



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA QUÍMICA – INGENIERÍA DE PROCESOS

SEDIMENTACIÓN DE UNA ESFERA QUE ROTA EN UN FLUIDO VISCOELÁSTICO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
I. Q. ALFONSO CASTILLO JUÁREZ

TUTOR:  
DR. JOSÉ ROBERTO ZENIT CAMACHO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., NOVIEMBRE 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Tecante Coronel Alberto  
Secretario: Dr. Vargas Aguilar René Osvaldo  
Vocal: Dr. Marín Santibáñez Benjamín Marcos  
1 er. Suplente: Dr. Chávez Castellanos Ángel Enrique  
2 d o. Suplente: Dr. Zenit Camacho José Roberto

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. José Roberto Zenit Camacho

-----  
**FIRMA**







# Índice General

<b>Índice de tablas</b>	<b>V</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Simbología</b>	<b>X</b>
<b>Resumen</b>	<b>XII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema .....	1
1.2 Objetivos.....	1
1.2.1 Objetivo general.....	1
1.2.2 Objetivos específicos.....	1
1.3 Hipótesis.....	2
1.4 Objetivo adicional.....	2
1.5 Hipótesis adicional.....	2
<b>2. Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1 Sedimentación de esferas.....	3
2.1.1 Coeficiente de arrastre.....	5
2.1.2 Factor de corrección por arrastre.....	9
2.2 Esfera que rota sin sedimentar.....	11
2.3 Sedimentación de esferas que rotan.....	12

2.4 Fluidos viscoelásticos .....	14
2.4.1 Tiempo de relajación .....	14
2.4.2 Primera diferencia de esfuerzos normales .....	15
2.4.3 Número de Weissenberg .....	16
2.4.4 Número de Reynolds .....	16
2.5 Fluidos de Boger .....	16
2.5.1 Modelo Oldroyd-B .....	17
<b>3. Desarrollo experimental</b>	<b>19</b>
3.1 Equipo experimental .....	19
3.1.1 Esferas magnéticas .....	19
3.1.2 Contenedor .....	20
3.1.3 Mecanismo de liberación de esferas .....	21
3.1.4 Bobina rotatoria .....	21
3.1.5 Cámara de video .....	22
3.2 Preparación de fluidos .....	22
3.2.1 Caracterización reológica .....	23
3.2.2 Prueba de flujo cortante simple en estado estacionario .....	23
3.2.3 Prueba oscilatoria de pequeña amplitud .....	23
3.3 Metodología experimental .....	24
<b>4. Resultados</b>	<b>27</b>

4.1 Caracterización reológica .....	27
4.1.1 Fluido newtoniano.....	27
4.1.2 Fluido de Boger.....	28
4.2 Sedimentación de esferas que rotan.....	30
4.2.1 Fluido newtoniano.....	30
4.2.2 Fluido de Boger.....	31
4.3 Levitación viscoelástica.....	31
4.3.1 Fluido newtoniano.....	32
4.3.2 Fluido de Boger.....	33
<b>5. Análisis de y discusión de resultados</b> .....	<b>34</b>
5.1 Caracterización de fluidos.....	34
5.1.1 Fluido newtoniano.....	34
5.1.2 Fluido de Boger.....	35
5.1.3 Comparación de fluidos.....	38
5.2 Sedimentación de esferas que rotan .....	39
5.2.1 Fluido newtoniano.....	39
5.2.1.1 Efecto de la densidad de la esfera.....	42
5.2.1.2 Efecto del diámetro de la esfera.....	43
5.2.1.3 Análisis dimensional.....	43
5.2.2 Fluido de Boger.....	44

5.2.2.1 Efecto de la densidad de la esfera .....	45
5.2.2.2 Efecto del diámetro de la esfera .....	45
5.2.2.3 Análisis dimensional .....	47
5.2.2.4 Comparación entre el fluido newtoniano y el fluido de Boger .....	53
5.3 Levitación viscoelástica .....	55
5.3.1 Efecto de la densidad de la esfera .....	56
5.3.2 Efecto del diámetro de la esfera .....	56
5.3.3 Análisis dimensional .....	57
<b>Conclusiones</b>	<b>63</b>
Caracterización de fluidos .....	63
Velocidad de sedimentación .....	63
Levitación viscoelástica .....	64
Trabajo futuro .....	65
<b>Apéndice A</b>	<b>66</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>68</b>
<b>Referencias</b>	<b>70</b>

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1. Propiedades de las esferas utilizadas.....	20
Tabla 4.1. Valore típicos de $\dot{\gamma}$ .....	28
Tabla 5.1. Propiedades físicas correspondientes al modelo Oldroyd-B.....	36
Tabla 5.2. Resumen de las propiedades de los fluidos utilizados.....	38
Tabla 5.3. Comparación* de la disminución de la velocidad de sedimentación (Dis.)** con la desviación estándar (Desv.)***.....	41
Tabla 5.4. Valores típicos de $W_i$ en todo el rango de frecuencias de rotación para las cuatro esferas utilizadas.....	47
Tabla 5.5. Porcentaje de disminución del coeficiente de arrastre con respecto al caso en donde no existe rotación (0 Hz).....	49
Tabla 5.6. Valores típicos de $W_{iR}$ .....	58

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Tipos de flujo alrededor de una esfera.....	4
Figura 2.2. Coeficiente de arrastre adimensional para el caso de dos fluidos de Boger.....	6
Figura 2.3. Comportamiento general del factor de corrección por arrastre normalizado en función del número de Weissenberg.....	10
Figura 2.4. Esquema de la esfera en el experimento de sedimentación y su interacción con el campo magnético.....	12
Figura 2.5. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera.....	13
Figura 3.1. Arreglo experimental utilizado.....	19
Figura 3.2. Esquema de las esferas de plástico utilizadas con imanes en el centro.....	20
Figura 3.3. Contenedor de acrílico utilizado.....	20
Figura 3.4. Mecanismo de liberación de esferas: vista superior y vista frontal.....	21
Figura 3.5. a) Par de bobinas, b) bobina y motor y c) sistema de alimentación.....	21
Figura 3.6. Cámara Canon® utilizada.....	22
Figura 3.7. Contenedor con el fluido y el mecanismo de liberación de esferas montados en el centro de la bobina.....	25
Figura 3.8. Izquierda: seguimiento de la esfera, derecha: marco de referencia y escala de medida.....	26
Figura 3.9. Izquierda: datos de posición en función del tiempo obtenidos, derecha: ajuste lineal de los datos.....	26
Figura 4.1. Viscosidad del fluido newtoniano (pentágonos) igual a 0.84 Pa s.....	27

Figura 4.2. Viscosidad (pentágonos) y primera diferencia de esfuerzos normales (hexágonos) del fluido de Boger en función de la rapidez de corte.....	28
Figura 4.3. Barrido de amplitudes del fluido de Boger.....	29
Figura 4.4. Módulos de almacenamiento $G'$ (X) y de pérdida $G''$ (+) en función de la frecuencia angular.....	29
Figura 4.5. Secuencia de imágenes que muestra la posición de la esfera a diferentes tiempos.....	30
Figura 4.6. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas.....	30
Figura 4.7. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas.....	31
Figura 4.8. Comparación de la distancia de levitación de la esfera a diferentes frecuencias de rotación: 0.83 Hz (izquierda) y 5 Hz (derecha).....	32
Figura 4.9. Distancia respecto al fondo del contenedor en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas.....	32
Figura 4.10. Distancia respecto al fondo del contenedor en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas.....	33
Figura 5.1. Comparación de la viscosidad del fluido newtoniano (pentágonos vacíos) y el fluido de Boger (pentágonos rellenos).....	34
Figura 5.2. Comparación entre el ajuste del modelo ley de potencia (línea roja) con la viscosidad del fluido de Boger (pentágonos).....	35
Figura 5.3. Ajuste de la primera diferencia de esfuerzos normales en función de la rapidez de corte para el fluido de Boger (hexágonos) utilizando el modelo de Oldroyd-B (línea roja).....	36
Figura 5.4. Barrido de amplitudes.....	37
Figura 5.5. Punto de cruce entre los módulos de almacenamiento $G'(x)$ y de pérdida $G'' (+)$ .....	37

Figura 5.6. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 7.99 mm (cuadrados).....	39
Figura 5.7. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 8.72 mm (círculos).....	40
Figura 5.8. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 8.81 mm (triángulos).....	40
Figura 5.9. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 9.57 mm (rombos).....	41
Figura 5.10. Comparación de dos esferas con, aproximadamente, el mismo diámetro (8.72 y 8.81 mm) pero con diferente densidad.....	42
Figura 5.11. Comparación de tres esferas con, aproximadamente, la misma densidad (2190.37, 2189.1 y 2189.94 kg/m <sup>3</sup> ) pero con diferente diámetro.....	43
Figura 5.12. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds de las cuatro esferas utilizadas.....	44
Figura 5.13. Comparación de dos esferas con, aproximadamente, el mismo diámetro (8.72 y 8.81 mm) pero con diferente densidad.....	45
Figura 5.14. Comparación de tres esferas con, aproximadamente, la misma densidad (2190.37, 2189.1 y 2189.94 kg/m <sup>3</sup> ) pero con diferente diámetro.....	46
Figura 5.15. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds de las cuatro esferas utilizadas.....	48
Figura 5.16. Coeficiente de arrastre normalizado en función del número de Weissenberg de las cuatro esferas utilizadas.....	49
Figura 5.17. Coeficiente de arrastre normalizado en función del cociente de rapidez de corte de las cuatro esferas utilizadas.....	50

Figura 5.18. Factor de corrección por arrastre en función del número de Weissenberg de las cuatro esferas utilizadas.....	51
Figura 5.19. Factor de corrección por arrastre en función del cociente de rapidez de corte de las cuatro esferas utilizadas.....	52
Figura 5.20. Comparación de dos esferas con diferente densidad.....	53
Figura 5.21. Comparación de tres esferas con diferente diámetro.....	54
Figura 5.22. Comparación del coeficiente de arrastre.....	55
Figura 5.23. Comparación de dos esferas con diferente densidad.....	56
Figura 5.24. Comparación de tres esferas con diferente diámetro.....	57
Figura 5.25. Esquema del fenómeno de levitación viscoelástica.....	58
Figura 5.26. Altura de levitación con respecto al número de Weissenberg para las cuatro esferas utilizadas.....	59
Figura 5.27. Altura de levitación adimensional con respecto al número de Weissenberg de rotación para las cuatro esferas utilizadas.....	60
Figura 5.28. Número de Reynolds de rotación en función del número de Weissenberg de rotación para las cuatro esferas utilizadas.....	61
Figura 5.29. Altura de levitación adimensional con respecto al producto entre el número de Reynolds de rotación y el número de Weissenberg de rotación para las cuatro esferas utilizadas.....	62

# SIMBOLOGÍA

$a$	Radio de la esfera
$C_d$	Coefficiente de arrastre
De	Número de Deborah
$g$	Aceleración de la gravedad
$G, G'$	Módulo elástico
$G''$	Módulo viscoso
Hz	Hertz, unidad de frecuencia de rotación
$N_1$	Primera diferencia de esfuerzos normales
$N_2$	Segunda diferencia de esfuerzos normales
Re	Número de Reynolds
$Re_R$	Número de Reynolds de rotación
U	Velocidad de sedimentación de la esfera (m/s)
u	Velocidad de sedimentación de la esfera (mm/s)
$X_e$	Coefficiente de arrastre normalizado
Wi	Número de Weissenberg
$Wi_R$	Número de Weissenberg de rotación
Y	Factor de corrección por arrastre
$\beta$	Relación de entre el tiempo de relajación y el tiempo de retardación

$\dot{\gamma}$	Rapidez de corte
$\dot{\gamma}_R$	Rapidez de corte por rotación
$\dot{\gamma}_S$	Rapidez de corte por sedimentación
$\eta_0$	Viscosidad a rapidez de corte cero
$\eta_p$	Contribución del polímero a la viscosidad total
$\eta_s$	Contribución del disolvente a la viscosidad total
$\lambda_1$	Tiempo de relajación
$\lambda_2$	Tiempo de retardación
$\mu$	Viscosidad del fluido newtoniano
$\rho_f$	Densidad del fluido
$\rho_e$	Densidad de la esfera
$\omega$	Frecuencia de oscilación y de rotación

## RESUMEN

La sedimentación de esferas en fluidos viscosos es un problema clásico en mecánica de fluidos. A pesar de su aparente sencillez, el problema está lleno de complejidades sutiles. Particularmente, para el caso de fluidos viscoelásticos aún es incierto si la fuerza de arrastre debería disminuir o incrementar, con respecto al caso newtoniano, para valores grandes del número de Weissenberg ( $Wi$ ). Este problema es estudiado con un giro, literalmente. Con la finalidad de incrementar la rapidez de deformación alrededor de la esfera, se impuso rotación en ésta utilizando un campo magnético externo. De esta manera se incrementó considerablemente el intervalo de  $Wi$  por encima de la unidad. Para esto, se utilizó un fluido newtoniano de referencia, un fluido tipo Boger y esferas de plástico de diferentes tamaños y masas. La velocidad de sedimentación fue determinada mediante análisis digital de imágenes. Al comparar los resultados del caso newtoniano con el caso viscoelástico, se encontró que la fuerza de arrastre es mayor en éste último. Análogamente, los resultados obtenidos del coeficiente de arrastre normalizado, para el caso donde no existe rotación, son similares a los obtenidos por [Jones et al., 1994]. Adicionalmente, se introduce un fenómeno novedoso que tuvo lugar en los experimentos realizados, la “levitación viscoelástica”. Se observó que la esfera se mantiene a cierta distancia con respecto al fondo del contenedor como resultado de la rotación. Se realizó el análisis dimensional del fenómeno para conocer el efecto de diferentes variables.

## ABSTRACT

The sedimentation of a single sphere in a viscous fluid is a classical problem in fluid mechanics. Despite its apparent simplicity, the problem is full of delicate intricacies. In particular, for the case of viscoelastic fluids, the subject is still not fully resolved: it is unclear whether the drag should increase or decrease (with respect to the Newtonian case) for large values of the Weissenberg number. We study this problem with a twist, literally. To extend the range of shear rates attained for a given fluid-sphere combination we make it rotate, with an external magnetic field, as it sediments. We therefore can significantly extend the range of Weissenberg numbers to well above 1. We use a Newtonian reference fluid, a Boger-type fluid and spheres of different sizes and weights. The drag coefficient and drag correction factor are calculated for all cases. Our non-rotating results are in good agreement with those by [Jones et al., 1994]. We observe that for rotating-sedimenting spheres the drag is always larger than in the Newtonian case. Furthermore, we show a novel phenomenon that we named ‘viscoelastic levitation’. We observed that when a dense sphere is rotated near a wall (the rotation being aligned with the wall-normal direction and gravity), it levitates at a fixed distance. Dimensional analysis of this phenomenon is presented.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Planteamiento del problema

El entendimiento de los mecanismos físicos de los diversos fenómenos que se presentan en el flujo de fluidos viscoelásticos es de vital importancia para la predicción y diseño de procesos en la industria del petróleo, de alimentos, farmacéutica, etc., donde las partículas sedimentan muy lentamente haciendo de las separaciones por gravedad un proceso largo e ineficiente. Esta lista de ejemplos no es exclusiva, ya que existen una gran cantidad de procesos donde se presenta el fenómeno de sedimentación de sólidos; sin embargo, es suficiente para resaltar la importancia práctica del tema presentado en este trabajo.

El problema de sedimentación de esferas en diversos fluidos viscoelásticos ha sido estudiado durante más de dos décadas [Bot et al., 1998]. Sin embargo, existen fenómenos que no se han estudiado con detalle y que continúan siendo problemas por resolver. Por ejemplo, la influencia de la elasticidad y del adelgazamiento sobre el coeficiente de arrastre no ha sido elucidado completamente [Owens y Phillips, 2002].

### 1.2 Objetivos

#### 1.2.1 Objetivo general

Realizar experimentos de esferas que sedimentan, bajo la acción de la gravedad, y rotan sobre su eje, por acción de un campo magnético externo, en un fluido newtoniano y en un fluido viscoelástico modelo (fluido de Boger) con propiedades equivalentes (viscosidad y densidad), para determinar el efecto de la viscoelasticidad sobre la velocidad terminal.

#### 1.2.1 Objetivos específicos

- Diseñar las esferas magnéticas y el mecanismo de liberación de esferas para llevar a cabo los experimentos.

- Preparar el fluido de Boger (con viscosidad constante) y el fluido newtoniano de referencia con viscosidad similar a la del fluido viscoelástico para determinar el efecto de la viscoelasticidad sobre la velocidad terminal.
- Caracterizar reológicamente los fluidos preparados para conocer sus propiedades.
- Establecer las condiciones adecuadas de grabación para el análisis de video.
- Determinar la velocidad de sedimentación experimental y calcular la fuerza de arrastre para llevar a cabo comparaciones con cálculos teóricos y datos reportados en la bibliografía.

### **1.3 Hipótesis**

La rotación impuesta por el campo magnético incrementa la velocidad de sedimentación de la esfera inmersa en el fluido viscoelástico.

### **1.4 Objetivo adicional**

Debido a que se encontró que la esfera no sedimenta completamente, es importante determinar el efecto de la frecuencia de rotación de la esfera sobre la distancia a la que ésta levita con respecto al fondo del contenedor.

#### **1.4.1 Hipótesis adicional**

La esfera con mayor diámetro levita a una mayor distancia al generar una mayor rapidez de corte.

## Capítulo 2

### Antecedentes

#### 2.1 Sedimentación de esferas

Los estudios realizados sobre sedimentación de esferas han sido motivados por dos intereses diferentes: Primero, porque es necesario un conocimiento adecuado de aspectos globales de mecánica de fluidos tales como la fuerza de arrastre que actúa sobre el movimiento de la partícula en medios viscoelásticos; ya que en distintos procesos de ingeniería (separaciones líquido sólido, fluidización y transporte de sólidos) se presentan este tipo de problemas [Caswell et al., 2004]. Segundo, la velocidad terminal de una partícula depende de un número importante de variables incluyendo: el tamaño, la forma, la densidad de las partículas, su orientación, las propiedades del fluido (densidad, viscosidad, elasticidad, etc.), el tamaño y la forma del recipiente de sedimentación.

La sedimentación de esferas no es un problema sencillo debido a la complejidad del flujo alrededor de una esfera (Figura 2.1) que se compone de un flujo extensional biaxial en la parte frontal, seguido de un flujo cortante en la parte ecuatorial y de un flujo extensional uniaxial en la parte posterior de la esfera. El flujo en la parte anterior de la esfera es biaxial debido a que a medida que la esfera desciende, forma dos trayectorias extensionales de flujo, mientras que en la parte posterior sólo se forma una y que corresponde a la cauda en la misma dirección del movimiento de la esfera. La importancia relativa de cada componente de flujo depende del comportamiento reológico del fluido empleado, la velocidad de sedimentación de la esfera y de la relación de radios esfera-tubo [McKinley, 2001].

Dado que la sedimentación de esferas sólidas es un problema de referencia, ha sido estudiada ampliamente en fluidos newtonianos [Clift et al., 2005] y no newtonianos [Chhabra, 2006]. Un aspecto práctico importante del estudio de la sedimentación es que puede ser utilizado para determinar propiedades de fluidos. Para el caso de un fluido newtoniano en régimen de flujo reptante, la velocidad de sedimentación de una esfera,  $U$ , es obtenida analíticamente [Batchelor, 2000] como:

$$U = \frac{W^*}{3 \pi D \mu}$$

donde  $D$  es el diámetro de la esfera,  $\mu$  es la viscosidad y  $W^* = \frac{\pi}{6}(\rho_e - \rho_f)gD^3$  es el peso efectivo de la esfera ( $\rho_e$  es la densidad de la esfera y  $\rho_f$  es la densidad del fluido). Si el tamaño y el peso de la esfera son conocidos y la velocidad de sedimentación es medida, el valor de la viscosidad puede ser calculado. Este método ha sido ampliamente utilizado para determinar la viscosidad de fluidos newtonianos (viscosímetro de esfera descendente) [Clift et al., 2005].

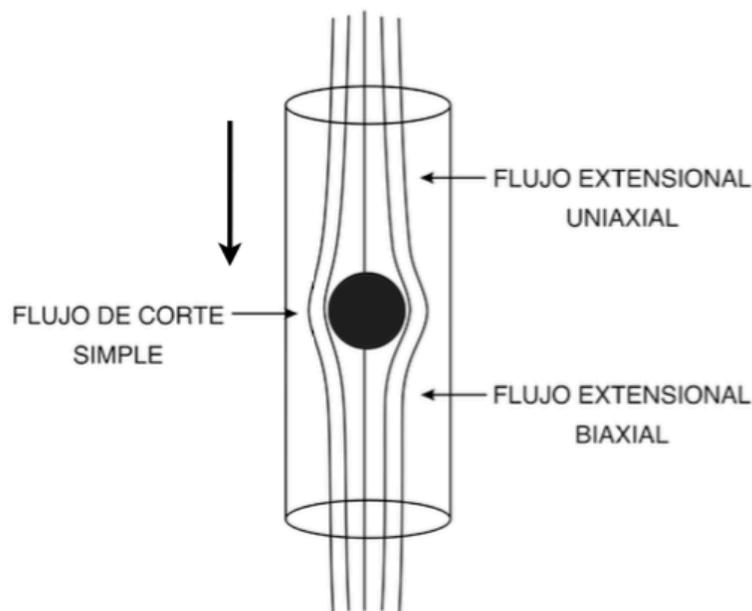


Figura 2.1. Tipos de flujo alrededor de una esfera [McKinley, 2001].

En un experimento de sedimentación, la velocidad terminal de la esfera en estado estacionario es desconocida *a priori* y debe ser medida experimentalmente usando análisis fotográfico [Jones et al. 1994], imágenes de video digital [Becker et al. 1994], técnicas de ultrasonido [Watanabe et al. 1998] o imágenes de resonancia magnética. Una manera conveniente de representar el problema de forma adimensional es [Chhabra, 2006]:

$$\frac{\lambda U}{a} = f\left(\frac{a}{R}, \frac{\lambda \eta_0}{\rho a^2}, \frac{\rho_e}{\rho_f}, \frac{\eta_s}{\eta_0}, \frac{\eta(\dot{\gamma})}{\eta_0}\right)$$

donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación,  $U$  es la velocidad de sedimentación,  $a$  es el radio de la esfera,

R es el radio del contenedor,  $\frac{\lambda \eta_0}{\rho a^2} \equiv \frac{De}{Re} = El$  es el número de elasticidad,  $\frac{\eta_s}{\eta_0}$  es la relación de viscosidades y  $\frac{\rho_e}{\rho_f}$  es la relación de densidades. Debido a que la densidad únicamente provoca sedimentación bajo la fuerza gravitacional, la última relación de densidades puede ser expresada como el peso adimensional  $\frac{F_w \lambda}{a^2 \eta_0} = \frac{a(\rho_e - \rho_f) g \lambda}{\eta_0}$ . La relación adimensional final indica que los resultados serán dependientes de las propiedades reológicas del fluido ( $\eta_0$  y  $\lambda$ ).

La rapidez de deformación característica para el flujo alrededor de una esfera es  $\dot{\gamma} = \frac{U}{a}$ . El producto  $\frac{U\lambda}{a}$  es conocido como el número de Deborah (De) ya que caracteriza la relación adimensional del tiempo de relajación del fluido y el tiempo de residencia de una partícula cerca de la esfera. El número de Weissenberg ( $Wi = \lambda \dot{\gamma}$ ) [Bird et al., 1987] es usado de manera indiferente, sin embargo, esto sólo es apropiado cuando las fronteras están lejos de la esfera ( $a/R \rightarrow 0$ ), ya que para valores moderados de esta relación, la rapidez de corte en la zona anular es  $\dot{\gamma} \sim 0(U/R(1 - (U/a)^2))$  y por lo tanto los valores numéricos de De y Wi serán diferentes significativamente [Degan y Walters, 1995 y McKinley, 2001].

Para contrastar los resultados experimentales con los teóricos se puede usar un marco de referencia euleriano de manera que la esfera permanezca fija con velocidad cero. El problema es adimensionalizado para obtener la fuerza de arrastre adimensional sobre la esfera, la cual es calculada como función del número de Deborah. Muy pocos estudios experimentales han considerado efectos multidimensionales y normalmente varios términos se toman apropiadamente como casos límite que tienden a cero o al infinito.

### 2.1.1 Coeficiente de arrastre

El coeficiente de arrastre permite cuantificar la resistencia de un objeto a moverse en un fluido. En estado estacionario existe un equilibrio de fuerzas, donde la fuerza de arrastre puede calcularse mediante la fuerza de gravitación que actúa sobre un objeto, digamos una esfera, menos la fuerza de flotación, usando el resultado de la ley de Stokes se obtiene:

$$C_D = \frac{8ag}{3U^2} \left( \frac{\rho_e}{\rho_f} - 1 \right)$$

donde  $a$  es el radio de la esfera,  $U$  es la velocidad terminal,  $\rho_e$  es la densidad de la esfera,  $\rho_f$  es la densidad del fluido y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Para el caso de un fluido newtoniano con  $Re > 1$ , la relación entre el coeficiente de arrastre y el número de Reynolds es:

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

Hace dos décadas [Solomon y Muller, 1996] encontraron que para dos fluidos de Boger preparados a partir de poli-isobutileno y jarabe de maíz con  $Wi < 0.1$  no existen desviaciones considerables con respecto al caso newtoniano. Sin embargo, con  $Wi > 0.1$  las desviaciones son considerables. Para el fluido de Boger preparado a partir de poliisobutileno el coeficiente de arrastre se incrementa con respecto al caso newtoniano; en el caso del fluido de Boger preparado a partir de jarabe de maíz dicho coeficiente disminuye, teniendo de esta manera dos comportamientos totalmente opuestos (Figura 2.2). La diferencia en la variación del coeficiente de arrastre con respecto a  $Wi$  puede estar relacionada con el comportamiento de las soluciones poliméricas en flujo extensional [Chmielewski et al., 1990, Chilcott y Rallison, 1988, Boger et al., 1993].

