



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

UN MODELO CUÁNTICO DE KALUZA KLEIN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ROCÍO DEL PILAR AGUILAR BENÍTEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. MICHO DURDEVICH LUCICH
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. A 16 DE OCTUBRE DE 2017
CIUDAD DE MÉXICO



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Un Modelo Cuántico de Kaluza-Klein

Rocío del Pilar Aguilar Benítez

16 de octubre de 2017

Índice

1. Introducción	4
1.1. Mecánica Cuántica y Geometría No Conmutativa	5
1.2. Relatividad y geometría no conmutativa	10
1.3. Las ideas de Kaluza-Klein	11
1.4. El mecanismo de Higgs	12
1.5. El principio de Acción Mínima	13
1.6. Las ideas de Yang-Mills	14
2. Algebras C^*	16
3. La variedad clásica dotada de simetrías cuánticas	20
3.1. El espacio cuántico asociado a $C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	20
3.2. Cálculo Diferencial Cuántico	21
3.2.1. Algebra de Chevalley sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	21
3.3. Cálculo de primer orden en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	23
3.3.1. Cálculo diferencial cuántico sobre \mathcal{A}	26
3.3.2. Realidad	27
3.4. Métrica en \mathcal{A} y producto escalar en $\Omega_D(\mathcal{A})$	28
3.4.1. Métrica y producto escalar en $\Omega_D(C^\infty(V))$	28
3.4.2. Producto escalar en $\Omega_D(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$	29
3.4.3. Métrica en $\Omega_D(\mathcal{A})$	31

3.5.	Conexiones en \mathcal{A} -módulos hermitianos	32
3.5.1.	Módulos \mathcal{A} -hermitianos	32
3.5.2.	Conexiones	33
3.5.3.	Conexiones en los \mathcal{A} -módulos libres hermitianos de rango r . .	34
3.5.4.	Conexiones planas hermitianas en \mathcal{A}^r	35
3.5.5.	Acción de Maxwell	36
3.5.6.	Acción de Yang-Mills	37
4.	Espacio de dos puntos con un cálculo diferencial cuántico	38
5.	Observaciones Sobre Envoltentes Diferenciales	43
5.1.	Modelo con el álgebra envolvente universal diferencial	43
5.2.	Conexiones en el álgebra universal diferencial	44
A.	Calculos Cuánticos	44
A.1.	Acerca de Cálculos Diferenciales Cuánticos	44
A.2.	Algebra de Chevalley	46
A.3.	Cohomología de De Rham	47
A.4.	Envolvente Universal Diferencial	48
A.5.	Algebra universal diferencial	48
A.6.	Algebra Exterior de Grassmann	49
B.	Material Clásico	50
B.1.	Orientabilidad	50
B.2.	Elementos de volumen	51
B.3.	Haces vectoriales	52
B.4.	Haces principales	52
B.5.	Notación de Dirac	52
B.6.	Interpretación geométrica de la conexión	54
B.7.	Curvatura	55

1. Introducción

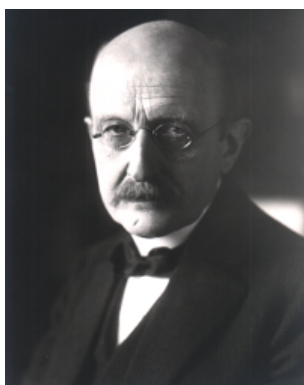
El sentido común y la intuición física que desarrollamos desde niños está limitada por las escalas de magnitud a las que podemos apreciar los fenómenos físicos, sin embargo han existido personas como Newton, Dirac, Heisenberg, Einstein, Poincaré, Planck, Hawking y Feynman, que han logrado trascender esta barrera para descubrir el mundo cuántico, entender las órbitas de los cuerpos celestes en el espacio exterior y aún explorar que sucedió en el inicio del universo. Gracias a ellos sabemos cosas que difícilmente se intuyen con la experiencia cotidiana, cosas como que no existe nada más veloz que la luz, que el espacio y tiempo del universo no son independientes entre sí; y que la densidad de sustancia (materia o energía) en cada región del universo determina su geometría.

Los científicos que mencioné contribuyeron para construir las dos teorías más importantes del siglo XX, que son la mecánica cuántica y la relatividad. La mecánica cuántica describe cómo se comportan las partículas elementales de las que se forma la materia, y las fuerzas con que interactúan. La relatividad describe geoméricamente el universo por medio de la gravedad ya que ésta determina la curvatura del espacio-tiempo. Gracias a la mecánica cuántica y la relatividad se tienen descripciones muy precisas de cómo es el universo visto a escalas muy pequeñas y a escalas muy grandes. Sin embargo estas dos teorías no son compatibles entre sí, por eso uno de los grandes retos de la física actual es encontrar la forma de hacerlas compatibles o bien encontrar una teoría unificante que las incluya como casos particulares.

Uno de los científicos que anduvo en esta búsqueda fue Einstein. En cuanto a la teoría unificante, Einstein creía que debía ser una teoría geométrica, tal como lo es la teoría de la relatividad. El modelo que vamos a estudiar aquí, está en sintonía con el anhelo de Einstein de encontrar la teoría geométrica del universo.

Siendo consistentes con esta idea, parecería que los intentos de encontrar esta teoría unificante primero deberían vincular de manera consistente el lenguaje de la mecánica cuántica con el de la relatividad. La geometría no conmutativa nos ofrece esta posibilidad porque permite incorporar el lenguaje de la mecánica cuántica dentro de la geometría diferencial, y la relatividad está expresada en términos de la geometría diferencial.

En cuanto a las teorías de unificación debemos distinguir dos líneas de investigación, una es unificar los campos correspondientes a la fuerza nuclear débil, la fuerza nuclear fuerte y el electromagnetismo, y la segunda es unificar las fuerzas anteriores con la gravedad. Se han desarrollado muchas ideas acerca de cómo podrían lograrse estas unificaciones.



Max Planck & Werner Heisenberg



Gustav Robert Kirchhoff & Willy Eisenschitz Wien

1.1. Mecánica Cuántica y Geometría No Conmutativa

A continuación presentaremos un poco de historia del desarrollo de la mecánica cuántica. El problema que motivó el surgimiento de la teoría cuántica es el del cuerpo negro, que introdujo Kirchhoff por el año de 1860. Se trata de un cuerpo ideal que absorbe toda la energía que le llega y emite esa misma cantidad de energía por unidad de tiempo, de modo que, a pesar de su nombre el cuerpo negro emite luz cuando se calienta. Nuestro Sol se parece a un cuerpo negro. Uno de los alumnos de Kirchhoff, Wien, encontró que las longitudes de onda de la radiación electromagnética emitida se distribuyen de manera que su intensidad presenta un pico en un valor intermedio, y dedujo con razonamiento termodinámico que la longitud de onda en el pico de la curva varía inversamente con la temperatura, de tal modo que cuando ésta aumenta, el color predominante se corre hacia el azul (ley de desplazamiento de Wien).



Third Baron Rayleigh & Albert Einstein

Lord Rayleigh al igual que Wien supuso que en la cavidad del cuerpo negro existe un conjunto de ondas electromagnéticas que ejercen presión sobre las paredes de esa cavidad. Con éste modelo Rayleigh pudo explicar la forma de la curva para frecuencias pequeñas y Wien lo hizo para frecuencias grandes, ninguno de los dos pudo obtener la forma completa de la curva. El cálculo de Rayleigh predecía una intensidad que siempre crecía con la frecuencia. Según el cálculo de Rayleigh, la energía total radiada por el cuerpo negro sería infinita, a este fenómeno hipotético se le llama una catástrofe ultravioleta. Si se diera en realidad una catástrofe ultravioleta la materia no podría ser estable, por lo tanto algo les estaba faltando a estos modelos.

Más tarde Planck empleó un razonamiento similar al de Rayleigh y obtuvo una generalización acorde con los resultados de Wien y Rayleigh. Pero, para eliminar la catástrofe ultravioleta, Planck postuló que el intercambio de energía se da en paquetes enteros a los que llamó *cuantos*.

Así obtuvo que la relación entre la energía de estos *cuantos* y la frecuencia de la onda de luz está dada por la fórmula

$$E = \hbar\omega$$

donde E es la energía, ω es la frecuencia circular y \hbar es una constante llamada constante de Planck.

Es interesante observar que combinando las constantes universales \hbar (constante de Planck), c (velocidad de la luz) y γ (constante de gravitación) se pueda obtener una unidad de longitud,

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar\gamma}{c^3}} \sim 10^{-33}\text{cm}$$



Niels Bohr & Ernest Rutherford

lo que sugiere que a esa escala de magnitud el universo podría comportarse de manera distinta a como se comporta a las escalas que estamos acostumbrados a percibir.

En 1905 Albert Einstein desarrolló su teoría del efecto fotoeléctrico ¹ donde supuso que la luz se formaba de corpúsculos llamados *fotones*. Fue por este trabajo que Einstein recibió el premio Nobel en 1921.

Thomson y su discípulo Ernest Rutherford descubrieron el electrón y el núcleo de los átomos respectivamente, y propusieron un modelo para el átomo en forma de sistema solar. Este modelo tiene dos desventajas, una es que si el electrón en verdad se moviera alrededor del núcleo, perdería continuamente energía hasta caer finalmente en él, y como consecuencia de la teoría electromagnética de Maxwell la nube electrónica desaparecería. Por lo tanto este modelo no es consistente con la evidente estabilidad de la materia.

La segunda desventaja del modelo de Rutherford es que el electrón al radiar y perder su energía mecánica debería emitir un espectro de luz continuo, pero no es así. El electrón emite un espectro de luz discreto.

Para explicar la existencia de los espectros discretos atómicos, Bohr propuso en 1911 el primer modelo de átomo en el que había ciertos niveles de energía en los cuales el electrón estaba en una órbita estable (sin emitir radiación como dice la electrodinámica clásica). El electrón no puede pasar por niveles intermedios de energía a estos en los cuales la órbita es estable, y para pasar de un nivel a otro se da lo que se llama un salto cuántico. Dentro de este marco conceptual, Bohr afirmó que la mecánica clásica no funciona dentro del átomo, sino que éste solo puede existir en

¹El proceso por el cual se liberan electrones de un material por la acción de la radiación se denomina efecto fotoeléctrico o emisión fotoeléctrica.



Louis de Broglie & Joseph John Thomson

un conjunto discreto de estados estacionarios con ciertos niveles de energía. Cuando un electrón se encuentra en un nivel de energía, no puede emitir ni absorber radiación. Estos procesos se dan cuando el átomo pasa de uno de estos estados estacionarios a otros. Como Rayleigh y Thomson no estuvieron de acuerdo con el modelo de Bohr, éste se fue a Manchester a trabajar con Rutherford. En 1913 Bohr completó un nuevo esquema atómico que era consistente con las ideas cuánticas de Planck y Einstein. Con este modelo Bohr pudo explicar la serie de Balmer y predecir lo que ocurriría al bombardear átomos con electrones de baja energía, esto le dió a su modelo un fuerte impulso.

En 1924, Luis de Broglie, estudiando el efecto fotoeléctrico y el efecto de Compton², se dió cuenta de la necesidad de asignar propiedades corpusculares a la radiación electromagnética. De Broglie decía que cada partícula se comporta como una onda, bajo ciertas condiciones. Así empezó a surgir la idea de la dualidad partícula-onda, que sugiere que ambos entes son propiedades complementarias de un campo que se unifican en la mecánica cuántica, como dos manifestaciones del mismo fenómeno.

Bohr propuso formalmente su *Principio de Complementariedad*, que dice en el fondo que el fenómeno depende del sistema de observación, y que finalmente, la realidad física es una superposición de enfoques observacionales y explicativos mutuamente complementarios. Este principio causó mucha polémica en cuanto a que si la realidad es el resultado de todos los sistemas de observación o es algo más que eso. Einstein mismo, decía no entender muy bien este Principio.

En particular, el electrón tiene un comportamiento dual de onda y corpúsculo, y

²Cuando se analiza la radiación electromagnética que ha pasado por una región en la que hay electrones libres, se observa que además de la radiación incidente, hay otra de frecuencia menor. La frecuencia o la longitud de onda de la radiación dispersada depende de la dirección de la dispersión.

cuando se comporta como una onda, es imposible asignarle una posición. Esta idea se conoce con el nombre de Principio de Incertidumbre de Heisenberg. El electrón se comporta unas veces como partícula y otras como onda y al irradiarle luz para observarlo se afecta su comportamiento.

El principio de incertidumbre de Heisenberg dice que el momento lineal y la posición de un electrón no son observables compatibles, esto quiere decir que el electrón y las partículas cuánticas no poseen al mismo tiempo las propiedades de momento y posición, lo que es contrario a la intuición física a otras escalas de magnitud, porque cualquier objeto que podamos observar de manera natural, tiene estas propiedades al mismo tiempo y se pueden medir.

En cierta manera, con el principio de incertidumbre apareció la no conmutatividad en la física cuántica, ya que el momento y la posición se modelan como operadores en un espacio de Hilbert y son operadores que no conmutan entre si. Heisenberg fue el primero en proponer las matrices para hablar de mecánica cuántica y después Von Neumann, desarrolló una estructura matemática muy sofisticada que son los operadores en espacios de Hilbert, aquí aparecen las álgebras de matrices, matrices infinitas, operadores (acotados y no acotados). . . Los operadores acotados en espacios de Hilbert, forman un álgebra no conmutativa con la operación de composición, y así apareció la no conmutatividad en la física cuántica. Pero esto también nos da la clave para vincular la mecánica cuántica con la geometría no conmutativa.

La geometría no conmutativa propone un modo alternativo de pensar los espacios, admitiendo otra noción de espacio, además del concepto clásico de los espacios formados de puntos. Estos nuevos espacios se proponen extendiendo la geometría diferencial clásica en una forma natural utilizando su vínculo con las álgebras de operadores.

La geometría diferencial clásica no es consistente con el principio de incertidumbre de Heisenberg, por eso se cree que la geometría diferencial clásica no funciona en dimensiones ultrapequeñas.

La geometría no conmutativa ofrece la posibilidad de cambiar la manera de pensar los espacios, matemáticamente encuentra sus raíces en los teoremas de Gelfand-Naimark. En la introducción técnica enunciaré formalmente los teoremas de Gelfand-Naimark, pero aquí me interesa comentar su esencia. El primer teorema de Gelfand-Naimark dice que estudiar los espacios localmente compactos es equivalente a estudiar las álgebras C^* conmutativas. Los espacios relevantes en física son localmente compactos, así que teniendo a los espacios clásicos encodificados en las álgebras C^* conmutativas lo natural es preguntarse qué tipo de espacios describirían las álgebras C^* no conmutativas.

Por otro lado tenemos el segundo teorema de Gelfand-Naimark que vincula a todas las álgebras C^* con las álgebras de operadores acotados en espacios de Hilbert, y un poco antes hemos dicho que estas álgebras de operadores son el formalismo para la mecánica cuántica. Todo esto sugiere que las estructuras no conmutativas están presentes en el mundo físico, aunque no en el mundo visto a nuestra escala, sino en el mundo visto a muy pequeña escala.

