

2 ej 3



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

UN CURSO DE ESTADÍSTICA BASADO EN

CICLOS DE APRENDIZAJE

T E S I S

Que para obtener el título de:

F I S I C O

P r e s e n t a :

HILDA MARIA AMENEYRO MARIA AMENEYRO

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

México, D.F., 1989.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

INTRODUCCION.....	5
-------------------	---

## CAPITULO I DESCRIPCION DE LA ESTATICA

1. Introducción.....	9
2. Conceptos centrales y sus conexiones.....	9
3. Historia del desarrollo de los conceptos y la disciplina.....	13
4. Herramientas necesarias.....	22
5. Problemas característicos en la enseñanza de la Estática.....	22

## CAPITULO II ALGO SOBRE EL APRENDIZAJE

1. El proceso del aprendizaje.....	26
2. Desarrollo del pensamiento lógico.....	37
3. Ciclos de aprendizaje..... (una forma de instrucción basada en Piaget)	40

## CAPITULO III COMO ENSEÑAR ESTATICA (con mayores posibilidades de éxito)

1. Unidades sugeridas para un curso de Estática.....	44
2. Sugerencias concretas de Ciclos de Aprendizaje	
a) Herramientas Matemáticas necesarias.....	46
b) Diagrama de cuerpo libre.....	56
c) Equilibrio rotacional.....	63
d) Equilibrio traslacional.....	69
e) Rozamiento.....	73
f) Centros de Gravedad.....	77
3. Resultados y comentarios.....	81
4. Conclusiones.....	94
5. Ventajas de un curso de Estática para Fisicos.....	99

A P E N D I C E (ejercicios).....	102
-----------------------------------	-----

N O T A S.....	108
----------------	-----

B I B L I O G R A F I A.....	111
------------------------------	-----

## I N T R O D U C C I O N

La educación en nuestra cultura representa un problema de particular interés al ser una cuestión en la que se encuentra involucrado el medio ambiente del individuo. Este medio ambiente incluye aspectos sociales, políticos y culturales, así como los familiares.

Dentro de los aspectos socio-culturales, además de las influencias políticas, se resienten en las escuelas los efectos de la administración deficiente de los medios y los recursos asignados a cada sector (sin contar en algunos casos las inevitables consecuencias originadas por las alteraciones en la economía del País); aunado esto a los problemas de nuestro Sistema Educativo y a su ideología.

Esta ideología está enfocada a hacer del estudiante un elemento semi-activo respecto a la Ciencia. Es decir, le son accesibles todos o casi todos los elementos teóricos necesarios (o cuando menos se le ponen al alcance como posibilidad), se le ejemplifican en mayor o menor grado las aplicaciones o los posibles usos de esta Ciencia, se mencionan los resultados y se coarta de una manera extremadamente significativa todo aquello que pudiera ser una experimentación y aplicación personal y por consiguiente queda descartado todo lo relacionado con invenciones y descubrimientos.

Generalmente se enseña Física en forma dogmática y unilateral, no se acostumbra hacer un análisis de la generación y evolución de los conceptos, ni de las dificultades que hubo, ni de las objeciones con que se enfrentaron antes de su aceptación general; y tampoco es usual hacer una defensa de los argumentos en conflicto. La enseñanza mediante conferencias se justificaba en la época en que los libros eran difíciles de conseguir y los profesores no disponían casi de ningún otro medio de enseñanza; pero no en la actualidad.

Además se dice que en las clases expositivas:

"-El mensaje es unidireccional (sólo el profesor habla; los alumnos sólo escuchan y anotan).

-El alumno "aprende" sólo lo que el profesor "deposita" en su cerebro.

-Se fomentan los aprendizajes memorísticos y, desde luego la creatividad se coarta." (1)

Por otra parte, existe una notoria falta de claridad en cuanto a los objetivos y a la utilidad de la Física, quedando en la mayoría de los casos como un recetario de cocina que tiene muy poco que ver con nuestra realidad.

Tenemos entonces que encarar la implicación de que nuestro sistema educativo no está contribuyendo adecuadamente

al desarrollo intelectual. En la práctica ocurre que los alumnos no sólo no aprenden a razonar, sino que aprenden precisamente lo contrario, esto es, a creer fielmente en la autoridad que representan sus maestros o libros de texto, es decir, a conformarse únicamente con lo que se les dice sin analizar, sin comprobar.

También en el seno familiar se observa una clara represión al desarrollo intelectual. Estas represiones se inician en la cuna, al sobreproteger al bebé, y continúan cuando los padres consideran "travesuras" a las actividades exploratorias y creativas de los hijos. En ocasiones unos padres demasiado severos imponen prohibiciones y limitaciones excesivas, sometiendo a sus hijos a rígidas reglas de vida en las que toda fantasía y toda iniciativa quedan anuladas: "No mojes el 'transformer', no le pintes el pelo a la 'barby' etc"; y hablando de investigación científica es así como nace la investigación. En muchos foros universitarios se plantea la cuestión: "Cómo enseñar a nuestros estudiantes a ser investigadores?" mi respuesta es que no es necesario "enseñarlos", los seres humanos son investigadores innatos, basta con no limitar sus inquietudes.

Los estudios epistemológicos de Piaget (2) (acerca del aprendizaje y la adquisición de conocimientos), han demostrado que muchos de los jóvenes de los primeros años de Universidad aún no han superado la etapa concreto-operacional (no manejan operaciones formales) por lo que el papel del aprendizaje por medio de experimentaciones concretas cobra una importancia primordial en los primeros cursos.

Estas experimentaciones concretas las ha considerado Robert Karplus en su estrategia de enseñanza que él ha llamado: **ciclos de aprendizaje**, que es una forma de instrucción Universitaria basada en la teoría de Piaget. (3)

El propósito de esta tesis es aplicar las sugerencias de Karplus a la enseñanza de una materia que se imparte en las carreras de Ingeniería en los Institutos Tecnológicos de la DGIT (4): **Estática**. Para esto he dividido el estudio de la Estática en cinco unidades que son:

- Diagrama de cuerpo libre
- Equilibrio rotacional
- Equilibrio traslacional
- Rozamiento entre superficies en contacto
- Centros de gravedad

Y he elaborado un **ciclo de aprendizaje**, para cada una de estas unidades, con sus respectivas fases de **exploración, invención y aplicación**, en las cuales se realizan actividades prácticas de temas que la mayoría de los estudiantes ya tuvo oportunidad de estudiar en secundaria o preparatoria a nivel de "comprobación" o "demostración"; esta vez se hace a nivel de **descubrimiento**. Pues cuando el alumno aprende con su propia experiencia el aprendizaje es más suyo, más profundo, más firme.

Empiezo esta tesis identificando y analizando las dificultades que presenta el aprendizaje de esta materia (tales como el manejo inadecuado de las tres dimensiones espaciales, la dificultad en comprender las fuerzas de interacción, la deficiencia en la herramienta Matemática, etc.), dificultades características que he observado a través de los cursos de Mecánica que he impartido a nivel de Licenciatura.

Continúo con una descripción de la Estática en la que considero el equilibrio de fuerzas, fuerza neta (o resultante) igual a cero, y el equilibrio de torcas, torca neta (o resultante) igual a cero, como los conceptos fundamentales en la Estática. Tanto en esta descripción, como más adelante, el concepto de fuerza es establecido y estudiado independientemente de toda idea de movimiento.

Repaso también la Historia de los conocimientos, ya que lo considero importante para la elaboración y organización de cualquier curso, lo que servirá más adelante en el ordenamiento y organización de las unidades a estudiar en Estática.

Enseguida planteo la teoría de Piaget acerca del proceso mental de la adquisición de conocimientos, así como la teoría de Robert Karplus sobre los ciclos de aprendizaje.

Después elaboro las actividades que sugiero para cada ciclo de aprendizaje; actividades que deberán realizar los alumnos.

Por último, un capítulo de "Comentarios, Resultados y Conclusiones" de haber aplicado estas sugerencias no una sino varias veces a estudiantes de Ingeniería.

El material a estudiar está elegido y ordenado de manera tal que los primeros temas involucran actividades puramente concretas (como la construcción de estructuras con palillos, etc.); las actividades formales empiezan en unidades posteriores del programa.

Después de la introducción de los conceptos matemáticos usados en Estática, considero conveniente iniciar el curso con la Tercera ley de Newton. Con esto, además de establecer, desde el inicio del curso, que las fuerzas representan la interacción entre los cuerpos, se consigue que la organización del curso esté elaborada de acuerdo al proceso mismo del desarrollo intelectual. De manera que esta primera unidad es la que se adapta mejor para efectuar actividades puramente concretas. Como se verá en un capítulo correspondiente al desarrollo histórico de los conceptos, la habilidad para equilibrar estructuras se adquirió desde la época de los Asirios, y la ley del equilibrio de la palanca fue descubierta desde la época de Aristóteles. Más aún, él ya hace uso del momento de fuerza. Las proposiciones de Arquímedes relativas a la palanca son la base axiomática de su Estática. Me apoyo en estos hechos históricos para sugerir el equilibrio rotacional como segunda unidad de estudio, la cual está basada en, precisamente, la "palanca de Arquímedes". A la

parte formal, es decir, en donde se requiere de manera más importante la herramienta matemática, se le reserva el tercer lugar, que será: **equilibrio traslacional**, en dos y tres dimensiones, cuyo fundamento será la regla del paralelogramo. Y se dejan para el final los temas: **rozamiento entre superficies en contacto y centros de gravedad**, (que requiere del uso del Cálculo Integral). Por último tenemos la parte de aplicación de todos estos conceptos, que será una unidad que consiste en los temas: **pares de fuerzas, sistemas equivalentes, análisis cuantitativo de estructuras, etc.**

Para cada una de las unidades de estudio propongo primero una sesión de situaciones concretas (fase de exploración), antes de efectuar ningún tipo de cálculo, y posteriormente un establecimiento matemático general (fase de invención). Después de esto ya pueden resolverse problemas numéricos (fase de aplicación).

## DESCRIPCION DE LA ESTÁTICA

## 1. Introducción

La Mecánica, la más antigua de las Ciencias físicas, es la parte de la Física que estudia y predice las condiciones de movimiento de los cuerpos bajo la interacción con otros cuerpos.

El estudio de la Mecánica se remonta a los tiempos de Aristóteles (384-322 A. C.) y Arquímedes (287-212 A. C.). Sin embargo fue necesario esperar hasta Newton (1642-1727) para hallar una formulación satisfactoria de sus principios fundamentales.

La Mecánica se divide en tres partes: Mecánica de los cuerpos rígidos, Mecánica de los cuerpos deformables y Mecánica de fluidos.

La Mecánica de los cuerpos rígidos se subdivide en **Estática** y **Dinámica**.

La palabra Estática se deriva del Griego que significa reposo; y algunos diccionarios definen a la Estática como la "rama de la Física que estudia el equilibrio de las fuerzas". (5) La Enciclopedia Británica (6) define la palabra Estática como la rama de la Física que estudia las condiciones para que un cuerpo permanezca en reposo. Aunque esta definición está de acuerdo con el significado literal de la palabra Estática, hay que aclarar que las condiciones para que un cuerpo permanezca en reposo son exactamente las mismas que para que la velocidad del cuerpo no cambie. Por eso la Estática debe definirse como **la rama de la Física que estudia las condiciones de equilibrio de los cuerpos, quietos o en movimiento.**

Existen dos tipos de equilibrio: Equilibrio Traslacional y Equilibrio Rotacional.

En el equilibrio traslacional, el cuerpo o partícula no cambia su velocidad lineal, y se obtiene cuando la fuerza neta actuando sobre el cuerpo rígido o partícula es cero.

En el equilibrio rotacional el cuerpo rígido no gira; se obtiene cuando la torca (momento) total actuando sobre el cuerpo también es cero.

## 2. Conceptos centrales y sus conexiones

Los conceptos fundamentales básicos empleados en estática son: **espacio, fuerza, partícula, cuerpo rígido y torca o momento.**

El concepto de **espacio** se asocia con la noción de la



posición de un punto p. La posición de p puede ser definida por tres distancias medidas desde cierto punto de referencia, u origen, en tres direcciones dadas. Estas longitudes se conocen como las coordenadas de p. La unidad de longitud en el Sistema Internacional de Unidades (SI) es el metro.

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro. Puede ser ejercida por contacto directo o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y las magnéticas. (7) La unidad de fuerza en el SI es el newton.

A cada fuerza se le puede asociar, además del valor escalar ya definido, una dirección y un sentido. por tanto, la fuerza es una magnitud vectorial, ya que también se combinan con la regla del paralelogramo.

De ello se deduce que una fuerza en el espacio puede descomponerse unívocamente, según tres direcciones no coplanarias cualesquiera.

fig. 1



Una fuerza, además de ser capaz de modificar el movimiento de un cuerpo, puede provocar en él un cambio de forma; por ejemplo, en un muelle. La deformación cesa cuando cesa la causa deformadora, y varía al variar aquella; por tanto es lícito tomar la deformación del muelle como índice de medida. El aparato adecuado para este fin, el dinamómetro, es un muelle con un extremo fijo. (Ver fig. 1) El otro extremo, cuya posición se indica sobre una escala graduada, lleva un gancho al que puede aplicarse un esfuerzo muscular, o bien un cuerpo atraído por la Tierra. La magnitud medida con el dinamómetro es precisamente la fuerza. Ello requiere haber elegido una unidad y un criterio especial para calibrar la escala. Evidentemente, el criterio será el que hará corresponder una fuerza doble, triple, etc., a dos, tres, etc., cuerpos iguales unidos al muelle, y el que el muelle cumpla con la ley de Hooke (8) será de gran utilidad para que la escala resulte uniforme.

Las fuerzas se combinan vectorialmente unas con otras, independientemente de sus distintas naturalezas (gravitacionales, de fricción, etc.) Por lo que una fuerza neta  $\vec{F}$  puede estar compuesta de diferentes tipos de fuerzas aplicadas al mismo cuerpo simultáneamente.

Por **partícula** se debe entender una cantidad muy pequeña de materia, la cual se supone que ocupa un sólo punto en el espacio. (9)

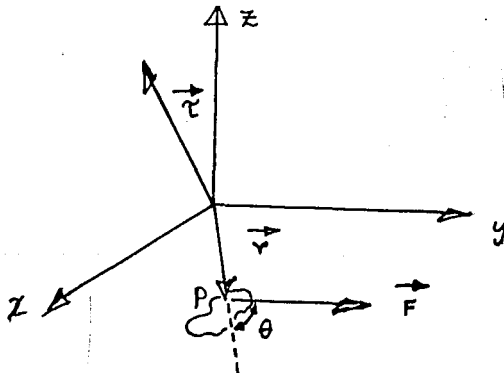
Un **cuerpo rígido** está formado por un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí; es decir, un cuerpo en el que, cualquiera que sea la magnitud de las fuerzas que le apliquemos, goza de la propiedad de que no se alteran lo más mínimo ni su forma ni sus dimensiones.

Al considerar un objeto como partícula o como cuerpo rígido la diferencia estriba en las dimensiones del cuerpo a tratar. En el primer caso sólo se atiende al efecto de la fuerza de cambiar el movimiento del cuerpo, en el segundo se considera la capacidad de la fuerza de producir un giro.

**Torca**, del Latín torquere, torcer, es el concepto análogo rotacional de una fuerza. Intuitivamente es la capacidad de una fuerza para producir efectos de rotación alrededor de un eje. Esta capacidad depende del lugar del cuerpo donde se aplique la fuerza con respecto a un punto de referencia. (fig. 2) Si la fuerza  $\vec{F}$  obra sobre el cuerpo en el punto  $\vec{P}$ , cuya posición con respecto al origen de coordenadas  $O$  está dado por el vector de posición  $\vec{r}$ , la torca, o momento de la fuerza, con respecto al origen  $O$  se define así:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

fig. 2



Como se ve de su definición, el momento es una cantidad vectorial y su magnitud está dada por:

$$= rF \text{ sen}\theta$$

en donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ ; a la cantidad  $r \sin \theta$  se le llama "brazo de palanca" de la fuerza  $F$ ; su dirección es normal al plano formado por  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , y su sentido está dado por la regla del producto vectorial de dos vectores.

De acuerdo a su definición, la unidad de torca de una fuerza debe expresarse como el producto de una unidad de fuerza por una unidad de distancia. Así en el SI, la unidad de torca es el newton-metro.

El propósito del estudio de la Estática es el de mantener el equilibrio de un cuerpo, es decir, evitar que el cuerpo se desplace y/o gire; para evitar que el cuerpo se desplace se deberá conseguir un equilibrio en las fuerzas aplicadas al cuerpo; para evitar que el cuerpo gire se deberá lograr un equilibrio en las torcas de las fuerzas aplicadas al cuerpo. Estudiar Estática es precisamente investigar la forma o formas de lograr estos equilibrios.

Así que los conceptos centrales en Estática son el de **equilibrio de fuerzas**: fuerza neta (o resultante) igual a cero, y el **equilibrio de torcas**: torca neta (o resultante) igual a cero.

Esto conduce a que el objeto (la estructura) ni se desplace, (si originalmente se encontraba en reposo) o no cambie su velocidad (si originalmente se encontraba moviéndose) ni gire.

El estudio de la Estática reposa en cuatro principios fundamentales basados en la evidencia experimental: La ley del paralelogramo para la suma de fuerzas, el principio de transmisibilidad, y la primera y tercera leyes de Newton.

**La ley del paralelogramo para la suma de fuerzas.** Esta ley establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser reemplazadas por una sola, llamada resultante, dada por la diagonal del paralelogramo que tiene lados iguales a las fuerzas dadas.

**El principio de transmisibilidad.** Establece que las fuerzas al actuar sobre un cuerpo (rígido) se comportan como vectores deslizantes, o sea, que su punto de aplicación puede ser trasladado a lo largo de su recta de acción, y por ello no se alteran las condiciones de equilibrio o de movimiento del cuerpo.

**La primera ley de Newton.** Establece que "cuando un cuerpo está en reposo, o moviéndose con velocidad constante sobre una trayectoria rectilínea, la resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre él es nula".

**La tercera ley de Newton.** Las fuerzas de interacción entre los cuerpos tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.

En la enseñanza de la Estática, así como en la de

cualquier disciplina, lo más importante es generar una "intuición"; esto es, generar la capacidad de "predecir" cuál es el resultado de un problema (de una situación) aun antes de resolverlo; aprender a "ver" que es lo que va a pasar sin necesidad de que pase. Esto requiere enfrentarse a muchas situaciones particulares diferentes. Estas situaciones pueden presentarse en forma de problemas teóricos (matemáticos) o de situaciones concretas reales (experimentos); la solución de problemas teóricos implica fundamentalmente Álgebra Vectorial; la solución de problemas prácticos requiere de la posibilidad de medir fuerzas.

### 3. Historia del desarrollo de los conceptos y la disciplina.

Para elaborar de la mejor forma un curso de Estática es conveniente conocer la Historia del desarrollo de esta parte de la Física, ya que adquiriendo los conocimientos en el orden en que la humanidad lo fué logrando, es como se alcanza una mejor asimilación de los conceptos.

La Estática pertenece al más antiguo período de la Mecánica, comienza en la antigüedad Griega y termina en la época del surgimiento de la Mecánica Moderna por obra de Galileo y sus contemporáneos más jóvenes; la Estática aclara especialmente el proceso de formación de la Ciencia. En ella se presentan todas las intuiciones, todos los métodos en su forma más simple, en su infancia. Estos comienzos muestran claramente que su origen reside en las experiencias de los artesanos.

La habilidad para equilibrar estructuras ha existido en el hombre desde tiempos muy remotos. Para darse cuenta de tal habilidad, basta examinar los monumentos de los antiguos Asirios o Egipcios, más que investigadores, admirables arquitectos de monumentos gigantescos como las pirámides, de estatuas colosales como las de Mnemon, de Templos grandiosos como el de Karnak, que habrían de perdurar por milenios. Los ingenieros de Egipto se servían ya dos mil años antes de nuestra era de máquinas simples, del plano inclinado, de la palanca, de la cuña y del tornillo. Como atestiguan los relieves sepulcrales y otras representaciones artísticas, les era familiar el empleo de la balanza con brazos iguales, el soplete y el fuelle. Los diques que elevaron, los canales que construyeron, la habilidad con que sabían asegurar el riego de campos, tan importante en el país, sugieren que no les faltaban conocimientos elementales de Hidromecánica.

"La Estática, la Ciencia del equilibrio, es una disciplina que debe su desarrollo a la matematización. Los intelectuales del siglo XIII la llamaron "scientia de ponderibus", la Ciencia de los pesos, e investigaba las condiciones que producían el equilibrio". (10)

**ARQUITAS**, un notable ciudadano de Taranto (hacia 400 a.C. aproximadamente), es el inventor de la polea.

Generalmente se atribuyen a **ARISTOTELES** (384-322 a.C.),

los datos más antiguos de cierta significación que hacen referencia a problemas mecánicos. La ley del equilibrio de la palanca para fuerzas verticales fue descubierta y registrada en esta época. También existen indicios de alguna noción de la ley del paralelogramo para desplazamientos. Aristóteles hace uso, aunque solamente en un caso especial, del momento estático.

Las leyes fundamentales de la cinemática aristotélica -mezcla de ideas metafísicas y de toscas observaciones- no resistieron la crítica de los innovadores renacentistas, y ninguna pasó a la mecánica de Galileo.

El descubrimiento de los principios de la Estática y de la Hidrostática se deben a **ARQUIMEDES DE SIRACUSA** (287-212 a.C.), Arquímedes es el primer investigador que combina, con rigor metódico, deducciones matemáticas con resultados experimentales. Esta fértil unión lo llevó a encontrar leyes fundamentales de la Estática, de la cual es el verdadero fundador.

En su monografía "Sobre el equilibrio de los planos", Arquímedes formula principios de la Estática en términos matemáticos y enuncia el principio de la palanca:

Arquímedes, en su tratado "de aequiponderantibus", (11) que contiene proposiciones relativas a la palanca y al principio del centro de gravedad (base axiomática de su Estática), parte de las suposiciones siguientes, que juzga evidentes por sí mismas:

1. Magnitudes de igual peso actuando a distancias iguales (de su punto de apoyo) están en equilibrio.
2. Magnitudes de igual peso actuando a distancias desiguales no están en equilibrio, pero la que actúa a mayor distancia cede a su propio peso.

De estas proposiciones deduce Arquímedes que el centro de gravedad de un sistema formado por dos pesos desiguales se encuentra sobre la línea que reúne los centros de gravedad de ambos y que esos pesos desiguales están en equilibrio cuando sus distancias del punto de rotación son inversamente proporcionales a los pesos. Esta última afirmación es precisamente el principio de la palanca en todo rigor.

Agreguemos que algunos historiadores, entre ellos Ernst Mach, (12) no han encontrado impecable el pasaje de la proposición inicial a la proposición final y reprocharon a Arquímedes haber utilizado implícitamente el hecho conocido de que el efecto de un peso  $P$  a la distancia  $L$  del eje está medido por el producto, hecho no contenido en su postulado. La ley de la palanca es enunciada en la forma de un teorema geométrico, pero no cabe duda de que Arquímedes, constructor de máquinas, verificó su certeza por medio de la experiencia.

Intimamente ligado a sus estudios sobre los principios de la Estática está su proceder mecánico expuesto en su tratado "Sobre el método", para encontrar áreas y respectivamente

volumenes de configuraciones curvas. El método consiste en descomponer, por ejemplo, en una infinidad de planos, dos sólidos cuyo volumen se desea comparar y en determinar las relaciones de equilibrio de esos planos. Considerando cada uno de los cuerpos como la suma de estos planos, la relación de sus equilibrios permite obtener la relación de sus volúmenes.

Como lo hace notar Ernst Mach, la proposición anterior probablemente fue lograda mediante argumentos de simetría. Consideremos, primeramente, dos pesos-unidad ( $w_1$ ), suspendidos en una palanca de peso despreciable, a distancias iguales  $L$ , medidas desde el punto de apoyo. (Ver fig. 3).

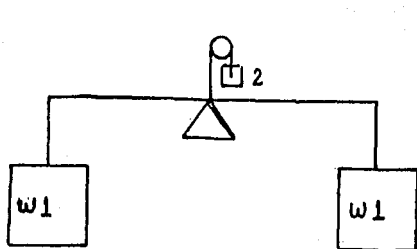


fig. 3

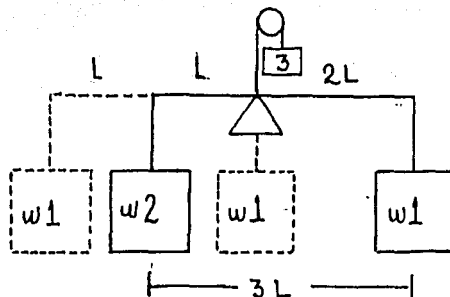


fig. 4

Por la primera suposición, el sistema de palanca está en equilibrio y tendrá que soportar el peso  $W_2$ . Ahora podremos formular la siguiente pregunta: Como soportaremos una palanca con pesos de magnitudes 2 y 1 de manera que esté en equilibrio?. Como se muestra en la figura 4, denotaremos por  $3L$  la distancia arbitraria entre los dos pesos. Substituímos el efecto del peso de magnitud  $W_2$  por dos pesos de magnitud  $W_1$  situados a una distancia  $L$ . Para llevar a cabo lo anterior, es indispensable extender la barra hacia la izquierda a una distancia  $L$ , esto no tiene consecuencia, puesto que se supone que la barra es de peso despreciable. El nuevo sistema ahora es simétrico, y aplicando nuevamente la primera suposición de Arquímedes, es obvio que la barra debe estar suspendida a una distancia  $L$  a partir del peso de magnitud  $W_2$  y a una distancia  $2L$  medida desde el peso de magnitud  $W_1$ .

Después de Arquímedes transcurrieron unos 1700 años sin haberse registrado nuevas contribuciones a la Ciencia de la

Se acredita a LEONARDO DA VINCI (1452-1519) el haber sido el primero en percibir el concepto general de los momentos estáticos aplicados a los problemas de equilibrio. (Leonardo llama al momento estático, como antes lo hiciera Jordán Nemorario, "Gravitas Secundum Situs"), de lo cual deduce el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la palanca. A éstas las considera como la máquina primaria y las demás sólo son modificaciones y formas complejas de la misma. Al utilizar la ley de la palanca, logró determinar, mejor que sus predecesores, la condición de equilibrio de dos pesos iguales colocados sobre dos planos con desigual inclinación. Leonardo además conoce los diferentes tipos de equilibrio (estable, neutro, inestable); sabe determinar la componente de una fuerza según una dirección dada. Leonardo planteó el siguiente problema: (Ver figura 5).

