



27
19

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS CORRECCIONES RADIATIVAS
DESDE EL PUNTO DE VISTA
DE LA
ELECTRODINAMICA ESTOCASTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
FISICO

P R E S E N T A
JAIME FELICIANO HERNANDEZ

MEXICO, D. F.

SEPTIEMBRE 1989

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

AGRADECIMIENTOS.....	0
INDICE.....	2
INTRODUCCION.....	4
CAPITULO 1.....	6
1.1 PERTURBACIONES DEPENDIENTES DEL TIEMPO.....	7
1.2 PROBABILIDADES DE TRANSICION.....	14
1.3 COEFICIENTES DE EINSTEIN.....	18
1.4 TIEMPO DE VIDA MEDIA, TIEMPO DE EXCITACION.....	21
CAPITULO 2.....	22
2.1 SEGUNDA CUANTIZACION.....	23
2.2 FLUCTUACIONES DEL CAMPO DE VACIO.....	33
2.3 CORRECCIONES RADIATIVAS.....	35
2.4 DESCRIPCION CUANTICA DE LAS CORRECCIONES RADIATIVAS.....	40
2.4.1 LA ENERGIA PROPIA.....	40
2.4.2 RENORMALIZACION DE LA MASA.....	49
2.4.3 LAS VIDAS MEDIAS.....	54
2.4.4 APLICACIONES, EL ATOMO DE HIDROGENO.....	55
2.4.5 APLICACIONES, EL OSCILADOR ARMONICO.....	57
CAPITULO 3.....	58
3.1 LA ELECTRODINAMICA ESTOCASTICA (EDED).....	59
3.2 PROCESOS ESTOCASTICOS.....	63
3.3 LA ECUACION DE LANGEVIN, LA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE LIOUVILLE.....	64
3.4 LA ECUACION DE FOKKER-PLANCK.....	70
3.5 EL OSCILADOR ARMONICO.....	78
3.6 DEDUCCION DE LA MECANICA CUANTICA DEL	

OSCILADOR ARMONICO A PARTIR DE LA EDE.....	81
3.7 DESCRIPCION DE LAS CORRECCIONES RADIATIVAS	
DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA EDE.....	87
CAPITULO 4	95
4.1 ECUACION DE FOKKER-PLANCK GENERALIZADA.....	96
4.2 CORRECCION A LA MASA DEL ELECTRON DEBIDA A	
LAS MODIFICACIONES DEL MEDIO AMBIENTE.....	102
4.3 TEOREMA DE FLUCTUACION DISIPACION.....	107
4.4 LA VIDA MEDIA DE LOS ESTADOS EXCITADOS.....	111
4.5 LAS CORRECCIONES A LA ENERGIA, EL EFECTO LAMB.....	117
4.6 COMPARACION CON LOS RESULTADOS DE LA EDC.....	121
CAPITULO 5	128
5.1 UN ESPEJO CONJUGADOR DE FASES (ECF).....	129
5.1.1 LA DISPERSION ESTIMULADA DE BRILLOUIN (DEB).....	130
5.1.2 LA MEZCLA DE CUATRO ONDAS (MCO).....	132
5.1.3 LA CONJUGACION DE FASE POR UNA MEZCLA DE	
TRES ONDAS.....	134
5.2 FORMALISMO DE LA CONJUGACION DE FASE PARA LA MEZCLA	
DE CUATRO ONDAS.....	136
5.3 VARIACIONES A LAS CORRECCIONES A LA ENERGIA DE UN	
OSCILADOR ARMONICO EN PRESENCIA DE UN ECF.....	139
5.4 LA FUERZA EJERCIDA POR EL ECF SOBRE EL OSCILADOR....	145
5.5 LA VISIBILIDAD DE LAS FRANJAS DE INTERFERENCIA.....	147
CONCLUSIONES	149
REFERENCIAS	151

INTRODUCCION:

La Electrodinámica Estocástica (EDE), es la teoría que describe el comportamiento de las partículas cargadas en presencia de un campo de radiación de fondo⁽¹⁾ que es aleatorio.

La EDE ofrece una alternativa a la Mecánica Cuántica (MC), Co más exactamente, a la Electrodinámica Cuántica (EDC)), basada en un conjunto muy reducido de hipótesis, que a su vez tienen su origen en la Mecánica Clásica, es decir, la EDE parte de la Mecánica Clásica y es capaz de ofrecer resultados tan importantes e impresionantes como los de la MC, pero sobre bases mucho más físicas, así por ejemplo, la EDE explica fenómenos que siempre se habían considerado estrictamente cuánticos, como son: las fuerzas de Van der Waals para partículas entre conductores macroscópicos (Marshall 1965 y Boyer 1968), L. de la Peña y A. M. Cetto en 1979 en un bellísimo trabajo⁽²⁾ describen el comportamiento del oscilador armónico desde el punto de vista de la EDE.

Se han realizado también trabajos sobre el rotor rígido, el efecto Casimir, efectos diamagnéticos, etc., un tratamiento de estos fenómenos y una lista bastante amplia se incluye en la revisión que hace el Dr. de la Peña en la referencia 4.

En esta tesis se hace una revisión al problema de las correcciones radiativas para partículas cargadas en presencia del campo de punto cero, así como una aplicación a la óptica no lineal.

En el capítulo 1 se trata la teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, se introduce en forma heurística la densidad de energía espectral del campo de vacío através de los coeficientes de Einstein.

En el capítulo 2 se complementa el formalismo de la EDC con un breve desarrollo de la segunda cuantización, en base a un desarrollo perturbativo, se hace una descripción cuántica de las correcciones radiativas, se tratan el efecto Lamb, la renormalización de la masa, las vidas medias y las aplicaciones al átomo de hidrógeno y al oscilador armónico.

En el capítulo 3, se revisan brevemente los aspectos fundamentales del formalismo de la EDE, empezando por los procesos estocásticos, se deduce la ecuación de Langevin y la ecuación de Fokker-Planck, a partir de esto se obtiene toda la mecánica cuántica del oscilador armónico y se encuentran las expresiones para las correcciones radiativas, las cuales son tratadas ampliamente en el capítulo 4, para los casos en que la densidad de energía espectral se ve modificada por la presencia de objetos metálicos, se deduce un teorema de fluctuación-disipación y se hace una comparación con los resultados presentados en el capítulo 2.

En el capítulo 5 se da una descripción de un espejo conjugador de fases (ECF), y usando las ecuaciones fundamentales del capítulo 4 para las correcciones radiativas se obtiene la versión de la EDE de un oscilador en presencia de uno de estos espejos. Finalmente se dan algunas conclusiones acerca de los resultados obtenidos.

CAPITULO 1
TEORIA DE PERTURBACIONES

1.1 PERTURBACIONES QUE DEPENDEN DEL TIEMPO⁽⁵⁾.

...no sé porque razón todas las cosas están ligadas entre sí, de tal forma que no puedes arrancar una flor sin perturbar a las estrellas...

CARLOS CARIO R.

Supongamos que se tiene un sistema atómico, en el n -ésimo estado excitado, correspondiente al hamiltoniano \hat{H}_0 , y que a partir de cierto tiempo $t'=0$ empieza a actuar sobre el sistema una perturbación \hat{H}' pequeña, que depende del tiempo. Esta perturbación puede ser de distintos tipos, según su origen, así por ejemplo, hay perturbaciones que actúan sólo durante tiempos cortos, perturbaciones adiabáticas, periódicas o que duran tiempos muy grandes etc..

Es importante tener en cuenta que la teoría de perturbaciones sólo puede dar resultados aproximados; así pues, la ecuación de Schrödinger perturbada se escribe como:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi = (\hat{H}_0 + \hat{H}'(t)) \Psi \quad (1.1)$$

es claro que no se van a obtener estados estacionarios del sistema perturbado puesto que \hat{H}' depende del tiempo, sin embargo podemos hablar de las diferentes correcciones a sus funciones de onda.

Para calcular estas correcciones tomamos en cuenta que para el sistema no perturbado se cumple la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial t} = \hat{H}_0 \psi_n^{(0)} \quad (1.2)$$

como el conjunto de las eigenfunciones ($\psi_n^{(0)}$) forma un conjunto ortonormal completo, entonces cualquier otra función Ψ se puede desarrollar en términos de esta base:

$$\Psi = \sum_n a_n \psi_n^{(0)} \quad (1.3)$$

donde los coeficientes a_n son constantes.

Supongamos ahora, que las funciones de onda perturbadas se pueden desarrollar de similar forma, pero ahora los coeficientes son funciones que dependen del tiempo:

$$\Psi = \sum_n a_n(t) \psi_n^{(0)} \quad (1.4)$$

la solución de (1.2) la podemos escribir como:

$$\Psi = \sum_n a_n e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \psi_n(\vec{x}) \quad (1.5)$$

en la que se ha separado la parte temporal de la parte espacial en la función de onda, multiplicando (1.5) por ψ_n^* :

$$\psi_n^* \Psi = \sum_n a_n e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \psi_n^* \psi_n$$

integrando en todo el espacio de configuraciones y tomando $t = 0$, encontramos la expresión para los coeficientes a_n :

$$\begin{aligned} \int \psi_n^* \Psi d\vec{x} &= \int \sum_n a_n e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \psi_n^* \psi_n d\vec{x} = \sum_n a_n e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \int \psi_n^* \psi_n d\vec{x} \\ &= \sum_n a_n e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \delta_{nn} = a_n e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\rightarrow a_n(t) = \int \psi_n^* \Psi e^{\frac{+iE_n t}{\hbar}} d\vec{x} \quad (1.7)$$

$$\therefore \int \psi_n^* \psi_n(t=0) d\vec{x} = a_n \quad (1.8)$$

ahora bien, sustituyendo la ecuación (1.4) en la (1.1) y realizando operaciones obtenemos:

$$\sum_n a_n(t) \hat{H}' \psi_n^{(0)} = \sum_n i\hbar \dot{a}_n(t) \psi_n^{(0)} \quad (1.9)$$

multiplicando por $\psi_m^{*(0)}$ e integrando nuevamente sobre todo el espacio de configuración:

$$\dot{a}_m(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n a_n(t) \int \psi_m^{*(0)} \hat{H}' \psi_n^{(0)} d\vec{x} \quad (1.10)$$

$$\therefore \frac{da_m(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar} \sum_n a_n(t) e^{\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}} \hat{H}_{mn}(t) \quad (1.11)$$

$$\text{donde } \hat{H}_{mn}(t) \text{ está dado por : } \hat{H}_{mn}(t) = \int \psi_m^{*(0)} \hat{H}'(t) \psi_n^{(0)} dt \quad (1.12)$$

integrando (1.11) con respecto al tiempo:

$$\int_0^\tau da_m(t) = -\frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_n \int_0^\tau a_n(t) e^{i\omega_{mn}t} \hat{H}_{mn} dt \right\}$$

$$\therefore a_m(t) = a_m(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_n \int_0^\tau a_n(t) e^{i\omega_{mn}t} \hat{H}_{mn} dt \quad (1.13)$$

en esta ecuación se ha usado (1.8).