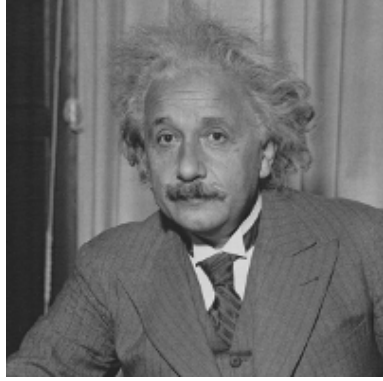
Por todo lo anterior parece válido admitir una nueva categoría de espacios que provengan de las álgebras C^* no conmutativas. Específicamente, con la categoría de las álgebras C^* (las conmutativas junto con las no conmutativas) se define una nueva categoría de espacios a partir de la categoría inversa. En esta categoría inversa se obtienen en particular todos los espacios clásicos que ya conocíamos, más otros nuevos. A estos nuevos espacios les llamamos espacios cuánticos. Los espacios cuánticos quedan asociados a las álgebras C^* no conmutativas.

Las propiedades geométricas y topológicas de los espacios cuánticos se definen a partir de su álgebra C^* , para esto se elabora un diccionario que en el caso clásico vincula el lenguaje geométrico y el algebraico. Luego se extrapolan las identificaciones al caso cuántico.

En mi tesis de licenciatura [10] se expone con todo detalle esta construcción y se dan algunos ejemplos de espacios cuánticos. También en la tesis se observó que los espacios cuánticos pueden carecer de puntos. El admitir espacios sin puntos en nuestra teoría, lejos de ser un defecto, ofrece una oportunidad de reformular el concepto de espacio sin depender de los puntos, y está justificado porque los puntos son una idealización matemática que no existe en la realidad física, ya que ni la materia es infinitamente divisible, ni la energía se intercambia de forma continua. Todo lo expuesto anteriormente apoya la idea de que pensar en espacios sin puntos es perfectamente admisible, porque es consistente con los resultados de la mecánica cuántica.

1.2. Relatividad y geometría no conmutativa

La teoría de la relatividad está formulada por medio de una variedad diferenciable junto con una métrica semiriemanniana. Para expresar la relatividad con el formalismo de la geometría no conmutativa, no basta con extender la noción de espacio, sino que se tienen que generalizar conceptos como el de espacio tangente de una variedad, haz vectorial, el álgebra exterior que consta de las formas diferenciales y la métrica. Trabajar con espacios cuánticos, obliga a utilizar cálculos diferenciales cuánticos sobre álgebras graduadas, haces fibrados, formas hermitianas y transforma-



Albert Einstein & Henri Poincaré

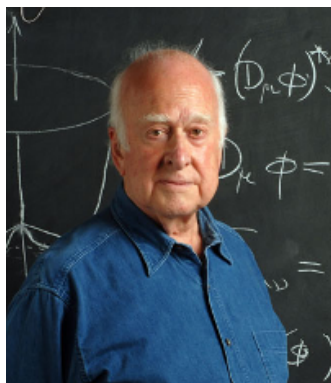


Theodor Kaluza & Oskar Klein

ciones de norma. Existen varios modos de construir cálculos diferenciales cuánticos. En la primera parte de este trabajo utilizamos el cálculo de Chevalley y se incorpora la métrica por medio de una generalización del producto escalar en el álgebra diferencial. En la segunda parte, se utiliza un cálculo diferencial universal, en resonancia con las ideas introducidas por Micho Durdevich en [11].

1.3. Las ideas de Kaluza-Klein

En la teoría de la relatividad, el universo se modela matemáticamente por medio de una variedad llamada espacio-tiempo. Esta variedad por lo general se considera de 4 dimensiones, 3 espaciales y el tiempo. Einstein planteó la teoría de la relatividad en términos de una variedad de 4 dimensiones y le dió una métrica por medio de las ecuaciones de Einstein, ésta métrica determina la curvatura del espacio-tiempo.



Peter Higgs & Stephen Hawking

En 1919 Theodor Kaluza consideró un espacio-tiempo de 5 dimensiones, le impuso las ecuaciones de Einstein y obtuvo en su modelo dos grupos de ecuaciones y un campo escalar al que llamó radión. El primer grupo correspondía a las ecuaciones de campo de Einstein y el segundo a las ecuaciones de Maxwell, de electromagnetismo. Con este modelo se logró unificar a la gravedad con el electromagnetismo, generalizando la relatividad en un espacio-tiempo de 5 dimensiones.

En 1926, Oskar Klein propuso que la cuarta dimensión espacial fuera un círculo. Incluyendo en el modelo ideas de mecánica cuántica, logró estimar la cuantización de la carga. También estimó que el radio de la 5ta dimensión debía medir aproximadamente 10^{-30} cm (se parece a la longitud de Planck), lo que explicaría por qué no podemos apreciar esta dimensión en la vida cotidiana. Por medio de la cuarta dimensión espacial, se incorpora la idea de fluctuación cuántica, algo que oscila internamente en la materia. Es de nuevo la idea de dualidad partícula-onda que se ha observado en las partículas elementales.

1.4. El mecanismo de Higgs

Según el modelo estándar de la mecánica cuántica, para cada tipo de subpartícula existe un campo inherente a ella, y a su vez, cada campo tiene su partícula, existen muchos campos: electromagnético, gravitatorio, el campo de Higgs, etc.

El campo de Higgs apareció como una necesidad matemática para dar consistencia al modelo estándar porque de acuerdo con la teoría del big-bang, el universo comenzó con una gran explosión de partículas que inicialmente salieron disparadas a la velocidad de la luz. Según la teoría de la relatividad especial, cualquier partícula que viaje a la velocidad de la luz no puede tener masa de reposo. El universo se fue

enfriando poco a poco (algunas de las partículas disminuyeron su velocidad) lo que fue indispensable para la aparición de la masa. La manera en que estas partículas pudieron adquirir masa cuando comenzó a enfriarse el universo, se modela por medio del mecanismo de Higgs. El campo de Higgs, mediante su interacción con otros campos, disminuye la velocidad de algunas partículas, y es responsable de lo que se llama una ruptura espontánea de la simetría y aparece la masa.

1.5. El principio de Acción Mínima

La mecánica estudia la dinámica de partículas, cuerpos rígidos, medios continuos y teorías de campos como el electromagnetismo, gravedad, etc. El estudio de la mecánica ha marcado pautas muy importantes para el desarrollo de las matemáticas, un ejemplo de esto es el cálculo diferencial motivado por la mecánica de Newton. Se puede estudiar la mecánica desde dos enfoques casi siempre equivalentes. El punto de vista de Lagrange, se basa en principios variacionales y se generaliza más directamente al contexto de la relatividad general. El enfoque de Hamilton, se basa en el concepto de energía y por lo tanto está más ligado a la mecánica cuántica no relativista.

Las acciones físicas se definen por medio de una integral de línea sobre las posibles trayectorias de movimiento de una partícula en el espacio de configuraciones. El principio de mínima acción establece que las partículas siempre se mueven por trayectorias que extremizan la acción. Buscando las trayectorias que extremizan la integral (casi siempre la minimizan), se encuentran las ecuaciones de movimiento de las partículas en un espacio de estados. Las partículas en el espacio-tiempo están sometidas a fuerzas como la gravedad y la electromagnética, y cada una de estas fuerzas define un campo.

Formalmente, consideramos un espacio de configuraciones Q con coordenadas q_i y se introduce el lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, donde $\dot{q}_i = dq_i/dt$ es el sistema de velocidades, y \mathcal{L} usualmente es la energía cinética menos la energía potencial.

El principio variacional, también llamado principio de mínima acción, se escribe matemáticamente

$$\delta\mathcal{S} = 0$$

donde $\mathcal{S} = \int_a^b \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$ y las q_i se escogen como curvas que unen los dos puntos fijos $q_i(a)$ y $q_i(b)$ en Q . Se puede demostrar que la ecuación es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es útil notar que si M es el espacio-tiempo, los campos clásicos siempre son secciones de haces vectoriales en M , o bien, conexiones sobre haces vectoriales. Cada campo define una acción que determina las ecuaciones de movimiento de una partícula en el espacio tiempo, partiendo del principio de mínima acción. Las ecuaciones de movimiento describen el camino que seguiría una partícula al aplicarle una fuerza inicial.

Se puede ver el espacio dado por coordenadas (q_i, \dot{q}_i) como el haz tangente en Q . En las teorías de campos, el principio de Hamilton se generaliza considerando campos φ_i en lugar de las coordenadas q_i . Los campos φ_i extremizan el funcional dado por la integral

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi_i, \partial\varphi_i) dx^4$$

donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana, $\partial\varphi_i$ son derivadas espacio-temporales y la integral ahora se esta efectuado sobre todo el espacio-tiempo.

Los campos que vamos a considerar en este trabajo son el campo electromagnético y los campos de Yang-Mills que generalizan al campo electromagnético.

La ecuación del principio variacional

$$\delta S = 0$$

es ahora equivalente a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{i,\alpha}} = 0$$

donde $\varphi_{i,\alpha}$ son derivadas parciales de φ_i sobre las coordenadas espacio-temporales x_{α} .

En el caso de la generalización que se presenta en este trabajo, la configuración de campo será una sección del haz vectorial y la base del haz jugará el papel del espacio tiempo M .

1.6. Las ideas de Yang-Mills

Un paso decisivo para la geometrización de los campos físicos lo dieron Yang y Mills en 1954. Asumieron que el espacio de los grados internos de libertad de una partícula depende de los puntos del espacio-tiempo. Expresaron matemáticamente esta idea por medio de un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ cuyas fibras son espacios de



Chen Ning Yang & Robert L. Mills

grados internos de libertad y donde no hay una manera de identificar canónicamente una fibra con otra. Sugirieron considerar una conexión en el haz π que es una manera de identificar fibras a lo largo de curvas en M con campos físicos, y su grupo de holonomía³ se identifica con el grupo interno de simetrías de las partículas elementales.

El caso más simple, es considerar un haz vectorial complejo unidimensional y una conexión con grupo de holonomía conmutativo $\Gamma = \text{SO}(2)$, y esto nos lleva naturalmente al campo electromagnético. Es notable que otros campos físicos que describen interacciones de partículas elementales se pueden interpretar como campos de Yang-Mills, pero en general no tienen grupos de holonomía conmutativos. En estos casos no conmutativos, las ecuaciones de campo se vuelven no lineales y son una generalización natural de las ecuaciones de Maxwell [15].

En el modelo expuesto aquí se sigue la misma idea geométrica que el modelo clásico de Kaluza-Klein, pero se construye con el formalismo de la geometría no conmutativa. Consideraremos un espacio cuántico y una acción de Yang-Mills. Todo esto se interpreta físicamente como la aparición del campo electromagnético en una subvariedad cuántica como proyección del campo representado por la acción de Yang-Mills en todo el espacio y aparece un campo escalar que se comporta como el campo de Higgs. No hay que perder de vista que estos modelos buscan encontrar la interpretación de las fuerzas de la naturaleza como diferentes proyecciones de un solo fenómeno físico.

³El grupo de holonomía es un grupo de transformaciones inducidas en el haz tangente de una variedad por medio del transporte paralelo a lo largo de las curvas cerradas. Se ha extendido esta noción a haces vectoriales.

2. Álgebras C^*

Gelfand y Naimark introdujeron las álgebras C^* en 1943 con el nombre de anillos completamente regulares en el artículo [1]. En este artículo demostraron que cualquier álgebra C^* se puede ver como una subálgebra de operadores en un espacio de Hilbert. La teoría de álgebras de operadores fue desarrollada por Von Neumann y Murray cerca de 1930, con la motivación principal de formalizar la teoría cuántica.

Definición 1. *Un álgebra A es un \mathbb{C} -espacio vectorial dotado de un producto algebraico para el cual dados $a, b, c \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $(ab)c = a(bc)$ *Asociatividad*
2. $a(b + c) = ab + ac$ *Distributividad izquierda*
3. $(a + b)c = ac + bc$ *Distributividad derecha*
4. $(\alpha a)b = \alpha(ab)$ *Asociatividad con escalares.*

Definición 2. *Álgebra con unidad. Es un álgebra que tiene un elemento distinguido 1 que cumple la propiedad de que $a1 = 1a = a$ para todo a elemento del álgebra.*

Definición 3. *Decimos que V es un espacio vectorial normado si existe una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple:*

1. $\|a\| \geq 0$ para todo $a \in V$ *Positividad de la norma*
2. $\|a\| = 0$ si y solo si $a = 0$ *Positividad estricta*
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ *Desigualdad del triángulo*
4. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$ *Homogeneidad de la norma.*

Es importante observar que las condiciones 1 y 3 arriba implican que $\|0\| = 0$, de modo que en este caso $\|a\| = 0$ implica $a = 0$.

Definición 4. *Decimos que A es un álgebra normada si existe una función $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple las mismas propiedades de un espacio vectorial normado, es decir la positividad, desigualdad del triángulo y la homogeneidad de la norma, y además la desigualdad multiplicativa*

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Definición 5. *Un espacio vectorial normado V es completo si cada sucesión de Cauchy en V converge a un elemento de V . Estos espacios se llaman espacios de Banach.*

Definición 6. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H dotado de un producto interior \langle, \rangle con el cual es completo (cada sucesión de Cauchy converge).*



Izráil Moiséyevich Gél'fand & Mark Naimark

Definición 7. *Un álgebra de Banach, es un álgebra normada y completa con la norma del álgebra.*

Definición 8. *Un álgebra $*$ es un álgebra dotada con un operador $*$ que cumple,*

1. $(a^*)^* = a$ *Involutividad*
2. $(ab)^* = b^*a^*$ *Antimultiplicatividad*
3. $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha}a^* + b^*$ *Antilinealidad.*

Definición 9. *Un álgebra C^* es un álgebra $*$ de Banach A que cumple la condición*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A.$$

Esta condición se llama la condición C^ .*

La condición C^* asegura que en un álgebra C^* la involución preserva la norma y sea por lo tanto continua.

Gracias a los teoremas de Gelfand y Naimark, se puede extender la categoría de los espacios localmente compactos a una categoría más grande. Llamamos a esta nueva categoría, la de los espacios cuánticos.

Resultados Clásicos de Gelfand-Naimark Cada espacio topológico localmente compacto X tiene asociada un álgebra C^* conmutativa llamada $C_0(X)$ que consta de las funciones continuas que decaen en el infinito, con dominio en X e imagen en \mathbb{C} . Y viceversa cada álgebra C^* conmutativa es el álgebra $C_0(X)$ para algún espacio topológico localmente compacto X . Esta asociación es un funtor contravariante que va de la categoría de los espacios localmente compactos a la categoría de las álgebras C^* conmutativas. Cuando el espacio es compacto, el álgebra C^* tiene unidad.

Teorema de Representación de Álgebras C^* Cada álgebra C^* es isomorfa a una $*$ -subálgebra C^* de la algebra C^* de los operadores acotados $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H .

Este teorema permite vincular el lenguaje de las álgebras C^* con la mecánica cuántica ya que el formalismo de la mecánica cuántica está basado en los operadores en los espacios de Hilbert.