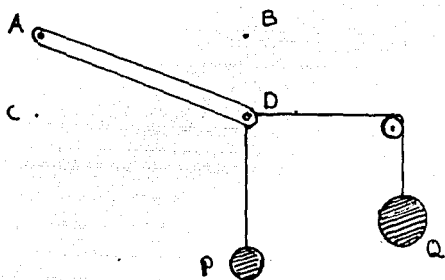


fig. 5

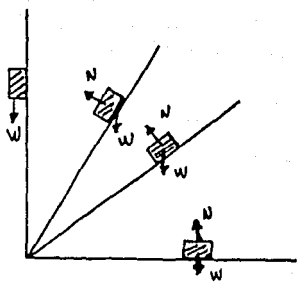


fig. 6

Una barra AD puede girar libremente alrededor de A. Hemos suspendido en D un peso P. Una cuerda que pasa por la polea soporta un peso Q y se une también a la barra en D. ¿Cuál es la relación de P a Q a fin de que se conserve el equilibrio? Leonardo dejó establecido en sus escritos que el brazo de palanca para la fuerza P no es la distancia AD, sino que es la palanca "potencial" AB. Además la palanca "potencial" de la fuerza Q es BD.

Las tareas prácticas de Leonardo exigían un conocimiento empírico de elasticidad y rozamiento. Descubrió, en cuanto al primero, que la elasticidad de tracción es igual a la elasticidad de compresión; en cuanto al segundo, encontró que la fricción de deslizamiento es independiente de la magnitud del área de contacto.

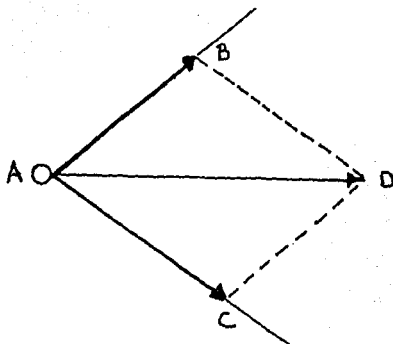
Como Leonardo, también SIMON STEVIN (1548-1620) sigue las huellas de Arquímedes. Su obra señala la cúspide de la

Mecánica, limitada exclusivamente a la Estática. Stevin investigó las propiedades mecánicas del plano inclinado. (Ver fig.6). Si un peso reposa sobre un plano horizontal liso, de acuerdo con los argumentos de simetría no hay razón para esperar que sea necesaria alguna fuerza paralela al plano para conservar el equilibrio.

Si el plano se hace vertical, es evidente que  $P=W$  a fin de conservar el equilibrio. De considerable interés resultaron para Stevin los casos intermedios, e ideó un modelo ingenioso sobre el cual se basan sus argumentos. Su conclusión fue:

$$W \operatorname{sen} \theta = P \operatorname{sen} \phi$$

fig. 7



Después de haber resuelto el problema del plano inclinado, Stevin extendió este concepto a máquinas más complejas. Primeramente se halló en posibilidad de desarrollar el concepto de la ley del paralelogramo para las fuerzas, (1585), que actúan en ángulo recto una con respecto a la otra, y posteriormente lo extendió a la forma más general. En la forma general, la ley del paralelogramo dice lo siguiente: (Ver fig.7). Si a un cuerpo A se aplican dos fuerzas, cuyas direcciones siguen las líneas AB y AC, en su efecto ambas fuerzas pueden ser sustituidas por una fuerza única, que actúa según la diagonal. Si, por ejemplo, a los hilos AB y AC se tendieran pesos proporcionales a las longitudes AB y AC, estas fuerzas se llaman las componentes, la AD la resultante. Es evidente que también recíprocamente, una fuerza puede sustituirse por dos o más fuerzas.

Con ayuda de la observación de que las fuerzas son proporcionales a los movimientos que ellas producen en tiempos iguales, pudo PEDRO VARIGNON (1687-?) deducir fácilmente, de la composición de los movimientos, la composición de las fuerzas. Las fuerzas que actúan en un punto, y representadas en magnitud y dirección por los lados de un paralelogramo, pueden ser substituidas por la diagonal del paralelogramo.

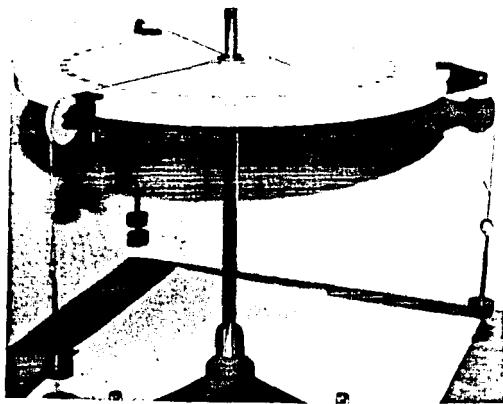
Para verificar experimentalmente este teorema Varignon construye un dispositivo muy adecuado. El centro de un círculo



El círculo graduado (fig. 8), está representado por una punta. Tres hilos: F, F', F" anudados entre sí pasan por poleas R, R', R" que pueden ser fijadas en puntos cualesquiera de la circunferencia y de ellas cuelgan pesos P, P', P". Si por ejemplo se colocan pesos iguales y las poleas se fijan en los puntos de división 0°, 120°, 240°, entonces coincide el nudo común de los hilos con el centro. Es decir, que tres fuerzas iguales que forman entre sí ángulos de 120 grados están en equilibrio.

Si se quiere representar otro caso puede procederse de la siguiente manera. Imagínese dos fuerzas cualesquiera P, Q, que forman entre sí un ángulo cualquiera, representadas por segmentos, y construyamos con estos lados un paralelogramo. Agréguese, además una fuerza igual y opuesta a la resultante R.

fig. 8



Las tres fuerzas P, Q, -R, formando entre sí los ángulos que se da la construcción, están en equilibrio. Se colocan las poleas en los puntos del círculo graduado de división y se cargan los hilos respectivos con los pesos P, Q, R. El nudo se dispone entonces en el centro del círculo. (Ver fig. 9)

Con ayuda de este teorema pudo Varignon considerar las máquinas de una manera mucho más simple que la de sus precededores. Varignon considera un cuerpo rígido (Ver fig. 10), que se puede girar alrededor de un eje que pasa por O: y toma dos puntos A y B que se encuentran en un plano perpendicular al eje; aplica las fuerzas P y Q a los puntos A y B del plano. Haciendo uso del principio de transmisibilidad, Varignon desplaza el punto de aplicación de las fuerzas hasta el punto M que corresponde al punto de intersección de las direcciones de aplicación de las fuerzas P y Q. Ahora construye el paralelogramo de las fuerzas aplicadas en M y substituye esas fuerzas por su resultante, si la dirección de la resultante pasa por el punto O, que está fijo, no se produce ningún movimiento y existe equilibrio; y desde este punto baja las perpendiculares U y V a

la dirección de las fuerzas  $P$  y  $Q$ , Varignon entonces concluye que  $PU = QV$ . Con esto deduce la ley de la palanca a partir del teorema del paralelogramo de fuerzas.

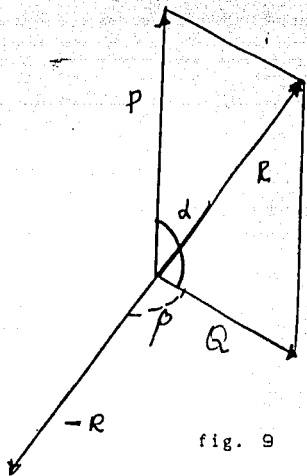


fig. 9

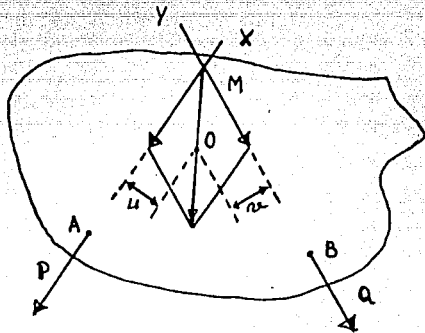


fig. 10

De igual modo explica Varignon otros casos de equilibrio, anulando con algún impedimento el efecto de la resultante. Por ejemplo, en el plano inclinado existe equilibrio cuando la resultante cae perpendicularmente al plano. De hecho, como lo hace notar Mach, Varignon funda toda la Estática sobre bases dinámicas; la Estática es para él un caso particular de la Dinámica.

"Sin embargo, como hemos visto" apunta Ernst Mach, "pueden conducir también al teorema del paralelogramo de las fuerzas, consideraciones puramente estáticas. En muchos casos se verifica la validez del teorema de una manera muy simple". (13)

De la fuente filosófica había espigado ya con abundancia la física de Aristóteles, de la fuente Matemática se nutría la Estática de Arquímedes, y finalmente, el valor de la experiencia era bien conocido a los árabes, ingleses e italianos. Sin embargo, estos tres procedimientos separados eran impotentes para producir bases a la Ciencia. Aunque cada uno puede difundir cierta claridad, aislados son demasiado débiles para guiar la investigación. El haber reunido en un cegador haz luminoso los rayos dispersos, el haber juntado la triplicidad del proceso especulativo, matemático y experimental en una e inseparable unidad, esa es la obra imperecedera de GALILEO GALILEI

(1564-1642): Una de las nociones básicas de la Mecánica, cuando no la noción básica por excelencia, cuya ausencia en la Ciencia Griega hizo fracasar durante siglos las tentativas de crear la Dinámica, la encuentra Galileo en los primeros años de Padua: La noción de la inercia, el principio de que los cuerpos conservan

su estado de movimiento en tanto que una fuerza no los obliga a dejarlo.

Galileo es el creador del concepto de fuerza. Verdad es que no lo define, pero le asigna en sus razonamientos, cálculos y experiencias sobre los movimientos acelerados, el mismo sentido que nosotros y lo concibe como determinante de la aceleración. La noción abstracta de fuerza aparece en el pensamiento de Galileo con toda claridad, está libre de antropomorfismo, y no está oscurecida, como en sus sucesores, por la falsa analogía de sensación muscular, ni identificada con un nebuloso agente metafísico; es pura y simplemente una abstracción matemática. Haber conocido que la fuerza no determina ni posición, ni velocidad, pero produce aceleración, es una de las glorias más imperecederas del ilustre toscano.

La contribución de ROBERBAL (1602-1675) a la Estática es la de haber justificado la ley de la composición de las fuerzas.

Aunque el nombre de NEWTON (1642-1727) generalmente se asocia con la Dinámica, es interesante hacer notar que la ley de "acción y reacción", tan útil en Estática, fue primeramente establecida por él.

Haciendo un análisis de los acontecimientos históricos podemos hacer las siguientes consideraciones interesantes para nuestro estudio:

**Primero:** Se actúa antes de poder pensar, lo que se hace claro al considerar las grandes construcciones que se levantaron antes de desarrollar los principios de la Estática. Ernst Mach (14) lo ve así: "/.../ Parece, sin embargo, natural admitir que la agrupación instintiva de las experiencias ha precedido a su ordenación científica. Rastros de este proceso se encuentran todavía en la Ciencia actual, y hasta podríamos, ocasionalmente, observarlos en nosotros mismos. Las experiencias que el hombre, para satisfacer sus propias necesidades, realiza involuntaria e instintivamente, también los aplica inconsciente e impensadamente. A ellas pertenecen, por ejemplo, las primeras experiencias concernientes a la aplicación de la palanca en sus distintas formas. Pero lo que se encuentra de un modo tan instintivo e irreflexivo, no puede aparecer como algo especial, como algo sorprendente, y en general no provoca ninguna reflexión ulterior." Y así es como lo ve Desiderio Papp (15): "En medio de una naturaleza hostil, el hombre tuvo que actuar antes de poder razonar". Pero Piaget diría: "Es necesario actuar para poder razonar". De esta manera, en la Historia se comprueba la validez de la teoría piagetiana. Es lógico pensar entonces que un estudiante deberá primero adquirir la habilidad de construir estructuras, es decir, deberá primero adquirir bases empíricas firmes digamos del concepto de equilibrio y posteriormente estudiar las condiciones del equilibrio. Es pues razonable que un curso de Estática esté ordenado de la misma manera, es decir, que se estudie primero el equilibrio rotacional (en el que se encuentra implícito el concepto de momento), y posteriormente se

estudie la suma de fuerzas (observando que cumplen la regla del paralelogramo).

**Segundo:** La ley del paralelogramo se desarrolló unos 1400 años después de las formulaciones de Arquímedes sobre la balanza. Es pues razonable que un curso de Estática esté ordenado de la misma manera, es decir, que se estudie primero el equilibrio rotacional (en el que se encuentra implícito el concepto de momento de una fuerza), y posteriormente se estudie suma de fuerzas (observando que cumplen la regla del paralelogramo).

**Tercero:** El abismo entre las tesis de Galileo y las de Aristóteles no podía ser más profundo:

#### ARISTOTELES

La acción continua de una fuerza, es indispensable para mantener el movimiento de un cuerpo.

Fuerza, consiste en la interacción evidente (por contacto) entre dos cuerpos.

#### GALILEO

Un móvil se mantiene por sí mismo en movimiento; la acción de la fuerza cambia el movimiento preexistente.

La fuerza es el resultado de la interacción por contacto o a distancia entre los cuerpos.

**Cuarto:** Sólo después de las formulaciones acerca del equilibrio, cambió la idea que se tenía del concepto de fuerza. Esto sugiere que antes de estudiar cualquier área de la Física en donde se requiera del concepto de fuerza (Dinámica por ejemplo), es conveniente estudiar primero Estática "la ciencia del equilibrio".

**Quinto:** El concepto de "equilibrio" quedó completa y firmemente establecido antes de estudiar el movimiento, es decir, antes de la formulación de las leyes de Newton del movimiento. Lo cual indica que resulta por demás, incluso inconveniente estudiar Estática partiendo de los conceptos de velocidad y aceleración.

**Sexto:** Después de los estudios de Galileo, es decir, después del cambio en el concepto de fuerza, pudo formularse la teoría de la Mecánica. Esto sugiere que deberá adquirirse una idea adecuada y firme del concepto de fuerza antes de estudiar la Mecánica desde el punto de vista formal.

La concepción Aristótelica de fuerza sigue presente en nuestros días en las personas que no han tenido un entrenamiento científico; parece ser que habrá que esperar a tener cotidianamente experiencias concretas de sistemas sin rozamiento para que la humanidad pueda cambiar su concepto de fuerza. Las experiencias en el espacio exterior prometen mucho al respecto.

#### 4. Herramientas necesarias.

La Matemática es el lenguaje de la Física; en particular el lenguaje de la Estática es fundamentalmente Algebra Vectorial. Es necesario un conocimiento descriptivo del Algebra Vectorial como requisito para aprender Estática, es por eso que un resumen de esta parte de las Matemáticas debe incluirse en un curso de Estática.

El comenzar un curso de Estática con un buen "repaso" de Algebra Vectorial de manera que el alumno adquiera la suficiente habilidad para sumar, restar y multiplicar vectores, así como su interpretación geométrica, lo capacitará para sumar con soltura dos casos especiales de vectores que se estudian en Estática como son las fuerzas y sus momentos. Podrá, además, representarlos en el plano y en el espacio, en términos de sus coordenadas componentes y en términos de los vectores unitarios trirrectangulares. De la misma manera, el producto cruz de vectores y el triple producto escalar lo capacitarán para calcular momentos de una fuerza con respecto a un punto y con respecto a un eje, respectivamente.

Una parte de las Matemáticas, no tan fundamental, pero no menos importante que el Algebra Vectorial para aprender Estática es el cálculo de la integración definida para su aplicación en el tema: Centros de Gravedad y Momentos de Inercia.

Por último, la rama de las Matemáticas que resulta ser de mucho valor en este curso por su constante empleo en el tratamiento de la Estática es la solución de sistemas de Ecuaciones Lineales.

En el capítulo III doy una descripción de esta herramienta matemática, imprescindible para el estudio de la Estática.

#### 5. Problemas característicos en la enseñanza de la Estática.

"Fuerza es la cantidad de energía que se le aplica a un cuerpo para que efectúe un trabajo o tenga un movimiento".

Se trata de una idea típica que del concepto de fuerza tienen los estudiantes de los primeros semestres de Ingeniería; en la que se ve que el concepto de fuerza se encuentra confundido con el de energía, y con el de movimiento en sí, más que con el de cambio de movimiento. (16)

Los siguientes enunciados son algunas "definiciones" típicas de los estudiantes, del concepto de fuerza:

"Es la cantidad de trabajo que se requiere para mover determinado objeto".

"Es la intensidad con que un cuerpo puede estar en movimiento o en reposo".

"/.../ es un trabajo realizado por un objeto en

movimiento".  
"Es aquella que se le aplica a todos los objetos para moverlos /.../".  
"Es el trabajo que se aplica sobre un objeto".  
"Energía en movimiento".  
"Es una energía capaz de mover un cuerpo en reposo".  
"Es la acción de realizar un movimiento de un cuerpo".  
"Es la cantidad de energía aplicada a una superficie cualquiera".  
"Es aquella /.../ capaz de producir un movimiento".  
"Es la presión que uno ejerce sobre un cuerpo para realizar un trabajo".  
"Es aquella que produce un movimiento".  
"Es la cantidad de movimiento que se le aplica a un cuerpo en reposo".  
"Es una magnitud susceptible de ser cuantificada y en posibilidad de realizar un trabajo mecánico palpable".  
"Es la acción de realizar algún trabajo para producir una fuerza porque todo lo que requiere de trabajo, se le aplica una fuerza".  
"Es la que se puede aplicar a un cuerpo en reposo".  
"Es todo aquello que tiene movimiento y también tiene energía con relación a su masa".  
"Es el trabajo realizado en una unidad de tiempo".  
"Es aquella que es aplicada a un cuerpo y modifica su estado de reposo".  
"Es la aplicación que se le da a un cuerpo para que tenga movimiento con relación a su masa".  
"Es la que se le aplica a un cuerpo para realizar un trabajo".  
"Es la energía que se le aplica a un móvil para cambiarlo o moverlo de un lugar a otro".  
"Es el trabajo o impulso que se le aplica a un cuerpo".  
"Es una manifestación de la energía que sirve para realizar un trabajo".  
"Es una energía que se puede aplicar a un cuerpo /.../".  
"Es la energía que se utiliza para realizar un trabajo".  
"Es la que se le aplica a un cuerpo y se pone en movimiento".  
"Es la energía aplicada a un cuerpo".  
"Es aquella que se ejerce para realizar un trabajo".  
"Es la que se le aplica a un cuerpo para realizar un trabajo".  
"Es la que se le da a un cuerpo para realizar un trabajo".  
"Es un trabajo que se realiza para mover cualquier objeto".  
"Es el trabajo aplicado a un objeto o cosa".  
"Es todo aquello capaz de mover un objeto de un lugar a otro".  
"Es la capacidad de mover o levantar objetos de un lugar a otro".  
"Es todo aquello que es capaz de producir un trabajo o un movimiento en un cuerpo que esté en reposo".

Otros problemas que se presentan al enseñar Estática son

Los siguientes:

El estudio de "Fuerza y Equilibrio" en un curso tradicional de Estática comienza con el tema: "Suma de fuerzas", en dos y tres dimensiones; posteriormente se analizan las "Condiciones de equilibrio de una partícula", después de estudiar el "Momento de una fuerza", con respecto a un punto, y con respecto a un eje, se analizan las "Condiciones de Equilibrio translacional". Enseguida se estudian los temas: "Pares de fuerzas", "Sistemas equivalentes de fuerzas", y "Aplicaciones a vigas y cables".

Durante los cursos de Estática que he impartido, he observado una particular dificultad por parte de los alumnos en lo que se denomina el "diagrama de cuerpo libre". Muchas veces, la falla al resolver un problema (analizar una situación particular) consiste precisamente en el hecho de hacer mal tal diagrama. Fallan en la aplicación de la tercera ley de Newton.

Y si el estudiante salió victorioso de una situación en el plano, no lo logra tratándose de cuerpos en tres dimensiones; aquí la cosa cambia, se confunde, y cualquiera diría que vive en un mundo plano.

Ahora bien, el problema empieza en el instante en que se descompone una o varias fuerzas en componentes rectangulares en un sistema bidimensional, porque el alumno no "atina" a emplear las funciones seno o coseno para calcularlas, situación que se agrava al introducir las tres componentes rectangulares de una fuerza (en el espacio), y uno de los efectos consiguientes es que en los problemas de equilibrio no saben plantear el sistema de ecuaciones (tres ecuaciones con tres incógnitas). En algunos casos, después de planteado, no saben resolverlo, a veces por el hecho de que los coeficientes de las incógnitas son cantidades fraccionarias. El problema aumenta al llegar a los conceptos de "Momento respecto a un punto y a un eje". Y se vuelve enormemente complicado e incomprensible al llegar a los conceptos de "Pares de Fuerzas", "Sistemas Equivalentes", etc.

La correcta identificación del brazo de palanca en un ejercicio que comprende momentos de fuerzas, es otra situación en la que se ha observado gran dificultad por parte de los estudiantes.

La herramienta matemática necesaria para esta parte consiste desde Aritmética (operaciones con fracciones) y Álgebra (solución de un sistema de ecuaciones simultáneas), hasta Análisis Vectorial (que correspondería a suma de vectores, y producto escalar y vectorial).

Pienso que debido a la falta de comprensión de los conceptos, no pueden separar la parte física de la parte puramente matemática, considerándola como herramienta.

Las encuestas y los cuestionarios aplicados a los estudiantes, revelan que el ideal de los alumnos, lo que ellos

creer que sería un "buen curso" de Estática, en particular, y de cualquier materia en general, es observar una serie de ejercicios desarrollados por el instructor, memorizar la rutina, y repetirla en el ejercicio del examen. No estoy en contra del saber resolver un ejercicio siguiendo una rutina, pero esto no tiene nada que ver con el desarrollo intelectual; tendríamos estudiantes que se convertirían en individuos incapaces de colaborar con el desarrollo tecnológico del país.

En muchas ocasiones aún cuando un alumno ya cursó y aprobó un curso de análisis vectorial y es capaz de resolver un problema puramente matemático, se ve que no es capaz de aplicar sus conocimientos matemáticos a un problema físico en particular.

MI idea es que un estudiante no podrá separar la parte matemática de la parte física en un ejercicio, si no ha comprendido completamente la teoría física y los conceptos físicos involucrados. Propongo que los estudiantes, en equipo resuelvan primero los ejercicios en forma práctica en el laboratorio, antes de efectuar ningún tipo de cálculo, posteriormente resuelvan el problema en forma teórica lo que servirá además de todo, para comprobar resultados experimentales. Y dejaremos al último los ejercicios que involucran sistemas de fuerzas en el espacio. Esto dará la intuición que se requiere generar para adquirir el dominio de esta materia.\* Este es el orden que se sugiere en los ciclos de aprendizaje y es por esto que considero que éste es el método adecuado, y decidí probarlo.

Resumiendo entonces: el concepto de fuerza, el concepto de "equilibrio", el diagrama de cuerpo libre, tercera ley de Newton, las situaciones en tres dimensiones, y los temas que involucran aplicaciones del concepto del momento de una fuerza, son puntos en los que se habrá de poner énfasis al enseñar Estática.

\* Ver apéndice



## ALGO SOBRE EL APRENDIZAJE

## 1. El proceso del aprendizaje

El primer paso para resolver los problemas en el aprendizaje es comprender cómo se desarrolla el razonamiento y cómo los niños adquieren conocimientos.

El suizo Jean Piaget y otros (Inhelder y Piaget, 1958) (17), han estudiado extensamente el desarrollo del pensamiento lógico en niños y adolescentes y han propuesto un modelo de desarrollo para explicar el crecimiento del pensamiento lógico en humanos. La teoría piagetiana (que está basada en la evidencia) ha tenido gran influencia en el entendimiento del desarrollo cognocitivo y del proceso del aprendizaje. Como dicen C. A. Tomlinson-Keasey: "Piaget tiene algo importante y práctico que decir a la comunidad educativa" (18). Jean Piaget comenzó su investigación por 1920. Piaget estudió las respuestas de jóvenes a diferentes tareas concernientes con fenómenos físicos. Estas tareas incluyen experimentos físicos tales como la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión, la ley de los cuerpos flotantes, la flexibilidad de varillas metálicas, la oscilación de un péndulo, el movimiento de cuerpos en el plano horizontal, el equilibrio de una balanza y la proyección de sombras.

Piaget mismo dice que para entender el desarrollo del conocimiento, se debe empezar con una idea central: la idea de una operación. Y dice: "El conocimiento no es una copia de la realidad. Conocer un evento no es simplemente mirarlo y hacer una copia mental o imagen de él. Conocer un objeto es actuar sobre él. Conocer es modificar, transformar el objeto y entender el proceso de esta transformación, y como consecuencia, entender la manera en que el objeto es construido. Así pues, una operación es la esencia del conocimiento. Por ejemplo, una operación consistiría en ordenar, o poner cosas en una serie. O una operación consistiría en contar o medir. En otras palabras, es un conjunto de acciones que modifican el objeto, permitiendo al conocedor llegar a las estructuras de la transformación." (19)

"Una operación es una acción interiorizada. Pero además, es una acción reversible, esto es, se puede efectuar en ambas direcciones, por ejemplo, sumar o restar, unir o separar. Así pues, es un tipo particular de acción la que construye las estructuras lógicas." (20)

"Sobre todo una operación nunca está aislada, siempre está unida a otras operaciones y en consecuencia siempre forma parte de una estructura total de clasificación. Una relación asistemática no existe aislada. La seriación es la estructura operacional básica. Un número no existe aislado. Lo que existe es una serie de números que constituyen una estructura, una

estructura extremadamente rica cuyas diferentes propiedades han sido reveladas por los matemáticos."(21)

"Estas estructuras operacionales son las que constituyen la base del conocimiento. La realidad psicológica natural, en términos de la cual debemos entender el desarrollo del conocimiento. Y el problema central del desarrollo es entender la formación, elaboración, organización y funcionamiento de estas estructuras."(22)

Piaget reseña el desarrollo de estas estructuras a través de cuatro etapas que constituyen la base del conocimiento, -el eje de su teoría-. Una etapa de desarrollo intelectual se refiere a un período durante el cual las actividades y el razonamiento de una persona están caracterizadas por ciertos rasgos comunes. Las etapas tienen distintas características dentro de un razonamiento personal.

Las etapas que Piaget distingue son: etapa sensorio-motriz, etapa pre-operacional, etapa concreto operacional y etapa concreto formal. Las dos últimas etapas son de particular interés para el profesor universitario.

