Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Localización en Categorías

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

EDGAR OMAR VELASCO PÁEZ

TUTOR:
DR. VALENTE SANTIAGO VARGAS

Ciudad de México, 2017

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

LIC. IVONNE RAMÍREZ WENCE
Directora General
Dirección General de Administración Escolar
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Localización en Categorías

realizado por **Edgar Omar Velasco Páez** con número de cuenta **309342254** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario	Dr. Octavio Mendoza Hernández
Propietaria	Dra. Edith Corina Sáenz Valadez
Propietario Tutor	Dr. Valente Santiago Vargas
Suplente	Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda
Suplente	M. en C. Clotilde García Villa

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., A 27 DE JUNIO DE 2017

JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Dedicado a
Mis Padres y Hermana.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Quiero agradecer de manera especial a mis padres Silvia y Raúl por haber estado a mi lado en todo momento, por brindarme una excelente educación, llenarme de amor y comprensión, y aunque por el momento mi padre no se encuentra conmigo, sé que desde donde se encuentra estará feliz de verme cumplir esta meta. No me resta más que decirles: Muchas gracias papá y mamá. No es un logro mío sino de todos.

A mi hermana Monse por ser una parte importante de mi vida, por hacerme reír, jugar, bailar, enojar, dibujar y sobre todo por darme la oportunidad ver una nueva generación a través de ti. Espero poder servirte de ejemplo Monchis (bueno o malo, como siempre te he dicho).

Quiero agradecer a Lizbeth Sandoval por apoyarme durante los cursos de Algebra Moderna, por su amistad brindada, enseñanzas, sus buenos consejos en los momentos difíciles y por supuesto por presentarme a mi asesor.

De manera especial, agradezco a mi asesor Valente Santiago, por haberme brindado su apoyo en todo momento, tanto en lo escolar como en lo personal, por dedicarme bastante de su tiempo y por enseñarme tantas cosas durante esta tesis, por su amistad, sus consejos y su apoyo en uno de los momentos más difíciles de mi vida.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación de tiempo a mis profesores: Hugo, Lizbeth, Diana, Lino, Carlos, Margarita, José e Isabel Escalante. Por haber compartido conmigo sus conocimientos y sobre todo su amistad.

A mis amigos Carlos, Javier, Verónica, Julio y demás conocidos por todos los momentos que pasamos juntos. Por las tareas que algunos realizamos juntos y todas la veces que a mí me explicaron, gracias. Por la confianza que en mi depositaron.

Índice general

Introducción

Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de objetos y morfismos entre estos objetos. Los morfismos reflejan las relaciones entre los objetos. En muchas situaciones, es significativo reemplazar $\mathcal{C}$ por otra categoría $\mathcal{C}'$ en la que cierta colección de morfismos se ven obligados a ser isomorfismos. Este proceso se llama localización.

El concepto de localización en categoría es una generalización del concepto de localización de un anillo conmutativo con respecto a un ideal primo. Por ejemplo, en la categoría de R-módulos (para algún anillo conmutativo fijo R) la multiplicación por un elemento fijo r de R no siempre es un isomorfismo (a menos que r sea una unidad):

$$\begin{gathered} f_r : M \longrightarrow M \\ m \mapsto r \cdot m. \end{gathered}$$

La categoría que está más estrechamente relacionada con los R-módulos, pero donde este morfismo es un isomorfismo resulta ser la categoría de $S^{-1}R$-módulos. Donde $S^{-1}R$ es la localización de R con respecto al subconjunto multiplicativo S que consiste de las potencias de r, es decir,

$$S := \{1, r, r^2, r^3, \cdots\}.$$

Sea Σ la clase de morfismos en $Mod(R)$ definida como sigue: $f : M \longrightarrow N$ pertenece a $\Sigma \Leftrightarrow M = N$ y $f(m) = r^i m$ para algún $r^i \in S$.

La localización en módulos cumple las siguientes dos condiciones:

(I) Se tiene un funtor

$$\begin{gathered} T : Mod(R) \longrightarrow Mod(S^{-1}R) \\ M \mapsto S^{-1}M \end{gathered}$$

el cual envía un módulo M a su localización $S^{-1}M$ con respecto a S, donde $S^{-1}M = M \otimes_R S^{-1}R$. Además $T(f)$ es isomorfismo $\forall f \in \Sigma$.

(II) Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un funtor $F : Mod(R) \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $F(f)$ es un isomorfismo $\forall\ f \in \Sigma$. Existe un único funtor $G : Mod(S^{-1}R) \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $F = G \circ T$.

Como otro ejemplo, consideremos una categoría abeliana $\mathcal{C}$ y la categoría homotópica acotada $K^b(\mathcal{C})$, dentro de esta categoría tomamos como Σ, a la clase de quasi-isomorfismos (es decir, aquellos que inducen isomorfismo a homología). Se prueba que existe una categoría que se denota por $D^b(\mathcal{C})$ y se llama la categoría derivada acotada de $\mathcal{C}$ que cumple lo siguiente

i) Existe un funtor
$$Q : K^b(\mathcal{C}) \longrightarrow D^b(\mathcal{C})$$
tal que $Q(f)$ es un isomorfismo en $D^b(\mathcal{C})$ si f es un quasi-isomorfismo.

ii) Si $F : K^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$ es otro funtor tal que $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ $\forall\ f \in \Sigma$, entonces existe un único funtor $\overline{F} : D^b(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = \overline{F} \circ Q$.

Las construcciones anteriores se pueden generalizar a cualquier categoría. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y alguna clase W de morfismos en $\mathcal{C}$, la localización $\mathcal{C}_W$ es otra categoría que se obtiene invirtiendo formalmente todos los morfismos en W. Más aún, $\mathcal{C}_W$ se caracteriza por una propiedad universal:

- Existe un funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_W$ tal que T envía todas las flechas de W a isomorfismos en $\mathcal{C}$.
- Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es otro funtor tal que envía cualquier flecha de W a un isomorfismo en $\mathcal{D}$, entonces existe un único funtor $G : \mathcal{C}_W \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = G \circ T$.

Por lo tanto, la localización de una categoría es única salvo isomorfismo. A grandes rasgos, una construcción de la localización se hace de la siguiente manera: los objetos de $\mathcal{C}_W$ son los mismos que los de $\mathcal{C}$. Pero los morfismos se construyen añadiendo una inversa formal para cada morfismo en W. Bajo hipótesis adecuadas sobre W(dichas hipótesis son estudiadas en esta tesis), los morfismos entre dos objetos X, Y de $\mathcal{C}_W$ se dan por clases de techos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z, & \end{tikzcd}$$

(donde previamente se ha definido una relación de equivalencia en los techos).

El objetivo de esta tesis es presentar las bases necesarias para entender y demostrar la existencia de la categoría de fracciones $\mathcal{C}$ relativa a una cierta clase de morfismos Σ (en esta tesis presentamos las condiciones necesarias para que dicha categoría exista). También estudiamos algunas propiedades que la categoría de fracciones $\mathcal{C}_\Sigma$ relativa a Σ hereda de la categoría $\mathcal{C}$. Por ejemplo, se dan condiciones sobre Σ, para que $\mathcal{C}_\Sigma$ sea abeliana siempre que $\mathcal{C}$ lo sea.

Se ha tomado como base el libro [6] de "Abelian categories with applications to rings and modules" de N. Popescu, completando las partes faltantes en las demostraciones del libro mediante la introducción de lemas o proposiciones necesarias; así como también, se han redactado de mejor manera algunas definiciones. De manera similar, se han usado algunas fuentes (ver [7], [5] y [8]) para describir algunas de las nociones básicas de categorías tales como kernel, cokernel, pullback, productos, etc.

En el capítulo 1, introducimos la noción de categoría y algunos ejemplos. Se presentan nociones básicas de categorías tales como funtor y algunas propiedades que estos tienen, a saber, un funtor exacto, exacto a izquierda. Se definen otros conceptos básicos como pullback, producto, subobjetos. También se introducen la definición de categoría aditiva y categoría abeliana. Este capítulo ha sido desarrollado tomado elementos del libro [5] y de la tesis de licenciatura [8].

El capítulo 2 es la parte central de esta tesis. Se presenta lo que es un sistema calculable Σ y ejemplos de estos sistemas. Se define la noción de categoría conexa y casi-directa en las cuales se observará que existe el límite directo de funtores. Posteriormente, se da la construcción de la categoría de fracciones de $\mathcal{C}$ relativa a Σ. Finalmente, en lo que resta del capítulo se estudian características que hereda la categoría de fracciones de la categoría inicial.

Capítulo 1

Nociones básicas de categorías abelianas.

Se comienza por desarrollar las nociones básicas de teoría de categorías, se revisa la noción de categoría y se establecen algunos ejemplos, se presenta la noción de objeto, subobjeto, funtor covariante, kernel y cokernel, producto y coproducto de objetos, se introducen también los conceptos de pullback y pushout, estas nociones han sido tomadas de [8] y [5].

El resto del capítulo está destinado a explicar propiedades que ciertas categorías cumplen y por lo cual tienen un nombre especial, a saber, una categoría aditiva. En la parte final del capítulo se establece la definición de categoría abeliana y se enuncian algunos ejemplos.

1.1. Teoría básica de categorías

Definición 1.1.1 *Una categoría $\mathcal{A}$ consta de una clase de objetos, que se denota por Obj($\mathcal{A}$), una clase morfismos que se denota por Mor ($\mathcal{A}$) y una operación binaria en Mor($\mathcal{A}$) tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $Mor(\mathcal{A}) = \bigcup_{(A,B)\in Obj(\mathcal{A})\times Obj(\mathcal{A})}[A,B]_{\mathcal{A}}$ *donde* $[A,B]_{\mathcal{A}}$ *es un conjunto para todo* $(A,B)\in Obj(\mathcal{A})\times Obj(\mathcal{A})$.

(b) $[A,B]_{\mathcal{A}} = [C,D]_{\mathcal{A}}$ *si y sólo si* $A = C$ *y* $B = D$.

(c) Para cada terna $(A,B,C)\in Obj(\mathcal{A})\times Obj(\mathcal{A})\times Obj(\mathcal{A})$, *la operación binaria* $\circ$ *en* $Mor(\mathcal{A})$, *induce por restricción, una función:*

$$F : [B,C]_{\mathcal{A}} \times [A,B]_{\mathcal{A}} \longrightarrow [A,C]_{\mathcal{A}}$$

y cuya regla de correspondencia denotada por $F(\beta,\alpha) = \beta \circ \alpha$ *satisface las siguientes propiedades:*

(c1) ***Asociatividad:*** *es decir,* $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$*, siempre que dicha composición esté definida,*

(c2) ***Existencia de identidades:*** *Para cada* $A \in Obj(\mathcal{A})$ *existe* $1_A \in [A, A]_A$ *tal que para todo* $\alpha \in [B, A]_A$ *y* $\forall \beta \in [A, C]_A$ *se tiene que* $1_A \circ \alpha = \alpha$ *y* $\beta \circ 1_A = \beta$.

Para simplificar notación escribiremos $\beta \circ \alpha$ como $\beta\alpha$. Más aún, dado un morfismo $\alpha \in [A, B]_{\mathcal{A}}$ lo representamos como $\alpha : A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{\alpha} B$, diremos que A es el **dominio** de α y B es el **codominio** de α.

Observación 1.1.2 *A veces denotaremos al conjunto* $[A, B]_{\mathcal{A}}$ *por* $Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.

Definición 1.1.3 *Una categoría* $\mathcal{A}$ *es* ***pequeña*** *si la clase de objetos* $obj(\mathcal{A})$ *es un conjunto.*

Definición 1.1.4 *Diremos que una categoría* $\mathcal{A}'$ *es una* ***subcategoría*** *de* $\mathcal{A}$ *si satisface lo siguiente:*

(a) $Obj(\mathcal{A}') \subset Obj(\mathcal{A})$,

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ *para todo* $(A, B) \in Obj(\mathcal{A}') \times Obj(\mathcal{A}')$,

(c) la composición de morfismos en $\mathcal{A}'$ *es la misma que en* $\mathcal{A}$,

(d) si $1'_{\mathcal{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(A, A)$ *es un morfismo identidad en* $\mathcal{A}'$*, entonces* $1'_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$*, donde* $1_{\mathcal{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ *es un morfismo identidad en* $\mathcal{A}$.

Definición 1.1.5 *Decimos que una subcategoría* $\mathcal{A}'$ *de una categoría* $\mathcal{A}$ *es una* ***subcategoría plena*** *si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ *para cualesquiera objetos* $A, B \in \mathcal{A}'$.

Ejemplos.

En los ejemplos del (1) al (4), la composición de morfismos es la composici ón usual de funciones.

(1) La categoría **Sets** cuya clase de objetos es la clase de todos los conjuntos y donde $\mathrm{Hom}_{Sets}(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B.

(2) La categoría **Top** cuyos objetos son todos los espacios topológicos, y los morfismos del espacio A al espacio B son todas las funciones continuas de A en B.

(3) La categoría $\mathbf{Sets_0}$ cuyos objetos son parejas ordenadas (A, a), donde A es un conjunto y $a \in A$. Un morfismo de (A, a) a (B, b) es una función $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(a) = b$.

(4) La categoría $\mathbf{Top_0}$ cuyos objetos son los espacios topológicos con punto base, esto es, parejas ordenadas (A, a) donde A es un espacio topológico y $a \in A$. Un morfismo f de (A, a) en (B, b) es una función continua $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(a) = b$.

(5) Sea $(G, \cdot)$ un semigrupo. Podemos pensar a G como una categoría con un sólo objeto, $\mathcal{C}_G$, haciendo $Obj(\mathcal{C}_G) := \{\star\}$, $Mor(\mathcal{C}_G) := G = \mathrm{Hom}_G(\star, \star)$ y la composición de morfismos en $\mathcal{C}_G$ es el producto en G. Recíprocamente, si $\mathcal{A}$ es una categoría con un solo objeto, digamos $Obj(\mathcal{A}) = \{\star\}$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\star, \star)$ es un semigrupo.

(6) Sea $\mathcal{C}$ una clase y $\leq$ un preorden en $\mathcal{C}$, esto es, $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva en $\mathcal{C}$. La clase preordenada $(\mathcal{C}, \leq)$ se puede pensar como una categoría de la siguiente forma.
$Obj(\mathcal{C}) := \mathcal{C}$ y el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ tiene a lo más un elemento que denotaremos por f_x^y, esto es,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) := \begin{cases} \emptyset \ si \ x \not\leq y, \\ f_x^y \ si \ x \leq y \end{cases}$$

La composición $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b, c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, c)$ está dada por $f_b^c f_a^b = f_a^c$.

(7) La categoría $\mathcal{A}b$ cuyos objetos son todos los grupos abelianos, y los morfismos del grupo A en el grupo B son todos los homomorfismos de grupos abelianos de A en B.

1.1.1. Funtores

Definición 1.1.6 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un **funtor covariante** $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una asignación de un objeto $T(A) \in \mathcal{B}$, para cada objeto $A \in \mathcal{A}$, y un morfismo $T(\alpha) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A), T(A'))$, para cada morfismo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$, tal que:*

a) preserva la composición, esto es, si $\alpha \circ \alpha'$ está definida en $\mathcal{A}$ entonces

$$T(\alpha\alpha') = T(\alpha)T(\alpha').$$

b) preserva las identidades, esto es para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

Observación 1.1.7 *Dado un funtor $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, diremos que $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) es el dominio (resp. codominio) de T. En general, un funtor preserva ciertas propiedades de los morfismo de su dominio.*

Definición 1.1.8 *Un* ***funtor contravariante*** *$T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una asignación de un objeto $T(A) \in \mathcal{B}$, para cada objeto $A \in \mathcal{A}$, y un morfismo $T(\alpha) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A'), T(A))$, para cada morfismo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$, tal que se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) Invierte la composición, esto es, si $\alpha' \circ \alpha$ está definida en $\mathcal{A}$, entonces

$$T(\alpha'\alpha) = T(\alpha)T(\alpha').$$

(b) Preserva las identidades, esto es, para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $T(1_A) = 1_{T(A)}$

Ejemplos de funtores.

(1) El funtor covariante $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, tal que $1_{\mathcal{A}}(A) = A$ para toda A $\in \mathcal{A}$ y $1_{\mathcal{A}}(\alpha) = \alpha$ para todos los morfismos $\alpha \in \mathcal{A}$, es llamado el **funtor identidad** sobre $\mathcal{A}$.

(2) Sea $\mathcal{A}'$ una subcategoría de $\mathcal{A}$, el funtor $I : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $I(A) = A$ para toda A $\in \mathcal{A}'$ y $I(\alpha) = \alpha$ para todos los morfismos $\alpha \in \mathcal{A}'$ es llamado el **funtor inclusión** de $\mathcal{A}'$ en $\mathcal{A}$.

(3) El **funtor olvido** $F : \mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{S}ets$, de la categoría de grupos abelianos a la categoría de conjuntos, es el funtor que olvida la estructura de grupo abeliano sobre los objetos de $\mathcal{A}b$. Es decir, si G es un grupo abeliano, entonces $F(G) = G$ como conjunto; y si α es un morfismo de grupos abelianos, entonces $F(\alpha) = \alpha$ es la función subyacente a α.

1.1.2. Morfismos y subobjetos

Definición 1.1.9 *Un morfismo $\theta : A \longrightarrow B$ es un* ***monomorfismo que se escinde*** *si existe $\theta' : B \longrightarrow A$ tal que $\theta'\theta = 1_A$. Decimos que θ es un* ***epimorfismo que se escinde*** *si existe un morfismo $\theta'' : B \longrightarrow A$ tal que $\theta\theta'' = 1_B$. Si θ es un epimorfismo que se escinde y un monomorfismo que se escinde decimos que θ es un* ***isomorfismo*** *y que A es isomorfo a B, en símbolos $A \cong B$.*

Observación 1.1.10 *Notemos que, en el caso de un isomorfismo se tiene que*

$$\theta' = \theta' 1_B = \theta'(\theta\theta'') = (\theta'\theta)\theta'' = 1_A\theta'' = \theta''$$

Por lo tanto, se dice que $\theta' = \theta''$ es el ***inverso*** *de θ y se denota por θ^{-1}.*

Definición 1.1.11 *Un morfismo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un **monomorfismo** si $\alpha f = \alpha g$ implica que $f = g$ para todo par de morfismos f y g con codominio en A. Un morfismo α es un **epimorfismo** si $f\alpha = g\alpha$ implica que $f = g$ para todo par de morfismo f y g con dominio B.*

Los siguientes resultados son básicos y son fáciles de demostar, por lo que omitimos su demostración.

Lema 1.1.12 *Para una categoría arbitraria $\mathcal{C}$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si α y β son monomorfismos y $\beta\alpha$ está definida, entonces $\beta\alpha$ es un monomorfismo.

(b) Si α y β son epimorfismos y $\beta\alpha$ está definida, entonces $\beta\alpha$ es un epimorfismo. □

Lema 1.1.13 *Para una categoría arbitaria $\mathcal{C}$ y $f, g \in Mor(\mathcal{C})$, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si fg es un monomorfismo, entonces g es monomorfismo.

(b) Si fg es epimorfismo, entonces f es un epimorfismo. □

Lema 1.1.14 *Para una categoría $\mathcal{C}$. Las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo que se escinde, entonces α es un monomorfismo.

(b) Si $\beta : C \longrightarrow D$ es un epimorfismo, que se escinde entonces β es un epimorfismo. □

Definición 1.1.15 *Una categoría $\mathcal{C}$ es **balanceada** si todo morfismo que es un epimorfismo y es un monomorfismo es un isomorfismo.*

Definición 1.1.16 *Si $\alpha : A' \longrightarrow A$ es un monomorfismo, decimos que A' es un **subobjeto** de A y que α es una **inclusión** de A' en A.*

A veces escribiremos $A' \subseteq A$ para indicar que A' es un subobjeto de A, y diremos que A' está **contenido** en A o que A **contiene** a A'.

Si el monomorfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ no es un isomorfismo diremos que A' es un **subobjeto propio** de A. La composición de un monomorfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ con un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es denotado por $f|_{A'}$ y se dice que $f|_{A'}$ es una **restricción** de f en A'.

Definición 1.1.17 *Dada una categoría $\mathcal{A}$, definimos la **categoría dual** $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$ como sigue:*

(a) $Obj(\mathcal{A}^*) := Obj(\mathcal{A})$ *y,*

(b) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^*}(B, A) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)\ \forall\ A, B \in \mathcal{A}$.

La composición fg en $\mathcal{A}^*$ está definida como la composición gf en $\mathcal{A}$.

Notación 1.1.18 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathcal{A}^*$ la categoría dual. Para evitar confusión escribimos $A^* = A$ para $A \in Obj(\mathcal{A})$ y diremos que $f^* : B^* \longrightarrow A^*$ es un morfismo en $\mathcal{A}^*$ si y sólo si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathcal{A}$. Usando esta convención, la composición de morfismos en $\mathcal{A}^*$ es:*

$$f^*g^* := gf \qquad \forall\ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \quad y \quad \forall g\ \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C).$$

1.1.3. Pullback y pushouts

Definición 1.1.19 *Dados dos morfismos $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ y $\alpha_2 : A_2 \longrightarrow A$ en una categoría $\mathcal{C}$, diremos que el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

es un pullback de α_1 y α_2, si satisface lo siguiente: para todo par de morfismos $\beta_1' : P' \longrightarrow A_1$ y $\beta_2' : P' \longrightarrow A_2$ tales que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$, existe un único morfismo $\gamma : P' \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A. \end{tikzcd}$$

Lema 1.1.20 *Sea*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

un pullback de α_1 y α_2. Si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

es también un pullback de α_1 y α_2, entonces existe un único isomorfismo $\gamma' : P \longrightarrow P'$ tal que $\beta_1 = \beta_1'\gamma'$ y $\beta_2 = \beta_2'\gamma'$.

Demostración. Dado que el segundo cuadrado conmutativo es un pullback, existe un único morfismo $\gamma' : P \longrightarrow P'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dotted, "\gamma'"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\
& P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

De manera análoga, existe un único morfismo $\gamma : P' \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A,
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que $\beta_1\gamma\gamma' = \beta_1'\gamma' = \beta_1 = \beta_1 1_P$, y similarmente $\beta_2\gamma\gamma' = \beta_2 1_P$. Luego, por la unicidad de las facrizaciones a través del pullback, se tiene que $\gamma\gamma' = 1_P$. De manera análoga, se tiene que $\gamma'\gamma = 1_{P'}$, por lo que γ es un isomorfismo.

□

Proposición 1.1.21 *Consideremos el siguiente diagrama pullback*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A.
\end{tikzcd}$$

Si $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A$ es un monomorfismo entonces $\beta_2 : P \longrightarrow A_2$ también es un monomorfismo.

Demostración. Sean $f, g : B \longrightarrow P$ tales que $\beta_2 f = \beta_2 g$. Entonces

$$\alpha_1\beta_1 g = \alpha_2\beta_2 g = \alpha_2\beta_2 f = \alpha_1\beta_1 g$$

Por la propiedad universal del pullback, existe una única $\varphi : B \longrightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2 g"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1 g"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

Como α_1 es un monomorfismo, tenemos que $\beta_1 f = \beta_1 g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dotted, "f=g"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2 f=\beta_2 g"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1 f=\beta_1 g"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

Dado que el cuadrado es un pullback, existe un único morfismo tal que el diagrama anterior conmuta, dado que f y g tienen dicha propiedad, por la unicidad de dicho morfismo se tiene que $f = g$. Por lo tanto β_2 es un monomorfismo. $\square$

Lema 1.1.22 *Considere el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

donde ambos cuadrados son pullback y α es un monomorfismo. Entonces

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "g'f'"'] & C',
\end{tikzcd}$$

es un pullback.

Demostración. Una demostración de este hecho se encuentra en [8, pag. 13]. □

La noción dual de pullback es el pushout.