Como estamos considerando el caso particular de que antes de la perturbación, el sistema se encontraba en el estado estacionario n que es un eigenestado de \hat{H}_0 , entonces:

$$\psi_n^{(0)} = \psi_n^{(0)}(t=0) = \psi_n^{(0)}(\vec{x})$$

$$\therefore a_n(0) = \int \psi_m^* \psi_n d\vec{x} = \delta_{mn} \quad (1.14)$$

introducamos un segundo índice en los coeficientes a_n para indicar para cual de las funciones no perturbadas se calcula la corrección.

$$\therefore \Psi_m(t) = \sum_n a_{mn}(t) e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} \psi_n(\vec{x}) \quad (1.15)$$

con: $a_{mn}(0) = \delta_{mn}$.

Para resolver el sistema de ecuaciones (1.13), que es exacto, hacemos un desarrollo perturbativo hasta primer orden de los coeficientes:

$$a_{mn} = a_{mn}(0) + a_{mn}^{(1)} \quad (1.16)$$

sustituyendo en (1.13) vemos que:

$$a_{mn}(t) = a_{mn}(0) + \int_0^t \left\{ \frac{-i}{\hbar} e^{i\omega_{mn} t} \hat{H}_{mn} \right\} dt + \\ + \int_0^t \sum_n \left\{ \frac{-i}{\hbar} e^{i\omega_{mn} t} \hat{H}_{mn} \right\} a_{mn}^{(1)} dt$$

comparando con (1.16):

$$a_{mn}^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{mn} t} \hat{H}_{mn} dt \quad (1.17)$$

en la aproximación a orden cero:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi_0(\vec{x}, t=0)$$

por lo tanto a primer orden, la función de onda será:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi_0 - \frac{i}{\hbar} \left\{ \int_0^t e^{i\omega_{mn} t} \hat{H}_{mn} dt \right\} \psi_1^{(0)} =$$

$$\psi_0(\vec{x}, t=0) - \frac{i}{\hbar} \left\{ \int_0^t \int \psi_m^*(\vec{x}, t) \hat{H} \psi_n(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \right\} \psi_1^{(0)} \quad (1.18)$$

para obtener aproximaciones superiores, se tiene que hacer un desarrollo del tipo:

$$a_{mn}(t) = a_{mn}(0) + a_{mn}^{(1)} + a_{mn}^{(2)} + \dots$$

en general el coeficiente $a_{mn}^{(i)}$ depende del anterior $a_{mn}^{(i-1)}$, así

por ejemplo, a segundo orden:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi_0 + \left[-\frac{i}{\hbar}\right] \left\{ \int_0^T \int \psi_m^{*(0)}(\vec{x}, t) \hat{H}' \psi_n^{(0)}(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \right\} \psi_1^{(0)} + \left[-\frac{i}{\hbar}\right]^2 \left\{ \int_0^T \int \int_0^T \sum_n \hat{H}'_{mn} \hat{H}'_{mn} d\vec{x} d\vec{x}' dt dt' \right\} \psi_2^{(0)} \quad (1.19)$$

Hasta aquí no se ha dicho nada acerca del tipo de perturbación posible, es decir que este análisis es completamente general hasta que se especifique el hamiltoniano perturbador (1.12).

Consideremos el caso de las perturbaciones periódicas, entonces $\hat{H}'(t)$ se puede escribir como:

$$\hat{H}'(t) = \hat{F} e^{-i\omega t} + \hat{G} e^{i\omega t} = \hat{H}^\pm e^{\pm i\omega t} \quad (1.20)$$

donde \hat{F} y \hat{G} son operadores que no dependen del tiempo, por hipótesis \hat{H}' es hermitiano, por lo tanto $H_{nm} = H_{mn}^*$ de donde:

$$F_{nm} e^{-i\omega t} + G_{nm} e^{i\omega t} = F_{mn}^* e^{i\omega t} + G_{mn}^* e^{-i\omega t} \quad (1.21)$$

$$\rightarrow G_{nm} = F_{mn}^* \quad (1.22)$$

sustituyendo en (1.17) e integrando se obtiene:

$$a_{mn}^{(1)} = - \frac{F_{mn} e^{i(\omega_{mn} - \omega)t}}{\hbar(\omega_{mn} - \omega)} - \frac{F_{nm}^* e^{-i(\omega_{mn} + \omega)t}}{\hbar(\omega_{mn} + \omega)} \quad (1.23)$$

es claro que (1.23) es válido siempre que $a_{mn}^{(1)}$ se conserve pequeño respecto a la unidad.

Los elementos de matriz de una magnitud física cualquiera f , determinados mediante las funciones de onda perturbadas en primera aproximación son:

$$f_{nm}(t) = f_{nm}^{(0)}(t) + f_{nm}^{(1)}(t)$$

de donde podemos ver que, en el espacio de configuraciones:

$$f_{nm}^{(0)}(t) = \int \psi_n^{*(0)} \hat{f} \psi_m^{(0)} dq = f_{nm}^{(0)} e^{i\omega_{nm} t}$$

$$f_{nm}^{(1)}(t) = \int \left[\psi_n^{*(0)} \hat{f} \psi_m^{(1)} + \psi_n^{*(1)} \hat{f} \psi_m^{(0)} \right] dq$$

si sustituimos aquí $\psi_n^{(1)} = \sum_k a_{kn}^{(1)} \psi_k^{(0)}$ con los $a_{kn}^{(1)}$ dados por (1.23)

$$f_{nm}^{(1)}(t) = -e^{i\omega_{nm} t} \sum_k \left\{ \left[\frac{f_{nk}^{(0)} F_{km}}{\hbar(\omega_{km} - \omega)} + \frac{f_{km}^{(0)} F_{nk}}{\hbar(\omega_{kn} + \omega)} \right] e^{-i\omega t} + \left[\frac{f_{nk}^{(0)} F_{mk}^*}{\hbar(\omega_{km} + \omega)} + \frac{f_{km}^{(0)} F_{kn}^*}{\hbar(\omega_{kn} - \omega)} \right] e^{i\omega t} \right\} \quad (1.24)$$

Consideremos ahora una perturbación que una vez que ha empezado a actuar, sigue haciéndolo indefinidamente, es decir, que $\hat{H}'(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ pero $\hat{H}'(t) \neq 0$ para $t \rightarrow \infty$, por esta última hipótesis, la integral que da los coeficientes del desarrollo, resulta divergente, sin embargo esta divergencia no es importante desde el punto de vista físico y se puede soslayar fácilmente, para ello integramos por partes (1.17).

$$a_{mn} = \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^t H_{mn} e^{i\omega_{mn} t} dt = -\frac{H_{mn} e^{i\omega_{mn} t}}{\hbar\omega_{mn}} \Big|_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^t \frac{\partial H_{mn}}{\partial t} \frac{e^{i\omega_{mn} t}}{\hbar\omega_{mn}} dt \quad (1.25)$$

aquí el valor del primer término se anula en el límite inferior, en tanto que en el superior coincide formalmente con los coeficientes del desarrollo para teoría de perturbaciones independientes del tiempo, salvo un factor periódico suplementario, $e^{i\omega_{mn} t}$ que es consecuencia de que ahora los a_{mn} son coeficientes que dependen del tiempo, éstos en el límite para

$t \rightarrow \omega$ determinan de alguna manera, sólo la variación de la función de onda inicial debida a la parte "constante" de la perturbación (la parte que no depende del tiempo) y por lo tanto no tiene nada que ver en las posibles transiciones de los estados estacionarios del sistema.

1.2 PROBABILIDADES DE TRANSICION⁽⁶⁾.

La ecuación (1.17) muestra que, la aplicación de una perturbación induce transiciones entre los estados inicial y final conecidos por la matriz del potencial perturbativo, podemos hablar de las transiciones de un sistema de un estado a otro, como debidas a un agente externo que puede ser el campo electromagnético.

La probabilidad de que ocurra una transición, de un estado n a uno m en el tiempo t , está dada por el cuadrado del valor absoluto de los coeficientes a_{mn} :

$$a_{mn}(t)a_{mn}^* = |a_{mn}(t)|^2 \equiv \mathcal{W}_{mn} \quad (1.26)$$

así pues, la expresión para \mathcal{W}_{mn} , la probabilidad de transición para cuando se tienen perturbaciones que actúan durante tiempos largos ($t \rightarrow \infty$), se obtiene de la ecuación (1.25).

$$\mathcal{W}_{mn} = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial H_{mn}}{\partial t} e^{i\omega_{mn}t} dt \right|^2 \quad (1.27)$$

esta ecuación también es válida cuando la transición se lleva a cabo desde un estado en el espectro discreto hasta uno en el continuo, la diferencia consiste en que ahora la transición desde el espectro discreto, digamos, el m -ésimo estado, terminará en el continuo en el intervalo $\nu, \nu+d\nu$ donde ν es una variable del espectro continuo:

$$d\mathcal{W}_{m\nu} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\nu m} e^{i\omega_{\nu m}t} dt \right|^2 d\nu \quad (1.28)$$

Si las perturbaciones son periódicas, los resultados son un tanto diferentes.

Supongamos que en $t = 0$ el sistema se encuentra en el m -ésimo estado estacionario, del espectro discreto y que la frecuencia ω de la perturbación es tal que $\hbar\omega > E_{\min} - E_n^{(0)}$, donde E_{\min} es el valor de la energía a partir del cual empieza el espectro continuo.

De la ecuación (1.23), podemos ver que el papel fundamental lo juegan los estados cuyos valores de la energía E se encuentran en la vecindad de los valores $\pm \hbar\omega_{mn}$.