La geometría no conmutativa propone una nueva gama de espacios, al considerar las álgebras no conmutativas, estos espacios se definen en términos de las propiedades geométricas y topológicas que en el caso conmutativo tienen una clara traducción al lenguaje de las algebras de las funciones correspondientes. Una de las características interesantes que aparecen entonces es que uno puede encontrarse con espacios sin puntos.

Geometría Clásica	Geometría no conmutativa
Espacio cuántico	Algebra C^* no conmutativa
Puntos	Caracteres
Componentes	Proyectores
Simetrías	Automorfismos del álgebra
Observables	Operadores hermitianos

Gracias a estas asociaciones que se derivan del funtor contravariante entre álgebras C^* conmutativas y espacios localmente compactos, se puede pensar en una nueva gama de espacios llamados cuánticos, al incluir en el análisis a las álgebras no conmutativas. Esta propuesta se encuentra en los trabajos de Alan Connes, Stanislaw Woronowicz, Micho Durdevich, y se brinda una introducción en mi tesis de licenciatura que se titula ‘Algebras C^* y grupos cuánticos compactos’.

Para construir un modelo cuántico de Kaluza-Klein, consideramos una variedad riemanniana y simplemente conexa V (y por lo tanto orientable). El álgebra $*$ de funciones suaves $C^\infty(V)$. Luego, consideramos el conjunto de las funciones suaves con dominio en V y contradominio en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, este conjunto es un álgebra isomorfa a $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que es un álgebra $*$ no conmutativa. Estudiaremos la geometría diferencial no conmutativa de \mathcal{A} . Las herramientas de geometría diferencial clásica se generalizan como se muestra en la siguiente tabla.

Geometría Diferencial Clásica	Geometría Diferencial No Conmutativa
Funciones Suaves $C^\infty(V)$	'Funciones' Cuánticas $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Campos Vectoriales Complejos	Derivaciones de Algebra $(\text{Der}(C^\infty(V)) \otimes 1) \oplus (C^\infty(V) \otimes \text{sl}(n, \mathbb{C}))$
Formas Diferenciales $\Omega_D(C^\infty(V))$	Algebra Bigraduada $\Omega_D(C^\infty(V)) \hat{\otimes} \Omega_D(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$
Métrica $ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$	Producto escalar en $\Omega_D(\mathcal{A})$ $\langle \alpha_1 \otimes \alpha_2 \beta_1 \otimes \beta_2 \rangle = \langle \alpha_1 \beta_1 \rangle \langle \alpha_2 \beta_2 \rangle$
Haces Vectoriales Complejos	\mathcal{A} -Módulos Finitos Proyectivos
Isometrías	Transformaciones de norma
Conexiones sobre Haces Vectoriales Derivada covariante ∇	Conexiones sobre \mathcal{A} -Módulos Hermitianos $\nabla(\varphi \otimes \alpha) = (\nabla\varphi)\alpha + \varphi \otimes d\alpha$
Acción Clásica de Yang-Mills $\int \ \nabla^2\ ^2 dx^4$	Acción Cuántica de Yang Mills $-\frac{1}{4} \int \sum_{kl} \frac{1}{r} \text{Tr}((\partial_k a_l - \partial_l a_k + [a_k, a_l])^2) dx^4$
Campo de Higgs	Conexión Vertical Cuántica

Primero se define un cálculo diferencial cuántico para \mathcal{A} unificando los cálculos diferenciales de $C^\infty(V)$ y $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en una nueva estructura por medio del producto tensorial de álgebras graduadas que en este caso muy particular funciona como álgebra diferencial bigraduada con su respectiva función derivada. Luego se define un producto escalar en esta algebra $\Omega_D(\mathcal{A})$, unificando los productos escalares ya existentes en $C^\infty(V)$ y $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ simplemente multiplicando los productos escalares en $\Omega(V)$ y $\Omega_D(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. En $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se tiene una estructura canónica riemanniana donde el producto escalar se define como $\langle a, b \rangle = \text{Tr}(a^*b)$.

El papel de los haces vectoriales hermitianos lo juegan los módulos hermitianos sobre \mathcal{A} , en particular se estudia el módulo \mathcal{A}^r . Y si se considera cualquier módulo hermitiano libre de rango r sobre \mathcal{A} se puede ver que es isomorfo a \mathcal{A}^r . Se introduce en concepto de una base de norma (es lo que se llama en inglés una base gauge) que es una base ortonormal, y los cambios entre bases ortonormales son las transformaciones de norma. Por medio de una forma hermitiana, definida positiva, se establece un isomorfismo entre cualquier módulo hermitiano libre de rango r sobre \mathcal{A} y \mathcal{A}^r . Se definen las conexiones sobre cualquier módulo derecho sobre \mathcal{A} de manera que

al tomar su cuadrado tenemos la curvatura de la conexión. Por el isomorfismo que mencionamos basta estudiar las conexiones en el módulo \mathcal{A}^r . Expresando la componente de una conexión en términos de cada base ortonormal se encuentra la órbita de la conexión bajo la acción de las transformaciones de norma.

En el artículo [5], se concentra la atención en las conexiones hermitianas planas, es decir aquellas tales que su curvatura $R_\omega = d\omega + \omega^2$ es cero. Se definen las conexiones de norma puras como órbitas de conexiones planas hermitianas.

En la parte de modelos de teorías de norma: Se hace un repaso de la acción clásica euclidiana de Maxwell que modela el campo electromagnético y la acción de Yang-Mills que es una generalización natural. Se define la acción de Maxwell para el álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^{s+1}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y se ve que la acción de Yang-Mills coincide con la de Maxwell cuando $r = 1$.

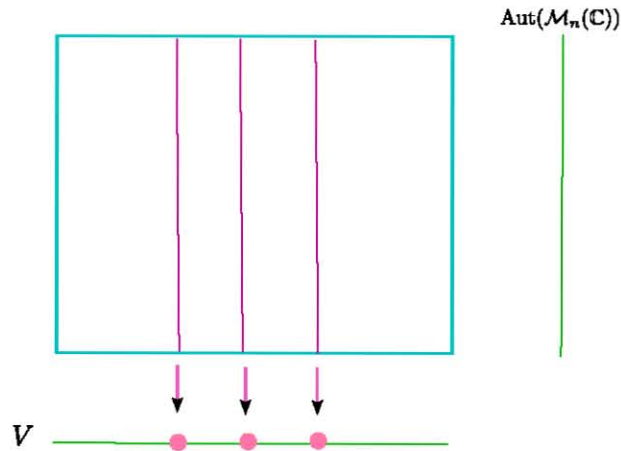
Concretamos la teoría expuesta en un ejemplo de un espacio que consta de dos puntos, pero en lugar de utilizar el cálculo diferencial dado por el álgebra de Chevalley, usamos el cálculo diferencial dado por la envolvente universal diferencial del álgebra de este espacio.

3. La variedad clásica dotada de simetrías cuánticas

3.1. El espacio cuántico asociado a $C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Sea V una variedad riemanniana, simplemente conexa, y por lo tanto también orientable. Considerar las funciones suaves que van de V a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es equivalente a considerar el álgebra $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Detrás de este producto tensorial de álgebras está la idea geométrica del álgebra asociada al producto cartesiano entre espacios, ya que $C^\infty(V)$ es el álgebra conmutativa asociada a la variedad clásica V mientras que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ al ser un álgebra C^* no conmutativa tiene asociado un espacio cuántico. El producto tensorial de las álgebras, es el álgebra del espacio que en el caso clásico sería el producto cartesiano de los espacios, pero en este caso uno de los espacios es cuántico. Podemos visualizar mejor este espacio cuántico si se interpreta el producto tensorial $C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como una dotación de nuevas simetrías para la variedad V , las nuevas simetrías son los automorfismos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no tiene nada que ver con la dimensión de V).

También podríamos construir a partir de \mathcal{A} un haz principal interesante, en donde cada fibra está identificada con el grupo $\text{Aut}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ que es el grupo de simetrías



Haz principal con grupo de automorfismos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

del espacio cuántico asociado al álgebra no conmutativa $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3.2. Cálculo Diferencial Cuántico

El primer paso es construir un cálculo diferencial cuántico sobre el álgebra

$$\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

que está formada de una parte conmutativa que es $C^\infty(V)$, y una no conmutativa $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. El cálculo diferencial se construye por medio del producto tensorial graduado de las álgebras diferenciales correspondientes a $C^\infty(V)$ y $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En los cálculos diferenciales cuánticos se generaliza la idea de forma diferencial. Existen varias maneras de construir un cálculo diferencial cuántico, en este caso se utiliza una subálgebra del álgebra de Chevalley para $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3.2.1. Álgebra de Chevalley sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

En geometría clásica, el campo vectorial está generado por las derivaciones del álgebra, que están generadas por las parciales, y se pueden representar como sigue:

$$\xi_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n} = X.$$

Así es como se puede caracterizar un campo vectorial. En geometría no conmutativa se definen los campos vectoriales como las derivaciones del álgebra

$$\mathcal{X} = \text{Der}(\mathcal{A}) = \{x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : x \text{ es lineal y cumple la regla de Leibniz}\}$$

donde \mathcal{A} es cualquier álgebra $*$ no conmutativa. Tenemos que $\text{Der}(\mathcal{A})$ es un álgebra de Lie con el corchete de Lie definido por medio del conmutador:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

En el caso de las matrices, donde $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, las derivaciones son internas ya que cada $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ induce una derivación por medio del conmutador

$$X_a(b) = [a, b]$$

y todas las derivaciones en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son de esta forma. Si el álgebra fuera conmutativa todos los conmutadores serían nulos, pero obviamente éste no es el caso en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Podemos observar que el centro de \mathcal{A} induce derivaciones internas cero. En el caso $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ el centro del álgebra son las matrices escalares y por lo tanto el centro es isomorfo a \mathbb{C} . Podemos descomponer $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \text{sl}(n, \mathbb{C})$ y así obtenemos que las derivaciones no triviales provienen de $\text{sl}(n, \mathbb{C})$. De modo que la dimensión de $\text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ en este caso es $n^2 - 1$.

Lema 3.1. *El corchete de Lie definido como el conmutador cumple la identidad de Jacobi en cualquier $*$ -álgebra asociativa $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.*

Demostración. Cálculo directo:

$$\begin{aligned} & [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] = \\ & ABC - CBA - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + \\ & CAB - CBA - ABC + BAC = 0 \end{aligned}$$

lo que demuestra la identidad. □

Además se cumplen las siguientes dos propiedades que muestran que el conmutador es un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ y $\text{sl}(n, \mathbb{C})$:

- $[X_a, X_b] = X_{[a, b]}$
- $X_{\lambda a + b} = \lambda X_a + X_b$

En resumen, para el álgebra no conmutativa $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tenemos

$$\mathcal{X} = \text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}).$$

Visto de otra manera, si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son tales que $\psi_1 = \psi_2 + \lambda I$ para alguna $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que $[\psi_1, a] = [\psi_2, a]$ para todo $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Esto hace que matrices distintas generen el mismo campo vectorial, lo que no es deseable, pero se arregla identificando las matrices que difieren en un escalar veces la matriz identidad. Podemos ver $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}I \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y quitando esta ambigüedad, se encuentra que $\text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ es un álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ que son las matrices de traza cero.

En general, las *simetrías infinitesimales* en un álgebra $*$ con unidad (que en el caso conmutativo son las derivaciones), se puede considerar como una perturbación de la identidad $I + X$. Para que esta perturbación sea una simetría infinitesimal debe ser un automorfismo del álgebra, en un primer orden de aproximaciones (aproximación lineal). Al usar las propiedades de automorfismo, se encuentra que X debe cumplir la regla de Leibniz

$$\begin{aligned} (I + X)(ab) &= (I + X)(a)(I + X)(b) = (a + X(a))(b + X(b)) = \\ &= ab + X(a)X(b) + aX(b) + X(a)b \approx ab + X(ab) \end{aligned}$$

en la última expresión se desprecia el término de orden 2 que es $X(a)X(b)$, y se concluye la Regla de Leibniz

$$X(ab) = aX(b) + X(a)b.$$

3.3. Cálculo de primer orden en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Como mencionamos, las derivaciones en un álgebra son operadores lineales actuando en la misma, que cumplen la regla de Leibniz. Todas las derivaciones del álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son internas. Canónicamente como el álgebra de Lie, pueden ser realizadas como $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.⁴

Para construir las 1-formas podemos hacer analogía con el caso de las variedades suaves. Recordemos aquí los principales aspectos de esta construcción clásica. Sea M

⁴Sea $u \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ entonces $\exp(u) \in \text{Sl}(n, \mathbb{C})$ de modo que $\det(\exp(u)) = 1$, pero esto quiere decir que $\exp(\text{tr}(u)) = 1$ ya que $\det(\exp(u)) = \exp(\text{tr}(u))$, por lo tanto $\text{tr}(u) = 0$.

una variedad suave, consideremos X una derivación de $C^\infty(M)$. La misma naturalmente puede ser interpretada como el campo vectorial suave sobre M , es decir, como la sección suave del haz tangente TM . Sean \mathcal{X} estos campos-derivaciones.

Sean $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathcal{X}$. Entonces $X(f) \in C^\infty(M)$ y $fX \in \mathcal{X}$, es decir \mathcal{X} es un bimodulo sobre $C^\infty(M)$.

El haz cotangente T^*M , el dual de TM , proporciona el entorno geométrico para el bimodulo de uno formas Γ , las secciones de T^*M . El operador diferencial $d: C^\infty(M) \rightarrow \Gamma$ es dado por $d(f)(X) = X(f)$.

En el caso de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se hace la analogía $C^\infty(M) \sim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\mathcal{X} \sim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Para $\delta \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ le corresponde la derivación X_δ dada por $X_\delta(a) = [\delta, a]$.

Las 0-formas diferenciales son las matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en el caso de geometría diferencial clásica son las funciones diferenciables sobre la variedad. Las 1-formas en general son los funcionales lineales que van de las derivaciones en el álgebra, en este caso del $\mathcal{X} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Las k -formas son funciones multilineales y alternantes al igual que en el caso clásico y denotaremos este conjunto por $C^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$:

$$\theta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = (-1)^{\partial\sigma} \theta(X_1, \dots, X_n).$$

Con el producto \wedge , el espacio $\sum^\oplus C^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = C(\mathcal{X}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ tiene la estructura de álgebra asociativa y distributiva. El producto cuña se define por medio de la siguiente fórmula. Sean $\alpha \in C^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $\beta \in C^l(\mathcal{X}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ entonces

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1 \dots, X_{k+l}) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} (-1)^{\partial\sigma} \alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \beta(X_{j_1}, \dots, X_{j_l})$$

donde σ es la pmutación $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$.

