UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Sobre diversos tipos de álgebras topológicas y álgebras de funciones continuas

Tesis
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
Pavel Ramos Martínez

TUTOR PRINCIPAL
Dr. Hugo Arizmendi Peimbert
Instituto de Matemáticas, UNAM

COMITÉ TUTOR
Dr. Carlos Hernández Garciadiego
Instituto de Matemáticas, UNAM

Dra. Carmen Martínez Adame Isais
Facultad de Ciencias, UNAM

Ciudad de México, octubre 2017

Agradecimientos:

Este trabajo esta dedicado a todas las personas con las que he compartido momentos buenos y malos en mi vida. Principalmete a mis padres Hortensia y Raúl pues sin su entusiasmo y ganas de salir adelante simplemente esto no sería posible. A mis hermanas Itzel y Sarahi por tantas risas compartidas y a mamá Ene, mi abuela, la cual siempre he apreciado.

A todos mis amigos Carmen Dení, Diana, Cinthia, Felipe, Ramiro, Israel y los demás que al momento de escribir esto no recuerde.

A mis profesores y sinodales cuyo esfuerzo conjunto hizo posible esta tesis, principalmente a Hugo Arizmendi y Angel Carrillo cuyas discusiones matemáticas siempre son enriquecedoras. Gracias por todo el conocimiento compartido.

Índice general

Introducción

Un álgebra topológica A es un álgebra compleja en la cual esta definida una topología de espacio vectorial τ de Hausdorff tal que el producto en A es continuo, si (A, τ) es un espacio localmente convexo entonces la topología está determinada por una familia de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que para cada $\alpha \in I$ existe $\beta \in I$ tal que

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta$$

para cada $x, y \in A$. Es un hecho conocido que la familia de seminormas es numerable, digamos $\{\| \ \|_i\}_{i=1}^{\infty}$, si y sólo si A es metrizable, si ádemas el álgebra es completa y localmente convexa se dice usualmente que A es una B_0-álgebra. Por otra parte se dice que un álgebra topológica es localmente m-convexa, en forma abreviada m-convexa, si la familia de seminormas satisface que dada $\alpha \in I$

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha$$

para cada $x, y \in A$. Las álgebras localmente m-convexas resultan de gran importancia pues en cierto sentido representan una buena generalización de las álgebras de Banach. Un concepto importante en álgebras topológicas es el de espectro de un elemento, si x es un elemento de un álgebra A con unidad e, definimos el espectro usual de x como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ no es invertible}\}$$

en algunos casos este espectro es vacío, sin embargo bajo ciertas condiciones no lo es, por ejemplo cuando se trata de un álgebra es conmutativa, m-convexa y completa, ver [53] teorema 12.8. En el caso en que el espectro es no vacío se define el radio espectral como

$$R(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Dada A una B_0-álgebra y $z \in A$, se dice que $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base cíclica para A si para cada elemento $x \in A$ existen escalares únicos $\{\lambda_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

tales que $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$. Un ejemplo de una B_0-álgebra con una base cíclica es $H(\Omega)$ el álgebra de funciones holomorfas definidas en un dominio Ω simplemente conexo y con la topología compacto-abierto. Varios autores han estudiado este tipo de álgebras [5, 6, 7, 50] y algunos resultados que destacan son los siguientes: Watson en [50] probó que en una B_0-álgebra localmente m-convexa con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ el espectro satisface que

$$D(0, R(z)) \subseteq \sigma(z) \subseteq \overline{D(0, R(z))}$$

donde $D(0, R(z)) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq R(z)\}$ y que A es isomorfa al álgebra $H(\Omega)$ si y sólo si $\sigma(z)$ es abierto. H. Arizmendi y A. Carrillo estudiaron en [5, 6, 7] B_0-álgebras con base cíclica sin la hipótesis de m-convexidad y encontraron resultados similares sobre el espectro $\sigma(z)$ con algunos otros tipos de radios espectrales, además lograron establecer la relación entre dos base cíclicas $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ en una misma B_0-álgebra.

En esta tesis decimos que A una B_0-álgebra con z un elemento invertible tiene una base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ si para cada $x \in A$, existen escalares únicos $\{\lambda_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x) z^{-n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ convergen en A y

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n.$$

Un ejemplo de este tipo de álgebra es $H(Ann(0, r, R))$ el álgebra de funciones holomorfas en un anillo $Ann(0, r, R) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid r < |\lambda| < R\}$ con la topología compacto-abierto. En el capítulo 1 Probamos resultados originales con respecto a este tipo de álgebras, por ejemplo los teoremas 1.2.20 y 1.2.21 nos dicen que el espectro del generador z esta relacionado con ciertos anillos de algunos radios espectrales y en el caso en que A sea además m-convexa hemos obtenido que

$$Ann(0, R(z^{-1})^{-1}, R(z)) \subseteq \sigma(z) \subseteq \overline{Ann(0, R(z^{-1})^{-1}, R(z))}.$$

Además también hemos logrado encontrar una relación entre dos bases cíclicas de tipo Laurent de una B_0-álgebra, este resultado se esteblece en la proposición 1.2.25, más concretamente hemos probado que si $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{w^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son dos bases cíclicas de tipo Laurent para A una B_0-álgebra, entonces $w = az$ ó $w = az^{-1}$ para algun $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tambíen hemos probado el teorema 1.2.30 el cual es una caraterización de las B_0-álgebras que son localmente m-convexas y con base cíclica de tipo Laurent.

Un álgebra topológica con unidad e es una Q-álgebra si el conjunto $G(A)$ de elementos invertibles es abierto. En el capítulo 2 recordaremos algunas equivalencias de esta definición y estudiaremos algunas propiedades de las mismas. Si A es un álgebra topológica, definimos $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ como el conjunto de los funcionales lineales multiplicativos no nulos y complejos, además definimos $\mathfrak{M}(A)$ como el subconjunto de $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ compuesto de los elementos continuos.

Hemos tomado algunas propiedades de álgebras de funciones como se estudian en [48] y las hemos puesto en el contexto de un álgebra topología A tal que $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ es no vacío. Los resultados originales de este capítulo se encuentran en el estudio de las siguientes propiedades que un álgebra topológica A puede satisfacer o no, estas son:

- (α_0) Si $\sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| < 1$ entonces existe $(e-x)^{-1} \in A$.
- (α) Si $x \in A$ y es tal que $f(x) \neq 0$ para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$ entonces existe $x^{-1} \in A$.
- (β) Si $a_1, \ldots, a_n$ son elementos de A tales que $\sum_{i=1}^{n} |f(a_i)| > 0$ para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces existen $b_1, \ldots, b_n$ en A tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = e$.
- ($\star$) existe V vecindad del cero tal que si $x \in V$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge.
- ($\star\star$) existe V vecindad del cero tal que si $x \in V$, entonces existe $(e-x)^{-1} \in A$.

Hemos encontrado algunas equivalencias de estas propiedades en terminos de otras conocidas en álgebras topológicas, también examinamos la relación de estas con los espacios $\mathfrak{M}(A)$ y $\mathfrak{M}^{\#}(A)$, estos resultados se encuentran en las proposiciones 2.3.1, 2.3.4, 2.3.7, 2.3.9 y 2.3.12.

El capítulo 3 estudiamos los elementos acotados de un álgebra localmente convexa en el sentido de Allan-Waelbroeck, ver [2]. Dada A un álgebra localmente convexa y $x \in A$ se dice que es acotado si existe $\lambda > 0$ tal que $\{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, esto es para cada $\alpha \in I$ existe $M_\alpha > 0$ tal que

$$\left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\|_\alpha \leq M_\alpha,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

En este capítulo se estudia el álgebra $\mathbb{C}(t)$ de las funciones complejas racionales y un resultado que hemos obtenido es el de describir el conjunto de todos los elementos acotados de esta álgebra con respecto a la topología metrizable τ_W de Williamson dada en [51], esto se encuentra en la proposición 3.2.6. Además probamos que este conjunto de elementos acotados es una subálgebra maximal de ideales principales y que es una Q-álgebra, proposición 3.2.7 y corolario 3.2.8.

Finalmente en el capítulo 4 estudiamos álgebras localmente convexas en las que el producto es separadamente continuo, esto es dada $x \in A$ las funciones $L_x : A \to A$ dada por $L_x(y) = xy$ para cada $y \in A$ y $R_x : A \to A$ dada por $R_x(y) = yx$ para cada $y \in A$ son continuas, en este caso la topología viene dada por una familia de seminormas $\| \ \|_{\alpha \in I}$ tales que para cada $x \in A$ y cada $\alpha \in I$ existen $\beta \in I$, $M(x,\alpha), N(x,\alpha) > 0$ tales que

$$\|xy\|_\alpha \leq M(x,\alpha)\|y\|_\beta \quad \text{y} \quad \|yx\|_\alpha \leq N(x,\alpha)\|y\|_\beta \tag{1}$$

para cada $y \in A$. En el caso en que en las desigualdades dadas en (1) se tenga $\alpha = \beta$ se dice que el álgebra es A-convexa y si para cada x el numero $M(x,\alpha)$ no depende de α se dice que el álgebra es uniformemente A-convexa, este tipo de álgebras han sido estudiadas por diversos autores [3, 44, 45, 46, 47] y en este trabajo estamos interesados en álgebras uniformemente A-convexas, utilizamos los resultados de Oudadess [44, 45] que entre otras cosas nos dicen que en un álgebra uniformemente A-convexa se puede definir una norma cuya topología es más fina que la original, de esta forma el estudio de álgebras uniformemente A-convexas tiene relación con el caso usual de álgebras normadas.

Hemos logrado aplicar estos resultados para estudiar espacios de funciones continuas con valores en un álgebra A, más precisamente si A es un álgebra uniformemente A-convexa encontramos una condición para A bajo la cual el espacio de funciones continuas y acotadas definidas en un conjunto X y con valores en A, denotado por $C_b(X, A)$, resulta también uniformemente A-convexa, así pues un ejemplo más de un álgebra uniformemente A-convexa se construye, esto se encuentra en la proposición 4.1.15.

Otra parte importante del capítulo 4 esta dedicado a estudiar los espacios de funciones continuas $CV(X)$, donde X es un espacio completamente regular y V es una familia de funciones de Nachbin, defineción 4.2.1, daremos a $CV(X)$ una topología localmente convexa τ_V en función de la familia V. En esta parte estudiamos la topología de Oudadess para $CV(X)$, definida como la topología m-convexa menos fina entre todas las topologías m-convexas más finas que τ_V. Algunos resultados originales que hemos obtenido en este sentido es expresar las seminormas que definen topología de Oudadess para $CV(X)$ en función de unos límites y unos supremos, esto se encuentra en la proposición 4.3.5, además aplicamos estos resultados para dar nuevas condiciones necesarias y suficientes sobre la familia V para que $CV(X)$ resulte ser un álgebra m-convexa, proposición 4.3.7. En la última parte de esta tesis consideramos algunos ejemplos de espacios de funciones continuas y acotadas definidas en un espacio completamente regular X y con valores en un álgebra topológica A. Desarrollamos nuevos metodos para hallar su espacio de homomorfismos lineales y continuos del álgebra en $\mathbb{C}$, estos se encuentran en las proposiciones 4.4.8, 4.4.10 y 4.4.11.

Capítulo 1

B_0-álgebras con base cíclica de tipo Laurent.

1.1. Álgebras localmentes convexas

En esta sección damos las definiciones básicas con respecto a álgebras topológicas localmente convexas.

1.1.1. Conceptos y propiedades básicas.

Definición 1.1.1. *Un álgebra compleja A se dice topológica si está dotada con una topología τ de Hausdorff tal que la adición y multiplicación por un escalar son continuas y la multiplicación $A \times A \to A$, $(x, y) \to xy$ es continua. Decimos que A es un álgebra semitopológica si la multiplicación es separadamente continua, es decir las funciones $y \to xy$, $y \to yx$ son continuas de A en A para cada $x \in A$.*

Sea (A, τ) un álgebra topológica, se dice que A es localmente convexa si (A, τ) como espacio vectorial topológico es localmente convexo. En este caso τ esta determinada por una familia $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de seminormas tales que para cada $\alpha \in I$ existe $\beta \in I$ tal que

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta,$$

para toda $x, y \in A$. Además se dice que A es localmente m-convexa, en forma abreviada m-convexa si en este caso la familia $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se compone de seminormas submultiplicativas, es decir

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha$$

para toda $\alpha \in I$ y cada $x, y \in A$.

A continuación presentamos algunos ejemplos.

1. Consideremos el álgebra de funciones entereras,
$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es entera}\},$$
con las operaciones usuales de suma y producto de funciones y con las seminormas $\|f\|_n = \text{máx}_{|z| \leq n} |f(z)|$, para cada $f \in H(\mathbb{C})$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $H(\mathbb{C})$ es un álgebra m-convexa.

2. Se dice que una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se anula en infinito, si para cada $\epsilon > 0$ existe $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto tal que $|\varphi(x)| < \epsilon$ para cada $x \notin K$. Sea
$$C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y acotada}\}.$$
Esta es un álgebra con las operaciones usuales de suma, producto por escalar y producto de funciones. Definimos para cada $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anula en infinito
$$\|f\|_\varphi = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)| < \infty,$$
para cada $f \in C_b(\mathbb{R})$.

   Ahora probaremos que el producto es separadamente continuo. Sean $g \in C_b(\mathbb{R})$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C_b(\mathbb{R})$ que converge a $f \in C_b(\mathbb{R})$ con respecto a las normas $\{\| \, \|_\varphi\}_\varphi$, entonces dada φ que se anula en infinito se tiene que
$$\|f_n g - fg\|_\varphi = \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f_n(x)g(x) - f(x)g(x))\varphi(x)|$$
$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f_n(x) - f(x))\varphi(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = \|f_n - f\|_\varphi \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \to 0$$
si $n \to \infty$, así pues el producto es separadamente continuo.

3. Sea $(a_{n,k})_{n,k}$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ una matriz infinita, donde $a_{n,k} \geq 0$ para cada n, k. Supongamos además que para cada n existe $n' \geq n$ tal que
$$a_{n,k+l} \leq a_{n',k} a_{n',l}$$
para cada k, l. Definamos
$$A(a_{n,k}) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k} |x_k| < \infty, \text{para cada } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$A(a_{n,k})$ es un álgebra con las operciones

$$\lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda x_k) t^k$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k + y_k) t^k$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k t^k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{r+s=k} x_r y_s\right) t^k$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y cada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k$,$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k t^k \in A(a_{n,k})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la siguiente seminorma, si $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k \in A(a_{n,k})$

$$\|x\|_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k} |x_k|.$$

Además si $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k$ y $y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k t^k$ son elementos de $A(a_{n,k})$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|xy\|_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k} \left|\sum_{r+s=k} x_r y_s\right| \leq \sum_{k,r,s} a_{n,k} |x_r||y_s| = \sum_{r,s} a_{n,r+s} |x_r||y_s|$$

$$\leq \sum_{r,s} a_{n',r} a_{n',s} |x_r||y_s| = \|x\|_{n'} \|y\|_{n'}.$$

Así pues $A(a_{n,k})$ es un álgebra topológica. A este tipo de álgebras usualmente se les conoce como álgebra matricial.

A continuación recordamos algunos resultados importantes sobre álgebras m-convexas. Sea A un álgebra m-convexa, $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas que define la topología de A. Para cada $\alpha \in I$ consideremos

$$N_\alpha = \{x \in A \mid \|x\|_\alpha = 0\}.$$

Es fácil ver que este es un ideal bilateral cerrado, consideremos también el álgebra normada $(A/N_\alpha, \| \ \|'_\alpha)$, donde $\| \ \|'_\alpha$ es la norma cociente, sea A_α su compleción y el homomorfismo natural

$$\pi_\alpha : A \to A_\alpha.$$

Sea $\widetilde{A} = \Pi_{\alpha\in I} A_\alpha$ con las operaciones coordenada a coordenada dotada de la topología producto y la transformación $\pi : A \to \widetilde{A}$ dada por

$$\pi(x) = (\pi_\alpha(x))_{\alpha\in I}.$$

Entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.2. *Sea A un álgebra m-convexa. Entonces A es isomorfa a la subálgebra $\pi(A)$ de $\widetilde{A}$. Si A es completa, entonces la subálgebra en cuestión es cerrada.*

Demostración. Veáse [53] teorema 11.4. □

Proposición 1.1.3. *Sea A un álgebra m-convexa con unidad e. Entonces existe una familia de seminormas submultiplicativas $\{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ que definen la topología de A y tal que $\|e\|_\alpha = 1$.*

Demostración. Véase [53] corolario 11.5. □

Si $(A, \{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ es un álgebra m-convexa con unidad e en adelante supondremos que $\|e\|_\alpha = 1$ para cada $\alpha \in I$, también supondremos que si $\| \, \|_{\alpha_1}, \dots, \| \, \|_{\alpha_n}$ pertenecen a la familia de seminormas entonces la seminorma

$$\|x\|_\beta = \max_{1\leq i\leq n} \|x\|_{\alpha_i} \tag{1.1}$$

para cada $x \in A$, también pertenece a la familia original.

A continuación definimos el concepto de límite proyectivo, también conocido como límite inverso. Sea $(I, \preceq)$ un conjunto dirigido de indices, esto es la relación $\preceq$ es transitiva, reflexiva y para cada $\alpha, \beta \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ y $\beta \preceq \gamma$. Consideremos X_α un espacio vectorial topológico para cada $\alpha \in I$, además supongamos que para cada $\alpha, \beta \in I$ tal que $\alpha \prec \beta$ existe una transformación lineal $\pi_{\alpha,\beta} : X_\beta \to X_\alpha$ con la propiedad de que

$$\pi_{\alpha,\beta}\pi_{\beta.\gamma} = \pi_{\alpha,\gamma} \text{ y } \pi_{\alpha,\alpha} = id_{X_\alpha}$$

para cada $\alpha, \beta, \gamma \in I$. Si $\alpha \prec \beta \prec \gamma$. Definimos el límite proyectivo de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ como

$$\lim_{\leftarrow} X_\alpha := \{(x_\alpha)_\alpha \in \Pi_\alpha X_\alpha \mid \pi_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha, \text{ para cada } \alpha \prec \beta\}.$$

El límite proyectivo resulta ser un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalar entrada a entrada. En particular si $(X_\alpha, \| \|_\alpha)$ es un espacio de Banach, entonces $\lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha$ es un espacio localmente convexo y completo, puesto que se pueden definir las siguientes seminormas: Dada $\alpha \in I$ sea

$$|||(x_\alpha)_\alpha|||_\alpha = \|x_\alpha\|_\alpha$$

para cada $(x_\alpha)_\alpha \in \lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha$. Así pues $\left(\lim\limits_{\leftarrow} X_\alpha, \{||| \ |||_\alpha\}_\alpha\right)$ es un espacio localmente convexo y completo.

Teorema 1.1.4. *Sea $(A, \{\| \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ un álgebra m-convexa y completa. Entonces A es isomorfa a un límite proyectivo de algebras de Banach.*

Demostración. Véase [53] teorema 11.6. □

Definición 1.1.5. *Sea A un álgebra con unidad e. Un elemento $x \in A$ es invertible en A si existe $x^{-1} \in A$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$, denotamos al conjunto de todos los elementos invertibles de A como*

$$G(A) = \{x \in A \mid x \textit{ es invertible en } A\}.$$

Proposición 1.1.6. *Sea $(A, \{\| \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ un álgebra m-convexa, completa y con unidad e. Entonces $x \in G(A)$ si y sólo si $\pi_\alpha(x) \in G(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in I$, donde $\pi_\alpha : A \to A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$ son las funciones dadas en el parrafo anterior a la proposición 1.1.2.*

Demostración. Véase [53] teorema 11.8. □

A continuación recordamos un hecho importante para álgebras m-convexas.

Proposición 1.1.7. *Sea $(A, \{\| \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ un álgebra m-convexa y con unidad e. Entonces la inversión $x \to x^{-1}$ es continua sobre $G(A)$.*

Demostración. Véase [53] teorema 12.4. □

1.1.2. Los espacios $\mathfrak{M}^\#(A)$ y $\mathfrak{M}(A)$.

A continuación damos una definición importante para ese trabajo.

Definición 1.1.8. *Sea $(A, \{\| \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ un álgebra localmente convexa. Si A' y A^* denotan el dual algebráico y el dual topológico de A, definimos*

$$\mathfrak{M}^\#(A) = \{f \in A' \setminus \{0\} \mid f(xy) = f(x)f(y), \textit{para cada } x, y \in A\}$$

y

$$\mathfrak{M}(A) = \{f \in A^* \setminus \{0\} \mid f(xy) = f(x)f(y), \textit{para cada } x, y \in A\}.$$

Además denotamos por $M(A)$ al conjunto de todos los ideales bilaterales máximos en A y por $m(A)$ al conjunto de todos los ideales bilaterales máximos cerrados. Decimos que $\mathfrak{M}(A)$ es total si $x \in A$ es tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces $x = 0$

Es claro que $m(A) \subseteq M(A)$ y que $\mathfrak{M}(A) \subseteq \mathfrak{M}^{\#}(A)$. En adelante si B es un subconjunto de A, denotamos por $s(B)$ al subespacio generado por B, esto es el subespacio vectorial más pequeo que contiene a B.

Proposición 1.1.9. *Sea A un álgebra localmente convexa y $f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$ no cero. Entonces* $\ker(f)$ *es un ideal bilateral máximo, en particular si $f \in \mathfrak{M}(A)$ es no cero, entonces* $\ker(f)$ *es un ideal bilateral máximo cerrado en A.*

Demostración. Es claro que $\ker(f)$ es un subespacio de A, ahora si $y \in \ker(f)$ y x es cualquier elemento de A, entonces $f(xy) = f(yx) = f(x)f(y) = 0$, de donde $xy, yx \in \ker(f)$, así pues $\ker(f)$ es un ideal bilateral de A.

Ahora sea I un ideal bilateral de A tal que $\ker(f) \subseteq I$ y supongamos que $I \neq \ker(f)$. Sea $y \in I \setminus \ker(f)$, veamos que el subespacio generado por $\ker(f) \cup \{y\}$ es A. Sea $a \in A$, entonces

$$a = \left(a - \frac{f(a)}{f(y)}y\right) + \frac{f(a)}{f(y)}y,$$

donde $a - \frac{f(a)}{f(y)}y \in \ker(f)$, así pues $A = s(\ker(f) \cup \{y\}) \subseteq s(I \cup I) = I$, es decir $I = A$, así pues $\ker(f)$ es un ideal bilateral máximo. $\square$

Dado que para cada $f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$ el núcleo $\ker(f)$ es un ideal bilateral máximo, este f se puede identificar cómo un elemento de $M(A)$ y por tanto se tienen las siguientes contenciones

$$\mathfrak{M}(A) \subseteq \mathfrak{M}^{\#}(A) \subseteq M(A) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{M}(A) \subseteq m(A).$$

En general no se puede asegurar que $\mathfrak{M}(A)$ sea no vacío, sin embargo en el caso m-convexo este resulta ser no vacío.

Proposición 1.1.10. *Sea $(A, \{\|\ \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ un álgebra m-convexa y conmutativa. Entonces $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$.*

Demostración. Para cada $\alpha \in I$ consideremos el álgebra de Banach $(A_\alpha, \|\ \|_\alpha)$ descrita en un parrafo anterior a la proposición 1.1.2 y consideremos el espacio $\mathfrak{M}(A_\alpha)$ respectivo. Afirmamos que

$$\mathfrak{M}(A) = \bigcup_{\alpha\in I} \mathfrak{M}(A_\alpha).$$

Sea $f \in \mathfrak{M}(A)$ entonces existe $\alpha \in I$ y $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M\|x\|_\alpha$ para cada $x \in A$, definamos $f_\alpha : A/N_\alpha \to \mathbb{C}$ dada por $f_\alpha(\pi_\alpha(x)) = f(x)$ para cada $\pi_\alpha(x) \in A/N_\alpha$, está bien definida pues si $\pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(y)$, entonces $\pi_\alpha(x - y) = 0$ es decir $x - y \in N_\alpha$ y por tanto

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq M\|x - y\|_\alpha = 0,$$

de donde $f(x) = f(y)$. Es es claro que f_α es lineal, multiplicativa y continua, extendemos esta funcíon a la compleción A_α y a la extensión por simplicidad la denotamos de la misma forma $f_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{C}$, de nuevo ésta resulta ser lineal, multiplicaativa y continua, así pues dada $f \in \mathfrak{M}(A)$ ésta induce un funcional $f_\alpha \in \mathfrak{M}(A_\alpha)$ por tanto $\mathfrak{M}(A) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{M}(A_\alpha)$.

Ahora si $f \in \mathfrak{M}(A_\alpha)$ para algún $\alpha \in I$, entonces este define un funcional lineal, multiplicativo y continuo sobre A de la siguiente manera $F : A \to \mathbb{C}$ dado por $F(x) = f(\pi_\alpha(x))$ para cada $x \in A$, de esta forma se tiene la otra contención. Finalmente como en cualquier álgebra de Banach existen funcionales lineales, multiplicativos y continuos, [52], entonces $\mathfrak{M}(A_\alpha) \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$ y por tanto $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$. $\square$

A continuación probamos el teorema de Gelfand-Mazur, de gran importancia en nuestro estudio.

Teorema 1.1.11. *(Gelfand-Mazur) Sea (A, τ) un álgebra semitopológica con identidad e tal que es un álgebra de división, la inversión $x \to x^{-1}$ es continua en $G(A)$ y $A^* \neq \emptyset$. Entonces A es isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Afirmamos que para todo $x \in A$ se tiene que $x = \lambda e$ para algun $\lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que no, entonces existe $x \in A$ tal que $x - \lambda e \neq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces también existe $(x - \lambda e)^{-1}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sea $f \in A^*$ tal que $f(x^{-1}) \neq 0$ y definimos $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(\lambda) = f((x - \lambda e)^{-1})$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Se tiene que F es una función entera ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{F(\lambda + h) - F(\lambda)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f((x - (\lambda + h)e)^{-1}) - f((x - \lambda e)^{-1})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f((x - (\lambda + h)e))^{-1} - f((x - \lambda e))^{-1}}{h} \\
= \lim_{h \to 0} \frac{f(x - \lambda e) - f(x - (\lambda + h)e)}{hf((x - (\lambda + h)e)(x - \lambda e))} &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{hf((x - (\lambda + h)e)(x - \lambda e))}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} f((x-\lambda e)^{-1}(x-(\lambda+h)e)^{-1})$$

este límite existe pues la inversión es continua en A, además

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |F(\lambda)| = \lim_{|\lambda|\to\infty} \left| \frac{1}{\lambda} f\left(\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1}\right)\right| = 0,$$

por tanto el teorema de Liouville nos dice que $F(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, en particular $0 = F(0) = f(x^{-1}) \neq 0$, lo cual es una contradicción, así pues $x = \lambda e$ para algun $\lambda \in \mathbb{C}$, de donde es claro que A es isomorfa a $\mathbb{C}$. $\square$

Obtenemos ahora algunos resultados importantes en algebras m-convexas.

Proposición 1.1.12. *Sea $(A, \{\| \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ un álgebra m-convexa, conmutativa y con unidad e. Entonces cada ideal máximo y cerrado es de codimensión uno.*

Demostración. Sea M un ideal bilateral máximo y cerrado en A, entonces A/M resulta ser un algebra de división conmutativa. Además A/M es un álgebra m-convexa pues si $\alpha \in I$

$$|||x+M|||_\alpha = \inf_{m\in M} \|x-m\|_\alpha$$

para cada $x + M \in A/M$, es una seminorma y no es difícil verificar que esta familia de seminormas son submultiplicativas. Así pues por el teorema de Gelfand-Mazur, A/M es isomorfa a $\mathbb{C}$, esto es M es de codimensión 1. $\square$

Proposición 1.1.13. *Sea A un álgebra m-convexa conmutativa. Entonces cada ideal cerrado está contenido en un ideal máximo cerrado.*

Demostración. Sea I un ideal cerrado en A, entonces A/I es un álgebra m-convexa y conmutativa, por la proposición 1.1.10 sabemos que $\mathfrak{M}(A/I) \neq \emptyset$, sean $f \in \mathfrak{M}(A/I)$ y $\pi : A \to A/I$ el homomorfismo canónico, entonces $F : A \to \mathbb{C}$ dada por $F(x) = f(\pi(x))$ para cada $x \in A$ es claramente un elemento de $\mathfrak{M}(A)$ y $\ker(F)$ es un ideal máximo cerrado tal que $I \subseteq \ker(F)$. $\square$

Corolario 1.1.14. *Sea A un álgebra m-convexa conmutativa. Entonces dado M un ideal máximo cerrado existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $M = \ker(f)$.*

1.1.3. El espectro y los radios espectrales.

En esta sección estudiaremos el espectro de un elemento en un álgebra topológica locamente convexa, veremos algunas propiedades importantes y presentamos los distintos radios espectrales que puede tener un elemento del álgebra.

Definición 1.1.15. *Sea A un álgebra topológica con unidad e. Definimos el espectro de $x \in A$ como el conjunto*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \notin G(A)\}.^1$$

Además definimos el radio espectral de x como $R(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$.

A continuación presentamos la relación de los espacios $\mathfrak{M}(A)$ y $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ en el caso en que el álgebra sea m-convexa.

Definición 1.1.16. *Sea A un álgebra m-convexa y conmutativa. Dada $x \in A$ definimos la transformada de Gelfand como la función $\widehat{x} : \mathfrak{M}^{\#}(A) \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{x}(f) = f(x)$$

para cada $f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$.

Proposición 1.1.17. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa, completa y con unidad e. Si $x \in A$, entonces*

$$\sigma(x) = \widehat{x}(\mathfrak{M}(A)) = \widehat{x}(\mathfrak{M}^{\#}(A)).$$

Demostración. Sea $f(x) \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$, entonces $x - f(x)e$ no es invertible en A, pues si lo fuera existiría $y \in A$ tal que $(x - f(x)e)y = y(x - f(x)e) = e$ y por tanto $1 = f(e) = f((x - f(x)e)y) = f(x - f(x)e)f(y) = (f(x) - f(x))f(y) = 0$, lo cual es es una contradicción. Por tanto $f(x) \in \sigma(x)$, así pues $\widehat{x}(\mathfrak{M}(A)) \subseteq \widehat{x}(\mathfrak{M}^{\#}(A)) \subseteq \sigma(x)$.

Sea $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e \notin G(A)$ y por la proposición 1.1.6 se tiene que existe $\alpha \in I$ tal que $\pi_\alpha(x - \lambda e) \notin G(A_\alpha)$. Como en un álgebra de Banach conmutativa B un elemento $b \in B$ es invertible si y sólo si para cada $f \in \mathfrak{M}(B)$ se tiene que $f(b) \neq 0$, ver [52] página 39, tendríamos que existe $f \in \mathfrak{M}(A_\alpha)$ tal que $f(\pi_\alpha(x - \lambda e)) = 0$, de donde si tomamos $F = f \circ \pi_\alpha$, entonces $F \in \mathfrak{M}(A)$ y $F(x) = \lambda$, esto es $\sigma(x) \subseteq \widehat{x}(\mathfrak{M}(A))$. $\square$

[1] Muchas veces se considera el espectro como $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \notin G(A)\}$, la cual claramente es una definición equivalente.

