Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

CUBRIENTES RAMIFICADOS DE SUPERFICIES DE RIEMANN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

DALID RITO RODRIGUEZ

TUTOR

M. en C. JOSÉ JUAN ZACARÍAS

CDMX, OCTUBRE 2017

Índice general

Agradecimientos 1

Introducción 7

Capítulo 1. Superficies de Riemann 11
§1. La definición de una superficie de Riemann 11
§2. Ejemplos básicos 12
§3. Aplicaciones holomorfas 15

Capítulo 2. El grupo fundamental 21
§1. Homotopía de curvas 21
§2. Clases de homotopía de lazos 27
§3. Homotopía libre de curvas 31

Capítulo 3. Cubrientes de Superficies de Riemann 35
§1. Homeomorfismos locales 35
§2. La propiedad de levantamiento de curvas 37
§3. Propiedades de mapeos cubrientes 41
§4. Cubrientes ramificados 45

Capítulo 4. El cubriente universal y transformaciones de cubierta 49
§1. Existencia del cubriente universal 49
§2. La correspondencia de Galois 52
§3. Transformaciones de cubierta 55
§4. Completación de cubrientes 58

Bibliografía 61

Agradecimientos

Gracias a mi papá Faustino Rito, a mi tío Froylan Romero, a mis abuelitos que siempre me han acompañado en espíritu, y sé que confiaron y confían en mi, donde quiera que estén todos ustedes, muchas gracias por darme la oportunidad de haberlos tenido como padre, tío y abuelos. Gracias a mi mamá Antonia Rodríguez, la mejor mamá del mundo que me pudo haber tocado, gracias pues por tus desvelos, por tu trabajo, por hacer tantos totopos, nos sacaste adelante, nos enseñaste el arte de vender naranjas, mandarinas, totopos, gardenias, tamales, flores de muerto, porque con ello aprendimos a valorar la vida. Gracias por existir má.

Gracias a mis hermanos: A Miguel que por ser el hermano mayor fuiste el más sacrificado, ya que no lograste estudiar la universidad, te fuiste a trabajar, pero has tenido una buena vida, y has sido un gran ejemplo para todos, sabes muchas cosas que nosotros no. Gracias por esas lecciones de historia universal cuando hablamos por teléfono, gracias por ayudarnos en muchas muchas ocasiones, gracias por contarnos tus aventuras del otro lado. A Olegario muchas gracias por esas risas, por esos ánimos, por esas carcajadas cuando hablamos por teléfono, gracias por tenerme al tanto de lo que ocurre en donde quiera que tú estás, que tú vas. Gracias por tus regalos, gracias por ese niño tan bonito que tienes, el pequeño Brandon. Gracias por reunirnos a los 7 hermanos el día de tu boda. Alberto, siempre te he admirado, por cómo has logrado con tu ejemplo que nosotros los menores podamos estudiar, gracias por animarnos a estudiar en la UNAM. Te has sacrificado mucho por nosotros, nos has apoyado mientras estudiamos, eres en verdad admirable. gracias por estar ahí siempre para mí, gracias por darme un bonito sobrino Toñito. Gracias por esos buenos tacos que luego nos vamos a comer. A Erika (Salomé) gracias, porque eres como una madre

para nosotros los menores cuando no está mamá, gracias por tus consejos, gracias por cuidar de mí cuando me he enfermado y cuando no también, gracias porque siempre estás al pendiente de todos, gracias Marcela. Gracias por dejarnos hacer lo que se nos pegaba la gana. Gracias. Eres la primera mujer de la familia que estudia, que se prepara, que sale adelante, eres realmente increíble Erika. A Jesús gracias por tus largas pláticas de tres horas al teléfono, gracias por los consejos, gracias por cuidar de mamá y de papá, gracias por todas tus alegrías. Gracias porque que te sacrificaste por mi, y decidiste ir tu a cuidar de papá para que yo siguiera estudiando. A Leonel, eres mi hermano menor, pero quien más cercano a mí ha estado, gracias por ayudarme con esta tesis, gracias por apoyarme en seguir adelante, gracias por animarme a realizar nuevas aventuras, por apoyarme al estar en Cuernavaca, por llevarme a vivir con Sergio Gante y familia, gracias por todo ese conocimiento que tienes, por toda esa sabiduría, gracias por acercarme al mundo de la meditación, ha sido unos de los caminos que más he disfrutado y el que más ha sido fructífero en mi vida espiritual. Gracias porque de ti he aprendido muchas cosas. Gracias a todos y cada uno de mis hermanos y mi hermana, porque por ellos estoy viva, porque por ellos aún puedo ver, porque gracias a ellos sigo aquí. Gracias a mis cuñadas Ana, Rosa y Susana, por formar parte mi familia y por dejarme querer a mis sobrinos y sobrinas. A Yair, Miguel Ángel, Sharon, Ariadna, Brandon, Antonio, Jatzibe mis sobrinos y sobrinas hasta el momento, gracias por demostrarme tanto amor.

Gracias a la tía Elisa, quien no has cuidado como una madre, nos ha enseñado desde cómo estar a la moda, hasta como comer en restaurants, gracias por todo eso. Gracias por dejarnos entrar a tu casa, gracias por ser esa tía que equivale a mil tías juntas, muchas gracias. Gracias por formar parte de mi familia. Gracias por querernos a todos por igual, gracias por querer a mi mamá. Gracias por adoptarnos. Gracias a mis tíos Tomas y Candido Rito porque ustedes me recuerdan a mi padre, gracias a mis tías Esperanza, Francisca, Lilia y Lucila Rito, gracias. A mi tía Oralia, gracias por contarme tus historias, gracias por tu cariño a nosotros.

Gracias a Sergio Gante Cabrera pues me has abierto las puertas de tu casa sin conocerme, gracias por esas largas charlas sobre disfrutar la vida, sobre lo próspero, sobre lo que está bien y lo que no, sobre qué podemos hacer para que las nuevas generaciones sean mejores que nosotros, gracias por ser tan bueno conmigo y con Leo. Gracias por ayudarme con ciertas enfermedades que alguna vez tuve y por ayudarme a cambiar mi forma de pensar, mi manera ser, gracias por ayudarme a ser más tolerante en todos los sentidos. Gracias por esos debates sobre filosofía o sobre sexualidad, o cualquier otro tema, me ha sido de mucha ayuda. Gracias por contarme tu día a día, por compartir tu techo conmigo, por leerme algunos párrafos de

tus tantos libros, gracias por soportarme. Y entonces que agarro y que le digo a Checos: ¡Gracias Checos, eres el mejor!

Gracias a la familia Gante Cabrera, por abrirme las puertas de su casa y también las puertas de su corazón. Gracias a Doña Melania por todas esas ricas comidas que siempre me ha invitado, gracias por contarme sus historias; gracias a Doña Verito por ser tan buena, por dejarme entrar a su casa, por tanta hospitalidad; gracias Erendira y Marisol las mejores personas del mundo, siempre ofreciéndome una copita, ambas son mujeres admirables, de gran temperamento y cuyo corazón es más enorme de lo que uno se podría imaginar. Gracias a Uriel, por ser mi hermano mayor a veces, por ser un niño con mucho cariño que dar, gracias por ser tan generoso con nosotros, gracias por hacer esas caras y esos bailes. Gracias a Samantha, tan dulce, tan inteligente, con muchas ganas de aprender, gracias por invitarme a six flags, debo decir que ha sido la primera vez que fui y me divertí mucho, gracias Sam, gracias por ser mi amiguita. Gracias Fabian por toda tu nobleza, porque nunca has creído cuántos años tengo, gracias por ser siempre tan considerado, tan acomedido. Gracias a Don Franuel, porque siempre trae el pan, y entonces me invitan a comer pan, gracias por llevarme a curar tan de madrugada. Gracias a Doña Ale, a Don May, a Lázaro, gracias por aquella posada muy buena del 2016 y también por los elotes, gracias por ser tan lindos todos ustedes.

A Carlos López Roa, gracias por dejarme entrar en tu vida, gracias por todas las experiencias que viví contigo, gracias por mostrarme una realidad diferente a la mía, gracias muchas gracias por ese gran viaje a Europa, y por los demás viajes gracias; gracias por mostrarme tu verdadero ser. Gracias porque sé que más allá de esta vida seguiremos siendo amigos. Pero sobre todo, gracias por presentarme Falun Dafa, ha sido lo más acertado en mi vida espiritual, gracias. Gracias por ese primer baile, por esas salidas tan divertidas, por dejarme ser yo, por dejarme mostrarte mis carcajadas y así poderte contagiar un poco de ella y que la pudieras guardar en tu corazón. Muchas gracias por todos los detalles que has tenido conmigo.

Gracias a mis amigas de Falun Dafa: Lupita Vigil, mi querida Lupita, gracias por dejarme conocerte, gracias por esas palabras tan acertadas en mis malos y buenos momentos, gracias por mirarme con esos ojos de madre, de amiga, gracias Lupita. Gracias Tere Hernández, gracias por tus risas, porque cuando te veo, sé que no sólo los niños juegan, que no sólo los niños ríen, gracias. A Casandra gracias por tu paciencia, gracias por recibirme en Cuernavaca, para que pudiéramos hacer la práctica. Gracias Gaby Romo, eres una persona muy especial, gracias por considerarme siempre, porque hay algo que va más allá de un saludo que nos une, gracias por tus palabras. Gracias a Malena, Marcela, Gracias chicas. Gracias a los y las dafa dizi de todos lado que he conocido y que me han brindado su gran amistad, gracias Rous (Rosaura Solíz) por abrirme tu corazón, me has dicho que mi cáracter te recuerda a tu esposo, eso es tan bello, pues a él lo recuerdas con mucho cariño, gracias a las chicas del sitio de practica Tlatelolco: Guille, Nora; gracias a todos los dafa dizi del país que conozco y que no, gracias por todas esas hermosas aportaciones en el chat que hacen que pueda reflexionar y aprender cada día.

Gracias a mi otra familia, nuestra familia de Puerto Real Cádiz, a las guapas de Paqui, Toñi, Luisita, Angelita, y al guapo de Miguel, los vi, los conocí y de inmediato supe que los quería a todos ustedes. Espero verlos pronto, son las personas más hermosas del mundo, las personas más acogedoras, nos recibieron con los brazos abiertos aún sin conocernos.

Gracias a todo el personal de UCIM Cuernavaca, que ha sido como mi otra casa, mi otro hogar, donde todos me han acogido. Gracias a quienes laboran ahí, como son: Ere, Germán, Rica, Doña Claus, Alicia, Elvira, Don Jimy, gracias a Oscarito por animarse a correr conmigo, muchas gracias a Angeles a quien conocí en la biblioteca y a Pilar, gracias a Liz por ayudarme a conseguir becas; gracias a Carmelita por esas pláticas. Gracias a las investigadoras de UCIM: Fabiola siempre con una hermosa sonrisa, Lucia quien me dio la oportunidad de adentrarme al mundo la didáctica de las matemáticas a través de ARTEMAT, gracias a Fuensanta por ser una gran impulsora y defensora de las mujeres y sus derechos. Gracias a los investigadores que ahí he conocido, gracias a Carlos Cabrera, Peter Makienko, José Luis, Gregor Weingart, Igor Barahona gracias por tus consejos, por animarnos a correr, Gilberto, Luis Javier, Octavio, a Fernando el de sistemas, gracias por sacarme de muchos apuros con mi compu, gracias a todos y a todas. Gracias Adriana por ser tan amable y buena con nosotros; gracias a Anayeli por ser tan tú, por llevarnos a bailar, gracias por tus historias. Gracias a Antonia Sánchez por su paciencia, por invitarnos a comer muchas veces, por dejarnos jugar con Jocesito; gracias al pequeño Jocesito con quien he jugado muchas veces y quien se sabe mejor mi nombre.

Muchas gracias a mis sinodales la Dra. Fabiola Manjarrez, el M. en C. Otto Héctor, el Dr. Petter Makienko, el Dr. Carlos Cabrera.

Gracias al Dr. Carlos Cabrera por ser tan bueno con nosotros, por tu tiempo, por escucharme, gracias por ayudarnos cuando llegamos a la UCIM. Gracias Al Dr. Alberto Verjovsky quien me ha becado, gracias por compartirme de sus entrañables e inigualables experiencias en su vida matemática.

Quiero agradecer de todo corazón a mi asesor José Juan Zacarías, sin él esta tesis no hubiese podido realizarse, gracias por toda tu ayuda, por toda tu comprensión, por haberme tolerado todo este tiempo, gracias por mostrarme todo un nuevo mundo, un nuevo lenguaje a través de lo que a ti te gusta. Gracias también por tu amistad, por ser parte de nuestra familia, gracias por todo José. Eres admirado por muchos, por mí, eres un ejemplo de perseverancia e inteligencia que sobre pasa los límites de muchos. Gracias a todos mis profesores de la facultad de quienes aprendí mucho, y a quienes admiro profundamente, gracias a Alejandro Illanes, Edith Corina, Javier Fernández, María del Carmen Gómez Laveaga, Nieves, Ángel(Pikos), Mauricio, César Cedillo, César, Luz Arely, Daniela Mariyet gracias Héctor Méndez por dejarme contarte historias de mi pueblo.

Gracias a mis amigas entrañables mis queridas Yazmín Pacheco Leyva, y Prisma Y. Huerta, mis actuarias preferidas, gracias por quererme mucho. Gracias a mis queridas y muy grandes matemáticas Myndi Yanely, Karina Islas, gracias por todo su amor, por ser las personas más inteligentes e increíbles que hubiese conocido. Gracias a mi querida y linda Viridiana, quien sé que lograrás tu próximo sueño y entonces me contarás. Gracias a mi muy querida Itzel (Chelsee) la más querida en casa por mi familia, gracias por todas tus recomendaciones, gracias por acompañarme a casa de mi mamá y conocer otro forma de vida, también gracias a tu mamá Rocío, y a tus hermanos, siempre muy lindos todos conmigo. Gracias a mis amigos, Paco, Julio, Carlos, Carlos Chiapas, Esteban, Inti, Fernando Santana; gracias a Lorena Morales Calleja, matemática ejemplar, gracias por ser tan buena conmigo, gracias a tu mamá, gracias Lore. Daniel la primera persona que conocí y admiré en la facultad de ciencias, gracias por las recomendaciones de lectura. Gracias a mi queridísimo amigo Bruno, quien me enseñó a mucho sobre vino y café y música. Gracias mejor amigo.

Por supuesto muchas gracias a la máxima casa de estudios, gracias UNAM, porque nunca imaginé que estaría en ella, que la conocería, y gracias a ella, mi vida ha cambiado, he conocido a muchas personas, he hecho muchas cosas, he disfrutado de la alberca olímpica, de las clases de baile, de la biblioteca Central la cual me gusta mucho, del CELE, de los Institutos, gracias porque en verdad para mi eres como mi casa. Gracias al Sistema de Becas para Estudiantes Indígenas SBEI, quien me abrió sus puertas y me brindó todo el apoyo durante la licenciatura, gracias porque gracias a este programa muchos de nosotros que somos indígenas podemos estudiar una licenciatura en la UNAM. Agradezco al Programa de ayudantes de Investigador nivel III del SNI del Dr. Santiago Alberto Verjovsky Solá por su apoyo. Gracias al apoyo económico del Proyecto CONACyT número 164447 del Dr. José Antonio Seade Kuri.

Gracias Shifu. Gracias Falun Dafa.

Introducción

La Teoría de las superficies de Riemann ocupa un lugar muy especial en las matemáticas, ya que se encuentra en la intersección de varias áreas, tales como el análisis, la topológía algebraica, la geometría Riemanianna, entre otros. Estos objetos son una herramienta muy útil en la teoría de funciones holomorfas y a su vez pueden servir como un modelo donde se puede obtener intuición para el estudio de objetos más generales.

Las superficies de Riemann fueron introducidas por Bernhard Riemann en su célebre artículo *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* en 1851 con el fin de extender el dominio de una función multivaluada de tal manera que en este espacio dicha función sea bien definida.

Posteriormente la teoría fue desarrollada por otros grandes matemáticos tales como: A. Hurwitz, H. Poincaré, P. Köbe, entre otros, y actualmente es una rama cuya investigación sigue siendo muy activa. Por ejemplo las Teorías de los grupos klenianos, de las curvas algebraicas, de los espacios de Teichmüller, son algunas áreas que se estudian por medio de superficies de Riemann.

Uno de los problemas abiertos más importantes en esta área que no ha sido resuelto satisfactoriamente en su totalidad es *el problema de Hurwitz*. A grandes rasgos este problema trata sobre la relación entre la combinatoria y cubrientes ramificados de la esfera de Riemann. Otro tema que ha cobrado mucha importancia últimamente en esta teoría son los cubrientes ramificados de la esfera de Riemann con tres valores críticos llamados *funciones de Belyi*. Esto gracias a que A. Grothendieck descubrió una correspondencia entre ciertas gráficas encajadas en superficies con datos combinatorios llamados *desins d'enfants* y *superficies de Riemann aritméticas.* Estas últimas son aquellas que pueden representarse como curvas algebraicas con coeficientes en un campo númerico. La correspondencia fue obtenida gracias al *teorema de Belyi* que caracteriza a las superficies aritméticas precisamente como aquellas que admiten una función meromorfa con tres valores críticos.

Los temas anteriores nos sirvieron de inspiración para este trabajo, cuyo objetivo es entender la teoría básica de cubrientes ramificados de superficies de Riemann. Nos basamos principalmente en el libro de O. Forster, *Compact Riemann surfaces.* En esta tesis desarrollamos a detalle los teoremas y ejemplos, reescribimos algunas desmostraciones he incluso hemos apegado lemas para hacer las demostraciones más claras. Se entendió y escribió con más detalle los teoremas y ejemplos, en algunos casos se reescribió la prueba, o se agregaron unos lemas donde lo consideramos necesario para tratar de hacer más clara la prueba. A continuación describiremos brevemente el contenido de este trabajo.

