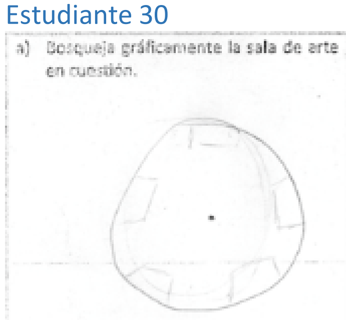
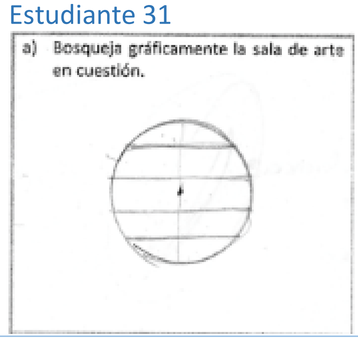
Estudiante 14 No hizo el examen en casa	Estudiante 15 	Estudiante 18 No hizo el examen en casa
Estudiante 19	Estudiante 20 No hizo el examen en casa	Estudiante 21 
Estudiante 22 	Estudiante 23 	Estudiante 24
Estudiante 26 	Estudiante 27 	Estudiante 28 
Estudiante 29 	Estudiante 30 	Estudiante 31 

Tabla 14. Respuestas al examen diagnóstico en casa: pregunta 1, inciso b).

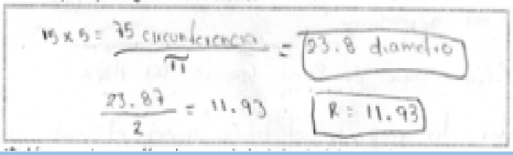
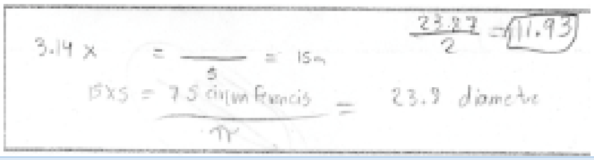
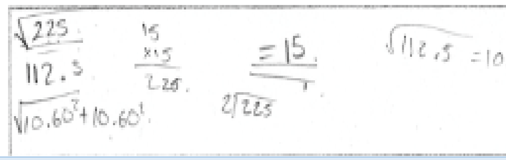
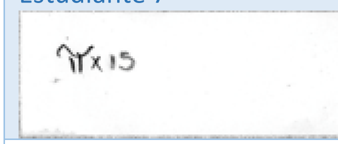
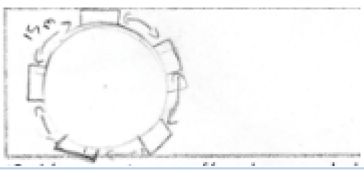
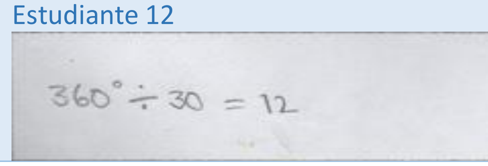
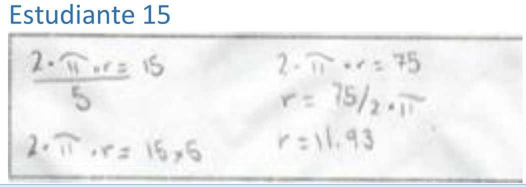
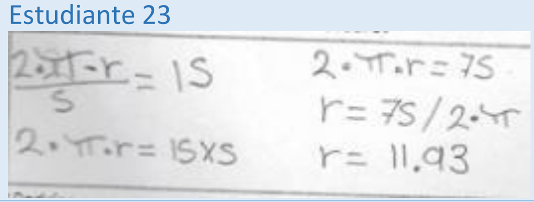
Estudiante 1 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? R= 10.05 π x Diametro 3.1416 x 16 = 50.26 50.26 ÷ 5 = 10.05	Estudiante 2 No hizo el examen en casa	Estudiante 3
Estudiante 4 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 10 metros	Estudiante 5 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? π x Diametro $3.14 \times 16 = \frac{50.26}{5} = 10.05$ m	Estudiante 6 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 10.04 3.14 x 16 50.24 5 ⟌ 50.24
Estudiante 7	Estudiante 8 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? R= 10 metros	Estudiante 9 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? $P = \frac{\pi \times r}{2}$ $P = 3.14 \times 16$ $P = \frac{50.24}{2}$ $P = 10.12$
Estudiante 10 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 10.05 Porque solo se sigue la forma de P= y se divide entre 5	Estudiante 11 No hizo el examen en casa	Estudiante 12 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 360 ÷ 16 = 22.5

Estudiante 14 No hizo el examen en casa	Estudiante 15 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 2 x 3.1416 x 8 = 50.26 50.26 / 5 = 10.05 1/5 72° 1.25 r	Estudiante 18 No hizo el examen en casa
Estudiante 19	Estudiante 20 No hizo el examen en casa	Estudiante 21 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 1.6 de distancia
Estudiante 22 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? R= 10 metros	Estudiante 23 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 2 x 3.14159265 x 8 = 50.26/5 = 10.05m Entre cada cuadro hay 10.05m 1/5 72° 1.25 radianes	Estudiante 24
Estudiante 26 P= 16 x 3.14 = 50.24 ÷ 5 10.048m	Estudiante 27 360 ÷ 16 = 22.5	Estudiante 28 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro y cuadro? 2 x 3.1416 = 50.26 / 5 = 10.05 m Entre cada cuadro hay 10.05m
Estudiante 29 b) ¿Qué distancia hay entre cuadro? 10.04	Estudiante 30 b) ¿Qué distancia hay entre c cuadro? (π • d) 3.1416 • 16 = 50.26	Estudiante 31

Tabla 15. Respuestas al examen diagnóstico en casa: pregunta 1, incisos c), d), e) y f).

Estudiante	c)	d)	e)	f)
1	Radio	Circunferencia	Circunferencia	360°
2	No hizo el examen en casa			
3	Distancia entre dos puntos		Longitud de circunferencia	
4	Radio	Paralelas	Circunferencia	360°
5	Radio			
6	Radio	Cuerda	Circunferencia	360° $\frac{360}{\pi} = 114$
7	Radio	Perímetro	Cuerda	360°
8	Radio	Paralelas	Circunferencia	360° y 3.1416 radianes
9	Radio	Cuerda	Circunferencia	360° $\frac{360}{\pi} = 114.59$
10	Radio	Radio	Circunferencia	
11	No hizo el examen en casa			
12	Recta	Segmento		$360° = 114.59$
14	No hizo el examen en casa			
15	Radio		Circunferencia	Radianes=6.28 radianes Grados=360°
18	No hizo el examen en casa			
19	Radio	Circunferencia	Circunferencia	360°
20	No hizo el examen en casa			
21	Radio	Paralelas	Circunferencia	360° y
22	Radio	Paralelas	Circunferencia	360° y 3.1416 radianes
23	Radio		Contorno o circunferencia	360° o 6.28 radianes
24				
26	Radio	Cuerda	Circunferencia	$360° = 2\pi$ radianes
27	Recta	Segmento	Circunferencia	360°=114.59
28	Radio		Circunferencia	360° o 6.28 radianes
29	Radio			4 radianes 360°
30	Radio	Cuerda	Circunferencia	360°
31				

Tabla 16. Respuestas al examen diagnóstico en casa: pregunta 2.

Estudiante 1 	Estudiante 2 No hizo el examen en casa
Estudiante 3	Estudiante 4
Estudiante 5 	Estudiante 6 
Estudiante 7 	Estudiante 8
Estudiante 9 	Estudiante 10
Estudiante 11 No hizo el examen en casa	Estudiante 12 
Estudiante 14 No hizo el examen en casa	Estudiante 15 
Estudiante 18 No hizo el examen en casa	Estudiante 19
Estudiante 20 No hizo el examen en casa	Estudiante 21
Estudiante 22	Estudiante 23 

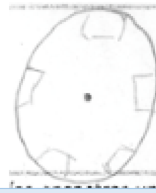
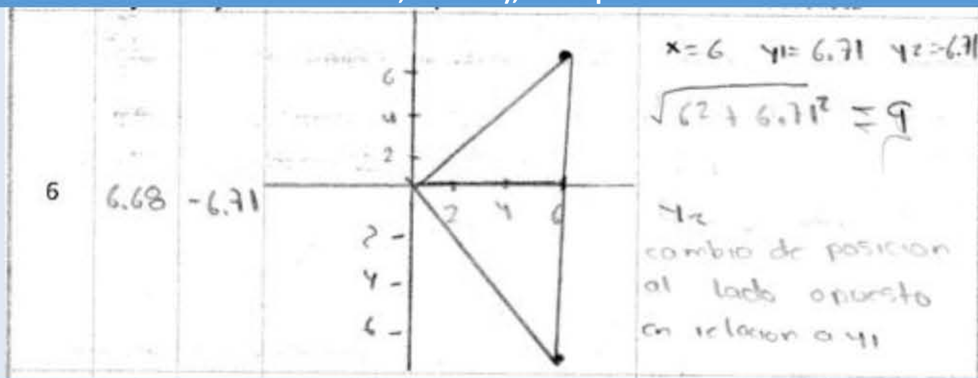
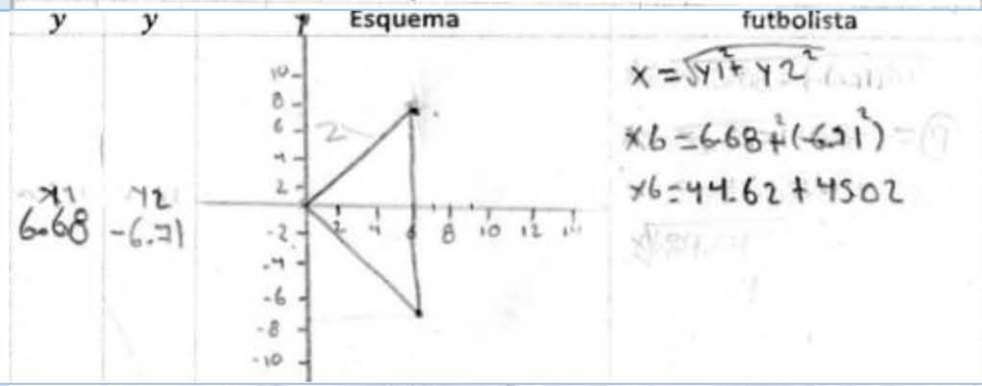
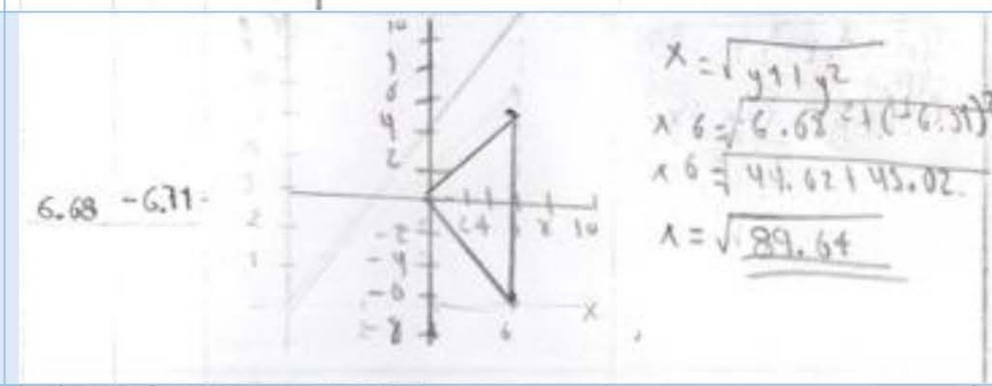
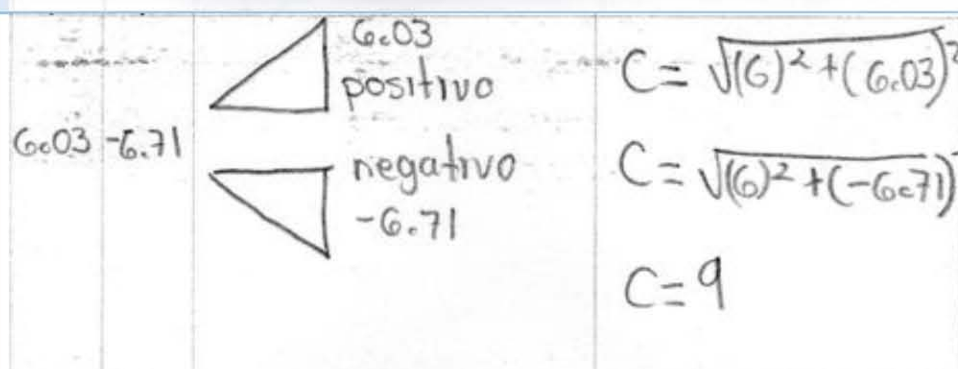
Estudiante 24	Estudiante 26 $\begin{array}{r} 3 \\ 5\overline{)15} \\ 0 \end{array}$ $3.14 \times 3 = 9.42$
Estudiante 27 $360 \div 30 = 12$	Estudiante 28 $\frac{2\cdot\pi\cdot r}{5} = 15$ $2\cdot\pi\cdot r = 75$ $2\cdot\pi\cdot r = 15 \times 5$
Estudiante 29	Estudiante 30  $3.1416 \cdot 30 = 94.24$
Estudiante 31	

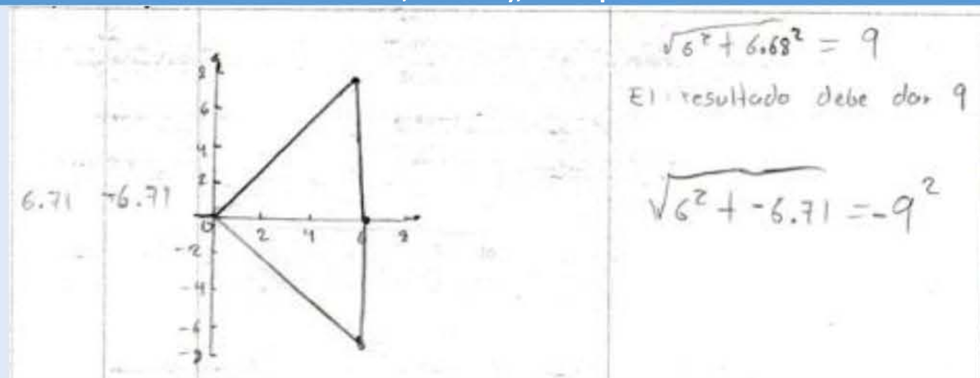
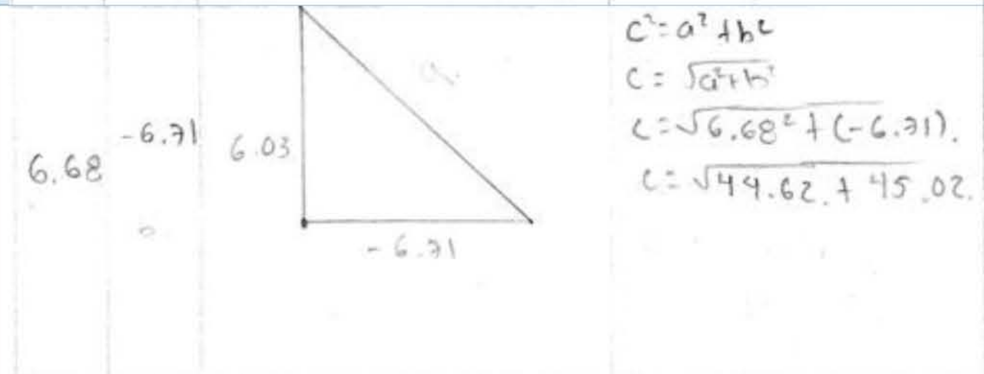
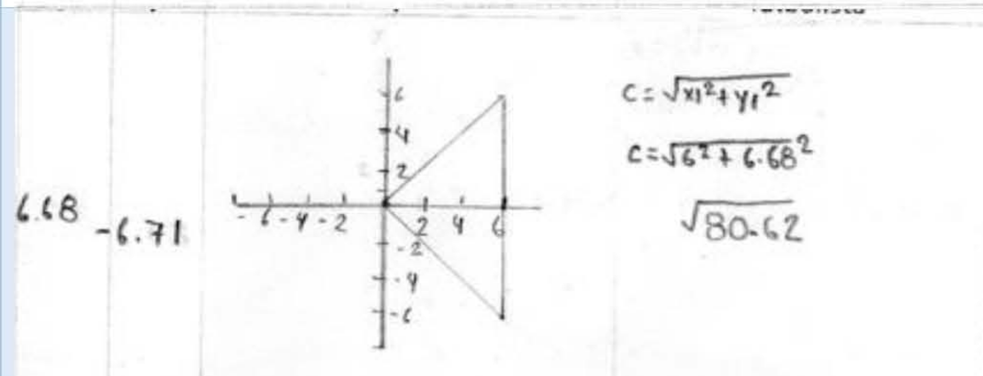
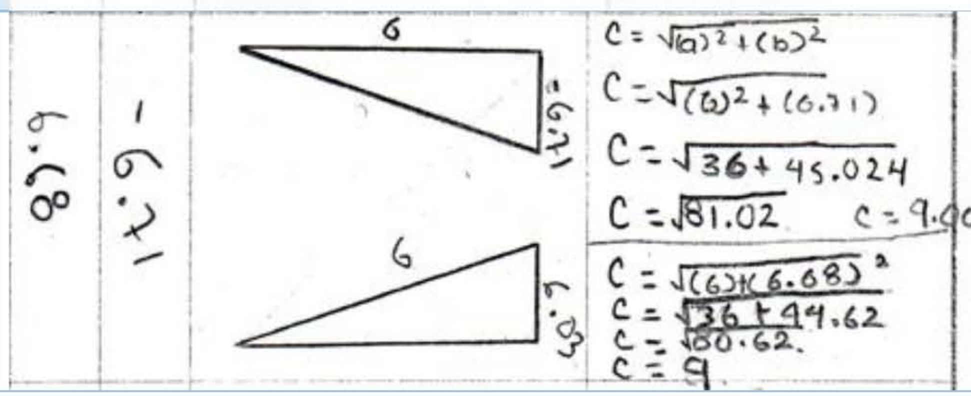
Tabla 17. Respuestas al examen diagnóstico en casa: pregunta 3.

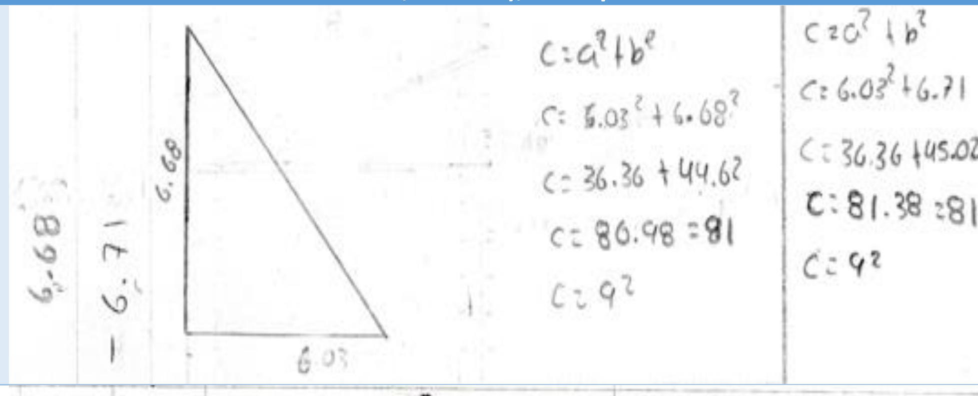
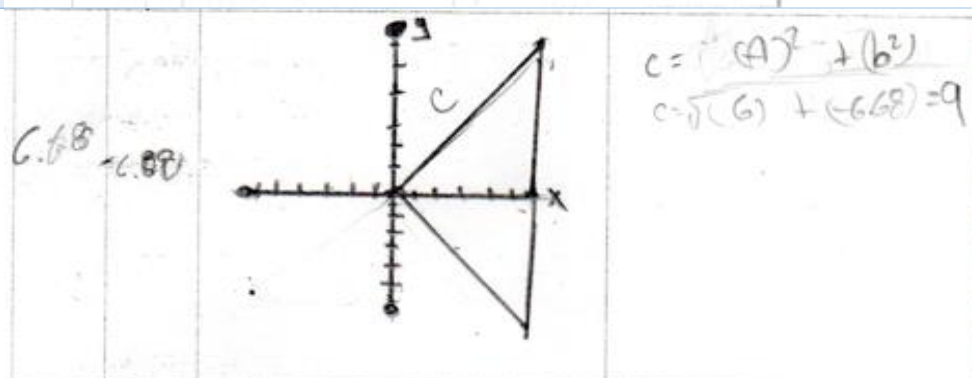
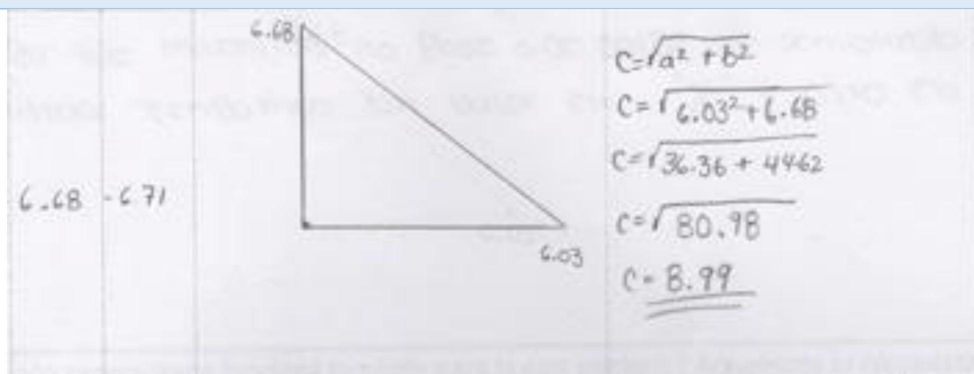
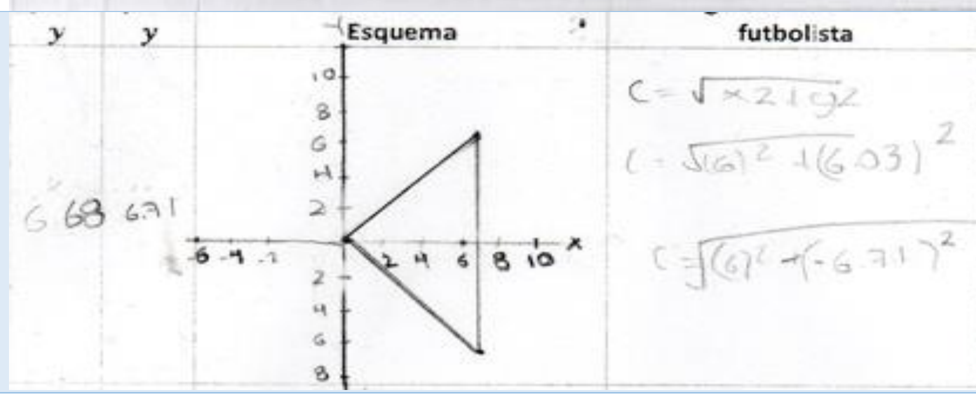
Estudiante 1 $\frac{\pi \times \text{Diametro}}{\text{numero diviciones}} = \text{Longitud}$	Estudiante 2 No hizo el examen en casa
Estudiante 3	Estudiante 4
Estudiante 5 $\frac{\pi \times \text{Diametro}}{\text{numero de divicions}} = \text{Longitud}$	Estudiante 6 $\frac{360 \cdot \pi \cdot r}{n}$
Estudiante 7	Estudiante 8 Si, con la formula. $\pi \cdot r^2$
Estudiante 9	Estudiante 10

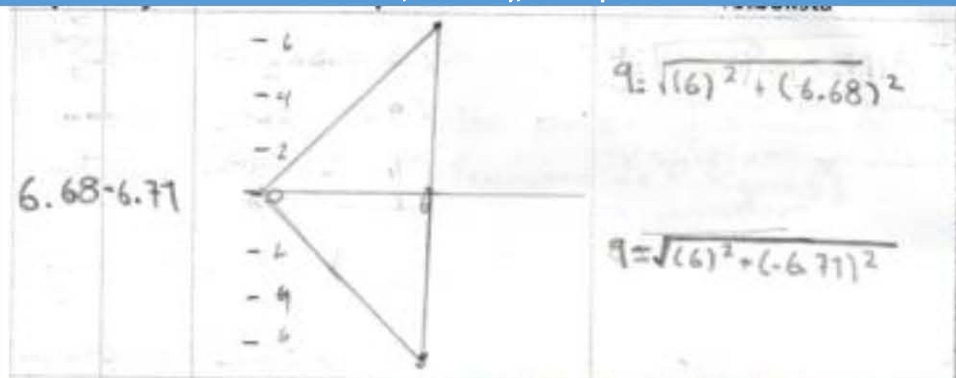
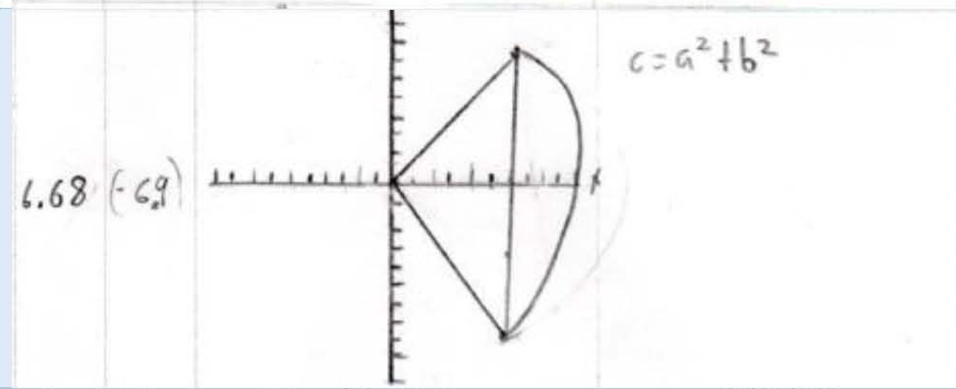
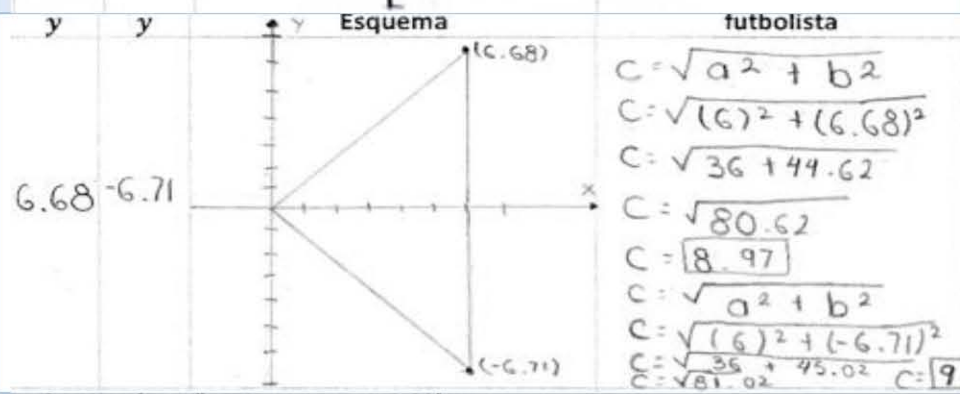
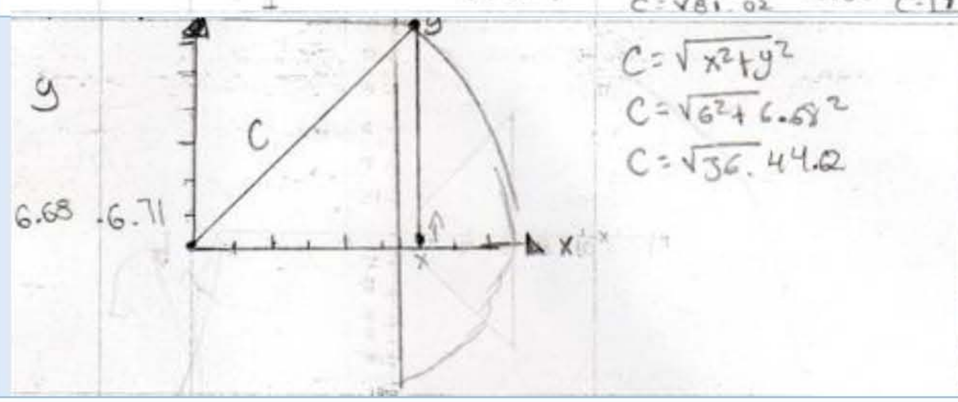
Estudiante 11 No hizo el examen en casa	Estudiante 12 $360 \div r \div n =$
Estudiante 14 No hizo el examen en casa	Estudiante 15 $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n}$
Estudiante 18 No hizo el examen en casa	Estudiante 19 $\frac{\pi \times \text{Diametro}}{\text{no. de radianes}} = \text{Longitud}$
Estudiante 20 No hizo el examen en casa	Estudiante 21
Estudiante 22 Si, con la formula. $\pi \cdot r^2$	Estudiante 23 $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n}$
Estudiante 24	Estudiante 26 $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{n}$
Estudiante 27 $360 \div r \div n =$	Estudiante 28
Estudiante 29	Estudiante 30
Estudiante 31	

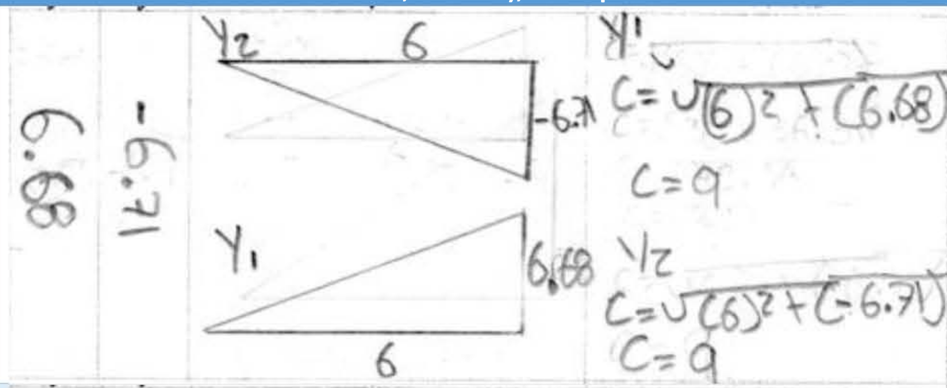
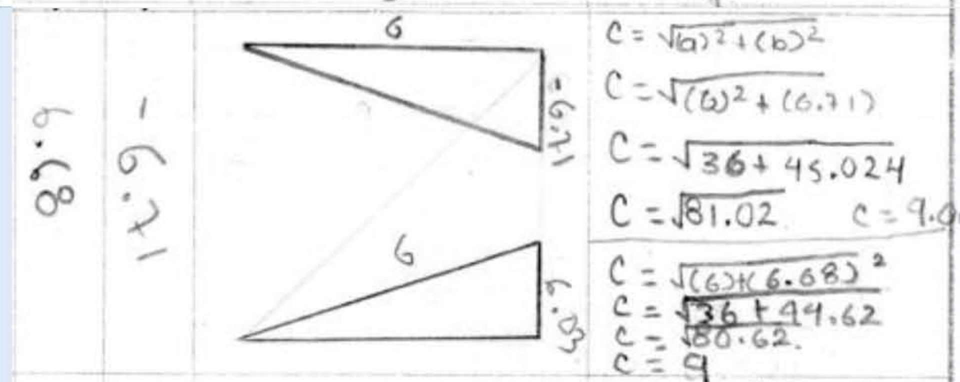
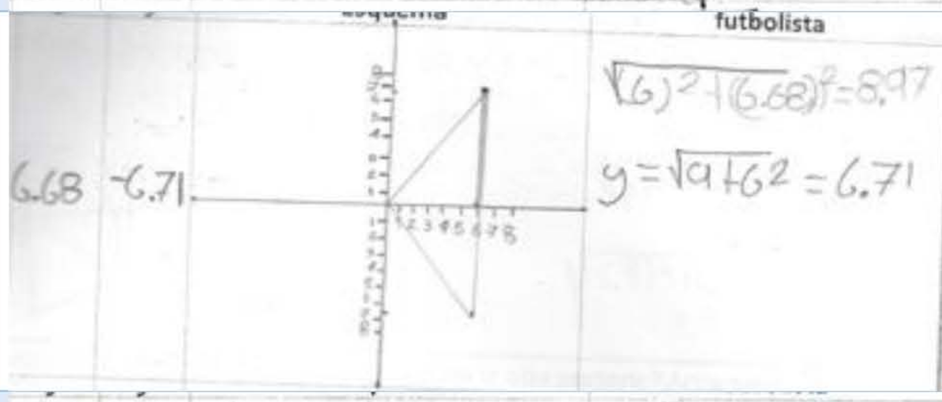
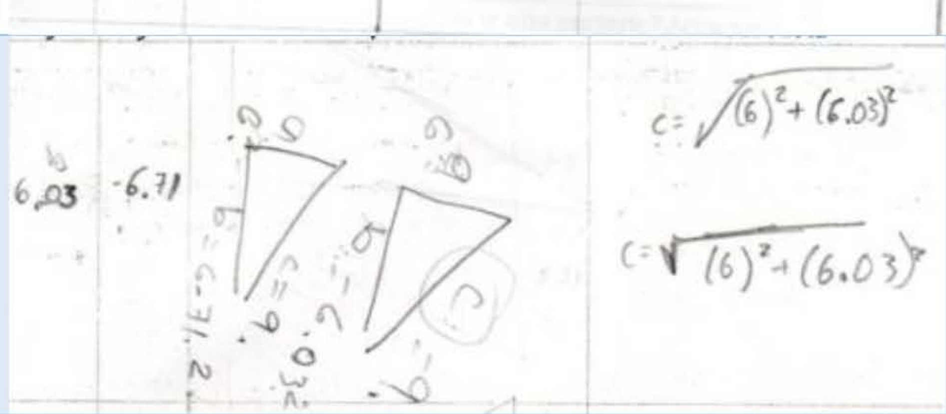
Tabla 18. Respuestas al cuadernillo: Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$.

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$
1	
2	
3	
4	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$
5	
6	
7	
8	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$
9	
10	
11	
12	
14	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$
15	
18	
19	
20	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$
21	
22	
23	
24	

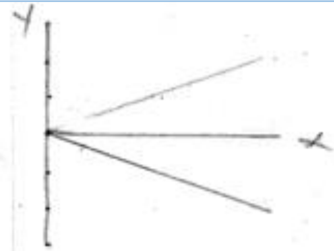
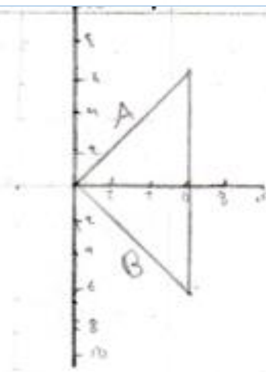
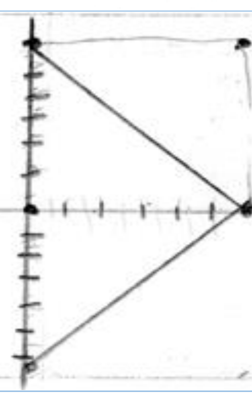
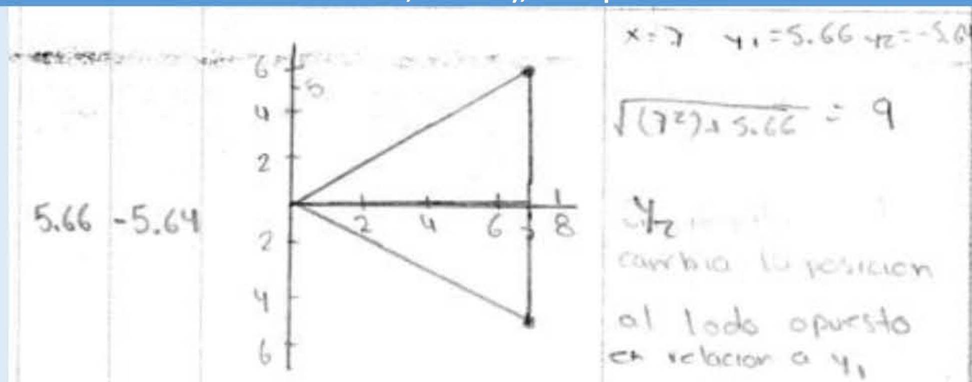
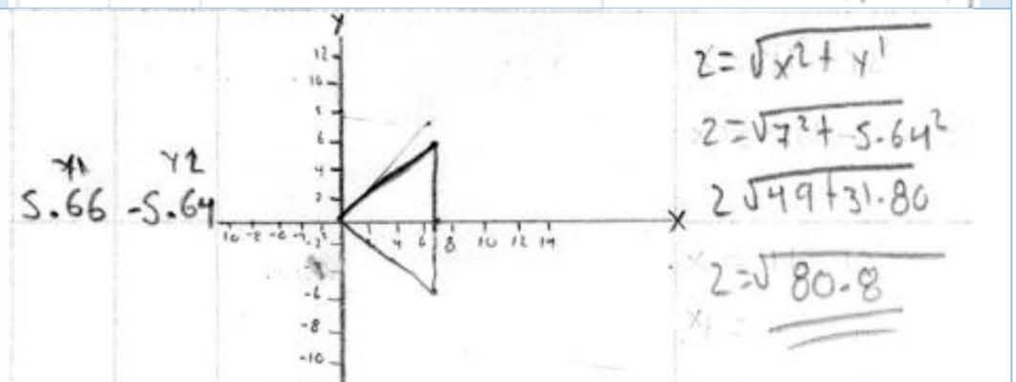
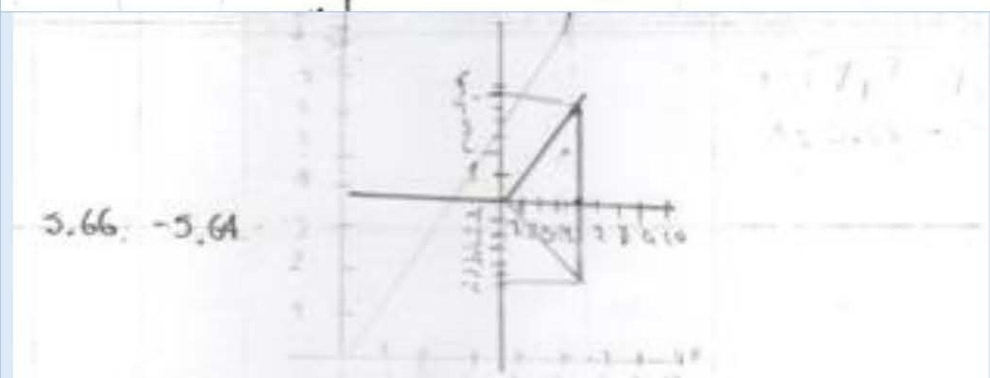
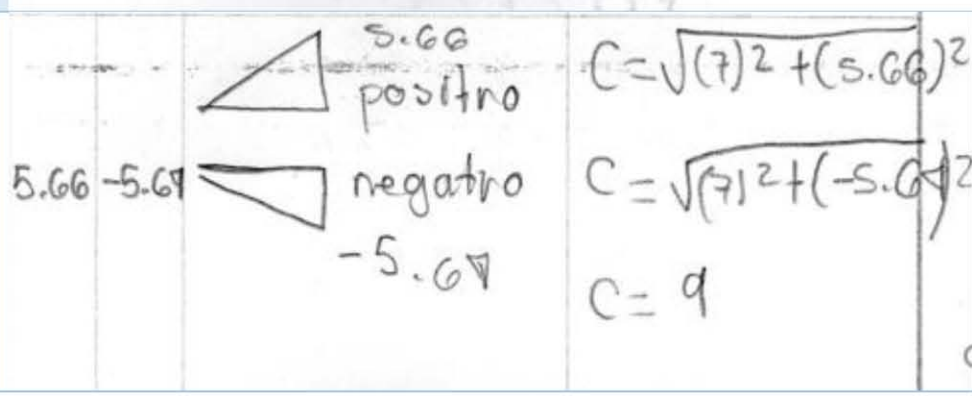
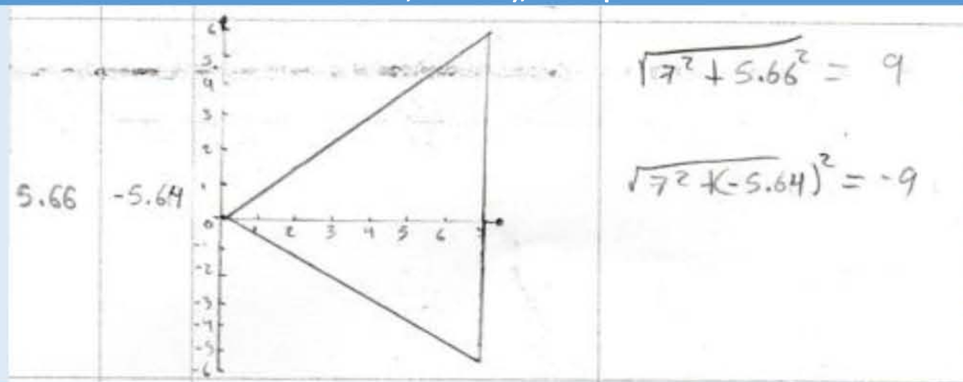
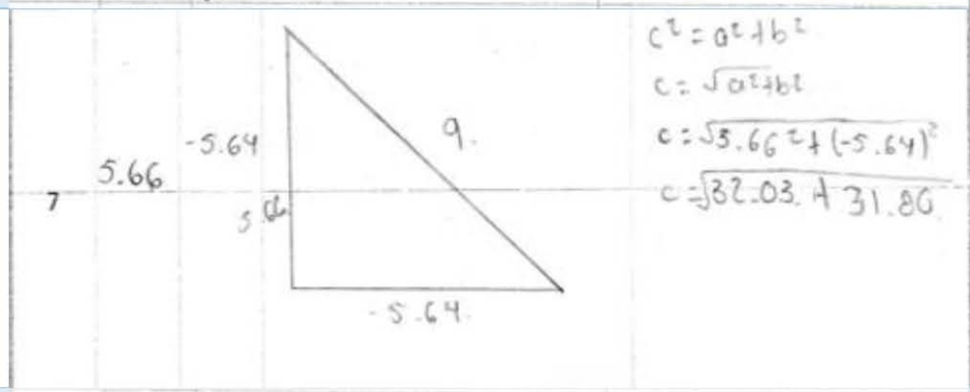
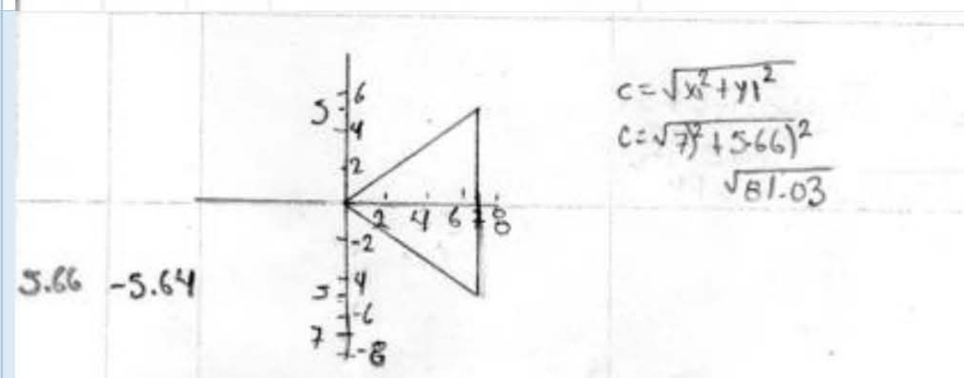
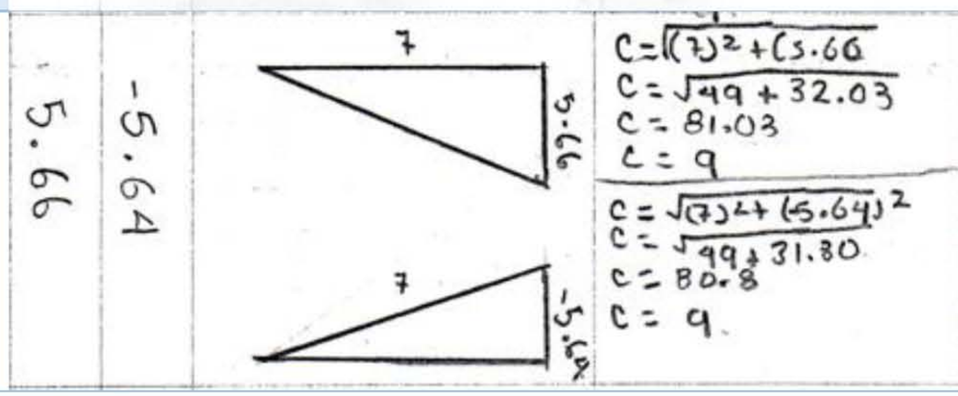
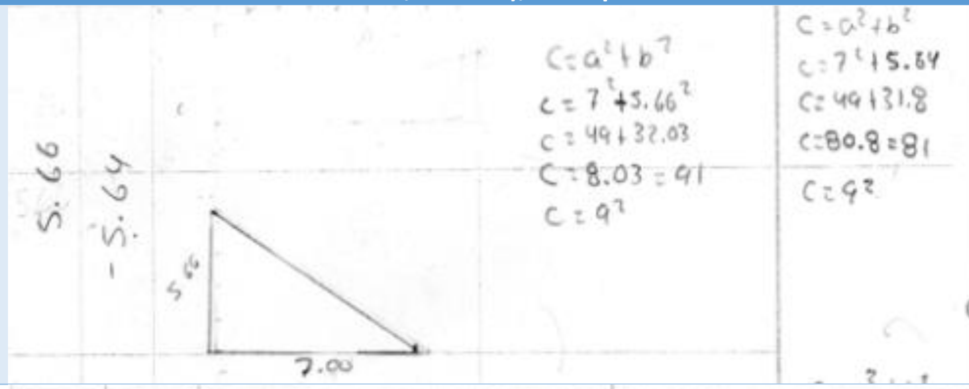
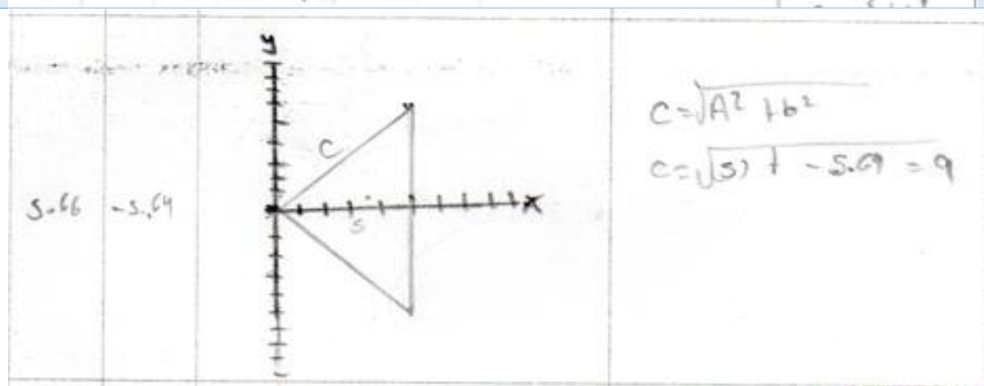
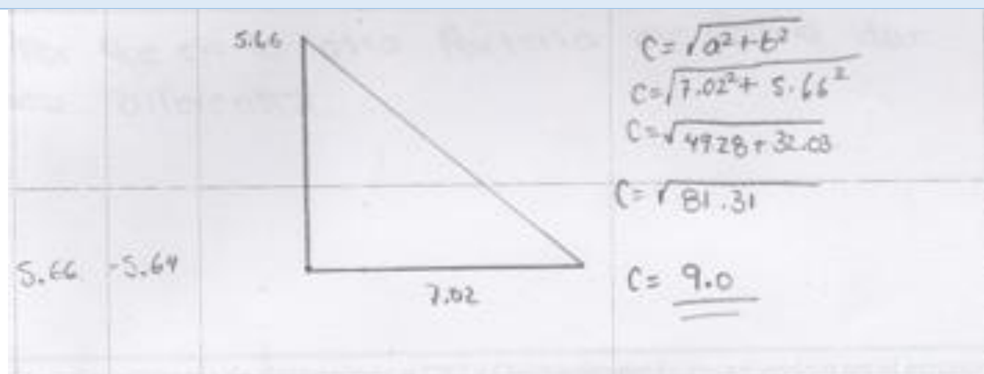
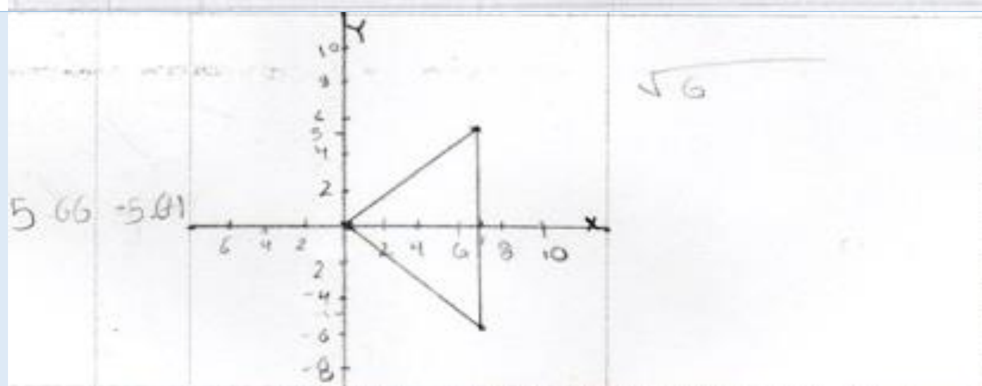
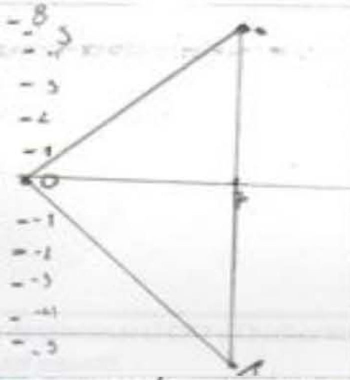
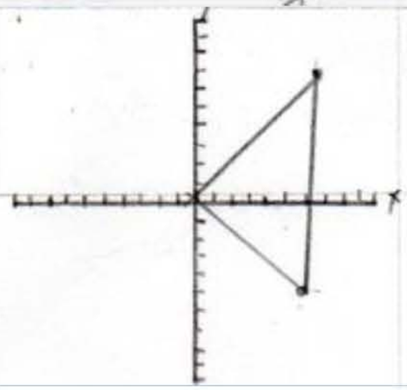
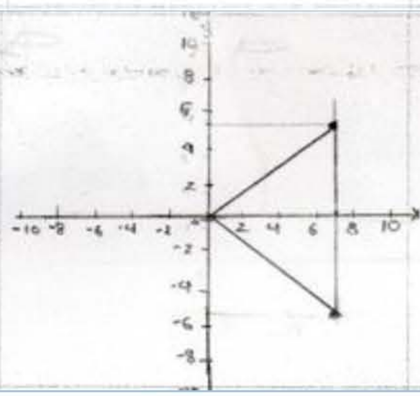
Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 6$
26	6.68 -6.71 $\boxed{\sqrt{Y_1^2+X^2}=9} = \boxed{\sqrt{6.68^2+6^2}=9.}$ 6.68^2+6^2 $44.6224+36=\sqrt{80.6224}=8.978$ $\boxed{\sqrt{Y^2+X^2}=9.} = \sqrt{-6.71^2+6^2}=9.$ $(-6.71)^2+6^2=D$ $-45.0241+36=\sqrt{81.0241}=$ 9.001
27	
28	6.68 -6.71  $C=\sqrt{a^2+b^2}$ $C=\sqrt{6.68^2+-6.71^2}$ $C=\sqrt{44.62+-45.02}$
29	6.68 -6.68  $A\ \sqrt{(6)^2+(6.68)^2}=9$ $B\ \sqrt{(6)^2+(6.68)^2}=-9$
30	6.68 -6.71 $c^2=a^2+b^2$ $c^2=6.68^2+(-6.71^2)$ $c^2=44.62+(-45.02)$
31	6.68 -6.71  $c=\sqrt{a^2+b^2}$ $c=\sqrt{(6)^2+(6.68)}$ R= 8.9 $c=\sqrt{(6)^2+(-6.71)^2}$ R= 9 $\sqrt{81.02}$

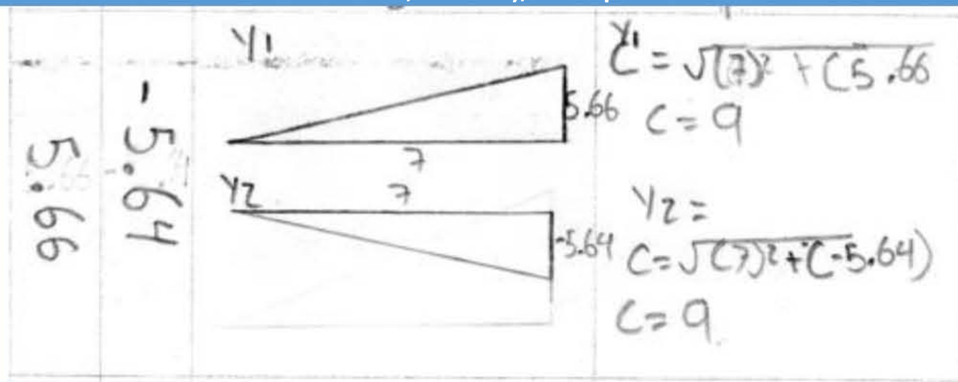
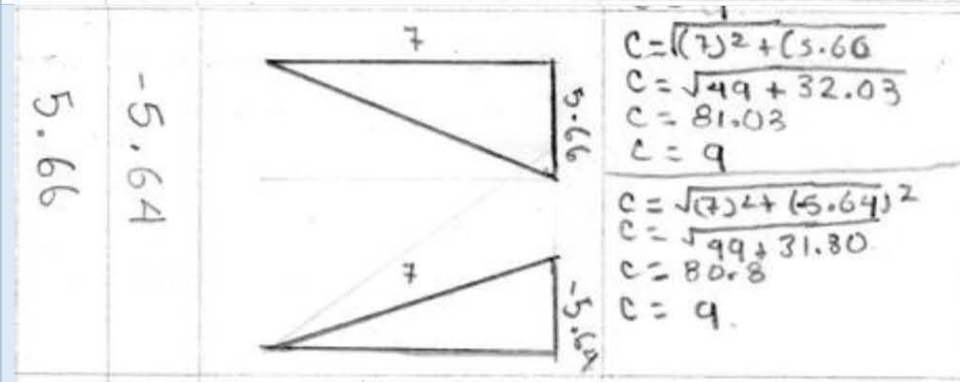
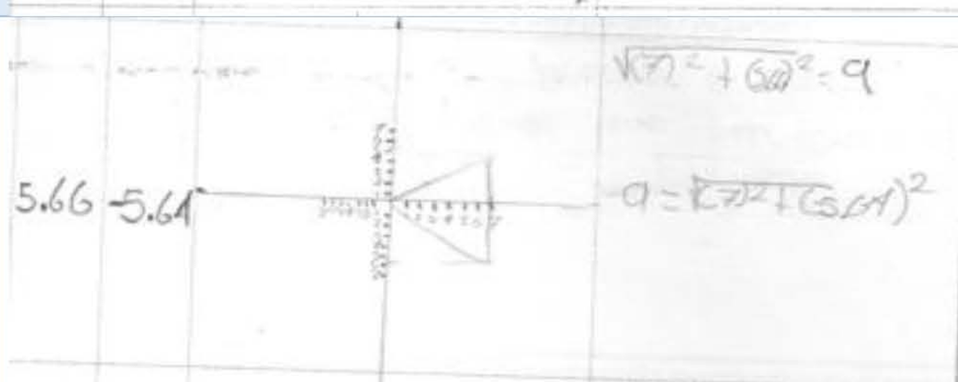
Tabla 19. Respuestas al cuadernillo: Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$.