Si A es un álgebra localmente convexa y completa se pueden definir varios radios espectrales de la siguiente forma: Si $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de seminormas que definen la topología de A y $x \in A$, definimos

$$R_1(x) = \sup_{\alpha\in I} \limsup_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}.$$

$$R_2(x) = \sup\left\{ \limsup_n \sqrt[n]{\|x^n\|} \mid \| \ \| \text{ es una seminorma continua en } A \right\}.$$

$$R_3(x) = \sup_{f\in A^*} \limsup_n \sqrt[n]{|f(x^n)|}.$$

$$R_4(x) = \sup_{f\in \mathfrak{M}(A)} |f(x)|$$

donde $\mathfrak{M}(A) = \{f \in A^* \mid f(xy) = f(x)f(y) \text{ para cada } x, y \in A\}$.

$$R_5(x) = \text{ínf}\{r > 0 \mid x - \lambda e \in G(A) \text{ para cada } |\lambda| > r\}.$$

$$R_6(x) = \text{ínf}\{0 < r \le \infty \mid \text{ existe una sucesión } \{\alpha_i\}_{i=0}^\infty \text{ tal que } \sum_{i=0}^\infty \alpha_i t^i$$

$$\text{tiene radio de convergencia } r \text{ y } \sum_{i=0}^\infty \alpha_i x^i \text{ converge en } A\}.$$

$$R_7(x) = \text{ínf}\{0 < r \le \infty \mid \text{ para cada sucesión } \{\alpha_i\}_{i=0}^\infty \text{ tal que } \sum_{i=0}^\infty \alpha_i t^i$$

$$\text{tiene radio de convergencia } r \text{ se tiene que } \sum_{i=0}^\infty \alpha_i x^i \text{ converge en } A\}.$$

$$R_*(x) = \sup_{\alpha\in I} \liminf_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}.$$

Existe otro espectro definido en álgebras localmente convexas, este fue propuesto por W. Zelazko en [53]. Dado $x \in A$ definimos el espectro extendido de x como

$$\Sigma(x) = \sigma(x) \cup \sigma_d(x) \cup \sigma_\infty(x),$$

donde

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ no es invertible en } A\},$$

$$\sigma_d(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid R(t, x) = (te - x)^{-1} \text{ es discontinuo en } t = \lambda\} \text{ y}$$

$$\sigma_\infty(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \to R(t, x) = (te - x)^{-1} \text{ es discontinuo en } t = 0 \\ \infty & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Definimos además el radio espectral extendido de x como $\overline{R}(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \Sigma(x)\}$.

Cuando A es un álgebra m-convexa, conmutativa, completa y con unidad e, se tiene que la operación $x \to x^{-1}$ definida en $G(A)$ es continua y por tanto se puede ver que si $x \in A$ entonces $\Sigma(x) = \sigma(x)$, en particular $\overline{R}(x) = R(x)$.

El siguiente resultado dado por H. Arizmendi y A. Carrillo en [8] nos dice que $\Sigma(x)$ es siempre no vacío. Lo nombramos como el teorema de Zelazko, debido a que en [8] los autores así lo consideran.

Teorema 1.1.18. *(Zelazko) Si A es un álgebra localmente convexa y $x \in A$. Entonces $\Sigma(x)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Sea $x \in A$ y supongamos que $\Sigma(x) = \emptyset$, entonces $x - \lambda e$ es invertible para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Tomemos $f \in A^*$ tal que $f(x^{-1}) \neq 0$.

Definamos $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $F(\lambda) = f((x - \lambda e)^{-1})$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Se tiene que si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ entonces como $(x - \lambda e)(x - \lambda_0 e) = (x - \lambda_0)(x - \lambda e)$ es fácil verificar que

$$(x - \lambda e)^{-1}(x - \lambda_0 e)^{-1} = \frac{(x - \lambda e)^{-1} - (x - \lambda_0 e)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}$$

y como la función $\lambda \to (x - \lambda e)^{-1}$ es continua en λ_0 se tiene que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = f\left(((x - \lambda_0 e)^{-1})^2\right),$$

por tanto F es una función entera. Ahora como $\sigma_\infty(x) = \emptyset$ se tiene también que

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} |F(\lambda)| = \lim_{|\lambda| \to \infty} \left| \frac{1}{\lambda} f\left(\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1}\right) \right| = 0,$$

así pues F es una función entera acotada y del teorema de Liouville se tiene que $F(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, en particular $f(x^{-1}) = 0$ lo cual es una contradicción, de donde debemos tener que $\Sigma(x) \neq \emptyset$. $\square$

La relación entre los radios espectrales se encuentra dada por los siguientes resultados.

Proposición 1.1.19. *Sea A un álgebra conmutativa, completa y m-convexa. Entonces se tiene que*

$$R(x) = R_1(x) = R_2(x) = R_3(x) = R_4(x) = R_5(x) = R_6(x) = R_7(x) = R_*(x).$$

Demostración. Véase [53, 14]. $\square$

1.2. B_0-álgebras con base cíclica de tipo Laurent.

En esta sección presentamos resultados originales con respecto a B_0-álgebras con cierto tipo de base. También supondremos en esta sección que todas la álgebras tiene unidad y la denotamos por e.

Definición 1.2.1. *Una B_0-álgebra es un álgebra localmente convexa, metrizable y completa.*

Un resultado conocido con respecto a B_0-álgebras es el siguiente.

Proposición 1.2.2. *Si A es una B_0-álgebra, entonces la topología está definida por una familia de seminormas numerable $\{\| \ \|_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que*

$$\|x\|_i \leq \|x\|_{i+1}$$

y

$$\|xy\|_i \leq \|x\|_{i+1}\|y\|_{i+1}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots$ y para cada $x, y \in A$.

En el caso de B_0-algebras la relación de los radios espectrales está dada por:

Proposición 1.2.3. *Sea A una B_0-álgebra conmutativa. Entonces si $x \in A$ se tiene que*

$$R(x) = R_1(x) = R_2(x) = R_3(x) = R_7(x) \geq R_6(x) = R_*(x) \geq R_4(x).$$

Demostración. Veáse [53, 14]. □

Definición 1.2.4. *Sea A una B_0-álgebra. Si $z \in A$ decimos que $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base cíclica si para cada $x \in A$ existen escalares únicos $\{\lambda_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tales que*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) z^n.$$

La siguiente observación es importante.

Observación 1.2.5. *Si A es una B_0-álgebra con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces A es conmutativa. Esto es cierto pues si $x, y \in A$ con $x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ y $y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(y) z^n$ entonces*

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = yx,$$

donde $c_n = \sum_{r+s=n} \lambda_r(x)\lambda_s(y)$.

Las B_0-álgebras m-convexas con base cíclica han sido estudias en [5, 6, 50] y más concretamente en [50] S. Watson probó los siguientes resultados.

Si A es una B_0-álgebra, m-convexa con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces

$$D_r(0) \subseteq \sigma(z) \subseteq \overline{D_r(0)},$$

donde $r = R(z)$ es el radio espectral de z y $D_r(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < r\}$. También ahí se demostró el siguiente teorema.

Teorema 1.2.6. *Sea A una B_0-álgebra, m-convexa y con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Entonces A es isomorfa al álgebra $H(\Omega)$ de funciones holomorfas en un abierto simplemente conexo con la topología compacto-abierta si y sólo si $\sigma(z)$ es abierto.*

En [5, 6] H. Arizmendi y A. Carrillo definieron un espectro particular para bases cíclicas.

Definición 1.2.7. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Definimos*

$$\sigma_1(z) = \left\{ \lambda \mid \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n \text{ converge en } \mathbb{C} \text{ para cada } x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) z^n \in A \right\}$$

Además H. Arizmendi y A. Carrillo estudiaron las propiedades de espectro $\sigma(z)$ cuando A es una B_0-álgebra no necesariamente m-convexa con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ y obtuvieron los siguientes resultados

Proposición 1.2.8. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Entonces*

$$\sigma_1(z) = \{f(z) \mid f \in \mathfrak{M}(A)\}$$

Proposición 1.2.9. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Si $0 < R_6(z) < \infty$, entonces*

$$D_{R_6(z)}(0) \subseteq \sigma_1(z) \subseteq \overline{D_{R_6(z)}(0)},$$

y si $R_6(z) = \infty$ entonces $\sigma_1(z) = \mathbb{C}$.

Proposición 1.2.10. *Sea A una B_0 algebra con base cíclica $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Si $0 < R_7(z) < \infty$. Entonces*

$$D_{R_7(z)}(0) \subseteq \sigma(z) \subseteq \overline{D_{R_7(z)}(0)}.$$

Estamos interesados en estudiar B_0-álgebras m-convexas con base de la forma $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definición 1.2.11. *Sea A una B_0-álgebra. Si $z \in A$ es invertible decimos que $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base cíclica de tipo Laurent si para cada $x \in A$, existen escalares únicos $\{\lambda_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)z^{-n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)z^n$ convergen en A y*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)z^n.$$

Al igual que la observación 1.2.5 se tiene lo siguiente.

Observación 1.2.12. *Si A es una B_0-álgebra con base cíclica $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, entonces A es conmutativa. Esto es cierto pues si $x, y \in A$ con $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)z^n$ y $y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(y)z^n$ entonces*

$$xy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = yx,$$

donde $c_n = \sum_{r+s=n} \lambda_r(x)\lambda_s(y)$.

A continuación definimos un espectro para el generador, este concepto es similar al dado por H. Arizmendi y A. Carrillo en [5, 6] para caracterizar bases cíclicas en una B_0-algebra no necesariamente m-convexa.

Definición 1.2.13. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Definimos*

$$\sigma_1(z) = \left\{ \lambda \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n \text{ converge en } \mathbb{C} \text{ para cada } x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)z^n \in A \right\}$$

En adelante supondremos que $\sigma_1(z) \neq \emptyset$. Se puede demostrar que en el álgebra de Williamson dada por

$$W = A(a_{n,k}) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| a_{n,k} < \infty \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde

$$a_{n,k} = \begin{cases} (1-k)^{n(1-k)} & \text{si } k \leq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ (1+k)^{\frac{-(1+k)}{n}} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

y seminormas definidas por $\|x\|_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| a_{n,k}$ para cada n, donde $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k$, es una B_0-algebra, conmutativa, con base $\{t^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ cíclica de tipo Laurent y además $\sigma_1(z) = \emptyset$

La siguiente proposición es un hecho importante en B_0-álgebras con base cíclica de tipo Laurent.

Proposición 1.2.14. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces los funcionales que determinan los coeficientes al escribir cualquier $x \in A$ como $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ son lineales y continuos.*

Demostración. Sea $\{\| \|_i\}_{i=1}^{\infty}$ la familia de seminormas que define la topología para A y definamos una nueva familia de seminormas para A dada por

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(x) z^k \right\|_i' = \sup_{m\geq 1} \left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda_{-k}(x) z^{-k} \right\|_i \sup_{m\geq 0} \left\| \sum_{k=0}^{m} \lambda_k(x) z^k \right\|_i .$$

para cada $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(x) z^k$ y cada $i \in \mathbb{N}$. A continuación probaremos que A también es completo con respecto a las seminormas $\{\| \|_i'\}_{i=1}^{\infty}$. Es fácil verificar que esta familia de seminormas satisface que si $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{-k}(x) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x) z^k$ y denotamos por

$$x^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x) z^k \quad \text{y} \quad x^- = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{-k}(x) z^{-k}$$

entonces

$$\|x^+\|_i \leq \|x\|_i' \quad \|x^-\|_i \leq \|x\|_i'$$

para cada $x \in A$. También se puede probar que

$$\|x\|_i \leq \|x\|_i'$$

para cada $x \in A$.

Sea $i \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en A con respecto a la nueva familia de seminormas, entonces

$$\|x_n^+ - x_m^+\|_i \leq \|x_n - x_m\|_i' \to 0 \; y \; \|x_n^- - x_m^-\|_i \leq \|x_n - x_m\|_i' \to 0 \text{ si } n, m \to \infty$$

de donde $\{x_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy con respecto a cada $\| \|_i$, por tanto como A es completa se tiene que existen $x^+, x^- \in A$ tal que

$$\|x_n^+ - x^+\|_i \to 0 \quad y \quad \|x_n^- - x^-\|_i \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Probaremos que $\|x_n - (x^+ + x^-)\|'_i \to 0$ si $n \to \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(x_n) z^k$, si $k \in \mathbb{Z}$ existe i_0 tal que $\|z^k\|_{i_0} \neq 0$ y como

$$|\lambda_k(x_n) - \lambda_k(x_m)|\|z^k\|_{i_0} = \|(\lambda_k(x_n) - \lambda_k(x_m))z^k\|_{i_0} \leq 2\|x_n - x_m\|'_i \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$, entonces $\{\lambda_k(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por tanto existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_k(x_n) \to \lambda_k$ cuando $n \to \infty$. Sean $\epsilon > 0$ y N_0 un natural tal que si $n, m > N_0$ entonces

$$\|x_n - x_m\|'_i =$$

$$\sup_{j\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{j}(\lambda_{-k}(x_n) - \lambda_{-k}(x_m))z^{-k}\right\|_i + \sup_{j\geq 0}\left\|\sum_{k=0}^{j}(\lambda_k(x_n) - \lambda_k(x_m))z^k\right\|_i < \epsilon, \tag{1.2}$$

de donde si $r, s \in \mathbb{N}$ y hacemos m tender a infinito se obtiene que

$$\left\|\sum_{k=1}^{r}(\lambda_{-k}(x_n) - \lambda_{-k})z^{-k}\right\|_i \leq \epsilon, \left\|\sum_{k=0}^{s}(\lambda_k(x_n) - \lambda_k)z^k\right\|_i \leq \epsilon. \tag{1.3}$$

Ahora consideremos N_1 un natural tal que si $n > N_1$ entonces $\|x_n^+ - x^+\|_i < \epsilon$. Sea $n > \text{máx}\{N_0, N_1\}$ y tomemos i_0 un natural tal que si $l > l_0$ entonces $\left\|x_n^+ - \sum_{k=0}^{l} \lambda_k(x_n)z^k\right\|_i < \epsilon$, por tanto, por 1.3 tenemos que

$$\left\|x^+ - \sum_{k=0}^{l}\lambda_k z^k\right\|_i \leq \|x^+ - x_n^+\|_i + \left\|x_n^+ - \sum_{k=0}^{l}\lambda_k(x_n)z^k\right\|_i$$

$$+ \left\|\sum_{k=0}^{l}(\lambda_k(x_n) - \lambda_k)z^k\right\|_i < \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

Es así que $x^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$ y analogamente se prueba que $x^- = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{-k} z^{-k}$ y si en 1.2 hacemos $m \to \infty$ se obtiene que

$$\|x_n - (x^+ + x^-)\|'_i \leq \epsilon$$

para n suficientemente grande y como i fue arbitrario deducimos que A es completo con respecto a las seminormas $\{\| \, \|'_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Ahora consideremos la identidad $id : (A, \{\| \, \|'_i\}_{i=1}^{\infty}) \to (A, \{\| \, \|_i\}_{i=1}^{\infty})$ como $\|x\|_i \leq \|x\|'_i$ para cada $x \in A$ se tiene que id es continua y por el teorema del mapeo abierto también la inversa $id : (A, \{\| \ \|_i\}_{i=1}^{\infty}) \to (A, \{\| \ \|_i'\}_{i=1}^{\infty})$ es continua, es decir para cada $i \in \mathbb{N}$ existen $K > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x\|_i' \leq K\|x\|_j$$

para cada $x \in A$. Ahora si $k \in \mathbb{Z}$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\|z^k\|_i \neq 0$, si $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(x) z^k$ entonces

$$|\lambda_k(x)| \|z^k\|_i = \|\lambda_k(x) z^k\|_i \leq 2\|x\|_i' \leq 2K\|x\|_j,$$

es así que $|\lambda_k(x)| \leq \frac{2K}{\|z^k\|_i}\|x\|_j$, es decir $\lambda_k(x)$ es continuo. □

Proposición 1.2.15. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces las proyecciones $\pi_1 : A \to A$ y $\pi_2 : A \to A$ dadas por*

$$\pi_1(x) = x^+ \quad y \quad \pi_2(x) = x^-$$

donde $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(x) z^k$, $x^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x) z^k$ y $x^- = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{-k}(x) z^{-k}$, son continuas.

Demostración. En la proposición 1.2.14 se probó que si $\{\| \ \|_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una familia de seminormas que definen la topología de A, entonces la familia de seminormas $\{\| \ \|_i'\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de seminormas que genera la misma topología para A, por tanto si $i \in \mathbb{N}$ y $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k(x) z^k$ entonces existe $K > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\pi_1(x)\|_i = \|x^+\|_i \leq \|x\|_i' \leq K\|x\|_j,$$

de donde π_1 es continua, análogamente π_2 es continua. □

Proposición 1.2.16. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces*

$$\sigma_1(z) = \{f(z) \mid f \in \mathfrak{M}(A)\}$$

Demostración. Consideremos $f(z)$ con $f \in \mathfrak{M}(A)$, denotemos por $\lambda = f(z)$, sean $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ en A y $m > n$ naturales, entonces existe $M > 0$ y una seminorma $\| \ \|_i$ tales que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \lambda_k(x)\lambda^k\right| = \left|f\left(\sum_{k=n}^{m} \lambda_k(x) z^k\right)\right| \leq M \left\|\sum_{k=n}^{m} \lambda_k(x) z^k\right\|_i \to 0$$

cuando n, m son grandes, por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n$ converge en $\mathbb{C}$. Análogamente $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)\lambda^{-n}$ converge y por tanto $\lambda = f(z) \in \sigma_1(z)$.

Ahora sea $\lambda \in \sigma_1(z)$ y definamos $f : A \to \mathbb{C}$ como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n,$$

para cada $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ en A, f así definida es lineal, multiplicativa y $f(z) = \lambda$, basta probar que es continua. Sea $S_1 = \overline{\{z^n \mid n = 0, 1, \ldots\}}$ y $S_2 = \overline{\{z^{-n} \mid n = 1, 2 \ldots\}}$ usando la proposición 1.2.14 se tiene que $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base para S_1 y $\{z^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una base para S_2, entonces podemos definir $f_1 : S_1 \to \mathbb{C}$ y $f_2 : S_2 \to \mathbb{C}$ como

$$f_1(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x_1)\lambda^n \quad \text{y} \quad f_2(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x_2)\lambda^{-n}$$

para cada $x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x_1) z^n$ elemento de S_1 y cada $x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x_2)\lambda^{-n}$ elemento de S_2, por un resultado de Arsove dado en [16], se tiene que f_1 y f_2 son continuas además si π_1 y π_2 son las proyecciones de la proposición 1.2.15 se tiene que

$$f = f_1 \circ \pi_1 + f_2 \circ \pi_2$$

de donde se sigue que f es continua. $\square$

Corolario 1.2.17. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces*

$$\sigma_1(z) \subseteq \sigma(z).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_1(z)$ entonces existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $\lambda = f(z)$, de donde $f(\lambda e - z) = 0$ y si existiera el inverso $(\lambda e - z)^{-1}$ entonces

$$1 = f(e) = f((\lambda e - z)(\lambda e - z)^{-1}) = f((\lambda e - z))f((\lambda e - z)^{-1}) = 0,$$

lo cual es una contradicción, así pues $\lambda \in \sigma(z)$. $\square$

A continuación probamos resultados análogos cuando A es una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent.

Proposición 1.2.18. *Sea A una B_0-álgebra, conmutativa y $z \in A$ un elemento invertible. Entonces $R_4(z), R_4(z^{-1}) > 0$ y*

$$R_4(z)R_4(z^{-1}) \geq 1.$$

Demostración. Sea $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces $1 = f(e) = f(zz^{-1}) = f(z)f(z^{-1})$ se tiene que $f(z^{-1}) = f(z)^{-1}$, es así que $R_4(z) > 0$ y $R_4(z^{-1}) > 0$ y además

$$R_4(z^{-1}) = \sup\{|f(z^{-1})| \mid f \in \mathfrak{M}(A)\} = \sup\{|f(z)|^{-1} \mid f \in \mathfrak{M}(A)\}$$

$$= \frac{1}{\inf\{|f(z)| \mid f \in \mathfrak{M}(A)\}} \geq \frac{1}{\sup\{|f(z)| \mid f \in \mathfrak{M}(A)\}} = \frac{1}{R_4(z)},$$

es así que $R_4(z)R_4(z^{-1}) \geq 1$. □

Corolario 1.2.19. *Sea A una B_0-álgebra, conmutativa y $z \in A$ un elemento invertible. Entonces*

$$R_7(z)R_7(z^{-1}) \geq R_6(z)R_6(z^{-1}) \geq 1.$$

Demostración. Inmediato de la proposición 1.2.3. □

Si $0 < r < R < \infty$, denotamos al anillo con centro en 0, radio menor r y radio mayor R como

$$Ann(0, r, R) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid r < |\lambda| < R\}.$$

En el caso en que $0 = r < R < \infty$, denotamos

$$Ann(0, 0, R) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < |\lambda| < R\}.$$

Si $0 < r < R = \infty$, denotamos

$$Ann(0, r, \infty) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > r\}.$$

Proposición 1.2.20. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $R_6(z)R_6(z^{-1}) > 1$, entonces*

$$Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, R_6(z)) \subseteq \sigma_1(z) \subseteq \overline{Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, R_6(z))},$$

cuando $R_6(z) < \infty$ y $R_6(z^{-1}) < \infty$. Si $R_6(z) < \infty$ y $R_6(z^{-1}) = \infty$ entonces

$$Ann(0, 0, R_6(z)) \subseteq \sigma_1(z) \subseteq \overline{Ann(0, 0, R_6(z))}.$$

Si $R_6(z) = \infty$ y $R_6(z^{-1}) < \infty$ entonces

$$Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, \infty) \subseteq \sigma_1(z) \subseteq \overline{Ann(0, (R_6(z^{-1})^{-1}, \infty)}.$$

Finalmente si $R_6(z) = R_6(z^{-1}) = \infty$ entonces

$$\sigma_1(z) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Demostración. Probaremos solo el caso en que $R_6(z) < \infty$ y $R_6(z^{-1}) < \infty$, los demás son completamente análogos. Supongamos que $R_6(z^{-1})^{-1} < |\lambda| < R_6(z)$ y consideremos un elemento en A dado por $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)z^n$, entonces tenemos que probar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n$ converge.

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n$ no converge, sea r el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)t^n$, entonces $r \leq |\lambda|$ y como $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)z^n$ converge se tiene por definición de $R_6(z)$ que $|\lambda| < R_6(z) \leq r \leq |\lambda|$ lo cual es una contradicción.

Supongamos también que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)\lambda^{-n}$ no converge, sea s el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)t^n$, entonces $s \leq |\lambda|^{-1}$ también sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)z^{-n}$ converge y por definición de $R_6(z^{-1})$ se tiene que $|\lambda|^{-1} < R_6(z^{-1}) \leq s \leq |\lambda|^{-1}$, de nuevo esto es una contradicción. Esto nos dice que $\lambda \in \sigma_1(z)$.

Sea $\lambda \in \sigma_1(z)$, si $|\lambda| > R_6(z)$ entonces existe $|\lambda| > \alpha \geq R_6(z)$ tal que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ con radio de convergencia α y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente, por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n$ converge, así pues $|\lambda| < \alpha < |\lambda|$ lo cual es una contradicción, por tanto $|\lambda| \leq R_6(z)$.

Ahora supongamos que $|\lambda| < R_6(z^{-1})^{-1}$, entonces existe $R_6(z^{-1}) \leq \beta < |\lambda|^{-1}$ tal que existe una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ que tiene radio de convergenia β y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ converge, así pues $|\lambda|^{-1} < \beta$ y por tanto $\beta < |\lambda|^{-1} < \beta$ lo cual es una contradicción por tanto $|\lambda|^{-1} \geq R_6(z^{-1})^{-1}$, de esta forma $\lambda \in \overline{Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, R_6(z))}$. □

Con respecto al radio $R_7(z)$ obtuvimos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.21. *Sea A una B_0-álgebra con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $R_7(z)R_7(z^{-1}) > 1$, entonces*

$$Ann(0, R_7(z^{-1})^{-1}, R_7(z)) \subseteq \sigma(z) \subseteq \overline{Ann(0, R_7(z^{-1})^{-1}, R_7(z))},$$

cuando $R_7(z) < \infty$ y $R_7(z^{-1}) < \infty$. Si $R_7(z) < \infty$ y $R_7(z^{-1}) = \infty$ entonces

$$Ann(0, 0, R_7(z)) \subseteq \sigma(z) \subseteq \overline{Ann(0, 0, R_7(z))}.$$

En el caso que $R_7(z) = \infty$ y $R_7(z^{-1}) < \infty$ tenemos que

$$Ann(0, R_7(z^{-1})^{-1}, \infty) \subseteq \sigma(z) \subseteq \overline{Ann(0, R_7(z^{-1})^{-1}, \infty)}.$$

Finalmente si $R_7(z) = R_7(z^{-1}) = \infty$, entonces $\sigma(z) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración. Supongamos que $R_7(z^{-1})^{-1} < |\lambda| < R_7(z)$ y que $z - \lambda e$ es invertible, por tanto existen escalares $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que

$$(z - \lambda e)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n z^n,$$

entonces

$$e = (z - \lambda e)(z - \lambda e)^{-1} = (z - \lambda e) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n z^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n z^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda\lambda_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{n-1} - \lambda\lambda_n) z^n,$$

de donde $\lambda_{-1} - \lambda\lambda_0 = 1$ y $\lambda_{n-1} - \lambda\lambda_n = 0$ para cada $n \neq 0$, como $\lambda \neq 0$ podemos despejar y obetener que

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{\lambda^n},\ \ n \geq 0 \ \text{ y } \ \lambda_{-n} = \left(\frac{\lambda_0\lambda + 1}{\lambda}\right) \lambda^n,\ \ n \geq 1,$$

de esta forma

$$(z - \lambda e)^{-1} = \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0\lambda + 1}{\lambda}\right) \lambda^n z^{-n}.$$

Sea $\{\| \ |\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de seminormas que definen la topología de A, entonces podemos escribir $R_7(z) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \limsup_n \sqrt[n]{\|z^n\|_i}$ por tanto existe i_0 tal que

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|z^n\|_{i_0}} > |\lambda|$$

y por tanto

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|z^n/\lambda^n\|_{i_0}} > 1,$$

por tanto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda^n}$ no converge, lo cual es una cotradicción. También como $R_7(z^{-1})^{-1} < |\lambda|$, entonces $R_7(z^{-1}) > |\lambda|^{-1}$ y por tanto existe i_1 tal que

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|z^{-n}\|_{i_1}} > |\lambda|^{-1}$$

y por tanto

$$\limsup_n \sqrt[n]{\left\| \frac{(\lambda_0\lambda + 1)\lambda^n}{\lambda} z^{-n} \right\|_{i_1}} = \limsup_n \sqrt[n]{\|\lambda^n z^{-n}\|} > 1,$$

por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0\lambda+1}{\lambda}\right) \lambda^n z^{-n}$ no converge, lo cual es una contradicción y por tanto $\lambda \in \sigma(z)$.

Ahora supongamos que $|\lambda| > R_7(z)$, entonces si $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $|\lambda| > \limsup_n \sqrt[n]{\|z^n\|_i}$ y por tanto $\limsup_n \sqrt[n]{\|z^n\|_i/\lambda^{n+1}} < 1$, sea r tal que

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|z^n\|_i/\lambda^{n+1}} < r < 1$$

entonces existe n_0 natural tal que $\sqrt[n]{\|z^n\|_i/\lambda^{n+1}} \leq r$ para cada $n > n_0$, de donde $\|z^n/\lambda^{n+1}\|_i \leq r^n$ para cada $n > n_0$ es así que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{z^n}{\lambda^{n+1}} \right\|_i = 0$$

converge. Con esto se puede demostrar que $(z-\lambda e)^{-1}$ existe y $(z-\lambda e)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda^{n+1}}$, es decir $\lambda \notin \sigma(z)$.

Análogamente si $|\lambda| < R_7(z^{-1})^{-1}$, entonces $|\lambda| R_7(z^{-1}) < 1$ y de esta forma para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\|\lambda^{n-1} z^{-n}\|_i \to 0$$

si $n \to \infty$ y por tanto $(z-\lambda e)^{-1}$ existe y $(z-\lambda e)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} z^{-n}$, es decir $\lambda \notin \sigma(z)$. □

El siguiente ejemplo aparece en [20] y muestra que el espectro puede tener valores en la frontera. Sea $0 < r < R < \infty$ numeros reales y denotemos por $Ann[0, r, R) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid r \leq |\lambda| < R\}$. Ahora consideremos

$$H[r,R) = \Bigg\{ f \in C(Ann[0,r,R)) \mid f \in H(Ann(0,r,R)), \;\; f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n z^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{-n}| r^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| s^n < \infty \text{ para todo } 0 < r < s < R \Bigg\}.$$

Se puede demostrar que $H[r, R)$ es una B_0-álgebra, m-convexa, con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y que el espectro está dado por

$$\sigma(z) = Ann[0, r, R).$$

En el caso en que A es una B_0-álgebra y m-convexa se tiene el siguiente resultado:

Corolario 1.2.22. *Sea A una B_0-álgebra, m-convexa y con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $\sigma(z)$ es abierto, entonces*

$$\sigma(z) = \sigma_1(z) = \{f(z) \mid f \in \mathfrak{M}(A)\} = Ann(0, r, R)$$

cuando $r = R(z^{-1})^{-1}$ y $R = R(z)$. Si $R(z^{-1}) = \infty$ ponemos $r = 0$, y $\sigma(z) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en el caso que $R(z) = R(z^{-1}) = \infty$.

En [6] H. Arizmendi y A. Carrillo caracterizaron las bases cíclicas en B_0-álbegras de la siguiente manera: Si $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ son dos bases cíclicas para una B_0-álgebra, entonces si $r = R_6(z) < \infty$ se tiene que

$$w = \lambda_0(z - ae)(r^2e - \overline{a}z)^{-1}$$

para algunos escalares $\lambda_0, a \in \mathbb{C}$ y si $R_6(z) = \infty$ entonces $w = \lambda_0(z - ae)$ para algunos escalares $\lambda_0, a \in \mathbb{C}$.

A continuación obtenemos un resultado similar para bases cíclicas de tipo Laurent en B_0-álbegras.

Proposición 1.2.23. *Sean s_1, s_2 numeros reales tales que $1 < s_1, s_2$. Si tenemos un biholomorfismo $\phi : Ann(0, 1, s_1) \to Ann(0, 1, s_2)$, entonces $s_1 = s_2$ y*

$$\phi(z) = cz \quad \text{ó} \quad \phi(z) = cs_1z^{-1}$$

para cada $z \in Ann(0, 1, s_1)$ y donde $|c| = 1$.

Demostración. En [30], teorema 5.3.2, se demuestra que si ϕ es un biholomorfismo entonces $s_1 = s_2$ y que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\phi(z) = cz \quad \text{ó} \quad \phi(z) = cs_1z^{-1}$$

para cada $z \in Ann(0, 1, s_1)$, probaremos ahora que $|c| = 1$.