Definición 1.1.23 *Dados dos morfismos $\alpha_1 : A \longrightarrow A_1$ y $\alpha_2 : A \longrightarrow A_2$ en una categoría $\mathcal{C}$, diremos que el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & P \end{tikzcd}$$

*es un **pushout** de α_1 y α_2 si para todo par de morfismo $\beta_1' : A_1 \longrightarrow P'$ y $\beta_2' : A_2 \longrightarrow P'$ tales que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, existe un único morfismo $\gamma : P \longrightarrow P'$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend left, "\beta_1'"] & \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[drr, bend right, "\beta_2'"'] & P. \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & \\ & & P' \end{tikzcd}$$

1.1.4. Objetos cero

Definición 1.1.24 *Un objeto 0 en una categoría $\mathcal{C}$, es llamado **objeto nulo** si existe un único morfismo $\alpha : A \longrightarrow 0$ para todo $A \in \mathcal{C}$. Dualmente $0'$ es un objeto **conulo** si existe un único morfismo $\beta : 0' \longrightarrow A$ para todo $A \in \mathcal{C}$.*

Lema 1.1.25 *Si la categoría $\mathcal{A}$ tiene un objeto nulo (resp. conulo) éste es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Supongamos que 0 y $0'$ son objetos nulos de $\mathcal{A}$, entonces los conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0, 0')$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0', 0)$ tienen cada uno un sólo morfismo, digamos θ y θ' espectivamente. Luego $\theta'\theta = 1_0$ puesto que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0, 0)$ tiene un sólo elemento, y análogamente $\theta\theta' = 1_{0'}$. □

Definición 1.1.26 *Diremos que 0 es un **objeto cero** para $\mathcal{C}$ si es nulo y conulo. En este caso, diremos que un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ es un **morfismo cero** si se factoriza a través de un objeto cero.*

Observación 1.1.27 *Si* 0 *es un objeto cero, entonces* 0 *es único salvo isomorfismos.*

Lema 1.1.28 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría con objeto cero. Entonces cada conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ *tiene un único morfismo cero que se denotará por* 0_{AB} *o simplemente por 0.*

Demostración. Sea 0 un objeto cero en $\mathcal{C}$. Como 0 es nulo y conulo existen morfismos $\alpha : A \longrightarrow 0$ y $\beta : 0 \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ lo cual implica que $0_{AB} := \beta\alpha$ es un morfismo cero.
Veamos que es único. En efecto, sea $0'$ otro objeto cero en $\mathcal{C}$ y $0'_{AB} = \beta'\alpha'$, donde $\alpha' : A \longrightarrow 0'$ y $\beta' : 0' \longrightarrow B$ son morfismos en $\mathcal{C}$. Por ser $0'$ un objeto cero, existe un único morfismo $h : 0' \longrightarrow 0$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & 0' \arrow[dr, "\beta'"] \arrow[dd, "h"] & \\ A \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \\ & 0. \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $0'_{AB} = \beta'\alpha' = \beta h\alpha' = \beta\alpha = 0_{AB}$. $\square$

1.1.5. Kerneles

Definición 1.1.29 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría con objeto cero y* $\alpha : A \longrightarrow B$ *un morfismo en* $\mathcal{C}$. *Diremos que un morfismo* $\mu : K \longrightarrow A$ *es un* ***kernel*** *de* α *si*

(a) $\alpha\mu = 0$, *y*

(b) para todo morfismo $\mu' : K' \longrightarrow A$ *tal que* $\alpha\mu' = 0$, *existe un único morfismo* $\gamma : K' \longrightarrow K$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\mu"] & & A \\ & K'. \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "\mu'"'] & \end{tikzcd}$$

Observación 1.1.30 *(a) Se puede verificar de una manera sencilla, que el kernel* $\mu : K \longrightarrow A$ *de un morfismo* $\alpha : A \longrightarrow B$ *está dado por el siguiente diagrama de pullback*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B. \end{tikzcd}$$

En particular, μ es un monomorfismo y cualesquiera dos kerneles son subobjetos isomorfos de A. El objeto K será denotado por $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

(b) Dada una categoría $\mathcal{C}$ con objeto cero y un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$, denotaremos por $\alpha : \mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow A$ a una elección de un kernel de f.

Definición 1.1.31 *Decimos que una categoría $\mathcal{A}$* ***tiene kerneles****, si*

(a) $\mathcal{C}$ tiene objeto cero.

(b) Todo morfismo de $\mathcal{A}$ tiene un kernel.

Definición 1.1.32 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y $\alpha : A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Diremos que un morfismo $p : B \longrightarrow C$ es un* ***cokernel*** *de α si*

(a) $p\alpha = 0$, y

(b) para todo morfismo $p' : B \longrightarrow C'$ tal que $p'\alpha = 0$ existe un único morfismo $\gamma : C \longrightarrow C'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "p'"] \arrow[dr, "p"'] & & C' \\ & C. \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

En el caso de que todo morfismo en una categoría $\mathcal{C}$ tenga cokernel, diremos que $\mathcal{C}$ **tiene cokerneles**.

1.1.6. Producto y coproducto

Definición 1.1.33 *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$. Un* ***producto*** *para $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos $\{p_i : A \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ con la siguiente propiedad. Para cualquier otra familia $\{\alpha_i : A' \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ de morfismos, existe un único morfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, dotted, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & A \arrow[dl, "p_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$.

Observación 1.1.34 *(a) Si la famila $\{\alpha_i : A' \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ es también un producto de $\{A_i\}_{i\in I}$, entonces el morfismo $\alpha : A' \longrightarrow A$ del diagrama anterior es un isomorfismo. Esto es, el producto, si existe, es único salvo isomorfismo. En caso de que exista, denotaremos por $\{p_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i\}_{i\in I}$ a uno de estos productos; y cada morfismo $p_i : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_i$ será llamado la* ***i-ésima proyección*** *del producto sobre A_i.*

(b) *Un objeto $0 \in \mathcal{C}$, es un objeto nulo en $\mathcal{C}$ si y sólo si sirve como producto para la familia vacía.*

Definición 1.1.35 *Un **coproducto** de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos en una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ es un producto de dicha familia en la categoría dual. Esto es, un coproducto es una familia de morfismos $\{\mu_i : A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ llamados inclusiones, con la siguiente propiedad. Para cualquier otra familia $\{\alpha_i : A_i \longrightarrow A'\}_{i\in I}$ existe un único morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dotted, "\alpha"] & & A' \\ & A_i \arrow[ul, "\mu_i"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $i \in I$.

Observación 1.1.36 *Como en el caso del producto, si el coproducto existe éste es único salvo isomorfismos. En el caso que exista, denotaremos por $\{\mu_i : A_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ a uno de estos coproductos; y cada morfismo $\mu_i : A_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} A_i$ será llamado la **i-ésima inclusión** de A_i en el coproducto.*

1.2. Categorias preaditivas y aditivas.

Definición 1.2.1 *Diremos que una categoría $\mathcal{C}$ es **preaditiva** si las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) *Para cada pareja de objetos (X, Y) en $\mathcal{C}$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tiene estructura de grupo abeliano y la composición*

$$\theta(X, Y, Z) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

es bilineal. Es decir, para todo par de morfismos $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ tenemos que

$$\theta(X, Y, Z)(f + f', g) = \theta(X, Y, Z)(f, g) + \theta(X, Y, Z)(f', g),$$

$$\theta(X, Y, Z)(f, g + g') = \theta(X, Y, Z)(f, g) + \theta(X, Y, Z)(f, g')$$

donde X, Y, Z son objetos arbitrarios en la categoría $\mathcal{C}$.

(b) *$\mathcal{C}$ tiene objeto cero.*

Observación 1.2.2 (a) *Si definimos $\theta(X, Y, Z)(f, g) := g \circ f$, entonces las últimas igualdades toman la siguiente forma*

$$g(f + f') = gf + gf'$$

$$(g + g')f = gf + g'f$$

(b) Para cada pareja (X, Y) *de objetos, denotamos por* e_{XY} *(o simplemente* 0*, si no existe confusión) al elemento neutro del grupo abeliano* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$*. Entonces, para cualesquiera tres objetos* (X, Y, Z) *en* $\mathcal{C}$*, tenemos que* $e_{YZ}e_{XY} = e_{XZ}$*. En efecto, para cada morfismo* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$*, tenemos*

$$e_{YZ}f = e_{YZ}(e_{XY} + f) = e_{YZ}e_{XY} + e_{YZ}f.$$

Por lo tanto, $e_{XZ} = e_{YZ}e_{XY}$*.*

(c) Dado que $\mathcal{C}$ *tiene objeto cero, tenemos que para cada objeto* X *en* $\mathcal{C}$*, el grupo abeliano* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X)$ *(respectivamente el grupo abeliano* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0)$*) contiene sólo al elemento* $e_{0X} = 0_{0X}$ *(respectivamente* $e_{X0} = 0_{X0}$*). Pero, por 1.1.27 sabemos que*

$$0_{XY} = 0_{0Y} \circ 0_{X0} = e_{0Y} \circ e_{X0} = e_{XY}.$$

Es decir, para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ *se tiene que el neutro aditivo de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *y el morfismo cero de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *coinciden.*

Ejemplo 1.2.3

(1) La categoría $\mathcal{A}b$ *de grupos abelianos es una categoría preaditiva. Además si* X, Y *son dos grupos abelianos, entonces el conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, Y)$ *tiene estructura canónica de grupo abeliano: para* $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, Y)$ *tenemos* $f+g : X \longrightarrow Y$ *un morfismo de grupos abelianos definido por* $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$*. Es inmediato que la composición de morfismo es bilineal.*

(2) Sea A *un anillo conmutatico con 1. Entonces* A *se puede pensar como una categoría preaditiva que denotamos por* $\mathcal{C}_A$ *(ver ejemplo 1.3.5). En efecto, como* $Obj(\mathcal{C}_A) = \{\star\}$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(\star, \star) = A$*, concluimos que* $\mathcal{C}_A$ *es preaditiva.*

(3) Si $\mathcal{C}$ *es preaditva entonces* $\mathcal{C}^*$ *es preaditva.*

Teorema 1.2.4 *Sea* $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$ *un conjunto finito de objetos en una categoría preaditiva* $\mathcal{C}$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) El conjunto de objetos dado tiene coproducto.

(b) El conjunto dado de objetos tiene producto.

(c) Existe un objeto X *en* $\mathcal{C}$ *y morfismos* $u_i : X_i \longrightarrow X$*,* $p_i : X \longrightarrow X_i$*, con* $1 \leq i \leq n$*, tales que*

(c1) $\sum_{i=i}^{n} u_i p_i = 1_X$*,*

(c2) $p_i u_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j, \\ 1_{X_i} \text{ si } i = j. \end{cases}$

Más aún, si $\{u_i : X_i \longrightarrow X\}_{i=1}^n$ *es un coproducto, la familia* $\{p_i : X \longrightarrow X_i\}_{i=1}^n$ *del inciso (c) es un producto de* $\{X\}_{i=1}^n$.

Demostración. Una demostración de este hecho se encuentra en [6, pág. 18] □

Definición 1.2.5 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría preaditiva. Decimos que la categoría* $\mathcal{C}$ *es una* ***categoría aditiva*** *si la siguiente condición se satisface.*

a) Para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ *existe el coproducto* $X \coprod Y$.

Ejemplo 1.2.6

(1) La categoría $\mathcal{A}b$ *de grupos abelianos, es una categoría aditiva. En efecto, si* X, Y *son dos grupos abelianos consideramos el producto cartesiano* $X \prod Y$ *donde la suma de los elementos está dada componente a componente. Sean* $p : X \prod Y \longrightarrow X$, $q : X \prod Y \longrightarrow Y$ *las proyecciones naturales. Entonces* $X \prod Y$, p *y* q *definen un producto de los grupos abelianos* X *y* Y. *Por el Teorema 1.2.4* $\mathcal{A}b$ *tiene coproductos.*

(2) Si $\mathcal{C}$ *es aditiva, entonces* $\mathcal{C}^*$ *es aditiva.*

1.3. Categoría preabeliana.

Definición 1.3.1 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría aditiva. Decimos que* $\mathcal{C}$ *es una categoría* ***preabeliana*** *si para cada morfismo* f *en* $\mathcal{C}$ *existe* $\mathrm{Coker}(f)$ *y* $\mathrm{Ker}(f)$.

Ejemplo 1.3.2

(a) La categoría $\mathcal{A}b$ *es preabeliana. En efecto, si* $f : X \longrightarrow Y$ *es un morfismo de grupos abelianos, denotamos por* $\mathrm{Ker}(f)$ *al subconjunto de* X *que consiste de los elementos* x *tal que* $f(x) = 0$. *También denotamos la inclusión por* $i : \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X$. *Es fácil ver* $\mathrm{Ker}(f)$ *es un subgrupo de* X *y que* $i : \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow X$ *es un kernel de* f. *El cokernel de* f *se define de la siguiente manera: consideremos el subgrupo* $f(X)$ *de* Y *y* $\pi : Y \longrightarrow Y/f(X)$ *la proyección canónica. Se puede ver que* π *es un cokernel de* f.

(b) Sea R *un anillo conmutativo con 1. Entonces, la categoría* $Mod(R)$ *de* R*-módulos es preabeliana.*

(c) El dual de una categoría preabeliana es preabeliana.

(d) Consideremos la categoría $\mathcal{C}$, *definida de la siguiente manera.*

(d1) Los objetos de $\mathcal{C}$ *son los grupos topológicos abelianos Hausdorff.*

(d2) Los morfismos de $\mathcal{C}$ son homomorfismos continuos de grupos abelianos.

Se puede ver que $\mathcal{C}$ es una categoría preaditiva. Por otro lado, dados dos grupos topológicos Hausdorff, el producto cartesiano con la topología producto es un grupo topológico abeliano y Hausdorff. Luego $\mathcal{C}$ tiene productos y por el Teorema 1.2.4, $\mathcal{C}$ tiene coproductos.

Ahora sea $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$. Consideremos $K = \{x \in X | f(x) = 0\}$ e $i : K \longrightarrow X$ la inclusión. Entonces K es un subgrupo abeliano Hausdorff y se puede ver que $i : K \longrightarrow X$ es un kernel de f en $\mathcal{C}$.
El cokernel de f se define de la siguiente manera: consideremos $\overline{f(X)}$ la cerradura de $f(X)$ en Y. Se puede ver que $\overline{f(X)}$ es un subgrupo abeliano y Hausdorff de Y, y que además la proyección canónica $\pi : Y \longrightarrow Y/\overline{f(X)}$ es un cokernel de f.

Proposición 1.3.3 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Supongamos que existen $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Coker}(f)$, $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$ y $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$. Entonces, existe un único morfismo $\overline{f} : \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "t"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[r, "u"] & U \\
& \mathrm{Coker}(t) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(u) \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $t = \mathrm{Ker}(f)$, $\pi = \mathrm{Coker}(t)$, $u = \mathrm{Coker}(f)$ y $i = \mathrm{Ker}(u)$.

Demostración. Como $t = \mathrm{Ker}(f)$, se tiene que $ft = 0$. Entonces existe $\overline{\pi} : \mathrm{Coker}(t) \longrightarrow Y$ tal que $f = \overline{\pi}\pi$, pues $\pi = \mathrm{Coker}(f)$. Luego $0 = uf = u\overline{\pi}\pi$; y como π es un epimorfismo se tiene que $u\overline{\pi} = 0$. Dado que $i = \mathrm{Ker}(u)$, existe un único morfismo $\overline{f} : \mathrm{Coker}(t) \longrightarrow \mathrm{Ker}(u)$ tal que $i\overline{f} = \overline{\pi}$. Luego, $f = \overline{\pi}\pi = i\overline{f}\pi$.
Veamos que $\overline{f}$ es único tal que $f = i\overline{f}\pi$. En efecto, supongamos que existe $f' : \mathrm{Coker}(t) \longrightarrow \mathrm{Ker}(u)$ tal que $f = if'\pi$. Entonces $if'\pi = i\overline{f}\pi$ y como i es un monomorfismo y π un epimorfismo, concluimos que $f' = \overline{f}$.
□

Definición 1.3.4 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Coker}(f)$, $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$ y $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(g))$ existen. El único morfismo, $\overline{f} : \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$de la Proposición 1.3.3, tal que $f = i\overline{f}\pi$, se llama el **morfismo paralelo a f**; y la factorización $f = i\overline{f}\pi$ de f es llamada la **factorización canónica** de f.*

Proposición 1.3.5 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preabeliana. Entonces, para $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow B$ morfismos en $\mathcal{C}$ existe el pullback.*

Demostración. Una demostración de este hecho se encuentra en [6, pág. 26]. □

Proposición 1.3.6 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preabeliana. Entonces para cualesquiera dos morfismos $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow C$ existe el pushout.*

Demostración. Una demostración de este hecho se encuentra en [6, pág.26] □

1.4. Categorías abelianas.

Definición 1.4.1 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preabeliana. Se dice que $\mathcal{C}$ es una* ***categoría abeliana*** *si para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, el morfismo paralelo, $\overline{f} : \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ es un isomorfismo.*

Ejemplo 1.4.2

(a) La categoría de grupos abelianos $\mathcal{A}b$ es abeliana (esto se sigue del Primer Teorema de Isomorfismo).

(b) El dual de una categoría abeliana es abeliana.

(c) Si R es un anillo. La categoría de R-módulos izquierdos ${}_RMod$ y categoría de R-módulos derechos Mod_R son abelianas (ver [7, pág. 308]).

(d) Si K es un campo. La catgoría Vec_K de los $K-$espacios vectoriales es abeliana.

(e) Sea $\mathcal{C}$ categoría abeliana. La categoría de gavillas $Sh(X, \mathcal{C})$ es abeliana (ver [7, pág 309]).

Definición 1.4.3 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ existe. Definimos $\mathbf{Im(f)}$ como el subobjeto $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$, es decir,*

$$Im(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$$

Observación 1.4.4 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Consideremos la factorización canónica de f*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "t"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[r, "u"] & U \\
& \mathrm{Coker}(t) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(u). \arrow[u, "i"] &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathcal{C}$ *es abeliana, tenemos que* $\mathrm{Coker}(t) \cong \mathrm{Ker}(u)$*. Pero por definición,* $i = \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$*. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo con* π *un epimorfismo e* i *un monomorfismo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\
& Im(f). \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.4.5 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría abeliana y* $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo en* $\mathcal{C}$*. La factorización* $f = i\pi$ *como en la observación anterior, se llama la* ***factorización de f a través de su imagen****.*

Notación 1.4.6 *Al morfismo* π *comunmente lo denotamos por* f'*, y al morfismo* i *por* f''*, esto para facilitar la notación y hacer referencia que* f' *y* f'' *están relacionados con* f*.*

Algunas veces se define la imagen de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ como el subobjeto más pequeño de B que factoriza a f (Ver [8, pág. 19]). Sin embargo, la definición dada es equivalente a está última.

Proposición 1.4.7 *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría abeliana y* $f : A \longrightarrow B$ *un morfismo en* $\mathcal{C}$*. Sea*

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, "f''"] & \\
A \arrow[ur, "f'"'] \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

la factorización de f *a través de su imagen. Entonces se cumple la siguiente propiedad. Para cualquier otra factorización* $f = uv$*, con* v *un monomorfismo, existe un único* $\theta : I \longrightarrow K$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dd, "\theta"'] \arrow[dr, "f''"] & \\
& B \\
K. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [8, pág. 19]. $\square$

Lema 1.4.8 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $f : A \longrightarrow B$ morfismo en $\mathcal{C}$. Consideremos la factorización de f a través de su imagen*

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "f''"] & \\ A \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & B. \end{tikzcd}$$

Si $k : B \longrightarrow \operatorname{Coker}(f)$ es el cokernel de f, entonces $(k, \operatorname{Coker}(f))$ es el cokernel de f''.

Demostración. Dado que $k = \operatorname{Coker}(f)$ se tiene que $kf = 0$. Lo cual implica que $kf''f' = 0$; y como f' es un epimorfismo, entonces $kf'' = 0$.

Ahora supongamos que existe un morfismo $w : B \longrightarrow W$ tal que $wf'' = 0$. En conconsecuencia, $wf = wf''f' = 0$. Así por la propiedad del cokernel de f, existe un único morfismo $\varphi : W \longrightarrow \operatorname{Coker}(f)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] & \operatorname{Coker}(f) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & W. & \end{tikzcd}$$

Por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo para el morfismo f''

$$\begin{tikzcd} Im(f) \arrow[r, "f''"] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "w"'] & \operatorname{Coker}(f) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & W. & \end{tikzcd}$$

La unicidad se sigue inmediatamente, pues k es un epimorfismo. Por lo tanto $k = \operatorname{Coker}(f'')$. $\square$

Lema 1.4.9 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $f : A \longrightarrow B$ morfismo en $\mathcal{C}$. Consideremos la factorización de f a través de su imagen*

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "f''"] & \\ A \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & B. \end{tikzcd}$$

Si $k : \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow A$ es el kernel de f. Entonces $k : \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow A$ es el kernel de f'.

Demostración. La demostración es análoga a la del Lema 1.4.8. $\square$

Definición 1.4.10 *Sea una categoría abeliana. Consideremos la siguiente sucesión de morfismos en* $\mathcal{C}$

$$\eta : \cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_{i+2} \longrightarrow \cdots .$$

Decimos que η *es una* ***sucesión exacta*** *si* $\mathrm{Ker}(\alpha_{i+1}) = Im(\alpha_i)$ *como subobjetos de* A_i $\forall i$.

Proposición 1.4.11 *Para una categoría abeliana* $\mathcal{C}$*, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ *es exacta en* $\mathcal{C}$ *si y sólo si* α *es un monomorfismo.*

(b) $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ *es exacta en* $\mathcal{C}$ *si y sólo si* α *es un epimorfismo.*

(c) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ *es exacta en* $\mathcal{C}$ *si y sólo si* α *es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [5, prop. 15.1 en pag. 18.] $\square$

Lema 1.4.12 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría abeliana. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] & \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "g"'] & Y' \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

con el renglón inferior exacto. Entonces el cuadrado del diagrama anterior es un pullback si y sólo si la sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{hv} Z$$

es exacta.

Demostración. Una demostración de esto se encuentra en [6, pág. 35]. $\square$

Lema 1.4.13 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría abeliana. Entonces, todo diagrama*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

que es pullback, se puede completar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker} f' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "1_{\mathrm{Ker} f'}"] & D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & C \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Ker} f' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver [5, 13.1 en la pág. 15]. □

El siguiente lema muestra la relación que existe entre el kernel y cokernel de dos morfismos f y g con el kernel y cokernel de la composición gf, respectivamente. Para un resultado parecido en álgebra conmutativa, se puede consultar [3, pág. 40].

Lema 1.4.14 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ morfismos en $\mathcal{C}$. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta*

$$\begin{tikzcd}
\eta : & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(gf) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[dll, "\delta"'] \\
\varepsilon : & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(gf) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(g) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Veamos la existencia de η.
Sea $i : K \longrightarrow B$ con $i = \mathrm{Ker}(g)$.Consideremos el siguiente diagrama donde el cuadrado es un pullback

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] & \\
\mathrm{Ker}(g) = K \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "g"'] & C.
\end{tikzcd}$$

Como $i = \mathrm{Ker}(g)$, por el Lema 1.4.12 se tiene que $i' = \mathrm{Ker}(gf)$ (es decir, $K' = \mathrm{Ker}(gf)$).
Ahora bien, considerando el cuadrado de pullback

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i'"'] & K \arrow[d, "i"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

sea $j : K'' \longrightarrow A$ con $j = \mathrm{Ker}(f)$ (es decir, $K'' = \mathrm{Ker}(f)$). Entonces por el Lema 1.4.13 se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K'' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, equal] & K' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i'"'] & K \arrow[d, "i"] \\
0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Luego $0 \longrightarrow K'' \longrightarrow K' \longrightarrow K$ es la sucesión η.
La construción de la sucesión ε se realiza utilizando los resultados duales de 1.4.12 y 1.4.13. □

Lema 1.4.15 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideremos la siguiente sucesión*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

donde f es un monomorfismos y g es un epimorfismo. Entonces $f = \mathrm{Ker}(g)$ si y sólo si $g = \mathrm{Coker}(f)$. En este caso la sucesión anterior es exacta.

Demostración. ($\Longrightarrow$)Supongamos que f es el kernel de g. Como g es un epimorfismo tenemos que $\mathrm{Coker}(g) = 0$. De manera que tenemos el siguiente diagrama para la factorización canónica de g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & C \arrow[r, "0"] & \mathrm{Coker}(g) = 0 \\ & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, "\overline{g}"'] & \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(g)). \arrow[u, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Se puede ver fácilmente que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(g)) = C$ y $u = 1_C$. Dado que $\mathcal{C}$ es abeliana tenemos que $\overline{g}$ es un isomorfismo. En consecuencia, $\mathrm{Coker}(f) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(g)) = C$. Por lo tanto, t y g son objetos cocientes isomorfos. Por lo tanto, podemos suponer que $g = \mathrm{Coker}(f)$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $g = \mathrm{Coker}(f)$. De esta manera tenjemos el siguiente diagrama conmutativo para la factorización canónica de f

es el cokernel de f. Dado que f es un monomorfismo tenemos el siguiente diagrama para la factorización a través de la imagen de f

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r, "g"] & C \\ & A \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[u, "u"'] & \end{tikzcd}$$

ya que f es un monomorfismo y $1_A = \mathrm{Coker}(0)$. Como $\mathcal{C}$ es abeliana $\overline{f}$ es isomorfismo y entonces $\overline{f} : A \longrightarrow \mathrm{Ker}(g)$ es isomorfismo.
Por lo tanto, f y u son isomorfos como subobjetos. Por lo tanto podemos suponer que $f = \mathrm{Ker}(g)$. $\square$

Proposición 1.4.16 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideremos el siguiente diagrama de pullback*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama anterior se puede completar al siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Coker}(f') \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\
C \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde ζ es un monomorfismo.