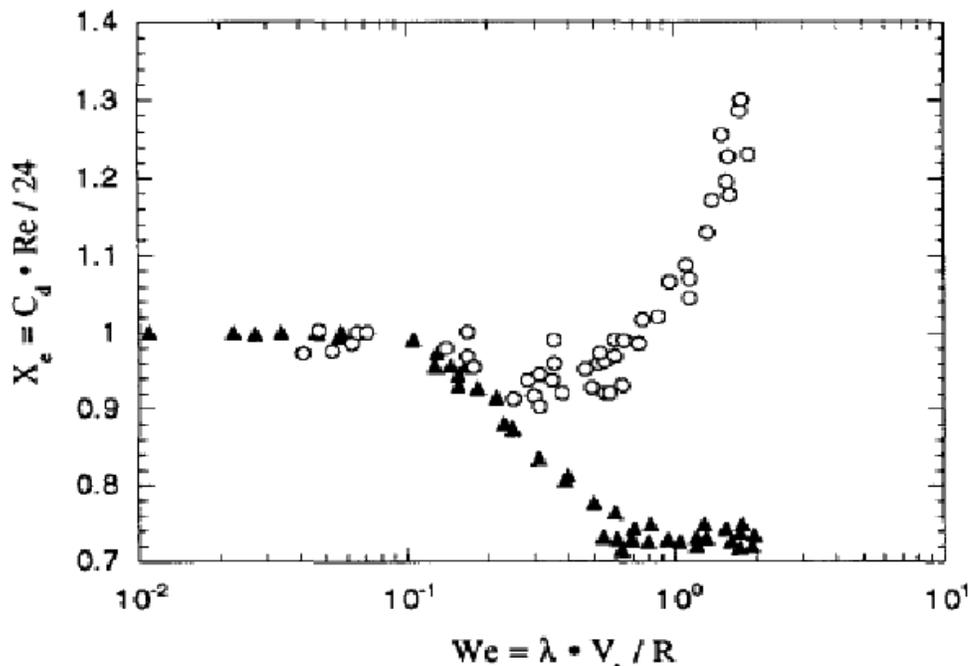


Figura 2.2. Coeficiente de arrastre adimensional para el caso de dos fluidos de Boger. Círculos vacíos: poliisobutileno/polibuteno. Triángulos rellenos: poliacrilamida/jarabe de maíz [Solomon y Muller, 1996]. Ambos fluidos descritos cualitativamente por el modelo Oldroyd-B.

Para líquidos no newtonianos, la viscosidad en un flujo viscométrico varía con la rapidez de corte y, por lo tanto, algunos efectos de viscosidad variable podrían influir de manera considerable las mediciones hechas, por ejemplo, en el caso del flujo no viscométrico generado en el problema de sedimentación de esferas [Chhabra, 2006].

Los experimentos realizados por [Mena et al., 1987] muestran que para el caso en que los efectos de pared no son muy notorios, esto es  $0.05 < a/R < 0.067$ , en los fluidos newtoniano, viscoelástico e inelástico utilizados a medida que se incrementa la relación  $a/R$  (radio de la esfera entre el radio del contenedor), la fuerza de arrastre aumenta. Para los fluidos viscoelástico e inelástico utilizados se observa que la fuerza de arrastre se aproxima a un valor asintótico cuando las velocidades de descenso de las esferas son grandes, lo que hace referencia a que los efectos de adelgazamiento son los factores dominantes y responsables del comportamiento asintótico de la fuerza de arrastre.

En el caso del fluido de Boger analizado por [Mena et al., 1987] se encontró una reducción del arrastre cercana al 25%, y se aclara que los valores de la rapidez de corte se encuentran dentro del intervalo de dependencia cuadrática con respecto a la primera diferencia de esfuerzos normales ( $N_1$ ), dando como resultado un valor constante del tiempo de relajación. En este caso la desviación encontrada en el coeficiente de arrastre es cuadrática con respecto al número de Weissenberg y llega a un valor asintótico cercano a la unidad.

En el mismo trabajo de [Mena et al., 1987], cuando la influencia de los efectos de pared es notoria, es decir  $0.05 < a/R < 0.5$ , en el fluido viscoelástico los efectos de adelgazamiento predichos son más dominantes para valores pequeños tanto del número de Reynolds como de la relación de diámetros  $a/R$ . Para relaciones grandes de  $a/R$  los efectos elásticos no son despreciables a valores pequeños del número de Reynolds. Para el fluido inelástico se observa un comportamiento similar al del fluido viscoelástico para valores altos de  $a/R$  y bajos  $Re$ . Finalmente, se presenta una comparación de los resultados experimentales obtenidos por [Chhabra, 2006], de la reducción del coeficiente de arrastre en función del número de Weissenberg para el fluido de Boger, donde de la misma forma se observa la disminución del 25% de la fuerza de arrastre para relaciones de diámetros  $a/R \leq 0.184$ .

Experimentos realizados por [Gheissary y van den Brule, 1996] y [Jones et al., 1994] muestran que para valores grandes del número de Weissenberg el factor de corrección del coeficiente de arrastre debido a la elasticidad del fluido aumenta y puede llegar a ser significativamente mayor

que el valor de la fuerza de arrastre predicha por la ley de Stokes.

Por otro lado, [Tirtaatmadja et. al., 1990] estudiaron el flujo reptante de esferas en un fluido de Boger preparado a partir de poliisobutileno en polibuteno. Encontraron que el factor de corrección de pared para este fluido puede ser descrito de manera correcta por el factor de corrección de Faxen para un fluido newtoniano hasta una relación de diámetros  $a/R=0.15$ . La gráfica del factor del coeficiente de arrastre contra el número de Weissenberg muestra que hasta valores de  $Wi=0.1$  no se encuentra desviación alguna en referencia al valor de Stokes. Por encima de este valor, el arrastre presenta una ligera disminución hasta un valor de 93-95% del valor newtoniano. Posteriormente, el arrastre en la esfera aumenta monótonamente con el valor del  $Wi$  hasta alcanzar un valor mayor del 20% del valor newtoniano para  $Wi>1.6$ . En el caso de la disminución en el coeficiente de arrastre, los autores aclaran que la rapidez de corte promedio experimentada por la esfera se localiza en el intervalo donde se observa que  $N_1$  varía cuadráticamente.

Asimismo, [Jones et al., 1994] realizaron experimentos de sedimentación de esferas en dos tipos de fluidos de Boger que típicamente se presentan en la literatura, poliacrilamida/jarabe de maíz (PAA/CS) y poliisobutileno/polibuteno (PIB/PB). Para el caso del fluido PIB/PB se realizaron experimentos de descenso de esferas en dos diferentes muestras de fluidos, una de las cuales fue añejada durante 8 meses y la otra, fue utilizada inmediatamente después de su preparación. Para el fluido PAA/CS se encontró que el factor de corrección del arrastre aumenta a medida que crece el número de Weissenberg para relaciones de diámetros  $a/R \leq 0.25$ , excepto cuando el valor de  $a/R=0.5$ . Para relaciones de  $a/R > 0.5$  se menciona que existe un incremento en el arrastre pero no se muestra una gráfica de los valores medidos en función del número de Weissenberg. La sedimentación de la esfera en el fluido PIB/PB fresco tuvo una ligera disminución en el factor de corrección por arrastre con respecto al valor newtoniano para números de Weissenberg pequeños, dicha disminución es seguida por un aumento en el factor de corrección para Weissenberg mayores. En el caso de la solución añejada no se observó una reducción del factor de corrección, pero sí se incrementó con el número de Weissenberg y se vuelve independiente de la relación de diámetros esfera-columna para  $a/R \leq 0.15$ . El valor máximo en el factor de corrección para el arrastre aparece cuando el valor de  $a/R=0.2$  y disminuye cuando  $a/R=0.5$ .

En los experimentos anteriores se pone de manifiesto la importancia de conocer las características

de las cadenas poliméricas, por ejemplo, se sabe que la extensibilidad de la poliacrilamida en ciertos disolventes es menor que la de otros polímeros, tales como el poliisobutileno [Chilcott y Rallison, 1988], y que la poliacrilamida adopta una configuración relativamente extendida con tiempo de relajación pequeño ( $\lambda$ ) en soluciones con concentraciones de sal pequeñas y una configuración enrollada (tiempo de relajación grande), en soluciones con concentraciones de sal altas. Por lo tanto, la extensibilidad de los fluidos de Boger con poliacrilamida es extremadamente sensible a la presencia de iones en los disolventes [Degand y Walters, 1995].

### 2.1.2 Factor de corrección por arrastre

Para calcular el efecto de las paredes y del fluido viscoelástico en la sedimentación de una esfera de radio  $a$  se usa el factor de corrección por arrastre. En este caso la velocidad terminal de una esfera descendiendo en el centro de un tubo de radio  $R$ , lleno con un fluido newtoniano de viscosidad  $\eta_0$ , denotado por  $K$ , se obtiene de un balance de fuerzas debidas al arrastre, la aceleración de la gravedad y la flotación sobre la esfera:

$$K = \frac{U_{Stokes}}{U_e} = \frac{2ga^2(\rho_e - \rho_f)}{9\eta_0 U_e}$$

donde  $\rho_e$  y  $\rho_f$  son las densidades de la esfera y el fluido, respectivamente,  $U_e$  es la velocidad de sedimentación experimental,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\eta_0$  es la viscosidad del fluido. Para un fluido newtoniano, el factor de corrección por arrastre toma la siguiente forma:

$$K_N = \frac{1}{1 - f\left(\frac{a}{R}\right)}$$

donde la función  $f(a/R)$  puede ser expresada por los términos de la serie de Faxen [Mendoza et al., 2010] representada por:

$$f\left(\frac{a}{R}\right) = 2.1044\left(\frac{a}{R}\right) - 2.0877\left(\frac{a}{R}\right)^3 + 0.84913\left(\frac{a}{R}\right)^5 + 1.3720\left(\frac{a}{R}\right)^6 - 3.87\left(\frac{a}{R}\right)^8 + 4.19\left(\frac{a}{R}\right)^{10}$$

Los efectos viscoelásticos sobre el arrastre se reportan como la relación de la fuerza de arrastre sobre la esfera estacionaria en el líquido viscoelástico y el arrastre de la esfera con la misma velocidad que tendría la misma esfera en un líquido newtoniano, mediante la siguiente ecuación:

$$Y = \frac{K}{K_N} = \frac{2ga^2(\rho_s - \rho_f)(1 - f\left(\frac{a}{R}\right))}{9\eta_0 U_s}$$

De esta manera se puede cuantificar la desviación del valor del coeficiente de arrastre predicho por la ley de Stokes debido a la presencia de las paredes del contenedor y a la viscoelasticidad del fluido. El comportamiento del factor de arrastre normalizado se muestra en la Figura 2.3, compuesto por varias regiones importantes.

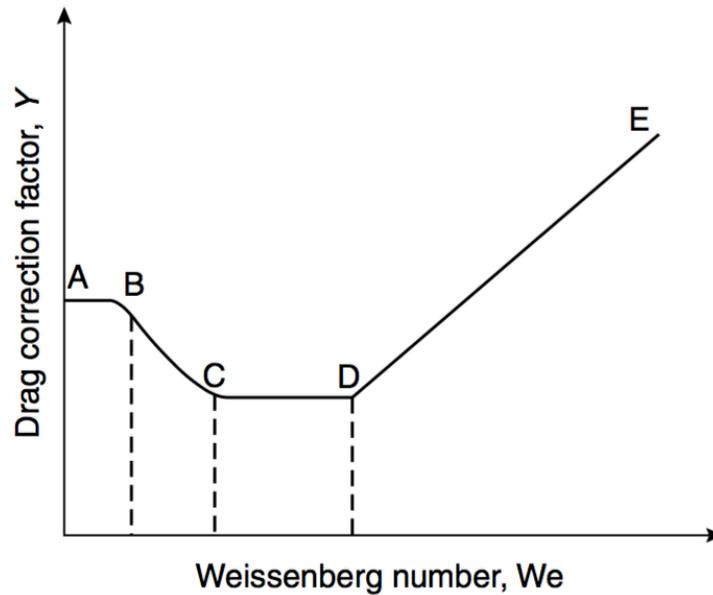


Figura 2.3. Comportamiento general del factor de corrección por arrastre normalizado en función del número de Weissenberg, [Chhabra, 2006].

La región A-E en la Figura 2.3 ha sido observada en fluidos tipo Boger. La meseta en la región A-B, a bajos números de  $Wi$ , corresponde a la región newtoniana y ha sido confirmada experimentalmente por [Chhabra et al., 1980], [Mena et al., 1987], [Chmielewski et al., 1990], [Tirtaatmadja et al., 1990] hasta  $Wi \sim 0.1$ , seguida por una región de disminución del arrastre (B-C) del 10% encontrada por [Chmielewski et al., 1990] y [Tirtaatmadja et al., 1990] en fluidos tipo Boger preparados con jarabe de maíz y poliacrilamida. La presencia de la región C-D ha sido confirmada por [Mena et al., 1987] y [Chhabra et al., 1980]. Por otro lado, el incremento en la fuerza de arrastre, denotado esquemáticamente por la región D-E, ha sido encontrada por [Chmielewski et al., 1990], [Tirtaatmadja et al., 1990], [Jones et al., 1994], [Arigo et al., 1995], [Solomon and Muller, 1996] y [Fabris et al., 1999]. Incluso, valores del factor de corrección por

arrastre de hasta 8 han sido reportados en la literatura [Fabris et al., 1999].

Más recientemente, [Mendoza et al., 2010] calcularon los factores de corrección por arrastre para esferas que descienden en soluciones de polímeros asociativos preparados con diferentes concentraciones, los experimentos se llevaron a cabo a diferentes números de Weissenberg y con varias relaciones de radios esfera-contenedor ( $a/R$ ). Experimentalmente se encontró la presencia del  $Wi$  crítico donde ocurre la reducción del arrastre. Dicha reducción es asociada con la aparición del adelgazamiento por extensión de la solución polimérica, la cual coincide con la formación de la cauda negativa (zona secundaria de recirculación después del punto de estancamiento en la región de la cauda de la esfera, después de este punto el fluido se mueve en dirección opuesta al movimiento de la esfera [Hassager, 1979]). Asimismo, no se observó el aumento en el factor de corrección por arrastre debido a dos efectos opuestos que ocurren de manera simultánea: el espesamiento inducido por extensión y el adelgazamiento en corte del fluido.

## **2.2 Esfera que rota sin sedimentar**

El problema de la esfera que rota sobre su propio eje en un recipiente que contiene un fluido viscoelástico fue estudiado a principios de los años 60 por [Thomas y Walters, 1964]. Para condiciones de flujo lento y a través de su análisis teórico de perturbación, estos investigadores establecieron la aparición de tres patrones de flujo diferentes y el respectivo intervalo de flujo en el que estos patrones son aplicables. Dicho análisis matemático se llevó a cabo suponiendo perturbaciones en términos de distancia y velocidad.

Posteriormente [Walters y Savins, 1965] construyeron un dispositivo experimental constituido por una esfera inmersa en un fluido viscoelástico (soluciones acuosas de poliacrilamida). En su arreglo experimental fue posible observar los patrones de flujo y sus pruebas confirmaron las predicciones teóricas previamente realizadas por [Thomas y Walters, 1964].

Años más tarde, [Giesekus, 1970] llevó a cabo un estudio experimental usando fluidos de Boger a base de aceite de silicón de diferentes pesos moleculares. En el caso de fluidos ligeramente viscoelásticos, se encontró que el campo de flujo secundario se separa en dos zonas de flujo. Para fluidos de peso molecular medio, un área esférica que se separa fue detectada, la cual no es afectada por la velocidad de rotación de la esfera, sino por el esfuerzo normal en el fluido, mientras que

para fluidos con peso molecular bajo y alto, cierta dependencia con la velocidad de rotación de la esfera fue observada.

La esfera que rota es una técnica comúnmente utilizada para evaluar propiedades reológicas de fluidos viscoelásticos tales como viscosidad a rapidez de corte cero, tiempo de relajación [Chhabra, 2006] y segunda diferencia de esfuerzos normales [Manero y Mena, 1978]. Respecto a la factibilidad de una medición precisa del torque como función de la velocidad de rotación, algunos autores han empleado esta técnica para analizar los parámetros elástico-viscosos de algunos fluidos ([Hermes, 1966], [Mashelkar et al., 1972], [Kelkar et al., 1973] y [Acharya y Maaskant, 1978]). La evaluación del torque está limitada para relaciones de radios esfera-contenedor  $\frac{a}{R} < \frac{1}{12}$  [Walters y Waters, 1963]. Respecto a esto, [Mena et al., 1972] demostraron que la influencia de las paredes sobre el torque de una esfera dentro de un cilindro que rota puede ser corregido e incluido dentro del cálculo del torque.

### 2.3 Sedimentación de esferas que rotan

La sedimentación de una esfera que rota ha sido estudiado por [Godínez et al., 2014] utilizando fluidos que se comportan de acuerdo al modelo ley de potencia. En este caso se utilizaron dos esferas con varios imanes en el interior de manera horizontal, como se muestra en la Figura 2.4, y con la ayuda de un campo magnético se impuso rotación controlada sobre el eje de sedimentación. Con los dos movimientos desarrollados por la esfera, el flujo alrededor de ésta fue dominado por la rotación y la velocidad de sedimentación incrementó.

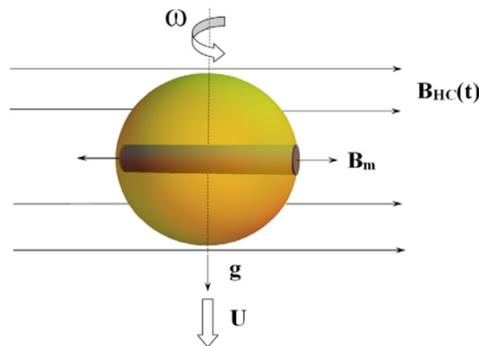


Figura 2.4. Esquema de la esfera en el experimento de sedimentación y su interacción con el campo magnético. Donde  $\omega$  es la velocidad angular,  $U$  es la velocidad de sedimentación en el eje  $z$ ,  $g$  es la fuerza de gravedad,  $B_{HC}(t)$  son las líneas de campo de la bobina y  $B_m$  son las líneas de campo del imán [Godínez et al., 2014].

Para esto se consideró que el valor típico de  $\dot{\gamma}$  es el resultado de dos flujos diferentes que se superponen:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\gamma}_R^2}$$

donde  $\dot{\gamma}_S$  y  $\dot{\gamma}_R$  son las rapidezces de deformación que resultan del flujo alrededor de una esfera que sedimenta y rota, respectivamente. De acuerdo con la literatura, [Chhabra, 2006], la rapidez de deformación característica alrededor de una esfera que sedimenta es:

$$\dot{\gamma}_S = \frac{2U}{D}$$

En el caso de una esfera que rota, la rapidez de deformación es simplemente:

$$\dot{\gamma}_R \approx \omega$$

Por lo tanto:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{2U}{D}\right)^2 + \omega^2}$$

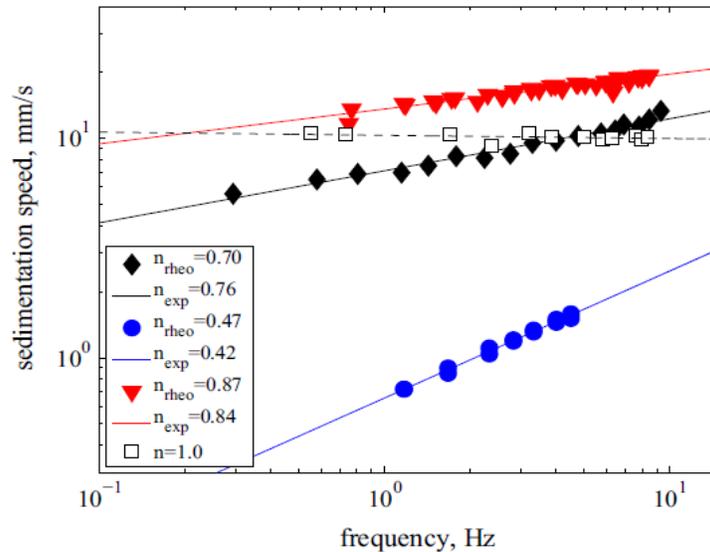


Figura 2.5. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación. Fluidos adelgazantes (marcadores rellenos) y fluido newtoniano (marcadores vacíos), [Godínez et al., 2014].

Al utilizar el modelo de ley de potencia para ajustar los datos experimentales de [Godínez et al., 2014] de la velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación fue posible predecir los valores de los índices de consistencia y de potencia para los fluidos empleados (Figura 2.5). Así se concluyó que este arreglo experimental puede ser utilizado como reómetro para predecir propiedades reológicas de fluidos tipo ley de potencia.

## **2.4 Fluidos viscoelásticos**

Un caso especial de fluidos no newtonianos son los llamados fluidos viscoelásticos. Para introducir este concepto es apropiado definir primero términos más sencillos como sólidos y líquidos. Si al aplicar una fuerza cortante sobre una unidad de área (esfuerzo) un elemento material no cambia su forma de manera continua, es decir, no fluye, entonces se dice que el material es un sólido. Si por el contrario el material fluye, entonces se dice que se trata de un líquido. El comportamiento sólido-elástico puede ser representado adecuadamente mediante la ley de Hooke, en tanto que el comportamiento líquido viscoso puede ser modelado con la ley de Newton. Un material viscoelástico presenta ambos comportamientos: sólido-elástico y líquido viscoso. Un elemento material presenta propiedades viscoelásticas si, después de que se deja de aplicar un esfuerzo sobre éste, el tiempo en el que fluido alcanza el estado de reposo puede ser observado y medido [Barnes et al., 1989].

### **2.4.1 Tiempo de relajación**

En un fluido viscoelástico la elasticidad puede deberse a la extensión de las cadenas. Para entender de una forma sencilla el concepto de tiempo de relajación, es necesario mencionar el movimiento browniano, el cual se opone al alargamiento y alineamiento de las cadenas, ya que éste las mantiene en un orden aleatorio. También, el grado de extensión de las cadenas poliméricas en un flujo se ve afectado por la competencia de los esfuerzos viscosos sobre el movimiento browniano. Cuando los esfuerzos que actúan sobre las cadenas poliméricas que constituyen el fluido viscoelástico son removidos, éstas tienden a buscar un estado de equilibrio, lo cual a nivel macroscópico se considera como una recuperación elástica. El tiempo que transcurre para que las cadenas poliméricas regresen a ese estado se denomina tiempo de relajación ( $\lambda$ ). En los fluidos newtonianos este tiempo se considera como cero; para un sólido elástico este valor se considera como infinito. Para calcular

el tiempo de relajación de un fluido viscoelástico, [Jones et al., 1994] al igual que [Chmielewski et al., 1990] y [Chhabra et al., 1980] utilizan los datos de una prueba de esfuerzo cortante simple, de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{N_1}{2 \eta_0 \dot{\gamma}^2}$$

Mientras que [Tirtaatmadja et al., 1990] determinan la misma propiedad a partir de una prueba oscilatoria de pequeña amplitud:

$$\lambda = \frac{G'}{\omega^2 \eta_0}$$

Otra manera de calcular el tiempo de relajación es haciendo uso de datos provenientes de una prueba de corte oscilatoria [Bush, 1994]:

$$\lambda = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{G'}{\omega G''} \right)$$

En estas ecuaciones  $N_1$  representa la primera diferencia de esfuerzos normales,  $\eta_0$  la viscosidad del fluido a corte cero,  $G'$  el módulo de almacenamiento,  $G''$  el módulo de pérdida y  $\omega$  la frecuencia angular. De acuerdo con [Jackson et al., 1984], en el caso de fluidos tipo Boger, el tiempo de relajación obtenido a partir de pruebas dinámicas ( $G'$  y  $G''$ ) es más pequeño que el obtenido con datos de pruebas en estado estacionario ( $N_1$ ), lo cual fue comprobado por [Solomon y Muller, 1996]. Adicionalmente, [Jackson et al., 1984] concluyeron que es más apropiado usar el modelo de Oldroyd-B en la interpretación de los resultados en lugar del modelo de Maxwell, en concordancia con [Prilutski et al., 1983], ya que dicho modelo incluye la contribución del solvente.

#### 2.4.2 Primera diferencia de esfuerzos normales

La primera diferencia de esfuerzos normales,  $N_1$ , de un fluido viscoelástico es definida como la diferencia entre las componentes del esfuerzo normal en la dirección del flujo y en la dirección perpendicular [Morrison, 2001]:

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy}$$

donde  $\tau_{xx}$  y  $\tau_{yy}$  son las componentes del esfuerzo normal en dirección del flujo y en dirección transversal, respectivamente. Esta propiedad está relacionado con la elasticidad que un fluido experimenta en corte, mediante el primer coeficiente de esfuerzos normales ( $\psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2}$ ) [Morrison, 2001], y su valor es igual a cero para fluidos newtonianos.

Al medir la fuerza axial,  $F$ , en un reómetro de cono y plato se pueden calcular los valores de  $N_1$  de acuerdo a la siguiente expresión [Mackosco, 1994]:

$$N_1 = \frac{2 F}{\pi R^2}$$

donde  $R$  es el radio del cono. Sin embargo, la fuerza axial generada por fluidos poco elásticos en corte es muy pequeña y frecuentemente menor que el rango de medición del transductor del equipo. Por lo tanto, si un fluido es capaz de generar esfuerzos normales lo suficientemente grandes en corte, es posible obtener datos de  $N_1$  para ese fluido.

### 2.4.3 Número de Weissenberg

Para caracterizar el flujo de fluidos viscoelásticos se puede utilizar el número de Weissenberg ( $Wi$ ), el cual es definido como el producto del tiempo de relajación del fluido ( $\lambda$ ) y la rapidez de deformación ( $\dot{\gamma}$ ) a la cual se realiza el proceso, teniendo un esfuerzo de corte constante. En el caso específico de la sedimentación de una esfera se define como el producto del tiempo de relajación por la velocidad terminal de la esfera dividido entre el radio de la misma [Jones et al., 1994]:

$$Wi = \lambda \dot{\gamma} = \frac{\lambda U}{a}$$

donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación,  $U$  es la velocidad de sedimentación,  $a$  es el radio de la esfera y  $\dot{\gamma}$  es la velocidad de deformación característica.

