UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

(CO)HOMOLOGÍA DE REPRESENTACIONES POR PERMUTACIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ERICH ULISES CATALÁN RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS: JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

CUERNAVACA MORELOS, AGOSTO DEL 2017

Dedicado a mi familia, en especial a mi madre,
por todo el apoyo brindado durante tantos años.
Además dedico este trabajo a Jessica Morales Herrera
por todo su apoyo y amor.

Agradecimientos

Agradezco a mi tutor el Dr. José Luis Cisneros Molina por su paciencia, dedicación y apoyo. Contar con su guía ha sido uno de mis mayores privilegios.

Agradezco al Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña por toda la sabiduría que me compartió, así como todo el apoyo que me brindo durante la realización de esta tesis.

Agradezco a todas las personas del Instituto de Matemáticas Unidad Cuernavaca. Tanto investigadores, alumnos y personal administrativo, quienes han hecho mi estancia en el Instituto una de las mejores partes de mi vida.

Agradezco a mi familia, en especial y con mucho cariño a mi madre, por todo su apoyo y esfuerzo.

Por último, agradezco de corazón a Jessica Morales Herrera quien me ha brindado todo su amor y paciencia.

Prefacio

La (co)homología de grupos se ha convertido en un tema clásico de estudio y a través del tiempo, se han desarrollado diferentes métodos para su estudio; el enfoque topológico, el de la resolución estándar y el de los funtores derivados. Un problema natural es tratar de definir una (co)homología “relativa”, es decir, una (co)homología para una pareja (G, H) con G un grupo y H un subgrupo de G no necesariamente normal. En 1953 Ian T. Adamson (1928-2010) definió en [1] una teoría de (co)homología relativa para subgrupos no normales, la cual uso en la teoría de cuerpos de clases. Esta (co)homología se construye con los cocientes G/H con G un grupo y H un subgrupo de G y coincide con la (co)homología clásica en el caso en que $H = \{1\}$ con 1 la identidad de G. Otra (co)homología relativa fue desarrollada por Satoru Takasu en 1957, esta teoría difiere de la teoría desarrollada por Adamson, para más detalles sobre estas teorías puede consultarse [2]. Por otra parte, Gerhard Hochschild (1915-2010) en 1956, siguiendo el trabajo de Henri Cartan (1904-2008) y Samuel Eilenberg (1913-1998) en [7], define en [12] el Álgebra Homológica Relativa basándose en los funtores Tor y Ext relativos. Hochschild menciona en su artículo que el funtor Ext relativo coincide con la definición de cohomología dada por Adamson. En 1975 el Álgebra Homológica Relativa es definida de forma totalmente categórica en [16] por Saunders Mac Lane (1909-2005) basándose en el artículo de Hochschild.

Una vez definida la (co)homología relativa, cada enfoque comenzó a generalizarse. Ernst Snapper (1913-2011) en 1964 observó que el punto importante en la (co)homología de Adamson fue la acción del grupo G en el cociente G/H por lo que definió la (co)homología de representaciones por permutaciones para un grupo G y un G-conjunto X en [20], en este mismo artículo Snapper construyó una sucesión espectral que relaciona la (co)homología de grupos clásica con la (co)homología de representaciones por permutaciones.

Mac Lane en [16] define una (co)homología de sucesiones exactas propias, la cual, es una generalización de la (co)homología relativa dada por Hoschild. En 1997, buscando extender la definición de (co)homología relativa y usando la (co)homología de sucesiones exactas propias, Brita E.A. Nucinkis define una (co)homología para G-conjuntos en [17].

La definición topológica fue dada por James V. Blowers en [4], el extiende la definición de un espacio clasificante para un grupo a un espacio clasificante para una representación por permutaciones arbitraria y con esto prueba que la (co)homología de representaciones por permutaciones dada por Snapper coincide con la (co)homología de su espacio clasificante.

Un enfoque categórico totalmente diferente fue dado por Glen E. Bredon (1932-2000), en 1967, él desarrollo una teoría de (co)homologías equivariantes en [5].

El propósito general de esta tesis es mostrar que los grupos de (co)homología dados por Ernst Snapper en [20], por Brita E.A. Nucinkis en [17], James V. Blowers en [4] y por Glen E. Bredon en [5] coinciden. Para esto, veremos cada una de estas teorías por separado.

En el Capítulo 1 se dan las bases necesarias para el resto de los capítulos.

En el Capítulo 2 se definen los grupos de (co)homología de representaciones por permutaciones siguiendo el artículo de Snapper [20] y algunos resultados que relacionan esta (co)homología con la (co)homología clásica de grupos.

En el Capítulo 3 se definen los funtores Tor y Ext relativos a la familia de estabilizadores, se demuestra que estos funtores coinciden con los grupos de (co)homología de representaciones por permutaciones del Capítulo 1 y coinciden además con los grupos de (co)homología definidos por Nucinkis en [17].

En el Capítulo 4 se define el espacio clasificante para una familia de subgrupos de un grupo, y se prueba que la (co)homología de este espacio clasificante coincide con las (co)homologías definidas anteriormente.

En el Capítulo 5, se introduce la teoría de módulos de Bredon y la (co)homología equivariante de Bredon. Nuevamente se muestra que esta (co)homología coincide con las anteriores.

Por último, en el Capítulo 6 se dan algunos cálculos de la homología de representaciones por permutaciones.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene algunas de las definiciones y resultados que serán de gran utilidad para los siguientes capítulos.

La sección 1.1 contiene resultados básicos de G-conjuntos, se definen además acciones, órbitas y estabilizadores. Algunas referencias generales sobre éstos temas son [8] y [3].

En la sección 1.2 se definen las representaciones por permutaciones y se da una biyección entre éstas últimas y las acciones de grupos.

La sección 1.3 introduce los G-módulos y su relación con las representaciones por permutaciones.

Dos nociones básicas durante el estudio de la homología son el producto tensorial y el grupo de homomorfismos, estos serán definidos en la sección 1.4.

La sección 1.5 contiene las definiciones de invariantes y coinvariantes, además de resultados que los relacionan con el producto tensorial y el grupo de homomorfismos de G-módulos.

1.1. G-conjuntos

Definición 1.1. Sea X un conjunto y G un grupo. Decimos que X es un G**-conjunto** si existe una función $\alpha\colon G\times X \to X$, llamada **acción**, denotada por $\alpha(g,x) = gx$ con las siguientes propiedades:

- Para todo $x \in X$ se tiene $1x = x$ donde 1 denota la identidad en G.
- Para todo $g, h \in G$ y $x \in X$ se tiene $g(hx) = (gh)x$.

Definición 1.2. Sean X_1 y X_2 G-conjuntos. Un G**-morfismo** de X_1 a X_2 es una función $f\colon X_1 \to X_2$ la cual cumple $f(gx) = gf(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X_1$.

Definición 1.3. Sean X_1 y X_2 G-conjuntos. Un G**-isomorfismo** de X_1 a X_2 es un G-morfismo en el cual la función $f\colon X_1 \to X_2$ es una biyección.

Definición 1.4. Sea X un G-conjunto. La G**-órbita de** x o simplemente la **órbita de** x se define como $O_x = \{gx : g \in G\}$.

Observación 1.5. La órbita de x es, en general, un subconjunto de X pero podemos restringir la acción de G en X a una acción de G en O_x lo cual le da estructura de G-conjunto.

Proposición 1.6. *Sea X un G-conjunto. La relación $x \sim y$ si y sólo si $y \in O_x$ es una relación de equivalencia.*

Demostración.

- Reflexividad: claramente $x \in O_x$ ya que $x = 1x$.
- Simetría: si $y \in O_x$ tenemos que $y = gx$ para algún $g \in G$, por lo tanto $x = g^{-1}y$ y así $x \in O_y$.
- Transitividad: si $y \in O_x$ y $z \in O_y$ tenemos que $y = g_1x$ y $z = g_2y$ para algunos g_1 y g_2 en G, entonces $z = g_2g_1x$ y así $z \in O_x$.

■

Definición 1.7. Sea X un G-conjunto. El **estabilizador de** x se define como $G_x = \{g \in G : gx = x\}$.

Proposición 1.8. *Sea X un G-conjunto. Entonces G_x es un subgrupo de G para cada $x \in X$.*

Demostración. Sean $x \in X$ fija y $g, h \in G_x$, como $g \in G_x$ tenemos que $gx = x$, multiplicando por g^{-1} en ambos lados obtenemos $g^{-1}x = x$, además, como $h \in G_x$ tenemos que $hx = x$ y así $(gh)x = g(hx) = gx = x$, es decir, G_x es cerrado bajo inversos y bajo productos por lo que es un subgrupo de G. ■

Definición 1.9. Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Definimos el **conjunto de clases laterales de** G **módulo** H como $G/H = \{gH :$ para todo $g \in G\}$.

Podemos definir una acción de G en G/H como

$$\begin{aligned} G \times G/H &\to G/H \\ (g, g_1 H) &\mapsto (g g_1) H \end{aligned}$$

Donde gg_1 es el producto usual de elementos en G. De esta manera, G/H es un G-conjunto.

Observación 1.10. En general G/H no es un grupo, para eso es necesario que H sea normal, pero siempre podemos darle estructura de G-conjunto aún sin que H sea normal.

Dado un G-conjunto X podemos formar G-conjuntos G/G_x para cada $x \in X$.

Teorema 1.11. *Sean X un G-conjunto y $x \in X$ fijo. Entonces existe un G-isomorfismo $O_x \cong G/G_x$.*

Demostración. Definimos $f: G/G_x \to O_x$ como $f(gG_x) = gx$, así tenemos:

- Está bien definido: sean g, g_1 dos representantes de la clase gG_x, entonces $g_1 = gg_2$ con $g_2 \in G_x$ y así $f(g_1 G_x) = f(gg_2 G_x) = gg_2 x = gx = f(gG_x)$.
- Es sobre: sea $y \in O_x$, entonces $y = gx$ para alguna $g \in G$ y así $y = f(gG_x)$.
- Es inyectivo: supongamos que $f(g_1 G_x) = f(g_2 G_x)$, entonces tenemos que $g_1 x = g_2 x$, en otras palabras que $g_2^{-1} g_1 \in G_x$ y así $g_1 G_x = g_2 G_x$.
- Es un G-morfismo:

$$f(g_1 g G_x) = g_1 g x = g_1 f(gG_x).$$

■

Definición 1.12. Sea X un G-conjunto. Decimos que la acción de G sobre X es:

- **Transitiva** si $O_x = X$ para todo $x \in X$.
- **Libre** (o **libre de puntos fijos**) si $G_x = 1$ para todo $x \in X$.

- **Regular** si es transitiva y libre.

Corolario 1.13. *Sea X un G-conjunto en el cual la acción de G sobre X es*

- *Transitiva: Entonces existe un G-isomorfismo $G/G_x \cong X$ para todo $x \in X$.*
- *Libre: Entonces existe un G-isomorfismo $G \cong O_x$ para todo $x \in X$.*
- *Regular: Entonces existe un G-isomorfismo $G \cong X$.*

Definición 1.14. Sea X un G-conjunto. Llamaremos **acción diagonal** a la acción $G \times X^n \to X^n$ definida por $g \cdot (x_1, ..., x_n) = (gx_1, ..., gx_n)$ para cualquier $n \geq 2$.

Proposición 1.15. *Sea X un G-conjunto que contiene dos o más elementos y sea $n \geq 2$. Entonces la acción diagonal de G en X^n no es transitiva.*

Demostración. Supongamos que la acción diagonal de G en X^n es transitiva, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ entonces tomamos los elementos $(x, ..., x)$ y $(y, x, ..., x) \in X^n$, por la transitividad existe $g \in G$ tal que $g \cdot (x, ..., x) = (y, x, ..., x)$, por lo cual $x = gx = y$, lo que es una contradicción. ∎

Proposición 1.16. *Sea X un G-conjunto y consideremos el G-conjunto X^n con la acción diagonal. Entonces $G_{(x_1,...,x_n)} = G_{x_1} \cap ... \cap G_{x_n}$ para cada $(x_1, ..., x_n) \in X^n$.*

Demostración. Un elemento $g \in G_{(x_1,...,x_n)}$ cumple que $g(x_1, ..., x_n) = (gx_1, ..., gx_n) = (x_1, ..., x_n)$, lo que es equivalente a que $g \in G_{x_1} \cap ... \cap G_{x_n}$. ∎

Corolario 1.17. *Si la acción de G en un conjunto X es libre. Entonces la acción diagonal de G en X^n es libre para cualquier n.*

Demostración. Si la acción de G es libre entonces $G_x = 1$ para todo $x \in X$ por lo que $G_{(x_1,...,x_n)} = G_{x_1} \cap ... \cap G_{x_n} = 1$ para cualquier $(x_1, ..., x_n) \in X^n$ así, la acción diagonal en X^n es libre. ∎

1.2. Representaciones por permutaciones

Definición 1.18. Sea X un conjunto no vacío, una **permutación** de X es una biyección $s\colon X \to X$. Al conjunto de todas las permutaciones de X lo denotaremos por S_X.

Podemos pensar a S_X como un grupo con la identidad dada por la función identidad de X y con la operación de grupo dada por la composición.

Definición 1.19. Llamaremos a S_X el **grupo de permutaciones de** X.

Definición 1.20. Sea G un grupo. Una **representación por permutaciones** de G en el conjunto X, denotada por (G, X), es un homomorfismo $G \to S_X$.

Definición 1.21. Una representación por permutaciones donde el homomorfismo $G \to S_X$ es un monomorfismo es llamada un **grupo de permutaciones**.

Definición 1.22. Sea (G, X) una representación por permutaciones. El kernel del morfismo $G \to S_X$ denotado por $N(G, X)$ es llamado **el kernel de la representación por permutaciones**.

Dada una representación por permutaciones (G, X), existe un homomorfismo de $G/N(G, X)$ a S_X dado por el primer teorema de isomorfismo, por lo que tenemos una representación por permutaciones $(G/N(G, X), X)$.

Observación 1.23. La representación por permutaciones $(G/N(G, X), X)$ es un grupo de permutaciones.

Definición 1.24. El grupo de permutaciones $(G/N(G, X), X)$ es llamado **el grupo de permutaciones asociado a la representación por permutaciones** (G, X).

Teorema 1.25. *Existe una biyección entre las acciones de G en X y las representaciones por permutaciones de G en X.*

Demostración. Sea α una acción de G en X definimos $\tilde{\alpha} \colon G \to S_X$ por $(\tilde{\alpha}(g))(x) = \alpha(g, x) = gx$. Observemos que $\tilde{\alpha}$ es un homomorfismo:

$$(\tilde{\alpha}(g_1 g_2))(x) = (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1((\tilde{\alpha}(g_2))(x)) = (\tilde{\alpha}(g_1)) \circ (\tilde{\alpha}(g_2))(x).$$

Por otro lado, sea $f \colon G \to S_X$ una representación por permutaciones. Definimos la acción $\tilde{f} \colon G \times X \to X$ por $\tilde{f}(g, x) = (f(g))(x)$ la cual satisface las propiedades:

$$\tilde{f}(1, x) = (Id_x)(x) = x$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{f}(g_1g_2,x) &= (f(g_1g_2))(x) = (f(g_1)\circ f(g_2))(x)\\ &= f(g_1)(\tilde{f}(g_2,x)) = \tilde{f}(g_1,\tilde{f}(g_2,x)).\end{aligned}$$

Además, se cumple que, dada una acción α de G en X

$$\tilde{\tilde{\alpha}}(g,x) = (\tilde{\alpha}(g))(x) = \alpha(g,x)$$

y dada una representación por permutaciones $f\colon G\to S_X$

$$(\tilde{\tilde{f}}(g))(x) = \tilde{f}(g,x) = (f(g))(x)$$

es decir, las asignaciones anteriores son inversa una de la otra por lo que dan la biyección buscada. ∎

Gracias a la biyección dada en el Teorema 1.25, podemos usar las propiedades de acción de grupo en las representaciones por permutaciones, es decir, dada una representación por permutaciones (G,X) podemos pensar a X como un G-conjunto y viceversa.

Observación 1.26. Diremos que una representación por permutaciones es transitiva, libre o regular si la acción asociada a esta representación es transitiva, libre o regular.

Teorema 1.27. *Sea* (G,X) *una representación por permutaciones y sea* $\alpha(g,x) := gx$ *su acción asociada. Entonces* $N(G,X) = \{g\in G : gx = x \text{ para todo } x\in X\}$*.*

Demostración. Por el Teorema 1.25, dado un elemento $g\in G$ le asociamos el homomorfismo $f_g\colon X\to X$ dado por $f_g(x) = gx$, así, los elementos g tales que $f_g = Id_X$ son los que cumple $gx = x$ para todo $x\in X$ ∎

Definición 1.28. Sean (G,X) y (L,Y) representaciones por permutaciones y denotemos por gx la acción asociada a la representación (G,X) y $l\cdot y$ la acción asociada a la representación (L,Y). Decimos que $\theta\colon (G,X)\to(L,Y)$ es un **morfismo de representaciones** si $\theta = (\varphi,f)$, donde $\varphi\colon G\to L$ es un homomorfismo de grupos y $f\colon X\to Y$ es una función que cumple la relación $f(gx) = \varphi(g)\cdot f(x)$. Si φ es un isomorfismo de grupos y f es una función biyectiva decimos que θ es una **isomorfismo de representaciones**.

Observación 1.29. Si $\theta\colon (G,X) \to (G,Y)$ es un homomorfismo de representaciones que cumple $\theta = (Id_G, f)$, entonces recuperamos la Definición 1.2 de G-morfismo entre X y Y con sus acciones asociadas respectivas.

Corolario 1.30. *Sea (G,X) una representación por permutaciones. Entonces*

$$N(G,X) = \bigcap_{x\in X} G_x.$$

Demostración. Por el Teorema 1.27 sabemos que $N(G,X) = \{g \in G : gx = x \text{ para todo } x \in X\}$ donde gx denota la acción asociada a la representación (G,X) y claramente $\{g \in G : gx = x \text{ para todo } x \in X\} = \bigcap_{x\in X} G_x$. ∎

Observación 1.31. Dada una representación por permutaciones (G,X) y su grupo de permutaciones asociado $(G/N(G,X),X)$ existe un homomorfismo de representaciones $\theta\colon (G,X) \to (G/N(G,X),X)$ dado por $\theta = (\pi, Id_X)$ con $\pi\colon G \to G/N(G,X)$ la proyección canónica.

1.3. G-módulos

Las siguientes definiciones de módulos se pueden encontrar en [18, Pag. 13]. Cada vez que mencionemos un anillo, nos estaremos refiriendo a un anillo asociativo y con elemento unitario.

Definición 1.32. Sea R un anillo. Un **R-módulo izquierdo**, es un grupo abeliano M el cual tiene una multiplicación escalar $R \times M \to M$ denotada por $(r,m) \mapsto rm$ con las siguientes propiedades:

- Para todo $r \in R$ y $m_1, m_2 \in M$ se cumple $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$.
- Para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$ se cumple $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$.
- Para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$ se cumple $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$.
- Para todo $m \in M$ y con 1 la identidad en R se cumple $1m = m$.

En donde "+" denota la operación de grupo abeliano en M.

Definición 1.33. Sean M y N dos R-módulos izquierdos. Un **R-homomorfismo de módulos** es una función $f\colon M \to N$ con las siguientes propiedades:

- Para todo $m_1, m_2 \in M$ se cumple $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.
- Para todo $r \in R$ y $m \in M$ se cumple $f(rm) = rf(m)$.

De la misma forma que se definió R-módulo izquierdo se puede definir un R-módulo derecho:

Definición 1.34. Sea R un anillo. Un **R-módulo derecho**, es un grupo abeliano M el cual tiene una multiplicación escalar $M \times R \to M$ denotada por $(m, r) \mapsto mr$ con las siguientes propiedades:

- Para todo $r \in R$ y $m_1, m_2 \in M$ se cumple $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$.
- Para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$ se cumple $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$.
- Para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$ se cumple $m(r_1 r_2) = (mr_1)r_2$.
- Para todo $m \in M$ y con 1 la identidad en R se cumple $m1 = m$.

En donde "+" denota la operación de grupo abeliano en M.

Definición 1.35. Sean M y N dos R-módulos derechos. Un **R-homomorfismo de módulos** es una función $f\colon M \to N$ con las siguientes propiedades:

- Para todo $m_1, m_2 \in M$ se cumple $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.
- Para todo $r \in R$ y $m \in M$ se cumple $f(mr) = f(m)r$.

Definición 1.36. Sean M y N dos R-módulos izquierdos (respectivamente derechos).

- Un **R-monomorfismo de módulos** es un R-homomorfismo $f\colon M \to N$ en el cual la función f es inyectiva.
- Un **R-epimorfismo de módulos** es un R-homomorfismo $f\colon M \to N$ en el cual la función f es sobre.
- Un **R-isomorfismo de módulos** es un R-homomorfismo $f\colon M \to N$ en el cual la función f es biyectiva.

Observación 1.37. Si no existe riesgo de confusión nos referiremos a un R-módulo izquierdo simplemente como un R-módulo.

Definición 1.38. Sea X un conjunto. El **grupo abeliano libre generado por** X denotado por $\mathbb{Z}[X]$ se define como

$$\mathbb{Z}[X] = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}x$$

con $\mathbb{Z}x = \{zx : z \in \mathbb{Z}\}$.

Observación 1.39. Sea G un grupo, en particular G es un conjunto por lo que tenemos el grupo abeliano libre $\mathbb{Z}[G]$, pero además, ya que G tiene un producto, podemos darle una estructura natural de anillo a $\mathbb{Z}[G]$.

Proposición 1.40. *Sea (G, X) una representación por permutaciones. Entonces $\mathbb{Z}[X]$ es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo.*

Demostración. La acción de G en X define un producto escalar en $\mathbb{Z}[X]$ el cual es fácil probar que cumple todas las propiedades de $\mathbb{Z}[G]$-módulo. ■

Observación 1.41. Si no existe riesgo de confusión nos referiremos a un $\mathbb{Z}[G]$-módulo simplemente como un G-módulo y a un $\mathbb{Z}[G]$-homomorfismo de módulos como un G-homomorfismo de módulos.