Si ocurre que $E \rightarrow \hbar\omega_{mn}$ entonces sólo el término $F_{mn} e^{i(\omega_{mn} - \omega)t}$ será significativo; una situación enteramente

análoga se presenta para cuando $E \rightarrow -\hbar\omega_{mn}$. Estos valores de la energía ($E = \pm \hbar\omega_{mn}$) son en los que ocurre la resonancia, es decir que la probabilidad de transición es mayor cuanto mayor es la aproximación a los valores $\pm \hbar\omega_{mn}$ esto es, para aquellos estados para los cuales la diferencia $\omega_{\nu n} - \omega$ es pequeña (aquí ν se refiere al espectro continuo), basta tomar un solo término de la ecuación (1.23) pues no hay interferencia ya que los operadores son distintos; tomemos por ejemplo, el término $F_{mn} e^{i(\omega_{mn} - \omega)t}$ con lo que :

$$a_{\nu n} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_{\nu n} dt = -\frac{F_{\nu n} e^{i(\omega_{\nu n} - \omega)t}}{\hbar(\omega_{\nu n} - \omega)}$$

por lo que podemos escribir a la probabilidad de transición como:

$$P_{\nu n} = |a_{\nu n}|^2 = \frac{4 |F_{\nu n}|^2 \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\omega_{\nu n} - \omega) t \right]}{\hbar^2 (\omega_{\nu n} - \omega)^2}$$

en caso de elegir el otro término:

$$\mathcal{W}_{\nu n} = \frac{1}{\hbar^2} |G_{\nu n}|^2 \frac{\text{sen}^2 \left[\frac{1}{2} (\omega_{\nu n} + \omega) t \right]}{(\omega_{\nu n} + \omega)^2}$$

que para tiempos grandes, son proporcionales a t y para $t \rightarrow \infty$

podemos aproximar: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}^2 at}{a^2 t} = \delta(a)$, por lo tanto en el

primer caso: $|a_{\nu n}|^2 = \frac{\pi}{\hbar^2} |F_{\nu n}|^2 t \delta \left[\frac{1}{2} (\omega_{\nu n} - \omega) \right]$ entonces como:

$$\hbar \omega_{\nu n} = E_{\nu} - E_n^{(0)} \quad \text{y} \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a};$$

$$\rightarrow \mathcal{W}_{\nu n} = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{\nu n}|^2 \delta(E_{\nu} - E_n^{(0)} - \hbar\omega) t \quad (1.29)$$

pero como estamos considerando que se trata de una transición al continuo entonces la fórmula es:

$$|a_{\nu n}|^2 d\nu = d\mathcal{W}_{\nu n} = \frac{2\pi t}{\hbar} |F_{\nu n}|^2 \delta(E_{\nu} - E_n^{(0)} - \hbar\omega) d\nu \quad (1.30)$$

esta fórmula es diferente de cero tan sólo para aquellos valores de E_{ν} tales que $E_{\nu} = E_n^{(0)} + \hbar\omega$, un resultado parecido se obtiene con el otro término.

Como ya se dijo, los estados finales están en el intervalo ν y $\nu + d\nu$ o bien entre E_{ν} y $E_{\nu} + dE_{\nu}$, este intervalo es denso y puede existir degeneración, es decir que pueden existir muchas partículas con la misma energía.

Supongamos que el intervalo dE_{ν} contiene un número $dN(E_{\nu})$ de partículas, por lo tanto debemos tomar en cuenta la suma de probabilidades sobre todo el intervalo:

$$\therefore \mathcal{W}_{\nu n} = \int_{\Delta N(E_{\nu})} \mathcal{W}_{\nu n} dN(E_{\nu})$$

si la densidad de estados finales con energía E_ν es $\rho(E_\nu)$:

$$\rightarrow dN(E_\nu) = \rho(E_\nu) dE_\nu$$

$$\therefore W_{\nu n} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{(E_\nu - \frac{1}{2}\Delta E_\nu) \rightarrow -\infty}^{(E_\nu + \frac{1}{2}\Delta E_\nu) \rightarrow +\infty} |H_{\nu n}|^2 \delta(E_\nu - E_n^{(0)} - \hbar\omega) \rho(E_\nu) dE_\nu$$

$$W_{\nu n} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{\nu n}|^2 \rho(E_n^{(0)} + \hbar\omega) \quad (1.31)$$

esta es la llamada regla de oro de Fermi, que nos dice que la probabilidad de transición es proporcional a la densidad de estados finales, esta fórmula es válida para transiciones del espectro discreto al continuo.

El hecho de que los operadores en la ecuación (1.20) no tengan el mismo efecto, es de suma importancia ya que en el caso de que la perturbación se deba al campo electromagnético sobre un sistema atómico, estos operadores resultan ser los de creación y aniquilación, en un caso se tendrá resonancia cuando un átomo perturbado por el campo absorbe un fotón y en el otro caso, cuando lo cede. En el primer caso, se trata de una absorción y en el segundo de una emisión inducida; y en general se habla de transiciones resonantes.

1.3 COEFICIENTES DE EINSTEIN.

Consideremos dos estados estacionarios no degenerados m y n , de un sistema atómico, con eigenvalores de la energía E_m y E_n , y con $E_m > E_n$.

Supongamos además que este sistema está sumergido en un campo de radiación espectral $\rho(\omega)$, a una temperatura T y que es susceptible de efectuar una transición del estado n al m con la absorción de energía $E_m - E_n$, de igual forma que puede decaer del estado m al n con la consecuente emisión de un cuanto de radiación de la misma energía. Estos dos procesos se llevan a cabo por la acción del campo externo, pero existe un tercer proceso, también de decaimiento, que es el de la emisión espontánea, éste se le atribuye al campo electromagnético del vacío, que queda aún cuando se ha quitado el campo externo, este campo fluctuante promedia a cero y tiene la capacidad de interactuar con el sistema y llevarlo de un estado excitado a uno con menor energía.

En base a esto podemos hablar de las probabilidades de transición (en un sentido puramente fenomenológico) de un átomo, en términos de tres coeficientes que están relacionados, cada uno con un proceso de transición.

Se definen⁽⁷⁾ entonces, las probabilidades de excitación: con la absorción de un cuanto de radiación de frecuencia $\omega_{mn} =$

$$\frac{E_m - E_n}{h} \text{ como:}$$

$$dW_{mn} = B_n^m \rho(\omega) dt \quad (1.32)$$

Desexcitación: acompañada de la emisión de un cuanto de frecuencia

$$\omega_{mn} :$$

$$dW_{nm} = A_m^n dt + B_m^n \rho(\omega) dt \quad (1.33)$$

con A_m^n , B_m^n y B_n^m constantes que no dependen de la temperatura.

La probabilidad dW_{nm} es proporcional sólo a la densidad espectral del campo externo, en tanto que dW_{nm} toma en cuenta al campo de vacío a través de A_m^n . Los coeficientes A_m^n , B_m^n y B_n^m se llaman coeficientes de Einstein de emisión espontánea, emisión inducida y absorción inducida, respectivamente.

Para encontrar las relaciones entre los coeficientes B y A, nos apoyamos en la ley de radiación de cuerpo negro de Planck.

Consideremos un número muy grande de átomos idénticos en equilibrio térmico con el campo de radiación a temperatura T. Sabemos que la densidad de energía radiante está dada por⁽⁵⁾:

$$\rho(\omega) = \frac{h\omega^3}{2\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1} \quad (1.34)$$

Sean N_m y N_n el número de sistemas en el estado m y en el estado n, respectivamente.

El número de sistemas que están en transición de n a m en la unidad de tiempo, es $N_n B_n^m$ y el número de sistemas que caen en transición de m a n es $N_m (A_m^n + B_m^n \rho(\omega_{mn}))$, en el equilibrio termodinámico, podemos pensar que es válido el principio de balance detallado⁽⁶⁾, con lo que:

$$\rho(\omega_{mn}) N_n B_n^m = N_m (A_m^n + B_m^n \rho(\omega_{mn})) \quad (1.35)$$

$$\therefore \frac{N_n}{N_m} = \frac{A_m^n + B_m^n \rho(\omega_{mn})}{B_m^n \rho(\omega_{mn})}$$

Un conjunto de sistemas que cumplen con estas hipótesis, satisfacen la distribución de Boltzman, por lo tanto:

$$\frac{N_n}{N_m} = e^{-(E_n - E_m)/kt} = e^{h\omega_{mn}/kt} = \frac{A_m^n + B_m^n \rho(\omega_{mn})}{B_m^n \rho(\omega_{mn})}$$

$$\therefore \rho(\omega_{mn}) = \frac{A_m^n}{B_n^m e^{h\omega_{mn}/kt} - B_m^n} \quad (1.36)$$

si esta ecuación ha de ser igual a (1.34) con $\omega = \omega_{mn}$ entonces, reescribiendo esta última:

$$\rho(\omega_{mn}) = \frac{A_m^n}{B_m^n} \left\{ \frac{1}{\frac{B_n^m}{B_m^n} e^{h\omega_{mn}/kt} - 1} \right\}$$

comparando con (1.34), obtenemos:

$$B_n^m = B_m^n \quad (1.37)$$

$$A_m^n = \frac{h\omega_{mn}^3}{2\pi^2 c^3} B_m^n \quad (1.38)$$

sustituyendo estas relaciones en (1.33) para la emisión:

$$d^2W_{nm} = \frac{h\omega_{mn}}{2\pi^2 c^3} B_m^n dt + B_m^n \rho(\omega_{mn}) dt \quad (1.39)$$

de ésta se ve que el factor $\frac{h\omega_{mn}^3}{2\pi^2 c^3}$, juega el papel de una densidad espectral atómica⁽⁹⁾ responsable del decaimiento espontáneo, luego el campo de vacío es el campo electromagnético residual, a $T = 0$.

1.4 TIEMPO DE VIDA MEDIA, TIEMPO DE EXCITACION⁽¹⁰⁾.

Cuando un átomo con un electrón en un estado de baja energía, es capaz de subir a un estado de mayor energía, es natural preguntarse por el tiempo en el que permanece en ese estado excitado.

Experimentos muestran que la estabilidad de un estado puede caracterizarse por un sólo parámetro Γ , que tiene dimensiones de tiempo, y es llamado tiempo de vida media.

Si queremos tener el tiempo de vida media en términos de los coeficientes de Einstein, recordamos que si A_m^n es la probabilidad de transición por unidad de tiempo, su inverso será precisamente el tiempo de excitación del estado Ψ_n , en otras palabras, $(A_m^n)^{-1}$ es el tiempo medio que tarda en ocurrir una transición $m \rightarrow n$.

Un átomo que se encuentra excitado puede decaer en diferentes formas al estado base, estas formas de decaimiento dan paso a las reglas de selección.

CAPITULO 2
SEGUNDA CUANTIZACION

2.1 FORMALISMO DE SEGUNDA CUANTIZACION⁽⁶⁾.

En este capítulo vamos a introducir algunos conceptos importantes del formalismo de segunda cuantización, con el fin de usarlos en deducciones posteriores.

Consideremos un campo electromagnético en ausencia de cargas que se encuentra en un volumen finito, podemos desarrollar todas las magnitudes que caracterizan al campo en serie de Fourier, por ejemplo el potencial vectorial:

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left(\vec{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{a}_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad (2.1)$$

la suma se extiende sobre todas las posibles direcciones del vector de propagación \vec{k} , si suponemos que se trata de un volumen en forma de paralelepípedo de la x , y y z , entonces las componentes de \vec{k} serán: $k_x = \frac{2\pi n_x}{A}$, $k_y = \frac{2\pi n_y}{B}$ y $k_z = \frac{2\pi n_z}{C}$; en la norma de Coulomb el campo es transversal, ya que el vector de onda es ortogonal a cada coeficiente $\vec{a}_{\vec{k}}$, esto implica que las componentes del campo oscilan en un plano normal a \vec{k} , luego, hay dos posibles direcciones de polarización independientes, ortogonales a la dirección de propagación.