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$
1	
2	
3	
4	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$
5	
6	
7	
8	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$
9	
10	
11	
12	
14	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$
15	5.66 -5.64  $9 = \sqrt{(7)^2 + (5.66)^2}$ $9 = \sqrt{(7)^2 + (-5.64)^2}$
18	5.66 -5.64 
19	5.66 -5.74 $C = \sqrt{(7)^2 + (5.66)}$ $C = \sqrt{49 + 32.03}$ $C = \sqrt{81.03}$ $C = \boxed{9}$ $C = \sqrt{(7)^2 + (-5.74)^2}$ $C = \sqrt{49 + 32.94}$ $C = \sqrt{81.94}$ $C = \boxed{9.05}$
20	5.66 -5.64 

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$
21	
22	
23	
24	

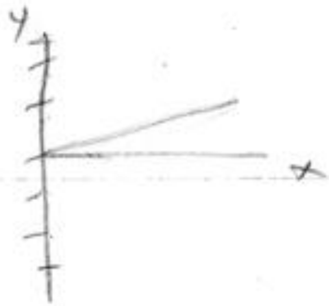
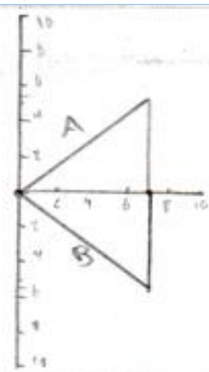
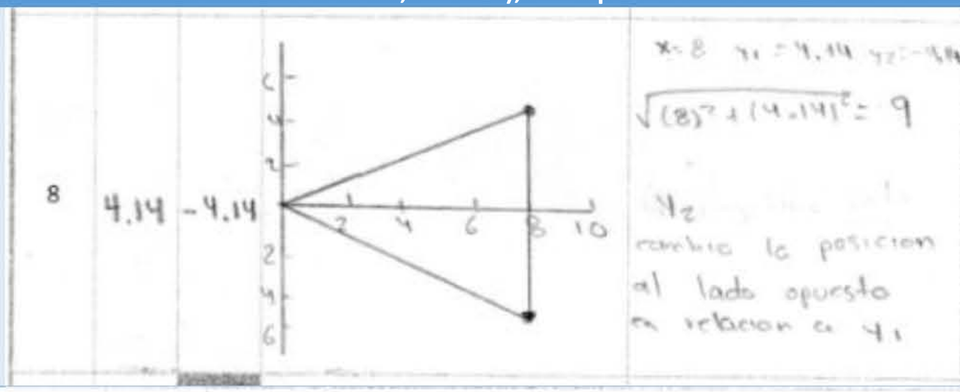
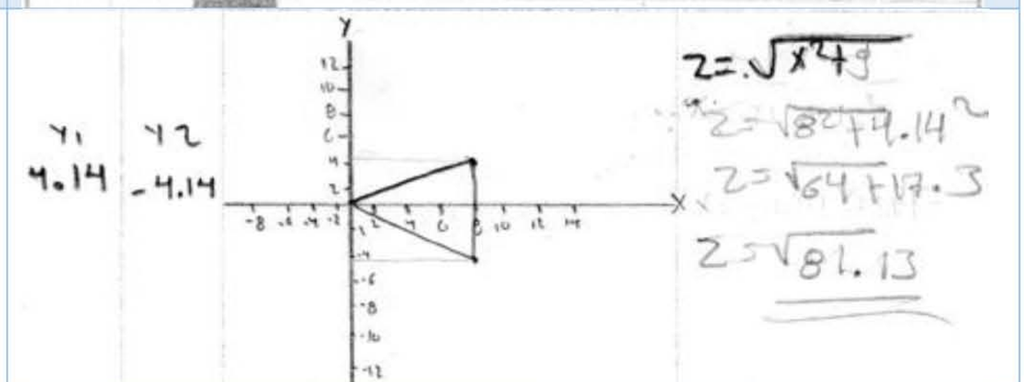
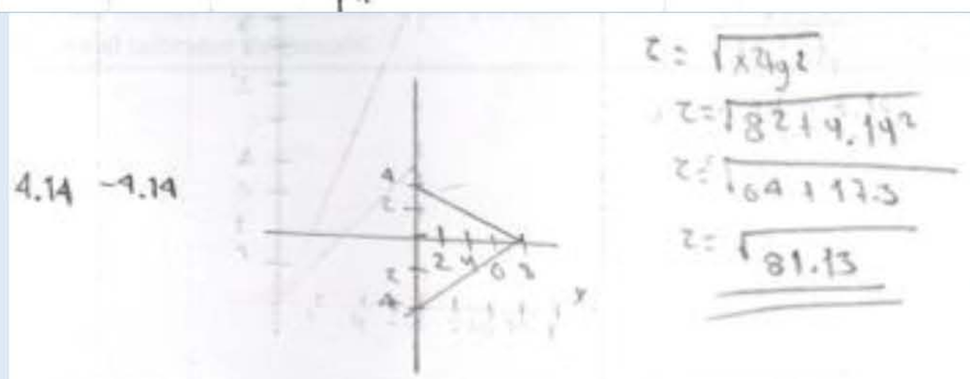
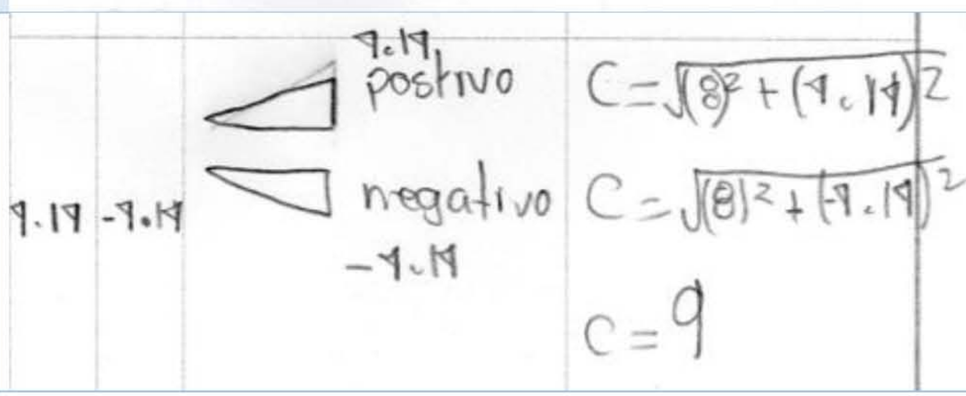
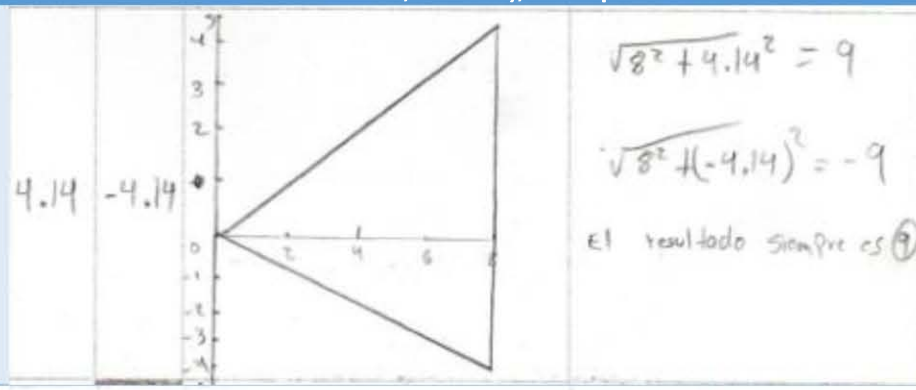
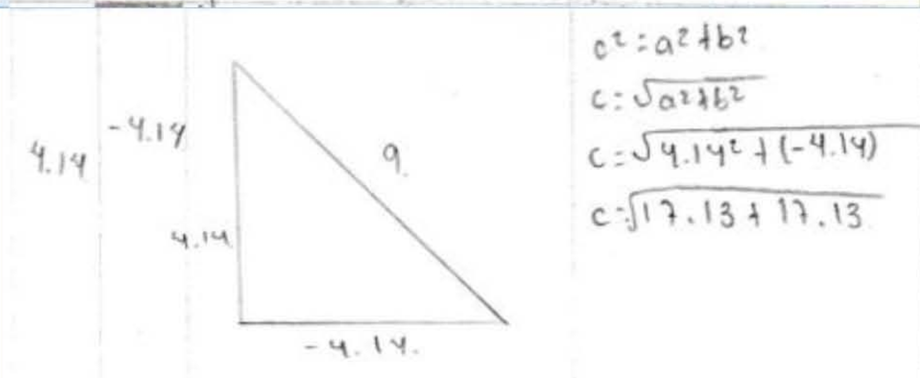
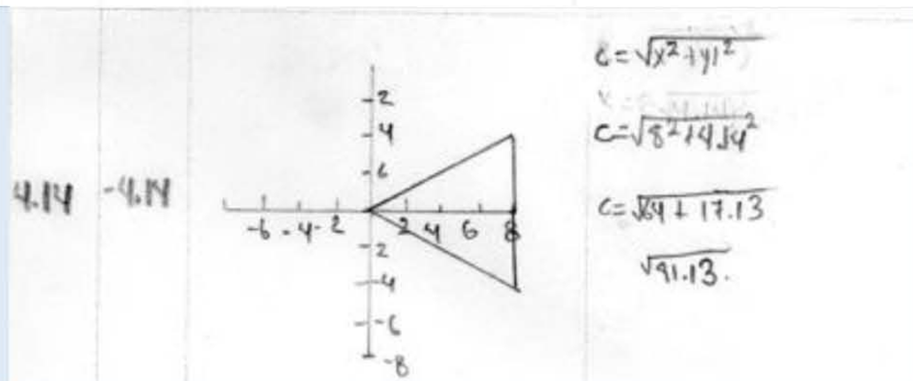
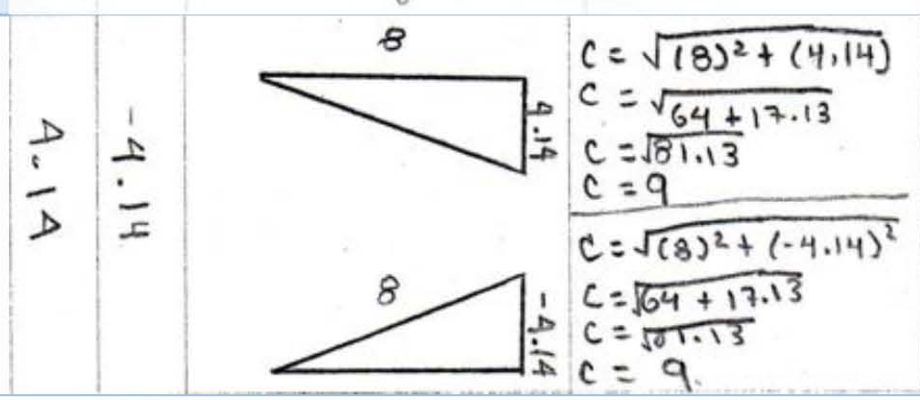
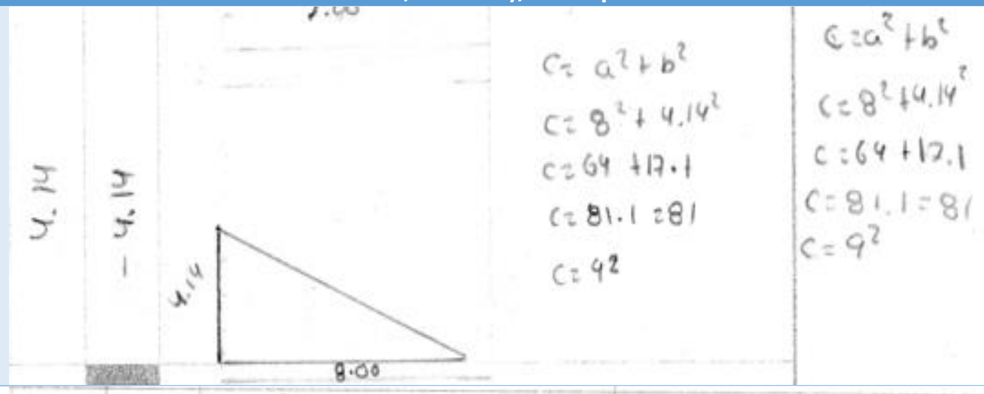
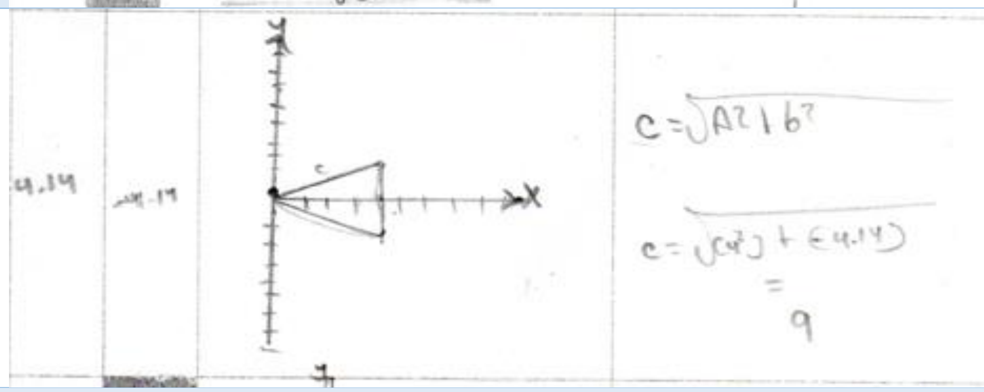
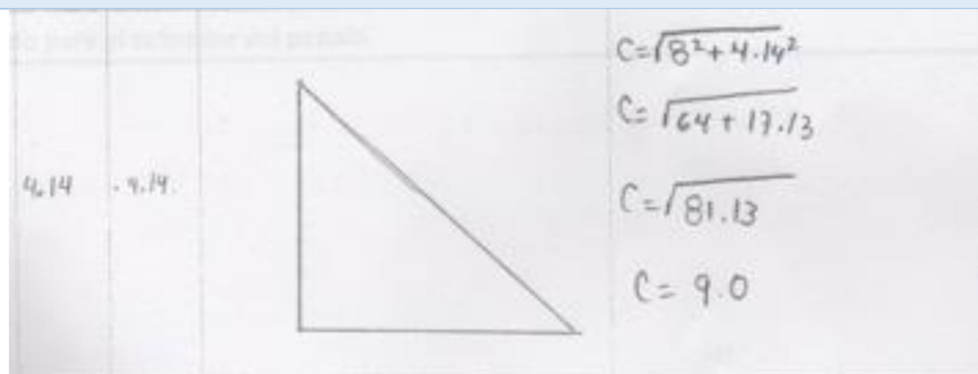
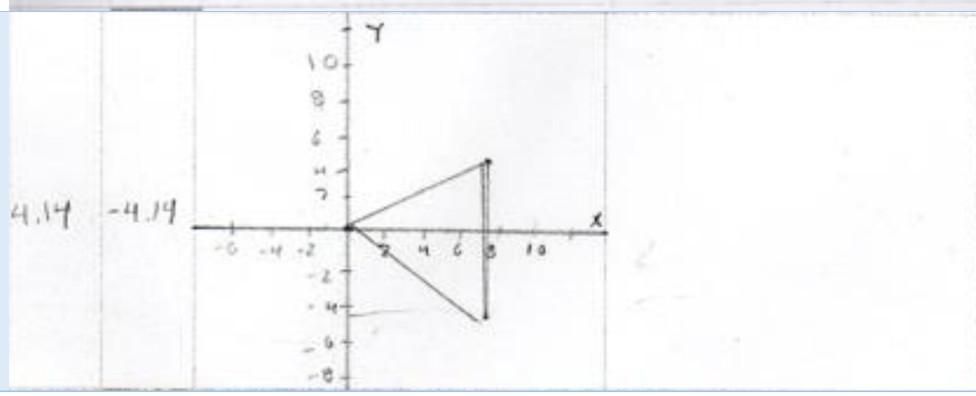
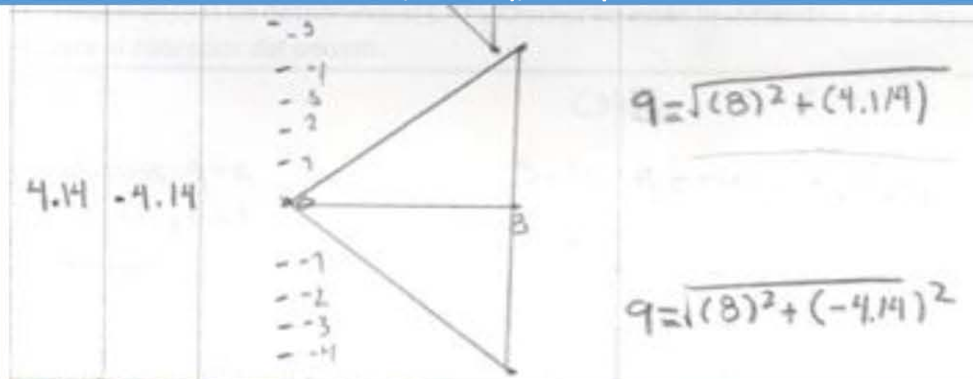
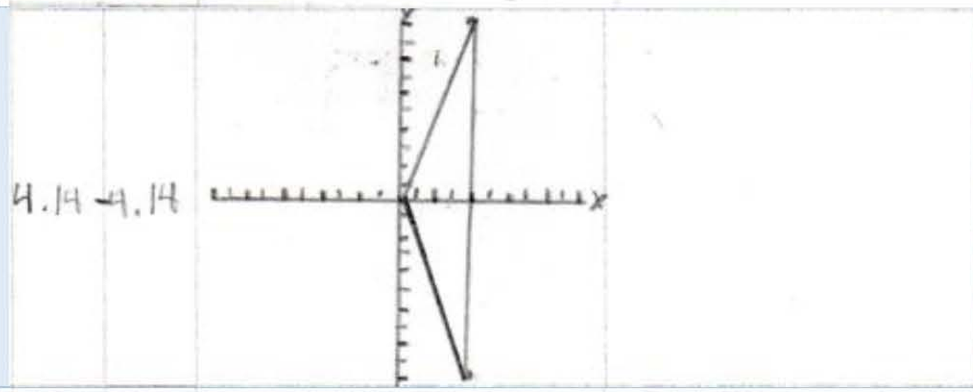
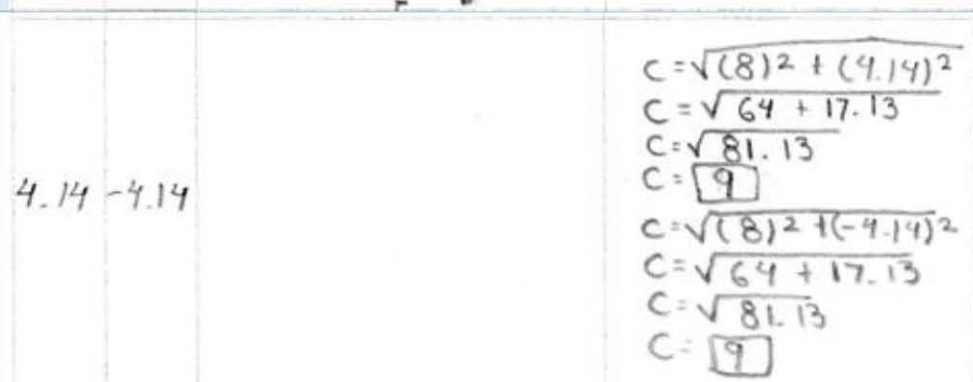
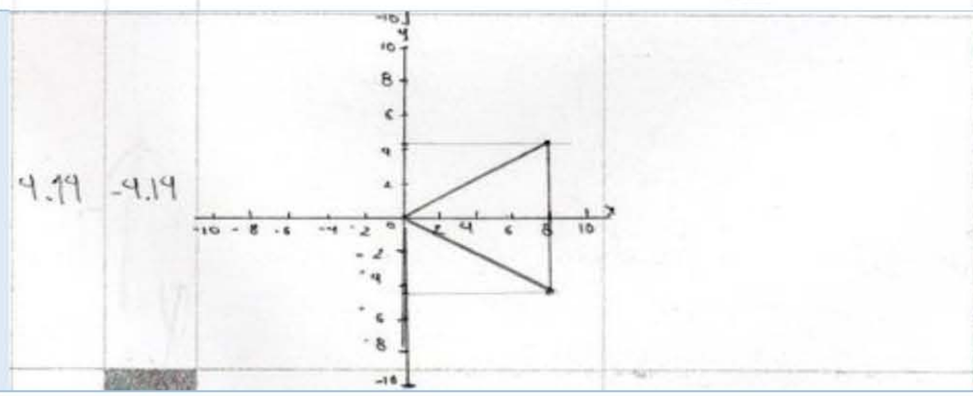
Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 7$
26	5.66 -5.64  $y_1 = \sqrt{5.66^2 + 7^2} = 9$ $y_2 . \sqrt{-5.64^2 + 7^2} = 9$
27	
28	5.66 -5.64  $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ $C = \sqrt{5.66^2 + -5.64}$ $C = \sqrt{32.03 + -31.80}$
29	5.66 -5.64  $A = \sqrt{(7)^2 + (5.66)^2} = 9$ $B = \sqrt{(7)^2 + (-5.64)^2} = 9$
30	5.66 -5.64 $c^2 = a^2 + b^2$ $C = 5.66 + (-5.64^2)$ $c = 32.03 + (-31.80)$
31	5.66 -5.64 $c = \sqrt{(7)^2 + (5.66)}$ R = 9 $\sqrt{81.03}$ 49 31.80 $c = \sqrt{(7)^2 + (-5.64)}$ R = 8.9 $\sqrt{80.8}$

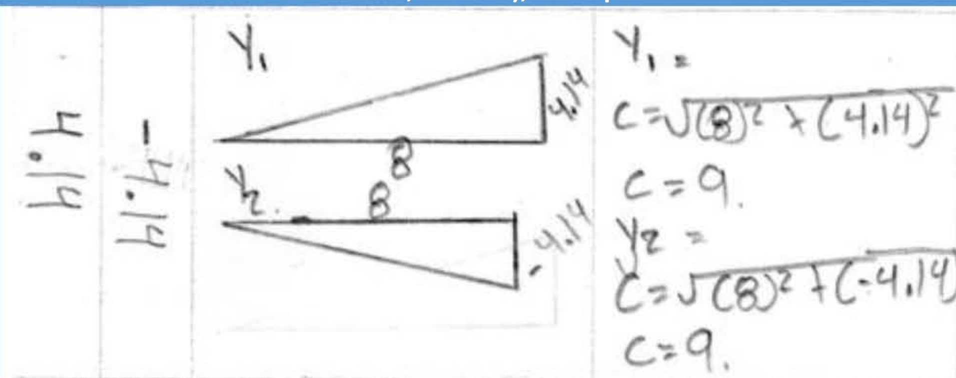
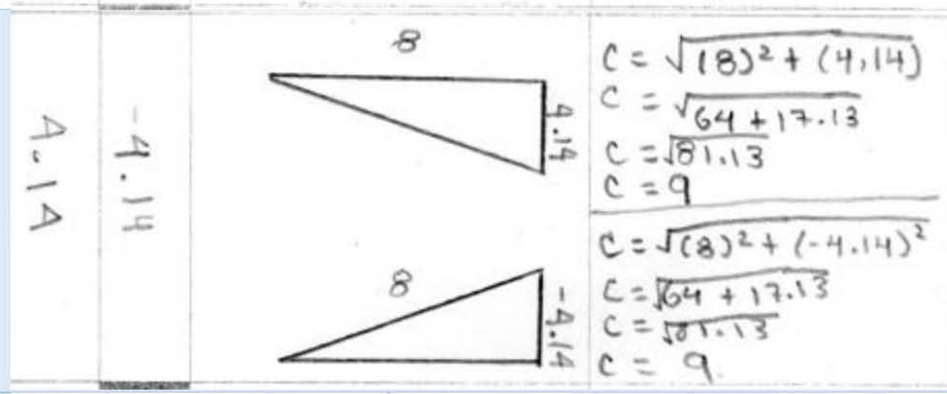
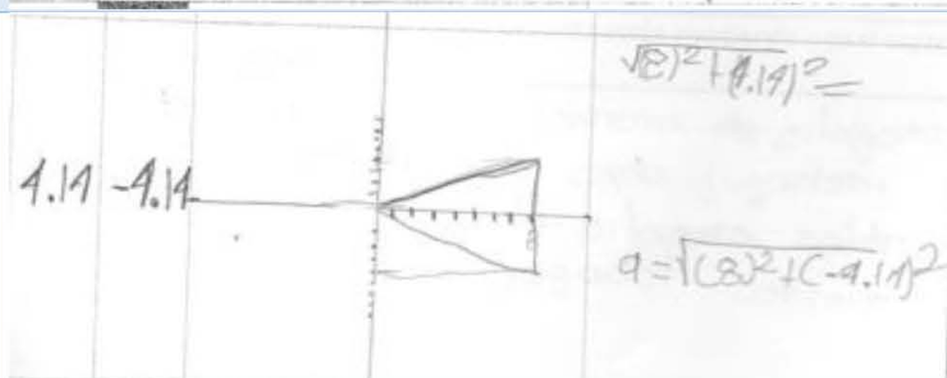
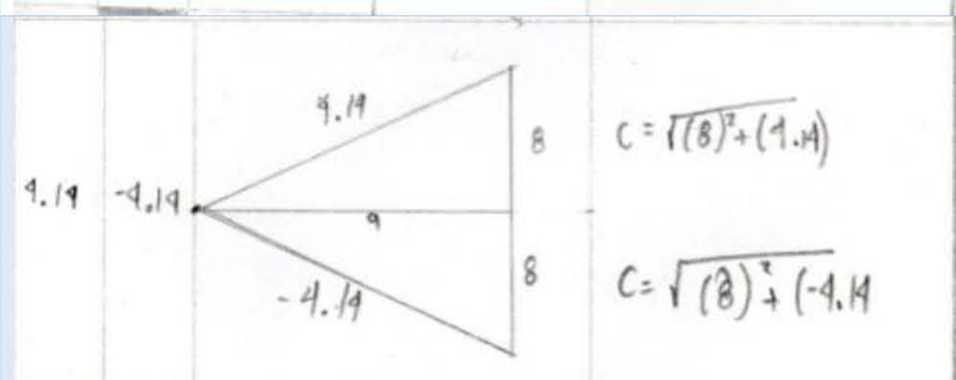
Tabla 20. Respuestas al cuadernillo: Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$.

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$
1	
2	
3	
4	

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$</th></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8</td><td>
</td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$
9	
10	
11	
12	
14	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$
15	
18	
19	
20	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$
21	
22	
23	
24	

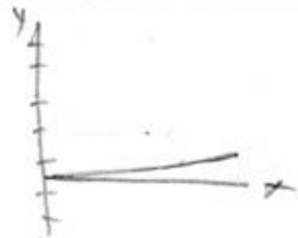
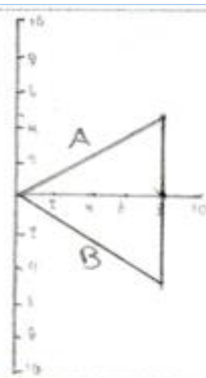
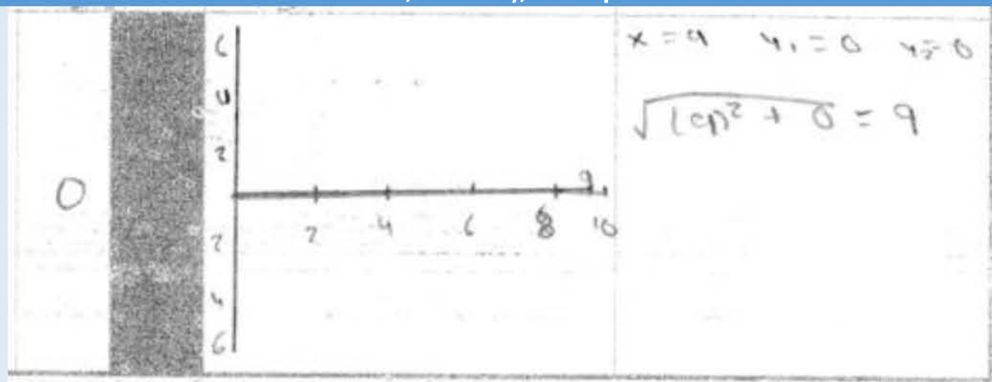
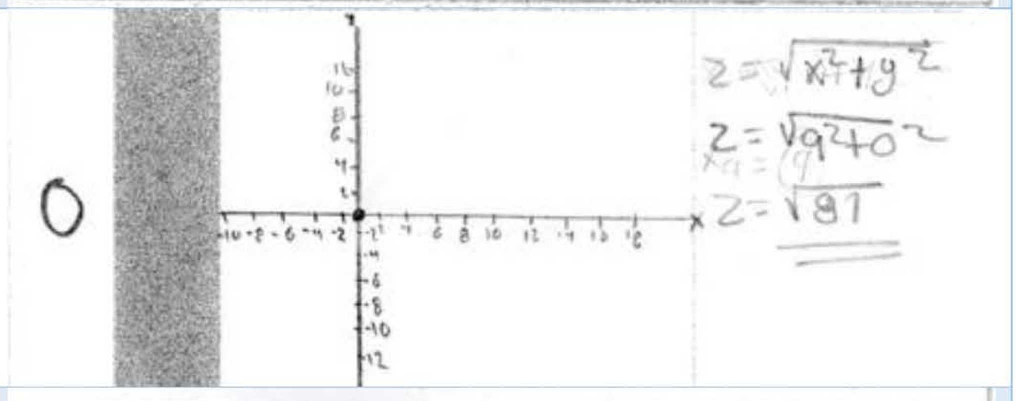
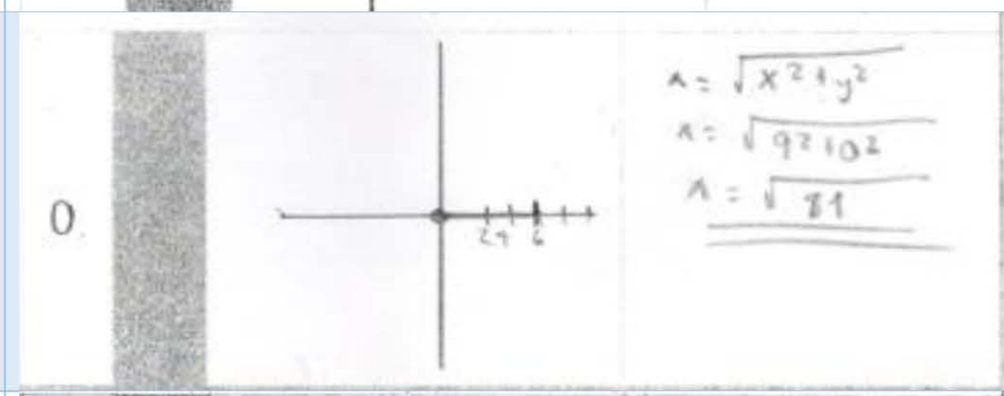
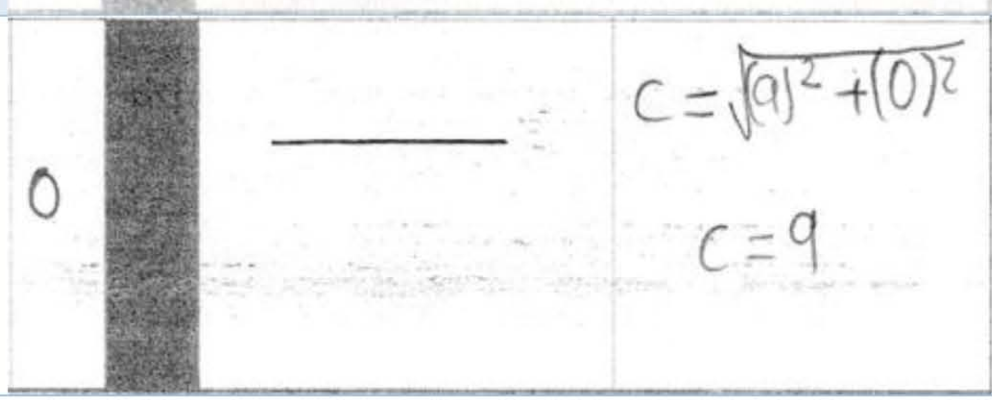
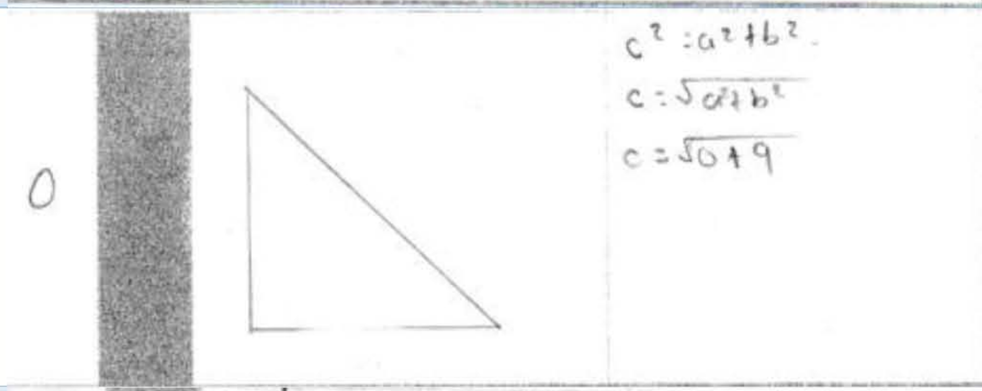
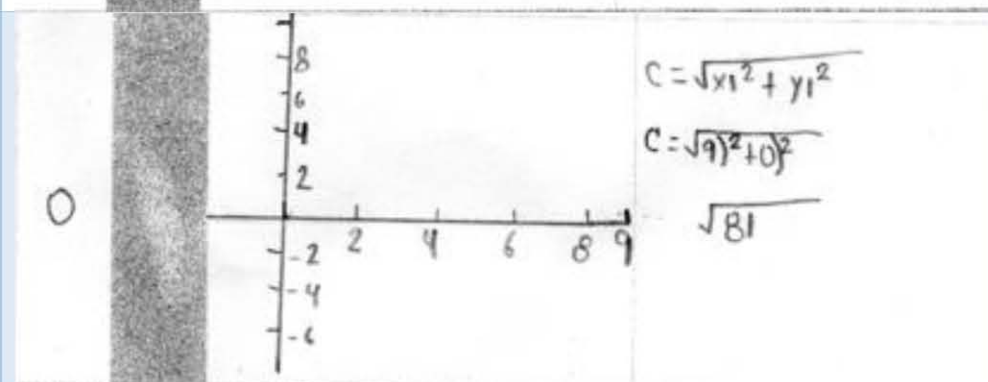
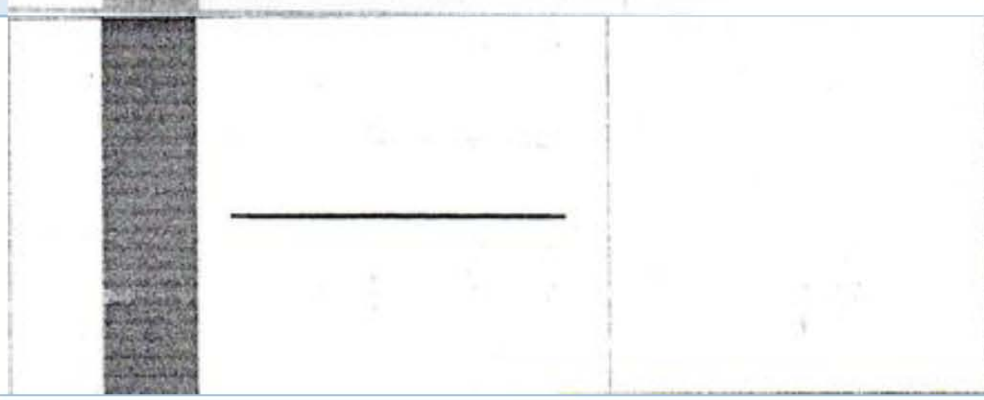
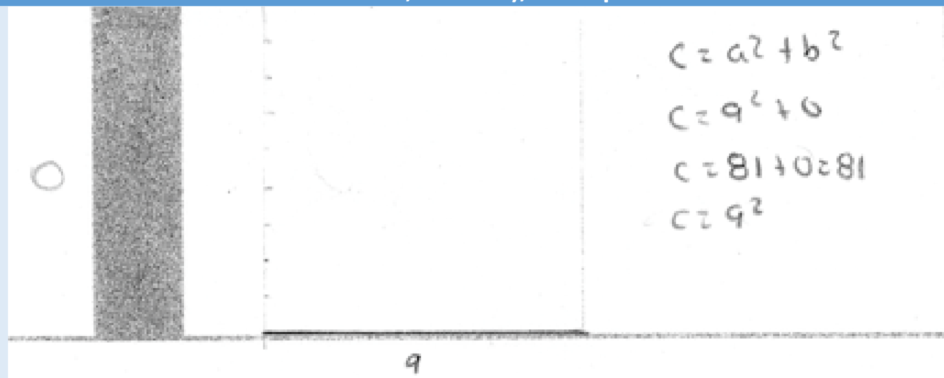
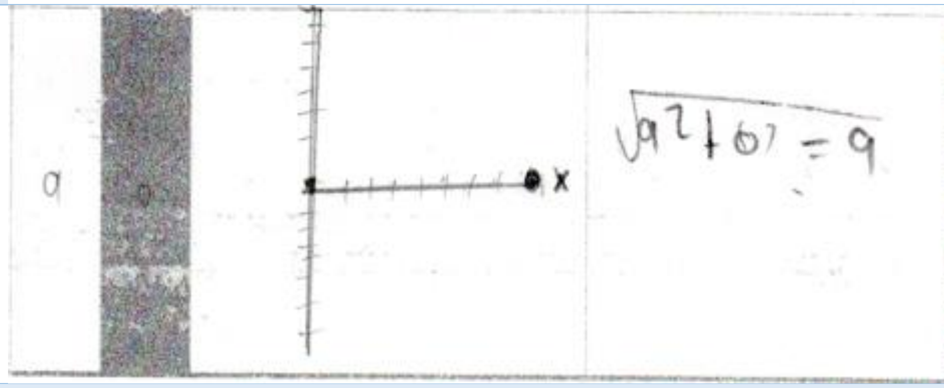
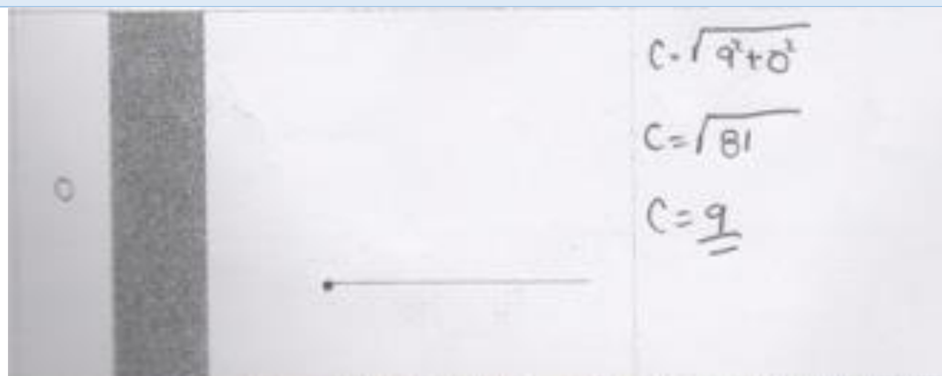
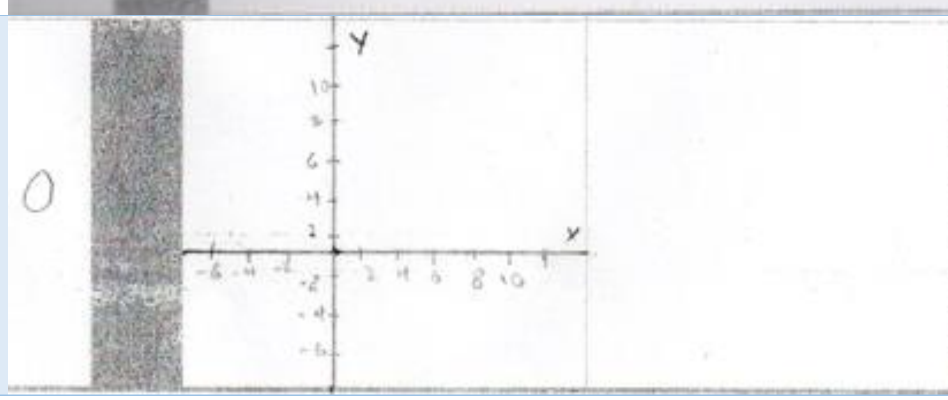
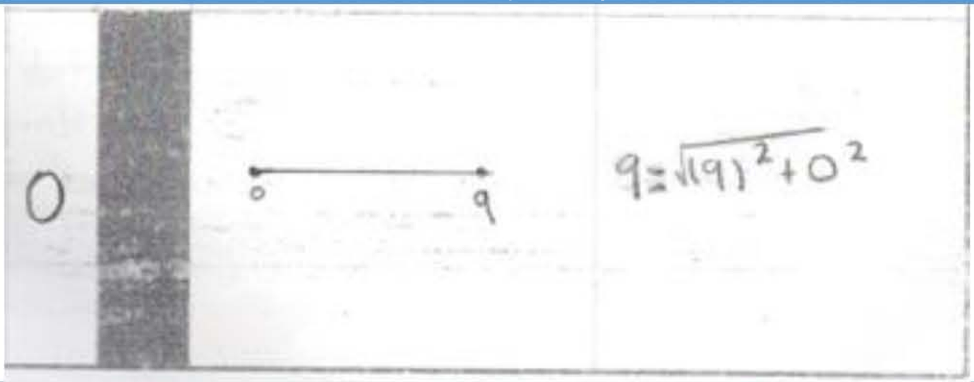
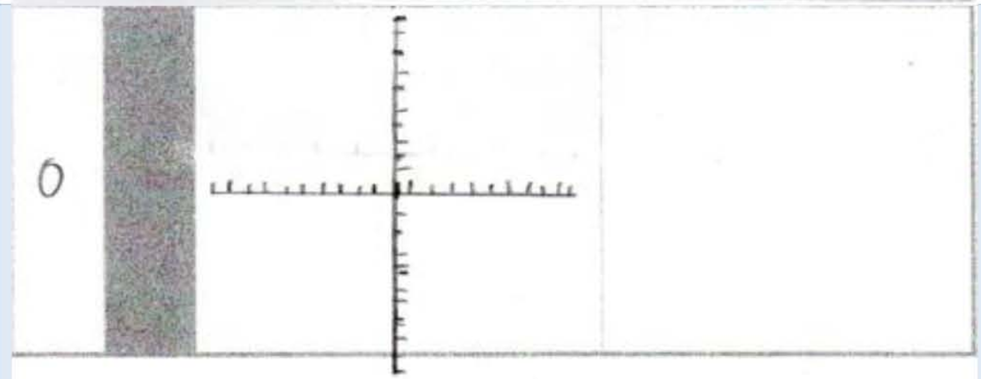
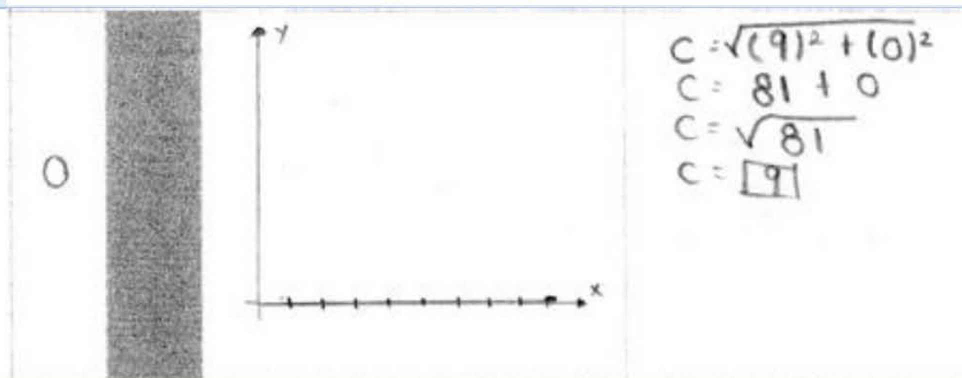
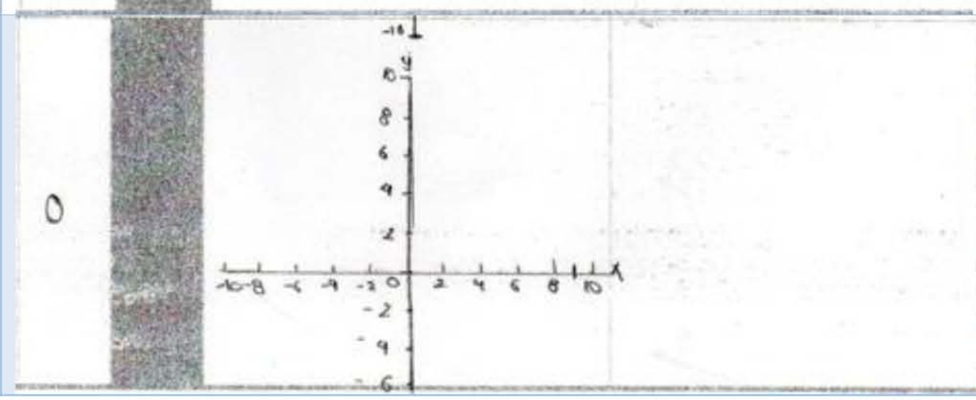
Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 8$
26	4.14 -4.14 $Y_1 = \sqrt{4.14^2 + 8^2} = 9$ $Y_2 = \sqrt{-4.14^2 + 8^2} = 9$
27	
28	4.14 -4.14  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c = \sqrt{4.14^2 + -4.14}$ $c = \sqrt{17.13 + -17.13}$
29	4.14 -4.14  $A = \sqrt{(8)^2 + (4.14)^2} = 9$ $B = \sqrt{(8)^2 + (-4.14)^2} = -9$
30	4.14 -4.14 $c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = 4.14^2 + (-4.14^2)$ $c^2 = 17.13 + (-17.13)$ 17.13
31	4.14 -4.14 $c = \sqrt{(8)^2 + 4.14}$ $R = 9 \quad \sqrt{81.13}$ $c = \sqrt{(8)^2 + (-4.14)}$ $R = 9 \quad \sqrt{81.13}$

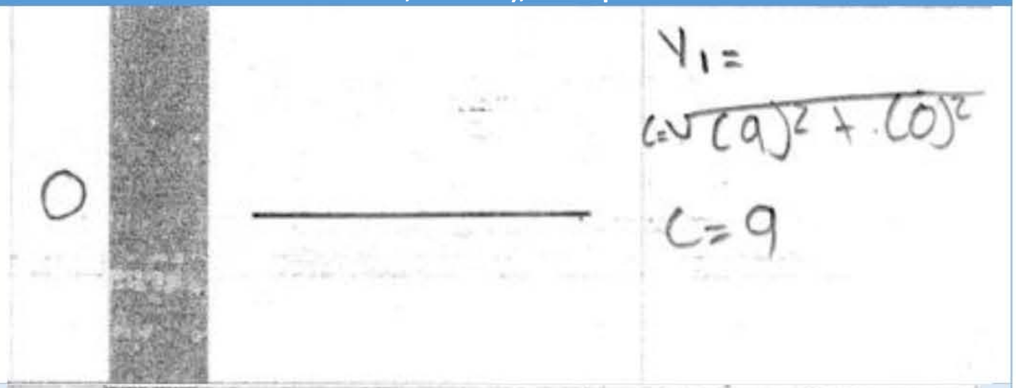
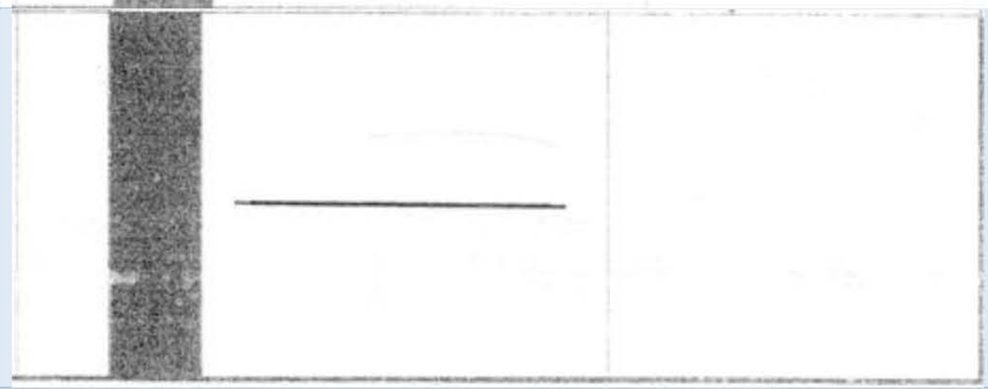
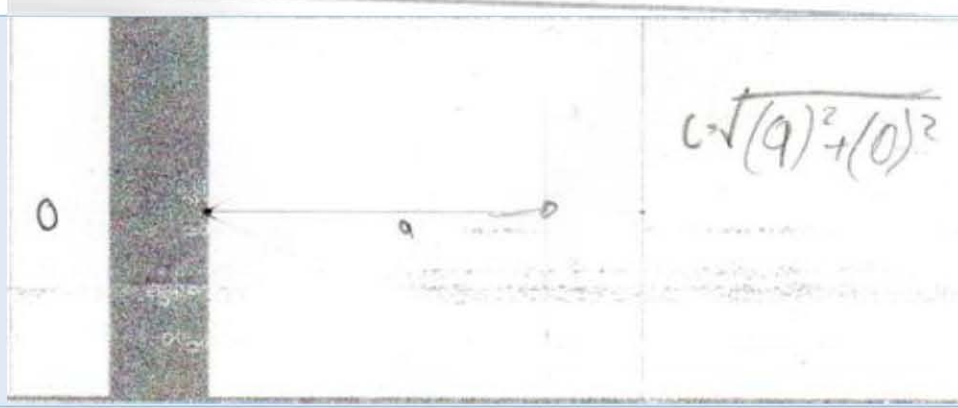
Tabla 21. Respuestas al cuadernillo: Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$.