Demostración. Consideremos la factorización a través de su imagen de los morfismos g y f respectivamente

$$\begin{tikzcd}
 & Im(g) \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
A \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Im(f) \arrow[dr, "\beta'"] & \\
C \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "f"'] & & B.
\end{tikzcd}$$

Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo de 4 pullbacks

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\epsilon"'] \arrow[dr, phantom, "IV"] & Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dr, phantom, "III"] & A \arrow[d, "\gamma"] \\
C' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "II"] & X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & \mathrm{Im}(g) \arrow[d, "\gamma'"] \\
C \arrow[r, "\beta"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r, "\beta'"'] & B,
\end{tikzcd}$$

donde β', θ, σ, μ y δ son monomorfismos y γ, ν, ϵ β, φ y ρ son epimorfismos por el Lema 1.1.21. Del Lema 1.1.22 tenemos que el rectángulo formado por (I) y (II) es un pullback.
Como $\gamma'(\gamma f') = fg'$, existe un único morfismo $\psi : D \longrightarrow C'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "\gamma f'"] \arrow[ddr, bend right, "g'"'] & & \\
 & C' \arrow[r, "\theta\varphi"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathrm{Im}(g) \arrow[d, "\gamma'"] \\
 & C \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, considerando el diagrama de pullback III y que $\gamma f' = \theta(\varphi\psi)$, tenemos que existe un único morfismo $\lambda : D \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "f'"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi\psi"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\nu"'] & A \arrow[d, "\gamma"] \\
& X \arrow[r, "\theta"'] & \mathrm{Im}(g).
\end{tikzcd}$$

Considerando el cuadrado de pullback IV y que $\nu\lambda = \varphi\psi$, tenemos que existe $\lambda' : D \longrightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "\lambda'"] \arrow[drr, bend left, "\lambda"] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & & \\
& Z \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\epsilon"'] & Y \arrow[d, "\nu"] \\
& C' \arrow[r, "\varphi"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, por hipótesis, tenemos un pullback

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Considerando el cuadrado exterior formado por el diagrama de los 4 pullbacks, entonces existe un único morfismo $\lambda'' : Z \longrightarrow D$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\lambda''"] \arrow[drr, bend left, "\sigma\rho"] \arrow[ddr, bend right, "\delta\epsilon"'] & & \\
& D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "g"] \\
& C \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left, "f'"] \arrow[ddr, bend right, "g'"'] \arrow[dr, dotted, "\lambda''\lambda'"] & & \\
& D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "g"] \\
& C \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}
$$

En efecto, $g'\lambda''\lambda' = \delta\epsilon\lambda' = \delta\psi = g'$ y $f'\lambda''\lambda' = \sigma\rho\lambda' = \sigma\lambda = f'$. Por la propiedad universal del pullback, tenemos que $\lambda''\lambda' = 1_D$. Concluyendo que λ'' es un epimorfismo.
Entonces por 1.4.8 tenemos que $\text{Coker}(f') = \text{Coker}(f'\lambda'') = \text{Coker}(\sigma\rho) = \text{Coker}(\sigma)$, pues λ'' y ρ son epimorfismos. Como β' es un monomorfismo, por 1.4.9, tenemos el siguiente diagrama de pullback

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu\nu"'] & A \arrow[d, "g=\gamma'\gamma"] \\
\text{Im}(f) \arrow[r, "\beta'"] & B.
\end{tikzcd}
$$

Como $f = \beta'\beta$ y β es un epimorfismo, tenemos que $\text{Coker}(f) = \text{Coker}(\beta')$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu\nu"'] & A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "g=\gamma'\gamma"] & I \arrow[d, "\zeta"] & \\
0 \arrow[r] & \text{Im}(f) \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r, "\pi"] & \text{Coker}(f) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}
$$

donde $\pi g = \zeta\pi'$ es la factorización a través de su imagen de πg. Por el Lema 1.4.12 tenemos que $\sigma = \text{Ker}(\pi g) = \text{Ker}(\zeta\pi')$. Pero ζ es un monomorfismo y por lo tanto, $\sigma = \text{Ker}(\pi')$. Como π' es un epimorfismo, por el Lema 1.4.15, concluimos que $\pi' = \text{Coker}(\sigma)$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto, donde ζ es un monomorfismo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mu\nu"'] & A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "g=\gamma'\gamma"] & I \arrow[d, "\zeta"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \text{Im}(f) \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r, "\pi"] & \text{Coker}(f) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "g"'] & I \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\ C \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

ya que $\mathrm{Coker}(f') = \mathrm{Coker}(\sigma)$ y $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coker}(\beta')$. $\square$

1.5. Propiedades que preservan los funtores

Definición 1.5.1 *Sea $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante.*

*(a) Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías con objeto cero, se dice que **T preserva objetos cero** (resp. morfismos cero) si $T(0)$ es un objeto cero (resp. morfismo cero) en $\mathcal{D}$ siempre que 0 lo sea en $\mathcal{C}$.*

*(b) T **preserva kerneles** si $T(\mu) : T(K) \longrightarrow T(A)$ es el kernel de $T(\alpha) : T(A) \longrightarrow T(B)$ siempre que $\mu : K \longrightarrow A$ es el kernel de $\alpha : A \longrightarrow B$.*

Dualmente se tiene la noción que T preserva cokerneles.

*(c) T **preserva cokerneles** si $T(\pi) : T(B) \longrightarrow T(L)$ es el cokernel de $T(\alpha) : T(A) \longrightarrow T(B)$ siempre que $\pi : B \longrightarrow L$ es el cokernel de $\alpha : A \longrightarrow B$.*

Definición 1.5.2 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas. Decimos que el funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es **exacto**, si $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$ es una sucesión exacta en $\mathcal{D}$ para toda sucesión exacta $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ en $\mathcal{C}$.*

Proposición 1.5.3 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas y $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante. Entonces:*

(a) T preserva kerneles si y sólo si para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{C}$ la sucesión $0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C)$ es exacta en $\mathcal{D}$.

(b) T preserva cokerneles si y sólo si para toda sucesión exacta corta como la anterior, la sucesión $T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C) \longrightarrow 0$ es exacta.

(c) T es exacto si y sólo si para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0,$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C) \longrightarrow 0$$

es exacta $\mathcal{D}$.

Demostración. Consultar [8, pag. 76]. □

Capítulo 2

Localización

El término localización se origina en geometría algebraica: si R es un anillo de funciones definido en algún objeto geométrico (variedad algebraica) V, y uno quiere estudiar esta variedad *localmente* cerca de un punto p, entonces se considera el conjunto S de todas las funciones que no son cero en p y se localiza R con respecto a S. El anillo resultante $S^{-1}R$ contiene solamente información sobre el comportamiento de V cerca de p. Para más detalles, vea [2].

El concepto de localización para anillos conmutativos se generaliza a cierto tipo de categorías durante este capítulo y durante el mismo se estudian propiedades que la localización $\mathcal{C}_\Sigma$ hereda de la categoría original $\mathcal{C}$, el capítulo se ha desarrollado en gran parte de [6].

2.1. Categoría de fracciones y sistemas calculables

Una motivación para la localización en categorías es generalizar el concepto de localización de anillos conmutativos con identidad.

Definición 2.1.1 *Sea A un anillo conmutativo con identidad. Un subconjunto $S \subseteq A$ se dice* ***multiplicativo*** *si:*

(a) $1_A \in S$,

(b) si $s, s' \in S$ *entonces* $ss' \in S$.

Sobre el conjunto

$$S \times A := \{(s, a) |\ s \in S,\ a \in A\}$$

definimos una relación: $(s,a) \sim (s',a')$ si existe $s'' \in S$ tal que $s''(as' - a's) = 0$. La relación $\sim$ resulta ser de equivalencia. Denotamos por $\frac{a}{s}$ a la clase de equivalencia de (s,a), es decir,

$$\frac{a}{s} = \{(s',a')|(s',a') \sim (s,a)\}$$

Denotaremos por $S^{-1}A$ a las clases de equivalencia dadas por la relación anterior. Es decir,

$$S^{-1}A = \{\frac{a}{s}|a \in A,\ s \in S\}.$$

Observación 2.1.2 *El conjunto $S^{-1}A$ es un anillo conmutativo con identidad, con las operaciones siguientes:*

(a) $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as'+a's}{ss'}$,

(b) $(\frac{a}{s})(\frac{a'}{s'}) = \frac{aa'}{ss'}$,

(c) La identidad en $S^{-1}A$ es el elemento $\frac{1}{1}$.

Con lo anterior tenemos una función $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ tal que $\varphi(a) = \frac{a}{1}$. Resulta sencillo ver que φ es un morfismo de anillos conmutativos con identidad. Más aún se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3 *Sean A un anillo conmutativo con 1 y S un subconjunto multiplicativo de A. Entonces, el par $(\varphi, S^{-1}A)$ satisface lo siguiente:*

(a) $\forall\ s \in S$, $\varphi(s)$ es una unidad en $S^{-1}A$.

(b) Sea $\psi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos tal que $\psi(s)$ es unidad en B, para todo $s \in S$. Entonces, existe un único morfismo de anillos $\theta : S^{-1}A \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Ver [2, pág 36]. $\square$

Definición 2.1.4 *Sean A anillo conmutativo con 1 y $S \subseteq A$ un sistema multiplicativo. El par $(\varphi, S^{-1}A)$ se llama la* ***localización de A respecto a S****.*

Ejemplo 2.1.5

(a) Sea $A = \mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros y $S = \mathbb{Z} - \{0\}$. Entonces $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ y $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es definido por $\varphi(a) = \frac{a}{1}$.

(b) Sea $A = \mathbb{Z}$ y consideremos el ideal primo generado por el primo 5, es decir, $P =< 5 >$. Definimos $S = \mathbb{Z}- < 5 >$, entonces $S^{-1}A = \mathbb{Z}_{(5)}$, donde

$$\mathbb{Z}_{(5)} = \{q \in \mathbb{Q} | q = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y 5 no divide a } b\}.$$

De manera más general se tiene el siguiente ejemplo

(c) Sea A un anillo conmutativo con 1 y P un ideal primo de A, definimos $S = A - P$. Entonces $S^{-1}A := A_P$ donde

$$A_P = \{\frac{f}{g} \in K | f, g \in A \text{ y } g \notin P\}.$$

con $K = frac(A)$. El anillo A_P es llamado la localización de A en P.

Motivados en esta contrucción para anillos conmutativos (ver [2, pág. 41]) es que se tiene la siguiente definición. En la siguiente definición y durante todo el capítulo la pabra funtor se refiere a funtor covariante a menos que se especifique lo contrario.

Definición 2.1.6 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y Σ una clase de morfismos de $\mathcal{C}$. Se dice que la pareja $(T, \mathcal{C}_\Sigma)$, donde $\mathcal{C}_\Sigma$ es una categoría y $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_\Sigma$ un funtor, es una* ***categoría de fracciones de*** *$\mathcal{C}$* ***relativa a*** *Σ si las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) Para cada $s \in \Sigma$, $T(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}_\Sigma$

(b) Si $T' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, es un funtor tal que para cada $s \in \Sigma$, $T'(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}'$ entonces existe un único funtor $\overline{T} : \mathcal{C}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & \mathcal{C}_\Sigma \arrow[d, "\overline{T}"] \\ & \mathcal{C}'. \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.1.7

(a) La categoría derivada de una categoría abeliana es muy utilizada en álgebra homológica. Es la localización de la categoría de complejos de cadena (hasta homotopía) con respecto a los cuasi-isomorfismos.

(b) En teoría de módulos sobre un anillo conmutativo R, cuando R tiene una dimensión de Krull ≥ 2, puede ser útil tratar módulos M y N como pseudo-isomorfos si M/N tiene soporte de codimensión al menos dos. Esta idea es muy utilizada en la teoría de Iwasawa.

(c) Una isogenia de una variedad abeliana A a otra B es un morfismo suprajectivo con núcleo finito. Algunos teoremas sobre variedades abelianas requieren la idea de variedad abeliana hasta isogenia para su declaración conveniente. Por ejemplo, dada una subvariedad abeliana A_1 de A, hay otra subvariedad A_2 de A tal que $A_1 \times A_2$ es isogeno a A (Teorema de Poincaré). Para llamar a esto una descomposición de la suma directa, debemos trabajar en la categoría de variedades abelianas hasta la isogenia.

Definición 2.1.8 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y Σ una clase de morfismos en $\mathcal{C}$. Se dice que Σ es un* ***sistema multiplicativo*** *si:*

(a) para $s : X \longrightarrow Y$ y $s' : Y \longrightarrow Z$ morfismos en Σ, se tiene que la composición $s' \circ s \in \Sigma$,

(b) $1_X \in \Sigma \ \forall \ X \in Obj(\mathcal{C})$.

Definición 2.1.9 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema multiplicativo. Se dice que Σ es* ***calculable a derecha*** *si:*

(a) Σ es ***permutable a derecha****, es decir, cada diagrama en $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "s"'] & Y \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$ puede ser completado a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "s'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

con $s' \in \Sigma$.

(b) Σ es ***simplificable a derecha****, es decir, para cada par de morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$ para los cuales existe $s : Y \longrightarrow Y'$ con $s \in \Sigma$ tal que $sf = sg$, existe $s' \in \Sigma$ tal que $fs' = gs'$.*

Dualmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.10 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema multiplicativo. Se dice que Σ es* ***calculable a izquierda*** *si:*

(a) *Σ es **permutable a izquierda**, es decir, cada diagrama en $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & X' \\ Y & \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$ puede ser completado a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "s"] & X' \arrow[d, "s'"] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

con $s' \in \Sigma$.

(b) *Σ es **simplificable a izquierda**, es decir, para cada par de morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$ para los cuales existe $s : X' \longrightarrow X$ con $s \in \Sigma$ tal que $fs = gs$, existe $s' \in \Sigma$ tal que $s'f = s'g$.*

Definición 2.1.11 *Se dice que Σ es **calculable** si Σ es simultaneamente calculable a izquierda y a derecha.*

2.1.1. Ejemplos de sistemas calculables

Ejemplo 2.1.12 *Sea A un anillo conmutativo con identidad. Entonces, cada subconjunto multiplicativo de A es un sistema calculable.*

Demostración. Recordemos que a A lo podemos pensar como una categoría $\mathcal{C}$, donde Obj $(\mathcal{C}) = \{a\}$ la categoría con un sólo objeto y $Mor(\mathcal{C}) := \mathrm{Hom}_A(a, a) = A$. La ley de composición

$$\circ : \mathrm{Hom}_A(a, a) \times \mathrm{Hom}_A(a, a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(a, a),$$

está definida como $g \circ f = gf$ donde gf denota la multiplicación del anillo A. Sea $\Sigma \subseteq A = Mor(\mathcal{C})$ multiplicativo. Veamos que Σ es un sistema calculable.

(a) Sean $f, g \in \Sigma$, veamos que $g \circ f \in \Sigma$.
En efecto, tenemos que $g \circ f = gf \in \Sigma$, ya que como Σ es multiplicativo, es cerrado por multiplicación.

(b) Como Σ es multiplicativo por definición en 2.1.1, $1 \in \Sigma$. Luego $1_A : a \longrightarrow a$ pertenece a Σ.

Afirmamos que Σ es permutable a derecha.
En efecto, tomemos el diagrama en $\mathcal{C}$ con $s \in \Sigma$

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "s"'] & a, \end{tikzcd}$$

necesitamos $f', s' \in Mor(\mathcal{C})$ tales que $s \circ f' = f \circ s'$. Dado que la composición se definió como la multiplicación en el anillo, tenemos que $s \circ f' = sf'$ y $f \circ s' = fs'$. Debido a que el anillo A es conmutativo tenemos que $fs = sf$. Tomando $f' = f$ y $s' = s$, se tiene que $s \circ f' = sf' = sf = fs = f's = f' \circ s$. Por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "f'"] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "s"'] & a. \end{tikzcd}$$

Ahora veamos que Σ es simplificable a derecha. Sean $f, g : a \longrightarrow a$ morfismos tales que existe $s : a \longrightarrow a$ tal que $sf = sg$, es decir, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & a \arrow[d, "s"] \\ a \arrow[r, "s"] & a \end{tikzcd}$$

Verifiquemos que existe $k : a \longrightarrow a$ tal que $fk = gk$, con $k \in \Sigma$, es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "g"] & a. \end{tikzcd}$$

En efecto, tomando $k = s$ tenemos que $fk = fs = sf = sg = gs = gk$. Probándose que Σ es calculable a derecha. De manera análoga se obtiene que Σ es calculable a izquierda. Así Σ es un sistema calculable. $\square$

El siguiente ejemplo de sistema calculable que desarrollamos se encuentra en la categoría de grupos abelianos Ab. Sin embargo, para tener una prueba clara se requiere de unos resultados previos y de recordaremos una clase particular de grupos.

Definición 2.1.13 *Sea G un grupo abeliano. Se dice que un subgrupo H de G es un* ***subgrupo de torsión*** *si para cada $a \in G$ existe $n \geq 0$ tal que $a^n = 0_G$, es decir, todos los elementos de H tienen orden finito.*

Ejemplo 2.1.14 *(a) Cualquier grupo abeliano finito es de torsión.*

(b) El grupo abeliano $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es de torsión.

(c) $\mathbb{Z}(p^{\infty})$.

Lema 2.1.15 *Sea $\mathcal{A}b$ la categoría de grupos abelianos. Consideremos la siguiente sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Entonces B es un grupo de torsión si y sólo si A y C los son.

Demostración. La demostración de este resultado no es difícil, por lo que se omite. □

Ejemplo 2.1.16 *Sean $\mathcal{A}b$ la categoría de grupos abelianos y*

$$\Sigma := \{f \in Mor(\mathcal{A}b) \mid \mathrm{Ker}(f) \text{ y } \mathrm{Coker}(f) \text{ son de torsión}\}.$$

Entonces Σ es un sistema calculable.

Demostración. Para ver que Σ es un sistema calculable, tenemos que demostrar que Σ es calculable a izquierda y a derecha. Primero veremos que la clase de morfismos Σ es un sistema calculable a derecha.

(a) Σ es multiplicativo. Sean $f, g \in \Sigma$, donde $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son morfismos de grupos abelianos. Veamos que $gf \in \Sigma$.
En efecto, por el Lema 1.4.14 tenemos la existencia de las siguientes sucesiones exactas

$$\eta : \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{u} \mathrm{Ker}(gf) \xrightarrow{w} \mathrm{Ker}(g)$$

$$\varepsilon : \qquad \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{t} \mathrm{Coker}(gf) \xrightarrow{z} \mathrm{Coker}(g) \longrightarrow 0$$

De las sucesiones η y ε se obtienen las siguientes sucesiones exactas cortas

$$\eta' : \qquad 0 \longrightarrow I_1 \xrightarrow{w''} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Ker}(g)/I_1 \longrightarrow 0$$

$$\varepsilon' : 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(t') \xrightarrow{i} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{t'} I_2 \longrightarrow 0$$

donde $I_1 := Im(w)$ y $I_2 := Im(t)$. Luego como $g \in \Sigma$, $\mathrm{Ker}(g)$ es de torsión por el Lema 2.1.15 tenemos que I_1 es de torsión. Análogamente, dado que $\mathrm{Coker}(f)$ es de torsión entonces I_2 es de torsión. Considerando ahora las siguientes sucesiones exactas

$$\eta'' : \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{u} \mathrm{Ker}(gf) \xrightarrow{w'} I_1 \longrightarrow 0$$

$$\varepsilon'' : \qquad 0 \longrightarrow I_2 \xrightarrow{t''} \mathrm{Coker}(gf) \xrightarrow{z} \mathrm{Coker}(g) \longrightarrow 0$$

por el Lema 2.1.15, tenemos que $\mathrm{Ker}(gf)$ y $\mathrm{Coker}(gf)$ son de torsión. Por lo tanto, $gf \in \Sigma$.

(b) Todos los morfismo identidad están en Σ.
En efecto, dado que $1_A : A \longrightarrow A$ es un isomorfismo para cada $A \in \mathrm{Ab}$ se tiene que $\mathrm{Ker}(1_A) = \mathrm{Coker}(1_A) = \{0\}$. En consecuencia, $\mathrm{Ker}(1_A)$ y $\mathrm{Coker}(1_A)$ son grupos de torsión. Por lo tanto, $1_A \in \Sigma$.

(c) El sistema multiplicativo Σ es permutable a derecha.
En efecto, consideremos el diagrama en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

con $f \in \Sigma$.

Consideremos el pullback del par (f, g)

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Dado que $f \in \Sigma$, $\mathrm{Ker}(f)$ es un grupo de torsión; y por el Lema 1.4.13, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker} f \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "1_{\mathrm{Ker} f}"'] & D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Ker} f' \arrow[r, "i"'] & C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Ker}(f')$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(f')$ es un grupo abeliano de torsión. Por la Proposición 1.4.16, podemos considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Coker}(f') \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\ C \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde ζ es un monomorfismo. Dado que $f \in \Sigma$, $\mathrm{Coker}(f)$ es de torsión. Del Lema 2.1.15, tenemos que $\mathrm{Coker}(f')$ es de torsión. Por lo tanto, $f' \in \Sigma$.

(d) El sistema Σ es simplificable a derecha.
En efecto, sean $f, g : X \longrightarrow Y$ morfismos en $\mathcal{C}$ y $s : Y \longrightarrow Y'$ con $s \in \Sigma$ tales que $sg = sf$. Consideremos el morfismo $g - f : X \longrightarrow Y$. Como $sg = sf$, tenemos que $s(g - f) = 0$.
Consideremos $r : \mathrm{Ker}(g - f) \longrightarrow X$ el kernel del morfismo $g - f$. Claramente tenemos que $(g - f)r = 0$, lo cual implica que $gr = fr$. Solo falta ver que $r \in \Sigma$.

Veamos que $r \in \Sigma$.
En efecto, dado que r es un monomorfismo tenemos que $\mathrm{Ker}(r) = 0$, por lo que $\mathrm{Ker}(r)$ es un grupo de torsión. Por otro lado, tenemos que $s(g-f) = 0$ lo cual implica que $Im(g-f) \subseteq \mathrm{Ker}(s)$, por lo tanto $Im(g-f)$ es de torsión.

Consideremos el cokernel del morfismo r, es decir, $w : X \longrightarrow \mathrm{Coker}(r)$, el cual es parte del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g-f) \arrow[r, "r"] & X \arrow[r, "g-f"] \arrow[d, "w"'] & Y \arrow[r, "e"] & \mathrm{Coker}(g-f) \\
& & \mathrm{Coker}(r) \arrow[r, "\overline{g-f}"'] & \mathrm{Ker}(e), \arrow[u, "z"'] &
\end{tikzcd}$$

donde w un epimorfismo y z un monomorfismo.
Dado que la categoría de grupos abelianos es abeliana, tenemos que $\overline{g - f}$ es un isomorfismo; y por lo tanto,

$$Im(g - f) \cong \mathrm{Ker}(e) \cong \mathrm{Coker}(r) = X/\mathrm{Ker}(g - f).$$

En consecuencia, $\mathrm{Coker}(r)$ es un grupo abeliano de torsión por que $Im(g-f)$ lo es.

Para demostrar que Σ es un sistema calculable a izquierda, se usan los resultados duales de la Proposición 1.4.16 y el Lema 1.4.13.
□

2.2. Categorías conexas y casi-directas

Definición 2.2.1 *Sea $\mathcal{F}$ una categoría arbitraria. Decimos que $\mathcal{F}$ es una categoría* ***casi-directa a izquierda*** *si cumple las siguientes condiciones:*

(a) Cualquier diagrama en $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd} B \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C, \end{tikzcd}$$

se puede completar a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & D \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(b) Para cada pareja de morfismos $u, v : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{F}$ existe un morfismo $w : B \longrightarrow C$ tal que $wu = wv$.

Definición 2.2.2 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una subcategoría plena $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ es llamada **cofinal** si para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe un morfismo $u : A \longrightarrow A'$ con $A' \in \mathcal{C}'$.*

Lema 2.2.3 *Sean $\mathcal{F}$ una categoría casi-directa izquierda, $\mathcal{F}'$ una subcategoría cofinal pequeña de $\mathcal{F}$ y $T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}$ un funtor covariante. Sea $f = \{f_i : T(i) \longrightarrow X\}_{i \in \mathcal{F}'}$ una familia de morfismos en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta $\forall\ m : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}'$*

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "T(m)"'] & X \\ T(j). \arrow[ur, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

Entonces, la familia f se extiende a una única familia $f' = \{f'_i : T(i) \longrightarrow X\}_{i \in \mathcal{F}}$ tal que $f'_i = f_i\ \forall i \in \mathcal{F}'$; y tal que $\forall\ n : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[r, "f'_i"] \arrow[d, "T(n)"'] & X \\ T(j). \arrow[ur, "f'_j"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Para $i \in \mathcal{F}'$ definimos $f'_i := f_i$.
Sea $i \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}'$ es cofinal, existe un morfismo $\alpha : i \longrightarrow k$ con $k \in \mathcal{F}'$. Consideremos el morfismo $f_k : T(k) \longrightarrow X$. Definimos

$$f'_i := f_k T(\alpha) : T(i) \longrightarrow X.$$

Veamos que la definición de f'_i no depende del morfismo $\alpha : i \longrightarrow k$. En efecto, supongamos que $\alpha' : i \longrightarrow k'$ es otro morfismo con $k' \in \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}$ es casi-directa izquierda existen $\beta : k \longrightarrow l$ y $\beta' : k' \longrightarrow l$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dr, "\beta"] & \\ i \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & l \\ & k'. \arrow[ur, "\beta'"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{F}'$ es cofinal, existe $\gamma : l \longrightarrow l'$, con $l' \in \mathcal{F}'$, tal que

$$\gamma\beta\alpha = \gamma\beta'\alpha'.$$

Notemos que $\gamma\beta : k \longrightarrow l'$ y $\gamma\beta' : k' \longrightarrow l'$ son morfismos en $\mathcal{F}'$ pues $k, l', k' \in \mathcal{F}'$. Luego tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} T(k) \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "T(\gamma\beta)"'] & X \\ T(l') \arrow[ur, "f_{l'}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(k') \arrow[r, "f_{k'}"] \arrow[d, "T(\gamma\beta')"'] & X \\ T(l'). \arrow[ur, "f_{l'}"'] & \end{tikzcd}$$

DAdo que $\gamma\beta\alpha = \gamma\beta'\alpha'$, tenemos que

$$f_{l'}T(\gamma\beta\alpha) = f_{l'}T(\gamma\beta'\alpha').$$

Pero por un lado, $f_{l'}T(\gamma\beta\alpha) = f_{l'}T(\gamma\beta)T(\alpha) = f_kT(\alpha)$.
Por otro lado, $f_{l'}T(\gamma\beta'\alpha') = f_{l'}T(\gamma\beta')T(\alpha') = f_{k'}T(\alpha')$. Por lo tanto, $f_kT(\alpha) = f_{k'}T(\alpha')$ y entonces la definición de f'_i no depende del morfismo $k : i \longrightarrow j$ con $k \in \mathcal{F}'$. Con esto tenemos la familia $\{f'_i : T(i) \longrightarrow X\}_{i \in \mathcal{F}}$.
Ahora veamos que el siguiente diagrama conmuta $\forall\ n : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[r, "f'_i"] \arrow[d, "T(n)"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & X \\ T(j). \arrow[ur, "f'_j"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, checaremos varios casos posibles:

(a) Sean i y j en $\mathcal{F}'$. Entonces, el diagrama $(*)$ conmuta, pues en este caso $f'_i = f_i$ y $f'_j = f_j$.