### 2.4.4 Número de Reynolds

Para determinar la relación que existe entre los efectos viscosos y los efectos inerciales durante la sedimentación de esferas se usa la siguiente ecuación [Solomon y Muller, 1996]:

$$Re = \frac{\rho U D}{\eta(\dot{\gamma})}$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $u$  es la velocidad de sedimentación de la esfera,  $D$  es el diámetro de la esfera y  $\eta(\dot{\gamma})$  es la función viscosidad.

## 2.5 Fluidos de Boger

Un fluido modelo desde el punto de vista experimental, es un fluido que tiene viscosidad constante, es altamente viscoso y elástico a temperatura ambiente y además es ópticamente transparente. Los fluidos de Boger utilizados en la literatura pueden ser clasificados en dos tipos: fluidos preparados a partir de poliacrilamida y jarabe de maíz (PAA/CS, [Boger, 1977]) y fluidos preparados a partir de poliiisobutileno con diferentes mezclas de polibuteno y keroseno (PIB/PB, [Prilutski et al., 1983]). Estos fluidos llevan el nombre de su inventor David V. Boger [Boger, 1977] y se caracterizan idealmente por tener una viscosidad constante ( $\eta_0$ ), además de presentar elasticidad en flujo cortante. Al utilizar este tipo de fluidos, los efectos elásticos pueden ser separados de los efectos viscosos. De acuerdo con [James, 2009], en un experimento se puede emplear un fluido de Boger y un fluido newtoniano con la misma viscosidad, la diferencia al hacer un análisis de ambos lo integra la parte elástica, es decir, con un fluido de Boger se puede determinar si hay efectos en el proceso producidos por la elasticidad del fluido.

### 2.5.1 Modelo Oldroyd-B

El comportamiento reológico de los fluidos de Boger en flujo cortante simple ha sido estudiado con éxito empleando el modelo de Oldroyd-B, ya que éste separa las contribuciones de la viscosidad del disolvente y del polímero en la ecuación constitutiva [Prilutski et al., 1983]:

$$\eta = \eta_p + \eta_s$$

donde  $\eta$  es la viscosidad del fluido,  $\eta_p$  es la contribución del polímero a la viscosidad y  $\eta_s$  es la viscosidad del disolvente. Para flujo cortante en estado estacionario se tienen las siguientes funciones materiales [Walters et al., 2008]:

$$\eta = \eta_0$$

$$N_1 = 2 \eta_0 (1 - \beta) \lambda_1 \dot{\gamma}^2$$

$$N_2 = 0$$

donde  $\eta_0$  es la viscosidad del fluido de corte cero,  $\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  es la relación entre el tiempo de relajación ( $\lambda_1$ ) y el tiempo de retardación ( $\lambda_2$ ),  $\dot{\gamma}$  es la rapidez de corte, y  $N_1$ ,  $N_2$  son la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales, respectivamente. El modelo de Oldroyd-B aplicado a un fluido de Boger predice una viscosidad constante a lo largo de la historia de deformación del fluido, una primera diferencia de esfuerzos normales  $N_1$  de características cuadráticas y consecuentemente una viscosidad extensional alta que diverge en la mayoría de los casos. Esto, desde el punto de vista experimental, es un grave problema debido a que es difícil ajustar este modelo a resultados experimentales en un amplio intervalo de valores de rapidez de extensión [Walters et al., 2008].

## Capítulo 3

### Desarrollo experimental

#### 3.1 Equipo experimental

Para el desarrollo de todos los experimentos de sedimentación de esferas se utilizó el dispositivo mostrado en la Figura 3.1.

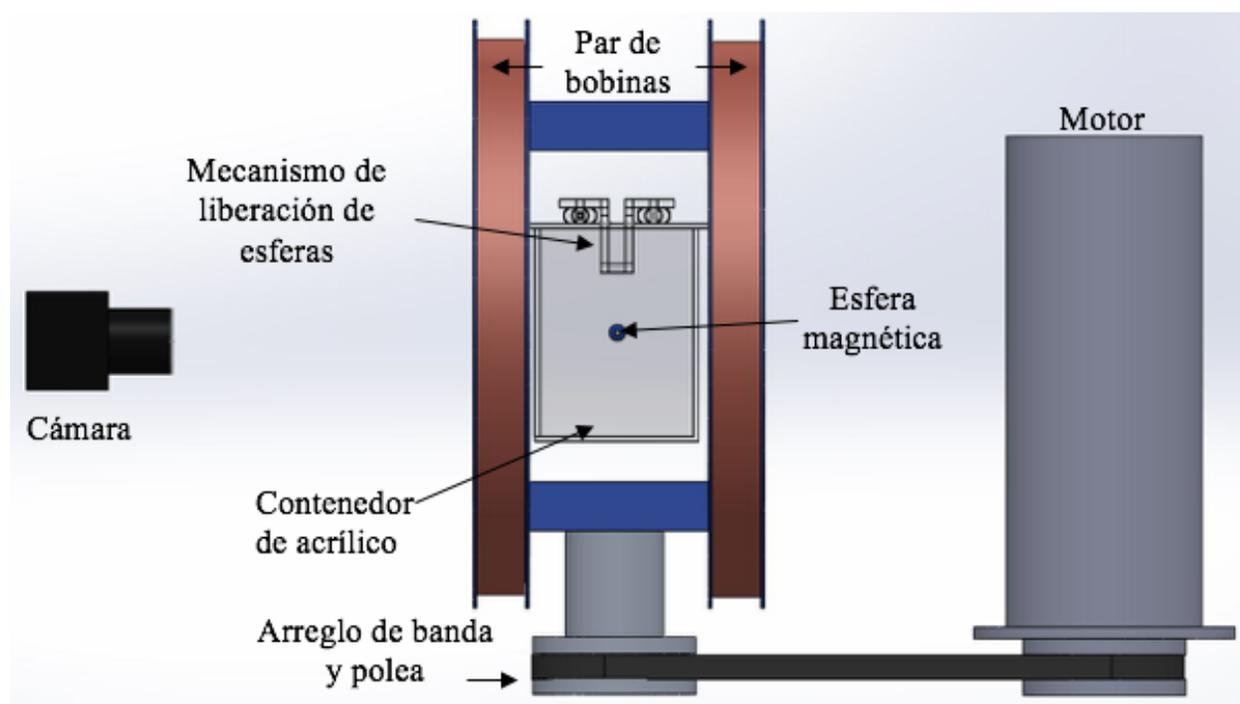


Figura 3.1. Arreglo experimental utilizado.

Cada componente del arreglo experimental será explicado detalladamente a continuación.

#### 3.1.1 Esferas magnéticas

Las esferas sólidas tienen una perforación en el centro de tal manera que uno o varios imanes cilíndricos (Magcraft, modelo NSN0658) de 1/8" de longitud y 1/8" de diámetro son introducidos en el centro de la misma (4 a 5), como se muestra en la Figura 3.2. El diámetro fue medido con un Vernier digital, mientras que la masa fue medida en una balanza con resolución de 0.01 g. La densidad fue determinada únicamente dividiendo la masa entre el volumen.

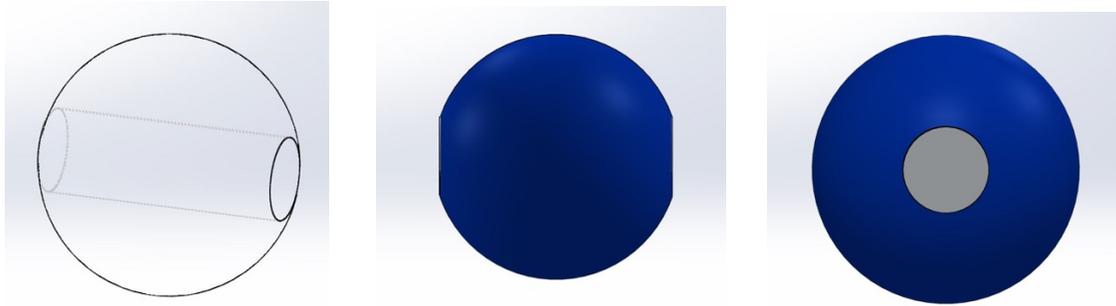


Figura 3.2. Esquema de las esferas de plástico utilizadas con imanes en el centro.

Se emplearon esferas de diferentes tamaños con propiedades mostradas en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Propiedades de las esferas utilizadas.

Diámetro, mm	Masa, mg	Densidad, kg/m <sup>3</sup>
7.99	585	2190.37
8.72	760	2189.10
8.81	819	2287.48
9.57	1005	2189.94

### 3.1.2 Contenedor

Debido a que los experimentos deben ser grabados se fabricó un contenedor transparente hecho con acrílico de 6 mm de espesor con 130 mm de altura y 100 mm de cada lado (Figura 3.3). Este se fija en el centro de la bobina de Helmholtz.



Figura 3.3. Contenedor de acrílico utilizado.

### 3.1.3 Mecanismo de liberación de esferas

La esfera debe ser liberada sin rotación, sin traslación y sin perturbar demasiado al fluido para no afectar la velocidad terminal de la misma. Por esta razón se diseñó un par de sujetadores que se separan lentamente por el movimiento de jeringas comerciales. El mecanismo de liberación se muestra en la Figura 3.4.

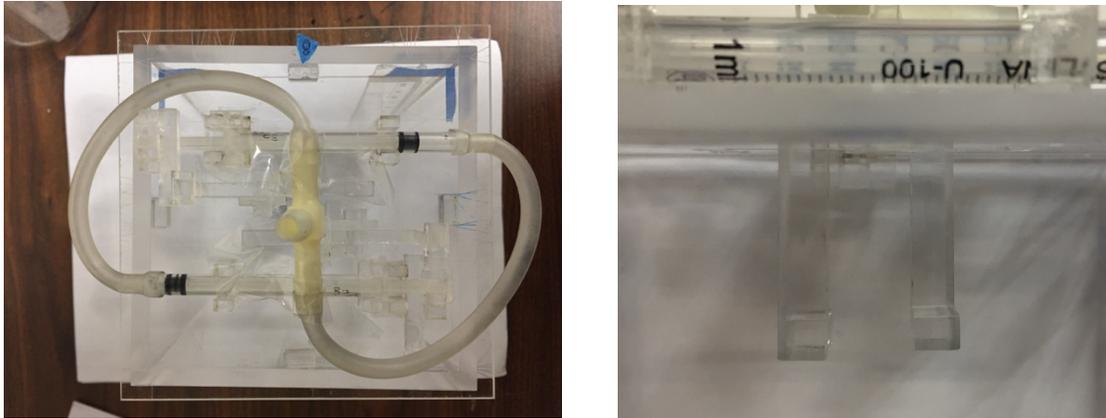


Figura 3.4. Mecanismo de liberación de esferas: vista superior y vista frontal.

### 3.1.4 Bobina rotatoria

Para imponer la rotación a la esfera mediante un campo magnético se utilizó un aparato electro-mecánico compuesto de un par de bobinas de Helmholtz, el cual se hace girar por medio de un motor eléctrico de corriente directa [Godínez et al., 2012]. Componentes del dispositivo:

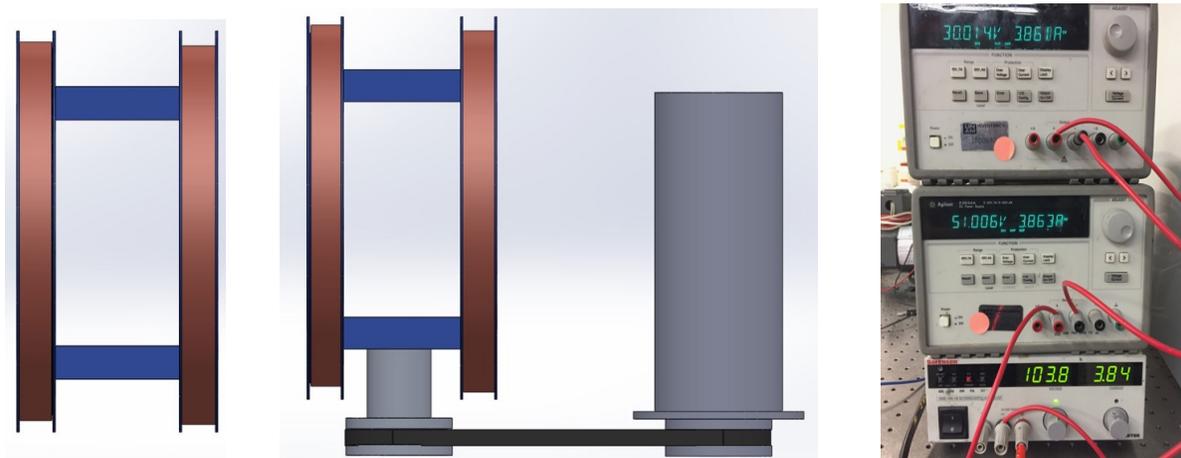


Figura 3.5. a) Par de bobinas, b) bobina y motor y c) sistema de alimentación.

- Figura 3.5a: Par de bobinas de Helmholtz (28 cm de diámetro): Generadoras del campo magnético.
- Figura 3.5b: Motor de corriente directa: Cuenta con controlador de velocidad, arreglo de banda y polea y rodamientos de bolas.
- Figura 3.5c: Sistema de alimentación: Consiste de un par de escobillas de carbón y tres fuentes de corriente directa.

El conjunto de componentes se energiza mediante tres fuentes de alimentación de corriente continua con una corriente y un voltaje máximos de 3.84A y 103.8V, respectivamente.

### 3.1.5 Cámara de video

Se usó una cámara digital de video Canon EOS 60D (Figura 3.6), configurada para grabar a 60 cuadros por segundo. La cámara se coloca de manera frontal al contenedor y una vez que se ha encendido la bobina rotatoria y las fuentes de poder de la misma se procede a iniciar la grabación.



Figura 3.6. Cámara Canon® utilizada.

### 3.2 Preparación de los fluidos

Tanto el fluido de Boger como el newtoniano fueron preparados con una mezcla de glucosa y agua. Para obtener las propiedades elásticas fue necesario añadir poliacrilamida en concentraciones pequeñas. El fluido de Boger tiene una composición en porcentaje masa de 84.96% de glucosa, 0.04% de poliacrilamida (peso molecular  $M_w=5 \times 10^6$  g/mol) y 15% de agua. Inicialmente se mezcló la poliacrilamida en el volumen de agua a utilizar agitando durante un día completo, ya que de esta manera se eliminan todos los grumos que se generan. Posteriormente, el agua con la poliacrilamida

disuelta se añadió a la miel y se mantuvo en agitación durante tres días continuos y finalmente se dejó reposar durante una semana.

En el caso del fluido newtoniano únicamente se utilizó agua y miel variando el porcentaje en masa de agua para poder obtener propiedades similares a las del fluido de Boger. En cuanto a la preparación solamente fue necesario añadir el agua a la miel y agitar durante un día. A los dos fluidos preparados se les añadió 0.1 g de benzoato de sodio por litro de fluido como conservador para preservarlos durante el tiempo en el que se realizaron los experimentos.

### **3.2.1 Caracterización reológica**

Se realizaron dos tipos de pruebas para determinar las propiedades del fluido viscoelástico a utilizar.

### **3.2.2 Prueba de flujo cortante simple en estado estacionario**

Para esta prueba se aplica un esfuerzo y se mide la rapidez de deformación en condiciones de flujo en estado estacionario. Este proceso se repite desde un valor inicial hasta uno final del esfuerzo y así obtener la curva de flujo, a partir de la cual se calcula la viscosidad en función de la rapidez de deformación. En este mismo experimento también se puede medir la primera diferencia de esfuerzos normales y su dependencia con la rapidez de deformación. El equipo utilizado para este experimento fue un reómetro rotacional de esfuerzo controlado, MCR302 de Anton Paar, empleando una geometría de cono y plato CP40 y manteniendo una temperatura de 23°C. Una vez que se conoce la variación de  $N_1$  con la rapidez de corte y la viscosidad del fluido de Boger se estimó el tiempo de relajación con el modelo de Oldroyd-B.

### **3.2.3 Prueba oscilatoria de pequeña amplitud**

Para esta prueba se realizó inicialmente un barrido de amplitud de la muestra utilizando un reómetro ARES RFS-III con una geometría de cono y plato de 25 mm de diámetro a 23°C, donde se determinó el intervalo de viscoelasticidad lineal. Posteriormente, se eligió una amplitud, dentro del intervalo mencionado, para llevar a cabo el barrido de frecuencias. De esta manera se obtienen los valores de los módulos de almacenamiento ( $G'$ ) y de pérdida ( $G''$ ) en función de la frecuencia ( $\omega$ ).

Con este tipo de pruebas es posible determinar el tiempo de relajación de un fluido. Por ejemplo, para el caso de fluidos que cumplen con el modelo de Maxwell, el tiempo característico se calcula cuando el módulo de almacenamiento y el módulo de pérdidas son iguales, lo que se conoce como punto de cruce. La insuficiencia de modelar la reología de los fluidos de Boger con un único tiempo de relajación ha sido discutido por [Quinzani et al., 1990]. Por esta razón, en algunos casos se opta por ajustar un espectro de tiempos de relajación, con el modelo generalizado de Maxwell, a los datos de las pruebas de oscilación de pequeña amplitud con las siguientes ecuaciones [Morrison, 2001]:

$$G''(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{g_k \lambda_k \omega}{1 + \lambda_k^2 \omega^2}$$

$$G'(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{g_k \lambda_k^2 \omega^2}{1 + \lambda_k^2 \omega^2}$$

$$g_k = \frac{\eta_k}{\lambda_k}$$

donde  $\eta_k$  y  $\lambda_k$  son la k-ésima viscosidad y el k-ésimo tiempo de relajación del espectro, respectivamente. Utilizando un ajuste no lineal (Microsoft Solver en Excel®) para calcular los k elementos del espectro de tiempos de relajación se puede utilizar la siguiente función error:

$$O = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{[G'(\omega_i) - G'_{modelo}(\omega_i)]^2}{[G'(\omega_i)]^2} + \frac{[G''(\omega_i) - G''_{modelo}(\omega_i)]^2}{[G''(\omega_i)]^2} \right\}$$

La ecuación anterior es el resultado de introducir un factor de ponderación ( $\frac{1}{G(\omega_i)^2}$ ) a la suma de diferencias al cuadrado, ya que sin dicho factor la sumatoria sería dominada por errores correspondientes a valores grandes de  $G'$  y  $G''$  [Mackosco, 1994].

### 3.3 Metodología experimental

Inicialmente se deja reposar el fluido durante una hora en el contenedor de acrílico y con el mecanismo de liberación de esferas montado (Figura 3.7) para que el fluido se estabilice por

completo, ya que, sobre todo, el fluido de Boger necesita reposar para reestablecer su estructura. Largos tiempos de reposo entre cada experimentación han sido reportados para fluidos tipo Boger: [Chhabra, 2006], [Walters et al., 1992], [Bisgaard, 1983] y [Jones et al., 1994], pero para los experimentos realizados en este trabajo una hora fue suficiente, ya que visualmente el fluido presenta homogeneidad en este intervalo de tiempo.



Figura 3.7. Contenedor con el fluido y el mecanismo de liberación de esferas montados en el centro de la bobina.

Una vez pasada la hora de reposo se procede a montar el contenedor en el centro de la bobina para comenzar con el experimento. El primer paso es encender el motor y establecer la velocidad de rotación deseada. Posteriormente, se encienden las fuentes de poder estableciendo el voltaje máximo en cada una de ellas para después comenzar a grabar y finalmente liberar la esfera. Se repite lo mismo variando la frecuencia de rotación, cubriendo un intervalo de 0.83 a 5 Hz.

Para el análisis de los videos se utilizó Tracker®, el cual es un software libre para modelado. De manera general, con este software se establece un marco de referencia de posición y una escala de medida (Figura 3.8a) con lo cual se le puede dar seguimiento a la esfera en cada cuadro del video (Figura 3.8b). Con esto, es posible obtener datos de posición en función del tiempo (Figura 3.9a) y realizando un ajuste lineal se obtiene una pendiente (Figura 3.9b), la cual corresponde a la velocidad de sedimentación de la esfera. Cada experimento fue repetido cinco veces con la finalidad de determinar la incertidumbre experimental.

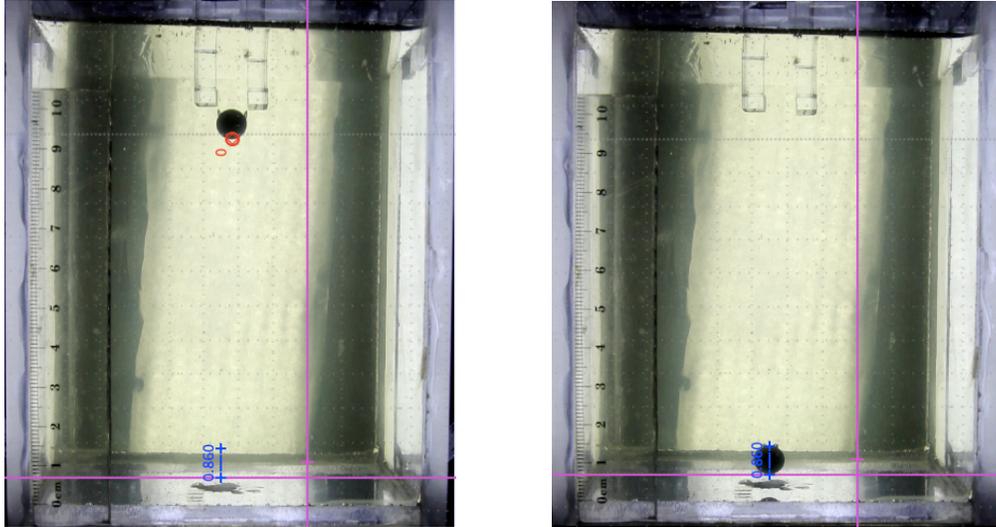


Figura 3.8. Izquierda: seguimiento de la esfera, derecha: marco de referencia y escala de medida.

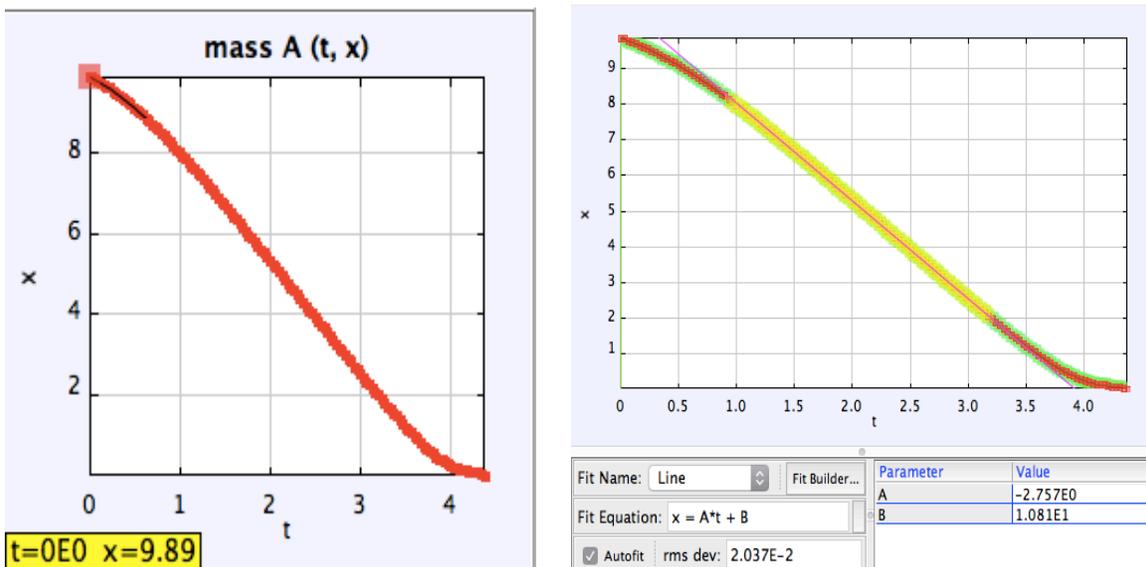


Figura 3.9. Izquierda: datos de posición en función del tiempo obtenidos, derecha: ajuste lineal de los datos.

Los datos resaltados con amarillo en la Figura 3.9b fueron los que se tomaron en consideración para el ajuste lineal, ya que durante los primeros centímetros del recorrido de la esfera (2 cm) la velocidad de sedimentación no es constante, al igual que en la zona cercana al fondo del contenedor (2 cm aproximadamente). De esta manera se aseguró un coeficiente de determinación ( $R^2$ ) mayor a 0.99 en todos los casos analizados.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Caracterización reológica

La caracterización de los fluidos preparados se muestra a continuación.

#### 4.1.1 Fluido newtoniano

La prueba de flujo cortante simple se muestra en la siguiente figura:

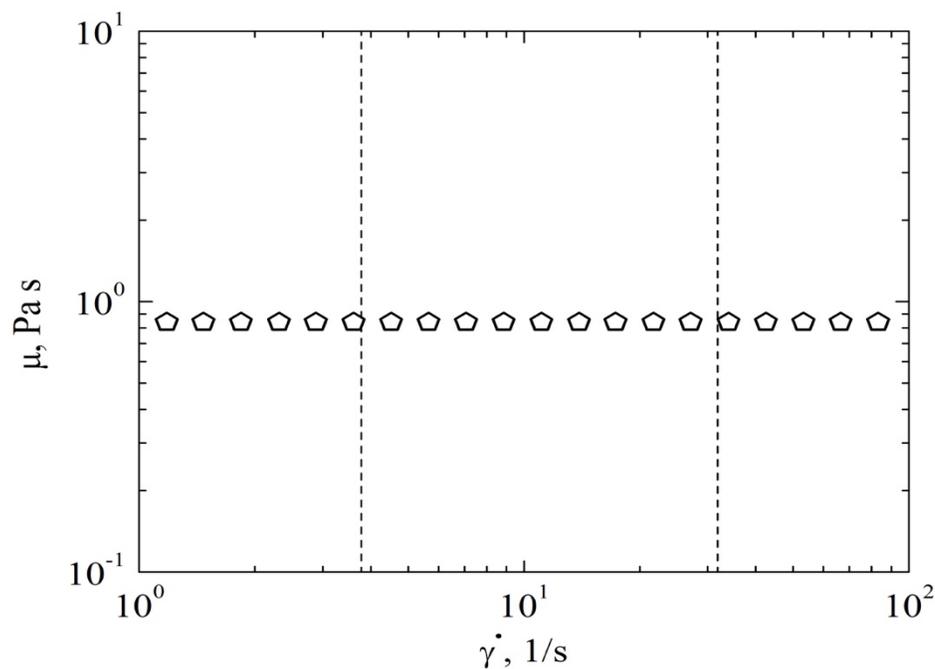


Figura 4.1. Viscosidad del fluido newtoniano (pentágonos) igual a  $0.84$  Pa s. Las líneas punteadas representan el intervalo de trabajo en terminos de rapidez de corte.