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$
1	
2	
3	
4	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$
5	
6	
7	
8	

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$</th></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>
</td></tr>
<tr><td>11</td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>
</td></tr>
<tr><td>14</td><td>
</td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$
15	
18	
19	
20	

Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$
21	
22	
23	
24	

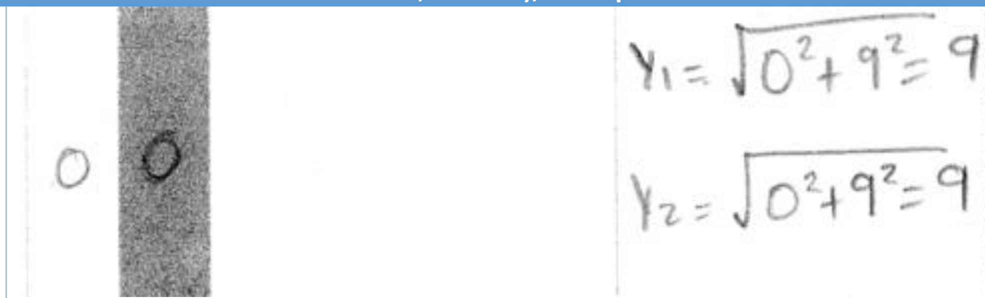
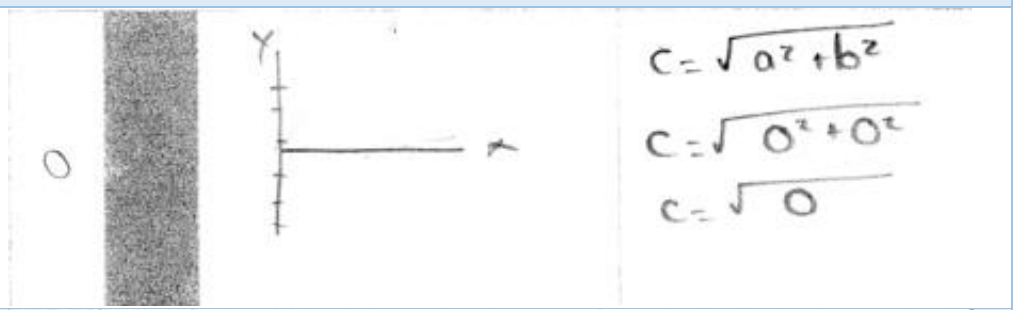
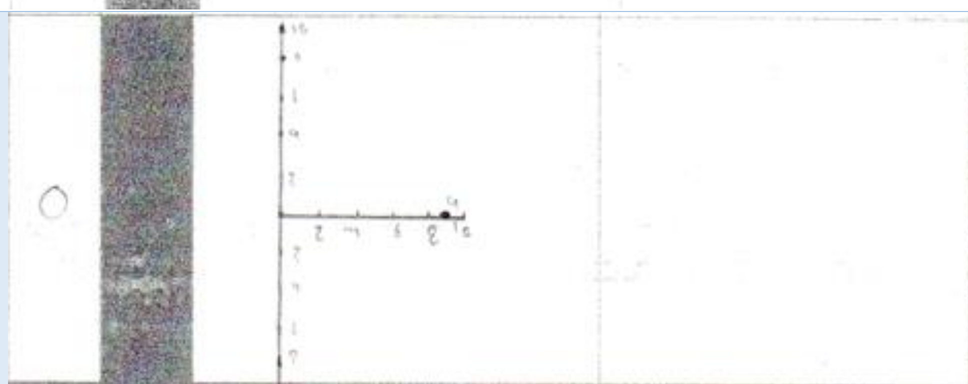
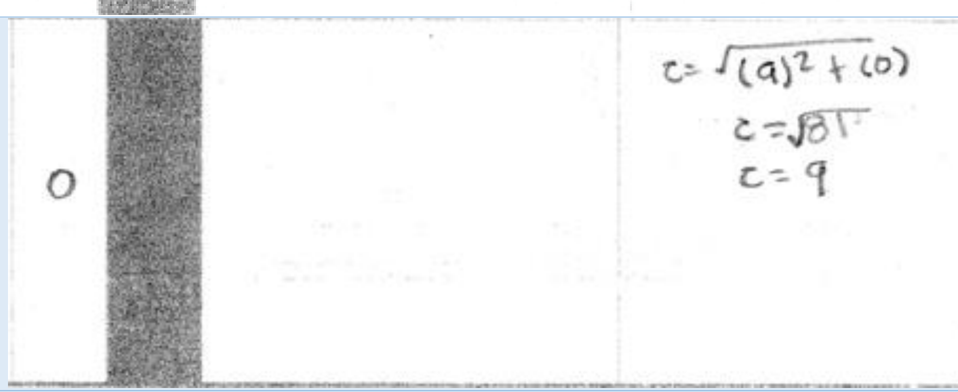
Estudiante	Actividad 1, inciso a), valor para $x = 9$
26	
27	
28	
29	
30	
31	

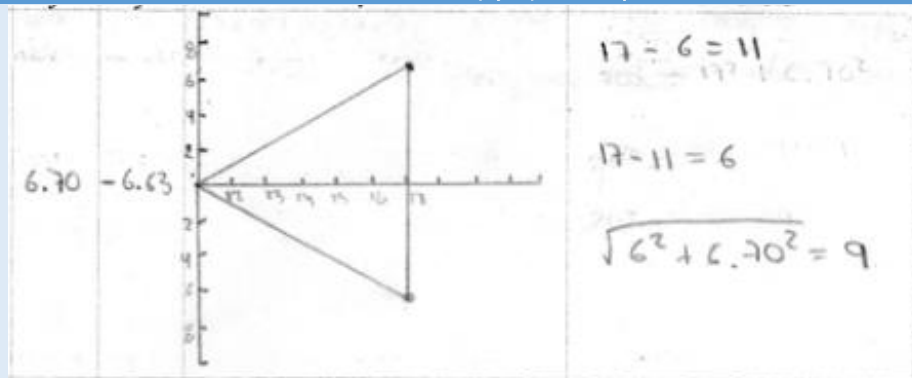
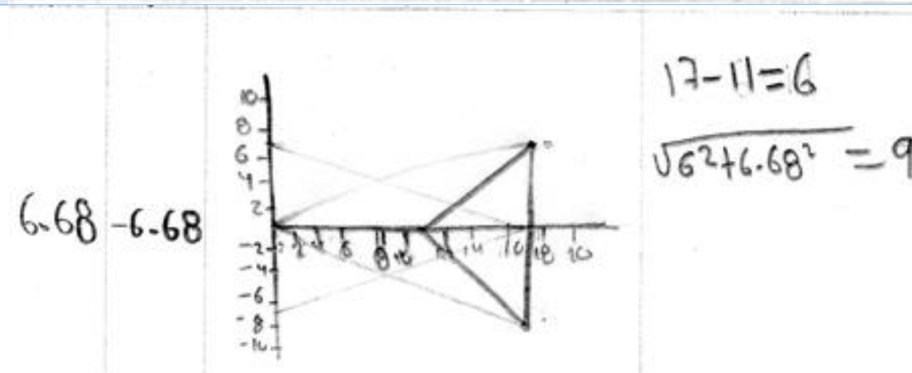
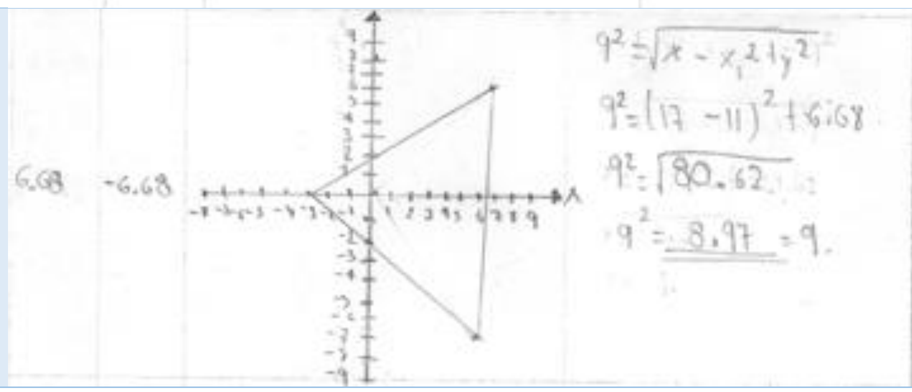
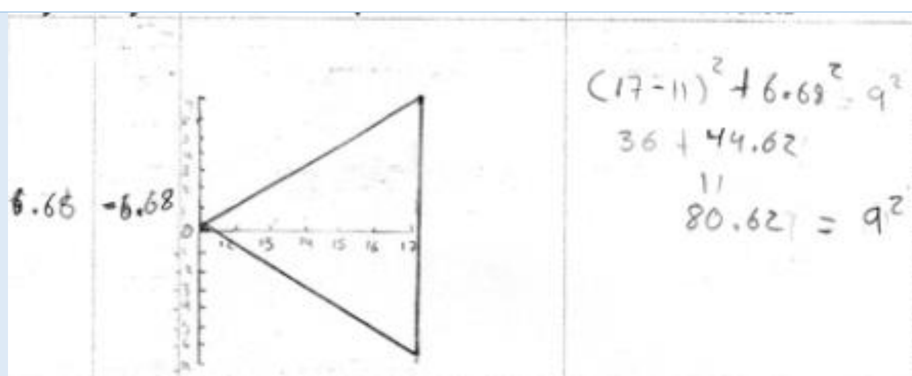
Tabla 22. Respuestas al cuadernillo: Actividad 1, incisos b), c), d) y e).

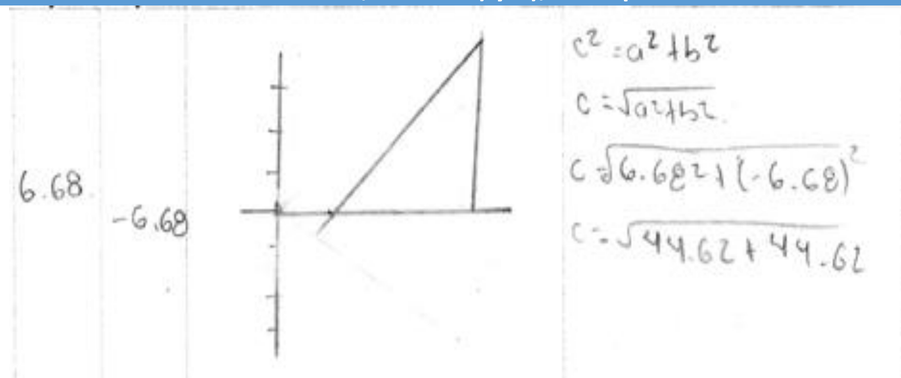
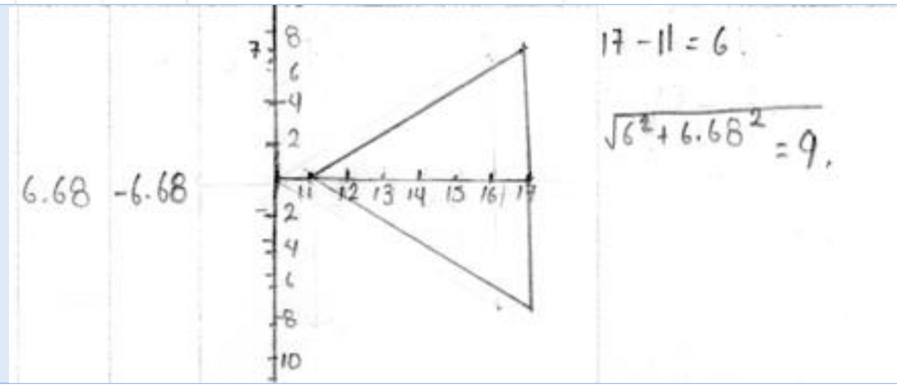
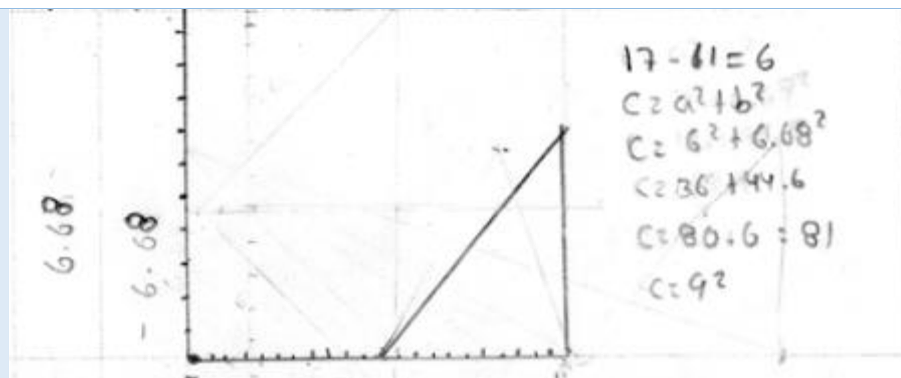
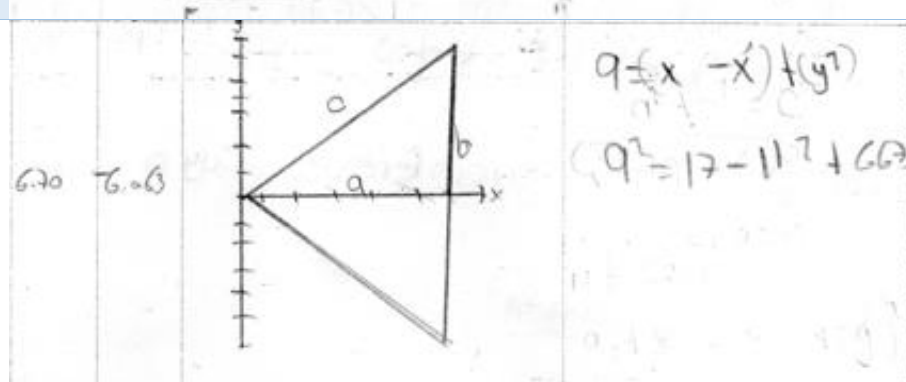
Estudiante	b)	c)	d)	e)
1	$\sqrt{x^2+y^2}=$ Siempre el mismo radio (9) X en relación con y_1 o y_2 formando un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el radio con esta ecuación debe ser siempre el mismo a cualquier posición en esa parte de la circunferencia	Sí solo cambia el signo del valor en “x” (negativo)”	1.- Ubicar los puntos de CR7 y Chicharito, usando sus coordenadas (x) (y) y darte cuenta que no da 9 en ningún caso CR7 -> Invade a Messi Chicharito -> No invade a Messi 2.- Observando… No están en la circunferencia	
2	Sí porque si x y y son de raíz cuadrada puede pasar a ser al cuadrado	Sí solo que la x va a pasar a ser negativo	Sí lo está invadiendo CR7 ya que está en la línea pero Chicharito anda fuera de la que es la línea!	
3				
4	Sí porque se sigue aplicando el mismo método y la respuesta no cambia sigue siendo la misma distancia entre dos puntos y no camba el radio de la circunferencia $C=\sqrt{a^2+b^2}$	Sí porque podemos aplicar en cada circunferencia por el mismo método depende de cada figura pero nunca cambiará de distancia de 2 puntos	Hace un bosquejo de la cancha de futbol	La fórmula sin raíz cuadrada sería $(y)^2+(x)^2=(9)^2=81$ y mi respuesta fue $C=\sqrt{a^2+b^2}$ pero ambas respuestas son correctas $(y)^2+(x)^2=(9)^2$
5	Sí porque “x” y “y” son los valores de los catetos y 9 es el resultado que sale de la hipotenusa $\sqrt{x^2+y^2}=9$	Sí, porque se supone que tiene que tener la misma medida		$x^2+y^2=9$ =FÓRMULA Bueno pues argumentando con mis compañeros de equipo, sí me confundieron algo porque algunos lo tenían como yo y otros, otra cosa pero después ya dijimos y quedamos de acuerdo en la nueva fórmula
6	Son las coordenadas de dos puntos que se encuentran en el semicírculo $c^2=a^2+b^2=9=\sqrt{x^2+y^2}$ $9^2=x^2+y^2$	Sí, porque ambas porterías tienen las mismas medidas	Se podría saber con el teorema de Pitágoras y con las coordenadas de cada jugador y al hacer el teorema de Pitágoras saldría la distancia de cada jugador conforme al punto penal.	
7				
8	$c=\sqrt{(a)^2+(b)^2}$ $c=a^2+b^2$ $c^2=a^2+b^2$ $9^2=x^2+y^2$	Sí, porque es el mismo procedimiento solo sustituyes los puntos de acuerdo Messi avance sobre la circunferencia	CR7 sí está invadiendo	
9	Sí ya que solo sustituiríamos los valores de “x” y “y” obteniendo siempre el resultado de 9, en donde “x” y “y” son los catetos y 9 es la hipotenusa	Sí porque se supone que de ambos lados la medida del tiro penal es de 9.	Obteniendo el perímetro Dividiendo la circunferencia	Nueva fórmula $x^2+y^2=9^2$

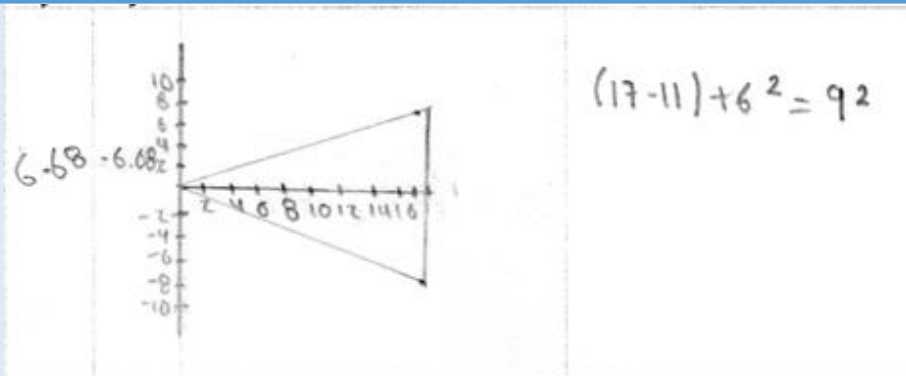
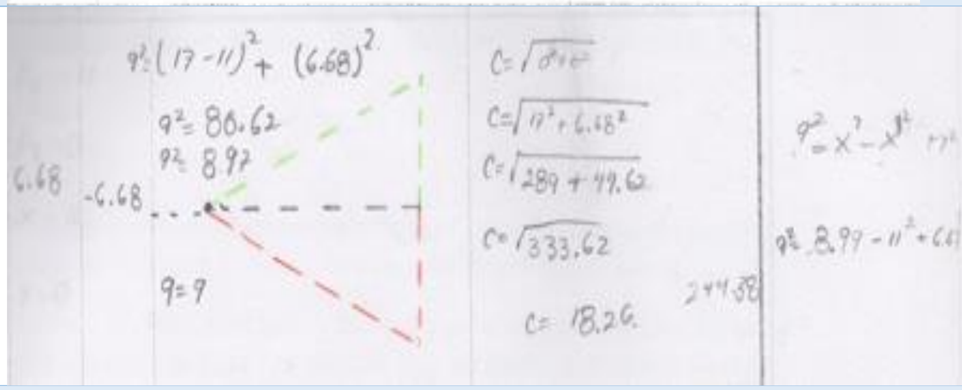
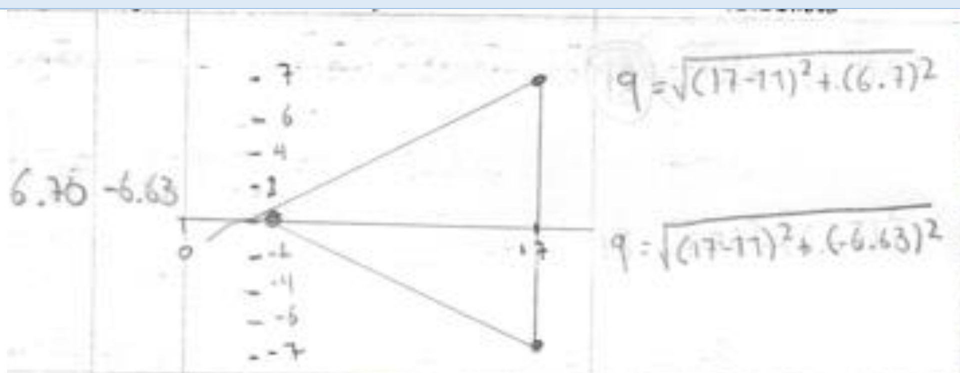
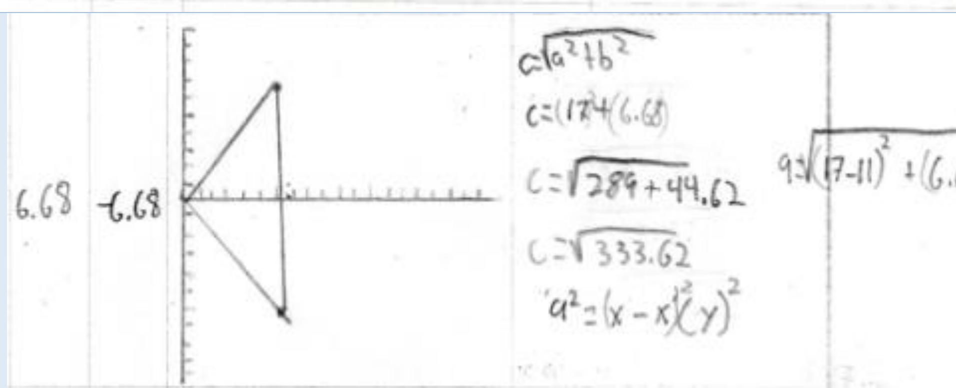
Estudiante	b)	c)	d)	e)
10	Sí ya que con sustituir los valores de (x y y) el resultado será el mismo siempre y cuando esté dentro de la circunferencia	(x, y) Sí solo cambia el valor de x a negativo	Solo CR7 invade la área de Messi	Solo tuve que modificar la fórmula ya que me di cuenta que invirtiendo lo signos sería lo más lógico ya que es el otro lado de la cancha así que se tendría que ser lo inverso a la fórmula que ya había aplicado
11				
12	Sí porque mientras no pase o se salga del semicírculo mientras tengamos un valor en “x” y otro en “y”	No porque en la otra portería me podría dar valores diferentes		Encontramos la ecuación $x^2 + y^2 = 9^2$
14				
15	Sí, porque si sabemos que la distancia que hay entre el penal y el jugador es 9, las coordenadas (medidas) coincidirán con esa medida (teorema de Pitágoras) $9^2 = (x)^2 + (y)^2$	Sí, porque es lo mismo, solo que en sentido contrario (bosqueja una cancha de futbol con las dos áreas penales)	CR7: si la distancia que hay del punto penal al jugador es menor que 9; si la distancia que hay del punto penal al jugador es mayor que 9. CH14: si la distancia que hay del punto penal al jugador es menor que 9; si la distancia que hay del punto penal al jugador es mayor que 9.	
18				
19	Porque x y y representa al jugador que está dentro de la circunferencia $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ $y = \sqrt{x^2 + y^2}$ $9^2 = x^2 + y^2$			
20	$9^2 + x^2 + y^2$			
21	Sí, con tal de que no salga del semicírculo $C = \sqrt{(1.5)^2 + (8.3)^2}$ $C = \sqrt{2.25 + 68.89}$ $C = \sqrt{71.14}$ $C = 8.43$	Sí, porque ambos semicírculos son iguales (bosqueja una cancha de futbol con las dos áreas penales).	CR7 sí invade porque está dentro del círculo, mientras Chicharito no invade porque está fuera del semicírculo (hace un esquema del área penal ubicando a CR7 dentro del semicírculo del área, a Messi sobre él y a Chicharito fuera del mismo.	
22	$c = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$ $c = a^2 + b^2$ $c^2 = a^2 + b^2$ $9^2 = x^2 + y^2$	Sí, porque es el mismo procedimiento solo sustituyes los puntos de acuerdo Messi avance sobre la circunferencia	CR7 sí está invadiendo	
23	Sí pero siempre y cuando Messi se encuentre en la circunferencia del círculo $\sqrt{(x)^2 + (y)^2} = 9$ $\sqrt{(9)^2 + (.4)^2} = 9.00$	Sí ya que ambas son iguales y por tal motivo los resultados tienen que ser iguales o parecidos	Se podría saber con el teorema de Pitágoras y con las coordenadas de cada jugador. Y al hacer el teorema de Pitágoras saldría la distancia de cada jugador conforme al punto penal	
24				

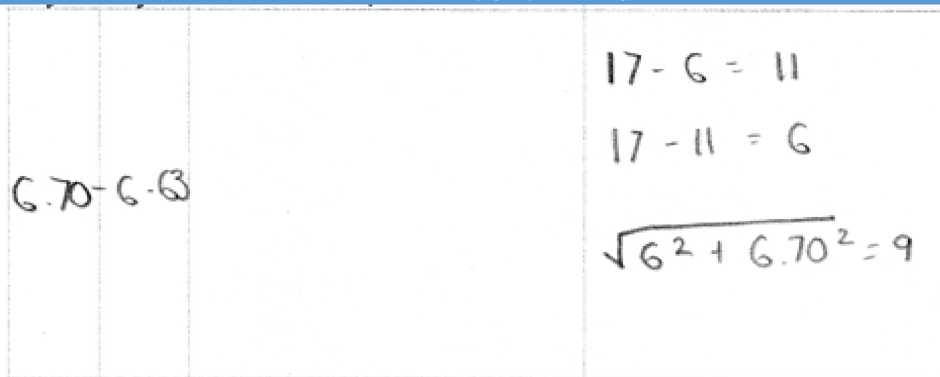
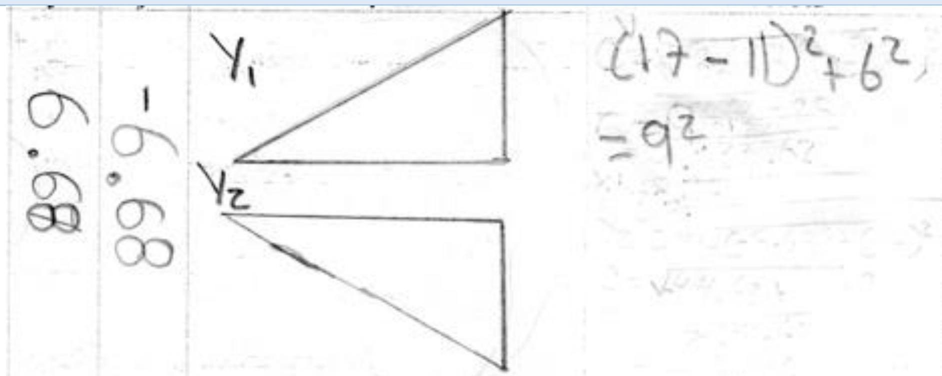
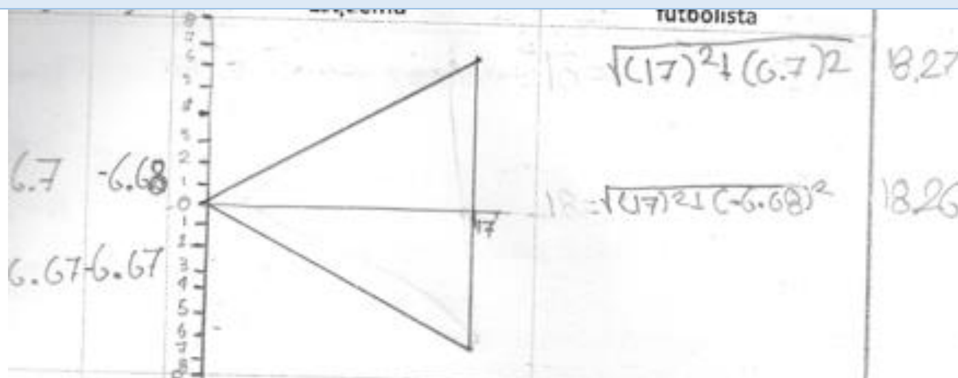
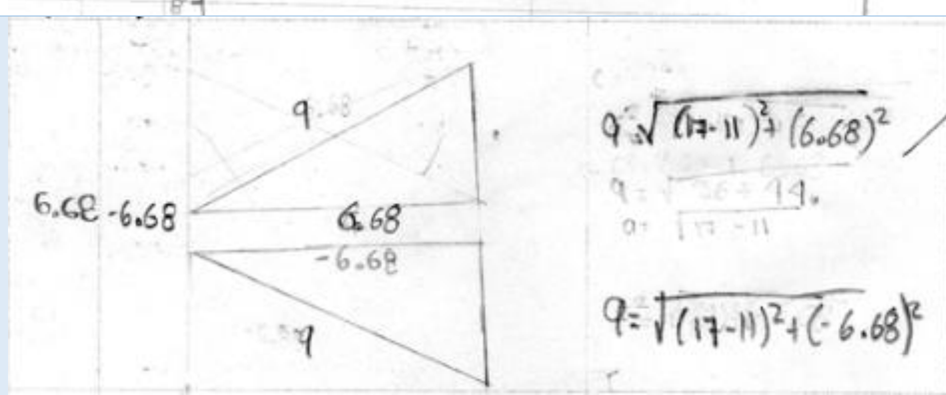
Estudiante	b)	c)	d)	e)
26	Sí, ya que solo sustituiríamos los valores de “x” y “y” obteniendo siempre el resultado de 9, en donde “x” y “y” son los catetos y 9 es la hipotenusa $\sqrt{x^2+y^2}=9$	Sí porque se supone que de ambos lados la medida del tiro penal es de 9.	Obteniendo el perímetro Dividiendo la circunferencia	Nueva fórmula $x^2+y^2=9^2$
27	Sí porque el radio siempre será 9 ya que se sustituirán los valores obtenidos siempre que $9^2=x^2+y^2$	El resultado de x tiene que ser negativo ya que tiene una contrariedad	No cumple con lo que se pide ya que CR7 y Chicharito no se encuentra en la circunferencia	
28	$C=\sqrt{a^2+b^2}$ $y=\sqrt{x^2+y^2}$ $9^2=x^2+y^2$ Sustituimos la x a y	Sí porque ambos semicírculos son iguales (bosqueja una cancha completa de futbol)	CR7 sí porque está dentro del círculo mientras chicharito no invade porque está fuera del semicírculo	
29	$9^2=(x)^2+(y)^2$	Sí porque no cambia nada		$y^2+x^2=9^2$ la fórmula Ya platicando con la compañera llegamos a un acuerdo de la fórmula
30	$c^2=a^2+b^2=9^2$ $=x^2+y^2$ Porque esta ecuación pasa por cualquier parte del semicírculo.	Pues sí porque la cancha tiene que tener las mismas medidas.		
31	Sí porque pude usar la ecuación de Pitágoras donde podía comprobar la respuesta $c=\sqrt{a^2+b^2}$	Sí porque pudo utilizar la misma fórmula.		$y^2+x^2=9^2$ Yo pensaba que la ecuación era $c=\sqrt{a^2+b^2}$ Pero me di cuenta que se puede sacar los resultados sin sacar la raíz cuadrada

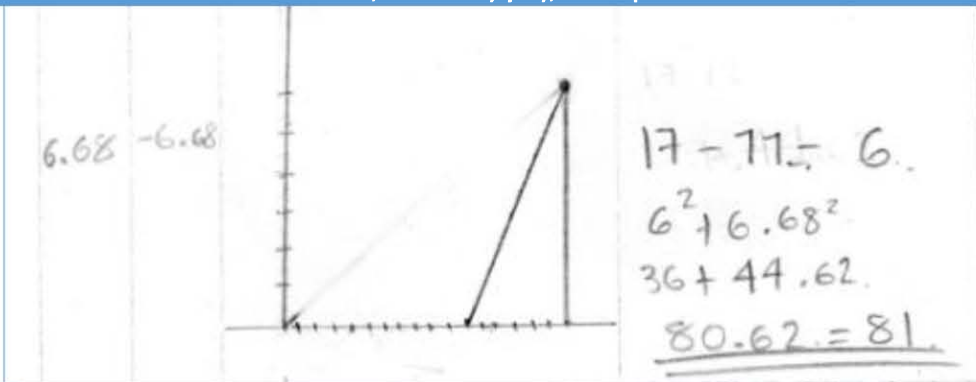
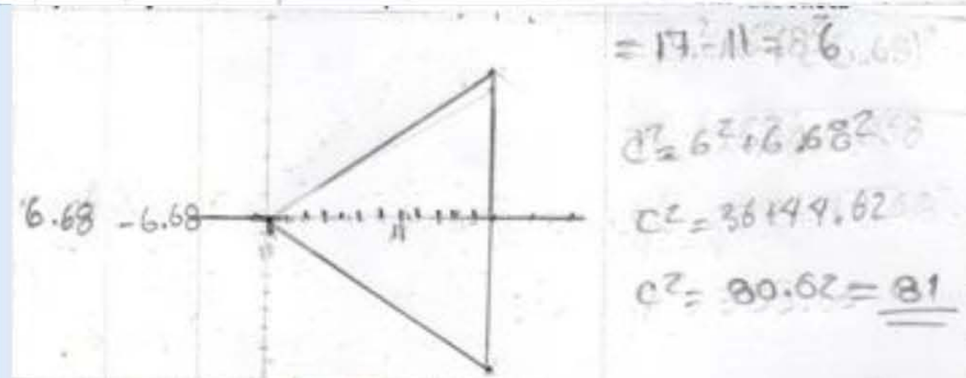
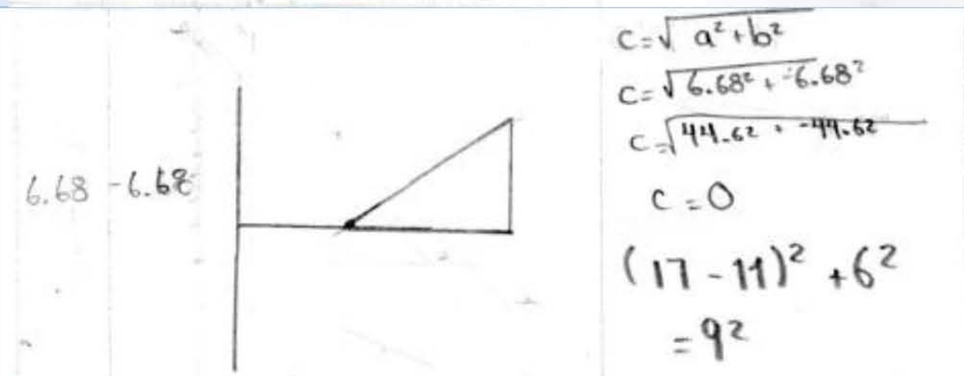
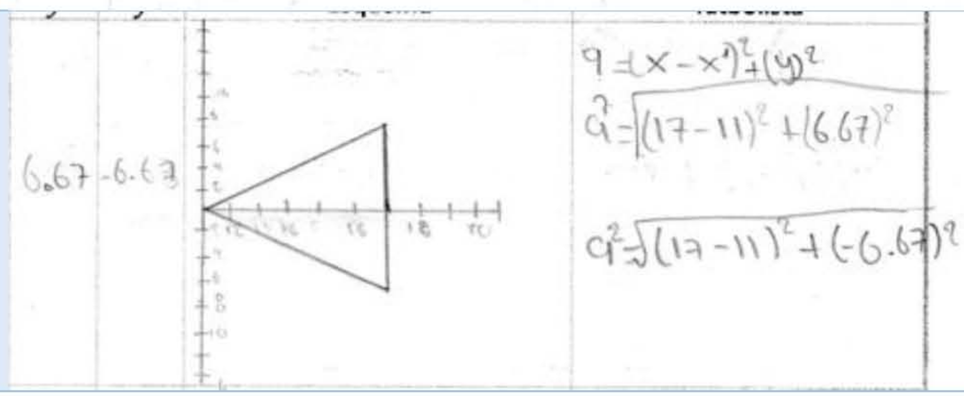
Tabla 23. Respuestas al cuadernillo: Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 17$.

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 17$
1	
2	
3	
4	
5	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 17$
6	
7	
8	
9	
10	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 17$
11	
12	
14	
15	
18	

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 17$</th></tr>
<tr><td>19</td><td>
</td></tr>
<tr><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td>
</td></tr>
<tr><td>22</td><td></td></tr>
<tr><td>23</td><td>
</td></tr>
<tr><td>24</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 17$</th></tr>
<tr><td>26</td><td>
</td></tr>
<tr><td>27</td><td>
</td></tr>
<tr><td>28</td><td>
</td></tr>
<tr><td>29</td><td>
</td></tr>
</table>