Proposición 1.42. *Sean $\varphi\colon G \to L$ un homomorfismo de grupos y A un L-módulo. Entonces A es un G-módulo.*

Demostración. Definimos el producto escalar por $G \times A \to A$ dado por $(g, a) \mapsto ga := \varphi(g)a$. Es fácil probar que con este producto escalar A es un G-módulo. ■

Sea (G, X) una representación por permutaciones, podemos pensar a (G, X^n) como una representación por permutaciones con la acción asociada dada por la acción diagonal y así tenemos que $\mathbb{Z}[X^n]$ es un G-módulo con el producto escalar definido por la acción diagonal en X^n.

Proposición 1.43. *Sea $\theta = (\varphi, f)$ un morfismo entre las representaciones por permutaciones (G, X) y (L, Y). Entonces θ induce un G-homomorfismo de módulos $\bar{f}\colon \mathbb{Z}[X^r] \to \mathbb{Z}[Y^r]$ definido en los generadores de $\mathbb{Z}[X^r]$ por $\bar{f}(x_1, ..., x_r) = (f(x_1), ..., f(x_r))$.*

Demostración. Sea $\theta = (\varphi, f)$ donde $\varphi\colon G \to L$ es un homomorfismo de grupos y $f\colon X \to Y$ una función tales que $f(gx) = \varphi(g)f(x)$, por definición $\mathbb{Z}[Y^r]$ es un L-módulo, pero podemos darle estructura de G-módulo gracias a la Proposición 1.42. Definimos $\bar{f}\colon \mathbb{Z}[X^r] \to \mathbb{Z}[Y^r]$ en los generadores de $\mathbb{Z}[X^r]$ por $\bar{f}(x_1, ..., x_r) = (f(x_1), ..., f(x_r))$ y la extendemos linealmente por lo que $\bar{f}$ define un homomorfismo de grupos abelianos, sólo falta probar que conmuta con el producto escalar

$$\begin{aligned}
\bar{f}(g(x_1, ..., x_n)) &= \bar{f}(gx_1, ..., gx_n) \\
&= (f(gx_1), ..., f(gx_n)) \\
&= (\varphi(g)f(x_1), ..., \varphi(g)f(x_n)) \\
&= \varphi(g)(f(x_1), ..., f(x_n)) \\
&= g \cdot (f(x_1), ..., f(x_n)) \\
&= g \cdot \bar{f}(x_1, ..., x_n)
\end{aligned}$$

y así $\bar{f}$ define un G-homomorfismo de módulos. ■

Corolario 1.44. *Sea $\theta = (\varphi, f)$ un morfismo entre las representaciones por permutaciones (G, X) y (L, Y) tal que f es biyectiva (respectivamente inyectiva, sobre). Entonces el G-homomorfismo de módulos $\mathbb{Z}[X^r] \to \mathbb{Z}[Y^r]$ es un G-isomorfismo de módulos (respectivamente monomorfismo, epimorfismo).*

Demostración. Aplicando la Definición 1.36 en la Proposición 1.43. ■

1.4. Producto tensorial

Definición 1.45. Sean R un anillo, A un R-módulo derecho, B un R-módulo izquierdo y G un grupo aditivo abeliano. Una función $f\colon A \times B \to G$ es llamada **R-biaditiva** si para todo $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $r \in R$ se cumple

$$\begin{aligned}
&f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b), \\
&f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b'), \\
&f(ar, b) = f(a, rb).
\end{aligned}$$

Definición 1.46. Sean R un anillo, A un R-módulo derecho y B un R-módulo izquierdo. El **producto tensorial** de A y B sobre R es un grupo abeliano, denotado por $A \bigotimes_R B$ y una función R-biaditiva

$$h\colon A \times B \to A \bigotimes_R B$$

tal que, para cualquier grupo abeliano G y cualquier función R-biaditiva $f\colon A\times B\to G$ existe un único homomorfismo de grupos abelianos $\tilde{f}\colon A\bigotimes_R B\to G$ el cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & A\bigotimes_R B \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

Proposición 1.47. *Sean R un anillo, A un R-módulo derecho y B un R-módulo izquierdo. El producto tensorial de A y B sobre R siempre existe y es único.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{Z}[A\times B]$, el grupo abeliano libre generado por $A\times B$ y sea S el subgrupo de $\mathbb{Z}[A\times B]$ generado por los elementos de la forma

$$\begin{aligned}&(a,b+b')-(a,b)-(a,b'),\\&(a+a',b)-(a,b)-(a',b),\\&(ar,b)-(a,rb).\end{aligned}$$

Definimos $A\bigotimes_R B=\mathbb{Z}[A\times B]/S$ y denotamos la clase de (a,b) por $a\otimes b$, es decir, un elemento en $A\bigotimes_R B$ se ve como combinación lineal de elementos de la forma $a\otimes b$, así, si tomamos $h\colon A\times B\to A\bigotimes_R B$ definida por $h(a,b)=a\otimes b$ tenemos que h es R-biaditiva ya que

$$\begin{aligned}&a\otimes(b+b')=a\otimes b+a\otimes b',\\&(a+a')\otimes b=a\otimes b+a'\otimes b,\\&ar\otimes b=a\otimes rb.\end{aligned}$$

Consideremos el siguiente diagrama en el cual G es un grupo abeliano, i es la inclusión, π es la proyección canónica y f es R-biaditiva

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr, "f"'] & & A\bigotimes_R B \arrow[ddl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & \mathbb{Z}[A\times B] \arrow[ur, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \\ & G & \end{tikzcd}$$

como $\mathbb{Z}[A \times B]$ es abeliano libre con base $A \times B$ existe un homomorfismo de grupos abeliano $\varphi\colon \mathbb{Z}[A \times B] \to G$ tal que $\varphi(a,b) = f(a,b)$. Además $S \subseteq Ker(\varphi)$ ya que f es R-biaditiva y así φ induce un homomorfismo $\tilde{f}\colon A \bigotimes_R B \to G$ tal que

$$\tilde{f}(a \otimes b) = \varphi(a,b) = f(a,b),$$

por lo que podemos escribir $\tilde{f}h = f$. La unicidad de $\tilde{f}$ se da ya que $A \bigotimes_R B$ es generado por elementos de la forma $a \otimes b$. ■

A continuación daremos algunos otros resultados acerca del producto tensorial, los cuales dejaremos sin demostración, estos resultados pueden encontrarse en [18, Capítulo 2].

Teorema 1.48. *[18, Teorema 2.48] Sea A un R-módulo derecho. Entonces $A \bigotimes_R \_$ es un funtor covariante aditivo de la categoría de R-módulos izquierdos a la categoría de grupos abelianos.*
Sea B un R-módulo izquierdo. Entonces $\_ \bigotimes_R B$ es un funtor covariante aditivo de la categoria de R-módulos derechos a la categoría de grupos abelianos.

Teorema 1.49. *[18, Teorema 2.63] Sea A un R-módulo derecho y sea*

$$B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de R-módulos izquierdos. Entonces

$$A \bigotimes_R B' \xrightarrow{Id_A \otimes i} A \bigotimes_R B \xrightarrow{Id_A \otimes p} A \bigotimes_R B'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Teorema 1.50. *Sea B un R-módulo izquierdo y sea*

$$A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de R-módulos derechos. Entonces

$$A' \bigotimes_R B \xrightarrow{i \otimes Id_B} A \bigotimes_R B \xrightarrow{p \otimes Id_B} A'' \bigotimes_R B \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

En otras palabras, los Teoremas 1.49 y 1.50 dicen que los funtores $\_ \bigotimes_R B$ y $A \bigotimes_R \_$ son ambos funtores exactos derechos.

Teorema 1.51. *[18, Teorema 2.56] Sean R un anillo, $(A_i)_{i\in I}$ una familia de R-módulos derechos y B un R-módulo izquierdo. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i\Big) \bigotimes_R B \cong \bigoplus_{i\in I} \Big(A_i \bigotimes_R B\Big).$$

Ahora vamos a definir el grupo de homomorfismos, el cual cumple propiedades duales a las de el producto tensorial.

Definición 1.52. Sean R un anillo, A y B R-módulos izquierdos. Denotamos al conjunto de R-homomorfismos entre A y B por $Hom_R(A, B)$.

Los siguientes resultados se pueden encontrar en [18] por lo que se dejarán sin demostración.

Proposición 1.53. *[18, Lema 2.3] Sean R un anillo, A y B R-módulos izquierdos. Entonces $Hom_R(A, B)$ es un grupo abeliano.*

Teorema 1.54. *Sea A un R-módulo izquierdo. Entonces $Hom_R(A, \_)$ es un funtor covariante aditivo de la categoría de R-módulos izquierdos a la categoría de grupos abelianos.*
Sea B un R-módulo izquierdo. Entonces $Hom_R(\_, B)$ es un funtor contravariante aditivo de la categoría de R-módulos izquierdos a la categoría de grupos abelianos.

Teorema 1.55. *[18, Teorema 2.38] Sea A un R-módulo izquierdo y sea*

$$0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow B''$$

una sucesión exacta corta de R-módulos izquierdos. Entonces

$$0 \longrightarrow Hom_R(A, B') \longrightarrow Hom_R(A, B) \longrightarrow Hom_R(A, B'')$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Teorema 1.56. *[18, Teorema 2.40] Sea B un R-módulo izquierdo y sea*

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de R-módulos izquierdos. Entonces

$$0 \longrightarrow Hom_R(A'', B) \longrightarrow Hom_R(A, B) \longrightarrow Hom_R(A', B)$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Teorema 1.57. *[18, Teorema 2.31] Sea R un anillo, B un R-módulo izquierdo y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de R-módulos izquierdos. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$Hom_R(\bigoplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(A_i, B).$$

Por último se enunciará un resultado conocido como el isomorfismo de adjunción.

Teorema 1.58. *[18, Teorema 2.75] Sean R y S anillos, A un R-módulo derecho, B tanto un R-módulo izquierdo como un S-módulo derecho y C un S-módulo derecho. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$Hom_S(A \bigotimes_R B, C) \cong Hom_R(A, Hom_S(B, C)).$$

Observación 1.59. Para que $Hom_S(A \bigotimes_R B, C)$ y $Hom_R(A, Hom_S(B, C))$ estén bien definidos es necesario que $A \bigotimes_R B$ sea un S-módulo izquierdo y $Hom_S(B, C)$ sea R-módulo izquierdo, esto es posible gracias a que B es tanto un R-módulo izquierdo como un S-módulo derecho, una explicación mas detallada puede encontrarse en [18].

1.5. Invariantes y coinvariantes

Dado un grupo G y S un subconjunto de G denotamos por $\langle S\rangle$ el subgrupo de G generado por los elementos de S.

Definición 1.60. Sea G un grupo, H un subgrupo de G y A un G-módulo. Definimos el **grupo de coinvariantes de A relativo a H** como A/T con $T := \langle (h-1)a : h, 1 \in H, a \in A\rangle$ y lo denotamos por A_H.

Definición 1.61. Sea G un grupo, H un subgrupo de G y A un G-módulo. Definimos el **grupo de invariantes de A relativo a H** como $\{a \in A : ha = a \text{ para toda } h \in H\}$ y lo denotamos A^H.

Observación 1.62. En general, tanto A_H como A^H son sólo grupos abelianos, es decir, no siempre es posible definir una acción de G en A_H y A^H.

Sea G un grupo, y H un subgrupo de G, en la Sección 1.1 se definió G/H y se le dio estructura de G-conjunto por lo que, gracias a la Proposición 1.40 tenemos que $\mathbb{Z}[G/H]$ es un G-módulo izquierdo. Pero además podemos darle estructura de G-módulo derecho definiendo el producto escalar $(g_0H) \cdot g = (g^{-1}g_0)H$ donde $(g^{-1}g_0)$ es el producto usual del grupo G.

Teorema 1.63. *Sea G un grupo, H un subgrupo de G y A un G-módulo izquierdo. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$A_H \cong \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A.$$

Demostración. Definimos $\phi \colon A_H \to \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ por $\phi([a]) = H \otimes a$ donde $[a]$ denota un elemento de A_H. Observemos que ϕ está bien definido, sea $[ha] \in A_H$ otro representante de $[a]$, entonces

$$\phi([ha]) = H \otimes ha = Hh \otimes a = H \otimes a = \phi(a).$$

Ahora vamos a definir su inversa como $\phi^{-1} \colon \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \to A_H$ dada por $\phi^{-1}(gH \otimes a) = [g^{-1}a]$ la cual cumple que

$$\phi(\phi^{-1}(gH \otimes a)) = \phi([g^{-1}a]) = H \otimes g^{-1}a = Hg^{-1} \otimes a = gH \otimes a$$

y

$$\phi^{-1}(\phi([a])) = \phi^{-1}(H \otimes a) = [a].$$

■

Corolario 1.64. *Sea A un G-módulo. Entonces A es isomorfo como grupo abeliano a $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$.*

Demostración. En el Teorema 1.63, si tomamos $H = \{1\}$ con 1 la identidad de G, tenemos que $A = A_H = \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$. ■

Teorema 1.65. *Sea G un grupo, H un subgrupo de G y A un G-módulo izquierdo. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$A^H \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G/H], A).$$

Demostración. Definimos $\phi\colon Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G/H], A) \to A^H$ dada por $\phi(f) = f(H)$. Ahora vamos a definir su inversa como

$$\phi^{-1}\colon A^H \to Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G/H], A)$$

dada por $\phi^{-1}(a)(gH) = ga$ la cual cumple que

$$\phi(\phi^{-1}(a)) = \phi^{-1}(a)(H) = a$$

y

$$\phi^{-1}(\phi(f))(gH) = \phi^{-1}(f(H))(gH) = gf(H) = f(gH).$$

■

Corolario 1.66. *Sea A un G-módulo. Entonces A es isomorfo como grupo abeliano a $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A)$.*

Demostración. En el Teorema 1.65, si tomamos $H = \{1\}$ con 1 la identidad de G, tenemos que $A = A^H = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A)$. ■

Capítulo 2

Homología y cohomología de representaciones por permutaciones

El objetivo de este capítulo es definir y analizar los grupos de (co)homología de representaciones por permutaciones, los cuales, son una generalización de la (co)homología de grupos. Algunos de los resultados pueden encontrarse en [2]; los resultados para cohomología pueden encontrarse en [20].

En la sección 2.1 se construye el complejo de cadenas asociado a una representación por permutaciones y se prueba que este complejo es acíclico.

Los grupos de homología de una representación por permutaciones se definen en la sección 2.2 y se dan resultados que los relacionan con la homología de grupos clásica.

La sección 2.3 contiene un teorema que relaciona la homología en dimensión cero con los coinvariantes.

De manera dual a la sección 2.2, en la sección 2.4 se da la definición de los grupos de cohomología de una representación por permutaciones y su relación con la cohomología clásica de grupos.

Durante este capítulo supondremos a G un grupo arbitrario no trivial y a X un conjunto arbitrario no vacío.

2.1. El complejo positivo de una representación por permutaciones

Sea (G, X) una representación por permutaciones, para $n \geq 0$ denotaremos por $\mathbf{C}_n(X)$ al G-módulo $\mathbb{Z}[X^{n+1}]$ cuyo producto escalar esta definido por la acción diagonal de G en X^{n+1} y definimos el G-homomorfismo $\partial_n \colon \mathbf{C}_n(X) \to \mathbf{C}_{n-1}(X)$ como $\partial_n(x_0, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_n)$, donde $\hat{x}$ denota la omisión. El G-homomorfismo ∂_n anterior está definido en los generadores de $\mathbf{C}_n(X)$ pero se extiende linealmente.

Proposición 2.1. *Sean (G, X) una representación por permutaciones, ∂_n y ∂_{n+1} definidas como antes. Entonces $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

La prueba de esta proposición es semejante a la prueba del Lema 13.1 en [13].

Con la Proposición 2.1 podemos concluir que los G-módulos $\mathbf{C}_n(X)$ y los G-homomorfismo ∂_n definen un G-complejo de cadenas.

Definición 2.2. El **complejo positivo de la representación por permutaciones** (G, X) está dado por el G-complejo:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{C}_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}_0(X) \longrightarrow 0,$$

el cual denotaremos por $\mathbf{C}_\bullet^+(X)$.

Definición 2.3. El **complejo positivo aumentado de la representación por permutaciones** (G, X) está dado por el G-complejo:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{C}_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \qquad (2.1)$$

en donde $\mathbb{Z}$ es un G-módulo trivial y $\varepsilon \colon \mathbf{C}_0(X) \to \mathbb{Z}$ está dado por $\varepsilon(x) = 1$ para todo $x \in X$. A ε se le llama **homomorfismo de aumentación**. Generalmente nos referiremos al complejo (2.1) como la aumentación del complejo $\mathbf{C}_\bullet^+(X)$.

Definición 2.4. Sean

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

y

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} D_n \xrightarrow{d'_n} D_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \cdots$$

dos complejos de cadenas, $\varphi := \{\varphi_n \colon C_n \to D_n\}$ y $\varphi' := \{\varphi'_n \colon C_n \to D_n\}$ homomorfismos para cada n. Diremos que φ es **homotópico** a φ' si existen homomorfismos $h := \{h_n \colon C_n \to D_{n+1}\}$ tales que

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = \varphi_n - \varphi'_n.$$

Llamaremos a h una **homotopía** de cadenas.

Teorema 2.5. *[14, Teorema 1.9] Sean*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

y

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} D_n \xrightarrow{d'_n} D_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \cdots$$

dos complejos de cadenas, $\varphi := \{\varphi_n \colon C_n \to D_n\}$ y $\varphi' := \{\varphi'_n \colon C_n \to D_n\}$ homomorfismos para cada n tales que φ es homotópico a φ'. Entonces el inducido por φ en homología coincide con el inducido por φ' en homología.

Más detalles acerca de la teoría de homotopía puede encontrarse en [14, Capítulo III].

Definición 2.6. Sea

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

un complejo de cadenas, el cual denotaremos por C. Decimos que C es **acíclico** si $H_n(C) = 0$ para $n \geq 1$.

Proposición 2.7. *El complejo positivo aumentado de la representación por permutaciones (G, X) es acíclico.*

La idea de la prueba es encontrar una homotopía entre el morfismo $Id \colon \mathbf{C}^+_\bullet(X) \to \mathbf{C}^+_\bullet(X)$ y el morfismo $0 \colon \mathbf{C}^+_\bullet(X) \to \mathbf{C}^+_\bullet(X)$ lo que implica que $Id = 0 \colon H_n(\mathbf{C}^+_\bullet(X)) \to H_n(\mathbf{C}^+_\bullet(X))$ para cada $n \geq 0$, por lo que el complejo es acíclico.

Demostración. Sea $x \in X$ fijo. Definimos los homomorfismos de grupos abelianos

$$S_n^x \colon \mathbf{C}_n(X) \to \mathbf{C}_{n+1}(X),\ n \geq 0$$

y

$$\gamma^x \colon \mathbb{Z} \to \mathbf{C}_0(X)$$

dados por $S_n^x(x_0, ..., x_n) = (x, x_0, .., x_n)$ y $\gamma^x(1) = x$, es decir, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{C}_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \mathbf{C}_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "S_n^x"'] & \mathbf{C}_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, "S_{n-1}^x"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{C}_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \mathbf{C}_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] & \mathbf{C}_{n-1}(X) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Denotamos por $Id_{\mathbf{C}_n(X)}$ a la identidad de $\mathbf{C}_n(X)$, vamos a probar que, para $n \geq 0$

$$\partial_{n+1} \circ S_n^x + S_{n-1}^x \circ \partial_n = Id_{\mathbf{C}_n(X)}\,,$$

$$\partial_1 \circ S_0^x + \gamma^x \circ \varepsilon = Id_{\mathbf{C}_0(X)}$$

y que

$$\varepsilon \circ \gamma^x = Id_{\mathbb{Z}}\,.$$

Sean $(x_0, ..., x_n) \in \mathbf{C}_n(X)$ y $z \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1} S_n^x(x_0, ..., x_n) + S_{n-1}^x \partial_n(x_0, ..., x_n) \\
&= \partial_{n+1}(x, x_0, ..., x_n) + S_{n-1}^x\Big(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_n)\Big) \\
&= (x_0, ..., x_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}(x, x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_n) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x, x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_n) \\
&= (x_0, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Además tenemos:

$$\partial_1 S_0^x(x_0) + \gamma^x \varepsilon(x_0) = \partial_1(x, x_0) + \gamma^x(1) = x_0 - x + x = x_0$$

y por último

$$\varepsilon\gamma^x(z) = z\varepsilon\gamma^x(1) = z\varepsilon(x) = z.$$

Con ésto podemos concluir que los homomorfismos de grupos abelianos S_n^x definen una homotopía entre el morfismo $Id\colon \mathbf{C}_\bullet^+(X) \to \mathbf{C}_\bullet^+(X)$ y el morfismo $0\colon \mathbf{C}_\bullet^+(X) \to \mathbf{C}_\bullet^+(X)$. ■

Durante la prueba anterior, cada S_n^x fue definido como un homomorfismo de grupos abelianos pero, es posible decir aún mas sobre S_n^x.

Proposición 2.8. *Consideremos los homomorfismos S_n^x y γ^x definidos como en la prueba de la Proposición 2.7. Sean $x \in X$ fijo y G_x el estabilizador de x. Entonces S_n^x y γ^x son G_x-homomorfismos para $n \geq 0$.*

Demostración. Sean $n \geq 0$, $z \in \mathbb{Z}$ y $g \in G_x$. Entonces

$$\begin{aligned} S_n^x(g(x_0, ..., x_n)) &= S_n^x(gx_0, ..., gx_n) \\ &= (x, gx_0, ..., gx_n) \\ &= (gx, gx_0, ..., gx_n) \\ &= g(x, x_0, ..., x_n) \\ &= gS_n^x(x_0, ..., x_n), \end{aligned}$$

y además

$$\gamma^x(g1) = \gamma^x(1) = \gamma^x(1) = x = gx = g\gamma^x(1).$$

■

Corolario 2.9. *Supongamos que G tiene un punto fijo x en X. Entonces S_n^x y γ^x son G-homomorfismos para $n \geq 0$.*

Demostración. Sea x el punto fijo de G. Entonces $G_x = G$. ■

2.2. Grupos de homología de una representación por permutaciones

Sea A un G-módulo arbitrario. Al igual que en la homología de grupos clásica, la cual puede encontrarse en [14], haremos uso del funtor $\_\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$

el cual, como se mencionó en el Capítulo 1, es un funtor covariante de la categoría de G-módulos a la categoría de grupos abelianos, además, es un funtor exacto derecho.