En la notación de Dirac las 1-formas se escriben como combinaciones lineales de las formas básicas $|k \succ \langle l|d(|i \succ \langle j|)$. Explícitamente:

$$\begin{aligned} |k \succ \langle l|d(|i \succ \langle j|)(X) &= |k \succ \langle l|(X|i \succ \langle j|) - |i \succ \langle j|X = \\ &|k \succ \langle l|X|i \succ \langle j| - \delta_{i,l}|k \succ \langle j|X \end{aligned}$$

donde se utiliza la misma notación para un campo vectorial-derivación y la matriz que lo induce. Los funcionales lineales estándares definidos en los campos vectoriales que están dados al tomar elementos matriciales, son las formas diferenciales de orden 1. Si $i \neq l$, igualando $k = j$ y sumando se obtiene el funcional $X \mapsto X_{li}1$. Si $i = l$ se obtiene:

$$|k \succ \langle j|X_{ii} - |k \succ \langle j|X$$

al hacer $k = j$ se obtiene el funcional $X \mapsto X_{ii}1 - X$. Si se suma sobre todos los i , se anula la primera parte ya que todas las matrices tienen traza cero, y solo queda $-nX$. Por lo que el mapeo $X \mapsto X$ también se obtiene como 1-forma. Finalmente se observa que el álgebra de Chevalley en este caso está determinada, es decir que $C^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ es identificable con $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \langle \{(\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_k})\} \rangle$ donde $i_1 < \dots < i_k$. Cada uno de estos índices tiene $n^2 - 1$ grados de libertad. Cada funcional está dado por una 1-forma diferencial cuántica. El álgebra de Chevalley es el álgebra de las formas diferenciales cuánticas sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En las matrices se trabaja con la subálgebra de $C(\text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ generada por $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, denotaremos a esta álgebra por

$$\Omega_{\text{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \Lambda[\text{sl}(n, \mathbb{C})^*]$$

donde las $\text{sl}(n, \mathbb{C})^*$ corresponderían a las 1-formas escalares en el espacio cuántico.

La involución se extiende a $\text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ como sigue

$$X^*(a) = (X(a^*))^*$$

como secuencia de aplicaciones tenemos $X^* = *X^*$ y visto en el bracket de Lie $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$. Si θ es una k -forma, tenemos

$$\theta^*(X_1, \dots, X_k) = \theta(X_1^*, \dots, X_k^*)^*$$

con esto tenemos una estructura de álgebra graduada $*$. Si ω es una p -forma se define su derivada exterior $d(\omega) \in \Omega_{\text{D}}^{p+1}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ como

$$\begin{aligned} d(\omega)(X_0, \dots, X_p) &= \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k X_k \omega(X_0, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_p) \\ &+ \sum_{0 \leq r < s \leq p} (-1)^{r+s} \omega([X_r, X_s], X_0, \dots, \hat{X}_r, \dots, \hat{X}_s, \dots, X_p) \end{aligned}$$

donde \hat{X}_α significa que X_α no aparece en la expresión. Es la misma definición que encontramos en la geometría diferencial clásica. La derivada cumple

- $d : \Omega_{\text{D}}^k(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \Omega_{\text{D}}^{k+1}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ es lineal;
- $d^2 = 0$;
- Se cumple la regla de Leibniz $d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\partial\alpha} \alpha \wedge d(\beta)$;

- $*d = d*$.

Finalmente, como estamos considerando que toda el álgebra graduada se genera por $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\Omega_{\mathbb{D}}^k(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \sum_{a_\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})} a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_k.$$

En el caso conmutativo, esta álgebra coincide con el álgebra de Grassman. Para simplificar notación, más adelante se omitirá el símbolo \wedge ya que se sobreentiende cual es el producto en las álgebras graduadas.

3.3.1. Cálculo diferencial cuántico sobre \mathcal{A}

La $*$ -álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es un álgebra con unidad y si V es una variedad compacta $C^\infty(V)$ también tiene unidad. Sean $x \in V$ y $\gamma_x : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ definida por $\gamma_x(f \otimes M) = f(x)M$, entonces γ_x es un homomorfismo $*$ que se llama la evaluación en $x \in V$. Geométricamente evaluar en un punto de V es como fijarse únicamente en el espacio cuántico determinado por $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

El centro de \mathcal{A} es $C^\infty(V) \otimes 1$, esto es bueno porque muestra que lo único de espacio clásico que tiene el espacio dado por \mathcal{A} es V .

El álgebra de Lie de derivaciones $\text{Der}(\mathcal{A})$ siempre es un módulo sobre el centro de \mathcal{A} . Sean $X \in \text{Der}(\mathcal{A})$ y $a \in C^\infty(V)$, por definición $aX(b) = a(X(b))$, usando la regla de Leibniz podemos ver que $aX(bc) = a(X(bc)) = a(bX(c) + X(b)c) = baX(c) + aX(b)c$ ya que $ab = ba$ para todo $b \in \mathcal{A}$.

Observemos que como $C^\infty(V) \hookrightarrow \mathcal{A}$ es la inclusión de álgebras, a nivel de espacios tenemos una proyección $\pi : Q \rightarrow V$ donde Q es la ‘variedad cuántica’ asociada a \mathcal{A} .

La manera de unificar las álgebras de Lie de derivaciones de $C^\infty(V)$ y $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es la siguiente:

$$\text{Der}(\mathcal{A}) = (\text{Der}(C^\infty(V)) \otimes 1) \oplus (C^\infty(V) \otimes \text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})))$$

donde como hemos visto $\text{Der}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \text{sl}(n, \mathbb{C})$.

Ahora para construir el complejo de Chevalley de \mathcal{A} necesitamos el álgebra diferencial graduada $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ que en este caso se obtiene como el producto tensorial graduado de las álgebras $\Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V))$ y $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \wedge \text{sl}(n, \mathbb{C})^*$. De modo que:

$$\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A}) = \{\Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V)) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\} \widehat{\otimes} [\wedge \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^*].$$

El álgebra $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ es un álgebra bigraduada naturalmente. Podemos escribir las (r, s) -formas como:

$$\Omega_{\mathbb{D}}^{r,s}(\mathcal{A}) = \Omega_{\mathbb{D}}^r(C^\infty(V)) \widehat{\otimes} \Omega_{\mathbb{D}}^s(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})).$$

Las álgebras $\Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V))$ y $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ se pueden ver incluidas como subálgebras en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V)) &\leftrightarrow \Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V)) \otimes 1 \hookrightarrow \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A}) \\ \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) &\leftrightarrow 1 \otimes \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \hookrightarrow \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Denotaremos por d la derivada exterior en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$, así como d' y d'' las únicas antiderivaciones de $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ que extienden a las derivadas exteriores de $\Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V))$ y $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ respectivamente, que cumplen $d''(f \otimes 1) = 0$, $d'(1 \otimes M) = 0$ para toda $f \in C^\infty(V)$ y $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Podemos decir que d' es de bigrado $(1, 0)$ y d'' es de bigrado $(0, 1)$ y además $d = d' + d''$. También se cumple

$$d'^2 = d''^2 = d''d' + d'd'' = 0.$$

3.3.2. Realidad

Ahora nos interesa centrar la atención en una subálgebra en particular de $\text{Der}(\mathcal{A})$ que está formada por las derivaciones X que cumplen $X(a^*) = (Xa)^*$, es decir que preservan a los elementos hermitianos. Denotamos este conjunto por $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$. Estas derivaciones hermitianas son consistentes con la estructura $*$ del álgebra y nos darán los verdaderos automorfismos del espacio cuántico, ya que cada derivación en el caso clásico está asociada a un campo vectorial que puede extenderse de manera difeomorfa sobre toda la variedad y genera una simetría global uniparamétrica. De hecho se puede construir $\text{Der}(\mathcal{A})$ como la complejificación de $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$. Las derivaciones reales también se pueden ver como la suma directa de las derivaciones reales en $C^\infty(V)$ y las de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) = (\text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(V)) \otimes 1) \oplus (C_{\mathbb{R}}^\infty(V) \otimes \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})))$$

donde $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(V))$ es el álgebra de Lie real formada de los campos vectoriales reales en V y $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ es la subálgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$ para su acción adjunta en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

y $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(V)$ es el álgebra real de las funciones reales en V . La involución de \mathcal{A} se puede extender a toda el álgebra graduada como $\overline{\alpha \otimes \alpha'} = \overline{\alpha} \otimes \overline{\alpha'}$, donde $\alpha \in \Omega_{\mathbb{D}}(C^{\infty}(V))$ y $\alpha' \in \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Decimos que una forma diferencial $\omega \in \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ es real si cumple $\overline{\omega} = \omega$ y que es imaginaria si cumple $\overline{\omega} = -\omega$.

3.4. Métrica en \mathcal{A} y producto escalar en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$

Para construir el producto escalar en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$, consideramos productos escalares en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ y $\Omega_{\mathbb{D}}(C^{\infty}(V))$. En $\mathcal{X} \leftrightarrow \text{Der}(C^{\infty}(V))$ tenemos un producto escalar ya que V es una variedad riemanniana, y se define un producto escalar en todo $\Omega_{\mathbb{D}}(C^{\infty}(V))$ naturalmente.

3.4.1. Métrica y producto escalar en $\Omega_{\mathbb{D}}(C^{\infty}(V))$

Como V es una variedad riemanniana, orientable y compacta tenemos una métrica dada en coordenadas locales por $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, donde g_{ij} es una matriz asociada a una forma bilineal definida positiva, y al hacer pullback opera como g_{ij} . Se denotará por g^{ij} a la matriz inversa de g_{ij} .

En particular queremos visualizar el caso $V = \mathbb{R}^{s+1}$ donde $ds^2 = \sum_i dx^i \otimes dx^i$ nos da el cuadrado de una unidad de longitud.

Además suponiendo que V es compacto se tiene en $\Omega_{\mathbb{D}}(C^{\infty}(V))$ el producto escalar definido por medio de la operación \star de Hodge. Dada una k -forma diferencial η , se tiene que $\star(\eta) = \xi$ si $\eta \wedge \xi$ es igual a la forma de volumen. De esta manera la operación \star de Hodge da una identificación de $\Omega^k(V)$ con $\Omega^{n-k}(V)$.

Suponiendo que $\dim V = n$, consideremos formas diferenciales η, ξ tales que $\partial\eta = \partial\xi$, entonces $\partial \star(\eta) + \partial\xi = n$, dada una carta $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $U \subset V$ abierto, se tiene que $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ donde $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ es la forma de volumen, de modo que existe una función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \eta \wedge \star\xi$, y la integración se realiza como

$$\int_U (\eta \wedge \star(\xi)) = \int_U f \phi^{-1} dx_1 \dots dx_n.$$

Esto se puede hacer porque la variedad V es orientable.

De modo que $\langle \alpha, \beta \rangle = \int \overline{\alpha} \wedge \star(\beta)$ cuando α y β son formas diferenciales del mismo grado y $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ cuando $\partial\alpha \neq \partial\beta$.

Obsérvese que en $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ este producto escalar es simétrico $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ y es una forma bilineal definida positiva, pero en general el producto escalar cumple $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle^*$.

3.4.2. Producto escalar en $\Omega_D(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$

En $\Omega_D(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ la métrica se construye como sigue. Consideremos una base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formada de matrices hermitianas

$$\mathcal{B} = \{\text{Id}, E_1, \dots, E_{n^2-1}\}$$

donde $E_k = E_k^*$ y $\text{Tr}(E_k) = 0 \forall k \in \{1, \dots, n\}$ y donde con el producto escalar $\langle E_k, E_l \rangle = \text{Tr}(E_k^* E_l)/n$ la base \mathcal{B} es ortonormal.

En dicha base la multiplicación de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tiene la forma

$$E_k E_l = g_{kl} 1 + \sum_m \left(s_{klm} - \frac{i}{2} c_{klm} \right) E_m$$

separando su parte real e imaginaria, donde g_{kl} , $s_{klm} = s_{lkm}$ y $c_{klm} = -c_{lkm}$ son números reales. La matriz (s_{klm}) es simétrica y la matriz (c_{klm}) es antisimétrica. Estos números son las componentes canónicas de los 3 tensores $\text{su}(n)$ ad-invariantes. Esta descomposición se expone detalladamente en [4].

Es útil recordar las transformaciones Ad y su derivada ad. En el álgebra de Lie $\text{sl}(n, \mathbb{C})$, el mapeo Ad asigna a cada elemento $a \in \text{sl}(n, \mathbb{C})$ el automorfismo dado por la conjugación $x \mapsto axa^{-1}$ y ad es la derivada de la Ad, de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\text{SL}(n, \mathbb{C})) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \text{sl}(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\text{sl}(n, \mathbb{C})) \end{array}$$

donde $\text{End}(\text{sl}(n, \mathbb{C})) = \text{su}(n)$. Los automorfismos en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son conjugaciones por elementos unitarios y en el caso particular de $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ son conjugaciones por elementos de $\text{SU}(n)$. Consideremos una base de $\text{SU}(n)$ con elementos de la forma $\partial_k = \text{ad}(iE_k)$. En este conjunto tenemos

$$[\partial_k, \partial_i] = \sum_m c_{klm} \partial_m.$$

Esta base de $\text{su}(n)$ induce una base en su espacio dual de las 1-formas definiendo $\theta^k \in \Omega_D^1(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \Omega_D(\mathcal{A})$, $k \in \{1, \dots, n^2 - 1\}$ como

$$\theta^k(\partial_l) = \delta_l^k 1 \quad \text{para } k, l \in \{1, \dots, n^2 - 1\}.$$

De aquí en adelante, en lugar de escribir $\theta^k \wedge \theta^l$ escribiremos simplemente $\theta^k \theta^l$. En $\Omega_D(\mathcal{A})$ se cumple

- $a\theta^k = \theta^k a$ para todo $a \in \mathcal{A}$
- $\theta^k \theta^l = -\theta^l \theta^k$.

La antiderivación d'' cumple

$$d''(\alpha) = 0 \quad \text{para } \alpha \in \Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V)) \quad (1)$$

$$d''(E_k) = - \sum_{m,l} c_{klm} E_m \theta^l \quad (2)$$

$$d''(\theta^k) = -\frac{1}{2} \sum_{l,m} c_{klm} \theta^l \theta^m. \quad (3)$$

Consideremos una 1-forma $\theta = E_k \theta^k$, entonces por las propiedades anteriores se puede escribir

$$d''(a) = i[\theta, a]$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. A partir de la fórmula 3 se obtiene

$$\theta^k = -\frac{i}{n^2} \sum_l E_l E_k d'' E_l.$$

En $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ se define el operador \star de Hodge. Dada una k -forma diferencial η , se tiene que $\star(\eta) = \xi$ si $\eta \wedge \xi$ es igual a la forma de volumen. El operador \star de Hodge se calcula explícitamente como

- $\star(\theta^{i_1} \dots \theta^{i_p}) = \frac{1}{(n^2 - 1 - p)!} \sqrt{g} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \times \epsilon_{j_1, \dots, j_{n^2-1}} \theta^{j_{p+1}} \dots \theta^{j_{n^2-1}}$
- $\star(A\theta^{i_1} \dots \theta^{i_p}) = A \star(\theta^{i_1} \dots \theta^{i_p})$

para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donde $g = \det(g_{kl})$.

Utilizando el homomorfismo \star de Hodge, se define el producto escalar

$$\langle \eta, \xi \rangle = \int (\eta^* \wedge \star(\xi))$$

para las formas que tienen el mismo grado, y se define como cero cuando las formas son de diferentes grados. Esto extiende la métrica a cada grado del álgebra diferencial y establece la ortogonalidad entre las formas de diferentes grados.