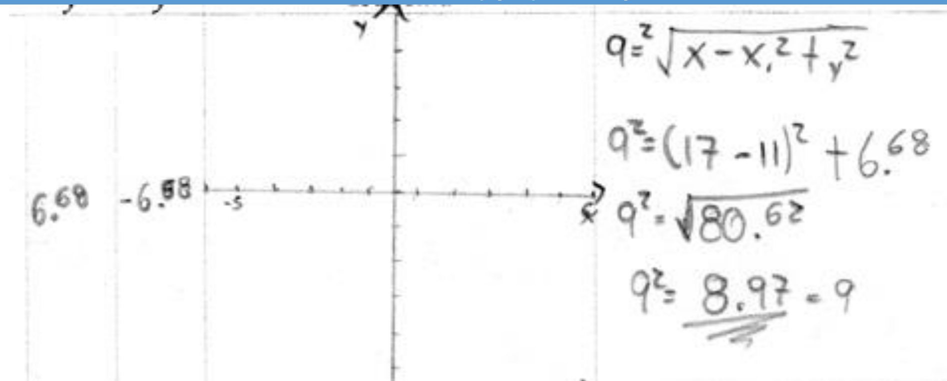
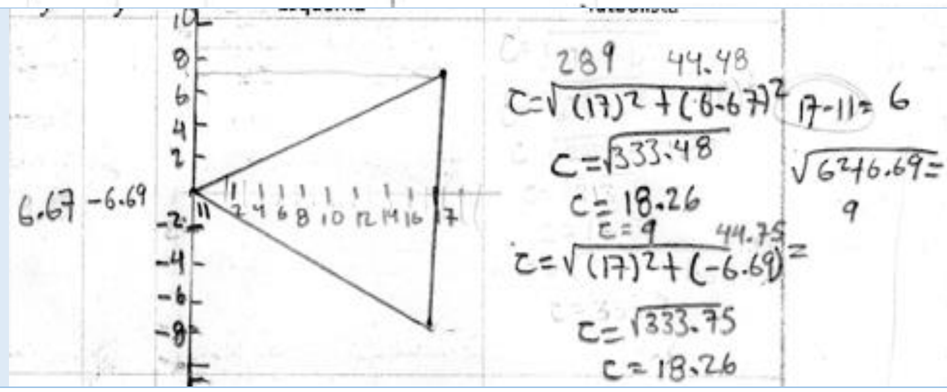
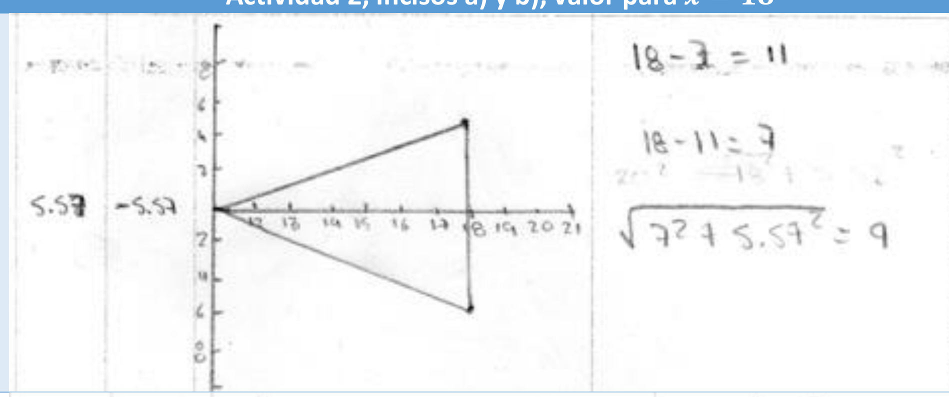
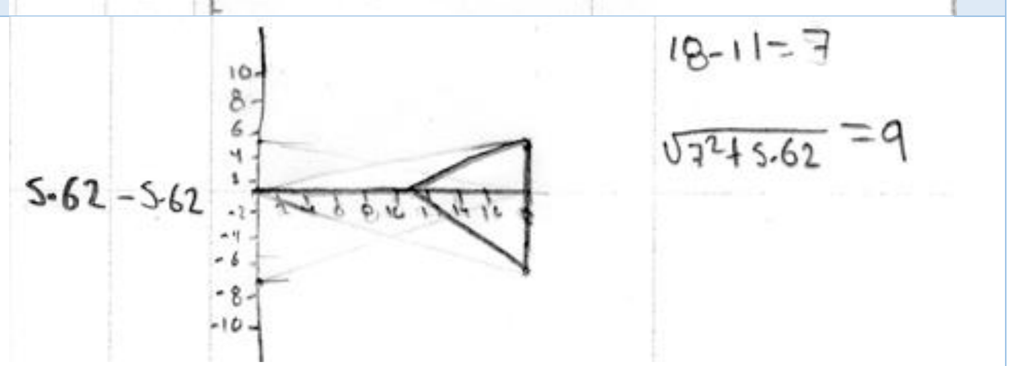
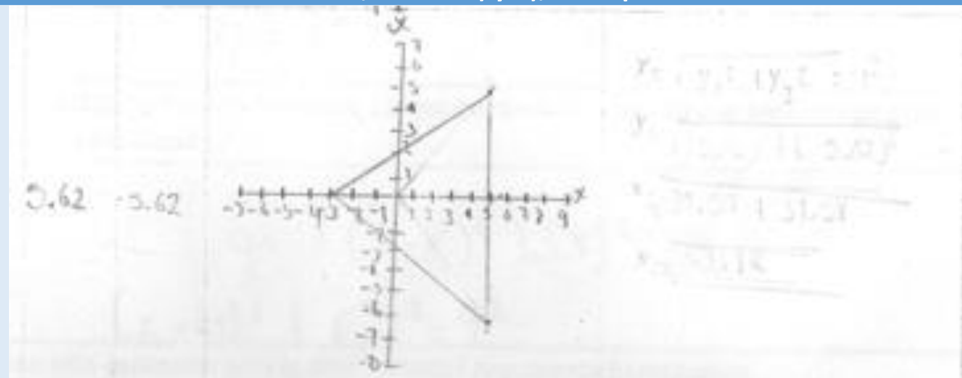
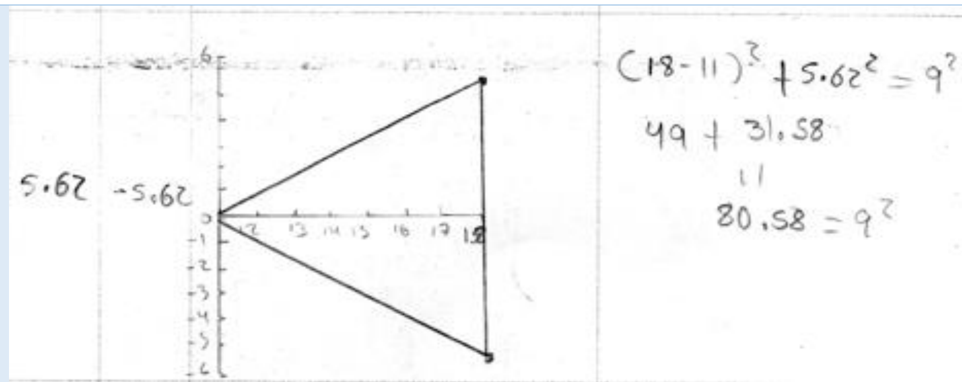
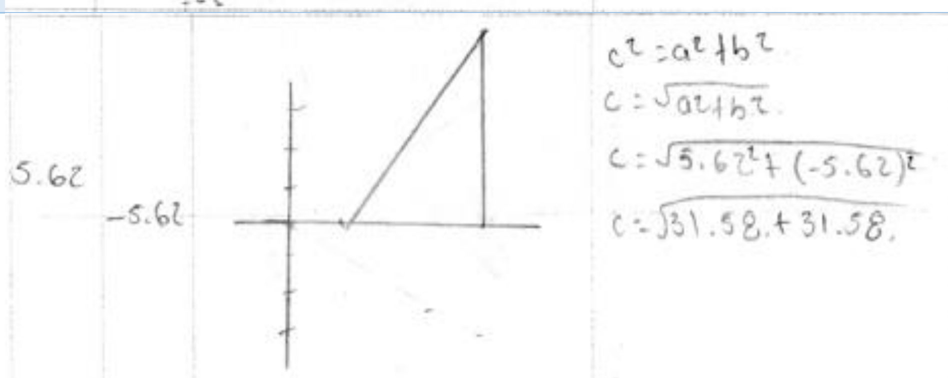
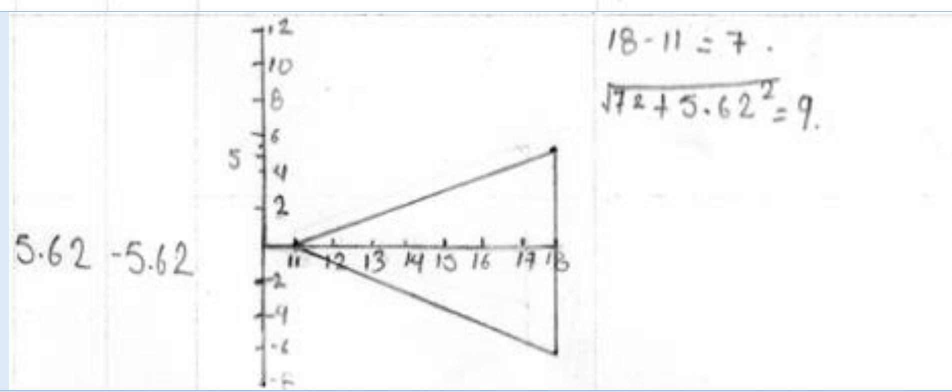
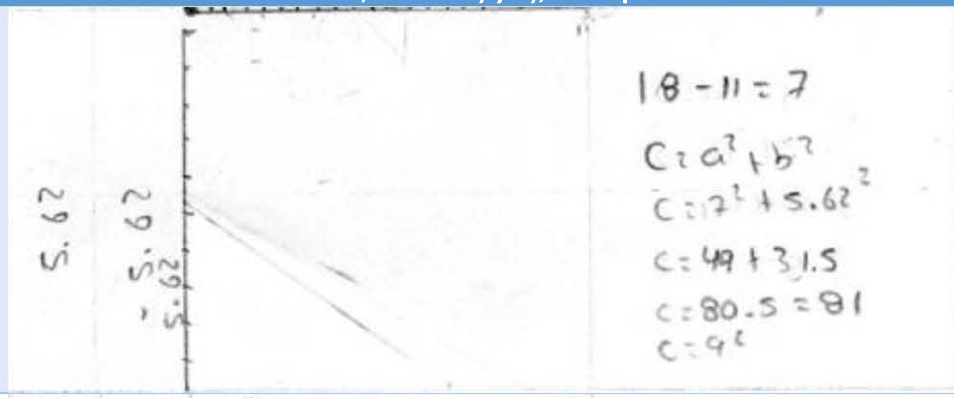
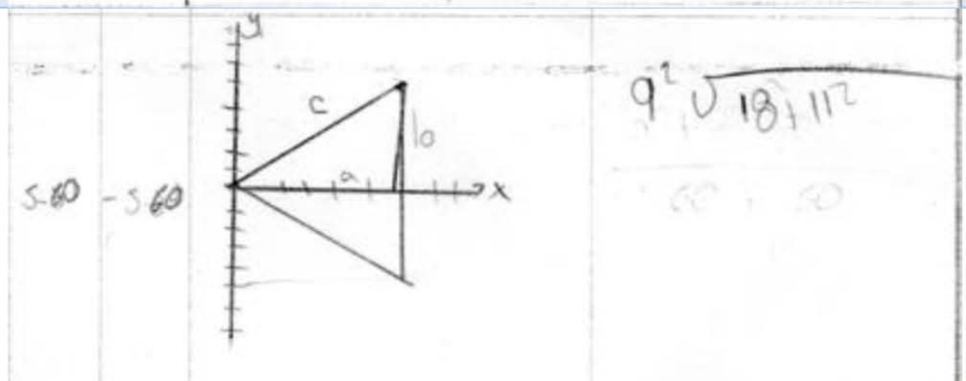
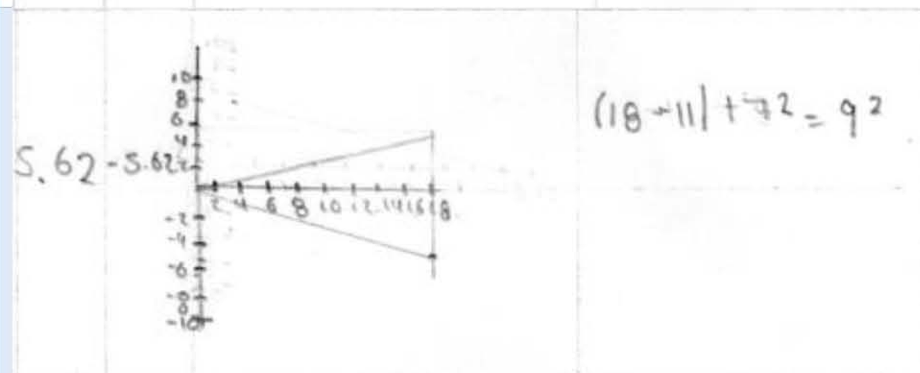
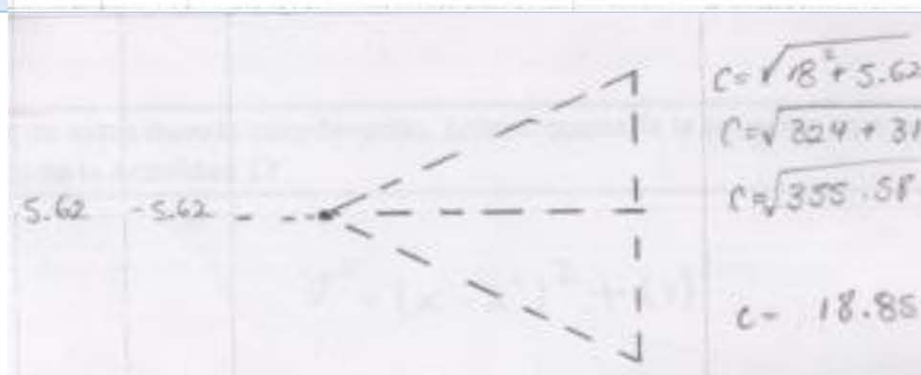
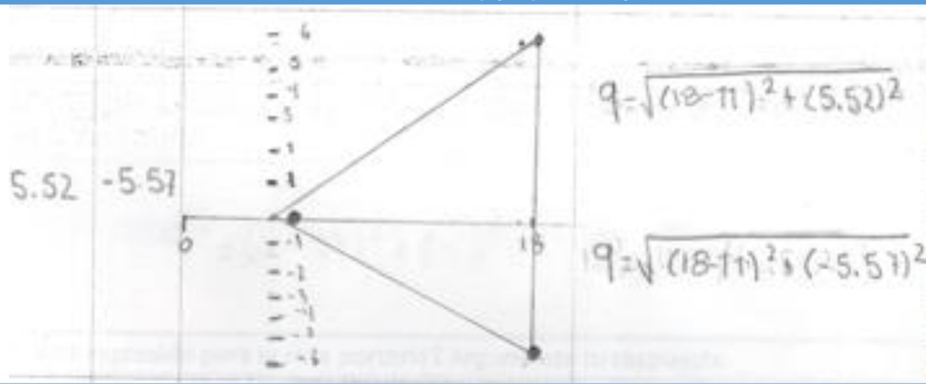
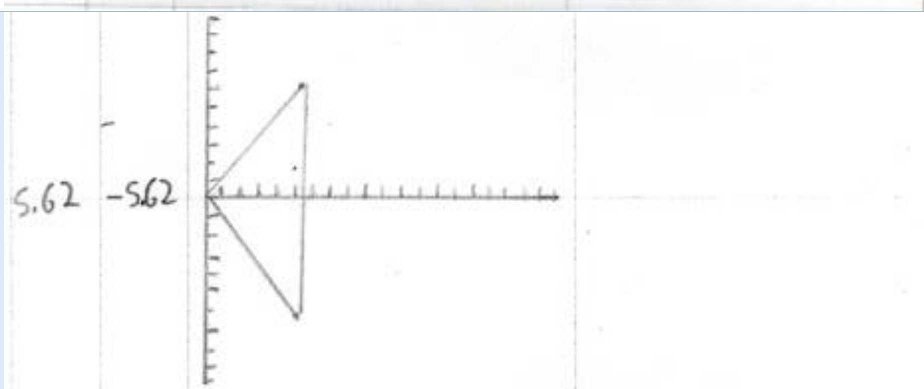
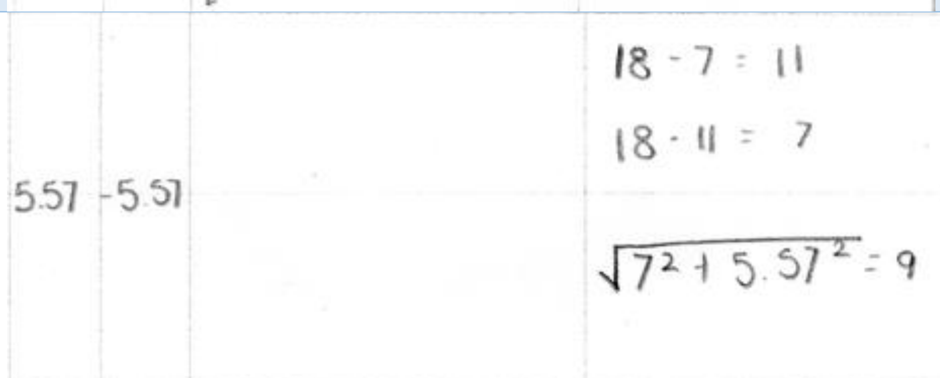
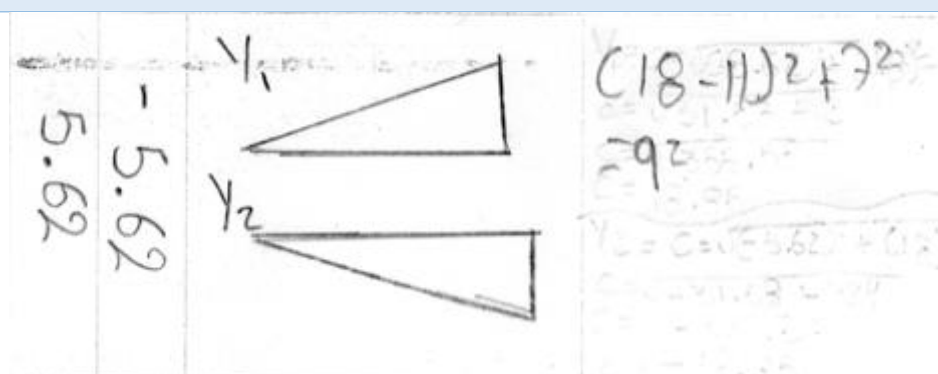
Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 17$
30	
31	

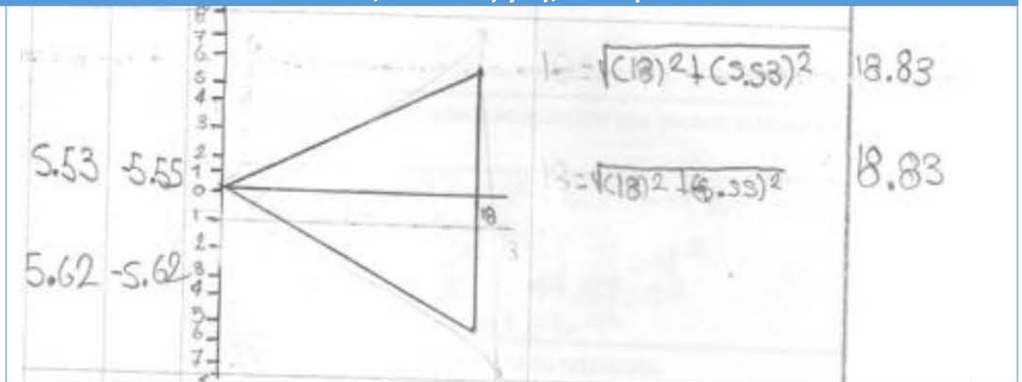
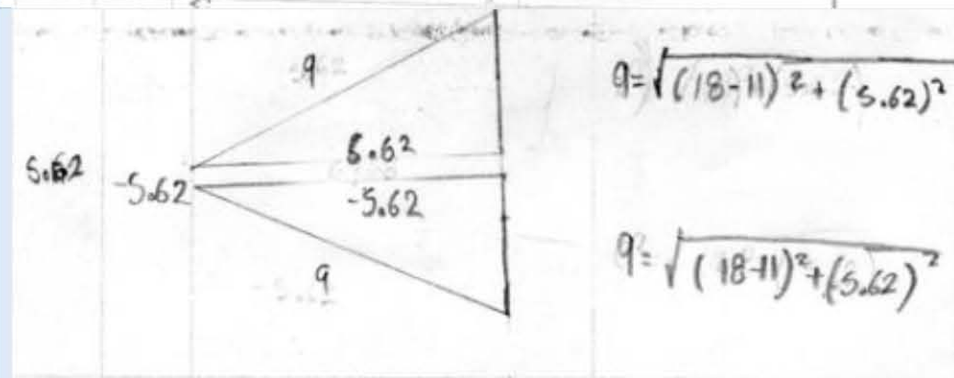
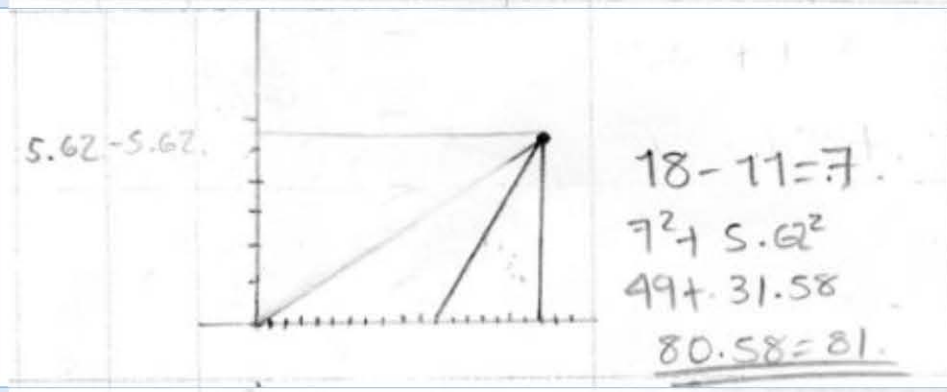
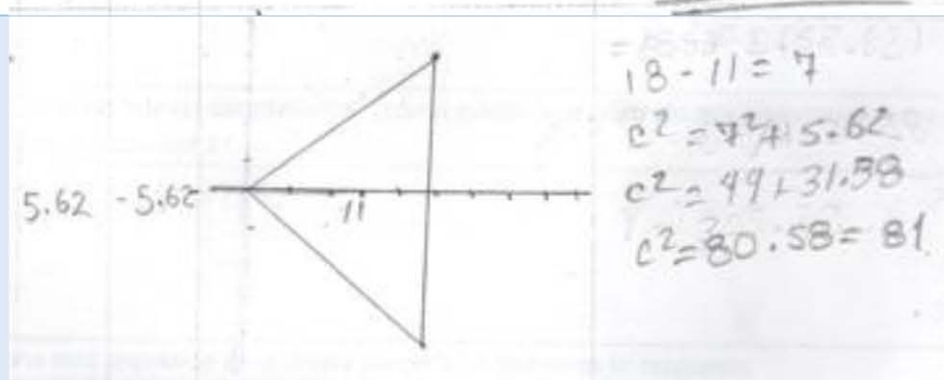
Tabla 24. Respuestas al cuadernillo: Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 18$.

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 18$
1	
2	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 18$
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 18$
9	
10	
11	
12	
14	

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 18$</th></tr>
<tr><td>15</td><td>
</td></tr>
<tr><td>18</td><td>
</td></tr>
<tr><td>19</td><td>
</td></tr>
<tr><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td>
</td></tr>
<tr><td>22</td><td></td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 18$
23	
24	
26	
27	

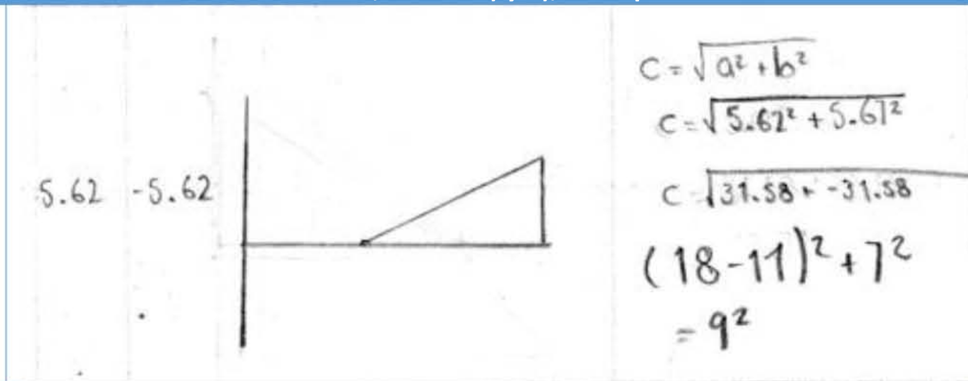
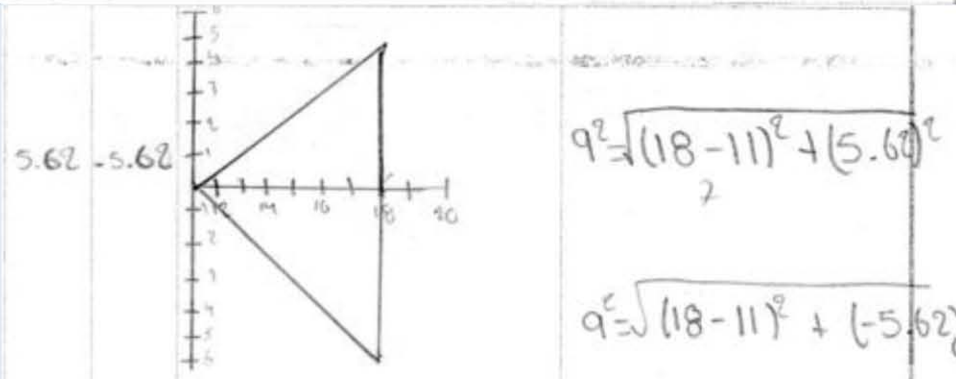
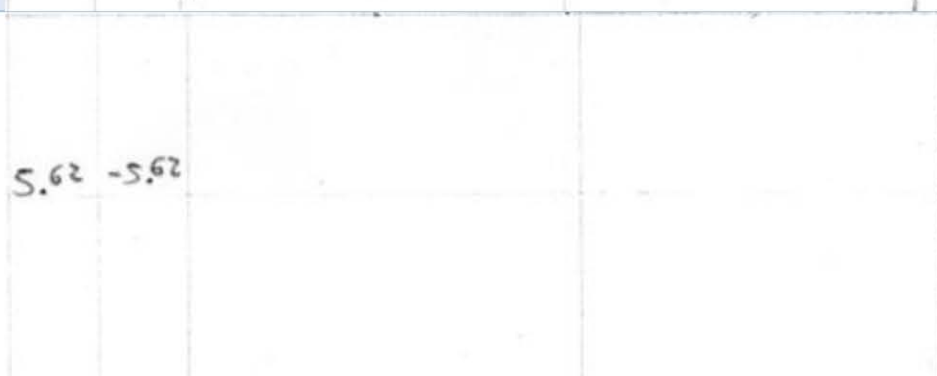
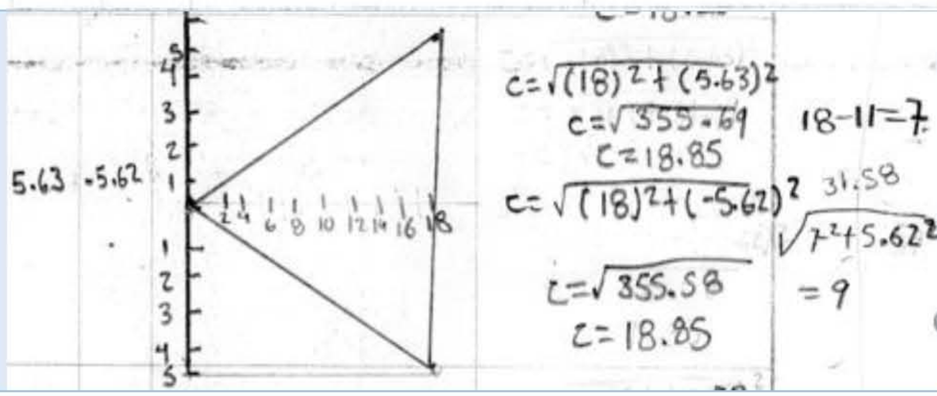
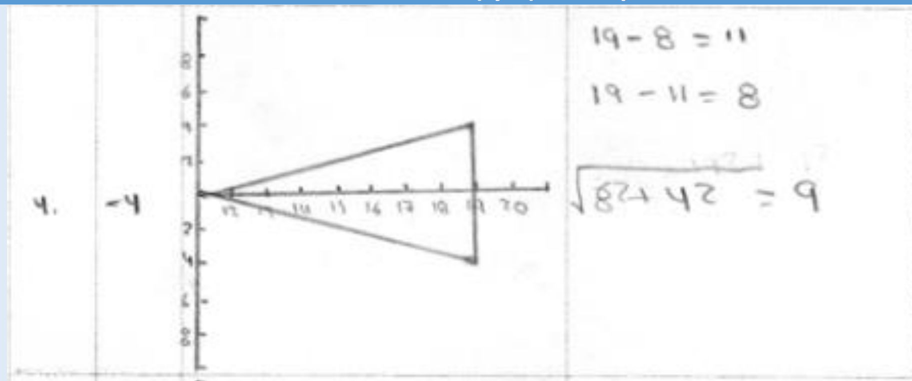
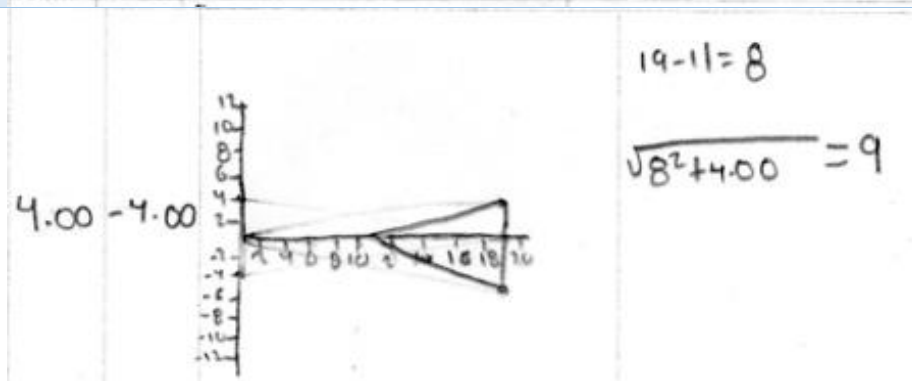
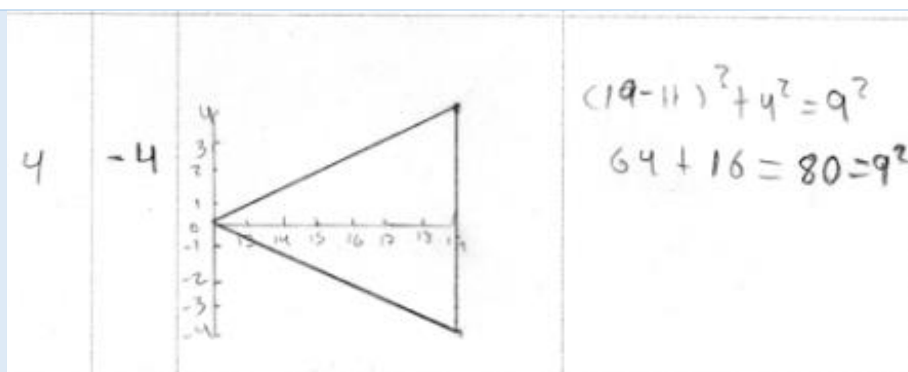
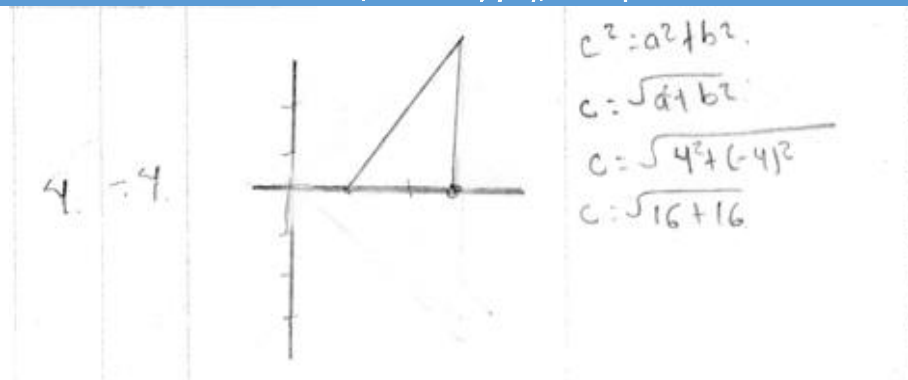
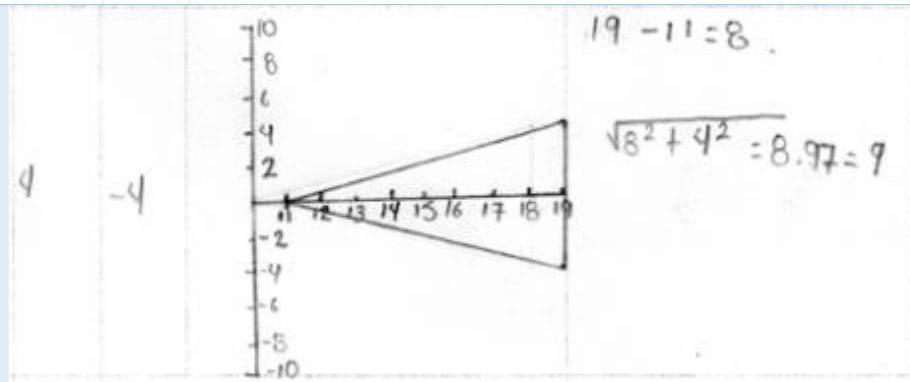
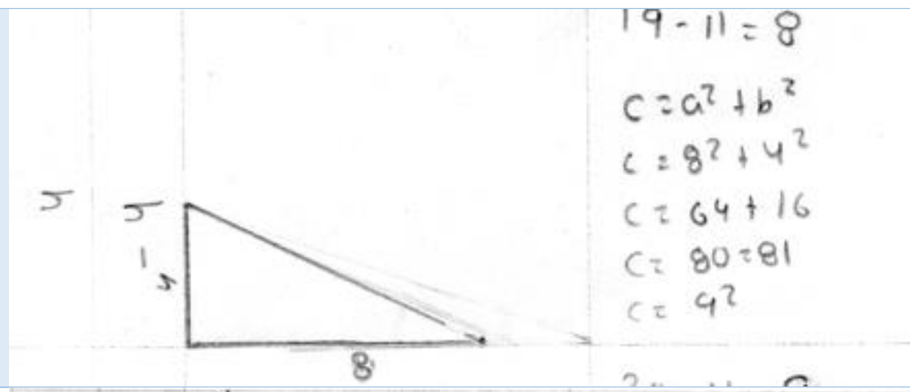
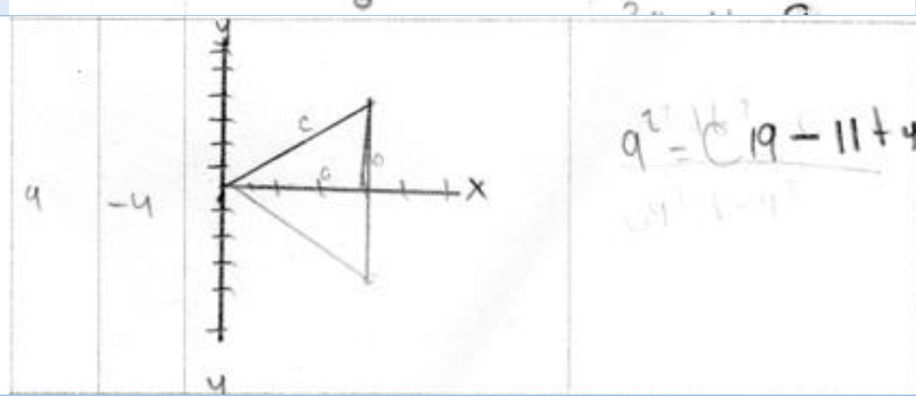
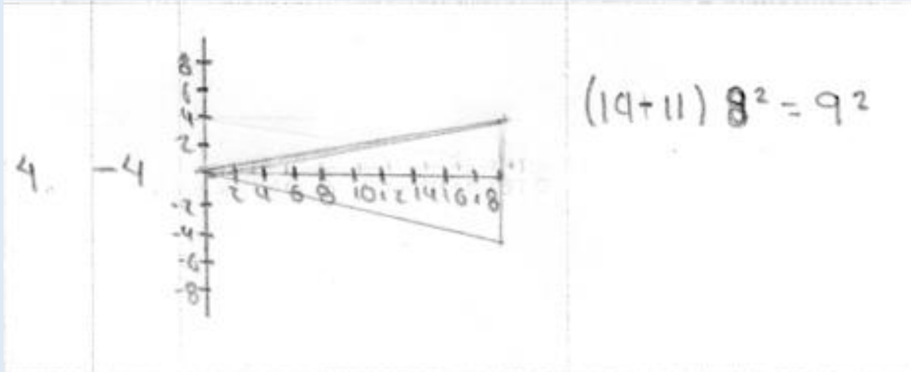
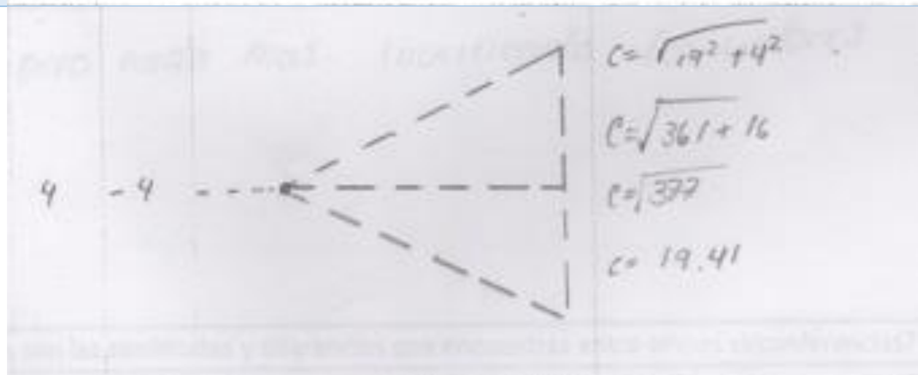
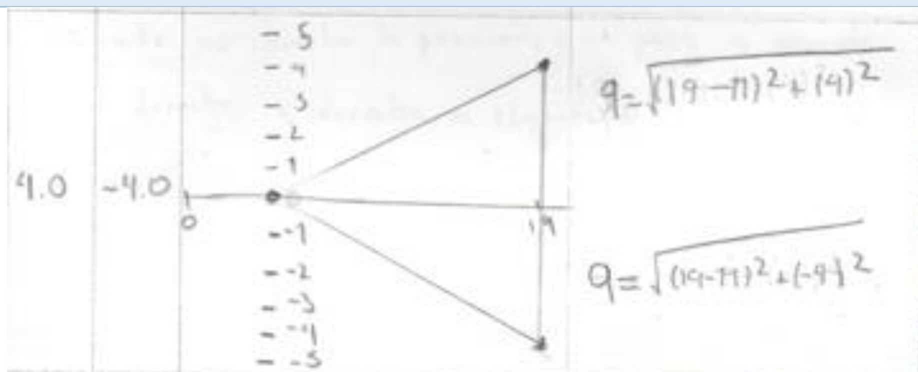
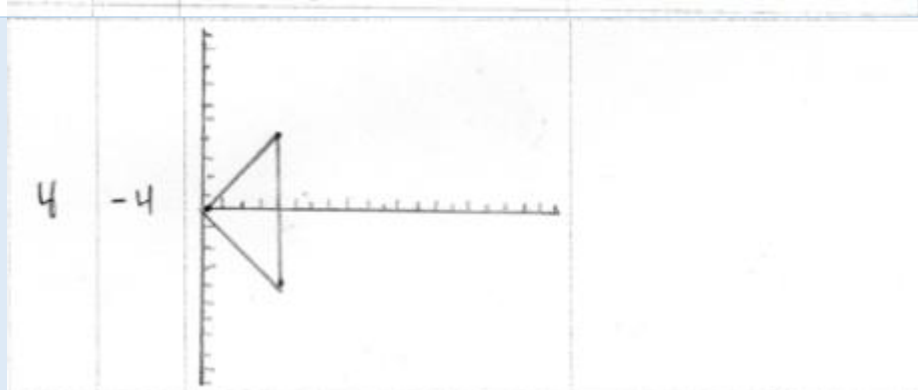
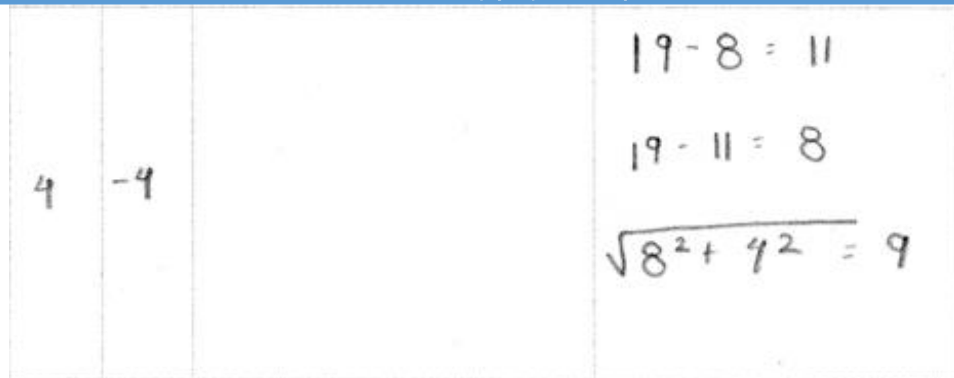
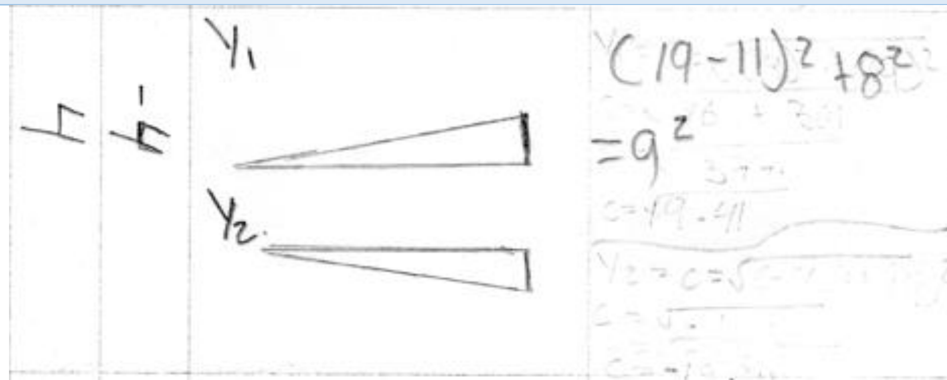
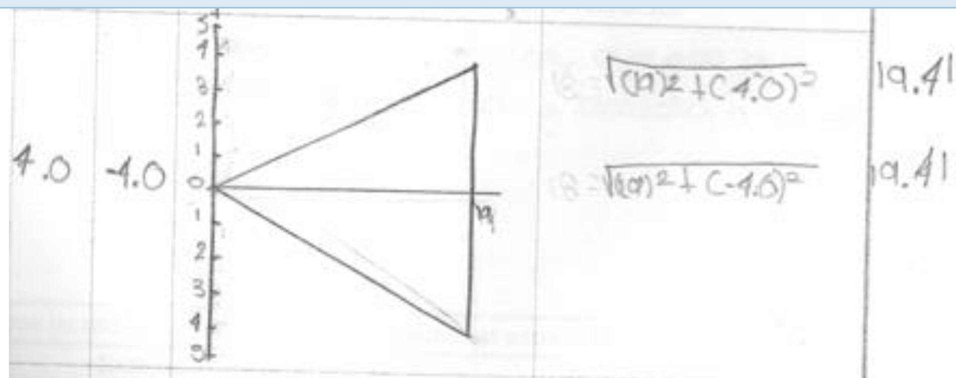
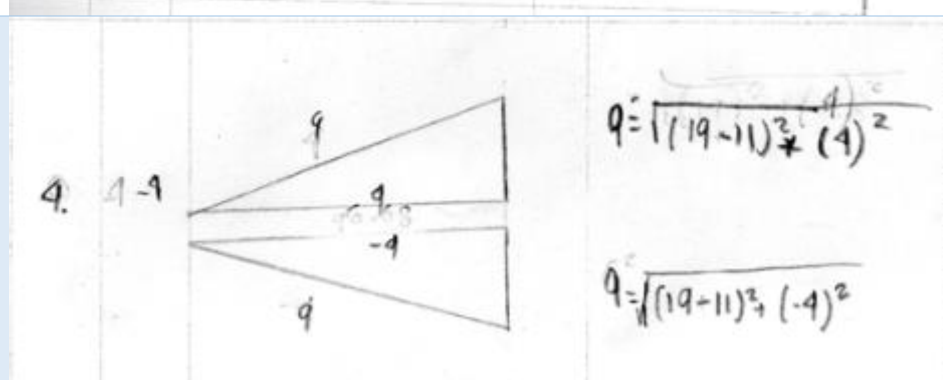
Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 18$
28	
29	
30	
31	

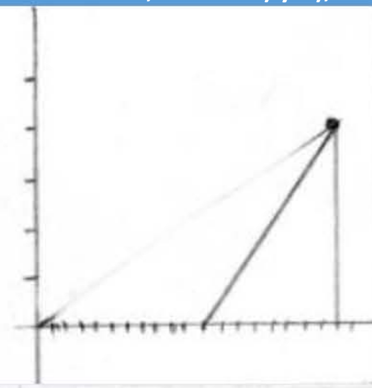
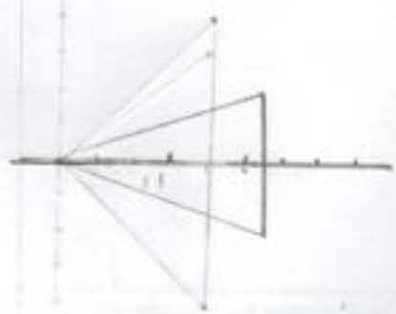
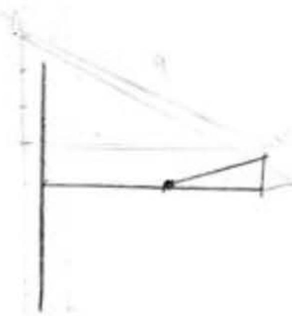
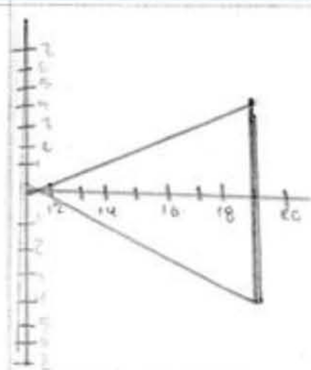
Tabla 25. Respuestas al cuadernillo: Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 19$.

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 19$
1	
2	
3	
4	
5	

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 19$</th></tr>
<tr><td>6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>
</td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 19$
11	
12	
14	
15	
18	

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 19$</th></tr>
<tr><td>19</td><td>
</td></tr>
<tr><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>21</td><td>
</td></tr>
<tr><td>22</td><td></td></tr>
<tr><td>23</td><td>
</td></tr>
<tr><td>24</td><td>
</td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 19$
26	4 -4.  $19-11=8.$ 8^2+4^2 $64+16$ $80=81.$
27	4 -4  $19-11=8$ $c^2=8^2+4^2$ $c^2=64+16$ $c^2=80$
28	4 -4  $c^2=\sqrt{a^2+b^2}$ $c=\sqrt{4^2+4^2}$ $c=\sqrt{16+-16}$ $(19-11)^2+8^2$ $=9^2$
29	4 -4  $9^2=\sqrt{(19-11)^2+(4)^2}$ $9^2=\sqrt{(19-11)^2+(-4)^2}$

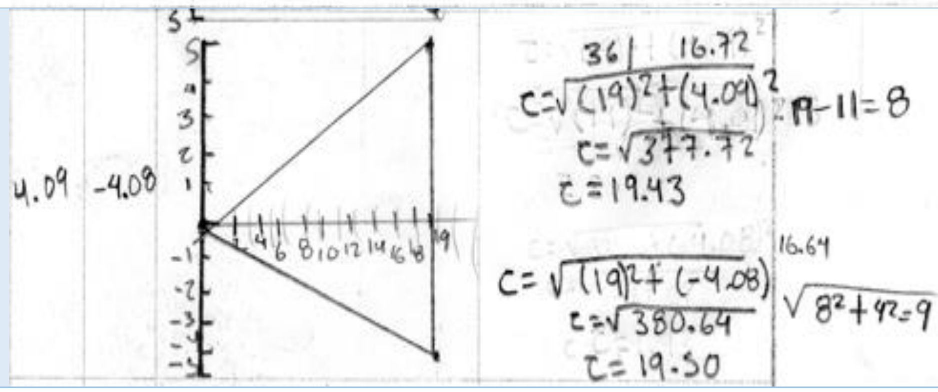
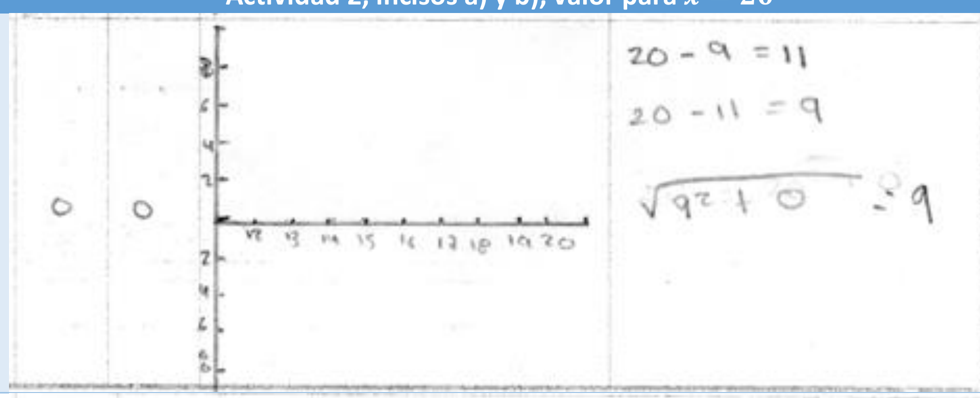
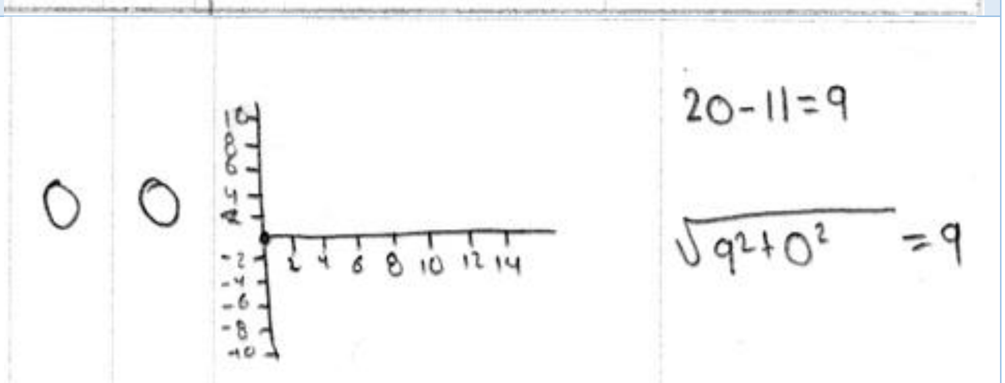
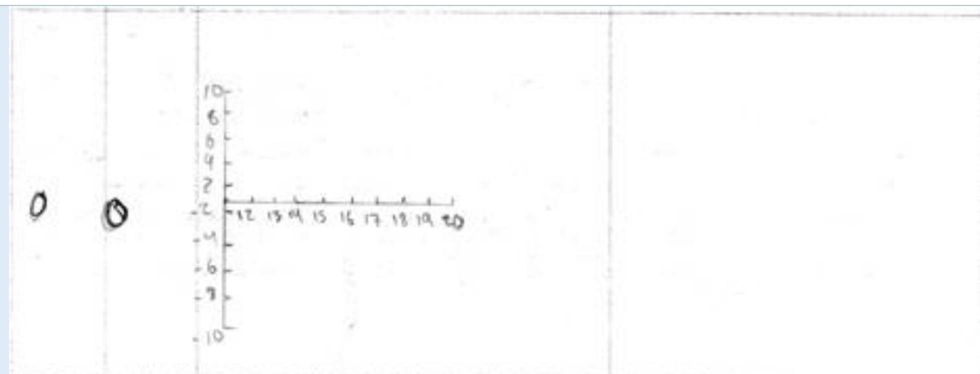
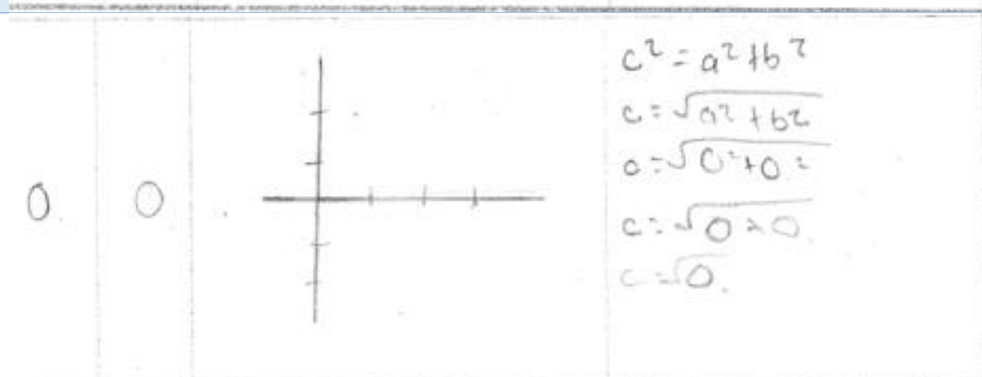
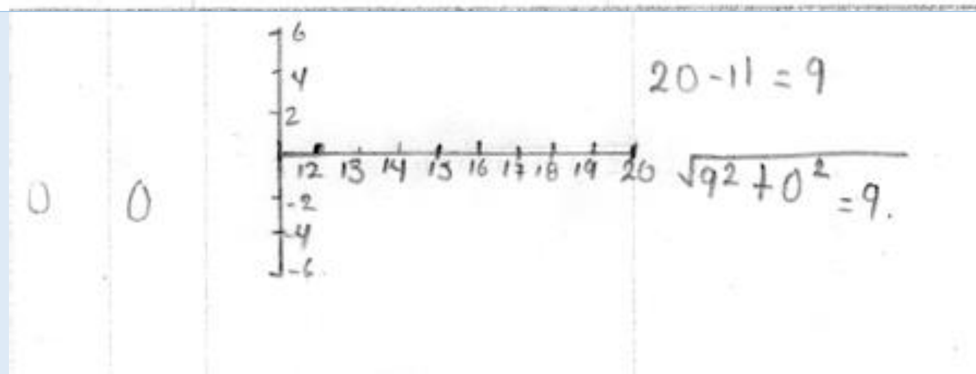
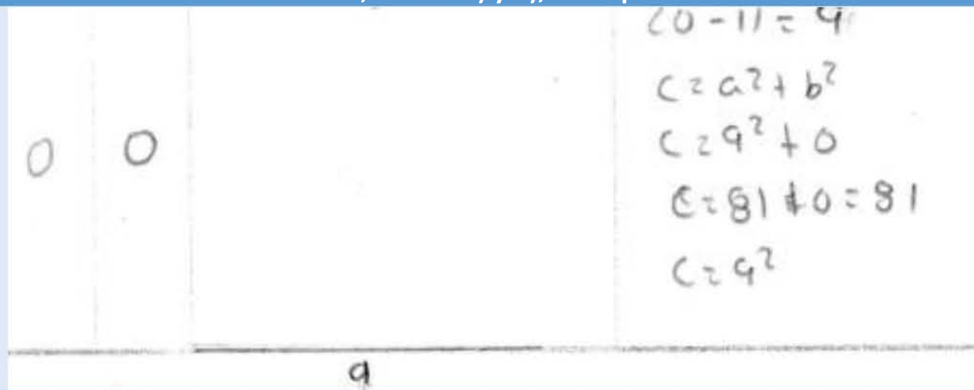
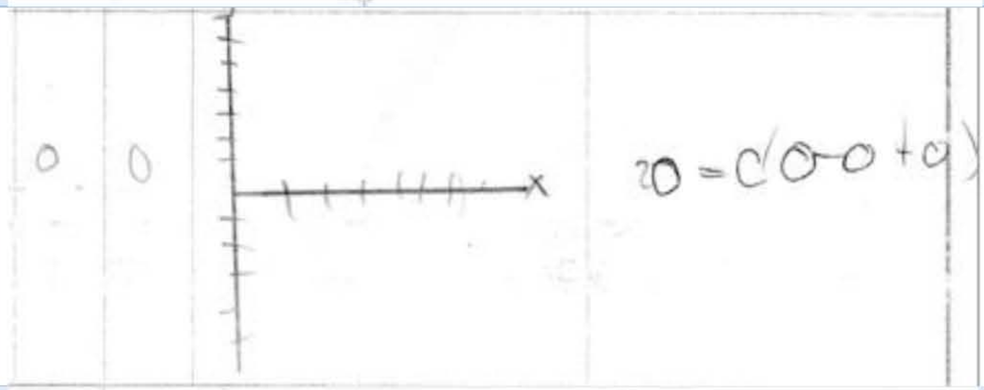
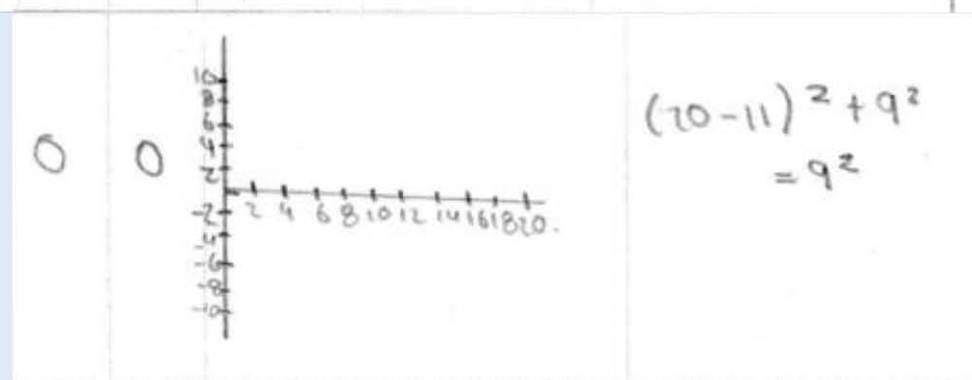
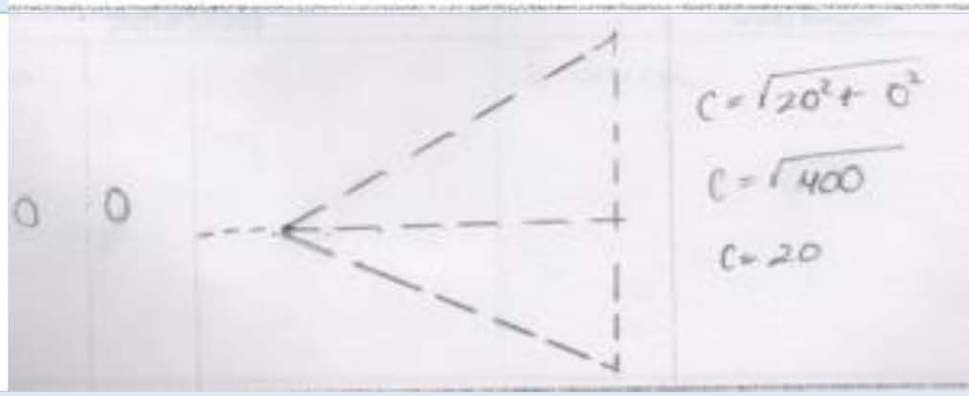
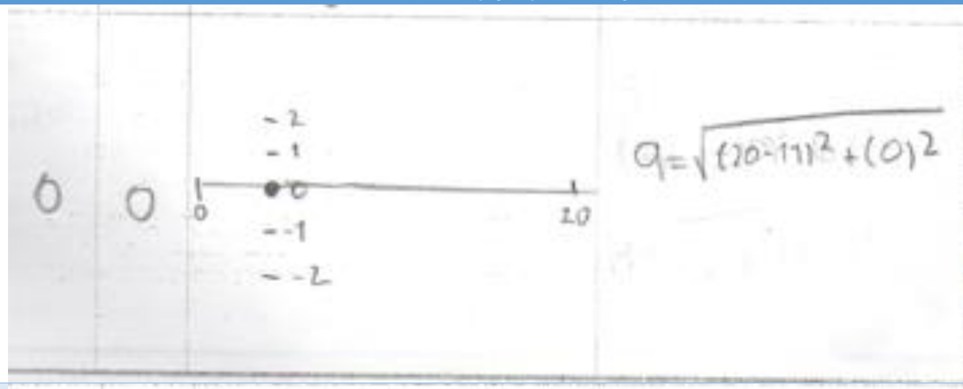
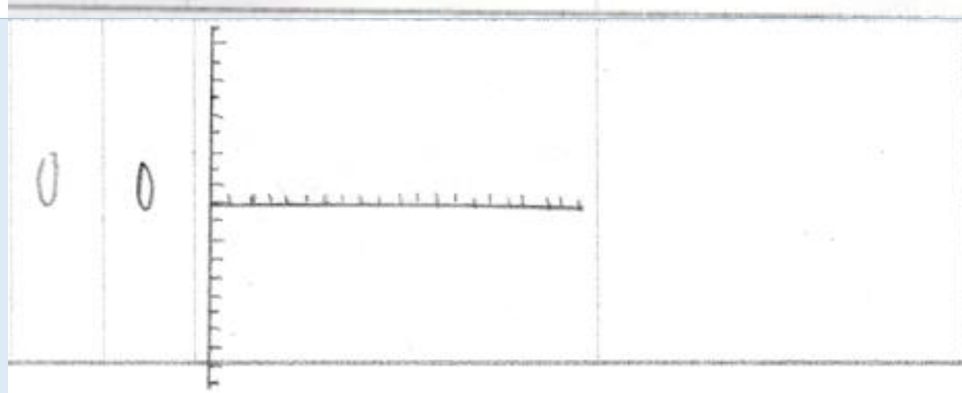
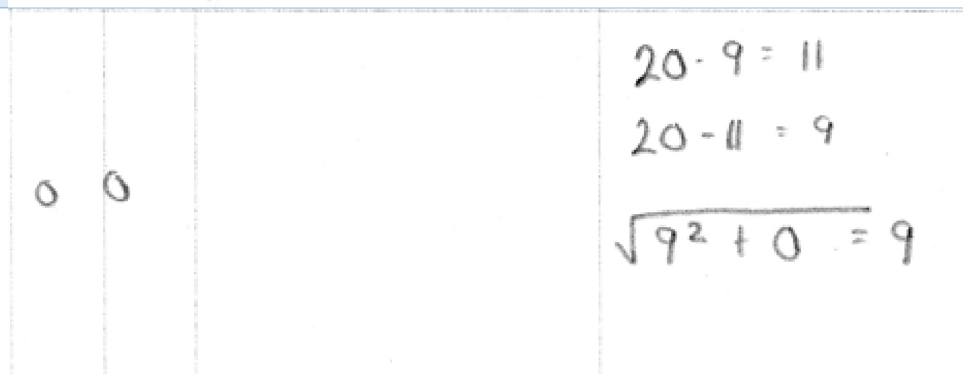
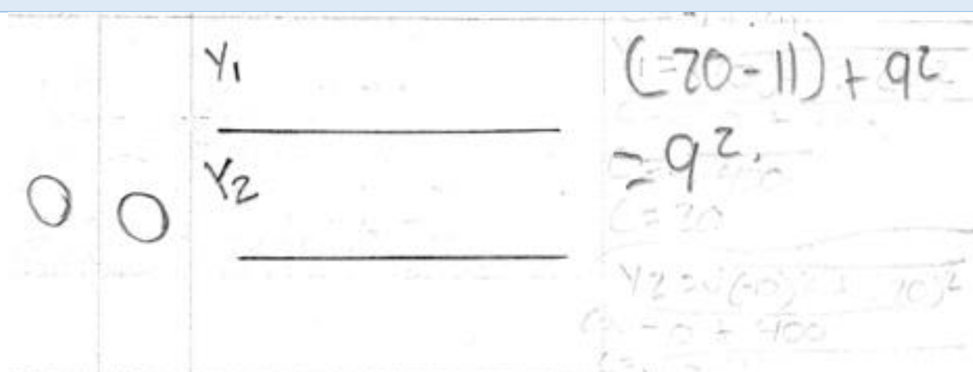
Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 19$
30	
31	