Dado el G-complejo $\mathbf{C}_\bullet^+(X)$, bajo el funtor $\_\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ obtenemos un nuevo complejo de grupos abelianos $\mathbf{C}_\bullet^+(X) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$, el cual denotaremos por $\mathbf{C}_\bullet^+(G, X; A)$.

Observación 2.10. Por definición cada $\mathbf{C}_n(X)$ es un G-módulo izquierdo, pero, para que $\mathbf{C}_\bullet^+(X) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ esté bien definido necesitamos que $\mathbf{C}_n(X) = \mathbb{Z}[X^{n+1}]$ sea un G-módulo derecho, para esto, definimos el producto escalar $(x_0, ..., x_n) \cdot g = g^{-1}(x_0, ..., x_n)$, con el cual, es fácil probar que $\mathbf{C}_n(X)$ es un G-módulo derecho.

Definición 2.11. Llamamos a $\mathbf{C}_n(X) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ el **n-ésimo grupo de cadenas** y lo denotamos por $\mathbf{C}_n(G, X; A)$. Definimos los **n-ésimos grupos de ciclos y fronteras** como $Ker(\partial_n \otimes Id_A)$ y $Im(\partial_{n+1} \otimes Id_A)$ respectivamente y los denotamos por $Z_n(G, X; A)$ y $B_n(G, X; A)$ respectivamente.

Definición 2.12. Para $n \geq 0$, $H_n(G, X; A)$ denota el **n-ésimo grupo de homología** del complejo $\mathbf{C}_\bullet^+(G, X; A)$ y se define como

$$H_n(G, X; A) = Z_n(G, X; A)/B_n(G, X; A).$$

El siguiente Teorema es de gran utilidad para saber si una acción dada tiene puntos fijos sólo calculando sus grupos de homología.

Teorema 2.13. *Sea (G, X) una representación por permutaciones donde G es un grupo con un punto fijo en X. Entonces $H_n(G, X; A) = 0$ para cada $n \geq 1$.*

Demostración. Por el Corolario 2.9 tenemos una G-homotopía entre los morfismos Id y 0 en el complejo de cadenas $\mathbf{C}_\bullet^+(X)$, la cual, bajo el funtor $\_\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ induce una homotopía de grupos abelianos entre los morfismos Id y 0 en el complejo de cadenas $\mathbf{C}_\bullet^+(G, X; A)$ por lo que $Id_{H_n(G,X;A)} = 0$ y así $H_n(G, X; A) = 0$. ■

Sea (G, X) una representación por permutaciones. Denotamos por $\bar{O}(X)$ un conjunto arbitrario de representantes de las órbitas de X. Por la Proposición 1.6, las órbitas forman una partición de X por lo que podemos escribir $X = \sqcup_{x \in \bar{O}(X)} O_x$ donde $\sqcup$ denota unión disjunta. Así, también podemos escribir $\mathbb{Z}[X] = \bigoplus_{x \in \bar{O}(X)} \mathbb{Z}[O_x]$.

Teorema 2.14. *Sean* (G, X) *una representación por permutaciones y* A *un* G*-módulo izquierdo. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$C_n(G, X; A) \cong \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} A_{G_{\bar{x}}}.$$

Demostración. Sabemos que

$$C_n(G, X; A) = \mathbb{Z}[X^{n+1}] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong \Big(\bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \mathbb{Z}[O_{\bar{x}}] \Big) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$$

y por el Teorema 1.51 tenemos que

$$\Big(\bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \mathbb{Z}[O_{\bar{x}}] \Big) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \big(\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \big),$$

ahora, usando el Teorema 1.11 obtenemos un G-isomorfismo para cada elemento $\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})$

$$O_{\bar{x}} \cong G/G_{\bar{x}}$$

el cual, gracias al Corolario 1.44 induce un G-isomorfismo de módulos para cada $\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})$

$$\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}] \cong \mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}]$$

y usando el funtor $\_ \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ tenemos un isomorfismo de grupos abelianos para cada $\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})$

$$\big(\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \big) \cong \big(\mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \big)$$

y así

$$\bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \big(\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \big) \cong \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \big(\mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \big).$$

Sólo falta probar que

$$\bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \big(\mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \big) \cong \bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} A_{G_{\bar{x}}}$$

para esto aplicamos el Teorema 1.63 a los subgrupos $G_{\bar{x}}$. ■

Observación 2.15. Por las propiedades de la suma directa podemos concluir que si tenemos un G-homomorfismo $\omega\colon A \to B$ de módulos el inducido $\bar{\omega}\colon \bigoplus_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} A_{G_{\bar{x}}} \to \bigoplus_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} B_{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) si y sólo si $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A_{G_{\bar{x}}} \to B_{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) para cada $G_{\bar{x}}$.

Teorema 2.16. *Sea $\omega\colon A \to B$ un G-homomorfismo de G-módulos. Entonces la función inducida por w es un G-isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) $C_n(G,X;A) \to C_n(G,X;B)$ si y sólo si la función $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A_{G_{\bar{x}}} \to B_{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) para cada $G_{\bar{x}}$ donde $\bar{\omega}$ esta definido como en la observación anterior.*

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata de la Observación 2.15. ■

Teorema 2.17. *Sea $\omega\colon A \to B$ un G-homomorfismo de módulos tal que $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A_{G_{\bar{x}}} \to B_{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo para cada $G_{\bar{x}}$. Entonces w induce un isomorfismo de grupos abelianos $H_n(G,X;A) \cong H_n(G,X;B)$.*

Demostración. Usando el Teorema 2.16 tenemos el resultado. ■

Teorema 2.18. *Consideremos una sucesión exacta corta de G-módulos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{w} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

y supongamos que $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A_{G_{\bar{x}}} \to B_{G_{\bar{x}}}$ es un monomorfismo para cada $G_{\bar{x}}$. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \to H_{n+1}(G,X;C) \to H_n(G,X;A) \to H_n(G,X;B) \to H_n(G,X;C) \to \cdots$$

de homología.

Demostración. Por hipótesis $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A_{G_{\bar{x}}} \to B_{G_{\bar{x}}}$ es un monomorfismo para cada $G_{\bar{x}}$ por lo que, usando el Teorema 2.16 y el hecho de que el funtor $C_n \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \_$ es exacto derecho tenemos que la sucesión exacta corta de G-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{w} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow C_n(G,X;A) \longrightarrow C_n(G,X;B) \longrightarrow C_n(G,X;C) \longrightarrow 0$$

así, el resultado es una consecuencia directa del Teorema 1.10 del Capítulo III en [14]. ■

Teorema 2.19. *Sean (G,X), (L,Y) dos representaciones por permutaciones, A un G-módulo y $\theta = (\varphi, f)\colon (G,X) \to (L,Y)$ un morfismo de representaciones por permutaciones donde $\varphi\colon G \to L$ es un epimorfismo y $N = Ker(\varphi)$. Entonces existe un homomorfismo $H_n(G,X;A) \to H_n(L,Y;A_N)$.*

Demostración. Usando el Teorema 1.63, el Corolario 1.64 y el hecho de que φ es un epimorfismo tenemos:

$$C_n(Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}[L]} A_N \cong \Big(C_n(Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}[L]} \mathbb{Z}[L]\Big) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong C_n(Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A\,,$$

además por la Proposición 1.43 existe un G-homomorfismo

$$C_n(X) \to C_n(Y)$$

y como $\_\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ es un functor covariante induce un homomorfismo de grupos abelianos

$$C_n(X) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \to C_n(Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A,$$

por lo que tenemos un homomorfismo de grupos abelianos

$$C_n(X) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \to C_n(Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}[L]} A_N,$$

más aún, tenemos un morfismo de complejos de cadenas el cual induce un homomorfismo de grupos abelianos en homología

$$H_n(G,X;A) \to H_n(L,Y;A_N).$$

■

Corolario 2.20. *Sean (G,X), (L,Y) dos representaciones por permutaciones y $\theta = (\varphi, f)\colon (G,X) \to (L,Y)$ un morfismo de representaciones por permutaciones donde $\varphi\colon G \to L$ es un epimorfismo, $N = Ker(\varphi)$ y $f\colon X \to Y$ es biyectiva. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos $H_n(G,X;A) \to H_n(L,Y;A_N)$.*

Demostración. Usando el Corolario 1.44 durante la prueba del Teorema 2.19 tenemos el resultado. ■

Lo siguiente es analizar la relación entre $H_n(G; A)$ y $H_n(G, X; A)$. Como la homología para representaciones por permutaciones es una generalización de la homología de grupos clásica, un primer resultado es dar condiciones con las cuales recuperamos la homología de grupos.

Observación 2.21. En el caso cuando $X = G$ y la acción esta dada por la multiplicación por la izquierda, la homología de la representacion por permutaciones (G, G) coincide con la homología usual del grupo G, es decir $H_n(G, G; A) = H_n(G, A)$.

Lo siguiente es dar otro tipo de relaciones que se puedan encontrar entre ambas teorías de homología. En los siguientes resultados se observara también la importancia de el tipo de acción con la cual se este trabajando.

Teorema 2.22. *Para cada $x \in X$ existe un homomorfismo de grupos abelianos $H_n(G; A) \to H_n(G, X; A)$.*

Demostración. Fijamos un $x \in X$ y tomamos la proyección $p\colon G \to G/G_x$ la cual es un G-morfismo, el G-isomorfismo $h\colon G/G_x \to O_x$ dado por el Teorema 1.11 y la inclusión $i\colon O_x \to X$ la cual es un G-homomorfismo, así, la composición $ihp\colon G \to X$ es un G-homomorfismo, es decir, tenemos un morfismo de representaciones $\theta = (Id_G, ihp)\colon (G, G) \to (G, X)$ el cual, gracias al Teorema 2.19 induce el homomorfismo de homología buscado. ■

Corolario 2.23. *Si la representación por permutaciones (G, X) es:*

- *Libre, entonces existen un isomorfismo de grupos abelianos*

$$H_n(G; A) \cong H_n(G, O_x; A)$$

  y un homomorfismo de grupos abelianos

$$H_n(G, O_x; A) \to H_n(G, X; A).$$

- *Transitiva, entonces existe un homomorfismo de grupos abelianos*

$$H_n(G; A) \to H_n(G, G/G_x; A)$$

  y un isomorfismo de grupos abelianos

$$H_n(G, G/G_x; A) \cong H_n(G, X; A).$$

- *Regular, entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$H_n(G;A) \cong H_n(G,X;A).$$

Demostración. Usando el Corolario 1.13 durante la prueba del Teorema 2.22 y el funtor $\_\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$. ■

Corolario 2.24. *Dada una representación por permutaciones (G,X) con $N(G,X)$ el kernel de la permutación. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos $H_n(G,X;A) \cong H_n(G/N(G,X),X,A_{N(G,X)})$.*

Demostración. Usando la Observación 1.31 y el Corolario 2.20. ■

Observación 2.25. Si la representación (G,X) es regular, por el Corolario 2.23 y el Teorema 2.18 recuperamos la sucesión exacta larga clásica en homología de grupos, es decir, consideremos una sucesión exacta corta de G-módulos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0\,.$$

Entonces existe la sucesión exacta larga

$$\cdots \to H_{n+1}(G;C) \to H_n(G;A) \to H_n(G;B) \to H_n(G;C) \to \cdots\,.$$

2.3. Homología en dimensión 0

En el caso de la homología en dimensión 0, puede darse una caracterización muy concreta que la relaciona con el grupo de coinvariantes del G-módulo usado.

Teorema 2.26. *Sea (G,X) una representación por permutaciones y A un G-módulo arbitrario. Entonces $H_0(G,X;A) = A_G$.*

Demostración. Tomando el complejo $\mathbf{C}^+_\bullet(G,X;A)$ tenemos $Z_0(G,X;A) = \mathbf{C}_0(X)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ y por definición $B_0(G,X;A) = (\partial_0 \bigotimes Id_A)(\mathbf{C}_1(X)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A)$ por lo que

$$H_0(G,X;A) = \frac{\mathbf{C}_0(X)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A}{(\partial_0 \bigotimes Id_A)(\mathbf{C}_1(X)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A)}\,.$$

Por otro lado la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Ker(\varepsilon) \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta

$$Ker(\varepsilon) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \xrightarrow{i\otimes Id_A} \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \xrightarrow{\varepsilon\otimes Id_A} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \longrightarrow 0 .$$

De la cual obtenemos que

$$\mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong \frac{\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A}{(i \otimes Id_A)(Ker(\varepsilon) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A)}.$$

Pero tambien tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde la primer línea es exacta

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_1(X) \arrow[r] \arrow[dr, "\partial_0"'] & Ker(\varepsilon) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
& \mathbb{Z}[X] &
\end{tikzcd}$$

el cual induce el siguiente diagrama conmutativo en el cual, la primer línea es exacta

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \arrow[r] \arrow[dr, "\partial_0 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A"'] & Ker(\varepsilon) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \arrow[r] \arrow[d, "i \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A"] & 0 \\
& \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A &
\end{tikzcd}$$

por lo que tenemos $(\partial_0 \otimes Id_A)(\mathbf{C}_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A) = (i \otimes Id_A)(Ker(\varepsilon) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A)$. Ahora, por el Teorema 1.63 tomando el grupo G y a él mismo como subgrupo se tiene un isomorfismo de grupos abelianos $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong \mathbb{Z}[G/G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A_G$.

■

2.4. Grupos de cohomología de una representación por permutaciones

Sea A un G-módulo arbitrario. Nuevamente, al igual que en la cohomología de grupos clásica haremos uso del funtor $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$, el cual, como se mencionó en el Capítulo 1, es un funtor contravariante de la categoría de G-módulos a la categoría de grupos abelianos.

Dado el G-complejo $\mathbf{C}^+_\bullet(X)$, bajo el funtor $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$, obtenemos un nuevo complejo de grupos abelianos $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{C}^+_\bullet(X), A)$, el cual denotaremos por $\mathbf{C}^\bullet_+(G, X; A)$.

Definición 2.27. Llamamos a $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{C}_n^+(X), A)$ el n**-ésimo grupo de cocadenas** y lo denotamos por $\mathbf{C}^n(G, X; A)$. Definimos los n**-ésimos grupos de cociclos y cofronteras** como $Ker(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\partial_{n+1}, A))$ e $Im(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\partial_n, A))$ respectivamente y los denotamos por $Z^n(G, X; A)$ y $B^n(G, X; A)$ respectivamente.

Definición 2.28. Para $n \geq 0$, $H^n(G, X; A)$ denota el n**-ésimo grupo de cohomología** del complejo $\mathbf{C}_+^\bullet(G, X; A)$ y se define como

$$H^n(G, X; A) = Z^n(G, X; A)/B^n(G, X; A).$$

Al igual que en homología, el siguiente Teorema es de gran utilidad para saber si una acción dada tiene puntos fijos sólo calculando sus grupos de cohomología.

Teorema 2.29. *Sea (G, X) una representación por permutaciones donde G es un grupo con un punto fijo en X. Entonces $H^n(G, X; A) = 0$ para cada $n \geq 0$.*

Demostración. Por el Corolario 2.9 tenemos una G-homotopía entre los morfismos Id y 0 en el complejo de cadenas $\mathbf{C}_\bullet^+(X)$, la cual, bajo el funtor $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$ induce una homotopía de grupos abelianos entre los morfismos Id y 0 en el complejo de cadenas $\mathbf{C}_+^\bullet(G, X; A)$ por lo que $Id_{H^n(G,X;A)} = 0$ y así $H^n(G, X; A) = 0$. ■

Teorema 2.30. *Sean (G, X) una representación por permutaciones y A un G-módulo. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$C^n(G, X; A) \cong \prod_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} A^{G_{\bar{x}}}.$$

Demostración. Sabemos que

$$C^n(G, X; A) = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[X^{n+1}], A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \mathbb{Z}[O_{\bar{x}}], A)$$

y por el Teorema 1.57 tenemos que

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\bigoplus_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} \mathbb{Z}[O_{\bar{x}}], A) \cong \prod_{\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}], A)$$

ahora, por el Teorema 1.11 tenemos un G-isomorfismo para cada elemento $\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})$

$$O_{\bar{x}} \cong G/G_{\bar{x}}$$

el cual, gracias al Corolario 1.44 induce un G-isomorfismo de módulos para cada $\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})$

$$\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}] \cong \mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}]$$

y usando el funtor $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$ tenemos un isomorfismo de grupos abelianos para cada $\bar{x} \in \bar{O}(X^{n+1})$

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}], A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}], A)$$

y así

$$\prod_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[O_{\bar{x}}], A) \cong \prod_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}], A).$$

Sólo falta probar que

$$\prod_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G/G_{\bar{x}}], A) \cong \prod_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} A^{G_{\bar{x}}}.$$

para esto sólo aplicamos el Teorema 1.65 a los subgrupos $G_{\bar{x}}$. ■

Observación 2.31. Por las propiedades del producto podemos concluir que, si tenemos un G-homomorfismo $\omega\colon A \to B$ de módulos, el inducido $\bar{\omega}\colon \prod_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} A^{G_{\bar{x}}} \to \prod_{\bar{x}\in\bar{O}(X^{n+1})} B^{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) si y sólo si $\bar{\omega}|_U\colon A^{G_{\bar{x}}} \to B^{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) para cada $G_{\bar{x}}$.

Teorema 2.32. *Sea $\omega\colon A \to B$ un G-homomorfismo de módulos. Entonces la función inducida por w es un G-isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) $C^n(G,X;A) \cong C^n(G,X;B)$ si y sólo si $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A^{G_{\bar{x}}} \to B^{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo (respectivamente monomorfismo, epimorfismo) para cada $G_{\bar{x}}$ donde $\bar{\omega}$ esta definido como en la observación anterior.*

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata de la Observación 2.31. ■

Teorema 2.33. *Sea $\omega\colon A \to B$ un G-homomorfismo de módulos tal que $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A^{G_{\bar{x}}} \to B^{G_{\bar{x}}}$ es un isomorfismo para cada $G_{\bar{x}}$. Entonces w induce un isomorfismo de grupos abelianos $H^n(G,X;A) \cong H^n(G,X;B)$.*

Demostración. Usando el Teorema 2.32 tenemos el resultado. ∎

Teorema 2.34. *Consideremos una sucesión exacta corta de G-módulos*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{w} C \longrightarrow 0$$

y supongamos que $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A^{G_{\bar{x}}} \to B^{G_{\bar{x}}}$ es un epimorfismo para cada $G_{\bar{x}}$. Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \to H^n(G,X;C) \to H^n(G,X;B) \to H^n(G,X;A) \to H^{n+1}(G,X;C) \to \cdots$$

de cohomología.

Demostración. Por hipótesis $\bar{\omega}|_{G_{\bar{x}}}\colon A^{G_{\bar{x}}} \to B^{G_{\bar{x}}}$ es un epimorfismo para cada $G_{\bar{x}}$ por lo que, usando el Teorema 2.32 y el hecho de que el funtor $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C^n, \_)$ es exacto izquierdo tenemos que la sucesión exacta corta de G-módulos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{w} C \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow C^n(G,X;A) \longrightarrow C^n(G,X;B) \longrightarrow C^n(G,X;C) \longrightarrow 0$$

así, el resultado es una consecuencia dual del Teorema 1.10 del Capítulo III en [14]. ∎

Teorema 2.35. *Sean (G,X), (L,Y) dos representaciones por permutaciones y $\theta = (\varphi, f)\colon (G,X) \to (L,Y)$ un morfimos de representaciones por permutaciones donde $\varphi\colon G \to L$ es un epimorfismo. Entonces existe un homomorfismo de grupos abelianos $H^n(L,Y;A^N) \to H^n(G,X;A)$.*

Demostración. Usando el Teorema 1.65 tenemos que

$$Hom_{\mathbb{Z}[L]}(C_n(Y), A^N) \cong Hom_{\mathbb{Z}[L]}(C_n(Y), Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[L], A)),$$

ahora, por el Teorema 1.58

$$Hom_{\mathbb{Z}[L]}(C_n(Y), Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[L], A)) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}[L]} \mathbb{Z}[L], A)$$

y aplicando el Corolario 1.66 tenemos

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}[L]} \mathbb{Z}[L], A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(Y), A),$$

además por la Proposición 1.43 existe un G-homomorfismo de módulos

$$C_n(X) \to C_n(Y)$$

y como $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$ es un funtor contravariante induce un homomorfismo de grupos abelianos

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(Y), A) \to Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(X), A),$$

por lo que tenemos un homomorfismo de grupos abelianos

$$Hom_{\mathbb{Z}[L]}(C_n(Y), A^N) \to Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(X))$$

más aún, tenemos un morfismo de complejos de cadenas, el cual induce un homomorfismo en cohomología

$$H^n(L, Y; A^N) \to H^n(G, X; A).$$

■

Corolario 2.36. *Sean (G, X), (L, Y) dos representaciones por permutaciones y $\theta = (\varphi, f)\colon (G, X) \to (L, Y)$ un morfimos de representaciones por permutaciones donde $\varphi\colon G \to L$ es un epimorfismo y $f\colon X \to Y$ es biyectiva. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos $H^n(L, Y; A^N) \to H^n(G, X; A)$.*

Demostración. Usando el Corolario 1.44 durante la prueba del Teorema 2.35 tenemos el resultado. ■

Observación 2.37. En el caso cuando $X = G$ con la acción de multiplicación por la izquierda, la cohomología de la representación por permutaciones (G, G) coincide con la cohomología usual del grupo G, es decir $H^n(G, G; A) = H^n(G; A)$.

Lo siguiente es analizar la relación entre $H^n(G; A)$ y $H^n(G, X; A)$.