Supongamos primero que $\phi(z) = cz$ y que $|c| > 1$, consideremos $\alpha = 1 + \frac{|c|-1}{2} = \frac{1+|c|}{2}$, como ϕ es sobre existe $1 < |z_1| < s_1$ tal que $\phi(z_1) = \lambda_1$, entonces

$$\frac{1 + |c|}{2} = |c||z_1| > |c|,$$

de donde $1 + |c| > 2|c|$, entonces $1 > |c|$ lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que $|c| < 1$ y consideremos $\lambda_2 = |c|s_1 + \frac{s_1-|c|s_1}{2} = \frac{|c|s_1+s_1}{2}$, como ϕ es sobre existe $1 < |z_2| < s_1$ tal que $\phi(z_2) = \lambda_2$ y por tanto

$$\frac{|c|s_1 + s_1}{2} = |c||z_2| < |c|s_1,$$

es así que $|c|s_1 + s_1 < 2|c|s_1$, entonces $1 < |c|$, de nuevo esto es una contradicción y por tanto $|c| = 1$.

Ahora si $\phi(z) = cs_1z^{-1}$ consideremos $\psi(z) = \frac{s_1}{\phi(z)}$ para cada $1 < |z| < s_1$, dado que $\phi(z)$ es un biholomorfismo de $Ann(0, 1, s_1)$, no es difícil ver que ψ también es un biholomorfismo de $Ann(0, 1, s_1)$, de hecho $\psi^{-1}(z) = \phi^{-1}(s_1z^{-1})$, pero $\psi(z) = c^{-1}z$ para cada $1 < |z| < s_1$, por tanto por el primer caso tenemos que $|c| = 1$ $\square$

Proposición 1.2.24. *Sean r_1, R_1, r_2 y R_2 números reales tales que $0 < r_1 < R_1$ y $0 < r_2 < R_2$. Si $\phi : Ann(0, r_1, R_1) \to Ann(0, r_2, R_2)$ es un biholomorfismo, entonces $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$ y además*

$$\phi(z) = \frac{r_2}{r_1} cz \quad \acute{o} \quad \phi(z) = cr_2R_1z^{-1}$$

para cada $z \in Ann(0, r_1, R_2)$ y $|c| = 1$.

Demostración. Sean $s_1 = \frac{R_1}{r_1}$ y $s_2 = \frac{R_2}{r_2}$ y consideremos las siguientes funciones holomorfas $\phi_1 : Ann(0, 1, s_1) \to Ann(0, r_1, R_1)$ dada por $\phi_1(z) = r_1z$ para cada $z \in Ann(0, 1, s_1)$ y $\phi_2 : Ann(0, 1, s_2) \to Ann(0, r_2, R_2)$ dada por $\phi_2(z) = r_2z$ para cada $z \in Ann(0, 1, s_2)$, éstos son biholomorfismos con inversas $\phi_1^{-1}(z) = \frac{z}{r_1}$ y $\phi_2^{-1}(z) = \frac{z}{r_2}$ respectivamente.

Tenemos pues que $\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1 : Ann(0, 1, s_1) \to Ann(0, 1, s_2)$ es un biholomorfismo y por la proposición 1.2.23 se tiene que $s_1 = s_2$ y que existe $|c| = 1$ tal que

$$(\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1)(z) = cz \quad \text{ó} \quad (\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1)(z) = cs_1z^{-1}$$

para cada $z \in Ann(0, 1, s_1)$. Supongamos que $(\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1)(z) = cz$, componiendo con ϕ_1^{-1} y ϕ_2 se obtiene que

$$\phi(z) = (\phi_2 \circ (\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1) \circ \phi_1^{-1})(z) = \frac{r_2}{r_1} cz$$

para cada $z \in Ann(0, r_1, R_1)$. Supongamos ahora que $(\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1)(z) = cs_1z^{-1}$, componiendo de nuevo con ϕ^{-1} y con ϕ_2 se tiene que

$$\phi(z) = (\phi_2 \circ (\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1) \circ \phi_1^{-1})(z) = cr_2R_1z^{-1}$$

para cada $z \in Ann(0, r_1, R_1)$. □

Unos de los resultados importantes de este trabajo es la siguiente proposición que nos dice que relación existe entre dos distintas bases cíclicas de tipo Laurent en una B_0-álgebra.

Proposición 1.2.25. *Sea A una B_0-álgebra con bases cíclicas de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{w^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $R_6(z)R_6(z^{-1}) > 1$ y $R_6(w)R_6(w^{-1}) > 1$. Entonces los radios satisfacen $R_6(z)R_6(z^{-1}) = R_6(w)R_6(w^{-1})$ y existe una constante $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que*

$$w = az \quad \acute{o} \quad w = az^{-1}.$$

De hecho se tienen los siguientes casos: Si $R_6(z) < \infty$ y $R_6(z^{-1}) \leq \infty$, entonces

$$w = \frac{R_6(w)}{R_6(z)} cz \quad ó \quad w = \frac{R_6(z)}{R_6(w^{-1})} cz^{-1},$$

donde $|c| = 1$. Si $R_6(z) = \infty$ y $R_6(z^{-1}) < \infty$, entonces

$$w = \frac{R_6(z^{-1})}{R_6(w^{-1})} cz \quad ó \quad w = \frac{R_6(w)}{R_6(z^{-1})} cz^{-1},$$

donde $|c| = 1$. Finalmente si $R_6(z) = R_6(z^{-1}) = \infty$, entonces

$$w = az \quad ó \quad w = az^{-1},$$

donde $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración. Supongamos que $w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ y definamos la función $\phi : \sigma_1(z) \to \sigma_1(w)$ dada por

$$\phi(\lambda) = f_\lambda(w)$$

donde $f_\lambda(z) = \lambda$ y $f_\lambda \in \mathfrak{M}(A)$. Observemos que ϕ se puede escribir como

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n$$

para cada $\lambda \in \sigma_1(z)$. No es muy difícil ver que ϕ es biyectiva, consideremos la restricción a $\text{int}(\sigma_1(z))$, de esta forma ϕ es holomorfa en $\text{int}(\sigma_1(z))$ y por el teorema del mapeo abierto se tiene que

$$\phi(\text{int}(\sigma_1(z)) \subseteq \text{int}(\sigma_1(w)).$$

De manera completamente análoga se puede probar que la inversa ϕ^{-1} restringida a $\text{int}(\sigma_1(w))$ satisface que

$$\phi^{-1}(\text{int}(\sigma_1(w))) \subseteq \text{int}(\sigma_1(z)),$$

de esta forma $\phi : \text{int}(\sigma_1(z)) \to \text{int}(\sigma_2(w))$ es un biholomorfismo.

Ahora tenemos que suponer diferentes casos. Supongamos $R_6(z) < \infty$ y $R_6(z^{-1}) < \infty$, entonces

$$\text{int}(\sigma_1(z)) = Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, R_6(z)),$$

En [30] se demuestra que en este caso, dado que ϕ es un biholomorfiso, $R_6(w) < \infty$ y $R_6(w^{-1}) < \infty$, además por la proposición 1.2.24 se tiene que $R_6(z)R_6(z^{-1}) = R_6(w)R_6(w^{-1})$ y

$$\phi(\lambda) = \frac{R_6(w)}{R_6(z)}c\lambda \quad \text{ó} \quad \phi(\lambda) = \frac{R_6(z)}{R_6(w^{-1})}c\lambda^{-1}$$

donde $|c| = 1$, para cada $\lambda \in Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, R_6(z))$. En el primer caso se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\lambda^n = \frac{R_6(w)}{R_6(z)}c\lambda$$

para cada $\lambda \in Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, R_6(z))$. De esta forma $a_n = 0$ para cada $n \neq 1$ y $a_1 = \frac{R_6(w)}{R_6(z)}c$, de esta forma $w = \frac{R_6(w)}{R_6(z)}cz$. En el segundo caso tenemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\lambda^n = \frac{R_6(z)}{R_6(w^{-1})}c\lambda^{-1}$$

para cada $\lambda \in Ann(0, R_6(z^{-1})^{-1}, R_6(z))$, entonces $a_n = 0$ para cada $n \neq -1$ y por tanto $a_{-1} = \frac{R_6(z)}{R_6(w^{-1})}c$, de donde $w = \frac{R_6(z)}{R_6(w^{-1})}cz^{-1}$.

Ahora si $R_6(z) < \infty$ and $R_6(z^{-1}) = \infty$, se tiene que

$$\text{int}(\sigma_1(z)) = Ann(0, 0, R_6(z)),$$

de nuevo como ϕ es un biholomorfismo en [30] se demuestra que en este caso $R_6(w) < \infty$ y $R_6(w^{-1}) = \infty$ ó $R_6(w) = \infty$ and $R_6(w^{-1}) < \infty$, esto es

$$\text{int}(\sigma_1(w)) = Ann(0, 0, R_6(w)) \quad \text{or} \quad \text{int}(\sigma_1(w)) = Ann(0, R_6(w^{-1})^{-1}, \infty).$$

Así pues el problema de clasificar las bases se reduce a ver qué forma tiene ϕ en los dos casos siguientes:

$$\phi : Ann(0, 0, R_6(z)) \to Ann(0, 0, R_6(w))$$

ó

$$\phi : Ann(0, 0, R_6(z)) \to Ann(0, R_6(w^{-1})^{-1}, \infty).$$

Supongamos que $R_6(w) < \infty$ y $R_6(w^{-1}) = \infty$, tenemos entonces que

$$\phi : Ann(0, 0, R_6(z)) \to Ann(0, 0, R_6(w)).$$

Consideremos $D_1(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$ y $h_1 : D_1(0) \setminus \{0\} \to Ann(0, 0, R_6(z))$ dada por

$$h_1(\lambda) = R_6(z)\lambda,$$

para cada $\lambda \in D_1(0) \setminus \{0\}$. h_1 es un biholomorfismo con inversa $h_1^{-1}(\lambda) = R_6(z)^{-1}\lambda$. También consideremos $h_2 : D_1(0) \setminus \{0\} \to Ann(0, 0, R_6(w))$ dada por

$$h_2(\lambda) = R_6(w)\lambda,$$

para cada $\lambda \in D_1(0) \setminus \{0\}$. h_2 también es un biholomorfismo con inversa $h_2^{-1}(\lambda) = R_6(w)^{-1}\lambda$.

Se tiene que $h_2^{-1} \circ \phi \circ h_1 : D_1(0) \setminus \{0\} \to D_1(0) \setminus \{0\}$ es un biholomorfismo del disco agujerado en sí mismo.

Es un hecho conocido que los biholomorfismos del disco agujerado en si mismo son solamente rotaciones, así pues existe un número complejo c con $|c| = 1$ y

$$(h_2^{-1} \circ \phi \circ h_1)(\lambda) = c\lambda,$$

para cada $\lambda \in D_1(0) \setminus \{0\}$, se sigue que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n = \phi(\lambda) = (h_2 \circ (h_2^{-1} \circ \phi \circ h_1) \circ h_1^{-1})(\lambda) = \frac{R_6(w)}{R_6(z)} c\lambda$$

por tanto $w = \frac{R_6(w)}{R_6(z)} cz$.

Ahora supongamos que $R_6(w) = \infty$ y $R_6(w^{-1}) < \infty$, se tiene entonces que

$$\phi : Ann(0, 0, R_6(z)) \to Ann(0, R_6(w^{-1})^{-1}, \infty).$$

Consideremos $j_1 : D_1(0) \setminus \{0\} \to Ann(0, 0, R_6(z))$ dada por

$$j_1(\lambda) = R_6(z)\lambda,$$

para cada $\lambda \in D_1(0) \setminus \{0\}$. j_1 es un biholomorfismo con inversa $j_1^{-1}(\lambda) = R_6(z)^{-1}\lambda$. Ahora consideremos la inversión $g : Ann(0, R_6(w^{-1})^{-1}, \infty) \to Ann(0, 0, R_6(w^{-1}))$ dada por

$$g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

para cada $\lambda \in Ann(0, R_6(w^{-1})^{-1}, \infty)$ que también es un biholomorfismo con inversa la misma g. También consideremos $j_2 : D_1(0) \setminus \{0\} \to Ann(0, 0, R_6(w^{-1}))$ dado por

$$j_2(\lambda) = R_6(w^{-1})\lambda,$$

para cada $\lambda \in D_1(0) \setminus \{0\}$. j_2 es un biholomorfismo con inversa $j_2(\lambda) = R_6(w^{-1})^{-1}\lambda$. Tenemos que $j_2^{-1} \circ g \circ \phi \circ j_1 : D_1(0) \setminus \{0\} \to D_1(0) \setminus \{0\}$ es un biholomorfismo del disco agujerado en si mismo, de donde existe un número complejo c tal que $|c| = 1$ y

$$(j_2^{-1} \circ g \circ \phi \circ j_1)(\lambda) = c\lambda,$$

para cada $\lambda \in D_1(0) \setminus \{0\}$. A partir de esto tenemos que

$$\frac{1}{\phi(\lambda)} = (g \circ \phi)(\lambda) = (j_2 \circ (j_2^{-1} \circ g \circ \phi \circ j_1) \circ j_1^{-1})(\lambda) = \frac{R_6(w^{-1})}{R_6(z)} c\lambda,$$

por tanto $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n = \phi(\lambda) = \frac{R_6(z)}{R_6(w^{-1})} c\lambda^{-1}$, de donde $w = \frac{R_6(z)}{R_6(w^{-1})} cz^{-1}$.

La prueba del caso $R_6(z) = \infty$ y $R_6(z) < \infty$ es similar, y para el caso en que $R_6(z) = R_6(z^{-1}) = \infty$ usamos el hecho de que los biholomorfismos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ son rotaciones compuestos con una inversión. $\square$

La siguiente proposición nos será de ultilidad en varias ocasiones.

Proposición 1.2.26. *Sea A un álgebra m-convexa con familia de seminormas $\{\| \; \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que difinen la topología. Para cada $x \in A$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{n-m}\|_\alpha^{1/n} = \inf\{\|x^n\|_\alpha^{1/n}\}$$

para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración. Basta probar el caso para $m = 0$ los otros son análogos. Denotemos por $r = \inf\{\|x^n\|_\alpha^{1/n}\}$ y supongamos que $x \neq 0$. Sea $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^k\|^{1/k} < r + \epsilon$. El algoritmo de la división nos dice que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $p_n, q_n \geq 0$ con $q_n \leq k - 1$ tales que $n = p_n k + q_n$. Como $\frac{q_n}{n} \leq \frac{|k-1|}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{q_n}{n} \to 0$ si $n \to \infty$, así pues $\frac{p_n k}{n} = 1 - \frac{q_n}{n} \to 1$ y por tanto $\frac{p_n}{n} \to \frac{1}{k}$ cuando $n \to \infty$, de donde

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|_\alpha^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|x^k\|_\alpha^{\frac{p_n}{n}} \|x\|_\alpha^{\frac{q_n}{n}} = \|x^k\|^{1/k} < r + \epsilon,$$

de donde si $\epsilon \to 0$ se obtiene que $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|_\alpha^{1/n} \leq r$, además claramente $r \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|_\alpha^{1/n}$, de donde se sigue la igualdad. $\square$

En [20] se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 1.2.27. *Sea A una B_0-álgebra, m-convexa y con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{\| \; \|_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de seminormas que definen la topogia τ de A. Si para cada i se tiene que*

$$|x|_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i < \infty,$$

para cada $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ *elemento de* A*, entonces* $\{| \ |_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una familia de seminormas que definen la misma topología* τ*.*

Proposición 1.2.28. *Sea* A *una* B_0*-álgebra,* m*-convexa y con base cíclica de tipo Laurent* $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*. Si* $\{\| \ \|_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una familia de seminormas que definen la topología de* A*, entonces para cada* $i \in \mathbb{N}$

$$r_i \leq R_i$$

donde $r_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z^{-n}\|_i^{-1/n}$ *y* $R_i = \text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|z^n\|_i^{1/n}$*.*

Demostración. Sea $i \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|e\|_i = \|z^n z^{-n}\|_i \leq \|z^n\|_i \|z^{-n}\|_i,$$

de donde

$$\|e\|_i^{1/n} \|z^{-n}\|_i^{-1/n} \leq \|z^n\|^{1/n},$$

por tanto tomando el límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \|z^{-n}\|_i^{-1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|z^n\|^{1/n},$$

y como A es m-covexa por la proposición 1.2.26 se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|z^{-n}\|_i^{-1/n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z^{-n}\|_i^{-1/n}$ y también $\lim_{n\to\infty} \|z^n\|^{1/n} = \text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|z^n\|_i^{1/n}$. $\square$

La siguiente proposición es también un resultado original y nos dice que bajo ciertas condiciones una B_0-álgebra, m-convexa y con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es isomorfa al espacio de funciones holomorfas $H(\Omega)$ definidas sobre Ω un abierto no vacío y conexo.

Teorema 1.2.29. *Sea* A *una* B_0*-álgebra,* m*-convexa y con base cíclica de tipo Laurent* $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*. Si* $\{\| \ \|_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una familia de seminormas que definen la topología de* A *y son tales que*

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i < \infty$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$ *y para cada* $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ *elemento de* A*.*

2. *Para cada* $i \in \mathbb{N}$

$$r < r_i \leq R_i < R,$$

donde $r_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z^{-n}\|_i^{-1/n}$*,* $R_i = \text{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \|z^n\|_i^{1/n}$*,* $r = R(z^{-1})^{-1}$ *y* $R = R(z)$*,*

entonces A *es isomorfa al álgebra de funciones holomorfas* $H(\Omega)$ *definidas en* $\Omega = Ann(0, r, R)$ *y con la topología compacto-abierta.*

Demostración. Definamos $T : A \to H(\Omega)$ por $T(x) = x(\lambda)$ donde

$$x(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n,$$

$r < |\lambda| < R$ y $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)z^n \in A$. Probaremos primero que T está bien definida. Sea $r < |\lambda| < R$. En [5, 6] se demuestra que en este caso $R(z) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \liminf \sqrt[n]{\|z^n\|_i}$ por tanto existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda| < \liminf_n \sqrt[n]{\|z^n\|_i}$, de donde existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|z^n\|_i}$ para cada $n \geq n_0$, por tanto

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |\lambda_n(x)||\lambda|^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |\lambda_n(x)|\|z^n\|_i < \infty,$$

y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n$ converge.

Ahora $R(z^{-1}) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \liminf \sqrt[n]{\|z^{-n}\|_i}$, por tanto de la misma forma que en el párrafo anterior existen j y n_1 naturales tales que $|\lambda|^{-1} \leq \sqrt[n]{\|z^{-n}\|_j}$ para cada $n \geq n_1$, por tanto

$$\left|\sum_{n=n_1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)\lambda^{-n}\right| \leq \sum_{n=n_1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)||\lambda|^{-n} \leq \sum_{n=n_1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)|\|z^{-n}\|_j < \infty,$$

es decir $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n}(x)\lambda^{-n}$ converge, así T está bien definida.

T es claramente inyectiva, probaremos a continuación que es sobre. Consideremos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\lambda^n$ una función holomorfa definida en Ω, probaremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^{-n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergen.

Sea $i \in \mathbb{N}$ y $R_i < r < R$, tenemos pues que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$ converge y como $R_i < r$ tenemos que

$$\|z^n\|_i < r^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\|z^n\|_i \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n < \infty$, es así que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge. Ahora sea $r < s < r_i$, así pues $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|s^{-n}$ converge y como $s < r_i$ se tiene que

$$\|z^{-n}\|_i < s^{-n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|\|z^{-n}\|_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|s^{-n} < \infty$, así pues $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ es un elemento de A y $T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\lambda^n$.

No es difícil ver que T es lineal y multiplicativa, probaremos ahora que T es continua. La topología compacto-abierta de $H(\Omega)$ se puede definir mediante la siguiente familia de seminormas

$$|\|x(\lambda)\||_i = \sup_{r_i<|\lambda|<R_i} |x(\lambda)|$$

para $x(\lambda) \in H(\Omega)$ y cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ elemento de A, entonces

$$|||T(x)|||_i = \sup_{r_i<|\lambda|<R_i} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x)\lambda^n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(x)| r_i^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(x) R_i^n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^{-n}\|_i + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i,$$

ahora la proposición 1.2.27 nos dice que existen $j \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i \leq M \|x\|_j,$$

es así que $|||T(x)|||_i \leq M\|x\|_j$, por tanto T es continua y por el teorema del mapeo abierto T^{-1} es continuo, de esta forma T es un isomorfismo. □

Otro de los resultados que hemos encontrado es el hecho de que las condiciones dadas en el teorema 1.2.29 son equivalentes a la condición de Watson de que $\sigma(z)$ sea abierto, esta demostración se basa en el corolario 1.2.22.

Teorema 1.2.30. *Sea A una B_0-álgebra, m-convexa y con base cíclica de tipo Laurent $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Si $\{\| \;\|\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de seminormas que definen la topología para A, entonces son equivalentes las siguientes condiciones.*

1. *$\sigma(z)$ es abierto en $\mathbb{C}$.*

2. *A es isomorfa a un álgebra de funciones holomorfas $H(\Omega)$, definidas en un abierto 1-finitamente conexo Ω y con la topología compacto-abierta.*

3. *Dada $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i < \infty$ para cada $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ elemento de A y*
$$r < r_i \leq R_i < R,$$
donde $r_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z^{-n}\|_i^{-1/n}$, $R_i = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|z^n\|_i^{1/n}$, $r = R(z^{-1})^{-1}$ y $R = R(z)$.

Demostración. Probaremos primero que 1. implica 3. Supongamos que $\sigma(z)$ es abierto, por tanto

$$\sigma(z) = \sigma_1(z) = \{f(z) \mid f \in \mathfrak{M}(A)\} = Ann(0, r, R),$$

fijemos $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$ elemento de A y sea $i \in \mathbb{N}$, consideremos $\lambda_1 = \|z\|_i$, afirmamos que $\lambda_1 \in \sigma(z)$ si no fuera el caso tendriamos que $z - \lambda_1 e$ es invertible y como se vió en la proposición 1.2.21

$$(z-\lambda_1 e)^{-1} = \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda_1^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0\lambda_1+1}{\lambda_1}\right) \lambda_1^n z^{-n}$$

pero para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|\lambda_1^n z^{-n}\|_i = \|z\|_i^n \|z^{-n}\|_i \geq \|z^n\|_i \|z^{-n}\|_i \geq \|z^n z^{-n}\| = \|e\|_i \neq 0,$$

así pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0\lambda_1+1}{\lambda_1}\right) \lambda_1^n z^{-n}$ no sería convergente, lo cual es una contradición y por tanto $\lambda_1 \in \sigma(z)$. De esta forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z\|_i^n < \infty,$$

y en particular

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z\|_i^n < \infty.$$

Ahora sea $\lambda_2 = \|z^{-1}\|_i^{-1}$, afirmamos que $\lambda_2 \in \sigma(z)$, si no fuera así $z - \lambda_2 e$ sería invertible y

$$(z-\lambda_2 e)^{-1} = \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda_2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0\lambda_2+1}{\lambda_2}\right) \lambda_2^n z^{-n},$$

pero para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{z^n}{\lambda_2^n}\right\|_i = \|z^{-1}\|_i^n \|z^n\|_i \geq \|z^{-n}\|_i \|z^n\|_i \geq \|z^{-n}\|_i \|z^n\|_i = \|e\|_i \neq 0,$$

así pues $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda_2^n}$ no sería convergente, lo cual es una contradicción y por tanto $\lambda_2 \in \sigma(z)$. A partir de esto se sigue que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^{-1}\|_i^{-n} < \infty,$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)| \|z^{-n}\|_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)| \|z^{-1}\|_i^n < \infty,$$

por tanto $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i < \infty$.

Ahora sea $i \in \mathbb{N}$ y denotemos por λ a R_i, vamos a probar que $\lambda \in \sigma(z)$. Definamos $f : A \to \mathbb{C}$ como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) \lambda^n$$

para cada $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n \in A$, se puede ver fácilmente que f es lineal y multiplicativa. Además para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|e\|_i = \|z^n z^{-n}\|_i \leq \|z^n\|_i \|z^{-n}\|_i$, es así que $\|e\|_i \|z^n\|_i^{-1} \leq \|z^{-n}\|_i$, de donde $\|e\|_i^{1/n} \|z^n\|_i^{-1/n} \leq \|z^{-n}\|_i^{1/n}$ y tomando el límite cuando $n \to \infty$, como el álgebra es m-convexa usando la proposición 1.2.26 se tiene que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|z^n\|_i^{-1/n} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|z^{-n}\|_i^{1/n}.$$

Por tanto

$$|f(x)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \lambda^n = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)| \lambda^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(x)| \lambda^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)| \left(\sup_n \|z^n\|_i^{-1/n} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(x)| \left(\inf_n \|z^n\|_i^{1/n} \right)^n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)| \left(\inf_{n \in \mathbb{N}} \|z^{-n}\|_i^{1/n} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(x)| \left(\inf_n \|z^n\|_i^{1/n} \right)^n$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{-n}(x)| \|z^{-n}\|_i + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \|z^n\|_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\lambda_n(x)| \|z^n\|_i,$$

y la proposición 1.2.27 nos dice que esto basta para que f sea continua, y como $\lambda = f(z)$ se tiene que $\lambda \in \sigma(z)$, de donde $R_i < R(z)$.

De manera análoga si $\mu = r_i$ y definimos $g : A \to \mathbb{C}$ como

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) \mu^n$$

para cada $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n(x) z^n$, usando el hecho de que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|z^{-n}\|_i^{-1/n} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|z^n\|_i^{1/n},$$

se puede ver que f es lineal, multiplicativa y continua, así pues $\mu \in \sigma(z)$ y por tanto $r < r_i \leq R_i < R$.

Ahora que 3. implica 2. es el teorema 1.2.29. Finalmente si A es isomorfa a $H(\Omega)$ deberíamos tener que $\sigma(z)$ es homeomorfo a Ω, de donde $\sigma(z)$ es abierto. $\square$

Capítulo 2

Q-álgebras y algunas propiedades en álgebras topológicas

En este capítulo estudiamos las Q-álgebras y sus propiedades importantes. Consideramos algunas propiedades que pueden o no satisfacer un álgebra topológica, uno de los resultados importantes ha sido obtener la relación de estas propiedades con los espacios $\mathfrak{M}(A)$ y $\mathfrak{M}^{\#}(A)$.

2.1. Q-álgebras.

Definición 2.1.1. *Sea (A, τ) un álgebra semitopológica con unidad e. Decimos que A es una Q-álgebra si el conjunto de elementos invertibles $G(A)$ es abierto en A.*

Algunas equivalencias para que A sea una Q-álgebra son las siguientes.

Proposición 2.1.2. *Sea (A, τ) un álgebra topológica con identidad e. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra.*
2. *e es un punto interior de $G(A)$.*
3. *$\operatorname{int}(G(A)) \neq \emptyset$.*

Demostración. Es inmediata. $\square$

Definición 2.1.3. *Sea A un álgebra topológica. Decimos que A es un álgebra normada si existe una norma $\| \ \|$ definida en A tal que la topología inducida por la norma es igual a la topología de A y además*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

para cada $x, y \in A$. En este caso la denotamos por $(A, \| \ \|)$.

En el caso de álgebras normadas tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4. *Sea $(A, \| \ \|)$ un álgebra normada con identidad e. Las siguientes afirmaciones son equivalenetes*

1. *A es una Q-álgebra.*
2. *Si $x \in A$ y $\|e - x\| < 1$, entonces $x \in G(A)$.*
3. *Si $x \in A$ y $\|x\| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en A.*

Demostración. Véase [36]. □

De lo anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.1.5. *Si $(A, \| \ \|)$ es un álgebra de Banach, entonces A es una Q-álgebra.*

Demostración. Sea $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$, veamos que $\left(\sum_{k=1}^{m} x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Si $n > m$ entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{m} x^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x\|^k \to 0$$

si $n, m \to \infty$. Como A es completa, se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ converge en A, de donde A es una Q-álgebra. □

Una propiedad importante del espectro cuando A es una Q-álgebra es la siguiente.

Proposición 2.1.6. *Si A es una Q-álgebra. Entonces $\sigma(x)$ es compacto para todo $x \in A$.*

Demostración. Sea $x \in A$, veamos que $\sigma(x)$ es cerrado. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $f(\lambda) = x - \lambda e$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, esta es claramente un función continua y además

$$f^{-1}(G(A)) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$$

y como $G(A)$ es abierto se tiene que $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es abierto y por tanto $\sigma(x)$ es cerrado.

Falta ver que $\sigma(x)$ es acotado. Para este efecto supongamos que no, entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $\sigma(x)$ tal que $|\lambda_n| \to \infty$, de hecho esta sucesión la podemos escoger de tal forma que $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ y $\lambda_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $x - \lambda_n e \notin G(A)$, entonces $e - \frac{x}{\lambda_n} \notin G(A)$. También tenemos que $e - \frac{x}{\lambda_n} \to e$ pues $\frac{1}{|\lambda_n|} \to 0$ y como $A \setminus G(A)$ es cerrado se tiene que $e \notin G(A)$ lo cual es una contradicción, así pues $\sigma(x)$ es acotado y por tanto compacto. □

Proposición 2.1.7. *Sea A una Q-álgebra. Entonces todo ideal máximo bilateral de A es cerrado.*

Demostración. Sea M un ideal máximo bilateral de A, entonces $M \subseteq A \setminus G(A)$, pues si no pasara esto se tendría que $M = A$, pero M es un subconjunto propio de A.

Dado que $G(A)$ es abierto se tiene que $A \setminus G(A)$ es cerrado y por tanto $\overline{M} \subseteq A \setminus G(A)$, de donde la unidad $e \notin \overline{M}$, es decir $\overline{M} \subsetneq A$. Sabemos que $\overline{M}$ es también un ideal bilateral de A, como $M \subseteq \overline{M}$ se tiene que $M = \overline{M}$. □

Usando el corolario 1.2.22 del primer capítulo llegamos al siguiente resultado.

Proposición 2.1.8. *Sea A una Q-álgebra, m-convexa y conmutativa. Entonces*

$$\mathfrak{M}^{\#}(A) = \mathfrak{M}(A) = m(A) = M(A),$$

donde cada $f \in \mathfrak{M}(A)$ se identifica con $\ker(f)$.

Demostración. Por la proposición 2.1.7 y el corolario 1.1.14 se tiene que $\mathfrak{M}(A) = m(A) = M(A)$, resta probar que $\mathfrak{M}^{\#}(A) \subseteq \mathfrak{M}(A)$. Sea $f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$, no es difícil ver que $\ker(f) \subseteq A \setminus G(A)$ y por tanto

$$\ker(f) \subseteq \overline{\ker(f)A \setminus G(A)} = A \setminus G(A) \subsetneq A,$$

como $\ker(f)$ es un ideal máximo se tiene que $\ker(f) = \overline{\ker(f)}$ y por tanto f es continua, así pues se tiene la igualdad entre todos los conjuntos. □

Proposición 2.1.9. *Sea A una Q-álgebra, m-convexa y conmutativa. Si $x \in A$, entonces*

$$\sigma(x) = \{f(x) \mid f \in \mathfrak{M}(A)\} = \{f(x) \mid f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)\}.$$

Demostración. Sea $\lambda = f(x)$ para algún $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces si $\lambda \notin \sigma(x)$ existe $y \in A$ tal que $(x - \lambda e)y = y(x - \lambda e) = e$ y por tanto

$$1 = f(e) = f((x - \lambda e)y) = (f(x) - \lambda)f(y) = 0$$

lo cual es una contradicción, por tanto $\lambda \in \sigma(x)$.