(b) Sean $i \in \mathcal{F}'$ y $j \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'$.
En este caso, tenemos que $f'_j = f_r T(\alpha)$ con $\alpha : j \longrightarrow r$, $r \in \mathcal{F}'$. Consideremos $\alpha n : i \longrightarrow r$ morfismo en $\mathcal{F}$. Como $i, r \in \mathcal{F}'$ tenemos el siguiente digrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "T(\alpha n)"'] & X \\ T(r). \arrow[ur, "f_r"'] & \end{tikzcd}$$

Luego $f'_j T(n) = (f_r T(\alpha))T(n) = f_r T(\alpha n) = f_i = f'_i$ (pues $i \in \mathcal{F}'$).

(c) Sean $i \notin \mathcal{F}'$ y $j \in \mathcal{F}'$. En este caso tenemos $n : i \longrightarrow j$ con $j \in \mathcal{F}'$. Entonces $f'_i = f_j T(n)$, pues vimos que la definición de f'_i no depende del morfismo $\alpha : i \longrightarrow k$ con $k \in \mathcal{F}'$.
Por lo tanto, $f'_i = f_j T(n) = f'_j T(n)$ (pues $j \in \mathcal{F}'$).

(d) Sean $i \notin \mathcal{F}'$ y $j \notin \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}$ es casi-directa izquierda, existe un morfismo $\alpha : j \longrightarrow k$ con $k \in \mathcal{F}'$. Luego tenemos el siguiente morfismo $\alpha n : i \longrightarrow k$. Dado que f'_i y f'_j están bien definidos, tenemos que:

$$f'_i := f_k T(\alpha n) \text{ y también } f'_j := f_k T(\alpha).$$

Por lo tanto, $f'_j T(n) = (f_k T(\alpha))T(n) = f_k T(\alpha n) = f'_i$.

Veamos la unicidad de la familia f'.
Sea $g = \{g_i : T(i) \longrightarrow X\}_{i \in \mathcal{F}}$ tal que $g_i = f_i \; \forall \; i \in \mathcal{F}'$ y tal que $\forall \; n : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "T(n)"'] & X \\ T(j). \arrow[ur, "g_j"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que $g = f'$. Basta ver que para $i \notin \mathcal{F}'$ se tiene que $g_i = f'_i$. En efecto, sea $i \notin \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}'$ es cofinal, existe $\alpha : i \longrightarrow k$, con $k \in \mathcal{F}'$. Entonces por hipótesis, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "T(\alpha)"'] & X \\ T(j) \arrow[ur, "g_k"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, $g_i = g_k T(\alpha)$, pero $g_k = f_k$ pues $k \in \mathcal{F}'$. Por lo tanto, $g_i = g_k T(\alpha) = f_k T(\alpha) = f'_i$.
Probándose que $g = f'$.

$\square$

Definición 2.2.4 *Sea I una categoría y $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$ un funtor covariante. El* ***límite directo de F*** *denotado por $\varinjlim F$ es una familia de morfismos $\{\lambda_i : F(i) \longrightarrow X\}_{i\in I}$ que satisface las siguientes condiciones.*

(a) Es ***compatible*** *con F, es decir, $\forall\ f : i \longrightarrow j$ en I el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "T(f)"'] & X \\ F(j) \arrow[ur, "\lambda_j"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Si $\{\mu_i : F(i) \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ es otra familia compatible, existe un único morfismo $\theta : X \longrightarrow Y$ tal que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta"] & & Y \\ & F(i) \arrow[ul, "\lambda_i"] \arrow[ur, "\mu_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta $\forall i \in I$.

Observación 2.2.5 *Se puede ver fácilmente que cualesquiera dos límites directos son isomorfos. Luego, al objeto X de la definición anterior lo denotamos por $\varinjlim F$.*

Teorema 2.2.6 *Sea $\mathcal{F}$ una categoría casi-directa izquierda, $\mathcal{F}'$ una subcategoría cofinal pequeña de $\mathcal{F}$ y $H : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ el funtor inclusión. Entonces, el funtor $T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}$ tiene límite directo si y sólo si TH tiene límite directo. Además $\varinjlim T \cong \varinjlim TH$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que el límite del funtor $T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}$ existe, por lo que existe una familia de morfismos $\{\eta_i : T(i) \longrightarrow \varinjlim T\}_{i\in\mathcal{F}}$ tal que $\forall\ k : i \longrightarrow j$ morfismo en $\mathcal{F}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[dd, "T(k)"'] \arrow[dr, "\eta_i"] & \\ & \varinjlim T := M \\ T(j) \arrow[ur, "\eta_j"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, para todo morfismo $k : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
TH(i) = T(i) \arrow[dd, "T(k)"'] \arrow[dr, "\eta_i"] & \\
& \varinjlim T = M \\
TH(j) = T(j) \arrow[ur, "\eta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

De esta manera $\varinjlim T$ es candidato a ser el $\varinjlim TH$.

Veamos que la familia $\{\eta_i : T(i) \longrightarrow \varinjlim T\}_{i\in\mathcal{F}'}$ es el límite directo de TH. Para esto falta ver que $\{\eta_i : T(i) \longrightarrow \varinjlim T\}_{i\in\mathcal{F}'}$ satisface la propiedad universal. En efecto, sea $\{g_i : T(i) \longrightarrow X\}_{i\in\mathcal{F}'}$ otra familia de morfismos tal que $g_i = g_j T(k)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta $\forall\ k : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}'$

$$\begin{tikzcd}
T(i) \arrow[dd, "\varphi_{ij}"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\
& X \\
T(j). \arrow[ur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Por el Lema 2.2.3 existe una familia $\{g_i'\}_{i\in\mathcal{F}}$ tal que $g_i' = g_i\ \forall\ i \in \mathcal{F}'$. Por la propiedad universal de $\varinjlim T$ existe un único $\Theta : M \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta $\forall i \in \mathcal{F}'$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\Theta"] & & X \\
& T(i) \arrow[ul, "\eta_i"] \arrow[ur, "g_i'"'] &
\end{tikzcd}$$

para cada $i \in \mathcal{F}$, en particular para $i \in \mathcal{F}'$.

Verifiquemos ahora la unicidad de Θ en $\mathcal{F}'$.
En efecto, supongamos que existe $\Theta' : M \longrightarrow X$ tal que $\Theta'\eta_i = g_i'$ para cada $i \in \mathcal{F}'$.

Veamos que $\theta'\eta_l = g_l'\ \forall\ l \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'$.
En efecto, como $\mathcal{F}$ es casi-directa a izquierda , existe $\alpha : l \longrightarrow k$ con $k \in \mathcal{F}'$. Por

definición de g'_l tenemos que $g'_l = g_k T(\alpha)$. Como $k \in \mathcal{F}'$, tenemos que $g_k = \theta' \eta_k$ y por lo tanto,

$$g'_l = g_k T(\alpha) = \theta' \eta_k T(\alpha) = \theta' \eta_l$$

pues $\{\eta_i : T(i) \longrightarrow M\}_{i \in \mathcal{F}}$ es el límite directo. Luego entonces $\theta' \eta_i = g'_i \ \forall\, i \in \mathcal{F}$. Por la unicidad del límite $\{\eta_i\}$, concluimos que $\Theta' = \Theta$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\varinjlim TH$ existe, es decir, existe una familia $\eta = \{\eta_i : T(i) \longrightarrow L\}_{i \in \mathcal{F}'}$ tal que $\forall\, k : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}'$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} TH(i) \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "TH(k)"'] & L \\ TH(j) \arrow[ur, "\eta_j"'] & \end{tikzcd}$$

Por el Lema 2.2.3, existe $\eta' = \{\eta'_i : T(i) \longrightarrow L\}_{i \in \mathcal{F}}$ tal que $\eta'_i = \eta_i \ \forall\, i \in \mathcal{F}'$ y si $k : i \longrightarrow j$ es un morfismo en $\mathcal{F}$ entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T(i) \arrow[r, "\eta'_i"] \arrow[d, "T(k)"'] & L \\ T(j) \arrow[ur, "\eta'_j"'] & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que $\eta' = \{\eta'_i\}_{i \in \mathcal{F}}$ es el límite directo de T.
En efecto, sea $\{g_i : T(i) \longrightarrow X\}_{i \in \mathcal{F}}$ morfismos en $\mathcal{C}$ tal que si $k : i \longrightarrow j$ es un morfismo en $\mathcal{F}$ entonces $g_i = g'_j T(k)$. En particular, $g'_i = g'_j T(k) \ \forall\, k : i \longrightarrow j$ en $\mathcal{F}'$. Como $\eta = \{\eta_i\}$ es límite directo de TH, tenemos que existe un morfismo $\theta : L \longrightarrow X$ tal que

$$\theta \eta_i = g_i \ \forall i \in \mathcal{F}'.$$

Veamos que $\theta \eta'_i = g_i \ \forall\, i \in \mathcal{F}$. Como $\eta'_i = \eta_i \ \forall\, i \in \mathcal{F}'$, basta ver que $\theta \eta'_i = g_i$ para $i \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}$ es casi-directa a izquierda, existe $\alpha : i \longrightarrow k$ con $k \in \mathcal{F}'$. Por definición de η'_i en el Lema 2.2.3, $\eta'_i = \eta_k T(\alpha)$.
Luego entonces $\theta \eta'_i = \theta \eta_k T(\alpha) = g_k T(\alpha) = g_i$, donde la última igualdad es porque $\{g_i\}$ es compatible.
Por lo tanto, $\theta \eta'_i = g_i \ \forall\, i \in \mathcal{F}$. La unicidad es fácil. $\square$

Definición 2.2.7 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se dice que $\mathcal{C}$ es* ***conexa*** *si para cualesquiera dos objetos A, $B \in \mathcal{C}$ existe una catidad finita de objetos A_0, A_1, $\cdots$, A_n y un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[dr] & & A_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & & A_n \arrow[dl] \\ & A_1 & & A_3 & & A_{n-1} & \end{tikzcd}$$

con $A_0 = A$ y $A_n = B$ para algún n.

Observación 2.2.8 *(a) Notemos que en la definición anterior n tiene que ser par. Es decir, $n = 2m$ para $m \geq 1$.*

(b) Si existe morfismo $f : A \longrightarrow B$ entonces podemos completar a un diagrama

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[dr, "\alpha"'] & & A_2 \arrow[dl, "\beta"] \\ & A_1 & \end{tikzcd}$$

con $A_0 = A$, $A_1 = B$, $\alpha = f$ y $A_2 = B$, $\beta = 1_B$.

(c) Si existe morfismo $f : B \longrightarrow A$ podemos completar a un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "1_A"'] & & B \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Lema 2.2.9 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría cuasi-directa izquierda. Entonces, $\mathcal{C}$ es conexa si y sólo si para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ existe un objeto $K \in \mathcal{C}$ y un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & K & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $A, B \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es conexa existen objetos $A_0,\ A_1, \cdots, A_n$ y un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A_0 = A \arrow[dr] & & A_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & & A_n = B. \arrow[dl] \\ & A_1 & & A_3 & & A_{n-1} & \end{tikzcd}$$

Por la observación 2.2.8 i) sabemos que $n = 2m$ con $m \geq 1$.

Demostraremos por inducción sobre m que existe un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & K & \end{tikzcd}$$

con $K \in \mathcal{C}$. Si $m = 1$, tomamos $K = A_1$.
Supongamos que el resultado se satisface para $m - 1$. Veamos que se cumple

$$\begin{tikzcd}
A_0 = A \arrow[dr] & & A_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & & A_{2(m-1)} \arrow[dl] \arrow[dr, "\gamma"] & & A_{2m}. \arrow[dl, "\delta"] \\
& A_1 & & A_3 & & A_{2(m-1)-1} & & A_{2m-1} &
\end{tikzcd}$$

para m. En efecto. sean $A, B \in \mathcal{C}$ tales que existen objetos $A_0,\ A_1, \cdots, A_{2m}$ y un diagrama de la forma

Tomamos $A' = A$ y $B' = A - 2(m-1)$, tenemos por hipótesis de inducción quee xiste $K' \in \mathcal{C}$ y un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
A = A' \arrow[dr, "\alpha"'] & & B' \arrow[dl, "\beta"] \\
& K'. &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{C}$ es cuasi-directa a izquierda, el coángulo $K' \xleftarrow{\beta} B' \xrightarrow{\gamma} A_{2m-1}$ se puede completar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, "\alpha"'] & & B' \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"] & & A_{2m} \arrow[dl, "\delta"] \\
& K' \arrow[dr, "\alpha'"'] & & A_{2m-1} \arrow[dl, "\beta'"] & \\
& & K & &
\end{tikzcd}$$

Luego, entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\gamma'\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta'\delta"] \\
& K. &
\end{tikzcd}$$

Probándose el resultado para m. $\square$

Teorema 2.2.10 *Sea I una categoría conexa, pequeña y casi-directa izquierda. Sea $M : I \longrightarrow \mathcal{S}ets$ un funtor covariante. Entonces $\varinjlim M$ existe.*

Demostración. Dado $M : I \longrightarrow \mathcal{S}ets$ covariante, denotamos por $M_i := M(i)$ $\forall\ i \in I$. Consideremos $\coprod_{i\in I} M_i$ la unión disjunta de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ y las inclusiones canónicas $\varphi_i : M_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i$. Consideremos el siguiente diagrama para cada $f : i \longrightarrow j$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[dd, "M(f)"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ & \coprod_{i\in I} M_i \\ M_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

el cual no necesariamente conmuta. A partir del diagrama anterior construimos un diagrama que si conmute.

Sean $m, m' \in \coprod_{i\in I} M_i$, dado que $m \in \coprod_{i\in I} M_i$ entonces $m \in M_i$ para alguna $i \in I$, análogamente tenemos que $m' \in M_j$ para alguna $j \in I$. Dado que I es conexa por el Lema 2.2.9, existe $k \in I$ junto con morfismos $f_{ik} : i \longrightarrow k$ y $f_{jk} : j \longrightarrow k$ que conectan a los objetos i y j los cuales inducen morfismos $M(f_{ik}) : M_i \longrightarrow M_k$ y $M(f_{jk}) : M_j \longrightarrow M_k$. Con esto tenemos que $M(f_{ik})(m) \in M_k$ y también $M(f_{jk})(m') \in M_k$.
Definimos un relación sobre el conjunto $\coprod_{i\in I} M_i$ de la siguiente manera. Dados $m, m' \in \coprod_{i\in I} M_i$ con $m \in M_i$ y $m' \in M_j$. Declaramos que m está relacionado con m' (en símbolos, $m \sim m'$); de la siguiente manera:

$$m \sim m' \Leftrightarrow \exists\ k \in I \text{ y morfismos } f_{ik} : i \longrightarrow k,\ f_{jk} : j \longrightarrow k \text{ tal que } M(f_{ik})(m) = M(f_{jk})(m').$$

Afirmamos que $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto,

(a) *Simétrica.* Sea $m \in \coprod_{i\in I} M_i$, con $m \in M_i$. Considerando $1_i : i \longrightarrow i$ tenemos que $M(1_i)(m) = M(1_i)(m)$. Por lo tanto, $m \sim m$.

(b) *Reflexiva.* Supongamos que $m \sim m'$, con $m \in M_i$, $m' \in M_j$, es decir, existe $k \in I$ y morfismos $f_{ik} : i \longrightarrow k$, $f_{jk} : j \longrightarrow k$ tal que $M(f_{ik})(m) = M(f_{jk})(m')$. Como la igualdad es reflexiva, tenemos que $M(f_{jk})(m') = M(f_{ik})(m)$ y por lo tanto, $m' \sim m$.

(c) *Transitiva.* Supongamos que $m \sim m'$ y $m' \sim m''$ con $m \in M_i$, $m' \in M_j$ y $m'' \in M_s$. Como $m \sim m'$, existe $k \in I$ y morfismos $f_{ik} : i \longrightarrow k$, $f_{jk} : j \longrightarrow k$ tal que $M(f_{ik})(m) = M(f_{jk})(m')$. De la misma manera, como $m' \sim m''$ existe $r \in I$ y morfismos $f_{jr} : j \longrightarrow r$, $f_{sr} : s \longrightarrow r$ tal que $M(f_{ir})(m') = M(f_{sr})(m'')$. Como I es casi-directa izquierda existen morfismos $f_{kq} : k \longrightarrow q$ y $f_{rq} : r \longrightarrow q$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, "f_{ik}"] & & \\
& k \arrow[dr, "f_{kq}"] & \\
j \arrow[ur, "f_{jk}"] \arrow[dr, "f_{jr}"'] & & q \\
& r \arrow[ur, "f_{rq}"'] & \\
s \arrow[ur, "f_{sr}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Consideremos $v = f_{kq}f_{ik} : i \longrightarrow q$ y $w : f_{rq}f_{sr} : s \longrightarrow q$. Entonces

$$\begin{aligned}
M(v)(m) = M(f_{kq}f_{ik})(m) &= M(f_{kq})M(f_{ik})(m) \\
&= M(f_{kq})M(f_{jk})(m') \\
&= M(f_{kq}f_{jk})(m') \\
&= M(f_{rq}f_{jr})(m') \\
&= M(f_{rq})M(f_{jr})(m') \\
&= M(f_{rq})M(f_{sr})(m'') \\
&= M(f_{rq}f_{sr})(m'') \\
&= M(w)(m'').
\end{aligned}$$

En consecuencia, $m \sim m''$. Por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia.

Consideremos ahora la función $\pi : \coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow \left(\coprod_{i\in I} M_i\right)/\sim$ tal que $\pi(m_i) := \overline{m_i}$ (donde $\overline{m_i}$ denotará la clase de equivalencia de m_i). Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta $\forall\ f : i \longrightarrow j$ en I

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[dr, "\lambda_i"] \arrow[dd, "M(f)"'] & \\
& \left(\coprod_{i\in I} M_i\right)/\sim \\
M_j \arrow[ur, "\lambda_j"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\lambda_i := \pi\varphi_i$ y $\lambda_j := \pi\varphi_j$.
En efecto, sea $m \in M_i$ entonces $\lambda_i(m) = \pi\varphi_i(m) = \pi(\varphi_i(m)) = \overline{\varphi_i(m)}$, como φ_i es la inclusión canónica se tiene que $\lambda_i(m) = \overline{m}$ en $B := \coprod_{iinI} M_i/\sim$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}(\lambda_j M(f))(m) = \lambda_j(M(f)(m)) &= \pi\varphi_j(M(f)(m)) \\ &= \overline{\varphi_j(M(f)(m))} \\ &= \overline{M(f)(m)}\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por ser φ_j es la inclusión canónica.
Veamos que $m \sim M(f)(m)$.
En efecto consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "f"'] & & j \arrow[dl, "1_j"] \\ & j & \end{tikzcd}$$

Tenemos que $M(f)(m) = 1_{M_j}\Big(M(f)(m)\Big) = M(1_j)\Big(M(f)(m)\Big)$. Esto nos dice que $m \sim M(f)(m)$. En consecuenia, $\overline{m} \sim \overline{M(f)(m)}$.
Por lo tanto, $m \sim M(f_{ij})(m)$ y así, $\overline{m} = \overline{M(f_{ij})(m)}$. Por lo tanto, el siguiente diagra conmuta $\forall\ f : i \longrightarrow j$ en I

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[d, "M(f)"'] \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\ M_j \arrow[r, "\lambda_j"'] & B \end{tikzcd}$$

Veamos ahora que la familia de funciones $\{\lambda_i : M_i \longrightarrow B\}_{i\in I}$ tiene la propiedad universal de la definición 2.2.4.
En efecto, sea $\{\sigma_i : M_i \longrightarrow D\}_{i\in I}$ otra familia compatible de funciones. Es decir, el siguiente diagrama conmuta $\forall\ f : i \longrightarrow j$ en I

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[d, "M(f)"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ M_j. \arrow[r, "\sigma_j"'] & D \end{tikzcd}$$

Requerimos una función $\theta : B \longrightarrow D$ tal que $\sigma_i = \theta\lambda_i\ \forall\ i \in I$. Definimos

$$\theta(\overline{m}) := \sigma_i(m)$$

para $\overline{m} \in B$ con $m \in M_i$.
Veamos que θ está bien definida.
En efecto, sea $\overline{m}, \overline{m'} \in \left(\coprod_{i\in I} M_i\right) / \sim$, con $m \in M_i$, $m' \in M_j$ tal que $m \sim m'$ por lo que existen morfismos $f_{ik} : i \longrightarrow k$ y $f_{jk} : j \longrightarrow k$ tal que

$$M(f_{ik})(m) = M(f_{jk})(m') \in M_k.$$

Luego, entonces

$$(M(f_{ik})(m)) = \sigma_k(M(f_{jk})(m')).$$

Como $\{\sigma_i\}_{i\in I}$ es compatible

$$\sigma_i(m) = \sigma_k(M(f_{ik})(m)) = \sigma_k(M(f_{jk})(m')) = \sigma_j(m').$$

Así, $\theta(\overline{m}) = \theta(\overline{m'})$, lo que implica que θ está bien definida. Por contrucción, tenemos que $\theta\lambda_i = \sigma_i \ \forall \ i \in I$.
Veamos que θ es única.
En efecto, supongamos que existe $\theta' : \left(\coprod_{i\in I} M_i\right) / \sim \longrightarrow D$ tal que $\theta'\lambda_i = \sigma_i$ para toda $i \in I$, entonces $\theta'\lambda_i = \theta\lambda_i$, es decir, $\theta'(\overline{m_i}) = \theta(\overline{m_i})$ para $\overline{m_i} \in B$. En consecuencia, θ es única. Por lo tanto, $\varinjlim M_i$ existe, más aún,

$$\varinjlim M_i = \left(\coprod_{i\in I} M_i\right) / \sim .$$

□

Teorema 2.2.11 *Sea I una categoría conexa, pequeña y casi-directa izquierda. Sea $M : I \longrightarrow \mathcal{A}b$ un funtor covariante. Entonces $\varinjlim M$ existe.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.10 sabemos que el límite directo de un funtor covariante $M : I \longrightarrow \mathcal{S}ets$ existe. Para verificar que el límite directo del funtor $M : I \longrightarrow \mathcal{A}b$ existe, veamos primero que el objeto $\left(\coprod_{i\in I} M_i\right) / \sim$ tiene estructura de grupo abeliano y que las funciones λ_i del Teorema 2.2.10 son homomorfismos de grupos abelianos.