En el primer capítulo daremos la definición de superficie de Riemann, y algunos ejemplos tales como la esfera de Riemann y el toro complejo. Después mencionaremos algunas propiedades sobre aplicaciones holomorfas como el *Teorema de identidad* y el *Teorema de mapeo abierto.* Terminaremos este capítulo con el *Teorema del comportamiento local* de mapeos holomorfos, el cual nos dice que todo mapeo holomorfo entre dos superficies de Riemann se comporta localmente como una función de la forma z^k.

En el segundo capítulo daremos algunas propiedades de homotopías entre curvas, hablaremos sobre el grupo fundamental de un espacio topológico con respecto a un punto. Para finalizar estudiaremos algunas propiedades de la aplicación inducida en los grupos fundamentales por una función continua entre dos espacios topológicos.

En el tercer capítulo, con ayuda del teorema de comportamiento local, introduciremos la noción de punto y valor crítico de un mapeo holomorfo. Después daremos un ejemplo de un mapeo holomorfo no ramificado. Posteriormente estudiaremos propiedades de levantamientos de mapeos como el Teorema de *unicidad de levantamientos* y el Teorema de *levantamiento de curvas homotópicas.* Introduciremos la definición de mapeo cubriente y demostraremos que todo mapeo cubriente tiene la propiedad de levantamiento de curvas; además daremos algunas condiciones para que un mapeo sea cubriente. Definiremos a un *cubriente ramificado* como un mapeo holomorfo propio no constante entre dos superficies de Riemann. Probaremos que la noción del grado está bien definido para tales mapeos, es decir, el número de preimágenes contadas con multiplicidad es constante. Como una pequeña aplicación probaremos el *Teorema fundamental del álgebra.*

En el capítulo cuatro construiremos el cubriente universal de cualquier variedad conexa. En particular una superficie de Riemann tendrá un cubriente universal que admite una estructura compleja que hace al mapeo cubriente un mapeo holomorfo. Uno de los principales teoremas de este capítulo es el *Teorema de correspondencia de Galois*, el cual nos da una correspondencia uno a uno entre clases de isomorfismos de cubrientes conexos y clases de conjugación de subgrupos del grupo fundamental de una variedad conexa.

Estudiaremos algunas propiedades del grupo de transformaciones de cubierta de un mapeo cubriente, y determinaremos los espacios cubrientes del disco perforado. Con esto probaremos que todo mapeo holomorfo propio de una superficie de Riemann al disco con un sólo valor crítico es isomorfo como cubriente ramificado a una aplicación de la forma z^k. Para finalizar estudiaremos algunas propiedades de completación de cubrientes ramificados.

Capítulo 1

Superficies de Riemann

1. La definición de una superficie de Riemann

En esta sección introduciremos el concepto de *superficie de Riemann* y explicaremos detalladamente la construcción de la esfera de Riemann y el toro complejo, como ejemplos de superficies de Riemann.

Sea X un espacio topológico, un *atlas holomorfo* A de X es un conjunto de homeomorfismos, llamados *cartas*, $\varphi\colon U \to U'$ de un abierto U de X a un abierto U' del plano complejo, tal que sus dominios forman una cubierta abierta de X y que además satisfacen la siguiente condición de compatibilidad: dadas dos cartas $\varphi\colon U \to U'$ y $\psi\colon V \to V'$, con $U \cap V \neq \emptyset$, la función

$$\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \tag{1}$$

es holomorfa (ver Figura 1). Estas funciones son conocidas como *cambios de coordenada* del atlas. Usualmente, las cartas se denotarán simplemente por (U, φ) sin escribir explícitamente su codominio. Una *estructura compleja* $\mathcal{A}$ de X es un atlas holomorfo de X que es *maximal*, esto significa que si una carta es compatible con cada una de sus cartas entonces dicha carta ya estaba en el atlas. Con lo anterior ya podemos definir el concepto de superficie de Riemann.

Definición 1.1. Una *superficie de Riemann* es una pareja $(X, \mathcal{A})$ que consiste de un espacio topológico X Hausdorff, conexo y $\mathcal{A}$ una estructura compleja sobre X.

Si A es un atlas holomorfo de X, considere el conjunto $\mathcal{A}$ formado por todas las cartas que son compatibles con cada carta de A, veamos que $\mathcal{A}$

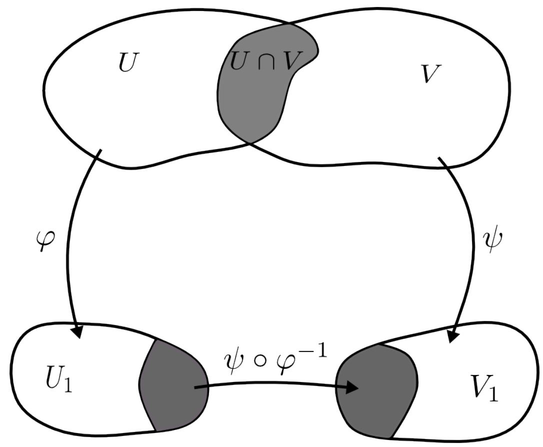

Figura 1. Un cambio de coordenada.

también es un atlas de A: sean $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, tenemos que verificar que la función definida en la ecuación (1) es una función holomorfa. Sea $p \in U \cap V$, como A es un atlas, existe una carta compleja $(W, \varphi') \in A$ tal que $p \in W$, (W, φ') es compatible con las cartas anteriores por la definición de $\mathcal{A}$, entonces $\psi \circ \varphi'^{-1}$ es holomorfa en $\varphi'(p)$ y $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(p)$, por lo tanto la composición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(p)$. Esto concluye la prueba.

Por otra parte, supongamos que $\mathcal{A}'$ es una estructura compleja de X que contiene a A, entonces cada carta de $\mathcal{A}'$ es compatible con cada carta de A, luego por definición de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Por un argumento similar usado en el párrafo anterior podemos notar que las cartas de $\mathcal{A}$ son compatibles con las cartas de $\mathcal{A}'$, de la maximalidad de $\mathcal{A}'$ se sigue que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, por lo tanto $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Resumimos todo lo anterior en la siguiente proposición:

Proposición 1.2. *Cualquier atlas holomorfo de X está contenido en una única estructura compleja de X.*

2. Ejemplos básicos

Por lo anterior, para definir una superficie de Riemann basta dar un atlas holomorfo, sobreentendiéndose que la superficie de Riemann es la que se obtiene al completar el atlas dado. A continuación daremos unos ejemplos básicos:

Ejemplo 1.3. El plano complejo $\mathbb{C}$ es de forma natural una superficie de Riemann, cuyo atlas está formado por la única carta $(\mathbb{C}, \mathrm{Id})$. Si $\varphi \colon U \to V$ es un biholomorfismo entre dos abiertos de $\mathbb{C}$, la composición $\varphi = \mathrm{Id} \circ \varphi$ es holomorfa, por lo tanto la estructura compleja de $\mathbb{C}$ consiste de todos los biholomorfismos entre sus abiertos.

Ejemplo 1.4. Dado S una superficie de Riemann y U es una *región* de S, es decir, un abierto y conexo, entonces U es naturalmente una superficie de Riemann cuyas cartas son las restricciones de las cartas de S.

Ejemplo 1.5 (La esfera de Riemann)**.** Sea ∞ un punto que no está en el plano complejo $\mathbb{C}$, consideremos el conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la siguiente topología: U será un subconjunto abierto si es un abierto usual de $\mathbb{C}$ o es de la forma $(\mathbb{C} - K) \cup \{\infty\}$ para algún subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$. Este espacio topológico es llamado la *esfera de Riemann* y será denotado por $\hat{\mathbb{C}}$. Por definición, este espacio es compacto, además los siguientes conjuntos abiertos $U_0 \coloneqq \mathbb{C}$ y $U_1 \coloneqq \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ cubren a $\hat{\mathbb{C}}$, donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, por lo tanto también resulta conexo. También puede verificarse fácilmente que este espacio es Hausdorff.

Por otra parte, defina el mapeo $\varphi_0 \colon U_0 \to U_0$ como la función identidad y el mapeo $\varphi_1 \colon U_1 \to U_0$ como

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} 1/z & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Afirmamos que φ_1 es un homeomorfismo. Observe que $\varphi_1 \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es biholomorfismo en $U_1 - \{\infty\}$, por lo tanto basta ver que es continua en ∞ y que su inversa es continua en cero: tomemos una vecindad V alrededor del cero contenida en U_0, entonces existe $n > 0$ tal que $D(0, 1/n) \subseteq V$, por lo tanto $\varphi_1^{-1}(D(0, 1/n)) \subseteq \varphi_1^{-1}(V)$ pero $\varphi_1^{-1}(D(0, 1/n)) = (\mathbb{C} - \overline{D(0, n)}) \cup \{\infty\}$, por lo tanto φ_1 es continua en infinito. Por otro lado, si V es una vecindad abierta de infinito contenida en U_1 entonces $V = (\mathbb{C} - K) \cup \{\infty\}$, para algún subconjunto compacto K del plano, entonces existe $n > 0$ tal que $K \subseteq \overline{D(0, n)}$, entonces la preimagen de V bajo φ_1^{-1} contiene a $D(0, 1/n)$, por lo tanto φ_1^{-1} es continua en cero. Esto concluye la prueba.

Note que las cartas φ_0 y φ_1 son compatibles ya que la aplicación $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = 1/z$ es holomorfa en $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = U_0 \cap U_1$. Por lo tanto estas inducen una estructura compleja para la esfera de Riemann y nos proporcionan el primer ejemplo de superficie de Riemann compacta.

Ejemplo 1.6 (El toro complejo)**.** Fijemos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, la retícula Γ generada por w_1 y w_2 se define como:

$$\Gamma \coloneqq \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 \colon n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Diremos que dos números complejos $z, z' \in \mathbb{C}$ son equivalentes módulo Γ, si $z - z' \in \Gamma$. Sea $\mathbb{C}/\Gamma$ el conjunto de todas las clases de equivalencia y $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ la proyección canónica, es decir, el mapeo que asocia a cada punto

$z \in \mathbb{C}$ su clase de equivalencia modulo Γ. Mediante $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ podemos dotar a $\mathbb{C}/\Gamma$ con la topología cociente, por definición en esta topología un subconjunto $U \subseteq \mathbb{C}/\Gamma$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}$ es abierto.

De la definición podemos observar que π es suprayectiva y continua, además es una aplicación abierta, ya que si $V \subseteq \mathbb{C}$ es abierto,

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w\in\Gamma} (w + V).$$

Note también que cada punto $z \in \mathbb{C}$ donde π es inyectiva, por ejemplo, el disco $D(z, \epsilon/2)$ donde $\epsilon > 0$ satisface que $\Gamma \cap D(0, \epsilon) = \{0\}$ por lo tanto π es un homeomorfismo local.

Claramente $\mathbb{C}/\Gamma$ es conexo, veamos que también es compacto. Consideremos el paralelogramo

$$P \coloneqq \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2\colon \lambda, \mu \in [0, 1]\},$$

éste es compacto ya que es un subconjunto cerrado y acotado del plano. Por lo tanto para verificar que $\mathbb{C}/\Gamma$ es compacto basta probar que $\pi(P) = \mathbb{C}/\Gamma$. Sea $[z] \in \mathbb{C}/\Gamma$, como w_1 y w_2 generan a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, existen a y $b \in \mathbb{R}$ tal que $z = a\omega_1 + b\omega_2$; notemos que cualquier número real x se expresa de forma única como suma de un número entero con un número en $[0, 1)$, éste último se conoce como la parte fraccionaria de x y se denota por $\{x\}$. Entonces podemos concluir que

$$[z] = [\{a\}\omega_1 + \{b\}\omega_2] \tag{3}$$

el cual está en la imagen del paralelogramo.

Ahora veremos que $\mathbb{C}/\Gamma$ es Hausdorff. Sean $[z_1]$, $[z_2] \in \mathbb{C}/\Gamma$ tal que $[z_1] \neq [z_2]$, por (3) podemos suponer que z_1 y z_2 están en el paralelogramo semicerrado, existe una traslación $T(z) = z + a$, con $a \in \mathbb{C}$ suficientemente pequeña que lleva a estos dos puntos en el interior del paralelogramo (ver Figura 2), esta traslación induce un mapeo $\overline{T}\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma$ en el cociente dado por $\overline{T}([z]) = [z + a]$, es decir, $\overline{T}$ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C}/\Gamma \arrow[r, "\overline{T}"] & \mathbb{C}/\Gamma \end{tikzcd} \tag{4}$$

Como π es un homeomorfismo local $\overline{T}$ también lo es y claramente es biyectiva, por lo tanto es un homeomorfismo. Como π es un homeomorfismo restringido al interior del paralelogramo existen dos vecindades ajenas V_1 y V_2 de $\overline{T}([z_1])$ y $\overline{T}([z_2])$, respectivamente, luego $\overline{T}^{-1}(V_1)$ y $\overline{T}^{-1}(V_2)$ son vecindades ajenas que separan a $[z_1]$ y $[z_2]$ ya que $\overline{T}$ es un homeomorfismo.

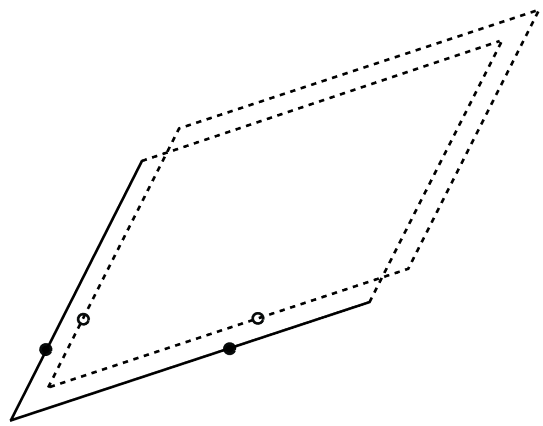

Figura 2. Una traslación de dos puntos en las aristas.

Por último daremos una estructura compleja a $\mathbb{C}/\Gamma$. Suponga que V es un abierto donde π es inyectiva, entonces $\varphi := \pi^{-1}\colon \pi(V) \to V$ es una carta compleja. Considere el conjunto A formado por todas las cartas complejas obtenidas de esta manera, veamos que cualesquiera dos cartas $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in A$ son compatibles. Si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ quisiéramos ver que el siguiente mapeo es holomorfo

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Sea $z_0 \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ se tiene que $\pi(\psi(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, por lo tanto $\psi(z) - z \in \Gamma$, como Γ es discreto y ψ es continua, $\psi(z) - z\colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \Gamma$ es constante en la componente conexa de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ que contiene a z_0, entonces existe $w \in \Gamma$ tal que $\psi(z) - z = w$ en dicha componente, luego $\psi(z)$ es holomorfa en una vecindad de z_0.

En conclusión, el toro complejo nos da otro ejemplo de superficie de Riemann compacta, de hecho, tenemos una familia ya que tenemos un toro por cada retícula del plano.

3. Aplicaciones holomorfas

En esta sección vamos a introducir la definición de mapeo holomorfo entre superficies de Riemann, y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.7. Sean S y R dos superficies de Riemann, una aplicación continua $f\colon S \to R$ es un mapeo *holomorfo* si para cada punto $p \in S$ existen cartas (U, φ) y (V, ψ) alrededor de p y $f(p)$, respectivamente, tales que la siguiente composición es holomorfa

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V). \tag{5}$$

Una aplicación $f\colon R \to S$ es llamado *biholomorfismo* si esta es biyectivo y holomorfo. Dos superficies de Riemann R y S son *isomorfas o conformemente equivalentes* si existe un biholomorfismo $f\colon R \to S$ entre ellas.

De la definición podemos verificar que si $f: S \to R$ es holomorfa entonces para cualesquiera cartas (U, φ) y (V, ψ) en S y R tales que $U \cap f^{-1}(V)$ es no vacío, la composición

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V) \tag{6}$$

es holomorfa.

Definición 1.8. Los mapeos holomorfos de una superficie de Riemann S al plano complejo. Son llamadas *funciones holomorfas* sobre S. Al conjunto de ellas se le denota como $\mathcal{O}(S)$. Los mapeos holomorfos a $\hat{\mathbb{C}}$ son llamados *funciones meromorfas* sobre S. El conjunto de funciones meromorfas es denotado por $\mathcal{M}(S)$.

Si R y S son dos conjuntos, el *igualador* de dos aplicaciones $f, g\colon S \to R$, se define como

$$\operatorname{eq}(f, g) \coloneqq \{p \in S | f(p) = g(p)\}. \tag{7}$$

Si A es un subconjunto de un espacio topológico S, denotaremos por $\operatorname{der}(A)$ al conjunto de puntos de acumulación de A. Observe que si X es un espacio topológico cuyos puntos son cerrados entonces $\operatorname{der}(A)$ siempre es cerrado.