Ahora supongamos que $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e \notin G(A)$. Sea I el ideal generado por $x - \lambda e$, este I es propio pues si $I = A$, entonces existiría $y \in A$ tal que $(x - \lambda e)y = y(x - \lambda e) = e$, lo cual es una contradicción.

Como I es propio existe M un ideal máximo tal que $I \subseteq M$, como A es una Q-álgebra, M es cerrado y como es m-convexa existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $M = \ker(f)$, por tanto $f(x) = \lambda$. □

Corolario 2.1.10. *Si A es una Q-álgebra, m-convexa y conmutativa, entonces $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$.*

Demostración. Es claro que $0 \in \sigma(0)$ y por la proposición 2.1.9 se tiene que existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $f(0) = 0$. □

Corolario 2.1.11. *Sea A una Q-álgebra, m-convexa y conmutativa. Entonces $x \in A$ es invertible si y sólo si $f(x) \neq 0$ para todo $f \in \mathfrak{M}(A)$.*

Demostración. $\Rightarrow$]Supongamos que $x \in G(A)$, es fácil ver que dada $f \in \mathfrak{M}(A)$ se cumple que $f(e) = 1$ y por tanto $1 = f(e) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$ de donde se tiene que $f(x) \neq 0$.

$\Leftarrow$] Ahora, si $x \notin G(A)$, entonces $0 \in \sigma(x)$ y por la proposición 2.1.9 existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $f(x) = 0$. □

2.2. La topología hk y los resultados de Abel-Jarosz

Recordemos que dada A un álgebra topológica $M(A)$ denota al conjunto de todo los ideales bilaterales máximos en A y $m(A)$ denota al conjunto de todos los ideales bilaterales máximos cerrados. M. Abel y K. Jarosz definieron en [1] la topología hk para $M(A)$ de la siguiente manera, si $S \subseteq M(A)$ definimos

$$K(S) = \bigcap_{I \in S} I$$

y si I es un ideal bilateral de A definimos

$$H(I) = \{M \in M(A) \mid I \subseteq M\},$$

así pues decimos que $S \subseteq M(A)$ es hk-cerrado si $S = H(K(S))$.

Proposición 2.2.1. *Sea A un álgebra semitopológica con unidad e. El espacio $M(A)$ es compacto con la topología hk.*

Demostración. Sea $\{F_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de $M(A)$ no vacíos y hk-cerrados y supongamos que $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$. Se tiene que

$$\emptyset = \bigcap_{j\in J} F_j = \bigcap_{j\in J} HK(F_j) = \bigcap_{j\in J}\{M \in M(A) \mid K(F_j) \subseteq M\} =$$

$$\{M \in M(A) \mid K(F_j) \subseteq M \text{ para cada } j \in J\} =$$

$$\left\{ M \in M(A) \mid \bigcup_{j\in J} K(F_j) \subseteq M \right\},$$

de donde se sigue que $\bigcup_{j\in J} K(F_j)$ el ideal bilateral generado por esta union es A. Así pues existen $a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{j\in J} K(F_j)$ y $b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_n \in A$ tal que $\sum_{k=1}^{n} b'_k a_k b_k = e$, sean $F_1, \ldots, F_n$ tales que $a_k \in K(F_k)$ para cada $k = 1, \ldots, n$. Se tiene que el ideal bilateral generado por $\bigcup_{k=1}^{n} K(F_k)$ es Ay por tanto

$$\emptyset = \left\{ M \in M(A) \mid \bigcup_{k=1}^{n} K(F_k) \subseteq M \right\}$$

$$= \{M \in M(A) \mid K(F_k) \subseteq M \text{ para cada } k = 1, \ldots, n\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} \{M \in M(A) \mid K(F_k) \subseteq M\} = \bigcap_{k=1}^{n} HK(F_k) = \bigcap_{k=1}^{n} F_k,$$

lo que prueba que $M(A)$ es hk-compacto. □

Un resultado importante que probaron M. Abel y K. Jaroz en [1] es el siguiente.

Teorema 2.2.2. *(Abel-Jarosz) Sea A un álgebra semitopológica con unidad e. Entonces $M(A) = m(A)$ si y sólo si*

1. *Cada ideal bilateral finitamente generado y propio de A esta contenido en un ideal bilateral máximo y cerrado.*

2. *$m(A)$ es hk-compacto.*

Demostración. Supongamos que $M(A) = m(A)$. En un álgebra topológica cada ideal bilateral propio está contenido en un ideal bilateral máximo y por tanto en un ideal bilateral máximo cerrado. Además como $M(A) = m(A)$ se tiene que $m(A)$ es hk-compacto.

Ahora supongamos que A satisface 1. y 2. Ahora sea $M_0 \in M(A)$ y para cada $a \in M(A)$ definamos

$$Z(a) = \{M \in m(A) \mid a \in M\}.$$

Sean $a_1, \ldots, a_n \in M_0$, si $I =< a_1, \ldots, a_n >$ es el ideal generado por esos elementos, como $I \subseteq M_0 \neq A$ se tiene por 1. que existe $M \in M(A)$ tal que $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq I \subseteq M$, de donde $M \in \bigcap_{k=1}^{n} Z(a_k)$. Se sigue que $\{Z(a) \mid a \in M_0\}$ es una familia de subconjuntos hk-cerrados que tiene la propiedad de la intersección finita y por 2. se tiene que existe $M_1 \in \bigcap_{a \in M_0} Z(a)$, de donde se sigue que $M_0 \subseteq M_1$ y dado que M_0 es máximo se concluye que $M_0 = M_1 \in m(A)$. □

Una cosa que logramos probar es que la topología hk es mas débil que la topología débil* en $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ y en $\mathfrak{M}(A)$.

Proposición 2.2.3. *Sea A un álgebra topológica. Entonces la topología hk en $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ y en $\mathfrak{M}(A)$ es más débil que la topología débil**

Demostración. Sea X un subconjunto hk-cerrado de $\mathfrak{M}^{\#}(A)$. Dado que cada $f \in X$ se identifica con $\ker(f)$ como elemento de $M(A)$ se tiene que

$$K(X) = \{a \in A \mid f(a) = 0 \text{ para cada } f \in X\}$$

y si I es un ideal bilateral de A se tiene que

$$H(I) = \{f \in \mathfrak{M}^{\#}(A) \mid f(a) = 0 \text{ para cada } a \in I\}.$$

Ahora usando el Teorema 1, pagina 192, de [28] se tiene que $X = H(K(X)) = \overline{s(X)}^{*}$, donde $\overline{s(X)}^{*}$ es el subconjunto mas chico, balanceado, convexo y débil* cerrado que contiene a X, por tanto X es débil* cerrado. Analogamente la topología hk en $\mathfrak{M}(A)$ es más débil que la topología débil*. □

Corolario 2.2.4. *Sea A un álgebra topológica. Entonces si X subconjunto de $\mathfrak{M}^{\#}(A)$, respectivamente de $\mathfrak{M}(A)$, es débil* compacto, entonces es hk-compacto.*

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ definimos el espectro conjunto como

$$\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \sum_{i=1}^{n} (a_i - \lambda_i e) b_i \notin G(A),\ \forall\, b_1, b_n, \ldots, b_n \in A\right\},$$

además si $X \subseteq \mathfrak{M}^{\#}(A)$ definimos

$$\sigma_X(a_1, \ldots, a_n) = \{(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \mid f \in X\}.$$

En [53] se demuestra la igualdad de los espectros arriba mencionados.

2.3. Algunas propiedades de las álgebras topológicas

La mayor parte de resultados de esta sección son originales los cuales consideran diversas propiedades especificas en álgebras topológicas. Dada A un álgebra topológica, conmutativa con unidad e, consideremos las siguientes propiedades, que pueden o no satisfacer A:

$$(\alpha_0) \quad \text{si} \sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| < 1 \text{ entonces existe } (e-x)^{-1} \in A.$$

$$(\alpha) \quad \text{si } x \in A \text{ y es tal que } f(x) \neq 0 \text{ para cada } f \in \mathfrak{M}(A)$$
$$\text{entonces existe } x^{-1} \in A.$$

$$(\beta) \quad \text{Si } a_1, \ldots, a_n \text{ son elementos de } A \text{ tales que } \sum_{i=1}^{n} |f(a_i)| > 0 \text{ para}$$

$$\text{cada } f \in \mathfrak{M}(A), \text{ entonces existen } b_1, \ldots, b_n \text{ en } A \text{ tales que } \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = e.$$

$$(\star) \quad \text{existe } V \text{ vecindad del cero tal que si } x \in V, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ converge.}$$

$$(\star\star) \quad \text{existe } V \text{ vecindad del cero tal que si } x \in V,$$
$$\text{entonces existe } (e-x)^{-1} \in A.$$

las primeras 3 propiedades son consideradas en [48] para álgebras de funciones, estudiaremos estas propiedades en el caso general de álgebras topológicas. Además, veremos la relación de la propiedad $(\star\star)$ con algunas otras conocidas en álgebras topológicas. Es claro que $(\star)$ implica $(\star\star)$.

Proposición 2.3.1. *Sea A un álgebra topológica con unidad e y conmutativa. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *A tiene la propiedad (β).*
2. *$\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sigma_{\mathfrak{M}(A)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

   Si además A es localmente m-convexa las propiedades anteriores son equivalentes a:

3. *Todo ideal propio de A finitamente generado está contenido en un ideal máximo cerrado.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)] En general siempre se tiene que

$$\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subseteq \sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

pues si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ para alguna $f \in \mathfrak{M}(A)$ entonces para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $f(a_i - \lambda_i e) = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y por tanto para cada $b_1, b_2, \ldots, b_n$ en A se tiene que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - \lambda_i e)b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i - \lambda_i e)f(b_i) = 0.$$

Por tanto $\sum_{i=1}^{n}(a_i - \lambda_i e)b_i \notin G(A)$. Ahora supongamos que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es tal que para cada $b_1, b_2, \ldots, b_n$ en A se tiene que $\sum_{i=1}^{n}(a_i - \lambda_i e)b_i \notin G(A)$, supongamos que para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$ existe i_0 tal que $f(a_{i_0}) \neq \lambda_{i_0}$, de donde $\sum_{i=1}^{n}|f(a_i - \lambda_i)| > 0$ y por tanto existen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ elementos de A tales que $\sum_{i=1}^{n}(a_i - \lambda_i e)b_i = e$ lo cual es imposible. Así pues, existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $f(a_i) = \lambda_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ por tanto $\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subseteq \sigma_{\mathfrak{M}(A)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2) $\Rightarrow$ 1)] Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos de A tal que $\sum_{i=1}^{n}|f(a_i)| > 0$ para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces $(0, 0, \ldots, 0) \notin \sigma_{\mathfrak{M}(A)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ por tanto $(0, 0, \ldots, 0) \notin \sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de donde existen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ en A tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = c$ para algún $c \in G(A)$ y por tanto $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c^{-1} = e$.

1) $\Rightarrow$ 3)] Sea $I =< a_1, a_2, \ldots, a_n >$ un ideal finitamente generado, si para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$ se tiene que $f(a_i) \neq 0$ para alguna i entonces $\sum_{i=1}^{n}|f(a_i)| > 0$ por tanto existen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ elementos de A tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = e$, de esta forma I no sera propio, por tanto existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $f(a_i) = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, así pues $I \subseteq \ker(f)$ y $\ker(f)$ es un ideal máximo cerrado.

3) $\Rightarrow$ 1)] Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos de A y tales que $\sum_{i=1}^{n}|f(a_i)| > 0$ para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$ y supongamos que para cada $b_1, b_2, \ldots, b_n$ elementos de A se tiene que $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \neq e$, de donde se tendría que I es propio y por tanto existe M máximo cerrado tal que $I \subseteq M$ y como A es m-convexa por el coroloario 1.2.22 se tendría que existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $M = \ker(f)$, de donde se tiene que $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n) = 0$. $\square$

Corolario 2.3.2. *Sea A un álgebra m-convexa con unidad e, conmutativa y con la propiedad (β). Entonces A no tiene ideales propios finitamente generados densos.*

Demostración. Sea I un ideal finitamente generado, entonces existe J un ideal máximo cerrado tal que $I \subseteq J$ y como $J \neq A$, entonces I no es denso. □

Corolario 2.3.3. *Sea A un álgebra m-convexa con unidad e y conmutativa. Entonces todo ideal máximo es cerrado si y sólo si*

1. $\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sigma_{\mathfrak{M}(A)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
2. $\mathfrak{M}(A)$ *es hk-compacto.*

Demostración. Esto es inmediato a partir de la proposición 2.3.1 y el teorema 2.2.2. □

Proposición 2.3.4. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa y con unidad e. Supongamos que $\mathfrak{M}(A)$ es débil compacto y que se satisface la propiedad (β). Entonces $\mathfrak{M}^{\#}(A) = \mathfrak{M}(A)$.*

Demostración. Como $\mathfrak{M}(A)$ es débil compacto, se tiene que es hk-compacto, además por la proposición 2.3.1 se tiene que todo ideal propio de A finitamente generado está contenido en un ideal máximo cerrado, por tanto usando el teorema 2.2.2 se tendría que

$$\mathfrak{M}^{\#}(A) \subseteq M(A) = m(A) = \mathfrak{M}(A),$$

es así que $\mathfrak{M}^{\#}(A) = \mathfrak{M}(A)$. □

Proposición 2.3.5. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa, con unidad e. Se tiene que $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ es débil compacto si y sólo si cada función $\widehat{x} : \mathfrak{M}^{\#}(A) \to \mathbb{C}$ dada por $\widehat{x}(f) = f(x)$ es acotada, para cada $x \in A$.*

Proposición 2.3.6. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa con e con la propiedad (α_0). Entonces $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ es compacto si y sólo si cada $\widehat{x}$ es acotado en $\mathfrak{M}(A)$ para cada $x \in A$.*

Proposición 2.3.7. *Sea A un álgebra topológica. Entonces A es una Q álgebra si y sólo si A tiene la propiedad $(\star\star)$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $e \in G(A)$. Sabemos que existe V vecindad de 0 tal que si $x \in V$ entonces existe $(e-x)^{-1} \in A$, sea $U = e - V$ la cual es una vecindad de e, afirmamos que $e \in U \subseteq G(A)$.

Sea $x \in U$, entonces existe $y \in V$ tal que $x = e - y$ y por tanto $y = e - x \in V$, de donde existe $x = (e-y)^{-1} \in A$, es así que $x \in G(A)$. Esto nos dice que $G(A)$ es abierto.

$\Leftarrow$] Ahora supongamos que $G(A)$ es abierto, entonces existe V vecindad de e tal que $V \subseteq G(A)$ tenemos que $U = e - V$ es una vecindad de 0, sea $x \in U$, entonces existe $y \in V$ tal que $x = e - y$ de donde $y = e - x \in V$ por tanto existe $(e-x)^{-1} \in A$. $\square$

A continuación vemos que relación tiene una Q-álgebra con la propiedad (α_0).

Proposición 2.3.8. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa, con unidad e. Si A es una Q álgebra, entonces A satisface (α_0).*

Demostración. Sea $x \in A$ tal que $\sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| < 1$, por la proposición 2.1.9 se tiene que $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\} < 1$ por tanto $1 \notin \sigma(x)$, y existe $(e-x)^{-1} \in A$. $\square$

A continuación veremos que la propiedad (α_0) es equivalente a una propiedad ya conocida en álgebras topológicas.

Proposición 2.3.9. *Sea A un álgebra topológica. Entonces A tiene la propiedad (α_0) si y sólo si para cada $x \in A$ se tiene que*

$$R(x) = \sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| = \sup_{f\in\mathfrak{M}^{\#}(A)} |f(x)|,$$

donde $R(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$.

Demostración. $\Leftarrow$] Sea $x \in A$ tal que $R(x) = \sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| < 1$, entonces $1 \notin \sigma(x)$ por tanto existe $(e-x)^{-1} \in A$.

$\Rightarrow$] En general sabemos siempre que $\sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| \leq R(x)$, supongamos que $\sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| < R(x)$ y sea $\lambda \in \sigma(x)$ tal que

$$0 \leq \sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)| < |\lambda| \leq R(x),$$

de donde $\sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} \left|f(\frac{x}{\lambda})\right| < 1$ y por tanto existe $\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \in A$, de donde existe $(\lambda e - x)^{-1} \in A$. Esto contradice que $\lambda \in \sigma(x)$, de esta forma $R(x) = \sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)|$. De manera análoga se prueba que $R(x) = \sup_{f\in\mathfrak{M}^{\#}(A)} |f(x)|$. $\square$

Sean X y Y espacios topológicos, decimos que $\phi : X \to 2^Y$ es semicontinua superiormente si para cada $U \subseteq Y$ se tiene que

$$\phi^{\#}(U) = \{x \in X \mid \phi(x) \subseteq U\},$$

es abierto. Esta definición es equivalente a que para cada $U \subseteq Y$ abierto y $\phi(x_0) \subseteq U$, exista una vecindad V de x_0 en X tal que tal que $\phi(x) \subseteq U$ para cada $x \in V$. Decimos además que ϕ es usco, si ϕ es semi-continua superiormente y compacto-valuada, esto es $\phi(x)$ es compacto para todo $x \in X$. Si para cada $U \subseteq Y$ abierto se tiene que

$$\phi^{-1}(U) = \{x \in X \mid \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto, diremos que ϕ es semi-continuo inferiormente. Finalmente diremos que ϕ es continuo si es semi-continuo superiormente e inferiormente.

A continuación presentamos un resultado obtenido por H. Arizmendi y V. Valov.

Teorema 2.3.10. *Sea A un álgebra topológica con unidad e y que satisface la propiedad (α_0). Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra.*

2. *La función espectral $\sigma : A \to 2^{\mathbb{C}}$, que asigna a cada elemento $x \in A$ el espectro $\sigma(x)$ es usco.*

3. *La funcion $R : A \to \mathbb{R}$, que asigna a cada $x \in A$ el radio espectral $R(x)$, es semi-continua superiormente.*

4. *La función $R : A \to \mathbb{R}$ es continua en 0.*

5. *La función $R : A \to \mathbb{R}$ es una seminorma submultiplicativa continua en A.*

Demostración. Véase [15]. □

Se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3.11. *Sea A un álgebra topológica con unidad e y que satisface la propiedad (α_0). Entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *A es una Q-álgebra.*

2. *La transformada de Gelfand $\widehat{\ }: A \to C_b(\mathfrak{M}(A))$ esta bien definida y es continua.*

Aquí $C_b(\mathfrak{M}(A)) = \{F : \mathfrak{M}(A) \to \mathbb{C} \mid F$ es continua y acotada $\}$ equipado con la norma $\|F\|_\infty = \sup_{f \in \mathfrak{M}(A)} |F(f)|$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.] Si A es una Q-álgebra entonces $\sigma(x)$ es compacto para cada $x \in A$ y por tanto como A satisface (α_0) se tiene que

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}(A)} |\widehat{x}(f)| = \sup_{f \in \mathfrak{M}(A)} |f(x)| = R(x) < \infty,$$

así pues $\widehat{\ }$ esta bien definida y por el teorema 2.3.10 se tiene que $\|\widehat{x}\|_\infty = R(x)$ es una función continua.

2. $\Rightarrow$ 1.] Ahora supongamos que $\widehat{\ }$ está bien definida y es continua, entonces como A satisface (α_0) se tiene que

$$R(x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}(A)} |f(x)| = \|\widehat{x}\|_\infty < \infty,$$

para cada $x \in A$, de donde se sigue que R es una función continua y por el teorema 2.3.10 se tiene que A es una Q-álgebra. $\square$

El siguiente resultado es uno de los más importantes que hemos obtenido.

Proposición 2.3.12. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa, con unidad e, con la propiedad (α_0) y $\mathfrak{M}(A)$ equicontinua. Entonces A es una Q-álgebra. Si además $\mathfrak{M}(A)$ es total entonces A es una Q-álgebra normada, cuya topología es más débil que la de A.*

Demostración. Si $\mathfrak{M}(A)$ es equicontinua, por el teorema de Alouglu-Bourbaki se tiene que $\mathfrak{M}(A)$ es compacto y por tanto la transformada de Gelfand $\widehat{\ } : A \to C_b(\mathfrak{M}(A))$ dada por

$$\widehat{x}(f) = f(x),$$

para cada $x \in A$ y cada $f \in \mathfrak{M}(A)$, está bien definida. En $C_b(\mathfrak{M}(A))$ consideramos la norma del supremo

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \sup_{f \in \mathfrak{M}(A)} |f(x)|.$$

Probemos ahora que la transformada de Gelfand es continua, sea $\epsilon > 0$ como $\mathfrak{M}(A)$ es equicontinua existe V vecindad del 0 tal que si $x \in V$

$$|f(x)| < \epsilon,$$

para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$, así pues si $x \in V$ se tiene que $\|\widehat{x}\|_\infty < \epsilon$, finalmente usando el corolario 2.3.11 y la proposición 2.3.9 se tiene que A es una Q-álgebra.

Supongamos que $\mathfrak{M}(A)$ es total y definamos

$$\|x\| = \sup_{f\in\mathfrak{M}(A)} |f(x)|$$

para cada $x \in A$, es una norma pues $\mathfrak{M}(A)$ es total, también se satisface que si $\|x\| < 1$ entonces $(e-x)^{-1} \in A$, por tanto

$$e \in \{x \in A \mid \|e-x\| < 1\} \subseteq G(A),$$

es decir $G(A)$ es abierto. Ahora dado que $\mathfrak{M}(A)$ es equicontinua existe $\delta > 0$ y $\alpha \in I$ tal que si $\|x\|_\alpha < \delta$ entonces $\|x\| < 1$, por tanto si x es un elemento de A entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\left\|\frac{\delta x}{2(\|x\|_\alpha + 1/n)}\right\|_\alpha < \delta$ y por tanto

$$\|x\| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)(\|x\|_\alpha + 1/n),$$

para cada n. Si n tiende a ∞ se tiene que

$$\|x\| \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)\|x\|_\alpha$$

para cada $x \in A$, así pues la topología de la norma es más débil que la topología de A. $\square$

Corolario 2.3.13. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa, con unidad y $\mathfrak{M}(A)$ equicontinua. Entonces A tiene la propiedad (α_0) si y sólo si A tiene la propiedad (α).*

Demostración. Es fácil verificar que si A cumple la propiedad (α) entonces A cumple la propiedad (α_0).

Ahora si A cumple la propiedad (α_0) y $\mathfrak{M}(A)$ es equicontinua, entonces A es una Q-álgebra y por tanto A es advertiblemente completa y esto último es equivalente a que A tenga la propiedad (α). $\square$

Capítulo 3

Los elementos acotados en $\mathbb{C}(t)$.

En esta capítulo estudiamos el concepto de elemento acotado en un álgebra localmente convexa dado por Allan en [2], en la primera sección recordamos los conceptos de el espectro de Allan, el radio espectral de Allan y el radio de acotación. En la segunda sección presentamos resultados originales, hemos obtenido la descripción de conjunto de elementos acotados en el álgebra $\mathbb{C}(t)$ y además probamos que este conjunto es una subálgebra máximal, que es una Q-álgebra y de ideales principales.

3.1. Elementos acotados y el espectro de Allan.

Definición 3.1.1. *Sea $(A, \{\| \|_\alpha\}_{\alpha \in I})$ un álgebra semitopológica localmente convexa. Dado $x \in A$ se dice que es acotado si existe $\lambda > 0$ tal que $\{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, esto es para cada $\alpha \in I$ existe $M_\alpha > 0$ tal que*

$$\left\| \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\|_\alpha \leq M_\alpha,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos al conjunto de todos los elementos acotados por A_0.

Algunos ejemplos son los siguientes:

1. Sea $(A, \| \|)$ un álgebra de Banach, dado $x \in A$ no cero se tiene que A es acotado pues

$$\left\| \left(\frac{x}{\|x\|}\right)^n \right\| \leq \left(\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \right)^n = 1,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, además es claro que 0 es acotado, por tanto $A_0 = A$.

2. Sea A el álgebra de polinomios complejos definidos en $\mathbb{C}$. Para cada $r > 0$ definimos la seminorma

$$\|P(z)\|_r = \max_{|z\| \leq r} |P(z)|$$

para cada polinomio $P(z)$, así pues $(A, \{\| \|_r\}_{r \geq 0})$ es un álgebra localmente convexa.

Es claro que si $P(z)$ es constante entonces es acotado, ahora dado $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m$ un polinomio no constante por el teorema de Liouville no es acotado como función y por tanto dado λ no cero existe $r > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| = r$ y

$$|a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \ldots + a_m z_0^m| > |\lambda|.$$

Por tanto

$$\left\| \left(\frac{P(z)}{\lambda} \right)^n \right\|_r \geq \frac{|a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_m z^m|^n}{|\lambda|^n},$$

que tiende a infinito si n tiende a infinito, entonces $P(z)$ no es un elemento acotado. Por tanto en este caso $A_0 = \mathbb{C}$.

Denotemos por $\mathcal{B}_1$ a la familia de subconjuntos B de A que satisfacen:

1. B es absolutamente convexo.

2. B es acotado y cerrado.

3. B es idempotente, esto es $B^2 \subseteq B$.

Si $B \in \mathcal{B}_1$ consideremos $A(B)$ la subálgebra generada por B en A y para cada $x \in A(B)$ consideremos la funcional de Minkowski

$$\|x\|_B = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B\}.$$

A continuación probamos un hecho importante sobre cada $A(B)$.

Proposición 3.1.2. *Si $B \in \mathcal{B}_1$. Entonces $A(B) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}, x \in B\}$ y $\| \|_B$ es una norma para $A(B)$.*

Demostración. Claramente $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}, x \in B\} \subseteq A(B)$. Consideremos al conjunto $S = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}, x \in B\}$ y veamos que es una subálgebra de A. Sean $\lambda x, \mu y \in S$ y supongamos que $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, si tuvieramos que $|\lambda| + |\mu| = 0$ entonces $\lambda = \mu = 0$ y entonces trivialmente $\lambda x + \mu y \in S$, así pues

$$\frac{\lambda}{|\lambda| + |\mu|}x + \frac{\mu}{|\lambda| + |\mu|}y \in B,$$

pues B es absolutamente convexo y por tanto

$$(|\lambda| + |\mu|)\left(\frac{\lambda}{|\lambda| + |\mu|}x + \frac{\mu}{|\lambda| + |\mu|}y\right) \in S,$$

es decir $\lambda x + \mu y \in S$. Ahora si $\gamma \in \mathbb{C}$ y $\lambda x \in S$, entonces claramente $\gamma(\lambda x) = (\gamma\lambda)x \in S$.

Ahora si $\lambda x, \mu y \in S$, entonces $(\lambda x)(\mu y) = (\lambda\mu)xy \in S$, por tanto S es una subálgebra de A y como $B \subseteq S$, entonces $A(B) \subseteq S$, de donde los conjuntos son iguales.

Ahora veamos que $\| \, \|_B$ es una norma, dado que ya sabemos que es una seminorma resta probar que si $x \in B$ es tal que $\|x\|_B = 0$, entonces $x = 0$. Como B es acotado dado $\alpha \in I$ existe $M_\alpha > 0$ tal que $\|y\|_\alpha \leq M_\alpha$ para todo $y \in B$, sea $\epsilon > 0$, entonces existe $0 < \lambda < \epsilon$ tal que $x \in \lambda B$, de donde $\frac{x}{\lambda} \in B$ y por tanto $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|_\alpha \leq M_\alpha$, así pues

$$\|x\|_\alpha \leq M_\alpha \lambda < M_\alpha \epsilon,$$

como $\epsilon > 0$ fue arbitrario se tiene que $\|x\|_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in I$, de donde $x = 0$ □

Dado que para cada $B \in \mathcal{B}_1$ se tiene que $A(B)$ es una subálgebra de A, entonces a $A(B)$ se le puede dar la topología de subespacio, la relación entre esta topología y la inducida por la norma $\| \, \|_B$ está dada por la siguiente proposición

Proposición 3.1.3. *Sea (A, τ) un álgebra semitopológica localmente convexa y $B \in B_1$. Entonces en $A(B)$ la topología inducida por la norma $\| \, \|_B$ es más fina que la topología de subespacio para $A(B)$.*

Demostración. Sea $\{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas que define la topología τ. Sea $U = \{x \in A(B) \mid \|x\|_\alpha < \epsilon\}$ para algún $\alpha \in I$ y $\epsilon > 0$ un abierto subbásico de la topología de subespacio.

Sea $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda B$, entonces $\frac{x}{\lambda} \in B$ y como B es acotado existe $M > 0$ tal que $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|_\alpha \leq M$, entonces $\|x\|_\alpha \leq \lambda M$. Como λ fue arbitrario entonces $\|x\|_\alpha \leq M\|x\|_B$, de esta forma

$$\left\{x \in A(B) \mid \|x\|_B < \frac{\epsilon}{M}\right\} \subseteq U,$$

de donde se sigue el resultado. □

Observación 3.1.4. *De la proposición anterior observamos que se puede probar que para cada $\alpha \in I$ existe $M > 0$ tal que $\|x\|_\alpha \leq M\|x\|_B$ para cada $x \in A(B)$.*

Si $S \subseteq A$ es no vacío, definimos la envolvente absolutamente convexa de S como

$$\Gamma(S) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1, x_i \in S \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si S satisface que $S^2 \subseteq S$, no es difícil ver que $\Gamma(S)^2 \subseteq \Gamma(S)$, ahora veamos que $\overline{\Gamma(S)}^2 \subseteq \overline{\Gamma(S)}$. Sean $xy \in \overline{\Gamma(S)}^2$ y redes $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(r)} a_i^{(r)}\right\}_r$, $\left\{\sum_{i=1}^{m} \mu_j^{(s)} b_j^{(s)}\right\}_s$ en $\Gamma(S)$ tales que convergen a x y y respectivamente. Como el producto es separadamente continuo se tiene que

$$\begin{aligned} xy = \lim_s x\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_j^{(s)} b_j^{(s)}\right) &= \lim_s \left[\left(\lim_r \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(r)} a_i^{(r)}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_j^{(s)} b_j^{(s)}\right)\right] \\ &= \lim_s \left(\lim_r \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(r)} a_i^{(r)}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_j^{(s)} b_j^{(s)}\right)\right) \\ &= \lim_s \lim_r \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\lambda_i^{(r)} \mu_j^{(s)}) a_i^{(r)} b_j^{(s)}\right) \in \overline{\Gamma(S)}. \end{aligned}$$

Se dice que una subcolección $\mathcal{B}_2$ de elementos de $\mathcal{B}_1$ es básica si para cada $B_1 \in \mathcal{B}_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $B_1 \subseteq B_2$.

Proposición 3.1.5. *Sean (A, τ) un álgebra semitopológica localmente convexa y $\mathcal{B}_2$ una subcolección básica de $\mathcal{B}_1$. Entonces el conjuto de elementos acotados satisface que*

$$A_0 = \bigcup\{A(B) \mid B \in \mathcal{B}_2\}.$$

Demostración. Sea $x \in A(B)$ para algún $B \in \mathcal{B}_2$, si $\lambda > \|x\|_B$, entonces existe $0 < \mu < \lambda$ tal que $x \in \mu B$, entonces $\frac{x}{\mu} \in B$ y como B es idempotente se tiene que $\left(\frac{x}{\mu}\right)^n \in B$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y como B es acotado se tiene que $\left\{\left(\frac{x}{\mu}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, esto es $x \in A_0$.