El intervalo denotado por líneas punteadas representa la mínima y la máxima rapidez de corte que se obtuvo en los experimentos de sedimentación de esferas que rotan. Dichos límites fueron determinados siguiendo la metodología propuesta por [Godínez et al., 2014] para estimar el valor de la rapidez de corte total ( $\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\gamma}_R^2}$ , donde  $\dot{\gamma}_R$  y  $\dot{\gamma}_S$  son la rapidez de corte por rotación y

rapidez de corte por sedimentación, respectivamente). De esta manera se tiene como intervalo de trabajo  $3.78 \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 31.81 \text{ s}^{-1}$ , como se puede observar en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Valores típicos de  $\dot{\gamma}$ .

Esfera		7.99 mm		8.72 mm		8.81 mm		9.57 mm	
Frec., Hz	$\dot{\gamma}_R, \text{s}^{-1}$	$\dot{\gamma}_S, \text{s}^{-1}$	$\dot{\gamma}, \text{s}^{-1}$						
0	0	3.78	3.78	4.19	4.19	4.58	4.58	4.12	4.12
0.83	5.24	3.84	6.49	4.16	6.68	4.61	6.98	4.06	6.63
1.67	10.47	3.77	11.13	4.19	11.28	4.67	11.47	4.08	11.24
2.50	15.71	3.77	16.15	4.21	16.26	4.65	16.38	4.09	16.23
3.33	20.94	3.96	21.32	4.41	21.40	4.73	21.47	4.31	21.38
4.17	26.18	4.29	26.53	4.64	26.59	4.81	26.62	4.39	26.55
5	31.42	4.60	31.75	4.97	31.81	4.89	31.79	4.70	31.77

## 4.2 Fluido de Boger

Los resultados de las pruebas en estado estacionario y dinámicas se presentan a continuación:

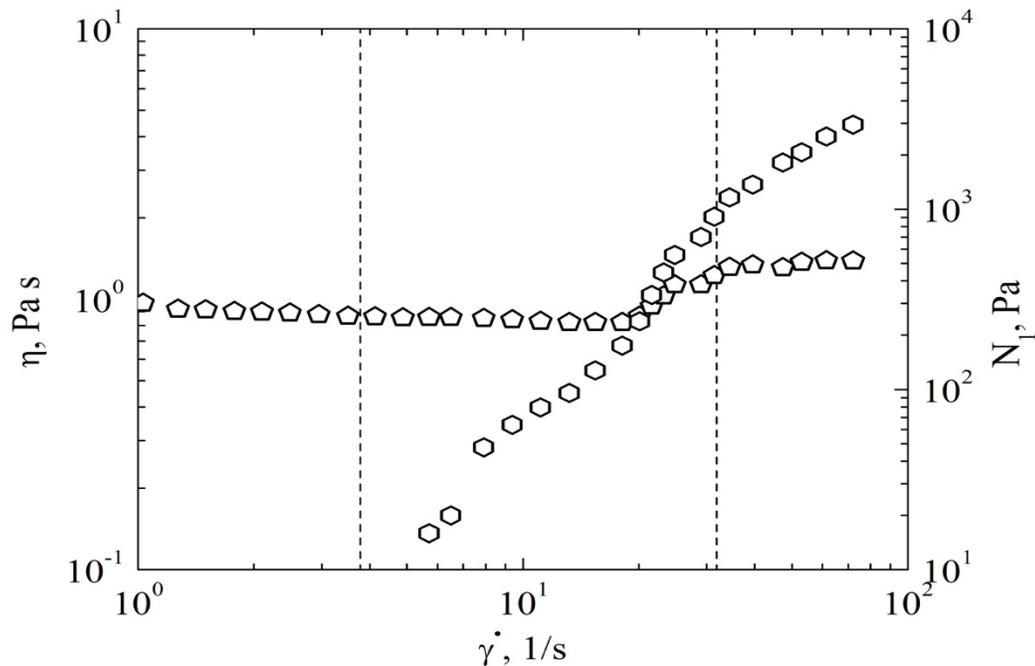


Figura 4.2. Viscosidad (pentágonos) y primera diferencia de esfuerzos normales (hexágonos) del fluido de Boger en función de la rapidez de corte. Las líneas punteadas representan el intervalo de trabajo en terminos de rapidez de corte.

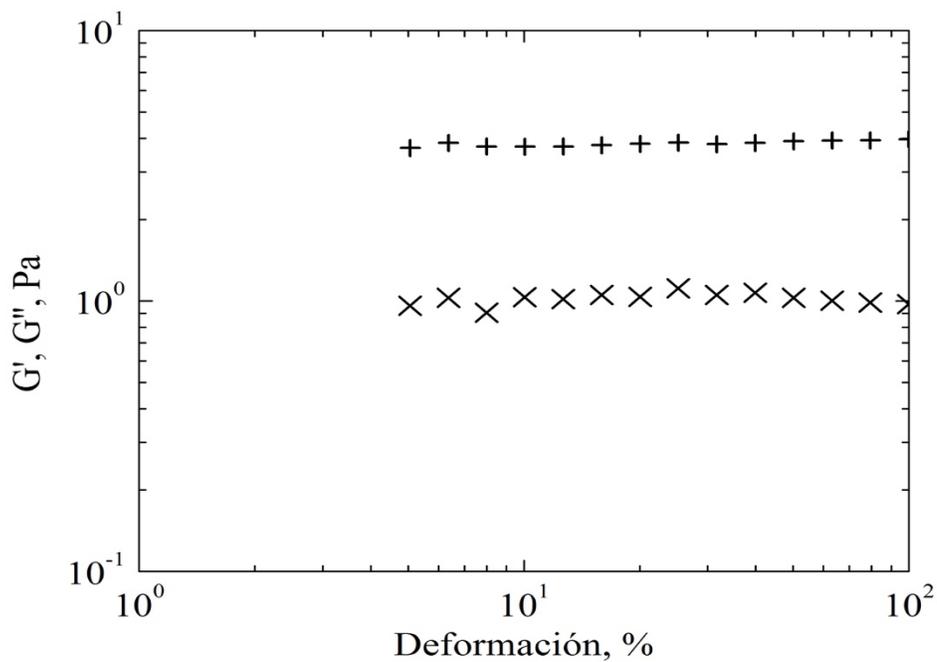


Figura 4.3. Barrido de amplitudes del fluido de Boger. Módulos de almacenamiento  $G'$  (x) y de pérdida  $G''$  (+) en función del porcentaje de deformación.

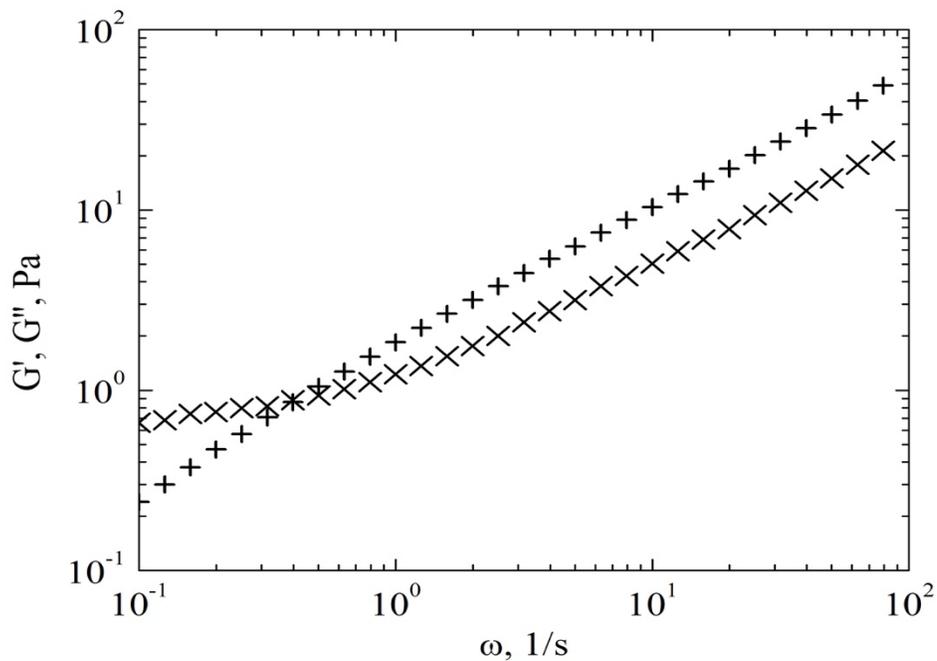


Figura 4.4. Módulos de almacenamiento  $G'$  (x) y de pérdida  $G''$  (+) en función de la frecuencia angular.

## 4.2 Sedimentación de esferas que rotan

La velocidad de sedimentación fue determinada como se mencionó en la metodología experimental, observando el comportamiento que se muestra la Figura 4.5.

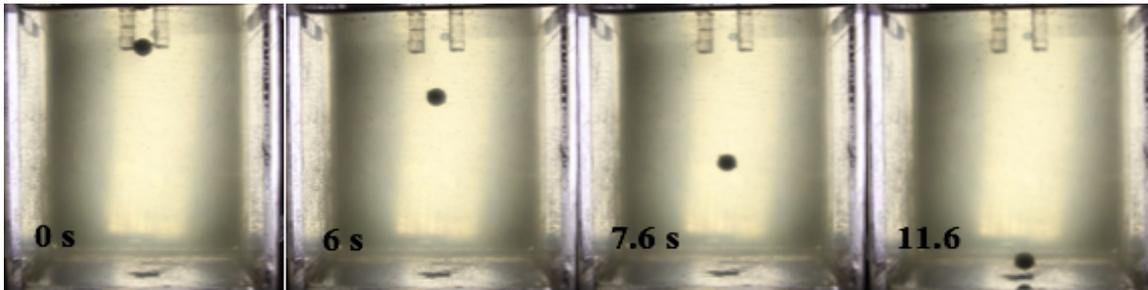


Figura 4.5. Secuencia de imágenes que muestra la posición de la esfera a diferentes tiempos.

### 4.2.1 Fluido newtoniano

La velocidad de sedimentación en el fluido de newtoniano para el caso de las diferentes esferas utilizadas se muestra a continuación:

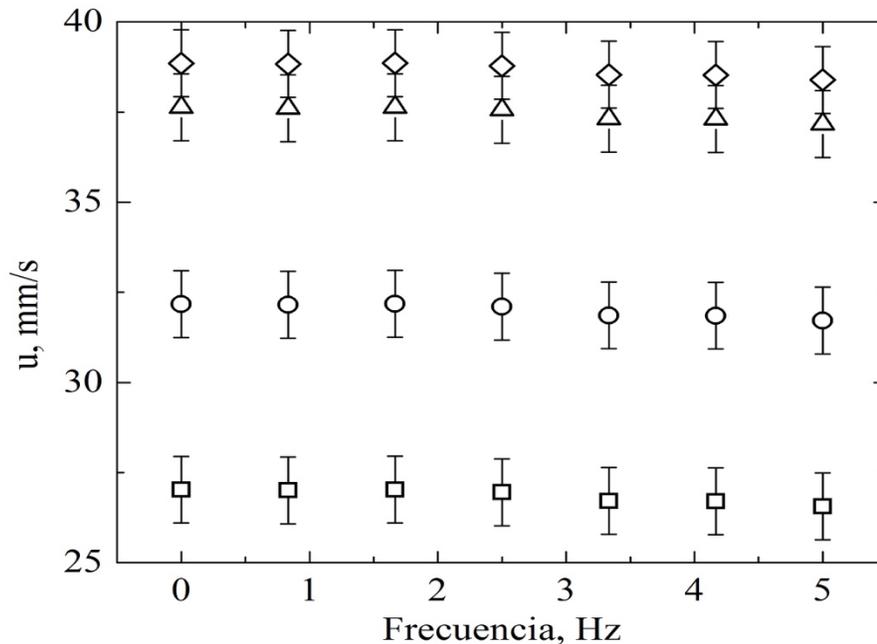


Figura 4.6. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos).

## 4.2.2 Fluido de Boger

La velocidad de sedimentación en el fluido de Boger para el caso de las cuatro esferas utilizadas se muestra a continuación:

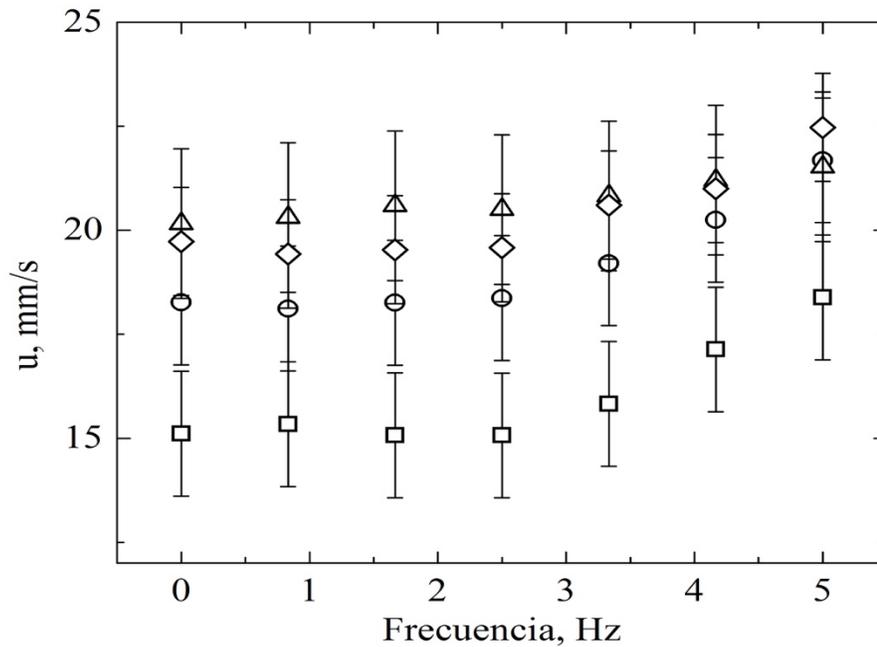


Figura 4.7. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos).

## 4.3 Levitación viscoelástica

Al analizar los videos de los experimentos realizados con el fluido viscoelástico se encontró que la esfera, en varios casos, no llegaba al fondo del contenedor, principalmente a frecuencias de rotación mayores a 0.83 Hz (Figura 4.8). Por esta razón se decidió repetir los experimentos y determinar la distancia que existe entre la esfera y el fondo del contenedor. Asimismo, se realizaron experimentos con la esfera partiendo del reposo desde el fondo del contenedor y se encontraron resultados muy similares a los obtenidos con sedimentación. Para el análisis de este fenómeno se tomarán en cuenta únicamente los resultados obtenidos sin sedimentación, en concordancia con la definición de levitación, de acuerdo con la RAE.

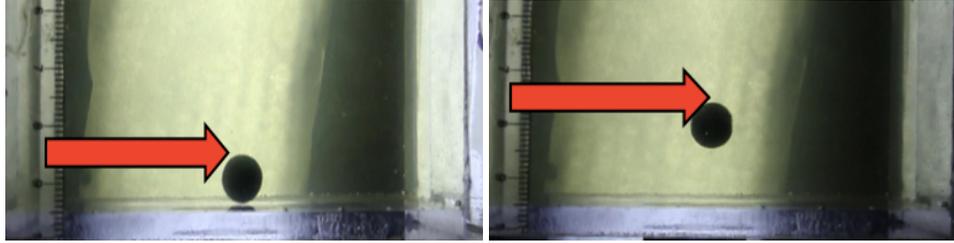


Figura 4.8. Comparación de la distancia de levitación de la esfera a diferentes frecuencias de rotación: 0.83 Hz (izquierda) y 5 Hz (derecha).

Como se observa en la Figura 4.8, fue posible determinar la distancia a la que levita la esfera con ayuda de una escala externa (una regla), la cual se mantuvo fija en todos los experimentos.

### 4.3.1 Fluido newtoniano

El fenómeno de levitación viscoelástica no ocurrió en el fluido newtoniano dando como resultado que la distancia de levitación para todas las esferas fuera igual a cero, como puede observarse en la Figura 4.9.

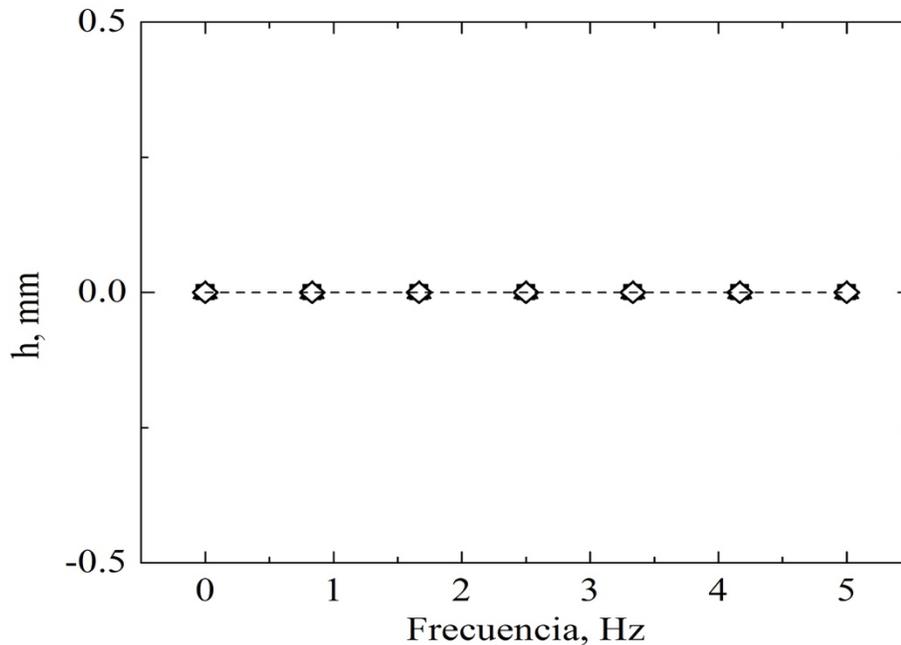


Figura 4.9. Distancia respecto al fondo del contenedor en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos). La línea punteada indica el fondo del contenedor.

### 4.3.2 Fluido de Boger

La distancia a la que levita la esfera ( $h$ ) con respecto al fondo del contenedor presentó el siguiente comportamiento en el fluido viscoelástico:

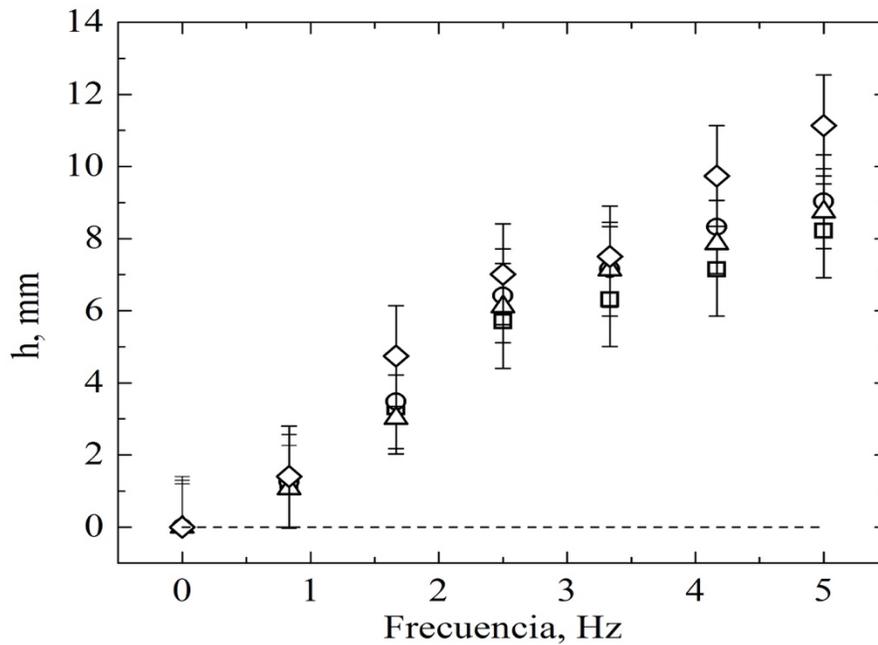


Figura 4.10. Distancia respecto al fondo del contenedor en función de la frecuencia de rotación de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos). La línea punteada indica el fondo del contenedor.

# Capítulo 5

## Análisis y discusión de resultados

### 5.1 Caracterización de fluidos

Los ajustes de datos experimentales, principalmente en el caso del fluido de Boger, se muestran a continuación.

#### 5.1.1 Fluido newtoniano

En el caso newtoniano únicamente fue necesario comprobar que se tiene una viscosidad similar a la del fluido de Boger.

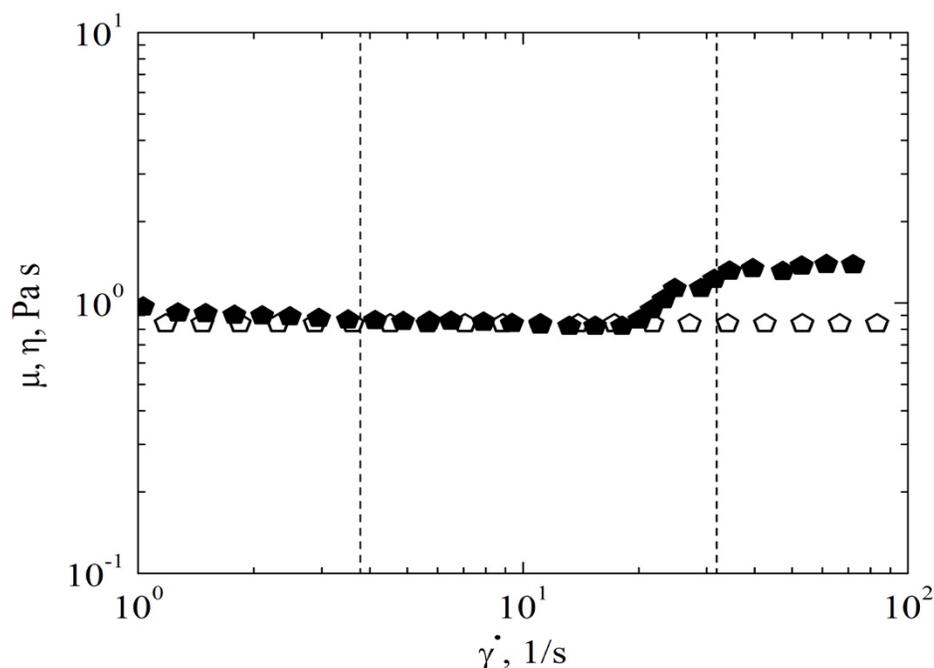


Figura 5.1. Comparación de la viscosidad del fluido newtoniano (pentágonos vacíos) y el fluido de Boger (pentágonos rellenos). El intervalo de trabajo, en términos de rapidez de corte, se muestra con las líneas punteadas.

Como puede observarse, la viscosidad del fluido newtoniano es muy similar a la del fluido de Boger, a pesar de que este último presenta un espesamiento a altas rapidezces de corte.

### 5.1.2 Fluido de Boger

Las pruebas de flujo cortante simple demostraron que este fluido presenta una viscosidad constante en cierto intervalo de rapidez de corte, comprobando que el fluido utilizado es un fluido de Boger en el intervalo  $3.51 \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 18.1 \text{ s}^{-1}$ . Los datos de la viscosidad en función de la rapidez de corte se ajustaron a un modelo de ley de potencia para conocer únicamente el adelgazamiento que presenta este fluido (Figura 5.2).

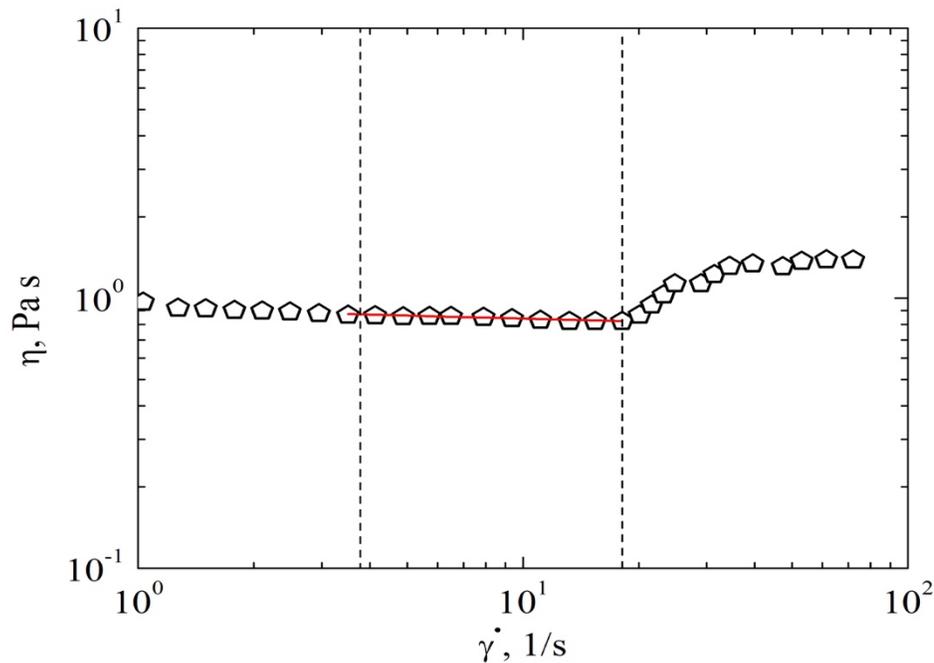


Figura 5.2. Comparación entre el ajuste del modelo ley de potencia (línea roja) con la viscosidad del fluido de Boger (pentágonos), dentro del intervalo donde esta propiedad es constante (líneas punteadas).