La integración de formas diferenciales se generaliza en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ por medio de la traza como

$$\int \alpha = \text{Tr}(A)/n$$

y se cumplen las siguientes propiedades:

- $\int d\beta = 0$ para todo $\beta \in \Omega^{n^2-2}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$;
- $\int \sigma\tau = (-1)^{pq} \int \tau\sigma$ donde $p + q = n^2 - 1$.

Por estas propiedades se dice que la integral de arriba es una traza cerrada y graduada (supertraza).

3.4.3. Métrica en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$

La métrica en el álgebra $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ se define por medio de la suma de las métricas en $\Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V))$ y $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ como

$$ds^2 + \left(\frac{1}{m}\right) \sum_k (\theta^k \otimes \theta^k)$$

donde $\frac{1}{m}$ es una constante positiva, una unidad de longitud que sirve para hacer el reescalamiento

$$\sum_k (\theta^k \otimes \theta^k) \mapsto \left(\frac{1}{m}\right)^2 \sum_k (\theta^k \otimes \theta^k)$$

que a su vez induce un reescalamiento del producto escalar en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Finalmente, se define el producto escalar en $\Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ como

$$\langle \alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2 \rangle = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$$

donde $\alpha_1, \beta_1 \in \Omega_{\mathbb{D}}(C^\infty(V))$ y $\alpha_2, \beta_2 \in \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Este producto escalar es consistente con la métrica ds^2 dada por la suma anterior. Es en realidad el teorema de Piágoras. Esta fórmula de la métrica puede distinguir a los objetos de muy poca masa.

3.5. Conexiones en \mathcal{A} -módulos hermitianos

3.5.1. Módulos \mathcal{A} -hermitianos

Un elemento $p \in \mathcal{A}$ es positivo si $p = a^*a$ para alguna $a \in \mathcal{A}$. El conjunto \mathcal{A}^+ de los elementos positivos de \mathcal{A} es un cono convexo en \mathcal{A} . Sea \mathcal{M} un módulo derecho sobre \mathcal{A} . Una estructura hermitiana en \mathcal{M} es una forma hermitiana definida positiva que toma valores en \mathcal{A} , es decir $(\psi, \varphi) \mapsto h(\psi, \varphi) \in \mathcal{A}$ donde $\psi, \varphi \in \mathcal{M}$, de modo que se tiene $h(\psi a, \varphi b) = a^* h(\psi, \varphi) b$ para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{M}$, para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Definida positiva quiere decir que $h(\psi, \psi) \in \mathcal{A}^+$ para todo $\psi \in \mathcal{M}$. Además se tiene que $h(\psi, \psi) = 0$ implica $\psi = 0$, esto es la propiedad de positividad estricta.

Un módulo derecho sobre \mathcal{A} equipado con una estructura hermitiana se llama un \mathcal{A} -módulo hermitiano.

En forma natural \mathcal{A}^r es un \mathcal{A} -módulo derecho con el producto

$$(a_1, \dots, a_r)a = (a_1a, \dots, a_ra)$$

para todo $(a_1, \dots, a_r) \in \mathcal{A}^r, a \in \mathcal{A}$, y se convierte en un \mathcal{A} -módulo hermitiano si se define su estructura hermitiana por

$$h((a_1, \dots, a_r), (b_1, \dots, b_r)) = \sum_{k=1}^r a_k^* b_k.$$

Recíprocamente sea \mathcal{H}^r un \mathcal{A} -módulo hermitiano libre de rango r con estructura hermitiana h . Entonces se puede construir una base ortonormal $(e_k), k \in \{1, \dots, r\}$ de \mathcal{H}^r , es decir, $e_k \in \mathcal{H}^r$ tal que $h(e_k, e_l) = \delta_{k,l}1$ para $k, l \in \{1, \dots, r\}$. Una base ortonormal construida de este modo se denomina base de norma.

Dada una base de norma, cada $\psi \in \mathcal{H}^r$ se puede escribir de manera única como $\psi = \sum_k e_k a_k$ con $a_k \in \mathcal{A}$.

Aún más, si $\varphi = \sum e_k b_k$ es un elemento de \mathcal{H}^r , entonces $h(\psi, \varphi) = \sum_k a_k^* b_k$. De modo que cada base de norma induce un isomorfismo $\mathcal{H}^r \leftrightarrow \mathcal{A}^r$ de \mathcal{A} -módulos hermitianos. Una transformación que preserve bases ortonormales se llama transformación de norma. Podemos observar que cada transformación de norma U se puede ver como un elemento unitario de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{C})$. También se puede ver a U como una función que va de V al grupo de matrices unitarias $U(nr)$.

3.5.2. Conexiones

Sea \mathcal{M} un \mathcal{A} -módulo. Una Ω_D -conexión o simplemente una conexión en \mathcal{M} , es un mapeo lineal $\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ tal que

$$\nabla(\varphi a) = (\nabla\varphi)a + \varphi \otimes da$$

para todo $\varphi \in \mathcal{M}$, y $a \in \mathcal{A}$.

Si \mathcal{M} es \mathcal{A} -módulo hermitiano con estructura hermitiana h , ∇ se llama conexión hermitiana si satisface

$$dh(\varphi, \psi) = h(\nabla\varphi, \psi) + h(\varphi, \nabla\psi)$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$. Esta fórmula generaliza las conexiones que preservan la métrica en el caso clásico (como es la conexión de Levi-Civita, por ejemplo). Para poder calcular $h(\nabla\varphi, \psi)$ y $h(\varphi, \nabla\psi)$ forzosamente se tiene que extender la definición de la forma hermitiana. La extensión es la siguiente

$$\begin{aligned} h : (\mathcal{M} \otimes \Omega_D(\mathcal{A})) \times (\mathcal{M} \otimes \Omega_D(\mathcal{A})) &\rightarrow \Omega_D(\mathcal{A}) \\ h(\varphi \otimes \nu, \psi \otimes \eta) &= \nu^* h(\varphi, \psi) \eta \end{aligned}$$

pensando \mathcal{M} como un módulo sobre $\Omega_D(\mathcal{A})$.

Las conexiones siempre existen en módulos proyectivos de rango finito. Sea ∇ una conexión en \mathcal{M} . Se puede extender ∇ linealmente a $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D(\mathcal{A})$ y denotamos igual esta extensión por $\nabla : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D(\mathcal{A})$ definiendo

$$\nabla(\varphi \otimes \alpha) = (\nabla\varphi)\alpha + \varphi \otimes d(\alpha)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \Omega_D(\mathcal{A})$. Se cumple

$$\psi \otimes a\alpha = \psi a \otimes \alpha$$

puesto que estamos tomando el producto tensorial $\otimes_{\mathcal{A}}$, y considerando a \mathcal{M} como un módulo derecho sobre $\Omega_D(\mathcal{A})$ podemos ver que se cumple la regla graduada de Leibniz

$$\nabla(\psi\alpha) = \nabla(\psi)\alpha + (-1)^{\partial\psi} \psi d(\alpha)$$

para todo $\psi \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D(\mathcal{A})$ y $\alpha \in \Omega_D(\mathcal{A})$, y ya no ponemos el símbolo \otimes para hacer notar que se trata del producto dado por la estructura de módulo derecho.

Consideremos $\nabla^2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^2(\mathcal{A})$. Se tiene $\nabla^2(\varphi a) = (\nabla^2 \varphi)a$ para todo $\varphi \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{A}$. Entonces ∇^2 es un homomorfismo de \mathcal{A} -módulos que por definición se llama *la curvatura* de ∇ :

$$\nabla^2 : \mathcal{M} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{M} \otimes \Omega^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{M} \otimes \Omega^2(\mathcal{A}).$$

Aplicando dos veces la regla de Leibniz que cumple la conexión, se puede obtener la propiedad de tensorialidad de la curvatura

$$\begin{aligned} \nabla^2(\psi\omega) &= \nabla(\nabla(\psi)\omega + (-1)^{\partial\psi}\psi d\omega) = \\ &= \nabla^2(\psi)\omega + (-1)^{\partial\psi}\nabla(\psi)d\omega + (-1)^{\partial\psi}(\nabla(\psi)d\omega) = \nabla^2(\psi)\omega. \end{aligned}$$

3.5.3. Conexiones en los \mathcal{A} -módulos libres hermitianos de rango r

Consideremos \mathcal{A}^r como un \mathcal{A} -módulo derecho hermitiano. La base canónica de \mathcal{A}^r se denotará por $e = \{e_1, \dots, e_r\}$. Denotamos por \mathcal{V}_r al grupo de las transformaciones de norma, es decir el grupo formado por los unitarios de $\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Cualquier base de norma de \mathcal{A}^r tiene la forma eU para un único $U \in \mathcal{V}_r$.

Sea ∇ una conexión en \mathcal{A}^r , entonces $\nabla e_k = \sum_l e_l \otimes \omega_k^l$ para $k \in \{1, \dots, r\}$, $\omega_k^l \in \Omega_D^1(\mathcal{A})$.

Escribimos la relación $\nabla e_k = \sum_l e_l \otimes_{\mathcal{A}} \omega_k^l$ en la forma $\nabla e = e\omega$ con $\omega = (\omega_a^l) \in \mathcal{M}_r(\Omega_D^1(\mathcal{A})) = \Omega_D^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Los elementos ω_k^l de $\Omega_D^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ se llaman las componentes de ∇ en e_k . Con la definición extendida de h se puede demostrar que ∇ es una conexión hermitiana si y solo si $\bar{\omega}_l^k = -\omega_k^l$.

Para comprobarlo se parte de lo siguiente

- $\nabla(\varphi \otimes \alpha) = (\nabla\varphi)\alpha + \varphi \otimes d(\alpha)$
- $(a \otimes \omega, b \otimes \eta) \xrightarrow{h} \omega^* h(a, b)\eta$
- $dh(\varphi, \psi) = h(\nabla\varphi, \psi) + h(\varphi, \nabla\psi)$

Si el módulo es \mathcal{A}^r la conexión $\nabla : \mathcal{A}^r \rightarrow \mathcal{A}^r \otimes \Omega^1(\mathcal{A})$ se puede interpretar como una derivada direccional y las componentes de ∇ fijando un elemento $x \in \mathcal{A}^r$ se pueden visualizar en una matriz

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} \omega_{11}(x) & \dots & \omega_{1r}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{r1}(x) & \dots & \omega_{rr}(x) \end{pmatrix}$$

De manera similar podríamos definir la componente de ∇ en una base arbitraria eU , si ω es la componente de ∇ en e entonces su componente en eU es $U^{-1}\omega U + U^{-1}dU$.

Aquí sin embargo, consideramos $U^{-1}\omega U + U^{-1}dU$ como la componente en e de otra conexión denotada por ∇^U . El mapeo $\nabla \mapsto \nabla^U$, $U \in \mathcal{V}_r$ es una acción derecha del grupo de norma \mathcal{V}_r en el espacio de las conexiones en \mathcal{A}^r . La conexión ∇^U es hermitiana si y solo si ∇ es hermitiana. El conjunto $\{\nabla^U | U \in \mathcal{V}_r\}$ se llama la órbita de norma de ∇ . De la misma manera $\nabla^2 e = e\varphi$ con $\varphi \in \Omega_D^2(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Tenemos que

$$\varphi = d\omega + \omega^2$$

en el álgebra $\Omega_D(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ donde d está definida por $d(\alpha \otimes x) = d\alpha \otimes x$ para todo $\alpha \in \Omega_D(\mathcal{A})$, $x \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.

Llamamos a φ la componente de la curvatura ∇^2 de ∇ . Si φ es la componente de ∇^2 entonces la componente de la curvatura $(\nabla^U)^2$ de ∇^U es $U^{-1}\varphi U$.

3.5.4. Conexiones planas hermitianas en \mathcal{A}^r

Decimos que una conexión es plana si su curvatura se anula. De manera que una conexión ∇ en \mathcal{A}^r con componente ω es plana si y solo si $d\omega + \omega^2 = 0$. Si $U \in \mathcal{V}_r$ entonces ∇^U es plana si y solo si ∇ es plana.

Para cada base de norma eU^{-1} con $U \in \mathcal{V}_r$ existe una única conexión $\overset{(eU^{-1})}{\nabla}$ tal que $\overset{(eU^{-1})}{\nabla}(eU^{-1}) = 0$. Su componente en e es $U^{-1}dU$ de manera que $\overset{(eU^{-1})}{\nabla} = \overset{(e)}{\nabla}$ y es una conexión plana hermitiana. Estas conexiones $\overset{(e)}{\nabla}$ con $U \in \mathcal{V}_r$ se llaman conexiones puras de norma. El conjunto de las conexiones puras de norma es una órbita de norma de conexiones hermitianas planas en \mathcal{A} . Sin embargo para $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $n \geq 2$ existen otras órbitas de norma de conexiones planas hermitianas en \mathcal{A}^r que ahora describiremos.

Supongamos que $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $n \geq 2$ y sea r un entero positivo con $r \geq 1$. Consideremos R_k^α con $k \in \{1, 2, \dots, n^2 - 1\}$, $\alpha \in \{0, 1, \dots, N(n, r)\}$ un conjunto de elementos antihermitianos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ tal que $R_k^0 = 0$, $R_k^1 = iE_k \otimes 1$, $[R_k^\alpha, R_l^\alpha] = \sum_m c_{klm} R_m^\alpha$ para⁵ todo α, k, l y tal que si los (R_k) son $n^2 - 1$ elementos antihermitianos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ que satisfacen $[R_k, R_l] = \sum_m C_{klm} R_m$ para todo k, l entonces existe una única $\alpha \in \{0, 1, \dots, N(n, r)\}$ y un elemento unitario $v \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ tal que $R_k = v^{-1}R_k^\alpha v$ para todo k .

⁵Es decir, R^α es una representación de $\mathfrak{su}(n)$ en $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^r$.

1. Bajo una transformación de norma $\nabla \mapsto \nabla^U, U \in \mathcal{V}_r$, A y B_k como arriba se transforman como $A \mapsto U^{-1}AU + U^{-1}dU$ y $B_k \mapsto U^{-1}B_kU$. Así que las B_k se transforman homogéneamente⁶. Esta es la razón por la cual representamos la componente ω de ∇ en la forma $\sum_k \omega = A + (B_k - \lambda E_k \otimes 1)\theta_k$ y el por qué introducimos la componente de $\overset{\alpha}{\nabla}$ en la forma $\sum_k (R_k^\alpha - iE_k \otimes 1)\theta_k$.
2. Tenemos que $\overset{1}{\nabla} = \overset{(e)}{\nabla}$ de modo que las conexiones de norma puras en \mathcal{A}^r son elementos de la órbita de norma de $\overset{1}{\nabla}$.
3. Para cualquier $r \geq 1$, $N(n, r) \geq 1$ con $n \geq 2$, de modo que se tengan al menos dos órbitas de norma correspondientes a conexiones hermitianas planas en \mathcal{A}^r . La órbita de $\overset{0}{\nabla}$ y la órbita de $\overset{1}{\nabla}$ que es el conjunto de las conexiones de norma puras. En el caso $r = 1$, $N(n, 1) = 1$ de modo que se tienen solamente estas dos órbitas de norma.