Ahora sea $x \in A_0$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $S = \left\{\left(\frac{x}{\mu}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, es fácil ver que $S^2 \subseteq S$. Sea $B = \overline{\Gamma(S)}$, esta satisface que $B^2 \subseteq B$, es decir $B \in B_1$ y por tanto existe $B' \in B_2$ tal que $B \subseteq B'$, es así que $x = \lambda\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in A(B')$, de donde se sigue la igualdad. □

G. R. Allan en [2] dio la siguiente definición:

Definición 3.1.6. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa. Decimos que A es pseudo-completa si para cada $B \in \mathcal{B}_1$ se tiene que $(A(B), \|\ \|_B)$ es un álgebra de Banach.*

Proposición 3.1.7. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa. Si A es secuencialmente completa, entonces A es pseudo-completa.*

Demostración. Supongamos que $\{\|\ \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia que define la topología para A, sea $B \in \mathcal{B}_1$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A(B)$ una sucesión de Cauchy, como la topología para $A(B)$ inducida por la norma $\|\ \|_B$ es más fina que la topología de subespacio, se tiene que si $\alpha \in I$ existe $M > 0$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_\alpha \leq M\|x_n - x_m\|_B$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Por tanto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy con respecto a cada seminorma $\|\ \|_\alpha$, usando que A es secuencialmente completa se tiene que existe $x \in A$ tal que para cada $\alpha \in I$

$$\|x_n - x\|_\alpha \to 0$$

si $n \to \infty$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|x_n - x_m\|_B < \epsilon,$$

de donde existe $0 < \lambda < \epsilon$ tal que $\|x_n - x_m\|_B \leq \lambda < \epsilon$ y $x_n - x_m \in \lambda B$, por continuidad se tiene que $x_n - x \in \lambda B$ para $n > N$ y por tanto $\|x_n - x\|_B \leq \lambda < \epsilon$ para $n > N$, más aún para $n > N$ se tiene que $x_n - x \in A(B)$, es así que $x = x_n - (x_n - x) \in A(B)$, es decir $x_n \to x$ con la norma $\|\ \|_B$ y $x \in A(B)$. □

La implicación contraria de la proposición anterior no es cierta en general pues podemos considerar $A = \mathbb{C}[z]$ el álgebra de polinomios complejos, con familia de seminormas dadas por

$$\|P\| = \max_{|z|\leq r} |p(z)|,$$

para cada $r > 0$ y cada $P \in A$. Vimos anteriormente que $A_0 = \mathbb{C}$, ahora dado $B \in \mathcal{B}_1$ se tiene que si $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ entonces $B \subseteq \mathbb{D}$ y como $\mathbb{C}$ es completo se tiene que $(A(B), \| \, \|_B)$ es completo, por tanto A es pseudo-completa. Pero A no es secuencialmente completa pues la sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{n!}$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ a e^z la cual no esta en A.

Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa con unidad e, definimos $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{B}_1 \mid e \in B\}$, se tiene que esta subcolección de $\mathcal{B}_1$ es básica.

Proposición 3.1.8. *Sean $(A, \{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ un álgebra semitopológica localmente convexa y $B \in \mathcal{B}_1$. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $A(B)$. Entonces esta sucesión converge en $(A(B), \| \, \|_B)$ si y sólo si converge en $(A, \{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha\in I})$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(A(B), \| \, \|_B)$ tal que existe x con $\|x_n - x\|_B \to 0$ cuando $n \to \infty$, en la observación 3.1.4 vimos que si $\alpha \in I$ entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|x_n - x\|_\alpha \leq M\|x_n - x\|_B$$

de donde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x con la topología de A.

Supongamos ahora que $x_n \to x$ con la topología de A. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $\|x_n - x_m\|_B < \epsilon$, tomemos $\lambda > 0$ tal que $x_n - x_m \in \lambda B$ y

$$\|x_n - x_m\| \leq \lambda < \epsilon,$$

si fijamos $n > N$ y hacemos $m \to \infty$ como B es cerrado se tiene que $x_n - x = \lim_{m\to\infty}(x_n - x_m) \in \lambda B$, por tanto $\|x_n - x\|_B \leq \lambda < \epsilon$, así pues $x_n \to x$ con la norma $\| \, \|_B$. □

Proposición 3.1.9. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa con unidad e. Si $B, B_1 \in \mathcal{B}_1$ son tales que $B_1 \subseteq B$ y $A(B)$ es un álgebra de Banach, entonces $A(B_1)$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $A(B_1)$ como $A(B_1) \subseteq A(B)$ y

$$\|x_n - x_m\|_B \leq \|x_n - x_m\|_{B_1}$$

para cada $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $A(B)$ y como es un espacio de Banach se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $A(B)$ y por la proposición 3.1.8 se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en A con la topología original y usando de nuevo esta proposición se tiene que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $A(B_1)$. $\square$

Así pues se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.10. *A es un álgebra pseudo-completa si y sólo si $A(B)$ es un álgebra de Banach para cada B en una subcolección básica de $\mathcal{B}_1$. En particular esto es cierto para la familia $\mathcal{B}$.*

Proposición 3.1.11. *Sea $(A, \{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha \in I})$ un álgebra semitopológica localmente convexa, conmutativa, con unidad e y pseudo-completa. La familia $\mathcal{B}$ satisface que para cada $B, C \in \mathcal{B}$ existe $D \in \mathcal{B}$ tal que $B \cup C \subseteq D$.*

Demostración. Sean $B, C \in \mathcal{B}$, veamos que BC es acotado. Para cada $b \in B$ definamos $L_b : A(C) \to A$ dada por $L_b(c) = bc$ para cada $c \in A(C)$, la cual es claramente una transformación lineal y además como el producto es separadamente continuo se tiene que dado $\alpha \in I$ existen $\beta \in I$ y $M_1(b), M_2(\beta) > 0$ tales que

$$\|L_b(c)\|_\alpha = \|bc\|_\alpha \leq M_1(b)\|c\|_\beta \leq M_1(b)M_2(\beta)\|c\|_C,$$

para cada $c \in C$. Lo anterior nos dice que cada L_b es un operador continuo, además si $c \in A(C)$ y $\alpha \in I$ existen $\beta \in I$ y $N_1(c), N_2 > 0$ tales que

$$\|L_b(c)\|_\alpha = \|bc\|_\alpha \leq N_1(c)\|b\|_\beta \leq N_1(c)N_2,$$

para cada $b \in B$, de donde la familia de operadores $\{L_b\}_{b \in B}$ tiene órbitas acotadas y como $A(C)$ es un álgebra de Banach por el teorema de Banach-Steinhaus se tiene que esta familia de operadores es equicontinua.

Dado $\epsilon > 0$ y $\alpha \in I$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|c\|_C < \delta$, entonces

$$\|bc\|_\alpha < \epsilon$$

para cada $b \in B$. Sea $c \in C$, entonces $\left\| \frac{\delta c}{2\|c\|_C} \right\|_C < \delta$ y por tanto

$$\left\| \frac{\delta c}{2\|c\|_C} b \right\|_C < \epsilon$$

para cada $b \in B$, de donde existe $M > 0$ que satisface

$$\|bc\|_\alpha \leq M\|bc\|_C \frac{2\epsilon\|c\|_C}{\delta} \leq \frac{2\epsilon}{\delta}$$

para cada $b \in B$, por tanto BC es acotado en A.

Dado que el álgebra es conmutativa se tiene que $(BC)^2 = B^2C^2 \subseteq BC$, así pues $D = \overline{\Gamma(BC)} \in \mathcal{B}$ y dado que $e \in B \cap C$ se tiene que $B \cup C \subseteq BC \subseteq D$. □

Corolario 3.1.12. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa, conmutativa, con unidad e y pseudo-completa. Entonces A_0, el conjunto de elementos acotados en A, es una subálgebra de A.*

Demostración. Sean $x, y \in A_0$, entonces existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x \in A(B_1)$ y $y \in A(B_2)$, por la proposición anterior se tiene que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$, de donde se sigue que $x, y \in A(B_3)$ y por tanto para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que λx, $x + y$ y xy son todos elementos de $A(B_3)$, así pues A_0 es una subálgebra de A. □

3.1.1. El radio de acotación.

A continuación definimos el radio acotación de un elemento.

Definición 3.1.13. *Si A es un álgebra semitopológica localmente convexa y $x \in A$. Definimos el radio de acotación de x como*

$$\beta(x) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \mid \left\{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ es acotado en } A\right\}.$$

Hacemos la convención de que $\text{ínf}\, \emptyset = \infty$.

A continuación estudiamos algunas propiedades importantes del radio de acotación.

Proposición 3.1.14. *Sea $(A, \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I})$ un álgebra semitopológica localmente convexa. Para cada $x \in A$ se tiene que*

1. *$\beta(x) < \infty$ si y sólo si $x \in A_0$.*

2. $\beta(x) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \mid \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \to 0, si\ n \to \infty\right\}$.

3. *Si* $x \in A_0$*, entonces* $\beta(x) = \text{ínf}\{\|x\|_B \mid B \in \mathcal{B},\ x \in A(B)\}$.

Demostración. El punto 1. es inmediato de la definición de elemento acotado.

Ahora veamos el punto 2. Denotemos por r a

$$\text{ínf}\left\{\lambda > 0 \mid \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \to 0, \text{si } n \to \infty\right\}.$$

Si $r = \infty$ entonces claramente $\beta(x) \leq r$. Supongamos que $r < \infty$, si $\lambda > 0$ es tal que $\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces es claro que $\{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado, de donde se tiene que $\beta(x) \leq \lambda$ y por tanto $\beta(x) \leq r$.

Ahora sea $\lambda > \beta(x)$ y tomemos $\lambda > \mu \geq \beta(x)$ tal que $\left\{\left(\frac{x}{\mu}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado, es decir para cada $\alpha \in I$ existe $M_\alpha > 0$ tal que $\left\|\left(\frac{x}{\mu}\right)^n\right\|_\alpha \leq M_\alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\alpha \in I$, entonces

$$\left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\|_\alpha = \left\|\left(\frac{\mu x}{\mu\lambda}\right)^n\right\|_\alpha = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \left\|\left(\frac{x}{\mu}\right)^n\right\|_\alpha \leq \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n M_\alpha \to 0$$

si $n \to \infty$, por tanto $\lambda \geq r$, de esta forma se tiene que $\beta(x) \geq r$, es decir $\beta(x) = r$.

Para probar 3. observamos que $B_0 = \bigcup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$ es absolutamente convexo y absorbente, por tanto se puede definir su funcional de Minkowski

$$p_0(x) = \text{ínf}\{\mu > 0 \mid x \in \mu B_0\}$$

para cada $x \in A$. No es díficil ver que $p_0(x) = \beta(x)$ para cada $x \in A_0$, de donde se sigue que $\beta(x) = \text{ínf}\{\|x\|_B \mid x \in A(B)\}$. $\square$

Otras maneras de escribir el radio de acotación se encuentran en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.15. *Sea* $(A, \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I})$ *un álgebra semitopológica localmente convexa y* $x \in A$*. Entonces*

$$\beta(x) = \sup_{f \in A^*} \text{lím}\sup_n |f(x^n)|^{1/n} = \sup_{\alpha \in I} \text{lím}\sup_n \|x^n\|_\alpha^{1/n}.$$

Demostración. Ver [2] proposición 2.18. $\square$

A continuación definimos el espectro de Allan.

Definición 3.1.16. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa con unidad e y $x \in A$. Definimos el espectro de Allan de x en A como*

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ no tiene inverso en } A_0\} \cup B,$$

donde $B = \emptyset$ si $x \in A_0$ y $B = \{\infty\}$ si $x \notin A_0$. Además definimos el radio espectral de Allan de $x \in A$ como

$$r_A(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_A(x)\},$$

con la convención de que si $x \notin A_0$, entonces $r_A(x) = \infty$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $\lambda e - x$ es invertible definimos la resolvente como la funcíon

$$R(\lambda, x) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

Un resultado importante que probó Allan en [2] es el siguiente:

Teorema 3.1.17. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa con unidad e. Si $x \in A$, entonces $\sigma_A(x) \neq \emptyset$. Además si A es pseudo-completa, entonces $\sigma_A(x)$ es cerrado.*

Demostración. Véase [2] corolario 3.9. □

La relación del radio espectral de Allan y el radio de acotación viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 3.1.18. *Sean A un álgebra semitopológica localmente convexa con unidad e y $x \in A$. Entonces*

$$\beta(x) \leq r_A(x).$$

Si además A es pseudo-completa, entonces $\beta(x) = r_A(x)$.

Demostración. Véase [2] teorema 3.12. □

H. Arizmendi y A. Carrillo en [8] consideraron la siguiente definición.

Definición 3.1.19. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa con unidad e. Decimos que A es un álgebra pseudo-Q, si para cada $B \in \mathcal{B}_1$ se tiene que $(A(B), \| \|_B)$ es una Q-álgebra.*

De la proposición 3.1.8 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1.20. *Sea A un álgebra semitopológica localmente convexa con unidad e. Si $B, B_1 \in \mathcal{B}_1$ son tales que $B_1 \subseteq B$ y $A(B)$ es una Q-álgebra, entonces $A(B_1)$ es una Q-álgebra.*

Demostración. Usando la proposición 2.1.4 basta probar que si $x \in A(B_1)$ es tal que $\|x\|_{B_1} < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en $A(B_1)$. Sea $x \in A(B_1)$ tal que $\|x\|_{B_1} < 1$, dado que $B_1 \subseteq B$, se tiene que $\|x\|_B < 1$ y como $A(B)$ es una Q-álgebra entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge con la norma $\| \ \|_B$ y por tanto converge en A con la topología usual y dado que $(\sum_{n=0}^{m} x^n)_{m=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(A(B_1), \| \ \|_{B_1})$ por la proposición 3.1.8 se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en $A(B_1)$. □

Así pues se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.21. *A es un álgebra pseudo-Q si y sólo si $A(B)$ es un Q-álgebra para cada B en una subcolección básica de $\mathcal{B}_1$. En particular esto es cierto para la familia $\mathcal{B}$.*

Consideremos la siguiente definición.

Definición 3.1.22. *Sea A un álgebra semitopológica con unidad e. Una red $(a_i)_{i\in I}$ de elementos de A se dice que es advertible si existe $a \in A$ tal que $a_i a \to e$ y $aa_i \to e$. Decimos que A es advertiblemente completa si cada red de Cauchy advertible de A converge en A.*

Observemos que si $(a_i)_{i\in I}$ es advertible con $a \in A$ tal que $aa_i \to e$ y $a_i a \to e$ y además $(a_i)_{i\in I}$ es convergente entonces a es invertible $a_i \to a^{-1}$.

Proposición 3.1.23. *Si A es una Q-álgebra. Entonces A es advertiblemente completa.*

Demostración. Sea $(a_i)_{i\in I}$ una red advertible, de donde existe $a \in A$ tal que $a_i a \to e$ y $aa_i \to e$, dado que $G(A)$ es una vecindad abierta de e, existe i_0 tal que $a_{i_0} a$ y aa_{i_0} es invertible, entonces existe $y \in A$ tal que $(ya_{i_0})a = e$ y $a(a_{i_0} y) = e$, de donde se sigue que A es invertible y por tanto $a_i = a_i aa^{-1} \to a^{-1}$. □

Proposición 3.1.24. *Si es A una Q-álgebra. Entonces A es un álgebra pseudo-Q.*

Demostración. Como A es una Q-álgebra, entonces es un álgebra advertiblemente completa. Sea $B \in \mathbb{B}$ y $x \in A(B)$ tal que $\|x\|_B < 1$, entonces $(\sum_{n=0}^{m} x^n)_{m=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $A(B)$, más aún

$$(e - x)\sum_{n=0}^{m} x^n \to e \ \text{ y } \ \left(\sum_{n=0}^{m} x^n\right)(e - x) \to e$$

convergencia en $A(B)$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en A y por la proposición 3.1.8 se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \in A(B)$ y por tanto $(A(B), \| \|_B)$ es una Q-álgebra. □

En la siguiente proposición se establece la relación entre el espectro extendido $\Sigma(x)$ y el espcetro de Allan $\sigma_A(x)$.

Teorema 3.1.25. *Sea A un álgebra pseudo-Q. Dado $x \in A$ se tiene que $\Sigma(x) \subseteq \sigma_A(x)$. En particular se tiene que $\overline{R}(x) = r_A(x)$.*

Demostración. Sea $\lambda \notin \sigma_A(x)$ y $\lambda \neq \infty$, entonces $\lambda \in \sigma(x)$ y $R(\lambda, x)$ es acotado en A. Por tanto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $R(\lambda, x) \in B$, sean $\mu \in \mathbb{C}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $|\lambda - \mu| < \gamma < \frac{1}{\|R(\lambda,x)\|_B}$, de donde $\|(\lambda - \mu)R(\lambda, x)\|_B < 1$ y dado que $A(B)$ es una Q-álgebra se tiene que $e-(\lambda-\mu)R(\lambda, x)$ es invertible en $A(B)$ y además

$$(e - (\lambda - \mu)R(\lambda, x))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^k R(\lambda, x)^k.$$

Tenemos que $\mu e - x$ es invertible en $A(B)$ y

$$R(\mu, x) = R(\lambda, x)(e - (\lambda - \mu)R(\lambda, x))^{-1},$$

Lo anterior es cierto pues

$$e - (\lambda - \mu)R(\lambda, x) = e - (\lambda e - x - (\mu e - x))R(\lambda, x) = (\mu e - x)R(\lambda, x).$$

Definamos $S_n = \sum_{k=0}^{n} (\lambda - \mu)^k R(\lambda, x)^k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así pues podemos escribir $R(\lambda, x)S_n \to R(\mu, x)$ con la norma $\| \|_B$ y $n \to \infty$. observemos que

$$\begin{aligned}
\|R(\mu, x) - R\lambda, x)\|_B &\leq \|R(\mu, x) - R(\lambda, x)S_n\|_B + \|R(\lambda, x)S_n - R(\lambda, x)\|_B \\
&= \|R(\mu, x) - R(\lambda, x)S_n\|_B + \left\| R(\lambda, x) \sum_{k=1}^{n} (\lambda - \mu)^k R(\lambda, x)^k \right\|_B \\
&\leq \|R(\mu, x) - R(\lambda, x)S_n\|_B + \|R(\lambda, x)\|_B \frac{\|R(\lambda, x)\|_B |\lambda - \mu|}{1 - |\lambda - \mu| \|R(\lambda, x)\|_B} \\
&\leq \|R(\mu, x) - R(\lambda, x)S_n\|_B + \|R(\lambda, x)\|_B^2 \frac{|\lambda - \mu|}{1 - \gamma R(\lambda, x)\|_B}
\end{aligned}$$

de donde se sigue que si n es suficientemente grande y $\mu \to \lambda$, se tiene que $R(\mu, x) - R(\lambda, x) \to 0$ con respecto a la norma $\| \|_B$ y por tanto converge en A con la topología original, por tanto $\lambda \notin \sigma_d(x)$ y de esta forma $\lambda \notin \Sigma(x)$.

Supongamos ahora que $\lambda = \infty \notin \sigma_A(x)$, entonces x es acotado, de donde existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, sea $|\alpha| > \|x\|_B$, entonces $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|_B < 1$, así pues $e - \frac{x}{\alpha}$ es invertible en $A(B) \subset A_0$, pues $A(B)$ es una Q-álgebra, de donde $e - \frac{x}{\alpha}$ tiene un inverso acotado y además

$$R\left(1, \frac{x}{\alpha}\right) = e + \frac{x}{\alpha} + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \dots$$

con convergencia en $A(B)$. Por tanto

$$\|R\left(1, \frac{x}{\alpha}\right) - e\|_B \to 0$$

si $|\alpha| \to \infty$, de donde $R(1, tx) \to e$ cuando $t \to 0$ en $A(B)$ y por tanto converge también en A con la topología original. Esto nos dice que $R(1, tx)$ es continua en $t = 0$ y por tanto $\infty \notin \Sigma(x)$. $\square$

3.2. Una descripción de los elementos acotados en el álgebra $\mathbb{C}(t)$.

En esta sección estudiamos una subalgebra máximal de el campo $\mathbb{C}(t) = \{\frac{p(t)}{q(t)} \mid p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]\}$ y uno de los resultados originales de esta sección es que logramos describir el conjunto de todos sus elementos acotados.

Recordemos que el álgebra de Williamson es el álgebra de series formales de Laurent definida como:

$$W = A(a_{n,k}) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| a_{n,k} < \infty \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde

$$a_{n,k} = \begin{cases} (1-k)^{n(1-k)} & \text{si } k \leq -1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ (1+k)^{\frac{-(1+k)}{n}} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Las seminormas estan definidas por $\|x\|_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| a_{n,k}$ para cada n, donde $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k t^k$. Se puede demostrar que esta es un álgebra topológica localmente convexa, metrizable y conmutativa.

Ahora W contiene una copia isomorfa de $\mathbb{C}(t)$, esto se sigue del hecho de que $t, t^{-1} \in W$ y para cada complejo no cero α identificamos $\frac{1}{t-\alpha}$ con

$$-\frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^m.$$

Denotamos por A_0 el conjunto de todos los elementos acotados en $\mathbb{C}(t)$. El elemento $t \in C(t)$ es acotado pues para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \|t^k\|_n^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} (1+k)^{\frac{-(1+k)}{kn}} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}(1+k)^{\frac{(1+k)}{kn}}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{k\to\infty}(1+k)^{\frac{1}{kn}} \lim_{k\to\infty}(1+k)^{\frac{1}{n}}} = 0$$

y el radio de acotación satisface

$$\beta(t) = R(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{k} \|t^k\|_n^{\frac{1}{k}} = 0 < \infty.$$

Otro importante hecho es que t^{-1} no es un elemento acotado de $\mathbb{C}(t)$, para ver esto consideremos $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \|t^{-k}\|_n^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} (1+k)^{\frac{n(1+k)}{k}} = \lim_{k\to\infty} (1+k)^{\frac{n}{k}} \lim_{k\to\infty} (1+k)^n = \infty,$$

entonces

$$\beta(t^{-1}) = R(t^{-1}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{k} \|t^{-k}\|_n^{\frac{1}{k}} = \infty.$$

Lema 3.2.1. *Sea A una subalgebra de $\mathbb{C}(t)$ tal que $\mathbb{C}[t] \subseteq A$. Si $\frac{p(t)}{t-\alpha} \in A$ para $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\frac{1}{t-\alpha} \in A$.*

Demostración. Consideremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ las raices de $p(t)$ y supongamos que $p(t) = c(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$. Obtenemos

$$\frac{c(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)}{t-\alpha} = \frac{c(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_{n-1})(t-\alpha+\alpha-\lambda_n)}{t-\alpha}$$

$$= c(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_{n-1}) + \frac{\alpha-\lambda_n}{t-\alpha},$$

dado que A es una subalgebra y contiene a $\mathbb{C}[t]$ tenemos que $\frac{1}{t-\alpha} \in A$. $\square$

En la siguiente proposición describimos las subalgebras de $\mathbb{C}(t)$ que contienen a $\mathbb{C}[t]$.

Proposición 3.2.2. *Sea A una subálgebra de $\mathbb{C}(t)$ tal que $C[t] \subseteq A$. Entonces*

$$A = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \mid \ q(\alpha) = 0 \text{ implica } \frac{1}{t-\alpha} \in A \right\}$$

Demostración. Sea $\frac{p(t)}{q(t)}$ tal que $q(\alpha) = 0$ implica $\frac{1}{t-\alpha} \in A$. Dado que A contiene a los polinomios complejos se tiene que $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(t)}{c(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\ldots(t-\alpha_n)} \in A$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las raices de $q(t)$.

Ahora supongamos que $\frac{p(t)}{q(t)} \in A$, sea α una raiz de $q(t)$ entonces existe un polinomio $q'(t)$ tal que $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(t)}{(t-\alpha)^s q'(t)}$ y $q'(\alpha) \neq 0$, dado que A contiene a $\mathbb{C}[t]$, multiplicando por $q'(t)$, tenemos que $\frac{p(t)}{(t-\alpha)^s} \in A$, si $s > 1$ podemos multiplicar por $(t-\alpha)^{s-1}$ y obtener que $\frac{p(t)}{t-\alpha} \in A$, se sigue del lema 3.2.1 que $\frac{1}{t-\alpha} \in A$. $\square$

Observación 3.2.3. *Sabemos que W es un álgebra topológica conmutativa y secuencialmente completa, por el corolario 2.1 en [2] tenemos que el conjunto de elementos acotados en W es una subalgebra de W. Dado que $\mathbb{C}(t)$ es una subalgebra de W, se sigue que A_0 es también una subálgebra de $\mathbb{C}(t)$.*

En adelante si $B \subseteq \mathbb{C}(t)$ denotamos por $\overline{A}$ la cerradura en $\mathbb{C}(t)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos $B_k = \overline{\Gamma(\{(kt)^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\})}$. Este conjunto es acotado pues si $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|(kt)^n\|_m^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} k(1+n)^{-\frac{1+n}{mn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{(1+n)^{\frac{1}{mn}}(1+n)^{\frac{1}{m}}} = 0,$$

así pues para $\epsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entones $\|(kt)^n\|_m \leq 1$, entonces podemos encontrar $M > 0$ con $\|(kt)^n\|_m \leq M$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ esto significa que $\{(kt)^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ es acotado y en consecuencia B_k es acotado. Tambén es fácil de ver que B_k es idempotenete. Por tanto este conjunto pertenece a la familia $\mathcal{B}_1$ definida en la sección anterior y para cada k podemos considerar las álgebras

$$A(B_k) = \{\lambda x \mid x \in B_k\}$$

con la norma $\|x\|_k = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda B_k\}$ para cada $x \in A(B_k)$. Ahora sea $k \in \mathbb{N}$ y tomemos la suma parcial $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i (kt)^i$ con $s \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{s} |\lambda_i| \leq 1$, por tanto

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i (kt)^i = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \left(\frac{k}{k+1}\right)^i ((k+1)t)^i,$$

dado $\sum_{i=1}^{s} |\lambda_i| \left|\frac{k}{k+1}\right|^i \leq \sum_{i=1}^{s} |\lambda_i| \leq 1$ obtenemos que $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i (kt)^i \in B_{k+1}$, pues para cada elemento en B_k es un límite de sumas de este tipo, concluimos que

$$B_k \subseteq B_{k+1},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y por tanto

$$A(B_k) \subseteq A(B_{k+1})$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. También es fácil ver que

$$\|x\|_{k+1} \leq \|x\|_x$$

para cada $x \in A(B_k)$ y para cada $k = 1, 2, \ldots$

En lo que sigue supondremos que $k = 2, 4, 8, \ldots, 2^k, \ldots$

Proposición 3.2.4. *Las siguientes proposiciones se satisfacen:*

1. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $B_k = \{\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m (kt)^m \mid \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_m| \leq 1\}$.*

2. *Para cada $k \in \mathbb{N}$*

$$A(B_k) = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \mid q(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| > \frac{1}{k} \right\}.$$

Demostración. 1. Sea $k \in \mathbb{N}$, es claro que si $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m (kt)^m$ es una suma tal que $\sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_m| \leq 1$, entonces esta serie de potencias pertenece a B_k.

Ahora sea $x \in B_k$, entoces $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(n)} (kt)^m$ donde $\sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_m^{(n)}| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, dado que $x \in A_0$ tenemos que $x = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$ para cada $a_1, a_2, \ldots$ numeros complejos, ahora para cada B_0-álgebra con una base de Schauder las funcionales lineales coordenadas son continuas, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)} k^m = a_m$$

para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)}$ existe para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, denotamos por $b_m = \lim_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)}$ para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$, entonces $x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (kt)^m$ y

$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_m^{(n)}| \leq 1,$$

más aún

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(n)} (kt)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \lambda_m^{(n)} (kt)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (kt)^m$$

así pues se sigue la otra contención.

2. Sea $\frac{p(t)}{q(t)}$ tal que si $q(\alpha)=0$ entonces $|\alpha|\geq\frac{2}{k}$, sabemos que

$$\frac{1}{t-\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{\alpha^m}=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{\alpha^{m+1}}=-k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(kt)^m}{(k\alpha)^{m+1}},$$

donde

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(k|\alpha|)^{k+1}}=\frac{\frac{1}{k|\alpha|}}{1-\frac{1}{k|\alpha|}}=\frac{1}{k|\alpha|-1}\leq 1,$$

así pues de la parte 1. concluimos que $\frac{1}{t-\alpha}\in A(B_k)$ y dado que $\mathbb{C}[t]\subseteq A(B_k)$ se obtiene que $\frac{p(t)}{q(t)}\in A(B_k)$, esto prueba la primer contención.

Sea $\frac{p(t)}{q(t)}\in A(B_k)$, dado que $A(B_k)$ contiene a $\mathbb{C}[t]$ entonces por la proposición 3.2.2 se tiene que si $q(\alpha)=0$ entonces $\frac{1}{t-\alpha}\in A(B_k)$ y por 1. encontramos una λ y una sucesión $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$ tal que $\sum_{m=0}^{\infty}|\lambda_m|\leq 1$ y

$$\frac{1}{t-\alpha}=\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m(kt)^m=\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda\lambda_m)k^mt^m,$$

también $\frac{1}{t-\alpha}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{-t^m}{\alpha^{m+1}}$, dado que la representación es única se tiene que

$$\frac{1}{\alpha}=\lambda\lambda_0,\ \frac{1}{\alpha^2}=\lambda\lambda_1k,\ \frac{1}{\alpha^3}=\lambda\lambda_2k^2,\ \ldots$$

usando la primera igualdad en las otras y observando que λ,λ_0 son complejos no cero, obtenemos que

$$\frac{1}{\alpha k}=\frac{\lambda_1}{\lambda_0},\ \frac{1}{\alpha^2k^2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_0},\ \frac{1}{\alpha^3k^3}=\frac{\lambda_2}{\lambda_0},\ \ldots$$

por tanto $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha|^mk^m}=\frac{\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda_m|}{|\lambda_0|}\leq\frac{1-\lambda_0}{\lambda_0}$, dado que $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha|^mk^m}=\frac{1}{|\alpha|k-1}$ concluimos que

$$\frac{1}{|\alpha|k-1}\leq\frac{1-|\lambda_0|}{|\lambda_0|},$$

esto es $|\alpha|k\geq\frac{|\lambda_0|}{1-|\lambda_0|}+1>1$, de donde $|\alpha|>\frac{1}{k}$, de esta forma probamos la segunda inclusión.

Ahora sea $\frac{p(t)}{q(t)}$ tal que $q(\alpha)=0$ implica $|\alpha|>\frac{1}{k}$, tomemos un $0<\lambda\leq|\alpha|-\frac{1}{k}$ entonces

$$\frac{\lambda}{t-\alpha}=\lambda\left(-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{\alpha^{m+1}}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}-\frac{\lambda t^m}{\alpha^{m+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}-\frac{\lambda(kt)^m}{\alpha(k\alpha)^m},$$

observemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda}{|\alpha||\alpha|^m k^m} = \frac{\lambda}{|\alpha|}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{|\alpha|k}}\right) = \frac{\lambda}{|\alpha|}\left(\frac{|\alpha|k}{|\alpha|k-1}\right) = \frac{\lambda k}{|\alpha|k-1} \leq 1$$

□

El siguiente corolario se sigue inmediatamente del anterior.