Teorema 2.38. *Para cada $x \in X$ existe un homomorfismo de grupos abelianos $H^n(G, X; A) \to H^n(G; A)$.*

Demostración. Fijamos un $x \in X$ y tomamos la proyección $p\colon G \to G/G_x$ la cual es un G-morfismo, el G-isomorfismo $h\colon G/G_x \to O_x$ dado por el Teorema 1.11 y la inclusión $i\colon O_x \to X$ la cual es un G-morfismo, así, la composición $ihp\colon G \to X$ es un G-homomorfismo, es decir, tenemos un morfismo de representaciones $\theta = (Id_G, ihp)\colon (G,G) \to (G,X)$ el cual, gracias al Teorema 2.35 induce el homomorfismo de homología buscado. ■

Corolario 2.39. *Si la representación por permutaciones (G,X) es:*

- *Libre, entonces existen un isomorfismo de grupos abelianos*

$$H^n(G;A) \cong H^n(G,O_x;A)$$

y un homomorfismo de grupos abelianos

$$H^n(G,X;A) \to H^n(G,O_x;A).$$

- *Transitiva, entonces existe un homomorfismo de grupos abelianos*

$$H^n(G,G/G_x;A) \to H^n(G;A)$$

y un isomorfismo de grupos abelianos

$$H^n(G,G/G_x;A) \cong H^n(G,X;A).$$

- *Regular, entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$H^n(G;A) \cong H^n(G,X;A).$$

Demostración. Usando el Corolario 1.13 durante la prueba del Teorema 2.38 y el functor $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$. ■

Corolario 2.40. *Dada una representación por permutaciones (G,X) con $N(G,X)$ el kernel de la permutación. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos $H^n(G,X;A) \cong H^n(G/N(G,X),X,A^{N(G,X)})$.*

Demostración. Usando la Observación 1.31 y el Corolario 2.36. ■

Observación 2.41. Si la representación (G,X) es regular, por el Corolario 2.39 y el Teorema 2.34 recuperamos la sucesión exacta larga clásica de cohomología de grupos es decir, consideremos una sucesión exacta corta de G-módulos

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0\,.$$

Entonces existe la sucesión exacta larga

$$\cdots \to H^n(G;C) \to H^n(G;B) \to H^n(G;A) \to H^{n+1}(G;C) \to \cdots\,.$$

Capítulo 3

Tor y Ext relativos a la familia de estabilizadores

En este capítulo se busca dar otra definición de la (co)homología de representaciones por permutaciones desde el punto de vista del álgebra homológica relativa de familias. La mayor parte de los resultados de este capítulo se pueden encontrar en [2] y en [12]. Durante este capítulo usaremos la definición de funtor aditivo la cual se puede encontrar en [18, Pag. 303].
En la sección 3.1 se definen las sucesiones exactas relativas, las cuales son la base del álgebra homológica relativa.
En la sección 3.2 se definen los módulos inducido, coinducido y restringido, éstos son el punto fundamental para relacionar la homología dada por Nucinkis en [17] y la homología relativa a la familia de estabilizadores.
La noción de módulos proyectivos relativos se introduce en la sección 3.3 así como algunos resultados básicos de éstos.
Para poder dar una definición de la homología relativa de familias necesitamos generalizar los resultados sobre homología relativa de las secciones anteriores, por lo que en la sección 3.4 se encuentra la definición de sucesión exacta relativa a la familia de estabilizadores.
La sección 3.5 contiene la relación entre la homología de G-conjuntos dada por Nucinkis en [17] y la homología relativa a la familia de estabilizadores.
Los funtores Tor y Ext relativos a la familia de estabilizadores se definen en la sección 3.5.
En la sección 3.6 se prueba que la homología de representaciones por permutaciones dada en el Capitulo 2 coincide con la homología relativa a la familia de estabilizadores.

3.1. Sucesiones exactas relativas

Definición 3.1. Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Una sucesión exacta de G-módulos y G-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es llamada (G, H)**-exacta** si $C_n \cong E_n \bigoplus Ker(d_n)$ donde E_n y $Ker(d_n)$ son H-módulos para cada n.

En otras palabras, una sucesión es (G, H)-exacta si $Ker(d_n)$ es un H-módulo sumando directo de C_n.

Definición 3.2. Sean G un grupo, H un subgrupo de G y

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

una sucesión de G-módulos y G-homomorfismos, decimos que existe una H-**homotopía contráctil** si existen H-homomorfismos $h_n \colon C_n \to C_{n+1}$ tales que $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = Id_{C_n}$.

El siguiente teorema puede encontrarse en [12, Pag. 247] y en [2, Poposición 4.2]

Teorema 3.3. *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. La sucesión de G-módulos*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es (G, H)-exacta si y sólo si cumple las siguientes dos propiedades:

- $d_n \circ d_{n+1} = 0$ *para cada n.*
- *Existe una H-homotopía contráctil.*

Demostración. Supongamos que la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{3.1}$$

es (G, H)-exacta, por la exactitud tenemos que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para cada n, por lo que sólo falta probar la existencia de la H-homotopía contráctil. Para esto tomemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to Ker(d_{n+1}) \to C_{n+1} \to Ker(d_n) \to 0, \tag{3.2}$$

la cual, por la (G, H)-exactitud de (3.1), se escinde como sucesión de H-módulos y así, usando la Proposición (0.3) de [6] tenemos la H-homotopía contráctil buscada.

Ahora supongamos que se cumplen las dos condiciones. La primer condición nos dice que $Im(d_{n+1}) \subseteq Ker(d_n)$ y por la segunda tenemos una H-homotopía contráctil, es decir, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & C_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

en el cual h_n son H-homomorfismos para cada n y se cumple que

$$d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = Id_{c_n}, \tag{3.3}$$

por lo que, si $x \in Ker(d_n)$, por (3.3), tenemos que

$$x = d_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d_n(x)) = d_{n+1}(h_n(x)),$$

es decir, $x \in Im(d_{n+1})$, y así $Im(d_{n+1}) = Ker(d_n)$. Por lo que la sucesión

$$0 \to Ker(d_{n+1}) \to C_{n+1} \to Ker(d_n) \to 0$$

es exacta. Más aún, tomando $h_n|_{Ker(d_n)}$ la sucesión se escinde y como h_n es un H-homomorfismo $C_{n+1} \cong Ker(d_n) \bigoplus Ker(d_{n+1})$ donde $Ker(d_n)$ y $Ker(d_{n+1})$ son H-módulos para cada n por lo que la sucesión 3.1 es (G, H)-exacta. ∎

3.2. Módulos (co)inducidos

Definición 3.4. Sean G un grupo, H un subgrupo de G y A un H-módulo. Definimos el **módulo inducido de** H **a** G como $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} A$ y lo denotamos por $Ind_H^G A$.

Definición 3.5. Sean G un grupo, H un subgrupo de G y A un H-módulo. Definimos el **módulo coinducido de** H **a** G como $Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], A)$ y lo denotamos por $Coind_H^G A$.

Para darle estructura de G-módulo a $Ind_H^G A$ y a $Coind_H^G A$ estamos usando el hecho de que $\mathbb{Z}[G]$ es tanto un G-módulo derecho como un G-módulo izquierdo, una explicación mas detallada puede encontrarse en [18].

Como $Ind_H^G\_$ y $Coind_H^G\_$ están definidos con los funtores $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} \_$ y $Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], \_)$, heredan sus propiedades funtoriales, es decir, $Ind_H^G\_$ es un funtor covariante, aditivo y exacto derecho que va de la categoría de H-módulos a la categoría de G-módulos y $Coind_H^G\_$ es un funtor covariante, aditivo y exacto izquierdo, que va de la categoría de H-módulos a la categoría de G-módulos.

Definición 3.6. Sean G un grupo, H un subgrupo de G y A un G-módulo. Definimos el **módulo restringido de G a H** $Res_H^G A$ simplemente como A restringiendo el producto escalar de G a H.

Es fácil ver que $Res_H^G A$ es un funtor covariante, aditivo y exacto de la categoría de G-módulos a la categoría de H-módulos.

Lema 3.7. *$Ind_H^G \circ Res_H^G A = \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A$.*

Demostración. Primero observemos que $Res_H^G A = A$ visto como H-módulo por lo que

$$\begin{aligned} Ind_H^G \circ Res_H^G A &= \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} A \\ &= \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} (\mathbb{Z} \bigotimes_{\mathbb{Z}} A) \\ &= (\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}) \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \\ &= \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A. \end{aligned}$$

■

Lema 3.8. *$Coind_H^G \circ Res_H^G A = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], A)$.*

Demostración. Primero observemos que $Res_H^G A = A$ visto como H-módulo por lo que, usando el Teorema 1.58

$$\begin{aligned} Coind_H^G \circ Res_H^G A &= Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], A) \\ &= Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A)) \\ &= Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}, A) \\ &= Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], A). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Teorema 3.9. *Sean G un grupo y H un subgrupo de G y*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{k} B \xrightarrow{w} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de G-módulos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) La sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res_H^G A \xrightarrow{Res_H^G(k)} Res_H^G B \xrightarrow{Res_H^G(w)} Res_H^G C \longrightarrow 0$$

se escinde.

(2) La sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{k_*} \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{w_*} \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} C \longrightarrow 0$$

se escinde.

(3) La sucesión exacta corta

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], A) \xrightarrow{k^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], B) \xrightarrow{w^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], C) \to 0$$

se escinde.

Demostración. ▪ Probaremos *(1)* si y sólo si *(2)*.

Supongamos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res_H^G A \xrightarrow{Res_H^G(k)} Res_H^G B \xrightarrow{Res_H^G(w)} Res_H^G C \longrightarrow 0$$

se escinde. Como el funtor $Ind_H^G\_$ es aditivo, tenemos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Ind_H^G Res_H^G A \longrightarrow Ind_H^G Res_H^G B \longrightarrow Ind_H^G Res_H^G C \longrightarrow 0$$

se escinde y por el lema 3.7 esta sucesión coincide con

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} B \longrightarrow \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} C \longrightarrow 0\ .$$

Ahora supongamos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{k_*} \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{w_*} \mathbb{Z}[G/H] \bigotimes_{\mathbb{Z}} C \longrightarrow 0$$

se escinde. Por el Lema 3.7 esta sucesión coincide con

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G A \xrightarrow{k_*} \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G B \xrightarrow{w_*} \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G C \longrightarrow 0.$$

Además tenemos $i_B\colon Res_H^G B \to \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G B$ dada por $i_B(b) = 1 \otimes b$ y $P_B\colon \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G B \to Res_H^G B$ dada por $P_B(g \otimes b) = b$ claramente i_B es un H-monomorfismo y P_B es un H-epimorfismo, usando morfismos semejantes para C tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Res_H^G B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "i_B"] & Res_H^G C \arrow[r] \arrow[d, "i_C"] & 0 \\
\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G B \arrow[r, shift left, "w_*"] \arrow[d, "P_B"] & \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G C \arrow[l, shift left, "s_*"] \arrow[r] \arrow[d, "P_C"] & 0 \\
Res_H^G B \arrow[r, "w"] & Res_H^G C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde, por la conmutatividad y por el hecho de que la sucesión central se escinde, tenemos que $w_* \circ s_* = Id_{\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G C}$ y $w = P_C \circ w^* \circ i_B$. Ahora definimos $s\colon Res_H^G C \to Res_H^G B$ como $s = P_B \circ s_* \circ i_C$ y así tenemos

$$\begin{aligned}
w \circ s &= P_C \circ w_* \circ (i_B \circ P_B) \circ s_* \circ i_C \\
&= P_C \circ w_* \circ Id_B \circ s_* \circ i_C \\
&= P_C \circ (w_* \circ s_*) \circ i_C \\
&= P_C \circ Id_{\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} Res_H^G C} \circ i_C \\
&= P_C \circ i_C \\
&= Id_C,
\end{aligned}$$

es decir, la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res_H^G A \xrightarrow{Res_H^G(k)} Res_H^G B \xrightarrow{Res_H^G(w)} Res_H^G C \longrightarrow 0$$

se escinde.

- Probaremos *(1)* si y sólo si *(3)*.

  Supongamos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res_H^G A \xrightarrow{Res_H^G(k)} Res_H^G B \xrightarrow{Res_H^G(w)} Res_H^G C \longrightarrow 0$$

se escinde. Como el funtor $Coind_{H\_}^G$ es aditivo, tenemos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Coind_H^G Res_H^G A \longrightarrow Coind_H^G Res_H^G B \longrightarrow Coind_H^G Res_H^G C \longrightarrow 0$$

se escinde y por el Lema 3.8 esta sucesión coincide con

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], A) \xrightarrow{k^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], B) \xrightarrow{w^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], C) \to 0.$$

Ahora supongamos que la sucesión exacta corta

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], A) \xrightarrow{k^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], B) \xrightarrow{w^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/H], C) \to 0$$

se escinde. Por el Lema 3.8 esta sucesión coincide con

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G A) \xrightarrow{k*} Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G B) \xrightarrow{w*} Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G C) \to 0,$$

además $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], B) \subseteq Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G B)$ restringiendo cada G-homomorfismo a H y por el Corolario 1.66 existe un G-isomorfismo

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], B) \cong B$$

por lo que tenemos una inclusión natural

$$i_B\colon Res_H^G B \to Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G B)$$

y una proyección

$$P_B\colon Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G B) \to Res_H^G B$$

dada por $P_B(f) = f(1)$ con i_B un H-monomorfismo y P_B un H-epimorfismo que satisfacen $i_B \circ P_B = Id_B$. Tomando morfismos semejantes para C tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Res_H^G B \arrow[r, "w"] \arrow[d, "i_B"] & Res_H^G C \arrow[r] \arrow[d, "i_C"] & 0 \\
Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G B) \arrow[r, shift left, "w^*"] \arrow[d, "P_B"] & Hom_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], Res_H^G C) \arrow[l, shift left, "s^*"] \arrow[r] \arrow[d, "P_C"] & 0 \\
Res_H^G B \arrow[r, "w"] & Res_H^G C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el cual, tomando $s = P_B \circ s^* \circ i_C$ podemos concluir que $w \circ s = Id_C$. Es decir, la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res_H^G A \xrightarrow{Res_H^G(k)} Res_H^G B \xrightarrow{Res_H^G(w)} Res_H^G C \longrightarrow 0$$

se escinde. ■

El siguiente resultado relaciona la definición de sucesión (G, H)-exacta con el Teorema 3.9.

Teorema 3.10. *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. La sucesión de G-módulos*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es (G, H)-exacta si y sólo si la sucesión exacta corta de H-módulos

$$0 \longrightarrow Res_H^G Ker(d_{n+1}) \longrightarrow Res_H^G C_{n+1} \longrightarrow Res_H^G Ker(d_n) \longrightarrow 0$$

se escinde para cada $n \geq 0$.

Demostración. Supongamos que la sucesión de G-módulos

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es (G,H)-exacta, entonces $C_{n+1} = Ker(d_{n+1}) \bigoplus E_{n+1}$ con $Ker(d_{n+1})$ y E_{n+1} H-módulos, además, tenemos que $Res^G_H C_{n+1} = Res^G_H Ker(d_{n+1}) \bigoplus E$ con $Res^G_H Ker(d_{n+1})$ y E H-módulos ya que $Res^G_{H\_\_}$ es un funtor aditivo, es decir

$$0 \longrightarrow Res^G_H Ker(d_{n+1}) \longrightarrow Res^G_H C_{n+1} \longrightarrow Res^G_H Ker(d_n) \longrightarrow 0$$

se escinde.
Ahora supongamos que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res^G_H Ker(d_{n+1}) \longrightarrow Res^G_H C_{n+1} \longrightarrow Res^G_H Ker(d_n) \longrightarrow 0$$

se escinde. Como se mencionó antes, para cualquier G-módulo A, $Res^G_H A = A$ pensando a A como H-módulo, es decir, la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Ker(d_{n+1}) \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow Ker(d_n) \longrightarrow 0$$

se escinde pensando cada término como un H-módulo por lo que $C_{n+1} = Ker(d_{n+1}) \bigoplus Ker(d_n)$ con $Ker(d_{n+1})$ y $Ker(d_n)$ H-módulos, es decir, la sucesión (3.1) es (G,H)-exacta. ■

3.3. Módulos proyectivos relativos

Definición 3.11. Sean G un grupo y H un subgrupo de G, decimos que un G-módulo P es (G,H)-**proyectivo** si para cada sucesión (G,H)-exacta

$$M' \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

y cada G-homomorfismo $\varphi\colon P \to M$ existe un G-homomorfismo $\varphi'\colon P \to M'$ tal que $d \circ \varphi' = \varphi$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M' \arrow[r, "d"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Los siguientes resultados se pueden encontrar en [2] y en [12, Pag. 249].

Proposición 3.12. *[2, Lema 4.3] Para cualquier H-módulo M, el G-módulo $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M$ es (G, H)-proyectivo.*

Demostración. Sea

$$N' \xrightarrow{d} N \longrightarrow 0$$

una sucesión (G, H)-exacta, definimos el homomorfismo

$$\theta \colon Hom_{\mathbb{Z}[H]}(M, N') \to Hom_{\mathbb{Z}[H]}(M, N)$$

dado por $\theta(h) = d \circ h$. Por la (G, H)-exactitud $Ker(d)$ es un H-módulo sumando directo de N' por lo que $N' \cong Ker(d) \bigoplus N$, sea además $i_N \cong N \to N'$ la inclusión, la cual es un H-homomorfismo y cumple $d \circ i_N = Id_N$. Vamos a probar que θ es un epimorfimo, para esto, sea $p \colon M \to N$ un H-homomorfismo, entonces $i_N \circ P \colon M \to N'$ es un H-homomorfismo y además $\theta(i_N \circ p) = d \circ i_N \circ p = Id_N \circ p = p$. Ahora, usando el Corolario 1.66 y el Teorema 1.58 tenemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}[H]}(M, N) &\cong Hom_{\mathbb{Z}[H]}(M, Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N)) \\ &\cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{Z[H]} M, N) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}[H]}(M, N') &\cong Hom_{\mathbb{Z}[H]}(M, Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], N')) \\ &\cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{Z[H]} M, N') \end{aligned}$$

con los cuales tenemos un epimorfismo

$$\bar{\theta} \colon Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{Z[H]} M, N') \to Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{Z[H]} M, N)$$

por lo que, dado $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{Z[H]} M, N)$ existe

$$\varphi' \in Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{Z[H]} M, N')$$

tal que $\bar{\theta}(\varphi') = \varphi$, entonce $\varphi = d \circ \varphi'$, es decir, $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M$ es (G, H)-proyectivo. ■

Proposición 3.13. *[2, Proposición 4.5] Sean P_1 y P_2 G-módulos, entonces $P_1 \bigoplus P_2$ es (G,H)-proyectivo si y sólo si P_1 y P_2 son (G,H)-proyectivos.*

Demostración. Primero supongamos que P_1 y P_2 son (G,H)-proyectivos. Sea

$$M' \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

una sucesión (G,H)-exacta y $\varphi\colon P_1 \bigoplus P_2 \to M$ un G-homomorfismo, tomando las inclusiones $i_j\colon P_j \to P_1 \bigoplus P_2$ con $j = 1,2$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& P_j \arrow[d] \arrow[ddl, dashed, "\varphi'_j"'] & \\
& P_1 \bigoplus P_2 \arrow[d, "\varphi"] & \\
M' \arrow[r, "d"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

donde φ'_j existen ya que P_j son (G,H)-proyectivos con $j = 1,2$, es facil probar que

$$\varphi'_1 \oplus \varphi'_2\colon P_1 \bigoplus P_2 \to M$$

es el G-homomorfismo buscado.
Ahora supongamos que $P_1 \bigoplus P_2$ es (G,H)-proyectivo, queremos probar que para la sucesión (G,H)-exacta

$$M' \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

y cada G-homomorfismo $\varphi\colon P_j \to M$ existe un G-homomorfismo $\varphi'\colon P_j \to M'$ tal que $d \circ \varphi' = \varphi$, pero gracias a la inclusión $i_j\colon P_j \to P_1 \bigoplus P_2$ y a la proyección $\pi_j\colon P_1 \bigoplus P_2 \to P_i$ las cuales cumplen $\pi_j \circ i_j = Id_{P_j}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& P_j \arrow[d, "i_j"] & \\
& P_1 \bigoplus P_2 \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[ddl, dashed, "\varphi''"'] & \\
& P_i \arrow[d, "\varphi"] & \\
M' \arrow[r, "d"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde φ'' existe debido a que $P_1 \bigoplus P_2$ es (G,H)-proyectivo, definimos $\varphi' = \varphi'' \circ i_j \colon P_j \to M'$ y cumple que $d \circ \varphi' = d \circ \varphi'' \circ i_j = \varphi \circ \pi_j \circ i_j = \varphi$, es decir, P_j es (G,H)-proyectivo para $j = 1, 2$. ■

Proposición 3.14. *[2, Corolario 4.6] Un G-módulo M es (G,H)-proyectivo si y sólo si es G-isomorfo a un G-módulo sumando de $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M$.*

Demostración. Primero supongamos que M es G-isomorfo a un G-módulo sumando de $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M$. Por las Proposiciones 3.13 y 3.12 M es (G,H)-proyectivo. Ahora supongamos que M es (G,H)-proyectivo, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "Id_M"] & \\ \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde π es la proyección definida por $\pi(g \otimes m) = m$. Denotamos por i la inclusión definida por $i(m) = 1 \otimes m$ la cual es un H-homomorfismo ya que

$$i(hm) = 1 \otimes hm = h \otimes m = h(1 \otimes m) = hi(m)$$

por lo que, la sucesión

$$\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

es (G,H)-exacta. Usando el hecho de que M es (G,H)-proyectivo existe un G-homomorfismo $\varphi \colon M \to \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M$ el cual hace conmutar el diagrama y así M es G-isomorfo a un G-módulo sumando de $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[H]} M$. ■

Proposición 3.15. *Sean G un grupo, H un subgrupo de G, K un subgrupo de H y P un G-módulo (G,K)-proyectivo. Entonces P es (G,H)-proyectivo.*

Demostración. Primero observemos que, si tenemos una sucesión (G,H)-exacta, por el Teorema 3.3 existe una H-homotopía contráctil la cual se puede restringir a una K-homotopía contráctil y así la sucesión también es (G,K)-exacta, ahora, sea P un G-módulo (G,K)-proyectivo,

$$M' \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

una sucesión (G,H)-exacta y $\varphi \colon P \to M$ un G-homomorfismo, por lo anterior la sucesión es (G,K)-exacta y entonces existe un G-homomorfismo $\varphi' \colon P \to M'$, es decir, M es (G,H)-proyectivo. ■

3.4. Sucesiones exactas relativas a la familia de estabilizadores

La definición precisa de familia se dará en el Capítulo 5, pero, en esta sección, se trabajará con un ejemplo particular llamado la familia de estabilizadores.