La primera etapa, -como las reseña Piaget- la etapa de estructuras sensorio-motoras, pre-verbal dura aproximadamente los primeros 18 meses de vida. En esta etapa el niño aprende a coordinar sus acciones con los cambios del medio ambiente. Un infante empieza a conocer el mundo tocando y sintiendo las cosas. El principal medio para obtener información es interaccionar físicamente con el medio ambiente. "Durante esta etapa" dice Piaget, "se desarrolla el conocimiento representacional posterior. Un ejemplo es la construcción del esquema del objeto permanente. Para un infante durante los primeros meses, un objeto no tiene permanencia. Cuando desaparece del campo perceptual ya no existe más. No se hace ningún intento por encontrarlo de nuevo. El infante joven parece pensar que los únicos objetos que existen son los que pueden ser vistos. La súbita 'creación' de una persona mayor al quitar una manta que la cubre, le parece ser un gran evento. Experiencias posteriores le darán al niño la oportunidad de desarrollar conciencia de la permanencia de objetos materiales. Posteriormente, el infante tratará de encontrarlos, y los encontrará localizándolos espacialmente. El concepto de permanencia provee al niño las bases que necesita para el lenguaje. Si los objetos existen cuando están fuera de su vista, entonces es útil tener símbolos (o palabras) para representarlos. En consecuencia, junto con la nueva construcción del objeto permanente viene la construcción del espacio práctico o sensorio-motriz". (23)

Existe similarmente la construcción de la sucesión temporal, y de la causalidad sensorio-motriz elemental. En otras palabras, hay una serie de estructuras del pensamiento representacional posterior. Cuando el niño de un año de edad tiene un juguete que descansa sobre una manta colocada lejos de él, tira de la manta para coger el objeto. Para Piaget, esto es un acto de inteligencia. El niño usó la manta para alcanzar una

meta (el juguete codificado). Piaget no llama a este acto operación, sino que le da el nombre de esquema de acción. Es una respuesta generalizada que puede utilizarse para resolver toda una variedad de problemas. El hábito de brincar en la cuna para que los juguetes que están atados a la misma se sacudan o se muevan, es otro ejemplo de esquema de acción.

En la segunda etapa, etapa pre-operacional, conforme el niño empieza a adquirir un lenguaje, alrededor de los dos años, el niño aprende a representar el mundo por medio de signos y símbolos, los objetos que han sido experimentados en la etapa sensorio motriz del desarrollo van adquiriendo un nombre. Con la capacidad para nombrar o etiquetar objetos, el niño entra a la etapa de pensamiento intuitivo o pensamiento pre-operacional. "En esta etapa, -dice Piaget- tenemos la función simbólica, y por lo tanto, del pensamiento, o representacional". (24)

Debe haber ahora una reconstrucción de todo lo que se desarrolló en el nivel sensorio-motriz. Esto es, las acciones sensorio motrices no son traducidas inmediatamente en operaciones. De hecho durante todo este segundo periodo de representaciones pre-operacionales, no hay todavía operaciones en la forma que Piaget las define. Específicamente, todavía no hay conservación, que es el criterio psicológico para la presencia de operaciones reversibles. Por ejemplo, si vaciamos un líquido de un vaso a otro de forma diferente, el niño preoperacional pensará que hay más en uno que en otro. En la ausencia de reversibilidad operacional, no hay conservación de la cantidad.

El niño de cinco años de edad puede aprender a caminar las cuatro cuadras que separan a su casa de una tienda vecina, pero no puede sentarse a una mesa, coger un papel y un lápiz y trazar la ruta que recorre. Según Piaget, no tiene una representación mental de la serie completa de sus acciones. Camina hasta la tienda sin equivocarse, dando algunas vueltas en determinados lugares del camino, sin embargo no posee una imagen total de la ruta que recorre. Los adultos, por supuesto, sí tienen tal plano mental. Un adulto puede trazar en el papel el camino que ha de recorrer desde su casa hasta su restaurante favorito. Es necesario tener una representación mental de toda la ruta para efectuar con éxito esta tarea. Según Piaget, el niño de cuatro años de edad es incapaz de alcanzar este nivel de funcionamiento.

Si a un niño de cinco años de edad se le muestran dos bolas de arcilla de masa y forma iguales, reconoce que tienen la misma cantidad de arcilla. El experimentador aplasta luego una de las bolas de manera que cobre la forma de una torta y le pregunta al niño cuál es la que tiene la mayor cantidad de arcilla, o si hay una cantidad igual de arcilla en ambas masas. Característicamente, el niño de cinco años de edad piensa que la bola y la torta tienen cantidades diferentes. De manera semejante, el niño preoperacional no cree que la longitud de un palo o el número de monedas que hay en un montón permanecen constantes cuando se hacen cambios en su disposición o figura. Si dos palos de longitud igual se colocan el uno junto al otro,

de manera que coincidan sus extremos, el niño reconocerá que son iguales. Pero si un palo se adelanta unos tres centímetros, el niño de edad preoperacional dirá que es más largo.

De manera semejante, el niño preoperacional no advierte el hecho de que si el número de objetos que existen en dos ordenaciones distintas es igual, son iguales cuantitativamente sea cual fuere la forma de los ordenamientos. En este experimento, dos hileras de cinco botones cada una se colocan la una encima de la otra, de manera que las hileras tengan una longitud igual. El niño reconoce que las dos hileras tienen la misma cantidad de botones. Pero si se acorta una hilera (para reagrupar los botones), el niño de la etapa preoperacional dirá que la hilera más larga tiene más botones.

El niño preoperacional no comprende los términos de relación, como los de más oscuro, más ancho, más grande, y propende a pensar en términos absolutos. Es decir, interpreta más oscuro como si significase muy oscuro y no simplemente más oscuro que otro objeto. Si se le muestran dos objetos claros, uno de los cuales sea ligeramente más oscuro y se le pide que elija al más obscuro, tal vez no reponda. De manera semejante, le es difícil utilizar conceptos tales como los de hermano de, a la izquierda de, y más alto que. Estos términos de relación se interpretan como nombres de atributos absolutos de los objetos más que como relaciones que median entre objetos. Piaget resume la concepción del niño de la manera siguiente: "La conclusión a la que llegamos finalmente es la siguiente: el niño no advierte que algunas ideas, inclusive las que son evidentemente relativas para un adulto, son relaciones entre dos términos por lo menos. No advierte que un hermano tiene que ser, necesariamente, el hermano de alguien, que un objeto tiene que estar necesariamente a la izquierda o a la derecha de algo, o que una parte, por fuerza tiene que ser parte de un todo, sino que concibe todas estas nociones como si existiesen en sí mismas, absolutamente." (25)

Según Piaget, una cuarta característica del niño que se encuentra en la etapa preoperacional es el que no puede razonar simultáneamente acerca de la parte y del todo. Si a un niño de cinco años de edad se le muestran ocho caramelos amarillos y cuatro caramelos cafés y se le pregunta: "De cuáles hay más: caramelos amarillos o cafés?" probablemente dirá "más caramelos amarillos". Piaget cree que esta respuesta significa que el niño no puede razonar simultáneamente acerca de una parte y de un todo.

Un esquema consiste ahora en una unidad simbólica. El niño de dos años de edad tratará un palo como si fuese una vela y lo soplará para "apagarlo", o tratará a un cubo de madera como si fuese un automóvil y lo desplazará haciendo ruido mientras "viaja" en él. Esta capacidad de tratar a los objetos como símbolos de otras cosas es una característica esencial de la etapa preoperacional.

Piaget no cree que el niño de dos o de tres años de edad

que reúne un grupo de formas semejantes (coloca todos los cubos rojos en una pila, por ejemplo) está mostrando necesariamente que está efectuando una categorización o una clasificación. El niño, según Piaget no tiene una representación mental de un conjunto de categorías cuando escoje y no tiene conciencia de ninguna característica definidora que una a todos los miembros de una clase. De esta manera, el acto de aparear cosas semejantes (que los niños de la etapa preoperacional hacen a menudo) no es por fuerza testimonio de una clasificación conceptual. Además, al niño de edad preoperacional le cuesta trabajo ponerse en el lugar de otro niño o de un adulto, no puede imaginarse cómo se verá un objeto desde el punto de vista de otra persona. Piaget considera que el niño que se encuentra en la etapa preoperacional tiene una perspectiva egocéntrica: ("el Sol me está siguiendo"). Junta hechos para producir explicaciones ad-hoc tales como "mi papá juega tenis porque es veterinario". El niño preoperacional no usa razonamientos casuales. (26)

**Es pues evidente que la interacción infantil con sistemas físicos juega un papel esencial durante las dos primeras etapas.**

En una tercera etapa, etapa concreto-operacional, que dura de los 7 a los 11 años aproximadamente, aparecen las primeras operaciones, pero Piaget llamó a estas operaciones, operaciones concretas porque operan sobre objetos, y no aún sobre hipótesis expresadas verbalmente. Por ejemplo, están las operaciones fundamentales de la lógica elemental de las clases y relaciones, de Matemáticas elementales, de Geometría elemental, y aún de la Física elemental, la longitud, el peso, el volumen, etc.

Una operación característica de esta etapa es la de la conservación de la materia. La noción de que los líquidos y los sólidos pueden cambiar de forma sin modificar su volumen o su masa, se manifiesta únicamente cuando el niño llega a la etapa de las operaciones concretas. Si ahora se le muestran al niño nuevamente la bola y la torta de arcilla, probablemente insistirá en que la bola y la torta tienen la misma cantidad de arcilla porque "la torta es más delgada pero más ancha" con lo cual indica que se ha dado cuenta de dimensiones compensatorias: "puedo convertir, otra vez, la torta en bola". Y si ahora se le muestran al niño operacional los dos palos, reconocerá que tienen aún la misma longitud. El niño operacional ya advierte que el atributo de longitud de un objeto es constante y no depende del contexto en el que es percibido.

Otra característica que distingue a los niños de edad operacional de los que se encuentran en la etapa de las operaciones concretas, es la de la capacidad de ordenar objetos de acuerdo a alguna dimensión cuantificada, como la del peso o el tamaño, en una escala ordinal. A esta capacidad se le llama clasificación. El niño concreto-operacional característicamente, ya puede ordenar ocho palos de longitud diferente en una hilera conforme a su longitud. Se advierte fácilmente la importancia que tiene la capacidad para clasificar, para comprender la relación de unos números con otros y, por tanto, para el

aprendizaje de la Aritmética.

El niño de siete años, que acaba de entrar en la etapa de las operaciones concretas, ha adquirido un importante conjunto de reglas que no poseía un año o dos antes. Cree que tanto la longitud como la masa, el peso y el número, permanecen constantes a pesar de una modificación superficial en su aspecto externo. Es capaz de producir la imagen mental de una serie de acciones y se da cuenta de que los conceptos de relación como los de más obscuro o de más pesado no hacen referencia, por fuerza, a cualidades absolutas, sino a una relación entre dos o más objetos. Finalmente, puede razonar acerca del todo y sus partes simultáneamente y puede ordenar objetos a lo largo de una dimensión de cantidad (como la de longitud o peso). En pocas palabras, ha aprendido algunas reglas de importancia capital que lo ayudarán en su adaptación al ambiente.

Finalmente, en la cuarta etapa, etapa formal, dice Piaget que estas operaciones son superadas al llegar el niño al nivel de lo que él llama las operaciones formales o hipotético deductivas. Esto es, ahora puede razonar sobre hipótesis y no sólo sobre objetos.

En la teoría piagetiana, la etapa formal de razonamiento, se manifiesta a sí misma en una gran variedad de formas. Por ejemplo, la generación de todas las posibles combinaciones de variables, el aislamiento y control de variables, y la solución de problemas de proporcionalidad, todos, teóricamente, requieren operaciones formales.

Piaget dice que en esta etapa el individuo construye operaciones nuevas, operaciones de lógica proposicional, y no simplemente las operaciones de clases, relaciones y números. Obtiene nuevas estructuras que son por un lado combinatorias, correspondiendo a lo que los matemáticos llaman "lattice"; por otro lado, estructuras de grupo más complicadas. Al nivel de operaciones concretas, las operaciones se aplican dentro de una vecindad inmediata: por ejemplo, clasificación por inclusiones sucesivas. Así, es posible formar una clase de animales, por ejemplo que esté compuesta de perros, gatos, dinosaurios, pájaros, etc. Más aún, cualquier clase particular se puede componer de varias subclases. Si un niño fue limitado en su habilidad operacional a formas de pensamiento sensorio-motrices o pre-operacionales, entonces sólo puede reaccionar ante un perro como un objeto, perro. Pero si dispone ya de símbolos, y esos símbolos significan algo se pueden transformar de manera que el objeto, perro, se puede convertir en un animal, un mamífero, un cocker spaniel, y "Príncipe" simultáneamente.

Las habilidades obtenidas en las operaciones concretas permiten al niño empezar a transformar la información lógicamente.

Ciertos patrones de razonamiento formal son:

-Enfoque sobre las variables importantes (tal como la

fuerza que acelera una manzana en lugar del chichón que ésta hace sobre su cabeza).

-Lógica proposicional ("si el calor fuera un líquido ocuparía espacio y un barril podría solamente contener una cantidad limitada de calor, pero esto es contrario a mis observaciones, así que...")

-Razonamiento proporcional (por ejemplo, la fuerza restauradora de un resorte aumenta linealmente con su desplazamiento del punto de equilibrio). Un comportamiento muy importante usualmente asociado con pensamiento formal es la dirección consciente del propio razonamiento. Como resultado el individuo busca inconsistencias entre conclusiones, verifica la exactitud de una aproximación, o compara el resultado de un procedimiento con órdenes de magnitud estimados.

-Razonamiento combinatorial. Una persona considera sistemáticamente todas las posibles relaciones de condiciones experimentales o teóricas aunque algunas pueden o no realizarse en la Naturaleza (por ejemplo, usar la respuesta espectral del ojo para desarrollar la teoría de los tres colores visibles).

-Control de variables. Al establecer la veracidad o falsedad de hipótesis una persona reconoce la necesidad de tomar en consideración todas las variables conocidas; en inventar un experimento que controle todas las variables relevantes.

Es bien claro que el pensamiento formal es pre-requisito para poder estudiar ingeniería.

La etapa de pensamiento formal que principia en alguna parte entre los 11 y los 16 años, permite al niño hacer aún más abstracciones a partir de la experiencia concreta. En la etapa concreta el niño podía poner simultáneamente un objeto en múltiples categorías de diversos tipos. Moviéndose a partir de estas etiquetas de carácter concreto, el niño en la etapa de pensamiento formal puede ahora razonar respecto a objetos que no puede ver o experimentar concretamente, tal como lo que se requiere para inferir el principio de inercia. El cambio más dramático de las operaciones concretas a las formales se evidencia en un cambio de foco de las realidades del mundo hacia una consideración del total de posibilidades que pueden existir en el mundo. De hecho, una vez que las operaciones formales se han adquirido, las realidades del mundo son secundarias en el proceso de pensamiento de una persona, respecto al rango de posibilidades que pueden existir. Por esta razón el pensamiento es mucho más flexible. Un ejemplo de esto es el adolescente en la Universidad que ha experimentado durante toda su vida un Sistema Político Democrático. Esta experiencia constituye su entendimiento concreto de un sistema político. Sin embargo, cuando alcanza la etapa de pensamiento formal, ya no está limitado en su pensamiento respecto a los sistemas políticos a la consideración de un Estado Democrático. Por lo tanto, puede considerar, y en algunos casos abrazar, idealizaciones políticas que nunca ha experimentado. Se puede volver Maoísta o hablar de

las ventajas de un estado Socialista, de un Estado Totalitario e incluso de un Estado Anarquista. En este ejemplo, la experiencia concreta del niño pone límites a su habilidad para pensar en el total de posibilidades. Sin embargo, cuando ya es capaz de tratar formalmente todas las posibilidades, su pensamiento respecto a la política puede cambiar radicalmente. Otro ejemplo es el desarrollo de las actitudes morales o religiosas. Una niña cuya experiencia religiosa ha sido la de una afiliación a la fe Católica, puede, cuando entra a la Universidad, ser repentinamente impactada por la plétora de posibilidades distintas de la religión Católica. Por lo tanto, puede estudiar Budismo o Judaísmo, o una gran variedad de otros puntos de vista respecto a las cuestiones morales y religiosas. Ocasionalmente, esta clase de revolución mete en problemas a padres y profesores, pero aún así, constituye una especie de señal de que el niño está empezando a dejar las experiencias concretas y empieza a considerar el total de posibilidades.

Si la pregunta siguiente se le hace a un niño de siete años de edad y a otro de doce años: "Se encontró a un hombre muerto en el asiento de atrás de un coche que había chocado con un poste de teléfono. ¿Qué fue lo que ocurrió?" El niño más pequeño piensa una razón que lo satisface y dice: "El hombre chocó con un poste, fue arrojado al asiento de atrás y quedó muerto". El niño mayor probablemente pensará en todas las posibles maneras en que ese acontecimiento pudo haber ocurrido: pudo haber chocado con el poste y haber sido arrojado al asiento de atrás; pudo haber sido colocado en el automóvil después de chocarlo a fin de simular un accidente; su compañero lo pudo haber colocado en el asiento de atrás después del choque, y así sucesivamente. Esta tendencia a generar y explorar sistemáticamente todas las hipótesis de solución posibles y luego examinarlas cuidadosamente para establecer su probable validez, es una de las características distintivas de la etapa de las operaciones formales.

En segundo lugar, el pensamiento del adolescente es deliberadamente deductivo y se parece al de un científico. El adolescente puede pensar en términos de proposiciones hipotéticas, que resulten una ficción y no casen con la realidad. Considérese la pregunta siguiente: Encontraron un cráneo de tres años de edad de un animal que tenía cinco patas y tres cabezas y que había vivido 50 años. ¿Qué es lo que resulta absurdo?

El niño de siete años de edad podría hacer objeciones consistentes en decir que no hay animales que tengan cinco pies y tres cabezas; el adolescente es capaz de aceptar esta hipótesis fantástica y tratar de buscar una respuesta a la pregunta, y concluir que lo que resulta absurdo son los datos de las edades.

En tercer lugar, el adolescente organiza sus operaciones en operaciones de orden superior; busca la manera de utilizar reglas abstractas para resolver toda una clase de problemas. Por ejemplo, considérese el siguiente problema:

¿Qué número resulta de restar 30 a tres veces él mismo?.



El niño de siete años de edad que se encuentra en la etapa de las operaciones concretas, probablemente comenzará a tratar de solucionar el problema mediante ensayo y error, ensayará primero un número y luego otro. Utilizará las operaciones de suma y de multiplicación hasta que, finalmente, alcance la respuesta correcta. El adolescente ha aprendido una operación de orden superior y tal vez establezca la ecuación:  $X + 30 = 3X$  y rápidamente encontrará la respuesta de 15. Combina las operaciones de adición y multiplicación en la operación concreta de la ecuación algebraica.

Si a dos niños se les da un tazón de agua y una caja llena de objetos y se les pide que elijan los que floten, el niño de edad más avanzada no pondrá cada objeto en el agua de uno en uno, sino que utilizará una regla simplificadora. Cogerá primero todos los objetos de madera e inclusive hará alguna prueba con ellos (como la de golpearlos contra la madera) para ver si están hechos principalmente de madera. A estas unidades más complejas se les llama estructuras combinatorias. Saber que se debe utilizar la operación de multiplicación para resolver el problema: De cuántas maneras puedo aparear tres discos de colores unos con otros?, es un ejemplo de estructura combinatoria y tales estructuras son necesarias para comprender el Álgebra y las Matemáticas Superiores.

Así pues, el pensamiento formal, fundamentalmente, es una orientación generalizada hacia la solución de problemas. El fundamento de esta orientación es la capacidad de aislar los elementos de un problema y a explorar sistemáticamente todas las hipótesis de solución posibles independientemente de cuán hipotéticas sean. El pensamiento formal es racional y sistemático. Además el adolescente parece reflexionar en las reglas que posee y tiene conciencia de sus propios pensamientos. Conciencia de lo que sabe. No es fortuito que la adolescencia sea la vez primera que el niño comienza a pensar en sí mismo, en el papel que desempeñará en la vida, en sus planes, en la validez y la integridad de sus creencias. La preocupación del adolescente por la "falsedad" de sus propios ideales y los de los adultos es aguda en esta época, pero rara vez se observa en niños de menos de 10 años de edad. El niño que se encuentra en la etapa de las operaciones concretas tiende a vivir en el presente, en el aquí y el ahora, el adolescente comienza a interesarse por lo hipotético, por lo futuro y remoto. Se oyó a un adolescente decir: "Me encuentro pensando en mi futuro y luego empiezo a pensar por qué estaba pensando en mi futuro". Piaget cree que esta preocupación por el pensamiento es el componente principal de la etapa de las operaciones formales. Con el tiempo las posibilidades empiezan a trascender a la realidad. Además, el individuo es capaz de, y de hecho prefiere, las posiciones lógicas a su anterior confianza en la información empírica, disponible. En cierto modo el individuo sustituye los postulados por su confianza inicial en los símbolos y los objetos. Finalmente, el individuo puede reconocer e interpretar relaciones funcionales.

La comprensión de los conceptos matemáticos y físicos por

parte del niño representa el campo de trabajo de Piaget más reciente de los últimos 25 años.

La evaluación de la significación de las ideas de Piaget descansa directamente en las generalidades de sus observaciones y en sus hipótesis teóricas en lo concerniente al crecimiento intelectual. No se puede dudar gran cosa de que lo que ha dicho acerca de los cambios de desarrollo por lo que respecta a la idea de conservación de la masa, a la de inclusión en clase, o a la de serialización, es en general, verdadero. La sugerencia interesantísima de que interpretamos teóricamente estas reglas cognocitivas como operaciones (como acciones interiorizadas que son reversibles) es una manera ingeniosa y tal vez útil de entender la adquisición gradual de tales reglas. La teoría de Piaget implica que un niño normalmente dotado, pero que no pudiese utilizar sus brazos o sus piernas, tropezaría con muchas dificultades para desarrollarse intelectualmente, puesto que Piaget atribuye un papel importante a las acciones motoras del infante. Después, estas acciones se interiorizan como operaciones.

Si el niño no entiende la pregunta que se le hace, evidentemente su ejecución será de un nivel inmaduro. Por ejemplo, Piaget sugiere que el niño de ocho años no puede clasificarse a sí mismo en dos dimensiones simultáneamente. Es decir, no puede considerarse a sí mismo, simultáneamente, como miembro de una ciudad y, también como miembro de un país. No sabe que una ciudad es parte de una nación. Se puede demostrar que un niño de cinco años de edad es capaz de una doble clasificación si entiende los dos conceptos. El niño de cinco años de edad sabe que puede ser, a la vez, miembro de su familia y miembro del sexo masculino.

El hincapié que hace Piaget en la importancia de la reversibilidad, de la inclusión de clase, de las operaciones de ordenamiento serial y de las estructuras combinatorias, es especialmente pertinente para la Matemática y la Física y menos evidentemente pertinente por lo que toca a muchos fenómenos naturales que no muestran reversibilidad o no obedecen las reglas de inclusión de clase. Dice Mussen que "las aportaciones de Piaget han hecho época y su influencia en la psicología del desarrollo no tiene igual". (27)

Al igual que un concepto en cualquier teoría, una etapa de desarrollo intelectual es una simplificación útil en el análisis e interpretación de los resultados, algo así como una partícula puntual o un plano sin fricción en Mecánica. De esta manera no esperaríamos que la mayor parte de la gente durante su período de desarrollo exhibiera todas las características de razonamiento de, digamos, la etapa A por un cierto período de tiempo y luego súbitamente cambie todos sus patrones de razonamiento a los apropiados a la etapa B. Por el contrario, el desarrollo del razonamiento de una persona debería pensarse como gradual; en un tiempo particular muestra las características de la etapa A en algunos problemas mientras que exhibe ciertos rasgos de la etapa B en otros.

De aquí se sigue que es posible que alguna persona esté en la etapa de pensamiento formal en relación a una cierta área de contenido y estar aún en la etapa concreto-operacional en otra área. Las áreas en las cuales es más probable que un estudiante sea concreto-operacional, serán aquellas donde su experiencia ha sido menor. Se espera que los estudiantes que por primera vez entran en contacto con conceptos vectoriales, por ejemplo, tendrán un conjunto muy global y no diferenciado de conceptos respecto al Análisis Vectorial.

El razonamiento formal es uno en el cual una persona activamente investiga las relaciones y los patrones para resolver contradicciones y dar coherencia a un nuevo conjunto de experiencias. Implícitamente en esta noción está la imagen de una persona relativamente autónoma, una que no está ni bajo la constante guía de un profesor ni estrictamente cerrada a un conjunto rígido de precedentes.

Se supuso que cada una de las cuatro etapas de Piaget funciona como precursora de la etapa siguiente, así que el razonamiento se desarrolla secuencialmente de la menos a la más efectiva etapa, sin embargo esto no sucede necesariamente en la misma proporción en cada individuo.

Inicialmente los trabajos de Piaget enfocaron la edad entre los once y los dieciséis años como la etapa final del desarrollo cognoscitivo. Se creía que el niño durante este período era capaz de abstraer de las experiencias concretas y teorizar respecto al total de posibilidades o alternativas que podían ser exploradas en cualquier situación. Sin embargo, ahora se ha vuelto claro que la transición al pensamiento abstracto o formal en general no se ha completado cuando los estudiantes ingresan a la Universidad. La mayoría de los profesores universitarios han encontrado estudiantes cuyo trabajo académico parece sugerir que aún se apoyan fuertemente en patrones de pensamiento concreto-operacional. Algunos estudios indican que un porcentaje tan grande como el 50% de nuestros estudiantes de primer ingreso en la Universidad no son capaces, ni mucho menos hábiles, en los procesos de pensamiento formal-operacional. (28) Más aún, la evidencia de que la adquisición de los procesos de pensamiento formal-operacional continúa durante la edad adulta, se acumula cada vez más. Uno continúa desarrollando sus patrones de pensamiento formal a lo largo de toda su vida en términos de profundizar su entendimiento, ampliar el dominio de su experiencia y añadir nuevos campos o áreas de contenido a sus experiencias. De aquí que pueda uno especular que la instrucción durante los años de Universidad debería servir para maximizar esta etapa final de desarrollo cognoscitivo. Tratar de enseñar a los estudiantes que usan patrones de pensamiento concreto a ser analíticos, lógicos y críticos, constituye un gran desafío para los profesores universitarios.

## 2. Desarrollo del pensamiento lógico (Autorregulación).

Antes de instaurar un programa basado en la teoría Piagetiana, para considerar la maximización del crecimiento intelectual, se debe tener algún indicador de cómo es que un estudiante progresa de las operaciones concretas a las operaciones formales.

Jean Piaget menciona cuatro factores principales para explicar el desarrollo de un conjunto de estructuras a otro (29). Antes que nada, la maduración en el sentido de Gessel, ya que este desarrollo es una continuación de la embriogénesis; segundo, el papel de la experiencia, de los efectos del medio ambiente físico sobre las estructuras de la inteligencia; tercero, la transmisión social en el sentido amplio (transmisión lingüística, educación, etc.); y cuarto, un factor a menudo descuidado pero que considera fundamental y aún el factor principal; llama a éste, el factor de autorregulación.

La maduración desempeña un papel indispensable y no se debe ignorar. Ciertamente participa en cada transformación que se lleva a cabo durante el desarrollo del niño. Pero este primer factor es insuficiente en sí mismo.

La noción de experiencia es una noción muy equívoca. De hecho hay dos tipos de experiencia que son psicológicamente muy diferentes y esta diferencia es muy importante desde el punto de vista pedagógico. Es por su importancia pedagógica que Piaget enfatiza esta distinción. Primero que nada, hay la experiencia física, y segundo, la experiencia lógico matemática.