Definimos una operación binaria

$$+ : (\coprod_{i\in I} M_i/\sim) \times (\coprod_{i\in I} M_i/\sim) \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i/\sim$$

como sigue. Sean $\overline{m_i}, \overline{m_j} \in \bigsqcup M_i/\sim$ con $m_i \in M_i = M(i)$ y $m_j \in M_j = M(j)$. Como I es casi-directa izquierda, existen morfismos en I, $f_{ik} : i \longrightarrow k$ y $f_{jk} : j \longrightarrow k$ para alguna $k \in I$. Luego, definimos

$$\overline{m_i} + \overline{m_j} := \overline{M(f_{ik})(m_i) + M(f_{jk})(m_j)}.$$

Veamos que esta operación está bien definida. Para simplificar la notación, dado un morfismo $f_{ij} : i \longrightarrow j$, hacemos $\varphi_{ij} := M(f_{ij})$.
Primero notemos que como $\varphi_{ik}(m_i)$ y $\varphi_{jk}(m_j)$ están en M_k y M_k es un grupo abeliano, tenemos que

$$\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{m_j} + \overline{m_i}.$$

Sean $\overline{m_i}, \overline{m_j}, \overline{m_s} \in \coprod_{i\in I} M_i/\sim$ tal que $\overline{m_i} = \overline{m_s}$. Veamos que $\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{m_s} + \overline{m_j}$. En efecto, por definición sabemos que

$$\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{\varphi_{ik}(m_i) + \varphi_{jk}(m_j)}$$

para algunos morfismos $f_{ik} : i \longrightarrow k$ y $f_{jk} : j \longrightarrow k$. Por otro lado, por definición

$$\overline{m_s} + \overline{m_j} = \overline{\varphi_{sr}(m_s) + \varphi_{jr}(m_j)}$$

para algunos morfismos $f_{sr} : s \longrightarrow r$ y $f_{jr} : j \longrightarrow r$. Como I es cuasi-directa izquierda, existen morfismos $f_{rq} : r \longrightarrow q$ y $f_{kq} : k \longrightarrow q$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, "f_{ik}"] & & \\
& k \arrow[dr, "f_{kq}"] & \\
j \arrow[ur, "f_{jk}"] \arrow[dr, "f_{jr}"'] & & q \\
& r \arrow[ur, "f_{rq}"'] & \\
s \arrow[ur, "f_{sr}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, como $\overline{m_i} = \overline{m_s}$, tenemos que existen morfismos $f_{it} : i \longrightarrow t$ y $f_{st} : s \longrightarrow t$ tal que $\varphi_{it}(m_i) = \varphi_{st}(m_s)$. Como I es casi directa izquierda, tenemos que el coángulo formado por los morfismos $f_{it} : i \longrightarrow t$ y $f_{kq}f_{ik} : i \longrightarrow q$ se pueden completar al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "f_{kq}f_{ik}"] \arrow[d, "f_{it}"'] & q \arrow[d, "f_{qp}"] \\
t \arrow[r, "f_{tp}"'] & p
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, consideremos los morfismos $f_{qp}f_{rq}f_{sr} : s \longrightarrow p$ y $f_{tp}f_{st} : s \longrightarrow p$. Como I es casi-directa izquierda, existe $\mu : p \longrightarrow w$ tal que $\mu f_{qp}f_{rq}f_{sr} = \mu f_{tp}f_{st}$.

Definamos $\alpha := \mu f_{qp} f_{kq} : k \longrightarrow w$ y $\beta = \mu f_{qp} f_{rq} : r \longrightarrow w$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} M(\alpha)\Big(\varphi_{ik}(m_i)\Big) = M(\alpha)\Big(M(f_{ik})(m_i)\Big) &= M(\mu f_{qp} f_{kq} f_{ik})(m_i) \\ &= M(\mu f_{tp} f_{it})(m_i) \\ &= M(\mu f_{tp}) M(f_{it})(m_i) \\ &= M(\mu f_{tp}) M(f_{st})(m_s) \\ &= M(\mu f_{tp} f_{st})(m_s) \\ &= M(\mu f_{qp} f_{rq} f_{sr})(m_s) \\ &= M(\mu f_{qp} f_{rq}) M(f_{sr})(m_s) \\ &= M(\beta)\Big(\varphi_{sr}(m_s)\Big) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} M(\alpha)\Big(\varphi_{jk}(m_j)\Big) = M(\alpha)\Big(M(f_{jk})(m_j)\Big) &= M(\mu f_{qp} f_{kq} f_{jk})(m_j) \\ &= M(\mu f_{qp} f_{rq} f_{jr})(m_j) \\ &= M(\mu f_{qp} f_{rq}) M(f_{jr})(m_j) \\ &= M(\beta)\Big(M(f_{jr})(m_j)\Big) \\ &= M(\beta)\Big(\varphi_{jr}(m_j)\Big) \end{aligned}$$

Por lo tanto como $M(\alpha)$ y $M(\beta)$ son morfismos de grupos abelianos, tenemos que

$$M(\alpha)\Big(\varphi_{ik}(m_i) + \varphi_{jk}(m_j)\Big) = M(\beta)\Big(\varphi_{sr}(m_s) + \varphi_{jr}(m_j)\Big).$$

Probándose que

$$\overline{\varphi_{ik}(m_i) + \varphi_{jk}(m_j)} = \overline{\varphi_{sr}(m_s) + \varphi_{jr}(m_j)}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{m_s} + \overline{m_j}.$$

Esto demuestra que la suma está bien definida. Ya que si $\overline{m_i} = \overline{m_s}$ y $\overline{m_j} = \overline{m_l}$, entonces por lo hecho anteriormente, tenemos que

$$\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{m_s} + \overline{m_j} = \overline{m_j} + \overline{m_s} = \overline{m_l} + \overline{m_s} = \overline{m_s} + \overline{m_l}$$

Afirmamos que $(B := \left(\coprod_{i\in I} M_i\right) / \sim, +)$ es un grupo abeliano.
En efecto, verifiquemos que las condiciones de grupo abeliano se cumplen:

(a) *Neutro.* Dado que M_i es un grupo abeliano existe $0_i \in M_i$ tal que $m_i + 0_i = m_i \ \forall \ m_i \in M_i$. Notemos que como cada $M(f_{ij}) : M_i \longrightarrow M_j$ es un morfismo de grupos abelianos, entonces $M(f_{ij})(0_i) = 0_j \ \forall \ f_{ij} : i \longrightarrow j$. Dado que I es conexa, para $i, j \in I$ existe $k \in I$ y un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "f_{ik}"'] & & j \arrow[dl, "f_{jk}"] \\ & k. & \end{tikzcd}$$

Luego, $M(f_{ik})(0_i) = M(f_{jk})(0_j)$. Es decir $0_i \sim 0_j \ \forall \ i, j \in I$. Denotemos por $0 := \overline{0_i} \ \forall i \in I$. Entonces $\overline{m} + 0 = \overline{m} \ \forall \ \overline{m} \in \coprod_{i \in I} M_i / \sim$. En efecto,$m = m_i$ para alguna $i \in I$, luego $\overline{m} + 0 = \overline{m} + \overline{0_i} = \overline{m_i} + \overline{0_i} = \overline{m_i + 0_i} = \overline{m_i} = \overline{m}$. Por lo tanto, $0 = \overline{0_i} \ \forall i \in I$, es el neutro aditivo.

(b) *Inverso.* Sea $\overline{m_i} \in \coprod_{i \in I} M_i / \sim$. Como $m_i \in M_i$ y M_i es grupo abeliamo, existe $-m_i \in M_i$ tal que $m_i + (-m_i) = 0_i$. Entonces $-(\overline{m_i}) = \overline{-m_i}$. En efecto, $m_i + (-(\overline{m_i})) = \overline{m_i} + \overline{-m_i} = \overline{m_i + (-m_i)} = \overline{0_i} = 0$. Por lo tanto el inverso de $\overline{m_i}$ es $\overline{-m_i}$.

(c) *Asociatividad.* Sean $\overline{m_i}, \overline{m_j}, \overline{m_s} \in \left(\coprod_{i \in I} M_i\right) / \sim$. Veamos que $(\overline{m_i} + \overline{m_j}) + \overline{m_s} = \overline{m_i} + (\overline{m_j} + \overline{m_s})$. En efecto, por definición

$$\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{\varphi_{ir}(m_i) + \varphi_{jr}(m_j)}$$

para algunos morfismos $f_{ir} : i \longrightarrow r$ y $f_{jr} : j \longrightarrow r$, luego tenemos que

$$\begin{aligned}(\overline{m_i} + \overline{m_j}) + \overline{m_s} &= \overline{\varphi_{ir}(m_i) + \varphi_{jr}(m_j)} + \overline{m_s} \\ &= \overline{\varphi_{rt}(\varphi_{ir}(m_i) + \varphi_{jr}(m_j)) + \varphi_{st}(m_s)}\end{aligned}$$

para algunos morfismos $f_{rt} : r \longrightarrow t$ y $f_{st} : s \longrightarrow t$.
Por otro lado, por definición

$$\overline{m_j} + \overline{m_s} = \overline{\varphi_{ju}(m_j) + \varphi_{su}(m_s)}$$

para algunos morfismos $f_{ju} : j \longrightarrow u$ y $f_{su} : s \longrightarrow u$. Luego entonces

$$\begin{aligned}\overline{m_i} + (\overline{m_j} + \overline{m_s}) &= \overline{m_i} + \overline{\varphi_{ju}(mj) + \varphi_{su}(m_s))} \\ &= \overline{\varphi_{iw}(m_i) + \varphi_{uw}(\varphi_{ju}(m_j)) + \varphi_{uw}(\varphi_{su}(m_s))}\end{aligned}$$

para algunos morfismos $f_{iw} : i \longrightarrow w$ y $f_{uw} : u \longrightarrow w$.
Como I es una categoría casi-directa izquierda existen morfismos $f_{wx} : w \longrightarrow x$, $f_{tx} : t \longrightarrow x$, $f_{ty} : t \longrightarrow y$ y $f_{wy} : w \longrightarrow y$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "f_{rt}f_{ir}"] \arrow[d, "f_{iw}"'] & t \arrow[d, "f_{tx}"] \\
w \arrow[r, "f_{wx}"'] & x
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "f_{st}"] \arrow[d, "f_{uw}f_{su}"'] & t \arrow[d, "f_{ty}"] \\
w \arrow[r, "f_{wy}"'] & y.
\end{tikzcd}
$$

Nuevamente por ser I casi-directa izquierda, tenemos que el coángulo formado por los morfismos $f_{wx} : w \longrightarrow x$ y $f_{wy} : w \longrightarrow y$ se puede completar al siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "f_{wx}"] \arrow[d, "f_{wy}"'] & x \arrow[d, "f_{xz}"] \\
y \arrow[r, "f_{yz}"'] & z.
\end{tikzcd}
$$

Como I es casi-directa izquierda por la segunda condición existe $\mu : z \longrightarrow q$ tal que

$$\mu f_{xz} f_{tx} f_{rt} f_{jr} = \mu f_{yz} f_{wy} f_{uw} f_{ju},$$

de manera análoga existe $\theta : q \longrightarrow n$ tal que

$$\theta\mu f_{xz} f_{tx} = \theta\mu f_{yz} f_{ty}.$$

Definimos $\alpha := \theta\mu f_{xz} f_{tx} : t \longrightarrow n$ y $\beta = \theta\mu f_{yz} f_{wy} : w \longrightarrow n$. Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
M(\alpha)\Big(\varphi_{rt}\varphi_{ir}(m_i)\Big) = M(\alpha)\Big(M(f_{rt}f_{ir})(m_i)\Big) &= M(\theta\mu f_{xz} f_{tx})\Big(M(f_{rt}f_{ir})(m_i)\Big) \\
&= M(\theta\mu f_{xz} f_{tx} f_{rt} f_{ir})(m_i) \\
&= M(\theta\mu f_{xz} f_{wx} f_{iw})(m_i) \\
&= M(\theta\mu f_{yz} f_{wy} f_{iw})(m_i) \\
&= M(\theta\mu f_{yz} f_{wy})\Big(M(f_{iw})(m_i)\Big) \\
&= M(\theta\mu f_{yz} f_{wy})\Big(\varphi_{iw}(m_i)\Big) \\
&= M(\beta)(\varphi_{iw}(m_i))
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
M(\alpha)\Big(\varphi_{rt}\varphi_{jr}(m_j)\Big) = M(\alpha)\Big(M(f_{rt}f_{jr})(m_j)\Big) &= M(\theta\mu f_{xz}f_{tx})\Big(M(f_{rt}f_{jr})(m_j)\Big)\\
&= M(\theta\mu f_{xz}f_{tx}f_{rt}f_{jr})(m_j)\\
&= M(\theta\mu f_{yz}f_{wy}f_{uw}f_{ju})(m_j)\\
&= M(\theta\mu f_{yz}f_{wy})\Big(M(f_{uw}f_{ju})(m_j)\Big)\\
&= M(\theta\mu f_{yz}f_{wy})\Big(\varphi_{uw}\varphi_{ju}(m_j)\Big)\\
&= M(\beta)(\varphi_{uw}\varphi_{ju}(m_j))
\end{aligned}$$

y de manera análoga tenemos

$$\begin{aligned}
M(\alpha)\Big(\varphi_{st}(m_s)\Big) = M(\alpha)\Big(M(f_{st})(m_s)\Big) &= M(\theta\mu f_{xz}f_{tx})\Big(M(f_{st})(m_s)\Big)\\
&= M(\theta\mu f_{xz}f_{tx}f_{st})(m_s)\\
&= M(\theta\mu f_{yz}f_{ty}f_{st})(m_s)\\
&= M(\theta\mu f_{yz}f_{wy}f_{uw}f_{su})(m_s)\\
&= M(\theta\mu f_{yz}f_{wy})\Big(M(f_{uw}f_{su})(m_s)\Big)\\
&= M(\theta\mu f_{yz}f_{wy})\Big(\varphi_{uw}\varphi_{su}(m_s)\Big)\\
&= M(\beta)(\varphi_{uw}\varphi_{su}(m_s))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $M(\alpha)$ y $M(\beta)$ son morfismos de grupos abelianos, tenemos que

$$\begin{aligned}
&M(\alpha)\Big(\varphi_{rt}\varphi_{ir}(m_i) + \varphi_{rt}\varphi_{jr}(m_j) + \varphi_{st}(m_s)\Big)\\
&\qquad\qquad = M(\beta)\Big(\varphi_{iw}(m_i)+\varphi_{uw}\varphi_{ju}(m_j)+\varphi_{uw}\varphi_{su}(m_s)\Big)
\end{aligned}$$

Probándose que

$$\overline{(\varphi_{rt}\varphi_{ir}(m_i) + \varphi_{rt}\varphi_{jr}(m_j)) + \varphi_{st}(m_s)} = \overline{\varphi_{iw}(m_i) + (\varphi_{uw}\varphi_{ju}(mj) + \varphi_{uw}\varphi_{su}(m_s))}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\overline{m_i} + (\overline{m_j} + \overline{m_s}) = (\overline{m_i} + \overline{m_j}) + \overline{m_s}.$$

(d) *Conmutatividad.* Sean $\overline{m_i}, \overline{m_j} \in \coprod_{i\in I} M_i/\sim$, por definición de la suma tenemos que

$$\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{M(f_{ir})(m_i) + M(f_{jr})(m_j)} = \overline{\varphi_{ir}(m_i) + \varphi_{jr}(m_j)}$$

para morfismos $f_{ir} : i \longrightarrow r$ y $f_{jr} : j \longrightarrow r$.
Dado que $M(f_{ir})(m_i), M(f_{jr})(m_j) \in M_r$ y M_r es un grupo abeliano tenemos que
$$\overline{\varphi_{ir}(m_i) + \varphi_{jr}(m_j)} = \overline{\varphi_{jr}(m_j) + \varphi_{ir}(m_i)},$$
es decir,
$$\overline{M(f_{ir})(m_i) + M(f_{jr})(m_j)} = \overline{M(f_{jr})(m_j) + M(f_{ir})(m_i)}.$$
Por lo tanto, $\overline{m_i} + \overline{m_j} = \overline{m_j} + \overline{m_i}$.

Por lo tanto, $(B, +)$ es un grupo abeliano.

Veamos ahora que $\{\lambda_i : M_i \longrightarrow B\}_{i \in I}$ es el límite directo de $M : I \longrightarrow \mathcal{A}b$. En efecto, sea $\{\sigma_i : M_i \longrightarrow D\}_{i \in I}$ una familia de morfismos de grupos abelianos compatible con $M : I \longrightarrow \mathcal{A}b$. En particular es una familia compatible de conjuntos con $M : I \longrightarrow \mathcal{S}ets$. Luego por el Teorema 2.2.10 existe una única función $\theta : B \longrightarrow D$ atl que $\theta\lambda_i = \sigma_i \ \forall \ i \in I$.
Veamos que θ es un morfismo de grupos abelianos. Para esto, sean $\overline{m}, \overline{n} \in B$, entonces $m \in M_i$ y $n \in M_j$ para algunos $i, j \in I$. Como I es conexa, existe $k \in I$ y un diagrama

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, "f_{ik}"'] & & j \arrow[dl, "f_{jk}"] \\
& k. &
\end{tikzcd}$$

Entonces
$$\overline{m} + \overline{n} = \overline{f_{ik}(m)} + \overline{f_{jk}(n)} = \overline{f_{ik}(m) + f_{jk}(n)} = \lambda_k(f_{ik}(m) + f_{jk}(n)).$$
Por lo tanto,
$$\begin{aligned}
\theta(\overline{m} + \overline{n}) = \theta\lambda_k(f_{ik}(m) + f_{jk}(n)) &= \sigma_k(f_{ik}(m) + f_{jk}(n)) \\
&= \sigma_k f_{ik}(m) + \sigma_k f_{jk}(n) \\
&= \sigma_i(m) + \sigma_j(n) \\
&= \theta\lambda_i(m) + \theta\lambda_j(n) \\
&= \theta(\overline{m}) + \theta(\overline{n}).
\end{aligned}$$
Probándose que θ es un morfismo de grupos abelianos. La unicidad de θ en la categoría $\mathcal{A}b$, se sigue de la unicidad de θ en la categoría $\mathcal{S}ets$.

Por lo tanto, $\{\lambda_i : M_i \longrightarrow B\}_{i \in I}$ es el límite directo de M y más aún,
$$\varinjlim M_i = \coprod_{i \in I} M_i / \sim .$$

□

2.3. Categoría de fracciones

Definición 2.3.1 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y sea X un objeto de $\mathcal{C}$, denotamos por $\mathbf{X}/\mathcal{C}$ la categoría cuyos objetos son parejas de la forma (f,Y), con $Y \in Obj(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y un morfismo $g:(f,Y) \longrightarrow (f',Y')$ en $X/\mathcal{C}$, es un morfismo $g: Y \longrightarrow Y'$ en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dd, "g"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & Y'. \end{tikzcd}$$

La composición en $X/\mathcal{C}$ coincide con la composición en $\mathcal{C}$. De manera totalmente análoga se define la categoría $\mathcal{C}/X$.

Definición 2.3.2 *Sea Σ una clase de morfismos en $\mathcal{C}$. Para $X \in \mathcal{C}$ denotaremos por $\mathbf{X}/\boldsymbol{\Sigma}$ a la subcategoría plena de $X/\mathcal{C}$ cuyos objetos son los objetos de $X/\mathcal{C}$ de la forma (s,Y) con $s \in \Sigma$.*

Lema 2.3.3 *Sea Σ un sistema calculable a izquierda de morfismos de $\mathcal{C}$. Entonces, para cada objeto X de $\mathcal{C}$, la categoría X/Σ es cuasi-directa izquierda y conexa.*

Demostración. Veamos primero que X/Σ es cuasi-directa a izquierda.

(a) Sea $(s,Y),\ (s',Y'),\ (s'',Y'') \in\ X/\Sigma$, veamos que cada coángulo

$$\begin{tikzcd} (s,Y) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (s',Y') \\ (s'',Y'') & \end{tikzcd}$$

se puede completar a un cuadrado conmutativo.
En efecto, consideramos los morfismos $f:(s,Y) \longrightarrow (s',Y')$ y $g:(s,Y) \longrightarrow (s'',Y'')$ en la categoría X/Σ. Entonces $fs = s'$ y $gs = s''$, donde $s,\ s',\ s'' \in \Sigma$. Dado que Σ es calculable a izquierda existen morfismos $u: Y' \longrightarrow Y'''$,

$v : Y'' \longrightarrow Y'''$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "s''"'] & Y' \arrow[d, "u"] \\
Y'' \arrow[r, "v"'] & Y'''
\end{tikzcd}$$

con $u \in \Sigma$. Luego $u(fs) = us' = vs'' = v(gs)$. En consecuencia, $(uf)s = (vg)s$, por lo tanto s es un igualador derecho. Por ser Σ calculable a izquierda, existe $\gamma : Y''' \longrightarrow Z$ con $\gamma \in \Sigma$ tal que $\gamma(uf) = \gamma(vg)$ y así, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "\gamma u"] \\
Y'' \arrow[r, "\gamma v"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(\gamma vs'', Z) \in X/\Sigma$ y tenemos morfismos $\gamma v : (s'', Y'') \longrightarrow (\gamma vs'', Z)$, $\gamma u : (s', Y') \longrightarrow (\gamma vs'', Z)$ en $X/\mathcal{C}$ (pues $\gamma us' = \gamma vs''$)tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(s, Y) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (s', Y') \arrow[d, "\gamma u"] \\
(s'', Y'') \arrow[r, "\gamma v"'] & (\gamma vs'', Z),
\end{tikzcd}$$

es decir, $(\gamma u)f = (\gamma v)g$ en $X/\mathcal{C}$.

(b) Veamos que existe un igualador izquierdo.
En efecto, sean $f, g : (s, Y) \longrightarrow (s', Y')$ morfismos en X/Σ, con $s, s' \in \Sigma$.
Luego, los siguientes diagramas conmutan en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & Y \arrow[dl, "f"] \\ Y' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & Y \arrow[dl, "g"] \\ Y'. & \end{tikzcd}$$

Es decir, $s' = fs$ y $s' = gs$, por lo que s es un igualador para f y g. Dado que Σ es calculable a izquierda, existe $s'' : Y' \longrightarrow Y''$ con $s'' \in \Sigma$ tal que $s''f = s''g$. Definimos el morfismo $\Theta := s'' : (s', Y') \longrightarrow (s''s', Y'')$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "s''s'"'] & Y' \arrow[dl, "\Theta:=s''"] \\ Y''. & \end{tikzcd}$$

En consecuencia, los siguientes diagramas conmutan en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s''s'"'] & Y \arrow[dl, "\Theta f"] \\ Y'' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s''s'"'] & Y \arrow[dl, "\Theta g"] \\ Y'' & \end{tikzcd}$$

Además, $\Theta f = \Theta g$. Por lo tanto, $\Theta = s'' : (s', Y') \longrightarrow (s''s', Y'')$ es un igualador izquierdo de f y g.

Por lo tanto, X/Σ es una categoría casi-directa a izquierda.
Veamos ahora que la categoría X/Σ es conexa.
En efecto, sean $(s, Y), (s', Y') \in X/\Sigma$. Dado que $s, s' \in \Sigma$ forman un coángulo y Σ es calculable a izquierda entonces existen $K \in \mathcal{C}$ y morfismos $u : Y \longrightarrow K \in \Sigma$, $v : Y' \longrightarrow K$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & Y \arrow[d, "u"] \\ Y' \arrow[r, "v"'] & K. \end{tikzcd}$$

Dado que $u, s \in \Sigma$ tenemos que $us = vs' \in \Sigma$. En consecuencia, tenemos el siguiente diagrama en X/Σ

$$\begin{tikzcd}
(s,Y) \arrow[dr, "u"'] & & (s',Y') \arrow[dl, "v"] \\
& (us,K) &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, X/Σ es conexa por el Lema 2.2.9 $\square$

Sea $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ calculable a izquierda y $X, Y \in obj(\mathcal{C})$. Definimos un funtor covariante

$$t_X^Y : Y/\Sigma \longrightarrow \mathcal{A}b$$

como sigue.

(a) *Asignación en objetos.* Para cada objeto (s, Z) en Y/Σ definimos $t_X^Y(s, Z) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "s"'] \arrow[r, phantom, ""] & \\
Z &
\end{tikzcd} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z).$$

(b) *Asignación en morfismos.* Sea $f : (s, Z) \longrightarrow (s', Z')$ un morfismo en Y/Σ, esto es, f hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & Z \arrow[dl, "f"] \\
Z'. &
\end{tikzcd}$$

Definimos $t_X^Y(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z')$ como la función que tiene por regla de correspondencia $t_X^Y(f)(k) = f \circ k \ \forall \ k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dd, "f"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[dd, "t_X^Y(f)"] \\
Y \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "s'"'] & & {} \arrow[r, mapsto] & {} \\
 & Z' & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z')
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que t_X^Y es un funtor covariante.

Lema 2.3.4 *Sean $\mathcal{F}$ una categoría casi-directa a izquierda y conexa, y $\mathcal{F}'$ una subcategoría cofinal de $\mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{F}'$ es una categoría casi-directa a izquierda y conexa.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{F}'$ es casi-directa izquierda. En efecto, consideremos el coángulo formado por los morfismos $\alpha : U \longrightarrow V$, $\beta : U \longrightarrow W$ en $\mathcal{F}'$, es decir, $U, V, W \in \mathcal{F}'$. Entonces

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & V \\
W &
\end{tikzcd}$$

es un coángulo en $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es casi-directa izquierda existen morfismos $\beta' : V \longrightarrow X$ y $\alpha' : W \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & V \arrow[d, "\beta'"] \\
W \arrow[r, "\alpha'"'] & X
\end{tikzcd}$$

con $X \in \mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F}'$ es cofinal, existe $\gamma : X \longrightarrow Z$ con $Z \in \mathcal{F}'$. En consecuencia el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & V \arrow[d, "\gamma\beta'"] \\
W \arrow[r, "\gamma\alpha'"'] & Z
\end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{F}'$.

Ahora, sean $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ morfismos en $\mathcal{F}'$. Como $\mathcal{F}$ es casi-directa a izquierda, existe un morfismo $u : B \longrightarrow C$ en $\mathcal{F}$ tal que $u\alpha = u\beta$. Como $\mathcal{F}'$ es cofinal, existe $u' : C \longrightarrow C'$ con $C' \in \mathcal{C}'$. Luego, $u'u : B \longrightarrow C'$ es un morfismo en $\mathcal{F}'$ tal que $(u'u)\alpha = (u'u)\beta$. Por lo tanto, $\mathcal{F}'$ es casi-directa izquierda.