Definición 3.16. Sea (G, X) una representación por permutaciones. Definimos la **familia de estabilizadores de** X como $\mathfrak{F}(X) = \{G_x : x \in X\}$.

Definición 3.17. Sea (G, X) una representación por permutaciones. Una sucesión exacta de G-módulos y G-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es llamada $\mathfrak{F}(X)$**-exacta** si $C_n \cong E_n \bigoplus Ker(d_n)$ donde E_n y $Ker(d_n)$ son G_x-módulos para cada estabilizador G_x de X.

En otras palabras, una sucesión exacta larga de G-módulos es $\mathfrak{F}(X)$-exacta si y sólo si es (G, G_x)-exacta para cada estabilizador G_x. Gracias a esto, y a los G-isomorfismos

$$\mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \cong \bigoplus_{x \in \bar{O}(X)} \mathbb{Z}[G/G_x] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A$$

y

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X], A) \cong \prod_{x \in \bar{O}(X)} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G/G_x], A),$$

podemos tener las siguientes versiones de los Teoremas 3.3, 3.9 y 3.10 respectivamente.

Teorema 3.18. *Sea (G, X) una representación por permutaciones. La sucesión exacta de G-módulos*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es $\mathfrak{F}(X)$-exacta si y sólo si cumple las siguientes dos propiedades:

- $d_n \circ d_{n+1} = 0$ *para cada* n.

- *Existe una G_x-homotopía contráctil para cada estabilizador G_x de X.*

Teorema 3.19. *Sean (G, X) una representación por permutaciones y*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{k} B \xrightarrow{w} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de G-módulos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) La sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res^G_{G_x} A \xrightarrow{Res^G_{G_x}(k)} Res^G_{G_x} B \xrightarrow{Res^G_{G_x}(w)} Res^G_{G_x} C \longrightarrow 0$$

se escinde para cada estabilizador G_x de X.

(2) La sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{k_*} \mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} B \xrightarrow{w_*} \mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} C \longrightarrow 0$$

se escinde.

(3) La sucesión exacta corta

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X], A) \xrightarrow{k^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X], B) \xrightarrow{w^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X], C) \to 0$$

se escinde.

Observación 3.20. El inciso 1 del Teorema 3.19 es la definición dada por Nucinkis en [17] de una sucesión exacta corta que se "X-escinde". Con estas sucesiones define una homología de G-conjuntos.

Teorema 3.21. *Sea (G, X) una representación por permutaciones. La sucesión de G-módulos*

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

es $\mathfrak{F}(X)$-exacta si y sólo si la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Res^G_{G_x} Ker(d_{n+1}) \longrightarrow Res^G_{G_x} C_{n+1} \longrightarrow Res^G_{G_x} Ker(d_n) \longrightarrow 0$$

se escinde para cada estabilizador G_x de X y para cada $n \geq 0$.

3.5. Resoluciones proyectivas relativas a la familia de estabilizadores

Definición 3.22. Sea (G, X) una representación por permutaciones, decimos que un G-módulo P es $\mathfrak{F}(X)$-**proyectivo** si para cada sucesión $\mathfrak{F}(X)$-exacta

$$M' \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

y cada G-homomorfismo $\varphi\colon P \to M$ existe un G-homomorfismo $\varphi'\colon P \to M'$ tal que $d \circ \varphi' = \varphi$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M' \arrow[r, "d"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Los siguientes resultados son los análogos a las proposiciones 3.12, 3.13 y 3.14.

Proposición 3.23. *Para cualquier G-módulo M, el G-módulo $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} M$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo.*

Proposición 3.24. *Sean P_1 y P_2 G-módulos, entonces $P_1 \bigoplus P_2$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo si y sólo si P_1 y P_2 son $\mathfrak{F}(X)$-proyectivos.*

Proposición 3.25. *Un G-módulo M es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo si y sólo si es G-isomorfo a un G-módulo sumando de $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} M$.*

Proposición 3.26. *Sean $\{P_i\}_{i \in I}$ G-módulos, entonces $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo si y sólo si P_i es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo para cada $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que P_i es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo para cada $i \in I$, entonces cada P_i es G-isomorfo a un G-módulo sumando directo de $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} P_i$ por la Proposición 3.25 por lo que, $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es G-isomorfo a un G-módulo sumando directo de $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} P_i$ el cual es G-isomorfo a $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} (\bigoplus_{i \in I} P_i)$ y este último es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo por la Proposición 3.23 por lo que, usando nuevamente la Proposición 3.25 tenemos que $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo.
Ahora supongamos que $\bigoplus_{i \in I} P_i$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo, queremos probar que para sucesión $\mathfrak{F}(X)$-exacta

$$M' \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

y cada G-homomorfismo $\varphi\colon P_i \to M$ existe un G-homomorfismo $\varphi'\colon P_i \to M'$ tal que $d \circ \varphi' = \varphi$, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M' \arrow[r, "d"] & M \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

pero gracias a la inclusión $j_i\colon P_i \to \bigoplus_{i\in I} P_i$ y a la proyección $\pi_i\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to P_i$ las cuales cumplen $\pi_i \circ j_i = Id_{P_i}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[d, "j_i"] & \\ & \bigoplus_{i\in I} P_i \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[ddl, dashed, "\varphi''"'] & \\ & P_i \arrow[d, "\varphi"] & \\ M' \arrow[r, "d"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde φ'' existe debido a que $\bigoplus_{i\in I} P_i$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo, definimos $\varphi' = \varphi'' \circ j_i\colon P_i \to M'$ y cumple que $d \circ \varphi' = d \circ \varphi'' \circ j_i = \varphi \circ \pi_i \circ j_i = \varphi$, es decir, P_i es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo para cada $i \in I$. ∎

Observación 3.27. Dada una representación por permutaciones (G, X), un G-módulo proyectivo es claramente (G, G_x)-proyectivo para cada $x \in X$.

Proposición 3.28. *Sean (G, X) una representación por permutaciones y $x \in X$. Entonces cualquier módulo (G, G_x)-proyectivo es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo.*

Demostración. Por la Proposición 3.14, cualquier módulo (G, G_x)-proyectivo es un sumando directo de $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G_x]} M$ y este último a su vez es un sumando directo de $\bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G_x]} M \cong \bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}[G/G_x] \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} M$ por lo que también es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo. ∎

Definición 3.29. Una resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva de un G-módulo M es una sucesión $\mathfrak{F}(X)$-exacta

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

En la cual cada P_i es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo, la cual denotaremos por $\mathbf{P}_*$. Además, llamaremos a la sucesión

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

la resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva reducida la cual denotaremos por $\mathbf{P_M}$.

Proposición 3.30. *Cada G-módulo M tiene una resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva.*

Demostración. Sea M un G-módulo, formamos el G-módulo $\mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} M$ y con la proyección natural $P_M\colon \mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} M \to M$ dada por $P_M(x \otimes m) = m$ la cual es un G-homomorfismo, podemos formar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker(P_M) \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{P_M} M \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

Ahora, como cada $\mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G_x]} M$ es un G-submódulo de $\mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} M$ tomando la inclusión $i_{G_x}\colon M \to \mathbb{Z}[G] \bigotimes_{\mathbb{Z}[G_x]} M$ dada por $i_{G_x}(m) = 1 \otimes m$ es un G_x-homomorfismo ya que si $g_x \in G_x$

$$i_{G_x}(g_x m) = 1 \otimes g_x m = g_x \otimes m = g_x(1 \otimes m) = g_x i_{G_x}(m)$$

por lo que la sucesión 3.4 se escinde como G_x-módulos, es decir, la sucesión es $\mathfrak{F}(X)$-exacta. Repitiendo el mismo procedimiento con $Ker(P_M)$ y uniendo las sucesiones obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow Ker(P_{K_M}) \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} Ker(P_M) \longrightarrow \mathbb{Z}[X] \bigotimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{P_M} M \longrightarrow 0$$

la cual es $\mathfrak{F}(X)$-exacta y continuando indefinidamente obtenemos la resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva buscada. ■

Teorema 3.31. *Sean (G, X) una representación por permutaciones, M y M' G-módulos. Consideremos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

en el cual, la línea superior es una resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva de M y la línea inferior es una sucesión $\mathfrak{F}(X)$-exacta. Entonces existen G-homomorfirsmos $\varphi_n\colon P_n \to P'_n$ para $n \geq 0$ los cuales hacen conmutar el diagrama y son únicos salvo homotopía.

Demostración. La prueba será por inducción. Para $n = 0$, aplicando el Teorema 3.21 a P_0' tenemos que, en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P_0 & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f\circ\varepsilon} & & \\ P_0' & \xrightarrow[\varepsilon']{} & M' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

la línea inferior es $\mathfrak{F}(X)$-exacta y como P_0 es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo, existe un G-homomorfismo $\varphi_0 \colon P_o \to P_0'$ tal que $\varepsilon' \circ \varphi = f \circ \varepsilon$.

Supongamos ahora que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_{n+1}' & \xrightarrow[d_{n+1}']{} & P_n' & \xrightarrow[d_n']{} & P_{n-1}' & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

conmuta, entonces

$$d_n' \circ \varphi_n \circ d_{n+1} = \varphi_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} = 0$$

por lo que $Im(\varphi_n \circ d_{n+1}) \subseteq Ker(d_n')$ y aplicando el Teorema 3.21 a P_{n+1}' tenemos que, en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{n+1} & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n\circ d_{n+1}} & & \\ P_{n+1}' & \xrightarrow[d_{n+1}']{} & Ker(d_n') & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

la línea inferior es $\mathfrak{F}(X)$-exacta, usando el hecho de que P_{n+1} es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo tenemos un G-homomorfismo $\varphi_{n+1} \colon P_{n+1} \to P_{n+1}'$ tal que $d_{n+1}' \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ d_{n+1}$.

Para probar la unicidad salvo homotopía supongamos que existen G-homomorfismos $\varphi' \colon P_n \to P_n'$ para $n \geq 0$ los cuales hacen conmutar el diagrama (3.5), vamos a construir una homotopía $s_n \colon P_n \to P_{n+1}'$ entre los G-homomorfismos φ_n y φ_n' por inducción. Para $n = 0$ definimos $s_{-2} \colon 0 \to M'$ y $s_{-1} \colon M \to P_0'$ dadas por $s_{-2}(0) = 0$ y $s_{-1}(m) = 0$, denotamos además $\varphi_{-1} = \varphi = \varphi_{-1}'$ y $d_{-1} \colon M \to 0$, así cumplen que

$$\varphi_{-1}' - \varphi_{-1} = \varphi - \varphi = 0 = \varepsilon' \circ s_{-1} + s_{-2} \circ d_{-1}.$$

Supongamos ahora existen s_i con $i \leq n$ tales que $\varphi'_i - \varphi_i = d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i$, usando esta formula con $i = n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&d'_{n+1} \circ (\varphi'_{n+1} - \varphi_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) = d'_{n+1} \circ (\varphi'_{n+1} - \varphi_{n+1}) - d'_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} \\
&= d'_{n+1} \circ (\varphi'_{n+1} - \varphi_{n+1}) - (\varphi'_n - \varphi_n - s_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} \\
&= d'_{n+1} \circ (\varphi'_{n+1} - \varphi_{n+1}) - (\varphi'_n - \varphi_n) \circ d_{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

y la última línea es 0 ya que los G-homomorfismos φ_n y φ'_n conmutan con d_n y d'_n. Con ésto, mostramos que $Im(\varphi'_{n+1} - \varphi_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) \subseteq Ker(d'_{n+1})$ y por al Teorema 3.21 tenemos que, en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & P_{n+1} \arrow[d, "\varphi'_{n+1} - \varphi_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}"] & \\
P'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"'] & Ker(d'_{n+1}) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

la línea inferior es $\mathfrak{F}(X)$-exacta, usando el hecho de que P_{n+1} es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo tenemos un G-homomorfismo $s_{n+1} \colon P_{n+1} \to P'_{n+2}$ tal que $\varphi'_{n+1} - \varphi_{n+1} = d'_{n+2} \circ s_{n+1} + s_n \circ d_{n+1}$. ■

Definición 3.32. Sea (G, X) una representación por permutaciones. Dado un G-módulo M, una resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva $\mathbf{P_M}$ de M y un G-módulo A definimos los funtores **Tor** y **Ext** relativos a la familia de estabilizadores como

$$Tor_n^{\mathfrak{F}(X)}(M, A) = H_n(\mathbf{P_M} \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A), \tag{3.6}$$

$$Ext^n_{\mathfrak{F}(X)}(M, A) = H^n(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbf{P_M}, A)). \tag{3.7}$$

Teorema 3.33. *Sean (G, X) una representación por permutaciones, M y A G-módulos. Entonces los funtores $Tor_n^{\mathfrak{F}(X)}(M, A)$ y $Ext^n_{\mathfrak{F}(X)}(M, A)$ no dependen de la resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva de M.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id_M"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde ambas líneas son resoluciones $\mathfrak{F}(X)$-proyectivas de M. Gracias al Teorema 3.31 podemos encontrar G-homomorfismos $\varphi_n \colon P_n \to P'_n$ y $\varphi'_n \colon P'_n \to P_n$ los cuales hacen conmutar el diagrama. Usando éstos G-homomorfismos, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\varphi'_2\circ\varphi_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\varphi'_1\circ\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi'_1\circ\varphi_1"] & M \arrow[r] \arrow[d, "Id_M"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"'] & P_1 \arrow[r, "d_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta y además, como el diagrama anterior conmuta con los G-homomorfismos identidad Id_{P_n}, usando la unicidad descrita en el Teorema 3.31 tenemos una homotopía entre $\{\varphi'_n \circ \varphi_n\}$ y $\{Id_{P_n}\}$, la cual, bajo los funtores $\_\otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ y $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\_, A)$, induce una homotopía en los respectivos complejos y por el Teorema 3.3 los morfismos inducidos en homología coinciden, es decir $(\varphi'_n \circ \varphi_n)^* = Id$ donde $(\varphi'_n \circ \varphi_n)^*$ denota el inducido de $\{\varphi'_n \circ \varphi_n\}$ en homología. Además sabemos que $(\varphi'_n \circ \varphi_n)^* = \varphi'^*_n \circ \varphi^*_n$ y usando un procedimiento análogo tenemos que $(\varphi_n \circ \varphi'_n)^* = Id$, en otras palabras, los grupos de homología de ambas resoluciones coinciden. ∎

3.6. Una resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva particular para $\mathbb{Z}$

Los siguientes lemas facilitan la demostración del Teorema 3.36 en el cual se prueba que el G-complejo dado en la Definición 2.3 es una resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva de $\mathbb{Z}$, es decir, que la definición de (co)homología de representaciones por permutaciones coincide con los funtores Tor y Ext relativos a la familia de estabilizares.

Lema 3.34. *Sea (G, X) una representación por permutaciones. Entonces existe un G-isomorfismo*

$$\mathbb{Z}[X^n] \cong \bigoplus_{x_1 \in \bar{O}(X)} \cdots \bigoplus_{x_n \in \bar{O}(X)} \mathbb{Z}[G/G_{x_1} \times \cdots \times G/G_{x_n}].$$

Demostración. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}[X^n] &= \mathbb{Z}[(\sqcup_{x\in\bar{O}(X)}O_x)\times X^{n-1}] \\
&= \mathbb{Z}[\sqcup_{x\in\bar{O}(X)}(O_x\times X^{n-1})] \\
&= \bigoplus_{x\in\bar{O}(X)} \mathbb{Z}[O_x\times X^{n-1}] \\
&\cong \bigoplus_{x\in\bar{O}(X)} \mathbb{Z}[G/G_x\times X^{n-1}]
\end{aligned}$$

y continuando inductivamente tenemos el resultado deseado. ■

Lema 3.35. *Existe un G-isomorfismo*

$$\mathbb{Z}[G/G_{x_1}\times\cdots\times G/G_{x_n}] \cong \mathbb{Z}[G]\bigotimes_{G_{x_i}}\mathbb{Z}[G/G_{x_1}\times\cdots\times\widehat{G/G_{x_i}}\times\cdots\times G/G_{x_n}]$$

donde $\widehat{G/G_{x_i}}$ denota omisión.

Demostración. Definimos

$$\phi\colon \mathbb{Z}[G]\bigotimes_{G_{x_i}}\mathbb{Z}[G/G_{x_1}\times\cdots\times\widehat{G/G_{x_i}}\times\cdots\times G/G_{x_n}] \to \mathbb{Z}[G/G_{x_1}\times\cdots\times G/G_{x_n}]$$

dada por $\phi(g\otimes(g_1G_{x_1},...,\widehat{G_{x_i}},...,g_nG_{x_n})) = (gg_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,gg_nG_{x_n})$ Ahora vamos a probar que es un G-homomorfismo:

$$\begin{aligned}
g_0\phi(g\otimes(g_1G_{x_1},...,\widehat{G_{x_i}},...,g_nG_{x_n})) &= g_0(gg_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,gg_nG_{x_n}) \\
&= (g_0gg_1G_{x_1},...,g_0gG_{x_i},...,g_0gg_nG_{x_n}) \\
&= \phi((g_0g)\otimes(g_1G_{x_1},...,\widehat{G_{x_i}},...,g_nG_{x_n})) \\
&= \phi(g_0(g\otimes(g_1G_{x_1},...,\widehat{G_{x_i}},...,g_nG_{x_n}))).
\end{aligned}$$

Ahora definimos su inversa

$$\phi^{-1}\colon \mathbb{Z}[G/G_{x_1}\times\cdots\times G/G_{x_n}] \to \mathbb{Z}[G]\bigotimes_{G_{x_i}}\mathbb{Z}[G/G_{x_1}\times\cdots\times\widehat{G/G_{x_i}}\times\cdots\times G/G_{x_n}]$$

dada por $\phi^{-1}(g_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,g_rG_{x_n}) = g\otimes(g^{-1}g_1G_{x_1},...,g^{-1}g_nG_{x_n})$, la cual está bien definida, ya que, si tomamos $gg_0G_{x_i}$ otro representante de

gG_{x_i} tenemos que:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(g_1G_{x_1},...,gg_0G_{x_i},...,g_nG_{x_n}) &= gg_0 \otimes (g_0^{-1}g^{-1}g_1G_{x_1},...,g_0^{-1}g^{-1}g_nG_{x_n}) \\
&= g \otimes g_0(g_0^{-1}g^{-1}g_1G_{x_1},...,g_0^{-1}g^{-1}g_nG_{x_n}) \\
&= g \otimes (g_0g_0^{-1}g^{-1}g_1G_{x_1},...,g_0g_0^{-1}g^{-1}g_nG_{x_n}) \\
&= g \otimes (g^{-1}g_1G_{x_1},...,g^{-1}g_nG_{x_n}) \\
&= \phi^{-1}(g_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,g_nG_{x_n})
\end{aligned}$$

y es un G-homomorfismo

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(g_0(g_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,g_nG_{x_n})) &= \phi^{-1}(g_0g_1G_{x_1},...,g_0gG_{x_i},...,g_0g_nG_{x_n}) \\
&= g_0g \otimes ((g_0g)^{-1}g_0g_1G_{x_1},...,(g_0g)^{-1}g_0g_nG_{x_n}) \\
&= g_0g \otimes (g^{-1}g_1G_{x_1},...,g^{-1}g_nG_{x_n}) \\
&= g_0(g \otimes (g^{-1}g_1G_{x_1},...,g^{-1}g_nG_{x_n})) \\
&= g_0\phi^{-1}(g_1G_{x_1},...,gG_{x_i},\cdot\!\!\cdots\!\!\cdot,g_nG_{x_n}).
\end{aligned}$$

Sólo hace falta comprobar que realmente son inversas

$$\begin{aligned}
\phi(\phi^{-1}(g_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,g_nG_{x_n})) &= \phi(g \otimes (g^{-1}g_1G_{x_1},...,g^{-1}g_nG_{x_n})) \\
&= (gg^{-1}g_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,gg^{-1}g_nG_{x_n}) \\
&= (g_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,g_nG_{x_n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(\phi(g \otimes (g_1G_{x_1},...,\widehat{G_{x_i}},...,g_nG_{x_n}))) &= \phi^{-1}((gg_1G_{x_1},...,gG_{x_i},...,gg_nG_{x_n})) \\
&= g \otimes (g^{-1}gg_1G_{x_1},...,g^{-1}gg_nG_{x_n}) \\
&= g \otimes (g_1G_{x_1},...,\widehat{G_{x_i}},...,g_nG_{x_n}).
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.36. *El G-complejo:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \boldsymbol{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \boldsymbol{C}_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \boldsymbol{C}_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dado en la Definición 2.3 es una resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva de $\mathbb{Z}$ como G-módulo trivial.

Demostración. Gracias a las Proposiciones 2.7 y 2.8 existe una G_x-homotopía contráctil para cada estabilizador G_x, por lo que, usando el Teorema 3.18, la sucesión es $\mathfrak{F}(X)$-exacta. Por el Lema 3.35 y la Proposición 3.12 cada

$$\mathbb{Z}[G/G_{x_1} \times \cdots \times G/G_{x_r}]$$

es (G, G_x)-proyectivo para algún estabilizador G_x (de hecho para n distintos estabilizadores) y con la Observación 3.28 podemos concluir que son $\mathfrak{F}(X)$-proyectivos. Así, usando el Lema 3.34 y la Proposición 3.26 tenemos que cada $\mathbf{C}_n(X)$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectivo. ∎

A continuación se da el resultado principal de esta sección, el cual relaciona la (co)homología de representaciones por permutaciones con los funtores Tor y Ext relativos a la familia de estabilizadores.