Proposición 1.9. *Sean R y S espacios topológicos, con R Hausdorff. Si f y g son funciones continuas de S a R, entonces* $\operatorname{eq}(f, g)$ *es cerrado. Por lo tanto f y g son iguales si coinciden en un conjunto denso de S.*

Demostración. Para ver que $\operatorname{eq}(f, g)$ es cerrado, necesitamos ver que contiene a sus puntos de acumulación. La demostración procede por contradicción. Sea x un punto de acumulación de $\operatorname{eq}(f, g)$, supongamos que $f(x) \neq g(x)$, entonces como R es Hausdorff, existen dos abiertos ajenos U y V de R tales que $f(x) \in U$ y $g(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(U)$ y $x \in g^{-1}(V)$ así $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) = W$ por lo que W es un abierto que contiene a x y está contenido en el complemento de $\operatorname{eq}(f, g)$, entonces x no es un punto de acumulación de $\operatorname{eq}(f, g)$. Por tanto $f(x) = g(x)$, por tanto $\operatorname{der}(\operatorname{eq}(f, g)) \subseteq \operatorname{eq}(f, g)$. $\square$

Proposición 1.10 (Teorema de Identidad)**.** *Sean f y g dos* mapeos holomorfos *de $(S, \mathcal{A})$ a $(R, \mathcal{B})$ superficies de Riemann. Si* $\operatorname{der}(\operatorname{eq}(f, g)) \neq \emptyset$*, entonces* $\operatorname{eq}(f, g) = S$*.*

Demostración. Sea p un punto de acumulación de $\operatorname{eq}(f, g)$, por la Proposición 1.9, $f(p) = g(p)$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ estructuras complejas de S y R respectivamente. Existe una carta $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ tal que $g(p) = f(p)$ y $f(p) \in V$, dado que $\mathcal{A}$ es maximal podemos elegir una carta (φ, U) tal que $p \in U$ y $U \subseteq f^{-1}(V)$, entonces $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \psi(V)$ y $\psi \circ g \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \psi(V)$ son funciones holomorfas y coinciden en el conjunto $\varphi(\mathrm{eq}(f, g) \cap U)$, el cual tiene un punto de acumulación en $\varphi(p)$. Usando el Teorema de Identidad para funciones holomorfas con dominio un subconjunto de $\mathbb{C}$ (ver [**Ah66**] §4.3.2), concluimos que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(U)$, por lo tanto $f = g$ en U. Por lo tanto $\mathrm{der}(\mathrm{eq}(f, g))$ es abierto. Pero sabemos que también es cerrado, y como S es conexo se sigue que $\mathrm{der}(\mathrm{eq}(f, g)) = S$, por consiguiente $f = g$. □

Proposición 1.11 (Teorema de mapeo abierto)**.** *Si $f \colon S \to R$ un mapeo holomorfo no constante entre superficies de Riemann, entonces f es un* mapeo *abierto, es decir, manda abiertos en abiertos.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ estructuras complejas de S y R respectivamente. Sea W abierto de S, sea $p \in W$ tal que $f(p) \in f(W)$, entonces hay una carta $(\psi, V) \in \mathcal{B}$ tal que $f(p) \in V$. Como $\mathcal{A}$ es maximal, podemos tomar una carta $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$ y $U \subseteq W \cap f^{-1}(V)$, de esta manera, la función

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \psi(V)$$

es holomorfa. Por el Teorema de la identidad como f no es constante, esta composición no puede ser constante. Así por el Teorema del mapeo abierto para funciones holomorfas con dominio un subconjunto de $\mathbb{C}$(ver [**Ah66**] §4.3.3), la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es abierta.

$f(U) = \psi^{-1}((\psi \circ f\varphi^{-1}) \circ (\varphi(U)))$ es abierto y $f(p) \in f(U) \subseteq f(W)$, pues $U \subseteq W$; por lo tanto f es un mapeo abierto. □

Teorema 1.12. *3 Sea $f \colon S \to R$ un mapeo holomorfo no constante entre dos superficies de Riemann. Entonces tenemos las siguientes propiedades:*

i) *Suprayectividad. El mapeo f es suprayectivo. Por lo tanto si S es compacta R también.*

ii) *Preimágenes discretas. Para cualquier $y \in R$ la preimagen $f^{-1}(y)$ es un subconjunto discreto de S. Por lo tanto si S es compacta $f^{-1}(y)$ es finito.*

iii) *Principio del máximo. Si $f \colon S \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces el valor absoluto de f no alcanza su máximo.*

Demostración. (i) Como $f(S)$ es compacto y R es Hausdorff, $f(S)$ es cerrado. Y por el teorema del mapeo abierto $f(S)$ es abierto. Como R es conexo, entonces $f(S) = R$.

(ii) Es suficiente verificar el caso para cuando $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Si $f^{-1}(y)$ tuviera un punto de acumulación, el Teorema de identidad nos diría que f

es la función constante y. Por último, todo conjunto infinito en un compacto tiene un punto de acumulación, por lo tanto $f^{-1}(y)$ es finito si S es compacto.

(iii) Supongamos que existe un punto $a \in S$ tal que $r := |f(a)| = sup\{|f(p)| : p \in S\}$, es decir, $|f|$ alcanza su máximo en a, entonces $f(S)$ es abierto por el teorema del mapeo abierto, y $f(S) \subseteq K$ con $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ y está en el interior de K. Esto contradice lo que supusimos de que $f(a) \in \partial K$. $\square$

Se sigue del primer inciso del Teorema que las superficies de Riemann compactas no admiten funciones holomorfas no constantes.

Diremos que una carta $\varphi\colon U \to V$ está *centrada* en a si $a \in U$ y $\varphi(a) = 0$.

Teorema 1.13 (Comportamiento local de mapeos holomorfos)**.** *Supongamos que X y Y son superficies de Riemann y $f\colon X \to Y$ es un mapeo holomorfo no constante. Sean $a \in X$ y $b := f(a)$. Entonces existe un entero $k \geq 1$ y cartas $\varphi\colon U \to V$ en X y $\psi\colon U' \to V'$ en Y centradas en a y b respectivamente tal que $f(U) \subset U'$ y el siguiente diagrama conmuta:*

(8)
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & U' \arrow[d, "\psi"] \\ V \arrow[r, "z^k"] & V' \end{tikzcd}$$

Demostración. Por la maximalidad de la estructura compleja podemos encontrar cartas $\varphi_1\colon U_1 \to V_1$ en X y $\psi\colon U' \to V'$ en Y centradas en a y b tal que $f(U_1) \subset U'$. Se sigue del Teorema de identidad que la función

(9)
$$f_1 := \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}\colon V_1 \to V' \subset \mathbb{C}$$

es no constante. Puesto que $f_1(0) = 0$, existe un $k \geq 1$ tal que $f_1(z) = z^k g(z)$, donde g es una función holomorfa en V_1 con $g(0)$ distinto de 0. Entonces existe una vecindad contenida en V_1 de 0 y una función holomorfa h en esta vecindad tal que $h^k = g$. La derivada de la función $\alpha(z) := zh(z)$ no se anula en 0. Por lo tanto existe una vecindad V_2 de 0 en donde es un biholomorfismo a una vecindad abierta V de 0. Entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

(10)
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & U_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & U' \arrow[d, "\psi"] \\ V_2 \arrow[r, "zh(z)"] & V_1 \arrow[r, "z^k g(z)"] & V' \end{tikzcd}$$

Donde $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$ y $i\colon U \to U_1$ es la inclusión. Si definimos $\varphi\colon U \to V$ como $\varphi := \alpha \circ \varphi_1$, tenemos por la construcción del mapeo, el diagrama (8) conmuta. $\square$

Observación 1.14. El número k en el teorema anterior puede caracterizarse de la siguiente manera. Para cualquier vecindad U_0 de a existen vecindades $U \subset U_0$ de a y W de $b = f(a)$ tal que el conjunto $f^{-1}(y) \cap U$ contiene exactamente k elementos para cualquier punto $y \in W$, $y \neq b$. El número k es llamado la *multiplicidad* de f en a y se denota por $\mathrm{mult}_a(f)$.

Capítulo 2

El grupo fundamental

1. Homotopía de curvas

En esta sección presentaremos algunos resultados de homotopía de curvas para poder dar la definición de grupo fundamental de un espacio topológico y algunos ejemplos sencillos.

Sea X un espacio topológico, por definición una *trayectoria o curva* en X es una aplicación continua $u\colon [0,1] \to X$; si $a = u(0)$ y $b = u(1)$ diremos que *u conecta* a a con b y diremos que a es el *punto incial* y b es el *punto final* de u. Recordemos que un espacio topológico X es *conexo por trayectorias* si para cualesquiera dos puntos de X existe una trayectoria que los une, es decir, que tiene a uno como punto inicial y al otro como punto final. Además se dice que X es *localmente conexo por trayectorias (LCT)* si para cualquier punto $x \in X$ y cualquier vecindad V de x existe una vecidad abierta U de x, conexa por trayectorias, tal que $U \subset V$. Por ejemplo, las superficies de Riemann tienen esa propiedad.

En general la conexidad por trayectorias no es equivalente a la conexidad, pero cuando X es LCT, dichos conceptos son equivalentes: supongamos que X es conexo, y suponga que p y q son dos puntos en X que no se pueden conectar, defina U como el conjunto de puntos de X que se pueden conectar con p, y U' los puntos que no se pueden. Note que U y U' son abiertos, ajenos, no vacíos y $X = U \cup U'$ por lo tanto U y U' forman una desconexión de X, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la conexidad implica la conexidad por trayectorias. La otra implicación siempre se tiene.

Definición 2.1. Sea X un espacio topológico y a, $b \in X$. Una *homotopía* entre dos trayectorias u y v que conectan a con b, es una familia de trayectorias $u_s\colon [0,1] \to X$ que satisface las siguientes propiedades:

i) La aplicación $[0,1] \times [0,1] \to X$ dada por $(t,s) \to u_s(t)$ es continua, con $s \in [0,1]$.

ii) $u_0 = u$ y $u_1 = v$.

iii) u_s conecta a con b.

Escribiremos $u \sim v$ para denotar que u es homotópica a v.

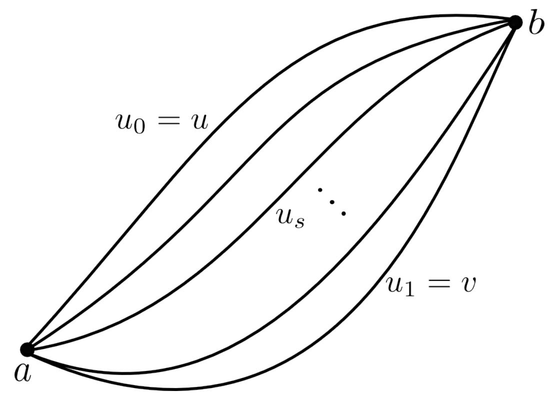

Figura 1. Homotopía entre u y v.

Teorema 2.2. *Suponga que X es un espacio topológico y a, $b \in X$. Entonces la noción de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las trayectorias que conectan a con b.*

Demostración. La simetría y la reflexividad son claros, ya que si u_s es una homotopía entre u y v, $u'_s = u_{1-s}$ es una homotopía entre v y u. Además, dada una trayectoria u, $u_s = u$ es una homotopía entre u y sí misma. Suponga que $u \sim v$ y $v \sim w$, entonces existe u_s una homotopía entre u y v, y v_s una homotopía entre v y w, defina

$$w_s = \begin{cases} u_{2s}(t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v_{2s-1}(t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

esta aplicación recorre en la primera mitad del tiempo la primera homotopía y la segunda homotopía en la mitad restante. Afirmamos que la aplicación anterior es una homotopía entre u y w. Tenemos para empezar que $w_0 = u$ y $w_1 = w$. Además $w(0) = a$ y $w(1) = b$, es decir, preservan los puntos extremos. Sólo falta ver que la aplicación $(t,s) \longmapsto w_s(t)$ es continua. La aplicación está bien definida porque si $s = \frac{1}{2}$, $w_s(t) = v(t)$. Sabemos que la aplicación anterior es continua en $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ porque u_s es una homotopía. Análogamente se tiene la continuidad en $[0,1] \times [\frac{1}{2}, 1]$. $\square$

Si u es una curva que conecta a con b denotaremos su clase de homotopía como $\mathrm{cl}(u)$. Decimos que una función continua $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ es una *reparametrización* de una curva $u\colon [0,1] \to X$ si φ fija al 0 y al 1. El siguiente lema nos dice que una reparametrización de una curva es homotópica a la original.

Lema 2.3. *Sea $u\colon [0,1] \to X$ una curva en X y $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ una reparametrización de u, entonces la curva $u \circ \varphi$ es homotópica a u.*

Demostración. Considere la siguiente curva:

$$u_s(t) = u((1-s)t + s\varphi(t))$$

claramente la aplicación $(t,s) \longmapsto u_s(t)$ es continua. Note que

$$\begin{aligned} u_0 &= u, \quad u_1 = u \circ \varphi \\ u_s(0) &= u(0), \quad u_s(1) = u(1). \end{aligned}$$

Entonces u_s es una homotopía entre u y $u \circ \varphi$. $\square$

Definición 2.4. Suponga que a, b y c son tres puntos en un espacio topológico X, $u\colon [0,1] \to X$ una curva que conecta a con c y $v\colon [0,1] \to X$ una curva que conecta c con b.

i) El producto de las dos curvas $u \cdot v\colon [0,1] \to X$ se define como:

$$u \cdot v(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

esta curva recorre en la primera mitad del tiempo u y en la segunda mitad del tiempo v.

ii) La curva inversa de u, $u^-\colon [0,1] \to X$ que conecta b con a, se define como:

$$u^-(t) = u(1-t)$$

para cualquier $t \in [0,1]$.

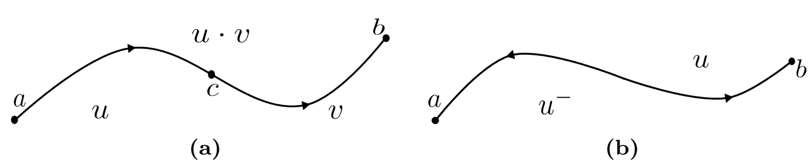

Figura 2. Operaciones de curvas.

Lema 2.5. *Si* $u_s\colon [0,1] \to X$ *y* $u'_s\colon [0,1] \to X$ *son dos familias de aplicaciones tal que* $(t,s) \longmapsto u_s(t)$ *y* $(t,s) \longmapsto u'_s(t)$ *son continuas y* $u_s \cdot u'_s$ *está bien definida, entonces la aplicación* $(t,s) \longmapsto u_s \cdot u'_s$ *es continua.*

Demostración. Por definición de producto de curvas para cada s, tenemos

$$u_s \cdot u'_s(t) = \begin{cases} u_s(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ u'_s(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Como la aplicación $(t,s) \longmapsto u_s(t)$ es continua, tenemos que $(t,s) \longmapsto u_s(2t)$ es continua en el cerrado $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1]$, de igual manera $u'_s(2t-1)$ es continua en el cerrado $[\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$, ya que es una composición de dos funciones continuas. Entonces $(t,s) \longmapsto u_s \cdot u'_s(t)$ es continua en dos cerrados que cubren al dominio $[0,1]$, por lo tanto $u_s \cdot u'_s$ es continua, ver Figura (3) □

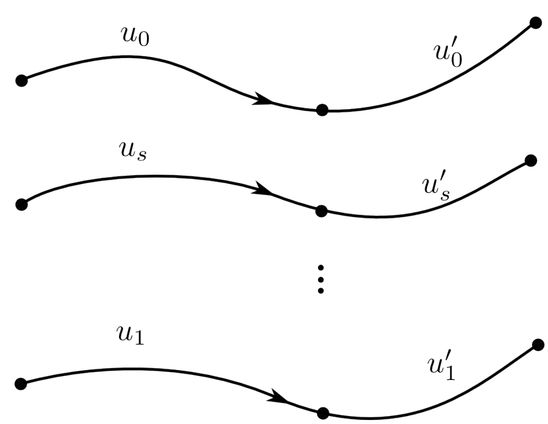

Figura 3. Producto de dos familias de curvas.

Observación 2.6. Como consecuencia del lema 2.5 tenemos que dadas dos curvas $u, v\colon [0,1] \to X$ homotópicas de a a b y dos curvas $u', v'\colon [0,1] \to X$ homotópicas de b a c, entonces $u \cdot u' \sim v \cdot v'$. Para esto considere el producto

$$u_s \cdot u'_s(t) = \begin{cases} u_s(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ u'_s(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Por el Lema 2.5, la aplicación $(s,t) \longmapsto u_s \cdot u'_s$ es continua. Además se preservan puntos iniciales y finales

$$\begin{aligned} u_s \cdot u'_s(0) &= u_s(0) = a, \\ u_s \cdot u'_s(1) &= u'_s(2t-1) = c \end{aligned}$$

Y también se cumple que

$$\begin{aligned} u_0 \cdot u_0' &= u \cdot u', \\ u_1 \cdot u_1' &= v \cdot v'. \end{aligned}$$

Por tanto, $u_s \cdot u_s'$ es una homotopía entre $u \cdot u'$ y $v \cdot v'$.

Además si u_s es una homotopía entre u y v, entonces u_s^- es una homotopía entre u^- y v^-.

Suponga que X es un espacio topológico y $a \in X$. Una *curva constante* a simplemente será una curva $u\colon [0,1] \to X$ tal que $u(t) = a$ para todo $t \in [0,1]$.

Teorema 2.7. *Supongamos que X es un espacio topológico y $a, b, c, d \in X$. Suponga que $u, v, w\colon [0,1] \to X$ son curvas en X tales que*

$$\begin{gathered} u(0) = a, \quad u(1) = b = v(0), \\ v(1) = c = w(0), \quad w(1) = d, \end{gathered}$$

entonces existen las siguientes homotopías:

i) $a \cdot u \sim u \sim u \cdot b$.

ii) $u \cdot u^- \sim a$.

iii) $(u \cdot v) \cdot w \sim u \cdot (v \cdot w)$.

Demostración. Sean $a, b, c \in X$. Sean $u, v, w\colon [0,1] \to X$ curvas en X.

i) Observe que $a \cdot u$ es una reparametrización de u donde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t - 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Luego $a \cdot u \sim u$ por el Lema 2.3. Análogamente $u \sim u \cdot b$ es una reparametrización de u, donde la reparametrización es

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

ii) Defina

$$u_s(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [0, s] \\ u(s) & \text{si } t \in [s, 1]. \end{cases} \tag{11}$$

La aplicación $(t, s) \longmapsto u_s(t)$ es continua ya que si $t > s$ implica que $(t, s) \longmapsto u(s)$, si $t < s$ entonces $(t, s) \longmapsto u(t)$, si $s = t$ entonces $u(t) = u(s)$. Por lo tanto $(t, s) \longmapsto u_s^-(t)$ es continua, entonces por el Lema 2.5 $u_s \cdot u_s^-(t)$ es continua. Además es una homotopía entre a y $u \cdot u^-$, pues satisface lo siguiente:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Si } s=0 & u_0 \cdot u_0^-(t) & = & a \cdot a = a. \\
\text{Si } s=1 & u_1 \cdot u_1^-(t) & = & u \cdot u^-. \\
\text{Además} & u_s \cdot u_s^-(0) & = & u_s(0) = u(0) = a. \\
 & u_s \cdot u_s^-(1) & = & u_s^-(1) = u_s(0) = a.
\end{array}$$

iii) Por el Lema 2.3 basta probar que una es reparametrización de la otra. Por un lado tenemos que

$$(u \cdot v) \cdot w(t) = \begin{cases} u(4t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ v(4t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ w(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{12}$$

Defina $\varphi \colon [0,1] \to [0,1]$ como sigue:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t - \frac{1}{4} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2t-1 & \text{si } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{13}$$

Esta función está bien definida en el intervalo $[0,1]$, además $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Entonces al componer (12) con (13) tenemos

$$\begin{aligned}
(u \cdot v) \cdot w \circ \varphi(t) &= \begin{cases} u(4\varphi(t)) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(4\varphi(t)-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ w(2\varphi(t)-1) & \text{si } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} u(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ v(4t-2) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ w(4t-3) & \text{si } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \\
&= u \cdot (v \cdot w)(t).
\end{aligned}$$

Por el Lema 2.3 tenemos que $(u \cdot v) \cdot w \sim u \cdot (v \cdot w)$.