Verifiquemos ahora que $\mathcal{F}'$ es conexa.
Sean $A, B \in \mathcal{F}'$, como $\mathcal{F}$ es conexa, existe $K \in \mathcal{F}$ y un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & K. & \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{F}'$ es cofinal, existe $\gamma : K \longrightarrow K'$ con $K' \in \mathcal{F}'$. Luego, tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\gamma f"'] & & B \arrow[dl, "\gamma g"] \\ & K. & \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{F}'$. Por el Lema 2.2.9 concluimos que $\mathcal{F}'$ es conexa. $\square$

2.4. Descripción del límite del funtor t_X^Y

Sea $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema calculable a izquierda. Supongamos que Y/Σ tiene una subcategoría cofinal y pequeña que denotamos por $F(Y)$. Sea $H : F(Y) \longrightarrow Y/\Sigma$ el funtor inclusión.

Por el Lema 2.3.3 y el Lema 2.3.4, tenemos que $F(Y)$ es una subcategoría pequeña casi-directa a izquierda y conexa de Y/Σ. Por el Teorema 2.2.11, tenemos que $\varinjlim(t_X^Y \circ H)$ existe. Por el Teorema 2.2.6 tenemos que $\varinjlim t_X^Y$ existe y además los objetos límites coinciden. Es decir, $\varinjlim t_X^Y = \varinjlim(t_X^Y \circ H)$.
Por el Teorema 2.2.11 tenemos que el objeto límite es:

$$\varinjlim t_X^Y = \varinjlim(t_X^Y \circ H) = \left(\coprod_{(s,Z) \in F(Y)} t_X^Y(s, Z) \right) / \sim .$$

Donde dados $f, g \in \varinjlim t_X^Y = \left(\coprod_{(s,Z) \in F(Y)} t_X^Y(s, Z) \right) / \sim$, con $f \in t_X^Y(s, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ y $g \in t_X^Y(s', Z') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z')$, tenemos que

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \exists\, u : Z \longrightarrow Z'' \; y \; v : Z' \longrightarrow Z'' \text{ morfismos en } F(Y) \text{ tal que}$$

$$t_X^Y(u)(f) = t_X^Y(v)(g).$$

Reinterpretamos lo anterior en términos de diagramas:

(a) Que $u : (s, Z) \longrightarrow (s'', Z'')$ sea un morfismo en $F(Y)$ quiere decir que el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dd, "u"] \\ Y \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "s''"'] & \\ & Z'. \end{tikzcd}$$

(b) Que $v : (s', Z') \longrightarrow (s'', Z'')$ sea un morfismo en $F(Y)$ significa que el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dd, "v"] \\ Y \arrow[ur, "s'"] \arrow[dr, "s''"'] & \\ & Z''. \end{tikzcd}$$

(c) $t_X^Y(u)(f) = t_X^Y(v)(g)$ significa que $uf = vg$ (recordar definición de la regla de correspondencia de $t_X^Y(u)$ y $t_X^Y(v)$).

Entonces $i)$ y $ii)$ significan que existen $u : Z \longrightarrow Z''$ y $v : Z' \longrightarrow Z''$ tales que $s'' = us = vs'$ con $s'' \in \Sigma$ y iii) que $uf = vg$.
También notemos que al tomar $f \in \coprod_{(s,Z)\in F(Y)} t_X^Y(s, Z)$ necesitamos decir que $f \in t_X^Y(s, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ para algún $(s, Z) \in F(Y)$. Entonces a un elemento $f \in \coprod_{(s,Z)\in F(Y)} t_X^Y(s, Z)$ lo podemos pensar como un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$.
De esta forma que $f \sim g$ lo podemos pensar en términos de diagramas como sigue.
Decimos que los siguientes dos diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] & X \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "s'"] \\ & Z & & & Z' & \end{tikzcd}$$

son equivalentes $\Leftrightarrow$ $\exists\ u : Z \longrightarrow Z''$, $v : Z' \longrightarrow Z''$ tal que $us = vs' \in \Sigma$ y $uf = vg$. Es decir, si y sólo si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] \\ & Z'' & \end{tikzcd}$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g"] & & & & Y \arrow[dlll, "s"'] \arrow[dl, "s'"] \\ & Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\ & & Z'' & & \end{tikzcd}$$

con $us = vs' \in \Sigma$.

Sea $\{\lambda_{(s,Z)} : t_X^Y(s,Z) \longrightarrow \varinjlim t_X^Y\}_{(s,Z)\in F(Y)}$ el límite directo del funtor t_X^Y. Por el Teorema 2.2.11, tenemos que para $f \in t_X^Y(s,Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ se tiene que $\lambda_{(s,Z)}(f) = [f]$ denota la clase de equivalencia de f en $\varinjlim t_X^Y$. Es decir, en términos de diagramas, tenemos que

$$\lambda_{(s,Z)}(f) = \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd} \right]$$

donde el corchete [ ] significa la clase de equivalencia del diagrama correspondiente.

Notación 2.4.1 *A los diagramas* $\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd}$ *se les llama* $\boldsymbol{\Sigma}$ **− techos izquierdos**.

A la clase $\left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd} \right]$ *lo denotaremos por* (s/f).

Con esta notación, tenemos que $\lambda_{(s,Z)}(f) := (s/f)$. Al elemento (s/f) lo llamaremos ***una fracción a izquierda***. *(Estamos utilizando la notación (s/f) para fracción a izquierda pues utilizaremos (f/s) para fracción a derecha, ver sección 2.7).*

Notemos que por el Teorema 2.2.11 tenemos que la relación definida en términos de diagramas es una relación de equivalencia. Sin embargo, para tomar práctica con el uso de diagramas, demostramos diagramaticamente que la relación es de equivalencia.

Lema 2.4.2 *La relación definida anteriormente es una relación de equivalencia.*

Demostración.

(a) *Simetría*. Veamos que $(s/f) \sim (s/f)$. Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "f"] & & & & Y \arrow[dl, "s"] \arrow[dlll, "s"'] \\
& Z \arrow[dr, "1_Z"'] & & Z \arrow[dl, "1_Z"] & \\
& & Z & &
\end{tikzcd}$$

ya que $1_Z \circ s = s \in \Sigma$.

(b) *Reflexiva*. Sean $(s/f), (t/g)$ tales que $(s/f) \sim (t/g)$. Por lo que existe $K \in \mathcal{C}$ y morfismos $u : Z \longrightarrow K$, $v : Z' \longrightarrow K$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g"] & & & & Y \arrow[dl, "t"] \arrow[dlll, "s"'] \\
& Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\
& & K. & &
\end{tikzcd}$$

con $us = vt \in \Sigma$. Reacomodando el diagrama tenemos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "g"'] \arrow[drrr, "f"] & & & & Y \arrow[dl, "s"] \arrow[dlll, "t"'] \\
& Z' \arrow[dr, "v"'] & & Z \arrow[dl, "u"] & \\
& & K & &
\end{tikzcd}$$

con $us = vt \in \Sigma$, de donde, $(t/g) \sim (s/f)$.

(c) *Transitividad.* Consideremos $(s/f), (t/g), (q/h)$ tales que $(s/f) \sim (t/g)$ y $(t/g) \sim (q/h)$. La primera condición implica que existe $K \in \mathcal{C}$ y morfismos $u : Z \longrightarrow K$, $v : Z' \longrightarrow K$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g" near start] & & & & Y \arrow[dlll, "s"' near start] \arrow[dl, "t"] \\
& Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\
& & K & &
\end{tikzcd}$$

con $us = vt \in \Sigma$.

Por otro lado, como $(t/g) \sim (q/h)$ existe $Q \in \mathcal{C}$ y morfismos $u' : Z' \longrightarrow Q$, $v' : R \longrightarrow Q$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "h"'] \arrow[drrr, "g" near start] & & & & Y \arrow[dlll, "q"' near start] \arrow[dl, "t"] \\
& R \arrow[dr, "v'"'] & & Z' \arrow[dl, "u'"] & \\
& & Q & &
\end{tikzcd}$$

con $v'q = u't \in \Sigma$.

Pegando ambos diagramas en uno solo tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & Q & & \\
& Z' \arrow[ur, "u'"] & & R \arrow[ul, "v'"'] & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[urrr, "h"' near start] \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "g" near start] & & & & Y \arrow[ulll, "t"' near start] \arrow[ul, "q"'] \arrow[dlll, "s"' near start] \arrow[dl, "t"] \\
& Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\
& & K. & &
\end{tikzcd}$$

Dado que Σ es un sistema calculable a izquierda, para el coángulo formado por $v'q$ y vt existe $P \in \mathcal{C}$ y morfismos $\alpha : Q \longrightarrow P$, $\beta : K \longrightarrow P$ tales que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v'q"] \arrow[d, "vt"'] & Q \arrow[d, "\alpha"] \\ K \arrow[r, "\beta"'] & P \end{tikzcd}$$

con $\beta \in \Sigma$, ya que $v'q \in \Sigma$.
En consecuencia, obtenemos que $\alpha(u't) = \alpha(v'q) = \beta(vt)$. Por lo que $(\alpha u')t = (\beta v)t$, así t es un igualador de estos morfismos. Como σ es calculable a izquierda, existe $T \in \mathcal{C}$ y un morfismo $\gamma : P \longrightarrow T$ con $\gamma \in \Sigma$ tal que $\gamma(\alpha u') = \gamma(\beta v)$ y entonces $\gamma(\alpha u')g = \gamma(\beta v)g$.

Afirmamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "h"] & & & & Y \arrow[dlll, "s"'] \arrow[dl, "q"] \\ & Z \arrow[dr, "\gamma\beta u"'] & & R \arrow[dl, "\gamma\alpha v'"] & \\ & & T & & \end{tikzcd}$$

conmuta.
En efecto,

$$\begin{aligned} (\gamma\beta u)f &= (\gamma\beta)(vg) \\ &= \gamma(\alpha u')g \\ &= \gamma\alpha(u'g) \\ &= \gamma\alpha(v'h) \\ &= (\gamma\alpha v')h. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\gamma\beta u)s &= (\gamma\beta)(us) \\ &= (\gamma\beta)(vt) \\ &= \gamma(\beta vt) \\ &= \gamma(\alpha v'q) \\ &= (\gamma\alpha v')q. \end{aligned}$$

Además como $us \in \Sigma$ y $\beta, \gamma \in \Sigma$ tenemos que $\gamma\beta us \in \Sigma$. Probándose que $(s/f) \sim (q/h)$.

Por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Dado $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ calculable a izquierda definimos una categoría, que denotaremos por $\mathcal{C}_\Sigma^l$, como sigue:

(a) *Objetos de* $\mathcal{C}_\Sigma^l$: Definimos Obj($\mathcal{C}_\Sigma^l$):= Obj($\mathcal{C}$). Es decir, los objetos de $\mathcal{C}_\Sigma^l$ son los mismos que los objetos de $\mathcal{C}$. Dado $X \in \mathcal{C}$, utilizaremos la notación $\overline{X}$ para denotar cuando el objeto lo estamos considerando en $\mathcal{C}_\Sigma^l$.

(b) *Morfismos de* $\mathcal{C}_\Sigma^l$: Sean $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{C}_\Sigma^l$ definimos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{X}, \overline{Y}) := \varinjlim t_X^Y \in \mathcal{A}b$$

donde t_X^Y es el funtor definido anteriormente.

(c) *Ley de composición:* Dado $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \mathcal{C}_\Sigma^l$ queremos definir una función

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{X}, \overline{Y}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{Y}, \overline{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{X}, \overline{Z}).$$

Para esto, consideremos $(s/f) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$, $(t/g) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ con $(s/f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{X}, \overline{Y})$ y $(t/g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{Y}, \overline{Z})$. Recordemos que las fracciones (s/f) y (t/g) se representan con los siguientes diagramas, respectivamente

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& Y' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dl, "t"] \\
& Z'. &
\end{tikzcd}$$

Consideremos el coángulo formado por los morfismos $s : Y \longrightarrow Y'$ y $g : Y \longrightarrow Z'$. Como Σ es calculable a izquierda, existen morfismos $s' : Z' \longrightarrow H$ y $g' : Y' \longrightarrow H$ con $s' \in \Sigma$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "t"'] \\
& Y' \arrow[dr, "g'"'] & & Z' \arrow[dl, "s'"] & \\
& & H. & &
\end{tikzcd}$$

Como $t, s' \in \Sigma$, tenemos que $s' \circ t \in \Sigma$ y por lo tanto, tenemos que $(s't/g'f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{X}, \overline{Z})$. De esta manera definimos:

$$(t/g) \circ (s/f) := (s't/g'f).$$

Lema 2.4.3 *La construcción anterior no depende de la manera en que se complete el coángulo*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & Z' \\ Y'. & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $(s/f) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ y $(t/g) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ morfismos en $\mathcal{C}^l_\Sigma$. Consideremos la composición de ambos morfismos, es decir, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "t"'] \\ & Y' & & Z', & \end{tikzcd}$$

como Σ es calculable izquierdo, para el coángulo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & Z' \\ Y' & \end{tikzcd}$$

existe $H \in \mathcal{C}$ y morfismos $g' : Y' \longrightarrow H$, $s' : Z' \longrightarrow H$ con $s' \in \Sigma$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & Z' \arrow[d, "s'"] \\ Y' \arrow[r, "g'"'] & H. \end{tikzcd}$$

Supongamos que el coángulo anterior lo completamos de otra forma. Es decir, supongamos que existe $W' \in \mathcal{C}$ y morfismos $u' : Y' \longrightarrow W'$, $v' : Z' \longrightarrow W'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & Z' \arrow[d, "v'"] \\ Y' \arrow[r, "u'"'] & W' \end{tikzcd}$$

con $v' \in \Sigma$. Consideremos el coángulo

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "s'"'] & W' \\ H, & \end{tikzcd}$$

por ser Σ calculable a izquierda, podemos completar al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "s'"'] & W' \arrow[d, "\beta"] \\
H \arrow[r, "\alpha"'] & R
\end{tikzcd}$$

con $\alpha \in \Sigma$ de manera que $\beta v' = \alpha s'$, entonces $\beta v' g = \alpha s' g$. Lo que implica que $\beta(u's) = \beta(v'g) = (\beta v')g = (\alpha s')g = \alpha(s'g) = \alpha(g's)$, por lo que s es un igualador derecho de βu y $\alpha g'$. Dado que Σ es calculable a izquierda, existe un igualador izquierdo, esto es, existe $k \in \Sigma$ con $k : R \longrightarrow Z''$ tal que $k(\beta u') = k(\alpha g')$. En consecuencia, $(k\beta)u'f = (k\alpha)g'f$ y $(k\beta)v't = (k\alpha)(s't)$. Por lo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "g'f"'] \arrow[drrr, "u'f"] & & & & Z' \arrow[dl, "v't"] \arrow[dlll, "s't"'] \\
& H \arrow[dr, "k\alpha"'] & & W' \arrow[dl, "k\beta"] & \\
& & Z''. & &
\end{tikzcd}$$

con $(k\beta)(v't) = (k\alpha)(s't) \in \Sigma$ pues $k, \alpha, s', t \in \Sigma$. Por lo tanto, $(s't/g'f) \sim (v't/u'f)$. $\square$

Los siguientes resulados nos muestran que podemos componer con cualquier representante de la clase, es decir, que la composición está bien definida.

Lema 2.4.4 *Sean* $(s/f) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ *y* $(t/g), (q/h) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ *tales que* $(t/g) \sim (q/h)$. *Entonces*

$$(t/g)(s/f) \sim (q/h)(s/f).$$

Demostración. Dado que $(t/g) \sim (q/h)$, existen morfismos $\epsilon : Z'' \longrightarrow P$ y $\gamma : Z' \longrightarrow P$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "g"'] \arrow[drrr, "h"] & & & & Z \arrow[dl, "q"] \arrow[dlll, "t"'] \\
& Z' \arrow[dr, "\gamma"'] & & Z'' \arrow[dl, "\epsilon"] & \\
& & P & &
\end{tikzcd}$$

con $\epsilon q = \gamma t \in \Sigma$. Entonces tenemos que $\gamma t = \epsilon q$ y $\gamma g = \epsilon h$. Construyamos primero $(\gamma t/\gamma g)(s/f)$. Consideremos el coángulo formado por s y γg, como Σ es calculable a izquierda tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\gamma g"] & & Z \arrow[dl, "\gamma t"'] \\
& Y' \arrow[dr, "\alpha"'] & & P \arrow[dl, "\beta"] & \\
& & R & &
\end{tikzcd}$$

con $\beta \in \Sigma$. De esta manera tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "t"'] \\
& Y' \arrow[dr, "\alpha"'] & & Z' \arrow[dl, "\beta\gamma"] & \\
& & R & &
\end{tikzcd}$$

con $\beta\gamma t \in \Sigma$ y por lo tanto por el Lema 2.4.3 tenemos que $(t/g) \circ (s/f) = (\beta\gamma t/\alpha f)$.

Por otro lado, como $\gamma g = \epsilon h$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "h"] & & Z \arrow[dl, "q"'] \\
& Y' \arrow[dr, "\alpha"'] & & Z'' \arrow[dl, "\beta\epsilon"] & \\
& & R & &
\end{tikzcd}$$

con $\beta\epsilon q \in \Sigma$ y por lo tanto, por el Lema 2.4.3 tenemos que $(q/h)(s/f) = (\beta\epsilon q/\alpha f)$.

Pero como $\beta\gamma t = \beta\epsilon q$, tenemos que $(\beta\gamma t/\alpha f) = (\beta\gamma q/\alpha f)$. Por lo tanto,

$$(t/g) \circ (s/f) = (q/h) \circ (s/f).$$

□ El siguiente corolario nos dice que la composición está bien definida.

Corolario 2.4.5 *Sean* $(s/f), (s'/f') : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ *y* $(t/g), (t'/g') : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ *morfismos en* $\mathcal{C}^l_\Sigma$ *tales que* $(s/f) \sim (s'/f')$ *y* $(t/g) \sim (t'/g')$. *Entonces*

$$(t/g)(s/f) \sim (t'/g')(s'/f').$$

Demostración. Aplicando el Lema 2.4.4 tenemos que $(t/g)(s/f) \sim (t'/g')(s/f)$. Aplicando el resultado análogo a 2.4.4, pero fijando el primer morfismo (t'/g') tenemos que $(t'/g')(s/f) \sim (t'/g')(s'/f')$. Como $\sim$ es de equivalencia, tenemos que $(t/g)(s/f) \sim (t'/g')(s'/f')$. $\square$

Lema 2.4.6 *Sean $(s/f) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$, $(t/g) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$, $(r/h) : \overline{Z} \longrightarrow \overline{W}$ morfismos en $\mathcal{C}^l_\Sigma$. Entonces*

$$(r/h)[(t/g)(s/f)] = [(r/h)(t/g)](s/f),$$

es decir, la composición de morfismos es asociativa.

Demostración. Consideramos los siguientes diagramas, primero para la asociatividad $(r/h)[(t/g)(s/f)]$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dl, "t"] \arrow[ddr, "h"'] & & W \arrow[ddl, "r"] \\
& Y' \arrow[dr, "g'"'] & & Z' \arrow[dl, "s'"] & & & \\
& & K \arrow[dr, "v"'] & & & W' \arrow[dll, "u"] & \\
& & & K' & & &
\end{tikzcd}$$

con s' y $u \in \Sigma$.

Por otro lado, para la asociatividad $[(r/h)(t/g)](s/f)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[ddr, "f"'] & & Y \arrow[ddl, "s"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dl, "t"] \arrow[dr, "h"'] & & W \arrow[dl, "r"] \\
& & & Z' \arrow[dr, "h'"'] & & W' \arrow[dl, "t'"] & \\
& Y' \arrow[dr, "l"'] & & (1) & P \arrow[dll, "m"] & & \\
& & Q & & & &
\end{tikzcd}$$

con $t', m \in \Sigma$. Consideramos el siguiente coángulo

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "mt'"] \arrow[d, "u"'] & Q \\
K' &
\end{tikzcd}$$

dado que $m, t' \in \Sigma$ y Σ es calculable a izquierda existen morfismos $\alpha : K' \longrightarrow A$ y $\beta : Q \longrightarrow A$ con $\alpha \in \Sigma$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, "mt'"] \arrow[d, "u"'] & Q \arrow[d, "\beta"] \\ K' \arrow[r, "\alpha"'] & A. \end{tikzcd}$$

De esta manera tenemos que $\beta(mt')h = \alpha uh$, lo cual implica que $(\beta mh')t = (\beta m)(h't) = (\beta m)(t'h) = \alpha uh = \alpha(vs't) = (\alpha vs')t$, por lo que t es un igualador derecho y $t \in \Sigma$, entonces existe un igualador izquierdo $\gamma : A \longrightarrow B$ tal que $\gamma(\beta mh') = \gamma(\alpha vs')$, con $\gamma \in \Sigma$.

Ahora componiendo con g tenemos que $\gamma\beta mh'g = \gamma\alpha vs'g$. Por lo tanto, de los diagramas anteriores tenemos que $\gamma\beta ls = \gamma\beta mh'g = \gamma\alpha vs'g = \gamma\alpha vg's$. De manera que s resulta ser un igualador derecho con $s \in \Sigma$, entonces como Σ es calculable a izquierda, existe $\xi : B \longrightarrow C$ tal que $\xi(\gamma\beta l) = \xi(\gamma\alpha vg')$ con $\xi \in \Sigma$.

Al componer con el morfismo $f : X \longrightarrow Y'$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "lf"] \arrow[d, "vg'f"'] & Q \arrow[d, "\xi\gamma\beta"] \\ K' \arrow[r, "\xi\gamma\alpha"'] & C. \end{tikzcd}$$

De los diagramas anteriores concluimos que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "lf"'] \arrow[drrr, "vg'f" near start] & & & & W \arrow[dlll, "mt'r"' near start] \arrow[dl, "ur"] \\ & Q \arrow[dr, "\xi\gamma\beta"'] & & K' \arrow[dl, "\xi\gamma\alpha"] & \\ & & C. & & \end{tikzcd}$$

conmuta, con $(\xi\gamma\alpha)(ur) = (\xi\gamma\beta)(mt'r) \in \Sigma$ pues $u,\ r,\ \alpha,\ \gamma,\ \xi \in \Sigma$.

En consecuencia,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "lf"'] & & W \arrow[dl, "mt'r"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

es equivalente a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "vg'f"'] & & W \arrow[dl, "ur"] \\ & K' & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(r/h)[(t/g)(s/f)] = [(r/h)(t/g)](s/f)$. $\square$

Proposición 2.4.7 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y Σ un sistema de morfismos de $\mathcal{C}$ tal que las siguientes considiones se satisfacen.*

(a) Σ es calculable a izquierda.

(b) Para cada objeto X de $\mathcal{C}$ la categoría X/Σ contiene una subcategoría pequeña cofinal.

Entonces $\mathcal{C}_\Sigma^l$ es una categoría.

Demostración. En efecto, los objetos de $\mathcal{C}_\Sigma^l$ son los mismos que los de $\mathcal{C}$. Recordemos que por notación, escribimos $\overline{X}$ para decir que a X lo estamos considerando como objeto de $\mathcal{C}_\Sigma^l$.

Por lo hecho previamente tenemos que un morfismo $\Theta : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ puede ser interpretado como la clase de equivalencia de un diagrama de la siguiente forma forma

$$\Theta = \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd} \right]$$

con $s \in \Sigma$.

Por el Lema 2.4.6 sabemos que la composición es asociativa.

Por último, dado que Σ es un sistema calculable a izquierda $1_X : X \longrightarrow X \in \Sigma$ para cada $X \in \mathcal{C}$. Por lo que para cada objeto $\overline{X} \in \mathcal{C}_\Sigma^l$ existe el morfismo identidad $1_{\overline{X}} : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ representado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "1_X"'] & & X \arrow[dl, "1_X"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

En efecto, dado $(s/f) : X \longrightarrow Y$ del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "1_X"'] & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"] & \\
& & Y' & &
\end{tikzcd}$$

concluimos que $(s/f)(1_X/1_X) = (s/f)$.

Por lo tanto, $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es una categoría. $\square$

Teorema 2.4.8 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y Σ un sistema de morfismos de $\mathcal{C}$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Σ es calculable a izquierda.

(b) Para cada objeto X de $\mathcal{C}$ la categoría X/Σ contiene una subcategoría pequeña cofinal denotada por $F(X)$.

Entonces la categoría de fracciones de $\mathcal{C}$ relativa a Σ existe.

Demostración. Definimos una asignación $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$. Para $X \in \mathcal{C}$, definimos $T(X) = \overline{X}$ y si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces

$$T(f) = (1_Y/f)$$

que se representa mediante la clase del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

con $1_Y \in \Sigma$.

Afirmamos que T es un funtor covariante. En efecto,

(a) Dados $f, g \in \mathcal{C}$ veamos que $T(gf) = T(g)T(f)$.
En efecto, si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$, tenemos que $gf : X \longrightarrow Z$ es mandado bajo T a la fracción $(1_Z/gf)$.

Por otro lado, para la composición de los morfismos $T(g)T(f) = (1_Z/g)(1_Y/f)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "1_Z"] \\
& Y \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dl, "1_Z"] & \\
& & Z & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $T(g)T(f) = (1_Z/gf)$ y así, $T(gf) = T(g)T(f)$.

(b) Por definición tenemos que $T(1_X) = (1_X/1_X)$, por lo tanto, $T(1_X) = 1_{\overline{X}}$.