Los coeficientes $\vec{a}_{\vec{k}}$ son funciones del tiempo y satisfacen las ecuaciones:

$$\ddot{\vec{a}}_{\vec{k}} + c^2 k^2 \vec{a}_{\vec{k}} = 0 \quad (2.2)$$

que son del tipo de oscilador armónico, con frecuencia de oscilación $\omega_{\vec{k}} = ck$. Si escogemos una representación del campo en ondas planas móviles y suponemos que los $\vec{a}_{\vec{k}}$ dependen del tiempo en la forma:

$$\vec{a}_{\vec{k}} \sim e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \quad (2.3)$$

entonces cada término de (2.1) depende de la diferencia:

$$(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}}t).$$

Hagamos una transformación canónica, para darle a las ecuaciones del campo una forma análoga a las ecuaciones de Hamilton, introduciendo las variables:

$$\vec{Q}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\bar{V}}{4\pi c^2}} \left[\vec{a}_{\vec{k}} + \vec{a}_{\vec{k}}^* \right]; \quad \vec{P}_{\vec{k}} = -i\omega_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\bar{V}}{4\pi c^2}} \left[\vec{a}_{\vec{k}} - \vec{a}_{\vec{k}}^* \right] \quad (2.4)$$

por lo que el hamiltoniano del campo resulta ser:

$$H = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \left[\vec{P}_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{Q}_{\vec{k}}^2 \right] \quad (2.5)$$

así como las ecuaciones de Hamilton: $\frac{\partial H}{\partial \vec{P}_{\vec{k}}} = \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}$; $\frac{\partial H}{\partial \vec{Q}_{\vec{k}}} = -\dot{\vec{P}}_{\vec{k}}$

con lo que $\ddot{\vec{Q}}_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{Q}_{\vec{k}} = 0$, que son idénticas a las ecuaciones (2.2), como hay dos componentes independientes a la dirección de propagación, introducimos un segundo índice σ , que indica las dos posibles polarizaciones, por lo tanto, llamando $Q_{\vec{k}\sigma}$ a las componentes del vector $\vec{Q}_{\vec{k}}$ en el plano normal a \vec{k} , entonces

$$\vec{Q}_{\vec{k}}^2 = \sum Q_{\vec{k}\sigma}^2, \text{ análogamente para } \vec{P}_{\vec{k}}.$$

$$\therefore H = \sum_{\vec{k}, \sigma} H_{\vec{k}\sigma}; \quad H_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{2} \left[\vec{P}_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 \vec{Q}_{\vec{k}\sigma}^2 \right] \quad (2.6)$$

Con esto, puede verse que el hamiltoniano se descompone en una suma de hamiltonianos independientes, cada uno contiene sólo un par de magnitudes $\vec{Q}_{\vec{k}\sigma}^2, \vec{P}_{\vec{k}\sigma}^2$, en cada caso $H_{\vec{k}\sigma}$ tiene la forma de un hamiltoniano de oscilador armónico, de aquí el nombre de

descomposición en un campo de osciladores, así pues, la forma más natural de cuantizar al campo es usar osciladores cuánticos en la ec. (2.6).

El operador asociado a (2.6) en mecánica cuántica es:

$$\hat{H}_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{2} \left[\hat{p}_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega^2 \hat{q}_{\vec{k}\sigma}^2 \right] = \hat{H}^+ \quad (2.7)$$

ahora $\hat{p}_{\vec{k}\sigma}$ y $\hat{q}_{\vec{k}\sigma}$ son operadores que cumplen con las relaciones de conmutación:

$$\left[\hat{p}_{\vec{k}\sigma}, \hat{q}_{\vec{k}\sigma} \right] = -i\hbar \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} ; \left[\hat{q}_{\vec{k}\sigma}, \hat{q}_{\vec{k}\sigma} \right] = \left[\hat{p}_{\vec{k}\sigma}, \hat{p}_{\vec{k}\sigma} \right] = 0$$

en la representación de Schrödinger estos operadores son independientes del tiempo, y el vector de estado satisface:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

cuya solución formal es:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$$

para pasar a la representación de Heisenberg, hacemos una transformación:

$$|\Psi_H(t)\rangle = U(t,0) |\Psi_H(0)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\Psi_H(0)\rangle$$

donde U es unitaria; por lo tanto, para los operadores

$\hat{q}_{\vec{k}\sigma}$, $\hat{p}_{\vec{k}\sigma}$ y $\hat{H}_{\vec{k}\sigma}$ tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_H &= \hat{q}_H(\mathbf{k}, t) = U^\dagger(\mathbf{k}, 0) \hat{q}_H(\mathbf{k}, 0) U(\mathbf{k}, 0) \\ \hat{p}_H &= \hat{p}_H(\mathbf{k}, t) = U^\dagger(\mathbf{k}, 0) \hat{p}_H(\mathbf{k}, 0) U(\mathbf{k}, 0) \\ \hat{H}_H &= \hat{H}_H(\mathbf{k}, \sigma, t) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_{H\mathbf{k}\sigma}^2 + \omega^2 \hat{q}_{H\mathbf{k}\sigma}^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

y las ecuaciones de movimiento quedan como:

$$\frac{d\hat{q}_H}{dt} = \frac{\partial \hat{H}_H}{\partial \hat{p}_H} = \hat{p}_H \quad ; \quad \frac{d\hat{p}_H}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}_H}{\partial \hat{q}_H} = -\omega^2 \hat{q}_H$$

cuyas soluciones son:

$$\hat{q}_H(\mathbf{k}, t) = \hat{q}_H(\mathbf{k}, 0) \cos \omega t + \frac{\hat{p}_H(\mathbf{k}, 0)}{\omega} \sin \omega t$$

$$\hat{p}_H(\mathbf{k}, t) = -\omega \hat{q}_H(\mathbf{k}, 0) \sin \omega t + \hat{p}_H(\mathbf{k}, 0) \cos \omega t$$

es conveniente introducir los operadores no hermitianos \hat{a} y \hat{a}^\dagger :

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega \hat{q}_{\mathbf{k}\sigma} + i \hat{p}_{\mathbf{k}\sigma} \right) \quad (2.9)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega \hat{q}_{\mathbf{k}\sigma} - i \hat{p}_{\mathbf{k}\sigma} \right)$$

estos son los operadores de aniquilación y creación, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_{\mathbf{k}\sigma} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \right) \\ \hat{p}_{\mathbf{k}\sigma} &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ satisfacen las relaciones de conmutación:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right] = 1 \quad ; \quad \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \right] = 0 \quad (2.11)$$

sustituyendo (2.9) en (2.7) obtenemos:

$$\hat{H}_{\vec{k}\sigma} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\hat{a}_{\vec{k}\sigma} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \right) \quad (2.12)$$

sustituyendo (2.11) en esta última:

$$\hat{H}_{\vec{k}\sigma} = \hbar\omega \left(\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.13)$$

se tienen también los conmutadores:

$$\left. \begin{aligned} \left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^+ \right] &= \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \\ \left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^+ \right] &= -\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

y así las ecuaciones de movimiento de Heisenberg serán:

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}, \hat{H}_H \right] = -i\omega \hat{a}_{\vec{k}\sigma} \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+, \hat{H}_H \right] = i\omega \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+$$

antes de dar las expresiones para el potencial vectorial y las componentes del campo \vec{E} y \vec{B} en términos de los operadores de creación y aniquilación veamos como se aplican \hat{a} y \hat{a}^+ , y cuál es el tipo de funciones sobre las que actúan.

Sea $(\psi_n(\xi))$ un conjunto completo de funciones de onda ortonormales, de los estados estacionarios, generalmente se escogen funciones de onda de partícula libre con valores determinados del momento y de la proyección de espín. En un sistema de partículas libres los momentos se conservan por separado y por lo tanto se conservan también los números de ocupación de los estados, o sea los números N_1, N_2, \dots , que indican cuantas partículas se encuentran en cada uno de los correspondientes estados $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$, es precisamente

en el formalismo de segunda cuantización, en donde los números de ocupación juegan un papel fundamental; en un sistema de partículas, los momentos de cada una de las partículas no se conservan y tampoco tienen porque conservarse los números de ocupación, en este caso sólo se puede hablar de una distribución de probabilidades de los números de ocupación.

En segunda cuantización, un sistema se describe mediante la función de onda en el espacio de los números de ocupación, así por ejemplo: $\Phi(N_1, N_2, \dots)$; el cuadrado de $|\Phi|$ determina la probabilidad de los distintos valores de los números N_1, N_2, \dots .

Los operadores \hat{a} y \hat{a}^+ actuando sobre Φ tienen las siguientes propiedades:

$$\hat{a}_i \Phi(N_1, N_2, \dots, N_i, N_{i+1}, \dots) = \sqrt{N_i} \Phi(N_1, N_2, \dots, N_i-1, N_{i+1}, \dots) \quad (2.16)$$

$$\hat{a}_i^+ \Phi(N_1, N_2, \dots, N_i, N_{i+1}, \dots) = \sqrt{N_i+1} \Phi(N_1, N_2, \dots, N_i+1, N_{i+1}, \dots) \quad (2.17)$$

donde i se refiere al estado.

Así pues, la interpretación física de \hat{a}_i y \hat{a}_i^+ es que el primero aniquila partículas y el segundo las crea, en el estado i .

El operador de número $\hat{a}_i^+ \hat{a}_i = \hat{N}_i$ actuando sobre Φ , sólo la multiplica por el número de partículas en ese estado.

$$\hat{N}_i \Phi(N_1, N_2, \dots, N_i, N_{i+1}, \dots) = N_i \Phi(N_1, N_2, \dots, N_i, N_{i+1}, \dots) \quad (2.18)$$

La función Φ la podemos escribir como un eigenket $|N_1, N_2, \dots, N_i, \dots\rangle$ que a la vez se puede escribir como el producto de eigenkets individuales.

$$|N_1 N_2 N_3 \dots N_i \dots\rangle = |N_1\rangle |N_2\rangle \dots = |N_{k1\sigma 1}^+\rangle |N_{k2\sigma 2}^+\rangle \dots \quad (2.19)$$

y como el conjunto es ortonormal:

$$\langle N_1 N_2 \dots | N_1' N_2' \dots \rangle = \delta_{11'} \delta_{22'} \dots \quad (2.20)$$