$\square$

2. Clases de homotopía de lazos

Definición 2.8. Una curva $u\colon [0,1] \to X$ en un espacio topológico X es llamada *lazo* basado en a si $u(0) = u(1) = a$. Un lazo basado en a será llamado *nul-homotópica* si ésta es homotópica a la curva constante a, (ver Figura 4).

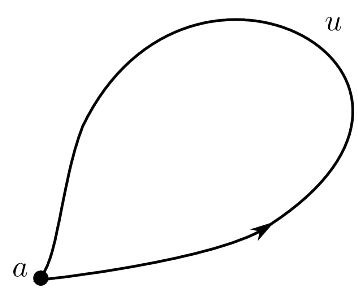

Figura 4. Lazo basado en a.

Teorema 2.9. *Supongamos que X es un espacio topológico y $a \in X$. El conjunto $\pi_1(X,a)$ de clases de homotopías de lazos en X basados en a forman un grupo bajo la operación $\mathrm{cl}(u) \cdot \mathrm{cl}(v) := \mathrm{cl}(u \cdot v)$, inducida por el producto de curvas. Este grupo es llamado el grupo fundamental de X basado en el punto a.*

Demostración. Sean $u, v, u', v' \colon [0,1] \to X$ lazos basados en a en el espacio topológico X, tales que $u \sim u'$, y $v \sim v'$.

i) Por la Observación 2.6 $u \cdot v \sim u' \cdot v'$, $\mathrm{cl}(u \cdot v) = \mathrm{cl}(u' \cdot v')$ por lo tanto la operación no depende de los representantes.

ii) El neutro es $\mathrm{cl}(a)$, pues

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(a) &= \mathrm{cl}(u \cdot a) \\ &= \mathrm{cl}(u). \end{aligned}$$

iii) El inverso de $\mathrm{cl}(u)$ será $\mathrm{cl}(u^-)$, ya que se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(u) \cdot \mathrm{cl}(u^-) &= \mathrm{cl}(u \cdot u^-) \\ &= \mathrm{cl}(a). \end{aligned}$$

iv) Asosiatividad:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}(u)(\mathrm{cl}(v)\,\mathrm{cl}(w)) &= \mathrm{cl}(u\cdot(v\cdot w))\\
&= \mathrm{cl}((u\cdot v)\cdot w) \text{ por el Teorema 2.7 iii)}\\
&= \mathrm{cl}(u\cdot v)\,\mathrm{cl}(w)\\
&= (\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v))\,\mathrm{cl}(w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi_1(X,a)$ es un grupo. □

Definición 2.10 (Dependencia del punto base)**.** Sea X un espacio topológico y w una curva que conecta a con b. Tenemos una aplicación inducida $\varphi_w\colon \pi_1(X,a)\to\pi_1(X,b)$ dada por:

$$\varphi_w(\mathrm{cl}(u)) \coloneqq \mathrm{cl}(w^-\cdot u\cdot w).$$

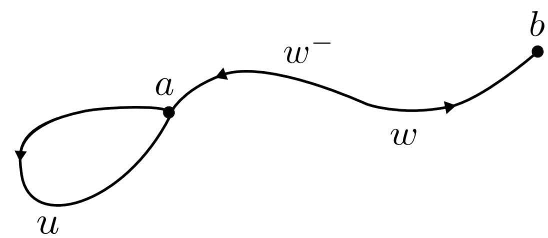

Figura 5. Mapeo φ_w inducido por w.

Teorema 2.11. *El mapeo φ_w definido anteriormente es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Por la Observación (2.6) la aplicación está bien definida, también de esta observación se sigue que es un homomorfismo de grupos ya que dados dos lazos u y v basados en a se tiene que $w^-\cdot(u\cdot v)\cdot w\sim(w^-\cdot u\cdot w)(w^-\cdot v\cdot w)$.

Esta aplicación es un isomorfismo pues $\varphi_{w^-}\colon\pi_1(X,b)\to\pi_1(X,a)$ es su inversa. □

Así por el Teorema 2.11 si X es un espacio conexo por trayectorias y $a,b\in X$, entonces $\pi_1(X,a)$ es isomorfo a $\pi_1(X,b)$, es decir, en un espacio X conexo por trayectorias el grupo fundamental es esencialmente independiente del punto base, en este caso se suele escribir $\pi_1(X)$ en lugar de $\pi_1(X,a)$.

Definición 2.12. Un espacio X conexo por trayectorias es llamado *simplemente conexo* si $\pi_1(X)=0$.

Observación 2.13. Aunque la operación en $\pi_1(X)$ está escrito como multiplicación, escribiremos $\pi_1(X)=0$ si $\pi_1(X)$ contiene únicamente la identidad.

Teorema 2.14. *Supongamos que X es un espacio topológico conexo por trayectorias, entonces X es simplemente conexo si y sólo si cualesquiera dos curvas $u, v\colon [0,1] \to X$ con los mismos puntos extremos son homotópicas.*

Demostración. Supongamos que X es simplemente conexo, sean u, v dos curvas que unen a con b. Entonces $u \cdot v^{-} \sim a$, por lo tanto $u \sim v$. Recíprocamente, si cualesquiera dos curvas con los mismos puntos extremos son homotópicas entonces en particular todos los lazos basados en a son homotópicas a a. $\square$

Ejemplo 2.15. Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado *conjunto estrellado* con respecto a un punto $a \in X$ si para todo punto $x \in X$, el segmento de línea recta $\lambda a + (1-\lambda)x$, con $\lambda \in [0,1]$ está contenido en X. Todo subconjunto estrellado $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Sea $u\colon [0,1] \to X$ un lazo basado en a. Definamos $u_s\colon [0,1] \to X$ como $u_s(t) \coloneqq sa + (1-s)u(t)$, la cual es una homotopía pues la aplicación $(t,s) \longmapsto u_s(t)$ es continua (una función a $\mathbb{R}^n$ es continua si es continua coordenada a coordenada), además $u_0(t) = u(t)$ y $u_1(t) = a$, también $u_s(0) = a = u_s(1)$. Por lo tanto $u \sim a$.

En particular el plano complejo $\mathbb{C}$ y cualquier disco en $\mathbb{C}$ son simplemente conexos. También $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$ y $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ son simplemente conexos, donde $\mathbb{R}^+$ denota el eje real positivo y $\mathbb{R}^-$ denota el eje real negativo.

Ejemplo 2.16. La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ es simplemente conexa. Sean $U_1 \coloneqq \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$ y $U_2 \coloneqq \hat{\mathbb{C}} - \{0\}$, como U_1 y U_2 son homeomorfos a $\mathbb{C}$, y éste es simplemente conexo, entonces U_1 y U_2 son simplemente conexos también. Supongamos que $\sigma\colon [0,1] \to \hat{\mathbb{C}}$ es un lazo basado en 0. Como $[0,1]$ es compacto y σ es continua, $\sigma^{-1}(0) \cup \sigma^{-1}(\infty)$ es un conjunto compacto, luego sus componentes conexas son un número finito de intervalos cerrados y un número finito de puntos, así es posible escoger puntos $t_0 = 0, \ldots, t_n = 1$ fuera de dichos intervalos tales que $t_i < t_{i+1}$ y tal que $[t_i, t_{i+1}]$ sólo contiene a preimágenes de 0 o solamente preimágenes de ∞.

Sea $\varphi_i\colon [0,1] \to [t_{i-1}, t_i]$ definida por la gráfica de la Figura 6.

Defina $\sigma_i \coloneqq \sigma \circ \varphi_i$, esta curva recorre el tramo de σ comprendida entre $\sigma(t_{i-1})$ y $\sigma(t_i)$, (ver Figura 7). Luego $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ es una reparametrización de σ por lo tanto es homotópica a σ.

Para aquellos intervalos $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$ que contienen sólo preimágenes de infinito, σ_{i_0} está contenida en U_2, como sus puntos extremos están en $\hat{\mathbb{C}}$ y éste es conexo por trayectorias se sigue del Teorema 2.14 que σ_{i_0} es homotópica a una curva σ'_{i_0} contenida en $\mathbb{C}$, para aquellos intervalos que no contengan a preimágenes de ∞, definimos σ'_i como σ_i, por lo tanto σ es homotópica a un

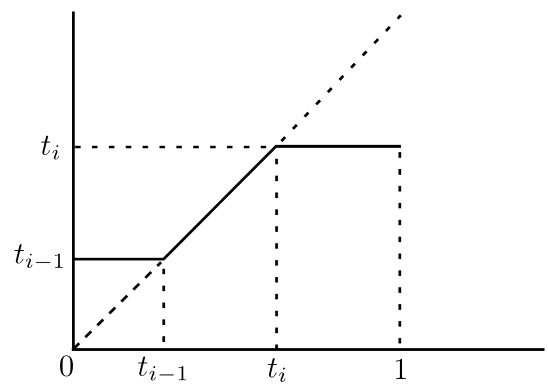

Figura 6. Gráfica de φ_i.

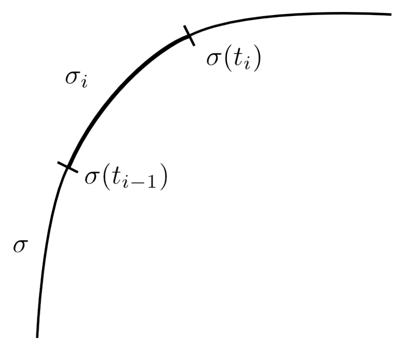

Figura 7. Curva σ_i.

producto de curvas contenidas en $\mathbb{C}$, luego es homotópica a 0, (ver Figura 8).

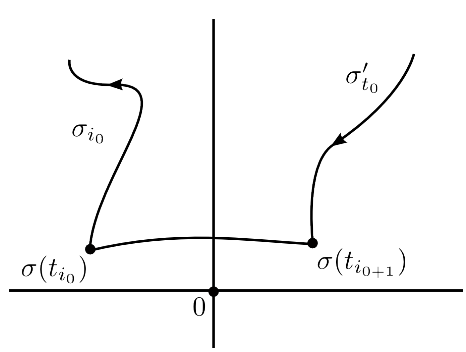

Figura 8. Construcción de σ'_{i_0}.

3. Homotopía libre de curvas

Definición 2.17. Supongamos que X es un espacio topológico y $u, v\colon [0,1] \to X$ dos curvas cerradas en X, las cuales no necesariamente tienen el mismo punto inicial. Entonces las curvas u y v son llamadas *libremente homotópicas* como curvas cerradas, si existe un mapeo continuo $u_s\colon [0,1] \to X$ con las siguientes propiedades:

i) $u_0(t) = u$ para todo $t \in [0,1]$,

ii) $u_1(t) = v$ para todo $t \in [0,1]$,

iii) $u_s(0) = u_s(1)$ para todo $s \in [0,1]$.

Si v es un lazo en X basado en b y w una curva que une un punto a con b. Podemos considerar la curva cerrada $u_s\colon [0,1] \to X$

$$u_s := w_s \cdot v \cdot w_s^-$$

donde w_s está dado por

$$w_s(t) = \begin{cases} w(t+s) & \text{si } t \in [0, 1-s] \\ b & \text{si } t \in [1-s, 1]. \end{cases}$$

Por el Lema 2.5 sabemos que la aplicación $(t,s) \mapsto u_s(t)$ es continua, en-

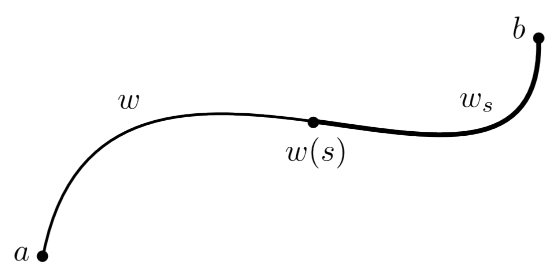

Figura 9. La curva w_s recorre el tramo de w comprendida entre $w(s)$ y b.

tonces es una homotopía libre entre $w \cdot v \cdot w^-$ y v. Por otra parte si u y v son dos lazos basados en un punto a y u_s es una homotopía libre entre u y v, tomemos la curva w que recorre los puntos bases de u_s, esto es $w(t) = u_t(0)$, y defina las curvas w'_s como aquella que recorre a w en el intervalo $[0,s]$ y se queda fijo en $w(s)$ en lo demás. Note que $w'_s \cdot u_s \cdot w'^-_s$ es una familia de lazos basados en a que inicia en u y termina en v. Por hipótesis $(t,s) \mapsto u_s(t)$ es continua y análogamente a la demostración del inciso (ii) del Teorema 2.7 se tiene que $(t,s) \mapsto w'_s(t)$ es continua. El Lema 2.5 implica que $(t,s) \mapsto w'_s \cdot u_s \cdot w'^-_s(t)$ es una homotopía entre u y $w \cdot v \cdot w^-$. De lo anterior tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.18. *Un espacio X conexo por trayectorias es simplemente conexo si y sólo si cualesquiera dos curvas en X son libremente homotópicas como curvas cerradas.*

Demostración. Supongamos que X es simplemente conexo, si u y v son dos lazos basados en a y b respectivamente, existe una curva w que conecta a con b, por la discusión anterior sabemos que v será libremente homotópico

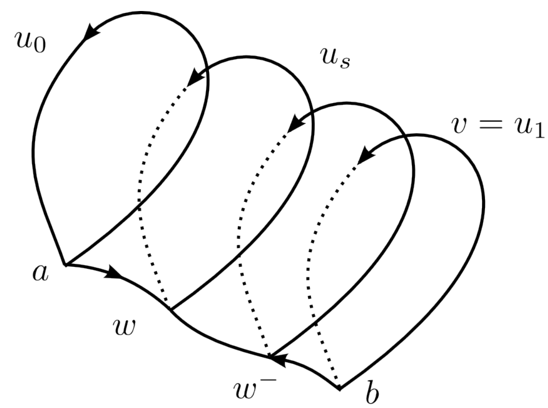

Figura 10. Dos curvas libremente homotópicas.

a $w \cdot v \cdot w^-$, pero este a su vez es homotópico a u por hipótesis, ver Figura 10. Por otra parte, suponga que cualesquiera dos curvas en X son libremente homotópicas, en particular cualquier lazo u basado en un punto a será libremente homotópico al lazo constante a, entonces por la discusión anterior u sería homotópico a la curva constante. ver Figura 11. $\square$

Sea $f\colon X \to Y$ es un mapeo continuo entre espacios topológicos X y Y. Suponga que u_s es una homotopía entre u y u', y sea $H(t,s) \coloneqq u_s(t)$, entonces tenemos las siguientes propiedades:

i) $(s,t) \longmapsto f \circ u_s(t)$ es continua porque es igual a $f \circ H$.
ii) $f \circ u_0 = f \circ u$, $f \circ u_1 = f \circ u'$.
iii) $f \circ u_s(0) = f \circ u(0)$, $f \circ u_s(1) = f \circ u(1)$,

por lo tanto $f \circ u_s$ es una homotopía entre $f \circ u$ y $f \circ u'$. Luego, la aplicación $f_*\colon \pi(X,a) \to \pi(Y, f(a))$ dada por $f_*(cl(u)) = cl(f \circ u)$ está bien definida. Además es un homomorfismo de grupos, dados u, v curvas en X, $f_*(cl(u)cl(v)) = cl(f \circ (u \cdot v)) = cl((f \circ u) \cdot (f \circ v)) = cl(f \circ u) \cdot cl(f \circ v) = f_*(u)f_*(v)$. A continuación veremos que este homomorfismo se comporta bien con respecto a las composiciones: si $g\colon Y \to Z$ es otro mapeo continuo

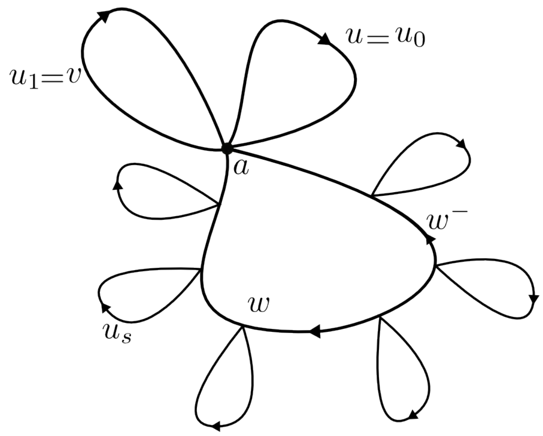

Figura 11. Dos lazos basados en a libremente homotópicos.

y γ es un lazo en a, entonces

$$\begin{aligned}
(g \circ f)_*(\mathrm{cl}(\gamma)) &= \mathrm{cl}((g \circ f)(\gamma)) \\
&= g_*(\mathrm{cl}(f(\gamma))) \\
&= g_*(f_*(\mathrm{cl}(\gamma))) \\
&= g_* \circ f_*(\mathrm{cl}(\gamma)),
\end{aligned}$$

luego $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Entonces una función continua entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ induce un homomorfismo en grupos $f_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$.

Capítulo 3

Cubrientes de Superficies de Riemann

1. Homeomorfismos locales

Supongamos que X y Y son espacios topológicos y $p\colon Y \to X$ es un mapeo. Para $x \in X$, el conjunto $p^{-1}(x)$ es llamado *la fibra* de p sobre x.