Ahora veamos que si $s \in \Sigma$, entonces $T(s)$ es un isomorfismo. Sea $s : X \longrightarrow Y$ con $s \in \Sigma$, la fracción $T(s) = (1_Y/s)$ es representada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "s"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Veamos que la fracción $(s/1_Y)$ es el inverso de $(1_Y/s)$. Dado que $s, 1_Y \in \Sigma$, entonces $(s/1_Y) \in \mathcal{C}^l_\Sigma$, para la composición $(s/1_Y)(1_Y/s)$ consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "s"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"] & & Z \arrow[dl, "s"] \\
& Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] & \\
& & Y. & &
\end{tikzcd}$$

Luego del diagrama tenemos que $(s/1_Y)(1_Y/s) = (s/s)$. Por el siguiente diagrama tenemos que $(s/s) \sim (1_X/1_X)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "1_X"'] \arrow[drrr, "s"] & & & & X \arrow[dlll, "1_X"'] \arrow[dl, "s"] \\
& X \arrow[dr, "s"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] & \\
& & Y. & &
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, $(s/1_Y)(1_Y/s) = (1_X/1_X)$. Calculamos ahora $(1_Y/s)(s/1_Y)$ mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "s"] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \\
& Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] & \\
& & Y. & &
\end{tikzcd}
$$

De esta manera $(1_Y/s)(s/1_Y) = (1_Y/1_Y)$.
Por lo tanto, $T(s)$ es un isomorfismo para toda $s \in \Sigma$.

Veamos ahora que el funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ tiene la propiedad universal, es decir, para cualquier otro funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ para cada $s \in \Sigma$, entonces existe un único funtor $Q : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}^l_\Sigma \arrow[dl, "Q"] \\
\mathcal{D} &
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

En efecto, sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F(s)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ para cada $s \in \Sigma$. Definimos $Q : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow D$ como $Q(\overline{X}) = F(X)$ y para un morfismo $(s/f) \in \mathcal{C}^l_\Sigma$, $Q(s/f) := F(s)^{-1}F(f)$.

Veamos primero que la asignación esta bien definida.
Sean $(s/f), (s'/f') \in \mathcal{C}^l_\Sigma$ tales que $(s/f) \sim (s'/f')$, por lo que existen morfismos $a : Y' \longrightarrow Y'''$, $b : Y'' \longrightarrow Y'''$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] \arrow[drrr, "f'" near start] & & & & Y \arrow[dlll, "s"' near start] \arrow[dl, "s'"] \\
& Y' \arrow[dr, "a"'] & & Y'' \arrow[dl, "b"] & \\
& & Y''' & &
\end{tikzcd}
$$

donde $s, s' \in \Sigma$ y $as = bs' \in \Sigma$, lo cual implica que $F(s), F(s'), F(as) = F(bs')$ son isomorfismos. Dado que F es un funtor $F(as) = F(a)F(s)$, de donde $F(a) = F(as)F(s)^{-1}$, por lo que $F(a)$ es un isomorfismo y de manera análoga $F(b)$ es también un isomorfismo.

De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} Q(s/f) &= F(s)^{-1}F(f) \\ &= F(s)^{-1}F(a)^{-1}F(a)F(f) \\ &= F(as)^{-1}F(af) \\ &= F(bs')^{-1}F(bf') \\ &= F(s')^{-1}F(b)^{-1}F(b)F(f') \\ &= F(s')^{-1}F(f') \\ &= Q(s'/f'). \end{aligned}$$

En consecuencia, Q está bien definido.

La asignación $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ es un funtor covariante.
En efecto,

(a) Por definición $Q(1_X/1_X) = F(1_X)^{-1}F(1_X)$ dado que F es un funtor tenemos que $F(1_X) = 1_{F(X)}$. Por lo tanto, $Q(1_X/1_X) = 1_{Q(\overline{X})}1_{Q(\overline{X})} = 1_{Q(\overline{X})}$.

(b) Sean $(s/f) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ y $(t/g) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ morfismos en $\mathcal{C}^l_\Sigma$, veamos que $Q((t/g)(s/f)) = Q(t/g)Q(s/f)$. Para esto, componemos $(t/g)(s/f)$ en $\mathcal{C}^l_\Sigma$, por lo que existen morfismos $s' : Z' \longrightarrow K$ y $g' : Y' \longrightarrow K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "t"] \\ & Y' \arrow[dr, "g'"'] & & Z' \arrow[dl, "s'"] & \\ & & K & & \end{tikzcd}$$

con $s' \in \Sigma$. Así, $(t/g)(s/f) = (s't/g'f)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Q((t/g)(s/f)) &= Q(s't/g'f) \\ &= F(s't)^{-1}F(g'f) \\ &= F(t)^{-1}F(s')^{-1}F(g')F(f) \end{aligned}$$

Por otro lado, $Q(t/g)Q(s/f) = F(t)^{-1}F(g)F(s)^{-1}F(f)$. Como $g's = s'g$ entonces $F(g')F(s) = F(s')F(g)$, y así $F(g)F(s)^{-1} = F(s')^{-1}F(g')$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} Q(t/g)Q(s/f) &= F(t)^{-1}F(s')^{-1}F(g')F(f) \\ &= F(s't)^{-1}F(g'f) \\ &= Q(s't/g'f) \\ &= Q((t/g)(s/f)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Q : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor.

Afirmamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}^l_\Sigma \arrow[dl, "Q"] \\ \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

En efecto, si $X \in \mathcal{C}$, $T(X) = \overline{X}$ y por definición del funtor Q tenemos que $Q(\overline{X}) = F(X)$. Por lo tanto $QT(X) = F(X)$ $\forall X \in \mathcal{C}$.

Ahora si $f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned} QT(f) &= Q(1_Y/f) \\ &= F(1_Y)^{-1}F(f) \\ &= 1_{F(Y)}F(f) \\ &= F(f) \end{aligned}$$

En consecuencia, $F = QT$.

Ahora veamos que Q es único. Supongamos que existe otro funtor $G : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F = GT$. Luego $F(X) = GT(X) = G(\overline{X})$ y por lo tanto $G(\overline{X}) = Q(\overline{X})$, por lo que G y Q coinciden en objetos.

Veamos que $Q(s/f) = G(s/f)$ para $(s/f) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ en $\mathcal{C}^l_\Sigma$. Sea $f : X \longrightarrow Y' \in \mathcal{C}$, dado que G hace conmutar el diagrama tenemos que $F(f) = GT(f) = G(1_{Y'}/f)$. Observemos que $(s/f) = (s/1_{Y'})(1_{Y'}/f)$, esto debido al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_{Y'}"] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& Y' \arrow[dr, "1_{Y'}"'] & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"] & \\
& & Y'. & &
\end{tikzcd}$$

Ahora como G es funtor, tenemos que

$$G(s/f) = G((s/1_{Y'})(1_{Y'}/f)) = G(s/1_{Y'})G(1_{Y'}/f) = G(s/1_{Y'})F(f).$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "s"'] & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_{Y'}"] & & X \arrow[dl, "s"] \\
& Y' \arrow[dr, "1_{Y'}"'] & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"] & \\
& & Y' & &
\end{tikzcd}$$

de donde tenemos que $(s/1_{Y'})(1_{Y'}/s) = (s/s) \sim (1_X/1_X)$ y de manera análoga $(1_{Y'}/s)(s/1_{Y'}) = (1_{Y'}/1_{Y'})$. Por lo tanto, $(s/1_{Y'}) = (1_{Y'}/s)^{-1}$ en $\mathcal{C}^l_\Sigma$. En consecuencia, $G(s/1_{Y'}) = G((1_{Y'}/s)^{-1}) = G(1_{Y'}/s)^{-1} = (GT(s))^{-1} = F(s)^{-1}$. Por lo tanto, $G(s/f) = F(s)^{-1}F(f) = Q(s/f)$ para cada $(s/f) \in \mathcal{C}^l_\Sigma$, de donde concluimos que $G = Q$.
Por lo tanto, la categoría de fracciones existe bajo estas condiciones. $\square$

2.5. Categoría preaditiva de fracciones

En lo que sigue demostraremos propiedades que la categoría de fracciones hereda de la categoría original. Primero demostraremos que la categoría $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es una categoría preaditiva si la categoría $\mathcal{C}$ lo es. Para lo cual requeriremos de los siguientes resultados. En toda esta sección supondremos que $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ que satisface *a*) y *b*) de la proposición 2.4.7.

Lema 2.5.1 *Sean $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ objetos de $\mathcal{C}^l_\Sigma$. Entonces, el conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ *tiene estructura natural de grupo abeliano.*

Demostración. Recordemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y}) := \varinjlim t^Y_X$ y por el Teorema 2.2.11 tenemos que $\varinjlim t^Y_X \in \mathcal{A}b$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ es un grupo abeliano. Para fines prácticos necesitamos la estructura de grupo abeliano de

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{X},\overline{Y})$ en términos de diagramas. Para esto, primero reinterpretamos la suma dada en 2.2.11 para $\varinjlim t^Y_X$. Tenemos que

$$\varinjlim t^Y_X = \Big(\coprod_{(s,Z)\in F(Y)} t^Y_X(s,Z)\Big)/\sim .$$

Sean $\overline{f},\overline{g} \in \varinjlim t^Y_X$ con $f \in t^Y_X(s,Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ y $g \in t^Y_X(s',Z') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z')$ para algunos $(s,Z)(s',Z') \in F(Y)$. Por el Teorema 2.2.11, tenemos que

$$\overline{f}+\overline{g} := \overline{t^Y_X(u)(f)+t^Y_X(v)(g)}$$

para ciertos morfismos $u : (s,Z) \longrightarrow (s'',Z'')$ y $v : (s',Z') \longrightarrow (s'',Z'')$ en $F(Y)$. Notemos que la suma $t^Y_X(u)(f)+t^Y_X(v)(g)$ está tomada en $t^Y_X(s'',Z'') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z'')$ con la estructura de grupo abeliano que tiene $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z'')$. Luego, por definición de $t^Y_X(u)$ y $t^Y_X(v)$ tenemos que $t^Y_X(u)(f) + t^Y_X(v)(g) = uf + vg$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z'')$.

Ahora reinterpretamos la suma anterior en términos de diagramas. Recordemos que $\overline{f}$ lo podemos representar por un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

a $\overline{g}$ lo podemos representar por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "s'"] \\ & Z' & \end{tikzcd}$$

y a $\overline{t^Y_X(u)(f)+t^Y_X(v)(g)}$ lo representamos por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "uf+vg"'] & & Y \arrow[dl, "s''"] \\ & Z''. & \end{tikzcd}$$

Como $u : (s,Z) \longrightarrow (s'',Z'')$ y $v : (s',Z') \longrightarrow (s'',Z'')$ son morfismos en $F(Y)$, tenemos que los siguientes diagramas conmutan en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dd, "u"] \\ Y \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "s''"'] & \\ & Z'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dd, "v"] \\ Y \arrow[ur, "s'"] \arrow[dr, "s''"'] & \\ & Z''. \end{tikzcd}$$

De la prueba del Lema 2.3.3, recordemos que la existencia de u y v se construye de la siguiente manera:
Consideramos el coángulo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & Z \\ Z' & \end{tikzcd}$$

y entonces completamos al diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & Z \arrow[d, "u"] \\ Z' \arrow[r, "v"'] & Z''. \end{tikzcd}$$

Luego, se define $s'' := vs' = us \in \Sigma$ y entonces tenemos $u : (s, Z) \longrightarrow (s'', Z'')$ y $v : (s', Z') \longrightarrow (s'', Z'')$.

Es decir, en términos de diagramas tenemos que

$$\left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z & \end{tikzcd}\right] + \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "s'"] \\ & Z' & \end{tikzcd}\right] = \left[\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "uf+vg"'] & & Y \arrow[dl, "s''"] \\ & Z'' & \end{tikzcd}\right],$$

donde para construir $\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "uf+vg"'] & & Y \arrow[dl, "s''"] \\ & Z'' & \end{tikzcd}$ lo que hacemos es considerar coángulo formado por s y s' y lo completamos al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & Z \arrow[d, "u"] \\ Z' \arrow[r, "v"'] & Z'' \end{tikzcd}$$

y así tomamos $s'' = us = vs' : Y \longrightarrow Z''$ y en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z'')$ tomamos la suma $uf + vg$.
Para recordar la construcción anterior lo que hacemos es que al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "s'"] & & X \arrow[dl, "g"] \\ & Z & & Z' & \end{tikzcd}$$

lo completamos al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "s'"] & & X \arrow[dl, "g"] \\
& Z \arrow[dr, "u"'] & & Z' \arrow[dl, "v"] & \\
& & Z'' & &
\end{tikzcd}$$

y de ahí obtenemos la información necesaria para construir

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "uf+vg"'] & & Y \arrow[dl, "s''=us"] \\
& Z''. &
\end{tikzcd}$$

Interpretamos la estructura de grupo abeliano que tiene t_X^Y, dada en el Teorema 2.2.11.

(a) *Neutro.* Recordemos del Teorema 2.2.11 que el cero en $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{X},\overline{Y})$ es la clase del cero, que denotamos por $\overline{0}$, donde $0 \in t_X^Y(s,Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ para cualquier $(s,Z) \in F(Y)$.
En particular, podemos tomar $(1_Y, Y) \in F(Y)$ (recordemos que $F(Y)$ es una subcategoría de Y/Σ) y $0 \in t_X^Y(1_Y,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y)$. Es decir, el cero lo podemos representar con la clase del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "0"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \\
& Y. &
\end{tikzcd}$$

(b) *Inverso.* De 2.2.11, tenemos que si $\overline{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma^l}(\overline{X},\overline{Y})$ con $f \in t_X^Y(s,Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ entonces $-(\overline{f}) = \overline{-f}$. Es decir, el inverso de la clase del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& Z, &
\end{tikzcd}$$

lo podemos representar con la clase del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "-f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& Z. &
\end{tikzcd}$$

(c) *Asociatividad y conmutatividad.* No la interpretamos pues no necesitamos esto en términos de diagramas. Solo usamos la asociatividad y conmutatividad, en abstracto.

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(X,Y)$ es un grupo abeliano, puesto que $\mathcal{C}$ es preaditiva. $\square$

Observación 2.5.2 *Tenemos que $(s/0) \sim (1_Y/0)$ $\forall\ s \in \Sigma$. En efecto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "0"'] \arrow[drrr, "0"] & & & & Y \arrow[dlll, "s"'] \arrow[dl, "1_Y"] \\
& Y' \arrow[dr, "1_{Y'}"'] & & Y \arrow[dl, "s"] & \\
& & Y'. & &
\end{tikzcd}$$

De donde tenemos que $(s/0) \sim (1_Y/0)$.

Lema 2.5.3 *Para X, Y, Z objetos en la categoría $\mathcal{C}$, la composición*

$$\circ(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{X},\overline{Y}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{Y},\overline{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{X},\overline{Z})$$

es bilineal. Es decir, si $\overline{f},\overline{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{X},\overline{Y})$ y $\overline{h},\overline{k} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^l_\Sigma}(\overline{Y},\overline{Z})$, entonces $\overline{h} \circ (\overline{f}+\overline{g}) = \overline{h}\circ\overline{f} + \overline{h}\circ\overline{g}$ y $(\overline{h}+\overline{k})\circ\overline{f} = \overline{h}\circ\overline{f} + \overline{k}\circ\overline{f}$.

Demostración. Consideramos $\overline{f} = (s/f), \overline{g} = (t/g)$ y $\overline{h} = (r/h)$, donde $\overline{f}$ y $\overline{g}$ están representados por los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\
& Y' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "t"] \\
& Y''. &
\end{tikzcd}$$

Para calcular $\overline{f}+\overline{g}$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & & X \arrow[dl, "g"] \\
& Y' \arrow[dr, "t'"'] & & Y'' \arrow[dl, "s'"] & \\
& & A & &
\end{tikzcd}$$

donde $t'f+s'g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A)$, $t's = s't \in \Sigma$. Por lo que tenemos $(s/f)+(t/g) = (s't/t'f+s'g)$. Para componer con (r/h) consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "t'f+s'g"'] & & Y \arrow[dl, "s't"'] \arrow[dr, "h"] & & Z \arrow[dl, "r"] \\
& A \arrow[dr, "\alpha"'] & & Z' \arrow[dl, "\beta"] & \\
& & K & &
\end{tikzcd}$$

con $\beta \in \Sigma$. De esta manera la composición $(r/h)[(s/f)+(t/g)]$ es representada mediante el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\alpha(t'f+s'g)"'] & & Z \arrow[dl, "\beta r"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

con $\alpha(t'f+s'g) = \alpha t'f + \alpha s'g \in \mathcal{C}$ y $\beta r \in \Sigma$.

Ahora, calculamos la composición $(r/h)(s/f)$. Recordemos que para realizar la composición tenemos que completar un coángulo y se probó en 2.4.3 que no depende de la forma en que se complete el coángulo.
En particular, como $\beta h = (\alpha t')s$, por los diagramas anteriores, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "h"] & & Z \arrow[dl, "r"] \\
& Y' \arrow[dr, "\alpha t'"'] & & Z' \arrow[dl, "\beta"] & \\
& & K, & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(r/h)(s/f) = (\beta r/\alpha t'f)$.

De forma análoga, para calcular $(r/h)(t/g)$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "h"] & & Z \arrow[dl, "r"] \\
& Y'' \arrow[dr, "\alpha s'"'] & & Z' \arrow[dl, "\beta"] & \\
& & K. & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(r/h) \circ (t/g) = (\beta r/\alpha s' g)$.
De esta manera queremos sumar las fracciones $(\beta r/\alpha s' g)$ y $(\beta r/\alpha t' f)$ representados por los diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\alpha s' g"'] & & Z \arrow[dl, "\beta r"] \\
& K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\alpha t' f"'] & & Z \arrow[dl, "\beta r"] \\
& K. &
\end{tikzcd}$$

Del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\alpha s' g"'] & & Y \arrow[dl, "\beta r"'] \arrow[dr, "\alpha t' f"] & & Z \arrow[dl, "\beta r"] \\
& K \arrow[dr, "1_K"'] & & K \arrow[dl, "1_K"] & \\
& & K & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $(\beta r/\alpha s' g) + (\beta r/\alpha t' f)$ está representada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\alpha s' g + \alpha t' f"'] & & Z \arrow[dl, "\beta r"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

de donde se concluye que $(r/h)[(s/f) + (t/g)] = (r/h)(t/g) + (r/h)(s/f) = (r/h)(s/f) + (r/h)(t/g)$.

De manera análoga se prueba la distribución por la izquierda. $\square$

Corolario 2.5.4 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ que satisface a) y b) de 2.4.7. Entonces $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es preaditiva.*

Demostración. Se sigue de los Lemas 2.5.1 y 2.5.3. $\square$

Proposición 2.5.5 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con las mismas hipótesis del Teorema 2.4.8. Para un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $T(f) = 0$ *en* $\mathcal{C}^l_\Sigma$.

(b) Existe un morfismo $s : Y \longrightarrow Z$, $s \in \Sigma$ *tal que* $sf = 0$ *en* $\mathcal{C}$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos primero que $T(f) = 0$. Ahora como $T(f) = (1_Y/f) = 0 = (1_Y/0)$ existen morfismos $u : Y \longrightarrow K$ y $v : Y \longrightarrow K$, con $v = v1_Y = u1_Y \in \Sigma$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "0"'] \arrow[drrr, "f"] & & & & Y \arrow[dlll, "1_Y"'] \arrow[dl, "1_Y"] \\
& Y \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, "v"] & \\
& & K, & &
\end{tikzcd}$$

es decir, $vf = 0$. Tomando $s := v : Y \longrightarrow Z$ se tiene lo deseado.

$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que existe $s : Y \longrightarrow Z$ con $s \in \Sigma$ tal que $sf = 0$. Entonces $T(s)T(f) = T(0) = 0$. Como $s \in \Sigma$, se tiene que $T(s)$ es un isomorfismo, por lo tanto, $T(f) = 0$. $\square$

2.6. Categoría de fracciones derechas

Las proposiciones y teoremas demostrados en las sección anteriores tienen resultados duales. Análogo a la construcción dada en el Teorema 2.4.7 de fracciones a izquierda se puede emular la construcción para construir la categoría de fracciones derechas.

Para construir las fracciones a derecha, construimos las fracciones izquierdas en la categoría dual $\mathcal{C}^*$ (ver sección 1.6). Sea $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$, consideramos

$$\Sigma^* := \{f^* : X^* \longrightarrow Y^* | f : Y \longrightarrow X \ con\ f \in \Sigma\} \subseteq Mor(\mathcal{C}^*).$$

Dado $X^* \in \mathcal{C}^*$ construimos X^*/Σ^* (ver definición 2.3.2).

Observación 2.6.1 *Notemos que* $X^*/\Sigma^* = (\Sigma/X)^*$.

Definición 2.6.2 *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría arbitraria*

(a) *Se dice que $\mathcal{C}$ es* ***casi-directa a derecha*** *si cualquier coángulo en $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B, \end{tikzcd}$$

se puede completar a un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

y para cualquier par de morfismos $u, v : B \longrightarrow C$ en $\mathcal{C}$ existe un morfismo $\alpha : A \longrightarrow B$ tal que $u\alpha = v\alpha$.

(b) *Sea $\mathcal{C}'$ una subcategoría plena de $\mathcal{C}$. Se dice que $\mathcal{C}'$ es una* ***subcategoría final de*** *$\mathcal{C} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{C}$, existe un morfismo $u : A' \longrightarrow A$ con $A' \in \mathcal{C}'$.*

Observación 2.6.3 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema de morfismos.*

(a) *Con la definición anterior, tenemos que X^*/Σ^* es casi-directa a izquierda $\Leftrightarrow \Sigma/X$ es casi-directa a derecha. Además (X^*/Σ^*) tiene una subcategoría cofinal $\Leftrightarrow \Sigma/X$ tiene una subcategoría final.*

(b) *$\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ es calculable a derecha en $\mathcal{C} \Leftrightarrow \Sigma^* \subseteq Mor(\mathcal{C}^*)$ es calculable a izquierda en $\mathcal{C}^*$.*

Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema de morfismos que satisface las siguientes condiciones

a) Σ es calculable a derecha.

b) Para cada $X \in \mathcal{C}$, Σ/X tiene una subcategoría final pequeña.

Por la observación anterior, tenemos que $\Sigma^* \subseteq Mor(\mathcal{C}^*)$ es calculable a izquierda en $\mathcal{C}^*$ y X^*/Σ^* tiene una subcategoría cofinal pequeña para cada $X^* \in \mathcal{C}^*$.

Por el Teorema 2.4.8 sabemos que podemos contruir la categoría de **fracciones izquierdas de** $\mathcal{C}^*$ que denotamos por $(\mathcal{C}^*_{\Sigma^*})^l$.
En este caso tenemos que

(a) $Obj((\mathcal{C}^*_{\Sigma^*})^l) = Obj(\mathcal{C}^*) = Obj(\mathcal{C})$, dado $X^* \in Obj(\mathcal{C}^*)$ utilizamos la notación $\overline{X^*}$ para decir que estamos considerando al objeto en $(\mathcal{C}^*_{\Sigma^*})^l$.

(b) $Mor((\mathcal{C}^*_{\Sigma^*})^l)$. Un morfismos del objeto $\overline{Y^*}$ a $\overline{X^*}$ en $(\mathcal{C}^*_{\Sigma^*})^l$ lo podemos interpretar como una clase de equivalencia de un diagrama de la siguiente forma en $\mathcal{C}^*$

$$\begin{tikzcd} Y^* \arrow[dr, "f^*"'] & & X^* \arrow[dl, "s^*"] \\ & Z^* & \end{tikzcd}$$

con $f^* : Y^* \longrightarrow Z^*$ en $\mathcal{C}^*$ y $s : X^* \longrightarrow Z^*$ en Σ^*.

Pasando el diagrama anterior a $\mathcal{C}$ tenemos que un morfismos de $\overline{Y^*}$ a $\overline{X^*}$ en $(\mathcal{C}^*_{\Sigma^*})^l$ lo podemos representar con la clase de equivalencia de un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} Y & & X \\ & Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

con $f : Z \longrightarrow Y$ y $s \in \Sigma$.

En base a la discusión anterior, podemos definir la categoría de fracciones derechas.
Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema de morfismos tal que satisfacen las siguientes condiciones

a) Σ es calculable a derecha.

b) Para cada $X \in \mathcal{C}$, Σ/X tiene una subcategoría final pequeña.

Entonces definimos la **categoría de fracciones a derecha** $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}_{\mathbf{\Sigma}}$ como sigue.

(a) $Obj(\mathcal{C}^r_\Sigma) = Obj(\mathcal{C})$ y dado $X \in Obj(\mathcal{C})$ utilizamos la notación $\overline{X}$ para decir que a X lo estamos considerando como objeto de $\mathcal{C}^r_\Sigma$.

(b) $Mor(\mathcal{C}^r_\Sigma)$. Dados dos objetos $\overline{X}, \overline{Y} \in Obj(\mathcal{C}^r_\Sigma)$ definimos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y}) := \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^*_{\Sigma^*})^l}(\overline{Y^*}, \overline{X^*}).$$

Es decir, un morfismo $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ en $\mathcal{C}^r_\Sigma$ lo representamos con la clase de equivalencia de un diagrama en $\mathcal{C}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$. Donde la relación de equivalencia está dada como sigue: los siguientes dos diagramas están relacionados

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

si y sólo si existen morfismos, $\alpha : W \longrightarrow Z$ y $\beta : W \longrightarrow Z'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & & \\ & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f"' near end] & & Z' \arrow[dlll, "s'" near end] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & & & Y \end{tikzcd}$$

con $s'\beta \in \Sigma$.