La experiencia física consiste en actuar sobre objetos e inducir algún conocimiento acerca de los objetos por abstracción a partir de los objetos. Por ejemplo, para descubrir que esta pipa es más pesada que este reloj, el niño los pesará ambos y encontrará la diferencia en los objetos mismos. Esta es la experiencia en el sentido usual del término -en el sentido usado por los empiricistas-. Pero hay un segundo tipo de experiencia: experiencia lógico matemática donde el conocimiento no se induce a partir de los objetos, sino se induce de las acciones efectuadas sobre los objetos. Esto no es la misma cosa. Cuando uno actúa sobre los objetos efectivamente los objetos están ahí, pero también está el conjunto de acciones que modifican los objetos.

El tercer factor es la transmisión social, transmisión lingüística o transmisión educacional. Este factor de nuevo es fundamental. "No niego", dice Piaget, "el papel de ninguno de estos factores; todos desempeñan una parte. Pero este factor es insuficiente porque el niño puede recibir información valiosa vía lenguaje o vía educación dirigida por un adulto sólo si está en un estado donde puede entender esta información". Por esto, es que no se le pueden enseñar Matemáticas Superiores a un niño de cinco años. El no tiene todavía estructuras que le permitan entenderlas.

El cuarto factor que se agrega a los tres precedentes, pero que es el fundamental, es el factor de equilibración. Como ya hay tres factores, éstos deben equilibrarse entre sí de algún modo. Esta es la razón para introducir el factor de autorregulación. Pero hay una segunda razón que es fundamental. Esta es que, en el acto de conocer, el sujeto es activo, y consecuentemente enfrentado a una perturbación externa reaccionará para compensar y por lo tanto tenderá hacia el equilibrio, definido por compensación activa, conduce a la reversibilidad. La reversibilidad operacional es un modelo de un sistema equilibrado donde la transformación en una dirección es compensada por una transformación en otra dirección.

La autorregulación se puede describir como el despliegue de fases alternativas empezando con la asimilación. El razonamiento individual simula una situación problema y le da un significado determinado por patrones de razonamiento presentes. Este significado puede o no, de hecho, ser apropiado. La no propiedad produce lo que se llama "desequilibrio", "conflicto cognocitivo" o "contradicción", una etapa que según Piaget es el mover principal al iniciar la segunda fase: acomodación, cuyos vínculos son:

\* Un análisis de la situación para localizar la causa de la dificultad y:

\*\* Formación de nuevas hipótesis y planes de ataque.

La forma como esto se hace varía de persona a persona y depende de su habilidad de análisis y de solución de problemas. Los resultados de estas reflexiones y actividades experimentadas son nuevos patrones de razonamiento que pueden incluir nuevos conocimientos. En términos de la asimilación y la acomodación, actividades autocorrectoras (acomodación) son constantemente cuestionadas (asimilación), hasta que esta alternación de fases produce el comportamiento acertado. El proceso completo de autorregulación dirigido a un estable rapport entre patrones de razonamiento y medio ambiente, es llamado "equilibración" por Piaget.

Resumiendo, entonces: La **asimilación** se refiere a la recepción selectiva de entradas; la **acomodación** a los cambios de estructuras cognitivas, y la **equilibración**, al proceso dinámico de crecimiento.

La equilibración como lo entiende Piaget es pues un proceso activo. Es un proceso de autorregulación. Esta autorregulación es un factor fundamental en el desarrollo; sólo a través de este proceso se alcanza la estructura lógica. Piaget usa este término en el sentido de procesos alimentados y retroalimentados, de procesos que se regulan a sí mismos por una compensación progresiva de sistemas. La autorregulación es el proceso por medio del cual un razonamiento individual avanza de un nivel al siguiente, un avance que siempre es en la dirección hacia patrones de razonamiento más acertados.

La autorregulación ocurre cuando un estudiante está tratando de aprender. Cuando las experiencias o nuevos encuentros confirman ideas o creencias que se han sostenido en el pasado, entonces estas ideas o creencias se estabilizan. Pero cuando las experiencias tienden a contradecir las ideas del estudiante, estas ideas deben ser reorganizadas para resolver el conflicto. Este conflicto es un impulso de crecimiento y cambio y conduce a un nuevo conjunto de ideas más altamente diferenciado y estable. La regulación que ocurre es el constante monitoreo que un estudiante hace de sus propias ideas y de las nuevas ideas que le son presentadas.

La autorregulación envuelve al estudiante en un círculo de retroalimentación con el medio ambiente. Analiza el problema, considera soluciones tentativas, evalúa su efectividad, y usa nuevos descubrimientos cuando el ensayo inicial no produce resultados deseados. La autorregulación que conduce a patrones de razonamiento formal generalmente requiere la conciencia del razonamiento de los estudiantes. Procedimientos intuitivos de prueba y error pueden conducir a autorregulación con respecto a patrones de razonamiento a nivel concreto.

La autorregulación entonces tiene lugar conforme el estudiante relaciona al nuevo concepto o principio con experiencias previas reunidas en una situación abierta en la cual pueda funcionar con suficiente autonomía.

Una analogía en la actividad física es la experiencia al manejar un coche ajeno con un freno con diferente dureza a la que uno está acostumbrado. Uno presiona el pie sobre el pedal solamente para descubrir que el freno responde demasiado y el carro para bruscamente, o demasiado poco y el carro no se detiene. Después de hacer varios intentos, el chofer gradualmente descubre qué presión aplicar para que el carro pare suavemente.

En la autorregulación, hay algo que no está tomando en cuenta, pero tarde o temprano lo descubre gracias a que sigue observando relaciones.

Este proceso de equilibración toma la forma de una sucesión de niveles de equilibrio, de niveles que tienen una cierta "probabilidad" que Piaget llama probabilidad secuencial, esto es, las probabilidades no se establecen a priori, hay una secuencia de niveles. No es posible alcanzar el segundo nivel a menos que se haya alcanzado el equilibrio en el primer nivel, y el equilibrio en el tercer nivel sólo se vuelve posible cuando se haya alcanzado el equilibrio en el segundo nivel y así sucesivamente. Esto es, cada nivel está determinado como el más probable una vez que el nivel precedente ha sido alcanzado.

La relación fundamental involucrada en todo desarrollo y en todo aprendizaje no es la relación de asociación. En el esquema estímulo-respuesta, la relación entre la respuesta y el estímulo se entiende como una relación de asociación. En contraste con esto, la relación fundamental es una relación de

asimilación. La asimilación no es lo mismo que la asociación. Define Piaget la asimilación, como la integración de lo fundamental desde el punto de vista de aplicaciones pedagógicas o didácticas. Todos estos comentarios representan al niño y al sujeto que aprende, como activos. Una operación es actividad. **El aprendizaje sólo es posible donde hay una asimilación activa.**

La representación que Piaget propone, pone énfasis en la idea de autorregulación. Todo el énfasis se pone en la actividad del sujeto mismo y sin esta actividad no hay didáctica o pedagogía posibles que transformen significativamente al sujeto.

La autorregulación permite al sujeto eliminar contradicciones, incompatibilidades y conflictos. Todo desarrollo está compuesto de conflictos momentáneos e incompatibles que deben ser superados para alcanzar un nivel de equilibrio.

### **3. Ciclos de aprendizaje** (una forma de instrucción basada en Piaget)

Sabemos que para aumentar nuestro aprendizaje, uno debe ser capaz de realizar una gran variedad de operaciones mentales. Ejemplos de este tipo de operaciones son la exclusión de datos irrelevantes, el uso de factores de escala (razones) simples y la formulación de la existencia de un paso intermedio para alcanzar una respuesta final.

**¡No todos los estudiantes han desarrollado la habilidad de realizar este tipo de operaciones mentales!**

Recientemente Karplus (30) ha sugerido una estrategia de instrucción para el salón de clase, basada en la teoría de Piaget, que puede ayudar a los estudiantes en su desarrollo de pensamiento lógico. Esta flexible estrategia se llama **Ciclo de Aprendizaje** y proporciona cierta guía para los instructores que desean combinar el desarrollo del razonamiento con el dominio del contenido.

El ciclo de aprendizaje se divide en tres fases principales, conocidas como: **Exploración, invención y aplicación** (algunas veces llamada descubrimiento). Las características generales de cada fase del ciclo de aprendizaje son las siguientes:

**Exploración.** Siguiendo a un breve establecimiento del tópico y la dirección a seguir, se impulsa a los estudiantes a aprender por medio de su propia experiencia. Las actividades son proporcionadas o sugeridas por el instructor, y ayudarán al estudiante a recordar (y compartir) experiencias concretas pasadas y a asimilar nuevas experiencias concretas que le serán útiles después para las actividades de invención y/o aplicación. Durante esta actividad los estudiantes reciben solamente una guía mínima de parte del instructor y exploran nuevas ideas en forma espontánea.

**Invencción.** En la fase de invencción, las experiencias concretas de exploración se usan como base para generalizar un concepto o para introducir un principio. Los papeles del estudiante y del instructor en esta actividad pueden variar dependiendo de la naturaleza del contenido. Generalmente se pide a los estudiantes que inventen parte o todas las relaciones por sí mismos, y el profesor proporciona guía y estímulo cuando hace falta. Este procedimiento permite a los estudiantes obtener confianza por medio de la familiaridad con los conceptos introducidos.

**Aplicación.** La fase de aplicación proporciona a cada estudiante la oportunidad de aplicar directamente el concepto o habilidad aprendidos durante la actividad de invencción. La aplicación proporciona a los estudiantes experiencias adicionales que les permiten ampliar y extender los conceptos. Usan conceptos inventados en diferentes establecimientos concretos.

El ciclo de aprendizaje da a cada estudiante la oportunidad de pensar por sí mismo. El instructor es un supervisor presente de la actividad. Sin embargo, debe guardarse de excederse en su papel de director y facilitador. Debe proporcionar una atmósfera abierta en el salón de clases dentro de una frontera bien definida.

El ciclo de aprendizaje ofrece a los profesores un modelo para diseñar actividades de aprendizaje que puedan estimular a los estudiantes para desarrollar sus habilidades de razonamiento y aprender conceptos. El esquema que sigue a continuación describe en detalle las tres partes del ciclo de aprendizaje:

**a) Exploración:**

**Enfasis:** Experiencia concreta con objetos y sistemas.

**Foco:** Actividad abierta de los estudiantes.

**Función:** La experiencia concreta del estudiante se une con aficiones ambientales apropiadas que no han sido consideradas anteriormente por el estudiante.

1) Esta fase del ciclo de aprendizaje proporciona a los estudiantes un refuerzo de experiencias concretas previas y/o los introduce en nuevas experiencias relacionadas con los objetivos de la invencción.

2) La exploración permite consideraciones abiertas, estimulando a los estudiantes a usar experiencias concretas para considerar nuevas ideas.

3) Durante la exploración el instructor proporciona estímulo, ofrece "hints", hace preguntas y sugiere alternativas. El instructor debe estimular a los estudiantes a intentar una variedad de experimentos.



4) El comportamiento del estudiante durante la exploración proporciona información respecto a su habilidad para tratar con los conceptos introducidos. Los estudiantes revelarán las habilidades de razonamiento que utilizan en la búsqueda de solución a su problema.

#### **b) Invención:**

**Enfasis:** Generalizaciones de experiencias concretas y posibilidades abstractas.

**Foco:** La activa participación del estudiante con el instructor para la generalización.

**Función:** Que el estudiante se familiarice con conceptos y/o habilidades generalizadas.

1) Durante la invención, los estudiantes son estimulados a formular relaciones que generalicen sus nuevas ideas y experiencias concretas.

2) El instructor actúa como un mediador en asistir a los estudiantes en la formulación de estas relaciones de manera que sean consistentes con los resultados de sus actividades de exploración.

#### **c) Aplicación:**

**Enfasis:** Uso relevante de conceptos y/o habilidades generalizadas.

**Foco:** Actividad dirigida al estudiante.

**Función:** Uso más amplio de los conceptos generalizados en otro sistema.

1) Para empezar la aplicación, los estudiantes y el instructor deben interactuar en la planeación de una actividad para aplicar el concepto o la habilidad inventados. La actividad deberá proporcionar una nueva situación concreta.

2) Se les pide a los estudiantes que completen la actividad diseñada a satisfacción del instructor. Las actividades deberán proporcionar experiencia ulterior que actuará como experiencia ampliadora y estabilizadora relacionada con las nuevas habilidades y conceptos.

Habiendo considerado, teóricamente, las etapas de desarrollo intelectual y los procesos por medio de los cuales ocurre el desarrollo, Tomlinson y Keasey (29) proceden a analizar las implicaciones que estos principios tienen para los practicantes de la enseñanza universitaria. Y consideran que el primer punto más bien obvio es que uno debe empezar con materiales que tengan significado para el estudiante. Esto muchas veces implica empezar a un nivel bastante elemental. Cuando se

presentan nuevas ideas y experiencias en una forma que es parcialmente consonante con las experiencias pasadas del estudiante, las posibilidades de crecimiento son máximas, como lo es la probabilidad de que estas experiencias sean incorporadas en un nuevo y estable conjunto de conceptos respecto a un área específica de contenido.

Una segunda implicación de la teoría de Piaget se centra en la autorregulación que tiene lugar en el estudiante. El punto principal del modelo autorregulatorio es que el alumno debe considerarse en todas las fases de planeación de la instrucción. Esto coloca una enorme carga sobre los profesores universitarios que deseen genuinamente presentar a sus estudiantes materiales que puedan usar. El ciclo de aprendizaje es una manera de tratar este problema y ha servido para estimular la participación de los estudiantes. En la fase de exploración, los estudiantes deben observar un comportamiento o fenómeno y recolectar datos respecto a ese fenómeno. Después de la exploración, los datos se organizan y se usan para formar hipótesis que proporcionen las bases para introducir conceptos que son importantes en el campo y para la generalización hacia otros tópicos. Con los antecedentes proporcionados por las actividades exploratorias, los estudiantes están preparados para manejar algunas de las teorías y descubrimientos empíricos relacionados con un fenómeno.

Por supuesto que el Ciclo de aprendizaje no siempre progresa llanamente de un punto a otro. Puede suceder que las actividades exploratorias no conduzcan a las conclusiones o conceptos previstos por el profesor. Puede el profesor intervenir en lo que parece ser una exploración sin ningún propósito y empezar a imponer su propio sistema de clasificación a los estudiantes. Los puntos de intervención y el tiempo adecuado para intervenir parece ser un asunto delicado.

El traducir la teoría Piagetiana a las fases de exploración, invención y aplicación del ciclo de aprendizaje (Karplus 1974) crea otros problemas. La exploración toma tiempo, y mientras que antes el tema "rozamiento" le tomaba dos clases, ahora no se puede explorar y descubrir las leyes del rozamiento seco tan rápidamente. Parece probable, entonces, que las actividades exploratorias impliquen que cierto material debe ser sacrificado. Si a los estudiantes les perjudica esta reducción del contenido es algo que todavía está por verse. Los estudios realizados demuestran que los estudiantes que son examinados respecto al contenido de una clase, una semana más tarde, sólo recuerdan el 17% del contenido de la clase (Fipsee, 1975); lo que sugiere que la cantidad de material cubierto no está necesariamente correlacionada con la cantidad que aprende el estudiante. Si un enfoque como el del ciclo de aprendizaje compromete a los estudiantes en una adquisición más profunda y pensada del conocimiento, la pérdida de algo de contenido puede ser poco importante.

## CAPITULO III

### COMO ENSEÑAR ESTÁTICA

(con mayores posibilidades de éxito)

A continuación se presentan en forma concreta los ciclos de aprendizaje que sugiero para las cinco unidades en que divido la Estática, así como la descripción de la Herramienta matemática necesaria.

#### 1. Unidades sugeridas para un curso de Estática

##### a). Herramientas matemáticas necesarias

Representación de un vector

- en dos dimensiones

- en tres dimensiones

Magnitud de un vector

Vector unitario

Vectores unitarios trirrectangulares

Representación de un vector  $A$  en términos de los

vectores unitarios trirrectangulares

Vector unitario en dirección  $A$

Suma y resta de vectores

Producto escalar de dos vectores

Producto vectorial de dos vectores

Triple producto escalar

Componentes de un vector

- en dos dimensiones

- en tres dimensiones

Regla de senos

Regla de cosenos

Solución de sistemas de tres ecuaciones

Integración doble

##### b). Diagrama de cuerpo libre

Fuerzas de interacción

Diagrama de cuerpo libre

Análisis cualitativo de estructuras

Fuerzas internas

Reacciones en apoyos y conexiones

- en el plano

- en el espacio

##### c) Equilibrio rotacional

Momento de una fuerza

- con respecto a un punto

- con respecto a un eje

Teorema de Varignon

Momento de un par

Pares equivalentes

Suma de pares

d) **Equilibrio traslacional**

Resultante de un sistema de fuerzas

- dos fuerzas (regla del paralelogramo)

- tres fuerzas o más

- en el plano y en el espacio

Equilibrio de una partícula

- en el plano y en el espacio

e) **Rozamiento**

Leyes del rozamiento seco

Coefficientes del rozamiento

Ángulos de rozamiento

f) **Centros de gravedad**

Centro de gravedad de cuerpos planos

Centro de gravedad de cuerpos volumétricos

g) **Aplicaciones**

Equilibrio de cuerpo rígido

- en el plano y en el espacio

Análisis cuantitativo de estructuras

- método de nudos

- método de secciones

Descomposición de una fuerza dada en una fuerza aplicada en O y un par

Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par

Sistemas equivalentes de fuerzas

\* Cuñas, tornillos y chumaceras

\* Rozamiento en discos

\* Rozamiento en ruedas

\* Rozamiento en correas

\* Teoremas de Pappus-Guldinus

Momento de inercia

- de áreas

- de masas

- de placas delgadas

- de cuerpos compuestos

- con respecto a un eje que pasa por O

- con respecto a un eje arbitrario

\* Radio de giro

- de un área y de un volumen

\* Teorema de los ejes paralelos

- para áreas y volúmenes

\* Productos de inercia

- de áreas y volúmenes

\* Ejes principales y momentos principales de inercia

- para áreas y volúmenes

\* Círculo de Mohr

\*Estos temas pueden ser desarrollados por los alumnos al final del curso

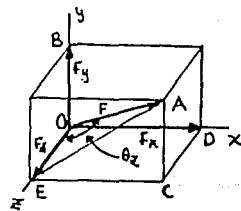
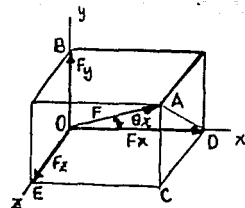
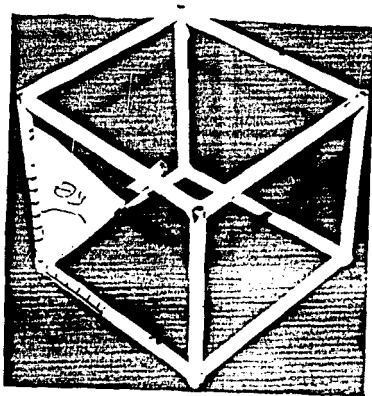
## 2. Sugerencias concretas de ciclos de aprendizaje

### a) Herramientas matemáticas necesarias

A continuación hago un sumario de prerequisites matemáticos para el aprendizaje de la Estática. Como ya mencioné anteriormente, uno de los aspectos de dificultad en la enseñanza de la Estática, es el que los alumnos no manejan esta herramienta matemática necesaria; la consecuencia de esto es una confusión entre lo que es matemática y lo que es Estática. Como desarrollar un ejercicio si no se sabe dónde termina una y dónde empieza la otra? Por lo tanto sugiero que se de un repaso de este material antes de iniciar el curso, e, independientemente del método o estrategia usado para tal fin (lo cual no es propósito de esta tesis), los ejercicios que se resuelvan sean del tipo de los mostrados al finalizar esta sección.

Como auxiliar didáctico en esta parte sugiero usar una estructura cúbica como la que se muestra en la figura 11, la cual puede ser construida por los propios alumnos, del material de su gusto (madera, alambre, metal, plástico, etc.). En donde se pueden visualizar tanto el vector como sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas y sus ángulos directores ( $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ). Es conveniente usar también un diagrama bidimensional, del cubo, como se muestra en la fig. 11

fig. 11



#### Representación de un vector:

Un vector representa una cantidad que tiene magnitud y dirección. Y se representa en el plano o en el espacio como se indica en la fig. 12, en donde se está representando al vector de coordenadas: 5 unidades paralelas al eje X y -3 unidades paralelas al eje Y, esto es, el vector  $\vec{A} = (5, -3)$ .

En la fig. 13, se representa al vector, en tres dimensiones, de coordenadas: 2 unidades paralelas a eje X, 4 unidades paralelas al eje Y, y 6 unidades paralelas al eje Z:  $\vec{B} = (2, 4, 6)$ .

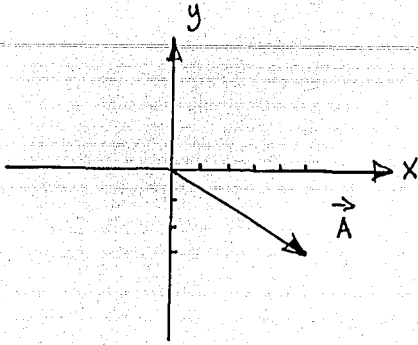


fig. 12

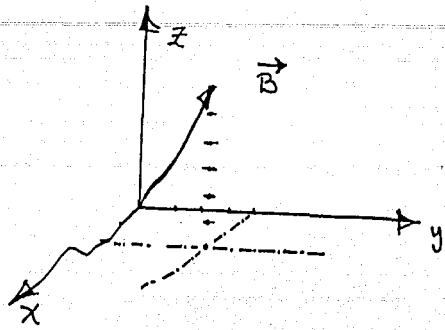


fig. 13

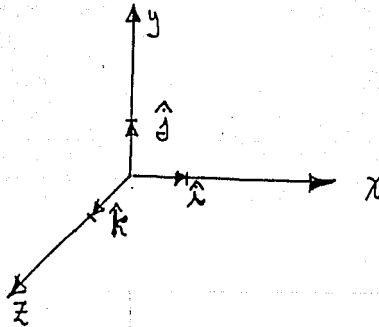
La magnitud de un vector  $\vec{A}$  de las coordenadas  $(a_1, a_2, a_3)$ , representada por  $A$ , está definida de la siguiente manera:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

**Vector unitario:** Es un vector de la magnitud unidad.

**Vectores unitarios trirrectangulares:**  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ , son los vectores unitarios en las direcciones  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , respectivamente. De esta manera:  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$  y  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ . (Ver fig. 14)

fig. 14



**Representación de un vector  $\vec{A}$  en términos de los vectores unitarios trirrectangulares:** Sea  $\vec{A}$  el vector de coordenadas  $(a_1, a_2, a_3)$ ; su representación en términos de los vectores unitarios trirrectangulares es de la siguiente manera:

$$\vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

**Vector unitario en dirección  $\vec{A}$ :** Cualquier vector  $A$  puede representarse en términos de un vector unitario en dirección de  $\vec{A}$ , de la siguiente manera:  $\vec{A} = \lambda \hat{A}$ . Donde  $\hat{A}$  es el vector unitario en dirección de  $\vec{A}$ .

**Suma y resta de vectores:**

Sean los vectores  $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\text{o: } \vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

y  $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\text{o: } \vec{B} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$$

La suma de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , denotada  $\vec{A} + \vec{B}$  es el vector  $\vec{C}$  de coordenadas:

$$\vec{C} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\text{o: } \vec{C} = (a_1 + b_1) \hat{i} + (a_2 + b_2) \hat{j} + (a_3 + b_3) \hat{k}$$

Análogamente, la resta de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , denotada  $\vec{A} - \vec{B}$  será el vector  $\vec{C}'$  de coordenadas:

$$\vec{C}' = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$\text{o: } \vec{C}' = (a_1 - b_1) \hat{i} + (a_2 - b_2) \hat{j} + (a_3 - b_3) \hat{k}$$

**Producto escalar (producto punto o producto interno) de dos vectores:**

Sean nuevamente los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  del párrafo anterior, el producto escalar de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , denotado  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , será el escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

**Producto vectorial (producto cruz o producto externo) de dos vectores:**

Sean nuevamente nuestros vectores  $A$  y  $B$ , definidos como anteriormente, el producto vectorial de  $A$  y  $B$  denotado  $A \times B$ , estará dado por el determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

O por la expresión:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

### Triple producto escalar:

Sean nuevamente los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  definidos anteriormente, y sea el vector  $\vec{C}$  de coordenadas:  $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ . El triple producto escalar de  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , denotado por  $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ , será el escalar dado por el determinante:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

### Componentes de un vector:

\* En dos dimensiones:

Sea el vector  $\vec{F}$  de magnitud  $F$  y dirección dada por el ángulo  $\theta$ , su representación geométrica se muestra en la figura 15.

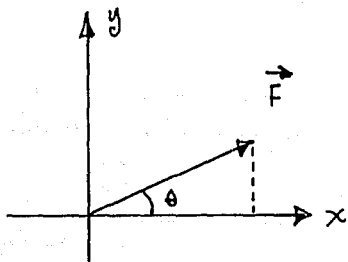


fig. 15

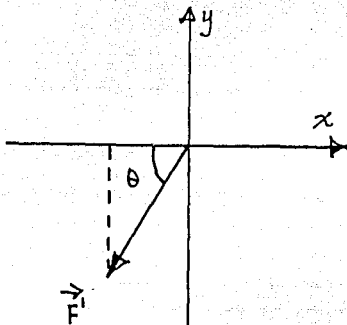


fig. 16

Y sus componentes a lo largo de los ejes X e Y estarán dadas por las funciones trigonométricas, de la siguiente manera:

$$\cos\theta = f_x/F,$$

De donde:  $f_x = F \cos\theta$

Análogamente:  $f_y = F \sin\theta$

Sea ahora el vector  $\vec{F}'$  de magnitud  $F'$  y dirección dada por el ángulo  $\theta$ , mayor de 180 grados, su representación geométrica será la ilustrada en la fig. 16.

Y sus componentes a lo largo de los ejes X e Y estarán dados, también en términos de las funciones trigonométricas así:

$$\sin\theta = f_x/F'$$

Por lo tanto:  $f_y = F' \sin\theta$



Análogamente:  $f_y = F' \cos\theta$

\* En tres dimensiones:

Para encontrar las componentes de un vector en el espacio, tenemos los siguientes casos:

\* Cuando se conocen la magnitud del vector, digamos  $\vec{F}$ , y los ángulos que forma con los ejes de coordenadas (ángulos directores  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ).