Corolario 3.37. *Sea (G, X) una representación por permutaciones, entonces*

$$H_n(G, X; A) = Tor_n^{\mathfrak{F}(X)}(\mathbb{Z}, A)$$
$$H^n(G, X; A) = Ext^n_{\mathfrak{F}(X)}(\mathbb{Z}, A).$$

Observación 3.38. Gracias a la Observación 3.20, el Corolario 3.37 también demuestra que la homología de G-conjuntos dada en [17] coincide con la homología de representaciones por permutaciones.

Capítulo 4

Definición topológica

El objetivo de este capítulo es dar una definición topológica de la (co)homología para representaciones por permutaciones.

En la Sección 4.1 se da la definición de G-espacio la cual es un caso particular de la definición de G-conjunto.

La Sección 4.2 contiene la definición de espacios clasificantes para familias a través de G-CW-complejos, así como una construcción simplicial dada en [2].

En la sección 4.3 se da la (co)homología para un G-CW-complejo y se muestra que, tomando un G-espacio, la (co)homología de representaciones por permutaciones del Capítulo 2 coincide con la (co)homología del espacio clasificante de la familia de estabilizadores del G-espacio.

4.1. G-espacios

Definición 4.1. Un **grupo discreto** es un grupo dotado con la topología discreta.

Definición 4.2. Sean G un grupo discreto y X un espacio topológico. Decimos que X es un G**-espacio** si es un G-conjunto y la acción $G \times X \to X$ es continua.

Un G-espacio es un caso particular de un G-conjunto agregando cierta topología, por lo que los resultados del Capítulo 1 son válidos para G-espacios, en particular, la Proposición 1.6 dice que las órbitas de un G-espacio X forman una partición de X por lo que el espacio $X/\sim$, con la topología cociente, es un espacio topológico.

Definición 4.3. Sea X un G-espacio. El **espacio de órbitas** es el espacio topologico $X/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada en la Proposición 1.6. Denotaremos al espacio de órbitas como X/G.

Para un subconjunto $A \subseteq X$ denotamos $G(A) = \{gx : g \in G, x \in A\}$.

Definición 4.4. Un subconjunto A de un G-espacio X se dice G**-invariante** si $G(A) = A$.

Definición 4.5. Sea A un subespacio topológico de un G-espacio X. Decimos que A es un G**-subespacio** si A es G-invariante.

Definición 4.6. Una **función G-equivariante** es una función continua $f\colon X \to Y$ entre dos G-espacios X y Y la cual conmuta con la acción de G, es decir,

$$f(gx) = gf(x)$$

para todo $g \in G$ y $x \in X$.

Sean X y Y G-espacios, si tenemos una función G-equivariante $f\colon A \to Y$ con A un G-subespacio de X podemos construir el G-espacio $(X \sqcup Y)/\sim$ donde $\sim$ es la relación dada por $a \sim f(a)$.

Definición 4.7. Sean X, Y G-espacios, A un G-subespacio de X y $f\colon A \to Y$ una función G-equivariante, denotamos el G-espacio $(X \sqcup Y)/\sim$ por $X \cup_f Y$ y decimos que es el espacio obtenido al **pegar** X y Y por medio de f.

4.2. G-CW-complejos

Un G-CW-complejo es una generalización de un CW-complejo, la definición de este último puede encontrarse en [11] así como algunos resultados. En esta sección usaremos la definición de G-CW-complejo dada en [15, Pag. 272].

Sean $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ el disco n-dimensional y $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ su frontera.

Definición 4.8. Sean G un grupo discreto y H un subgrupo de G. Una G**-celda** de tipo H y dimensión n, o simplemente n**-celda** es el espacio $G/H \times D^n$.

Claramente, una n-celda es un G-espacio con la acción definida por

$$g \cdot (g_0 H, s) := (g g_0 H, s)$$

con $g, g_0 \in G$ y $s \in D^n$.

Definición 4.9. Sea X un G-espacio, una **filtración G-invariante** de X es una familia de espacios G-invariantes $\{X_i\}$ tales que

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq ... \subseteq X_n \subseteq ... \subseteq \bigcup_{n \geq 0} X_n = X.$$

Definición 4.10. [15, Definición 1.1] Un **G-CW-complejo** X es un G-espacio X junto con una filtración G-invariante

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq ... \subseteq X_n \subseteq ... \subseteq \bigcup_{n \geq 0} X_n = X$$

con las siguientes propiedades:

- Un subconjunto B de X es cerrado en X si y sólo si $B \cap X_n$ es cerrado en X_n para cada $n \geq 0$.
- Para cada $n \geq 0$, $X_n = (\coprod_{i \in I} G/H_i \times D^n) \cup_{\coprod q_i^n} X_{n-1}$, es decir, X_n es obtenido a partir de X_{n-1} pegando G-celdas de dimensión n bajo las funciones $q_i^n \colon G/H_i \times S^{n-1} \to X_{n-1}$ con $i \in I_n$.

Definición 4.11. Sea G un grupo. Un conjunto $\mathfrak{F}$ de subgrupos de G es llamado:

- **Familia**: si es no vacío y cerrado bajo conjugación.
- **Familia semi-completa**: si $H \cap K \in \mathfrak{F}$ para cualesquiera $H, K \in \mathfrak{F}$.
- **Familia completa**: si $\mathfrak{F}$ es cerrado bajo tomar subgrupos.

Las familias más comunes son:

1. La familia trivial $\{1\}$ la cual consiste del subgrupo trivial solamente.
2. La familia de subgrupos finitos de G denotada por $\mathfrak{F}_{fin}(G)$.
3. La familia de subgrupos de G virtualmente cíclicos (subgrupos de G que contienen un subgrupo cíclico de indice finito) denotada $\mathfrak{F}_{vc}(G)$.

4. La familia de todos los subgrupos de G denotada por $\mathfrak{F}_{all}(G)$.

5. Dado un G-conjunto no vacío X, la familia de estabilizadores de X $\mathfrak{F}(X) := \{G_x : x \in X\}$.

6. Sea G un grupo y H un subgrupo de G, la familia $\mathfrak{F}(H)$ formada por H y todos sus conjugados.

De las cuales, las primeras 4 familias son familias completas mientras que las familias 5 y 6 en general, son sólo familias.
Sea G un grupo y X un G-espacio , vamos a denotar por $\overline{\mathfrak{F}}(X)$ la familia formada por los estabilizadores de X y todas sus intersecciones finitas, es decir, hacemos que la familia de estabilizadores sea semi-completa.

Definición 4.12. [15, Definición 1.8] Sea G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia semi-completa de subgrupos de G. Un modelo para el **espacio clasificante de la familia** $\mathfrak{F}$ es un G-CW-complejo $E_{\mathfrak{F}}(G)$ con las siguientes propiedades:

- Todos los estabilizadores de $E_{\mathfrak{F}}(G)$ pertenecen a $\mathfrak{F}$.
- Para cualquier G-CW-complejo Y, cuyos estabilizadores pertenezcan a $\mathfrak{F}$, existe un G-morfismo $Y \to E_{\mathfrak{F}}(G)$ único salvo G-homotopía.

Teorema 4.13. *[15, Teorema 1.9] Sea G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia semi-completa de subgrupos de G.*

- *Existe un modelo para $E_{\mathfrak{F}}(G)$ el cual es único salvo G-equivalencia homotópica.*
- *Un G-CW-complejo X es un modelo para $E_{\mathfrak{F}}(G)$ si y sólo si todos sus estabilizadores pertenecen a $\mathfrak{F}$ y para cada $H \in \mathfrak{F}$ el conjunto X^H es débilmente contraible.*

Teorema 4.14. *[2, Proposición 4.16] Sean G un grupo discreto y $\mathfrak{F}$ una familia semi-completa de subgrupos de G. Un modelo para $E_{\mathfrak{F}}(G)$ es la realización geométrica del conjunto simplicial cuyos n-simplejos son las $n+1$-tuplas $(x_0, ..., x_n)$ con $x_i \in \mathfrak{F}$, los operadores cara esta definidos por*

$$d_i(x_0, ..., x_n) = (x_0, ..., \widehat{x_i}, .., x_n)$$

donde $\widehat{x_i}$ denota omisión. Los operadores degeneración definidos por

$$s_i(x_0, ..., x_n) = (x_0, ..., x_i, x_i, ..., x_n).$$

La acción de G en los n-simplejos esta dada por la acción diagonal.

Sea X un G-espacio. Denotamos el modelo para $E_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}(G)$ del Teorema 4.14 por $E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G$ y su espacio de órbitas por $B^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G$.

4.3. Una resolución desde el punto de vista topológico

Durante esta sección usaremos los resultados de [10, Pag. 23-25] acerca de homología simplicial, así, dados X un G-espacio y $E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G$ el modelo descrito en el Teorema 4.14 tenemos los G-módulos $C_n(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G)$ formados por sumas formales de los n-simplejos de $E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G$ y los G-homomorfismos $d_n\colon C_n(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G) \to C_{n-1}(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G)$ definidos en los generadores por $d^{*}_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i(x)$ donde d_i es el operador cara definido en el Teorema 4.14. Así, formamos la resolución

$$\cdots \xrightarrow{d^{*}_{n+1}} C_n(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G) \xrightarrow{d^{*}_{n}} \cdots \xrightarrow{d^{*}_{1}} C_0(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{4.1}$$

Denotaremos la resolución (4.1) simplemente por $C_\bullet(E_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G)$ y a la resolución $C_\bullet(E_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G)\bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A$ por $C_\bullet(E_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G; A)$.

Teorema 4.15. *Sea X un G-espacio y G un grupo discreto. Entonces la resolución $C_\bullet(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G)$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva.*

Demostración. La prueba de este teorema es semejante a la prueba del Teorema 3.36 salvo que en este caso, los módulos

$$\mathbb{Z}[G/G_{\bar{x_1}} \times \cdots \times G/G_{\bar{x_r}}]$$

pueden ser $(G, G_{(x_0,..,x_n)})$-proyectivos ya que $\overline{\mathfrak{F}}(X)$ es semi-completa. Pero usando la Proposición 3.15 cada módulo $(G, G_{(x_0,..,x_n)})$-proyectivo es (G, G_0)-proyectivo. ■

Teorema 4.16. *Sea X un G-espacio y G un grupo discreto. Entonces*

$$C_n(B^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G) \cong C_n(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}.$$

Demostración. Sea $P\colon E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G \to B^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G$ la proyección, esta induce un homomorfismo $P_*\colon C_n(E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}G) \to C_n(B^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}X)}G)$ el cual cumple que para cualquier n-celda e de $E^{s}_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}$ y para cualquier $g \in G$, $P_*(e) = P_*(ge)$. Observemos

que, si damos una n-celda $[e] \in C_n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G)$, esta es la proyección de la celda $e \in C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G)$ por lo que P_* es un epimorfismo.
Ahora vamos a probar que $Ker(P_*) = T$ con

$$T := \langle (g-1)a : g, 1 \in G, a \in C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G) \rangle.$$

Primero probemos que $T \subseteq Ker(P_*)$, sea $x \in T$ un generador de T, entonces tiene la forma $x = (g-1)a_i$ con $a_i \in C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G)$, debido a que P_* abre sumas y saca escalares podemos suponer que a_i es una n-celda y así $P_*((g_i-1)a_i) = P_*(ga_i) - P_*(a_i) = 0$.
Ahora vamos a probar que $Ker(P_*) \subseteq T$, sea $x \in Ker(P_*)$ entonces $x = \sum_{i=0}^n n_i a_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ y a_i n-celdas. Podemos tomar r órbitas, A_1,...,A_r en $E^s_{\mathfrak{F}(X)}G$ de tal forma que $x = x_1 + \cdots + x_n$ con $x_j = \sum_{i=0}^{k_j} n_{i,j} a_{i,j}$ donde $a_{i,j}$ son n-celdas que pertenecen a la misma órbita A_j, claramente $P_*(X) = 0$ si y sólo si $P_*(x_j) = 0$ para cada $j = 1, ..., r$ por lo que basta probar que cada $x_j \in T$. Con el fin de facilitar la notación tomamos un x_j particular y nos olvidamos del subindice j, es decir tomaremos $x = \sum_{i=1}^k n_i a_i$ con a_i n-celdas en la misma órbita, con esto, podemos encontrar g_i de tal forma que $a_{i+1} = g_i a_i$, definimos $s_i = n_1 + \cdots n_i$ y observemos que

$$\begin{aligned} x &= n_i(a_1 - a_2) + (n_1 + n_2)a_2 + n_3 a_3 + \cdots n_k a_k \\ &= s_i(a_1 - g_1 a_1) + s_2(a_2 - a_3) + (s_2 + n_3)a_3 + n_4 a_4 + \cdots n_k a_k \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} s_i(a_i - g_i a_i) + s_k a_k, \end{aligned}$$

además como $0 = P_*(x) = \sum_{i=1}^k n_i p_*(a_i) = \sum_{i=1}^k n_i p_*(a_1) = s_k p_*(a_1)$ entonces $s_k = 0$ y así $x = \sum_{i=1}^{k-1} s_i(a_i - g_i a_i)$, es decir, $x \in T$.
Hasta ahora se ha probado que

$$C_n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G) \cong C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G)_G$$

pero gracias al Teorema 1.63 usando G como grupo y G como subgrupo tenemos que

$$C_n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G) \cong C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}.$$

■

Corolario 4.17. *Sean X un G-espacio, G un grupo discreto y A un G-módulo. Entonces*

$$C_n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G) \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \cong C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} A.$$

Demostración. El resultado se obtiene al aplicar el producto tensorial con A en el Teorema 4.16. ■

Corolario 4.18. *Sean X un G-espacio, G un grupo discreto y A un G-módulo. Entonces*

$$Hom_{\mathbb{Z}}(C_n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G), A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G), A)$$

Demostración. Gracias a el Teoremas 1.58 tenemos que

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}}(C_n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G), A) &\cong Hom_{\mathbb{Z}}(C_n(C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G) \bigotimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}, A) \\ &\cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G), Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A)) \\ &\cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_n(C_n(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G), A). \end{aligned}$$

■

El siguiente Teorema, relaciona la homología de representaciones por permutaciones con la homología del espacio de órbitas $B^s_{\mathfrak{F}(X)}G$, pero, para lograr la relación es necesario recurrir a los resultados del Capítulo 3.

Teorema 4.19. *Sean X un G-espacio, G un grupo discreto y A un G-módulo. Entonces*

$$H_n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G; A) \cong H_n(G, X; A), \tag{4.2}$$

$$H^n(B^s_{\mathfrak{F}(X)}G; A) \cong H^n(G, X; A). \tag{4.3}$$

Demostración. Por el Teorema 4.15 sabemos que la resolución $C_\bullet(E^s_{\mathfrak{F}(X)}G)$ es $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva y aplicando el Teorema 3.33 sabemos que, tomando cualquier resolución $\mathfrak{F}(X)$-proyectiva, la homología es la misma, por lo que, aplicando homología en el Corolario 4.17 tenemos directamente (4.2). Para (4.3) aplicamos cohomología en el Corolario 4.18. ■

Capítulo 5

(Co)Homología de Bredon

En este capítulo se da una introducción a los módulos de Bredon y se define la (co)homología de Bredon. Todo el material de este capítulo puede encontrarse en [9].

Los módulos de Bredon se definen en la sección 5.1 junto con la categoría de órbitas.

Para el estudio de (co)homología clásica es útil tener resoluciones libres, por lo que, en la sección 5.2 se definen los módulos de Bredon libres.

En la sección 5.3 se define el producto tensorial para familias y el conjunto de morfismos para familias, los cuales son análogos al producto tensorial y el grupo de homomorfismos definidos en el Capítulo 1.

La (co)homología de Bredon se define la sección 5.4 junto con una resolución estándar, la cual es semejante a la resolución dada en el Capítulo 2.

En la sección 5.5 se da una versión topológica de la (co)homología de Bredon y se prueba que, coincide con la (co)homología del capítulo 4 y por tanto con el resto de las (co)homologías.

5.1. La categoría de órbitas y módulos de Bredon

Definición 5.1. Sea G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G. La **categoría de órbitas** es la categoría pequeña cuyos objetos son los G-conjuntos G/H con $H \in \mathfrak{F}$ y los morfismos son G-morfismos. Denotaremos a la categoría de órbitas por $O_{\mathfrak{F}}G$, en el caso cuando $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{all}(G)$ la denotamos simplemente por OG.

Definición 5.2. Sea G un grupo, H un subgrupo de G y A un G-conjunto, definimos el **conjunto de invariantes de A relativo a H como** $A^H := \{a \in A : ha = a \text{ para toda } h \in H\}$.

Observación 5.3. En la definición 5.2 pedimos que A sea sólo un G-conjunto a diferencia de la definición 1.61 en la que A es un G-módulo.

Denotamos por $Hom_G(G/H, G/K)$ el conjunto de todos los G-morfismos de G/H a G/K.

Teorema 5.4. *Sean G un grupo, H y K subgrupos de G. Entonces existe una biyección entre $Hom_G(G/H, G/K)$ y $(G/K)^H$.*

Demostración. Definimos la función $f\colon Hom_G(G/H, G/K) \to (G/K)^H$ por $f(\varphi) = \varphi(H) = gK$ para algún $g \in G$, la cual esta bien definida, es decir, $\varphi(H) \in (G/K)^H$ ya que, $\varphi\colon G/H \to G/K$ por lo que $\varphi(H) \in G/K$ y además $h\varphi(H) = \varphi(hH) = \varphi(H)$ por lo que $\varphi(H) \in (G/K)^H$. Ahora definimos $s\colon (G/K)^H \to Hom_G(G/H, G/K)$ dada por, $s(gK)(g_0H) := g_0gK$, la cual, por definición, es un G-morfismo de G/H a G/K. ■

Observación 5.5. Podemos darle a $Hom_G(G/H, G/H)$ estructura de monoide con el producto dado por la composición y la identidad dada por el G-morfismo identidad de G/H. Además, también podemos darle estructura de monoide a $(G/H)^H$ con la identidad dada por $H \in (G/H)^H$ y el producto $(G/H)^H \times (G/H)^H \to (G/H)^H$ dado por $(g_1H, g_2H) = g_1Hg_2H = g_1g_2H$, donde la segunda igualdad se da ya que $g_2H \in (G/H)^H$.

Corolario 5.6. *Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Entonces existe un isomorfismo de monoides entre $Hom_G(G/H, G/H)$ y $(G/H)^H$.*

Demostración. Usando las funciones f y g de la prueba del Teorema 5.4 probaremos que, en este caso, son morfismos de monoides y que son inversa una de la otra.

- La función $f\colon Hom_G(G/H, G/H) \to (G/H)^H$ es un morfismo de monoides:

$$\begin{aligned} f(\varphi \circ \phi) &= \varphi \circ \phi(H) = \varphi(g_1H) \\ &= g_2g_1H = g_2Hg_1H \\ &= \varphi(H)\phi(H) = f(\varphi)f(\phi) \end{aligned}$$

y además

$$f(Id_{G/H}) = Id_{G/H}(H) = H.$$

- La función $s\colon (G/H)^H \to Hom_G(G/H, G/H)$ es un morfismo de monoides:

$$\begin{aligned} s(g_1Hg_2H)(g_3H) &= s(g_1g_2H)(g_3H) = g_3g_1g_2H \\ &= s(g_2H)(g_3g_1H) = s(g_2H)(s(g_1H)(g_3H)) \end{aligned}$$

 y además

$$s(H)(gH) = gH = Id_{G/H}(gH).$$

- Son inversas una de la otra:

$$\begin{aligned} s(f(\varphi))(gH) &= s(\varphi(H))(gH) = s(g_1H)(gH) \\ &= gg_1H = g_1\varphi(H) \\ &= \varphi(g_1H) \end{aligned}$$

 y además

$$f(s(gH)) = s(gH)(H) = gH.$$

■

En particular, un G-morfismo $\varphi \in Hom_G(G/H, G/K)$ está completamente determinado por $\varphi(H) = gK$ para algún $g \in G$, por lo que, podemos denotarlo por $f_{g,H,K}$, es decir, $f_{g,H,K}\colon G/H \to G/K$ es el único G-morfismo que cumple $f_{g,H,K}(H) = gK$. Además tenemos la siguiente regla de composición, sean $f_{g,H,K}$ y $f_{g_1,K,L}$ dos G-morfismos, entonces $f_{g_1,K,L} \circ f_{g,H,K}(H) = f_{g_1,K,L}(gK) = gf_{g_1,K,L}(K) = gg_1L$, en otras palabras, $f_{g_1,K,L} \circ f_{g,H,K} = f_{gg_1,H,L}$.

Definición 5.7. Sean G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G. Un funtor $M\colon O_{\mathfrak{F}}G \to \mathfrak{Ab}$ de la categoría de órbitas a la categoría de grupos abelianos, es llamado un **módulo de Bredon** (o simplemente un **$O_{\mathfrak{F}}G$-módulo**). Si el funtor M es contravariante (respectivamente covariante) decimos que es un **módulo de Bredon derecho** (respectivamente izquierdo). Los morfismos entre módulos de Bredon son transformaciones naturales.

Algunos ejemplos de módulos de Bredon son los siguientes:

- Sea A un grupo abeliano. Entonces $\underline{A}\colon O_{\mathfrak{F}}G \to \mathfrak{Ab}$ denota el módulo de Bredon constante dado por $\underline{A} := A$ y $\underline{A}(\varphi) := Id_A$, el cual, es tanto un módulo de Bredon izquierdo como derecho. Si queremos enfatizar la dependencia de la familia $\mathfrak{F}$ entonces podemos denotarlo por $\underline{A}_{\mathfrak{F}}$.
- Un caso importante del ejemplo anterior es el módulo de Bredon constante $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}$.
- Sea G un grupo y K un subgrupo de G, podemos definir el módulo de Bredon derecho $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)]\colon O_{\mathfrak{F}}G \to \mathfrak{Ab}$ donde $\mathbb{Z}[Hom_G(G/H, G/K)]$ es el grupo abeliano con base los G-morfismos de G/H a G/K.
- De la misma forma podemos construir el módulo de Bredon izquierdo $\mathbb{Z}[Hom_G(G/K, \_)]\colon O_{\mathfrak{F}}G \to \mathfrak{Ab}$.