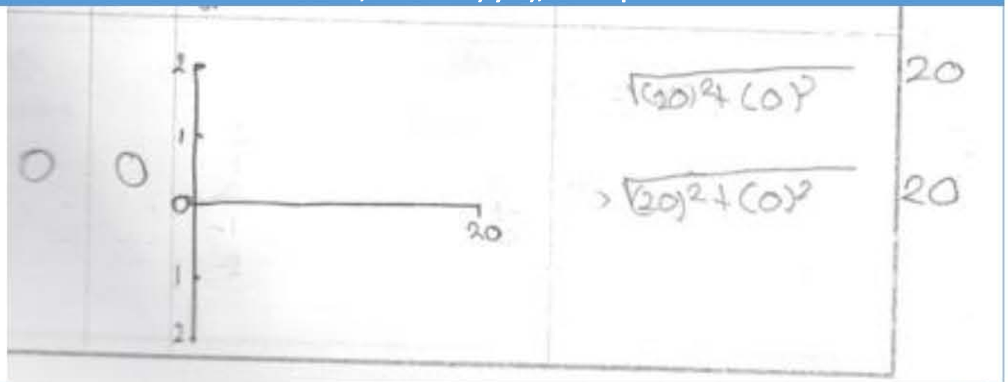
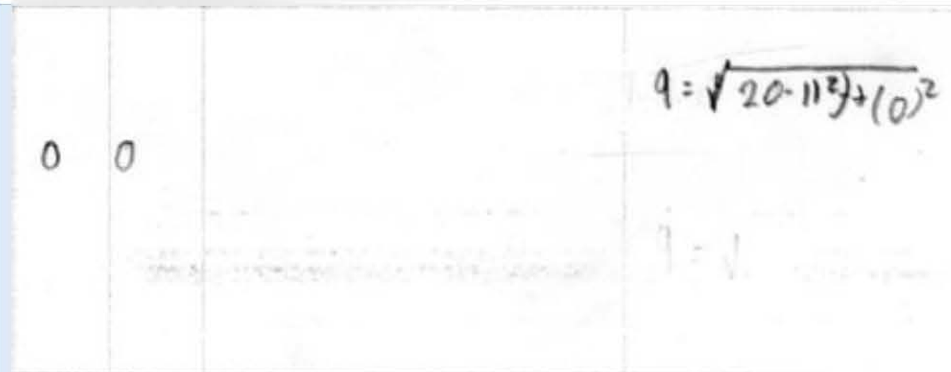
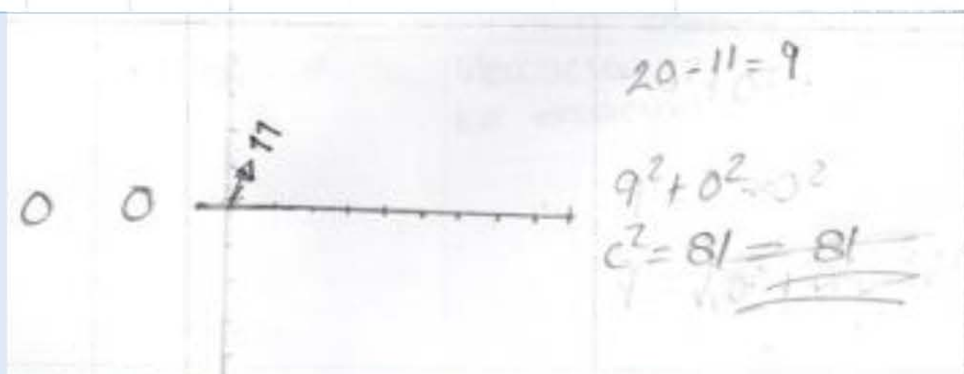
Tabla 26. Respuestas al cuadernillo: Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 20$.

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 20$
1	
2	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 20$
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 20$
9	
10	
11	
12	
14	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 20$
15	
18	
19	
20	
21	
22	

Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 20$
23	
24	
26	
27	

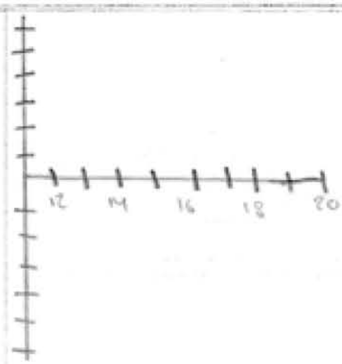
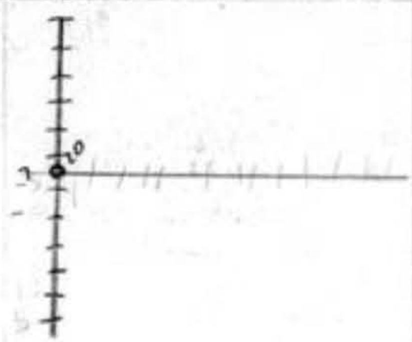
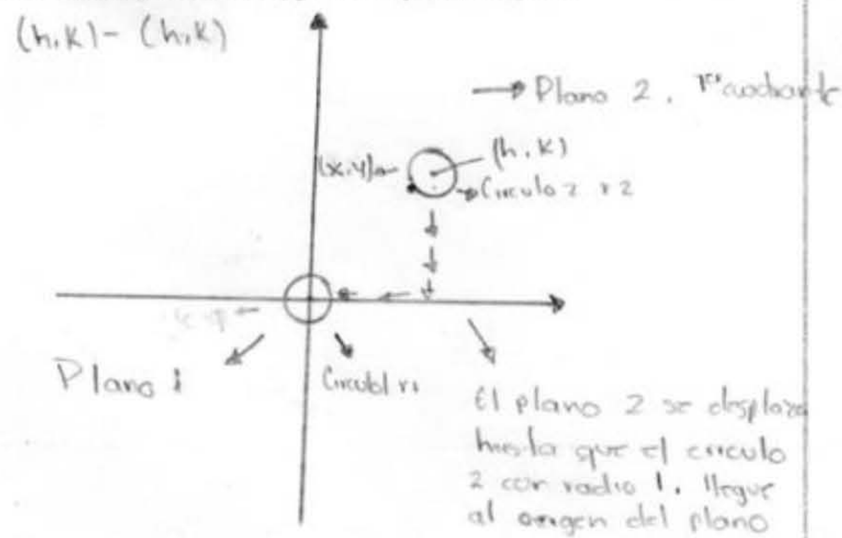
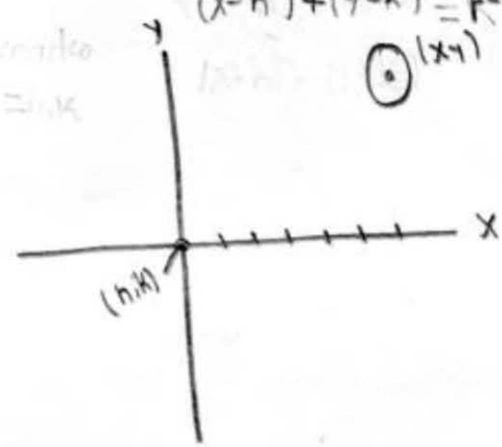
Estudiante	Actividad 2, incisos a) y b), valor para $x = 20$
28	0 0 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ $c=\sqrt{0^2+0^2}$ $c=\sqrt{0}$ $(20-11)^2+9^2$ $=9^2$
29	0 0 
30	0 0
31	0 0  La relacion entre la distancia es (0) $20-11=9$

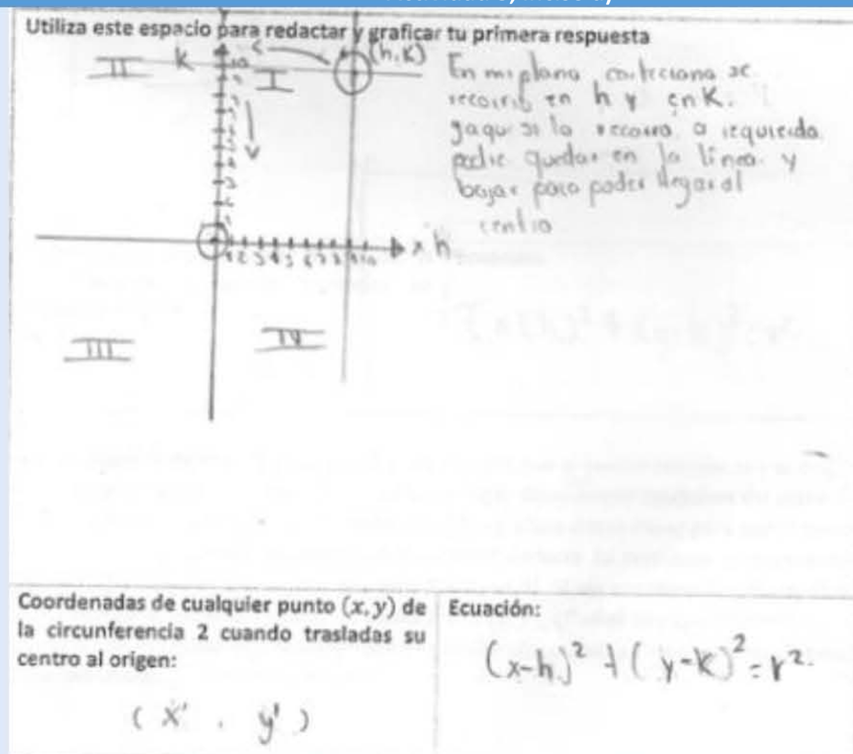
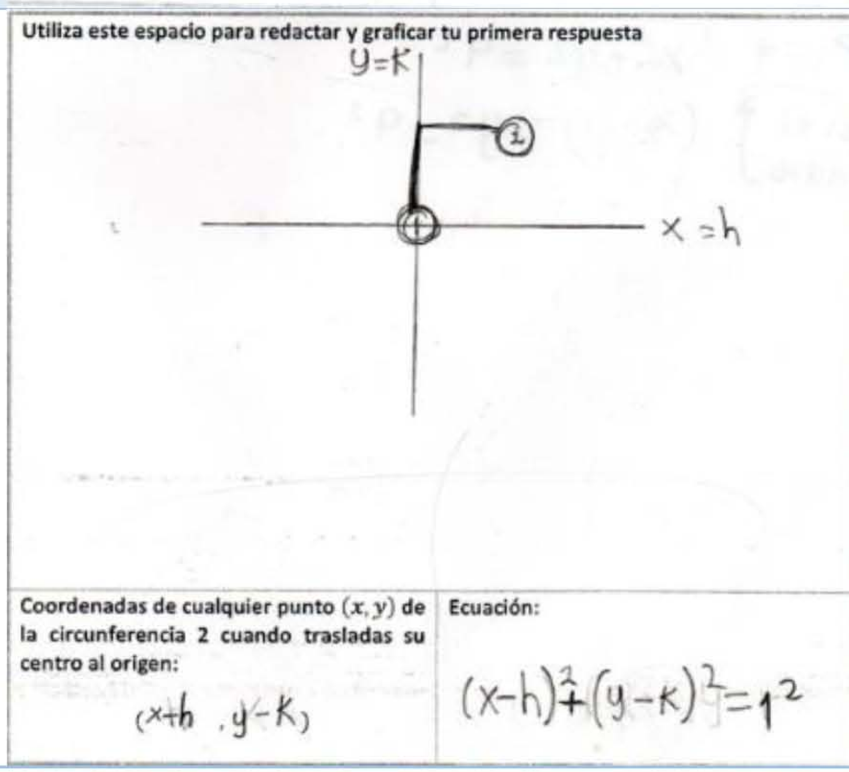
Tabla 27. Respuestas al cuadernillo: Actividad 2, incisos c), d), e) y f).

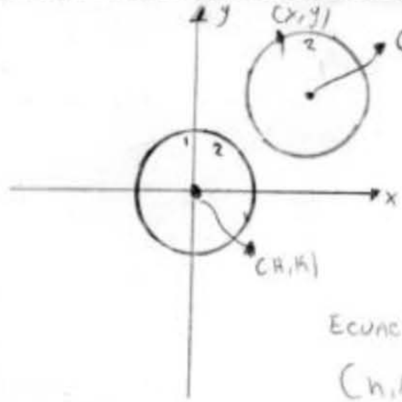
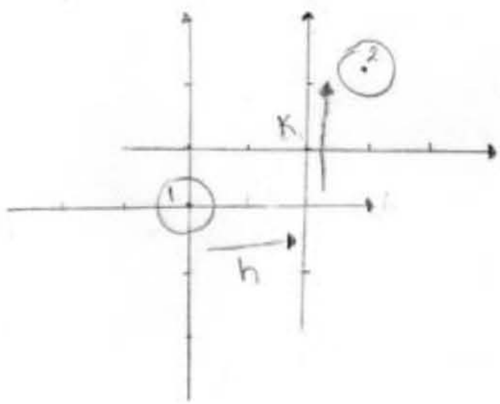
Estudiante	c)	d)	e)	f)
1	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py - Py$ $x' = x - 11$ $y' = y - y$	$\sqrt{(x-11)^2 + y^2} = 9$	Sí, solo cambiaría el signo de x y al elevarlo al cuadrado es igual	Similitudes: mismo radio, mismo diámetro Diferencias: su ubicación, su ecuación
2	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y - y$	$\sqrt{(x-11)^2 + y^2} = 9$	Sí funcionaría solo que cambiaría en la y	Similitudes: tienen el mismo radio, tienen el mismo diámetro Diferencias: encontrar una ecuación
3	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py - 0$ $x' = x - 11$ $y' = y - 0$	$9^2 + (x - x')^2 + (y)^2$ $(x-11)^2 + (y')^2 = 9^2$	Nada más intercambiando valores	Similitudes: radio Diferencias: ecuación
4				
5	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$	-Funciona pero con números negativos -Sí, pero cambia el signo	Similitudes: su radio es de 9 mts., tamaño Diferencias: cambia la ecuación, el origen no está en el punto penal, color, posición
6	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$	Sí, porque se invierte la posición que pasa a ser de izquierda a derecha y derecha a izquierda.	Similitudes: radio, tamaño Diferencias: color, posición, la ecuación
7	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y - y$	$\sqrt{(x-11)^2 + y^2 = 9}$	Sí funcionaría solo que cambiaría el la y	Similitudes: tienen el mismo radio Diferencias: no tienen la misma ecuación
8	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$		Similitudes: tiene el mismo radio Diferencias: su ubicación, su ecuación no es igual
9				
10	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py - 0$ $x' = x' - 11$ $y' = y' = 6.70$	$9^2 = (x - x') + (y)^2$	Sí Si invertimos los signos ya que tenemos las coordenadas	Similitudes: que pueden resolver con la misma fórmula Diferencias: se invierten los signos
11	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$ $(17-11)^2 + 6^2 = 9^2$	Sí porque se invierte la posición que pasa a ser de izquierda a derecha y derecha a izquierda	Similitudes: radio, tamaño Diferencias: color, posición, ecuación
12	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py - 0$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$9^2 = (x - x')^2 + (y')^2$	Sí pero nada más invirtiendo los valores	Similitudes: radio Diferencias: ecuación
14				
15	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py - P'y$ $x' = x - 11$ $y' = y - y'$	$9^2 = (x-11)^2 + (y)^2$	Sí, solamente es invertir la posición, que pasa a ser de izquierda a derecha a derecha a izquierda	Similitudes: radio, tamaño Diferencias: color, posición
18				
19	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py = Py$ $x' = x - 11$ $y' = 4 = 4$	$\sqrt{(x-11)^2 + y^2} = 9$		Similitudes: igual radio, igual diámetro Diferencias: ecuación
20				
21	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$ $(17-11)^2 + 6^2 = 9^2$	Claro, solo se invierten la posición, que pasa ser de izquierda a derecha y de derecha a izquierda	Similitudes: radio, tamaño Diferencias: color, posición, ecuación
22				

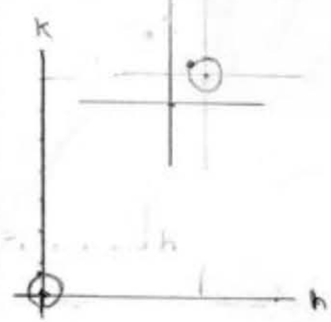
Estudiante	c)	d)	e)	f)
23	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$ $(17-11)^2 + 6.7^2 = 9^2$ $(6)^2 + 6.7^2 = 9^2$ $36 + 44.89^2 = 9^2$ $80.89 = 9^2$	Claro, solo se invierte la posición, que pasa ser de izquierda a derecha y derecha a izquierda	Similitudes: radio, tamaño Diferencias: color, posición, la ecuación
24				
26	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$	Sí porque solo se le restan según cuánto recorren	Similitudes: tienen el mismo radio Diferencias: ubicación, la ecuación
27	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$	Sí porque	Similitudes: tiene el mismo radio, diámetro Diferencias: Ubicación, la ecuación
28	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y$	$(x-11)^2 + y^2 = 9^2$	Sí porque solo se invierte la posición, que pasa a ser de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.	Similitudes: radio, tamaño Diferencias: color, posición, la ecuación
29	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py - Px'$ $x' = x - 11$ $y' = y - y'$	$9^2 = (x - x') + (y)^2$	Sí. Nada más invertimos sentidos	
30	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py - 0$ $x' = x - 11$ $y' = y - 0$	$9^2 = (x - x) + (y)^2$ $(x-11)^2 + (y)^2 = 9^2$	Nada más intercambiaban los valores	Similitudes: radio Diferencias: ecuación
31	$P'x = Px - 11$ $P'y = Py = Py$ $x' = x - 11$ $y' = y = y$	$\sqrt{(x-11)^2 + y^2 =}\ 9$	Sí solo que podría salir diferente resultado o cambiaría su signo	Similitudes: es el mismo radio Diferencias: que tienen diferente distancia desde el punto de origen, su ubicación, su ecuación es diferente.

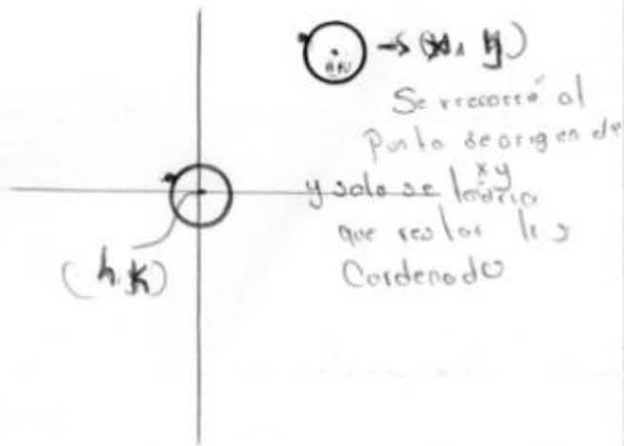
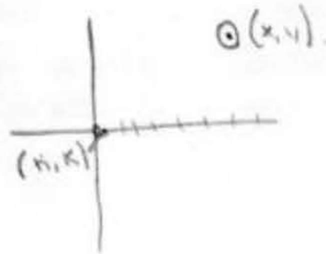
Tabla 28. Respuestas al cuadernillo: Actividad 3, inciso a).

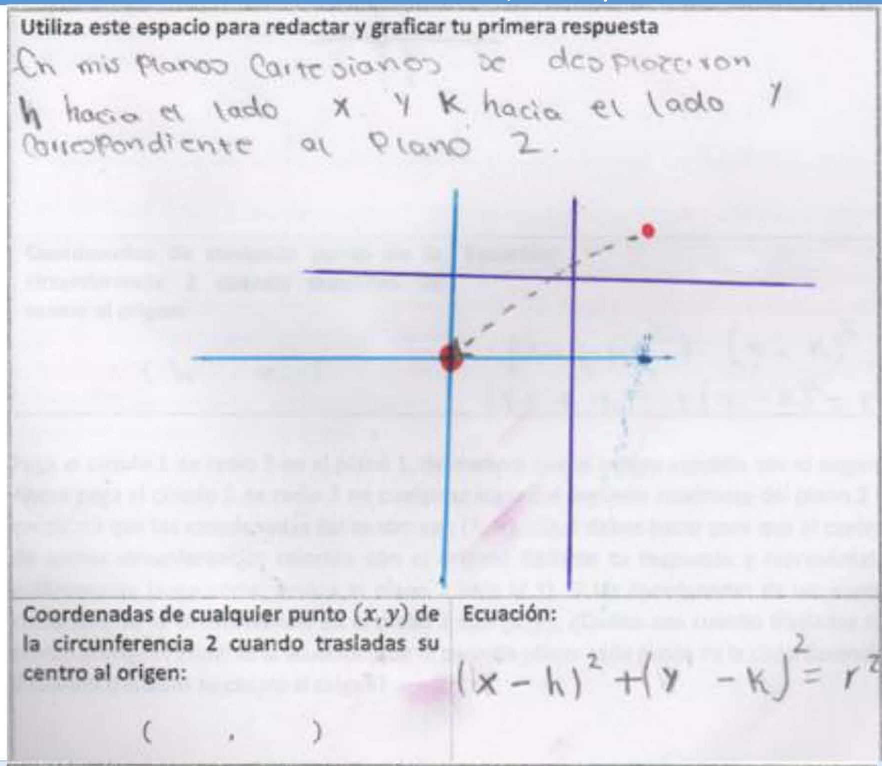
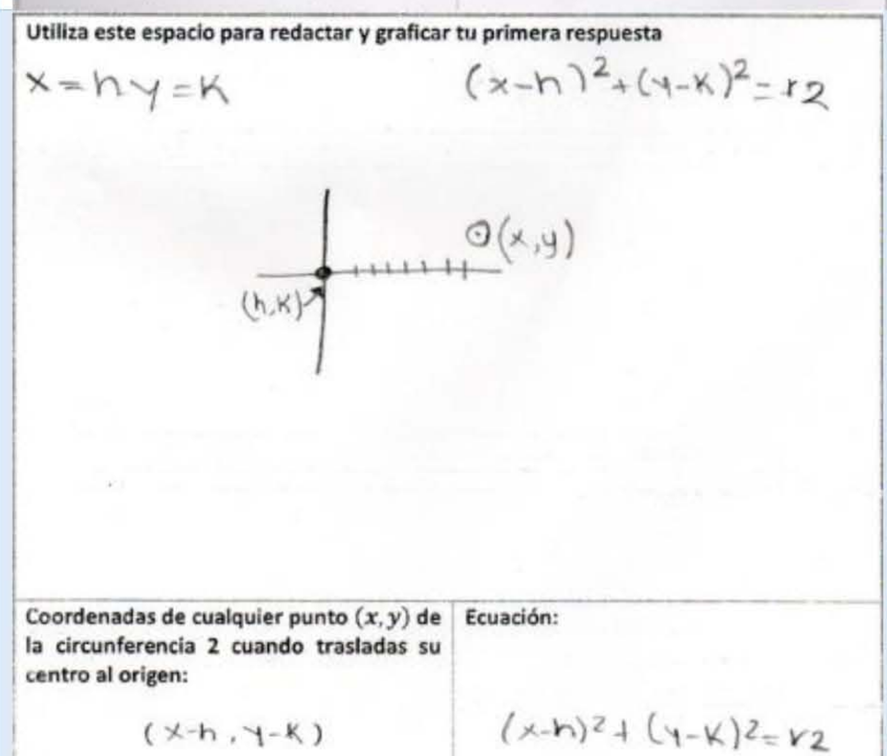
<table>
<tr><th>Estudiante</th><th colspan="2">Actividad 3, inciso a)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td colspan="2">Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta
</td></tr>
<tr><td>Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:
(0 , 0)</td><td>Ecuación:
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td colspan="2">Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta
$X=h \quad y=K$
en el segundo plano tenemos que hacer una ecuación la cual
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
</td></tr>
<tr><td>Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:
$(x-h \, , \, y-k)$</td><td>Ecuación:
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$</td></tr>
</table>

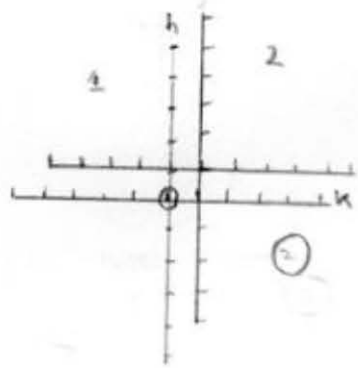
<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 3, inciso a)</th></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td></tr>
</table>

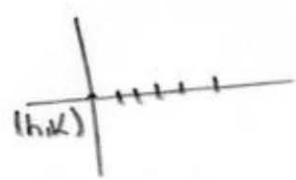
Estudiante	Actividad 3, inciso a)
5	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  Se Desliza hacia el origen en el plano y la ecuación para encontrar el traslado desde cualquier punto hacia el origen Ecuación: $(h,k,)-(x,y)$ Ecuación ordinar de la circunfer **Coordenadas de cualquier punto (x,y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(0\ ,0\ )$ **Ecuación:** $(x,h)^2+(y,k)^2=r^2$
6	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  En mi plano cartesiano se recorrió h para la x y K para la y **Coordenadas de cualquier punto (x,y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (,) **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
7	

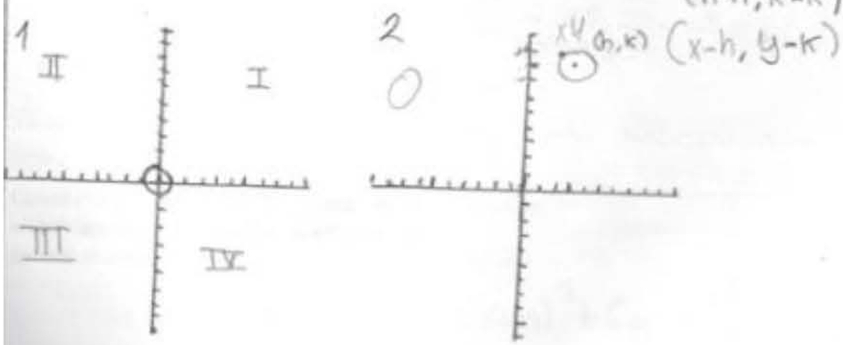
Estudiante	Actividad 3, inciso a)
8	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x+h\ ,\ y-k\ )$ **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Ecuacion ordinaria de una circunferencia
9	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  Primero recorrimos el primer plano hacia la izquierda quedando en la cordenada h, para haci poderlo mover hacia la cordenada k, quedando haci en el centro de nestro primer circulo **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(\ h\ ,\ k\ )$ **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)=1^2$

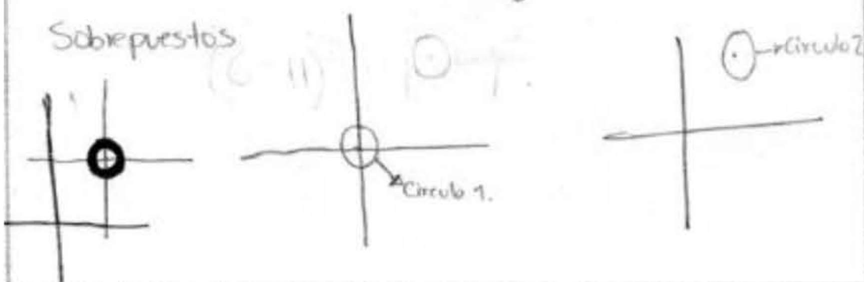
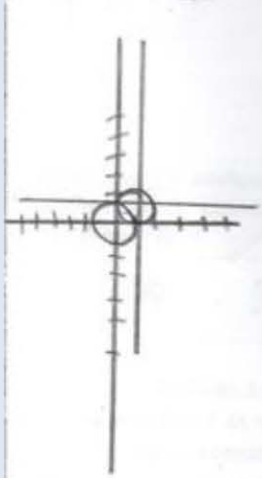
Estudiante	Actividad 3, inciso a)
10	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(0, 0)$ **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)^2 =$
11	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** $x=h \quad y=k$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$  **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x-h, y-k)$ **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

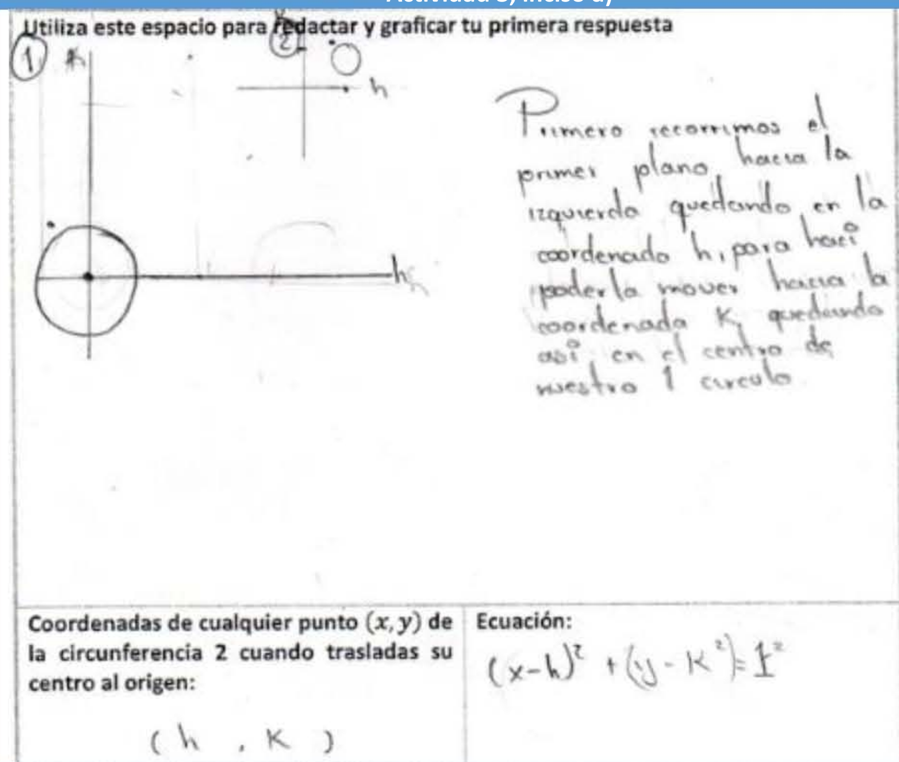
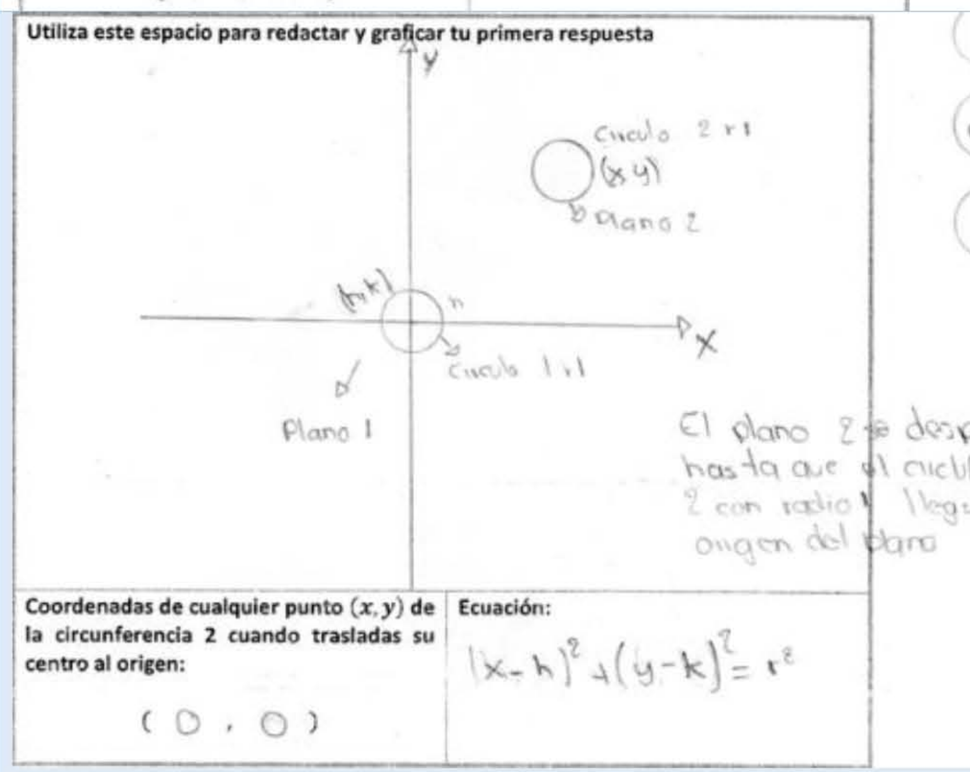
Estudiante	Actividad 3, inciso a)
12	 Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Cn mis Planos Cartesianos se desplazaron h hacia el lado x y k hacia el lado y correspondiente al Plano 2. Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (,) Ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
14	 Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $x=h\ y=k$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r2$ (x,y) (h,k) Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x-h, y-k)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r2$

Estudiante	Actividad 3, inciso a)
15	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Se tiene que hacer una resta, restar "x" de "h" e "y" de "k" Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x-h\ ,\ y-k)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
18	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  lo primero fue cordinar los planos y luego mover los planos cartecianos Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x+h\ ,\ y-h)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Estudiante	Actividad 3, inciso a)
19	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta 1. Restarle el ongen de "x" el punto donde se intersecta la coordenado "h", restar el ongen de "y" de la coordenado "k" para que se intersecten los radios 2. (h, K) 3. $(x-h)^2+(y-K)^2=r^2$ Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x_i-h,\ y_i-K)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y-K)^2=r^2$
20	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $x=h$ $y=k$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$  Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x-h\ \ y-k)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
21	

Estudiante	Actividad 3, inciso a)
22	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x+h, y-k)$ **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Ecuacion ordinaria de una circunferencia
23	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $(h-h, k-k)$  A el punto x le restamos el punto h al igual que el punto y le restamos el punto k para encontrar la nueva coordenada de (x,y) **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x-h, y-k)$ **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
24	

Estudiante	Actividad 3, inciso a)
26	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** Tendriamos que restarle a las coordenadas del circulo 2 las del 1 tanto en "x" como en "y" para que este estuviera en el origen  **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (9 . 6) **Ecuación:** $(x-h)^2+(y+K)^2=r^2$
27	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  Se tendria que realizar una ecuación restandole las cordenadas de el 1 al 2 circunferenc $(x-h)^2+(y-K)^2=r^2$ **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (h . k) **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-K)^2=r^2.$

Estudiante	Actividad 3, inciso a)
28	 Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Primero recorrimos el primer plano hacia la izquierda quedando en la coordenado h, para hací poderla mover hacia la coordenada K quedando así en el centro de nuestro 1 circulo Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (h , K) Ecuación: $(x-h)^2+(y-K^2)=1^2$
29	 Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta El plano 2 se desp hasta que el circl 2 con radio 1 llegu origen del plano Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (0 , 0) Ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ El plano 2 se desplaza hasta que el círculo 2 con radio 1 llegue al origen del plano

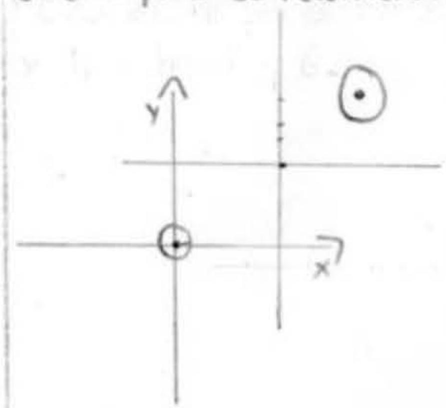
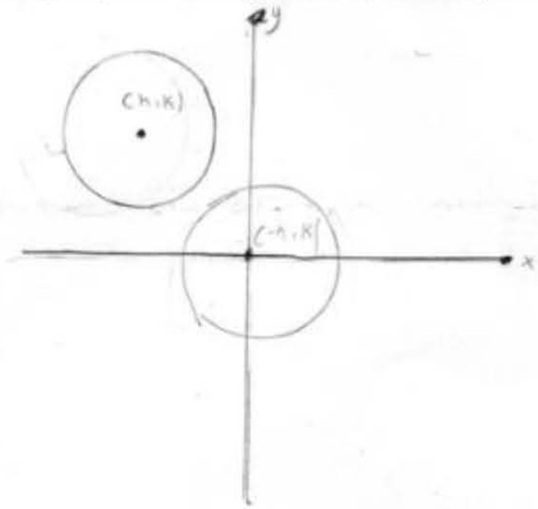
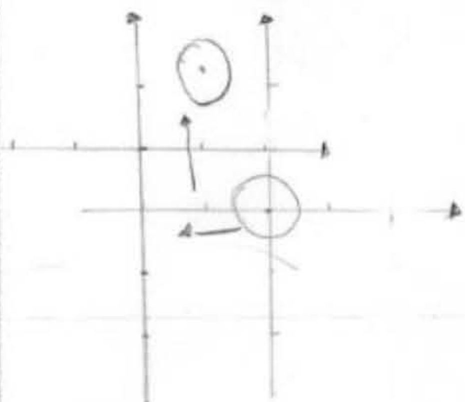
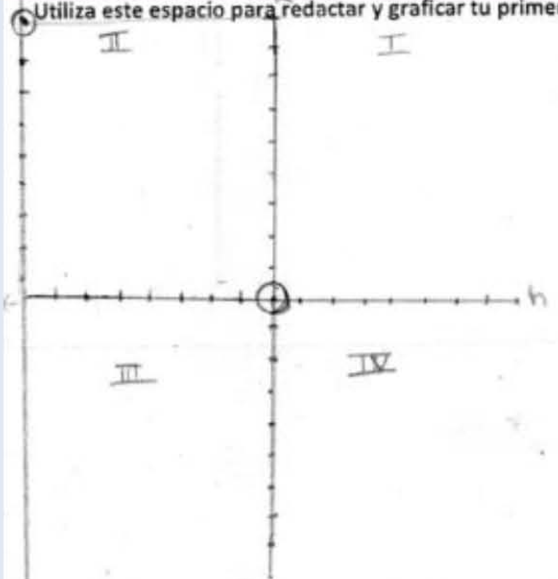
Estudiante	Actividad 3, inciso a)
30	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** En este plano se recorrieron pero el plano Z solo positiv  **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (h , K) **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-K)^2=r^2$
31	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** 1- Restarle el origen de "x" el punto donde se intersecta la coordenada "h", restar el origen de "y" de la coordenada "k" para que se intersecten los radios 2- (h, k) 3- $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ **Coordenadas de cualquier punto (x, y) de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x_1-h)(y_1-k)$ **Ecuación:** $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

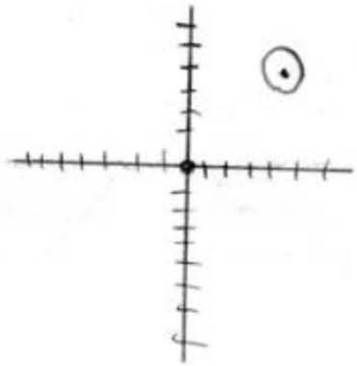
Tabla 29. Respuestas al cuadernillo: Actividad 3, inciso b).

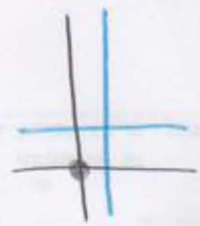
Estudiante	Actividad 3, inciso b)
1	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(-h, k)$ **Ecuación:** $(-x+h)^2+(y-k)^2=r^2$
2	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** $x=h,\ y=k$ $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$ **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x+h, y-k)$ **Ecuación:** $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$

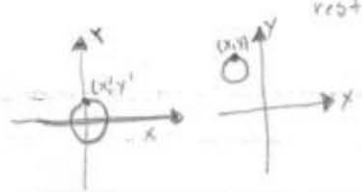
Estudiante	Actividad 3, inciso b)
3	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  El circulo se mueve h y K ya para llegar al origen tengo que recorrer hacia a la derecha sumando, y resta bajo **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (K , y) **Ecuación:** $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$.
4	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  Se supone que debe de avanzar ambos circulos **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** ($\cancel{y}^2$, y^2) **Ecuación:** $x^2+y^2=9^2$

Estudiante	Actividad 3, inciso b)
5	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(-h, K)$ **Ecuación:** $(x+h)^2+(y-K)^2=r^2$
6	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  En mi plano cartesiano se recorrió h para la x y k para la y **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (,) **Ecuación:** $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$
7	

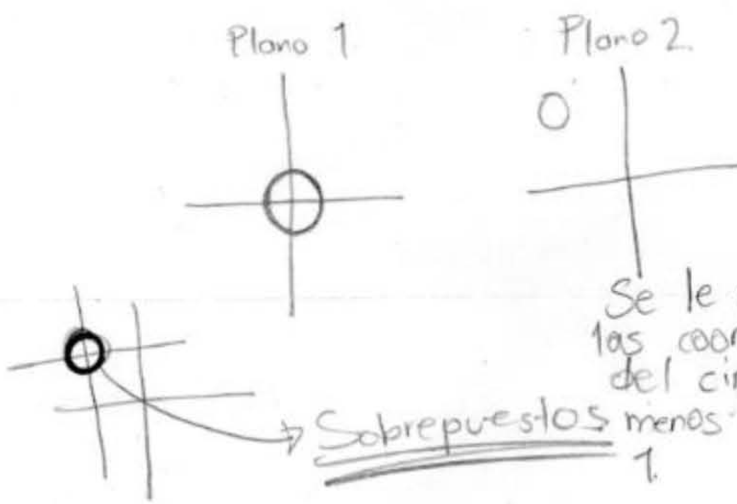
Estudiante	Actividad 3, inciso b)
8	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (h , k) Ecuación:
9	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Primero recorrimos el primer plano hacia la hizquierda quedando en la cordenada -k y despues la movimos hacia la cordenada k Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (-8 , 9) Ecuación: $(x-(-h8)^2+(y-9k)=2^2$

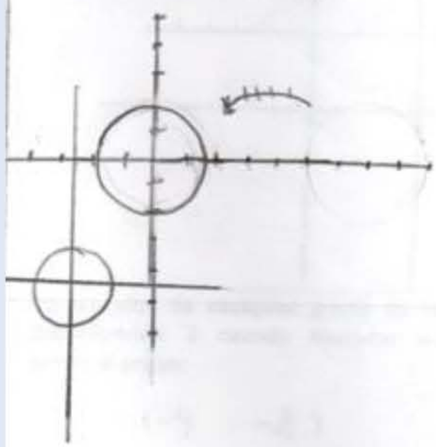
Estudiante	Actividad 3, inciso b)
10	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (5,7,3,4) Ecuación: $(5-3)+(7-4)=2^2$
11	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $x=h$, $y=K$ $\quad (x+h)^2+(y-K)^2=r^2$ Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x+h, y-K)$ Ecuación: $(x+h)^2+(y-K^2=r^2$.