Al morfismo $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ representado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

lo denotaremos por (f/s) y la llamamos **fracción a derecha**.

De forma análoga a como se define la composición de fracciones a izquierda definimos la composición de fracciones a derecha

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r_\Sigma}(\overline{Y}, \overline{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Z}).$$

Consiremos dos fracciones a derecha $(f/s) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ y $(g/t) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ representadas por los diagramas

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & & Z. \end{tikzcd}$$

Consideremos el coángulo formado por los morfismos $f : X' \longrightarrow Y$ y $t : Y' \longrightarrow Y$. Como Σ es calculable a derecha, existen morfismos $t' : W \longrightarrow X'$ con $t' \in \Sigma$

y $f' : W \longrightarrow Y'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\
& X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z.
\end{tikzcd}$$

Como $st' \in \Sigma$, tenemos que $(gf'/st') \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Z})$. De esta manera definimos

$$(g/t) \circ (f/s) = (gf'/st').$$

Con esto es fácil ver que $\mathcal{C}^r_\Sigma$ es una categoría.
También tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^r_\Sigma}(\overline{X}, \overline{Y})$ es un grupo abeliano donde la suma esta definida como sigue:

$$\left[\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}\right] + \left[\begin{tikzcd}
& Z' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}\right] = \left[\begin{tikzcd}
& Z'' \arrow[dl, "s''"'] \arrow[dr, "gv+fu"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}\right]$$

Donde para construir

$$\begin{tikzcd}
& Z'' \arrow[dl, "s''"'] \arrow[dr, "gv+fu"] & \\
X & & Y,
\end{tikzcd}$$

lo que hacemos es considerar el coángulo formado por $s : Z \longrightarrow X$ y $s' : Z' \longrightarrow X$ y como Σ es calculable a derecha tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& & Z'' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & & \\
& Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "s"] & & Z' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & X & & Y.
\end{tikzcd}$$

con $u \in \Sigma$ y $s'' := su = s'v \in \Sigma$.
Con esto tenemos que $\mathcal{C}^r_\Sigma$ es una categoría preaditiva.

Teorema 2.6.4 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y Σ un sistema de morfismos de $\mathcal{C}$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) Σ es calculable a derecha.

(b) Para cada objeto X de $\mathcal{C}$ la categoría Σ/X contiene una subcategoría pequeña cofinal denotada por $F(X)$.

Entonces la categoría de fracciones de $\mathcal{C}$ relativa a Σ existe, esta categoría es denotada por $\mathcal{C}^r_\Sigma$ y es llamada categoría de fracciones derechas.

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 2.4.8. $\square$

2.7. Categoría aditiva de fracciones

En esta sección revisaremos las condiciones necesarias para que la categoría de fracciones de una categoría dada resulte ser una categoría aditiva. Por supuesto que antes probaremos algunos resultados básicos.

Lema 2.7.1 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ que satisfacen a) y b) de la Proposición 2.4.7. Sean $(1_Y/f) : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ y $(t/g) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ tal que $(t/g)(1_Y/f) = 0$ en $\mathcal{C}^l_\Sigma$. Entonces, existe $(r/h) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ con $(t/g) \sim (r/h)$ tal que $(r/h) \circ (1_Y/f) = (r/hf)$ y $hf = 0$ en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Supongamos que $(1_Y/f)$ y (t/g) estan representadas por los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dl, "t"] \\ & Z'. & \end{tikzcd}$$

Para calcular la composición $(t/g)(1_Y/f)$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \arrow[dr, "g"] & & Z \arrow[dl, "t"] \\ & Y \arrow[dr, "g'"'] & & Z' \arrow[dl, "s"] & \\ & & W & & \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$. De donde tenemos que $(t/g) \circ (1_Y/f) = (st/g'f)$. Como $(t/g) \circ (1_Y/f) = 0$, tenemos que $(st/g'f) \sim (1_Z/0)$.
Por lo tanto, existen morfismos $\alpha : W \longrightarrow L$ y $\beta : Z \longrightarrow L$ tal que el siguiente

diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "g'f"'] \arrow[drrr, "0"] & & & & Z \arrow[dlll, "st"'] \arrow[dl, "1_Z"] \\
& W \arrow[dr, "\alpha"'] & & Z \arrow[dl, "\beta"] & \\
& & L. & &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\alpha g'f = 0$ y $\beta = \alpha st \in \Sigma$.
Por otro lado, del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "g"'] \arrow[drrr, "\alpha sg"] & & & & Z \arrow[dlll, "t"'] \arrow[dl, "\alpha st"] \\
& Z' \arrow[dr, "\alpha s"'] & & L \arrow[dl, "1_L"] & \\
& & L. & &
\end{tikzcd}$$

tenemos que $(t/g) \sim (\alpha st/\alpha sg)$.
Además, del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \arrow[dr, "\alpha sg"] & & Z \arrow[dl, "\alpha st"] \\
& Y \arrow[dr, "\alpha sg"'] & & L \arrow[dl, "1_L"] & \\
& & L & &
\end{tikzcd}$$

tenemos que $(\alpha st/\alpha sg)(1_Y/f) = (\alpha st/(\alpha sg)f)$, con $(\alpha sg)f = \alpha g'f = 0$.
Por lo tanto, $(r/h) := (\alpha st/\alpha sg)$ es la fracción buscada. $\square$

Proposición 2.7.2 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ que satisfacen a) y b) de la Proposición 2.4.7. Si $\mathcal{C}$ tiene cokerneles, entonces $\mathcal{C}^l_\Sigma$ tiene cokerneles y el funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ es exacto a derecha.*

Demostración.

Primero veamos que si $\overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ en $\mathcal{C}^l_\Sigma$ esta representado por la fracción $(1_Y/f)$ con $f : X \longrightarrow Y$, entonces $\overline{f}$ tiene cokernel en $\mathcal{C}^l_\Sigma$.
En efecto, sea $p : Y \longrightarrow K$ el cokernel de f. Afirmamos que $(1_K/p)$ es el cokernel de $(1_Y/f)$.

(a) Veamos que $(1_K/p)(1_Y/f) = 0$. Para esto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \arrow[dr, "p"] & & K \arrow[dl, "1_K"] \\
& Y \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "1_K"] & \\
& & K. & &
\end{tikzcd}$$

De donde concluimos que $(1_K/p)(1_Y/f) = (1_K/pf)$. Pero $pf = 0$ pues $p = \mathrm{Coker}(f)$. Por lo tanto, $(1_K/p)(1_Y/f) = (1_K/0)$.

(b) Sea $(t/g) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ representado por

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[dl, "t"] \\
& Z' &
\end{tikzcd}$$

tal que $(t/g)(1_Y/f) = 0$. Por el Lema 2.7.1, podemos suponer que $(t/g)(1_Y/f) = (t/gf)$ con $gf = 0$, como $p = \mathrm{Coker}(f)$, existe un único morfismo $\theta : K \longrightarrow Z'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& & Z' \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "p"'] & K. \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "\theta"] & & Z \arrow[dl, "t"] \\
& K \arrow[dr, "\theta"'] & & Z' \arrow[dl, "1_{Z'}"] & \\
& & Z'. & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, tenemos $(t/\theta)(1_K/p) = (t/\theta p) = (t/g)$. Es decir, se factorizo (t/g) a través de $(1_K/p)$.

Ahora, veamos que $(1_K/p)$ es un epimorfismos en $\mathcal{C}^l_\Sigma$. Como $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es preaditiva, basta ver que si $(r/h) : \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ es un morfismo tal que $(r/h)(1_K/p) = 0$, entonces $(r/h) = 0$.

En efecto, por el Lema 2.7.1, podemos suponer $0 = (r/h)(1_K/p) = (r/hp)$ con $hp = 0$. Como p es un epimorfismo en $\mathcal{C}$ pues $p = \mathrm{Coker}(f)$, tenemos que $h = 0$. Por lo tanto, $(r/h) = (r/0) \sim (1_Z/0) = 0$ en $\mathcal{C}^l_\Sigma$.

Por lo tanto, $(1_K/p)$ es un epimorfismo y entonces la factorización de (t/g) a través de $(1_K/p)$ es única. Por tanto, $(1_K/p) = \mathrm{Coker}(1_Y/f)$.

Es decir, si tenemos la siguiente sucesión exacta

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} K \longrightarrow 0 \textit{ en } \mathcal{C}.$$

entonces tenemos la siguiente sucesión exacta

$$T(X) \xrightarrow{T(f)} T(Y) \xrightarrow{T(p)} T(K) \longrightarrow 0 \textit{ en } \mathcal{C}^l_\Sigma.$$

Por lo tanto, T es un funtor exacto a derecha.

Ahora sea $(s/f) = \overline{f} : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ morfismo arbitrario en $\mathcal{C}^l_\Sigma$ representado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Y'. & \end{tikzcd}$$

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, "1_{Y'}"] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Y' \arrow[dr, "1_{Y'}"'] & & Y' \arrow[dl, "1_{Y'}"] & \\ & & Y'. & & \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $(s/1'_Y) \circ (1_{Y'}/f) = (s/f)$. Pero $(s/1_{Y'})$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}^l_\Sigma$ $((s/1_{Y'})^{-1} = (1_{Y'}/s))$. Por lo hecho anteriormente, sabemos que $(1_{Y'}/f)$ tiene cokernel. Sea $(1_K/p) : \overline{Y'} \longrightarrow \overline{K}$ el cokernel de $(1_{Y'}/f)$, es fácil ver que $(1_K/p) \circ (s/1_{Y'})^{-1} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{K}$ es el cokernel de (s/f).

□

Los resutados anteriores tiene sus respectivos duales, los cuales solo enuciamos puesto que la prueba es totalmente análoga.

Corolario 2.7.3 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ que satisface las condiciones a) y b) de la proposición 2.4.7. Si $\mathcal{C}$ tiene kerneles, entonces $\mathcal{C}^r_\Sigma$ tiene kerneles y el funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^r_\Sigma$ es exacto a izquieda.*

Demostración. Es totalmente análoga a la del corolario 2.7.2 $\square$

Lema 2.7.4 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ que satisface las condiciones a) y b) de la Proposición 2.4.7.Entonces, el funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ de localización, es un funtor covariante aditivo.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{C}$, con $f, g : X \longrightarrow Y$, por lo que tenemos $f + g : X \longrightarrow Y$. Por lo tanto, tenemos que $T(f + g) = (1_Y/f + g)$ está representada por la clase del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f+g"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, tenemos que $T(f) = (1_Y/f)$ y $T(g) = (1_Y/g)$. Para calcular $T(f) + T(g)$, consideramos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"'] \arrow[dr, "1_Y"] & & X \arrow[dl, "g"] \\
& Y \arrow[dr, "1_Y"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] & \\
& & Y. & &
\end{tikzcd}$$

Por lo que $T(f)+T(g) = (1_Y/f)+(1_Y/g) = (1_Y 1_Y/1_Y f + 1_Y g) = (1_Y/f + g)$. Por lo tanto, $T(f + g) = T(f) + T(g)$. $\square$

Teorema 2.7.5 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ que satisface las condiciones a) y b) de la proposición 2.4.7. Si $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva, entonces $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es aditiva.*

Demostración. Sólo resta ver que $\mathcal{C}^l_\Sigma$ tiene coproductos finitos. Sea $\{\overline{X_i}\}_{i=1}^n$ una familia de objetos en $\mathcal{C}^l_\Sigma$. Por nuestra convención, tenemos una familia de objetos $\{X_i\}_{i=1}^n$ en $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es aditiva, por el Teorema 1.2.4, existe un objeto $X \in \mathcal{C}$ y morfismos $u_i : X_i \longrightarrow X$, $p_i : X \longrightarrow X_i$ tales que

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} u_i p_i = 1_X$$

(b)

$$p_i u_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1_{X_i} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Consideremos $\overline{X} = T(X) \in \mathcal{C}_\Sigma$. Al aplicar el funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ a los morfismos anteriores obtenemos los morfismos $\overline{u}_i = T(u_i) : \overline{X}_i \longrightarrow \overline{X}$, $\overline{p}_i : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}_i$ para cada i. Dado que T es aditivo por el Lema 2.7.4, tenemos

$$T(\sum_{i=1}^{n} u_i p_i) = \sum_{i=1}^{n} T(u_i)T(p_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i \overline{p}_i = T(1_X) = 1_{T(X)} = 1_{\overline{X}}$$

y

$$T(p_i u_j) = T(p_i)T(u_j) = \overline{p}_i \overline{u}_j$$

donde

$$\overline{p}_i \overline{u}_j = \begin{cases} T(0) = 0 & \text{si } i \neq j \\ T(1_{X_i}) = 1_{\overline{X}_i} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.2.4 tenemos que $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es una categoría aditiva.
□

2.8. Categoría abeliana de fracciones

En la presente sección estudiaremos que la categoría de fracciones de un sistema calculable de morfismos es abeliana si la categoría original es abeliana. Para realizar lo anterior necesitamos unos resultados previos.

Lema 2.8.1 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con cokerneles, $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y $\alpha : Y \longrightarrow Y'$ un isomorfismo. Entonces, $coker(f) = coker(\alpha f) \circ \alpha$.*

Demostración. Sea $\gamma : Y' \longrightarrow W$ el cokernel de αf, es decir, $\gamma(\alpha f) = 0$ y γ tiene la propiedad universal.
Afirmamos que $coker(f) = \gamma \circ \alpha$.
En efecto, dado que $0 = \gamma(\alpha f) = (\gamma\alpha)f$, sólo falta ver que $\gamma \circ \alpha$ tiene la propiedad universal. Sea $g : Y \longrightarrow K$ un morfismo tal que $gf = 0$. Como $\alpha : Y \longrightarrow Y'$ es un isomorfismo tenemos $\alpha^{-1} : Y' \longrightarrow Y$ y consideramos el morfismo $g\alpha^{-1} : Y' \longrightarrow K$. Luego $g\alpha^{-1}(\alpha f) = gf = 0$. Como γ es el cokernel de αf tenemos que existe un único morfismo $\varphi : W \longrightarrow K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & K & \\ X \arrow[r, "\alpha f"'] & Y' \arrow[u, "g\alpha^{-1}"] \arrow[r, "\gamma"'] & W. \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $g = \varphi(\gamma\alpha)$. Veamos que φ es única con tal propiedad. En efecto, supongamos que existe φ' tal que $\varphi\gamma\alpha = g = \varphi'\gamma\alpha$. Como α es un isomorfismo, tenemos que $\varphi\gamma = \varphi'\gamma$ y como γ es un epimorfismo (pues $\gamma = \text{Coker}(\alpha f)$) tenemos que $\varphi = \varphi'$. Por lo tanto, $coker(f) = \gamma\alpha = coker(\alpha f) \circ \alpha$. $\square$

Proposición 2.8.2 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con kerneles y cokerneles. Consideremos $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, $\alpha : Y \longrightarrow Y'$ un isomorfismo y $\gamma = coker(\alpha f)$ con $\gamma : Y' \longrightarrow K$. Si $i : Q \longrightarrow Y$ el kernel de $\gamma\alpha$, entonces αi es el kernel de γ.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\alpha"] & Y' \arrow[r, "\gamma"] & K \\ & Q \arrow[u, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $i : Q \longrightarrow Y$ es el kernel del morfismo $\gamma\alpha$. Por lo que $(\gamma\alpha)i = 0$ y y además i tiene la propiedad universal.

Veamos que $\text{Ker}(\gamma) = \alpha i$.

En efecto, como $(\gamma\alpha)i = 0$, se tiene que $\gamma(\alpha i) = 0$. Solo falta checar la propiedad universal. Sea $g : Q' \longrightarrow Y'$ tal que $\gamma g = 0$, dado que α es un isomorfismo podemos considerar $\alpha^{-1}g : Q' \longrightarrow Y$ y tenemos que $\gamma\alpha(\alpha^{-1}g) = \gamma g = 0$. Como $\gamma\alpha = \text{Ker}(i)$, por la propiedad del kernel existe un único morfismo $\varphi : Q' \longrightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y & Y' \arrow[l, "\alpha^{-1}"'] \arrow[r, "\gamma"] & K \\ & Q \arrow[u, "i"'] & Q' \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $i\varphi = \alpha^{-1}g$, lo cual implica $(\alpha i)\varphi = g$.
Veamos que φ es única. Supongamos que existe $\varphi' : Q' \longrightarrow Q$ tal que $i\varphi' = \alpha^{-1}g$, lo cual implica que $i\varphi' = i\varphi$. Como i es un monomorfismo, entonces $\varphi = \varphi'$. En consecuencia, φ es única. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(\gamma) = \alpha i = \alpha \circ \mathrm{Ker}(\gamma\alpha)$.
□

Proposición 2.8.3 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preabeliana. Consideremos la descomposición canónica del morfismo $f : X \longrightarrow Y$ dada por el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "t"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[r, "u"] & U \\
& \mathrm{Coker}(t) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(u). \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $\alpha : Y \longrightarrow Y'$ un isomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces la descomposición canónica del morfismo $\alpha f : X \longrightarrow Y'$ está dada por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "t"] & X \arrow[r, "\alpha f"] \arrow[d, "\pi"] & Y' \arrow[r, "u\alpha^{-1}"] & U \\
& \mathrm{Coker}(t) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(u). \arrow[u, "\alpha i"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos el diagrama canónico de la descomposición del morfismo $f : X \longrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "t"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[r, "u"] & U \\
& \mathrm{Coker}(t) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(u) \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi : X \longrightarrow \mathrm{Coker}(t)$ es el cokernel de t, $\mathrm{Ker}(u) = i$, $\overline{f}$ es el único morfismo que se contruye de la propiedad universal del kernel y el cokernel.
Sea $\gamma := \mathrm{Coker}(\alpha f)$. Por el el Lema 2.8.1, tenemos que $\mathrm{Coker}(\alpha f) = \mathrm{Coker}(f)\alpha^{-1} = u\alpha^{-1}$. Por el Lema 2.8.2, tenemos que $\mathrm{Ker}(\gamma) = \alpha i$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "t"] & Y \arrow[r, "\alpha f"] \arrow[d, "\pi"] & Y' \arrow[r, "u\alpha^{-1}"] & U \\
& \mathrm{Coker}(t) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(u) \arrow[u, "\alpha i"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $t = \mathrm{Ker}(\alpha f)$ pues α es un isomorfismo, $\pi = \mathrm{Coker}(t)$, $u\alpha^{-1} = \mathrm{Coker}(\alpha f)$ y $\alpha i = \mathrm{Ker}(u\alpha^{-1})$.
Como el morfismo paralelo de αf es el único morfismo, $\mathrm{Coker}(t) \longrightarrow \mathrm{Ker}(t)$ que hace conmutar el diagrama anterior. Tenemos que el diagrama anterior nos dá la descomposición canónica del morfismo αf y $\overline{f}$ es el morfismo paralelo de αf.
$\square$

Lema 2.8.4 *Sea $\mathcal{C}$ preaditiva, $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema calculable tal que para cada $X \in \mathcal{C}$ la categoría X/Σ tiene una subcategoría cofinal pequeña y la categoría Σ/X tiene una subcategoría final pequeña. Entonces existe un isomorfismo de categorías*

$$Q : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}^r_\Sigma.$$

Demostración. Sean $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^r_\Sigma$ los funtores de localización de fracciones izquierdas y derechas respectivamente. Dado que F es un funtor tal que para cada $s \in \Sigma$, $F(s)$ es un isomorfismo, por la propiedad universal de $\mathcal{C}^l_\Sigma$ existe un único funtor $Q : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}^r_\Sigma$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}^l_\Sigma \arrow[dl, "Q"] \\ \mathcal{C}^r_\Sigma. & \end{tikzcd}$$

De manera análoga, como $\mathcal{C}^r_\Sigma$ tiene la misma propiedad universal, existe un único morfismo $P : \mathcal{C}^r_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}^r_\Sigma \arrow[dl, "P"] \\ \mathcal{C}^l_\Sigma. & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $(PQ)T = T$. De las misma manera, por la propiedad universal de $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$, existe un único morfismo $M : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}^l_\Sigma \arrow[dl, "M"] \\ \mathcal{C}^l_\Sigma. & \end{tikzcd}$$

Pero el funtor $I_{\mathcal{C}^l_\Sigma} : \mathcal{C}^l_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma$ hace conmutar el diagrama anterior y también PQ. De donde concluimos que $M = I_{\mathcal{C}^l_\Sigma} = PQ$.
De manera análoga se prueba que $QP = I_{\mathcal{C}^r_\Sigma}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}^l_\Sigma \cong \mathcal{C}^r_\Sigma$. $\square$

Recordemos que una categoría aditiva $\mathcal{C}$ es abeliana si y sólo si todo morfismo tiene kernel y cokernel, y para cualquier morfismo $f : X \longrightarrow Y$ el morfismo paralelo $\overline{f}$ es un isomorfismo (ver definición 1.4.1).

Ahora veamos que $\mathcal{C}_\Sigma$ resulta abeliana bajo ciertas condiciones.

Teorema 2.8.5 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $\Sigma \subseteq Mor(\mathcal{C})$ un sistema de morfismos en $\mathcal{C}$ tal que satisface las siguientes condiciones:*

(a) Σ es calculable.

(b) Para cada $X \in \mathcal{C}$ la categoría X/Σ tiene una subcategoría cofinal pequeña.

(c) Para cada $X \in \mathcal{C}$ la categoría Σ/X tiene una subcategoría final pequeña.

Entonces $\mathcal{C}^l_\Sigma \cong \mathcal{C}^r_\Sigma$ y además $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es abeliana.

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es aditiva, entonces por el Lema 2.7.5, la categoría $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es aditiva. Por el Lema 2.8.4 tenemos que $\mathcal{C}^r_\Sigma \cong \mathcal{C}^l_\Sigma$. Sea (s/f) un morfismo en $\mathcal{C}^l_\Sigma$ representada por el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "s"] \\ & Z, & \end{tikzcd}$$

por los Lemas 2.7.3 y 2.7.2 tenemos que (s/f) posee kernel y cokernel y además el funtor $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^l_\Sigma \cong \mathcal{C}^r_\Sigma$ es exacto.

Como $\mathcal{C}$ es abeliana, para el morfismo $f : X \longrightarrow Z \in \mathcal{C}$ que forma parte de (s/f) tenemos el siguiente diagrama conmutativo que nos da la descomposición canónica de f

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "r"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Z \arrow[r, "u"] & U \\ & \mathrm{Coker}(r) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(u) \arrow[u, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde $i = \mathrm{Ker}(u)$, $u = \mathrm{Coker}(f)$, $r = \mathrm{Ker}(f)$, $\pi = \mathrm{Coker}(r)$ y $\overline{f}$ es un isomorfismo. Aplicando el funtor T al diagrama anterior, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \overline{R} \arrow[r, "T(r)"] & \overline{X} \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "T(\pi)"] & \overline{Z} \arrow[r, "T(u)"] & \overline{U} \\ & \overline{\mathrm{Coker}(r)} \arrow[r, "T(\overline{f})"'] & \overline{\mathrm{Ker}(u)}, \arrow[u, "T(i)"'] & \end{tikzcd}$$

donde $T(i) = \mathrm{Ker}(T(u))$, $T(u) = \mathrm{Coker}(T(f))$, $T(r) = \mathrm{Ker}(T(f))$, $T(\pi) = \mathrm{Coker}(T(r))$ y $T(\overline{f})$ es isomorfismo (pues T es exacto).
Por lo tanto, el diagrama anterior nos da la descomposición canónica de $T(f)$ en $\mathcal{C}^l_\Sigma$.
Notemos que $(s/f) = (s/1_Z)(1_Z/f)$ donde $T(s)^{-1} := (s/1_Z) : \overline{Z} \longrightarrow \overline{Y}$ es un isomorfismo.
Por la proposición 2.8.3 tenemos que la factorización canónica de (s/f) está dada por el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}^l_\Sigma$

$$\begin{tikzcd}
\overline{R} \arrow[r, "T(r)"] & \overline{X} \arrow[r, "(s/f)"] \arrow[d, "T(\pi)"] & \overline{Z} \arrow[r, "T(u)T(s)"] & \overline{U} \\
 & \overline{\mathrm{Coker}(r)} \arrow[r, "T(\overline{f})"'] & \overline{\mathrm{Ker}(u)}. \arrow[u, "T(s)^{-1}T(i)"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego entonces el morfismo paralelo de (s/f) es $T(\overline{f})$, el cual es un isomorfismo.
Por lo tanto, $\mathcal{C}^l_\Sigma$ es abeliana. $\square$

Bibliografía

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller. Rings and categories of Modules. Springer-Verlag (1974).

[2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. Introduction to conmutative algebra. Addison-Wesley, Massachusetts. (1969).

[3] Bourbaki Nicolás. Álgebra conmutativa. Springer-Verlag (1943).

[4] F. Kasch. Modules an Rings. New York, EUA. (1982).

[5] B. Mitchell. Theory of categories. Columbia University, New York (1964).

[6] N. Popescu. Abelian categories with applications to rings and modules. LMS Monographs No.3 Academic Press, London and New York (1973).

[7] J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra. *Academic Press, Inc*, Illinois, (1979).

[8] V. Santiago. Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el teorema de inmersión en la categoría de grupos abelianos. Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias (2007).