Si $y \in p^{-1}(x)$, entonces diremos que el punto y se encuentra *por encima* de x. Si $p\colon Y \to X$ y $q\colon Z \to X$ son mapeos, entonces un mapeo $f\colon Y \to Z$ se dice que *preserva fibras* si $p = q \circ f$. Esto quiere decir que cualquier punto $y \in Y$, que se encuentre por encima del punto $x \in X$, es mapeado bajo f a un punto el cual está también por encima de x.

Un subconjunto A de un espacio topológico es llamado *discreto* si todo punto $a \in A$ tiene un vecindad V tal que $V \cap A = \{a\}$. Un mapeo $p\colon Y \to X$ entre espacios topológicos X y Y, es llamado *mapeo discreto* si la fibra $p^{-1}(x)$ de todo punto $x \in X$ es un subconjunto discreto de Y.

Definición 3.1. Supongamos que X y Y son superficies de Riemann y $f\colon Y \to X$ es un mapeo holomorfo no constante. Un punto $p \in Y$ es llamado un *punto crítico* o *punto de ramificación* de f, si $\mathrm{mult}_p(f) > 1$. Las imágenes bajo f de los puntos críticos serán llamados *valores críticos.* Denotaremos por $C(f)$ y $B(f)$ al conjunto de puntos y valores críticos, respectivamente. El mapeo f es llamado *mapeo holomorfo no ramificado* si éste no tiene puntos críticos.

Ejemplo 3.2 (Ejemplo de un mapeo holomorfo no ramificado)**.** Consideremos la función $\exp(iz)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D} - \{0\}$, donde $\mathbb{H}$ es el semiplano superior y $\mathbb{D}$ el disco unitario:

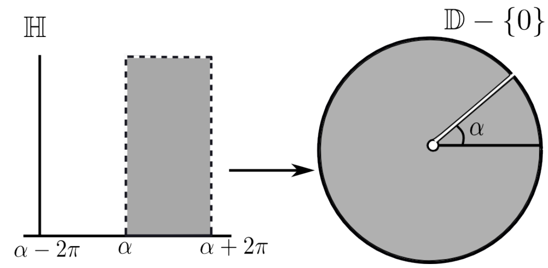

Figura 1. El cubriente de $\exp(iz)$.

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}.$$

Sea $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ existe un radio de ángulo α que no contiene a z, defina U como $\mathbb{D} - \{0\}$ menos dicho radio, observe que la preimagen de U bajo la función son las franjas

$$(\alpha + 2\pi k, \alpha + 2\pi(k+1)) \times \mathbb{R}_+, \quad k \in \mathbb{Z}$$

además la función $\exp(iz)$ restringida a cada una de ellas es un biholomorfismo, pues tiene como inversa $(\log z)/i$ donde $\log z$ es la rama

$$\log(z) = \log |z| + i \arg z, \quad \arg z \in (\alpha + 2\pi k, \alpha + 2\pi(k+1)).$$

Teorema 3.3. *Sean X y Y son superficies de Riemann. Un mapeo holomorfo no constante $p\colon Y \to X$ no tiene puntos críticos si y sólo si p es un homeomorfismo local, es decir, todo punto $y \in Y$ tiene una vecindad abierta V la cual es mapeada homeomorficamente por p sobre un conjunto abierto U en X.*

Demostración. Supongamos que $p\colon Y \to X$ no tiene puntos críticos, sea $y \in Y$, por el teorema de Comportamiento local de mapeos holomorfos, existen cartas (φ, U) y (ψ, V) centradas en y y $p(y)$ respectivamente que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "z^k"] & \psi(V) \end{tikzcd} \tag{14}$$

y por hipótesis $\operatorname{mult}_y(\mathrm{p}) = 1$, luego $p = \psi^{-1} \circ z \circ \varphi$.

Inversamente, supongamos que tomamos las cartas del Teorema 1.13 del Comportamiento local de mapeos holomorfos, tal que p es inyectiva, entonces $z^k = \psi \circ p \circ \varphi^{-1}$ es inyectiva, pero para cada punto hay k preimágenes bajo z^k, entonces $k = 1$. $\square$

Teorema 3.4. *Sea X una superficie de Riemann, Y un espacio topológico Hausdorff y $p\colon Y \to X$ un homeomorfismo local. Entonces existe una estructura compleja en Y que hace a p holomorfa.*

Demostración. Sea $y \in Y$, como p es un homeomorfismo local, existen vecindades $\hat{U}$ de y y $\hat{U_1}$ de $p(y)$, tal que $p\colon \hat{U} \to \hat{U_1}$ es un homeomorfismo y existe una carta $(\varphi, \hat{U_2})$, tal que $p(y) \in \hat{U_2}$; definamos $U = \hat{U_2} \cap \hat{U_1}$ y $U_1 = p^{-1}(U)$, por la maximalidad (φ, U) es una carta alrededor de $p(y)$ y además $p\colon U_1 \to U$ es un homeomorfismo. Por lo tanto para cualquier punto $y \in Y$ existen vecindades U_1 de y y U de $p(y)$ tal que (φ, U) es una carta y $p\colon U_1 \to U$ es un homeomorfismo. Declaremos el atlas como $\{(\varphi \circ p, U_1)\colon (\varphi, U)$ es una carta y $p\colon U_1 \to U$ es un homeomorfismo$\}$. Lo anterior demuestra que todos los dominios del atlas cubren a Y. Veamos que cualesquiera dos cartas del atlas, son compatibles. Sean $(\varphi \circ p, U)$ y $(\psi \circ p, U')$ dos cartas en Y, entonces

$$(\psi \circ p) \circ (\varphi \circ p)^{-1} = (\psi \circ p) \circ (p^{-1} \circ \psi^{-1}) = \psi \circ \varphi^{-1}, \tag{15}$$

la cual es holomorfa ya que ψ, φ son cartas de X. Ahora veamos que p es holomorfa con respecto a la estructura compleja encontrada. Sean $(\varphi \circ p, U_1)$ una carta en Y tal que $p^{-1}(V) \cap U_1 \neq \emptyset$ y (ψ, V) una carta en X. Luego

$$\psi \circ p \circ (\varphi \circ p)^{-1} = \psi \circ p \circ (p^{-1} \circ \varphi^{-1}) = \psi \circ \varphi^{-1} \tag{16}$$

es holomorfa ya que ψ y φ son cartas. Por lo tanto p es holomorfa.

□

2. La propiedad de levantamiento de curvas

Definición 3.5 (Levantamiento de mapeos)**.** Supongamos que X, Y, Z son espacios topológicos y $p\colon Y \to X$ y $f\colon Z \to X$ son mapeos continuos. Entenderemos por un *levantamiento* de f con respecto a p a un mapeo continuo $g\colon Z \to Y$ tal que $f = p \circ g$, es decir, g es un mapeo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

Es importante notar que no basta que g haga conmutar el diagrama para que sea continua, esta hipótesis es necesaria. Por ejemplo, considere

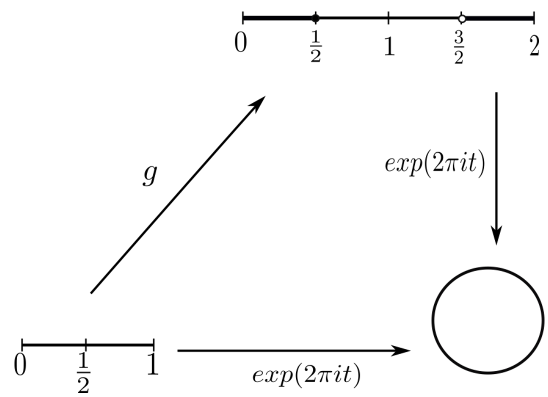

Figura 2. La función g hace conmutar el diagrama pero no es continua.

$p(t) = exp(2\pi it)\colon \mathbb{R} \to S^1$, $f(t) = \exp(2\pi it)\colon [0,1] \to S^1$, y la función g dada por:

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t+1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{17}$$

Teorema 3.6 (Unicidad de levantamientos)**.** *Supongamos que X y Y son espacios de Hausdorff y $p\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local, además supongamos que Z es un espacio topológico conexo y $f\colon Z \to X$ es un mapeo continuo. Si $g_1\colon Z \to Y$ y $g_2\colon Z \to Y$ son dos levantamientos de f tales que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún punto $z_0 \in Z$ entonces $g_1 = g_2$.*

Demostración. Sea T el igualador de g_1 y g_2. Por la Proposición 1.9 el conjunto T es cerrado. Veamos que T es abierto. Sea $z \in T$, dado que p es

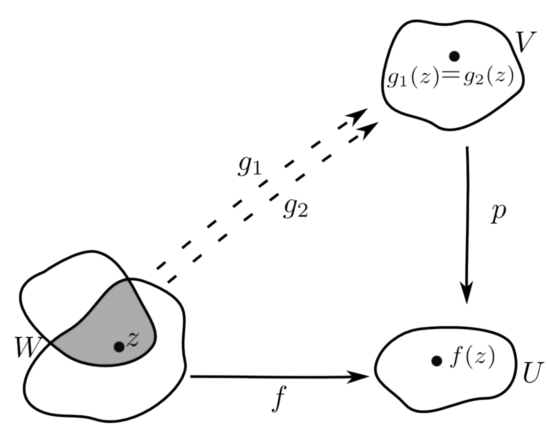

Figura 3. El igualador es abierto.

un homeomorfismo local existe una vecindad V de $g_1(z) = g_2(z)$ y que es mapeada por p homeomorficamente en una vecindad U de $f(z)$ de X. Como g_1 y g_2 son mapeos continuos, $W = g_1^{-1}(V) \cap g_2^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de z tal que $g_1(W), g_2(W) \subseteq V$. Dado que g_1 y g_2 son levantamientos de f, $p \circ g_1 = p \circ g_2$ en W. Esto implica que $g_1 = g_2$ en W, pues p es inyectiva en V. Por lo tanto tenemos que $z \in W$ y $W \subseteq T$, así T es abierto. Como Z es conexo y T es no vacío pues $z_0 \in T$ se tiene que $T = Z$, es decir, $g_1 = g_2$. $\square$

Teorema 3.7. *Supongamos que X, Y y Z son superficies de Riemann, $p\colon Y \to X$ un mapeo holomorfo no ramificado y $f\colon Z \to X$ es cualquier mapeo holomorfo. Entonces todo levantamiento $g\colon Z \to Y$ de f es holomorfo.*

Demostración. Sea $g\colon Z \to Y$ un levantamiento de f, supongamos que $z \in Z$ es un punto arbitrario y sea $y := g(z)$ y $x := p(y) = f(z)$. Como p es holomorfo existen vecindades V de y y U de x tal que $p\colon V \to U$ es un biholomorfismo. Como g es continua, existe una vecindad abierta W de z

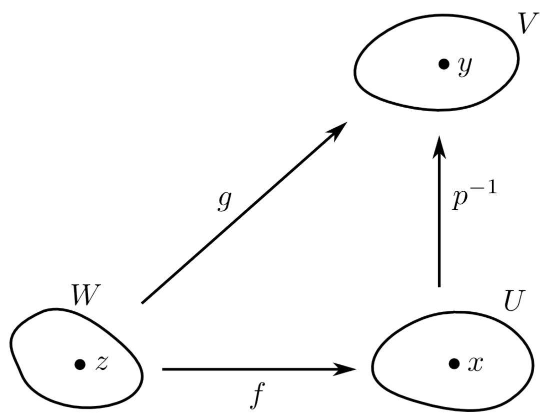

Figura 4. Todo levantamiento es holomorfo.

tal que $g(W) \subseteq V$. Como g es levantamiento de f se tiene que $f = p \circ g$ lo cual implica que $g = p^{-1} \circ f$ en W y por lo tanto g es holomorfa en el punto z. $\square$

Observación. Supongamos que X, Y y Z son superficies de Riemann y $p\colon Y \to X$ y $q\colon Z \to X$ son mapeos holomorfos no ramificados. Entonces todo mapeo continuo $f\colon Y \to Z$ que preserva fibras es holomorfo, ya que f es un levantamiento de p con respecto a q.

Supongamos que X y Y son espacios topológicos Hausdorff y $p\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local. Nosotros estamos interesados particularmente en los levantamientos de curvas $\sigma\colon [0,1] \to X$. Por el Teorema 3.6 un levantamiento $\hat{\sigma}\colon [0,1] \to Y$ de σ, si existe está únicamente determinado por el punto inicial especificado.

Teorema 3.8 (Levantamiento de Curvas Homotópicas.)**.** *Supongamos que X y Y son espacios de Hausdorff y $p\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local. Supongamos que $a, b \in X$ y $\hat{a} \in Y$ es un punto tal que $p(\hat{a}) = a$ y $u_s\colon [0,1] \to X$ una homotopía que conecta a con b. Si toda curva u_s puede ser levantada a una curva $\hat{u}_s$ con punto inicial $\hat{a}$, entonces $\hat{u}_0$ y $\hat{u}_1$ tienen el mismo punto final y son homotópicas.*

Demostración. Sea $I = [0,1]$, definamos el mapeo continuo $A\colon I \times I \to X$, como $A(t,s) \coloneqq u_s(t)$ y la aplicación $\hat{A}\colon I \times I \to Y$ como $\hat{A}(t,s) \coloneqq \hat{u}_s(t)$.

Afirmación (a) Existe ε_0 tal que $\hat{A}$ es continua en $[0, \varepsilon_0) \times I$.

Como p es homeomorfismo local, existe un abierto V de $\hat{a}$ y un abierto U de a tal que $p\colon V \to U$ es un homeomorfismo. Sea $\varphi\colon U \to V$ su inverso. Puesto que $A(0 \times I) = \{a\}$ y A es continua, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $A([0, \epsilon_0] \times I) \subset U$. Por la unicidad del levantamiento de curvas se tiene que

$$\hat{u}_s|_{[0,\varepsilon_0]} = \varphi \circ u_s|_{[0,\epsilon_0]}, \tag{18}$$

para cualquier $s \in I$, entonces

$$\hat{A}|_{[0,\varepsilon_0)\times\{s\}} = \varphi \circ A|_{[0,\varepsilon_0)\times\{s\}} \tag{19}$$

para cualquier $s \in I$. Por lo tanto $\hat{A} = \varphi \circ A$ en $[0, \epsilon_0] \times I$ y esto implica que $\hat{A}$ es continua en $[0, \epsilon_0) \times I$.

Afirmación (b) $\hat{A}$ es continua en todo $I \times I$.

Supongamos que hay un punto $(t_0, \sigma) \in I \times I$ donde $\hat{A}$ no es continua. Sea τ el infimo de t tal que $\hat{A}$ no es continua en (t, σ). Por la Afirmación (a) $\tau \geq \varepsilon_o$. Sea $x \coloneqq A(\tau, \sigma)$ y $y \coloneqq \hat{A}(\tau, \sigma) = \hat{u}_\sigma(\tau)$. Existe una vecindad V de y y una vecindad U de x tal que $p\colon V \to U$ es un homeomorfismo. Sea $\varphi\colon U \to V$ el inverso. Como A es continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A(I_\varepsilon(\tau) \times I_\varepsilon(\sigma)) \subseteq U$, donde

$$I_\varepsilon(\xi) = \{t \in I\colon |t - \xi| < \varepsilon\}.$$

En particular $u_\sigma(I_\varepsilon(\tau)) \subseteq U$ y por lo tanto

$$\hat{u}_\sigma = \varphi \circ u_\sigma,$$

en $I_\varepsilon(\tau)$. Elegimos $t_1 \in I_\varepsilon(\tau)$ con $t_1 < \tau$. Entonces $\hat{A}(t_1, \sigma) = \hat{u}_\sigma(t_1) \in V$. Como $\hat{A}$ es continua en (t_1, σ), existe $\delta > 0$, $\delta \leq \varepsilon$, tal que

$$\hat{A}(t_1, s) = \hat{u}_s(t_1) \in V \text{ para toda } s \in I_\delta(\sigma)$$

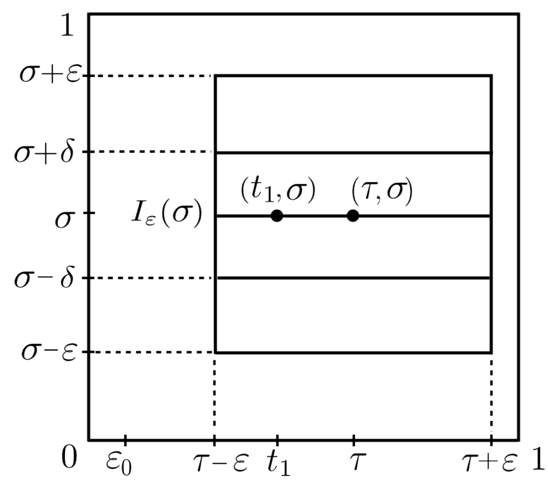

Figura 5. Levantamiento de curvas homotópicas.

Por la unicidad del levantamiento se sigue que para toda $s \in I_\delta(\sigma)$

$$\hat{u}_s = p^{-1} \circ u_s,$$

en $I_{\varepsilon(\tau)}$. Por lo tanto $\hat{A} = p^{-1} \circ A$ en $I_\varepsilon(\tau) \times I_\delta(\sigma)$. Pero esto contradice la definición de (τ, σ). Por lo tanto $\hat{A}$ es continua en $I \times I$. Como $A = p \circ \hat{A}$ y $A(\{1\} \times I) = \{b\}$, se sigue que $\hat{A}(\{1\} \times I) \subseteq p^{-1}(b)$. Como $p^{-1}(b)$ es discreto y $\{1\} \times I$ es conexo, $\hat{A}(\{1\} \times I)$ consiste de un sólo punto. Esto implica que las curva $\hat{u}_0$ y $\hat{u}_1$ tienen el mismo punto, a través de $\hat{A}$, ellos son homotópicos. $\square$

3. Propiedades de mapeos cubrientes

Ahora queremos dar una condición que garantice que el levantamiento de curvas siempre es posible.

Definición 3.9. Supongamos que X y Y son espacios topológicos. Un mapeo $p\colon X \to Y$ es llamado *mapeo cubriente* si se cumple lo siguiente: cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta U tal que su preimagen $p^{-1}(U)$ puede ser representada como

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

donde los V_j con $j \in J$ son subconjuntos abiertos disjuntos de Y. Para todo $j \in J$ la restricción $p\colon V_j \to U$ es homeomorfismo. En particular, p es un homeomorfismo local. Dicho abierto U se dice que está uniformemente cubierto por p.