Estudiante	Actividad 3, inciso b)
12	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta El Plano se movio de Poorciones h y K Para que quede en el origen de el Plano 1.  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (h , k) Ecuación: $(x-(-h))^2+(y-k)^2=$ $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$
14	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $(x+h)^2+(Y+K)^2=r^2$ Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x+h , y+h)$ Ecuación: $(x+h)^2+(Y+K)^2=r^2$

Estudiante	Actividad 3, inciso b)
15	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** 1 Para hacer que el centro de la circunferencia 2 llegue al origen hay que recorrerlo Se tiene que sumar "h" a "x" y restar "y" de "K"  **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x+h \ , y,-K)$ **Ecuación:** $(x'+h)^2+(y-k)=r^2$
18	
19	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** 1. Sumarle el origen de "x" el punto donde se intersecta la coordenada h, restar el origen de "y" de la coordenada "K" para intersectar los radios **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x,h \cdot y,-K)$ **Ecuación:** $(x+h)^2+(y-K)=-r^2$

Estudiante	Actividad 3, inciso b)
20	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$ Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x+h\ ,\ y+k)$ Ecuación: $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$
21	
22	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(h\ ,\ k)$ Ecuación:

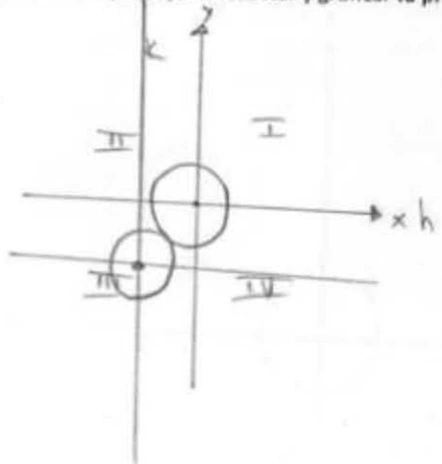
Estudiante	Actividad 3, inciso b)
23	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta (h+h, K-k) (X+h, y-k)  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (x+h, y-k) Ecuación: $(x+h)^2+(y-k)^2=r2$
24	
26	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Se le restan las coordenadas del circulo 2 menos las del c 1. Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (h, K.) Ecuación: $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$

Estudiante	Actividad 3, inciso b)
27	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (-5 , 5) Ecuación: $(x-5h)^2+(y-5k)^2=r^2$
28	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Pues para poder sacar la ecuación tuvimos que checar en que puntos había quedado el circulo para poder sacar la ecuación correcta. Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (-8 . 9) Ecuación: $(x-(-8h)^2+(y-9k)^2=2^2$
29	

Estudiante	Actividad 3, inciso b)
30	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** En este plano se mobio. para llegar al origen. se tubo qce recorrer: **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (x', y') **Ecuación:** $(x+h)^2 + (y-K)^2 = r^2$
31	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** Sumarle el origen de "x" el punto donde se intersecta la coordenada "h", restar el origen de "y" de la coordenada "K" para quese intersecten sus radios pero en este caso seria el radio negativo. **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x,h ; y,k)$ **Ecuación:** $(x+h)^2 + (y-k)^2 = -r^2$

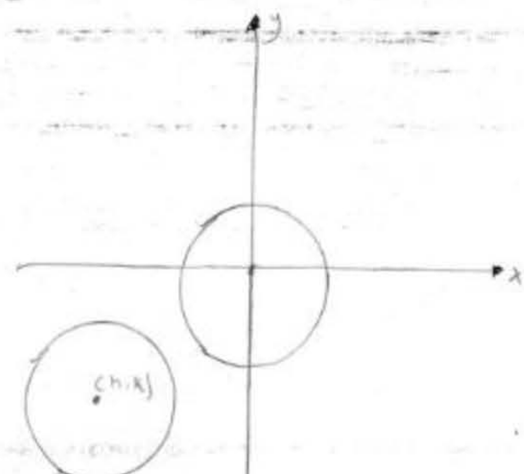
Tabla 30. Respuestas al cuadernillo: Actividad 3, inciso c).

Estudiante	Actividad 3, inciso c)
1	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(-h, -K)$ Ecuación: $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$
2	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$ Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x+h, y+k)$ Ecuación: $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 3, inciso c)</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta


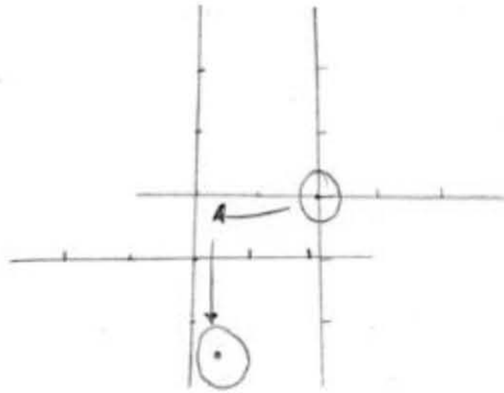
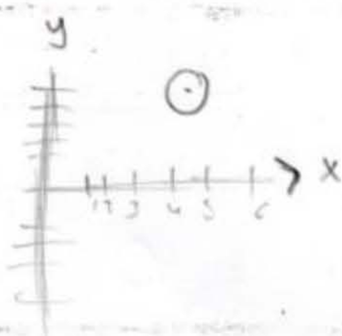
I En mi plano el coodiante tengo que somos recorreme ala derecho para llegar al origen

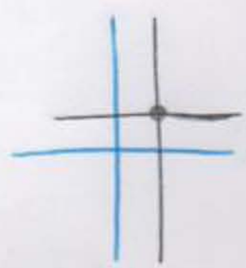
Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:
(h , K)

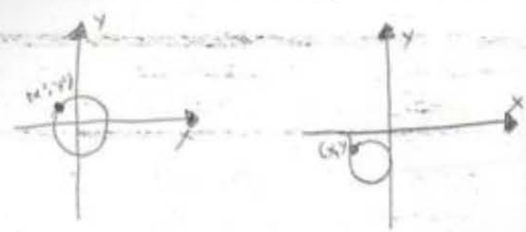
Ecuación:
$(x+h)^2+(y+K)^2=r^2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta


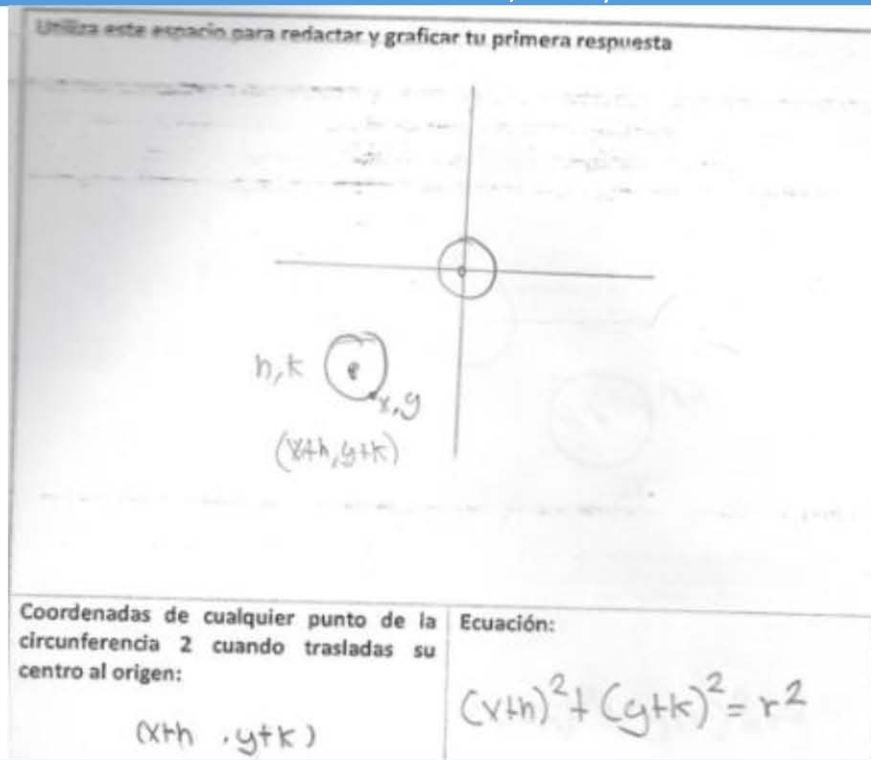
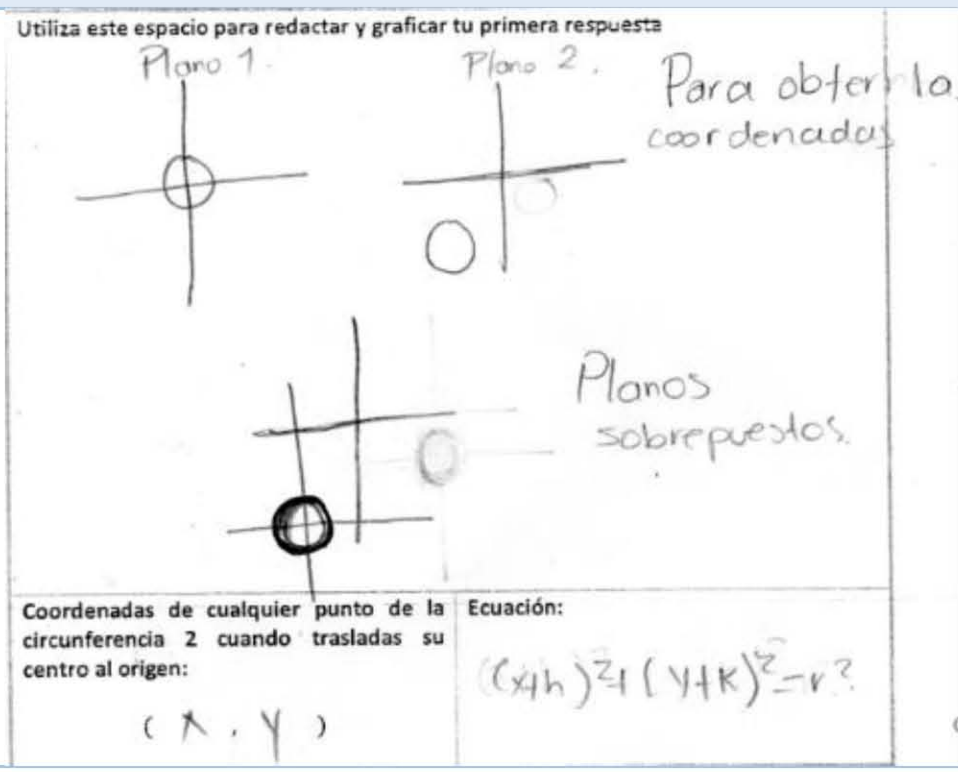
Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:
(-h , -K)

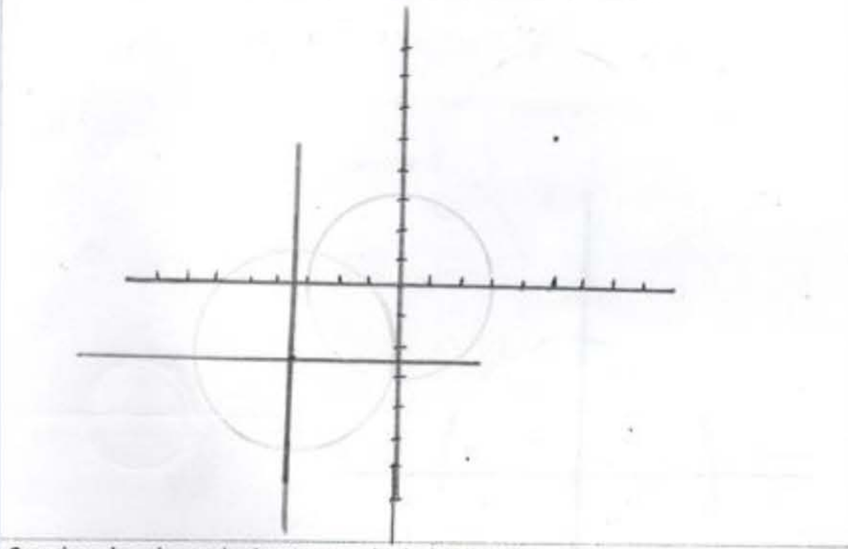
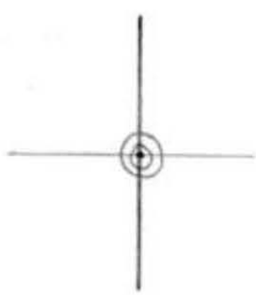
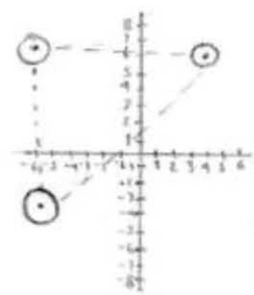
Ecuación:
$(x+h)^2+(y+K)^2=r^2$</td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 3, inciso c)
6	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  En mi plano cartesiano se recorrio h para la x y k para la y Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (,) Ecuación: $(x+h)^2 + (y+k)^2 = r^2$
7	
8	
9	
10	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (7,1 . 5,3) Ecuación: $(7-5)+(2-3)$

Estudiante	Actividad 3, inciso c)
11	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $(x+h)^2(y+k)^2=r^2$ Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x+h, y+k)$ Ecuación: $(x+h)^2(y+k)^2=r^2.$
12	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta se mueven en ambos Cuadrantes. y ahora la ecuacion  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (x, y) Ecuación: $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$

Estudiante	Actividad 3, inciso c)
14	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta** $(x+h)^2(y+K)^2=r^2$ **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x+h, y+K)$ **Ecuación:** $(x+h)^2(y+K)^2=r^2$
15	**Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta**  Se tiene que sumar "x" a "h" y de igual forma "y" a "K" **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** $(x+h, y+K)$ **Ecuación:** $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$
18	
19	
20	
21	
22	

Estudiante	Actividad 3, inciso c)
23	 Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (x+h , y+k) Ecuación: $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$
24	
26	 Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (x , y) Ecuación: $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$

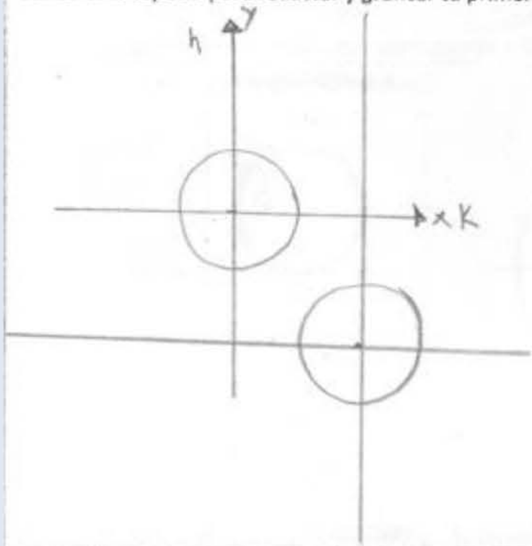
Estudiante	Actividad 3, inciso c)
27	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (-4 , -2) Ecuación: $(x-(-4h))^2+(y-(-2k))^2=r^2$
28	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta   Primero colocamos el primer circulo en el centro y el segundo lo colocamos el segundo en el segundo plano y para poder sacar la ecuación cheque en que coordenadas quedaban para poder sacarla. Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (-6 , -4) Ecuación: $(x+6h)^2+(y+4k)^2=3^2$
29	

Estudiante	Actividad 3, inciso c)
30	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (x, y) Ecuación: $(x+h)^2+(y+K)^2=r^2$
31	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Sumarle el origen de 'x' en el punto donde se intersecta la coordenada 'h', somar el origen de y' de la coordenado 'k' para que se intersecten sus radios $(-7,-7)$ $(x+7)^2+(y+7)^2=3^2$ Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x, h \cdot y, k)$ Ecuación: $(x+h)^2+(y+k)^2=r^2$

Tabla 31. Respuestas al cuadernillo: Actividad 3, inciso d).

Estudiante	Actividad 3, inciso d)
1	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(h, -K)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$
2	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$ Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x+h, y-K)$ Ecuación: $(x+h)^2+(y-k)^2=r^2$

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 3, inciso d)</th></tr>
<tr><td>3</td><td>
Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta



En mi cuadrante 4 tengo que restar en h y k para llegar en el origen

Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:

(x, y)

Ecuación:

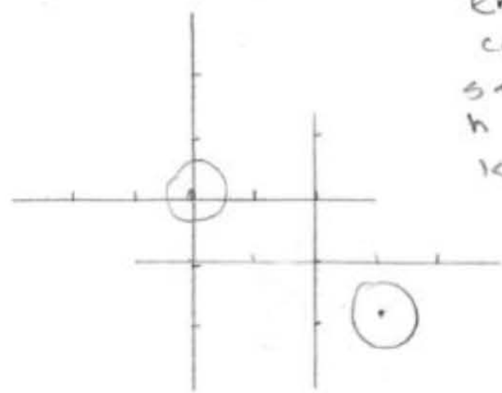
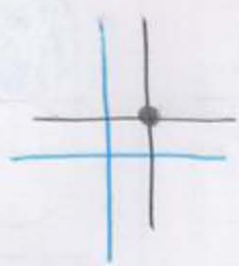
$(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$
</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>
Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta

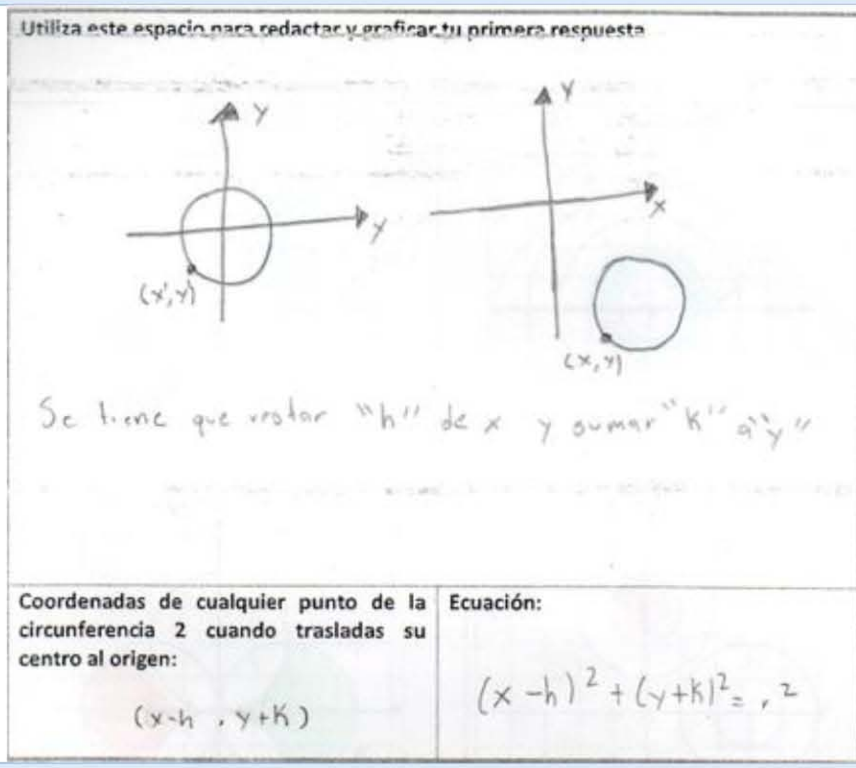
Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:

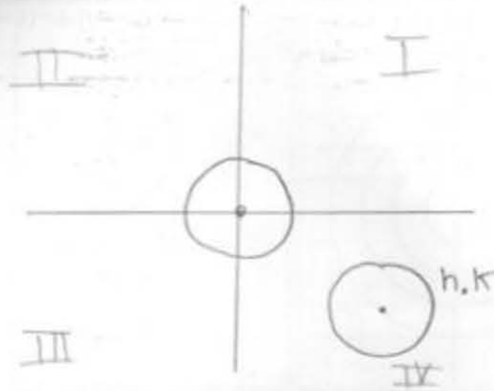
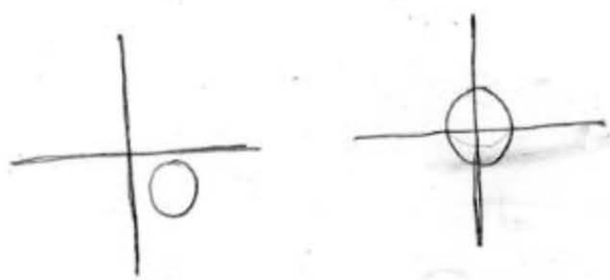
(h, k)

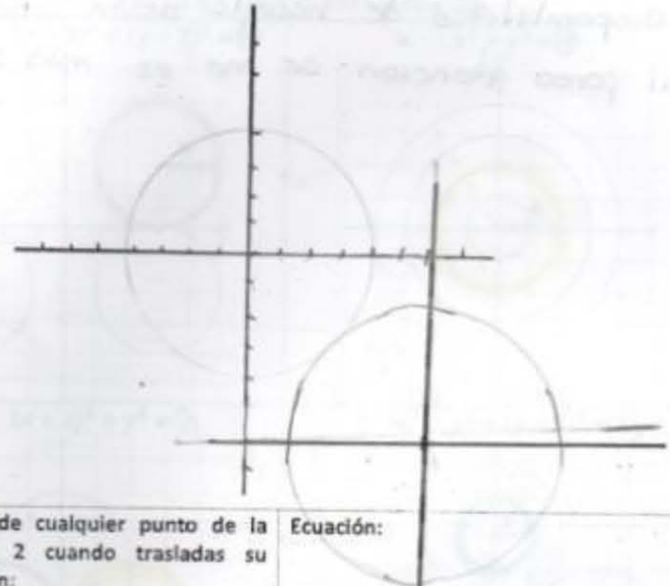
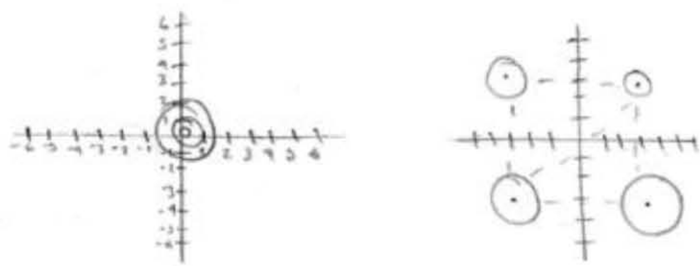
Ecuación:

$(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$
</td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 3, inciso d)
6	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  En mi plano cartesiano se recorrio h para x y k para y. Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (,) Ecuación: $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$
7	
8	
9	
10	
11	
12	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Se movio en el ultimo Cuadrante teniendo un valor Positivo y un valor negativo.  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (,) Ecuación: $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$

Estudiante	Actividad 3, inciso d)
14	
15	 Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Se tiene que restar "h" de x y sumar "K" a "y" Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x-h\ ,\ y+K)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$
18	
19	
20	
21	
22	

Estudiante	Actividad 3, inciso d)
23	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(x-h\ ,y+k)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$
24	
26	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: $(h\ ,K)$ Ecuación: $(x-h)^2+(y+K)^2=r^2$

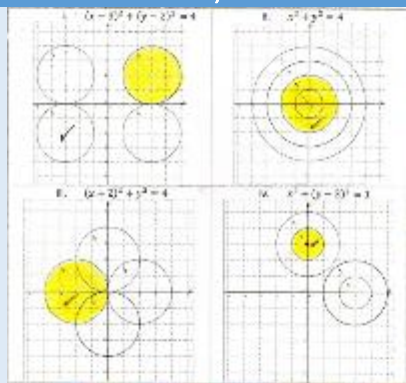
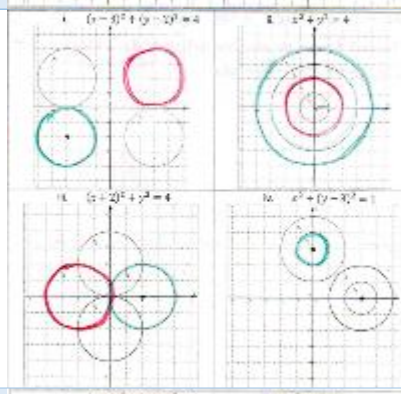
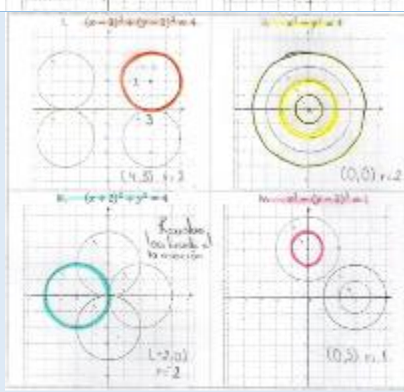
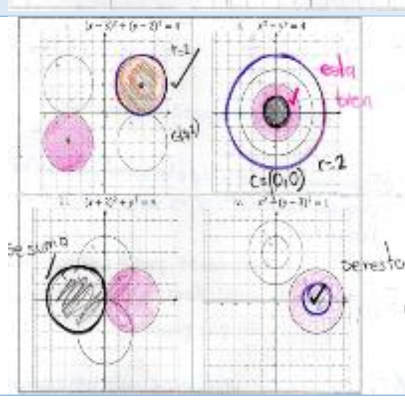
Estudiante	Actividad 3, inciso d)
27	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (6 , -6) Ecuación: $(x-6h)^2+(y-(-6k)^2=r^2$
28	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta  Colocamos el circulo en el plano cartesiano y de ahi saque las coordenadas para poder sacar la ecuación indicada. Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen: (7 , -5) Ecuación: $(x-(7h)^2+(y+5k)^2=4^2$
29	

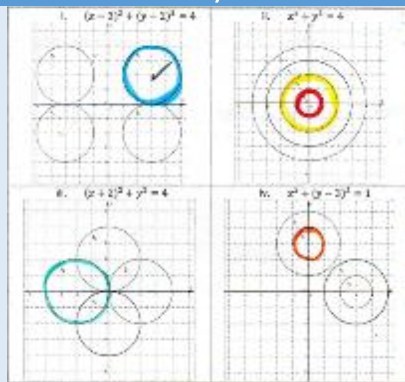
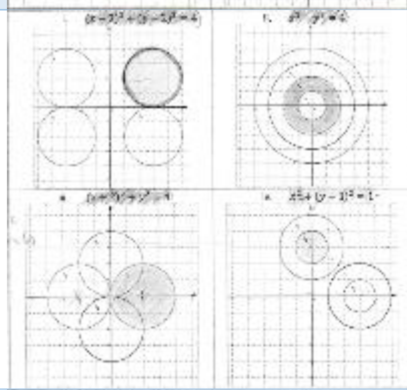
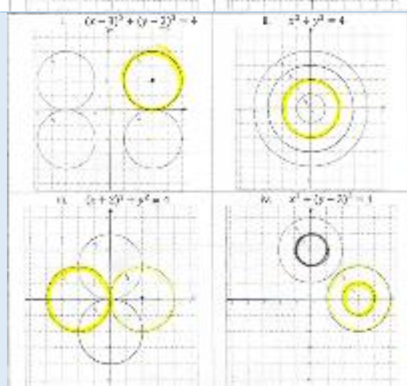
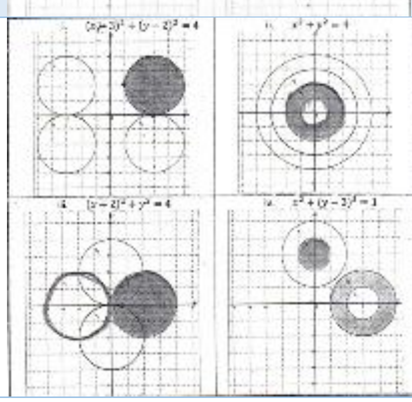
Estudiante	Actividad 3, inciso d)
30	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (x, y) **Ecuación:** $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$
31	Utiliza este espacio para redactar y graficar tu primera respuesta Rote el origen de "x" en el punto donde se intersecta la coordenada "h", sume el origen de "y" dondo se intersecta el Punto de la coordenada "k" **Coordenadas de cualquier punto de la circunferencia 2 cuando trasladas su centro al origen:** (x_1-h, y, k) **Ecuación:** $(x-h)^2+(y+k)^2=r^2$

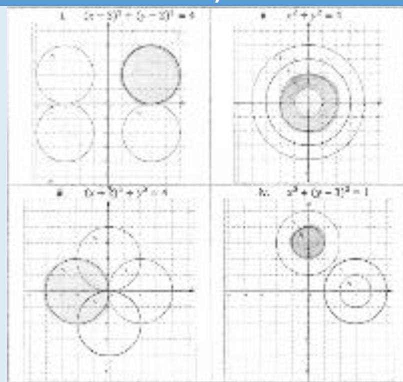
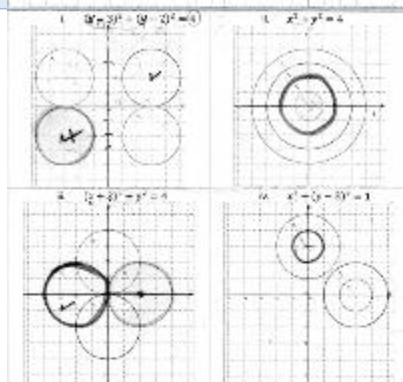
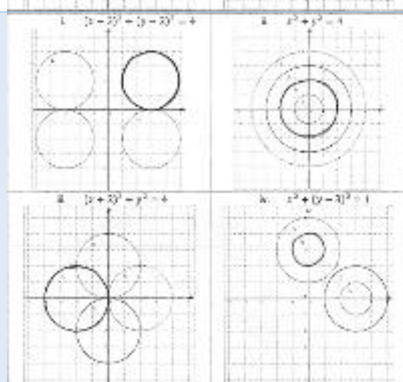
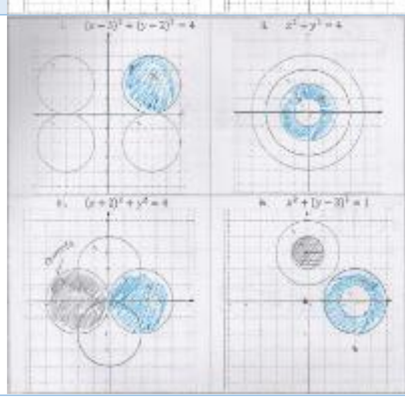
Tabla 32. Respuestas al cuadernillo: Actividad 3, inciso e).

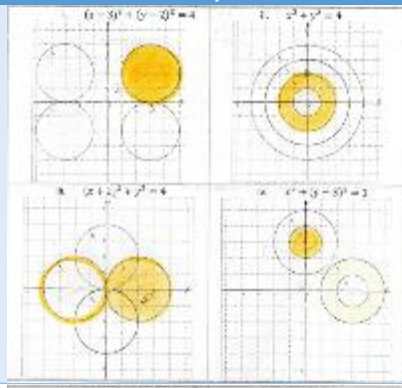
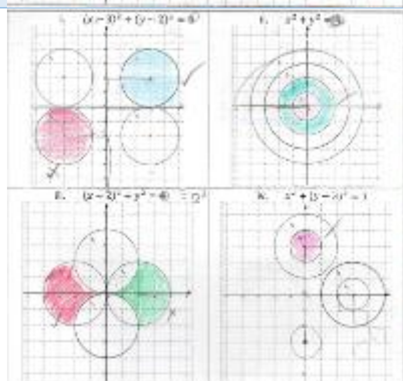
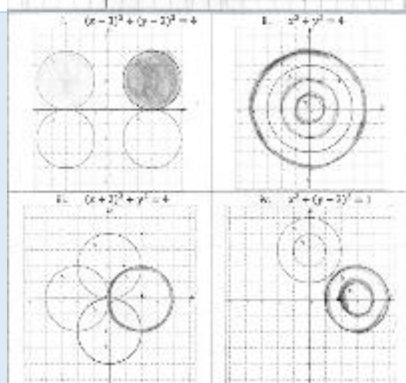
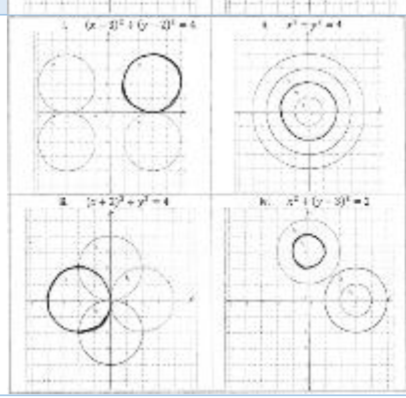
Estudiante	Actividad 3, inciso e)
1	
2	
3	Ecuación de la Circunferencia $x^2+y^2=r^2$ Ecuación Reducida $\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$ → Ecuación de la circunferencia. Para allar la circunferencia. con centro en el origen será necesario conocer el radio o un punto por donde pasa la circunferencia.
4	
5	
6	Ecuacion de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Para allar la circunferencia con centro en el origen sera necesario conocer el radio o el punto donde pasa la circunferencia
7	
8	
9	
10	
11	
12	
14	
15	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
26	
27	
28	
29	
30	Para allar la circunferencia. con centro al origen es necesaria.
31	

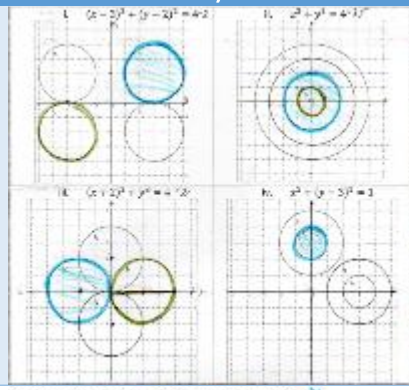
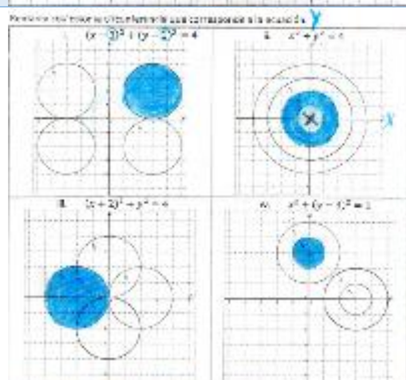
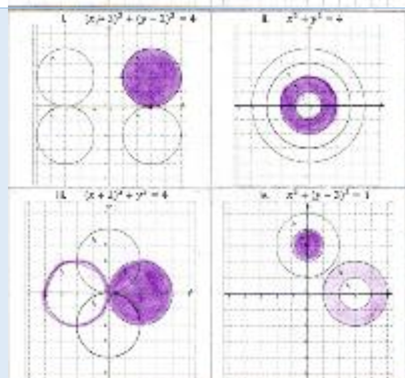
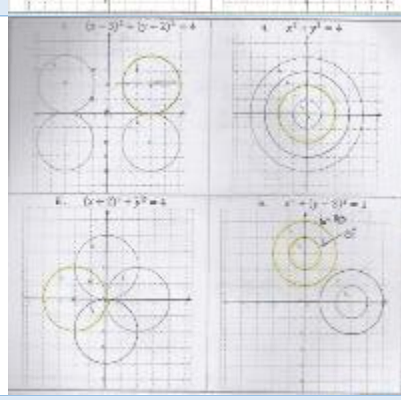
Tabla 33. Respuestas al cuadernillo: Actividad extraclase 3, incisos a) y b).

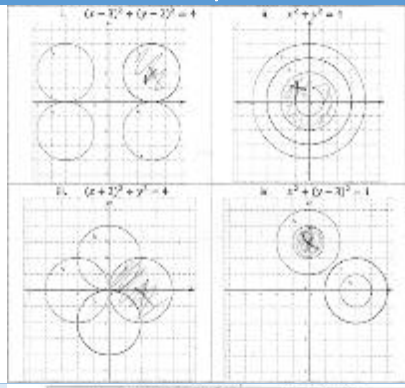
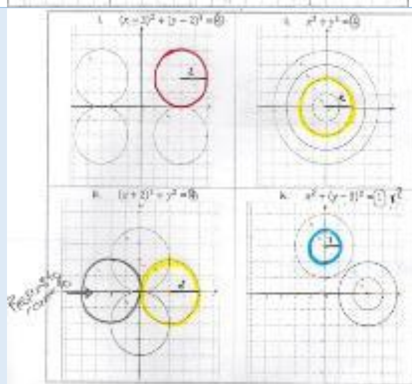
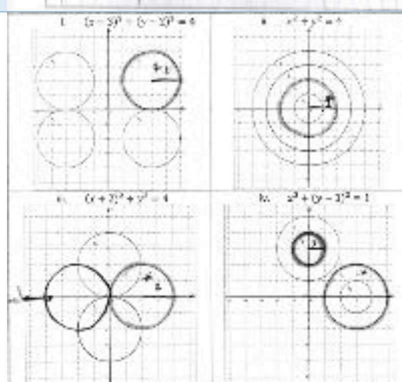
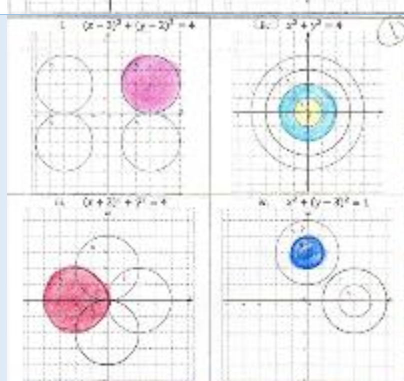
Estudiante	a)	b)
1		Orientarse por la ecuación y buscar el círculo que con esa ecuación llegue al origen del plano, el radio ya está elevado al cuadrado, $r = 2$ i.- Restarle 3 al 3 en el plano de x y restarle 2 al plano de y y así queda en el origen ii.- Solo encontrar el radio ya que todas las circunferencias su centro se encuentra en el origen
2		Aplicando las ecuaciones que nos dan Poniéndolos opuestamente los signos
3		Utilizar la ecuación ordinaria $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ para determinar el valor de "y" igual correspondiente al valor de "x" $\quad h \quad k$ $3\ (-2, 0)\ \ r = -2$ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ $(x-(-2))^2 + (y-0)^2 = 2^2$ $(x+2)^2 + y^2 = 4$ $x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4$ $x^2 + y^2 + 4x + 4 - 4 = 0$ $x^2 + y^2 + 4x = 0$ Ya que con esta fórmula me ayudo.
4		Me guie por las ecuaciones de cada incisos

Estudiante	a)	b)
5		i) La ecuación está en números negativos, pero gráficamente se representa en números positivos ii) La ecuación se deduce que al sumar $x + y$ te debe de dar un radio de 4
6		Respecto a la i. La identifiqué rápidamente ya que me guie en la ecuación que hicimos anteriormente. Y conforme a las demás me fui guiando conforme a los radios que tenía.
7		De acuerdo a los datos que daban las coordenadas que era el centro de la circunferencia y ese fue el círculo de la ecuación
8		1 Porque pasan por el 3 y 2 y porque tienen que pasar por el centro de su origen.

Estudiante	a)	b)
9		i) La ecuación está en números negativos pero gráficamente se pasan a números positivos ii) La ecuación se deduce que al sumar $x + y$ te debe de dar un radio de 4.
10		Reinvirtiendo los signos
11		Porque pasa por el origen el 3 y el 2
12		Pues al saber en qué apartado del Plano Cartesiano están es el lugar donde se encontrarán los positivos en 1,3 y negativo 2, 4

Estudiante	a)	b)
14		Porque pasan por el 3 y el 2 y porque tienen que pasar por el centro de su origen
15		
18		Me guie con el ejercicio anterior y me fui dando cuenta dónde van los negativos y el origen La ubicación donde se encuentran los círculos por la ecuación.
19		I. Restarle 3 al 3 en el plano de x y restarle 2 al plano de y II. Solo teníamos que buscar el radio porque todas están en el origen

Estudiante	a)	b)
20		
21		i. En el primero llegamos a ese resultado porque tiene que ser el círculo que pueda llegar al origen orientándose por la ecuación. ii. En el segundo ejercicio, todos los círculos se encuentran en el origen $(x^2 + y^2 = 4)$.
22		1 Porque pasan por el 3 y 2 y porque tienen que pasar por el centro de su origen.
23		I En esta parte se tenía que quitarle valor a x y y para regresarlo al origen
24		

Estudiante	a)	b)
26		Me fui guiando conforme a las fórmulas que hicimos anteriormente.
27		1) Es porque en el eje h se representa por el 3 y eso indica que esa coordenada es para el centro de la circunferencia 2) Solo tiene su diámetro de 4 3) Está positivo no negativo 4) Está en el eje y
28		Sabiendo el apartado del plano cartesiano estén en el lugar correspondiente los positivos en el 1, 3 y negativo 2, 4.
29		ii.- Al saber que el radio será 4 deducimos que tenía que ser un 2 para el momento de que se convierta al cuadrado nos dé un 4 iii.- La ecuación está en número positivo pero gráficamente la circunferencia se encuentra en el lado negativo

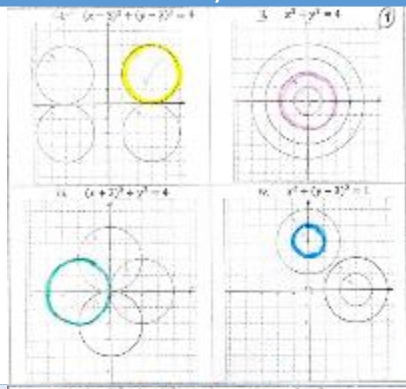
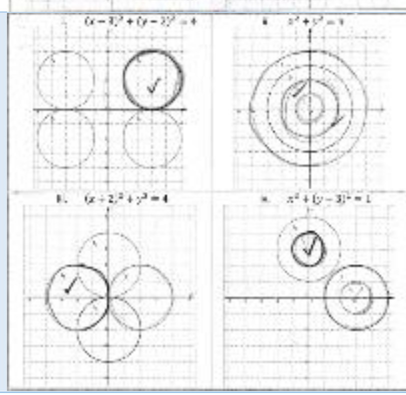
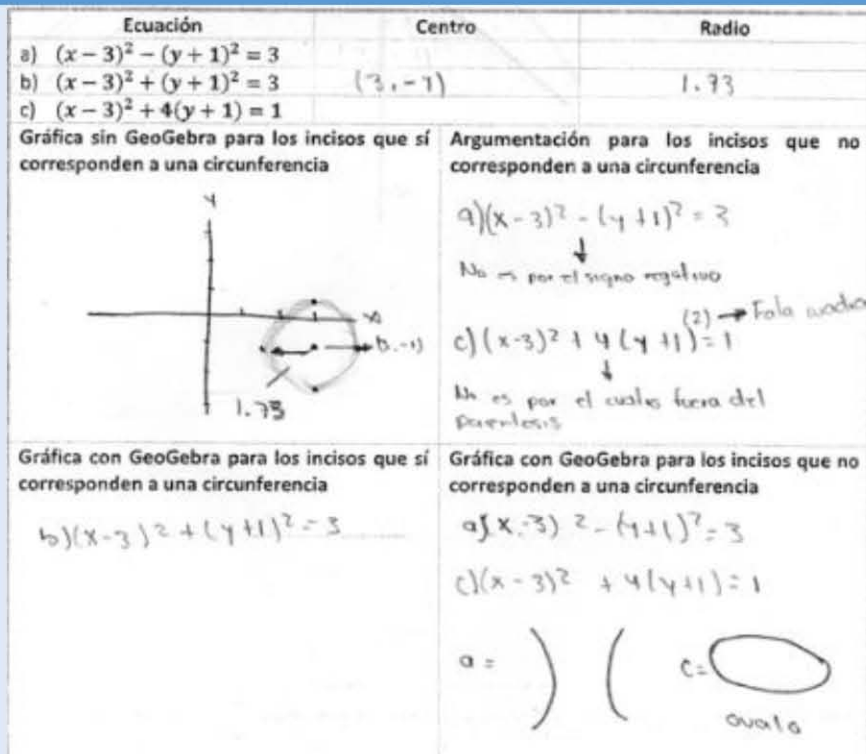
Estudiante	a)	b)
30		ii.- Al saber que el radio sería 4 deducimos que tenía que ser un 2 para al momento de que se convierta al cuadrado nos dé un 4. iii.- La ecuación está en número positivo pero gráficamente la circunferencia se encuentra en el lado negativo.
31		Pues me guie con el ejercicio anterior y fui dándome cuenta dónde iban los negativos y el origen. -También en qué posición se encontraban los círculos en su ecuación.

Tabla 34. Respuestas al cuadernillo: Actividad extraclase 3, incisos c) y d).

Estudiante	Elecciones para c)	d)
1	iii, ii y d)	
2	iii, i, a)	Lo puse mal porque yo seguía las ecuaciones cuando lo que era es del centro de la circunferencia debíamos llegar al origen. Marcando el centro de la circunferencia y ir analizando de una por una las ecuaciones
3	iv, iii, a)	Aplicando la ecuación ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ya que con ella puedo aplicar para sacar el radio y saber que ecuación se encuentra la circunferencia. Al igual ubicando los puntos
4	ii, iii, d)	Guiándome por los ejercicios anteriores de las ecuaciones y circunferencia
5	iii, ii, d)	Solo observando las coordenadas y es lo opuesto
6	iv, iii, a)	Sustituyo con la fórmula $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Respecto a todas me fui guiando conforme las ecuaciones de ir quitando y sumando
7	iii, ii, d)	
8	iii, iv, d)	
9	iii, ii, d)	Guiándonos de las coordenadas ya sean positivas o negativas de la ecuación, solo buscando lo opuesto a las coordenadas
10	iii, i, d)	Solamente es basarse en invertir los signos y saber lo que significa restar
11	iii, ii, d)	
12	iii, ii, d)	Sabiendo las reglas de los signos positivos y negativos
14	iii, iv, d)	
15	iv, i, d)	Estuve mal porque las ecuaciones que puse no hacían que el centro llegaran al origen del plano cartesiano
18		
19	iii, ii, d)	Darnos cuenta cuándo se suma o se resta y ver que todo es lo opuesto.
20	iii, ii, d)	
21	iii, ii, c)	Nada más jalé los puntos, al origen.
22	iii, iv, b)	
23	iv, iii, c)	Ocupar el radio x 2 y así tendría el resultado de la ecuación y así disminuir el número de respuestas después disminuir a x y a y para así encontrar el centro de la circunferencia
24		
26	iv, iii, a)	Me di una idea con las fórmulas anteriores y en qué lugares quedaban los círculos
27	iv, i, d)	Que tiene que corresponder que el número que esté sumando o restando a las x
28	iv, iii, d)	Sacando una ecuación la cual la represente a la figura y realizando otros ejercicios.
29	iii, ii, d)	Guiándonos de las ecuaciones ya sea positivo o negativo
30	iv, iii, c)	Guiándonos de las ecuaciones ya sea positivo o negativo
31	ii, iii, b)	Pues sí fui guiándome sobre los ejercicios anteriores y sobre la ecuación y los círculos.

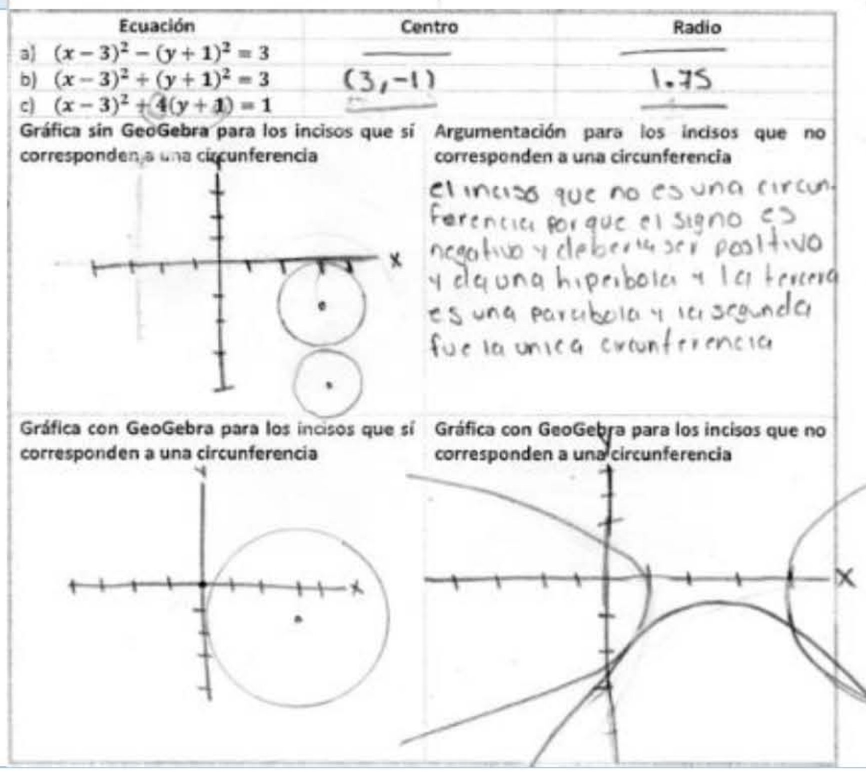
Tabla 35. Respuestas al cuadernillo: Actividad 4.

Estudiante	Actividad 4
1	

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$		
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3,−1)	1.73
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$		

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
y x (3,-1) 1.73	a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ No es por el signo negativo c) $(x-3)^2+4(y+1)^{(2)}=1$ (2) → Falta cuadrado No es por el cuadro fuera del paréntesis

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ a = c = ovalo

Estudiante	Actividad 4
2	

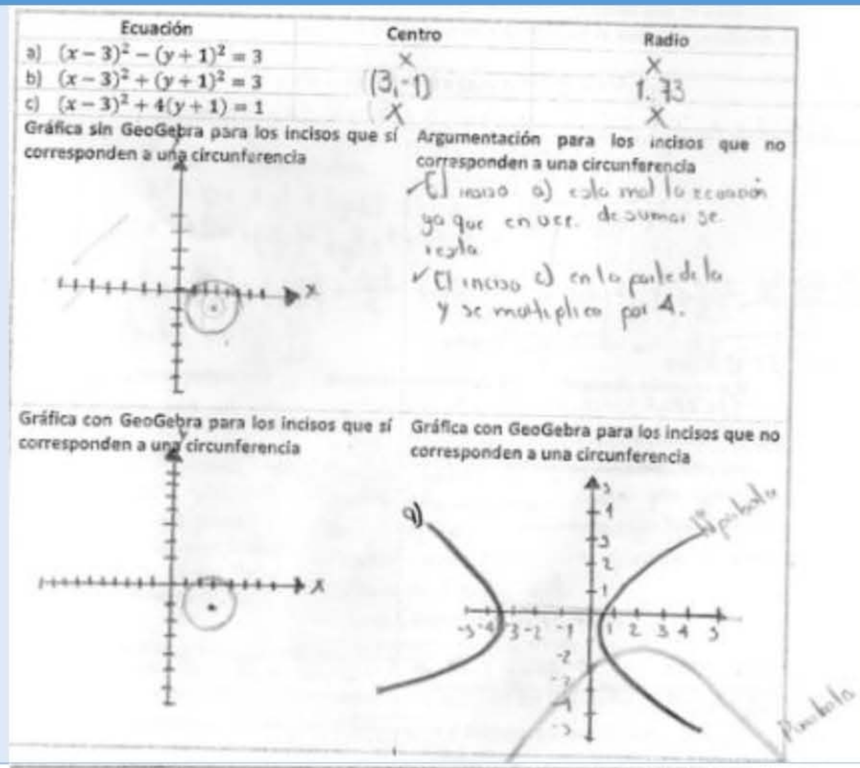
Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$		
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3,−1)	1.75
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$		

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
x	el inciso que no es una circunferencia porque el signo es negativo y debería ser positivo y da una hipérbola y la tercera es una parábola y la segunda fue la única circunferencia

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
y x	x

Estudiante	Actividad 4
3	
4	

3

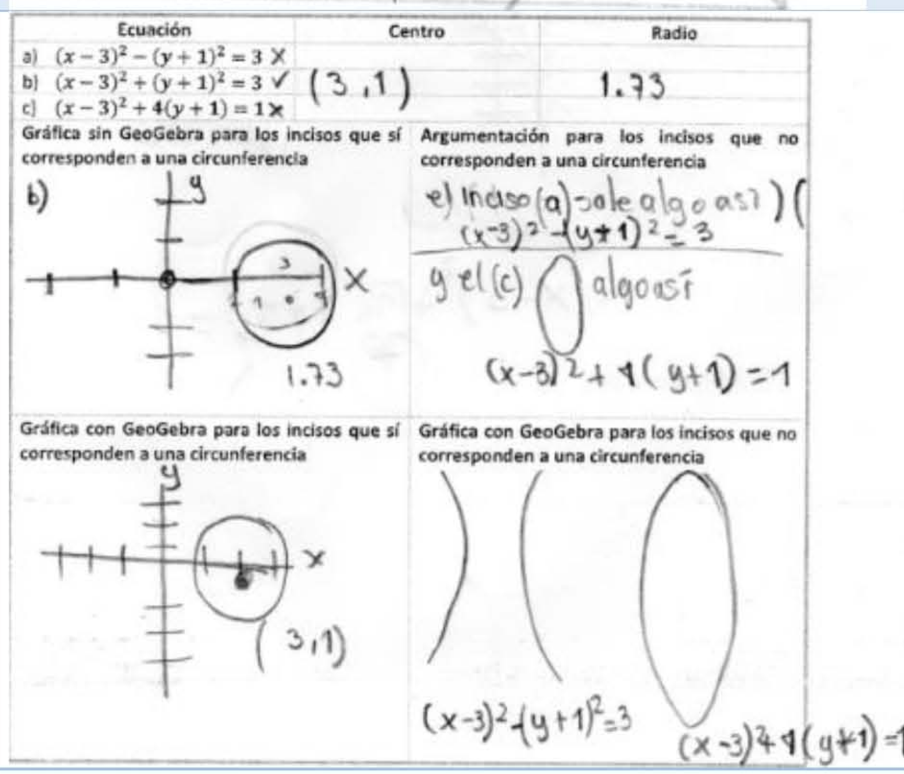


Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	×	×
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3,-1)	1.73
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	×	×

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
	El inciso a) esta mal la ecuación ya que en vez de sumar se resta. El inciso c) en la parte de la y se multiplica por 4.