El adelgazamiento de este fluido es muy bajo, ya que el índice de potencia ( $n$ ) es igual a 0.9963, mientras que el índice de consistencia ( $m$ ) es igual a 0.9106 Pa s. El intervalo donde la viscosidad del fluido viscoelástico es constante es más pequeño que el intervalo de trabajo ( $3.78 \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 31.81 \text{ s}^{-1}$ ), por lo que el espesamiento del fluido (de hasta el 45%) que se observa en la Figura 5.2, el cual ocurre a  $\dot{\gamma} > 18.1 \text{ s}^{-1}$ , afectará directamente la velocidad de sedimentación de las esferas que rotan en los experimentos llevados a cabo.

Con la finalidad de obtener un tiempo de relajación característico del fluido viscoelástico se utilizó el modelo de Oldroyd-B para ajustar los resultados experimentales de la primera diferencia de esfuerzos normales ( $N_1$ , Figura 5.3), obteniendo las propiedades presentadas en la Tabla 5.1.

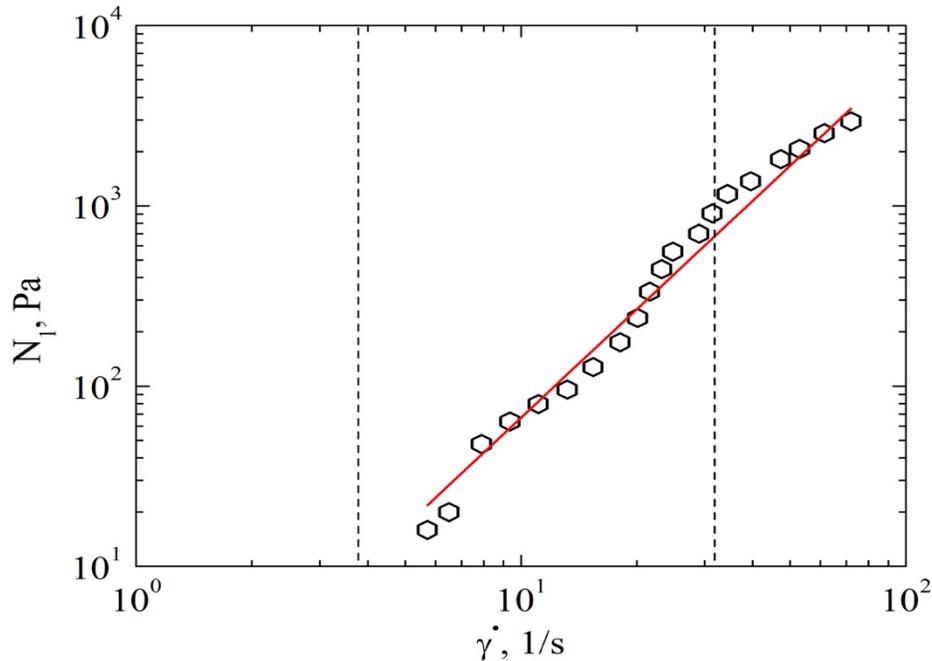


Figura 5.3. Ajuste de la primera diferencia de esfuerzos normales en función de la rapidez de corte para el fluido de Boger (hexágonos) utilizando el modelo de Oldroyd-B (línea roja). El intervalo de trabajo, en términos de rapidez de corte, se muestra con las líneas punteadas.

Tabla 5.1. Propiedades físicas correspondientes al modelo Oldroyd-B.

$\eta$ , Pa s	$\eta_s$ , Pa s	$\eta_p$ , Pa s	$\beta$	$\lambda_1$ , s	$\lambda_2$ , s
0.8444	0.1902	0.6542	0.2252	0.5102	0.1149

Las propiedades de la Tabla 5.1 fueron obtenidas a partir de las ecuaciones presentadas en el apartado 2.5.1 de este trabajo, utilizando como herramienta Microsoft Excel® para el ajuste de datos experimentales. Realizando un análisis estadístico, para cuantificar la calidad del ajuste, se calculó el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), el cual fue igual a 0.9502, esto significa que el 95% de los datos experimentales están descritos por el modelo empleado.

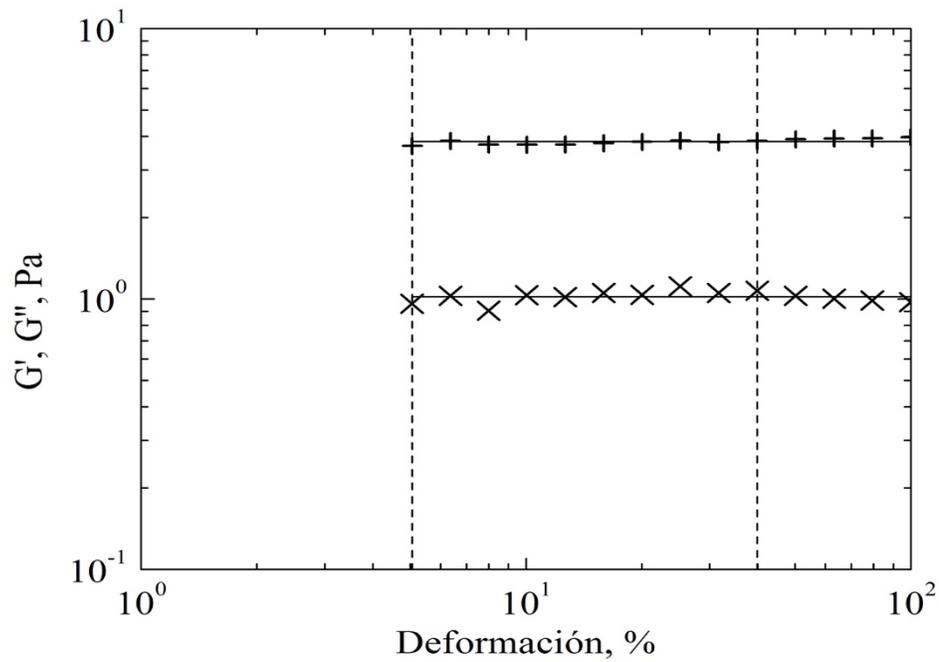


Figura 5.4. Barrido de amplitudes: módulos de almacenamiento  $G'$  (x) y de pérdida  $G''$  (+) en función del porcentaje de deformación. El intervalo de viscoelasticidad lineal es denotado por las líneas punteadas.

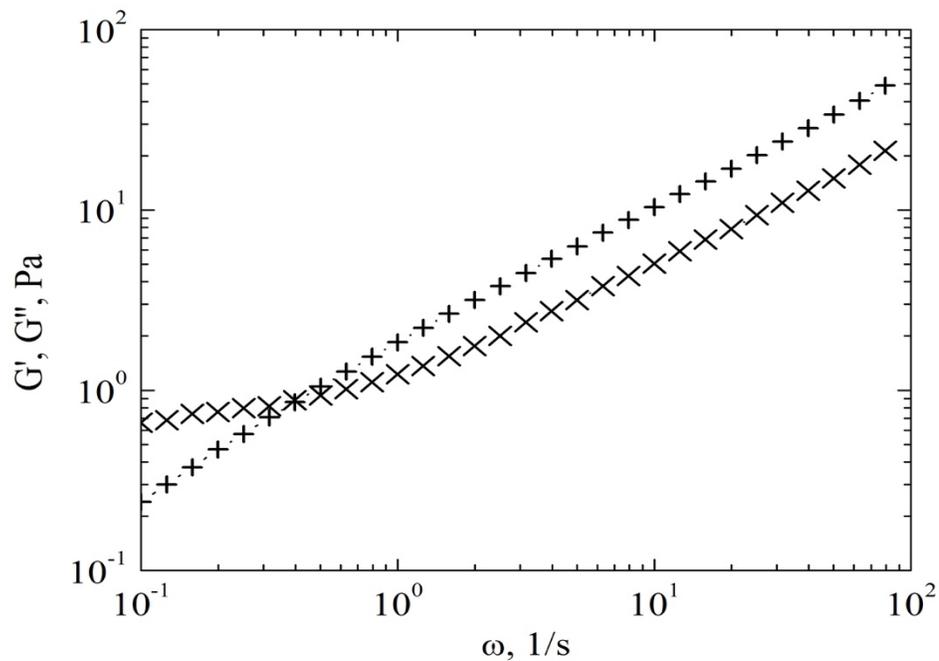


Figura 5.5. Punto de cruce entre los módulos de almacenamiento  $G'$  (x) y de pérdida  $G''$  (+). Prueba realizada a 30% de deformación.

En la Figura 5.4 se puede observar que a deformaciones mayores a 40% el fluido de Boger ya no presenta viscoelasticidad lineal, ya que el módulo de almacenamiento decae ligeramente mientras que el módulo de pérdida se mantuvo constante en todo el intervalo de deformaciones. Por esta razón se llevo a cabo el barrido de frecuencias a 30% de deformación. Por otro lado, con el barrido de frecuencias fue posible encontrar un tiempo de relajación principal del fluido, esto mediante el cruce de  $G'$  y  $G''$  (Figura 5.5), el cual fue igual a 2.5118 s.

### 5.1.3 Comparación de propiedades

Las propiedades de los fluidos empleados se presentan a continuación:

Tabla 5.2. Resumen de las propiedades de los fluidos utilizados.

Fluido	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	n	$\eta_0$ , Pa s	$\lambda_{N_1}$ , s	$\lambda_{Maxwell}$ , s
Newtoniano	1510	1	0.84	0	0
Boger	1508	0.9963	0.8444	0.5102	2.5118

La densidad del fluido fue determinada pesando volúmenes determinados de fluido con la ayuda de una probeta y una balanza con resolución de 0.01 g. De acuerdo con la Tabla 5.2, ambos fluidos presentan propiedades muy similares (viscosidad y densidad), por lo que es válido utilizarlos en este trabajo para determinar el efecto de la elasticidad en la velocidad terminal de las esferas.

La diferencia entre los tiempos de relajación obtenidos para el fluido de Boger está relacionada con el tipo de prueba que se realizó para obtenerlos, ya que para determinar  $\lambda_{N_1}$  se llevó a cabo una prueba estacionaria y para  $\lambda_{Maxwell}$  se llevó a cabo una prueba dinámica. De acuerdo con [Jackson et al., 1984], en el caso de fluidos tipo Boger, el tiempo de relajación obtenido a partir de pruebas dinámicas ( $G'$  y  $G''$ ) es más pequeño que el obtenido con datos de pruebas en estado estacionario ( $N_1$ ), lo cual no ocurrió en este caso debido, principalmente, a que las pruebas dinámicas se llevaron a cabo tiempo más tarde por problemas técnicos, cuando el fluido ya había cambiado sus propiedades a causa de la deshidratación.

Para el análisis dimensional se utilizará  $\lambda_{N_1}$ , debido a que las pruebas de flujo cortante simple se llevaron a cabo a la par que los experimentos presentados en este trabajo. Esto en concordancia con [Prilutski et al., 1983], quienes dan prioridad a  $\lambda_{N_1}$  por tomar en cuenta la contribución del

disolvente. Es claro que el hecho de utilizar  $\lambda_{N_1}$  o  $\lambda_{Maxwell}$  afecta únicamente el orden de magnitud del número de Weissenberg en el análisis dimensional, conservando el comportamiento cualitativo de los datos.

## 5.2 Sedimentación de esferas que rotan

Se realizó un análisis por separado de cada fluido utilizado para, posteriormente, compararlos.

### 5.2.1 Fluido newtoniano

Para validar la metodología se analizaron los casos de las esferas que sedimentaron en el fluido newtoniano. Inicialmente se compararon los resultados experimentales de la velocidad de sedimentación con la velocidad teórica calculada como se presentó en los antecedentes de este trabajo ( $U = \frac{(\rho_e - \rho_f)gD^2}{18\mu}$ , [Chhabra, 2006]), obteniendo una desviación estándar de 0.927 mm/s de los resultados experimentales con respecto al cálculo teórico.

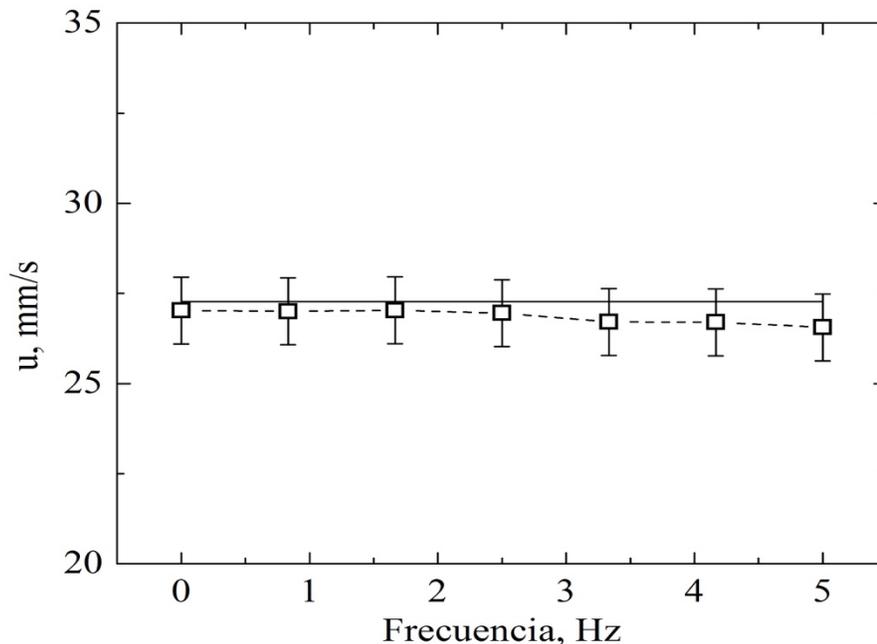


Figura 5.6. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 7.99 mm (cuadrados). La línea continua representa el cálculo teórico.

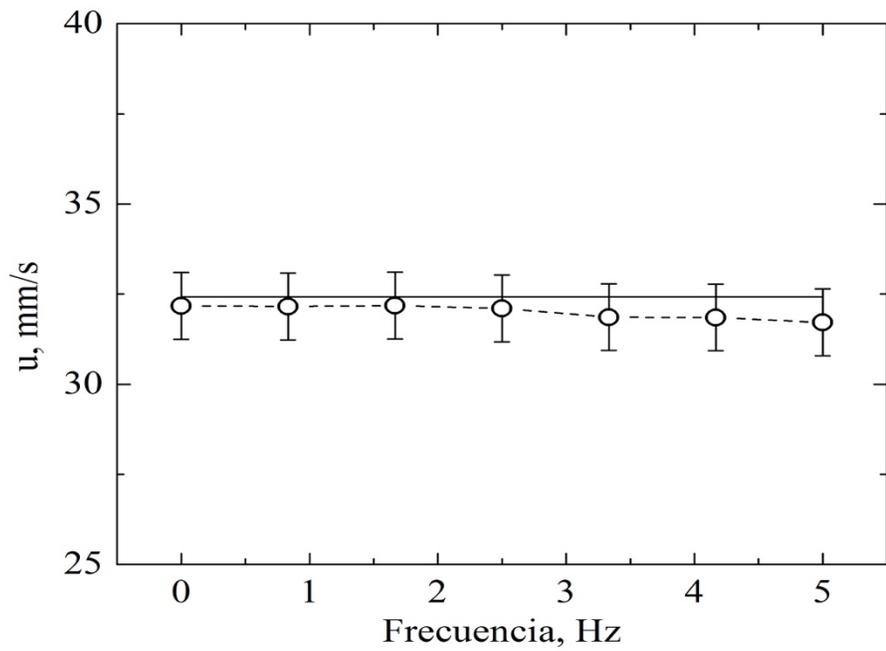


Figura 5.7. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 8.72 mm (círculos). La línea continua representa el cálculo teórico.

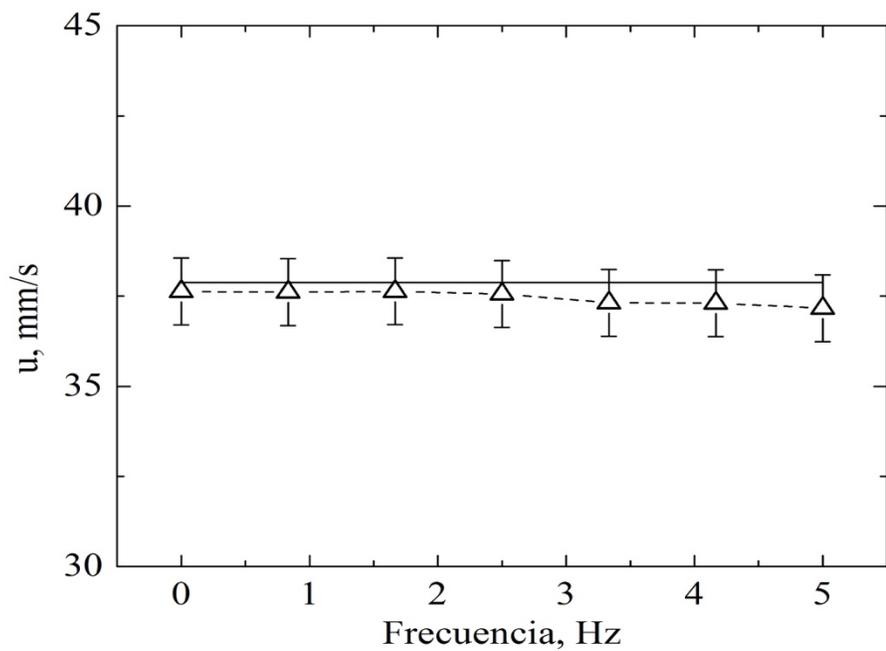


Figura 5.8. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 8.81 mm (triángulos). La línea continua representa el cálculo teórico.

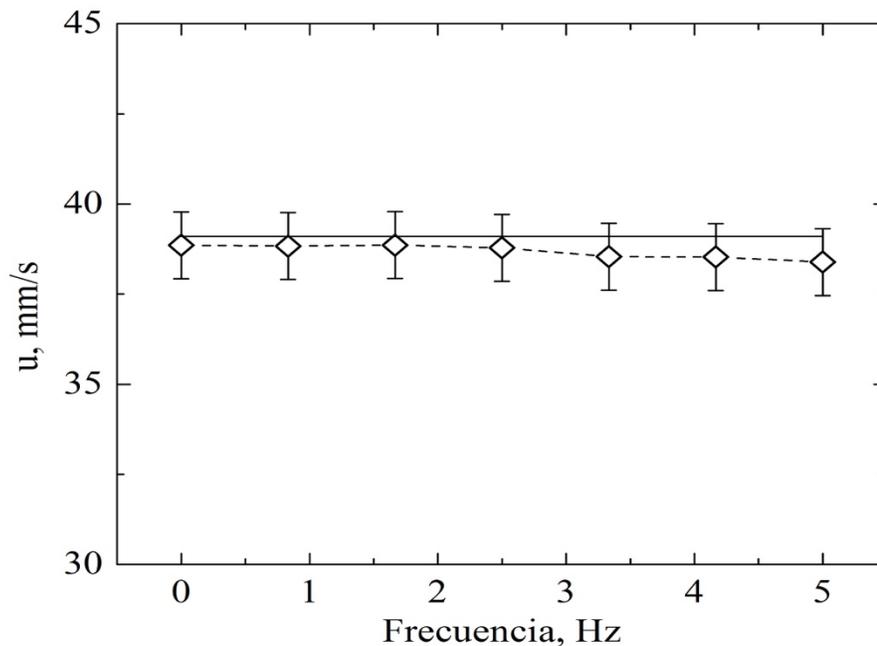


Figura 5.9. Velocidad de sedimentación en función de la frecuencia de rotación de la esfera con diámetro igual a 9.57 mm (rombos). La línea continua representa el cálculo teórico.

Como puede observarse, en las Figuras 5.6-5.9, la velocidad de sedimentación permanece prácticamente constante en todo el intervalo de frecuencias de rotación utilizado. La ligera disminución que se logra apreciar, principalmente a frecuencias de rotación altas, equivale a menos del 2%, en comparación con el caso en donde no existe rotación, de acuerdo con la Tabla 5.3.

Tabla 5.3. Comparación\* de la disminución de la velocidad de sedimentación (Dis.)\*\* con la desviación estándar (Desv.)\*\*\*.

Esfera	7.99 mm		8.72 mm		8.81 mm		9.57 mm	
Frec., Hz	Dis., %	Desv., %						
0	0	3.43	0	2.88	0	2.46	0	2.39
0.83	0.07	3.43	0.06	2.88	0.05	2.46	0.05	2.39
1.67	-0.02	3.43	-0.01	2.88	-0.01	2.46	-0.01	2.39
2.50	0.26	3.44	0.22	2.89	0.19	2.47	0.18	2.39
3.33	1.17	3.47	0.98	2.91	0.84	2.48	0.81	2.41
4.17	1.20	3.47	1.01	2.91	0.86	2.48	0.83	2.41
5	1.72	3.49	1.44	2.92	1.23	2.49	1.19	2.41

\*No se presentaron los datos de velocidad por fines prácticos.

\*\*La disminución de la velocidad de sedimentación es  $\%Dis. = \frac{u_{0Hz} - u_{xHz}}{u_{0Hz}} * 100$ , donde x va de 0.83 a 5. Los valores negativos en la disminución implican que hubo un incremento.

\*\*\*El porcentaje de la desviación estándar es  $\%Desv. = \frac{0.927mm/s}{u_{xHz}} * 100$  donde x va de 0 a 5.

Los resultados experimentales son representados por los cálculos teóricos satisfactoriamente, tomando en cuenta que el porcentaje de la desviación estándar de la velocidad de sedimentación es mayor que el porcentaje de la disminución de dicho parámetro (Tabla 5.3). Con esto se valida el arreglo experimental, comprobando lo presentado en el trabajo de [Godínez et al., 2014], quienes establecieron que la rotación no afecta la velocidad terminal de una partícula en un fluido newtoniano.

### 5.2.1.1 Efecto de la densidad de la esfera

Para analizar lo que sucede cuando sedimentan esferas del mismo diámetro pero con diferente densidad se aislaron los casos en los que se cumple con esta característica.

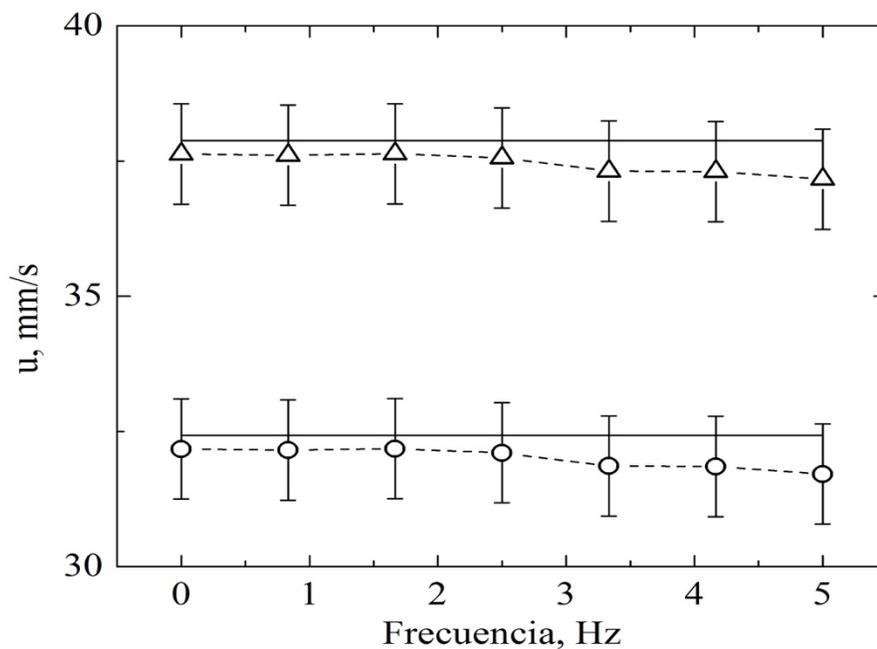


Figura 5.10. Comparación de dos esferas con, aproximadamente, el mismo diámetro (8.72 y 8.81 mm) pero con diferente densidad: 2189.1 kg/m<sup>3</sup> (círculos) y 2287.48 kg/m<sup>3</sup> (triángulos). Las líneas continuas representan el cálculo teórico.

A pesar de que únicamente se analizaron dos esferas con densidades diferentes pero con el mismo diámetro se puede observar claramente que la esfera con mayor densidad sedimenta con una mayor velocidad.

### 5.2.1.2 Efecto del diámetro de la esfera

De la misma manera que en el análisis anterior, se aislaron los casos en donde sedimentan esferas con aproximadamente la misma densidad pero con diferente diámetro.

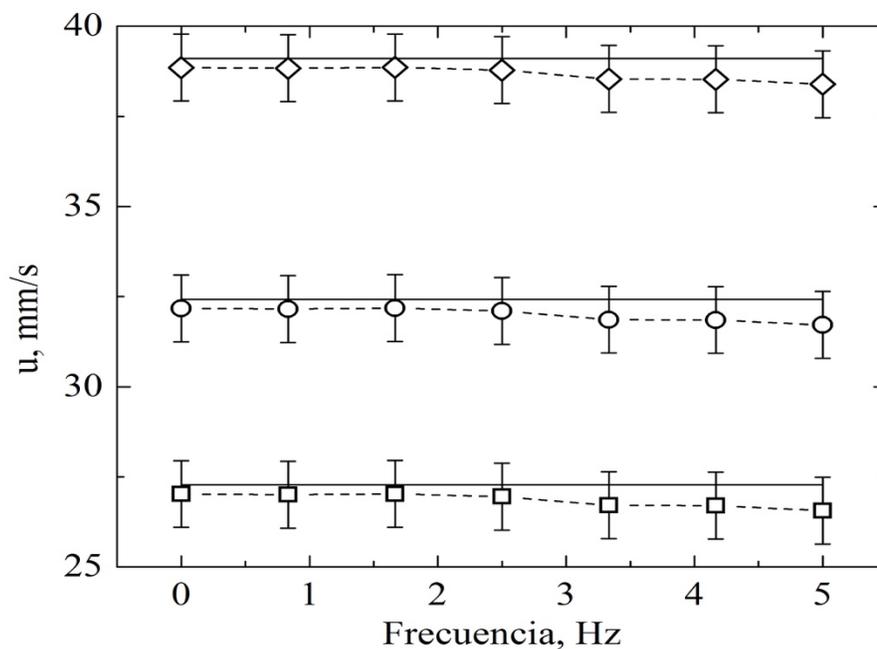


Figura 5.11. Comparación de tres esferas con, aproximadamente, la misma densidad (2190.37, 2189.1 y 2189.94 kg/m<sup>3</sup>) pero con diferente diámetro: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos) y 9.57 mm (rombos). Las líneas continuas representan el cálculo teórico.