Consideremos ahora el estado i con N_i partículas, entonces:

$$\begin{aligned} \hat{N}_i |N_i\rangle &= \hat{a}_i^+ \hat{a}_i |N_i\rangle = N_i |N_i\rangle \\ \rightarrow \hat{N}_i \hat{a}_i^+ |N_i\rangle &= (\hat{a}_i^+ \hat{N}_i + \hat{a}_i^+) |N_i\rangle = \hat{a}_i^+ \hat{N}_i |N_i\rangle + \hat{a}_i^+ |N_i\rangle \\ &= N_i \hat{a}_i^+ |N_i\rangle + \hat{a}_i^+ |N_i\rangle = (N_i + 1) \hat{a}_i^+ |N_i\rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

análogamente:

$$\hat{N}_i \hat{a}_i |N_i\rangle = (N_i - 1) \hat{a}_i |N_i\rangle \quad (2.22)$$

lo que quiere decir que $\hat{a}_i^+ |N_i\rangle$ y $\hat{a}_i |N_i\rangle$ son otros eigenvectores con eigenvalores $(N_i + 1)$ y $(N_i - 1)$, respectivamente; así pues, los elementos de matriz de los operadores \hat{a}^+ , \hat{a} y \hat{N} son:

$$\langle N_i | \hat{a}_i^+ | N_i - 1 \rangle = \langle N_i - 1 | \hat{a}_i | N_i \rangle = \sqrt{N_i} \quad (2.23)$$

$$\langle N_i | \hat{N}_i | N_{i+1} \rangle = (N_i + 1) \delta_{N_i, N_{i+1}} \quad (2.24)$$

vemos que si se aplica iterativamente el operador $\hat{N}_i \hat{a}_i$ a $|N_i\rangle$ podemos obtener el estado de vacío $|0\rangle = |0_{11}\rangle |0_{22}\rangle \dots$, que tiene la propiedad de que \hat{a}_i actuando sobre $|0\rangle$ da el estado de cero partículas; aplicando \hat{a}_i^+ repetidamente a $|0\rangle$ se obtiene:

$$|N_i N_i \dots\rangle = \frac{[\hat{a}_i^+]^{N_i} |0\rangle}{\sqrt{N_i!}} \quad (2.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_i |0\rangle &= |0\rangle \\ \hat{a}_i^+ |0\rangle &= |1\rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

en base a este formalismo se pueden expresar⁽¹⁴⁾ \hat{A} , \hat{E} y \hat{B} en términos de \hat{a} y \hat{a}^+ como:

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right] \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \\ &= i \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{\Omega}} \hat{e}^{(\sigma)} \cdot \left[\hat{a}_{k\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{k\sigma}^{\dagger} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \\ &= -\frac{i}{c} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{\Omega}} (\hat{e}^{(\sigma)} \times \vec{k}) \left[\hat{a}_{k\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{k\sigma}^{\dagger} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

en estas ecuaciones $\hat{e}^{(\sigma)}$, son los vectores unitarios de polarización con $\sigma = 1, 2$ y Ω es el volumen que contiene al campo.

El hamiltoniano está dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar\omega_k (\hat{a}_{k\sigma} \hat{a}_{k\sigma}^{\dagger} + \hat{a}_{k\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{k\sigma}) \quad (2.30)$$

donde se ha usado (2.13); también se puede obtener el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \vec{E} \times \vec{B} d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hbar\vec{k} (\hat{a}_{k\sigma} \hat{a}_{k\sigma}^{\dagger} + \hat{a}_{k\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{k\sigma}) \quad (2.31)$$

con (2.27), (2.28) y (2.29) podemos encontrar los conmutadores de los vectores eléctricos a tiempos iguales, así como los cuadrados de los operadores.

Sea A_i la i -ésima componente del potencial vectorial y E_j la j -ésima del campo eléctrico, entonces:

$$[A_i, E_j] = -\frac{i\hbar}{2\Omega} \sum_{\vec{k}, \sigma} (\hat{e}^{(\sigma)})_i (\hat{e}^{(\sigma)})_j \left[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right] \quad (2.32)$$

como los vectores $\hat{e}_i^{(\sigma)}$, $\hat{e}_j^{(\sigma)}$ y \vec{k} forman un sistema ortogonal derecho tal que:

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \hat{\epsilon}^{(\sigma')} &= \delta_{\sigma\sigma'} \\
 \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{k} &= 0 \\
 \hat{\epsilon}^{(1)} \times \hat{\epsilon}^{(2)} &= \vec{k} \\
 \hat{\epsilon}^{(1)} \times \vec{k} &= -\hat{\epsilon}^{(2)} \\
 \hat{\epsilon}^{(2)} \times \vec{k} &= \hat{\epsilon}^{(1)} \\
 \rightarrow \sum_{\sigma} \langle \hat{\epsilon}_{k\sigma} \rangle_i \langle \hat{\epsilon}_{k\sigma} \rangle_j &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \\
 \sigma, \sigma' &= 1, 2.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

sustituyendo tenemos:

$$[A_i(\vec{r}, t), E_j(\vec{r}', t)] = -\frac{i\hbar}{\Omega} \sum_{\vec{k}} [\delta_{ij} - \langle \vec{k} \rangle_i \langle \vec{k} \rangle_j] e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \quad (2.34)$$

si ahora hacemos tender el volumen del paralelepípedo al infinito ($\Omega \rightarrow \omega$), entonces la suma se transforma en una integral.

$$\therefore [A_i, E_j] = -i\hbar \delta_{ij}^T(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.35)$$

donde:

$$\delta_{ij}^T \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} (\delta_{ij} - \langle \vec{k} \rangle_i \langle \vec{k} \rangle_j)$$

es la llamada función delta transversal.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
 [A_i, A_j] &= \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}} \Omega} \langle \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \rangle_i \langle \hat{\epsilon}^{(\sigma')} \rangle_j \left[e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} - e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \right] \\
 &= i\hbar \sum_{\vec{k}} \frac{4\pi}{\omega_{\vec{k}} \Omega} [\delta_{ij} - \langle \vec{k} \rangle_i \langle \vec{k} \rangle_j] \text{sen } \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')
 \end{aligned}$$

como $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ y $\vec{k}_{-\vec{k}} = -\vec{k}_{\vec{k}} \rightarrow \omega_{\vec{k}}^{-1} \langle \delta_{ij} - \langle \vec{k} \rangle_i \langle \vec{k} \rangle_j \rangle$ es par bajo un

cambio de $-\vec{k}$ por \vec{k} , mientras que el seno es impar, entonces la suma se anula.

$$\therefore [A_i(\vec{r}, t), A_j(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.36)$$

en forma enteramente análoga:

$$\therefore [E_i(\vec{r}, t), E_j(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.37)$$

$$[B_i(\vec{r}, t), B_j(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.38)$$

de la ecuación (2.33) se desprende la siguiente igualdad:

$$\sum_j \hat{e}^{(\sigma)}_i \times \vec{k}_j \hat{e}^{(\sigma)}_i \times \vec{k}_j = \sum_j \hat{e}^{(\sigma)}_i \hat{e}^{(\sigma)}_j$$

usando ésto, obtenemos:

$$[E_i(\vec{r}, t), B_j(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.39)$$

$$[E_i(\vec{r}, t), B_j(\vec{r}', t)] = \begin{cases} -4\pi i k \epsilon_{ijl} \partial_{x_l} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ +4\pi i k \epsilon_{ijl} \partial_{x_l} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{cases} \quad (2.40)$$

$$i, j, l = 1, 2, 3.$$

aquí ϵ_{ijl} es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita.

De estas últimas ecuaciones se concluye que las componentes paralelas de los vectores \vec{E} y \vec{B} se pueden medir simultáneamente, es decir, se tiene dispersión nula, en tanto que para las componentes perpendiculares la dispersión es diferente de cero.

2.2 FLUCTUACIONES DEL CAMPO DE VACÍO⁽¹¹⁾.

Como habíamos visto en el § 1.3, existe un campo de vacío de origen electromagnético que promedia a cero y que tiene una energía asociada que es diferente de cero, veamos ahora cómo podemos obtener estos resultados usando el formalismo de segunda cuantización.

Escribamos la componente j -ésima del campo eléctrico en la representación de Heisenberg (donde los operadores son los que llevan la dependencia temporal).

$$E_j(\vec{r}, t) = E_j^{(+)}(\vec{r}, t) + E_j^{(-)}(\vec{r}, t)$$

$$\left. \begin{aligned} E_j^{(+)}(\vec{r}, t) &\equiv i \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{\Omega}} \langle \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \rangle_j \langle \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ \rangle e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \\ E_j^{(-)}(\vec{r}, t) &\equiv i \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{\Omega}} \langle \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \rangle_j \langle \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^+ \rangle e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

calculando el elemento de matriz $\langle \Psi(0) | E_j^{(+)}(\vec{r}, t) | \Psi(0) \rangle$ con $|\Psi(0)\rangle$ el estado del campo en $t=0$.

$$|\Psi(0)\rangle = |N_1, N_2, \dots\rangle \quad (2.42)$$

usando la relación de ortogonalidad (2.20) para este eigenestado obtenemos:

$$\langle E_j \rangle = 0 \quad (2.43)$$

$$\langle B_j \rangle = 0 \quad (2.44)$$

si ahora calculamos el cuadrado de E_j :

$$E_j^2 = E_j^{(+2)} + E_j^{(-2)} + E_j^{(+)} E_j^{(-)} + E_j^{(-)} E_j^{(+)}$$

$$\therefore \langle E_j^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{\Omega} \langle \hat{e}_j^{(\sigma)} \rangle^2 \left[N_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right]$$

usando las siguientes relaciones:

$$\hat{E}^2 = \sum_j E_j^2 \quad ; \quad \sum_{j\sigma} \langle \hat{e}_j^{(\sigma)} \rangle^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \langle \hat{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\sigma} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{\Omega} \left[N_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right]$$

si $N_{\vec{k}\sigma} = 0$, es decir el estado de vacío:

$$\langle \hat{E}^2 \rangle_{\text{vacío}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} \quad (2.45)$$

en un cálculo totalmente parecido:

$$\langle \hat{B}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} \quad (2.46)$$

$$\therefore \langle 0 | \hat{E}^2 + \hat{B}^2 | 0 \rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} \quad (2.47)$$

esto muestra las principales características del campo de vacío, en tanto que las ecuaciones (2.43) y (2.44) nos dicen que el campo promedia a cero, las ecuaciones (2.45), (2.46) y (2.47) muestran que el promedio de la energía por modo es distinto de cero y, ya que cada modo del campo contribuye con una cantidad igual y como existe un número infinito de modos en el volumen Ω ($\Omega \rightarrow \infty$) entonces el promedio de la energía del vacío es infinito, esto no deja de ser un resultado sorprendente, puesto que en base a esto se puede entender el fenómeno de decaimiento radiativo de los estados excitados.

2.3 CORRECCIONES RADIATIVAS⁽¹²⁾.

Consideremos la ecuación de Schrödinger (1.2); como cualquier función de onda se puede escribir como (1.5) y se tiene una base ortonormal y completa:

$$\int \psi_n^*(\vec{x}) \psi_m(\vec{x}) d\vec{x} = \delta_{nm} \quad (2.48)$$

$$\sum_n \psi_n(\vec{x}) \psi_n^*(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.49)$$

en base a esto podemos obtener el coeficiente (1.7), que sustituirlo en (1.5):

$$\Psi(\vec{x}_2, t_2) \equiv \int \sum_n \psi_n(\vec{x}_2) e^{-iE_n \frac{t_2}{\hbar}} \psi_n^*(\vec{x}_1) e^{-iE_n \frac{t_1}{\hbar}} \Psi(\vec{x}_1, t_1) d\vec{x}_1$$

donde se ha hecho el cambio de notación

$$(\vec{x}', t') \rightarrow (\vec{x}_1, t_1) \rightarrow (1)$$

$$(\vec{x}, t) \rightarrow (\vec{x}_2, t_2) \rightarrow (2)$$

$\Psi(2)$ se puede escribir como

$$\Psi(2) = \int K'(2;1) \Psi(1) d\vec{x} \quad (2.50)$$

donde K' es el propagador de Feynman; así resulta totalmente equivalente resolver (1.1), una ecuación diferencial, que resolver (2.50) que es una ecuación integral, siempre que se conozca el propagador K' .