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
	a) Hipérbola, Parábola

4



Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ ×		
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$ ✓	(3,1)	1.73
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ ×		

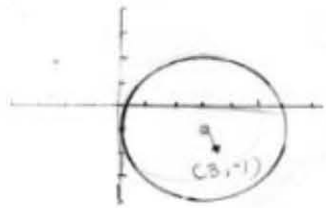
Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
b) y x 1.73	el inciso (a) sale algo así)($(x-3)^2-(y+1)^2=3$ y el (c) algo así $(x-3)^2+4(y+1)=1$

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
y x (3,1)	$(x-3)^2-(y+1)^2=3$ $(x-3)^2+4(y+1)=1$

Estudiante	Actividad 4
5	

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	(3, -1)	1.5
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3)(-1)	1.5
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	(3)(-1)	1

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia



Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

La ecuacion tiene que llevar un más entre los dos parentesis para que sea la ecuacion correcta

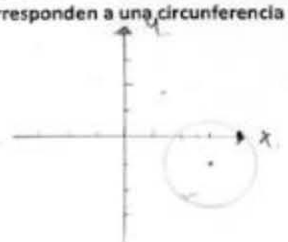
Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

Estudiante	Actividad 4
6	

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	X	X
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3, -1)	1.73 $\sqrt{3}$
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	x	x

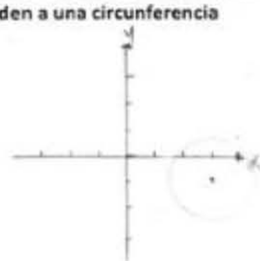
Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia



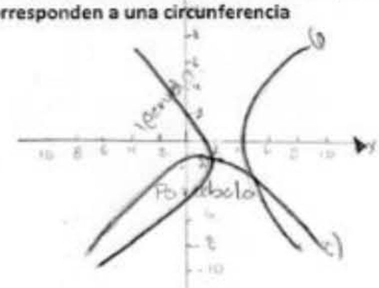
Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

El inciso a) esta mal la ecuacion ya que en vez de sumar se resta

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia



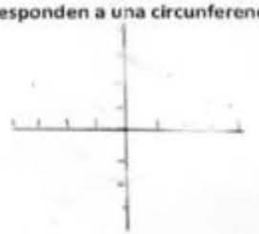
Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia



Estudiante	Actividad 4
7	

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$		1.73
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$		1.73.
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$		1

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

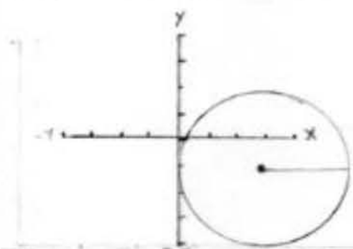


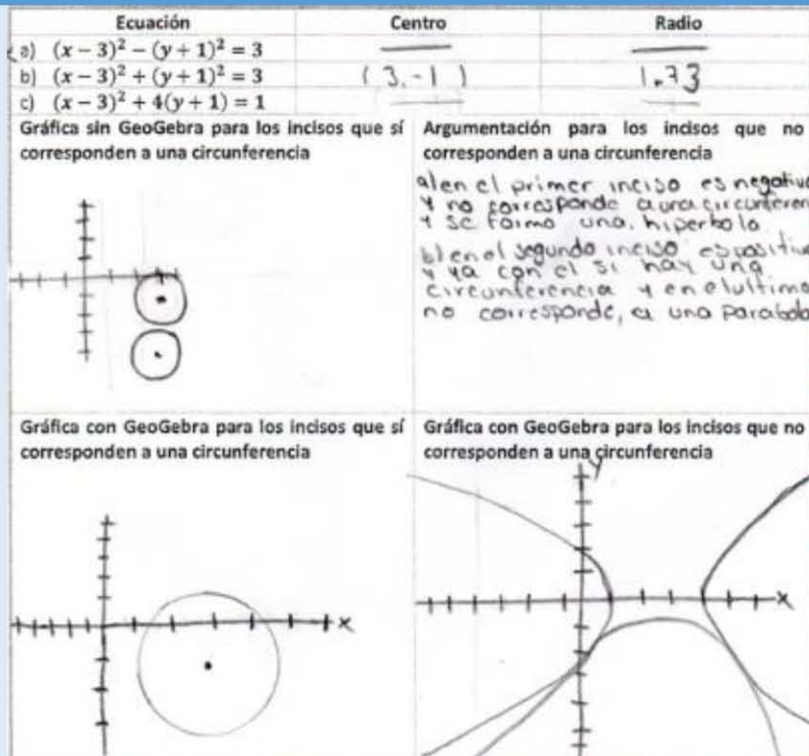
Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

Los incisos a) y c) no cumplen con la regla de una ecuacion y con el teorema de pitagoras.

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

Estudiante	Actividad 4
8	
9	Ecuación / Centro / Radio a) $\cancel{(x-3)^2-(y+1)^2=3}$ b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$ / (3, -1) / 1.73 c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia  Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia La ecuación tiene que llevar un más entre los dos parentesis para que la ecuación sea correcta Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
10	Ecuación / Centro / Radio a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ / (3,1) / b) $\cancel{(x-3)^2+(y+1)^2=3}$ / (3,1) / 1.73 c) $\cancel{(x+3)^2+4(y+1)=1}$ Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia  Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia El inciso B Por que grafico correctament lo que se Pide Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia 

<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 4</th></tr>
<tr><td>11</td><td>


Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	—	—
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3, -1)	1.73
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	—	—

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

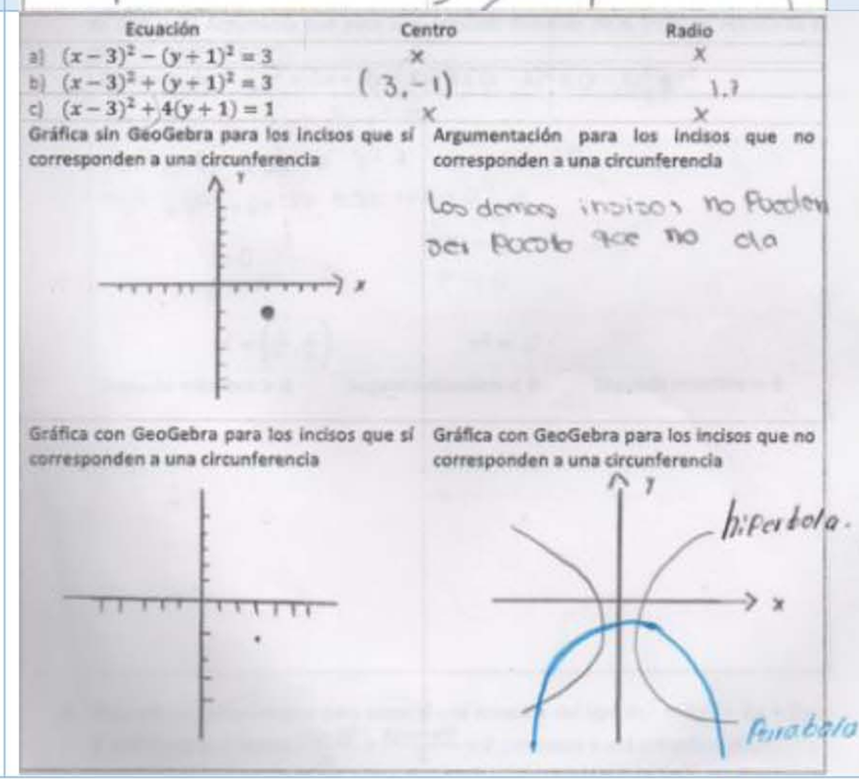
Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

a) en el primer inciso es negativo y no corresponde a una circunferencia y se forma una hiperbola

b) en el segundo inciso es positivo y ya con el si hay una circunferencia y en el ultimo no corresponde, a una parabola

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

</td></tr>
<tr><td>12</td><td>


Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	x	x
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3, -1)	1.7
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	x	x

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

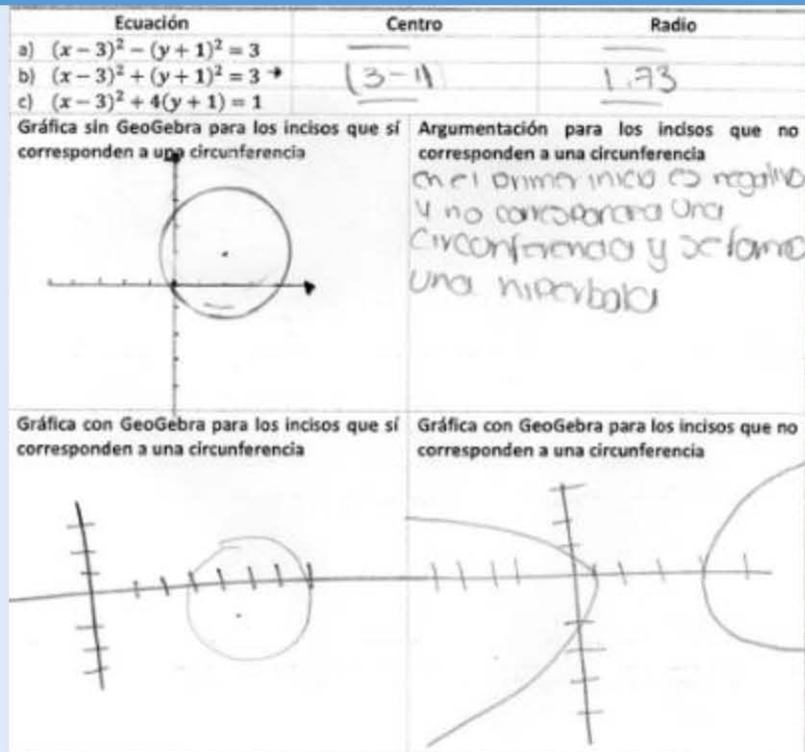
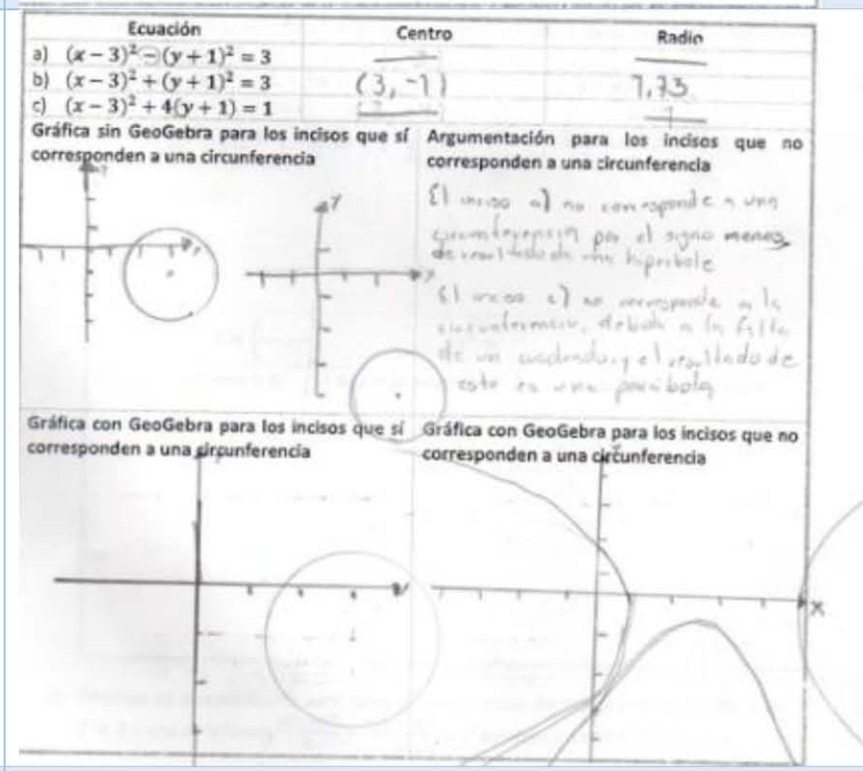
Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

Los demas incisos no Pueden ser Porque no da

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

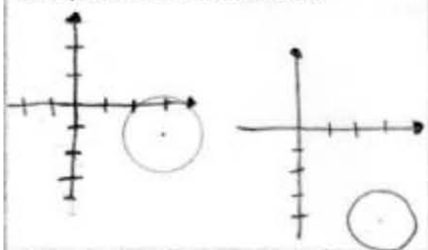
</td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 4
14	 Ecuación | Centro | Radio a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$ | (3-1) | 1.73 c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ **Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia** **Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia** en el primer inicio es negativo y no corresponderá una circonferencia y se formo una hiperbola **Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia** **Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia**
15	 Ecuación | Centro | Radio a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$ | (3, -1) | 1.73 c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ **Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia** **Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia** El inciso a) no corresponde a una circunferencia por el signo menos, de resultado de una hipérbole El inciso c) no corresponde a la circunferencia, debido a la falta de un cuadrado, y el resultado de esto es una parábola **Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia** **Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia**
18	

Estudiante	Actividad 4
19	

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	—	—
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3, -1)	1.75
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	(3,-4) —	—

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

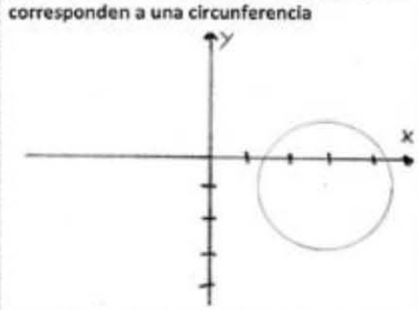


Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

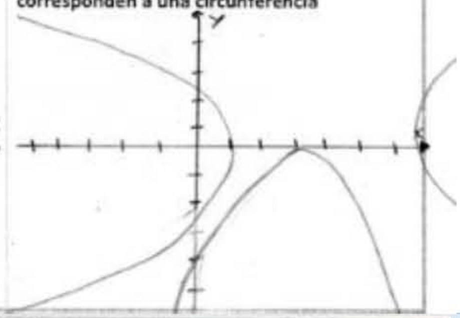
a) En el primer inciso tiene un signo menos y no corresponde a una circunferencia

c) Tampoco corresponde a una circunferencia ya que al comprobarlo nos indica una parabola

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia



Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia



Estudiante	Actividad 4
20	

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$		
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	3,-1	1.73
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$		

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$

Uno por el signo negativo

c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

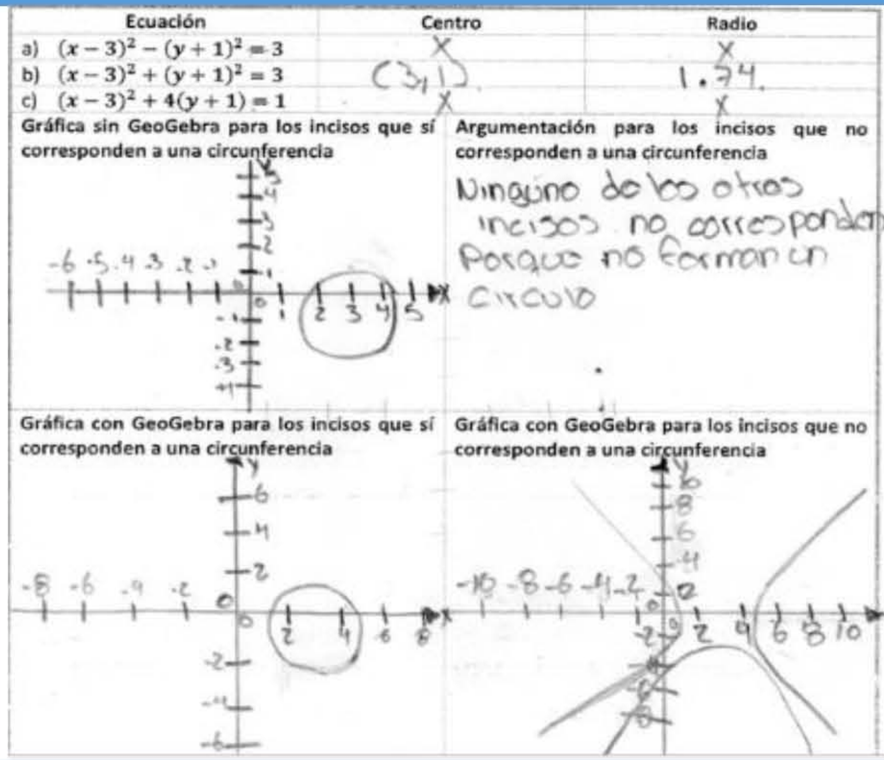
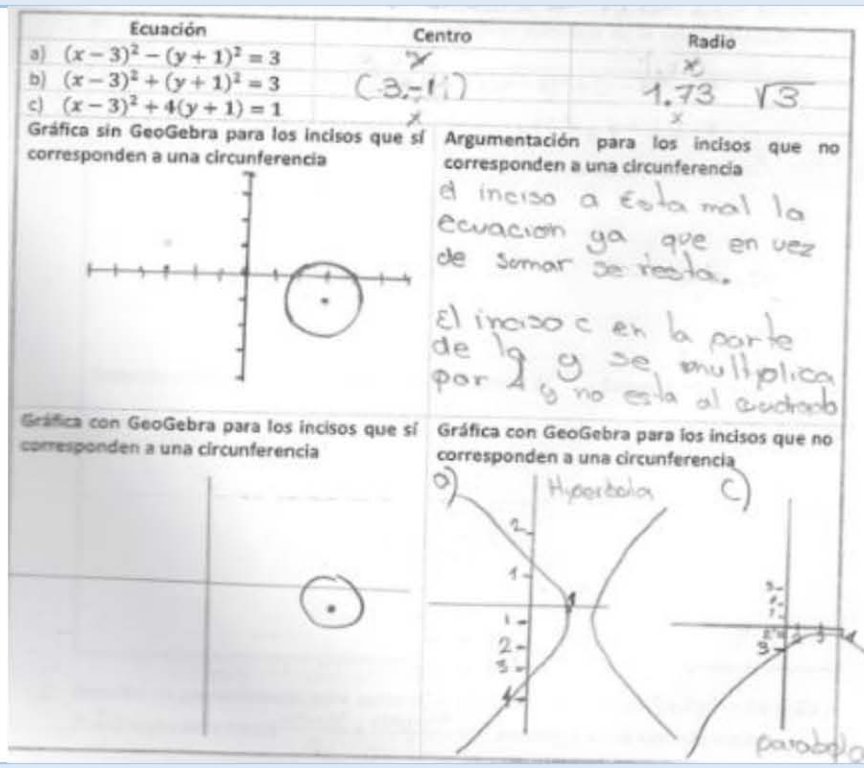
Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

a) $(x-3)^2-(4+1)^2=3$

c $(x-3)^2+4(y+1)=1$

a))(c= 

ovalo

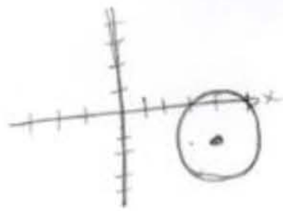
<table>
<tr><th>Estudiante</th><th>Actividad 4</th></tr>
<tr><td>21</td><td>
<table>
<tr><th>Ecuación</th><th>Centro</th><th>Radio</th></tr>
<tr><td>a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$</td><td>(3,1)</td><td>1.74</td></tr>
<tr><td>c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia</td><td colspan="2">Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
Ninguno de los otros incisos no corresponden porque no forman un circulo</td></tr>
<tr><td>Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia</td><td colspan="2">Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>22</td><td></td></tr>
<tr><td>23</td><td>
<table>
<tr><th>Ecuación</th><th>Centro</th><th>Radio</th></tr>
<tr><td>a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$</td><td>(3,-1)</td><td>1.73 $\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia</td><td colspan="2">Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
el inciso a esta mal la ecuacion ya que en vez de sumar se resta.
El inciso c en la parte de la y se multiplica por 4 y no esta al cuadrado</td></tr>
<tr><td>Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia</td><td colspan="2">Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
a) Hiperbola c) parabola</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>24</td><td></td></tr>
</table>

Estudiante	Actividad 4

26

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	X	X
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3, -1)	1.73 $\sqrt{3}$
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	X	X

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia



Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

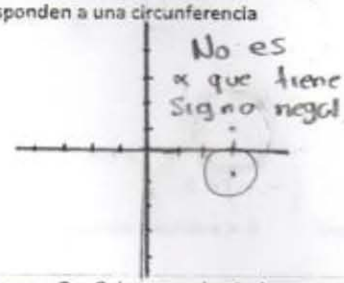
Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

27

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	(3, -1)	$\sqrt{3}$
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3, -1)	$\sqrt{3}$
c) $(x-3)^2+\cancel{4(y+1)}=1$	(3, 1)	1

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

a)

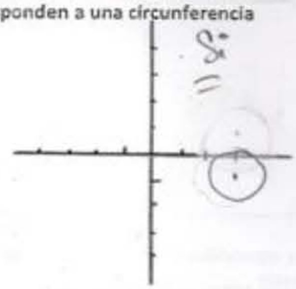


Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

El inciso C y el A No son circunferencias pero el b Si por que tiene Signo por que no tiene ninguno exponente.

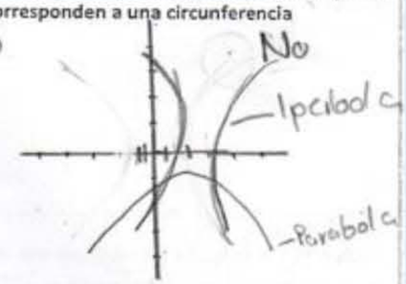
Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

b)



Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

c)

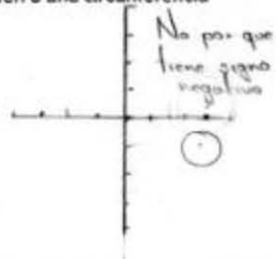


Estudiante	Actividad 4
28	

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$	(3,-1)	1,5
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3,-1)	1,5
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$	(3,4)	1

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

a)

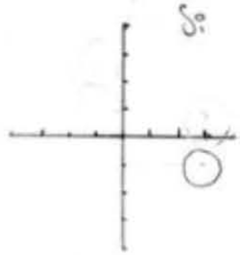


Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

El inciso b si tiene una circunferencia y el a y c no por que tiene signo negativo y el C no tiene 2^2 el cual lo representa

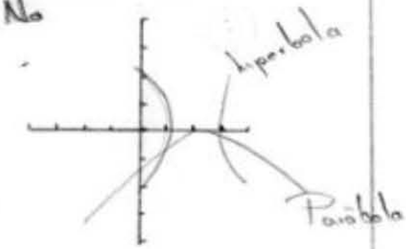
Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

b) Si



Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

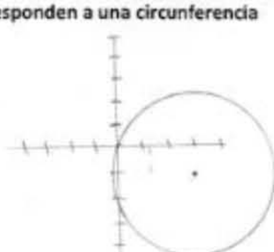
c) No



Estudiante	Actividad 4
29	

Ecuación	Centro	Radio
~~a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$~~		
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	(3,1)	1.73
c) $(x-3)^2+4(y+4)=1$		1

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

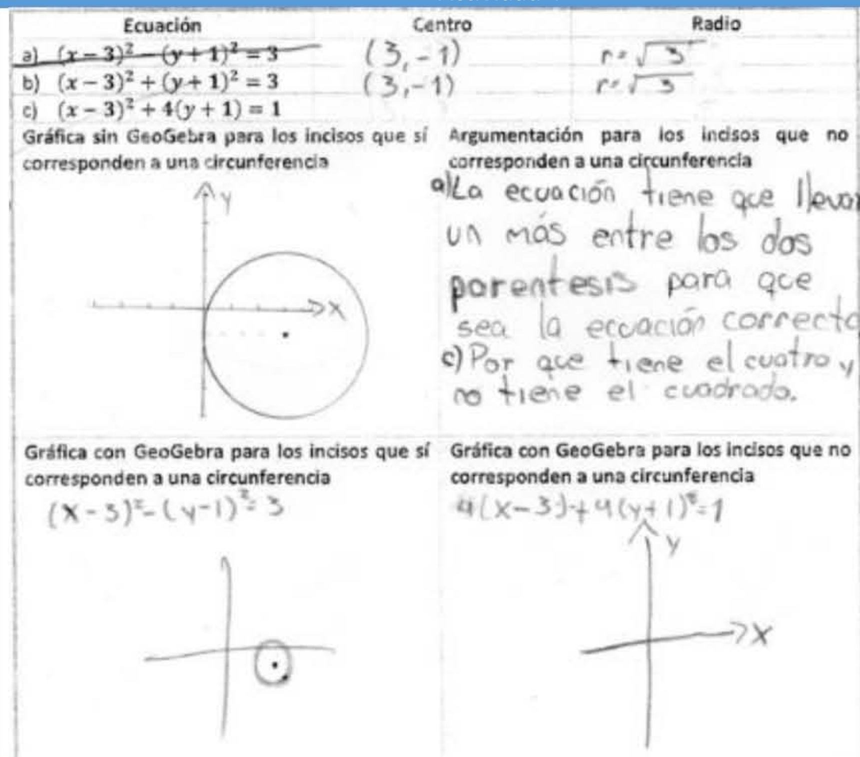
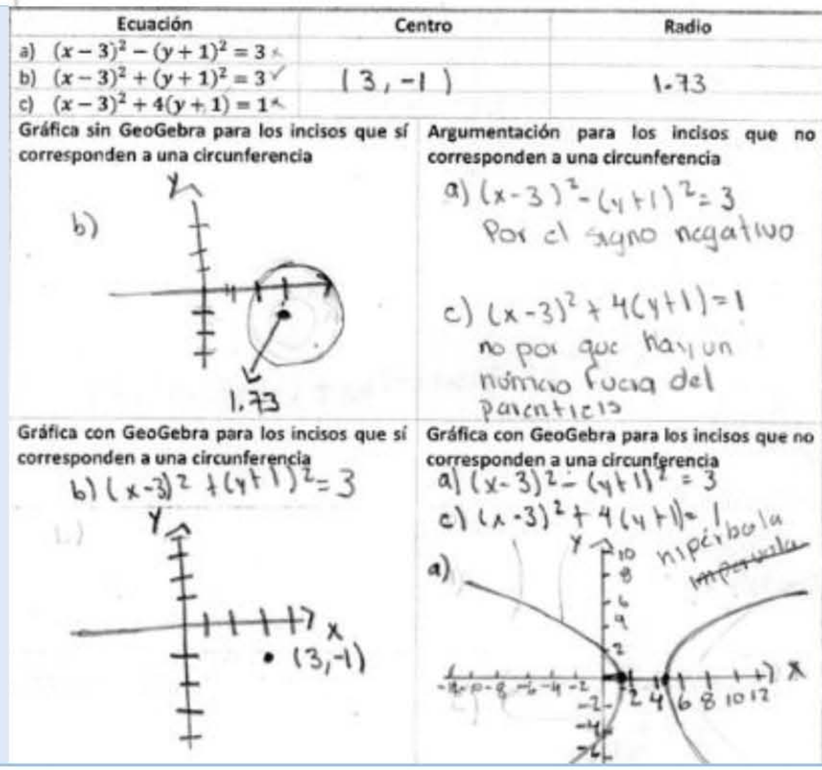


Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia

La ecuacion tiene que llevar un mas en los dos Parentesis para que sea la ecuacion correcta

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia

Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia

Estudiante	Actividad 4
30	
31	

30

Ecuación	Centro	Radio
a) ~~$(x-3)^2-(y+1)^2=3$~~	$(3,-1)$	$r=\sqrt{3}$
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$	$(3,-1)$	$r=\sqrt{3}$
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$		

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
y, x	a) La ecuación tiene que llevar un más entre los dos parentesis para que sea la ecuación correcta c) Por que tiene el cuatro y no tiene el cuadrado.

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
$(x-3)^2-(y-1)^2=3$	$4(x-3)+4(y+1)^2=1$ y, x

31

Ecuación	Centro	Radio
a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ ×		
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$ ✓	$(3,-1)$	1.73
c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ ×		

Gráfica sin GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Argumentación para los incisos que no corresponden a una circunferencia
b) y, 1.73	a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ Por el signo negativo c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ no por que hay un número fuera del parentesis

Gráfica con GeoGebra para los incisos que sí corresponden a una circunferencia	Gráfica con GeoGebra para los incisos que no corresponden a una circunferencia
b) $(x-3)^2+(y+1)^2=3$ y, x, $(3,-1)$	a) $(x-3)^2-(y+1)^2=3$ c) $(x-3)^2+4(y+1)=1$ a) hipérbola ~~parábola~~

Tabla 36. Respuestas al cuadernillo: Actividad 5, inciso a).

Estudiante	Actividad 5, inciso a)
1	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $\quad x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-xh-xh+h^2 \quad y^2-yk-yk+k^2$ $x^2-2xh+h^2 \quad y^2-2yk+k^2$ $D = -2h$ $E = -2K$ $F = h^2+k^2-r^2$
2	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2=r^2=0$ $x^2-xh-hx+h^2 \quad y^2-yk-yk+k^2$ $x^2-2xh+h^2+ \quad y^2-2yk+k^2 \quad =r^2$ $D = -2h$ $E = -2k$ $F = h^2+k^2-r^2$
3	...coordenadas del centro de la circunferencia? $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $(x-h)^2=(x-h)(x-h)=x^2-2xh+h^2$ $(y-k)^2=(y-k)(y-k)=y^2-2yk+k^2$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$ Ahora aplica reversa. Parte de la ecuación... $D = -2h$ $E = -2K$ $F = h^2+K^2-r^2$
4	
5	y F en términos de las coordenadas del centro de la circunferencia? $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $\quad x^2-y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-xh-xh+h^2 \quad -x^2-2xh+h^2$ $y^2-yk-yk+k^2 \quad -y^2-2yk+k^2$ $D =$ $E =$ $F =$
6	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0.$ $D = 2xh.$ $E = 2yk.$ $F = \ ^2.$
7	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $\quad x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$ Desarrollando los cuadrados: $x^2+xh-xh+h^2 \quad y^2-yk-ky+k^2$ $x^2-2xh+h^2 \quad y^2-2yk+k^2$ $D = -2h$ $E = -2K$ $F = x^2+k^2-r^2$
8	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $\quad xy-xk-hy+hk$ Desarrollando los cuadrados: $x-h^2+y-k^2=r^2$ $x^2-hx-xh-h^2$ $x^2-hx^2-h^2$ $D =$ $E =$ $F =$

Estudiante	Actividad 5, inciso a)
9	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk-k^2=r^2$ x^2 $D=$ $E=$ $F=$
10	
11	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-xh-hx+h^2$ $x^2-2xh+h^2$ + $y^2-yk-yk+k^2$ $=r^2$ $y^2-2yk+k^2$ $D=-2h$ $E=-2K$ $F=h^2+K^2-r^2$
12	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$ $D=2xh$ $E=2yK$ $F=r^2$
14	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-xh-hx+h^2$ + $y^2-yk-yk+k^2$ $=r^2$ $x^2-2xh+h2$ $y2-2yk+k2$ $D=2h$ $E=2K$ $F=h^2+K^2-r^2$
15	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2+2xh+h^2+y^2-2yk$ $x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2)=0$ $D=-2h$ $E=-2k$ $F=h2+k^2-r2$
18	
19	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $(x^2-2xh+h^2)+(y^2-2yk-K^2)$ $D=-2h$ $E=-2K$ $F=h^2+K^2+r^2$
20	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-xh-xh+h^2$ $x^2-2xh+h2$ $D=$ $E=$ $F=$
21	

Estudiante	Actividad 5, inciso a)	
22	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $xy-xk-hy+hk$ Desarrollando los cuadrados:	$D=$ $E=$ $F=$
23	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-2xh+h^2$ $y^2-2yk+k^2$ $x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2)=0$	$D=(-2h)x$ $E=(-2k)y$ $F=(h^2+k^2-r^2)$
24		
26	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $x^2+y^2+hx+ky+r=0$ Desarrollando los cuadrados: $(x-h)(x-h)=x^2-xh-xh-h^2$ $\cancel{x^2-2xh+h^2}$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$	$D=2xh$ $E=2yk$ $F=r^2$
27	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2$ Desarrollando los cuadrados: $(x-h)^2=(x-h)(x-h)=x^2-xh-hx+h^2$ $y^2-2yk+k^2$ $x^2-2xh+h^2$ $(y-k)^2=(y-k)(y-k)=y^2-ky-yk-k^2$	$D=2xh$ $E=2yk$ $F=r^2$
28	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $(x-h)^2=(x-h)(x-h)=x^2-2xh+h^2$ $(y-k)^2=(y-k)(y-k)=y^2-2yk+k^2$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$	$D=2xh$ $E=2yk$ $F=r^2$
29	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $x^2+y^2-2xh-2yh+h^2+k^2-r^2=0$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-xh-xh+h^2$ $-x^2-2xh+h^2$ $y^2-yk-yk+k^2$ $-y^2-2yk+k^2$	$D=$ $E=$ $F=h^2+k^2-r^2$
30	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $(x-h)^2=(x-h)(x-h)=x^2-2xh+h^2$ $(y-k^2)=(y-k)(y-k)=y^2-2yk+k^2$ $x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$	$D=$ $E=$ $F=r^2$
31	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Desarrollando los cuadrados: $x^2-2xh+h^2$ $(x-h)^2=(x-h)(x-h)=x^2-xh-xh-h^2$ $y^2-2yk+k^2$	$D=-2h$ $E=-2k$ $F=h^2+k^2-r^2$

Tabla 37. Definición: violencia de género.

Estudiante	Violencia de género
1	Violencia ejercida sobre una persona en base a su sexo o género Se definía como al sexo débil a las mujeres incluso se decía que no tenían derechos, el machismo tiene que ver algo con esto
2	
3	
4	Física, emocionalmente, psicológicamente en la que se afecta a una persona depende al sexo o género. N solo la agresión es en la mujer sino en la actualidad también hoy en día con el hombre. Normalmente ocurre la violencia con el sexo femenino ya que es considerado más vulnerable.
5	Lo que entendí por violencia de género, es como una discriminación física o psicológica contra la mujer, ser un hombre machista y estar como en los tiempos de antes de que las mujeres no tenían derecho a nada y todo lo que hacían, tenían que pedir permiso y eso es algo muy estúpido porque todos somos iguales
6	Yo entendí que violencia de género se considera cualquier acto o agresión, basados en una situación de desigualdad en el marco de un sistema de relación de dominación de los hombres sobre las mujeres que tengan o puedan tener como consecuencia un daño físico, sexual o psicológico, incluidas las amenazas de tales actos. Y que el concepto "Violencia de Género" era considerado un asunto de familia que no debía trascender de puertas y por tanto en el que no debían intervenir más personas. También leí que esta situación contribuye a que las mujeres no denuncien su situación por miedo, vergüenza y culpabilidad. Es una situación que constituye un atentado contra la integridad, la dignidad y la libertad de las mujeres, independientemente en el ámbito en que se produzca. Esto puede ocurrir en el ámbito público como en la vida familiar o personal; asimismo la discriminación de las mujeres y la violencia de género es un problema que traspasa fronteras y que está presente en la mayor parte de los países del mundo con la particularidad de que las vivencias del maltrato son enormemente parecidas en todos los lugares y culturas.
7	Es un tipo de violencia física o psicológica ejercida contra una persona sobre la base de su sexo o género que impacta de manera negativa su entidad y bienestar social, físico o psicológico La violencia de género es un problema que puede concluir asaltos o violaciones.
8	En nuestro país tenemos un gran porcentaje de violencia, ya que existe mucha discriminación. -Verbal -Psicológica -Física
9	
10	
11	
12	Es aquella violencia que desprende del hecho mismo de ser mujer o de ser hombre dirigida de un género hacia el otro. Cualquier acción o conducta basada en su género que cause muerte, daño o sufrimiento físico, sexual, psicológico tanto en el ámbito público como en el privado.
14	

Estudiante	Violencia de género
15	Lo que entendí sobre el tema es que en este caso se maltrata psicológicamente y físicamente en un género determinado, en este caso el género femenino. Por eso años atrás, por los 60's, surgieron grupos feministas, los cuales se encargaban de defender a la mujer. En la actualidad existen organizaciones que protegen y defienden a la mujer.
18	
19	
20	
21	Es aquella que se le llama discriminación hacia la mujer, hombre u otros, y son actos físicos, psicológicos, hablados que se le hacen a una persona.
22	En nuestro país tenemos un gran porcentaje de violencia, ya que existe mucha discriminación. -Verbal -Psicológica -Física
23	Lo que entiendo por violencia de género es que se maltrata y violenta a un género definido, en este caso es el género femenino y se le violenta físicamente, verbalmente y o psicológicamente y por tal motivos en los años 60 nuevos grupos feministas fueron creados para defender los derechos de las mujeres.
24	
26	Según el artículo yo entiendo que la violencia de género es cuando un sector de la sociedad afecta o daña tanto física como emocionalmente. Tipos: -Violencia física -Violencia psicológica (insultos, humillaciones, rechazo, etc.). -Social (aislar a alguien de un grupo o sector social) -Violencia sexual (se da en una pareja, obligando a tu pareja a tener relaciones sin que esté de acuerdo). Asimismo los causantes de este tipo de violencia somos nosotros mismos debido a que muchos tienen ideologías o prejuicios un poco erróneos.
27	
28	Hay mucha violencia del hombre hacia la mujer, la violencia de género forma un cuerpo con las injusticias estructurales y llega alimentar la lógica de una violenta y tenemos que llegar a cambiar de uno a otros nos llevemos bien de forma natural donde no se encuentre mucha violencia. La violencia llega a representar muchas cosas a la vez. El hombre individual ejerce poder tener relaciones sexuales. La violencia de una sociedad globalizada nos empuja irrimisiblemente hacia la competencia y el individualista a ultranza.
29	
30	
31	

Tabla 38. Comentarios a las tareas de los estudiantes en el libro de texto.

Estudiante	Ejercicio no. 18	Ejercicio no. 19	Ejercicio no. 20	Ejercicio no. 21
1	Se apoya en la cuadrícula y utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la medida de un lado del triángulo, el cual asume que es la altura; sin embargo, no parece darse cuenta que dicho lado no necesariamente forma un ángulo recto con lo que él supone que es la base. Identifica correctamente el radio, la tangente, la cuerda y la secante, no así el diámetro.	Solamente acierta a $x^2 + y^2 = 1$.	Identifica como circunferencias los numerales 1 y 2. En el primer caso argumenta “No se mueve el centro del origen, sin radio”. No hace alusión a que, en realidad, se trata del punto $C(h, k)$. En el segundo caso acierta: “Si las coordenadas del centro de la circunferencia son (3, 2), sí se quedaría en el origen con radio 3”.	Contesta correctamente todos los ejercicios.
2	No lo hizo.	No lo hizo.	Identifica como circunferencia solamente la primera: “Es la uno ya que el radio es de cero y queda en el origen”. No hace alusión a que el centro de la circunferencia que él identifica es $C(h, k)$. No reconoce que la segunda ecuación corresponde a una circunferencia.	Solamente tiene un error. Dado el centro $C(2,1)$ y el radio $r = 3$ escribe como ecuación $(x-2)^2 + (y)^2 = 9$. El resto de sus resultados es correcto.
3	Obtiene la medida de los lados del triángulo a partir de la distancia entre dos puntos; sin embargo, no utiliza las medidas correctas para calcular el área, además de que no determina correctamente la altura del triángulo. Tiene problemas en la identificación de las coordenadas de los puntos en el plano. Identifica correctamente la tangente, la cuerda, el diámetro y la secante, pero no el radio.	Sus respuestas fueron incorrectas en todos los ejercicios.	Identifica como circunferencias los numerales 1 y 2. En el primer caso, considera que el centro de la circunferencia está en el origen (por la gráfica que incluye) y argumenta: “Cuando la ecuación está representado en el plano cartesiano”. Para la segunda ecuación indica “La ecuación más completa que las demás”. Comenta acertadamente que los otros dos casos corresponden a una parábola.	Todos sus resultados son correctos. Sin embargo, en la ecuación tiende a incluir una raíz en el segundo miembro, presumiblemente para de ahí comprobar el valor del radio; en el radio escribe un cuadrado.
4	Identifica correctamente todos los segmentos y rectas relacionadas con la circunferencia de la imagen. No calcula el área del triángulo.	Solamente acierta a $x^2 + y^2 = 4$.	No lo hizo.	No lo hizo.

Estudiante	Ejercicio no. 18	Ejercicio no. 19	Ejercicio no. 20	Ejercicio no. 21
5	Se apoya en la cuadrícula y utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la medida de un lado del triángulo, el cual asume que es la altura; sin embargo, no parece considerar que dicho lado no necesariamente forma un ángulo recto con lo que él supone que es la base. Identifica correctamente el radio, la tangente, la cuerda y la secante, no así el diámetro.	No lo hizo.	Identifica como circunferencias los numerales 1 y 2. Solamente en el primer caso argumenta: "No se mueve y no tiene coordenadas y su radio es 0"	No lo hizo.
6	Identifica correctamente todos los segmentos y rectas relacionadas con la circunferencia de la imagen, excepto el radio. No calcula el área del triángulo.	Solamente acierta a $x^2 + y^2 = 1$.	En el primer caso argumenta que "No es circunferencia, es solo un punto". Identifica correctamente como circunferencia el segundo numeral: "Es la que forma la circunferencia".	Tiene un resultado incorrecto en los siguientes casos (el resto es correcto): $C(0,3), r = 7, x^2 + 3 = 49$ $C(2,4), r = 4, x^2 + y^2 = 16$ $C(2,1), r = 3, x^2 + y^2 = 9$
7	No lo hizo.	No lo hizo.	Identifica como circunferencia la primera ecuación: "Es la primera porque sus coordenadas no se mueven y quedan en el origen". Sin embargo, no ubica que en realidad se trata del punto $C(h,k)$. Tampoco identifica que la segunda ecuación del ejercicio corresponde a una circunferencia.	Contesta correctamente todos los ejercicios.
8	No lo hizo.	No lo hizo.	Identifica solamente la segunda ecuación como correspondiente a una circunferencia, sin argumentar.	Solamente tiene un error. Dado el centro $C(2,1)$ y el radio $r = 3$ escribe como ecuación $(x-2)^2 + (y)^2 = 9$.
9	Identifica correctamente todos los segmentos y rectas relacionadas con la circunferencia de la imagen, excepto el radio. No calcula el área del triángulo.	No lo hizo.	No lo hizo.	N lo hizo.

Estudiante	Ejercicio no. 18	Ejercicio no. 19	Ejercicio no. 20	Ejercicio no. 21
10	No calcula el área del triángulo. Responde el ejercicio correspondiente a las rectas y segmentos relacionados con la circunferencia, pero solamente utiliza la letra que simboliza a uno de los puntos por donde pasan esos elementos.	Solamente acierta a $x^2+y^2=1$, aunque la misma gráfica la asocia a otro paréntesis.	No lo hizo	Tiene un resultado incorrecto en los siguientes casos (el resto no tiene error): $C(0,3), r=7, x^2+3=49$ Dada la ecuación $(x-7)^2+(y+10)^2=100$ indica que el centro está en las coordenadas $(7,10)$. Dada la ecuación $(x+2)^2+(y+1)^2=5$ indica que el centro está en las coordenadas $(2,1)$. Dada la ecuación $(x+2)^2+(y-3)^2=5$ indica que el centro está en las coordenadas $(2,3)$. Sin embargo, en $(x-9)^2+(y-3)^2=32$ indica correctamente el centro en $C(9,3)$.
11	No lo hizo.	No lo hizo.	Identifica como circunferencia solamente la primera: "La número uno ya que el radio es cero y queda en el origen". No hace alusión a que el centro de la circunferencia que identifica es $C(h,k)$. No reconoce que la segunda ecuación corresponde a una circunferencia.	Solamente tiene un error. Dado el centro $C(2,1)$ y el radio $r=3$ escribe como ecuación $(x-2)^2+(y)^2=9$.
12	No identifica correctamente el radio, sino que señala el centro; confunde la secante con la cuerda. No registra desarrollo para calcular el área del triágulo.	En todos los casos sus respuestas son incorrectas.	En la primera ecuación argumenta "solo sería un punto en el origen"; no escribe que en realidad el punto en cuestión sería $C(h,k)$. En la segunda ecuación, que corresponde a una circunferencia, hace un trabajo algebraico en el que cambia los signos dentro de los binomios y luego desarrolla los cuadrados incorrectamente: De $(x-3)^2+(y-2)^2=9$ sigue con $(x+3)^2+(y+2)^2=9$ $(x+9)+(y+4)=9$	Manifiesta varios errores: no eleva el radio al cuadrado al escribir la ecuación. Dada la ecuación no es capaz de identificar coordenadas negativas para el centro, es decir, siempre las escribe positivas. Dada una ecuación que representa a una circunferencia con centro en el origen, escribe que las coordenadas del centro son $C(1,1)$.
14	No lo hizo.	No lo hizo.	Identifica como circunferencia solamente la primera: "La número uno porque el radio es cero y queda en el origen". No hace alusión a que el centro de la circunferencia que identifica es $C(h,k)$. No reconoce que la segunda ecuación corresponde a una circunferencia.	Solamente tiene un error. Dado el centro $C(2,1)$ y el radio $r=3$ escribe como ecuación $(x-2)^2+(y)^2=9$.
15	Midió con regla los lados del triángulo, pero no calculó el área. Identifica correctamente las rectas y segmentos de recta presentados en la figura.	Identifica correctamente las circunferencias representadas por las ecuaciones $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$	Indica que los numerales 1, 3 y 4 no son circunferencias. Argumenta que la segunda ecuación sí es una circunferencia que "No da exactamente en el centro".	En el ejercicio con $C(0,0)$ y radio $r=12$ escribe la ecuación $x^2+y^2=3.46$, es decir, incorpora en esta la raíz del radio en lugar de su cuadrado. El resto es correcto.

Estudiante	Ejercicio no. 18	Ejercicio no. 19	Ejercicio no. 20	Ejercicio no. 21
18	No lo hizo.	No lo hizo.	No lo hizo.	No lo hizo.
19	Se apoya en la cuadrícula y utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la medida de un lado del triángulo, el cual asume que es la altura; sin embargo, no parece darse cuenta que dicho lado no necesariamente forma un ángulo recto con lo que él supone que es la base. No responde la parte correspondiente a rectas y segmentos.	Identifica correctamente la circunferencia que corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, sin embargo, considera que también es correcta la ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$.	No lo hizo.	No lo hizo.
20	No lo hizo.	No lo hizo.	Indica que la primera ecuación corresponde a una circunferencia: “No se mueve del centro del origen”; no hace alusión a que se trata del punto $C(h, k)$. La segunda ecuación también la identifica como una circunferencia, incluso localiza su centro y radio: “Sí las coordenadas del centro de la circunferencia son $(3, 2)$ Si quedaría en el origen con radio 3”.	En la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ no indica su centro ni su radio. Dado el centro $C(2, 4)$ y el radio $r = 4$, escribe la ecuación $(x-2)^2 + (y-11)^2 = 16$. El resto de los ejercicios tiene respuesta correcta.
21	No lo hizo.	No lo hizo.	No lo hizo.	No lo hizo.
22	No lo hizo.	No lo hizo.	Solamente señala la segunda ecuación como representación de una circunferencia, pero no argumenta.	Solamente tiene un error. Dado el centro $C(2, 1)$ y el radio $r = 3$ escribe como ecuación $(x-2)^2 + (y)^2 = 9$.
23	Midió con regla los lados del triángulo, pero no calculó el área. Identifica correctamente las rectas y segmentos de recta presentados en la figura.	Identifica correctamente las circunferencias representadas por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ y $9x^2 + 9y^2 = 25$. No contestó los otros incisos.	Indica en los numerales 1, 3 y 4 “No es circunferencia”. En el caso de la segunda ecuación escribe “Sí es”.	Respondió todo el ejercicio acertadamente, excepto porque en la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ no indica las coordenadas del centro.
24	No lo hizo.	No lo hizo.	Subrayó la segunda ecuación, sin argumentar.	En las ecuaciones $(x-7)^2 + (y+10)^2 = 100$ y $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$ no determina correctamente el signo para las coordenadas del centro; sin embargo, no manifiesta el mismo error en $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 39$. Destaca que él sí usa números radicales para identificar el radio de las circunferencias, en lugar de decimales, como el resto de los estudiantes.