Como puede observarse, un mayor diámetro representa una mayor velocidad de sedimentación, mientras que la esfera con menor diámetro presenta la menor velocidad terminal. Esto se explica con la relación directa que existe entre D y U ( $U = \frac{(\rho_e - \rho_f)gD^2}{18\mu}$ ).

### 5.2.1.3 Análisis dimensional

Se calcularon los coeficientes de arrastre en función del número de Reynolds obteniendo los

resultados mostrados en la Figura 5.12. Para este análisis se tomaron en cuenta todos los experimentos realizados.

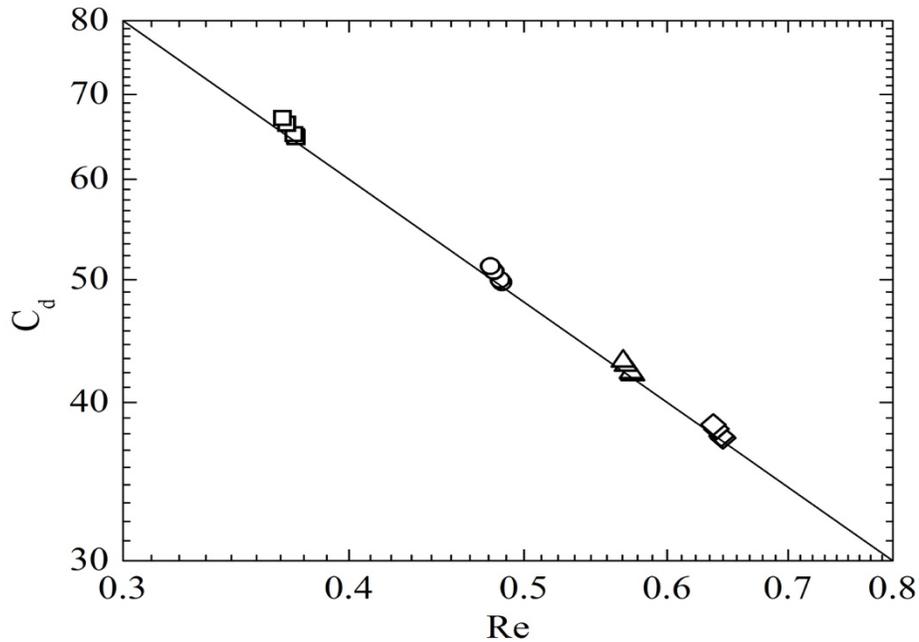


Figura 5.12. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos). La línea continua representa lo predicho por la ley de Stokes ( $24/Re$ , [Chhabra, 2006]).

Como se observa en la figura anterior, los coeficientes de arrastre en función del número de Reynolds confirman que el fluido es newtoniano, ya que los marcadores se ajustan a la pendiente que representa a la ley de Stokes. Resultados similares han sido reportados por [Solomon y Muller, 1996] pero en el intervalo  $10^{-3} < Re < 10^{-1}$ . También es posible observar en la Figura 5.12 que cada conjunto de marcadores adoptan aproximadamente la misma posición en la gráfica, esto es debido a que las velocidades de sedimentación permanecieron prácticamente constantes en todo el intervalo de frecuencias de rotación.

### 5.2.2 Fluido de Boger

Debido a la complejidad del comportamiento de los fluidos viscoelásticos, no existe un modelo teórico para calcular la velocidad de sedimentación y así realizar una comparación con los datos experimentales obtenidos, así que únicamente se presentan estos últimos.

### 5.2.2.1 Efecto de la densidad de la esfera

Para realizar este análisis se utilizaron dos esferas con el mismo diámetro pero con diferente densidad.

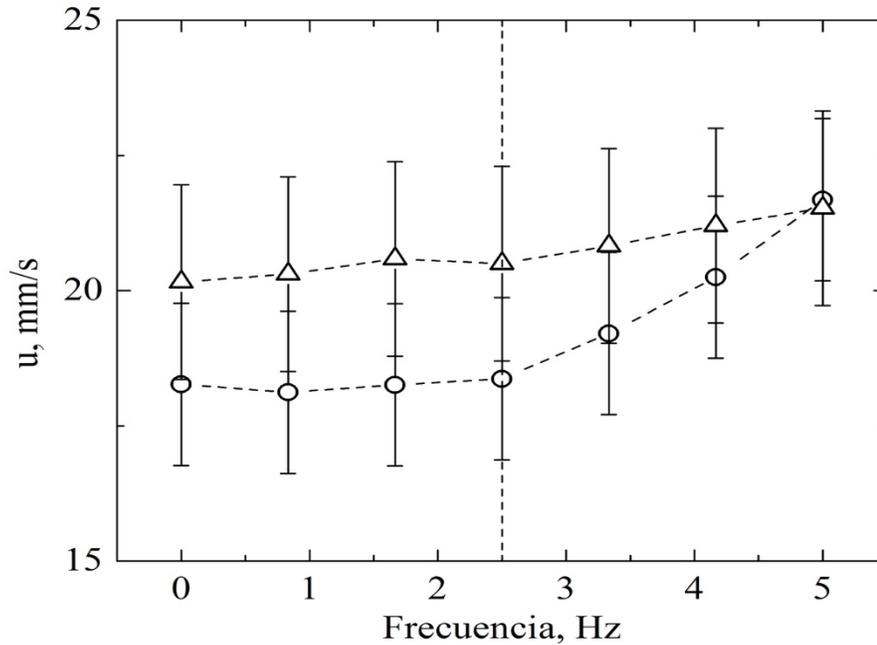


Figura 5.13. Comparación de dos esferas con, aproximadamente, el mismo diámetro (8.72 y 8.81 mm) pero con diferente densidad:  $2189.1 \text{ kg/m}^3$  (círculos) y  $2287.48 \text{ kg/m}^3$  (triángulos).

En la Figura 5.13 es posible observar que la velocidad de sedimentación permanece constante en el intervalo de frecuencias de 0 a 2.5 Hz (denotado por la línea punteada) e incrementa en el intervalo de 3 a 5 Hz. Este último comportamiento puede estar relacionado con el espesamiento y con la elasticidad ( $N_1$ ) que presenta el fluido de Boger en ese intervalo de frecuencias (Figuras 5.2 y 5.3).

### 5.2.2.2 Efecto del diámetro de la esfera

De la misma manera que en el análisis anterior, se aislaron los casos en donde sedimentan esferas con aproximadamente la misma densidad pero con diferente diámetro obteniendo los resultados mostrados en la Figura 5.14.

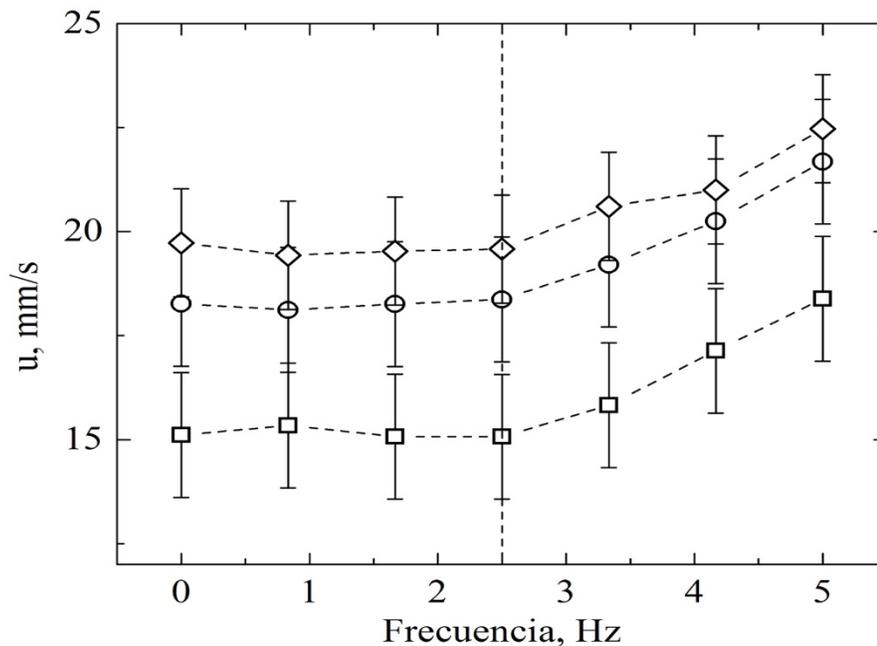


Figura 5.14. Comparación de tres esferas con, aproximadamente, la misma densidad (2190.37, 2189.1 y 2189.94 kg/m<sup>3</sup>) pero con diferente diámetro: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos) y 9.57 mm (rombos).

Para el caso donde se varía el diámetro de la esfera también se observa un incremento en la velocidad de sedimentación, lo cual ocurre también ocurre a frecuencias de rotación mayores a 3 Hz (denotado por la línea punteada); en el intervalo de 0 a 2.5 Hz la velocidad de sedimentación permanece constante. También se observa que la esfera con mayor diámetro tiene la mayor velocidad terminal mientras que la esfera con el menor diámetro presenta la menor velocidad.

En las Figuras 5.13 y 5.14 se observa un claro incremento en la velocidad de sedimentación, lo cual está relacionado con el espesamiento que presenta el fluido viscoelástico a frecuencias de rotación de la esfera mayores a 2.5 Hz ( $\dot{\gamma}=15.71s^{-1}$ ), de acuerdo con la Tabla 4.1, ya que dicha propiedad tiene lugar a rapidez de corte mayores a  $18.1s^{-1}$ . En la literatura no se encuentran datos reportados de este tipo, debido principalmente a que los fluidos tipo Boger, preparados de la misma manera que en este trabajo, normalmente presentan adelgazamiento. Sin embargo, en simulaciones numéricas, en donde se impone rotación a la partícula que sedimenta mediante flujo de corte cruzado y además se utiliza un fluido tipo Boger con adelgazamiento, se ha observado que la velocidad de sedimentación disminuye en el mismo intervalo de rapidez de corte donde la

viscosidad del fluido disminuye [Padhy et al., 2013]. La misma tendencia ha sido obtenida experimentalmente por [Van den Brule y Gheissary, 1993] y analíticamente por [Housiadas y Tanner, 2012]

### 5.2.2.3 Análisis dimensional

Para este trabajo se definió el número de Weissenberg:

$$Wi = \lambda \dot{\gamma} = \lambda \sqrt{\left(\frac{2U}{D}\right)^2 + \omega^2}$$

Donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación obtenido a partir de las pruebas de flujo cortante simple, es decir  $\lambda_{N_1}$ . El valor típico de  $\dot{\gamma}$  se calculó siguiendo lo propuesto por [Godínez et al., 2014]. De esta manera Wi toma los valores presentados en la siguiente tabla:

Tabla 5.4. Valores típicos de Wi en todo el intervalo de frecuencias de rotación para las cuatro esferas utilizadas.

Esfera	7.99 mm	8.72 mm	8.81 mm	9.57 mm
Frecuencia, Hz	Wi			
0	1.930	2.138	2.335	2.104
0.833	3.313	3.411	3.560	3.381
1.666	5.679	5.755	5.851	5.735
2.5	8.243	8.298	8.359	8.282
3.333	10.876	10.920	10.955	10.910
4.166	13.536	13.567	13.582	13.545
5	16.201	16.229	16.222	16.208

De acuerdo con la tabla anterior, en todos los experimentos se tienen números de  $Wi > 1$ , lo cual es causado principalmente por la rotación, ya que este movimiento incrementa la rapidez de corte alrededor de la esfera de manera “artificial”, conforme a la definición de  $\dot{\gamma}$  que se utilizó. Además, las cuatro esferas utilizadas presentan valores de Wi muy similares, lo que significa que la contribución de la rapidez de corte por sedimentación es muy pequeña. Es importante mencionar que si en lugar de utilizar  $\lambda_{N_1} = 0.5102$  s se utiliza  $\lambda_{Maxwell} = 2.5118$  s, el orden de magnitud de Wi cambiará de manera importante, sin embargo, el comportamiento cualitativo de los datos no cambiará. Análogamente se llevó a cabo un análisis similar al del caso del fluido newtoniano.

Inicialmente se calculó el coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds (Figura 5.15).

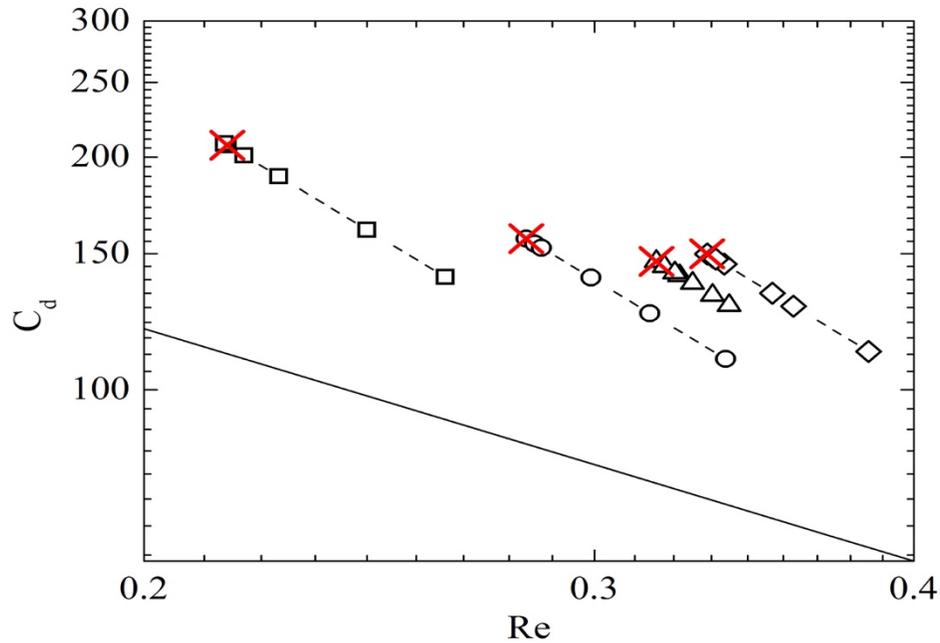


Figura 5.15. Coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos). Los marcadores señalados con rojo representan los casos en donde no existe rotación, mientras que la línea continua representa lo predicho por la ley de Stokes ( $24/Re$ , [Chhabra, 2006]).

Como puede observarse en la figura anterior, existe una disminución del coeficiente de arrastre con respecto al número de Reynolds, lo cual es causado por el incremento en la velocidad de sedimentación de las cuatro esferas utilizadas. Una manera de cuantificar dicho decremento es la siguiente:

$$\% \text{ Decremento} = \frac{C_{d0Hz} - C_{dxHz}}{C_{d0Hz}} \times 100$$

En donde x va de 0.83 a 5. El porcentaje de decremento para las diferentes frecuencias de rotación de cada esfera utilizada se presenta en la Tabla 5.5, en donde se aprecia que existe una disminución importante con frecuencias de rotación mayores a 3 Hz. Por ejemplo, la esfera con menor diámetro (7.99 mm) presentó la mayor disminución del coeficiente de arrastre, mientras que el porcentaje de decremento de la esfera más densa ( $2287.48 \text{ kg/m}^3$ ) fue el menor de todos. Aunado a esto, los

casos en donde no existe rotación presentan el mayor coeficiente de arrastre y una desviación considerable con respecto a la ley de Stokes.

Tabla 5.5. Porcentaje de disminución del coeficiente de arrastre con respecto al caso en donde no existe rotación (0 Hz).

Esfera (kg/m <sup>3</sup> )	7.99 mm	8.72 mm	8.81 mm	9.57 mm
	2190.37	2189.10	2287.48	2189.94
Frecuencia, Hz	Disminución del coeficiente de arrastre, %			
0	0	0	0	0
0.83	2.989	1.629	1.433	3.101
1.67	0.492	0.077	4.114	2.027
2.50	0.532	1.118	3.270	1.533
3.33	8.878	9.558	6.293	8.330
4.17	22.239	18.634	9.595	11.763
5.00	32.461	29.027	12.272	22.914

Para conocer las desviaciones que existen con respecto al caso newtoniano se calculó el coeficiente de arrastre normalizado ( $X_e = C_d Re/24$ , [Chhabra, 2006]) que se presenta en la siguiente figura:

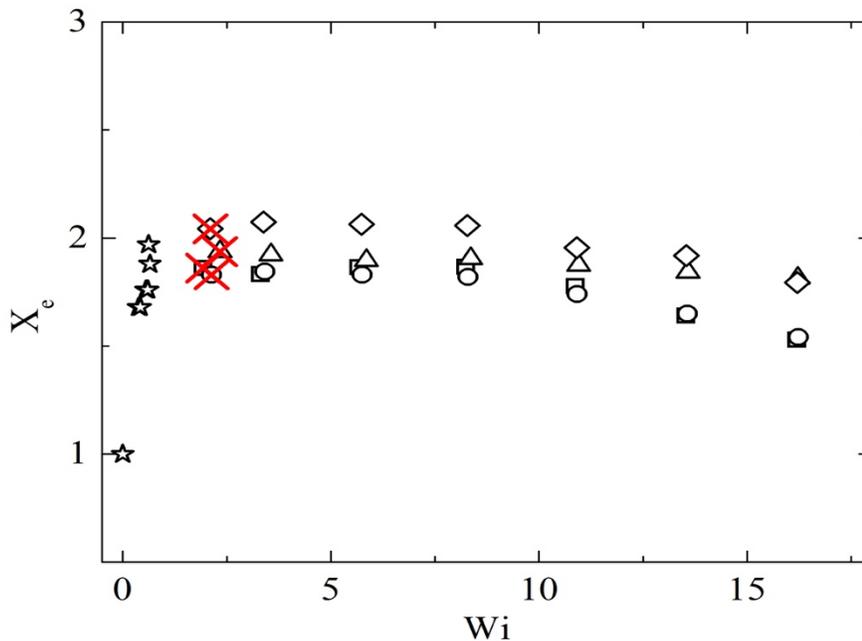


Figura 5.16. Coeficiente de arrastre normalizado en función del número de Weissenberg de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos), 9.57 mm (rombos). Los marcadores señalados con rojo representan los casos en donde no existe rotación y las estrellas los datos de [Jones et al., 1994]\*.

\*Para comparar los resultados obtenidos en este trabajo con la bibliografía existente se eligieron los datos obtenidos por [Jones et al., 1994], ya que estos autores utilizaron un fluido de Boger similar al nuestro (a base de glucosa de maíz, agua y poliacrilamida), llevando a cabo experimentos en donde la relación entre el radio de la esfera y el radio del contenedor es igual a 0.25.

Como puede observarse en la Figura 5.16, los casos estudiados en donde no existe rotación presentan un comportamiento similar al de los datos históricos, en los cuales  $X_e$  se incrementa de manera súbita en un intervalo pequeño de  $Wi$ . Se observa también una meseta en el intervalo  $0 < Wi < 8$ , donde  $X_e$  permanece constante, seguida por una ligera disminución de este coeficiente normalizado a  $Wi > 8$ , lo cual es causado por el incremento de la velocidad de sedimentación que las esferas presentaron a frecuencias de rotación mayores a 2.5 Hz. De manera general, se comprueba que existe mayor fuerza de arrastre en el fluido viscoelástico que en el caso del fluido newtoniano, ya que  $X_e$  es mayor a la unidad.

Por otro lado, para conocer el intervalo en donde domina la rapidez de corte por rotación ( $\dot{\gamma}_R$ ) y por sedimentación ( $\dot{\gamma}_S$ ) se realizó la siguiente gráfica:

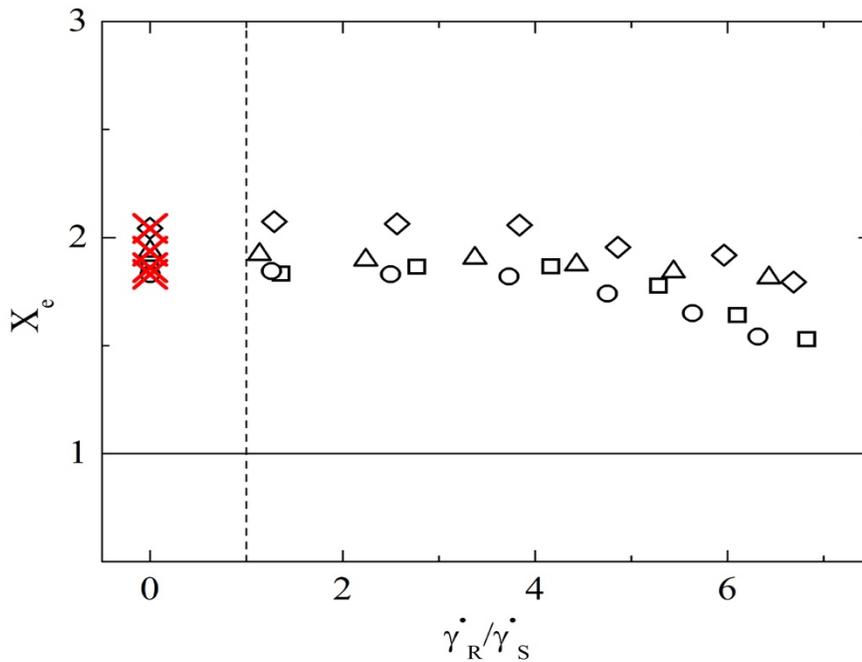


Figura 5.17. Coeficiente de arrastre normalizado en función del cociente de rapidez de corte de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos),

9.57 mm (rombos). Los marcadores señalados con rojo representan los casos en donde no existe rotación, la línea continua el caso newtoniano y la línea punteada  $\dot{\gamma}_R/\dot{\gamma}_S = 1$ .

Como puede observarse en la Figura 5.17, en la mayoría de los casos estudiados domina claramente la rotación, a excepción de los primeros datos en donde no existe dicho movimiento. Esto implica que la contribución del desplazamiento de la partícula a la rapidez de corte total es muy pequeña, en comparación con la contribución de la rotación, lo cual se observó también en la Tabla 4.1. También se puede observar que  $X_e$  disminuye al dominar, por mucho, la rotación, tendiendo hacia el comportamiento newtoniano, lo cual es causado por el incremento de la velocidad de sedimentación.

Asimismo, para conocer el efecto de las paredes del contenedor se calculó el factor de corrección por arrastre ( $Y = \frac{2ga^2(\rho_s - \rho_f)(1 - f(\frac{a}{R}))}{9\eta_0 U_s}$ , [Mendoza et al., 2010]), obteniendo los siguientes resultados:

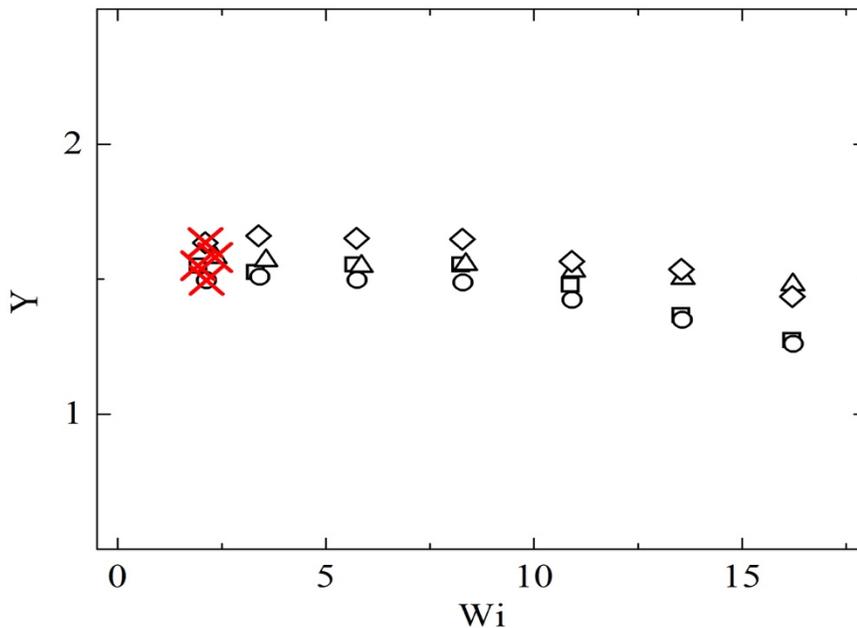


Figura 5.18. Factor de corrección por arrastre en función del número de Weissenberg de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos). Los marcadores señalados con rojo representan los casos en donde no existe rotación.

En la Figura 5.18 se puede observar una meseta en  $0 < Wi < 8$ , donde  $Y$  permanece constante, seguida por una reducción del factor de corrección por arrastre en  $Wi > 8$ , lo cual sugiere que el efecto de las paredes del contenedor disminuyó, aunque en realidad se debe a que la velocidad de sedimentación incrementó debido al espesamiento del fluido. No obstante, las esferas con menor diámetro (7.99 mm y 8.72 mm) presentaron valores de  $Y$  menores a los de la esfera con mayor diámetro (9.57 mm), comprobando que el efecto de las paredes disminuye al reducir el tamaño de las partículas, o bien, al tener un recipiente más grande.