En mecánica cuántica no relativista, un electrón se propaga siempre hacia el futuro, así que para que K' lo lleve a estados futuros a partir de un estado dado, es preciso que

$$K'(2;1) = K(2;1) \quad \text{para } t_2 > t_1 \quad (2.51)$$

$$K(2;1) = 0 \quad \text{para } t_2 < t_1$$

y que $K(2;1)$ sea el núcleo de la ecuación (2.50). En general a esta función se le llama función de Green retardada, pues está implícito en ella el principio de causalidad de Galileo⁽¹⁹⁾.

Podemos expresar la condición (2.51) como:

$$K(2;,1) = \sum_n \psi_n(\vec{x}_2) \Theta \left(-iE_n \frac{t_2}{\hbar} \right) \psi_n^*(\vec{x}_1) e^{iE_n \frac{t_1}{\hbar}} \Theta(t_2 - t_1) \quad (2.52)$$

donde Θ es la función de Heaviside.

Si aplicamos el operador $[i\hbar\partial_{t_2} - \hat{H}_0(2)]$ a (2.52):

$$[i\hbar\partial_{t_2} - \hat{H}_0(2)] K(2;,1) = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \equiv i\hbar \delta^4(2;,1) \quad (2.53)$$

ésta es la ecuación que satisface el propagador; se puede ver que:

$$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \quad (2.54)$$

Escribamos ahora el hamiltoniano como en (1), $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$, sabiendo que K satisface la ec. de Schrödinger, entonces tenemos una ecuación análoga a (2.53) para el hamiltoniano \hat{H} .

$$[i\hbar\partial_{t_2} - \hat{H}(2)] K(2;,1) = i\hbar \delta^4(2;,1) \quad (2.55)$$

suponiendo que $K(2;,1)$ es la solución de la ec. de Schrödinger del sistema no perturbado, ec.(2.53), entonces la solución del sistema perturbado se puede escribir como:

$$K(2;,1) = K_0(2;,1) - i\hbar^{-1} \int K_0(2;3) \hat{H}'(3) K_0(3;1) d^4x_3 \quad (2.56)$$

ésta es la aproximación a primer orden y K_0 representa la aproximación a orden cero. Supongamos que $K(2;,1)$ se puede escribir como una serie convergente, las siguientes aproximaciones resultan ser:

$$\begin{aligned} K(2;,1) = & K_0(2;,1) - i\hbar^{-1} \int K_0(2;3) \hat{H}'(3) K_0(3;1) d^4x_3 + \\ & + [-i\hbar^{-1}]^2 \int K_0(2;3) \hat{H}'(3) K_0(3;4) \hat{H}'(4) K_0(4;1) d^4x_3 d^4x_4 + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

para \hat{H}' pequeño. Aquí podemos hacer la comparación entre (1.19) y (2.57), resultará claro que se tiene una descripción totalmente equivalente a la hecha para las funciones de onda. Podemos hacer una representación gráfica⁽¹³⁾ de los términos de la serie (2.57):

esta representación expresa lo siguiente: en la aproximación a orden cero la propagación real de la partícula, de 1 a 2, se puede aproximar como la propagación libre K_0 , a primer orden tiene lugar una propagación libre de 1 a 3, $K_0(3;1)$ en donde la partícula sufre una dispersión y después se mueve libremente hasta 2, etc..

Como los estados intermedios son totalmente arbitrarios debemos sumar sobre estas posibles realizaciones⁽¹³⁾.

Cuando un electrón es dispersado por algún potencial, es acelerado y emite radiación, este proceso es conocido como *Bremsstrahlung*.

Si las dispersiones son acompañadas de la emisión o absorción de cuantos de radiación, los diagramas se modifican:

Cada término de esta serie se asocia con una corrección radiativa, así por ejemplo, el diagrama asociado a una dispersión

por un campo coulombiano sobre un electrón es:

(2.60)

para la energía propia, es decir, la energía que tiene una partícula cuando emite un fotón y cambia de estado:

(2.61)

la renormalización de la masa:

(2.62)

En particular cuando el potencial externo es debido al campo electromagnético, nos van a importar los primeros términos de la serie (hasta segundo orden).

El efecto Lamb resulta de la suma de las correcciones radiativas de la amplitud de dispersión de un electrón por un potencial externo.

Este efecto consiste de un corrimiento de los niveles de

energía de un átomo en presencia de un campo electromagnético que da lugar a los términos de la serie (2.57), estas correcciones se manifiestan como una energía extra que da lugar al corrimiento.

En estas correcciones aparecen también, modificaciones a la masa, como lo muestra el diagrama (2.62), esto es, a la masa real se debe sumar una pequeña contribución que es producto de la interacción del campo con el átomo. Esta contribución, llamada masa electromagnética, da origen a un término infinito al momento de integrar las ecuaciones, por lo que es necesario introducir un procedimiento de renormalización para obtener finalmente la contribución finita.

2.4 DESCRIPCIÓN CUÁNTICA DE LAS CORRECCIONES RADIATIVAS⁽¹⁴⁾.

2.4.1 LA ENERGÍA PROPIA.

Consideremos un sistema atómico en un estado A, la energía propia^(14a) de un electrón se puede entender en términos de la teoría cuántica de campos, como un proceso de emisión y absorción de fotones que son virtuales, es decir: un electrón emite un fotón virtual y después de un tiempo, éste es reabsorbido por el mismo electrón, en este proceso el estado del electrón puede cambiar, pero al capturar al fotón retorna a su estado original.

Desde el punto de vista cuántico podemos describir a dicho sistema mediante la ecuación de Schrödinger con hamiltoniano dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right]^2 + V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left[p_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 q_{\vec{k}\sigma}^2 \right] \quad (2.63)$$

\vec{A} es el potencial vectorial dado por la ecuación (2.27), $V(\vec{x})$ es el potencial escalar asociado a la fuerza externa y el último sumando es el hamiltoniano del campo dado por (2.6); desarrollando el cuadrado:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p}^2 - \frac{e}{c} \vec{p} \cdot \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 \right] + V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left[p_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 q_{\vec{k}\sigma}^2 \right]$$

como se ha escogido la norma de Coulomb, entonces los operadores \vec{p} y \vec{A} conmutan, por lo tanto:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p}^2 - 2\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 \right] + V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left[p_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 q_{\vec{k}\sigma}^2 \right] \quad (2.64)$$

para resolver la ecuación de Schrödinger asociada a este

hamiltoniano, vamos a considerar al segundo y tercer suandos como perturbaciones a primero y segundo órdenes en e (la carga del electrón), respectivamente.

Los diagramas de Feynman correspondientes a estas perturbaciones son, como se vió en la sección anterior, los siguientes:

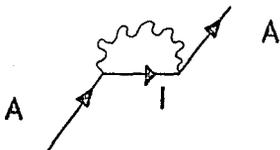


fig. 2.1

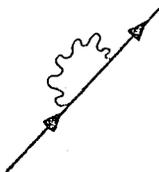


fig. 2.2

en la figura 2.1 se muestra el proceso para el término en $\vec{A} \cdot \vec{p}$, y en la figura 2.2 el correspondiente a \vec{A}^2 .

Es claro que al considerar el efecto de varios átomos, el hamiltoniano de interacción será una suma sobre todos los elementos del sistema.

$$\hat{H}_{int.} = \sum_i \frac{1}{2m} \left[-2 \frac{e}{c} \vec{A}_i \cdot \vec{p}_i + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}_i^2 \right] \quad (2.65)$$

Veamos en primer lugar el término en $\vec{A} \cdot \vec{p}$, los elementos de matriz de esta perturbación están dados, de acuerdo con (1.12), para emisión, $A \rightarrow I + \gamma$ y de absorción, $I + \gamma \rightarrow A$, respectivamente:

$$\hat{H}_{IA}^{(emis)} = \hat{H}_{IA} e^{i\omega t} \quad (2.66)$$

$$\hat{H}_{IA}^{(abs)} = \hat{H}_{AI} e^{-i\omega t} \quad (2.67)$$

a primer orden en e , para un átomo, (2.65) adquiere la forma:

$$\hat{H}_{int.} = -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}} \Omega}} \left[\hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} + \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \right] (\hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p})$$

$$\langle I | \hat{H}_{int.} | A \rangle = \langle A | \hat{H}_{int.} | I \rangle^* =$$

$$= -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}} \Omega}} \langle I | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle$$

$$- \frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}} \Omega}} \langle I | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle$$

aquí se ve que podemos separar $\hat{H}_{int.}$ para emisión y absorción de la siguiente forma:

$$\hat{H}_{int.} = \hat{H}^{\hat{a}} + \hat{H}^{\hat{a}^{\dagger}} \quad (2.68)$$

en donde:

$$\hat{H}^{\hat{a}^{\dagger}} \equiv -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}} \Omega}} \langle I | \hat{a}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle \quad (2.69)$$

$$\hat{H}^{\hat{a}} \equiv -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}} \Omega}} \langle I | \hat{a}_{\vec{k}\sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle \quad (2.70)$$

que se identifican claramente con (2.66) y (2.67) respectivamente, si se separa la parte temporal.