En este caso:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos\theta_x \\ F_y &= F \cos\theta_y \\ F_z &= F \cos\theta_z \end{aligned}$$

Donde  $\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z$  son los llamados cosenos directores del vector  $\vec{F}$ . (Ver la fig. 17)

\*\* Cuando se conocen el ángulo que forma con el eje vertical, digamos  $\theta_y$ , y el ángulo azimutal  $\phi$ . (Ver la fig. 18)

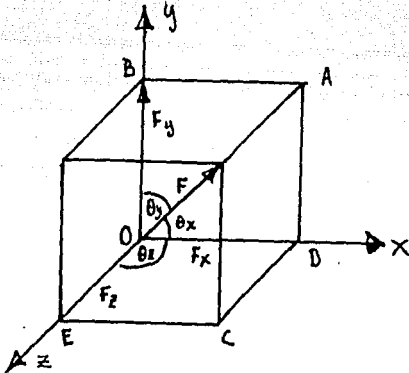


fig. 17

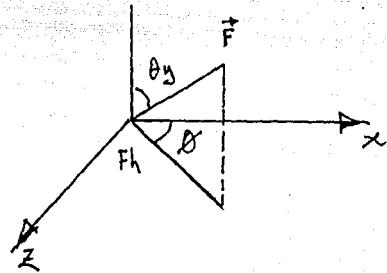


fig. 18

En este caso:

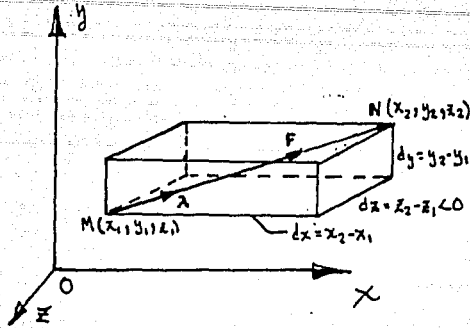
$$\begin{aligned} F_y &= F \cos\theta_y \\ F_h &= F \sin\theta_y \\ F_x &= F_h \cos\phi \\ F_z &= F_h \sin\phi \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} F_x &= F \sin\theta_y \cos\phi \\ F_y &= F \cos\theta_y \\ F_z &= F \sin\theta_y \sin\phi \end{aligned}$$

\*\*\* Cuando se conocen dos puntos sobre la línea de acción de la fuerza. (Ver fig. 19)

fig. 19



En este caso:  $\vec{F} = \hat{\lambda} F \dots (1)$

Por otro lado:  $\vec{d} = \hat{\lambda} d \dots (2)$

Despejando de ambas ecuaciones e igualando, tenemos:

$$\vec{F} / F = \vec{d} / d$$

De donde:

$$\vec{F} = F \vec{d} / d$$

o:

$$\vec{F} = (Fdx/d)\hat{i} + (Fdy/d)\hat{j} + (Fdz/d)\hat{k}$$

Donde:

$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

O también:

$$\begin{aligned} F_x &= Fdx / d \\ F_y &= Fdy / d \\ F_z &= Fdz / d \end{aligned}$$

**Solución de sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas:**

El siguiente es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= A \\ a_2x + b_2y + c_2z &= B \\ a_3x + b_3y + c_3z &= C \end{aligned}$$

En donde X, Y, y Z son las variables desconocidas y a<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>, c<sub>1</sub>, con l = 1,2,3, A, B, C son constantes.

Un método para resolver este sistema es utilizando la regla de Kramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} A & b_1 & c_1 \\ B & b_2 & c_2 \\ C & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & A & c_1 \\ a_2 & B & c_2 \\ a_3 & C & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & A \\ a_2 & b_2 & B \\ a_3 & b_3 & C \end{vmatrix}}{\Delta}$$

con  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ , llamado el determinante del sistema.

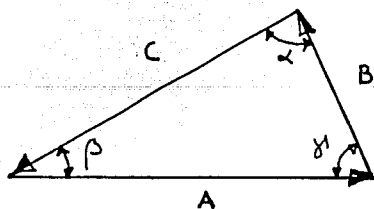


fig. 20

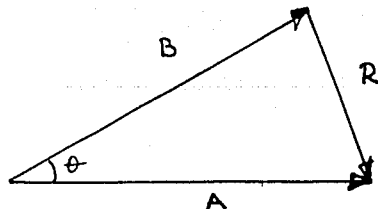


fig. 21

Regla de senos: (ver la fig. 20)

$$A/\text{sen}\alpha = B/\text{sen}\beta = C/\text{sen}\gamma$$

Regla de cosenos:  $R = \sqrt{A^2 + B^2} + 2AB \cos \theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} + 2AB \cos \theta$$

Donde:  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

**Integración doble e integración triple:**

**Teorema de la evaluación de integrales dobles y triples:**

(i) Sea  $R$  una región de tipo I (Ver fig. 22) comprendida entre las gráficas de  $y = g_1(x)$ ,  $y = g_2(x)$ , donde  $g_1$  y  $g_2$  son continuas en  $[a, b]$ . Si  $f$  es continua en  $R$ , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

(ii) Sea  $R$  una región de tipo II comprendida entre las gráficas de  $x = h_1(y)$ ,  $x = h_2(y)$ , donde  $h_1$  y  $h_2$  son continuas en  $[c, d]$ . Si  $f$  es continua en  $R$ , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

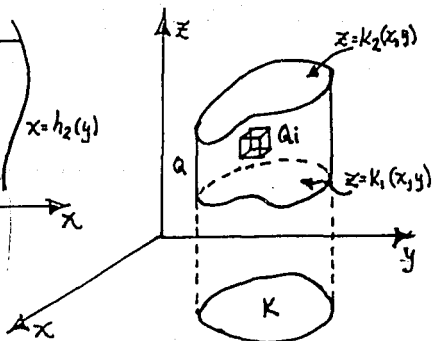
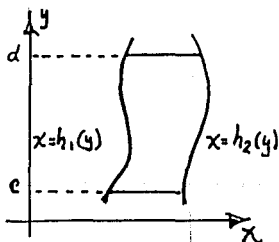
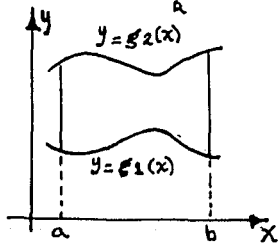


fig. 22

## E J E R C I C I O S

Propongo ejercicios del tipo de los que siguen a continuación para reforzar la parte de herramientas matemáticas:

Encuentra la magnitud y dirección de la fuerza  $\vec{F} = -1650\text{ N}\hat{i} - (320\text{ N})\hat{j} + (760\text{ N})\hat{k}$ .

Encuentra a) las componentes  $x, y, z$  de la fuerza de 800 N y b) los ángulos  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  que la fuerza forma con los ejes coordenados. (Ve la fig. 23)

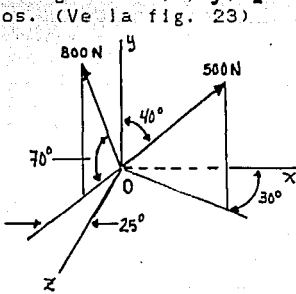


fig. 23

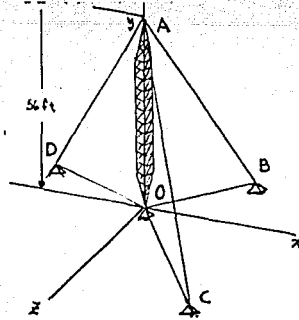


fig. 24

Para la misma fig. 23, encuentra: a) las componentes  $x, y, z$  de la fuerza de 500 N y b) los ángulos  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  que la fuerza forma con los ejes coordenados.

El cable AB de la fig. 24 tiene 65 ft de longitud y su tensión es de 3900 lb. Encuentra a) las componentes  $x, y, z$  de la fuerza ejercida por el cable sobre el anclaje B, b) los ángulos  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  que definen la dirección de la fuerza ejercida en C.

Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en una dirección dada por los ángulos  $\theta_x = 75^\circ$  y  $\theta_z = 130^\circ$ . Sabiendo que la componente  $y$  de la fuerza es +300 lb, encuentra a) las otras componentes y la magnitud de la fuerza, b) el valor de  $\theta_y$ .

Una fuerza actúa en el origen en una dirección definida por los ángulos  $\theta_y = 55^\circ$  y  $\theta_z = 45^\circ$ . Sabiendo que la componente  $x$  de la fuerza es de -500 N, encuentra a) las otras componentes y la magnitud de la fuerza y b) el valor de  $\theta_x$ .

Un cañón apunta a un blanco A localizado a 35 al este del norte. Sabiendo que el tubo del cañón forma un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal y que la máxima fuerza de retroceso es de 400 N, calcula a) las componentes  $x, y, z$  de la fuerza y b) los valores de los ángulos  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  que definen la dirección de la fuerza de retroceso. (Supón que los ejes  $x, y, z$  están dirigidos al este, hacia arriba y hacia el sur, respectivamente).

Resuelve el problema anterior ahora suponiendo que el punto A se localiza  $15^\circ$  al norte del este y que el tubo del

cañón forma un ángulo de  $25^\circ$  con la horizontal.

Encuentra la magnitud y dirección de la fuerza  $\vec{F} = (650\text{N})\hat{i} - (320\text{N})\hat{j} + (300\text{N})\hat{k}$ .

Una fuerza de 8 kN actúa en el origen en una dirección definida por los ángulos  $\theta_y = 35^\circ$  y  $\theta_z = 65^\circ$ . También se sabe que la componente x de la fuerza es positiva. Determinese el valor de  $\theta_x$  y las componentes de la fuerza.

b) Diagrama de cuerpo libre \* (ver comentarios en pg. 81)

**Exploración:** Se analizan casos de cuerpos en interacción. El instructor propone los fenómenos a los estudiantes y ellos los discuten entre sí, el instructor observa sus comentarios.

**Invencción:** Se discuten éstos y otros casos y se aprende a hacer el diagrama de cuerpo libre. Ahora el instructor hace preguntas; en muchos casos un estudiante no sabe responder a una pregunta debido a que no la entiende, en esta actividad el instructor tiene la oportunidad de percatarse de esto y al mismo tiempo entrenarlos a ser claros y lógicos.

**Aplicación:** Se construyen estructuras con palos de paleta, se identifica el tipo de fuerza (tensión o compresión) a la que están sometidos sus elementos. Los estudiantes construyen la estructura, el instructor interviene dando sugerencias.

### DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

#### PROPOSITOS:

Al finalizar esta unidad, el alumno:

1) Identificará fuerzas de interacción (acción y reacción) en diferentes situaciones; así como las fuerzas de tensión y compresión en diversas estructuras.

2) Realizará el diagrama de cuerpo libre de cuerpos en interacción.

3) Considerará las fuerzas de apoyo, para cuerpos en contacto, como fuerzas de interacción.

#### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

La tercera ley de Newton puede ser observada en una gran diversidad de situaciones tanto dinámicas (la propulsión a chorro de los cohetes espaciales a través del espacio), como estáticas (la sustentación de una persona sobre el suelo, por ejemplo).

I En las siguientes actividades tu propio cuerpo experimentará las manifestaciones de esta ley. Realiza estas actividades y en cada caso identifica la fuerza que recibes e indica su dirección. Para cada caso, busca la procedencia de esa fuerza.

\* el material enmarcado va dirigido a los alumnos

a) Dirígete al jardín de la escuela y batea una bola. Qué fuerza sientes como resultado de batear?. Qué o quién creés que ejerza esa fuerza?. Por qué aparece?

Los siguientes experimentos se pueden hacer sólo mentalmente:

b) Ve a una playa o a una piscina y experimenta la fuerza que te hace flotar. Qué o quién ejerce esa fuerza?. Por qué aparece?

c) Tira al suelo el aceite de la cocina, párate sobre él, y empuja la estufa hacia adelante. Qué te pasa?. Cómo explicas lo que te pasa?

d) Ve a algún lago, súbete a una lancha y con un remo empuja el muelle. Describe lo que pasa y explicalo.

e) Amarra una cuerda a un automóvil frenado, y jala lo más fuerte que puedas. Qué fuerza experimentas?. A qué la atribuyes?

f) Patea un poste de la calle. Experimentas una fuerza que hace que te arrepientas?. De dónde procede?. A qué la atribuyes?

II Para cada una de las experiencias anteriores haz un dibujo esquemático en el que se muestre las fuerzas que producen la interacción.

III Lista otros ejemplos en los que sientas el efecto de la interacción entre tu cuerpo y algún otro objeto, y realiza un diagrama donde se muestren las fuerzas actuando sobre tu cuerpo y sobre el otro objeto.



## ACTIVIDAD DE INVENCION I

En tu mesa de laboratorio se encuentra un cubo de madera, un dinamómetro y una cubeta con agua:

Pesa el cuerpo de madera con el dinamómetro. Justifica tu elección del peso.

Pésalo nuevamente pero ahora dentro del agua.

Haz un diagrama de las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo para cada situación. (Recuerda el principio de Arquímedes acerca del empuje sobre un cuerpo que flota).

Cuál es la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el agua? Indica su magnitud y dirección.

Cuál es la fuerza que el agua ejerce sobre el cuerpo? Indica su magnitud y dirección.

Considera el dispositivo de la fig. 25, toma la lectura de los dinamómetros a diferentes pesos colgando y explica el resultado.

Estira un clip con dos dinamómetros de la manera indicada en la fig. 26, explica la lectura de los dinamómetros.

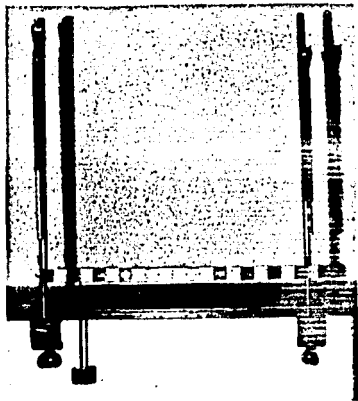


fig. 25

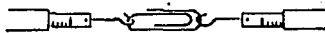


fig. 26

## ACTIVIDAD DE INVENCION II

Los fenómenos presentados en la actividad de exploración son ejemplos de la "Tercera ley del movimiento de Newton" que afirma:

"Si un objeto ejerce una fuerza sobre otro...este ejerce una fuerza de igual magnitud y de dirección opuesta sobre el primero".

Esta ley se abrevia generalmente de la siguiente manera:

"A toda acción corresponde una reacción igual y de sentido contrario".

No importa a cuál fuerza le llamemos acción y a cuál reacción, lo importante es que ambas fuerzas, iguales y contrarias, son inseparables, no pueden existir la una sin la otra. De hecho todas las fuerzas en la naturaleza vienen dadas en parejas pues no es posible ejercer una sola fuerza. (31)

Todas las fuerzas son de interacción y la pareja de interacción nunca actúa sobre el mismo cuerpo. Así si A y B son dos cuerpos que interactúan la situación de las fuerzas de interacción será la representada por la figura 27.

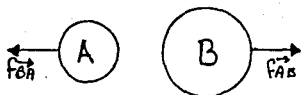


fig. 27

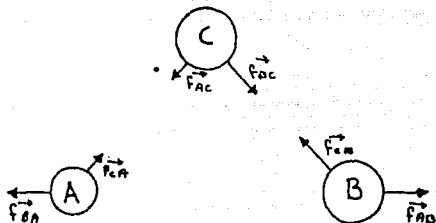


fig. 28

Estas dos fuerzas siempre tendrán magnitudes iguales aun cuando las características de ambos cuerpos sean muy distintas, y en general apuntarán en direcciones contrarias a lo largo de la línea que une los centros de los cuerpos.

En la figura 28 se muestran las fuerzas de interacción entre tres cuerpos.

Es importante recalcar que las parejas de fuerzas de interacción nunca se anulan, pues aunque son fuerzas de igual magnitud, y dirección contraria, son fuerzas que están aplicadas a diferentes cuerpos.

La figura 29 muestra más ejemplos de cuerpos en interacción, dibuje las fuerzas que están actuando sobre cada cuerpo (usa un color diferente para cada pareja de interacción). Diagramas como estos, en los que se ilustran todas las fuerzas que están actuando sobre un cuerpo son llamados "diagramas de cuerpo libre".

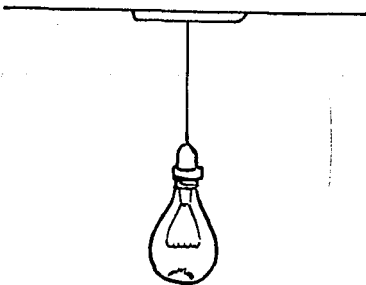
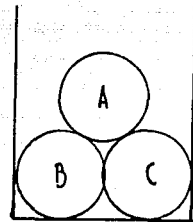
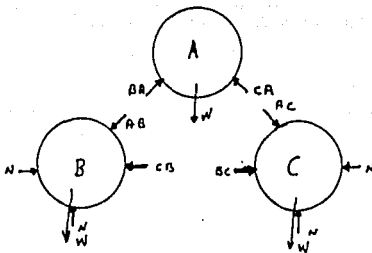
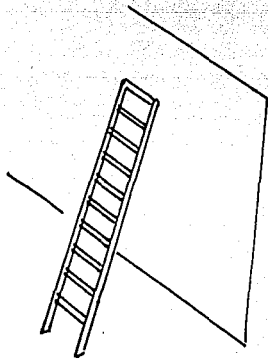
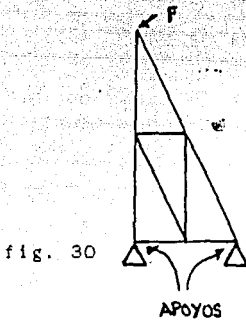
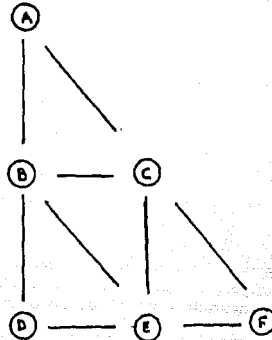


fig. 29

# ACTIVIDAD DE APLICACION



POLIGONO DE FUERZAS NUDO A



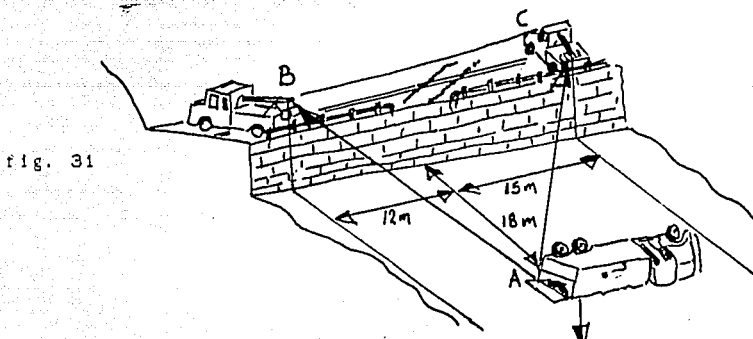
I Arma la estructura indicada en la figura 30. (Puedes usar palos de paleta), e indica qué barras están sometidas a tensión y cuáles a compresión. Une las barras con tornillos de tal manera que puedan girar.

En una armadura, las fuerzas de tensión y compresión son las que actúan sobre las barras que la forman. Estas fuerzas actúan en el sentido longitudinal de cada barra y tratan de deformarlas; las de compresión producen una deformación tratando de acortar la longitud inicial, las de tensión tratan de alargar esa longitud inicial. Para conocer prácticamente si una barra está sujeta a tensión o compresión deberás retirarla de la estructura y si, con las condiciones de carga externa y los apoyos indicados, las uniones de la estructura entre las que estaba colocada esa barra, se alejan (acercan) la barra está sujeta a tensión (compresión).  $\leftarrow \rightarrow$ ,  $(\rightarrow \leftarrow)$

II Ahora haz un diagrama en el que indiques claramente las parejas de fuerzas tanto internas como externas que están actuando en cada elemento de la estructura. Considera las uniones como elementos de la estructura; usa un mismo color para cada pareja de fuerzas y dibuja cada pareja de distinto color.

III Dibuja el polígono de fuerzas a las que está sometido cada nudo de la estructura.

IV Haz el diagrama de cuerpo libre del camión volteado en la figura 31.



V Haz un dibujo que incluya varios cuerpos en interacción (quietos o en movimiento). Dibuja las parejas de fuerzas de interacción, y como antes, usa un mismo color para cada pareja, y pinta cada pareja de distinto color.

## c) Equilibrio rotacional

(momento de una fuerza)

**Exploración:** Se encuentra la relación cualitativa entre fuerza y brazo de palanca. Los estudiantes "juegan" con la balanza aritmética.

**Invencción:** Analizando resultados se formaliza esta relación en un lenguaje matemático al "establecer" tanto la definición de momento de una fuerza, como las condiciones de equilibrio rotacional. El instructor escucha sus comentarios, aclara sus dudas y les ayuda en la interpretación de los resultados.

**Aplicación:** i). Se extiende la condición de equilibrio rotacional al caso de un número mayor de fuerzas. ii). Se aplican las condiciones de equilibrio rotacional a ejercicios numéricos. Es conveniente que a los alumnos se les permita observar los patrones de razonamiento que usa el instructor.

## EQUILIBRIO ROTACIONAL

### PROPOSITOS DE LA UNIDAD:

Al término de esta unidad el alumno deberá estar capacitado para:

- 1) Definir y explicar el momento de una fuerza.
- 2) Aplicar las condiciones de equilibrio rotacional.

### MATERIAL

- Regla graduada
- Pinzas de mesa
- Varilla
- Juego de pesas
- Nuez con espiga

### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

El entusiasmo que conmovió a Arquímedes al descubrir su "regla de la palanca" se refleja en su célebre frase: "Dadme un punto de apoyo y levantaré el globo terráqueo". Una forma de estudiar el momento de una fuerza es haciendo uso de un sistema semejante al que él utilizó, llamado "balanza aritmética". Para tal fin, realiza las siguientes actividades:

1) Con el material indicado anteriormente construye un dispositivo similar al de la "balanza aritmética", es decir, algo semejante a lo que se muestra en la figura 32.

Después de "jugar" con la balanza:

I. Identifica las cantidades físicas que están presentes en el sistema: (ver nota)

III Identifica las variables que pueden ser controladas, es decir, mantenerlas constantes o hacerlas variar.

IV Observas alguna relación entre las variables? Cuál es esa relación?

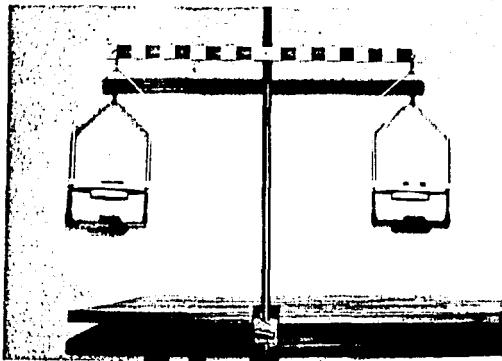


fig. 32

**Nota.** Una cantidad física es todo lo que se puede medir o contar.

# ACTIVIDAD DE INVENCIÓN

En esta parte se te pide realizar lo siguiente:

II. Idea un experimento para coleccionar los datos que creas necesarios para encontrar la relación entre brazo de palanca ( $d$ ) (distancia entre el punto de apoyo y el punto de donde cuelga la pesa) y peso ( $F$ ) (fuerza) en la "balanza". Registra los datos en una tabla del siguiente tipo:

	$F_i$ (grf)	$d_i$ (cm)	$F_d$ (grf)	$d_d$ (cm)
A				
B				
C				
D				
E				
⋮				

tabla I

III. Haz las gráficas que se podrían utilizar para investigar la relación mencionada en la parte II.

IV. Ahora llena una tabla del siguiente tipo:

	$F_i$ (grf)	$d_i$ (cm)
A		
B		
C		
D		
⋮		

tabla II

Cuál sería la regla matemática que cumple la balanza para que exista equilibrio?.



V En general, ¿cuál sería la regla para que no gire un cuerpo?

VI Cómo definirías el "momento de una fuerza"?

VII Con el fin de generalizar el concepto de momento de una fuerza repite el experimento aplicando fuerzas en dirección oblicua. Como se muestra en la fig. 33

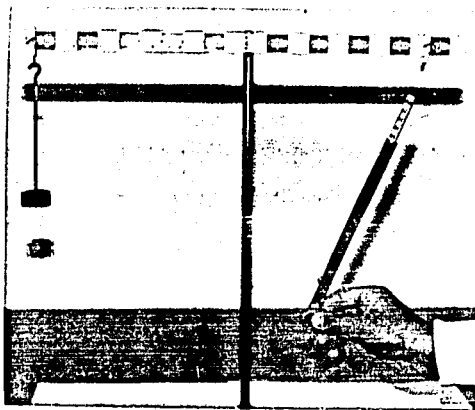


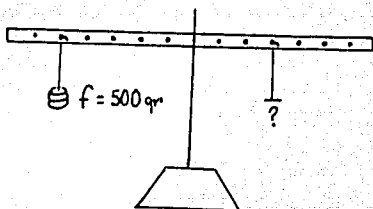
fig. 33

## ACTIVIDAD DE APLICACION

I Tu primera actividad en esta fase del ciclo es repetir el experimento para encontrar la condición que debe cumplirse para que la regla no rote cuando tienes más de dos pesas colgando. Verifica la validez de la ecuación obtenida.

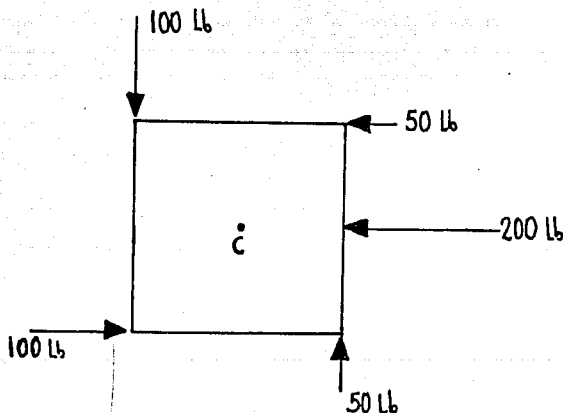
II Predice la fuerza que deberá aplicarse en la situación de la fig. 34

fig. 34



III Averigua si el objeto cuadrado de la figura 35 está en equilibrio rotacional. Prueba tu respuesta. (Considéralo fijo en su centro).

fig. 35



IV Aplica la "regla de la palanca" (relación entre fuerza y brazo de palanca) que descubriste en la parte de invención, a las siguientes situaciones: (En esta parte se pueden resolver problemas numéricos. Ver apéndice).

## O T R A A P L I C A C I O N (fuerzas paralelas)

I Coloca la varilla en posición horizontal. Qué papel crees que juega la espiga de donde esta apoyada la varilla?

II Quita la nuez con espiga y trata de equilibrarla ahora con un dinamómetro. Qué fuerza estaba ejerciendo la espiga?

III Repite el experimento varias veces utilizando más dinamómetros y más cargas y colecta los datos.

IV Cuál es la condición sobre las fuerzas que se debe cumplir para que la regla se mantenga en posición horizontal?

V Cualquier orificio de la regla puede ser considerado como origen para calcular los momentos?

VI Encuentra la fuerza equilibrante, así como su punto de aplicación, del sistema de la figura 36.