Análogamente, para conocer el intervalo en donde domina la rapidez de corte por rotación ( $\dot{\gamma}_R$ ) y por sedimentación ( $\dot{\gamma}_S$ ) se realizó un análisis similar al del coeficiente de arrastre normalizado, obteniendo los siguientes resultados:

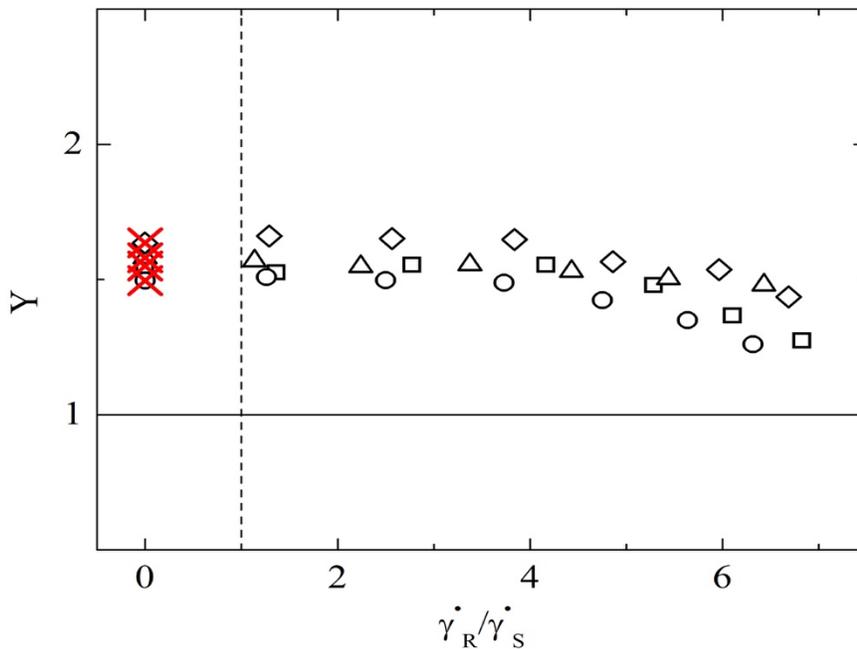


Figura 5.19. Factor de corrección por arrastre en función del cociente de rapidez de corte de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos), 9.57 mm (rombos). Los marcadores señalados con rojo representan los casos en donde no existe rotación, la línea continua el caso newtoniano y la línea punteada  $\dot{\gamma}_R / \dot{\gamma}_S = 1$

En la figura anterior se aprecia que  $Y$  a disminuir cuando la rapidez de corte total es ampliamente dominada por la rotación. Dicha disminución es consecuencia directa del incremento en la velocidad de sedimentación que ocurrió con frecuencias de rotación mayores a 2.5 Hz, donde la

rapidez de corte por rotación es mucho mayor que la rapidez de corte por sedimentación.

Tanto en la Figura 5.19 como en la Figura 5.17 se puede observar que  $\dot{\gamma}_R/\dot{\gamma}_S > 1$ . De esta manera se comprueba que la deformación característica en sedimentación de esferas que rotan en un fluido de viscoelástico está dominada por la rotación, ya que la contribución del desplazamiento de la partícula a la rapidez de corte total es muy pequeña.

### 5.2.3 Comparación entre el fluido newtoniano y el fluido de Boger

Para determinar el efecto de la viscoelasticidad se compararon los resultados obtenidos con los dos fluidos empleados.

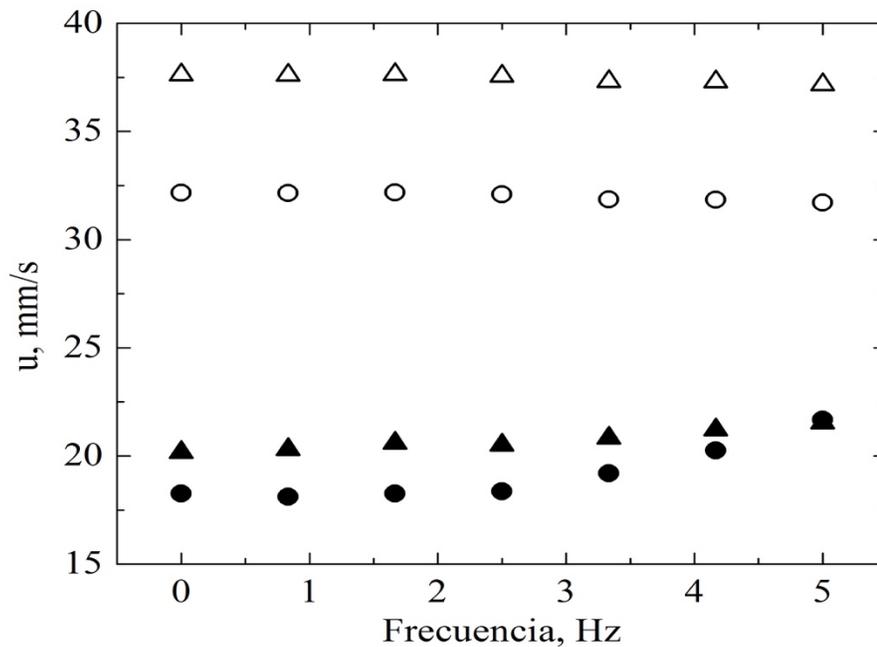


Figura 5.20. Comparación de dos esferas con diferente densidad:  $2189.1 \text{ kg/m}^3$  (círculos) y  $2287.48 \text{ kg/m}^3$  (triángulos). Fluido newtoniano (marcadores vacíos) y fluido de Boger (marcadores rellenos).

Existe una clara diferencia entre los resultados obtenidos con el fluido newtoniano y con el fluido viscoelástico. En las Figuras 5.20 y 5.21, la velocidad de sedimentación es mayor en el caso del fluido newtoniano, esta diferencia ocurrió a pesar de que se realizaron los experimentos empleando fluidos con propiedades equivalentes, en términos de densidad y viscosidad. Sin embargo, las

tendencias son muy similares, por ejemplo, la esfera más densa sedimenta con mayor velocidad en ambos fluidos, mientras que la esfera con menor diámetro sedimenta con menor velocidad en los dos fluidos.

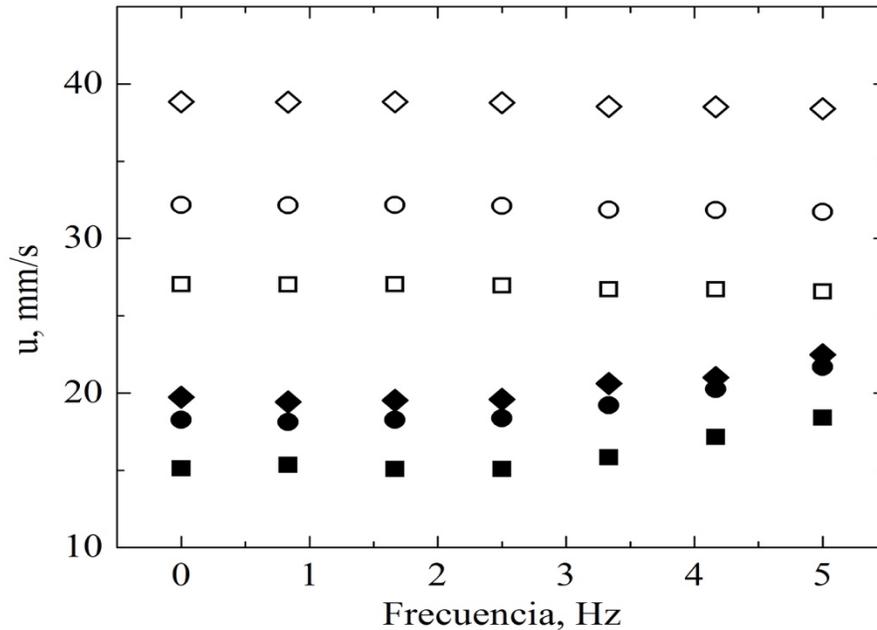


Figura 5.21. Comparación de tres esferas con diferente diámetro: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos) y 9.57 mm (rombos). Fluido newtoniano (marcadores vacíos) y fluido de Boger (marcadores rellenos).

La diferencia de los resultados de la velocidad de sedimentación entre el fluido de Boger y el fluido newtoniano se debe principalmente a que existe mayor arrastre en el fluido viscoelástico, atribuido a la presencia del polímero. Esto se puede apreciar en la Figura 5.22, donde también se observa la desviación con respecto a la ley de Stokes. No obstante, se mantiene el mismo comportamiento cualitativo en ambos fluidos, es decir, la esfera con menor diámetro presenta el menor número de Reynolds y el mayor coeficiente de arrastre, mientras que la esfera con mayor diámetro presenta el mayor  $Re$  en los dos fluidos empleados. Asimismo, se distinguen claramente los datos del fluido viscoelástico de los datos del fluido newtoniano, principalmente porque los números de Reynolds obtenidos con cada fluido son diferentes, como consecuencia de que la velocidad de sedimentación es mayor en el caso del fluido newtoniano.

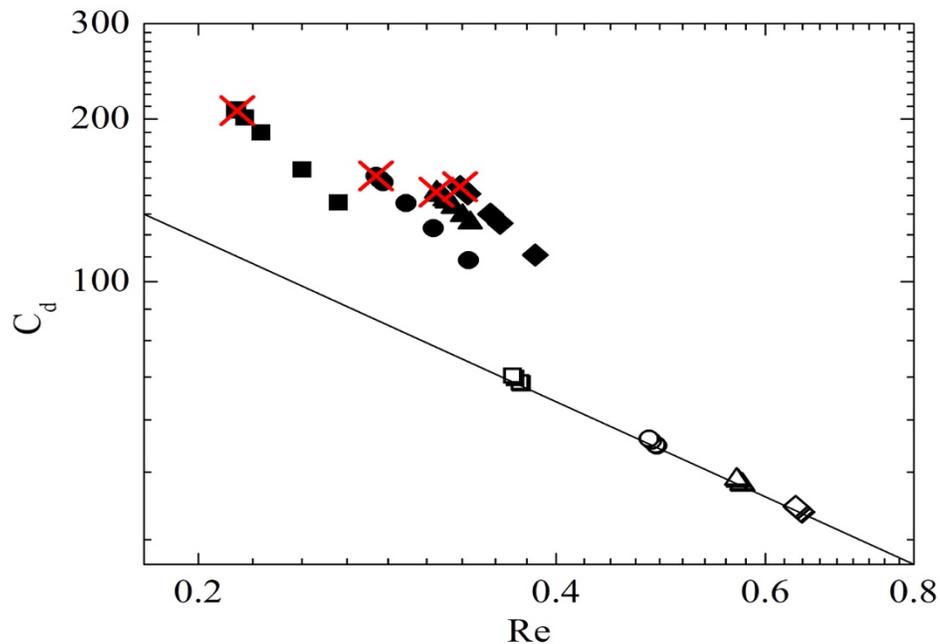


Figura 5.22. Comparación del coeficiente de arrastre: fluido newtoniano (marcadores vacíos) y fluido de Boger (marcadores rellenos), de las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos), 9.57 mm (rombos). Los marcadores señalados con rojo representan los casos en donde no existe rotación, mientras que la línea continua representa lo predicho por la ley de Stokes.

### 5.3 Levitación viscoelástica

Dicho fenómeno tuvo lugar únicamente en el caso del fluido viscoelástico, sin embargo, también se mostrarán los datos obtenidos con el fluido newtoniano. En la literatura no existe registro alguno sobre este fenómeno como tal, por lo que no fue posible comparar los resultados de este trabajo con la bibliografía existente.

#### 5.3.1 Efecto de la densidad de la esfera

Para realizar este análisis se utilizaron dos esferas únicamente.

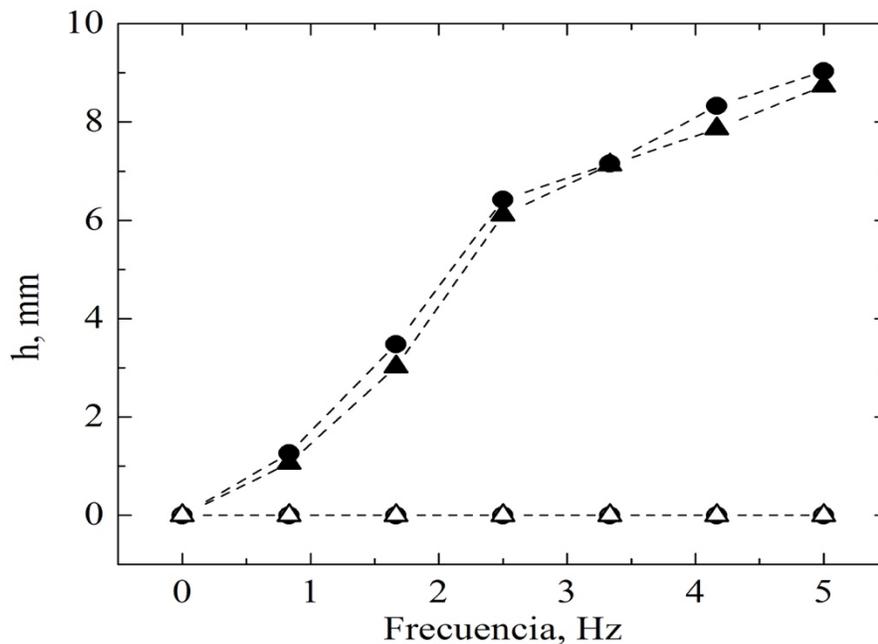


Figura 5.23. Comparación de dos esferas con diferente densidad:  $2189.1 \text{ kg/m}^3$  (círculos) y  $2287.48 \text{ kg/m}^3$  (triángulos). Fluido newtoniano (marcadores vacíos) y fluido de Boger (marcadores rellenos).

La distancia de levitación que adoptan las esferas con diferente densidad son similares, de acuerdo con la Figura 5.24, aunque la esfera más densa levita ligeramente menos, lo cual es físicamente comprensible. Claramente existe una diferencia con respecto al caso newtoniano, donde no se presentó dicho fenómeno.

### 5.3.2 Efecto del diámetro de la esfera

Para llevar a cabo este análisis se hicieron experimentos con esferas de, aproximadamente, la misma densidad pero con diferente diámetro, obteniendo los siguientes resultados:

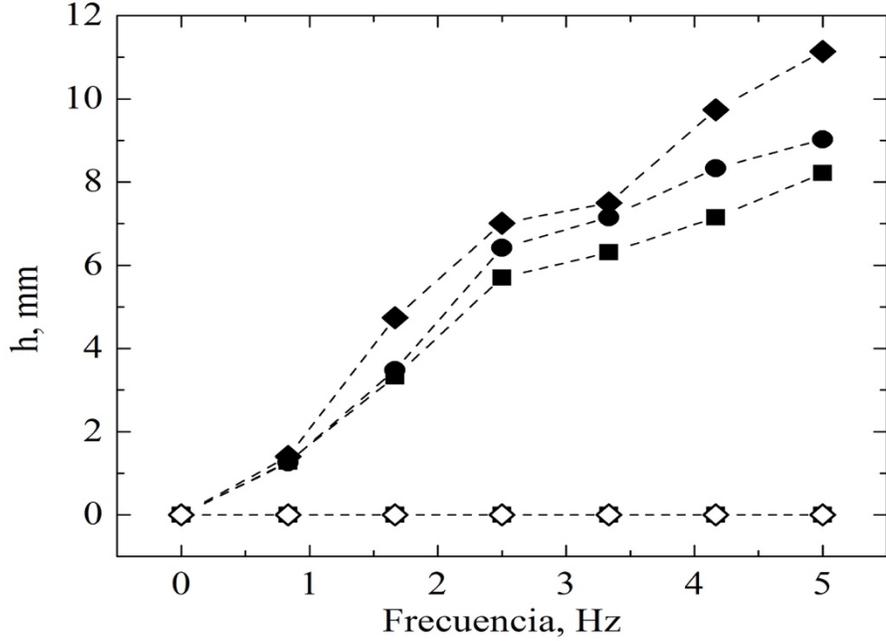


Figura 5.24. Comparación de tres esferas con diferente diámetro: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos) y 9.57 mm (rombos). Fluido newtoniano (marcadores vacíos) y fluido de Boger (marcadores rellenos).

Como puede observarse en la figura anterior, las tres esferas con diferente diámetro levitan a una distancia muy similar, aunque se puede distinguir que la esfera con mayor diámetro levita a una distancia mayor, mientras que la esfera con menor diámetro levita menos. Esto se puede relacionar con la rapidez de corte alrededor de la esfera, ya que el hecho de tener una esfera con mayor diámetro implica que se genera mayor corte en el fluido produciendo un flujo mayor en el espacio que existe entre la esfera y el fondo del contenedor y, por lo tanto, la esfera debe levitar a una mayor distancia.

### 5.3.3 Análisis dimensional

Para poder analizar el caso de todas las esferas sin importar el tamaño de las mismas se hizo adimensional la distancia de levitación ( $h/D$ ) y se definió el número adimensional  $Wi_R$ , el cual es idéntico al número de Weissenberg, pero utiliza la rapidez de corte correspondiente a la rotación:

$$Wi_R = \dot{\gamma}_R \lambda$$

Donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación obtenido a partir de las pruebas oscilatorias, es decir  $\lambda_{Maxwell}$ . En el fenómeno de levitación la esfera únicamente está rotando (Figura 5.25), no está sedimentando, por esta razón únicamente se tomó  $\dot{\gamma}_R$ . Entonces el  $Wi_R$  toma los mismos valores para todas las esferas, como se puede observar en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6. Valores típicos de  $Wi_R$ .

Esfera		7.99 mm	8.72 mm	8.81 mm	9.57 mm
Frecuencia, Hz	$\dot{\gamma}_R, s^{-1}$	$Wi_R$			
0	0	0	0	0	0
0.833	5.236	13.15	13.15	13.15	13.15
1.666	10.472	26.30	26.30	26.30	26.30
2.5	15.708	39.46	39.46	39.46	39.46
3.333	20.944	52.61	52.61	52.61	52.61
4.166	26.180	65.76	65.76	65.76	65.76
5	31.416	78.91	78.91	78.91	78.91

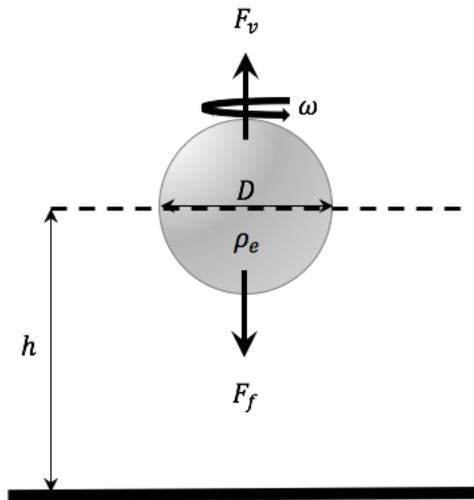


Figura 5.25. Esquema del fenómeno de levitación viscoelástica, donde  $F_v$  es la fuerza viscoelástica generada por la rotación de la esfera y  $F_p$  es el peso efectivo de la misma, respectivamente.

El intervalo de trabajo de  $Wi_R$  es considerable, debido principalmente al cambio en la frecuencia de rotación de la esfera aunado con el cambio de viscosidad. La dependencia de la altura adimensional de levitación con respecto al número de Weissenberg de rotación se aprecia en la Figura 5.26.

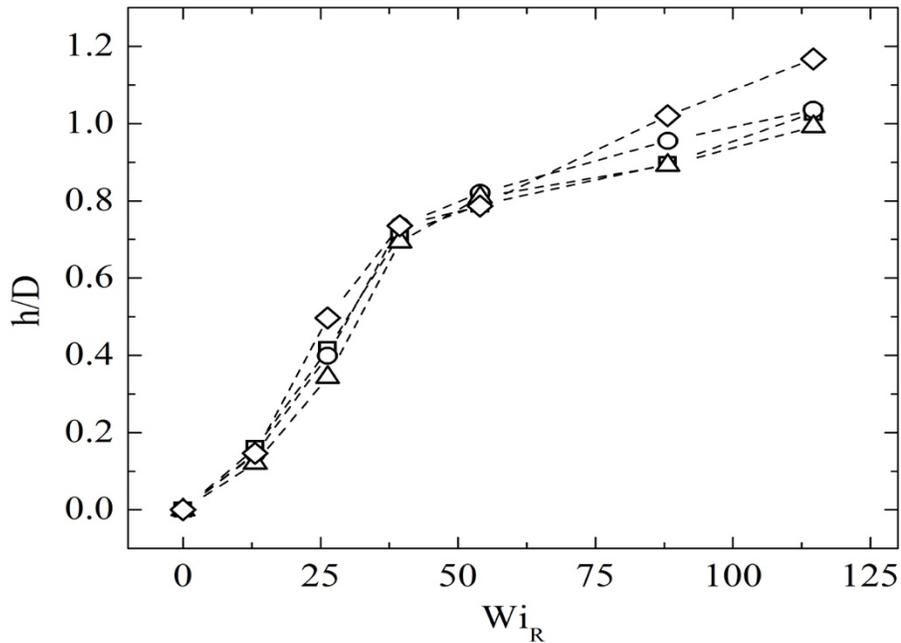


Figura 5.26. Altura de levitación adimensional con respecto al número de Weissenberg de rotación para las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos), y 9.57 mm (rombos).

En la figura anterior se aprecia claramente el efecto que tiene el cambio de viscosidad en  $Wi_R$ , lo cual involucra un cambio en la viscoelasticidad del fluido, por la definición [Morrison, 2001]:

$$\lambda_{Maxwell} = \frac{\eta_0}{G}$$

El espesamiento del fluido se consideró para recalcular el tiempo de relajación del fluido, asumiendo el valor de  $G$  constante y estimando  $\eta_0$  de las pruebas de flujo cortante simple realizadas. De esta manera se comprueba que el cambio de viscosidad del fluido es la causa principal del cambio de concavidad que tiene la altura adimensional ( $h/D$ ) con respecto a  $Wi_R$ , es decir, en un fluido más viscoso, pero con la misma elasticidad, la esfera levitaría en menor medida, sin importar el tamaño ni la densidad de la misma.

Por otro lado, para conocer el efecto de las fuerzas inerciales con respecto a las viscosas se definió un número de Reynolds de rotación:

$$Re_R = \frac{D^2 \rho_f \omega}{\eta_0}$$

De la misma manera que en el caso de  $Wi_R$ , se consideró el espesamiento del fluido modificando el valor de la viscosidad. La dependencia de  $h/D$  con respecto a  $Re_R$  se muestra en la siguiente figura:

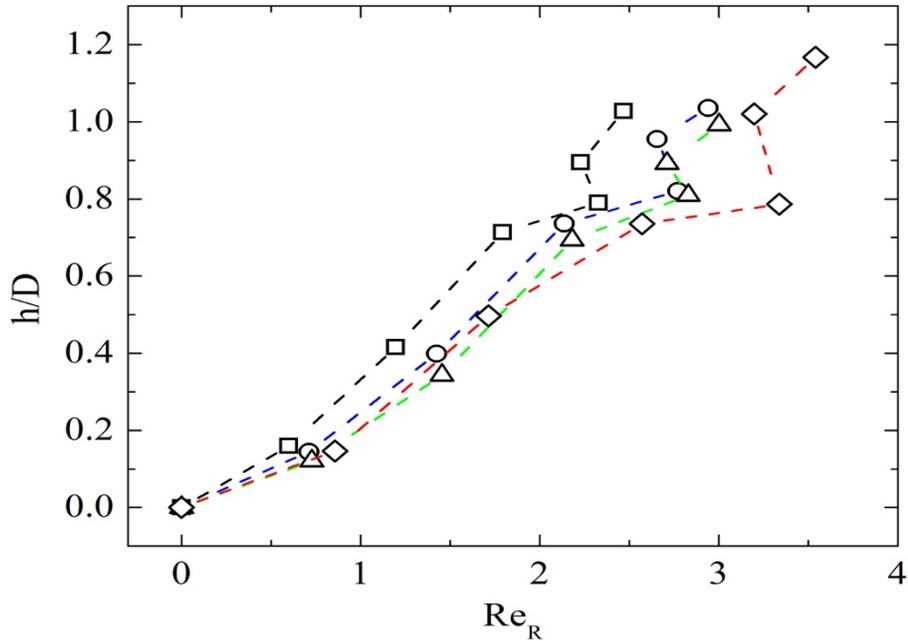


Figura 5.27. Altura de levitación adimensional con respecto al número de Reynolds de rotación para las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos).

En la Figura 5.27 se aprecia un punto de inflexión en todos los casos estudiados, el cual hace referencia al cambio de viscosidad del fluido. También se logra distinguir que la esfera más pequeña (7.99 mm) tiene el intervalo de  $Re_R$  más pequeño mientras que la esfera más grande (9.57 mm) presenta el intervalo de  $Re_R$  más amplio. El hecho de tener  $Re_R > 1$  hace referencia a que es muy probable la existencia de inestabilidades en el flujo alrededor de la esfera que levita.

Consecuentemente, también se puede conocer la dependencia de  $Re_R$  con respecto a  $Wi_R$ , como se muestra en la siguiente figura:

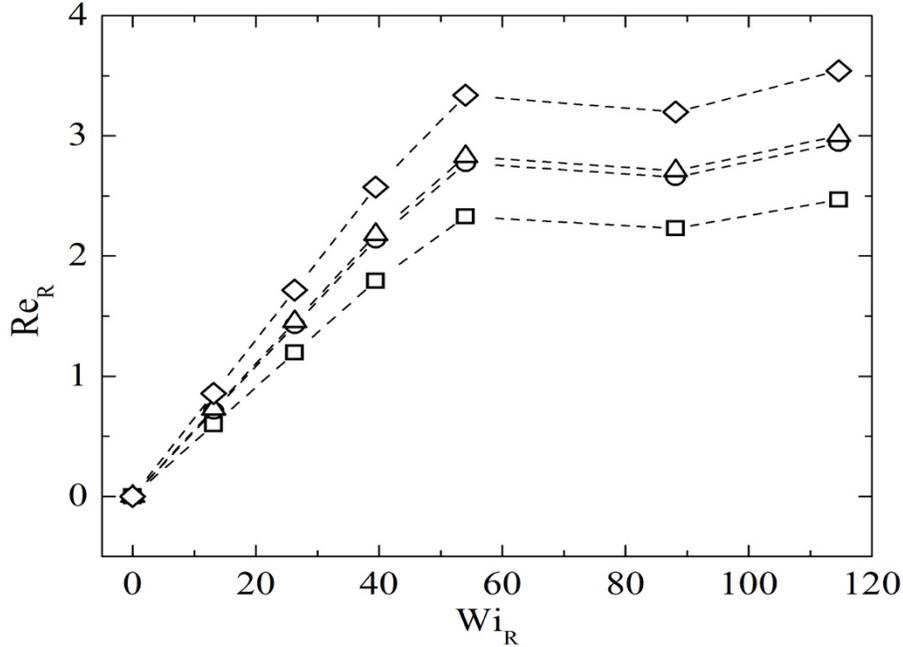


Figura 5.28. Número de Reynolds de rotación en función del número de Weissenberg de rotación para las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos).