En virtud de (1.22), tomemos sólo uno de los operadores; si desarrollamos la exponencial de (2.69) en serie de potencias y nos quedamos con el primer término, es decir, tomamos la aproximación dipolar⁽⁴⁴⁾, entonces (2.69) queda como:

$$\hat{H}^{\hat{a}+} = - \frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}\Omega}} \langle I | \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle$$

si convenimos en que:

$$\langle I | \equiv \langle I, N_{\vec{k}\sigma} | \quad \text{y} \quad | A \rangle = | N_{\vec{k}\sigma}, A \rangle$$

y usando (2.17):

$$\hat{H}^{\hat{a}+} = - \frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}\Omega}} \sqrt{N_{\vec{k}\sigma} + 1} \langle I, N_{\vec{k}\sigma} + 1 | \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | N_{\vec{k}\sigma}, A \rangle \quad (2.71)$$

para la emisión el estado inicial es de cero fotones y el final es de un fotón, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}^{\hat{a}+} &= - \frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}\Omega}} \langle I, 1 | \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | 0, A \rangle \\ \hat{H}^{\hat{a}+} &\equiv - \frac{e}{mc} \sum_{\vec{k}, \sigma} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}\Omega}} \langle I | \hat{\epsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

para obtener los coeficientes $a_I(t)$ y $a_A(t)$ de la teoría de perturbaciones, usamos (1.10), que en este caso toman la siguiente forma, para la emisión, con A el estado inicial e I el final:

$$\dot{a}_I(t) = - \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{H}_{IA}^{(\text{emis})} a_A(t) e^{i\omega_{IA}t} \quad (2.73)$$

y para la absorción, el estado inicial es I y el final es A:

$$\dot{a}_A(t) = - \frac{i}{\hbar} \sum_I \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{H}_{AI}^{(\text{abs})} a_I(t) e^{i\omega_{AI}t} \quad (2.74)$$

donde \sum_I es la suma sobre todos los posibles estados intermedios;

ahora bien, como estamos interesados en encontrar una expresión

para el cambio de energía del estado A, proponemos como solución para (2.73) y (2.74) una función en la cual el coeficiente a_A tenga la forma:

$$a_A = \exp \left\{ -i \Delta E_A \frac{t}{\hbar} \right\} \quad (2.75)$$

con lo que la función de onda tendrá la forma:

$$\Psi = \psi_A(\vec{X}) e^{-i(E_A + \Delta E_A) \frac{t}{\hbar}} \quad (2.76)$$

que es la ecuación correspondiente a (1.18), precisamente con la dependencia temporal para un estado con energía $E + \Delta E$, sustituyendo (2.75) en (2.73) e integrando:

$$a_I(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{H}_{IA}^{(\text{emis})} \int_0^t e^{i(E_I - \Delta E_A - E_A + \hbar\omega) \frac{t}{\hbar}} dt \quad (2.77)$$

$$= \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{H}_{IA}^{(\text{emis})} \left[\frac{e^{i(E_I - \Delta E_A - E_A + \hbar\omega) \frac{t}{\hbar}} - 1}{(E_A + \Delta E_A - E_I - \hbar\omega)} \right] \quad (2.78)$$

para el cambio en la energía sustituimos (2.75) en (2.74) y (2.78):

$$\Delta E_A = \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_I |\hat{H}_{IA}|^2 \left[\frac{1 - e^{i(E_I - \Delta E_A - E_A + \hbar\omega) \frac{t}{\hbar}}}{(E_A + \Delta E_A - E_I - \hbar\omega)} \right] \quad (2.79)$$

hasta segundo orden en e , $\Delta E_A \rightarrow 0$ en el denominador del lado derecho de esta ecuación, es decir que el posible cambio en la energía se considera muy pequeño, en comparación con las energías E_A , E_I y $\hbar\omega$; si hacemos tender al infinito el tiempo durante el cual actúa la perturbación, (2.77) adquiere la forma:

$$\Delta E_A = \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_I |\hat{H}_{IA}|^2 \int_0^\infty dt \frac{e^{-i(E_I - E_A - E_A + \hbar\omega)t/\hbar}}{(E_I - E_A + \Delta E_A + \hbar\omega)}$$

$$= \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_I \frac{|\hat{H}_{IA}|^2}{(E_A - E_I - \hbar\omega)} - i\pi \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_I |\hat{H}_{IA}|^2 \delta(E_A - E_I - \hbar\omega) \quad (2.80)$$

en otras palabras, estamos considerando una interacción que está presente siempre y se empezó a observar a partir de $t=0$; de (2.80) se ve que ΔE_A consta de dos partes: real e imaginaria.

$$\text{Re}(\Delta E_A) = \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_I \frac{\mathcal{P} |\hat{H}_{IA}|^2}{(E_A - E_I - \hbar\omega)} \quad (2.81)$$

$$\text{Im}(\Delta E_A) = -\pi \sum_{\vec{k}\sigma} \sum_I |\hat{H}_{IA}|^2 \delta(E_A - E_I - \hbar\omega) \quad (2.82)$$

donde \mathcal{P} significa la parte principal de la función en el sentido de Cauchy.

Como ya se dijo \sum es sobre todos los momentos y todas las polarizaciones posibles, y \sum_I no debe entenderse en el sentido estricto de que $E_I < E_A$, esto está ligado con el hecho de que en la parte real, (2.81), no se cumple en general la conservación de la energía, es decir, que por tratarse de emisión o absorción de fotones virtuales no tiene por qué conservarse la energía, esto puede encontrar una justificación en el hecho de que en los estados intermedios I los sistemas se comportan como sistemas interactuantes, y los momentos no se conservan en esas condiciones (ver § 2.1). En este caso se puede pensar al átomo como un sistema disociado: átomo más fotones virtuales.

En cambio la parte imaginaria de ΔE_A está asociada con procesos en los que siempre hay conservación de energía, además aquí sí se considera a los fotones como reales.

Se dice entonces, que el cambio en la energía adquiere una parte imaginaria, sólo cuando es posible para un estado A, decaer en un estado I por emisión espontánea, sin la violación de la conservación de la energía, de hecho:

$$-\frac{2}{\hbar} \text{Im}(\Delta E_A) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k\sigma} \sum_I |\hat{H}_{IA}|^2 \delta(E_A - E_I - \hbar\omega) \quad (2.83)$$

el segundo miembro de esta ecuación es precisamente la probabilidad de emisión espontánea, calculada con la regla de oro de Fermi, ec.(1.29) con suma sobre los estados finales, y por tanto es igual al recíproco del tiempo de vida media del estado A.

$$-\frac{2}{\hbar} \text{Im}(\Delta E_A) = \frac{1}{\tau_A} = \frac{\Gamma_A}{\hbar} \quad (2.84)$$

entonces la probabilidad de encontrar al electrón en el estado inestable A, decrece como:

$$|\Psi|^2 \sim e^{-\Gamma_A \frac{t}{\hbar}} \quad (2.85)$$

y de la ecuación (2.76) vemos que la función de onda debe ir como:

$$\Psi = \psi_A(\vec{x}) e^{-i(E_A + \text{Re}(\Delta E_A))\frac{t}{\hbar} - \Gamma_A \frac{t}{2\hbar}} \quad (2.86)$$

así, la parte real de ΔE_A se asocia con cambios en los niveles de energía, en tanto que la parte imaginaria, se asocia con las líneas de decaimiento.

Si sustituimos el elemento de matriz de la perturbación, ec.(2.72), en la ec.(2.81) tenemos:

$$\Delta E_A \equiv \text{Re}(\Delta E_A) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_I \frac{\mathbb{P} \left[\frac{e}{mc} \right]^2 \left[\frac{2\pi\hbar}{\omega + \Omega} \right] |\langle I | \hat{\varepsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle|^2}{(E_A - E_I - \hbar\omega)} \quad (2.87)$$

al hacer tender el volumen al infinito, $\Omega \rightarrow \omega$, es decir, cuando tomamos en cuenta a todo el espacio, la suma sobre los momentos (o sobre los números de onda) se transforma en una integral sobre \vec{k} :

$$\Delta E_A = \frac{2\pi\hbar}{\Omega} \left[\frac{e}{mc} \right]^2 \sum_I \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{\Omega} \sum_{\sigma} \frac{|\langle I | \hat{\varepsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p} | A \rangle|^2}{(E_A - E_I - \hbar\omega)} \quad (2.88)$$

cambiando a coordenadas esféricas e integrando sobre los ángulos, (con ángulo sólido $d\theta$).

$$\int d\theta \sum_{\sigma} |(\hat{\varepsilon}^{(\sigma)} \cdot \vec{p})_{IA}|^2 = \frac{8\pi}{3} |\vec{p}_{IA}|^2$$

$$\therefore \Delta E_A = \left(\frac{2}{3\pi} \right) \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \right) \left(\frac{1}{mc} \right)^2 \sum_I \mathbb{P} \int \frac{d(c\hbar k) |\vec{p}_{IA}|^2 \hbar\omega}{(E_A - E_I - \hbar\omega)}$$

$$\Delta E_A = \left(\frac{2}{3\pi} \right) \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \right) \left(\frac{1}{mc} \right)^2 \sum_I \mathbb{P} \int_0^{\infty} \frac{dE_{\gamma} |\vec{p}_{IA}|^2 E_{\gamma}}{(E_A - E_I - \hbar\omega)} \quad (2.89)$$

en donde se ha usado $E_{\gamma} = c\hbar k = \hbar\omega$. Esta integral es claramente divergente y, se argumenta que las contribuciones de los fotones virtuales no se deben tomar muy en cuenta para muy altas energías, ya que en la aproximación no relativista los electrones deben decaer con la emisión de un fotón de energía $E_{\gamma} \approx mc^2$, por lo tanto, como es usual en este tipo de casos, se propone una energía máxima de corte, $E_{\gamma\text{max}}$, que corresponde a la creación de pares de partículas.

$$\Delta E_{\Lambda} = \left(\frac{2}{3\pi}\right) \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right) \left(\frac{1}{mc}\right)^2 \sum_{\mathbf{I}} \mathbb{P} \int_0^{E_{\gamma} \max} \frac{dE_{\gamma} |\vec{p}_{\mathbf{I}\Lambda}|^2 E_{\gamma}}{(E_{\Lambda} - E_{\mathbf{I}} - \hbar\omega)} \quad (2.90)$$

2.4.2 RENORMALIZACION DE LA MASA

Para quitar la divergencia lineal en la integral de la ecuación (2.89), se propone restar de "alguna manera" la contribución de partícula libre, ésto se hace renormalizando la masa, es decir, restando el efecto de la masa electromagnética.

Consideremos la energía propia de un electrón libre con momento \vec{p} , las funciones de onda para los estados A e I en el proceso mostrado en la figura 2.1, están dados respectivamente por:

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i \frac{\vec{p}' \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad (2.91)$$

con esto, el elemento de matriz de (2.69) se escribe como;

$$\begin{aligned} \hat{H}_{IA} &= - \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\Omega^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i \frac{\vec{p}' \cdot \vec{x}}{\hbar}} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i \vec{\sigma} \cdot \vec{p}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} d^3 r \\ &= - \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}}} \frac{1}{\Omega} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \delta_{\vec{p}', \vec{p} - \hbar \vec{k}} \end{aligned} \quad (2.92)$$

y el denominador de (2.91):

$$E_A - E_I - \hbar\omega = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{(\vec{p} - \hbar \vec{k})^2}{2m} + \hbar\omega ; (\vec{p} \cdot \vec{k} \sim \vec{p}^2 \sim \vec{k}^2) \quad (2.93)$$

siempre que el electrón se considere no relativista; con esto la energía propia del electrón libre, siguiendo un tratamiento enteramente análogo al usado para la deducción de (2.89), y, con la ayuda de (2.92) y (2.93).

$$\Delta E_{\text{libre}} = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{(mc)^2} \vec{p}^2 \int_0^{E_{\gamma\text{max}}} dE_{\gamma\text{max}} \equiv M \vec{p}^2 \quad (2.94)$$

$$M \equiv -\frac{e^2}{\hbar c} \frac{2E_{\gamma\text{max}}}{3\pi (mc)^2}$$

que también es divergente si $E_{\gamma\text{max}} \rightarrow \omega$.

Vemos que el electrón libre da lugar a una contribución al cambio en la energía, que es proporcional a \vec{p}^2 y como nunca podemos quitar al campo electromagnético, ésta energía adicional no puede separarse de la energía cinética $\vec{p}^2/2m$. En otras palabras, la energía cinética es la suma de la energía que no toma en cuenta procesos como el de la fig.2.1 y una energía que es proporcional a \vec{p}^2 .