Sea ∇ una conexión hermitiana con componente ω , entonces al realizar una transformación de norma obtenemos la conexión hermitiana ∇^U con componente $U^{-1}\omega U + U^{-1}dU$.

En el módulo \mathcal{A}^r si la conexión ∇ es hermitiana y plana entonces toda su órbita de norma está formada de conexiones hermitianas y planas.

3.5.5. Acción de Maxwell

El campo electromagnético se modela como una conexión ∇ en un haz vectorial ε de rango 1 sobre el espacio-tiempo M . Escogiendo una base local ortonormal para ε se puede dar una derivada covariante $\nabla : \varepsilon \rightarrow \varepsilon \otimes \Omega^1$ por medio de la 1-forma de potencial $A_m dx^m$. Al hacer cambios de bases ortonormales la forma cambia a una forma de norma-equivalente. Como $\text{End}\varepsilon$ se identifica canónicamente con el grupo de simetrías O_M , la curvatura de la conexión en este caso es la 2-forma de tensión $\Phi(\nabla) = \Phi_{ab} dx^a \otimes dx^b$, $\Phi_{ab} = \partial A_b / \partial x^a - \partial A_a / \partial x^b$. La contribución del campo electromagnético a la densidad del lagrangiano es $\langle \Phi(\nabla), \Phi(\nabla) \rangle$, donde el producto escalar en $\Omega^2 M$ es el inducido por la métrica. Usualmente se reescribe el lagrangiano en términos de la operación \star de Hodge $\star : \Omega^i M \rightarrow \Omega^{4-i} M$, que se define por la fórmula $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \Phi_1 \wedge \star(\Phi_2)$. Ambas formas de escribir el lagrangiano parecen esconder el hecho de que $\langle \Phi(\nabla), \Phi(\nabla) \rangle$ depende de la métrica y por lo tanto describe al campo electromagnético interactuando con otro campo.

⁶Se describe en el artículo 2 en el lema 7.3 para álgebras de matrices.

Las ecuaciones de Maxwell en un vacío tienen la forma

$$d\Phi = 0 \quad d * \Phi = 0$$

y la primera ecuación, en efecto, es la identidad de Bianchi.

Consideremos el caso particular $V = \mathbb{R}^{s+1}$, de modo que $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^{s+1}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La acción de Maxwell se construye para conexiones hermitianas definidas sobre el módulo de rango 1.

El potencial de Maxwell es una conexión cuya curvatura tiene componente

$$F = \sum_{kl} \frac{1}{2} F_{kl} dx_k \wedge dx_l$$

donde $F_{kl} = \partial_k a_l - \partial_l a_k$. La curvatura es la expresión matemática para el campo electromagnético. La acción de Maxwell está dada por

$$S(\nabla) = \int \|\nabla^2\|^2 = -\frac{1}{4} \int \sum_{kl} (\partial_k a_l - \partial_l a_k)^2 d^{s+1}x.$$

Esta acción es invariante bajo transformaciones de norma, positiva y se anula solo en la órbita de norma de las conexiones de norma puras. Físicamente dos conexiones en la misma órbita de norma se consideran equivalentes.

3.5.6. Acción de Yang-Mills

La diferencia entre un campo de Yang-Mills y un campo de Maxwell es que el primero es una conexión en un haz vectorial posiblemente de rango mayor que 1. La forma de curvatura es una sección de los endomorfismos del haz vectorial producto tensorial con las 2-formas. Todos los campos clásicos de Maxwell son campos de Yang-Mills [14].

La acción de Yang-Mills se construye para conexiones hermitianas definidas sobre el módulo $C^\infty(\mathbb{R}^{s+1})$ que es un módulo libre de rango r sobre \mathbb{R} . Si ∇ es una de estas conexiones con componente $a = \sum_k a_k dx \in \Omega_D^1(V) \otimes \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ la acción de Yang-Mills se define como

$$S(\nabla) = -\frac{1}{4} \int \sum_{kl} \frac{1}{r} \text{Tr}((\partial_k a_l - \partial_l a_k + [a_k, a_l])^2) d^{s+1}x.$$

Esta acción también es de norma invariante, positiva y se anula solo en las conexiones de norma puras. La acción de Yang-Mills coincide con la acción de Maxwell para $r = 1$.

4. Espacio de dos puntos con un cálculo diferencial cuántico

En esta parte vamos a repetir casi la misma construcción expuesta anteriormente para el espacio clásico más sencillo posible. Si consideramos un espacio de un solo punto, el álgebra de las funciones suaves es \mathbb{C} y las derivaciones se trivializan porque en cada $z \in \mathbb{C}$ todas las derivaciones se anulan. Esto nos impide continuar con la construcción de un cálculo diferencial, por eso consideraremos espacio clásico formado de dos puntos. En este espacio se usará el cálculo diferencial dado por la envolvente universal diferencial que se expone en el apéndice. La envolvente universal diferencial es el más grande de los cálculos diferenciales cuánticos posibles de construir.

Algo que es importante buscar en un cálculo diferencial es que preserve los automorfismos del álgebra, porque si preserva los automorfismos del álgebra, respeta las simetrías del espacio. En este sentido el álgebra universal diferencial por ser el cálculo más grande de todos, es el que preserva todas las simetrías del espacio (automorfismos del álgebra).

Sea X el espacio formado por dos puntos $X = \{x, y\}$. El álgebra de las funciones continuas \mathcal{A} se puede identificar con $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Las funciones p y q definidas por su valor en cada punto por

$$\begin{aligned} p(x) &= 1, & p(y) &= 0 \\ q(x) &= 0, & q(y) &= 1 \end{aligned}$$

forman una base para \mathcal{A} . Al sumar estas funciones obtenemos la función constante $p + q = 1$. Tanto p como q son proyectores en \mathcal{A} ya que son elementos hermitianos que cumplen $p^2 = p$, $q^2 = q$, y además son proyectores ortogonales entre sí, ya que $pq = qp = 0$.

El siguiente paso es considerar la derivada en p y q . Podemos observar que como $p + q = 1$, al aplicar la derivada en $p + q$ se anula, es decir $d(1) = d(p + q) = d(p) + d(q) = 0$, de modo que $d(p) = -d(q)$.

Por la regla de Leibniz, se tiene $d(p^2) = d(p)p + pd(p)$, pero usando que $p^2 = p$ nos da $d(p)p + pd(p) = d(p)$. Así que

$$pd(p) = d(p) - d(p)p = d(p)(1 - p) = d(p)q.$$

En general tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} pd(p) &= d(p)q \\ qd(p) &= d(p)p \end{aligned}$$

que evidencian que el algebra diferencial graduada no es conmutativa. Se puede ver fácilmente que p y q conmutan con las 2-formas ya que

$$pd(p)d(p) = d(p)d(p)p$$

y q cumple una igualdad semejante.

En los espacios cuánticos no tenemos una manera obvia de definir la dimensión, pero una posibilidad es definirla como el último grado del álgebra diferencial graduada, y en este caso tal ‘dimensión’ sería infinita. Otra relación interesante que se obtiene a partir de las anteriores es

$$pd(p)p = 0 \quad qd(q)q = 0.$$

Las 1-formas están generadas por $pd(p)$ y $qd(q)$. Las k -formas son

$$\underbrace{pd(p) \dots d(p)}_{k \text{ veces}} \underbrace{qd(q) \dots d(q)}_{k \text{ veces}}.$$

Ahora queremos considerar un haz vectorial sobre este espacio, que como vimos anteriormente se generaliza como un módulo proyectivo finitamente generado, y en el sentido clásico es un espacio vectorial en cada punto. Sean V_x y V_y espacios vectoriales en x y y respectivamente, que pueden ser de distinta dimensión. El módulo correspondiente sobre $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ es $V = V_x \oplus V_y$, definiendo el producto por elementos de \mathcal{A} como

$$(\alpha \oplus \beta)(v \oplus w) := (\alpha v \oplus \beta w)$$

para $\alpha \oplus \beta \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ y $v \oplus w \in V$.

Las conexiones en este haz son mapeos $\nabla : V \rightarrow V \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathbb{D}}^1(\mathcal{A})$ que cumplen la regla de Leibniz

$$\nabla(\psi a) = \nabla(\psi)a + \psi \otimes d(a)$$

donde $\psi \in V$ y $a \in \mathcal{A}$.

En este caso $V \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathbb{D}}^1(\mathcal{A})$ es isomorfo a

$$[V_x \otimes \langle \{pd(p)\} \rangle] \oplus [V_y \otimes \langle \{qd(q)\} \rangle]$$

entonces dado $\psi \in V$, la conexión se descompone de la siguiente manera

$$\nabla(\psi) = \psi_x \otimes (pd(p)) + \psi_y \otimes (qd(q))$$

y por la regla de Leibniz generalizada que cumple ∇ , tenemos

$$\begin{aligned}\nabla(\psi p) &= \nabla(\psi)p + \psi \otimes d(p) \\ &= \psi_x \otimes pd(p)p + \psi_y \otimes qd(q)p + \psi \otimes d(p).\end{aligned}$$

Esta descomposición se obtiene calculando primero

$$\nabla(\psi q) = \psi_y \otimes qd(q) + \psi \otimes d(p).$$

Finalmente se obtiene la siguiente descomposición

$$\nabla(\psi) = \psi_x \otimes (pd(p)p) + \psi_y \otimes (qd(q)p) + \psi \otimes d(p)$$

donde el primer término se anula, ya que la p pasa del lado izquierdo de dp como q y finalmente queda

$$\nabla(\psi p) = \psi_y \otimes (qd(q)) + \psi \otimes d(p).$$

Vamos a analizar la conexión, estudiando como opera en cada uno de los espacios que componen a V , para esto consideremos $\psi \in V_x$ y $\varphi \in V_y$, entonces, $\psi p = \psi$ y la última fórmula se reduce a

$$\nabla(\psi) = \psi_y \otimes (qd(q)) + \psi \otimes d(p)$$

donde ψ_y es un vector que depende de ψ , así que podemos reescribirlo como $\psi_y = S(\psi)$. Haciendo el proceso análogo para $\varphi \in V_y$ obtenemos las siguientes fórmulas,

$$\begin{aligned}\nabla(\psi) &= S(\psi) \otimes (qd(q)) + \psi \otimes d(p) \\ \nabla(\varphi) &= T(\varphi) \otimes (pd(p)) + \varphi \otimes d(q)\end{aligned}$$

donde $T : V_x \rightarrow V_y$ y $S : V_y \rightarrow V_x$ son transformaciones lineales que determinan la conexión ∇ .

El siguiente paso es dar una estructura hermitiana a V , extender las conexiones a toda el álgebra graduada $V \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ y calcular la curvatura de una conexión hermitiana.

Siguiendo los pasos de la sección anterior, la conexión se extiende como $\nabla : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ donde $\tilde{V} = V \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ por medio de la fórmula

$$\nabla(\psi \otimes \omega) = \nabla(\psi)\omega + \psi \otimes d(\omega) \tag{4}$$

verificando que el producto tensorial cumpla $\psi \otimes a\omega = \psi a \otimes \omega$.

A partir de una estructura hermitiana en V que lo convierte en un módulo de Hilbert, se le da una estructura hermitiana a \tilde{V}

$$\begin{aligned}\langle, \rangle &: V \times V \rightarrow \mathcal{A} \\ \langle, \rangle &: \tilde{V} \times \tilde{V} \rightarrow \Omega_D(\mathcal{A})\end{aligned}$$

dada por la fórmula

$$\langle v \otimes \omega, w \otimes \eta \rangle := \langle v, w \rangle \omega \eta.$$

La conexión ∇ es hermitiana en \tilde{V} , si cumple

$$d\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \nabla(\varphi), \psi \rangle + (-1)^{\partial \varphi} \langle \varphi, \nabla \psi \rangle.$$

Se puede demostrar que ∇ es hermitiana si y solo si los operadores S y T son adjuntos uno del otro.

Sea ∇ una conexión hermitiana y sea $\phi = \psi \oplus \varphi \in V$ con $\psi \in V_x$ y $\varphi \in V_y$, su curvatura $R(\nabla) = \nabla^2$ en el vector ψ está dada por la siguiente expresión, donde se utiliza la fórmula 4:

$$\begin{aligned}R(\nabla)(\psi) &= \nabla^2(\psi) = \nabla(S(\psi) \otimes qdq + \psi \otimes dp) = \nabla((S(\psi))qdq + S(\psi) \otimes dqdq + \nabla(\psi)dp) \\ &= -S^*S(\psi) \otimes p(dq)^2 + \psi \otimes (dq)^2 = -S^*S(\psi) \otimes (dq)^2 + \psi \otimes (dq)^2 \\ &= (-S^*S(\psi) + \psi) \otimes (dq)^2\end{aligned}$$

análogamente para $\varphi \in V_y$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla^2(\varphi) &= -SS^*(\varphi) \otimes (dq)^2 + \varphi \otimes (dq)^2 \\ &= (-S^*S(\varphi) + \varphi) \otimes (dq)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto la curvatura de ∇ en ϕ se escribe como

$$\begin{aligned}\nabla^2(\phi) &= -S^*S(\psi) \otimes (dp)^2 + \psi \otimes (dp)^2 - SS^*(\varphi) \otimes (dq)^2 + \varphi \otimes (dq)^2 \\ &= (\mathbf{I}_x - S^*S)(\psi) + (\mathbf{I}_y - SS^*)(\varphi) \otimes (dq)^2.\end{aligned}$$

El funcional de Yang-Mills está dado por

$$A(\nabla) = \int_X \|R(\nabla)\|^2$$

donde $\int_X \|R(\nabla)\|^2 = \int_{\{x\}} \|R(\nabla)\|^2 + \int_{\{y\}} \|R(\nabla)\|^2$ y se usa la medida que cuenta:

$$\int \|R(\nabla)\|^2 = \|I_x - S^*S\|^2 + \|I_y - SS^*\|^2 = \text{Tr}_x(I_x - S^*S)^2 + \text{Tr}_y(I_y - SS^*)^2.$$

Sin embargo aquí se desprecian algunos términos que no proveen información física relevante y esta expresión se reduce a

$$\text{Tr}_x(S^*SS^*S - 2S^*S) + \text{Tr}_y(SS^*SS^* - 2SS^*) = 2\text{Tr}_x(S^*SS^*S - 2S^*S)$$

porque la traza conmuta. No hay que perder de vista que en general $\dim V_x \neq \dim V_y$.

El principio variacional nos dice que la solución física es un punto extremo de este funcional, y así se obtienen las ecuaciones de movimiento. Si consideramos una perturbación infinitesimal δ , usando la regla de Leibniz se obtiene

$$\delta(S^*SS^*S) = \delta(S^*)SS^*S + S^*\delta(S)S^*S + S^*S\delta(S^*)S + S^*SS^*\delta(S)$$

ahora, al considerar la traza de esta perturbación se obtiene

$$\delta\text{Tr}_x(S^*SS^*S) = 2\text{Tr}_x((SS^*S)\delta(S^*)) + 2\text{Tr}_x((S^*SS^*)\delta(S))$$

gracias a que la traza es un invariante algebraico. De modo que

$$\delta\text{Tr}_x(S^*S) = \text{Tr}_x(S^*\delta S) + \text{Tr}_x(S\delta S^*).$$

Finalmente llegamos a que la perturbación es

$$\text{Tr}_x((SS^*S - S)\delta(S^*)) + \text{Tr}_x((S^*SS^* - S)\delta(S)) - \delta\text{Tr}_x(S^*SS^*S)$$

omitiendo el factor escalar 2, y donde $\delta(S)$ es una variación de S y queremos que δ se anule para cualquier variación. Pero que se anule para esta expresión es equivalente a que se anule en cada término de la suma por separado, se obtienen expresiones mutuamente conjugadas.