Estudiante	Ejercicio no. 18	Ejercicio no. 19	Ejercicio no. 20	Ejercicio no. 21
26	Identifica correctamente con colores las rectas y segmentos mostrados en la figura. Da como resultado de la altura un valor de 3, pero no hay desarrollo ni calcula el área solicitada.	Tomó en cuenta todas las circunferencias para el ejercicio, lo cual no había realizado algún otro estudiante, pero no acertó a una sola de las respuestas.	Encierra en un recuadro la segunda ecuación. Se ve que borró el recuadro que había hecho para la primera ecuación.	Responde todo el ejercicio. Se observan errores en los siguientes casos: en la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, indica el centro $C(2,4)$; dados los datos $C(0,3), r = 7$, escribe la ecuación $y^2 + 3^2 = 49$; dados los datos $C(2,4), r = 4$, escribe $2^2 + 3^2 = 16$; con $C(2,1), r = 3$, da como ecuación $2^2 + 1^2 = 9$. En todos los casos que implican coordenadas negativas del centro, las escribe positivas.
27	Identifica correctamente todos los segmentos y rectas relacionadas con la circunferencia de la imagen. No calcula el área del triángulo.	No lo hizo.	En la primera ecuación indica: “No es circunferencias”. En la segunda dice “Correcto”. En las dos ecuaciones restantes señala “Son parábolas”.	En toda la primera columna de ejercicios tiene mal los signos, ya sea al escribir la ecuación o bien al identificar las coordenadas del centro. En la segunda hilera manifiesta un problema similar, pero ya solamente con las coordenadas negativas.
28	Identifica correctamente el radio, la tangente, la cuerda y la secante; el diámetro solamente lo denota con la letra que nombra al centro de la circunferencia. No calcula el área del triángulo.	Solamente responde los incisos correspondientes a las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$, pero invierte los resultados.	En la primera ecuación argumenta: “Es la ecuación para encontrar un punto en el plano”. En la segunda ecuación “Es la más completa que las demás”. En los dos casos restantes escribe “Forma parábola”.	Resuelve correctamente todo el ejercicio.
29	No lo hizo.	No lo hizo.	En su tarea solamente aparece subrayada la segunda ecuación.	Resuelve correctamente todo el ejercicio.
30	Identifica correctamente todos los segmentos y rectas relacionadas con la circunferencia de la imagen. No calcula el área del triángulo.	Considera que la misma circunferencia puede representarse por $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$. Llenó los otros incisos sin considerar las gráficas de la segunda hoja del ejercicio, por ello ya no tuvo respuestas correctas.	En la primera ecuación argumenta: “Es la ecuación para encontrar un punto en el plano”. En la segunda ecuación “Que está la más completa que las otra”. En los dos casos restantes escribe “Forma una parábola”.	Resuelve correctamente todo el ejercicio. Utiliza radicales para indicar radios cuando el miembro derecho de la ecuación de la circunferencia no tiene raíz exacta.
31	Identifica correctamente todos los segmentos y rectas relacionadas con la circunferencia de la imagen, excepto el radio. No calcula el área del triángulo.	No lo hizo.	Solamente subraya la segunda ecuación; luego intenta graficarla, pero coloca su centro incorrectamente en las coordenadas $C(-3,-2)$.	En la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina que el centro es $C(2,4)$. En todos los casos que implican coordenadas negativas del centro, las escribe positivas.

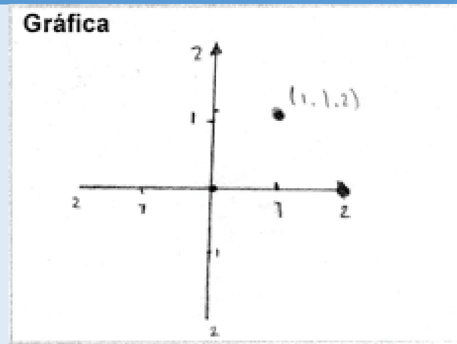
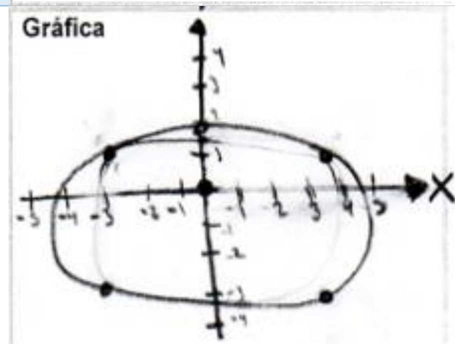
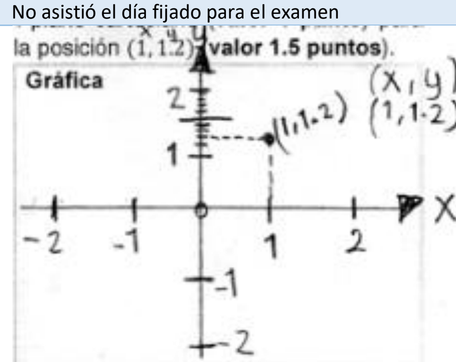
Tabla 39. Respuestas a las preguntas de seguimiento al aprendizaje.

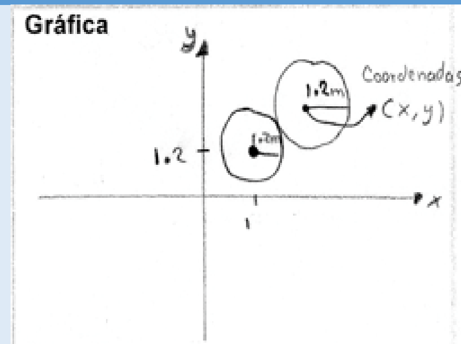
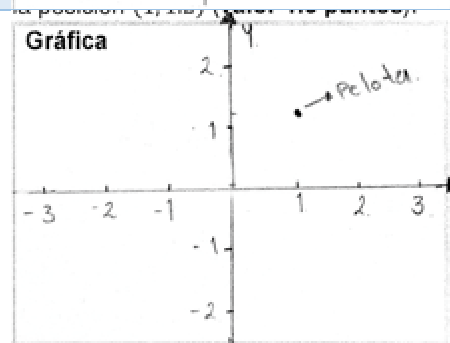
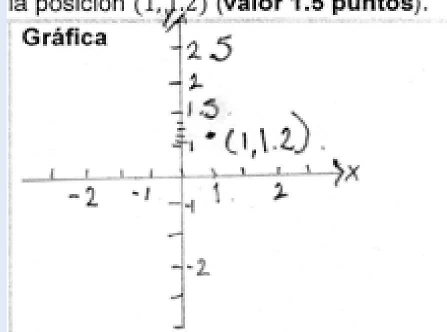
Estudiante	¿Qué quiero aprender sobre circunferencia?	¿Cómo lo voy a aprender?	¿Qué no entendí de la clase?	¿Qué estrategia emplearé para entenderlo?	¿Estoy dando seguimiento a las estrategias que he planteado para mejorar la comprensión de los temas?	En caso contrario, ¿tengo la disponibilidad de hacerlo desde ahora?
1	Todas las propiedades de las circunferencias	Poniendo atención y pensando con problemas para así llevar mi aprendizaje				
2					Sí le he puesto más atención a las clases	Sí poner más atención
3	Aprender que una circunferencia, cuáles son cada uno de sus elementos, clasificación de cada ángulo que lo conforma, también saber cómo se calcula cada parte de él.	-Utilizando técnicas -Uso de la circunferencia en la vida cotidiana -Practicando -Poniendo en práctica y resolviendo problemas			No, todas las ocasiones	Sí.
4			Respecto a los 2 puntos no comprendí bien así que calcúlele el medio.	Primero interpretarlo bien, y segunda saber las [ininteligible].	Más o menos porque no tengo algunas ideas al 100% claro que va por procesos.	Sí porque me interesa aprender y desarrollar los temas bien.
5	Quiero lograr a fortalecer mis conocimientos acerca de la circunferencia y sus derivados para poder así comprender y analizar problemas relativos que yo ni siquiera sabía que se ocupaban en la vida cotidiana	Con esfuerzo y dedicación al trabajo y con mucha atención en la clase.			Sí, bastante	Pues creo que sí
6	Me gustaría aprender el cómo se mide, qué función tiene cómo se podría meter la circunferencia en problemas matemáticos.	Poniendo atención en la clase, asimismo planteándole mis dudas al profesor respecto al tema	El cómo usar las apps.	Ponerle más atención y preguntaré mis dudas.	Sí.	Sí
7	Sacar toda su fórmula completa.	Poniendo investigación, conocimiento y atención.				
8	Cómo obtener el área de la circunferencia y cómo hacer la ecuación	Escuchando al profesor y cumpliendo con trabajos				

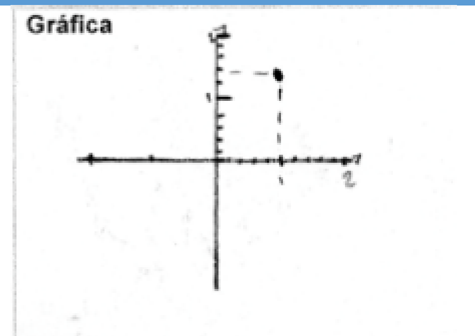
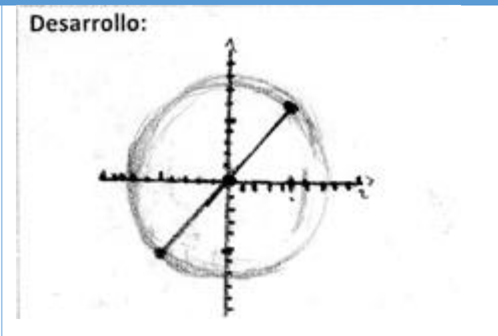
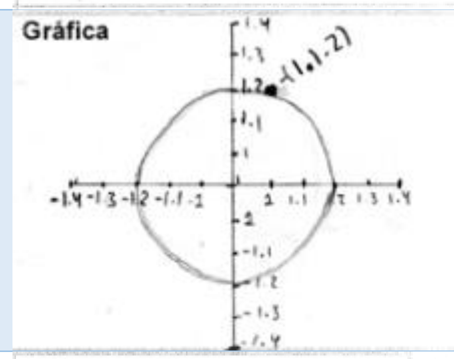
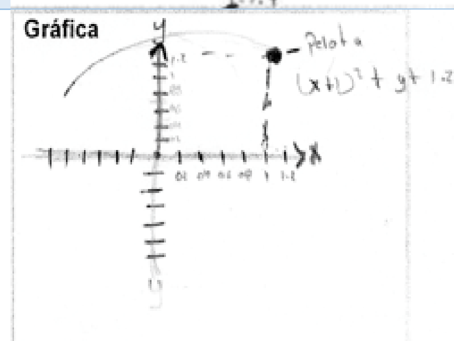
Estudiante	¿Qué quiero aprender sobre circunferencia?	¿Cómo lo voy a aprender?	¿Qué no entendí de la clase?	¿Qué estrategia emplearé para entenderlo?	¿Estoy dando seguimiento a las estrategias que he planteado para mejorar la comprensión de los temas?	En caso contrario, ¿tengo la disponibilidad de hacerlo desde ahora?
9	Quiero saber cómo se calculan sus grados sus propiedades y todo lo que la integra	Investigando, preguntando con quien sí sabe	Cómo encontrar la relación si solo se nos da la ecuación y el círculo pero no las coordenadas	Buscar información en libros, internet o pedirle a alguien que me ayude		
10						
11						
12	Sacar una circunferencia y qué es.	Haciendo con mi propio aprendizaje.	Cómo sacar la ecuación.	Hacer mi aprendizaje por mí misma.	Sí.	Sí.
14						
15	Qué es, sus propiedades, sus características y todas sus medidas	Investigando, preguntando al profesor, viendo videos.				
18						
19						
20						
21	Quiero saberla utilizar tanto en mi vida diaria y saber su origen, etc.	Investigando sobre ella y reforzando el procedimiento				
22	Cómo obtener el área de la circunferencia y cómo hacer la ecuación	Escuchando al profesor y cumpliendo con trabajos				
23	Lo que quiero aprender es qué es una circunferencia	Investigando y planteándome problemas y si es necesario pedir ayuda al profesor				
24						
26	Cómo obtener su ecuación, conocer más a fondo las partes o elementos que lo conforman así como resolver problemas en los que se involucre.	Poniendo atención, investigando.	Cómo encontrar la relación si solo se nos da la ecuación y el círculo pero no las coordenadas	Buscar información en internet –(libros, enciclopedias) o pedirle al maestro que me explique		
27					Sí	Sí x que al poner atención se me es más sencillo
28	De cómo poder sacar las fórmulas para calcular la longitud de un perímetro de círculo.	Con ayuda del profesor y trabajos en clase.	Cómo sacar una relación entre la distancia del punto Penal hacia donde está el futbolista.	Realizando más ejercicios con ayuda del profesor.	Sí, para poder mejorar todas mis dudas.	Sí con la ayuda del profesor.
29						

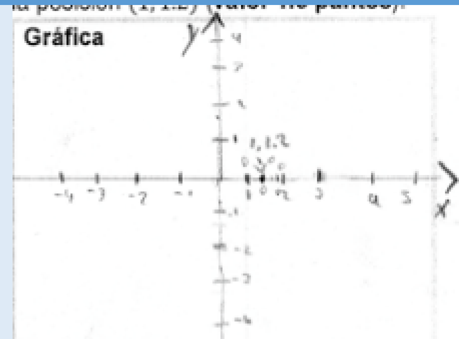
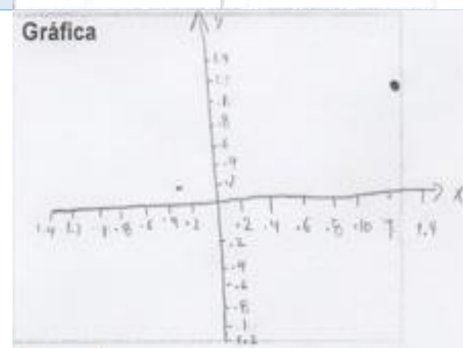
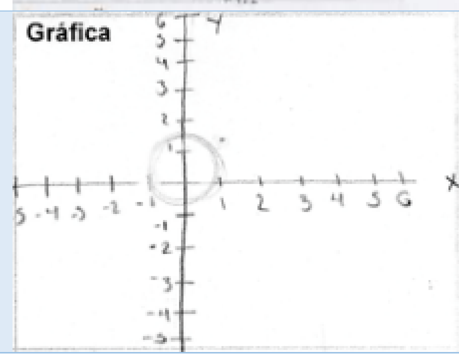
Estudiante	¿Qué quiero aprender sobre circunferencia?	¿Cómo lo voy a aprender?	¿Qué no entendí de la clase?	¿Qué estrategia emplearé para entenderlo?	¿Estoy dando seguimiento a las estrategias que he planteado para mejorar la comprensión de los temas?	En caso contrario, ¿tengo la disponibilidad de hacerlo desde ahora?
30	Am pues todo	Poniendo atención.	Am pues de donde saco las "y" bueno no entendí como utilizo para sacarlas	Preguntando al maestro.		
31	Saber su distancia al dividir un círculo Calcular fácilmente su r y su distancia Si fuera así cómo sacar la circunferencia	Poniendo atención, con ejercicios claros que no estén tan confusos.	Las preguntas que vienen en el cuadernillo luego son un poco confusas	Preguntar y tener una respuesta buena	Sí porque hago los ejercicios que son extraclase	Más bien seguirlo haciendo

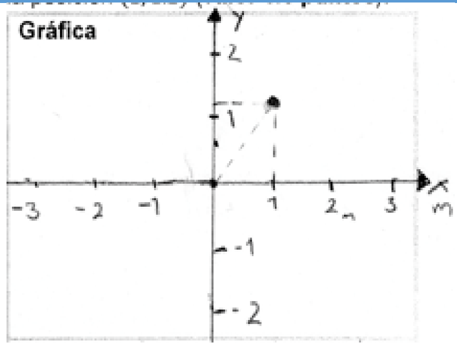
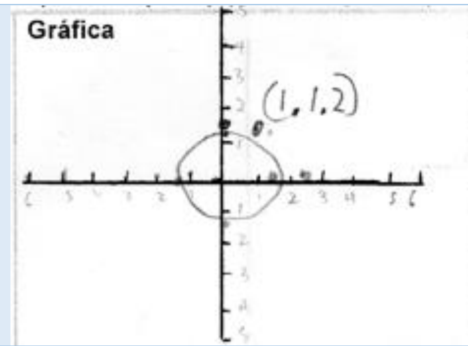
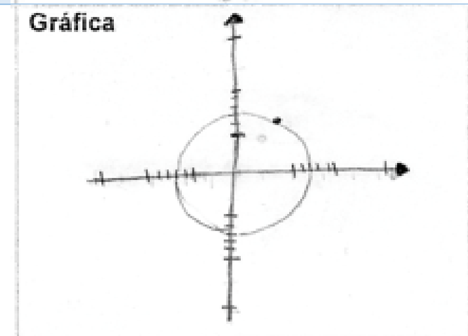
Tabla 40. Respuestas de los estudiantes al examen del tema.

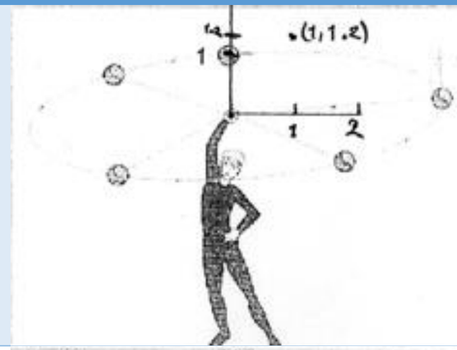
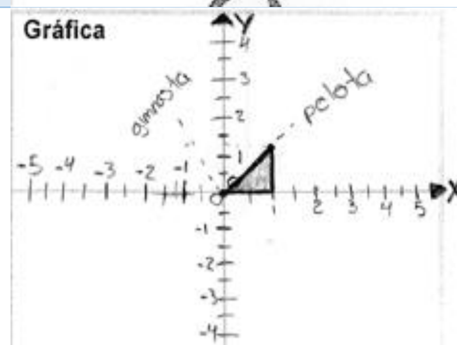
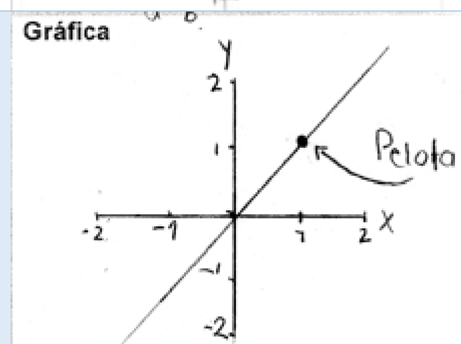
Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
1	a	Solo se baja en y tres posiciones para que el centro de la circunferencia quede en el origen. en x no se mueve. Busco lo opuesto a las coordenadas del centro	No		**Desarrollo:** $\sqrt{(1)^2+(1.2)^2}$ $= 1.56$ El radio siempre debe de ser de 1.2 y este se pasa a sí que la pelota no se ubica en esa posición
2	b	Porque en x^2 no se mueve y del origen al centro de la circunferencia se mueve 3 posiciones hacia arriba y el radio es igual a cuatro	No		**Desarrollo:** no se puede ubicar es más se ubicaria en 1, 1.5 ¿
3	No asistió el día fijado para el examen				
4	a	**Argumentación:** $R = x^2+(y-3)^2 = 4$ porque la posición en la que esta tuvo que ser jalado el círculo al la inversa, para que dar ubicado en ese cuadrante. y(x) queda en un coadrante céntrico.	Sí		**Desarrollo:** Si porque te esta dando los datos que se necesita para Graficar en el plano cartesiano, y como referencia hacemos de cuenta que el punto de partida (o) es la gimnasta y ese punto es en uno de los que queda la pelota al Girarla.

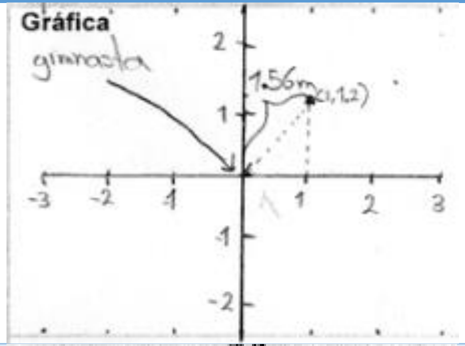
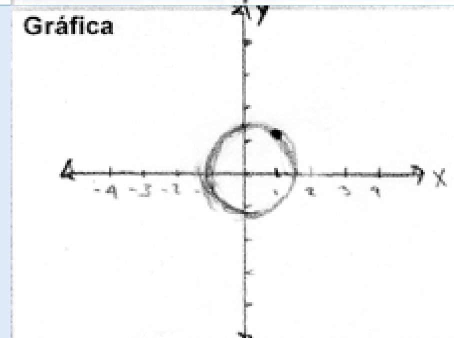
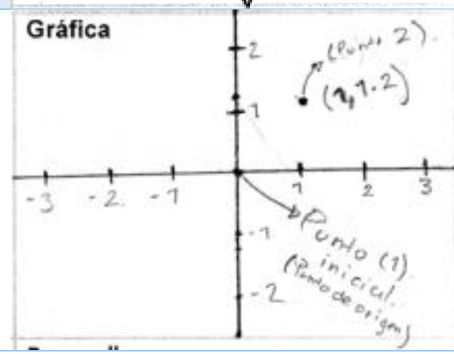
Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
5	a	Es el inciso a) porque el origen tiene como coordenadas (0,3) y todo 2 y por logica en el eje de los "x" no se mueve y en el eje de los "y" esta en 3 y siguiendo la regla de la ecuación todo número que sea positivo, se cambia a lo contrario "negativo"	Sí		Desarrollo: $(x-1)^2+(y-1.2)^2=1.44$
6	a	Yo elegí el inciso a porque la circunferencia está en la parte de arriba, entonces se le tiene que restar en el eje de las Y para que el punto de la circunferencia est el	No		Desarrollo: No se puede, ya que la pelota esta más retirada de las cordenadas (1,1.2)
7	a	Porque al ubicar la incógnita (y) y cambiar los signos el centro de la circunferencia queda con el inciso a). y me imaginé que desde ahí se forma la circunferencia.	No		Desarrollo: NO. Porque al girar el lazo las pelotas llevan cierta distancia pero si las pelotas cuando están dando la vuelta másomenos lo más cerca que pasarían sería (1,1.5) no podrían acercarse más a un punto ubicado en el plano.

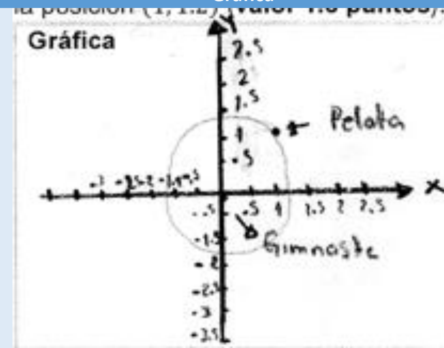
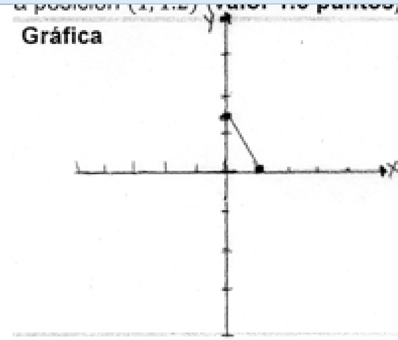
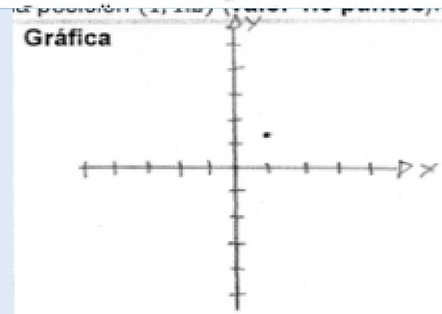
Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
8	c	Ami pareser es la tercera ecuacion que nos presentar por los signos que tiene y porque esta elevada al 2 al desarrollar la ecuacion da como resultado la circunferencia del circulo	Sí	Gráfica 	Desarrollo: 
9	a	Abanzamos (x) veces a la izquierda y despues abansamos (y-3) que se convierte en positivo y esto nos da 4 de radio ? $x: 1^2 = 2$ $6-2 = 4$ radio $y: 3^2 = 6$	Sí	Gráfica 	Desarrollo: Si por que abanzamos 1 vez en (x) y 1.2 veces en (y) entonces hay una continuación de lo que giro la pelota
10	a	Pues sería el inciso a ya que la cordenada en x no se mueve y se recorre 3 en el eje de las 'y' y solo se invirtieron los signos y el todo es 2 que elevado al cuadrado es cuatro	No	Gráfica 	Desarrollo: no Por que la longitud de 1.2 Pe encajaria en la cordenada 1, 1.2 ya que esta en la circunferencia y Pase Por una de las 3 Puntos que se muestra en la imagen y ademas solo

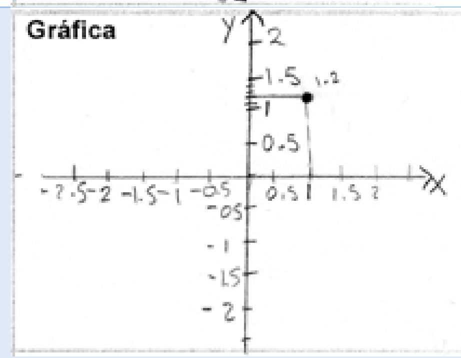
Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
11	a	Su ubicación es positiva y para llegar al centro tendría que ser negativa y ubicar su punto de origen. Y es cero.	No		No se puede ubicar porque al momento que giro ya sea que aumente más o disminuya y no estaría en un punto exacto en la posición que se pide
12	a	Por que solo el círculo se movió en los lados de Y y para llegamos en el lado X y para que llegue al origen necesitamos recorrer la 3 posiciones en el lado y que sería restarle 3 posiciones al lado y	Sí		Desarrollo: Si trazamos un plano cartesiano y ubicamos las cordenadas (1, 1.2) podemos ver que así el que está girando la rueda y cuando una pequeña pelota toca puede llegar al origen a la hora de estaría girando y ahí estaría llegando al punto de origen o centro
14	b				

Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
15	a	**Argumentación:** Es la correcta debido a que para que el centro concuerde en el origen se le debe restar a Y, 3 unidades y a x ninguna, ya que en x no se recorrió hacia ningún sentido	No		**Desarrollo:** No, porque el gimnasta bueno su mano que sostiene el lazo es el origen y por lo tanto la distancia que hay hasta la pelota es de 1.2m, que es su rad si se gira forma una circunferencia de 2.4m, por lo tanto siempre girar a una distancia de 1.2m d origen, y no es posible que en u se acorte 20cm. las coordenad
18	c	por que del origen hacia x es -3 y la y^2 y el 4 es lo que mide el circulo	No		**Desarrollo:** No por que del Punto de origen forma una circunferencia de 1.2 m no puede estar en las Coordenadas 1, 1.2
19	a	La circunferencia está ubicada en posición al origen lo cual hace que se tenga que reducir 3 veces en y, con el mismo radio de 4			**Desarrollo:** Al girar el lazo con la pelota llevo la misma longitud lo cual no hace que cambie la distancia a lo que va y con el plano se ve que puede pasar en (1, 1.2). El radio siempre debe ser de 1.2 pero al comprobarlo el radio se pasa

Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
20	a	Para Xubicarlo en el centro se debe hacer lo contrario como en este caso están 3 en las lo contrario es -3 para que se Xubique en el centro	No		**Desarrollo:** Porque al Xubicarse en ese punto queda fuera de el alcance de la pelota como se puede observar en la grafica
21	a	el círculo se tiene que salar al origen que es 0 en (x)&(y), en el eje de las (x) no se mueve y en el eje de las (y) se mueve 3 posiciones hacia arriba así que es, – y su circunferencia es de 2 así que es	No		**Desarrollo:** $C=\sqrt{a^2+b^2}$ $C=\sqrt{(1)^2+(1.2)^2}$ $C=\sqrt{1+1.44}$ $C=\sqrt{2.44}$ C 1.56 No, porque el brazo cambiaría de longitud, ya no sería 1.2 sino, de 1.56
22	a	Por que el centro es 3 y su radio es 2. y cumple con las caracteristicas. y no se mueve en el eje de las X.	No		**Desarrollo:** $C=(a+b^2)$ $C=(1.2+(1.2)^2$ $C=2.6$ No se encuentra en la posicion. Por que esta esta en 2.6.

Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
23	a	para mover el centro de la circunferencia al origen hay que restarle 3 al valor de y y a X hay que dejarla tal cual y sus nuevas cordenadas del centro de la circunferencia serian (0,0)	No		**Desarrollo:** No se puede ubicar en ese punto ya que que la longitud alcanzada del origen al punto es de 1.56 m lo cual no concuerda con la longitud de la cuerda que tiene la gimnasta que es de 1.2.
24	c	c) $(x-3)^2+y^2=4$ $(0-3)^2+2^2=4$	No		Porque si el gimnasta está en el punto de origen, la pelota esta girando en circulo, pero si mide 1.2 m el lazo se pasaría del punto (1, 1.2) y tiene que ser parejo el punto como por ejemplo (1,1) o (2,2)
26	a	Porque tiene un radio de 2 (elevado al cuadrado es igual a cuatro) y porque su centro se ubica en 3 en el eje de las "y"	Sí		**Desarrollo:** Si se puede, recorriendo los mismos puntos tanto en el eje de las "x" como en el de las "y" (como en el ejercicio que hicimos en la clase que hablaba de la cancha) $X^2-Y^2=r^2-1.2$

Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
27	a	Es la ecuacion a por que la circunferencia Solo se mueve en el eje Y y el centro del circulo esté ubicado en el 3 por lo cual tiene una cordenada de 3. Y deacuerdo con la regla tiene que ser contrario es decir si tengo 3 debo poner en la ecuación -3 a un lazo de 1.2 metros de longitud, como n plano cartesiano (valor 1 punto) para	No		Desarrollo: No por que al girar la pelota tiene una distancia de 1.2 m y en las cordenadas yo los represente como metros y el eje Y si tiene el. 1.2 y el x no solo tiene 1. Asi que tiene que tener la cordenada x = 1.2 para poder hacer la circunferencia.
28	a	Mi respuesta fue la primera por que es la que coincide más, y yo lo que hice fue intercambiar signos para que me diera, por decir X no recorrió pero y esta como y-3 le paso al signo positivo para que nos de para arriba.	Sí		La pelota si coincide con la grafica que realice queda en el centro para tomar los demas.
29	b	Porque el eje de la "x" no se mueve y la "y" nesesita que le este 3 para que el punto quede en el origen	No		Desarrollo: Porque al hacer el plano cartesiano no se ubica la pelota.

Estudiante	1	Argumentación	2	Gráfica	Desarrollo
30	a	Pues yo digo que es ahí por que en x no tiene número que sería el centro o el origen, y "y" que tiene el número 3 como representación en negativo en la ecuación, pero en en plano lo tenemos que deslizar al ma osea que se vuelve lo contrario (-)·(a un lazo de 1.2 metros de longitud, como (+) = (-).	No		**Desarrollo:** No queda porque no podría ubicarse en los dos lados por lo mismo que esta olanto
31	b	El punto que se podría decir que es el radio esta ubicado en el eje de las "y" y se podría decir que su coordenada es (Y,3) ya que tambien es positiva, y en el eje de las "x" pues no tiene coordenada entonces su ecuacion seria	No		**Desarrollo:** La pelota al girar puede ubicarse en la coordenada (1,1.2) pero no puede mantener su ubicacion en esa coordenada y que puede pasar por los negativos ~~hace~~ que no se mantiene su ubicacion. No por que el radio siempre Siempre va a ser 1.2 y en ese caso la pelota girando no mantiene el mismo radio.

Trabajos citados

Acuña Soto, C. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación.* México: Gedisa.

Alcántara, A., & Zorrilla, J. F. (2010). Globalización y educación media superior en México: En busca de la pertinencia curricular. *Perfiles Educativos, 32*(127), 38-57. Recuperado el 18 de septiembre de 2015, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982010000100003

Álvarez, J. J. (marzo, 2010). Características del desarrollo psicológico de los adolescentes. *Revista digital innovación y experiencias educativas*(28). Recuperado el 29 de agosto de 2015, de http://www.csicsif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_28/JUANA_MARIA_ALVAREZ_JIMENEZ_01.pdf

Ausubel, D. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo.* Recuperado el 13 de febrero de 2015, de http://www.delegación233.bligoo.mx/media/users/20/1002571/files/240726/Aprendizaje_significativo.pdf

Bachelard, G. (2000). La formación del espíritu científico. Siglo XXI. Recuperado el 1 de agosto de 2016, de http://metodos-avanzados.sociales.uba.ar/files/2014/03/Bachelard-Cap-1.pdf

Banchs, M. A. (1996). Violencia de género. *Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura, II*(2), 11-23. Recuperado el 12 de julio de 2016, de http://www.ucv.ve/fileadmin/user_upload/faces/iies/ANALISIS_DE_COYUNTURA_VOLUMEN_II_No_2_JULIO_DICIEMBRE_1996.pdf#page=15

Barbera, E., Baustista, G., Espasa, A., & Guasch, T. (Octubre 2006). Portafolio eletrónico: desarrollo de competencias profesionales en la red. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 3*(2). Recuperado el 18 de julio de 2016, de http://www.redalyc.org/html/780/78030212/

Barra, E. (1987). El desarrollo moral: una introducción a la teoría de Kohlberg. *Revista Latinoamericana de Psicología, 19*(1), 7-18. Recuperado el 3 de septiembre de 2015, de http://www.redalyc.org/pdf/805/80519101.pdf

Bordignon, N. (julio-diciembre 2005). El desarrollo psicosocial de Eric Erikson. El diagrama epigenético del adulto. *Revista Lasallista de Investigación, 2*(2). Recuperado el 2015 de agosto de 31, de http://www.redalyc.org/pdf/695/69520210.pdf

Botia, A. B. (1993). "Conocimiento didáctico del contenido" y formación del profesorado: el programa de L. Shulman. *Revista Interuniversitaria de formación del Profesorado*(16), 113-124. Recuperado el 16 de julio de 2016, de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/286602.pdf

Bustamante, Y. (2014). La educación media superior en México. Introducción al número especial. *Innovación Educativa, 14*(64), 11-22. Recuperado el 17 de septiembre de 2015, de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4770847.pdf

Carmona, J. W. (2011). *La circunferencia: una propuesta didáctica usando el modelo de Van Hiele y geometría dinámica.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 2 de agosto de 2016, de http://www.bdigital.unal.edu.co/8855/

Carretero, M. (1997). ¿Qué es el constructivismo? En M. Carretero, *Constructivismo y educación* (págs. 39-71). México: Progreso. Recuperado el 2 de julio de 2017, de http://www.micentroeducativo.pe/docente/fileproject/file_docentes/549bi_2c5224.pdf

Carretero, M., Palacios, J., & Marchesi, A. (1985). *Psicología educativa 3. Adolescencia, madurez y senectud.* Recuperado el 3 de septiembre de 2015, de http://www.terras.edu.ar/biblioteca/6/PE_Carretero_Unidad_4.pdf

Cecytem. (2015). *Historia*. Recuperado el 06 de mayo de 2015, de http://cecytem.edomexico.gob.mx/cecytem/jsp/info/historia.jsp

Cecytem. (2015a). *Historia*. Recuperado el 06 de mayo de 2015, de http://cecytem.edomexico.gob.mx/cecytem/jsp/info/historia.jsp

Cecytem. (2015b). *Técnico en Programación*. Recuperado el 27 de septiembre de 2015, de http://cecytem.edomexico.gob.mx/cecytem/jsp/info/BTCSePr11.jsp

Cecytem. (2015c). *Técnico en Procesos de Gestión Administrativa.* Recuperado el 5 de abril de 2016, de http://cecytem.edomexico.gob.mx/cecytem/jsp/info/TPGA-11.jsp

Contreras, A., Contreras, M., & García, M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*(2), 111-132. Recuperado el 1 de agosto de 2016, de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2147093

Cortés, A. (2002). Implicaciones psicopedagógicas de un desarrollo moral íntegro: la educación holística. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1-13. Recuperado el 24 de julio de 2016, de http://pilaralejandracortespascual.com/articulos/articulo_8.pdf

Cosmología Aristotélica. (2012). Recuperado el 06 de julio de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=1B9htq12w1A

Díaz-Barriga, A. (1993). El examen: un problema de historia y sociedad. En A. Díaz-Barriga, *El examen. Textos para su historia y debate* (págs. 11-28). México: Plaza y Valdés. Recuperado el 18 de julio de 2016, de http://www.angeldiazbarriga.com/capitulos/pdf_capitulos/examen_problema_hist_ysoc.pdf

Díaz-Barriga, A. (2005). El enfoque de competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles educativos, XXVIII*(111), 7-36. Recuperado el 21 de julio de 2016, de http://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v28n111/n111a2.pdf

Díaz-Barriga, Á. (n.d.). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica.* Recuperado el 7 de julio de 2017, de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%

C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Díaz-Barriga, F., & Hernández, G. (2009). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* México: McGraw-Hill. Recuperado el 21 de marzo de 2016, de http://www.facmed.unam.mx/emc/computo/infoedu/modulos/modulo2/material3

Ernest, P. (1994). Variedades de constructivismo, sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2*, 1-14. Recuperado el 16 de septiembre de 2015, de http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotachira/oscarg/materias/epistemologia/lecturas/unidad3/equipo3_Ernest1994_Constructivismo.pdf

Euclides. (1991). *Elementos Libros I-IV.* Madrid: Gredos. Recuperado el 14 de septiembre de 2015, de http://www.ict.edu.mx/acervo_ciencias_mate_Euclides%201%20Elementos-I-IV%20-.pdf

Fabelo, J. R. (2004). *Los valores y sus desafíos actuales.* Libros en red. Recuperado el 7 de mayo de 2016, de http://educarteoax.com/pedagogizando/descargas/otros/los_valores.pdf

Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las ciencias, 23*(2), 217-226. Recuperado el 4 de agosto de 2016, de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v23n2/02124521v23n2p217.pdf

Figueroa, J. L., Perea, G., & Cruz, F. J. (2013). *Módulo de aprendizaje. Geometría Analítica.* México: Asesoría Empresarial, Compra y Venta de Material Didáctico Da' Vinci.

Flores, A. H., & Gómez, A. (2009). Aprender matemática, haciendo matemática: la evaluación en el aula. *Educación matemática, 21*(2), 117-142. Recuperado el 18 de julio de 2016, de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n2/v21n2a5.pdf

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing.* Dordrecht: D. Rei del Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Utrecht: Springer.

Freudenthal, H. (2001). Problemas fundamentales de la educación matemática. *Contactos*(42), 11-22. Recuperado el 10 de febrero de 2016, de http://www.izt.uam.mx/newpage/contactos/anterior/n42ne/lwf1.pdf

Futbolred. (2015). *En video: la evolución de los penaltis en el videojuego Fifa*. Recuperado el 20 de julio de 2016, de http://www.futbolred.com/curiosidades/en-video-la-evolucion-de-los-penaltis-en-el-videojuego-fifa+16025938

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*, 7-34. Recuperado el 16 de julio de 2016, de https://www.researchgate.net/profile/Josep_Gascon2/publication/228769070_Evolucin_de_la_didctica_de_las_matemticas_como_disciplina_cientfica/links/0fcfd5148e6e59241c000000.pdf

Gascón, J. (2002). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático. En *Disertaciones del seminario de matemátias fundamentales* (Vol. 28, págs. 1-21). Barcelona. Recuperado el 1 de agosto de 2016, de https://www.researchgate.net/publication/28290202_Evolucion_de_la_controversia_entre_geometria_sintetica_y_geometria_analitica_un_punto_de_vista_didactico-matematico

Geocentrismo y heliocentrismo. (2010). Recuperado el 06 de julio de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=pAK2t3znuYk

Gil, J. (2007). La evaluación de competencias laborales (Assesment of professional competences). *Educación XX1, 10*, 83-106. Recuperado el 21 de julio de 2016, de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:EducacionXXI-2007numero10-824/Documento.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado el 15 de febrero de 2016, de researchgate.net/profile/Carmen_Batanero/publication/268337542_FUNDAMENTOS_DE_LA_ENSEANZA_Y_EL_APRENDIZAJE_DE_LAS_MATEMTICAS_PARA_MAESTROS_FUNDAMENTOS_DE_LA_ENSEANZA_Y_EL_APRENDIZAJE_DE_LAS_MATEMTICAS_PARA_MAESTROS/links/54a52fcf0cf267bdb9074bf9.pdf

González Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma: revista de matemáticas=matematika aldizcaria*, 205-236. Recuperado el 3 de abril de 2016, de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2529640

González, M. (2001). La evaluación del aprendizaje: tendencias y reflexión crítica. *Educación Médica Superior, 15*(1), 85-96. Recuperado el 29 de marzo de 2016, de http://scielo.sld.cu/pdf/ems/v15n1/ems10101.pdf

Graells, P. (2010). *Los medios didácticos.* Recuperado el 19 de julio de 2016, de http://tic.sepdf.gob.mx/micrositio/micrositio1/docs/materiales_estudio/u3_l3/Los_medios_didacticos.pdf

Gravemeijer, K. (1998). Develomental Research as a Research Method. En A. Sierpinska, & J. Kilpatrick, *An ICMI Study. Book 2.* GB: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent Modelling as a Precursor to Mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* NY: Springer.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (Agosto, 1991). El modelo de razonamiento de van hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los giros. *Educación Matemática, 3*(2), 49-65.

Gutiérrez, L. L. (enero-junio, 2009). El devenir de la educación media superior. El caso del Estado de México. *Tiempo de educar, 10*(19). Recuperado el 23 de agosto de 2015, de http://www.redalyc.org/pdf/311/31113164007.pdf

Hawkins, S. (2010). *Dios creó los números.* Barcelona: Crítica.

Hernández, R. G. (enero de 2008). Los constructivismos y sus implicaciones para la educación. *Perfiles educativos, 130*(122), 38-77. Recuperado el 2 de julio de 2017, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S0185-26982008000400003&script=sci_arttext

Herrero, I. M. (2004). *La utilización de medios y recursos didácticos en el aula.* (Doctoral dissertation, Tese de Mestrado apresentada na Universidad Complutense de Madrid). Recuperado el 19 de julio de 2017, de http://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1K2WRYPDP-8HX9V-13SZ/LA%20UTILIZACI%C3%93N%20DE%20MEDIOS%20Y%20RECURSOS%20DID%C3%81CTICOS%20EN%20EL%20AULA.pdf

Horrocks, J. (1986). *Psicología de la adolescencia.* México, D. F.: Trillas.

INAFED. (1986). *Enciclopedia de los municipios y delegaciones de México.* Recuperado el 16 de septiembre de 2015, de http://www.inafed.gob.mx/work/enciclopedia/EMM15mexico/municipios/15096a.html

INEGI. (2008). *Panorama de violencia contra las mujeres en el Estado de México.* Recuperado el 12 de julio de 2016, de http://internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/productos//prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/estudios/sociodemografico/mujeresrural/2007/ENDIREH_edomex.pdf

Kerlegand, C. (2013). *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización.* México, D. F.: Instituto Politécnico Nacional. Recuperado el 2 de agosto de 2016, de http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11469/PROME_M_20081100_001.PDF?sequence=1

Lehmann, C. H. (1990). *Geometría Analítica.* México: Limusa.

Marcia, J. (1996). Development and Validation of Ego Identity Status. *Journal of Personality and Social Psychology, 3*(5), 551-558. Recuperado el 8 de septiembre de 2015, de http://psycnet.apa.org/journals/psp/3/5/551/

Martín, J. F. (2001). *Enseñanza de procesos de pensamiento metodología, metacognición y transferencias.* Recuperado el 15 de mayo de 2017, de http://www.uv.es/relieve/v7n2/RELIEVEv7n2_2.htm

Mata, F. (2013). *Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: el caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele.* México, D. F.: Instituto Politécnico Nacional. Recuperado el 2 de agosto de 2016, de http://repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11582/mata_2006.pdf?sequence=1

Montealegre, R. (1992). Desarrollo de la acción intelectual y formación de la actividad en estudiantes. universitarios. *Revista Latinoamericana de Psicología, 24*(3), 343-355. Recuperado el 2 de septiembre de 2015, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80524308

Mora, J. C. (2013). *Elaboración y aplicación de recursos didácticos y material concreto para optimizar el aprendizaje de la línea recta y la circunferencia en el tercer año de bachillerato de la especialidad de Mecanizado y Construcciones Mecánicas del Instituto Técnico And.* Cuenca, Ecuador: Universidad de Cuenca. Recuperado el 2 de agosto de 2016, de http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/20848/1/TESIS.pdf

Nervi Haltenhoff, M. L. (agosto, 2004). Ética, educación y profesión docente. *Revista Docencia*(23), 76-84. Recuperado el 19 de abril de 2016, de http://www.revistadocencia.cl/new/wp-content/pdf/20100731195533.pdf

Parra Ortiz, J. M. (2003). La educación en valores y su práctica en el aula. *Tendencias pedagógicas*(8), 69-88. Recuperado el 19 de abril de 2016, de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/1012022.pdf

Pérez, A. (2005). *Curvas con historia: de las cónicas a las ecuaciones de las flores.* Recuperado el 2 de abril de 2016, de http://www.jupenoma.es/GeoGebra_Secundaria/gp-cur-epi-hipo-cicloides-trocoides/material_complementario/curvashistoria.pdf

Prieto, E. (2008). El papel del profesorado en la actualidad. Su función docente y social. *Foro de educación*(10), 325-345. Recuperado el 10 de mayo de 2016, de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2907073

Ramírez Hernández, I. E. (2011). El compromiso ético del docente. *Revista Iberoamericana de Educación, 55*(2), 1. Recuperado el 19 de abril de 2016, de http://rieoei.org/jano/3989RamirezJano.pdf

Riviere, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En Á. Marchesi, C. Coll, & J. Palacios, *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar.* (págs. 155-182). Madrid: Alianza. Recuperado el 1 de agosto de 2016, de http://www.cucs.udg.mx/avisos/Martha_Pacheco/Software%20e%20hipertexto/Antologia_Electronica_pa121/Palacios-cap9.PDF

Rizo, H. (julio-diciembre 2004). Evaluación del aprendizaje. *El hombre y la máquina*(23), 8-17. Recuperado el 20 de marzo de 2016, de http://ingenieria.uao.edu.co/hombreymaquina/revistas/23%202004-2/articulo%201%20HyM%2023.pdf

Rodríguez, M. L. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. *Investigació i Innovació Educativa, 3*(1), 28-50. Recuperado el 14 de febrero de 2015, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3634413

Rodríguez-Mena, M., & García, I. (mayo-agosto, 2003). El Aprendizaje para el Cambio. Papel de la Educación. *Convergencia. Revisat de ciencias sociales, 10*(32), 317-335. Recuperado el 11 de mayo de 2017, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10503212

San Martín, A. (1991). La organización escolar. *Cuadernos de pedagogía*(194), 26-28.

Sanes, C. D. (2014). La construcción de lugares geométricos en entornos de significatividad para el alumno: el caso de la mediatriz. *Revista Premisa, 16*(60), 13-30. Recuperado el 4 de agosto de 2016, de http://www.soarem.org.ar/Documentos/60_Sanes.pdf

SEP. (2001). *Programa nacional de educación 2001-2006.* Recuperado el 23 de agosto de 2015, de http://planipolis.iiep.unesco.org/upload/Mexico/Mexico%20Programa%20nacional%20de%20educacion%202001-2006.pdf

SEP. (2004a). *Modelo de la educación media superior tecnológica.* México: Editores Impresores FOC.

SEP. (2004b). *Estructura del bachillerato tecnológico.* México: Editores e Impresores FOC.

SEP. (2008a). *Normateca SEP.* Recuperado el 06 de mayo de 2015, de Acuerdo 442: http://normatecainterna.sep.gob.mx/work/models/normateca/Resource/243/1/images/acuerdo_442_sistema_nacional_bachillerato_marco_diversidad.pdf

SEP. (2013). *Programas de estudio del bachillerato tecnológico. Formación básica y propedéutica.* Recuperado el 19 de agosto de 2015, de http://cosdac.sems.gob.mx/portal/index.php/estudiar-trabajar/programas-de-estudios-vigentes

SEP. (2016). Recuperado el 25 de noviembre de 2016, de PLANEA en educación media superior: http://planea.sep.gob.mx/ms/

Serrano, S. (octubre-diciembre 2002). La evaluación del aprendizaje dimensiones y prácticas innovadoras. *Educere, 6*(19), 247-257. Recuperado el 23 de marzo de 2016, de http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/19715/1/articulo1.pdf

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2). Recuperado el 04 de julio de 2016, de http://hdl.handle.net/10481/15244

Tamayo, O. E. (2005). Aportes de la naturaleza de la ciencia y del contenido pedagógico del conocimiento para el campo conceptual de la educación en ciencias. *Enseñanza de las ciencias*(Extra), 1-5. Recuperado el 16 de julio de 2016, de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2005nEXTRA/edlc_a2005nEXTRAp82aponat.pdf

TareasPlus. (2013). *Cómo se midió por primera vez la Tierra*. Recuperado el 06 de julio de 2016, de https://www.youtube.com/watch?v=UeIQnjOEGUY

Tourón, J., & González, M. (1992). *Autoconcepto y rendimiento escolar.* España: EUNSA. Recuperado el 8 de septiembre de 2015, de http://dadun.unav.edu/handle/10171/21388

Valverde, J., & Ciudad, A. (2014). El uso de e-rúbricas para la evaluación de competencias en estudiantes universitarios. Estudio sobre fiabilidad del instrumento. *Revista de docencia universitaria, 12*(1), 49-72. Recuperado el 18 de julio de 2016, de http://www.ub.edu/rmaa/sites/default/files/articles/Valverde,%20Ciudad.pdf

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 521-525). Recuperado el 15 de septiembre de 2015, de http://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007%2F978-94-007-4978-8_170

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014a). Didactical Phenomenology (Freudenthal). En S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 174-176). Obtenido de Lerman, S.

Waldegg, E. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *Revista EMA, 4*(1), 16-31. Recuperado el 2 de julio de 2017, de http://funes.uniandes.edu.co/1085/1/46_Waldegg1998Principios_RevEMA.pdf

Weiss, E. (2012). La educación media superior en México ante el reto de su universalización. *Archivos de Ciencias de la Educación*(6), 6-27. Recuperado el 17 de septiembre de 2015, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4669528&orden=1&info=link

Wilhelmi, M. R. (2005). *El momento del trabajo de la técnica en la evolución de un proceso de estudio: el caso de la determinación de una circunferencia.* Recuperado el 2 de agosto de 2016, de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones/Wilhelmi.pdf

Zabala, A. (1990). Materiales curriculares. En T. y. Mauri, *El currículum en el centro educativo* (págs. 125-167). Barcelona: Col.: Cuadernos de Educación.

Zarzar, C. (enero-marzo 1994). La definición de objetivos de aprendizaje. Una habilidad básica para la docencia. *Perfiles educativos*(63). Recuperado el 22 de marzo de 2016, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13206302