En la figura anterior se puede observar como la esfera con mayor diámetro (9.57 mm) presenta mayores números de Reynolds, mientras que la esfera más pequeña (7.99 mm) presenta los  $Re_R$  más bajos, esto se debe a que el diámetro es la principal forma de incrementar el valor de dicho número adimensional. También es interesante observar como las dos esferas con el mismo diámetro (8.72 y 8.81 mm) presentan exactamente el mismo comportamiento de  $Re_R$  con respecto a  $Wi_R$  a pesar de que tienen diferente densidad. La dependencia de  $Re_R$  con respecto a  $Wi_R$  debería ser lineal ya que en la definición de ambos números adimensionales  $\omega$  es directamente proporcional y dicha variable es la única que se está modificando, sin embargo, existe un cambio en la pendiente, lo cual se atribuye al incremento de la viscosidad, implicando menores números de  $Re_R$  para cada una de las esferas utilizadas.

Adicionalmente, con la finalidad de tener únicamente dos tipos de fuerzas a comparar se hizo el producto entre el número  $Wi_R$  y  $Re_R$ , con lo cual se obtiene:

$$Wi_R Re_R = \frac{\eta_0}{G} \omega \frac{D^2 \rho_f \omega}{\eta_0} = \frac{D^2 \rho_f \omega^2}{G} = \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas elásticas}}$$

Por lo tanto, se puede conocer la dependencia de la altura adimensional ( $h/D$ ) con respecto al producto anterior como se muestra en la siguiente figura:

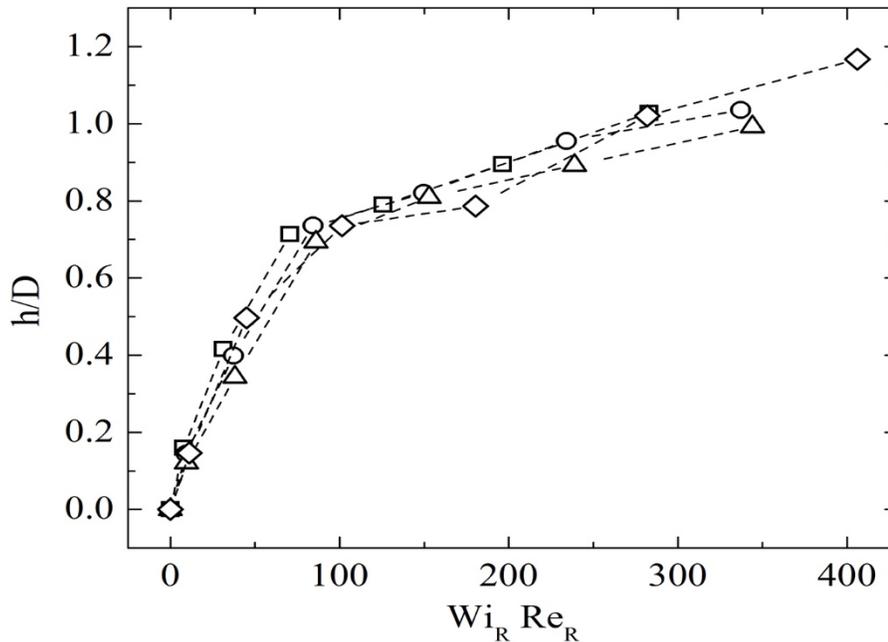


Figura 5.29. Altura de levitación adimensional con respecto al producto entre el número de Reynolds de rotación y el número de Weissenberg de rotación para las cuatro esferas utilizadas: 7.99 mm (cuadrados), 8.72 mm (círculos), 8.81 mm (triángulos) y 9.57 mm (rombos).

En la Figura 5.29 únicamente se está modificando el impacto de las fuerzas inerciales mediante el cambio de  $D$  y  $\omega$ , ya que  $G$  se consideró constante. De esta manera se puede apreciar que todas las esferas son afectadas de manera muy similar por las fuerzas inerciales. Sin embargo, se logra apreciar que la esfera con mayor diámetro (9.57 mm) alcanza la mayor altura de levitación, mientras que la más pequeña (7.99 mm) alcanza la menor altura, la cual sigue siendo ligeramente mayor que la correspondiente a la esfera más densa (8.81 mm).

# Conclusiones

## Caracterización de fluidos

Con el fluido de Boger utilizado fue posible determinar el efecto de la viscoelasticidad en la velocidad de sedimentación, además de que se observó el efecto que tiene el espesamiento de un fluido viscoelástico en el mismo parámetro. Esto se debe a que el fluido viscoelástico presenta viscosidad constante en el intervalo  $3.51 \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 18.1 \text{ s}^{-1}$ , mientras que a  $\dot{\gamma} > 18.1 \text{ s}^{-1}$  presenta espesamiento.

## Velocidad de sedimentación

Los resultados obtenidos con el fluido newtoniano permitieron comprobar lo propuesto por [Godínez et al., 2014], quienes concluyeron que la rotación no afecta la velocidad de sedimentación de la esfera. Por lo tanto, el coeficiente de arrastre en función del número de Reynolds para este fluido presentó un comportamiento idéntico al de la ley de Stokes. De esta manera también se validó la técnica experimental.

En los experimentos realizados con el fluido viscoelástico la velocidad de sedimentación de las cuatro esferas utilizadas permaneció constante en el intervalo de rapidez de corte de  $3.78 \text{ s}^{-1}$  a  $16.38 \text{ s}^{-1}$ , donde también el fluido presenta viscosidad constante ( $3.51\text{-}18.1 \text{ s}^{-1}$ ). Entonces se puede concluir que la rotación no afecta la velocidad terminal de una esfera cuando se utiliza un fluido de Boger con viscosidad constante.

También fue posible observar cómo el espesamiento del fluido viscoelástico, el cual se presentó a  $\dot{\gamma} > 18.1 \text{ s}^{-1}$ , provocó un incremento en la velocidad de sedimentación causada por la rotación impuesta, ya que dicho incremento de la velocidad también se presenta en ese intervalo de rapidez de corte. Consecuentemente, el coeficiente de arrastre disminuyó así como el coeficiente de arrastre normalizado. La idea de que la velocidad de sedimentación incremente en el mismo intervalo de rapidez de corte donde la viscosidad del fluido viscoelástico también aumenta parece contradictorio, por la definición  $U = \frac{(\rho_e - \rho_f)gD^2}{18\mu}$ , sin embargo, casos contrarios al nuestro [Padhy et al., 2013, Van den Brule y Gheissary, 1993, Housiadas y Tanner, 2012], donde la velocidad de

sedimentación disminuye en el mismo intervalo de rapidez de corte donde la viscosidad del fluido viscoelástico también disminuye, parecen apoyar nuestros resultados experimentales. Aún así, este comportamiento de la velocidad terminal también podría ser causado por la elasticidad del fluido en cuestión. Hasta este punto no contamos con suficiente información para asegurar si se debe al incremento en la viscosidad, a la elasticidad del fluido, o, en su defecto, a ambas.

Por otro lado, al comparar los datos de velocidad de sedimentación del fluido de Boger con los datos del fluido newtoniano, se encontró que la velocidad de sedimentación de las cuatro esferas utilizadas es mayor en éste último. Por lo tanto, las desviaciones con respecto a la ley de Stokes en el fluido viscoelástico son considerables, lo cual implica mayores valores del coeficiente de arrastre ( $C_d$ ). Asimismo, al contrastar los datos obtenidos sin rotación con los datos reportados por [Jones et al., 1994], quienes trabajaron bajo condiciones similares a las nuestras (mismo tipo de fluido), se observó la misma tendencia, es decir, en ambos trabajos se obtuvieron valores del coeficiente de arrastre normalizado ( $X_e$ ) muy cercanos a 2. La causa principal de que la velocidad de sedimentación fuera mayor en el fluido newtoniano es el hecho de que el arrastre es mayor en el fluido viscoelástico por la presencia del polímero, es decir, existe mayor resistencia de la esfera para moverse en éste último.

Gracias a la rotación impuesta fue posible generar una mayor rapidez de corte alrededor de la esfera de forma artificial, con lo cual  $Wi$  adoptó valores mayores a 1. Con el análisis dimensional de  $X_e$  y  $Y$  en función de  $\frac{\dot{\gamma}R}{\dot{\gamma}_s}$  fue posible comprobar que en todos los experimentos, a excepción de los casos donde no se impuso rotación, domina la rapidez de corte por rotación. Por lo tanto, esta técnica experimental permite alcanzar intervalos de  $Wi$  amplios (sin explorar anteriormente) únicamente variando la frecuencia de rotación, lo cual, desde el punto de vista experimental, es mucho más sencillo que cambiar las propiedades tanto del fluido como de las esferas, como se ha realizado en la gran mayoría de los trabajos registrados.

## **Levitación viscoelástica**

El fenómeno de levitación es propio de los fluidos viscoelásticos, como se pudo comprobar al comparar los datos experimentales obtenidos con el fluido de Boger y con el fluido newtoniano. Con los experimentos llevados a cabo también se pudo comprobar que la esfera levita partiendo

desde el fondo del contenedor de la misma manera que lo hace al sedimentar de manera incompleta, obteniendo resultados muy similares en términos de altura de levitación ( $h$ ). Sin embargo, únicamente se tomaron en cuenta los datos obtenidos con la esfera partiendo desde el fondo del contenedor, ya que de esta manera la definición de levitación describe mucho mejor el fenómeno en cuestión. Como primer acercamiento a este fenómeno se realizó el análisis dimensional, donde se definieron el número de Weissenberg de rotación ( $Wi_R$ ) y el número de Reynolds de rotación ( $Re_R$ ). Independientemente de los valores numéricos obtenidos en dicho análisis, fue posible determinar el efecto de distintas variables, entre ellas la viscosidad, ya que el espesamiento del fluido viscoelástico se presentó dentro del intervalo de rapidez de corte de trabajo. Dicho cambio en la viscosidad implica un cambio en la viscoelasticidad del fluido, por lo que se utilizó la definición de Maxwell:  $\lambda = \frac{\eta_0}{G}$ , donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación obtenido de las pruebas oscilatorias dentro del intervalo de viscoelasticidad lineal. De esta manera fue posible recalcular los números adimensionales  $Re_R$  y  $Wi_R$  utilizando el valor real de  $\eta_0$ . Con este ajuste, los valores de  $Re_R$  disminuyeron mientras que los valores de  $Wi_R$  incrementaron. Por otro lado, al analizar la dependencia de la altura adimensional con respecto al producto  $Wi_R Re_R$  fue posible determinar que el hecho de tener un mayor diámetro implica una mayor levitación a pesar de que las fuerzas inerciales afectan en mayor medida.

## **Trabajo futuro**

El espesamiento aunado con la elasticidad del fluido viscoelástico ( $N_1$ ) dio resultados interesantes, ya que la velocidad de sedimentación de la esfera se incrementa con la imposición de la rotación. Para explicar lo que sucede en el fluido es necesario utilizar técnicas de visualización, tal como PIV (Particle Image Velocimetry). Esta técnica también sería muy útil para explicar el fenómeno de levitación viscoelástica y así tener más variables medidas que se puedan relacionar con las propiedades del fluido. También es necesario llevar a cabo experimentos con otro tipo de fluidos, por ejemplo fluidos viscoelásticos adelgazantes.

El presente trabajo generó los artículos que se encuentran en el Apéndice A. Dichos artículos se encuentran en preparación para ser enviados a revistas internacionales y se presentarán en el congreso internacional 70th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamics 2017 (Apéndice B).

# APÉNDICE A

## Artículos

### A.1. Drag coefficient for a sedimentating rotating sphere in a viscoelastic fluid

#### Drag coefficient of a sedimentating rotating sphere in a viscoelastic fluid

Alfonso Castillo<sup>1</sup> and Roberto Zenit<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-360, Ciudad de México, 04510, México.*

<sup>2</sup>*Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-360, Ciudad de México, 04510, México.*

#### ABSTRACT

The sedimentation of a single sphere in a viscous fluid is a classical problem in fluid mechanics. Despite its apparent simplicity, the problem is full of delicate intricacies. In particular, for the case of viscoelastic fluids, the subject is still not fully resolved: it is unclear whether the drag force should increase or decrease (with respect to the Newtonian case) for large values of the Weissenberg number. We study this problem with a twist, literally. To extend the range of shear rates attained for a given fluid-sphere combination we make it rotate, with an external magnetic field, as it sediments. We therefore can significantly extend the range of Weissenberg numbers to well above 1. We use a Newtonian reference fluid, a Boger-type fluid and spheres of different sizes and weights. The drag coefficient and normalized drag coefficient are calculated for all cases. Our non-rotating results are in good agreement with those by [Jones et al., 1994]. We observe that for rotating-sedimenting spheres the drag is always larger than in the Newtonian case.

**Keywords:** Falling rotating sphere · Boger fluid · Drag coefficient

#### 1. Introduction

The sedimentation of solid particles in liquid under the influence of gravity is a topic of research with a long and rich tradition, continuing interest, and significant practical relevance. Although practical relevance demands considering solid particles in liquids with more complex rheological behaviour. The problem is also a central benchmark problem for the comparison and validation of numerical codes that simulate either steady or transient viscoelastic flows [Hassager and Lauridsen, 1998]. On the experimental side, [Jones et al., 1994] studied two Boger fluids, named Type-I (maltose syrup/water-based) and Type-II (polybutene-based), with findings that have been used for comparison in this work. The

Este artículo está en preparación para ser enviado a ‘Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics’.

## Viscoelastic levitation

Alfonso Castillo<sup>1</sup>, On Shun Pak<sup>2</sup>, Lailai Zhu<sup>3</sup>  
and Roberto Zenit<sup>1†</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Química, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-360, Ciudad de México, 04510, Mexico

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering, Santa Clara University, USA.

<sup>3</sup>Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University, USA.

<sup>4</sup>Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México, México, , Apartado Postal 70-360, Ciudad de México, 04510, Mexico

(Received xx; revised xx; accepted xx)

The effects of viscoelasticity in a flow have been shown to manifest themselves via symmetry breaking. In this investigation, we show a novel phenomenon that arises from this idea. We observe that when a dense sphere is rotated near a wall (the rotation being aligned with the wall-normal direction and gravity), it levitates at a fixed distance. Since the shear is larger in the gap (between the sphere and the wall) than that on the open side of the sphere, the elastic stresses are asymmetric leading to a net elastic force. The elastic force is balanced by the spheres net weight, which leads to the levitation of the rotating sphere at a stationary position from the wall. We report experiments for magnetically rotated spheres of various sizes and weights, in a Boger-type fluid. A scaling for the problem is proposed, along with supplementary numerical results.

### 1. Introduction

Information about effects of viscoelasticity in flow. Locomotion. Rheometry.

Asymmetry (Pak *et al.* 2012)

Este artículo está en preparación para ser enviado a ‘Journal of Fluid Mechanics’.

# APÉNDICE B

## Presentaciones

### B.1. 70th Annual Meeting of the American Physical Society Division of Fluid Dynamics 2017.

#### Bulletin of the American Physical Society

#### 70th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics

Sunday–Tuesday, November 19–21, 2017; Denver, Colorado

#### Session F36: Particle-Laden Flows: Experimental Techniques

8:00 AM–9:44 AM, Monday, November 20, 2017

Room: 302

Chair: Laura Villafane, Stanford University

#### **Abstract: F36.00006 : Drag coefficient for sedimentating-rotating spherical particles in a viscoelastic fluid**

9:05 AM–9:18 AM

[Preview Abstract](#)

*MathJax On* | [Off](#)   [← Abstract](#) →

#### **Authors:**

Alfonso Castillo

(Universidad Nacional Autonoma de Mexico)

Roberto Zenit

(Universidad Nacional Autonoma de Mexico)

The sedimentation of a single sphere in a viscous fluid is a classical problem in fluid mechanics. Despite its apparent simplicity, the problem is full of delicate intricacies. In particular, for the case of viscoelastic fluids, the subject is still not fully resolved: it is unclear whether the drag should increase or decrease (with respect to the Newtonian case) for large values of the Weissenberg number. We study this problem with a twist, literally. To extend the range of shear rates attained for a given fluid-sphere combination we make it rotate, with an external magnetic field, as it sediments. We therefore can significantly extend the range of Weissenberg numbers to well above 1. We use a Newtonian reference fluid, a Boger-type fluid and spheres of different sizes and weights. The drag coefficient, and drag correction factor are calculated for all cases. Our non-rotating results are in good agreement with those by Jones et al., 1994. We observe that for rotating-sedimenting spheres the drag is always larger than in the Newtonian case.

## Bulletin of the American Physical Society

### 70th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics Sunday–Tuesday, November 19–21, 2017; Denver, Colorado

#### Session E38: Non-Newtonian Flows: Polymer Solutions

4:55 PM–6:13 PM, Sunday, November 19, 2017

Room: 304

Chair: Gabriel Juarez, University of Illinois

#### **Abstract: E38.00003 : Viscoelastic levitation**

5:21 PM–5:34 PM

[Preview Abstract](#)

[MathJax On | Off](#)   [← Abstract →](#)

#### **Authors:**

Roberto Zenit  
(Univ Nacl Autonoma de Mexico)

Alfonso Castillo  
(Univ Nacl Autonoma de Mexico)

Lailai Zhu  
(Princeton University)

On Shun Pak  
(Santa Clara University)

The effects of viscoelasticity in a flow have been shown to manifest themselves via symmetry breaking (Pak et al. 2012). In this presentation, we show a novel phenomenon that arises from this idea. We observe that when a dense sphere is rotated near a wall (the rotation being aligned with the wall-normal direction and gravity), it levitates at a fixed distance. Since the shear is larger in the gap (between the sphere and the wall) than that on the open side of the sphere, the elastic stresses are asymmetric leading to a net elastic force. The elastic force is balanced by the sphere's net weight, which leads to the levitation of the rotating sphere at a stationary position from the wall. We report experiments for magnetically rotated spheres of various sizes and weights, in a Boger-type fluid. A scaling for the problem is proposed, along with supplementary numerical results.

## Referencias

1. W. M. Jones, A. H. Price, K. Walters, The motion of a sphere falling under gravity in a constant-viscosity elastic liquid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 53 (1994) 175-196.
2. E. T. G. Bot, M. A. Hulsen, B. H. A. van den Brule, The motion of two spheres falling along their line of centres in a Boger fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 79 (1998) 191-212.
3. R. Owens, T. Phillips, *Computational rheology*, Imperial College Press, London, 2002.
4. B. Caswell, O. Manero, B. Mena, Recent developments on the slow viscoelastic flow past spheres and bubbles, *Rheology Reviews, Brit. Soc. Rheol.*, 2 (2004) 197-223.
5. G. H. McKinley, Steady and transient motion of spherical particles in viscoelastic liquids in R. P. Chhabra and D. De Kee, *Transport processes in bubbles, drops and particles*”, 2<sup>nd</sup> edition, 2001.
6. R. Clift, J. R. Grace, M. E. Weber. *Bubbles, Drops and Particles*, Dover Publications, New York, 2005.
7. R. P. Chhabra. *Bubbles, Drops and Particles in Non-Newtonian Fluids*, CRC Press, Florida, 2006.
8. G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
9. L. Becker, G. H. McKinley, H. K. Rasmussen, O. Hassager, The unsteady motion of a sphere in a viscoelastic fluid, *J. Rheol.* 38(2) (1994) 377-403.
10. K. Watanabe, H. Kui, I. Motosu, Drag of a sphere in dilute polymer solutions in high Reynolds number range, *Rheol. Acta*, 37(4) (1998) 328-335.
11. R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, 2, Wiley, New York, 1987.

12. E. Degand, K. Walters, On the motion of a sphere falling through an elastic liquid contained in a tightly-fitting cylindrical container, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 57 (1995) 103-115.
13. M. Solomon, S. Muller, Flow past a sphere in polystyrene-based Boger fluids: the effect on the drag coefficient of finite extensibility, solvent quality and polymer molecular weight, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 62 (1996) 81-94.
14. C. Chmielewski, K. L. Nichols, K. Jayaraman, A comparison of the drag coefficients of spheres translating in corn-syrup-based and polybutene-based Boger fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 35 (1990) 37-49.
15. M. D. Chilcott, J. M. Rallison, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 29 (1988) 381-432.
16. D. V. Boger, M. A. Zirnsak, R. J. Binnington, contributed talk at the 65<sup>th</sup> Annual Meeting of the Society of Rheology, Boston, MA, 1993.
17. B. Mena, O. Manero, L. G. Leal, The influence of rheological properties on the slow flow past spheres, *J. No-Newtonian Fluid Mech.* 26 (1987) 247-275.
18. G. Gheissary, B. van den Brule, Unexpected phenomena observed in particle settling in no-Newtonian media, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 67 (1996) 1-18.
19. V. Tirtaatmadja, P. H. T. Uhlherr, T. Sridhar, Creeping motion of spheres in fluid M1, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 35 (1990) 327-337.
20. A. J. Mendoza-Fuentes, O. Manero, R. Zenit, Evaluation of drag correction factor for spheres settling in associative polymers, *Rheol. Acta*, 49 (2010) 979-984.
21. R. P. Chhabra, P. H. T. Uhlherr, D. V. Boger, The influence of fluid elasticity on the drag coefficient for creeping flow around a sphere, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 6 (1980) 187-199.
22. M. T. Arigo, D. R. Rajagopalan, N. T. Shapely, G. H. McKinley, The sedimentation of a sphere through an elastic fluid: part 1- steady motion, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 60 (1995) 225-257.

23. D. Fabris, S. J. Muller, D. Liepmann, Wake measurements for flow around a sphere in a viscoelastic fluid, *Phys. Fluids*, 11 (1999) 3599.
24. O. Hassager, Negative wake behind bubbles in non-Newtonian liquids, *Nature*, 279 (1979) 402.
25. R. H. Thomas, K. Walters, The motion of an elastic-viscous liquid due to a sphere rotating about its diameter, *Q. J. Mech. Appl. Math.* 17 (1964) 39-53.
26. K. Walters, J. Savins, A rotating sphere elastoviscometer, *J. Rheol.* 9 (1965) 407-416.
27. H. Giesekus, Mass and heat transfer at low flow of viscoelastic fluids around a rotating sphere, *Rheol. Acta*, 9 (1970) 30-38.
28. O. Manero, B. Mena, On the measurement of second normal stresses using a rotating-sphere viscometer, *Chem. Eng. J.* 15 (1978) 159-163.
29. R. Hermes, Measurement of the limiting viscosity with a rotating sphere viscometer, *J. Appl. Polym. Sci.* 10 (1966) 1793-1799.
30. R. Mashelkar, D. Kale, J. Kelkar, J. Ulbrecht, Determination of the material parameters of viscoelastic fluids by rotational non-viscometric flows, *Chem. Eng. Sci.* 27 (1972) 973-985.
31. J. Kelkar, R. Mashelkar, J. Ulbrecht, A rotating sphere viscometer, *J. Appl. Polym. Sci.* 17 (1973) 3069-3083.
32. A. Acharya, P. Maaskant, The measurement of the material parameters of viscoelastic fluids using a rotating sphere and a rheogoniometer, *Rheol. Acta*, 17 (1978) 377-382.
33. K. Walters, N. D. Waters, On the use of a rotating sphere in the measurement of elastico-viscous parameters, *Br. J. Appl. Phys.* 14 (1963) 667.
34. B. Mena, E. Levinson, B. Caswell, Torque on a sphere inside a rotating cylinder, *Z. Angew. Math. Phys. ZAMP*, 23 (1972) 173-181.

35. F. A. Godínez, E. de la Calleja, E. Lauga, R. Zenit, Sedimentation of a rotating sphere in a power-law fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 213 (2014) 27-30.
36. H. A. Barnes, J. F. Hutton, K. Walter, *An introduction to rheology*, Elsevier, (1989).
37. M. B. Bush, On the stagnation flow behind a sphere in a shear-thinning viscoelastic fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 55 (1994) 229-247.
38. K. P. Jackson, K. Walters, R. W. Williams, A rheometrical study of Boger fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 14 (1984) 173-188.
39. G. Prilutski, R. K. Gupta, T. Sridhar, M. E. Ryan, Model viscoelastic liquids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 12 (1983) 233.
40. F. A. Morrison, *Understanding Rheology*, Oxford University Press, New York, NY, 2001.
41. C. W. Mackosco, *Rheology: Principles, Measurements and Applications*, Wiley, New York, 1994.
42. D. V. Boger, A highly elastic constant-viscosity fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 3 (1977/78) 87-91.
43. D. F. James, Boger Fluids, *Annual Review of Fluid Mech.* 41 (2009) 129-42.
44. K. Walters, M. F. Webster, H. R. Tamaddon-Jahromi, Experimental and computational aspects of some contraction flows of highly elastic liquids and their impact on the relevance of the Couette correction in extensional rheology, *Proc. 2<sup>nd</sup> Southern African Conference on Rheology (SASOR 2)*, 2008, pp. 1-6.
45. F. A. Godínez, O. Chávez, R. Zenit, Note: Design of a novel rotating magnetic field device, *Rev. Sci. Instrum.* 83 (2012), 066109.
46. L. M. Quinzani, G. H. McKinley, R. A. Brown, R. C. Armstrong, Modeling the rheology of polyisobutylene solutions, *J. Rheol.* 34 (1990) 705-748.
47. K. Walters, R. I. Tanner in R. P. Chhabra and D. De Kee, *Transport processes in bubbles*,

drops and particles, Hemisphere Publishing, New York, 1992.

48. C. Bisgaard, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 12 (1983) 283-302.
49. S. Padhy, E. S. G. Shaqfeh, G. Iaccarino, J. F. Morris, N. Tonmukayakul, Simulations of a sphere sedimenting in a viscoelastic fluid with cross shear flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 197 (2013) 48-60.
50. B. H. A. A. van den Brule and G. Gheissary, Effects of fluid elasticity on the static and dynamic settling of a spherical particle, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 49 (1993) 123-132.
51. K. D. Housiadas and R. I. Tanner, The drag of a freely sedimentating sphere in a sheared weakly viscoelastic fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 183-184 (2012) 52-56.
52. O. S. Pak, L. Zhu, L. Brandt and E. Lauga, Micropropulsion and microrheology in complex fluids via symmetry breaking, *Phys. Fluids*, 24 (2012) 103102.