Corolario 3.2.5. *Sea α un numero complejo no cero. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\frac{1}{t-\alpha} \in A(B_k).$$

En particular $\frac{1}{t-\alpha}$ esta en A_0.

Demostración. Para cada $|\alpha| > 0$ existe un numero natural k tal que $|\alpha| > \frac{1}{k}$, también recordemos que $A(B_k)$ esta contenido en A_0. □

Proposición 3.2.6. *Si A_0 denota el conjunto de elementos acotados en $\mathbb{C}(t)$. Entonces*

$$A_0 = \left\{\frac{p(t)}{q(t)} \mid q(0) \neq 0\right\}.$$

Demostración. Supongamos que $\frac{p(t)}{q(t)} \in C(t)$ con $q(0) \neq 0$, entonces $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(t)}{(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_n)}$ donde $\alpha_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$, usando la proposición 3.2.5 encontramos $m_1, \ldots, m_n$ tal que

$$\frac{1}{t-\alpha_1} \in A(B_{m_1}), \ldots, \frac{1}{t-\alpha_n} \in A(B_{m_n}),$$

por tanto si $m = \text{máx}\{m_1, \ldots, m_n\}$ obtenemos que $\frac{1}{(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_n)} \in A(B_m)$ y dado que $A(B_m)$ es una subálgebra se tiene que $p(t) \in A(B_m)$ esto implica que $\frac{p(t)}{q(t)} \in A_0$.

Sea $\frac{p(t)}{q(t)}$ un elemento de A_0 y supongamos que $q(0) = 0$, por la proposición 3.2.2, y dado que $C[t] \subseteq A_0$, se sigue que $\frac{1}{t} \in A_0$ lo cual es imposible, así pues debemos tener $q(0) \neq 0$. □

Una de las consecuencias del resultado anterior es que A_0 es un álgebra maximal.

Proposición 3.2.7. *La subálgebra A_0 de todos los elementos acotados en $\mathbb{C}(t)$ es una subálgebra maximal, esto es si A es una subálgebra de $\mathbb{C}(t)$ tal que $A_0 \subseteq A$, entonces $A = \mathbb{C}$ ó $A = A_0$.*

Demostración. Sea A una subálgebra of $\mathbb{C}(t)$ tal que $A_0 \subseteq A$ y supongamos que $A \neq \mathbb{C}$, dado que $t \in A_0$ tenemos que $\mathbb{C}[t] \subseteq A$, sea $\frac{p(t)}{q(t)} \in A$ si $q(0) = 0$ entonces por la proposición 3.2.2 obtenemos que $\frac{1}{t} \in A$, también $t \in A$, veamos que esto implica que $A = \mathbb{C}(t)$. Sea $\frac{r(t)}{s(t)} \in \mathbb{C}(t)$ si $s(0) \neq 0$ entonces $\frac{r(t)}{s(t)} \in A_0$ y por tanto es un elemento de de A, si $s(0) = 0$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y $s'(t)$ un polinomio tal que $s'(0) \neq 0$ y $\frac{r(t)}{s(t)} = \frac{r(t)}{t^m s'(t)}$ así pues es claro que $\frac{r(t)}{s(t)} \in A$, es decir $A = \mathbb{C}$ lo cual es una contradicción, por tanto $q(0) \neq 0$ de donde $\frac{p(t)}{q(t)} \in A_0$, es decir $A = A_0$. $\square$

Corolario 3.2.8. *La subálgebra A_0 de todos los elementos acotados en $\mathbb{C}(t)$ es una Q-álgebra de ideales principales.*

Demostración. Sabemos que $A_0 = \{\frac{p(t)}{q(t)} \mid q(0) = 0\}$, así pues el conjunto de los elementos invertibles en A_0 es

$$G(A_0) = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \mid p(0) \neq 0,\ q(0) \neq 0 \right\}$$

Sea $\frac{p(t)}{q(t)}$ un elemento de A_0, este puede ser expresado como $\frac{p(t)}{q(t)} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$, si $\| \, \|_n$ es una seminorma de la topología de $C(X)$ y

$$\left\| 1 - \frac{p(t)}{q(t)} \right\|_n < \frac{1}{2},$$

entonces $(1 - a_0) + a_1 a_{n,1} + a_2 a_{n,2} + \ldots < \frac{1}{2}$ de donde debemos tener que $a_0 \neq 0$, y dado que $\frac{p(0)}{q(0)} = a_0$ concluimos que $p(0) \neq 0$, de donde se sigue que $G(A_0)$ es abierto.

Ahora veamos que es de ideales principales. Supongamos que I es un ideal propio de A_0. Para cada $x = \frac{p(t)}{q(t)} \in I$ existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$ y un polinomio $p_n(t)$ tal que $\frac{p(t)}{q(t)} = t^n \frac{p_n(t)}{q(t)}$ tal que $p_n(0) \neq 0$, de donde $\frac{p_n(t)}{q(t)} \in G(A_0)$. Sea $n_0 = \text{mín}\{n(x) \mid x \in I\}$, veamos ahora que $I = t^{n_0} A_0$. Si $x = \frac{p(t)}{q(t)} \in I$ entonces

$$\frac{p(t)}{q(t)} = t^n \frac{p_n(t)}{q(t)} = t^{n_0} \left(t^{n-n_0} \frac{p_n(t)}{q(t)} \right),$$

el cual es un elemento de $t^{n_0} A_0$. Ahora si $t^{n_0} \frac{p(t)}{q(t)} \in t^{n_0} A_0$, para n_0 existe $x_0 \in I$ tal que $x_0 = t^{n_0} \frac{p_0(t)}{q(t)} \in I$, de donde $t^{n_0} \in I$ y por tanto $t^{n_0} A_0 \subseteq I$. $\square$

Usando la proposción 2.6 en [8] obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.9. *La subálgebra A_0 de elementos acotados en $\mathbb{C}(t)$ es una pseudo-Q-álgebra normada. En particular cada subálgebra $A(B_k)$ para $k = 1, 2, \ldots$ es una Q-álgebra.*

En la siguiente proposición $\sigma(x)$ denota el espectro usual de un elemento x in A_0, y $\sigma_{A_0}(x)$ denota el espectro de Allan de un elemento $x \in A_0$.

Proposición 3.2.10. *En la subálgebra A_0 de elementos acotados en $\mathbb{C}(t)$, se satisface que:*

$$\Sigma\left(\frac{p}{q}\right) = \sigma\left(\frac{p}{q}\right) = \sigma_{A_0}\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{\frac{p(0)}{q(0)}\right\},$$

para cada $\frac{p}{q} \in A_0$, en particular $\overline{R}\left(\frac{p}{q}\right) = R\left(\frac{p}{q}\right) = r_{A_0}\left(\frac{p}{q}\right) = \left|\frac{p(0)}{q(0)}\right|$.

Demostración. Sea $\frac{p}{q} \in A_0$ y por simmplicidad denotemos $x = \frac{p}{q}$, por el teorema 3.1.25 se tiene que $\Sigma(x) \subseteq \sigma_{A_0}(x)$ y dado que los elementos acotados de A_0 coinciden con A_0 se tiene que $\sigma_{A_0}(x) = \sigma(x)$ y por tanto $\sigma_{A_0}(x) = \sigma(x) = \Sigma(x)$.

Ahora observemos que

$$\frac{p(0)}{q(0)} - \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{p(0)q(t) - q(0)p(t)}{q(t)q(0)}$$

se sigue que el numerador se anula en 0, por tanto $\frac{p(0)}{q(0)} \in \sigma\left(\frac{p}{q}\right)$, además si $\lambda \in \sigma\left(\frac{p}{q}\right)$ entonces

$$\lambda - \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{\lambda q(t) - p(t)}{q(t)}$$

no es invertible en A_0 y dado que $q(0) \neq 0$ concluimos que $\lambda = \frac{p(0)}{q(0)}$. $\square$

Capítulo 4

Álgebras uniformemente A-convexas y espacios de funciones continuas.

En este capítulo estudiamos el caso especial de álgebras uniformemente A-convexas, veremos que bajo ciertas condiciones se puede definir una norma en estas álgebras cuya topología es más fina que la original y tal que contiene a los mismos conjuntos acotados en A. Aplicamos estos resultados a espacios de funciones continuas, además damos ejemplos de espacios de funciones continuas con valores en un álgebra topológica y calculamos su espacio $\mathfrak{M}(A)$.

4.1. Álgebras uniformemente A-convexas.

Sea A un álgebra localmente convexa, en esta sección supondremos que la topología está dada por una familia $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de seminormas total, esto es si $\|x\|_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in I$ entonces $x = 0$.

Definición 4.1.1. *Sea A un álgebra semitopologica localmente convexa con familia de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Decimos que es localmente A-convexa si para todo $\alpha \in I$ y $x \in A$ existe $M(\alpha, x) > 0$ y $N(\alpha, x) > 0$ tales que*

$$\|xy\|_\alpha \leq M(\alpha, x)\|y\|_\alpha \quad y \quad \|yx\|_\alpha \leq N(\alpha, x)\|y\|_\alpha,$$

para cada $y \in Y$.

Decimos que A es localmente uniformemente A-convexa si para cada $\alpha \in I$ y $x \in A$ existen $M(x) > 0$ y $N(x) > 0$ tales que

$$\|xy\|_\alpha \leq M(x)\|y\|_\alpha \quad y \quad \|yx\|_\alpha \leq N(x)\|y\|_\alpha,$$

para cada $y \in Y$.

A continuación enunciamos algunos ejemplos:

1. Consideremos $C([a,b])$ el espacio de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ y la norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt,$$

para cada $f \in C([a,b])$, se tiene que $(C([a,b]), \| \|_1)$ es un álgebra con una norma A-convexa. También podemos definir en $C([a,b])$ la siguiente norma

$$\|f\|_v = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)v(t)|,$$

para cada $f \in C([a,b])$, donde $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, $v(a) = v(b) = 0$ y $v(t) > 0$ para cada $t \in (a,b)$. Se tiene que $(C([a,b]), \| \|_v)$ es un álgebra con una norma que es A-convexa. En este caso ninguno de estos espacios es completo.

2. Decimos que una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se anula en infinito si para $\epsilon > 0$ existe K subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ tal que $|\phi(x)| < \epsilon$ para cada $x \notin K$, denotamos por

$$C_0(\mathbb{R}) = \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ \phi \text{ es continua y se anula en infinito}\},$$

Sea $C_b(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}$, entonces dada $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ definimos

$$\|f\|_\phi = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\phi(x)|$$

para cada $f \in C_b(\mathbb{R})$, la cual es una seminorma. A la topología generada por la familia de seminormas $\{\| \|_\phi\}_\phi$ se le denota por β, así pues $(C_b(\mathbb{R}), \beta)$ es un álgebra localmente convexa y no es difícil ver que de hecho es uniformemente A-convexa, además se puede probar que es completa.

3. Consideremos

$$B_0(\mathbb{R}) = \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ \phi \text{ es acotada y se anula en infinito}\}.$$

Para cada $\phi \in B_0(\mathbb{R})$ definimos una seminorma

$$\|f\|_\phi = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\phi(x)|$$

para cada $f \in C_b(\mathbb{R})$, de nueva cuenta $(C_b(\mathbb{R}), \{\| \, \|_\phi\}_\phi)$ es un álgebra localmente convexa que es uniformemente A-convexa, también el álgebra resulta completa.

En [44, 45, 46] M. Oudadess estudió las álgebras localmente uniformemente A-convexas y sus propiedades, encontró que si A es un álgebra localmente uniformemente A-convexa con unidad y secuencialmente completa, entonces A se puede escribir como una union de álgebras localmente m-convexas de Fréchet y si además A es conmutativa probó que el espectro de cada elemento es compacto.

Oudadess encontró en [45, 46] que en un álgebra A localmente uniformemente A-convexa con topología τ, con unidad y secuencialmente completa existe una topolgia τ' para A tal que A resulta un álgebra m-convexa de Fréchet y que τ' es más fina que τ. Más adelante en [44] Oudadess probó que de hecho en A, bajo las mismas condiciones, se puede definir una norma $\| \, \|$ tal que $(A, \| \, \|)$ resulta un álgebra de Banach y cuya topología es más fina que τ y que además los subconjuntos acotados en $(A, \| \, \|)$ son los mismo que los subconjuntos acotados en (A, τ). Como consecuencia de este hecho muchas propiedades de las álgebras localmente uniformemente A-convexas se pueden estudiar en el sentido de álgebras de Banach.

Sea A un álgebra uniformemente A-convexa, conmutativa y con $\{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la familia de seminormas que define la topología de A, entonces para cada $x \in A$ existe $M(x) > 0$ tal que

$$\|xy\|_\alpha \leq M(x) \|y\|_\alpha \tag{4.1}$$

para cada $y \in A$ y cada $\alpha \in I$.

En adelante supondremos que el álgebra A es conmutativa.

Definición 4.1.2. *Sea A un álgebra localmente uniformemente A-convexa con unidad e cuya topología esta dada por la familia de seminormas $\{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Definimos la seminorma $\| \, \|_{op}$ como*

$$\|x\|_{op} = \operatorname{ínf}\{0 < M(x) \mid \text{ satisface la condición (4.1)}\}$$

para cada $x \in A$.

Dados A un álgebra localmente A-convexa, en particular un álgebra uniformemente A-convexa, con unidad e y $\{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas que define la topología para A, si $\alpha \in I$ existe $x_0 \in A$ tal que $\|x_0\|_\alpha \neq 0$ entonces

$$0 < \|x_0\|_\alpha = \|x_0 e\|_\alpha \leq M(\alpha, x_0) \|e\|_\alpha,$$

entonces para cada $\alpha \in I$ se tiene que $\|e\|_\alpha \neq 0$. Definamos $\|x\|'_\alpha = \frac{\|x\|_\alpha}{\|e\|_\alpha}$ para cada $\alpha \in I$. Se tiene que si $x \in A$, entonces existe $M(\alpha, x) > 0$ tal que

$$\|xy\|'_\alpha = \frac{\|xy\|_\alpha}{\|e\|_\alpha} \leq M(\alpha, x)\frac{\|y\|_\alpha}{\|e\|_\alpha} = M(\alpha, x)\|y\|'_\alpha,$$

para cada $y \in A$ y $\|e\|'_\alpha = 1$ para cada $\alpha \in I$. Además es claro que esta nueva familia de seminormas es equivlente a la primera, entones se puede escoger la familia de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que definen la topología tal que $\|e\|_\alpha = 1$ para cada $\alpha \in I$. Este mismo argumento funciona para el caso en que el álgebra A es localmente uniformemente A-convexa. En adelante supondremos que si el álgebra tiene unidad entonces la familia de seminormas satisface esta propiedad.

Proposición 4.1.3. *Sea A un álgebra localmente uniformemennte A-convexa con unidad e y seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Entonces $\| \ \|_{op}$ es una norma para A y satisface que*

1. $\|xy\|_{op} \leq \|x\|_{op}\|y\|_{op}$ *para cada $x, y \in A$.*
2. *Dada $x \in A$ se tiene que $\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_{op}\|y\|_\alpha$ para cada $y \in A$ y cada $\alpha \in A$.*
3. *Dada $\alpha \in I$ se tiene que $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_{op}$ para cada $x \in A$.*

Demostración. Sean $x, y \in A$, $M(x) > 0$ y $M(y) > 0$ tales que

$$\|xz\|_\alpha \leq M(x)\|z\|_\alpha \ \text{ y } \ \|yz\|_\alpha \leq M(y)\|z\|_\alpha$$

para cada $z \in A$ y cada $\alpha \in I$. Por tanto

$$\|xyz\|_\alpha \leq M(x)\|yz\|_\alpha \leq M(x)M(y)\|z\|_\alpha$$

para cada $z \in A$ y cada $\alpha \in I$, de donde $\|xy\|_{op} \leq M(x)M(y)$, así pues $\|xy\|_{op} \leq \|x\|_{op}\|y\|_{op}$.

El punto 2. es inmediato de la definición. Para probar 3. recordemos que estamos asumiendo que $\|e\|_\alpha = 1$ para cada $\alpha \in I$ por tanto $\|x\|_\alpha = \|xe\|_\alpha \leq \|x\|_{op}\|e\|_\alpha = \|x\|_{op}$ para cada $\alpha \in I$. $\square$

Del punto 3. de la proposición 4.1.3 se puede definir la siguiente norma.

Definición 4.1.4. *Sea A un álgebra localmente uniformemente A-convexa con unidad e y con familia de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Definimos la norma $\| \ \|_A$ como*

$$\|x\|_A = \sup_{\alpha \in I} \|x\|_\alpha$$

para cada $x \in A$.

Observación 4.1.5. *Si A es un álgebra localmente uniformemente A-convexa, entonces la relación entre la norma $\| \ \|_{op}$ y la norma $\| \ \|_A$ esta dada por*

$$\|x\|_A \leq \|x\|_{op}$$

para cada $x \in A$.

A continuación damos un ejemplo. Sea $A = C_b(\mathbb{R})$ con la topología β, esta es un álgebra localmente uniformemente A-convexa y se puede demostrar que en este caso

$$\|f\|_A = \|f\|_\infty$$

para cada $f \in A$ y donde como de costumbre $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Más aún si $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ y $f \in A$ se tiene que

$$\|fg\|_\phi = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)g(x)\phi(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\phi,$$

para cada $g \in A$, por tanto $\|f\|_{op} \leq \|f\|_\infty$ y como en general $\|f\|_A \leq \|f\|_{op}$ se tendría que $\|f\|_{op} = \|f\|_\infty$. Otra cosa importante en este espacio es que un subconjunto B de $C_b(\mathbb{R})$ es acotado con la topología β si y sólo si B es acotado con la norma $\| \ \|_\infty$, veremos más adelante que esto en realidad bajo ciertas condiciones es un hecho más general en álgebras localmente uniformemente A-convexa.

El siguiente resultado lo ha probado Oudadess.

Teorema 4.1.6. *Sea A un álgebra localmente uniformemente A-convexa con seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$, con unidad e y barrilada. Entonces la topología τ es equivalente a la topología inducida por la norma $\| \ \|_A$ y además existe $M > 0$ tal que*

$$\|xy\|_A \leq M\|x\|_A\|y\|_A$$

para cada $x, y \in A$.

Demostración. Véase [44]. $\square$

De donde se sigue el siguiente resultado.

Proposición 4.1.7. *Sea A un álgebra localmente uniformemente A-convexa con seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$, con unidad e, barrilada y secuencialmente completa. Entonces A es un álgebra de Banach con la norma*

$$\|x\|_A = \sup_{\alpha\in I} \|x\|_\alpha$$

para cada $x \in A$.

Otro resultado importante que probó Oudadess en [44, 45] es el siguiente.

Teorema 4.1.8. *Sea* (A, τ) *un álgebra localmente uniformemente* A*-convexa secuencialmente completa. Entonces* A *es el límite inductivo bornologico de algunas subálgebras* m*-convexas, metrizables y completas* (A_i, τ_i) *con* $i \in I$*, esto es*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i,$$

la inclusión $A_i \to A$ *es continua y para cada* $i \leq j$ *se tiene que* A_i *es una subálgebra de* A_j *y la inclusión* $A_i \to A_j$ *es continua. Además un subconjunto* B *de* A *es acotado si y sólo si existe* i *tal que* B *es acotado en* A_i*.*

Demostración. Sea $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas que difine la topología τ de A y sea $\{B_i\}_{i \in J}$ una familia de subconjuntos acotados de A tal que para cada subconjunto acotado B de A existe i tal que $B \subseteq B_i$.

Fijemos un elemento B_i de la familia, por tanto para cada $\alpha \in I$ existe $M_\alpha > 0$ tal que

$$\|x\|_\alpha \leq M_\alpha$$

para cada $x \in B_i$. Definamos $\|B_i\|_\alpha = \sup\{\|x\|_\alpha \mid x \in B_i\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $I_n^i = \{\alpha \in I \mid \|B_i\|_\alpha < n\}$, se tiene que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n^i$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\| \ \|_n^i : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ dada por

$$\|x\|_n^i = \sup\{\|x\|_\alpha \mid \alpha \in I_n^i\}$$

para cada $x \in A$. Esta es una seminorma con valores extendidos y satisface que

$$\begin{aligned} \|xy\|_n^i &= \sup\{\|xy\|_\alpha \mid \alpha \in I_n^i\} \\ &\leq M(x) \sup\{\|y\|_\alpha \mid \alpha \in I_n^i\} = M(x)\|y\|_n^i \end{aligned} \tag{4.2}$$

para cada $x, y \in A$. Si definimos $A_i = \{x \in A \mid \|x\|_n^i < \infty \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$, se tiene por la desigualdad 4.2 que A_i es una subalgebra de A, de hecho cada A_i es un ideal de A. Como para cada $x \in B_i$ se satisface que $\|x\|_n^i \leq n$ se tiene que $B_i \subseteq A_i$. Además $\{\| \ \|_n^i\}_{n=1}^\infty$ es una familia de seminormas para A_i, que hace que A_i sea un álgebra localmente uniformemente A-convexa.

Consideremos el encaje canonico $A_i \to A$, este es continuo pues para cada $\alpha \in I$ existe $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in I_{n(\alpha)}^i$ y por tanto $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_{n(\alpha)}^i$ para cada $x \in A_i$.

Ahora $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, pues dado $x \in A$ como $\{x\}$ es acotado existe i tal que $\{x\} \subseteq B_i$ y como $B_i \subseteq A_i$ se tiene que $x \in A_i$. Definamos un orden para I como $i \leq j$ si y sólo si $B_i \subseteq B_j$, veamos ahora que si $i \leq j$ entonces

$A_i \subseteq A_j$. Sea $x \in A_i$, como $B_i \subseteq B_j$ se puede ver facilmente que $I_n^j \subseteq I_n^i$ y por tanto $\|x\|_n^j \leq \|x\|_n^i < \infty$ de donde $x \in A_j$, de donde también se ve que el encaje canonico $A_i \to A_j$ es continuo.

Veamos ahora que A_i es completo. Sea $(x_m)_m$ una sucesión de Cauchy en A_i, dado $\alpha \in I$ existe n tal que $\alpha \in I_n^i$ y por tanto $\|x_l - x_m\|_\alpha \leq \|x_l - x_m\|_n^i$, de donde $(x_m)_m$ es de Cauchy en A y como A es completa se tiene que existe $x \in A$ tal que $(x_m)_m$ converge a x.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|x_m\|_n^i \leq M$ para cada m. Como cada $\| \, \|_n^i$ es semicontinua inferiormente si hacemos m tender a infinito se obtiene que $\|x\|_n^i \leq M$, de esta forma $x \in A_i$. De manera completamente analoga se puede demostrar que x_m converge a x en A_i, de donde A_i es completo y por un resultado de Michael, ver [37], como A_i es uniformemente A-convexa y de Frechet se tendría que A_i es un álgebra localmente m-convexa, esto concluye la demostración del teorema. De la construcción es fácil ver que $B \subseteq A$ es acotado en A si y sólo si B esta contenido en algun A_i y es acotado en A_i. □

Una de las consecuencias de este teorema es el siguiente.

Teorema 4.1.9. *Sea (A, τ) un álgebra localmente uniformemente A-convexa, con unidad e y secuencialmente completa. Entonces existe una topología τ' para A mas fina que τ y tal que (A, τ') es localmente m-convexa, metrizable y completa. Además un subconjunto B de A es acotado en τ si y sólo si es acotado en τ'.*

Demostración. Sea $\{\| \, \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas que define la topología para A. Para cada $i \in I$ tenemos que A_i es un álgebra localmente uniformemente convexa con seminormas $\{\| \, \|_n^i\}_{n=1}^\infty$, de hecho se vio en el teorema 4.1.8 que cada A_i es un ideal de A y por un resultado de Michael, ver [37], se tiene que cada A_i es realidad es un álgebra localmente m-convexa de Fréchet.

Dado que podemos suponer que $\|e\|_\alpha = 1$ para cada $\alpha \in I$, entonces para cada i se tiene que $e \in A_i$ y por tanto para cada i se tiene que $A = A_i$. Para cada i denotemos por τ_i la topología de Fréchet para $A_i = A$, sabemos qe si $i \leq j$ entonces la inclusión $(A, \tau_i) \to (A, \tau_j)$ es continua y como las topologías son de Fréchet se tiene que $\tau_i = \tau_j$, así pues denotemos por $\tau' = \tau_i$ para cada i, tambíen sabemos que inclusión $(A, \tau') \to (A, \tau)$ es continua y por tanto $\tau \subseteq \tau'$, así pues τ' es una topología localmente m-convexa de Frechet para A más fina que τ y del teorema 4.1.8 se tiene que B es acotado con respecto a τ si y sólo si es acotado con respecto a τ'. □

Teorema 4.1.10 (Oudadess). *Sea (A,τ) un álgebra localmente uniformemente A-convexa con unidad e y secuencialmente completa. Entonces la topología inducida por la norma $\| \|_A$ es más fina que τ, $(A, \| \|_A)$ es un álgebra de Banach y un subconjunto B de A es acotado en τ si y sólo si es acotado con $\| \|_A$.*

Demostración. Sea $\{\| \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de seminormas que difine la topología τ de A y sea $\{B_i\}_{i\in J}$ una familia de subconjuntos acotados de A tal que para cada subconjunto acotado B de A existe i tal que $B \subseteq B_i$.

En la demostración del teorema 4.1.9 se vio que $A = A_i$ y $\tau' = \tau_i$ es una topología para A localmente m-convexa de Fréchet y que tiene los mismos acotados que (A,τ), por el teorema 4.1.6 se tiene que la topología τ' es equivalente a la topología inducida por la norma

$$\|x\|_i = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x\|_n^i$$

para cada $x \in A$. Ahora para cada $\alpha \in I$ existe $n(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_{n(\alpha)}^i \leq \|x\|_i$, por tanto

$$\|x\|_A = \sup_\alpha \|x\|_\alpha \leq \|x\|_i,$$

además es claro que $\|x\|_i \leq \|x\|_A$, por tanto para cada $x \in A$ se tiene que $\|x\|_i = \|x\|_A$ para cada $x \in A$, de donde se sigue el resultado. □

A continuación utilizamos los resultados de Oudadess, para estudiar un espacio de funciones continuas con valores en un álgebra, más precisamente sea X un conjunto y (A,τ) un álgebra localmente convexa, definimos el espacio de funciones continuas y acotadas definidas en X y con valores en A como

$$C_b(X,A) = \{f : X \to A \mid f \text{ es continua y acotada}\}$$

este es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalar de funciones. En $C_b(X,A)$ se pueden definir las siguientes seminormas. Si $\{\| \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de seminormas total para A, dada $\alpha \in I$ definimos

$$\|f\|_{\alpha,\infty} = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_\alpha$$

para cada $f \in C_b(X,A)$, es fácil ver que también es una familia de seminormas total, si denotamos por τ_∞ a la topología generada por esta familia de seminormas se tiene que $(C_b(X,A),\tau_\infty)$ es un espacio localmente convexo.

Proposición 4.1.11. *Sea (A,τ) un espacio localmente convexo y secuencialmente completo. Entonces $(C_b(X,A),\tau_\infty)$ es un espacio localmente convexo y secuencialmente completo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C_b(X,A)$, entonces dado $\alpha \in I$ y $\epsilon > 0$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m > N$ entonces

$$\sup_{x\in A} \|f_n(x) - f_m(x)\|_\alpha \leq \|f_n - f_m\|_{\alpha,\infty} < \epsilon, \tag{4.3}$$

por tanto si $x \in A$, entonces para $n,m > N$ se tiene que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_\alpha < \epsilon,$$

de donde $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en A y como A es completo se tiene que existe $f(x)$ en A tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Veamos que la función f es continua y acotada. Supongamos que $\{x_i\}_{i\in I}$ es una red en A que converge a x_0, si en 4.3 hacemos m tender a infinito se tiene que si $n > N$ entonces

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\alpha \leq \epsilon \tag{4.4}$$

para cada $x \in A$. Sea $n > N$, como f_n es continua se tiene que existe i_0 tal que si $i > i_0$ entonces

$$\|f_n(x_i) - f_n(x_0)\|_\alpha \leq \epsilon,$$

por tanto si $i > i_0$, entonces

$$\|f(x_i)-f(x_0)\|_\alpha \leq \|f(x_i)-f_n(x_i)\|_\alpha+\|f_n(x_i)-f_n(x_0)\|_\alpha+\|f_n(x_0)-f(x_0)\|_\alpha$$

$$\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon,$$

de donde se tiene que f es continua. Ahora veamos que f es acotada, por la relación 4.4 se tiene que si $n > N$ entonces $f_n - f$ es acotada y como $f = f_n - (f_n - f)$, entonces f es acotada, la misma desigualdad también nos dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f, por tanto el espacio es secuencialmente completo. $\square$

Sea (A,τ) un álgebra localmente uniformemente A-convexa, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿ Es cierto que $(C_b(X,A),\tau_\infty)$ es también localmente uniformemente A-convexa? Unos de los resultados encontrados en este trabajo es que en el caso en que A tiene unidad y es secuencialmente completa la respuesta es afirmativa.

Recordando la definición 4.1.2 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1.12. *Sea A un álgebra localmente uniformemente A-convexa con unidad e y secuencialmente completa. Entonces $(A, \| \|_{op})$ es completa.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy con respecto a la norma $\| \|_{op}$, si $\{\| \|_{\alpha}\}_{\alpha}$ es la familia de seminormas que definen la topología para A se sabe que $\|x\|_{\alpha} \leq \|x\|_{op}$ para cada $x \in A$ y cada α, por tanto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy con respecto a cada $\| \|_{\alpha}$ y por tanto existe $x \in A$ tal que $x_n \to x$ con respecto a cada $\| \|_{\alpha}$.

Ahora sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $\|x_n - x_m\|_{op} < \epsilon$ y por definición de la norma $\| \|_{op}$ se tiene que existe un $0 < M(x_n - x_m) < \epsilon$ tal que

$$\|(x_n - x_m)y\|_{\alpha} \leq M(x_n - x_m)\|y\|_{\alpha} < \epsilon\|y\|_{\alpha} \tag{4.5}$$

para cada $y \in A$ y cada α. Si en la ecuación 4.5 fijamos $n > N$ y hacemos $m \to \infty$, como el producto es separadamente continuo, tendríamos que

$$\|(x_n - x)y\|_{\alpha} \leq \epsilon\|y\|_{\alpha}$$

para cada $y \in A$ y cada α, de donde si $n > N$ se tiene que $\|x_n - x\|_{op} \leq \epsilon$, es decir $x_n \to x$ con la norma $\| \|_{op}$. □

Así pues usando el teorema 4.1.10 y que en un álgebra localmente uniformemente A-convexa se tiene que $\|x\|_A \leq \|x\|_{op}$ para cada $x \in A$ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1.13. *Sea (A, τ) un álgebra localmente uniformemente A-convexa con unidad e y secuencialmente completa. Entonces las normas $\| \|_{op}$ y $\| \|_A$ son equivalentes.*

Demostración. La demostración se sigue del teorema del mapeo abierto, del teorema 4.1.10 y del hecho que la identidad $id : (A, \| \|_{op}) \to (A, \| \|_A)$ es continua. □

Como corolario del teorema 4.1.10 y la proposición 4.1.13 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 4.1.14. *Sea (A, τ) un álgebra uniformemente A-convexa con unidad e y secuencialmente completa. Entonces (A, τ) y $(A, \| \|_{op})$ tienen los mismos acotados.*

Es así que llegamos a otro de los resultados principales de este trabajo.