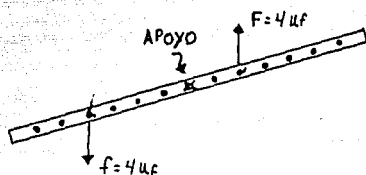


fig. 36

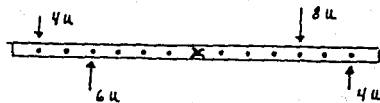


fig. 37

Toma el origen primero en un punto, luego en otro y después en otro. Resuélvelo también analíticamente.

Predice el resultado para equilibrar el sistema de la fig. 37 y confrontalo experimentalmente. Puedes colocar el origen donde gustes

## d) Equilibrio traslacional

**Exploración:** Hasta ahora el alumno había entendido las fuerzas como cantidades abstractas, en este ciclo aprende a medir distintos casos de fuerzas aplicadas a un cuerpo. Los alumnos buscan respuesta a las preguntas comentando entre ellos; el instructor los auxiliará tanto para aclarar el significado de aplicar dos fuerzas en los distintos casos, como para encontrar el valor de las fuerzas resultante y equilibrante.

**Invencción:** En esta fase del ciclo se hace patente la necesidad de la fuerza equilibrante de un sistema de fuerzas así como su relación con la resultante. Se introduce y se generaliza la regla del paralelogramo para cualesquiera fuerzas. Se "descubren" las condiciones de equilibrio traslacional y se formalizan en lenguaje matemático.

**Aplicación:** Se extienden resultados anteriores al caso tridimensional y se resuelven ejercicios numéricos.

## EQUILIBRIO TRASLACIONAL

### PROPOSITOS:

- 1) Que el alumno sume las fuerzas como cantidades vectoriales.
- 2) Que el alumno enuncie las condiciones de equilibrio traslacional y las pueda aplicar.

### MATERIAL

- Mesa de descomposición de fuerzas (circulo graduado)
- Juego de pesas
- 3 poleas
- 1 cartulina
- Hilo

### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

Cuando se aplican simultaneamente a un punto cierto número de fuerzas, se comprueba que pueden, en su efecto, substituirse siempre por una sola fuerza que tenga dirección e intensidad adecuadas. Encontraremos aquí esa fuerza, llamada **resultante**, cuando se conoce cada fuerza por separado. La operación se llama suma de fuerzas.

Con el material listado vas a montar un dispositivo semejante al que diseñó Varignon: Este consiste de un círculo horizontal graduado (ver figura 8); en su centro se anudan tres hilos  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , que se hacen pasar por sendas poleas  $p_1, p_2, p_3$ ,

y en cuyos extremos se cuelgan pesos  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ . De esta manera, y con los valores de  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  adecuados, cada peso  $w_i$  equilibrará a los otros dos. Ahora, con este dispositivo, realiza los siguientes casos de aplicación de fuerzas  $F$  y  $F'$  a un cuerpo: (Puedes usar valores arbitrarios para los pesos)

- i) Dos fuerzas en la misma dirección.
- ii) Dos fuerzas en direcciones opuestas.
- iii) Dos fuerzas formando un ángulo arbitrario.

Para cada caso considera fuerzas: a) de igual magnitud b) de diferente magnitud.

I Cómo medirías esas fuerzas?. Inventa una forma. (ver nota).

II Para cada caso, mide la fuerza equilibrante (E), del sistema. Indica su magnitud y dirección. (ver nota). Busca siempre situaciones de equilibrio, es decir, que el anillo se mantenga siempre centrado.

III Para cada caso, mide la fuerza resultante (R) es decir, la fuerza que aplicada sola, produzca el mismo efecto que las dos fuerzas actuando juntas. Indica su magnitud y dirección. (ver nota). IV Qué relación observas entre la fuerza resultante y la fuerza equilibrante?

**Nota.** Medir no es lo mismo que calcular.

## ACTIVIDAD DE INVENCION

I Aplica diversos valores de fuerzas para llenar una tabla del siguiente tipo:

	$F_1$	$F_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$E$	$R$
$A$							
$B$							
$\vdots$							

Donde  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  son los ángulos entre  $F_1$  y  $F_2$ ,  $F_1$  y  $E$ ,  $E$  y  $F_2$ , respectivamente.  $R$  es la resultante de  $F_1$  y  $F_2$ .

II Haz un diagrama, a escala, para cada pareja de valores, indicando tanto su resultante como su equilibrante.

III Qué condición geométrica cumple la resultante en cada caso?

IV Usando tus conocimientos de Álgebra Vectorial comprueba matemáticamente tus conclusiones de la parte III.

V Cuando podremos decir que un sistema de fuerzas está en equilibrio, es decir, las fuerzas neutralizan mutuamente sus acciones?. Exprésalo también matemáticamente.

II Generaliza tus resultados para sumar un número de fuerzas mayor a dos.

## ACTIVIDAD DE APLICACION

I Repite el experimento utilizando tres o cuatro cuerdas de soporte en lugar de dos, de tal manera de tener un sistema de fuerzas en el espacio.

II En tu mesa de laboratorio encontrarás material necesario para medir la fuerza  $P$  que debe aplicarse al aro para mantener el recipiente en la posición indicada (Ver fig. 38). Resuélvelo también analíticamente.

III La siguiente parte de esta actividad consiste en resolver problemas numéricos. (Ver apéndice)

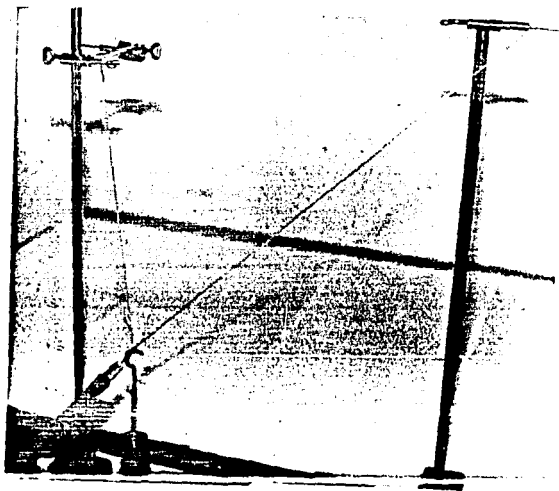


fig. 38

## e) Rozamiento

**Exploración:** Se "descubre" la relación de la fuerza de rozamiento con parámetros tales como: rugosidad de la superficie, fuerza normal al plano, etc.

**Invencción:** Se "inventa" la definición de coeficiente de rozamiento y se formaliza matemáticamente.

**Aplicación:** Se aplica la definición de coeficiente de rozamiento al caso de superficies inclinadas y se resuelven problemas numéricos.

## ROZAMIENTO

### PROPOSITOS:

Al finalizar este ciclo, el alumno estará capacitado para:

- 1) Encontrar el coeficiente de rozamiento de cualquier superficie.
- 2) Resolver problemas que involucran rozamiento.

### MATERIA L

- Bloque de madera
- Papel cartón
- Papel de lija de arena
- Lámina de hierro
- Placa de vidrio
- Dinamómetro
- Hilo
- Juego de pesas

### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

Cuando un cuerpo se mueve o tiende a moverse sobre otro, se pueden observar fuerzas que se oponen a ese movimiento. Estas fuerzas son las llamadas fuerzas de fricción o de rozamiento; de las cuales una parte son de atracción atómica o molecular que se presentan en las áreas en contacto.

La fig. 39 muestra el dispositivo que vas a construir con el material arriba mencionado. El bloque de madera descansa sobre una de las superficies; el dinamómetro se ata al bloque de tal manera que nos indique la fuerza que se aplica a dicho bloque.

Con este diseño, realiza lo siguiente:



I. D1 cómo medirías la fuerza de rozamiento

II. Indica la dirección de la fuerza de rozamiento.

III. Diseña un experimento para investigar las características de la fuerza de rozamiento.

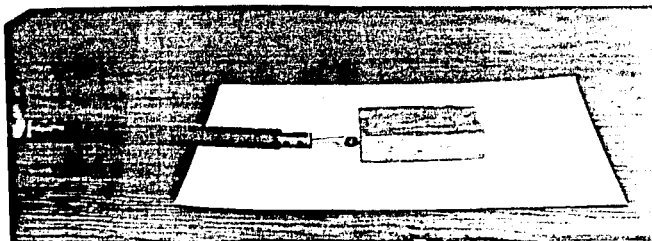


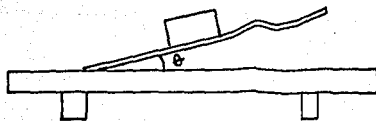
fig. 39

## ACTIVIDAD DE INVENCIÓN

I. ¿Qué gráficas se podrían utilizar para investigar la relación entre fuerza de rozamiento y fuerza normal? (Fuerza de interacción debido al apoyo entre el bloque y el plano).

II. Por medio de la gráfica determina el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie; muestra el método usado para calcularlo.

fig. 40



I Si colocas un bloque en un plano inclinado, (fig. 40) el bloque se deslizará (cuando la inclinación de la tabla sea la apropiada), con movimiento uniforme. Teniendo en cuenta la definición del coeficiente de rozamiento, tus conocimientos sobre descomposición de fuerzas y la geometría del sistema, determina la relación entre el coeficiente de rozamiento y el ángulo .

II Haz una lista de los otros factores que creas influyen en el valor de la fuerza de rozamiento. Investiga otro factor de dicha lista.

III En esta parte de la fase ya pueden resolverse problemas numéricos. (Ver apéndice)

## f) centros de gravedad

**Exploración:** Se "descubre" un método para localizar el centro de gravedad (G) de un cuerpo plano.

**Invencción:** A partir de la definición de momento de una fuerza (en este caso la fuerza de gravedad), se formaliza matemáticamente la localización de la posición del centro de gravedad de un cuerpo.

**Aplicación:** Se extiende el procedimiento para la localización del centro de gravedad de un cuerpo plano al caso de cuerpos en tres dimensiones.

## CENTROS DE GRAVEDAD

**PROPOSITO:** Al término de esta unidad, el alumno:

Localizará la posición del centro de gravedad de diferentes cuerpos tanto en el plano como en el espacio:

## MATERIAL

- 4 dinamómetros
- 4 varillas
- 4 pinzas de mesa
- 4 nueces con espiga
- tabla cuadrada con armellas en las esquinas
- 1 cartulina cuadrículada
- juego de pesas

## ACTIVIDAD DE EXPLORACION

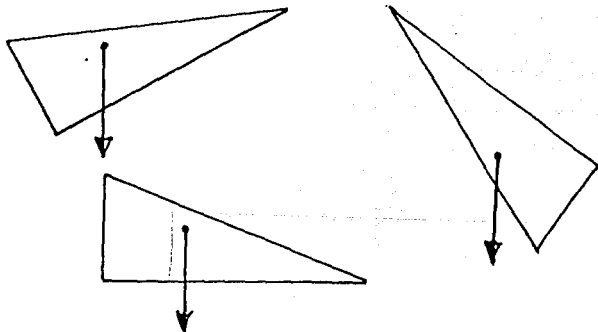


fig. 41

La atracción gravitacional de la Tierra sobre un cuerpo no es simplemente una fuerza ejercida sobre el cuerpo como conjunto; cada pequeño elemento del cuerpo es atraído por la

Tierra, y la fuerza llamada "peso del cuerpo" es, en realidad, la resultante de todas estas pequeñas fuerzas paralelas.

La dirección de la fuerza gravitacional sobre cada elemento de un cuerpo está dirigida verticalmente hacia abajo y, por tanto, la dirección de la resultante es también hacia abajo, independientemente de la orientación del cuerpo. Sin embargo, la línea de acción de la resultante ocupará una posición diferente respecto al cuerpo cuando varíe la posición de éste. (ver fig. 41)

No obstante, se encuentra que, sea cual fuere la orientación del cuerpo, existe siempre un punto fijo por el cual pasan todas estas líneas de acción. Este punto recibe el nombre de **centro de gravedad (G)** del cuerpo; y en este ciclo vas a aprender a localizar su posición, así que realiza las siguientes actividades:

I Haz un arreglo, como el que muestra la fig. 42, de tal manera que la tabla quede siempre horizontal.

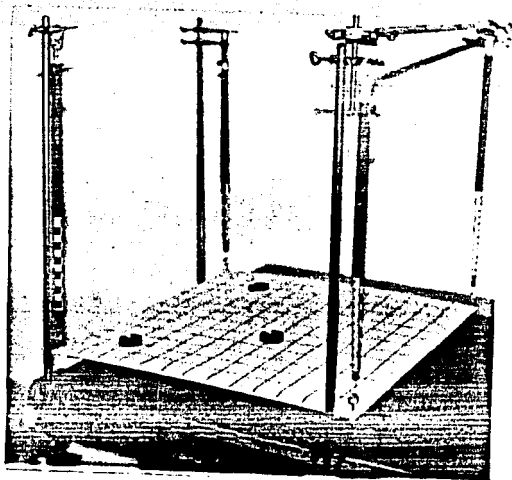


fig. 42

II Utiliza valores de pesas de tu elección y colócalos en los lugares que gustes. Toma la lectura de cada dinamómetro.\*

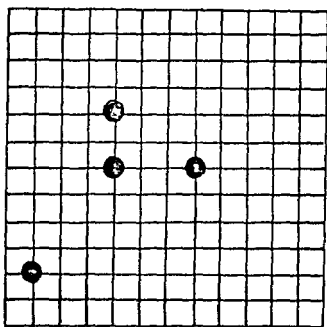
III En qué lugar de la tabla deberán concentrarse todas las pesas para que produzcan el mismo efecto en cada dinamómetro?. Esto equivale a calcular el punto de aplicación de las resultantes de las cuatro fuerzas (conviene tomar de dos en dos).

\* Antes de colocar las pesas, ajusta los dinamómetros para que marquen cero.

# ACTIVIDAD DE INVENCIÓN

I Para la fig. 43 predice las coordenadas del punto donde deberán colocarse todas las pesas juntas; para tal efecto realiza lo siguiente: i) Calcula el momento que produce cada pesa. ii) En qué posición deberán colocarse todas las pesas juntas para producir el mismo momento?. Puedes colocar el origen de coordenadas donde gustes.

III Repite el experimento para 5, 6, 7, ... cuerpos. Y extiende el resultado para encontrar el Centro de Gravedad de un número  $n$  de cuerpos.



● 10 gr

fig. 43

# ACTIVIDAD DE APLICACION

I. Extiende el desarrollo realizado en la parte de invención a cuerpos en tres dimensiones, y encuentra el centro de gravedad de los siguientes cuerpos:

- una pelota
- un lápiz
- una dona
- un pastel

III. La siguiente parte de esta fase consiste en resolver problemas numéricos. (Ver apéndice)

### 3. Resultados y comentarios

He aplicado estos ciclos de aprendizaje a estudiantes de Ingeniería del ITA (Instituto Tecnológico de Apizaco); con la experiencia que he adquirido hago enseguida los comentarios y las sugerencias que considero pertinentes para que quien desee aplicar estos ciclos en un curso de Estática pueda obtener el mayor éxito.

#### TERCERA LEY DE NEWTON

##### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

Con esta actividad se motiva y prepara al estudiante para la fase de invención al pedirle experimentar fuerzas de interacción entre su propio cuerpo y algún otro objeto; esta es la forma más primaria de aprendizaje y también la más concreta. Se le pide además que utilice una representación vectorial para ir formalizando las experiencias en un lenguaje matemático.

##### ACTIVIDAD DE INVENCION

Es conveniente que el cuerpo utilizado sea de madera y flote completamente; así será más fácil llegar a la conclusión: fuerza del cuerpo sobre el agua = fuerza del agua sobre el cuerpo.

Esta actividad da al instructor la oportunidad de discutir ampliamente cada uno de los casos presentados en la fase de exploración; ya que los alumnos están motivados por sus experiencias en esa fase, hacen preguntas y el instructor deberá seguir proporcionando ejemplos -hasta percatarse de que los estudiantes ya saben identificar las fuerzas de "acción y reacción" para diferentes casos- en los que deberá hacerse hincapié en:

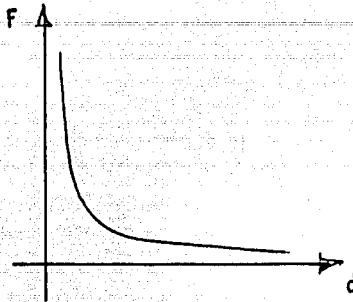
- \* Que las fuerzas en la Naturaleza se presentan en parejas.
- \* Que son fuerzas de interacción.
- \* Que no existe una fuerza aislada.
- \* Que las fuerzas de interacción actúan sobre diferentes cuerpos y por lo tanto nunca se equilibran.
- \* Que son de la misma magnitud.
- \* Que los puntos de contacto y apoyo entre los cuerpos son puntos de interacción, y que producen fuerzas de tensión o compresión.
- \* Que para representar un sistema de fuerzas es importante indicar el punto de aplicación de cada fuerza.

Después será necesario guiar a los estudiantes a elaborar el diagrama de cuerpo libre de las situaciones propuestas en la fig. 29.



alternativas:

fig. 44



De la gráfica se observa que:

$$F \propto 1/d$$

$$F = K (1/d)$$

$$Fd = K$$

K es una constante llamada momento de la fuerza F. Y se representa por:

$$= Fd$$

En la parte VII, los estudiantes descubren fácilmente que:

$$F_i d_i = F_d d_d$$

El instructor, haciendo preguntas, los guiará a que "descubran" experimentalmente, que  $F d = F r$  (Ver la fig. 45)

Donde r es la distancia del eje a la línea de acción de la fuerza F.

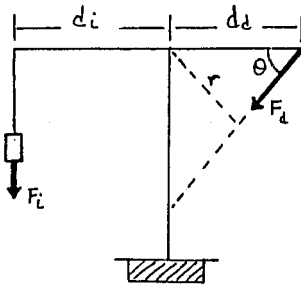


fig. 45

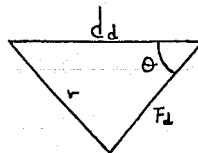


fig. 46

## ACTIVIDAD DE APLICACION

En esta actividad el instructor ayudará a los alumnos a efectuar un diagrama como el que se indica en la fig. 30 en donde se le presenta una buena oportunidad para corroborar si han entendido tres cosas fundamentalmente: i) Que la acción y la reacción nunca son sobre el mismo cuerpo. ii) Que ambas tienen la misma magnitud. iii) Que el estudiante esté tomando en cuenta la "reacción" debida a los apoyos.

Los resultados al terminar esta fase son en verdad sorprendentes: en muchos casos, lo que aparentemente ya quedó bien comprendido, no es así, los alumnos siguen cometiendo los mismos errores:

- \* Dibujan las fuerzas de interacción sobre un mismo cuerpo.
- \* Algunos dibujan las fuerzas en los apoyos confundiendo fuerzas de compresión con fuerzas de tensión.

Si este fuera el caso deberá seguirse ejemplificando e incluso tal vez, repetir la fase de invención. Con el diagrama de la estructura, y hasta conseguir que sus uniones estén en equilibrio se propiciará el proceso de auto-regulación en los estudiantes.

### EQUILIBRIO ROTACIONAL momento de una fuerza

## ACTIVIDAD DE EXPLORACION

El estudiante descubre que existe una relación inversamente proporcional entre carga y brazo de palanca. En este momento, el instructor ya puede asignar símbolos a las variables.

Me parecen interesantes las respuestas de los estudiantes a la pregunta: Qué cantidades están relacionadas? Como es esta relación?, así que enseguida menciono algunas de las más típicas: (32)

- "Si ponemos pesos iguales observaremos que estará en equilibrio y si ponemos diferentes pesos observaremos que el brazo de la balanza donde existe mayor peso se encontrará en desequilibrio".

- "La relación es que a menos distancia es mayor el peso".

- "1o: La varilla con la regla puede estar balanceada si la varilla se apoya a la mitad de la regla. 2o: Las pesas con la regla estarán en equilibrio cuando las pesas sean de igual peso o estén en alguna posición de la regla con diferente peso pero en diferente posición sobre la regla. 3o: La regla graduada con la posición de las pesas. Aquí habrá diferentes posiciones de las

pesas, diferentes pesos pero estará en equilibrio".

- "Equilibrio peso-peso: Es cuando se tiene igual peso en cada lado. Equilibrio distancia-distancia: debe tener la misma distancia de un lado como del otro".

- "Las pesas, ya que tienen el mismo peso. Y el brazo de la balanza, ya que su punto de apoyo se encuentra exactamente en el centro de la varilla y existe la misma longitud tanto de un lado como del otro. Por lo tanto si se colocan las pesas de igual peso, la balanza se encuentra en equilibrio".

- La distancia que hay entre el punto de apoyo de la regla hacia la izquierda es igual a la distancia del lado derecho, en los cuales, en cada extremo se sitúa un peso de la misma masa y peso; y es en este caso, cuando existe equilibrio en la balanza. Cuando se hacen ciertas modificaciones, ya sea en el peso de las pesas, ya en el punto de apoyo (punto medio) de la regla graduada o en la distancia a la que se coloquen las pesas con respecto al punto medio, existirá un respectivo descontrol en el equilibrio de la balanza".

- "La longitud de la balanza es directamente proporcional al peso".

- "Mientras se tiene la misma distancia, entre brazos y peso, hay un equilibrio pero al variar la distancia de un brazo o el peso hay un desequilibrio".

- "Las pesas, a dos puntos iguales (distancia entre las balanzas) es igual a pesas iguales. Si la distancia de una balanza es más corta, más peso necesita para estar en equilibrio".

## ACTIVIDAD DE INVENCION

En esta actividad se conduce al alumno, con la guía del instructor, a "inventar" la definición de momento (torca) de una fuerza:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

El experimento a diseñar puede ser como se ilustra en la fig. 32, utilizando la balanza de Arquímedes, mantener un lado invariable; y en el otro lado, variar  $F$  y medir  $d$  en el equilibrio.

La gráfica adecuada es la mostrada en la fig. 44

Será necesaria la intervención continua del instructor a fin de guiar a los estudiantes para que no se pierdan en el análisis de los datos.

El profesor deberá ayudar al estudiante en la obtención de la definición de momento haciendo preguntas y sugiriendo

En este punto ya se encuentra el instructor en posibilidad de introducir el momento en su forma vectorial:

Como se observa en la fig. 46:

$$r = d \operatorname{sen} \theta$$

$$\vec{\tau} = F d \operatorname{sen} \theta$$

pero  $F d \operatorname{sen} \theta$  por definición es el producto vectorial de  $\vec{F}$  y  $\vec{d}$ , de donde:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{o} \quad \vec{\tau} = -\vec{F} \times \vec{r}$$

Aquí el instructor tendrá la oportunidad de hablar acerca de la convención de signos del momento de una fuerza, siempre haciendo referencia a la balanza.

Se sugiere al instructor hacer hincapié en el rango de validez de la forma escalar del momento de una fuerza: es decir, deberá mencionar que en este caso, la fuerza y el brazo de palanca deben ser perpendiculares entre sí.

Los ejercicios de colocar pesos y medir distancias en la parte IV, deberán continuar hasta que los alumnos "descubran":

$$F_i d_i = F_d d_d$$

Que el momento de la carga del lado izquierdo de la balanza deberá ser igual al momento producido por la carga del lado derecho.

Matemáticamente:  $\tau$  (derecho) =  $\tau$  (izquierdo)

es decir:  $\tau$  (derecho) +  $\tau$  (izquierdo) = 0  
(condición de equilibrio rotacional)

Es importante hacer notar a los alumnos que si se aplica a la varilla, inicialmente en posición horizontal, un momento positivo, digamos  $(+2)(+2)=+4$ , girará en un cierto sentido: +. Si en cambio se aplicara únicamente un momento negativo, digamos  $(-4)(+1)=-4$ , girará en sentido opuesto:

## ACTIVIDAD DE APLICACION

En esta actividad se extiende la definición de momento de una fuerza al caso de mayor número de fuerzas aplicadas (pesas colgando); de manera que se obtendrá:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_n = 0$$

(condición de equilibrio rotacional)

La segunda parte de esta fase da la oportunidad al instructor de enseñar al estudiante a asociar el brazo de palanca

de una fuerza en cualquier situación, con precisamente el brazo de la balanza, (ver problemas característicos pg. 19). Se sugiere al instructor presentar variados ejemplos para identificar este brazo de palanca; lo cual tomará tiempo.

La cuarta parte de esta fase da la oportunidad al instructor de generar una discusión acerca del concepto de "equilibrio"; deberá dar ejemplos de cuerpos en equilibrio (quietos y en movimiento) (ver apéndice), así como recalcar que la condición de equilibrio rotacional deberá generalizarse a tres dimensiones:

$$\begin{aligned}\sum \tau_x &= 0 && \text{(suma de momentos a lo largo del eje X)} \\ \sum \tau_y &= 0 && \text{(suma de momentos a lo largo del eje Y)} \\ \sum \tau_z &= 0 && \text{(suma de momentos a lo largo del eje Z)}\end{aligned}$$

En este punto el profesor podrá dar ejemplos en los cuales se requiera localizar el brazo de palanca de una fuerza; (ver apéndice), y se deberán discutir casos en los que se haya presentado mayor dificultad.

Se sugiere que desde un principio el instructor presente el concepto de momento de una fuerza como una cantidad vectorial.

## EQUILIBRIO TRASLACIONAL

### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

Se estimula la creatividad del estudiante pidiéndole que aplique fuerzas y mida la fuerza resultante.

La mesa de descomposición de fuerzas es precisamente el círculo graduado utilizado por Varignon. (Ver el capítulo de Historia de la Estática pg. 16); el "cuerpo" en estudio puede ser un anillo que se coloca en el centro del círculo. (ver fig. 8).

El estudiante observa las diferentes situaciones de equilibrio y reconoce la necesidad de introducir la fuerza equilibrante.

### ACTIVIDAD DE INVENCION

Durante su actividad el estudiante deberá identificar la equilibrante del sistema, medirla y de ahí inferir el valor de la resultante.

Deberá dibujar en papel el paralelogramo formado por su sistema de fuerzas, y la dirección de la diagonal del paralelogramo así formado deberá coincidir con la dirección de la equilibrante de su sistema de fuerzas.

El comprobar la regla del paralelogramo para un sistema

de fuerzas ayuda al estudiante a considerar a las fuerzas como cantidades vectoriales, es decir, a que entiendan que las fuerzas no se suman de acuerdo a las leyes ordinarias del Álgebra.