Definición 3.10. Un mapeo continuo $p\colon Y \to X$ se dice que tiene la propiedad de *levantamiento de curvas* si se cumplen las siguientes condiciones: Para toda curva $u\colon [0,1] \to X$ y cada punto $y_0 \in Y$ con $p(y_0) = u(0)$ existe un levantamiento $\hat{u}\colon [0,1] \to Y$ de u tal que $\hat{u}(0) = y_0$.

Teorema 3.11. *Todo mapeo cubriente $p\colon Y \to X$ de espacios topológicos X y Y tiene la propiedad de levantamiento de curvas.*

Demostración. Sean $\sigma\colon [0,1] \to X$ una curva y $y_0 \in Y$ tal que $p(y_0) = \sigma(0)$. Considere el conjunto $\mathcal{U}$ formado por todos los abiertos de X cubiertos uniformemente por p y tales que intersectan a la imagen de σ, esta familia es una cubierta abierta de $\sigma([0,1])$, entonces la familia

$$\sigma^*(\mathcal{U}) = \{\sigma^{-1}(U)\colon U \in \mathcal{U}\}, \tag{20}$$

es una cubierta abierta de $[0,1]$. Como $[0,1]$ es un espacio métrico compacto, existe una $\delta > 0$ tal que para cualquier $t \in [0,1]$, $I_\delta(t) \subset U$ para algún $U \in \sigma^*(\mathcal{U})$. Considere una partición de $[0,1]$

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$$

cuyos elementos están a distancia $\delta/2$, luego existen conjuntos abiertos $U_k \in \mathcal{U}$, con $k = \{1, \ldots, n\}$ tales que:

i) $\sigma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$,

ii) $p^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{kj}$,

donde los $V_{kj} \subset Y$ son conjuntos abiertos tal que $p\colon V_{kj} \to U_k$ son homeomorfismos. Ahora probaremos por inducción sobre $k = 0, 1, ..., n$ la existencia de un levantamiento

$$\hat{\sigma}\colon [0, t_k] \to X$$

con $\hat{\sigma}(0) = y_0$. Para $k = 0$ no hay nada que hacer. Supongamos $k \geq 1$ y que la función $\hat{\sigma}\colon [0, t_{k-1}] \to X$ ya está construida, y sea $\hat{\sigma}(t_{k-1}) \coloneqq y_{k-1}$. Como $p(y_{k-1}) = u(t_{k-1}) \in U_k$, existe $j \in J_k$ tal que $y_{k-1} \in V_{kj}$, considere $p^{-1}\colon U_k \to V_{kj}$. Defina

$$\hat{\sigma}(t) \coloneqq \begin{cases} \sigma_{k-1}(t) & t \in [0, t_{k-1}], \\ p^{-1} \circ \sigma & t \in [t_k, t_{k-1}]. \end{cases} \tag{21}$$

Obtenemos una extensión continua del levantamiento $\hat{u}\colon [0, t_{k-1}] \to X$ al intervalo $[0, t_k]$. □

Corolario 3.12. *Sean X, Y espacios Hausdrof, sea $p\colon Y \to X$ un homeomorfismo local con la propiedad de levantamiento de curvas.*
Sean $x \in X$, $y \in Y$ tales que $p(y) = x$, entonces $\ker(p_*) = 0$ y la imagen $\operatorname{Im}(p_*)$ consiste de las clases de homotopía de lazos en x cuyo levantamientos en Y son lazos en y.

Demostración. Veamos que p_* es inyectiva. Sean $\mathrm{cl}(\sigma)$, $\mathrm{cl}(\sigma_1) \in \pi_1(Y, y)$ tal que $p_*(\mathrm{cl}(\sigma)) = p_*(\mathrm{cl}(\sigma_1))$ entonces $p \circ \sigma \sim p \circ \sigma_1$ luego existe u_t homotopía entre $p \circ \sigma$ y $p \circ \sigma_1$, como p tiene la propiedad de levantamiento de curvas existe $\hat{u}_t$ entre σ y σ_1, por el Teorema 3.8 $\hat{u}_t$ es una homotopía. Por lo tanto $\sigma \sim \sigma_1$. Por otra parte, claramente los lazos que se levantan a lazos a y representan elementos de la imagen p_*. Recíprocamente si $\mathrm{cl}(\sigma) \in p_*$, existe un lazo σ_1 basado en y tal que $p(\sigma_1) \sim \sigma$, por lo tanto sus levantamientos basados en y son homotópicos, en particular el punto extremo del levantamiento de σ es y. □

Dados X y Y espacios Hausdorff con X conexo por trayectorias y $p \colon Y \to X$ un mapeo cubriente, entonces para todo punto $x \in X$ y $y \in p^{-1}(x)$, denotaremos por $\widehat{\sigma}_y$ al levantamiento de σ basado en el punto y.

Teorema 3.13. *Supongamos que X y Y son espacios Hausdorff con X conexo por trayectorias y $p \colon Y \to X$ es un mapeo cubriente. Entonces para cualesquiera dos puntos x_0, $x_1 \in X$ los conjuntos $p^{-1}(x_0)$ y $p^{-1}(x_1)$ tienen la misma cardinalidad. En particular, si Y es no vacío, entonces p es suprayectivo.*

La cardinalidad de $p^{-1}(x)$ para $x \in X$ es llamado el *número de hojas del cubriente* y podría ser finito o infinito.

Demostración. Sean $x_0, x_1 \in X$ puntos arbitrarios. Sea $\sigma \colon [0,1] \to X$ una curva que va de x_0 a x_1 podemos hacer esto ya que X es conexo por trayectorias. Sea $y \in p^{-1}(x_0) \subset Y$ un punto arbitrario, entonces existe exactamente un levantamiento $\widehat{\sigma}_y \colon [0,1] \to Y$ de σ basado en y, tal que $\widehat{\sigma}_y(1) \in p^{-1}(x_1)$. Definimos $\varphi_\sigma \colon p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ como $\varphi_\sigma(y) := \widehat{\sigma}_y(1) \in p^{-1}(x_1)$. El mapeo φ_σ está bien definido ya que el levantamiento $\widehat{\sigma}_y$ es único. Ahora veamos que φ_σ es inyectivo. Sean y, $y' \in p^{-1}(x_0)$, supongamos que $\varphi_\sigma(y) = \varphi_\sigma(y')$, entonces $\widehat{\sigma}_y(1) = \widehat{\sigma}_{y'}(1)$. Vamos a ver que $(\widehat{\sigma}_y)^- = (\widehat{\sigma^-})_{\varphi(y)}$,

$$p \circ (\widehat{\sigma}_y)^-(t) = p \circ \widehat{\sigma}_y(1-t) = \sigma(1-t) = \sigma^-(t).$$

Análogamente $(\widehat{\sigma}_{y'})^- = (\widehat{\sigma^-})_{\varphi(y)}$, entonces $(\widehat{\sigma}_{y'})^- = (\widehat{\sigma}_y)^-$ de esta manera $y' = (\widehat{\sigma}_{y'})^-(1) = (\widehat{\sigma}_y)^-(1) = y$. Por lo tanto φ_σ es inyectivo. Ahora veamos que φ_σ es suprayectiva. Sea $y \in p^{-1}(x_1)$, toma $(\widehat{\sigma^-})_y$, por lo anterior $(\widehat{\sigma^-})_y^-$ es levantamiento de σ en el punto final y_0 de dicha curva, por lo tanto $y = \varphi_\sigma(y_o)$. □

Observación 3.14. En general el mapeo biyectivo construido en la demostración depende de la elección de la curva σ. Entonces en general no hay una manera canónica de definir bien globalmente las 'hojas' de un cubriente.

Teorema 3.15. *Consideremos un espacio topológico Z conexo y localmente conexo por trayectorias, si $p\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local entre dos espacios de Hausdorff que tiene la propiedad de levantamiento de curvas y $f\colon Z \to X$ es un mapeo continuo tal que $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$, entonces existe un levantamiento de f, $\hat{f}\colon Z \to Y$ tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$.*

Demostración. Sean $z_0 \in Z$ y $y_0 \in Y$ tal que $f(z_0) = p(y_0)$, sea $z \in Z$ un punto arbitrario, sea $\sigma\colon [0,1] \to Z$ una curva que va de z_0 a z, entonces tenemos que $\lambda \coloneqq f \circ \sigma$ es una curva en X con punto inicial $f(z_0)$ y punto final $f(z)$. Como p tiene la propiedad de levantamiento de curvas, existe $\hat{\lambda}\colon [0,1] \to Y$ un único levantamiento de λ basado en y_0. Definimos $\hat{f}(z) \coloneqq \hat{\lambda}(1)$. Veamos que esta definición es independiente de la curva σ que va de z_0 a z. Supongamos que σ_1 es otra curva que va de z_0 a z, entonces $\sigma \cdot \sigma_1^-$ es un lazo en z_0, por lo tanto $(f \circ \sigma) \cdot (f \circ \sigma_1)^-$ es un lazo en x_0, por hipótesis este lazo está en la imagen de p_*, entonces por el Corolario 3.12 su levantamiento es un lazo, entonces el punto final del levantamiento de $f \circ \sigma$ es igual al punto final del levantamiento de $f \circ \sigma_1$. Por lo tanto $\hat{f}$ está bien definida. Vamos a demostrar que esta función es continua. Sean z_0, $z_1 \in Z$, y sea $\sigma\colon [0,1] \to Z$ la curva que une z_0 con z_1. Sea $y \in Y$ tal que $y = \hat{f}(z_1) = \hat{\lambda}(1)$ con $\lambda = f(\sigma_1)$, existe un abierto U vecindad de y y un abierto V vecindad de $p(y)$ tal que $p\colon U \to V$ es un homeomorfismo. Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es un abierto que contiene a z_1, luego como Z es localmente conexo por trayectorias, existe una vecindad W de z_1 conexa por trayectorias contenida en $f^{-1}(V)$. Afirmamos que $\hat{f}(W)$ está contenida en U, sea $z \in W$ existe una curva σ_2 que conecta a z_1 con z, entonces $\hat{f}(z) = \hat{\lambda} \cdot (p^{-1} \circ f \circ \sigma_2)(1)$, el cual está en W. Esto prueba la continuidad, además por construcción $p \circ \hat{f} = f$, por lo tanto $\hat{f}$ es un levantamiento de f. □

Una *variedad n-dimensional* es un espacio topológico Hausdorff X tal que cualquier punto $a \in X$ tiene una vecindad abierta que es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 3.16. *Supongamos que X, Y y Z son variedades conexas con Z simplemente conexa, además sea $p\colon Y \to X$ un mapeo cubriente. Entonces para cualquier mapeo continuo $f\colon Z \to X$ y cualesquiera $z_0 \in Z$ y $y_0 \in Y$ existe un levantamiento $\hat{f}$ de f con respecto a p tal que $\hat{f}(z_0) = y_0$.*

Teorema 3.17. *Supongamos que X es una variedad, Y es un espacio Hausdorff y $p\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local con la propiedad de levantamiento de curvas. Entonces p es un mapeo cubriente.*

Demostración. Supongamos que $x_0 \in X$ es un punto arbitrario y y_j, $j \in J$ son las preimagenes de x_0 con respecto a p. Tomemos una carta $\varphi\colon U \to V$ tal que V es simplemente conexo. Por el Teorema 3.15 se sigue que para toda

$j \in J$ hay un levantamiento $\hat{\varphi}_j \colon V \to Y$ de φ^{-1} tal que $\hat{\varphi}_j(\varphi^{-1}(x_0)) = y_j$. Sea $V_j \coloneqq \hat{\varphi}_j(V)$. Vamos a demostrar que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

que los V_j son conjuntos abiertos disjuntos y que cada mapeo $p \colon V_j \to U$ es un homeomorfismo. Primero observemos que V_j es conexo por trayectorias, pues es conexo y localmente conexo por trayectorias. Además notemos que un lazo en x_0 se levanta a un lazo en cada y_j, ya que si σ es un lazo en x_0 la curva $\hat{\varphi}_j \circ \varphi \circ \sigma$ es un lazo en y_j. De las observaciones anteriores tenemos que las V_j son ajenas.

Sea $x \in X$ podemos tomar una trayectoria que una a x con x_0 entonces su levantamiento está en la componente conexa por trayectorias de algún y_j. Por lo tanto las V_j son todas las componentes conexas de la preimagen de V. Por lo tanto los V_j son abiertos ajenos. Por el argumento anterior es suprayectiva. Para la inyectividad supongamos que y y $y' \in V_j$ y $p(y) = p(y')$ si σ_1 y σ_2 son dos curvas que unen a y y a y' con y_0, respectivamente, entonces $(p \circ \sigma_1) \cdot (p \circ \sigma_2^{-1})$ es un lazo en x_0. Por lo tanto su levantamiento es un lazo en y_0, luego $y = y'$. Esto prueba que $p \colon V_j \to U$ es biyectiva, pero sabemos que es un homeomorfismo local, por lo tanto es un homeomorfismo. $\square$

4. Cubrientes ramificados

Recordemos que un espacio topológico localmente compacto es un espacio de Hausdorff tal que todo punto tiene una vecindad compacta. Un mapeo continuo $f \colon Y \to X$ entre dos espacios localmente compactos es llamado propio si la preimagen de todo subconjunto compacto es compacto. Por ejemplo esto siempre se cumple si Y es compacto. Un mapeo propio es cerrado, i.e., la imagen de todo conjunto cerrado es cerrado. Esto se sigue del hecho de que en un espacio localmente compacto un subconjunto es cerrado precisamente si su intersección con cualquier conjunto compacto es compacto.

Lema 3.18. *Supongamos que X y Y son espacios localmente compactos y $p \colon Y \to X$ es un mapeo propio discreto. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) Para todo punto $x \in X$ el conjunto $p^{-1}(x)$ es finito.

b) Si $x \in X$ y V es una vecindad de $p^{-1}(x)$, entonces existe una vecindad U de x con $p^{-1}(U) \subseteq V$.

Demostración. a) Esto se sigue del hecho de que $p^{-1}(x)$ es un subconjunto discreto compacto de Y.

b) Podemos suponer que V es abierto, por lo tanto $Y - V$ es cerrado. Entonces $p(Y - V) =: A$ es también cerrado ya que p es un mapeo propio. Como x no está en A, $U := X - A$ es una vecindad de x tal que $p^{-1}(U) \subseteq V$. $\square$

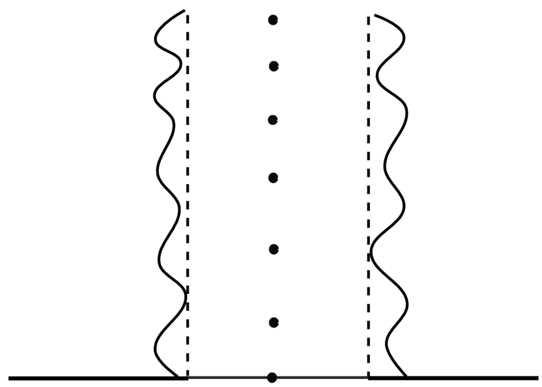

Figura 6. Vecindad tubular

Teorema 3.19. *Supongamos que X y Y son espacios localmente compactos y $p\colon Y \to X$ es un homeomorfismo local propio. Entonces p es un mapeo cubriente.*

Demostración. Sea $x \in X$ consideremos la preimagen $p^{-1}(x) = \{y_i, ..., y_n\}$, donde $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$, ya que p es un homeomorfismo local, para todo $j = 1, ..., n$ existe una vecindad W_j de y_j y una vecindad abierta U_j de x, tal que $p\colon W_j \to U_j$ es un homeomorfismo. Podemos suponer que las W_j son disjuntas dos a dos. Ahora $W_1 \cup ... \cup W_n$ es una vecindad de $p^{-1}(x)$. Por lo tanto por el Lema 3.18 b) existe una vecindad $U \subseteq U_1 \cap ... \cap U_n$ de x con $p^{-1}(U) \subseteq W_1 \cup ... \cup W_n$. Si definimos $V_j := W_j \cap p^{-1}(U)$ entonces los V_j son conjuntos abiertos disjuntos con $p^{-1}(U) = V_1 \cup ... \cup V_n$ y todos los mapeos $p\colon V_j \to U$, $j = 1, ..., n$ son homeomorfismos. $\square$

Definición 3.20 (Cubriente ramificado)**.** Un mapeo holomorfo propio no constante $f\colon Y \to X$ entre dos superficies de Riemann será llamado *cubriente ramificado holomorfo* o simplemente *cubriente ramificado*. En caso de que queramos enfatizar que no tiene puntos críticos diremos explicitamente que f es un cubriente holomorfo no ramificado y cuando hablemos de un cubriente topológico, lo haremos con respecto a la Definición 3.9.

Supongamos que X y Y son superficies de Riemann y $f\colon Y \to X$ es un cubriente ramificado, denote por A al conjunto de puntos críticos de f y B sus valores críticos. Sea $p \in Y$, por el Teorema 1.13 existen cartas (U, φ) y

(V, ψ) centradas en p y $f(p)$, respectivamente, tal que el siguiente diagrama conmuta:

(22)
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "z^k"] & \varphi(V) \end{tikzcd}$$

como φ y ψ son homemomorfismos se sigue que $(U - \{p\}) \cap A = \emptyset$ por lo tanto A es discreto. Si p está en $X - A$, el entero k en el diagrama anterior es igual a uno, luego $U \cap A = \emptyset$, por lo tanto A es cerrado. Como f es propio B es también cerrado. Sea $y \in B$, para cada punto $x \in p^{-1}(y)$ existe un abierto U_x tal que U_x no contiene otros puntos críticos de f, luego por el Lema 3.18 (b) existe U vecindad de y tal que $p^{-1}(U) \subset \bigcup U_x$, por lo tanto U no contiene otros valores críticos. Entonces B también es discreto.