Proposición 4.1.15. *Sea (A, τ) un álgebra localmente uniformemente A-convexa con unidad e y secuencialmente completaa. Entonces $(C_b(X, A), \tau_\infty)$ es un álgebra localmente uniformemente A-covexa y secuencialmente completa.*

Demostración. Sean $f, g \in C_b(X, A)$, tenemos que

$$\|fg\|_{\alpha,\infty} = \sup_{x\in A} \|f(x)g(x)\|_\alpha \leq \sup_{x\in A} \|f(x)\|_{op}\|g(x)\|_\alpha,$$

y como $f(A)$ es acotado en A y A es secuencialmente completa, se tiene que $f(A)$ es acotado con la norma $\| \|_{op}$ y por tanto existe un $M(f) > 0$ tal que $\sup_{x\in A} \|f(x)\|_{op} \leq M(f)$ de donde

$$\|fg\|_{\alpha,\infty} \leq M(f)\|g\|_{\alpha,\infty},$$

es decir $(C_b(X, A), \tau_\infty)$ es uniformemente A-convexa. □

4.2. Espacios de funciones continuas $CV(X)$.

Definición 4.2.1. *Sean X un espacio completamente regular y de Hausdorff y V una familia de funciones con valores reales positivas y semicontinuas superiormente, decimos que V es una familia de Nachbin para X si:*

1. *Para cada $x \in X$ existe $v \in V$ tal que $v(x) \neq 0$.*
2. *Para cada $v \in V$ y cada $\lambda > 0$ se tiene que $\lambda v \in V$.*
3. *Para cada $v_1, v_2 \in V$ existe $v \in V$ tal que $\max\{v_1, v_2\} \leq v$.*

Ahora definimos los espacios de funciones de Nachbin, Sea X un espacio completamente regular y de Hausdorff definimos

$$CV(X) = \left\{ f \in C(X) \mid \sup_{x\in X} |f(x)|v(x) < \infty \text{ para cada } v \in V \right\}$$

y

$$CV_0(X) = \{f \in C(X) \mid fv \text{ se anula en } \infty \text{ para cada } v \in V\}.$$

Cada uno de estos, es un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de funciones y resultan espacios vectoriales topológicos de Hausdorff bajo la topología generada por la siguiente familia de seminormas, dada $v \in V$ definimos

$$\|f\|_v = \sup_{x\in X} |f(x)|v(x)$$

para cada $f \in CV(X)$, la topología generada por esta familia de seminormas se denota por τ_V.

Observación 4.2.2. *En adelante también supondremos que para cada $x \in X$ existe $f \in CV(X)$ tal que $f(x) \neq 0$, de hecho bajo esta suposición podemos decir que para cada $x \in X$ existe $f \in CV(X)$ tal que $f \geq 0$ y $f(x) = 1$.*

A continuación enunciamos algunos ejemplos. Sea X completamente regular y de Hausdorff

1. Sea $V = \{v : X \to \mathbb{R} \mid v \text{ es una constante positiva}\}$. En este caso se tiene que $CV(X) = C_b(X)$, $CV_0(X) = C_0(X)$ y τ_V resulta la topología de la convergencia uniforme en ambos casos y por tanto $CV(X)$ y $CV_0(X)$ son álgebras normadas.

2. Sea $V = \{v : X \to \mathbb{R} \mid v = \lambda\chi_K, \lambda \geq 0 \text{ y } K \subseteq X \text{ compacto }\}$. En este caso se tiene que $CV(X) = CV_0(X) = C(X)$ y τ_V resulta ser la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de X.

3. Sea $V = \{v : X \to \mathbb{R} \mid v \geq 0 \text{ es semicontinua superiormente y se anula en } \infty\}$. En este caso se tiene que $CV(X) = CV_0(X) = C_b(X)$ y τ_v resulta ser la topología estricta β.

Definición 4.2.3. *Sea X un espacio completamente regular y de Hausdorff. Si V y V' son dos familias de Nachbin para X decimos que V y V' son equivalentes si para cada $v \in V$ existe $v' \in V'$ tal que $v \leq v'$ y para cada $v' \in V'$ existe $v \in V$ tal que $v' \leq v$.*

El siguiente resultado es un hecho importante con respecto a familias de Nachbin equivalentes.

Lema 4.2.4 (A. Carrillo)**.** *Sean W_1, W_2 y W tres familias de Nachbin en X tales que $CW(X) \subseteq CW_1(X)$ y $CW(X) \subseteq CW_2(X)$. Si $\tau_{W_1} \subseteq \tau_{W_2}$ en $CW(X)$. Entonces dado $w \in W_1$ existe $w' \in W_2$ tal que $w(x) \leq w'(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $w \in W_1$ entonces existe $w' \in W_2$ tal que

$$\|f\|_w \leq \|f\|_{w'}$$

para cada $f \in CW(X)$. Vamos a probar que $w(x) \leq w'(x)$ para cada $x \in X$. Supongamos que existe x_0 tal que $w'(x_0) < w(x_0)$ tomemos r tal que

$$w'(x_0) < r < w(x_0).$$

Como w' es semicontinua superiormente se tiene que

$$F = \{x \in X \mid w'(x) \geq r\}$$

es cerrado, observemos que $x_0 \in X \setminus F$. Ahora como X es completamente regular existe $h : X \to [0,1]$ tal que $h(x_0) = 1$ y $h(x) = 0$ para cada $x \in F$.

Por otra parte existe $f_0 \in CW(X)$ tal que $f_0(x) \geq 0$ para cada x y $f_0(x_0) = 1$, sea $f = \text{mín}\{h, f_0\}$, se tiene que $f \in CW(X)$ y

$$0 \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{y} \quad f(x_0) = 1,$$

es así que

$$\sup_{x \in X} w'(x)f(x) \leq \sup_{x \in X} w'(x)h(x) = \sup_{x \in X \setminus F} w'(x)h(x) \leq r$$

y como $f(x_0) = 1$ se tiene que

$$w(x_0) \leq \|f\|_w \leq \|f\|_{w'} = \sup_{x \in X} w'(x)f(x) \leq r < w(x_0),$$

lo cual es una contradicción y por tanto $w(x) \leq w'(x)$ para cada $x \in X$. $\square$

Es así que tenemos la siguiente proposición

Proposición 4.2.5. *Sean V y V' dos familias de Nachbin en X tales que $CV(X) \subseteq CV'(X)$. Si $\tau_V = \tau_{V'}$. Entonces dado $v \in V$ existe $v' \in V'$ tal que $v(x) \leq v'(x)$ para todo $x \in X$ y dado $v' \in V'$ existe $v \in V$ tal que $v'(x) \leq v(x)$ para cada $x \in X$ y $CV(X) = CV'(X)$.*

Demostración. En el lema anterior hacemos $W = W_1 = V$ y $W_2 = V'$, como $\tau_V = \tau_{V'}$ obtenemos que dado $v \in V$ existe $v' \in V'$ tal que $v(x) \leq v'(x)$ para cada $x \in X$.

Por otro lado si hacemos $W = W_2 = V$ y $W_1 = V'$, como $\tau_V = \tau_{V'}$ tenemos que dado $v' \in V'$ existe $v \in V$ tal que $v'(x) \leq v(x)$ para cada $x \in X$. $\square$

Oubbi en [41, 42] dio condiciones necesarias y suficientes para que $CV(X)$ y $CV_0(X)$ resulten álgebras locolamente convexas con producto separadamente continuo, además estudio los casos en que estas resultan ser A-convexas, m-convexas y uniformemente A-convexas. Si V es una familia de Nachbin y $U \subseteq V$, decimos que U es una base para V si para cada $v \in V$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ y $u \in U$ tal que $v(x) \leq \lambda u(x)$ para cada $x \in X$.

Proposición 4.2.6. *Sea X un espacio completamente regular y de Hausdorff y V una familia de Nachbin para X. Si E denota a $CV(X)$ ó $CV_0(X)$, entonces*

1. *E es un álgebra semitopológica localmente convexa si y sólo si para cada $g \in E$ y cada $v \in V$ existe $v' \in V$ tal que $|g|v \leq v'$.*

2. *E es un álgebra topológica localmente convexa si y sólo si para cada $v \in V$ existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $v \leq v_1 v_2$.*

3. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a) E es un álgebra localmente A-convexa.

   b) V es equivalente a una familia de Nachbin V' que satisface que para cada $g \in E$ y para cada $v' \in V'$ existe $M > 0$ tal que $|g|v' \leq Mv'$.

   c) Para cada $v \in V$ y cada $g \in E$ se tiene que g es acotada en $N_v = \{x \mid v(x) \neq 0\}$.

4. *E es uniformemente A-convexa si y sólo si $E \subseteq C_b(X)$.*

5. *E es m-convexa si y sólo si V es equivalente a una familia de Nachbin V' con una base U que satisface $v' \leq v'v'$ para cada $v' \in U$.*

Demostración. Ver [41] proposición 2.2. □

A continuación enunciamos varias propiedades del álgebra $CV(X)$. El álgebra $CV(X)$ tiene a las constantes si y sólo si cada elemento de V es acotado, en particular en este caso la función constante 1 es la unidad en $CV(X)$. Si $CV(X)$ contiene a las constantes y tomamos $f \in CV(X)$ el espectro de f definido como

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - f \text{ no es invertible}\}$$

satisface que

$$f(X) \subseteq \sigma(f) \subseteq \overline{f(X)}.$$

Ahora denotemos por

$$\mathfrak{M}^{\#}(CV(X)) = \{F : CV(X) \to \mathbb{C} \mid F \text{ es lineal no cero y multiplicativa}\}$$

y

$$\mathfrak{M}(CV(X)) =$$
$$\{F : CV(X) \to \mathbb{C} \mid F \text{ es lineal no cero, multiplicativa y continua}\}.$$

Oubbi encontró en [41] que dada una $F \in \mathfrak{M}^{\#}(CV(X))$ existe $x \in \beta X$, donde βX es la compactación de Stone-Cech de X, tal que $F(f) = \delta_x(f)$ para cada $f \in CV(X)$ y donde $\delta_x(f) = f(x)$ es la funcional evaluación, con lo que logró probar que $\mathfrak{M}^{\#}(CV(X))$ y $\mathfrak{M}(CV(X))$ son homeomorfos a algún subconjunto de βX. Otro resultado importante que Oubbi encontró en [41] es que de hecho $\mathfrak{M}(CV_0(X))$ es homeomorfo a X.

4.3. La topología de Oudadess en $CV(X)$.

Sea A un algebra localmente A-convexa con unidad e y $\{\|\ \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de seminormas que definen la topología de A y supongamos, como lo hicimos anteriormente, que $\|e\|_\alpha = 1$ para cada $\alpha \in I$. Dado $\alpha \in I$ y $x \in A$ existe $M(\alpha, x) > 0$ tal que

$$\|xy\|_\alpha \leq M(\alpha, x)\|y\|_\alpha, \tag{4.6}$$

para cada $y \in A$. Definimos la seminorma $\|\ \|_{\alpha,op}$ como

$$\|x\|_{\alpha,op} = \text{ínf}\{M(\alpha, x) > 0 \mid M(\alpha, x) \text{ satisface } 4.6\},$$

es fácil ver que esta satisface las condiciones para ser seminorma.

Proposición 4.3.1. *Ahora sea A un álgebra localmente A-convexa, con unidad e y familia de seminormas $\{\|\ \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Entonces la familia de seminormas $\{\|\ \|_{\alpha,op}\}_{\alpha\in I}$ satisface que para cada $\alpha \in I$ y cada $x, y \in A$*

1. $\|x\|_{\alpha,op} = \sup\{\|xy\|_\alpha \mid \|y\|_\alpha \leq 1\}$.
2. $\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_{\alpha,op}\|y\|_\alpha$.
3. $\|xy\|_{\alpha,op} \leq \|x\|_{\alpha,op}\|y\|_{\alpha,op}$.
4. $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_{\alpha,op}$.

Demostración. Veamos que 1 se satisface, sea $\alpha \in I$ y $y \in A$ tal que $\|y\|_\alpha \leq 1$. Si $M(\alpha, x) > 0$ satisface la desigualdad 4.6 entonces

$$\|xy\|_\alpha \leq M(\alpha, x),$$

de donde $\sup\{\|xy\|_\alpha \mid \|y\|_\alpha \leq 1\} \leq M(\alpha, x)$ y por tanto

$$\sup\{\|xy\|_\alpha \mid \|y\|_\alpha \leq 1\} \leq \|x\|_{\alpha,op}.$$

Ahora si $y \in A$ es no cero, entonces

$$\left\| x \frac{y}{\|y\|_\alpha} \right\|_\alpha \leq \sup\{\|xy\|_\alpha \mid \|y\|_\alpha \leq 1\},$$

de donde $\|xy\|_\alpha \leq \sup\{\|xy\|_\alpha \mid \|y\|_\alpha \leq 1\}\|y\|_\alpha$ y por tanto

$$\|x\|_{\alpha,op} \leq \sup\{\|xy\|_\alpha \mid \|y\|_\alpha \leq 1\}.$$

Así pues se da la igualdad.

La demostración de 2, 3 y 4 es completamente similar a la que se dio en la proposición 4.1.3. □

Si (A, τ) es un álgebra localmente A-convexa cuya topología viene determinada por la familia de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$, definimos la topología de Oudadess para como aquella determinada por la familia de seminormas $\{\| \ \|_{\alpha,op}\}_{\alpha \in I}$ y la denotamos por $M(\tau)$. La principal propiedad de esta topología se encuentra en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.2. *Sea (A, τ) un álgebra localmente A-convexa. Entonces la topología de Oudadess $M(\tau)$ es la topología localmente m-convexa menos fina entre todas las topologías localmente m-convexas mas finas que τ.*

Demostración. Sea $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de seminormas que definen la topología τ, la topología $M(\tau)$ esta definida por la familia de seminormas $\{\| \ \|_{\alpha,op}\}_{\alpha \in I}$. Es claro que $M(\tau)$ es más fina que τ y es localmente m-convexa.

Sea τ' otra topología localmente m-convexa más fina que τ y supongamos que $\{||| \ |||_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de seminormas que definen la topología τ'. Sea $\alpha \in I$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ y $M > 0$ tal que

$$\|x\|_\alpha \leq M|||x|||_\lambda$$

para cada $x \in A$. Es así que si $y \in A$ es tal que $\|y\|_\alpha \leq 1$ entonces $\|xy\|_\alpha \leq M|||xy|||_\lambda \leq M|||x|||_\lambda|||y|||_\lambda$ y por tanto

$$\|x\|_{\alpha,op} \leq M \sup\{|||y|||_\lambda \mid \|y\|_\alpha \leq 1\}|||x|||_\lambda,$$

para cada $x \in A$, de donde se tiene que $M(\tau) \subseteq \tau'$. □

H. Arizmendi, R. Pérez y J. Roa, estudiaron en [13] la topología de Oudadess en el espacio $C_b(X)$ de funciones continuas y acotadas definidas sobre un espacio X completamente regular con la topología estricta β, demostraron que las seminormas de la topología de Oudadess se pueden describir de la siguiene manera

$$\|f\|_{\phi,op} = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in \sup \phi\} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_{\phi}^{1/n}$$

y además probaron que el radio espectral satisface que

$$R(f) = \sup_{\phi} \limsup \|f^n\|_{\phi}^{1/n} = \|f\|_{\infty}.$$

Hemos logrado probar resultados similares para el caso general de $CV(X)$ con la topología τ_V, damos más adelante nuevas condiciones necesarias y suficientes para que $CV(X)$ sea m-convexa.

Proposición 4.3.3. *Sea V una familia de Nachbin para $CV(X)$. Entonces $CV(X)$ contiene a las constantes si y sólo si cada elemento de V es una función acotada.*

Proposición 4.3.4. *Supongamos que $CV(X)$ es A-convexa y contiene a las constantes. Entonces se satisface que para cada $v \in V$*

$$\sup_{x\in N_v} |f(x)| = \limsup_{n} \|f^n\|_v^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_v^{1/n},$$

donde $N_v = \{x \in X \mid v(x) > 0\}$.

Demostración. Como $CV(X)$ es A-convexa podemos suponer por la proposición 4.2.6 que V es tal que para cada $f \in CV(X)$ y cada $v \in V$ existe $M > 0$ tal que $|f|v \leq Mv$, de donde se puede ver que

$$\|f^n\|_v \leq M^{n-1}\|f\|_v$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, por tanto si x es tal que $v(x) \neq 0$ se tiene que

$$|f(x)| = |f^n(x)|^{1/n} \leq \left(\frac{1}{v(x)}\|f^n\|_v\right)^{1/n} = \frac{1}{v(x)^{1/n}}\|f^n\|_v^{1/n}, \tag{4.7}$$

tomando límite superior nos queda $|f(x)| \leq \limsup_n \|f^n\|_v^{1/n}$, es así que

$$\sup_{x\in N_v} |f(x)| \leq \limsup_{n} \|f^n\|_v^{1/n}.$$

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(\|f^n\|_v)^{1/n} = \left(\sup_{x\in N_v} |f^n(x)v(x)|\right)^{1/n} \leq \sup_{x\in N_v} |f(x)| \left(\sup_{x\in N_v} |v(x)|\right)^{1/n}$$

y tomando límite superior tenemos que $\limsup_n \|f^n\|_v^{1/n} \leq \sup_{x\in N_v} |f(x)|$. Más aún si en 4.7 tomamos límite inferior de ambos lados obtenemos que

$$\sup_{x\in N_v} |f(x)| \leq \liminf_n \|f^n\|_v^{1/n} \leq \limsup_n \|f^n\|_v^{1/n} \leq \sup_{x\in N_v} |f(x)|,$$

de donde $\lim_{n\to\infty} \|f^n\|_v^{1/n} = \sup_{x\in N_v} |f(x)|$. □

Es así que tenemos la siguiente proposición

Proposición 4.3.5. *Supongamos que $CV(X)$ es A-convexa y contiene a las constantes. Entonces para cada $v \in V$*

$$\|f\|_{v,op} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_v^{1/n} = \sup_{x\in N_v} |f(x)|,$$

donde $N_v = \{x \in X \mid v(x) > 0\}$.

Demostración. Sea $f \in CV(X)$ y $v \in V$, entonces por la proposición 1.2.26

$$\limsup_n \|f^n\|_v^{1/n} \leq \left(\limsup_n \|f^{n-1}\|_{v,op}\|f\|_v\right)^{1/n} = \limsup_n \|f^{n-1}\|_{v,op}^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|f^{n-1}\|_{v,op}^{1/n} = \inf_n \|f^n\|_{v,op}^{1/n} \leq \|f\|_{v,op}.$$

Además

$$\|f\|_{v,op} = \sup_{\|g\|_v\leq 1} \|fg\|_v = \sup_{\|g\|_v\leq 1} \left(\sup_{x\in X} |f(x)g(x)v(x)|\right)$$

$$= \sup_{\|g\|_v\leq 1} \left(\sup_{x\in N_v} |f(x)g(x)v(x)|\right) \leq \sup_{x\in N_v} |f(x)| \sup_{\|g\|_v\leq 1} \left(\sup_{x\in X} |g(x)v(x)|\right)$$

$$\leq \limsup_n \|f^n\|_v^{1/n},$$

de esta forma $\lim_{n\to\infty} \|f^n\|_v^{1/n} = \|f\|_{v,op}$. □

Respecto al radio espectral se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.3.6. *Supongamos que $CV(X)$ es A-convexa y contiene a las constantes. Entonces dado $f \in CV(X)$ se tiene que*

$$R(f) = \sup_{v\in V} \left\{\sup_{x\in N_v} |f(x)|\right\} = \|f\|_\infty$$

donde $N_v = \{x \in X \mid v(x) \neq 0\}$ y $\|f\|_\infty = \infty$ si f no es acotada.

En la siguiente proposición damos nuevas condiciones para que el álgebra $CV(X)$ sea m-convexa.

Proposición 4.3.7. *Supongamos que $CV(X)$ es un álgebra topologica localmente convexa que contiene a las constantes. Entonces $CV(X)$ es m-convexa si y sólo si V es equivalente a la familia*

$$\{\lambda\chi_{N_{v,1}} \mid \lambda \geq 0, v \in V\}$$

donde $N_{v,1} = \{x \in X \mid v(x) \geq 1\}$ y $\chi_{N_{v,1}}$ es la función caracteristica del conjunto $N_{v,1}$.

Por otro lado, si $CV(X)$ es localmente A-convexa y contiene a las constantes, entonces $CV(X)$ es m-convexa si y sólo si para cada $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $\sup_{x\in N_v} |f(x)| \leq \|f\|_w$ para cada $f \in CV(X)$ y donde para cada $v \in V$ definimos $N_v = \{x \in X \mid v(x) > 0\}$.

Demostración. Veamos primero que la familia $V' = \{\lambda\chi_{N_{v,1}} \mid \lambda \geq 0, v \in V\}$ es de Nachbin. Es fácil verificar que esta familia cumple las dos primeras condiciones de la definición de familia de Nachbin, ahora sean $\lambda_1\chi_{N_{v_1,1}}$ y $\lambda_2\chi_{N_{v_2,1}}$ elementos de la familia, sea $v \in V$ tal que $\max\{v_1, v_2\} \leq v$ y sea $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, entonces se puede verificar que

$$\lambda_1\chi_{N_{v_1,1}} \leq \lambda\chi_{N_{v,1}} \quad \text{y} \quad \lambda_2\chi_{N_{v_2}} \leq \lambda\chi_{N_{v,1}},$$

así pues la familia es de Nachbin. Ahora sea $U = \{\lambda\chi_{N_{v,1}} \mid \lambda \geq 1,\ v \in V\}$, esta es una base para la familia V' y además los elementos de U satisfacen que

$$\lambda\chi_{N_{v,1}} \leq (\lambda\chi_{N_{v,1}})(\lambda\chi_{N_{v,1}}),$$

por tanto por la proposición 4.2.6 se tiene que la topología generada por la familia V' es m-convexa.

Ahora si V es equivalente a V', entonces $CV(X) = CV'(X)$ y además τ_V y $\tau_{V'}$ son equivalentes, así pues τ_V es m-convexa.

Ahora supongamos que τ_V es m-convexa, Oubbi probó en [43] que existe una familia de Nachbin W para X tal que $W \leq V$, τ_W es m-convexa y es la mas fina de la topologías m-convexas de este tipo menos finas que τ_V, de hecho W viene dada por

$$W = \{\epsilon W_{1,v} \mid \epsilon > 0, v \in V\}$$

y donde $W_{1,v}(x) = v(x)$ si $v(x) \geq 1$ y $W_{1,v}(x) = 0$ si $v(x) < 1$. Como τ_V es m-convexa se tiene que $\tau_V = \tau_W$ y por el lema 4.2.4 se tiene que V es equivalente a W, ahora es claro que dado $v \in V$ se tiene que

$$\chi_{N_{v,1}}(x) \leq v(x)$$

para cada $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, como $CV(X)$ contiene a las constantes cada $v \in V$ es acotado y por tanto se tiene que

$$\epsilon W_{1,v}(x) = \epsilon v(x)\chi_{N_{v,1}}(x) \leq \epsilon \|v\|_\infty \chi_{N_{v,1}}(x),$$

para cada $x \in X$. Es así que $\tau_V = \tau_W = \tau_{V'}$ y por la proposición 4.2.5 se tiene que que V es equivalente a V' y $CV(X) = CV'(X)$.

Ahora supongamos que $CV(X)$ es A-convexa y que además τ_V es m-convexa, de donde existe una base U de V tal que $u \leq uu$ para cada $u \in U$.

Si $v \in V$, entonces existe $\lambda > 0$ y $u \in U$ tal que $v \leq \lambda u$ y por las proposciónes 4.3.4 y 1.2.26 se tiene que

$$\sup_{x \in N_v} |f(x)| = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_v^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_{\lambda u}^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_u^{1/n} = \inf_n \|f^n\|_u^{1/n} \leq \|f\|_u.$$

Inversamente, como $CV(X)$ es A-convexa existe $M(\tau_V)$ la topología de Oudadess dada por la familia $\{\| \ \|_{v,op}\}_{v\in V}$ y por la proposición 4.3.5 se tiene que dado $v \in V$

$$\|f\|_{v,op} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_v^{1/n} = \sup_{x\in N_v} |f(x)|,$$

por hipotesis existe $w \in V$ tal que $\|f\|_{v,op} \leq \|f\|_w$, así pues $M(\tau_V) \subseteq \tau_V$ y como la topología de Oudadess es más fina que τ_V se tiene que $\tau_V = M(\tau_V)$, es decir τ_V es m-convexa. $\square$

4.4. Ejemplos de algebras de funciones $C_b(X, A)$ y $\mathfrak{M}(C_b(X, A))$.

En esta sección X denotará un espacio de Hausdorff completamente regular, A un álgebra topológica localmente convexa con unidad e cuya topología está dada por la familia de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $C_b(X, A)$ el espacio de funciones definido como

$$C_b(X, A) = \{f : X \to A \mid f \text{ es continua y acotada en } X\}$$

en la cual definimos una topología dada por la familia de seminormas $\{\| \ \|_{\alpha,\infty}\}_{\alpha\in I}$ dadas por

$$\|f\|_{\alpha,\infty} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_\alpha$$

para cada $\alpha \in I$ y cada $f \in C_b(X,A)$. Veamos algunas resultados con respecto al espacio $\mathfrak{M}(C_b(X,A))$, estos han sido obtenidos por H. Arizmendi, M. Cho, A. García en [10].

Proposición 4.4.1. *Existe una transformación continua H que va de $X \times \mathfrak{M}(A)$ en $\mathfrak{M}(C_b(X,A))$, dada por $H(x,F)$, donde*

$$H(x,F)(f) = F(f(x))$$

para cada $f \in C_b(X,A)$, $x \in X$ y $F \in \mathfrak{M}(A)$.

Demostración. Sea $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$, entonces existe una seminorma $\| \ \|_\alpha$ tal que

$$|F(y)| \leq \|y\|_\alpha$$

para cada $y \in A$, entonces se tiene que $|H_{x,F}(f)| = |F(f(x))| \leq \|f(x)\|_\alpha \leq \|f\|_{\alpha,\infty}$ para cada $f \in C_b(X,A)$, esto es $H(x,F) \in \mathfrak{M}(C_b(X,A))$.

Ahora tomemos $V(H(x,F), f_1, \ldots, f_n, \epsilon)$ una vecindad abierta de $H(x,F)$ en $\mathfrak{M}(C_b(X,A))$. Tomemos la vecindad abierta $V(x)\times V(F, f_1(x), \ldots, f_n(x), \frac{\epsilon}{2})$, donde

$$V(x) = \left\{ y \in A \mid \|f_i(x) - f_i(y)\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2} \text{ para cada } i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Ahora se puede ver que para cada $(y,F) \in V(x) \times V(F, f_1(x), \ldots, f_n(x), \frac{\epsilon}{2})$ se tiene que

$$H(y,F) \in V(H(x,F), f_1, \ldots, f_n, \epsilon),$$

es decir, H es una función continua. $\square$

En general el espacio $\mathfrak{M}(C_b(X,A))$ es más grande que $H(X \times \mathfrak{M}(A))$, incluso en el caso en que A es un álgebra de Banach. En [10, 9] se muestra un ejemplo de un álgebra de Banach en la que $H(X\times\mathfrak{M}(A))$ no es densa en $\mathfrak{M}(C_b(X,A))$. En la siguiente sección daremos un ejemplo en el que $H(X \times \mathfrak{M}(A)) = \mathfrak{M}(C_b(X,A))$.

A continuación definimos un tipo de transformada de Gelfand.

Definición 4.4.2. *Para cada $f \in C_b(X,A)$, definimos la transformada de Gelfand $\widetilde{f} \in C(X \times \mathfrak{M}(A))$ con respecto a $X \times \mathfrak{M}(A)$, dada por*

$$\widetilde{f}(x,F) = F(f(x)),$$

para cada $(x,F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$.

Proposición 4.4.3. *La transformación $f \to \widetilde{f}$ es un homomorfismo de $C_b(X, A)$ en $C(X \times \mathfrak{M}(A))$. Si además $\mathfrak{M}(A)$ es total entonces es inyectivo.*

Demostración. Esta transformación es lineal y multiplicativa pues dados $f, g \in C_b(X, A)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\widetilde{\lambda f + \mu g}(x, F) = F(\lambda f(x) + \mu g(x))$$

$$= \lambda F(f(x)) + \mu F(g(x)) = \lambda \widetilde{f}(x, F) + \mu \widetilde{g}(x, F)$$

y

$$\widetilde{fg}(x, F) = F(f(x)g(x)) = F(f(x))F(g(x)) = \widetilde{f}(x, F)\widetilde{g}(x, F)$$

para cada $(x, F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$. Además dada $f \in C_b(X, A)$ se tiene

$$\widetilde{f} = \widehat{f} \circ H$$

donde $f \to \widehat{f}$ que va de $C_b(X, A)$ en $C(\mathfrak{M}(C_b(X, A))$ es la transformada de Gelfand usual, por tanto $\widetilde{\ }$ es un homomorfismo.

Ahora si $\mathfrak{M}(A)$ es total, la transformación es inyectiva pues si $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ entonces para cada x y para cada F se tiene que $F(f(x)) = F(g(x))$ y por tanto $f(x) = g(x)$, de donde $f = g$ $\square$

Se puede probar que $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$ es isomorfo con $C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ donde $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ es la compactación de Stone-Cech de $X \times \mathfrak{M}(A)$. En el caso en que para cada $f \in C_b(X, A)$ se tenga que $\widetilde{f} \in C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$ se puede considerar el homomorfismo $f \to \widetilde{f}^*$ que va de $C_b(X, A)$ en $C(\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$ donde $\widetilde{f}^*$ es la extensión de $\widetilde{f}$ a $\beta(X \times \mathfrak{M}(A))$.

En [9], se demuestra que si A es un álgebra de Banach, la transformación $f \to \widetilde{f}$ es un homomorfismo continuo de $C_b(X, A)$ en $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$.

Proposición 4.4.4. *Sea A álgebra uniformente A-convexa y secuencialmente completa. Entonces el homomorfismo $f \to \widetilde{f}$ va de $C_b(X, A)$ en $C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$.*

Demostración. Por el teorema 4.1.10 se tiene que existe una norma $\| \ \|$ para A, de Banach, tal que la topología dada por esta norma es mas fuerte que la original y que los conjuntos acotados con esta norma son los mismos que los acotados con la topología original de A.

Sea $f \in C_b(X, A)$, entonces $f(X)$ es acotado con respecto a la norma $\| \ \|$, así pues existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M$ para cada $x \in X$, de donde

$$|\widetilde{f}(x, F)| = |F(f(x))| \leq \|f(x)\| \leq M$$

para cada $(x, F) \in X \times \mathfrak{M}(A)$, por tanto $\widetilde{f} \in C_b(X \times \mathfrak{M}(A))$. $\square$

Para ver más propiedades en esta dirección con respecto al álgebra $C_b(X,A)$, hacemos referencia al artículo [10] de de H. Peimbert, M. Cho y A. García.