La clase de todos los módulos de Bredon derechos junto con sus morfismos, forman una categoría la cual denotaremos con $O_{\mathfrak{F}}G$-Mod. Similarmente, denotaremos la categoría de todos los módulos de Bredon izquierdos como Mod-$O_{\mathfrak{F}}G$. Por construcción estas categorías coinciden con las categorías de diagramas las cuales son definidas en [16], en donde también se prueba que son categorías abelianas.

Definición 5.8. Sea M un módulo de Bredon, decimos que N es un **submódulo** de M si N es un módulo de Bredon, $N(G/H)$ es un subgrupo de $M(G/H)$ para cada $H \in \mathfrak{F}$ y los morfismos $M \to A$ con A módulo de Bredon, coinciden con los morfismos $N \to A$ al restringirlos a N.

5.2. Módulos de Bredon libres

Vamos a definir los objetos libres como adjuntos izquierdos de algún funtor olvidadizo.

Definición 5.9. Sea G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G. Un **$\mathfrak{F}$-conjunto** $\Delta = (\Delta, \varphi)$ consiste de un conjunto Δ y una función $\varphi\colon \Delta \to \mathfrak{F}$.

Definición 5.10. Para cada $H \in \mathfrak{F}$ denotamos por Δ_H a $\varphi^{-1}(\{H\})$ y lo llamamos la **H-componente** del **$\mathfrak{F}$-conjunto**.

Definición 5.11. Una **función de $\mathfrak{F}$-conjuntos** $f\colon (\Delta, \varphi) \to (\Delta', \varphi')$ es una función $f\colon \Delta \to \Delta'$ de conjuntos tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Delta' \arrow[dl, "\varphi'"] \\ \mathfrak{F} & \end{tikzcd}$$

conmuta.

A la categoría de todos los $\mathfrak{F}$-conjuntos y sus funciones la denotaremos como $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{Set}$.

Proposición 5.12. *Consideremos $\mathfrak{F}$ como una categoría discreta. Entonces la categoría de diagramas $Dg(\mathfrak{F}, \mathfrak{Set})$ es isomorfa a la categoría $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{Set}$.*

Demostración. Primero observemos que, como $\mathfrak{F}$ es una categoría discreta, un funtor $\mathfrak{F} \to \mathfrak{Set}$ esta caracterizado por sus valores en los objetos de $\mathfrak{F}$. Ahora, dado un $\mathfrak{F}$-conjunto Δ existe un único funtor $\Delta\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{Set}$ el cual manda H a Δ_H. Esto da una biyección entre los objetos de $Dg(\mathfrak{F}, \mathfrak{Set})$ y los de $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{Set}$.
Si tenemos una función $f\colon \Delta \to \Delta'$ en $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{Set}$, induce una colección de funciones $f_H\colon \Delta_H \to \Delta'_H$ para cada $H \in \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{F}$ es discreta, da origen a una transformación natural entre los funtores $\Delta\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{Set}$ y $\Delta'\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{Set}$, por lo tanto, a un morfismo en $Dg(\mathfrak{F}, \mathfrak{Set})$. ∎

Definición 5.13. Un $\mathfrak{F}$-conjunto Δ' es un **$\mathfrak{F}$-subconjunto** de un $\mathfrak{F}$-conjunto Δ si $\Delta_H \subset \Delta'_H$ para todo $H \in \mathfrak{F}$.

Definición 5.14. Sea M un módulo de Bredon, denotamos su **$\mathfrak{F}$-conjunto adyacente** por M y esta dado por sus H-componentes $M_H := M(G/H)$.

De esta forma podemos definir un funtor olvidadizo

$$U\colon O_{\mathfrak{F}}G\text{-}Mod \to \mathfrak{F}\text{-}\mathfrak{Set}$$

el cual manda módulos de Bredon a sus $\mathfrak{F}$-conjuntos adyacentes. Diremos que un $\mathfrak{F}$-conjunto X es $\mathfrak{F}$-subconjunto de un módulo de Bredon M, si es un $\mathfrak{F}$-subconjunto de UM.

Definición 5.15. Sea M un módulo de Bredon y X un $\mathfrak{F}$-subconjunto de M. El más pequeño de los submódulos de M que contiene a X esta denotado por $\langle X \rangle$ y es llamado **el submódulo de M generado por X**. Si $M = \langle X \rangle$ decimos que M es **generado** por X.

Lema 5.16. *Sea $K \in \mathfrak{F}$ fijo y consideremos el módulo de Bredon derecho $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)]$. Entonces el $\mathfrak{F}$-subconjunto Δ de $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)]$ dado por*

$$\Delta_H = \begin{cases} \{Id\} \text{ si } H = K, \\ \emptyset \text{ en otro caso} \end{cases}$$

genera a $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)]$.

Demostración. Denotaremos por M el submódulo de $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)]$ generado por Δ, sabemos, por definición, que $M(G/H)$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}[Hom_G(G/H, G/K)]$ para cada $H \in \mathfrak{F}$. Sea $\varphi \in Hom_G(G/H, G/K)$, como Δ genera a M se cumple que $Id \in M(G/K)$ y como $M(\varphi)\colon M(G/K) \to M(G/H)$ tenemos que $M(\varphi)(Id) = Id \circ \varphi = \varphi$, es decir, $\varphi \in M(G/H)$ y así $\mathbb{Z}[Hom_G(G/H, G/K)]$ es un subgrupo de $M(G/H)$ para cada $H \in \mathfrak{F}$. ■

Lema 5.17. *Sea $K \in \mathfrak{F}$ fijo y sea M un módulo de Bredon derecho. Entonces $M(G/K)$ es un módulo sobre $\mathbb{Z}[Hom_G(G/K, G/K)]$.*

Demostración. Como $M(G/K)$ es un grupo abeliano, basta con que definamos un producto escalar de $[Hom_G(G/K, G/K)]$ en $M(G/K)$, para esto observemos que, dada $\varphi \in [Hom_G(G/K, G/K)]$, como M es un funtor contravariante induce $M(\varphi)\colon M(G/K) \to M(G/K)$, así podemos definir el producto escalar $[Hom_G(G/K, G/K)] \times M(G/K) \to M(G/K)$ por $(\varphi, m) \mapsto M(\varphi)(m)$. ■

Observación 5.18. Claramente $\mathbb{Z}[Hom_G(G/K, G/K)]$ es un módulo sobre sí mismo con el producto escalar dado por la composición.

Lema 5.19. *Sean $K \in \mathfrak{F}$ fijo y M un módulo de Bredon derecho. Entonces existe un isomorfismo entre $Hom(\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)], M)$ y $M(G/K)$.*

Demostración. Sea $f \in Hom(\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)], M)$, como f es una transformación natural existe $f_K\colon \mathbb{Z}[Hom_G(G/K, G/K)] \to M(G/K)$, por lo que podemos definir $e_K\colon Hom(\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)], M) \to M(G/K)$ por $e_K(f) =$

$f_K(Id_{G/K})$.
Sea $m \in M(G/K)$ definimos $\phi\colon \mathbb{Z}[Hom_G(G/K, G/K)] \to M(G/K)$ como un $\mathbb{Z}[Hom_G(G/K, G/K)]$-homomorfismo de módulos tal que $\phi(Id) = m$, es decir, para cualquier otro $\varphi \in \mathbb{Z}[Hom_G(G/K, G/K)]$ tenemos que $\phi(\varphi) = \phi(\varphi \circ Id) = \varphi\phi(Id) = \varphi m$. Lo siguiente es extender a ϕ a una $f\colon \mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)] \to M$, para esto, sea $\lambda \in \mathbb{Z}[Hom_G(G/H, G/K)]$ entonces $\mathbb{Z}[Hom_G(\lambda, G/K)](Id) = Id \circ \lambda = \lambda$ por lo que podemos definir, para cada $H \in \mathfrak{F}$, $f_H\colon \mathbb{Z}[Hom_G(G/H, G/K)] \to M(G/H)$ dado por $f_H(\lambda) = M(\lambda)(\phi(Id))$. Así, definimos $e_K^{-1}\colon M(G/K) \to Hom(\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)], M)$ dado por $e_K^{-1}(m) = f$ construida como antes. ■

Teorema 5.20. *El funtor olvidadizo $U\colon O_{\mathfrak{F}}G\text{-}Mod \to \mathfrak{F}\text{-}\mathfrak{Set}$ tiene un adjunto izquierdo $F\colon \mathfrak{F}\text{-}\mathfrak{Set} \to O_{\mathfrak{F}}G\text{-}Mod$ dado por $F\Delta = \coprod_{x\in\Delta} \mathbb{Z}[Hom_G(\_, \varphi(x))]$.*

Demostración. Vamos a definir el funtor F para $\mathfrak{F}$-conjuntos que sólo contienen un punto, es decir, sea Δ el $\mathfrak{F}$-conjunto dado por $\Delta_K = \{*\}$ y $\Delta_H = \emptyset$ para $H \neq K$. Definimos $F\Delta := \mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)]$ e identificamos Δ con el $\mathfrak{F}$-conjunto que genera a $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)]$ dado en el Lema 5.16. Queremos probar que, para cualquier módulo de Bredon derecho M se cumple que

$$Hom(\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/K)], M)] \cong Hom(\Delta, UM)$$

Pero, ya que Δ consiste de un sólo punto, se tiene que $Hom(\Delta, UM) \cong M(G/K)$ y por el Lema 5.19 tenemos el resultado.
Para definir el funtor F en un $\mathfrak{F}$-conjunto arbitrario Δ usaremos el hecho de que $\Delta = \coprod_{x\in\Delta} \Delta_x$ donde cada Δ_x consiste de un sólo punto, así, definimos $F\Delta = \coprod_{x\in\Delta} F\Delta_x$ y tenemos que

$$\begin{aligned} Hom(F\Delta, M)] &\cong \prod_{x\in\Delta} Hom(F\Delta_x, M)] \\ &\cong \prod_{x\in\Delta} Hom(\Delta_x, UM) \\ &\cong Hom(\Delta, UM). \end{aligned}$$

Por lo que F es el adjunto izquierdo de U. ■

Observación 5.21. La inclusión canónica de $\Delta = (\Delta, \varphi)$ en $F\Delta$ está dada por

$$x \mapsto Id \in (F\Delta_x)(G/\varphi(x)).$$

Definición 5.22. Sea M un módulo de Bredon derecho y sea B un $\mathfrak{F}$-subconjunto de M. Decimos que **M es libre con base B** si $FB \cong M$.

Teorema 5.23. *Sea G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G. Entonces tenemos un funtor covariante $\mathbb{Z}[Hom_G(\_,\_)]$ de la categoría de representaciones por permutaciones a la categoría Mod-$O_{\mathfrak{F}}G$. Los módulos de Bredon libres, son aquellos en los que $\mathfrak{F}(X) \subset \mathfrak{F}$.*

Demostración. Sea (G, X) una representación por permutaciones, definimos el módulo de Bredon $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, X)] := \coprod_{G_x \in \mathfrak{F}(X)} \mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/G_x)]$ y gracias al Teorema 5.20 y a la Observación 5.21 cada $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, G/G_x)]$ es libre si y sólo si $G_x \in \mathfrak{F}$. ■

5.3. Producto tensorial de familias

Sean M un módulo de Bredon derecho y N un módulo de Bredon izquierdo, sea P el grupo abeliano definido por

$$P := \coprod_{H \in \mathfrak{F}} M(G/H) \bigotimes_{\mathbb{Z}} N(G/H)$$

y sea Q el subgrupo de P generado por los elementos de la forma

$$M(\varphi)(m) \otimes n - m \otimes N(\varphi)(n)$$

donde $m \in M(G/H)$, $n \in N(G/K)$, $H, K \in \mathfrak{F}$ y $\varphi \in Hom_G(G/K, G/H)$.

Definición 5.24. El **producto tensorial sobre $\mathfrak{F}$** de M y N denotado por $M \bigotimes_{\mathfrak{F}} N$ está dado por

$$M \bigotimes_{\mathfrak{F}} N = P/Q$$

Claramente $\_ \bigotimes_{\mathfrak{F}} \_ \colon Mod\text{-}O_{\mathfrak{F}}G \times O_{\mathfrak{F}}G\text{-}Mod \to \mathfrak{Ab}$ es un bifuntor covariante. Además, el funtor $\_ \bigotimes_{\mathfrak{F}} N \colon Mod\text{-}O_{\mathfrak{F}}G \to \mathfrak{Ab}$ tiene un adjunto derecho el cual denotaremos por $Hom_{\mathfrak{F}}(M, \_)$, este funtor le asigna a cada $O_{\mathfrak{F}}G$ módulo izquierdo N el grupo abeliano $Hom_{\mathfrak{F}}(M, N)$ formado por todas las transformaciones naturales de M a N.

Teorema 5.25. *Sean G un grupo, $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$ familias de subgrupos de G, A un $O_{\mathfrak{F}}G$-módulo derecho, B tanto un $O_{\mathfrak{F}}G$-módulo izquierdo como un $O_{\mathfrak{F}'}G$-módulo derecho y C un $O_{\mathfrak{F}'}G$-módulo derecho. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$Hom_{\mathfrak{F}'}(A \bigotimes_{\mathfrak{F}} B, C) \cong Hom_{\mathfrak{F}}(A, Hom_{\mathfrak{F}'}(B, C)).$$

Demostración. Definimos $\phi\colon Hom_{\mathfrak{F}'}(A \otimes_{\mathfrak{F}} B, C) \to Hom_{\mathfrak{F}}(A, Hom_{\mathfrak{F}'}(B, C))$ el cual manda $\varphi \in Hom_{\mathfrak{F}'}(A \otimes_{\mathfrak{F}} B, C)$ al morfismo $\phi(\varphi)\colon A \to Hom_{\mathfrak{F}'}(B, C)$ dado por $\phi(\varphi)(a)\colon B \to C$ el cual esta definido por $\phi(\varphi)(a)(b) = \varphi(a \otimes b)$, así, es fácil probar que ϕ es un homomorfismo de grupos abelianos. Observemos que

$$\begin{aligned} Ker(\phi) &= \{\varphi \in Hom_{\mathfrak{F}'}(A \bigotimes_{\mathfrak{F}} B, C) : \phi(\varphi)(a)(b) = \varphi(a \otimes b) = 0\} \\ &= \{\varphi \in Hom_{\mathfrak{F}'}(A \bigotimes_{\mathfrak{F}} B, C) : \varphi = 0\} \end{aligned}$$

por lo que ϕ es un monomorfismo. Además, sea $\varphi' \in Hom_{\mathfrak{F}}(A, Hom_{\mathfrak{F}'}(B, C))$ definimos $\varphi \in Hom_{\mathfrak{F}'}(A \otimes_{\mathfrak{F}} B, C)$ dada por $\varphi(a \otimes b) = \varphi'(a)(b)$ el cual cumple $\phi(\varphi) = \varphi'$, es decir, ϕ es un epimorfismo. ■

Proposición 5.26. *Sean G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G. Entonces $Hom_{\mathfrak{F}}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}, \underline{A}_{\mathfrak{F}}) \cong \underline{A}_{\mathfrak{F}}$.*

Demostración. Observemos que, cada transformación natural $f\colon \underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}} \to \underline{A}_{\mathfrak{F}}$ está definida por $f_H\colon \underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}(G/H) \to \underline{A}_{\mathfrak{F}}(G/H)$ para cada $H \in \mathfrak{F}$ y en este caso $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}(G/H) = \mathbb{Z}$ y $\underline{A}_{\mathfrak{F}}(G/H) = A$ por lo que existe una biyección

$$Hom_{\mathfrak{F}}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}, A)(G/H) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) \cong A.$$

■

5.4. La resolución estándar

En esta sección construiremos una resolución para $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}$ semejante a la que fue dada en la Sección 2.1.

Sean G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G, denotamos por $\mathbf{C}_n^{\mathfrak{F}}(G)$ al módulo de Bredon derecho $\mathbb{Z}[Hom_G(\_, \Delta_n)]\colon O_{\mathfrak{F}}G \to \mathfrak{Ab}$ donde

$\Delta_n = \{(g_0H_0, ..., g_nH_n) : g_i \in G, H_i \in \mathfrak{F}\}$. Sean además los homomorfismos $d_i : \Delta_n \to \Delta_{n-1}$ donde

$$d_i(g_0H_0, ..., g_iH_i, ..., g_nH_n) = (g_0H_0, ..., \widehat{g_iH_i}, ..., g_nH_n)$$

donde $\widehat{gH}$ denota omisión, estos homomorfismos inducen un morfismo en módulos de Bredon $d_i^* \colon \mathbf{C}_n^{\mathfrak{F}}(G) \to \mathbf{C}_{n-1}^{\mathfrak{F}}(G)$ y así podemos definir los morfismos $\partial_n \colon \mathbf{C}_n^{\mathfrak{F}}(G) \to \mathbf{C}_{n-1}^{\mathfrak{F}}(G)$ por $\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^*$.

Proposición 5.27. *Sean G un grupo, $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G. Entonces $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

Además podemos definir el morfismo aumentación $\epsilon \colon X \to \{*\}$ como $\epsilon(gH) = *$ el cual induce el morfismo de módulos de Bredon

$$\epsilon^* \colon \mathbf{C}_0^{\mathfrak{F}}(H) \to \mathbb{Z}[Hom_G(\_, \{*\})] = \underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}.$$

Definición 5.28. La sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{C}_n^{\mathfrak{F}}(G) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{C}_1^{\mathfrak{F}}(G) \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}_0^{\mathfrak{F}}(G) \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}} \longrightarrow 0\ ,$$

es la **resolución estándar** del módulo de Bredon $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}$ y la denotaremos por $\mathbf{C}_\bullet^{\mathfrak{F}}(G)$.

Definición 5.29. Una resolución de módulos de Bredon es **acíclica** si existe una homotopía entre el morfismo 0 y el morfismo Id.

Teorema 5.30. *La resolución estándar de $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}$ es acíclica.*

Demostración. Basta con probar que, la sucesión evaluada en cualquier objeto G/H es acíclica, es decir, que la sucesión

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\partial_{r+1}} \mathbb{Z}[Hom_G(G/H, \Delta_n)] \xrightarrow{\partial_r} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[Hom_G(G/H, \Delta_1)] \\ \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[Hom_G(G/H, \Delta_0)] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \end{aligned}$$

tiene una homotopía entre el morfismo 0 y el morfismo Id. Para esto definimos los morfismos $s_n \colon \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ y $s_{-1} \colon \{*\} \to \Delta_0$ dados por

$$s_n(g_0H_0, ..., g_nH_n) := (H, g_0H_0, ..., g_nH_n)$$

y

$$s_{-1}(*) = (H)$$

los cuales es fácil probar que inducen la homotopía buscada. ∎

Proposición 5.31. *Sea $\mathfrak{F}$ es una familia semi-completa. Entonces la resolución estándar de $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}$ es libre.*

Demostración. Dado $(g_0H_0, ..., g_nH_n) \in \Delta_n$, su estabilizador esta dado por

$$G_{(g_0H_0,...,g_nH_n)} = g_0H_0g_0^{-1} \cap ... \cap g_nH_ng_n^{-1}$$

y si $\mathfrak{F}$ es semi-completa, entonces $G_{(g_0H_0,...,g_nH_n)} \in \mathfrak{F}$, es decir, $\mathfrak{F}(\Delta_n) \subset \mathfrak{F}$, y así, por el Teorema 5.23 cada $\mathbb{Z}[Hom_G(G/H, \Delta_n)]$ es libre. ■

Definición 5.32. Sean G un grupo, $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G y A un $O_{\mathfrak{F}}G$-módulo izquierdo. La **(co)homología de Bredon** de G respecto a $\mathfrak{F}$ con coeficientes en A se define como

$$H_n^{\mathfrak{F}}(G; A) = H_n(\mathbf{C}_\bullet^{\mathfrak{F}}(G) \bigotimes_{\mathfrak{F}} A),$$
$$H_{\mathfrak{F}}^n(G; A) = H^n(Hom_{\mathfrak{F}}(\mathbf{C}_\bullet^{\mathfrak{F}}(G), A)).$$

5.5. Resolución topológica de Bredon

Para esta sección, usaremos los resultados del Capítulo 4, en particular, dados un grupo G y $\mathfrak{F}$ una familia de subgrupos de G, tomaremos el G-CW-complejo $E_{\mathfrak{F}}^sG$. Sea Δ' el conjunto de las n-celdas de $E_{\mathfrak{F}}^sG$, definimos los $O_{\mathfrak{F}}G$-módulos derechos $\underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG) = \mathbb{Z}[Hom_G(\_, \Delta'_n)]$ y los morfismos $\underline{\partial}_n \colon \underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG) \to \underline{C}_{n-1}(E_{\mathfrak{F}}^sG)$ por $\underline{\partial}_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^*$ con d_i^* el inducido por el operador cara definido en el Teorema 4.14. Denotamos al complejo formado por los $O_{\mathfrak{F}}G$-módulos $\underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG)$ y por los morfismos $\underline{\partial}_n$ por $\underline{C}_\bullet(E_{\mathfrak{F}}^sG)$.

Proposición 5.33. *El complejo $\underline{C}_\bullet(E_{\mathfrak{F}}^sG)$ coincide con $\mathbf{C}_\bullet^{\mathfrak{F}}(G)$.*

Demostración. Gracias al Teorema 4.14 $\Delta_n = \Delta'_n$ con $\Delta_n = \{(g_1H_1, ..., g_nH_n : g_i \in G, H_i \in \mathfrak{F}\}$ por lo que $\underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG) = \mathbf{C}_n^{\mathfrak{F}}(G)$ y nuevamente por el Teorema 4.14, $\underline{\partial}_n = \partial_n$. ■

Observación 5.34. Gracias al Teorema 5.4 tenemos que $\underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG)(G/H) \cong \mathbb{Z}[\Delta_n^H] = C_n((E_{\mathfrak{F}}^sG)^H)$ donde $(E_{\mathfrak{F}}^sG)^H$ es el CW-complejo obtenido con el conjunto de invariantes relativo a H.