Sea $X' := X - B$ y $Y' := Y - f^{-1}(B)$. Entonces $f\colon Y' \to X'$ es un homeomorfismo local y propio, por el Teorema 3.19 se tiene que esta función es un mapeo cubriente no ramificado, y por el Lema 3.18 sus fibras son finitas. El Teorema 3.13 nos dice que existe un entero n, el número de hojas del cubriente, tal que cada valor $c \in X'$ tiene exactamente n preimágenes. A continuación veremos que también para un valor crítico existen n preimágenes contando multiplicidades. Para un punto $x \in X$ el número de preimágenes de x contadas con multiplicidad se define como

(23)
$$\sum_{y \in f^{-1}(x)} \operatorname{mult}_y(f).$$

Teorema 3.21. *Supongamos X y Y superficies de Riemann y $f\colon Y \to X$ un mapeo holomorfo propio no constante. Entonces el número de preimágenes contadas con multiplicidad es constante.*

Demostración. Siguiendo la notación anterior, sea n el número de hojas del cubriente $f\colon Y' \to X'$. Sea c un punto crítico de f, digamos que $y_1, ..., y_r$ son las preimágenes de c con $k_j := \operatorname{mult}_{y_j}(f)$, para cada j existe U_j y V_j vecindades de y_j y c respectivamente tal que cada punto distinto de c en V_j tiene k_j preimágenes en U_j tal como lo indica el siguiente diagrama:

(24)
$$\begin{tikzcd} U_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & V_j \arrow[d, "\psi_j"] \\ \varphi_j(U_j) \arrow[r, "z^{k_j}"] & \varphi_j(V_j) \end{tikzcd}$$

Existe un abierto U de c que cumple que su preimagen está contenida en la unión de las U_j, luego cualquier punto c' en U distinto de c tiene k_j preimágenes en U_j. Por lo tanto el número de preimágenes de c' es $k_1 + \cdots +$

k_r. Como el número de preimágenes de c' es n concluimos que n es igual a la suma $k_1 + \cdots + k_r$. $\square$

Definiremos el *grado* de un cubriente ramificado como el número de preimágenes de cualquier punto contadas con multiplicidad. Por el teorema anterior este número está bien definido.

Corolario 3.22. *Cualquier función meromorfa $f\colon X \to \hat{\mathbb{C}}$ en una superficie de Riemann compacta, tiene el mismo número de ceros y de polos contados con multiplicidad.*

Demostración. Como X es compacta f es una función propia, entonces por el Teorema anterior el número de preimágenes del 0 y el ∞ son las mismas contadas con multiplicidad, estas preimágenes son por definición los ceros y polos de la función. $\square$

Corolario 3.23. *Cualquier polinomio de grado n*

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z] \tag{25}$$

tiene n raíces contadas con multiplicidad.

Demostración. El polinomio $p(z)$ es una función meromorfa sobre la esfera de Riemann que tiene al infinito como su único polo. El orden de este polo se calcula como el orden de $p(1/z)$ en 0. Pero

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z] \tag{26}$$

tiene un polo de orden n en 0. Por el Corolario 3.22 el número de ceros de $p(z)$ contados con multiplicidad también tiene que ser n. $\square$

Capítulo 4

El cubriente universal y transformaciones de cubierta

1. Existencia del cubriente universal

Definición 4.1. Supongamos que X y Y son espacios topológicos conexos y $p\colon Y \to X$ es un mapeo cubriente. Decimos que $p\colon Y \to X$ es el *cubriente universal* de X si se satisface la siguiente propiedad universal: para cualquier mapeo cubriente $q\colon Z \to X$, con Z conexo, y cualquier elección de puntos $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ con $p(y_0) = q(z_0)$ existe exactamente un mapeo continuo que preserva fibras $f\colon Y \to Z$ tal que $f(y_0) = z_0$ (Vea el diagrama 27).

(27)
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

En otras palabras, un cubriente es universal si puede levantarse con respecto a cualquier cubriente conexo. Esta propiedad nos garantiza la unicidad en el siguiente sentido, si $q\colon Z \to X$ es otro cubriente universal y z_0 es un punto en Z, de la definición existen $f\colon Y \to Z$ y $g\colon Z \to Y$ mapeos continuos que preservan fibras y que mandan y_0 en z_0 y z_0 en y_0, respectivamente. Entonces las composiciones $g \circ f\colon Y \to Y$ y $f \circ g\colon Z \to Z$ son mapeos continuos que preservan fibras y fijan un punto, de la unicidad del levantamiento se tiene que $g \circ f = \mathrm{Id}_Y$ y $f \circ g = \mathrm{Id}_Z$. Por lo tanto $f\colon Y \to Z$ es un homeomorfismo que preserva fibras.

Del Corolario 3.16 se sigue directamente el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Supongamos que X y Y son variedades conexas, Y simplemente conexa y $p\colon Y \to X$ un mapeo cubriente, entonces p es el cubriente universal de X.*

A continuación probaremos que una variedad conexa siempre tiene un cubriente universal.

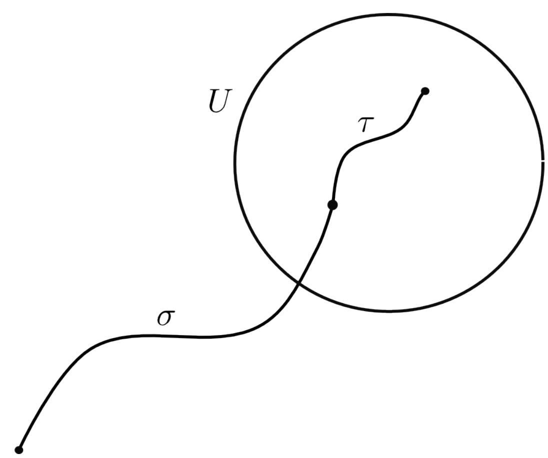

Figura 1. Vecindad de $\mathrm{cl}(\sigma)$

Teorema 4.3 (Existencia del cubriente universal)**.** *Supongamos que X es una variedad conexa, entonces existe una variedad $\tilde{X}$ conexa y simplemente conexa y un mapeo cubriente $p\colon \tilde{X} \to X$.*

Demostración. Fijemos un punto x_0 en X. Definamos $\tilde{X}$ como el conjunto de todas las clases de homotopía de curvas que inician en x_0. Definamos $p\colon \tilde{X} \to X$ como la aplicación que asigna a la clase de homotopía de una curva σ su punto final $\sigma(1)$. Vamos a definir una topología en $\tilde{X}$ de tal forma que $\tilde{X}$ sea una variedad conexa y simplemente conexa y $p\colon \tilde{X} \to X$ sea un mapeo cubriente.

Sea σ una curva con punto inicial x_0 y $U \subset X$ una vecindad abierta conexa y simplemente conexa del punto final de σ, definamos $[U, \sigma]$ como el conjunto de clases de homotopía de curvas de la forma $\sigma \cdot \tau$ donde τ inicia en el punto final de σ y está contenida en U Ver Figura 1. Observemos que este conjunto sólo depende de la clase de homotopía de σ ya que si $\sigma \sim \sigma'$, entonces $\sigma \cdot \tau \sim \sigma' \cdot \tau$. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todas las $[U, \sigma]$.

Afirmación (a). $\mathcal{B}$ es base para una topología en $\tilde{X}$.

i) Como la clase de σ está en $[U, \sigma]$, para cualquier subconjunto abierto U conexo y simplemente conexo que tenga al punto final, se sigue que $\tilde{X} = \bigcup \mathcal{B}$.

ii) Supongamos que la clase de homotopía de γ está en $[U, \sigma]$ y $[U', \sigma']$ entonces $\gamma \sim \sigma \cdot \tau$ y $\gamma \sim \sigma' \cdot \tau'$, para algun τ en U y algún τ' en U'. Si W es una vecindad abierta conexa y simplemente conexa alrededor del punto final de γ y contenida en $U \cap U'$ se tiene que $[W, \gamma] \subset [U, \sigma] \cap [U', \sigma']$, ya que para cualquier τ_0 contenido en W

$$\gamma \cdot \tau_0 \sim \sigma \cdot (\tau \cdot \tau_0), \quad \gamma \cdot \tau_0 \sim \sigma' \cdot (\tau' \cdot \tau_0). \tag{28}$$

Afirmación (b). La aplicación de $p\colon \tilde{X} \to X$ es un homeomorfismo local. Primero notemos que $p\colon [U, \sigma] \to U$ es suprayectiva porque U es conexo por trayectorias. Por otra parte, si $\sigma \cdot \tau(1) = \sigma \cdot \tau'(1)$ entonces τ y τ' tienen los mismos puntos extremos, pero U es simplemente conexo, entonces $\tau \sim \tau'$. Por lo tanto la aplicación es inyectiva. Esto también prueba que es un homeomorfismo porque manda elementos de la base de $[U, \sigma]$ en elementos de la base de U y recíprocamente.

Afirmación (c) $\tilde{X}$ es Hausdorff. Sean σ y σ' dos curvas no homotópicas en X cuyo punto inicial es x_0. Si los puntos finales de dichas curvas son distintos, podemos tomar U y U' ajenas, entonces $[U, \sigma] \cap [U', \sigma']$ es vacía. En otro caso, supongamos que tienen los mismo puntos finales, tomamos un abierto U conexo y simplemente conexo y veamos que $[U, \sigma]$ y $[U, \sigma']$ son ajenos. Supongamos que existe τ y τ' contenidas en U, tal que $\sigma \cdot \tau \sim \sigma' \cdot \tau'$, pero U es simplemente conexa entonces $\tau \sim \tau'$, por lo tanto $\sigma \sim \sigma'$. Esto contradice que σ no es homotópica a σ'.

Afirmación (d). $\tilde{X}$ es conexo y el mapeo $p\colon \tilde{X} \to X$ tiene la propiedad de levantamiento de curvas. Vamos a probar que $\tilde{X}$ es conexo por trayectorias. Sea σ una curva con punto inicial x_0 y defina $\sigma_s(t)$ como en (11):

$$u_s(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [0, s] \\ u(s) & \text{si } t \in [s, 1]. \end{cases}$$

La aplicación que asigna s a la clase de homotopía de σ_s es una curva en $\tilde{X}$. Por definición, cada σ_s inicia en x_0, además es continua, ya que si tomamos la vecindad $[U, \sigma_{s_0}]$, para algún $s_0 \in [0, 1]$, y tomamos $p\colon [U, \sigma_{s_0}] \to U$ se tiene que la aplicación anterior es igual $p^{-1} \circ \sigma$. Esto prueba que $\tilde{X}$ es conexo por trayectorias porque conectamos a la clase de homotopía σ arbitraria con la clase de homotopia de la curva constante x_0, de hecho acabamos de probar que σ_s es un levantamiento de σ. Del Teorema 3.17 y de lo anterior se sigue que $p\colon \tilde{X} \to X$ es un mapeo cubriente.

Afirmación (e). $\tilde{X}$ es simplemente conexo. Sea σ un lazo en x_0, por lo anterior si el levantamiento de σ es un lazo basado en la clase de homotopía de x_0, entonces $\sigma_0 \sim \sigma_1$, pero $\sigma_0 = x_0$ y $\sigma_1 = \sigma$. El Corolario 3.12, implica que la imagen de $\pi_1(\tilde{X}, \mathrm{cl}(x_0))$ bajo p_* es trivial, pero como p es cubriente este homeomorfismo es inyectivo. Por lo tanto $\tilde{X}$ es simplemente conexo. $\square$

Observación 4.4. En particular, como una superficie de Riemann es una variedad conexa siempre podemos encontrar su cubriente universal y por el Teorema 3.4 dicho cubriente universal será también una superficie de Riemann.

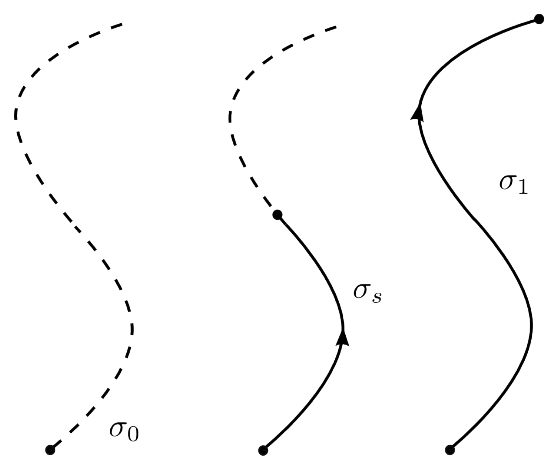

Figura 2. Levantamiento σ_s de σ en $\tilde{X}$

2. La correspondencia de Galois

Teorema 4.5. *Supongamos que X es una variedad conexa, entonces para cualquier subgrupo $H \subset \pi_1(X, x_0)$ hay un espacio cubriente conexo $p_H\colon Y_H \to X$ tal que $p_{H*}(\pi_1(Y_H, y_H)) = H$ para una adecuada elección de un punto base y_H.*

Demostración. Como X es una variedad conexa podemos construir el cubriente universal $\tilde{X}$ con su mapeo cubriente $p\colon \tilde{X} \to X$ como en el Teorema 4.3. En este espacio vamos a identificar a la clase de homotopía de σ con la clase de homotopía de σ' si tienen los mismos puntos finales y $\mathrm{cl}(\sigma \cdot \sigma'^{-}) \in H$. Definamos Y_H como el espacio cociente de $\tilde{X}$ módulo la identificación anterior y denotaremos por $\pi\colon \tilde{X} \to Y_H$ la proyección canónica. Sea $[U, \sigma]$ un elemento de la base de la topología de $\tilde{X}$. Afirmamos que $\pi([U, \sigma])$ es un subconjunto abierto de Y_H: supongamos que $\pi(\mathrm{cl}(\sigma')) \in \pi([U, \sigma])$.

(i) De la definición tenemos que $\pi(\mathrm{cl}(\sigma' \cdot \tau)) \in \pi([U, \sigma])$ para cualquier τ contenida en U con $\tau(0) = \sigma'(1)$. Por lo tanto, $\pi([U, \sigma']) \subset \pi([U, \sigma])$.

(ii) Otra observación que se sigue de la definición es que $\pi(\mathrm{cl}(\sigma)) \in \pi([U, \sigma'])$.

De los dos incisos anteriores concluimos que $\pi([U, \sigma']) = \pi([U, \sigma])$, por lo tanto

$$\pi^{-1}(\pi([U, \sigma])) = \bigcup_{\sigma'} [U, \sigma'], \tag{29}$$

donde las σ' cumplen que $\pi(\mathrm{cl}(\sigma')) \in \pi([U, \sigma])$. Por lo tanto $\pi([U, \sigma])$ es abierto. Por lo tanto $\pi\colon [U, \sigma] \to \pi([U, \sigma])$ es un homeomorfismo, en particular $\pi\colon \tilde{X} \to Y_H$ es un homeomorfismo local. Definamos $p_H\colon Y_H \to X$ como la aplicación que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & Y_H \arrow[dl, "p_H"] \\ X & \end{tikzcd} \tag{30}$$

es decir, manda a la clase de equivalencia de $\mathrm{cl}(\sigma)$ a $\sigma(1)$, como p y π son homeomorfismos locales p_H también.

Veamos que Y_H es Hausdorff. Supongamos que $\mathrm{cl}(\sigma)$ no está identificado con $\mathrm{cl}(\sigma')$, entonces tenemos dos posibilidades, la primera es que σ y σ' tienen puntos finales distintos, en este caso podemos tomar a dos abiertos conexos y simplemente conexos U y U' que son ajenos y que tienen a dichos puntos extremos. Podemos verificar que $\pi([U, \sigma])$ y $\pi([U', \sigma'])$ son ajenos. La segunda posibilidad es que tengan los mismos puntos extremos, en este caso podemos tomar un abierto U conexo y simplemente conexo y tendremos que $\pi([U, \sigma])$ y $\pi([U, \sigma'])$ son ajenos.

Si σ es una curva en X con punto inicial x_0 y $\mathrm{cl}(\sigma_s)$ es el levantamiento de σ en el punto $\mathrm{cl}(x_0)$ entonces $\pi(\mathrm{cl}(\sigma_s))$ es un levantamiento de σ en Y_H con punto inicial $y_H := \pi(\mathrm{cl}(x_0))$. Por lo tanto p_H tiene la propiedad de levantamiento de curvas, luego por el Teorema 3.17 p_H es un cubriente. Dado un lazo σ basado en x_0, vimos en la última parte de la prueba anterior que su levantamiento a Y_H va a ser un lazo si y sólo si $\pi(\mathrm{cl}(\sigma)) = \pi(\mathrm{cl}(x_0))$, esto es si y sólo si $\mathrm{cl}(\sigma) \in H$. Por lo tanto por el Corolario 3.12 $p_{H*}(\pi_1(Y_H, x_H)) = H$. $\square$

Siguiendo un argumento similar al que se dio después de la Definición 4.1 y aplicando el Teorema 3.15, tenemos el siguiente lema:

Lema 4.6 (existencia de levantamientos). *Si X es localmente conexO por trayectorias y Y_1, Y_2 son espacios conexos, además si $p_1\colon Y_1 \to X$ y $p_2\colon Y_2 \to$*

X son mapeos cubrientes. Entonces existe un homeomorfismo que preserva fibras $f\colon Y_1 \to Y_2$ que manda y_1 en y_2 si y sólo si $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.

El siguiente resultado nos muestra la relación que existe entre las imágenes bajo el homomorfismo p_* de dos grupos fundamentales basados en puntos que están en una misma fibra.