Se concluye que para toda variación $\delta(S)$ la ecuación de Yang-Mills está dada por

$$\text{Tr}_x((S^*SS^* - S^*)\delta(S)) = 0$$

pero como que $\text{Tr}(a^*b)$ es un producto escalar se tiene que

$$S^*SS^* - S^* = 0$$

de donde se obtienen las ecuaciones de Yang-Mills

$$S^*SS^* = S^* \quad SS^*S = S$$

que son dos ecuaciones equivalentes cúbicas para la matriz S , pero en un álgebra C^* dado un elemento U las siguientes condiciones son equivalentes

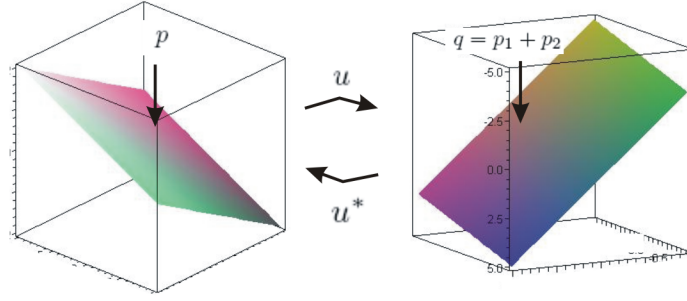


Figura 1: Isometrías parciales

1. U^*U es proyector
2. UU^* es proyector
3. $UU^*U = U$
4. $U^*UU^* = U^*$.

Las condiciones definen exactamente el concepto de *isometría parcial*.

De modo que las ecuaciones de Yang-Mills las cumplen los operadores que son isometrías parciales. En la figura 1 se ve un diagrama de cómo actúa una isometría parcial. Supongamos que $\dim V_x = \dim V_y = 1$ (dimensión compleja), entonces las isometrías parciales son rotaciones y la solución de las ecuaciones de Yang-Mills son un círculo, y la solución cero.

Si $\dim V_x = 1$ y $\dim V_y = n$, se tiene la solución cero y las inyecciones de V_x en V_y , si en particular $\dim V_y = 2$ compleja las soluciones forman una 3-esfera.

5. Observaciones Sobre Envoltentes Diferenciales

5.1. Modelo con el álgebra envolvente universal diferencial

A continuación queremos analizar qué cálculo se obtiene al aplicar la envolvente universal diferencial sobre el cálculo de Chevalley de primer orden que se usa en la primera parte del trabajo.

El cálculo de primer orden son las 1-formas en $C^\infty(V) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que están dadas por

$$[\Omega^1(C^\infty(V)) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})] \oplus [C^\infty(V) \otimes \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^*].$$

Para construir la envolvente universal diferencial debemos buscar aquellas 1-formas tales que $\sum a_i d(b_i) = 0$ ya que al derivarlas, queremos que se anulen, ie, $\sum da_i \otimes db_i = 0$. Para eso consideramos el ideal $\mathcal{I} = \langle \{\sum da_i \otimes db_i = 0 \mid \sum a_i d(b_i) = 0\} \rangle$, y factorizamos el álgebra $\Omega^\otimes(A)$ por este ideal. Definimos el álgebra universal diferencial como $\Gamma^\wedge = \Omega^\otimes(A)/\mathcal{I}$. Este cálculo es el más grande de todos los cálculos que se pueden construir sobre el cálculo de primer orden generado por las 1-formas $\Omega^1(C^\infty(V)) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \oplus C^\infty(V) \otimes \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^*$.

5.2. Conexiones en el álgebra universal diferencial

Ahora queremos ver como son las conexiones obtenidas con álgebra universal diferencial Ω^\wedge . Si se desea dotar al espacio-tiempo de nuevas simetrías en los grados internos de libertad, se necesita reformular el concepto de transporte paralelo y cambiarlo por un campo de fuerza llamado la conexión. Físicamente los haces vectoriales representan la sustancia y su traducción algebraica son los módulos proyectivos finitamente generados. Las conexiones son las fuerzas.

Por ejemplo, podemos pensar en los quarks y los gluones. Dotando al espacio-tiempo con nuevas simetrías $\psi(x) \mapsto e^{i\varphi(x)}\psi(x)$ donde $e^{i\varphi(x)} \in \text{SU}(3)$ se ve que existen 8 gluones porque 8 es la dimensión de $\text{SU}(3)$. Los gluones forman la conexión, mientras que los quarks son la sustancia.

A. Calculos Cuánticos

A.1. Acerca de Cálculos Diferenciales Cuánticos

Los cálculos diferenciales cuánticos son la generalización del algebra exterior que consta de las formas diferenciales clásicas.

Consideremos un espacio cuántico determinado por un C^* -álgebra A , sea \mathcal{A} el álgebra $*$ de las funciones suaves definidas en este espacio con valores en \mathbb{C} . En el caso clásico \mathcal{A} es un álgebra $*$ densa en la C^* -álgebra A , esto se generaliza al nivel cuántico.

Definición 10. *Un álgebra graduada Ω es una suma de espacios*

$$\Omega = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k$$

que cumple $\Omega^k \cdot \Omega^l \subset \Omega^{k+l}$, donde $\Omega^k \cdot \Omega^l$ está formado por productos de elementos de Ω^k con elementos de Ω^l .

Definición 11. *Un álgebra diferencial graduada es un álgebra graduada junto con un mapeo lineal $d : \Omega \rightarrow \Omega$ que cumple,*

$$d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}, \text{ es decir que } d \text{ aumenta el grado;}$$

$$d^2 = 0$$

$$d(\omega\eta) = d(\omega)\eta + (-1)^{\partial\omega}\omega d(\eta), \text{ se cumple la regla de Leibniz.}$$

El mapeo lineal d es un operador diferencial.

Definición 12. *Un álgebra graduada diferencial $*$ es un álgebra graduada diferencial donde existe un mapeo $*$: $\Omega \rightarrow \Omega$ que cumple,*

$$*^2 = \text{I}$$

$$*d = d*, \text{ es decir, } * \text{ conmuta con } d;$$

$$(\omega\eta)^* = (-1)^{\partial\omega\partial\eta}\eta^*\omega^*$$

$$(\Omega^k)^* = \Omega^k.$$

Un álgebra graduada diferencial $*$ es sobre \mathcal{A} si $\Omega^0 = \mathcal{A}$. La segunda condición es que Ω^0 genera a Ω como álgebra diferencial, es decir que Ω es la mínima subálgebra diferencial graduada que contiene a $\Omega^0 = \mathcal{A}$. En otras palabras

$$\Omega^k = \left\{ \sum_{a_i \in \mathcal{A}} a_0 d(a_1) \dots d(a_k) \right\}. \quad (5)$$

Todas las formas diferenciales se generan por medio de las funciones suaves.

Definición 13. *Decimos que tenemos un cálculo diferencial cuántico en el espacio dado por \mathcal{A} si existe un $*$ -álgebra diferencial Ω sobre \mathcal{A} .*

Existen varias maneras de definir cálculos diferenciales para una misma álgebra. A continuación se exponen 3 construcciones distintas: el complejo de Chevalley, el álgebra universal diferencial y la envolvente universal diferencial discutiendo algunas relaciones entre estos cálculos diferenciales. En el ejemplo de un espacio de 2 puntos se usa la envolvente universal diferencial.

Siempre se puede construir un cálculo trivial declarando $d \equiv 0$ y se cumplen todas las propiedades deseadas. Este cálculo trivial es el mínimo que se puede construir a partir de un álgebra $*$. Por otro lado, Micho Durdevich construye en el artículo [11] un cálculo diferencial llamado envolvente universal diferencial, este cálculo es máximo ya que cualquier otro cálculo diferencial se puede obtener como una proyección de la envolvente universal diferencial.

A.2. Álgebra de Chevalley

Sea \mathcal{A} un álgebra $*$ y \mathcal{X} el conjunto de las derivaciones de \mathcal{A} . El álgebra de Chevalley es un álgebra diferencial graduada $*$ y se denota por $C(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Por definición de las derivaciones \mathcal{X} actúa en \mathcal{A} ya que existe un mapeo que va de $\mathcal{X} \times \mathcal{A}$ en \mathcal{A} , $(X, a) \mapsto Xa$ que cumple la regla de Leibniz. Los elementos de $C^k(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ se definen como sigue: para $k = 0$, $C^0(\mathcal{X}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$ y para las formas de mayor grado se consideran los mapeos multilineales alternantes definidos en \mathcal{X} , que toman valores en \mathcal{A} . Es decir dada $k > 0$ tomamos mapeos alternantes $\mathcal{T} : \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$.

La manera de introducir la estructura de álgebra diferencial graduada $*$ en el espacio $C(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ es definiendo un producto entre formas diferenciales, una operación $*$, y una derivada exterior.

1. Si $\omega \in C^k(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ y $\eta \in C^l(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, el producto $\omega \wedge \eta \in C^{k+l}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ está dado por:

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\partial\sigma} \omega(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \eta(X_{i_{k+1}}, \dots, X_{i_{k+l}})$$

donde σ es una permutación de las X_i , y tanto los índices i_1, \dots, i_k como i_{k+1}, \dots, i_{k+l} forman sucesiones crecientes. El producto que se acaba de definir es asociativo.

2. La operación $*$ está dada por

$$\omega^*(X_1, \dots, X_k) = \omega(X_1^*, \dots, X_k^*)^*.$$

3. Sea $\omega \in C^k(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, su derivada exterior $d(\omega) \in C^{k+1}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ se define como

$$d(\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

donde la notación \hat{X}_i quiere decir que X_i no aparece en la expresión.

Finalmente, la regla de Leibniz se extiende al derivar el producto exterior de dos formas diferenciales cuánticas:

$$d(\omega \wedge \eta) = d(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\partial\omega} \omega \wedge d(\eta).$$

Así es como se generalizan las formas diferenciales a nivel cuántico.

A.3. Cohomología de De Rham

Podemos ver un álgebra graduada como la siguiente cadena

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Teniendo en mente la idea de que la derivada exterior cumple $d^2 = 0$, se ve fácilmente que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $d(\Omega^n) \subset \ker(d_{(n+1)})$, donde $d_n = d : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}$. Al definir $H^n(M) = \ker(d_{(n)})/\text{im}(d_{(n-1)})$, podemos hablar de *clases de cohomología*. Para visualizarlas también es útil recordar las siguientes definiciones:

Definición 14. Una k -forma ω es exacta si se puede expresar como $\omega = d\nu$.

Definición 15. Una k -forma η es cerrada si $d\eta = 0$.

Obsérvese que cada forma exacta es cerrada. Decimos que dos k -formas cerradas están en la misma clase de cohomología si su diferencia es una k -forma exacta. Las clases de cohomología naturalmente forman una algebra graduada.

Los complejos simpliciales son una generalización de la idea del poliedro más simple que se puede construir en un espacio y que tenga la misma dimensión del espacio. Los complejos simpliciales se pueden ordenar de acuerdo a su dimensión y

se forma una cadena en la cual cada complejo simplicial se obtiene como la frontera de su sucesor, $\partial : C_2(M) \rightarrow C_1$. La integral $\int : C_k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función bilineal, $\int_\sigma \omega$. En general se cumple, $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega$, que se puede interpretar como una generalización del teorema de Frobenius. Por medio de la integral, el espacio de los complejos simpliciales se puede ver como el espacio dual de las formas. Observación: En variedades diferenciales la cadena de De Rham siempre es finita.

A.4. Envolverte Universal Diferencial

La envolvente universal diferencial es un cálculo diferencial de todos los órdenes que se construye a partir de cualquier cálculo de primer orden (las 1-formas Γ). Consideremos un $*$ -álgebra \mathcal{A} , y sea (Γ, d) un cálculo de primer orden sobre \mathcal{A} , entonces Γ es un bimódulo sobre \mathcal{A} y la derivada d cumple la regla de Leibniz

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

donde $\Gamma = \{\sum ad(b), a, b \in \mathcal{A}\}$. Para extender este cálculo a un cálculo de todos los órdenes Γ^\wedge , se debe extender la d de manera que $d(\Gamma^{\wedge n}) \subset \Gamma^{\wedge n+1}$, donde Γ^\wedge se obtiene a partir de Γ^\otimes quitando una incongruencia que podría aparecer, y es que necesitamos pedir que $\sum d(a_\alpha)d(b_\alpha) = 0$ cuando $\sum a_\alpha d(b_\alpha) = 0$. Esto es para evitar que la derivada de una forma cero sea distinta de cero. Como esto es lo mínimo que se necesita para extender Γ a un cálculo de todos los órdenes Γ^\wedge , y es una sola condición algebraica, el cálculo obtenido es el más grande de los cálculos de todos los órdenes que se pueden construir a partir de Γ . La manera formal de obtener Γ^\wedge es la siguiente.

En Γ^\otimes consideramos el ideal $\mathcal{I} = \langle \{\sum da_i \otimes db_i = 0 \mid \sum a_i d(b_i) = 0\} \rangle$. Se define la envolvente universal diferencial como $\Gamma^\wedge = \Omega^\wedge / \mathcal{I}$.

Es decir, dado $\sum d(a_\alpha)d(b_\alpha) \in \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ estamos considerando el espacio de clases de equivalencia $\Gamma^\wedge = \Gamma^\otimes / \sim$, donde \sim es la relación $\omega \sim \eta$ si $\omega - \eta \in \mathcal{I}$.

A.5. Algebra universal diferencial

El álgebra universal diferencial es el más grande de los cálculos diferenciales que se pueden construir a partir de un álgebra. Sea \mathcal{A} un $*$ -álgebra

- Se define $\Omega^0 = \mathcal{A}$;
- Se postula que $1 \in \mathcal{A}$ es la unidad en Ω ;

- Se introduce d en la manera lineal postulando algebraicamente $d(\alpha a + b) = \alpha d(a) + d(b)$;
- Se introduce algebraicamente la regla de Leibniz

$$d(a)b = d(ab) - ad(b),$$

de modo que cualquier k -forma se puede escribir como $\sum a_0 d(a_1), \dots, d(a_k)$;

- Se define

$$d(a_0 d(a_1), \dots, d(a_k)) = d(a_0) d(a_1), \dots, d(a_k).$$

El álgebra universal diferencial por ser el cálculo más grande de todos, es el que preserva mejor las simetrías del espacio (automorfismos del álgebra).

Como consecuencia de las relaciones algebraicas postuladas se tienen dos propiedades deseables en un cálculo diferencial

- $d(1) = 0$
- $d^2 = 0$.

La diferencia entre las dos álgebras graduadas universales anteriormente expuestas es que la primera se construye a partir de las 1-formas, y la segunda a partir del álgebra.