El instructor, haciendo preguntas conducir al alumno a concluir que:

$$\sum \vec{F} = 0$$

y de ahí inferir:

$$\sum F_x = 0$$

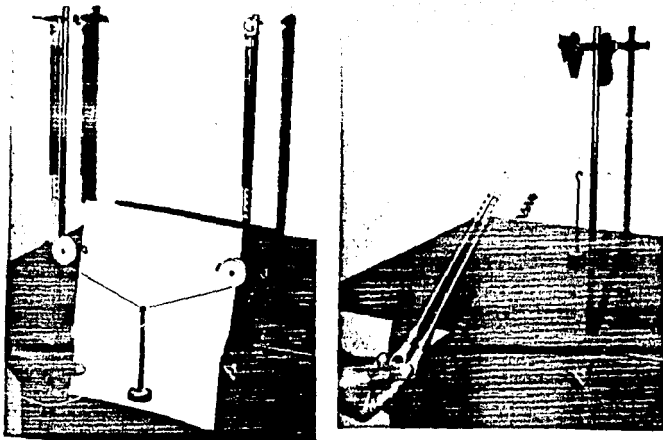
$$\sum F_y = 0$$

Se sugiere al instructor hacer el comentario acerca del equilibrio de fuerzas, incluso cuando no están aplicadas al mismo punto. Y de ahí hablar acerca de la clasificación de las fuerzas en paralelas y concurrentes. También es recomendable dar ejemplos de sistemas de fuerzas en equilibrio, incluyendo entre ellas el sistema de fuerzas paralelas que actúa en la balanza.

En este punto ya podrá el instructor hablar acerca de la "descomposición de fuerzas", es decir, del hecho de cómo buscar otras fuerzas, situadas en un mismo plano o no, que por su efecto conjunto sean equivalentes a la propuesta.

A gusto del instructor, y dependiendo del material con el cual se cuente en el laboratorio, en las actividades de este ciclo podrá emplearse la mesa de descomposición de fuerzas de Varignon como se sugirió anteriormente, o los dispositivos mostrados en las figs. 47.

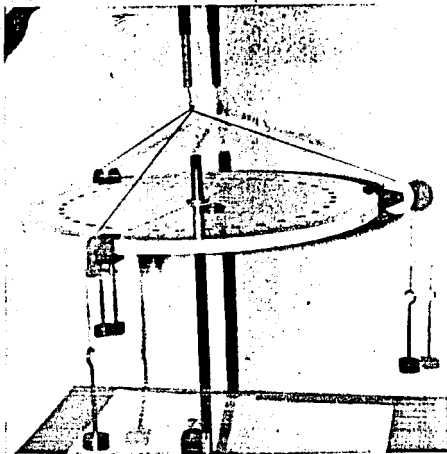
fig. 47



## ACTIVIDAD DE APLICACION

Aquí nos encontramos, los instructores, con una buena oportunidad de resolver uno de los principales problemas que se suscitan al enseñar Estática: en la parte de sistemas de fuerzas en el espacio. (ver problemas característicos pg. 24). Para esta actividad habrá de montar el dispositivo mostrado en la fig. 48.

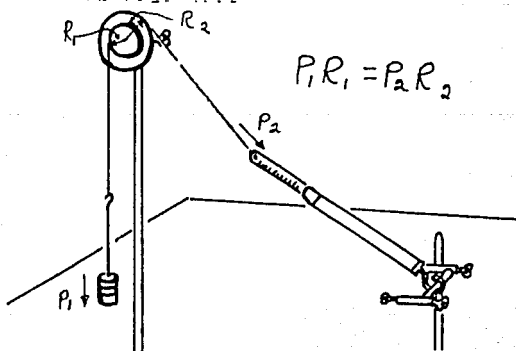
fig. 48



Aquí se requerirá de la aplicación de buena parte de los conocimientos de Álgebra Vectorial. (Ver pgs. 46 a 55).

Los ejemplos de la polea y el torno, podrán, a juicio del instructor, discutirse en clase o ser agregados como una actividad más de esta fase, que también a juicio del instructor, serán vistos en forma teórica y/o en el laboratorio. En los cuales se observa que, (ver la fig. 49):

fig. 49



donde  $P_1$  y  $P_2$  son las fuerzas aplicadas y  $R_2$  y  $R_1$  son los radios mayor y menor de la polea, respectivamente.

El instructor podrá ahora generar una discusión de la diferencia al usar objetos y no partículas.

## ROZAMIENTO

### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

El experimento que se puede utilizar se muestra en la fig. 39.

Con el dinamómetro se mide  $F$ . (33) Del diagrama de cuerpo libre y de las condiciones de equilibrio, se tiene:

$$F = f$$

$$N = W$$

El estudiante, al explorar, observa que la fuerza de rozamiento es una fuerza que se opone al movimiento y que está en función directa de la rugosidad de la superficie.

También encuentra que existe una relación directa entre la fuerza de rozamiento y el peso del cuerpo.

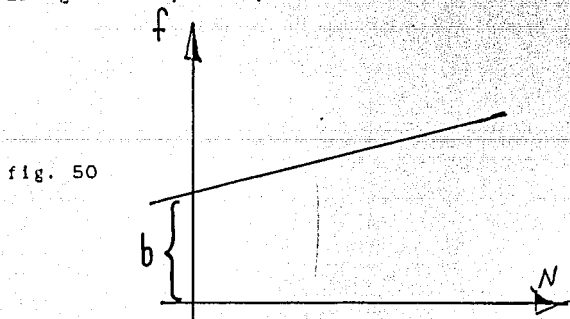
### ACTIVIDAD DE INVENCION

El instructor tendrá la oportunidad de asignar símbolos y nombres comunes a las variables que los estudiantes exploraron.

Dependiendo de la habilidad del estudiante, el instructor deberá conducirlo a la obtención de la definición de la fuerza de rozamiento.

En esta fase del ciclo de aprendizaje se generalizan los resultados obtenidos en la fase de exploración.

La gráfica que se puede utilizar se muestra en la figura 50.



De la ecuación de la línea recta:

$$Y = mX + b$$



Se tiene:

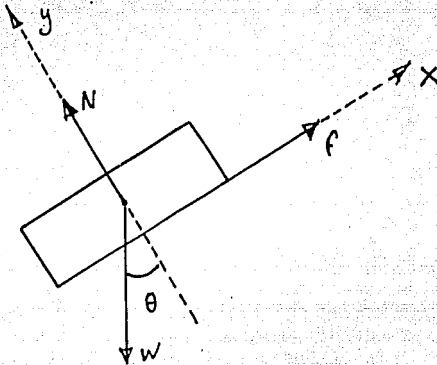
$$f = \mu N$$

Cuya pendiente es precisamente el coeficiente de rozamiento, denotado por:  $\mu$ .

### ACTIVIDAD DE APLICACION

En la parte I se generalizan y aplican los resultados de la fase de invención. Y el análisis que deberá hacerse es el siguiente:

fig. 51



Del diagrama del cuerpo libre que se ilustra en la figura 51 se tiene:

$$N - W \cos \theta = 0 \dots (1)$$

$$f - W \sin \theta = 0 \dots (2)$$

(2) implica:

$$\mu N - W \sin \theta = 0$$

(1) implica:

$$\mu W \cos \theta - W \sin \theta = 0$$

Entonces:

$$\mu W \cos \theta = W \sin \theta$$

$$\mu = W \sin \theta / W \cos \theta$$

$$\mu = \sin \theta / \cos \theta$$

$$\mu = \tan \theta \quad (\text{en el equilibrio}).$$

En la parte II, en la investigación de otro factor de la fuerza de rozamiento, se aplica el método aprendido en las fases anteriores.

## CENTROS DE GRAVEDAD

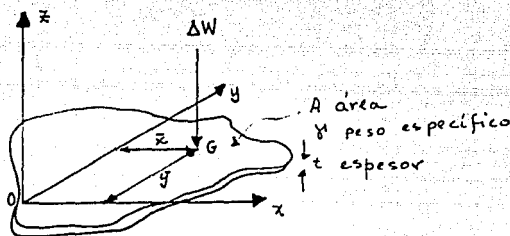
### ACTIVIDAD DE EXPLORACION

En esta parte los estudiantes descubren y asimilan la existencia del centro de gravedad de los cuerpos, es decir, la existencia de un punto en el espacio en el cual se podría concentrar la masa del cuerpo o sistema de tal manera que este nuevo sistema es equivalente, en su efecto sobre los dinamómetros, al sistema original.

### ACTIVIDAD DE INVENCION

El instructor, haciendo preguntas y sugiriendo alternativas, orientará al estudiante a realizar el siguiente desarrollo: (Ver figs. 52)

fig. 52



$$\begin{aligned} \sum F_z: & W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n \\ \sum \tau_x: & YW = Y_1 \Delta W_1 + Y_2 \Delta W_2 + \dots + Y_n \Delta W_n \\ \sum \tau_y: & XW = X_1 \Delta W + X_2 \Delta W + \dots + X_n \Delta W_n \end{aligned}$$

Pero:  $W = \gamma t A$ ,

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum \tau_x: & YA = Y_1 \Delta A_1 + Y_2 \Delta A_2 + \dots + Y_n \Delta A_n \\ \sum \tau_y: & XA = X_1 \Delta A_1 + X_2 \Delta A_2 + \dots + X_n \Delta A_n \end{aligned}$$

Y en el límite:

$$YW = YdW,$$

$$XW = XdW$$

$$YA = \int YdA,$$

$$XA = \int XdW$$

Donde  $X$  e  $Y$  son las coordenadas del centro de gravedad.

De esta manera, se generalizan las observaciones de la actividad de exploración; como también se obtiene una herramienta matemática para la localización del centro de gravedad de cualquier cuerpo plano.

### ACTIVIDAD DE APLICACION

En este punto ya se encuentran los alumnos en condición de desarrollar un método para localizar el centro de gravedad de cuerpos volumétricos. Bastará hacer una analogía con el caso de cuerpos planos, considerando ahora las tres dimensiones, el instructor deberá guiarlos a hacer el siguiente desarrollo: (Ver fig. 53).

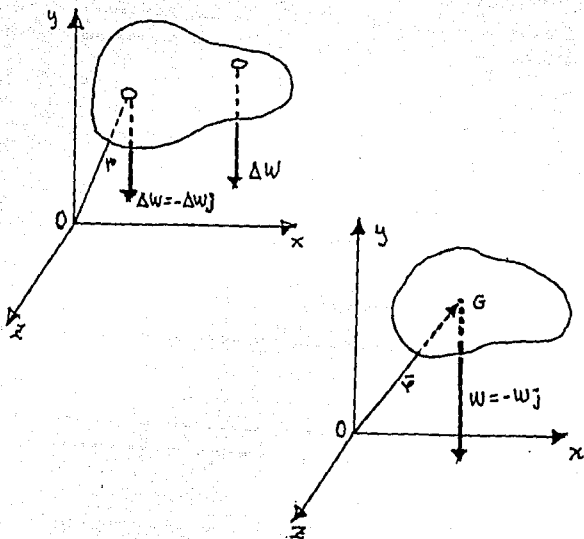


fig. 53

$$\sum \vec{F}: \quad -W\hat{j} = w_1\hat{j} + w_2\hat{j} + \dots + w_n\hat{j}$$

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}: \quad \vec{R} \times (-W\hat{j}) = \vec{r}_1 \times w_1\hat{j} + \dots + \vec{r}_n \times w_n\hat{j}$$

Donde:  $\vec{R}$  es el vector de posición de las coordenadas del centro de gravedad (G).

$\vec{r}_i$  es cada uno de los vectores de posición de cada elemento  $w_i$ .

Aumentando el número de elementos y disminuyendo simultáneamente el tamaño de cada elemento, obtenemos, en el límite;

$$W = \int dw, \quad \vec{R}W = \int \vec{r} dw$$

Pero:  $dw = \gamma dv$ ,  $W = \gamma V$

Donde:  $\gamma$  es el peso específico del material.

$$\text{Entonces: } \int \vec{R}V = \int \vec{r}dv$$

O en forma escalar:

$$XV = \int x dv$$

$$YV = \int y dv$$

$$ZV = \int z dv$$

El punto de coordenadas  $(X,Y,Z)$  es el centroide C del cuerpo.

También en esta fase es conveniente dar ejemplos análogos al ejemplo en dos dimensiones.

#### 4. Conclusiones

Si bien el tiempo dispuesto y el material de laboratorio se mostraron insuficientes para realizar una estricta exploración (intervención), los cuestionarios y las actividades que expuse anteriormente demostraron una gran eficacia en el proceso de aprendizaje.

A través de una encuesta, cuyos resultados expondré enseguida es posible valorar los avances de los estudiantes en la adquisición de los conceptos a través de esta técnica de enseñanza.

Sólo a partir de una perspectiva positivista de la evaluación en la que el proceso de enseñanza-aprendizaje se concibe como el de una máquina en la que introduciendo determinados ingredientes se obtienen resultados medibles, se puede pensar que los patrones de aprendizaje sean a su vez medibles. Los resultados de esta experiencia educativa, a través de los comentarios de los alumnos y desde una perspectiva menos ortodoxa muestran que los estudiantes adquirieron de manera activa, los conceptos fundamentales que tiene por objeto el curso. Esto resulta más significativo que una aséptica cifra.

Desde este punto de vista, la medición del IQ antes y después de la experiencia es, desde luego irrelevante. Los resultados muestran a un grupo de estudiantes que lograron romper con el hábito de concebirse como receptáculos del "saber" del instructor y que ahora manifiestan una actitud marcadamente exploratoria; una capacidad crítica. En fin, una actitud científica.

Esto quedará de manifiesto enseguida.

-El hecho de que los estudiantes hallan sido capaces de observar y comentar, con sus propias palabras, enunciados comparables con los enunciados de Arquímedes, "el padre de la Estática", sobre la relación entre peso y distancia en la balanza.

-El que el 100% absoluto de alumnos realmente si descubrieron la regla del paralelogramo: al aplicar dos fuerzas formando un ángulo arbitrario: "maestra, 5 n. más 7 n. no da 12 n. Por qué?".

-Y el comentario: "Ahora sé que una fuerza se puede medir".

Haciendo una evaluación de la forma de instrucción por Ciclos de Aprendizaje en las Áreas cognocitiva, emotiva, y de aplicación, podemos observar las siguientes características:

Con la enseñanza en forma de ciclos de aprendizaje, el alumno:

- Investiga por cuenta propia
- Adquiere confianza en sí mismo
- Está más consciente de su propio conocimiento
- Adquiere mayor responsabilidad
- Aprende a desenvolverse por sí mismo
- Se encuentra más motivado a trabajar
- Obtiene mayor satisfacción al sentir que "descubre"
- Observa detalles que con otra forma de instrucción no lograría observar

Con el ciclo de aprendizaje:

- La parte matemática adquiere su categoría de herramienta ante los estudiantes
- La evaluación resulta ser más objetiva: al calificar desde diferentes puntos de vista cada unidad a estudiar
- Resulta divertida la variedad de actividades.

El ciclo de aprendizaje:

- Promueve el compañerismo
- Permite que el alumno se desenvuelva con mayor libertad
- Fomenta la creatividad del educando
- Permite la aplicación inmediata de los conocimientos adquiridos.

El resultado más importante se observa en las respuestas de los alumnos a la pregunta: ¿Qué es una fuerza?

Algunas de las respuestas de alumnos que cursaron la materia con la técnica de Ciclos de Aprendizaje:

- "Fuerza es una manifestación de las interacciones."
- "Es un ente matemático."
- "Fuerza son tensiones y compresiones."
- "Fuerzas son interacciones."
- "Es interacción entre cuerpos."
- "Es el producto de la acción."
- "Es el producto de la acción de los cuerpos."
- "No lo puedo definir pero ahora sé que una fuerza se puede medir."
- "Fuerza es la forma en la que los cuerpos actúan entre sí."
- "/.../ aquella que tiende a cambiar el estado de movimiento de una partícula"
- "Es la acción que hace cambiar un estado de movimiento cualquiera /.../"
- "Fuerza es el efecto de una acción que puede ser en contacto o a distancia, en cuerpos en reposo o en movimiento."
- "Es la acción que existe entre un cuerpo y otro."
- "Es un efecto que experimentan dos cuerpos en contacto."
- "Es la acción a que se le somete o se le aplica a un cuerpo."
- "Es una acción a la cual un cuerpo o objeto está sometido."
- "Es un agente externo o una acción que se manifiesta"

sobre un cuerpo tratando de hacer que éste sufra un cambio de posición (o movimiento), también pueden existir fuerzas internas dentro de un cuerpo /.../"

- "Es lo que ocasiona que una partícula se ponga en movimiento o altere el que está realizando."

- "Es la forma en la que se manifiesta el efecto de un cuerpo sobre otro."

- "Es el hecho de que dos cuerpos estén en contacto (uno apoyado sobre otro) o actuando a distancia uno sobre otro."

- "Es la manifestación de la acción de un cuerpo sobre otro."

- "Es la representación de que dos cuerpos estén en interacción."

- "Es la interacción de los cuerpos."

- "Fuerza es una forma Matemática de representar los efectos de un cuerpo sobre otro."

En estas respuestas se observa que el concepto de fuerza ya no se encuentra confundido con el concepto de energía.

Las respuestas a esta misma pregunta realizadas por alumnos que cursaron la materia con la técnica tradicional se muestran enseguida:

- "Es una tensión o compresión de algún objeto."

- "Es un esfuerzo que se efectúa para mantener en equilibrio un cuerpo."

- "Es lo que hace que se muevan algunos objetos."

- "Es todo aquello que puede ejercer una acción."

- "Es una carga que se aplica en un punto."

- "Es la acción que se ejerce sobre un cuerpo para que cambie de lugar."

- "Es una magnitud vectorial que puede producir diferentes reacciones al cuerpo o partícula al que se aplique."

- "Es una cantidad vectorial que tiene dirección sentido y magnitud."

- "La energía que presenta un cuerpo cuando se encuentra a presión o compresión."

- "Es aquella que al aplicarse produce un movimiento en el cuerpo que se está aplicando y según la cantidad de la fuerza aplicada es el tamaño del movimiento que tiene una dirección."

- "Para que exista una fuerza debe haber un empuje a un cuerpo esta puede ser de atracción o retroceso."

- "Es aquella que se le aplica a un cuerpo el cual posee una cierta resistencia al aplicarle la fuerza, dependiendo de la fuerza aplicada."

- "Es una presión o tensión de un cuerpo por medio de algún otro para realizarle un movimiento."

- "Una fuerza es el esfuerzo que se realiza al pasar de un punto a otro cualquier objeto o cosa."

- "Es un esfuerzo que se realiza al realizar algo y en donde vamos a encontrar dos tipos de esfuerzos diferentes/.../"

- "Es la aplicación de algún esfuerzo para mover cierto objeto a determinada distancia, de acuerdo a la fuerza aplicada."

Aunque en realidad la evaluación de lo aprendido con un

ciclo de aprendizaje resulta ser la fase misma de aplicación, la calificación asignada al alumno será más objetiva ya que corresponderá no sólo al hecho de si pudo resolver, en determinado instante, tal situación, o si no tuvo errores algebraicos, etc., ahora se califica el trabajo en casa, en el aula y en el laboratorio. Se califica tanto el trabajo desarrollado en equipo como en forma individual, se califica tanto lo aprendido como la habilidad adquirida para resolver determinadas situaciones.

Resumiendo: Los ciclos de aprendizaje ayudan a mejorar los patrones de razonamiento de los alumnos, motivan al alumno, lo enfrentan a situaciones auto-reguladoras, disminuyen la pasividad del alumno en clase; los estudiantes llegan a clase con una mentalidad abierta.

Pero no podemos esperar que todo esto se logre con aplicar un solo ciclo de aprendizaje. Al principio el alumno se enfrentará ante una forma nueva de enseñanza, diferente de la tradicional, esto es, se encuentra ante un cambio y todo cambio requiere tiempo para la adaptación. Por esto inicialmente se presenta en los alumnos un aparente retroceso debido al descontrol que sufren al encontrarse "solos" ante su aprendizaje; pronto se acostumbran, pero el inicio es difícil; por primera vez presentarán una actitud activa y eso ayuda, la siguiente vez será más fácil. Los beneficios del ciclo de aprendizaje se tendrán únicamente al haber sido aplicados sistemáticamente una y otra vez. Es más, no se verán los resultados del enorme beneficio del ciclo de aprendizaje después de un sólo curso, en el que se pueden tener cinco o seis temas en forma de ciclos de aprendizaje.

La forma de aplicar los ciclos también es un factor muy importante: Una mala aplicación puede conducir a un fracaso seguro; una atinada aplicación conducirá al éxito. Sólo se puede garantizar una buena aplicación después de haber entendido perfectamente bien las ideas piagetianas y el concepto de ciclo de aprendizaje, así como el concepto de auto-regulación.

Se deberá ir dosificando lo que se "da", se dice, se enseña a los alumnos observando su adquisición de conocimientos, y su razonamiento. Esto es, se deberá tener cuidado de no "darles" más ni menos material del necesario para que puedan dar el siguiente paso, de lo contrario no se logrará el proceso de auto-regulación. Con la práctica, el instructor generará una intuición que le permita saber qué decir a los alumnos y cómo decirlo.

Lo ideal sería que la forma de enseñanza por ciclos de aprendizaje se pudiera establecer desde la enseñanza Secundaria o la Primaria, en donde el alumno aún no está viciado por las formas tradicionales.

La mayor ventaja que yo percibo de un ciclo de aprendizaje es que no se olvidan los conocimientos adquiridos y paulatinamente se aprenderá a aplicar estos conocimientos a



Planear un tema en forma de ciclo de aprendizaje no es sencillo; no es nada fácil elegir las actividades a realizar en cada fase del ciclo; también para el instructor es una tarea que cuesta y lleva tiempo, pero el esfuerzo se ve compensado al observar los resultados en la evaluación de lo aprendido y cuando se vea al alumno más capaz para usar sus manos y sus propias palabras. La ganancia es mayor cuando el alumno se expresa "me gusta la materia"; el que algo les guste ya es una gran ventaja para seguir aprendiendo.

Una ventaja más: ninguna estrategia de enseñanza logra mayor interacción entre el alumno y el profesor que el ciclo de aprendizaje. La interacción entre el que enseña y el que aprende favorece que el segundo tenga un modelo a la mano al cual seguir para habilitar su propio razonamiento. Cuando el alumno observa cómo se conduce el instructor en su razonamiento aprende también a razonar.

Otro resultado importante que se obtiene es el cambio en la concepción de fuerza: dejan de confundir fuerza con el concepto de energía.

El resultado más importante obtenido con esta forma de instrucción es la completa asimilación del Método Científico de Investigación. Sin memorizar una serie de pasos, sin realizar un experimento como siguiendo una receta de cocina, el estudiante adquiere la formación necesaria para investigar.

Un inconveniente que no se contempla en la enseñanza por ciclos de aprendizaje es el hecho de que los estudiantes ya traen cierta información desde el bachillerato (la ventaja es que la mayoría ya lo olvidó). A qué se reduce la fase de exploración de, digamos, el ciclo de "Equilibrio Rotacional" si ya saben que "el momento de una fuerza es igual a la fuerza multiplicada por la distancia"?. Más grave aún es la situación de los estudiantes repetidores de la materia; no sólo tienen cierta información que impide el éxito de la fase de exploración (y por consiguiente de las fases siguientes), sino además una rigidez que les dificulta la adaptación a la nueva forma de instrucción.

Estoy presentando una técnica de enseñanza con la cual el instructor no irá al salón de clase a "depositar" conocimientos, sino que dejará a los polluelos "solos" en su aprendizaje cuando lo considere conveniente. Esto puede ocasionar una imagen deteriorada del instructor ante algunos alumnos cuyas observaciones fueron las siguientes: "Requerimos mejor preparación de clases/ Que explique el procedimiento/ Que dé apuntes y varios problemas/ Que no deje pendientes las dudas/ Que los alumnos no hagamos su trabajo/ Deja muchas actividades con muy poco tiempo/ Es un catedrático insuficiente en la materia/ No explica bien las clases/ Debería tomar un curso sobre la materia, puesto que tiene muchas lagunas sobre el tema". Algún profesor opinó, después de leer las actividades de laboratorio y su correspondiente justificación: "Será bueno que les des la

teoría antes de llevarlos al laboratorio" (!!!).

Cambiar un esquema de aprendizaje no es fácil para nadie. Siempre se tiende a continuar por el camino conocido, de cuyas bondades estamos convencidos y cuyos defectos no nos parecen tan amenazadores como un cambio radical en la totalidad del proceso, que además implica dejar atrás los viejos hábitos de recepción pasiva del conocimiento.

Concluyo algo muy importante: la peor forma de dirigir el aprendizaje de una materia, es utilizando una sola técnica de enseñanza, mientras más técnicas o estrategias se utilicen se tendrán mejores resultados. Esto se hará tomando un poco de una técnica y otro tanto de otra e integrando todo de la manera más idónea de acuerdo al medio en que nos encontremos; es en este sentido en el que el ciclo de aprendizaje es una técnica versátil.

Elaborar y aplicar un ciclo de aprendizaje es una tarea emocionante. La interacción entre instructor-alumno y alumno-alumno es mucho mayor; se transmiten conocimientos, experiencias y afectos unos a otros. El aprendizaje es más espontáneo y el ambiente más agradable.

#### 5. Ventajas de un curso de Estática para Físicos

Para terminar me gustaría ahora hablar de las ventajas de tomar un curso de Estática antes de estudiar Dinámica.

Los acontecimientos históricos se van sucediendo de acuerdo al desarrollo tecnológico de la humanidad; justo en el momento en que la humanidad se encuentra preparada para un nuevo descubrimiento, es cuando acontece. Esta preparación humana se tiene tanto en tecnología como en desarrollo intelectual. Por qué no entonces seguir el modelo histórico de desarrollo de la Mecánica y, como sucedió, considerar primero los descubrimientos estáticos y posteriormente los relacionados con la Dinámica? No se descubrieron conceptos estáticos como casos particulares de la Dinámica, los conceptos estáticos tuvieron su lugar y su tiempo. Y la historia enseña que un cambio fundamental en la forma de pensar acerca de la Mecánica, tuvo lugar después de los estudios de Arquímedes, Leonardo, Varignon, etc., es decir, después de la formulación de los conceptos de la Estática. Además, si un estudiante recibe un curso de Estática antes de uno de Dinámica, abordará los problemas de Dinámica considerando como la causa aceleradora a la fuerza "neta" que actúa sobre el cuerpo. Esto se hará sólo después de las múltiples situaciones estáticas en las que la fuerza neta es igual a cero.

Es imprescindible que un estudiante de Física o de Ingeniería entienda bien el concepto de fuerza antes de estudiar Dinámica; el resultado será un individuo mucho mejor preparado para abordar toda la gama de situaciones de la Mecánica. Más aún será un individuo mucho mejor preparado para entender la relación de la fuerza con la aceleración.

A la pregunta: Qué es una fuerza? los alumnos que estudiaron Estática como un caso particular de la Dinámica, contestaron lo siguiente:

- "Es un trabajo que se le aplica a algún objeto o cosa, en una determinada distancia con un tiempo."

- "Es aquella que al aplicarla produce un movimiento ocasionando una distancia en un determinado tiempo."

- "Es todo aquello que se le aplica a un objeto con el fin de mover el mismo objeto."

- "Es la fuerza ejercida aplicada a un objeto determinado para su movimiento o trabajo que se balla a realizar."

- "Es una atracción o repulsión de algún objeto hecho por un movimiento."

- "Es el resultado de una energía aplicada a un determinado cuerpo, en la cual al aplicarse una fuerza a cualquier cuerpo se desarrolla un trabajo."