4.4.1. El álgebra $C_b(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\varepsilon)$.

Denotemos por ε al álgebra de las funciones enteras, con la topología dada por la siguiente familia de seminormas, si $f\in\varepsilon$ definimos para cada $m\in\mathbb{N}$

$$|f|_m = \sup_{|z|\leq m} |f(z)|.$$

Se tiene que $(\varepsilon,\{|\ |_m\}_{m\in\mathbb{N}})$ es un álgebra conmutativa, localmente m-convexa, con unidad y completa.

Consideremos el álgebra

$$C_b(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\varepsilon)=\{\overline{f}:\mathbb{N}\cup\{\infty\}\to\varepsilon \mid \overline{f} \text{ es continua y acotada}\}$$

es un álgebra con las operaciones usuales, si $\overline{f}=(f_n,f_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$, $\overline{g}=(g_n,g_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\lambda\in\mathbb{C}$ definimos

$$\overline{f}+\overline{g}=(f_n+g_n,f_\infty+g_\infty)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$\lambda\overline{f}=(\lambda f_n,\lambda f_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$$

y

$$\overline{f}\overline{g}=(f_ng_n,f_\infty g_\infty)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Además es localmente convexa con la familia de seminormas dadas por, para cada $m\in\mathbb{N}$ definimos

$$\|\overline{f}\|_m=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{|z|\leq m}|f_n(z)|.$$

Más aún se puede probar que $C_b(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\varepsilon)$ es localmente m-convexa y secuencialmente completa y además que $C_b(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\varepsilon)$ se puede escribir como

$$C_b(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\varepsilon)=\{(f_n,f)_n \mid \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge unif. en compactos a } f\}$$

Si $\overline{f}\in C_b(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\varepsilon)$ consideramos la siguiente notación

$$\overline{f}=(f_1,f_2,\ldots:f),$$

donde los dos puntos indican que detras de estos hay una cantidad numerable de valores.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$e_n = (0, \dots 0, 1, 0, \dots : 0), \;\; e_0 = (1, 1, 1, \dots : 1)$$

donde el 1 aparece en el lugar n-ésimo y es el único valor distinto de cero. Ahora definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{z}_n = (0, \dots, 0, z, 0, \dots : 0)_z$$

donde la función idéntica z aparace en el lugar n-ésimo y en todas las otras entradas es 0, además denotamos

$$\overline{z} = (z, z, \dots : z)_z$$

se tiene claramente que cada $e_n, \overline{z}_n$ y $\overline{z}$ son elementos de $C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon)$.

La siguiente proposicisión no dice que en $C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon)$ existe una especie de base.

Proposición 4.4.5. *Sea $\overline{f} = (f_n, f)_n$ un elemento de $C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon)$. Entonces*

$$\overline{f} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(1)} - a_m)\overline{z}_1^m + \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(2)} - a_m)\overline{z}_2^m + \dots + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \overline{z}^m, \tag{4.8}$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\overline{z}_n^0 = e_n$, $\overline{z}^0 = e_0$ y además $f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} z^m$, $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ son las series de Taylor para f_n y f respectivamente.

Demostración. Podemos escribir

$$\begin{aligned} \overline{f} &= (f_1, f_2, \dots : f) \\ &= (f_1 - f, f_2 - f, \dots : 0) + (f, f, \dots : f) \\ &= (f_1 - f, 0, \dots : 0) + (0, f_2 - f, 0, \dots : 0) + \dots + (f, f, \dots : f), \end{aligned}$$

Ahora tomemos $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f_n(z) - f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(n)} - a_m) z^m$, con convergencia uniforme en compactos, por tanto

$$(0, \dots, f_n - f, \dots : 0) - \sum_{m=0}^{r} (a_m^{(n)} - a_m)\overline{z}_n^m$$

$$= \left(0, \dots, \sum_{n=r+1}^{\infty} (a_m^{(n)} - a_m) z^m, 0, \dots : 0\right)$$

es así que si $M \geq 0$

$$\left\| (0, \ldots, f_n - f, \ldots : 0) - \sum_{m=0}^{r} (a_m^{(n)} - a_m)\overline{z}_n^m \right\|_M$$

$$= \sup_{|z| \leq M} \left| \sum_{m=r+1}^{\infty} (a_m^{(n)} - a_m) z^m \right| \to 0$$

si $r \to \infty$ pues $\sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(n)} - a_m) z^m$ converge uniformemente en compactos, de esta forma para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(0, \ldots, 0, f_n - f, 0, \ldots : 0) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(n)} - a_m)\overline{z}_n^m.$$

Ahora, si $r \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(f, f, \ldots : f) - \sum_{m=0}^{r} a_m \overline{z}^m = \left(\sum_{m=r+1}^{\infty} a_m z^m, \sum_{m=r+1}^{\infty} a_m z^m, \ldots : \sum_{m=r+1}^{\infty} a_m z^m \right)$$

por tanto si $M \geq 0$

$$\left\| (f, f, \ldots : f) - \sum_{m=0}^{r} a_m \overline{z}^m \right\|_M = \sup_{|z| \leq M} \left| \sum_{m=r+1}^{\infty} a_m z^m \right| \to 0$$

si $r \to \infty$ pues $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ converge uniformemente en compactos, de donde

$$(f, f, \ldots : f) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \overline{z}^m.$$

de estos hechos se sigue la igualdad 4.8. □

Royden en [48] definió un álgebra de funciones A como una colección de funciones complejo-valuadas y continuas definidas en un conjunto X, usualmente completamente regular, tal que la suma, el producto por escalar y el producto punto a punto de dos elementos de A está en A, además esta debe contener a las constantes. Royden estudió condiciones sobre el álgebra de funciones A con el fin de estudiar el espacio $\mathfrak{M}^{\#}(A)$, una de estas propiedades es la siguiente:

(α) Si $f \in A$ y f nunca es cero, la inversa de f existe y está en A.

La propiedad (α) es importante pues Royden en [48] probó el siguiente resultado.

Proposición 4.4.6. *Si A es un álgebra de funciones definidas en un conjunto X que satisface la propiedad (α). Entonces para cada $G \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$ se tiene que*

$$G(f) \in f(X)$$

para cada $f \in A$.

Con respecto a nuestro ejemplo tenemos lo siguiente. Si consideremos $\widetilde{\ } : C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon) \to C((\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times \mathfrak{M}(\varepsilon))$ dada por

$$\widetilde{\overline{f}}(n, F) = F(\overline{f}(n))$$

para cada $x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y cada $F \in \mathfrak{M}(A)$. Podemos ver este homomorfismo de una manera más comoda: Como todos los elementos de $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ se pueden ver como evaluaciones de la forma, dado $z \in \mathbb{C}$

$$F_z(f) = f(z)$$

para cada $f \in \varepsilon$, identificamos $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ con $\mathbb{C}$ y por tanto dado $\overline{f} = (f_n, f)_n \in C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon)$ se tiene que

$$\widetilde{\overline{f}}(n, z) = \begin{cases} f_n(z) & (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C} \\ f(z) & n = \infty, z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

de aquí también es fácil ver que el homomorfismo $\widetilde{\ }$ es inyectivo y por tanto una biyección sobre su imagen.

Proposición 4.4.7. *Si $\mathcal{A} = C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon)$, entonces el álgebra de funciones $\widetilde{\mathcal{A}}$ satisface la propiedad (α) de Royden, donde $\widetilde{\ }$ es el homomorfismo de la proposición 4.4.3.*

A continuación calculamos $\mathfrak{M}(C_b((\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon))$.

Proposición 4.4.8. *Se satisface la siguiente igualdad*

$$\mathfrak{M}(C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon)) = H((\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{C})$$

donde H es el homomorfismo dado en la proposición 4.4.1.

Demostración. Por la proposición 4.4.1 se tiene que

$$H((\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{M}(C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon))$$

Ahora sea $G \in \mathfrak{M}(C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon))$, si $\overline{f} \in C_b(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon)$ por la proposición 4.4.5 se tiene que

$$\overline{f} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(1)} - a_m)\overline{z}_1^m + \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(2)} - a_m)\overline{z}_2^m + \ldots + \sum_{m=0}^{\infty} a_m \overline{z}^m,$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\overline{z}_n^0 = e_n$, $\overline{z}^0 = e_0$ y además $f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(n)} z^m$, $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ son las series de Taylor para f_n y f respectivamente

Supongamos que $G(e_i) = 0$ y $G(\overline{z}_i) = 0$ para cada i entonces como G es lineal, multiplicativa y continua se tiene que

$$G(\overline{f}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m G(\overline{z})^m.$$

Ahora como $\widetilde{\ }$ es una biyección sobre su imagen se tiene que

$$G(\overline{z}) = (G \circ \widetilde{\ }^{-1})(\widetilde{\overline{z}})$$

denotemos por $G' = G \circ \widetilde{\ }^{-1}$ el cual es un elemento de $\mathfrak{M}^{\#}(\widetilde{\mathcal{A}})$ y dado que el álgebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ satisface la propiedad (α) por la proposición 4.4.6 se tiene que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$G(\overline{z}) = G'(\widetilde{\overline{z}}) = z_1,$$

de donde

$$G(\overline{f}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z_1^m = f(z_1) = H_{(\infty, z_1)}(\overline{f}).$$

Supongamos ahora que no todos los $G(e_i)$ y $G(\overline{z}_i)$ son cero, primero supongamos que existe i tal que $G(\overline{z}_i) \neq 0$, entonces $G(e_i) \neq 0$ pues si $G(e_i) = 0$ entonces

$$G(\overline{z}_i) = G(0, \ldots, 0, z, 0, \ldots : 0)$$
$$= G(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots : 0) G(0, \ldots, 0, z, 0, \ldots : 0) = 0$$

lo cual contradice nuestra suposición, además para cada $j \neq i$ se tiene que $G(\overline{z}_j) = 0$, pues si $G(\overline{z}_j) \neq 0$ se tendría que

$$0 = G(\overline{z}_i \overline{z}_j) = G(\overline{z}_i) G(\overline{z}_j) \neq 0$$

lo cual es una contradicción, análogamente se prueba que $G(e_j) = 0$ para cada $j \neq i$. Es así que

$$G(\overline{f}) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(i)} - a_m) G(\overline{z}_i)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m G(\overline{z})^m,$$

por la proposición 4.4.6 y la proposición 4.4.7 existen $z_0 \neq 0$ y z_1 complejos tales que $G(\overline{z}_i) = (G \circ {}^{\sim -1})(\widetilde{\overline{z}_i}) = z_0$ y $G(\overline{z}) = (G \circ {}^{\sim -1})(\widetilde{\overline{z}}) = z_1$, tenemos que

$$z_0 z_1 = G(\overline{z}_i)G(\overline{z}) = G(\overline{z}_i\overline{z}) = G(0, \ldots, 0, z^2, 0, \ldots : 0) = G(\overline{z}_i)G(\overline{z}_i) = z_0^2,$$

de donde $z_0 = z_1$ y por tanto

$$G(\overline{f}) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(i)} - a_m) z_0^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m z_1^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^i z_0^m$$

$$= f_i(z_0) = H_{(i,z_0)}(\overline{f}).$$

Ahora supongamos que existe i tal que $G(e_i) \neq 0$ por tanto $G(e_i) = 1$, también en este caso $G(e_j) = 0$ y $G(\overline{z}_j) = 0$ para cada $j \neq i$, de nueva cuenta por la proposición 4.4.6 y la proposición 4.4.7 existen z_0 y z_1 complejos tales que $G(\overline{z}_i) = z_0$ y $G(\overline{z}) = z_1$, entonces

$$z_1 = G(\overline{z})G(e_i) = G(\overline{z}e_i) = G(\overline{z}_i) = z_0,$$

por tanto

$$G(\overline{f}) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(i)} - a_m) z_0^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m z_1^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^i z_0^m$$

$$= f_i(z_0) = H_{(i,z_0)}(\overline{f}),$$

de donde se sigue la igualdad deseada. □

4.4.2. Las álgebras $C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D}))$ y $C_b(\mathbb{N}, B(\mathbb{D}))$.

En esta sección presentamos más ejemplos de álgebras de funciones vector-valuadas y estudiamos el espacio de homomorfismos del álgebra en $\mathbb{C}$.

Denotemos por $\mathbb{D} = D(0,1)$ y consideremos el álgebra

$$A(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \mid f \text{ es holomorfa en } \mathbb{D}\}.$$

Dotemos esta álgebra con la norma infinito, $\|f\| = \text{máx}_{|z|\leq 1} |f(z)|$. Ahora sea

$$C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D})) = \{\overline{f} : \mathbb{N} \to A(\mathbb{D}) \mid \overline{f} \text{ es continua y acotada}\}.$$

Esta es un álgebra de Banach con las operaciones usuales de suma, producto por escalar y producto de sucesiones entrada a entrada y con norma

$$\|\overline{f}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|,$$

para cada $\overline{f} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Recordemos que podemos definir la transformación

$$\sim\colon C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D})) \to C_b(\mathbb{N} \times \mathfrak{M}(A(\mathbb{D})))$$

dada por

$$\widetilde{\overline{f}}(n, F) = F(\overline{f}(n)).$$

Observemos que esta función $\widetilde{}$ es inyectiva, pues si $\widetilde{\overline{f}} = \widetilde{\overline{g}}$ entonces para cada $(n, F) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{M}(A(\mathbb{D})$ se tiene que

$$F(\overline{f}(n)) = F(\overline{g}(n))$$

por tanto $\overline{f}(n) = \overline{g}(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de esta forma $\widetilde{}$ es una biyección sobre su imagen.

A continuación probaremos que $\mathfrak{M}(A(\mathbb{D}))$ es $\overline{\mathbb{D}}$. Recordemos el siguiente resultado de Royden, dado en [48].

Proposición 4.4.9. *Sea A un álgebra de funciones definidas en un compacto X. Entonces X es $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ si y sólo si A satisface la siguiente propiedad: (β) Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son elementos de A sin ceros en común, entonces existen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ elementos de A tal que $f_1g_1 + f_2g_2 + \ldots + f_ng_n = 1$*

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ en $A(\mathbb{D})$, en [39] Mortini demostró que el ideal generado por $f_1, f_2, \ldots, f_n$ denotado por $I(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ satisface

$$I(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \left\{ f \in A(\mathbb{D}) \mid \text{existe } C(f) > 0,\ |f| \leq C(f) \sum_{j=1}^{N} |f_j| \text{ en } \mathbb{D} \right\}$$

si y sólo si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ no tienen ceros en común en la frontera de $\overline{\mathbb{D}}$.

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sin ceros en común en $\overline{\mathbb{D}}$, entonces

$$0 < C = \min_{|z|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} |f_i(z)|,$$

si $0 = \min_{|z|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} |f_i(z)| = \sum_{i=1}^{n} |f_i(z_0)|$, de donde $f_i(z_0) = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, lo cual no puede ser. De donde

$$1 \leq \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{n} |f_i|,$$

usando el resultado de Mortini dado en [39] se tiene que $1 \in I(f_1, \ldots, f_n)$, es así que existen $g_1, g_2, \ldots, g_n \in A(\mathbb{D})$ tales que $1 = f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n$, y por la proposición 4.4.9 $\mathfrak{M}(A(\mathbb{D}))$ es $\overline{\mathbb{D}}$.

Lo anterior nos dice esencialmente que $C_b(\mathbb{N} \times \mathfrak{M}(A(\mathbb{D}))) = C_b(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$ y este último se puede identificar con $C(\beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}))$ mediante la siguiente función

$$f \to f^*$$

donde f^* es la extensión a la compactación de Stone-Cech de $f \in C_b(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$. Esta función $*$ es inyectiva, pues si $f, g \in C_b(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$ son tales que $f^*(p) = g^*(p)$ para cada $p \in \beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$, como son extensiones se tendría que $f((n, z)) = g((n, z))$ para cada $(n, z) \in \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}$, además es fácil ver que $*$ también es lineal y multiplicativa.

Ahora sean $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_m}$ elementos de $C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D}))$, entonces

$$\widetilde{\overline{f_1}}^*, \widetilde{\overline{f_2}}^*, \ldots, \widetilde{\overline{f_m}}^*$$

son elementos de $C(\beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}))$, supongamos además que estas últimas no tienen ceros en común, por tanto

$$\widetilde{\overline{f_1}}, \widetilde{\overline{f_2}}, \ldots, \widetilde{\overline{f_m}}$$

no tienen ceros en común en $\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}$, esto quiere decir que si

$$\overline{f_i} = (f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_n^{(i)}, \ldots),$$

donde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \overline{\mathbb{D}}$ existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $f_n^i(z) \neq 0$. Esto nos dice que si consideramos el siguente arreglo

$$\begin{aligned} \overline{f_1} &= (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}, \ldots) \\ \overline{f_2} &= (f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_n^{(2)}, \ldots) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

$$\overline{f_m} = (f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \dots, f_n^{(m)}, \dots)$$

cada columna es una cantidad finita de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ sin ceros en común y por el resultado de Mortini [39], se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $g_n^{(1)}, g_n^{(2)} \dots, g_n^{(m)} \in A(\mathbb{D})$ tales que $f_n^{(1)} g_n^{(1)} + \dots + f_n^{(m)} g_n^{(m)} = 1$. Sean $\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots, \overline{g_n}$ dadas por

$$\begin{aligned}
\overline{g_1} &= (g_1^{(1)}, g_2^{(2)}, \dots, g_n^{(1)}, \dots) \\
\overline{g_2} &= (g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, \dots, g_n^{(2)}, \dots) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\overline{g_m} &= (g_1^{(m)}, g_2^{(m)}, \dots, g_n^{(m)}, \dots),
\end{aligned}$$

afirmamos que

$$\widetilde{\overline{f_1}}^* \widetilde{\overline{g_1}}^* + \widetilde{\overline{f_2}}^* \widetilde{\overline{g_2}}^* + \dots + \widetilde{\overline{f_m}}^* \widetilde{\overline{g_m}}^* = 1.$$

Sea $(n, z) \in \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}$, entonces

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\overline{f_1}}(n,z)\widetilde{\overline{g_1}}(n,z) + \widetilde{\overline{f_2}}(n,z)\widetilde{\overline{g_2}}(n,z) + \dots + \widetilde{\overline{f_m}}(n,z)\widetilde{\overline{g_m}}(n,z) \\
&= f_n^{(1)}(z) g_n^{(1)}(z) + f_n^{(2)}(z) g_n^{(2)}(z) + \dots + f_n^{(m)}(z) g_n^{(m)}(z) = 1,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\widetilde{\overline{f_1}}\widetilde{\overline{g_1}} + \widetilde{\overline{f_2}}\widetilde{\overline{g_2}} + \dots + \widetilde{\overline{f_m}}\widetilde{\overline{g_m}} = 1$$

y tomando las extensiones a la compactación de Stone-Cech se tiene que

$$\widetilde{\overline{f_1}}^* \widetilde{\overline{g_1}}^* + \widetilde{\overline{f_2}}^* \widetilde{\overline{g_2}}^* + \dots + \widetilde{\overline{f_m}}^* \widetilde{\overline{g_m}}^* = 1,$$

usando una vez más la proposición 4.4.9 se tiene que si denotamos por $\mathcal{A} = C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D}))$, entonces

$$\mathfrak{M}(\widetilde{\mathcal{A}}^*) = \beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}).$$

Usando los hechos anteriores probamos el siguiente resultado.

Proposición 4.4.10. *Si*

$$C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D})) = \{\overline{f} : \mathbb{N} \to A(\mathbb{D}) \mid \overline{f} \text{ es continua y acotada}\},$$

entonces $\mathfrak{M}(C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D}))) = \beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$.

Demostración. Sea $G \in \mathfrak{M}(C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D})))$, como las funciones $\widetilde{\ }$ y $*$ son biyecciones sobre su imagen y lineales entonces podemos considerar la siguiente funcional $G' = G \circ \widetilde{\ }^{-1} \circ *^{-1}$ la cual es un elemento de $\mathfrak{M}(\widetilde{\mathcal{A}}^*)$ y por lo probado anteriormente se tendría que exise $p \in \beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$ tal que

$$G'(\widetilde{\overline{f}}^*) = \widetilde{\overline{f}}^*(p)$$

para cada $\overline{f} \in C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D}))$ y por tanto $G(\overline{f}) = G(\widetilde{\overline{f}}^*) = \widetilde{\overline{f}}^*(p)$.

Ahora es claro que si $p \in \beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$ y definimos $G(\overline{f}) = \widetilde{\overline{f}}^*(p)$, entonces $G \in \mathfrak{M}(C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D})))$. □

A continuación construimos un ejemplo similar. Consideremos

$$B(\mathbb{D}) = \{f \in H(D(0, r_f)) \mid \overline{\mathbb{D}} \subseteq D(0, r_f), r_f > 0\}$$

esta es un álgebra de Banach con la operaciones usuales de, suma, producto por escalar y producto de funciones, con la norma $\|f\| = \max_{|z|\leq 1} |f(z)|$. Ahora sea

$$C_b(\mathbb{N}, B(\mathbb{D})) = \{\overline{f} : \mathbb{N} \to B(\mathbb{D}) \mid \overline{f} \text{ es continua y acotada}\}$$

esta es un álgebra de Banach con las operaciones usuales de suma, producto por escalar y producto de sucesiones entrada a entrada y con norma

$$\|\overline{f}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|,$$

para cada $\overline{f} = (f_n)_{n=1}^\infty$.

Veamos que $\mathfrak{M}(B(\mathbb{D}))$ es $\overline{\mathbb{D}}$, sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ elementos de $B(\mathbb{D})$ sin ceros en común en $\overline{\mathbb{D}}$, se puede probar que existe un disco $D(0, R)$ tal que $\overline{\mathbb{D}} \subseteq D(0, R)$, $f_1, \ldots, f_n$ son holomorfas en $D(0, R)$ y no tienen ceros en común en $D(0, R)$, por un resultado similar al de Mittag-Lefler se tiene que existen $g_1, \ldots, g_n$ holomorfa en $D(0, R)$ tales que $f_1 g_1 + f_2 g_2 + \ldots + f_n g_n = 1$, por tanto por la proposición 4.4.9 se tiene que $\mathfrak{M}(B(\mathbb{D}))$ es $\overline{\mathbb{D}}$.

Ahora de manera completamente analoga al caso de $A(\mathbb{B})$ si consideramos las transformaciones, $\widetilde{\ }: C_b(\mathbb{N}, B(\mathbb{D})) \to C_b(\mathbb{N} \times \mathfrak{M}(B(\mathbb{D}))$, dada por

$$\widetilde{\overline{f}}(n, F) = F(f(n))$$

para cada $(n, F) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{M}(B(\mathbb{D}))$. Ahora como $\mathfrak{M}(B(\mathbb{D}))$ es $\overline{\mathbb{D}}$ podemos identificar $C_b(\mathbb{N} \times \mathfrak{M}(B(\mathbb{D}))$ con $C_b(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$ y definir $^* : C_b(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}) \to C(\beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$ dada por

$$f \to f^*$$

donde f^* es la extensión a la compactación de Stone-Cech de $f \in C_b(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$. Ahora un razonamiento completamente analogo al que hicimos para $C_b(\mathbb{N}, A(\mathbb{D})$ nos dice que si denotamos por $\mathcal{B} = C_b(\mathbb{N}, B(\mathbb{D})$ entonces

$$\mathfrak{M}(\widetilde{\mathcal{B}}^*) = \beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}}).$$

Usando esto último y el hecho de que $\widetilde{}$ y $*$ son lineales, multiplictivas y biyecciones sobre su imagen se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.4.11. *Si*

$$C_b(\mathbb{N}, B(\mathbb{D})) = \{\overline{f} : \mathbb{N} \to B(\mathbb{D}) \mid \overline{f} \ \textit{es continua y acotada}\},$$

entonces $\mathfrak{M}(C_b(\mathbb{N}, B(\mathbb{D}))) = \beta(\mathbb{N} \times \overline{\mathbb{D}})$.

Bibliografía

[1] M. Abel and K. Jarosz, *Topological algebras in which all maximal two-sided ideals are closed*, Banach Centre Publ. 67 (2005), 35-43.

[2] G. R. Allan, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) 15, (1965), 399-421.

[3] J. Arhippainen, J. Kauppi, *On A-convex norms on commutative algebras.* Rocky Mountain J. Math. 40 (2010), no. 2, 367-382.

[4] H. Arizmendi, *On the spectral radius of a matrix algebra.* Funct. Approx. Comment. Math. 19 (1990) 167-176.

[5] H. Arizmendi and A. Carrillo, *On locally convex algebras with cyclic bases.* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 172. Dekker. New York. (1995) 11-17.

[6] H. Arizmendi and A. Carrillo, *On different bases in locally convex algebras with cyclic bases.* (1996).

[7] H. Arizmendi and A. Carrillo, *On the extended spectral radius in B_0-algebras.* Funct. Approx. Comment. Math. 19, (1990), 77-81.

[8] H. Arizmendi Peimbert, A. Carrillo Hoyo, *Pseudo(normed Q) algebras*, Mathematical Proceedings of the royal irish Academy, Vol. 115 A number 2, (2015) 107-119.

[9] H. Arizmendi, A. Carrillo and A. García, *On algebras of Banach algebra-valued bounded continuous functions.* To appear in Rocky Mountain J. Math.

[10] H. Arizmendi, M. Cho and A. García, *On algebras of bounded continuous functions valued in a topological algebra*, manuscript.

[11] H. Arizmendi and A. Garcia, *Some properties of families of functions in* $(C_b(X, \mathbb{C}), \beta)$. Contemporary Mathematics, volume 547 (2011), 55-60.

[12] H. Arizmendi and R. M. Pérez, *On maximal ideals of codimension one in m-convex algebras*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 60 (1), (2011), 51-57.

[13] H. Arizmendi, R. M. Pérez, J. Roa *On the spectral radii in* $(C_b(X), \beta)$ *and the* $M(\beta)$ *topology*. Proceedings of the Internetional Conference on Topological Algebras, Tartu, Estonia (2008), Pag. 29-33.

[14] H. Arizmendi and K.Jarosz, *Extended spectral radius in topological algebras*, Rocky Mount. Jour. Math. Vol. 23, No 4 (1993) 1179-1195.

[15] H. Arizmendi, V. Valov, *Some characterization of* Q*-algebras*, Annales Societatis Mathematicae Polonae, Series I: Commentationes Mathematicae XXXIX, (1999), 11-21.

[16] Arsove M. G. *Similar bases and isomorphisms in Frechet spaces*. Math. Ann. 135 1958 283-293.

[17] Arsove, M. G. *Proper bases and automorphisms in the space of entire functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 8, (1957), 264-271.

[18] Arsove, M. G. *Proper bases and linear homeomorphisms in the space of analytic functions*. Math. Ann. 135, 235-243 (1958).

[19] Arsove, M. G. *Proper Pincherle bases in the space of entire functions*. Quart. J. Math. (Oxford)(2) 9, (1958), 40-54.

[20] S. J. Bhatt, H. V. Dedania, S. R. Patel, *Fréchet algebras with a Laurent series generator and the annulus algebras*. Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 65, (2002,) 371-383.

[21] R. Choukri, *m-Convexité dans le Corps* $\mathbb{C}(X)$, Extracta Mathematicae, Vol. 14, Núm 3, (1999,) 349-354.

[22] S. Dierolf, K.H. Schroder and J. Wengenroth. *Characters on certain function algebras*. Funct. Approx. Comment. Math. 26 (1998), 53-58.

[23] W.E. Dietrich, Jr, *The maximal ideal space of the topological algebra C(X,E)*, Mat. Ann. 183 (1969), 201-212.

[24] Z. Ercan and S. Onal, *A remark on the homomorphism on C(X)*. Proc. Amer. Math. Soc., 133 (12), (2005), 3609-3611.

[25] W. Govaerts, *Homomorphisms of weighted algebras of continuous functions*, Ann. Mat. Pura Appl. 116 (4) (1978), 151-158.

[26] G. Harro Heuser, *Functional Analysis*, John Wiley and Sons, 1982.

[27] W.J. Hery, *Maximal ideal in algebras of topological algebra valued functions*, Pacific J. Math. 65 (2), (1976), 365-373.

[28] J. Horvath, *Topological vector spaces and distributions Vol I.* Dover Publications. Courier Corporation, (2012).

[29] L.A Kahn, *Linear Topological Spaces of Continuous Vector-Valued Functions*, Academic Publications, Ltd., (2013)-DOI: 10.12732/acadpubl.201301.

[30] V. Karunakaran, *Complex Analysis.* Alpha Science International Ltd. Harrow, U.K. (2005).

[31] A. E. Kinani, L. Oubbi and M. Oudadess, *Spectral and Boundedness radii in locally convex algebras.* Georgian Mathematical Journal. Vol. 5, No 3 (1998), 233-241.

[32] V. Krishnamurty, *On the continuous endomorphisms in the spaces of certain classes of entire functions.* Proc. natn. Inst. Sci. India. A 26, (1960), 642-655.

[33] Maddox, I. J. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, London, first edition, (1970).

[34] Maddox, I. J. *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, London, second edition, (1988).

[35] A. Mallios, *Topological algebras, selected topics.* Elsevier Science Publisher B. V. (1986).

[36] V. Mascioni, *Some characterizations of complex normed Q-algebras*, Elem. Math. 42(1987), 10-14.

[37] E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. 11, Providence, (1952).

[38] Morales Callejas Lorena, *Las Q-álgebras y algunas de sus generalizaciones*, UNAM, (2014).

[39] R. Mortini, *Finitely generated ideals in the disk algebra.* Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 50 (1995), 521-528.

[40] S. Ouzomgi, L. Redlin, S. Watson, *Fréchet algebras generated by certain of their elements.* Internat. J. Math. and Math. Sci. Vol. 18 No. 3 (1995), 489-496.

[41] L. Oubbi, *Weighted algebras of continuous functions*, Resources Math. 24 (1993), 298 307.

[42] L. Oubbi, *On different algebras contained in CV (X)*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 6 (1999), 111-120.

[43] L, Oubbi. *Algebres A-convexes a poids.* Rev. Real Acad. Cienc. Exact. Fs. Natur. Madrid 89, (1995), no. 1-2, 99-110.

[44] M. Oudadess, *Une norme d'algbre de Banach dans les algbres localement uniformment A-convexes compltes.* Afrika Mat. 9 (1987), 15-22.

[45] M. Oudadess, *Continuit des caractres dans les algbres uniformment A-convexes.* Ann. Sci. Math. Qubec 7 (1983), no. 2, 193-201.

[46] M. Oudadess, *Thormes de structures et proprits fondamentales des algbres localement uniformment A-convexes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 296 (1983), no. 20, 851-853.

[47] M. Oudadess, *Unit et semi-normes dans les algbres localement convexes.* Rev. Colombiana Mat. 16 (1982), no. 3-4, 141-150.

[48] H. L. Royden, *Function Algebras.* Bull. Amer. Math. Soc. Volume 69, Number 3 (1963), 281-298.

[49] Rudin, W.*Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, (1991).

[50] S. Watson, *F-algebras with cyclic bases.* Comm. Math. 23 (1982), 141-146.

[51] J. Williamson, *On topologising the field* $C(t)$, Proceedings of the American Mathematical Society 5 (1954), 729-34.

[52] W. Zelazko, *Banach Algebras*, Elsevier Science Publisher Co. 1973.

[53] W. Zelazko, *Selected topics in topological algebras*, Aarhus University Lecture Notes Series 31, (1971).