A.6. Álgebra Exterior de Grassmann

En geometría diferencial, dada una variedad suave V , se construye el álgebra exterior sobre las funciones suaves $C^\infty(V)$ que son un álgebra $*$ y Γ es dado por uno formas, las secciones suaves del haz cotangente $T^*(V)$.

Como mencionamos anteriormente, en el caso de los cálculos cuánticos, se puede construir el álgebra de exterior de distintas maneras, una de ellas es el álgebra universal diferencial construida a partir de un álgebra $*$. La otra es considerar envolventes universales del cálculo del orden uno. Se puede demostrar que en el caso clásico la envolvente universal diferencial de uno-formas clásicas coincide por completo con el álgebra exterior de formas diferenciales clásicas.

Para el caso de los grupos cuánticos, Woronovicz demostró que solo cuando el cálculo diferencial es bicovariante, el operador de flip $\sigma : \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ que extiende el concepto de permutación y satisface la ecuación de trenza, se puede

construir el álgebra trezada extendida de Grassmann. Pero en el caso de los grupos clásicos de Lie, el cálculo de Woronovicz también coincide con el álgebra exterior (suponiendo que el cálculo de primer orden es el cálculo clásico de uno-formas sobre el grupo).

Siempre existe una proyección natural $\Pi : \Gamma^\wedge \rightarrow \Gamma^\vee$ donde Γ^\vee es el cálculo de Woronovicz y Γ^\wedge es la envolvente universal diferencial.

En el caso particular de los grupos cuánticos, tenemos el mapeo coproducto $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ y es deseable extender el coproducto a todo el cálculo diferencial $\hat{\phi} : \Omega \rightarrow \Omega \hat{\otimes} \Omega$, de manera que se cumpla

$$\hat{\phi}(da) = d\phi(a) = d[a^{(1)} \otimes a^{(2)}] = d(a^{(1)}) \otimes a^{(2)} + a^{(1)} \otimes d(a^{(2)}).$$

Por lo tanto

$$\hat{\phi} : \Gamma \rightarrow (\mathcal{A} \otimes \Gamma) \oplus (\Gamma \otimes \mathcal{A})$$

donde se obtiene de manera natural la necesidad de la bicovarianza del cálculo diferencial. Finalmente que por medio de la envolvente universal diferencial se obtiene un nuevo grupo cuántico y que dado cualquier otro cálculo diferencial de más alto orden Ω , que permite la mencionada extensión del coproducto al nivel de todo el cálculo, existen proyecciones Π_1 y Π_2 de cálculos tales que

$$\Gamma^\wedge \xrightarrow{\Pi_1} \Omega \xrightarrow{\Pi_2} \Gamma^\vee.$$

En otras palabras, cada tal cálculo Ω se encuentra entre Γ^\wedge y Γ^\vee .

B. Material Clásico

B.1. Orientabilidad

Una variedad V es orientable si existen una colección de sistemas coordenados \mathcal{O} en V cuyos dominios cubren V y tales que para cada $\psi, \eta \in \mathcal{O}$ con intersección no-trivial, el jacobiano

$$J(\psi, \eta) = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$$

de transición en la coordenadas correspondientes es positivo. Si es así \mathcal{O} se llama un *atlas de orientación* para V .

Otra forma de definir orientabilidad es la siguiente: Una variedad de dimensión n es orientable si y solo si posee una n -forma que nunca se anula.

La orientabilidad tiene una expresión útil en términos de cubiertas.

Lema B.1. *Supongamos que $\kappa : \Sigma \rightarrow V$ es un mapeo 2 a 1, y definamos \mathcal{L} como el conjunto de las funciones $\lambda : \mathcal{U} \rightarrow \Sigma$ (donde \mathcal{U} es un abierto de V) tales que*

1. $\kappa \circ \lambda = \text{I}$ para todo $\lambda \in \mathcal{L}$
2. Si $\lambda(p) = \mu(p)$ para $\lambda, \mu \in \mathcal{L}$, entonces $\lambda = \mu$ en una vecindad de $p \in V$.

Entonces existe una manera única de hacer Σ una variedad de modo que $\kappa : \Sigma \rightarrow V$ es una doble cubierta suave y que cada $\lambda \in \mathcal{L}$ es una sección cruzada local suave de la proyección κ .

Para una variedad V consideremos el conjunto \hat{V} de todas las orientaciones de los espacios tangentes de V . Sea $\kappa : \hat{V} \rightarrow V$ definido de modo que mande las dos orientaciones de cada $T_p(V)$ al punto p . Por el lema anterior, sabemos que existe una única manera de hacer que \hat{V} sea una variedad, con $\kappa : \hat{V} \rightarrow V$ una doble cubierta y para cada sistema coordenado ξ en $\mathcal{U} \subset V$, el mapeo $\lambda_\xi : \mathcal{U} \rightarrow \hat{V}$ una sección cruzada local suave.

Esta cubierta se llama la cubierta de orientación de V y una orientación es una sección global suave $\lambda : V \rightarrow \hat{V}$.

Lema B.2. *Para cada variedad V , se cumple*

1. *La cubierta de orientación \hat{V} de V es una variedad orientable.*
2. *La variedad V es orientable si y solo si $\kappa : \hat{V} \rightarrow V$ es trivial.*

Teorema B.3. *Si una variedad diferenciable es simplemente conexa entonces es orientable.*

B.2. Elementos de volumen

Un elemento de volumen en una variedad semiriemanniana M de dimensión n , es una n -forma ω tal que $\omega(e_1, \dots, e_n) = \pm 1$ para cada marco de M , el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal del espacio tangente $T_x M$ para un $x \in M$. Es útil tener presente el siguiente teorema:

Teorema B.4. *Una variedad semiriemanniana M tiene un elemento global de volumen si y solo si M es orientable.*

B.3. Hazes vectoriales

Un k -haz vectorial (E, Π) sobre una variedad M consiste de una variedad E y un mapeo suave $\Pi : E \rightarrow M$ tal que

1. Cada $\Pi^{-1}(p)$ con $p \in M$ es un espacio vectorial de dimensión k ;
2. Para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y un difeomorfismo

$$\Phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \Pi^{-1}(U) \subset E$$

tal que para cada $q \in U$ el mapeo $v \mapsto \Phi(q, v)$ es un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^k sobre $\Pi^{-1}(q)$. Localmente se puede decir que $E \approx U \times \mathbb{R}^k$.

B.4. Hazes principales

Sea G un grupo de Lie y M una variedad suave. Un G -haz principal sobre M es un mapeo suave $\pi : P \rightarrow M$ junto con una acción derecha de G sobre P tal que

1. $ug = u$ si y solo si $g = e$;
2. Existen abiertos V que cubren a M y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ tal que Φ tiene la forma $\Phi(u) = (\pi(u), \psi(u))$ y $\Phi(ug) = (\pi(u), \psi(u)g)$.

Decimos que P es el espacio total, M es la base del espacio y G es el grupo estructural.

B.5. Notación de Dirac

Sea V un espacio vectorial unitario⁷ de dimensión finita con producto escalar $\langle \varphi | \psi \rangle$ sobre \mathbb{C} de dimensión n , la notación de Dirac para un vector $\psi \in V$ es:

$$\psi = |\psi\rangle$$

o bien coordenada a coordenada⁸

$$|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\rangle.$$

⁷Un espacio unitario es un espacio vectorial complejo dotado de un producto escalar.

⁸Hay distintas posibilidades para las coordenadas, que pueden ser desde coordenadas euclidianas y no euclidianas hasta valores en los niveles de energía de un átomo.

Si V^* es el espacio dual de V la notación de Dirac para $\gamma \in V^*$ es

$$\langle \gamma |.$$

Cada vector $\psi \in V$ induce un funcional lineal que se denotará por $\langle \psi |$ definido por

$$\langle \psi | : |\omega\rangle = \langle \psi | \omega \rangle$$

con $\omega \in V$. Por el teorema de representación de Riesz, para cada funcional lineal γ existe un único vector $\psi_\gamma \in V$ tal que $\gamma(\psi) = \langle \psi_\gamma | \psi \rangle$ para todo $\psi \in V$.

Por medio de una base ortonormal (e_1, e_2, \dots, e_n) en V se puede establecer un isomorfismo de V con \mathbb{C}^n en donde se tiene el producto escalar

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i.$$

Por medio de cualquier isomorfismo $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ se puede inducir un nuevo producto escalar en V como

$$(\psi_1, \psi_2)_V = (\Phi(\psi_1), \Phi(\psi_2))_{\mathbb{C}^n}.$$

De esta manera cualquier espacio vectorial V se convierte en un espacio unitario.

Dada cualquier transformación lineal $T : V \rightarrow V$ el producto escalar

$$(\psi_1, T(\psi_2))$$

queda representado por el “bracket”:

$$\langle \psi_1 | T | \psi_2 \rangle.$$

Finalmente, la forma sesquilineal dada por el producto tensorial se escribirá como

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$$

y se puede ver como una transformación lineal del modo siguiente:

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_2|(|\psi_3\rangle) = |\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_3\rangle.$$

Estos operadores se llaman las *diadas de Dirac*.

B.6. Interpretación geométrica de la conexión

En la introducción establecimos que las conexiones sirven para identificar las fibras en un haz vectorial o en un haz principal a lo largo de trayectorias en el espacio tiempo, con un campo físico. A continuación la definición clásica de una conexión.

Definición 16. Sea $P(M, G)$ un haz fibrado principal sobre una variedad M , con grupo estructural G . Para cada $u \in P$ sea $T_u(P)$ el espacio tangente de P en el punto u , y sea G_u el subespacio de $T_u(P)$ que consiste de los vectores tangentes a la fibra que pasa por u . Una conexión Γ en P es la asignación de un subespacio Q_u de $T_u(P)$ a cada punto $u \in P$ tal que

1. $T_u(P) = G_u \oplus Q_u$.
2. $Q_{ua} = (R_a)_*Q_u$ para cada $u \in P$ y $a \in G$ donde R_a es la transformación de P inducida por $a \in G$, $R_a u = ua$.
3. Q_u depende diferenciablemente de u .

La segunda condición significa que la distribución $u \rightarrow Q_u$ es invariante por G . Llamamos a G_u el espacio vertical, y a Q_u el espacio horizontal de $T_u(P)$.

El espacio de las formas diferenciales en una variedad con coeficientes en un haz vectorial, es el entorno natural de operación de una conexión ∇ . En el caso cuántico las conexiones son aplicaciones lineales que se definen sobre un módulo \mathcal{M} que juega el papel del haz vectorial y toman valores en $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$.

Definición 17. Se define $\nabla(\psi \otimes \omega)$ con $\omega \in \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ como

$$\nabla(\psi \otimes \omega) := \nabla(\psi)\omega + \psi \otimes d(\omega).$$

Enfatizamos con la notación $\otimes_{\mathcal{A}}$ que trabajamos con el producto tensorial tomado sobre el álgebra \mathcal{A} , en otras palabras tenemos relaciones adicionales de la forma

$$\psi \otimes a\omega = \psi a \otimes \omega,$$

así que la conexión ∇ da el mismo resultado evaluado en cualquiera de los dos elementos

$$\nabla(\psi \otimes a\omega) = \nabla(\psi)a\omega + \psi \otimes d(a\omega) = \nabla(\psi)a\omega + \psi \otimes d(a)\omega + \psi a \otimes d(\omega) = \nabla(\psi a \otimes \omega).$$

Las conexiones cumplen una regla generalizada de Leibniz. Para $\psi \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ y $\omega \in \Omega_{\mathbb{D}}(\mathcal{A})$ se cumple

$$\nabla(\psi\omega) = \nabla(\psi)\omega + (-1)^{\partial\psi}\psi d(\omega).$$

Esto sigue directamente de la definición del ∇ extendido.

B.7. Curvatura

En geometría diferencial existen varias nociones de curvatura como por ejemplo la curvatura seccional y la curvatura escalar. La curvatura de una variedad semi-riemanniana se define a partir de la conexión de Levi-Civita. Es la única conexión compatible con la métrica de la variedad, y que además tiene torsión nula, ya que cumple

$$\begin{aligned} [V, W] &= D_V W - D_W V \\ X\langle V, W \rangle &= \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle \end{aligned}$$

donde D es la derivada covariante de la conexión.

De todas estas nociones se define el tensor de curvatura de una variedad semi-riemanniana M como

$$R_{X,Y}Z = [D_X, D_Y]Z - D_{[X,Y]}Z.$$

El tensor de Ricci es una contracción del tensor de curvatura. Explícitamente, está dado por

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_m \epsilon_m \langle R_{X, E_m} Y, E_m \rangle$$

donde X y Y son campos vectoriales en la variedad M , $\epsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$ y $\{E_m\}$ es una base ortonormal⁹ del espacio tangente de M en un punto. Si el tensor de curvatura de una variedad es cero, el tensor de Ricci también se anula pero no al revés.

⁹Es decir, los vectores son ortogonales entre si, y su norma es ± 1 .

Referencias

- [1] Gelfand Israel, Naimark Mark: *On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space* (Mat. SB. 12 (1943), 301-306).
- [2] Bratteli Ola, Robinson Derek W: *Operator algebras and quantum statistical mechanics vol (I), C^* - and W^* algebras, symmetry groups, decomposition of states* (Springer, 2002).
- [3] Dubois-Violette M: *Derivations et calcul différentiel non-commutatif*, CR Acad Sci Paris **307** (1988).
- [4] Dubois-Violette M, Kerner R, Madore J: *Noncommutative Differential Geometry of Matrix Algebras*, J Math Phys **31** 316–322 (1990).
- [5] Dubois-Violette M, Kerner R, Madore J: *Noncommutative Differential Geometry and New Models of Gauge Theory*, J Math Phys **31** 323–335 (1990).
- [6] O’Neill Barrett: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press (2011).
- [7] Russell Bertrand: *ABC de la Relatividad*, Catedra (2013).
- [8] Olga Leticia, Uriarte Rivera, Héctor Javier, Pacheco Quintanilla, Mario Efraín: *Feynman en México—Conferencias sobre física de altas energías*, Instituto Politécnico Nacional (2005).
- [9] Hawking Stephen: *Historia del Tiempo*, Alianza (2012).
- [10] Aguilar Benítez, Rocío del Pilar: *Algebras C^* y Grupos Cuánticos Compactos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias/UNAM.
- [11] Durdevich Micho: *Geometry of Quantum Principal Bundles I*, Commun Math Phys **175** (3) 457–521 (1996).
- [12] Durdevich Micho: *Geometry of Quantum Principal Bundles II—Extended Version*, Rev Math Phys, **9** (5) 531–607 (1997).
- [13] Woronovicz, Stanislaw Lech: *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudo-groups (Quantum Groups)* Commun Math Phys **122** 125–170 (1989).
- [14] Manin, Yuri I: *Gauge Field Theory and Complex Geometry* (Springer, 1984).

- [15] Alekseevskij, Vinogradov, Lychagin: *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* **28** *Geometry I* (Springer 1988).
- [16] Sontz, Stephen Bruce: *Principal Bundles: The Quantum Case* (Universitext, Springer, 2015).