Teorema 5.35. *Sean G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia semi-completa de subgrupos de G. Entonces tenemos un isomorfismo $\underline{C}_\bullet(E_{\mathfrak{F}}^sG) \otimes_{\mathfrak{F}} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}} \cong C_\bullet(B_{\mathfrak{F}}^sG)$ de complejos de cadenas.*

Demostración. Sea $P\colon E^s_{\mathfrak{F}}G \to B^s_{\mathfrak{F}}G$ la proyección, restringiendola obtenemos las funciones $P_H\colon (E^s_{\mathfrak{F}}G)^H \to B^s_{\mathfrak{F}}G$ para cada $H \in F$, estas inducen homomorfismos $P^*_H\colon C_n((E^s_{\mathfrak{F}}G)^H) \to C_n(B^s_{\mathfrak{F}}G)$ para cada $H \in \mathfrak{F}$. Así tenemos el homomorfismo

$$P^*\colon \coprod_{H\in\mathfrak{F}} C_n((E^s_{\mathfrak{F}}G)^H) \to C_n(B^s_{\mathfrak{F}}G)$$

el cual cumple que para cualquier n-celda $e \in (E^s_{\mathfrak{F}}G)^H$ y para cualquier $g \in G$, $P^*(e) = P^*(ge)$. Observemos que, si damos una n-celda $[e] \in C_n(B^s_{\mathfrak{F}})$, su estabilizador $G_{[e]}$ pertenece a $\mathfrak{F}$ por lo que es una proyección de la celda $e \in (E^s_{\mathfrak{F}}G)^{G_{[e]}}$, es decir, P^* es un epimorfismo.
Ahora, por definición tenemos que

$$\underline{C}_\bullet(E^s_{\mathfrak{F}}G) \bigotimes_{\mathfrak{F}} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}} = (\coprod_{H\in\mathfrak{F}} C_n((E^s_{\mathfrak{F}}G)^H) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})/T = (\coprod_{H\in\mathfrak{F}} C_n((E^s_{\mathfrak{F}}G)^H))/T$$

con

$$T := \langle \varphi^*(a) - a : a \in C_n((E^s_{\mathfrak{F}}G)^H), \varphi \in Hom_G(G/K, G/H)\rangle$$

por lo que vamos a probar que $Ker(P^*) = T$.
Primero probemos que $T \subseteq Ker(P^*)$, sea $x \in T$ un generador de T, entonces tiene la forma $x = \varphi^*(a) - a$ con $a \in C_n(B^s_{\mathfrak{F}}G)$, debido a que P^* abre sumas y saca escalares podemos suponer que a es una n-celda y así $P^*(\varphi^*(a) - a) = P^*(ga - a) = P^*(ga) - P^*(a) = 0$.
Ahora vamos a probar que $Ker(P^*) \subseteq T$, sea $x \in Ker(P^*)$ entonces $x = \sum_{i=0}^n n_i a_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ y a_i n-celdas. Podemos tomar r órbitas, A_1,...,A_r en $E^s_{\mathfrak{F}}$ de tal forma que $x = x_1 + \cdots + x_n$ con $x_j = \sum_{i=0}^{k_j} n_{i,j} a_{i,j}$ donde $a_{i,j}$ son n-celdas que pertenecen a la misma órbita A_j y $a_{i,j} \in X^{H_{i,j}}$ para algún $H_{i,j} \in \mathfrak{F}$, claramente $P_*(x) = 0$ si y sólo si $P_*(x_j) = 0$ para cada $j = 1, ..., r$ por lo que basta probar que cada $x_j \in T$. Con el fin de facilitar la notación tomamos un x_j particular y nos olvidamos del subíndice j, es decir tomaremos $x = \sum_{i=1}^k n_i a_i$ con a_i n-celdas en la misma órbita, con esto, podemos encontrar g_i de tal forma que $a_{i+1} = g_i a_i$. Definimos $K_i = H_i \cap g_i H_i g_i^{-1}$, como $\mathfrak{F}$ es semi-completa tenemos que $K_i \in \mathfrak{F}$ y además $g_i^{-1} K_i g_i$ es un subgrupo de H_i por lo que existe $\varphi_i\colon G/K_i \to G/H_i$ tal que $\varphi(K_i) = g_i H_i$, así, $\varphi_i^*(a_i) = g_i a_i$.

Definimos ahora $s_i = n_1 + \cdots n_i$ y observemos que

$$\begin{aligned}
x &= n_i(a_1 - a_2) + (n_1 + n_2)a_2 + n_3a_3 + \cdots n_ka_k \\
&= s_i(a_1 - g_1a_1) + s_2(a_2 - a_3) + (s_2 + n_3)a_3 + n_4a_4 + \cdots n_ka_k \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} s_i(a_i - g_ia_i) + s_ka_k \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} s_i(a_i - \varphi_i^*(a_i)) + s_ka_k,
\end{aligned}$$

además como $0 = P^*(x) = \sum_{i=1}^{k} n_iP^*(a_i) = \sum_{i=1}^{k} n_iP^*(a_1) = s_kP^*(a_1)$ entonces $s_k = 0$ y así $x = \sum_{i=1}^{k-1} s_i(a_i - \varphi_i^*(a_i))$, es decir, $x \in T$. ■

Corolario 5.36. *Sean G un grupo, $\mathfrak{F}$ una familia semi-completa de subgrupos de G y A un G-módulo. Entonces tenemos un isomorfismo*

$$\underline{C}_\bullet(E_{\mathfrak{F}}^sG) \bigotimes_{\mathfrak{F}} \underline{A}_{\mathfrak{F}} \cong C_\bullet(B_{\mathfrak{F}}^sG) \bigotimes_{\mathbb{Z}} A$$

de complejos de cadenas.

Demostración. La prueba es semejante a la prueba del Teorema 5.35 sustituyendo P^* por

$$P^*\colon \coprod_{H\in\mathfrak{F}} C_n((E_{\mathfrak{F}}^sG)^H) \bigotimes_{\mathbb{Z}} A \to C_n(B_{\mathfrak{F}}^sG) \bigotimes_{\mathbb{Z}} A.$$

■

Los siguientes dos Teoremas son la conexión entre la homología de representaciones por permutaciones y la homología de Bredon.

Teorema 5.37. *Sean G un grupo y $\mathfrak{F}$ una familia semi-completa de subgrupos de G. Entonces*

$$\begin{aligned}
H_n^{\mathfrak{F}}(G; A) &\cong H_n(B_{\mathfrak{F}}^sG; A), \\
H_{\mathfrak{F}}^n(G; A) &\cong H^n(B_{\mathfrak{F}}^sG; A).
\end{aligned}$$

Demostración. El primer isomorfismo es directo del Corolario 5.36, para el segundo isomorfismo observemos que

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathbb{Z}}(C_n(B_{\mathfrak{F}}^sG), A) &\cong Hom_{\mathfrak{F}}(\underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG) \bigotimes_{\mathfrak{F}} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}, \underline{A}_{\mathfrak{F}}) \\
&\cong Hom_{\mathfrak{F}}(\underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG), Hom_{\mathfrak{F}}(\underline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{F}}, \underline{A}_{\mathfrak{F}})) \\
&\cong Hom_{\mathfrak{F}}(\underline{C}_n(E_{\mathfrak{F}}^sG), \underline{A}_{\mathfrak{F}})
\end{aligned}$$

gracias a el Teorema 5.25 y a la Proposición 5.26. ■

Teorema 5.38. *Sean X un G-espacio, G un grupo discreto y A un G-módulo. Entonces*

$$H_n^{\overline{\mathfrak{F}}(X)}(G;A) \cong H_n(G,X;A), \tag{5.1}$$

$$H^n_{\overline{\mathfrak{F}}(X)}(G;A) \cong H^n(G,X;A). \tag{5.2}$$

Demostración. Aplicando los Teoremas 5.37 y 4.19 tenemos el resultado. ∎

Capítulo 6

Ejemplos

En este capítulo se dan algunos cálculos sencillos de la homología para algunas representaciones por permutaciones. Se busca también resaltar las ventajas y desventajas que tienen algunas de las teorías vistas anteriormente al momento de realizar los cálculos.

6.1. Acciones sobre el círculo

Consideremos el círculo $S^1 = \{e^{2\pi it} : t \in \mathbb{R}\}$ y $C_n = \{e^{2\pi im/n} : 0 \leq m \leq n-1\}$ el grupo cíclico con n elementos. Los siguientes dos ejemplos tienen como objetivo usar directamente la definición dada por Bredon para calcular la homología de representaciones por permutaciones.

Ejemplo 6.1. *Consideremos la acción de $C_2 = \{-1, 1\}$ en S^1 dada por*

$$1 \cdot e^{2\pi it} = e^{2\pi it}$$

y

$$-1 \cdot e^{2\pi it} = -e^{2\pi it},$$

es decir, la acción antipodal. Observemos que $(C_2)_x = \{0\}$ para todo $x \in S^1$ por lo que $\mathfrak{F}(S^1) = \{\{0\}\}$. Siguiendo la construcción dada en la Sección 5.4 tenemos que

$$\boldsymbol{C}_n^{\mathfrak{F}(S^1)}(C_2) = \mathbb{Z}[Hom_{\mathbb{Z}_2}(\_, \Delta_n)]$$

donde

$$\Delta_n = \{(g_0, ..., g_n) : g_i \in C_2\}.$$

Al aplicar la definición de producto tensorial de familias tenemos

$$\boldsymbol{C}_{\bullet}^{\mathfrak{F}(S^1)}(C_2) \bigotimes_{\mathfrak{F}(S^1)} \underline{\mathbb{Z}_{\mathfrak{F}}} = P/Q$$

con

$$P = \mathbb{Z}[Hom_{C_2}(C_2, \Delta_n)] \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[\Delta_n] \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

y Q el subgrupo de P generado por los elementos de la forma

$$(n \cdot x) \otimes y - x \otimes y$$

donde $x \in \mathbb{Z}[\Delta_n]$, $y \in \mathbb{Z}$, y $n \in C_2$. Es decir, $P/Q = \mathbb{Z}[\Delta_n] \bigotimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}$. Así, concluimos que

$$H_n(C_2, S^1; \mathbb{Z}) = H_n^{\mathfrak{F}(S^1)}(C_2; \mathbb{Z}) = H_n(\mathbb{Z}[\Delta_\bullet] \bigotimes_{C_2} \mathbb{Z}) = H_n(C_2; \mathbb{Z}).$$

En otras palabras, la homología de representaciones por permutaciones coincide con la homología de grupos clásica para C_2.

De la misma manera obtenemos que

$$Hom_{\mathfrak{F}}(\boldsymbol{C}_{\bullet}^{\mathfrak{F}(S^1)}(C_2), \underline{\mathbb{Z}_{\mathfrak{F}}}) = Hom_{\mathfrak{F}}(\mathbb{Z}[Hom_{C_2}(\_\_, \Delta_n)], \underline{\mathbb{Z}_{\mathfrak{F}}}) = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[\Delta_\bullet], \mathbb{Z})$$

por lo que

$$H^n(C_2, S^1; \mathbb{Z}) = H^n_{\mathfrak{F}(S^1)}(C_2; \mathbb{Z}) = H^n(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[\Delta_*], \mathbb{Z})) = H^n(C_2; \mathbb{Z}).$$

Es decir, la cohomología de representaciones por permutaciones coincide con la cohomología de grupos clásica para C_2.

Ejemplo 6.2. *Consideremos la acción de C_n en S^1 dada por*

$$e^{2\pi i m/n} \cdot e^{2\pi i t} = e^{2\pi i (t + m/n)}$$

donde $0 \leq m \leq n-1$, es decir, la acción que rota el círculo. Al igual que en el ejemplo 6.1 obtenemos que $\mathfrak{F}(S^1) = \{\{0\}\}$ y siguiendo nuevamente la construcción dada en la Sección 5.4 tenemos

$$\boldsymbol{C}_{\bullet}^{\mathfrak{F}(S^1)}(C_n) \bigotimes_{\mathfrak{F}(S^1)} \mathbb{Z} = P/Q$$

donde

$$P = \mathbb{Z}[Hom_{C_n}(C_n, \Delta_r)] \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[\Delta_r] \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

y Q es el subgrupo de P generado por los elementos de la forma

$$(m \cdot x) \otimes y - x \otimes y$$

con $x \in \mathbb{Z}[\Delta_r]$, $y \in \mathbb{Z}$, y $m \in C_n$. Es decir, $P/Q = \mathbb{Z}[\Delta_r] \bigotimes_{C_n} \mathbb{Z}$. Con lo que podemos concluir que

$$H_r(C_n, S^1; \mathbb{Z}) = H_r^{\mathfrak{F}(S^1)}(C_n; \mathbb{Z}) = H_r(C_n, \mathbb{Z}).$$

Con un procedimiento semejante podemos concluir que

$$H^r(C_n, S^1; \mathbb{Z}) = H^r_{\mathfrak{F}(S^1)}(C_n; \mathbb{Z}) = H^r(C_n, \mathbb{Z}).$$

Los ejemplos anteriores tenían la propiedad de que $G_x = 0$ para cada x, lo que simplificaba los cálculos, por otro lado, el siguiente ejemplo tiene estabilizadores no triviales por lo que tratar de usar la definición de Bredon puede ser muy complicado.

Ejemplo 6.3. *Consideremos la acción de $\mathbb{Z}$ en S^1 dada por*

$$m \cdot e^{2\pi i t} = e^{2\pi i(t+m/2)}.$$

En este caso $(\mathbb{Z})_x = 2\mathbb{Z}$ para cada $x \in S^1$. Consideremos ahora la función de representaciones por permutaciones

$$\theta = (\varphi, Id_{S^1})\colon (\mathbb{Z}, S^1) \to (\mathbb{Z}_2, S^1),$$

donde φ es la proyección al cociente usual con $Ker(\varphi) = 2\mathbb{Z}$. De los Corolarios 2.20, 2.36 y de el echo de que C_2 es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ se sigue que

$$H_n(\mathbb{Z}, S^1, \mathbb{Z}) = H_n(C_2, S^1, \mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}}),$$
$$H^n(\mathbb{Z}, S^1, \mathbb{Z}) = H^n(C_2, S^1, \mathbb{Z}^{2\mathbb{Z}}).$$

Además, como la acción de C_2 en $\mathbb{Z}$ es trivial, tenemos que $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{2\mathbb{Z}}$ y por lo tanto

$$H_n(\mathbb{Z}, S^1, \mathbb{Z}) = H_n(C_2, S^1, \mathbb{Z}) = H_n(C_2, \mathbb{Z}),$$
$$H^n(\mathbb{Z}, S^1, \mathbb{Z}) = H^n(C_2, S^1, \mathbb{Z}) = H^n(C_2, \mathbb{Z}).$$

6.2. Acciones sobre la esfera

Consideremos la esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Los siguientes dos ejemplos son una aplicación trivial de los Teoremas 2.13 2.29.

Ejemplo 6.4. *Consideremos la acción de C_n sobre S^2 dada por la rotación sobre la linea que une los puntos $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$ con un angulo de $2\pi/n$. Observemos que $(C_n)_{(0,0,1)} = (C_n)_{(0,0,-1)} = C_n$ es decir, la acción tiene dos puntos fijos, por el Teorema 2.13 tenemos que*

$$H_r(C_n, S^2; \mathbb{Z}) = 0$$

para $r \geq 1$ y por el Teorema 2.26 tenemos que

$$H_0(C_n, S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

ya que la acción de C_n es trivial en $\mathbb{Z}$. Además, por el Teorema 2.29 tenemos que

$$H^r(C_n, S^2; \mathbb{Z}) = 0$$

para $r \geq 1$.

Ejemplo 6.5. *Consideremos la acción de $\mathbb{Z}$ sobre S^2 dada por la rotación sobre la linea que une los puntos $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$. Al igual que en el ejemplo anterior $(\mathbb{Z})_{(0,0,1)} = (\mathbb{Z})_{(0,0,-1)} = \mathbb{Z}$ por lo que podemos concluir que*

$$H_n(\mathbb{Z}, S^2; \mathbb{Z}) = 0$$

para $n \geq 1$ y por el Teorema 2.26 tenemos que

$$H_0(\mathbb{Z}, S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

ya que la acción de $\mathbb{Z}_n$ es trivial en $\mathbb{Z}$. Además, nuevamente por el Teorema 2.29 tenemos que

$$H^r(\mathbb{Z}, S^2; \mathbb{Z}) = 0$$

para $r \geq 1$.

6.3. Acciones de grupos amalgamados sobre árboles

El siguiente es un ejemplo de homología de Bredon en el cual la familia es no trivial. Dados tres grupos G_1, G_2 y A y dos homomorfismos $f_1\colon A \to G_1$ y $f_2\colon A \to G_2$ denotaremos por $G_1 *_A G_2$ al producto amalgamado de G_1 y G_2 a travez de A. En el Capítulo 1 de [19] puede encontrarse la definición concreta del producto amalgamado.

Definición 6.6. Un **árbol** es una gráfica conexa en la cual cualesquiera dos vértices están unidos por un sólo camino.

Además usaremos los siguientes resultados.

Teorema 6.7. *[19, Capítulo 4, Teorema 7] Sea $G = G_1 *_A G_2$. Entonces existe un árbol T con las siguientes propiedades:*

- *G actúa en T.*
- *T/G es un intervalo con punto inicial P y punto final Q.*
- *T/G es homeomorfo a una subgráfica de T.*
- *Los estabilizadores del intervalo (pensado como subgráfica de T) son $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$ y $G_y = A$ para cualquier y en el intervalo diferente de P y Q.*

En particular, el Teorema 6.7 dice que la acción de G en el árbol T esta totalmente determinada por el homeomorfismo de T/G con una subgráfica de T.

Teorema 6.8. *[19, Capítulo 4,Corolario del Teorema 8] Sea $G = G_1 *_A G_2$. Entonces cada subgrupo finito de G esta contenido en un conjugado de G_1 o G_2.*

Teorema 6.9. *Sea $G = G_1 *_A G_2$ con G_1, G_2 finitos y $A = \{1\}$. Entonces T es un modelo para el espacio clasificante de la familia $\mathfrak{F}_{fin}(G)$.*

Demostración. Usaremos el Teorema 4.13. Como T es un árbol con una acción de G, T es un G-CW-complejo. Por el Teorema 6.7 tenemos que $G_x = \{1\}$ si x no es un vértice de T y si x es un vértice de T tenemos que

G_x es G_1, G_2 o alguno de sus conjugados, es decir $G_x \in \mathfrak{F}_{fin}(G)$. Sólo falta probar que X^H con $H \in \mathfrak{F}$ es débilmente contraíble. Si $H = \{1\}$ tenemos que $T^H = T$ el cual, por ser un árbol, es débilmente contraíble. Si H es distinto de la identidad, como es un subgrupo finito de G, por el Teorema 6.8 H esta contenido en un conjugado de G_1 o G_2 los cuales sólo dejan fijos los vértices de T, es decir $T^H \subset V$ donde V denota los vértices de T, así T^H es débilmente contraíble. ■

Teorema 6.10. *Sea Sea $G = G_1 *_A G_2$ con G_1, G_2 finitos y $A = \{1\}$. Entonces*

$$H_n^{\mathfrak{F}_{Fin}}(G;\mathbb{Z}) = 0,$$
$$H^n_{\mathfrak{F}_{Fin}}(G;\mathbb{Z}) = 0.$$

si $n \geq 1$ y

$$H_0^{\mathfrak{F}_{Fin}}(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$
$$H^0_{\mathfrak{F}_{Fin}}(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Demostración. Por el Teorema 5.37 tenemos que

$$H_n^{\mathfrak{F}_{Fin}}(G;\mathbb{Z}) \cong H_n(B_{\mathfrak{F}_{fin}}G;\mathbb{Z}),$$
$$H^n_{\mathfrak{F}_{Fin}}(G;\mathbb{Z}) \cong H^n(B_{\mathfrak{F}_{Fin}}G;\mathbb{Z}),$$

además, por los Teoremas 6.9 y 6.7 tenemos que $B_{\mathfrak{F}_{fin}}G = T/G$, el cual es un intervalo. ■

Observación 6.11. Un producto amalgamado de grupos $G = G_1 *_A G_2$ puede tener una infinidad de subgrupos finitos incluso siG_1 y G_2 son finitos. Por ejemplo, si tomamos a $C_2 = \langle a : a^2 = 1 \rangle$ tenemos $G = C_2 *_{\{1\}} C_2$. Los subgrupos generados por las palabras aba, bab, ababa, babab, abababa, etc. son grupos de orden 2.

Bibliografía

[1] Iain T. Adamson. Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 2:66–76, 1954.

[2] José Antonio Arciniega-Nevárez and José Luis Cisneros-Molina. Comparison of relative group (co)homologies. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, pages 1–34, 2016.

[3] Maurice Auslander and David A. Buchsbaum. *Groups, rings, modules.* Harper & Row, Publishers, New York-London, 1974. Harper's Series in Modern Mathematics.

[4] James V. Blowers. The classifying space of a permutation representation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 227:345–355, 1977.

[5] Glen E. Bredon. *Equivariant cohomology theories.* Lecture Notes in Mathematics, No. 34. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[6] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[7] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. With an appendix by David A. Buchsbaum, Reprint of the 1956 original.

[8] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract algebra.* John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, third edition, 2004.

[9] Martin Georg Fluch. *On Bredon (Co-)Homological Dimensions of Groups.* PhD Thesis, arXiv:1009.4633r2, 2011.

[10] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[11] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[12] G. Hochschild. Relative homological algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:246–269, 1956.

[13] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2011.

[14] Emilio Lluis-Puebla. *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[15] Wolfgang Lück. Survey on classifying spaces for families of subgroups. In *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 269–322. Birkhäuser, Basel, 2005.

[16] Saunders Mac Lane. *Homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition.

[17] Brita E. A. Nucinkis. Cohomology relative to a G-set and finiteness conditions. *Topology Appl.*, 92(2):153–171, 1999.

[18] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

[19] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. Translated from the French by John Stillwell.

[20] Ernst Snapper. Cohomology of permutation representations. I. Spectral sequences. *J. Math. Mech.*, 13:133–161, 1964.