Lema 4.7. *Sea $p\colon Y \to X$ un mapeo cubriente. Considere dos puntos y, y' en la fibra de un punto $x \in X$. Si σ es una trayectoria que inicia en y y termina en y', entonces*

$$p_*(\pi_1(Y, y')) = \mathrm{cl}(p \circ \sigma)^{-1} \cdot p_*(\pi_1(Y, y)) \cdot \mathrm{cl}(p \circ \sigma). \tag{31}$$

Demostración. Como $\varphi_\sigma\colon \pi_1(Y, y) \to \pi_1(Y, y')$ es un isomorfismo (ver Definición 2.10 y Teorema 2.11), $\pi_1(Y, y')$ es igual a las clases de homotopía de lazos de la forma $\sigma^- \cdot \tau \cdot \sigma$ con τ un lazo en y. Luego la imagen de $\pi_1(Y, y')$ bajo p_* son clases de homotopía de curvas de la forma $p(\sigma)^{-1} \cdot p(\tau) \cdot p(\sigma)$, esto es justamente:

$$\mathrm{cl}(p \circ \sigma)^{-1} p_*(\pi_1(Y, y))\, \mathrm{cl}(p \circ \sigma). \tag{32}$$

□

Teorema 4.8 (La correspondencia de Galois)**.** *Sea X una variedad conexa y x_0 un punto en X, la correspondencia que asigna a un cubriente $p\colon Y \to X$ el grupo $p_*(\pi_1(Y, y)) \subset \pi_1(X, x_0)$, para algún $y \in Y$ en la fibra de x_0, induce una correspondencia uno a uno entre clases de isomorfismos de cubrientes no ramificados conexos de X en clases de conjugación de subgrupos del grupo fundamental de X basado en x_0.*

Demostración. Primero veamos que este mapeo está bien definido. Sean $p_1\colon Y_1 \to X$ y $p_2\colon Y_2 \to X$ dos cubrientes isomorfos. Sean y_1 y y_2 en Y_1 y Y_2, respectivamente, contenidos en la fibra de x_0, entonces existe un homeomorfismo que preserva fibras $f\colon Y_1 \to Y_2$. Este homeomorfismo induce un isomorfismo en los grupos fundamentales, tenemos que $f_*(\pi_1(Y_1, y_1)) = \pi_1(Y_2, f(y_1))$. Como $p_{2*} \circ f_* = p_{1*}$ y la imagen de $\pi_1(Y_2, f(y_1))$ bajo p_{2*} es conjugado a $\pi_1(Y_2, y_2)$ según el Lema 4.7, se sigue que $p_{1*}(\pi_1(Y, y_1))$ es conjugado de $p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$.

La aplicación es suprayectiva por el Teorema 4.5. Veamos que es inyectiva. Supongamos que $p_1\colon Y_1 \to X$ y $p_2\colon Y_2 \to X$ son dos cubrientes tales que para algunos $y_1 \in Y_1$ y $y_2 \in Y_2$ en la fibra de x_0 cumplen que $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1))$ y $p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))$ son conjugados. Entonces existe σ con punto inicial y_2 y punto final algún y' en la fibra de x_0, tal que

$$p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = \mathrm{cl}(p \circ \sigma)^{-1} p_{2*}(\pi_1(Y_2, y_2))\, \mathrm{cl}(p \circ \sigma), \tag{33}$$

del Lema 4.7 se sigue que $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1)) = p_{2*}(\pi_1(Y_2, y'))$, Por el Lema 4.6 existe un homeomorfismo que preserva fibras $f\colon Y_1 \to Y_2$ que manda y_1 a y'. Por lo tanto la aplicación es inyectiva. Esto demuestra la correspondencia uno a uno. $\square$

3. Transformaciones de cubierta

Definición 4.9. Supongamos que X y Y son espacios topológicos y $p\colon Y \to X$ es un mapeo cubriente. Una *transformación de cubierta o transformación deck* del cubriente, es un homeomorfismo $f\colon Y \to Y$ que preserva fibras. Con la operación composición de mapeos, el conjunto de todas las transformaciones de cubiertas de $p\colon Y \to X$ forman un grupo el cual denotaremos por $\mathrm{Deck}(Y/X)$. Si existe alguna confusión, entonces escribiremos explicitamente $\mathrm{Deck}(p\colon Y \to X)$ en lugar de $\mathrm{Deck}(Y/X)$.

Definición 4.10. Supongamos que X y Y son espacios de Hausdorff y $p\colon Y \to X$ es un mapeo cubriente. El cubriente es llamado *de Galois* (los terminos *normal* y *regular* son también usados comunmente) si para cualquier par de puntos y_0, $y_1 \in Y$ con $p(y_0) = p(y_1)$ existe una transformación de cubierta $f\colon Y \to Y$ tal que $f(y_0) = y_1$, es decir, actúa transitivamente en las fibras.

Observación 4.11. Por el Teorema 3.6 a lo más existirá una transformación de cubierta $f\colon Y \to Y$ tal que $f(y_0) = y_1$.
Por el Corolario 3.16, si $p\colon \tilde{X} \to X$ es el cubriente universal entonces es de Galois.

Definición 4.12. Supongamos que X y Y son espacios topológicos, $p\colon Y \to X$ es un mapeo cubriente y $G \subset \mathrm{Deck}(Y/X)$. Dos puntos y, $y' \in Y$ se dicen *equivalentes modulo* G, si existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma(y) = y'$, es decir, están en la misma órbita bajo la acción de G.

Teorema 4.13. *Supongamos que X y Y son variedades conexas, $q\colon Y \to X$ es un mapeo cubriente y $p\colon \tilde{X} \to X$ es un cubriente universal. Sea $f\colon \tilde{X} \to Y$ el mapeo continuo que preserva fibras dada por la definición del cubriente universal. Entonces f es un mapeo cubriente y existe un subgrupo $G \subset \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ tal que dos puntos x y $x' \in \tilde{X}$ son mandados al mismo punto por f precisamente si ellos son equivalentes modulo G.*

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

(34)
$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "q"] \\
\tilde{X} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"] & X,
\end{tikzcd}$$

podemos notar que f será un homeomorfismo local porque p y q lo son. Veamos que f tiene la propiedad de levantamiento de curvas, considere una curva σ en Y con punto inicial y_0 y un punto $x_0 \in \tilde{X}$ en la fibra de y_0, puesto que $p\colon \tilde{X} \to X$ es un mapeo cubriente, existe un levantamiento $\sigma' \in \tilde{X}$ con punto inicial x_0 de la curva $q \circ \sigma$ entonces la curva $f \circ \sigma'$ y $\sigma \in Y$ son ambos levantamientos de la curva $q \circ \sigma$ y tienen el mismo punto inicial y_0. Por lo tanto son iguales. Por lo tanto es un cubriente. Sea $G := \mathrm{Deck}(\tilde{X}/Y)$ este es un subgrupo de $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ porque f preserva fibras; puesto que $\tilde{X}$ es simplemente conexa $f\colon \tilde{X} \to Y$ es el cubriente universal de Y, entonces es Galois por la Observación 4.11. Entonces $f(x) = f(x')$ precisamente si x y x' son equivalentes módulo G. $\square$

Vamos a usar el Teorema 4.13 para determinar todos los espacios cubrientes del disco unitario perforado $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z| < 1\}$.

Teorema 4.14. *Supongamos que X es una superficie de Riemann y $f\colon X \to \mathbb{D}^*$ es un cubriente holomorfo no ramificado. Entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(i) Si la cubierta tiene un número infinito de hojas, existe un biholomorfismo $\varphi\colon X \to \mathbb{H}$ de X al semiplano superior tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

(35)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{H} \arrow[dl, "\exp(iz)"] \\ & \mathbb{D}^* & \end{tikzcd}$$

(ii) Si el cubriente es de grado finito con k hojas, entonces existe un biholomorfismo $\varphi\colon X \to \mathbb{D}^*$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

(36)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{D}^* \arrow[dl, "z^k"] \\ & \mathbb{D}^* & \end{tikzcd}$$

Demostración. Puesto que $\exp(iz)\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$ es el cubriente universal, existe un mapeo holomorfo $\psi\colon \mathbb{H} \to X$ tal que $\exp(iz) = f \circ \psi(z)$. Sea G subgrupo de $\mathrm{Deck}(\mathbb{H}/\mathbb{D}^*)$ obtenido del Teorema 4.13.

(i) Si G consiste sólo de la identidad, entonces $\psi\colon \mathbb{H} \to X$ tiene grado uno, por lo tanto es un biholomorfismo.

(ii) Sabemos que

(37)
$$\mathrm{Deck}(\mathbb{H}/\mathbb{D}^*) = \{\tau_n\colon n \in \mathbb{Z}\},$$

donde $\tau_n \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es la traslación $\tau_n(z) = z + 2\pi n$. Entonces si el grupo G no es la identidad, existe un número natural $k \geq 1$ tal que

$$G = \{\tau_{nk} \colon n \in \mathbb{Z}\}, \tag{38}$$

esto último es porque todos los subgrupos de los enteros son subgrupos cíclicos. Sea $g \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$ el mapeo cubriente definido como $g(z) = \exp(iz/k)$ entonces $g(z) = g(z')$ precisamente si z y z' son equivalentes módulo G. Entonces podemos definir un mapeo biyectivo $\varphi \colon X \to \mathbb{D}^*$ de tal manera que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{H} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathbb{D}^*. \end{tikzcd} \tag{39}$$

Puesto que ψ y g son biholomorfismos locales, φ es un biholomorfismo. Por último checamos que el diagrama (36) es conmutativo: sea $x \in X$, y sea $z \in \mathbb{H}$ tal que $\psi(z) = x$ entonces $\varphi(x)^k = (\varphi \circ \psi(z))^k = g(z)^k = \exp(iz)$, pero por hipótesis $\exp(iz) = f \circ \psi(z) = f(x)$, por lo tanto $f(x) = \varphi(x)^k$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Teorema 4.15. *Supongamos que X es una superficie de Riemann, $\mathbb{D}$ el disco unitario y $f \colon X \to \mathbb{D}$ un mapeo holomorfo propio que es no ramificado en $\mathbb{D}^*$. Entonces existe un número natural $k \geq 1$ y un biholomorfismo $\varphi \colon X \to \mathbb{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{D} \arrow[dl, "z^k"] \\ & \mathbb{D} & \end{tikzcd} . \tag{40}$$

Demostración. Sea $X^* := f^{-1}(\mathbb{D}^*)$. Entonces $f \colon X^* \to \mathbb{D}^*$ es un cubriente holomorfo no ramificado. Por el teorema anterior hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{D}^* \arrow[dl, "z^k"] \\ & \mathbb{D}^* & \end{tikzcd} . \tag{41}$$

para algún biholomorfismo $\varphi \colon X^* \to \mathbb{D}^*$. Afirmamos que $f^{-1}(0)$ consiste de sólo un punto. Suponga lo contrario que $f^{-1}(0)$ consiste en n puntos de $b_1, \ldots b_n$ donde $n \geq 2$, tomemos unas vecindades abiertas disjuntas V_i de cada b_i, por el Lema 3.18 existe un disco $D(r)$ con centro en 0 y de radio r contenido en $\mathbb{D}$ tal que

$$f^{-1}(D(r)) \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n. \tag{42}$$

Sea $D(r)^* = D(r) - \{0\}$, puesto que $f^{-1}(D(r)^*)$ es homeomorfo a la preimagen de $D(r)^*$ bajo z^k, este conjunto es conexo. Puesto que cada b_i son puntos de acumulación de $f^{-1}(D(r)^*)$, $f^{-1}(D(r))$ es también conexo, pero esto contradice (42). Por lo tanto $f^{-1}(0)$ tiene sólo un punto b en X. Entonces definiendo $\varphi(b) := 0$, por el teorema de extensión de Riemann podemos extender de forma holomorfa a $\varphi\colon X^* \to \mathbb{D}^*$ a un biholomorfismo $\varphi\colon X \to \mathbb{D}$ que hace el diagrama (40) conmutativo. $\square$

4. Completación de cubrientes

Teorema 4.16. *Supongamos que X es una superficie de Riemann, $A \subseteq X$ es un subconjunto discreto y cerrado y sea $X' = X - A$. Supongamos que Y' es otra superficie de Riemann y $\pi'\colon Y' \to X'$ es un cubriente holomorfo propio no ramificado. Entonces existe una superficie de Riemann Y que contiene a Y' y un cubriente holomorfo ramificado en A $\pi\colon Y \to X$ que extiende a π'.*

Demostración. Para cualquier $a \in A$ escojamos una vecindad coordenada (U_a, z_a) en X con las siguientes porpiedades $z_a(a) = 0$, $z_a(U_a)$ es el disco unitario en $\mathbb{C}$, y $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$ si $a \neq a'$. Sea $U_a^* = U_a - \{a\}$. Puesto que $\pi'\colon Y' \to X'$ es propio, $\pi'^{-1}(U_a^*)$ consiste de un número finito de componentes conexas $V_{a\nu}^*$, para $\nu = 1, ..., n(a)$. Para cualquier ν el mapeo $\pi'\colon V_{a\nu}^* \to U_a^*$ es un cubriente no ramificado, digamos que su número de hojas es $k_{a\nu}$. Por el Teorema 4.14 existe un biholomorfismo $\zeta_{a\nu}\colon V_{a\nu}^* \to \mathbb{D}^*$ de $V_{a\nu}^*$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\text{(43)}\qquad \begin{array}{ccc} V_{a\nu}^* & \xrightarrow{\zeta_{a\nu}} & \mathbb{D}^* \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta^{k_{a\nu}}} \\ U_a^* & \xrightarrow{z_a} & \mathbb{D}^* \end{array} .$$

Ahora agreguemos unos puntos ideales $p_{a\nu}$, $a \in A$ y $\nu = 1, \cdots, n(a)$, es decir, puntos distintos de algún conjunto ajeno a Y'. Entonces en $Y = Y' \cup \{p_{a\nu}\colon a \in A, \nu = 1, \cdots n(a)\}$, existe una topología con la siguiente propiedad. Si W_i, con $i \in I$ es una base de vecindades de a, entonces

$$\text{(44)}\qquad \{p_{a\nu} \cup (\pi'^{-1}(W_i)) \cap V_{a\nu}^*\}, i \in I,$$

es una base de vecindades $p_{a\nu}$ y en Y' induce la topología original. Este hace a Y en un espacio de Hausdorff. Definamos $\pi\colon Y \to X$, $\pi(y) = \pi'(y)$ para $y \in Y'$ y $\pi(p_{a\nu}) = a$. Por la definición de la topología π es una función continua y propia. Para convertir a Y en una superficie de Riemann, agreguemos a las cartas de la estructura compleja de Y' las siguientes cartas. Sea $V_{a\nu} =$

$V_{a\nu}^* \cup \{p_{a\nu}\}$ y sea

$$\zeta_{a\nu} \colon V_{a\nu} \to \mathbb{D} \tag{45}$$

la extensión del mapeo $\zeta_{a\nu} \colon V_{a\nu}^* \to \mathbb{D}^*$ descritas anteriormente, que se obtienen de definir $\zeta_{a\nu}(p_{a\nu}) = 0$. Puesto que este último mapeo es un holomorfismo con respecto a la estructura compleja de Y', las nuevas cartas $\zeta_{a\nu} \colon V_{a\nu} \to \mathbb{D}$ son compatibles con las cartas de Y'. El mapeo $\pi \colon Y \to X$ es holomorfo en Y' porque extiende a π' y es holomorfo en las $p_{a\nu}$ porque el siguiente diagrama obtenido de (43) conmuta:

$$\begin{tikzcd} {V^*}_{a\nu} \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\zeta_{a\nu}"'] & U_a^* \arrow[d, "z_a"] \\ \mathbb{D}^* \arrow[r, "\zeta^{k_{a\nu}}"] & \mathbb{D}^*. \end{tikzcd} \tag{46}$$

$\square$

A continuación probaremos que la completación del cubriente que construimos en el teorema anterior es único salvo isomorfismo.

Teorema 4.17. *Supongamos que X, Y y Z son superficies de Riemann y $\pi \colon Y \to X$, $\tau \colon Z \to X$ son cubrientes holomorfos propios. Sea $A \subset X$ un subconjunto discreto y cerrado y sea $X' := X - A$, $Y' := \pi^{-1}(X')$ y $Z' := \tau^{-1}(X')$. Entonces cualquier bioholomorfismo que preserva fibras $\sigma' \colon Y' \to Z'$ puede extenderse a un biholomorfismo que preserva fibras $\sigma \colon Y \to Z$. En particular cualquier transformación de cubierta $\sigma' \in \mathrm{Deck}(Y'/X')$ puede extenderse a una transformación de cubierta $\sigma \in \mathrm{Deck}(Y/X)$.*

Demostración. Supongamos que $a \in A$ y (U, z) es una vecindad coordenada de a tal que $z(a) = 0$ y $z(U)$ es el disco unitario. Sea $U^* = U - \{a\}$. Además podemos asumir que U es suficientemente pequeño tal que π y τ no tienen valores críticos en U^*. Sean $V_1, \cdots V_n$ (respectivamente $W_1, \cdots, W_n$) componentes conexas de $\pi^{-1}(U)$ (respectivamente de $\tau^{-1}(U)$). Entonces $V_\nu^* := V_\nu - \pi^{-1}(a)$ (resp. $W_\mu^* := W_\mu - \tau^{-1}(a)$) son las componentes conexas de $\pi^{-1}(U^*)$ (respectivamente $\tau^{-1}(U^*)$). Puesto que $\sigma' \colon \pi^{-1}(U^*) \to \tau^{-1}(U^*)$ es biholomorfismo y $n = m$ y uno puede reenumerar de tal manera que $\sigma'(V_\nu^*) = W_\nu^*$. Puesto que $\pi \colon V_\nu^* \to U^*$ es un cubriente holomorfo no ramificado, $V_\nu \cap \pi^{-1}(a)$ (respectivamente $W_\nu \cap \tau^{-1}(a)$) consiste por el Teorema 4.15 de exactamente de un punto b_ν (respectivamente c_ν) entonces $\sigma' \colon \pi^{-1}(U^*) \to \tau^{-1}(U^*)$ puede continuarse biyectivamente al mapeo $\sigma \colon \pi^{-1}(U) \to \tau^{-1}(U)$ que asigna a b_ν el punto c_ν, por el Teorema de Extensión de Riemann es un biholomorfismo. Si uno ahora aplica la construcción a cualquier punto $a \in A$, entonces uno obtiene la continuación $\sigma \colon Y \to Z$ que se buscaba. $\square$

Bibliografía

[Ah66] Ahlfors, Lars. *Complex analysis.* 2nd Edition. McGraw-Hill (1966).

[For81] Forster, Otto. *Lectures on Riemann surfaces.* Graduate Texts in Mathematics, 81. Springer-Verlag, New York (1981).

[Oss] Osserman, Brian. *Branched covers of the Riemann Sphere.*