- "Es la cantidad de energía que se utiliza para desarrollar un trabajo, la cual se puede obtener del esfuerzo humano o de una máquina, se puede obtener también de la unión de dos o mas pequeñas cantidades de energía y además tiene una magnitud dirección y sentido."

- "Es algo que se le aplica a los cuerpos o materia para que tengan movimiento o desplazamiento/.../"

- "Se puede definir como el esfuerzo que se emplea para mover un cuerpo en reposo en diferentes direcciones."

- "Es la capacidad de realizar un trabajo por unidad de distancia."

- "Es el esfuerzo realizado o necesario para efectuar algún trabajo /.../"

- "Fuerza es igual al trabajo sobre distancia."

- "Es toda manifestación de energía capaz de producir un movimiento o modificarlo."

- "Una fuerza es una cantidad vectorial que tiene sentido dirección, además la fuerza es una cantidad requerida para realizar un movimiento o un trabajo."

- "Es un vector que tiene magnitud, dirección y sentido. Es la cantidad de energía que produce movimiento."

- "Es una acción (magnitud) que es necesaria para realizar un trabajo en un intervalo de tiempo determinado produciendo un desplazamiento."

- "Es una magnitud necesaria para realizar un trabajo en un determinado tiempo."

- "Esta se define como la acción que tiene un cuerpo al moverse o mantenerse en equilibrio."

- "Es la capacidad de mover un cuerpo ó la capacidad que oponen los cuerpos al aplicarle dicha fuerza."

- "Es un movimiento cuando se le aplica aun cuerpo que se podría decir que esta en reposo o también en movimiento, lo cual también nos dice que la fuerza es igual distancia sobre tiempo."

- "Es todo lo que se les aplica a los cuerpos para que pasen de un estado de reposo a un estado de movimiento."

16 alumnos más contestaron que fuerza es el producto de la masa por la aceleración.

EJERCICIOS PARA SER RESUELTOS EN EL LABORATORIO

Equilibrio traslacional

Una caja está sostenida por tres cables como se muestra en la figura 54. Determina el peso  $W$  de la caja sabiendo que la tensión en el cable  $AD$  es de 60 pons.

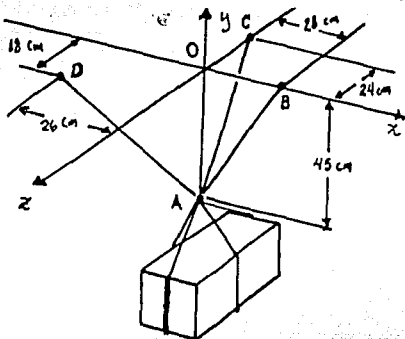


fig. 54

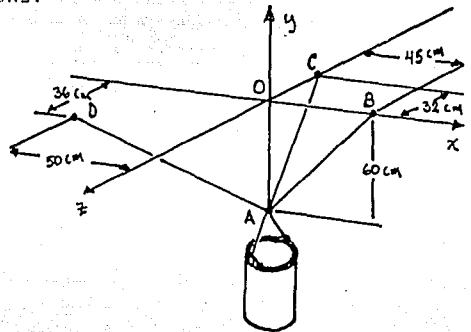


fig. 55

Un recipiente de peso  $W = 50$  pons está sostenido por tres cables como se muestra en la figura 55. Determina la tensión en cada cable.

Se conectan tres cables en  $A$ , donde las fuerzas  $P$  y  $Q$  están aplicadas como se indica en la figura 56. Determina la tensión en cada cable cuando  $P = 56$  pons y  $Q = 0$ .

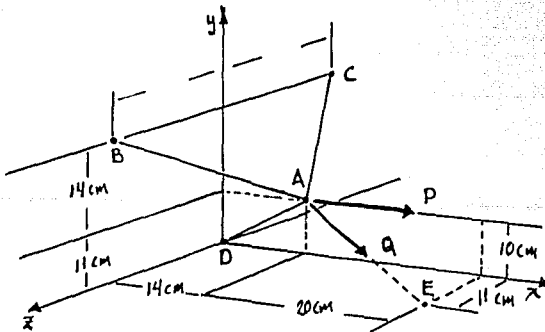


fig. 56

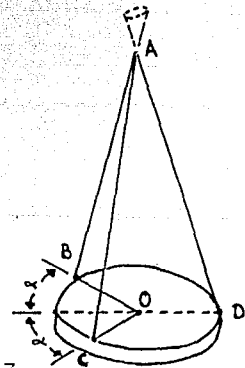


fig. 57

Una placa circular de 60 pons de peso y 7 in de radio está sostenida, en la forma indicada en la figura 57, por tres alambres cada uno de 25 cm. de longitud. Determina la tensión

en cada alambre sabiendo que  $\alpha = 30$  grados.

Un recipiente de peso  $V = 40$  pons se sostiene por dos cables AB y AC amarrados a un aro A. Sabiendo que  $Q = 0$ , determina a) la magnitud de la fuerza P que debe aplicarse al aro para mantener el recipiente en la posición indicada, b) los valores correspondientes de la tensión en los cables AB y AC (Ver la fig. 58).

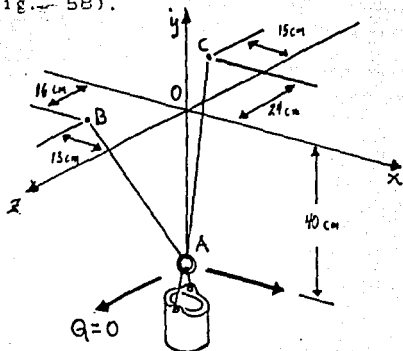


fig. 58

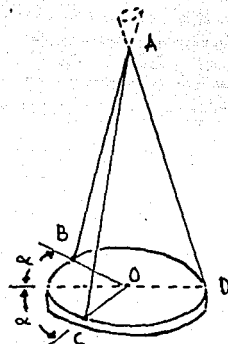


fig. 59

Una placa circular de 40 pons y radio de 250 mm. está sostenida por tres alambres de igual longitud L como se muestra en la figura 59. Sabiendo que  $\alpha = 30$  grados, determina el valor más pequeño posible de longitud L si la tensión no debe exceder 50 pons en ninguno de los alambres.

Un cilindro de peso  $W = 50$  pons está sostenido por dos cables AC y BC unidos a la parte superior de dos postes verticales. Una fuerza horizontal P perpendicular al plano que contiene a los postes, sostiene el cilindro en la posición mostrada en la figura 60. Determina a) la magnitud de P y b) la tensión en cada cable.

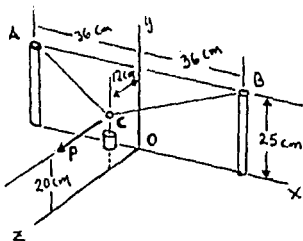


fig. 60

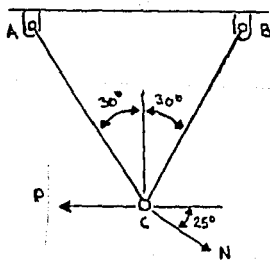
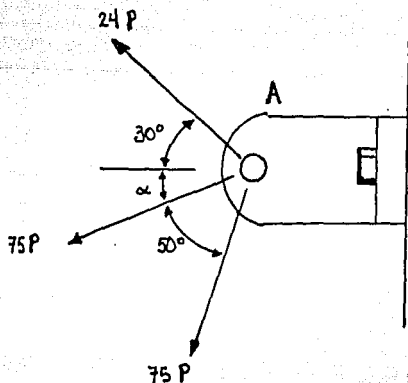


fig. 61

Determina el intervalo de valores de P para los cuales ambos cables permanecen tensos. (Ver fig. 61)

Las direcciones de las fuerzas de 75 pons pueden variar pero el ángulo entre las fuerzas es siempre de 50 grados. Determina el valor de  $\alpha$  para la cual la resultante de las fuerzas que actúan en A está dirigida horizontalmente a la izquierda. (Ver fig. 62)

fig. 62



Equilibrio rotacional

Una placa rectangular está sostenida por soportes en A y B y por una alambre CD. Sabiendo que la tensión en el alambre es de 200N, determina el momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C. (Ver fig. 63)

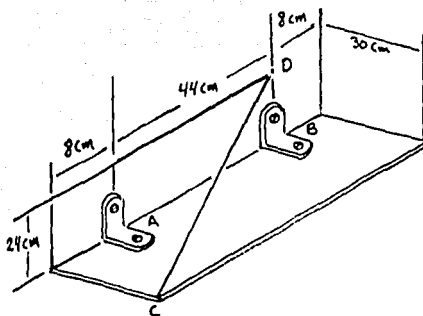


fig. 63

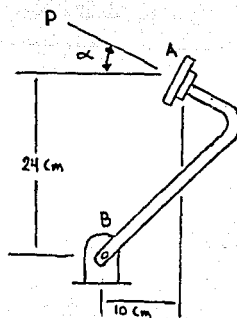


fig. 64

Para el pedal de freno mostrado en la figura 64, determina la magnitud y dirección de la fuerza mínima P que tiene un momento de 130 N.m con respecto a B.

Se aplica una fuerza P de 300 N en el punto A de la palanca angular mostrada en la figura 65. a) Calcula el momento de la fuerza P con respecto a O descomponiéndola en sus componentes horizontal y vertical. b) Usando el resultado de la

parte a), determina la distancia perpendicular desde O a la línea de acción de P.

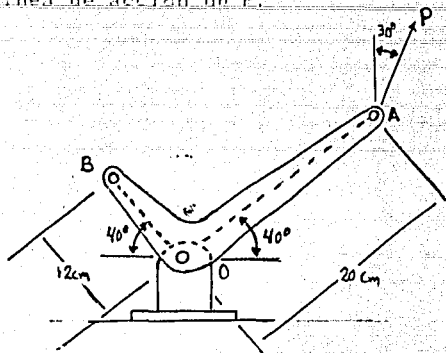


fig. 65

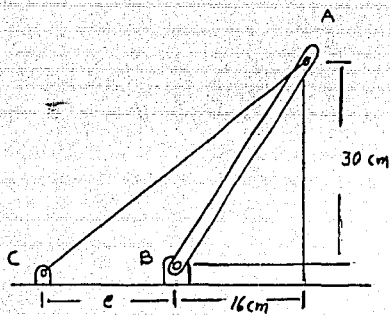


fig. 66

La barra AB se mantiene en su lugar por la cuerda AC. Sabiendo que la tensión en la cuerda es de 250 lb y que  $c = 24$  in. determina el momento con respecto a B de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto A, descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical aplicadas a) al punto A, b) al punto C. (Ver fig. 66)

El alambre AE se estira entre las esquinas A y E de una placa doblada. Sabiendo que la tensión en el alambre es de 435 N, determina el momento con respecto a O de la fuerza ejercida por el alambre a) en la esquina A, b) en la esquina E. (Ver fig. 67)

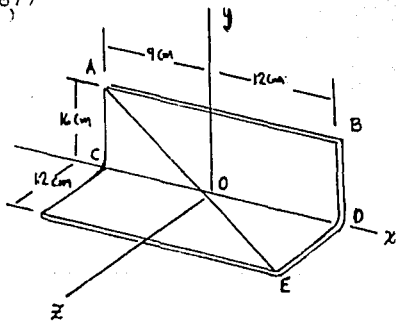


fig. 67

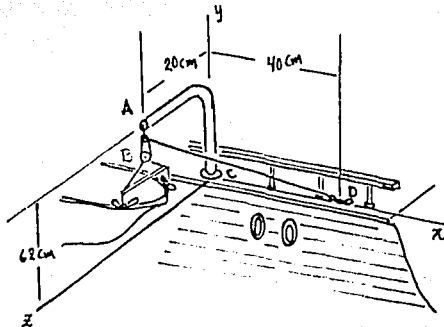
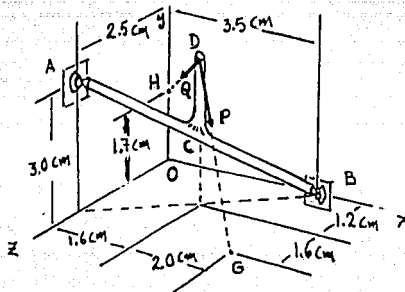


fig. 68

Un pequeño bote cuelga de sus dos pescantes, uno de los cuales se muestra en la figura 68. La tensión en la línea ABAD es de 41 lb. Calcula el momento alrededor de C de la fuerza resultante R ejercida sobre el pescante en A.

La barra vertical CD de 23 in de longitud se suelda al punto medio C de la barra AB de 50 in de longitud, como se muestra en la figura 69. Calcule el momento con respecto a AB de la fuerza P de 235 lb.

fig. 69



### Rozamiento

Una fuerza de 100 lb actúa como se indica en la figura 70. Sobre un cuerpo de 300 lb de peso colocado sobre un plano inclinado. El coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es  $\mu = 0.25$ . Determine si el bloque está en equilibrio y encuentre la fuerza de fricción.

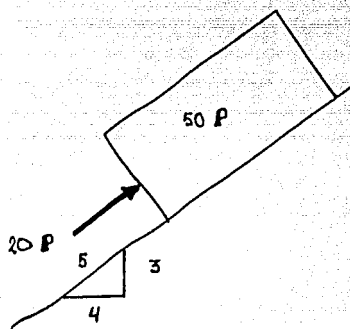


fig. 70

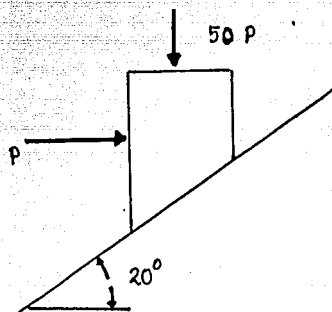


fig. 71

El coeficiente de fricción entre el bloque y la rampa que se muestra en la figura 71, es  $\mu = 0.30$ . Determine si el bloque está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción si  $P = 150$  N.

El coeficiente de fricción es  $\mu = 0.25$  entre todas las superficies de contacto. Determine: a) la resultante de las fuerzas de fricción ejercidas sobre el bloque C si el bloque B está restringido como se ve en la figura 72, b) la fuerza de fricción que el suelo ejerce sobre el bloque D si el cable AB se elimina.



Una cuerda se sujeta y se enrolla parcialmente a un cilindro de peso  $W$  y radio  $r$  que está sobre una rampa. Como se muestra en la figura 73. Sabiendo que el coeficiente de fricción entre el cilindro y la rampa es 0.30, encuentra a) el valor mínimo posible de  $\theta$  para que el cilindro esté en equilibrio, b) el valor de la tensión en la cuerda.

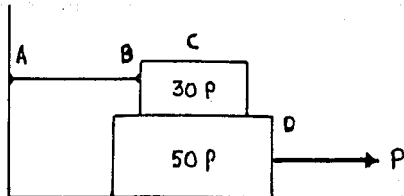


fig. 72

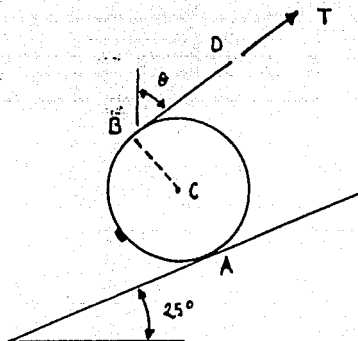


fig. 73

Un automóvil se encuentra estacionado con sus llantas delanteras contra una acera. El piloto enciende el motor y trata de pasar sobre la acera. Sabiendo que el radio de las llantas es 280 mm, que el coeficiente de fricción entre las llantas y el pavimento es 0.90 y que el 60% del peso del automóvil se distribuye sobre las ruedas delanteras y el 40% sobre las ruedas traseras, determina la mayor altura  $h$  que puede tener la acera para que el automóvil pueda pasar, suponiendo a) tracción delantera, b) tracción trasera. (Ver fig. 74)

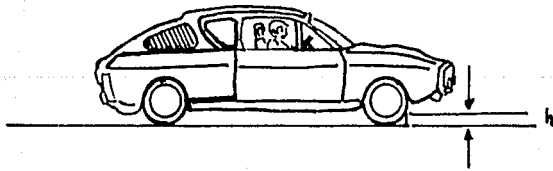


fig. 74

(1) Ruñoz, M.: *America de las Clases Expositivas*, Boletín de Enseñanza, Fac. de Ciencias, Vol. 8, p. 47 UNAM, 1983.

(2) Piaget, J. e Inhelder B.: *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*.

(3) Karplus, R., *Science Curriculum Improvement Study, Teachers Handbook*.

(4) Dirección General de Institutos Tecnológicos de los cuales hay 60 en todo el País.

(5) Diccionario Larousse Usual, pg. 287, por Ramón García-Pelayo y Gross.

Otras definiciones de Estática (de libros clásicos de referencia y texto):

Alonso, M. Física: "La Estática es la rama de la Mecánica que estudia el equilibrio de los cuerpos." (Y le dedica un capítulo). p. 135.

Halliday-resnick, Física: "El capítulo de la Dinámica de las partículas en traslación que incluye solamente a sistemas para los cuales la fuerza resultante  $F$  es cero, se llama 'Estática'".

Physical Science Study Committee. Física: No menciona la palabra Estática, tampoco torca de una fuerza y en ningún momento se menciona o discute el equilibrio de fuerzas.

(6) A new survey of universal knowledge. Enciclopedia Británica, INC New York, 1929, vol. 21 pg. 340

(7) En ambos casos tenemos una interacción entre dos cuerpos y se puede pensar en dos tipos de interacción: por contacto y a distancia. Sin embargo las cosas no son tan diferentes como parecen. No importa cuán compacto pueda parecer un sólido, sus átomos están repartidos y mantienen sus posiciones en la misma manera en que los planetas mantienen su posición como resultado de sus interacciones con el Sol. Un 'bate' nunca está en contacto con la pelota en el sentido microscópico, aunque sus moléculas se acercan mucho a aquellas de la pelota, produciendo una alteración temporal en sus posiciones como resultado de sus interacciones. Así todas las fuerzas en la Naturaleza corresponden a interacciones entre cuerpos situados a cierta distancia entre ellos. En algunos casos la distancia es tan pequeña desde el punto de vista humano que tendemos a extrapolar y pensamos que es cero. En otros casos la distancia es muy grande desde el punto de vista humano. Sin embargo, desde el punto de vista físico, no hay diferencia esencial entre las dos clases de fuerza.

(8) Este aspecto de las fuerzas se estudia en Elasticidad: 10. Dos fuerzas son iguales cuando, al actuar sucesivamente sobre un

muelle, producen en éste, el mismo alargamiento. 2o. Una fuerza F es doble de otra F' cuando, al actuar sobre dos muelles idénticos colocados uno al lado de otro, produce el mismo alargamiento que la fuerza F' al actuar sobre uno sólo de ellos.

(9) Real y verdaderamente no existe en la Naturaleza un objeto sin extensión. Sin embargo el concepto de 'partícula' es muy útil porque los cuerpos reales a menudo se comportan, por lo menos aproximadamente, como si fueran partículas. Un cuerpo no tiene que ser necesariamente 'pequeño' en el sentido usual de la palabra para que pueda ser tratado como partícula. Por ejemplo, si consideramos el planeta Tierra, el Sol y la distancia que los separa, estos cuerpos celestes pueden considerarse ordinariamente como partículas comparados con dicha distancia. Podemos deducir una gran cantidad de información acerca del movimiento del Sol y los planetas sin error apreciable, tratando estos cuerpos como partículas. Las esferas, las moléculas y los electrones, pueden tratarse a menudo como partículas. Aun si un cuerpo es demasiado grande para considerarse como partícula para un problema específico, siempre puede considerarse al cuerpo como compuesto por un gran número de partículas y los resultados del movimiento de las partículas pueden ser útiles en el análisis del problema.

(10) Brown J. cit. por Azuela, Luz Fda. La Física en la Edad Media tesis Lic. en Fis. Fac. Ciencias UNAM, 1982

(11) Arquímedes. Cit. p/ Mach, E. Desarrollo Histórico-Crítico de la Mecánica, p 20

(12) Ibid, p 24

(13) Ibid, p 43

(14) Ibid, p 15

(15) Papp, D. Historia de la Física: p 2

(16) Ver la idea que acerca del concepto de fuerza tenía Aristóteles, pgs. 10 a 11, y pg. 16.

(17) Piaget, J., e Inhelder B. The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence: New York: Basic Books, 1958

(18) Tomlinson-Keasey La teoría Piagetiana y la Enseñanza Universitaria. Cap. 1 del libro: "Multidisciplinary Piagetian-based Programs for College Freshmen. ADAPT, The Cognitive Program. DOOR, SOAR, STAR", University of Nebraska, 1977

(19) Ibid

(20) Ibid

(21) Ibid

(22) Ibid

- (23) Ibid
- (24) Ibid
- (25) Ibid
- (26) Ibid
- (27) Ibid
- (28) Walker, Hendrix and Thomas: Written Piagetian Task Instrument: its Development and Use. Science Education 63 (2): 211-220 (1979).
- (29) Ibid
- (30) Campbell, Fuller, Thornton (Proyecto ADAPT, p 7 Univ. de Nebraska-Lincoln, 1977)
- (31) Las fuerzas ficticias no vienen en parejas.
- (32) Comparar con los enunciados de Arquimedes, pg. 11.
- (33) Justo en el momento en que se igualan la fuerza ejercida por el dinamómetro y la fuerza de rozamiento se sentirá un empujón en la mano.

# B I B L I O G R A F I A

- Beer, F y Johnston, R Jr.  
MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS  
Estática  
4a. ed.  
Mc Graw-Hill, 1986
- Bravo, S.: Sobre la primera ley de Newton  
Boletín de enseñanza, Fac de Ciencias, UNAM, 7, 60, 1983
- Bunge, M  
LA CIENCIA, SU METODO Y SU FILOSOFIA  
Ed. Siglo XX, 1974
- Campbell-Fuller-Thornton  
"Ciclos de aprendizaje"  
Boletín de Enseñanza. Fac. de Ciencias UNAM. 9, 28, 1983
- Campbell, T.C.  
Proportional Reasoning In College Freshmen  
Unpublished, 1976
- Campos, I  
Aspectos generales del Aprendizaje en Ciencia  
Boletín de Enseñanza, Fac. de Ciencias, UNAM, 8, 36, 1983
- Cisneros, R  
La Creatividad en la Enseñanza de las Ciencias  
Boletín de Enseñanza, Fac. de Ciencias, UNAM, 3, 18, 1982
- Collins, K. F.  
A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics:  
A Piagetian Viewpoint  
Australian Council for Educational Research, 1975
- Copeland, Richard W.  
How Children Learn Mathematics: Teaching Implications of Piaget's  
Work:  
Macmillan New York, 1970
- De Bono, E  
Diferencia entre el Pensamiento Lateral y el Pensamiento Vertical  
Boletín de Enseñanza, Fac. de Ciencias, UNAM, 3, 133, 1982
- Eedes, J.A.  
El Papel de la Experimentación en la Enseñanza de la Física  
Boletín de Enseñanza, Fac. de Ciencias, UNAM, 8, 28, 1983
- Furth, H. G.  
Piaget for Teachers  
Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs. N.J., 1969
- Furth, H. G. and Wachs, H.  
Thinking Goes to School: Piaget's Theory in Practice

Oxford University Press, New York 1974

González, J. A.

Acerca de la Enseñanza de la Ley de Interacción de Newton  
Boletín de Enseñanza, Fac. de Ciencias, UNAM, 5, 3, 1983

González, J. A.

Abanico de Fuerzas  
Enlace Docente, 7, 13  
COSNET, 1988

González, J. A.

La Balanza de Ligas  
Enlace Docente, Vol 12, p 19  
COSNET, 1988

Gorman, R. M.

Discovering Piaget: A Guide for Teachers  
Charles E. Merrill, Columbus, Ohio, Ohio, 1972

Grant, E

Physical Science in the Middle Ages  
Cambridge University Press, 1977

Halliday-Resnick

Física  
Ed. Continental 1a. Ed. Combinada, 1974

Jara, S

De los Griegos a Newton para Principiantes  
Cit en Boletín de Enseñanza, Vol 8, p 49  
Fac. de Ciencias  
UNAM, 1983

Karplus, R

Science Curriculum Improvement Study: Teachers Handbook  
University of California-Berkeley, Berkeley, California, 1974

Karplus, R

Teaching for the Development of Reasoning, 1979 AEST Yearbook,  
The Psychology of Teaching for Thinking and Creativity, A. E.  
Lawson  
Ed. Columbus Ohio: Eric Smeac, 1979

Lass, H

Mecánica Vectorial para Ingenieros  
C.E.C.S.A., 1973

Lovell, K.A.

A Follow-up Study of Inhelder and Piaget's Growth of Logical  
Thinking  
British Journal of Psychology, 52, 143, (1961)

Mach, E

Desarrollo Histórico Crítico de la Mecánica  
Espasa-Calpe, 1949

Naro, H  
Mecánica Vectorial para Ingenieros  
Vol I Estática  
Ed. Limusa, 1977

Nunez, M  
Acerca de las Clases Expositivas  
Boletín de Enseñanza, Fac de Ciencias, UNAM, 8, 47

Papp, D  
Historia de la Física  
Espasa-Calpe 2a. Ed, 1961

Piaget-Inhelder  
Psicología del Niño  
10a. edición  
Ed. Morata, 1981

Piaget-Inhelder  
The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence  
Basic Books, 1958

Piaget, J  
El Desarrollo Cognoscitivo en los Niños: Desarrollo y Aprendizaje  
Boletín de Enseñanza, Fac de Ciencias, UNAM, 5, 30, 1983

Piaget, J  
Psicología y Pedagogía  
Ed. Ariel, 1969

Piaget, J  
Intellectual Evolution from Adolescence to Adulthood  
Human Development, 15, 1972

Segarra, P  
La Educación en México  
Boletín de Enseñanza, Fac de Ciencias, UNAM, 7, 30, 1983

Tomlinson-Keasey  
La Teoría Piagetiana y la Enseñanza Universitaria  
Boletín de Enseñanza, Fac de Ciencias, UNAM, 8, 6, 1983

Aquí aún puede observarse que, en general, el concepto de fuerza sigue confundido con el de energía.

Después de un curso de Estática, el alumno abordará el estudio de la segunda ley de Newton considerando a las fuerzas como el resultado de la interacción entre los cuerpos. Así mismo podrá considerar interacciones por contacto o a distancia.

El alumno ya sabrá hacer el "diagrama de cuerpo libre", es decir, sabe qué fuerzas están actuando sobre determinado cuerpo ya sea a distancia o por contacto.

Ya entiende que si sobre un cuerpo no actúa una fuerza neta, su vector velocidad no cambia.

Y más importante que todo esto aún es el hecho de que en los grupos que tomaron un curso de Estática y con la técnica de Ciclos de aprendizaje, es notable el aumento en el número de alumnos que dibujan **perfectamente bien** el diagrama de cuerpo libre de una piedra lanzada al aire.

Más que una técnica, un método, una estrategia de enseñanza, el ciclo de aprendizaje es toda una filosofía, en la que los resultados son interesantes y satisfactorios.