Si denotamos por m_{obs} la masa observada y m_{des} la masa desnuda, la masa observada del electrón, m_{obs} está relacionada con M por la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{obs}}} &= \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{des}}} + M\vec{p}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{des}}} \left\{ 1 + 2Mm_{\text{des}} \right\} \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{des}} (1 + 2Mm_{\text{des}})^{-1}} = \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{des}} (1 - 2Mm_{\text{des}})} \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde m_{des} es la masa que mediríamos en ausencia del campo, (proceso de la fig.2.1), ésta es la masa desnuda del electrón.

El sumar el efecto neto del campo significa hacer un cambio en la masa

$$m_{\text{des}} + m_{\text{obs}} \sim \left[1 + \frac{e^2}{\hbar c} \frac{4E_{\gamma\text{max}}}{3\pi mc^2} \right] m_{\text{des}} \quad (2.96)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{137} \left[\frac{4}{3\pi} \right] \frac{E_{\gamma\text{max}}}{mc^2} \right] m_{\text{des}} \quad (2.97)$$

donde m_{obs} es la masa renormalizada, nótese que $\Delta E_{\text{libre}} < 0$ en la ec. (2.94), mientras que el cambio en la masa $\Delta m = (m_{\text{obs}} - m_{\text{des}}) > 0$, ec. (2.97).

Si $E_{\gamma_{\text{max}}} = mc^2$, haciendo operaciones:

$$m_{\text{obs}} = \left[1 + \frac{1}{137} \frac{4}{3\pi} \right] m_{\text{des}} = 1.003 m_{\text{des}} \quad (2.98)$$

esta ecuación muestra que alrededor del 0.3% de la masa se puede atribuir a la energía propia del electrón libre, sin embargo, cuando resolvemos la ecuación de Schrödinger para obtener los niveles de energía del átomo, usamos $\langle \vec{p}^2 / 2m_{\text{obs}} \rangle$ término que ya incluye la corrección en $M\vec{p}^2$, entonces, para estimar los cambios observados en la energía, debemos restar esta contribución que ya se contó, es decir, usar $\langle \vec{p}^2 / 2m_{\text{des}} \rangle$ en lugar de $\langle \vec{p}^2 / 2m_{\text{obs}} \rangle$; ésta es precisamente la idea fundamental de la renormalización de la masa, con esto podemos escribir el hamiltoniano hasta segundo orden en e como:

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{obs}}} + \frac{e}{m_{\text{des}}} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{e^2}{2m_{\text{des}}} \vec{A}^2 + M \vec{p}^2 + V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma} (\rho_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega_{\vec{k}\sigma}^2 q_{\vec{k}\sigma}^2)$$

Así pues en cambio en la energía observada $\Delta E_A^{(\text{obs})}$ está dado

por:

$$\begin{aligned} \Delta E_A^{(\text{obs})} &= \Delta E_A - \langle A | \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{obs}}} - \frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{des}}} | A \rangle \\ &= \Delta E_A - M \langle A | \vec{p}^2 | A \rangle \\ &= \Delta E_A - M \langle \vec{p}^2 \rangle_{AA} \end{aligned} \quad (2.99)$$

La diferencia entre la energía del electrón ligado y la del electrón libre; sustituyendo (2.89) y (2.94) en (2.99):

$$\Delta E_A^{(obs)} = \left(\frac{2}{3\pi}\right) \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \frac{1}{(mc)^2} \sum_I P \int_0^{E\gamma_{max}} \frac{dE_\gamma |P_{IA}|^2 E_\gamma}{(E_A - E_I - E_\gamma)} + \left(\frac{2}{3\pi}\right) \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \frac{(\vec{p})_{AA}}{mc^2}$$

como: $\langle \vec{p} \rangle_{AA} = \langle A | \vec{p} \left[\sum_I |I\rangle \langle I| \right] \vec{p} | A \rangle = \sum_I \langle A | \vec{p} | I \rangle \langle I | \vec{p} | A \rangle$

$$= \sum_I \vec{p}_{AI} \vec{p}_{IA} = \sum_I |\vec{p}_{IA}|^2$$

$$\Delta E_A^{(obs)} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \left[\frac{2}{3\pi(mc)^2}\right] \int_0^{E\gamma_{max}} \sum_I \frac{|\vec{p}_{IA}|^2 (E_A - E_I)}{(E_A - E_I - E_\gamma)} dE_\gamma$$

$$= \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \left[\frac{2}{3\pi(mc)^2}\right] \sum_I |\vec{p}_{IA}|^2 (E_I - E_A) \text{Ln} \left[\frac{E\gamma_{max}}{|E_A - E_I|} \right]$$

$$= \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \left[\frac{2}{3\pi(mc)^2}\right] \sum_I |\vec{p}_{IA}|^2 (E_I - E_A) \text{Ln} \left[\frac{E\gamma_{max}}{\langle E_A - E_I \rangle} \right]$$

(2.100)

ahora ΔE_A sólo diverge logarítmicamente cuando $E_{\gamma_{max}} \rightarrow \infty$.

El término cuadrático en $\vec{A}^{(1)}$, contribuye a primer orden en teoría de perturbaciones con:

$$\Delta E^{(2)} = \langle 0, A | \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 | A, 0 \rangle \quad (2.101)$$

con un procedimiento parecido al de la parte anterior:

$$\Delta E^{(2)} = \frac{e^2}{2mc^2} \int \sum_j \left[\frac{2\pi\hbar}{\Omega ck} \right] e_i^{(1)} e_j^{(1)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Omega \quad (2.102)$$

ya que el campo está en su estado base, sólo uno de los productos del desarrollo del cuadrado de \vec{A} es significativo, la suma sobre las polarizaciones da un factor 2, por lo que:

$$\Delta E^{(2)} = \frac{e^2 \hbar}{\pi mc} \int_0^\infty k dk = \frac{e^2 \hbar^3 c^2}{\pi m (\hbar c)^2} \int_0^\infty k dk \quad (2.103)$$

$$\therefore \Delta E^{(2)} = \frac{\alpha^2}{\pi \hbar m c^3} \int_0^{\infty} E_{\gamma} dE_{\gamma} \quad (2.104)$$

esta integral también es divergente, se propone nuevamente un corte a la energía $E_{\gamma \max} \approx mc^2$.

$$\Rightarrow \Delta E^{(2)} = \frac{m c e^2}{2 \pi \hbar} \sim \alpha m c^2 > 0 \quad (2.105)$$

es claro que ésta energía es positiva, pero además es independiente del estado de movimiento de la partícula, por lo que se le puede interpretar como un cambio a la masa de la partícula, así, (2.105) se debe sumar a la masa observada, con lo que la masa desnuda del electrón será un poco menor.

2.4.3 LAS VIDAS MEDIAS.

Veamos ahora brevemente la parte imaginaria de ΔE_A , de la ec. (2.84) vemos que:

$$\Gamma_A = 2 \operatorname{Im} \langle \Delta E_A \rangle = \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_I 2\pi |\hat{H}_{IA}|^2 \delta(E_A - E_I - \hbar\omega) \quad (2.106)$$

sustituyendo el elemento de matriz del hamiltoniano perturbativo, en la aproximación dipolar:

$$\Gamma_A = \sum_{\vec{k}, \sigma} \sum_I \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \left(\frac{4\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}} \Omega} \right) |(\vec{e}^{(\sigma)} \cdot \vec{p})_{IA}|^2 \delta(E_A - E_I - \hbar\omega)$$

haciendo un tratamiento totalmente análogo al hecho para la parte real, tenemos:

$$\Gamma_A = \left[\frac{e}{mc} \right]^2 \left[\frac{1}{3\pi\hbar c} \right] \sum_I \int_{-\infty}^{+\infty} dE_{\gamma} E_{\gamma} |\vec{p}_{IA}|^2 \delta(E_A - E_I - \hbar\omega)$$

$$\therefore \Gamma_A = \left[\frac{e}{mc} \right]^2 \left[\frac{1}{3\pi\hbar c} \right] \sum_I |\vec{p}_{IA}|^2 (E_A - E_I) \quad (2.107)$$

que no depende de la frecuencia del campo externo.

2.4.4 APLICACIONES, EL ATOMO DE HIDROGENO.

La fórmula (2.100) se usa para calcular el cambio en la energía observada para un sistema cuántico, por ejemplo, un átomo hidrogenoide o un oscilador armónico, en cada caso hay que calcular la suma de los cuadrados del elemento de matriz de \vec{p} .

El hamiltoniano no perturbado, para el sistema es:

$$\hat{H}_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

entonces, el conmutador de \vec{p} y \hat{H}_0 resulta:

$$[\vec{p}, \hat{H}_0] = [\vec{p}, V] = -i\hbar \nabla V(\vec{r}) \quad (2.108)$$

por otra parte, sabemos que se cumplen las relaciones:

$$\langle I | [\vec{p}, \hat{H}_0] | A \rangle = \vec{p}_{IA} \langle E_A - E_I \rangle \quad (2.109)$$

$$= \langle I | -i\hbar \nabla V | A \rangle = -i\hbar \int \Psi_I^* \nabla \Psi_A d^3r \quad (2.110)$$

$$\therefore \vec{p}_{IA} \langle E_A - E_I \rangle = -i\hbar \langle \nabla V \rangle_{IA} \quad (2.111)$$

multiplicando por \vec{p}_{IA}^* y sumando sobre todos los posibles estados intermedios:

$$\begin{aligned} \sum_I |\vec{p}_{IA}|^2 \langle E_A - E_I \rangle &= -i\hbar \sum_I \langle A | \vec{p} | I \rangle \langle I | \nabla V | A \rangle = -i\hbar \langle A | \vec{p} \langle \sum_I | I \rangle \langle I | \nabla V | A \rangle \\ &= -i\hbar \langle \vec{p} \cdot \nabla V \rangle_{AA} = -\hbar^2 \langle \nabla^2 V \rangle_{AA} \end{aligned} \quad (2.112)$$

para el átomo de hidrógeno:

$$\Delta E_A^{(obs)} = \left[\frac{e^2}{\hbar c} \right] \left[\frac{2}{3\pi (mc)^2} \right] \text{Ln} \left[\frac{E_{\gamma \max}}{\langle E_A - E_I \rangle} \right] \left[-\hbar^2 \langle \nabla^2 V \rangle_{AA}^2 \right]$$

en este caso $\nabla^2 V = e^2 \delta^3(\vec{r})$ y como la función de onda se anula en el origen, excepto para los estados s:

$$\therefore \int |\Psi_A|^2 \nabla^2 V d^3r = \begin{cases} \frac{e^2}{\pi a_0^3} & \text{para estados s} \\ 0 & \text{para cualquier otro estado} \end{cases} \quad (2.113)$$

con a_0 el radio de Bohr.

$$a_0 = \frac{h/mc}{e^2/4\pi hc}$$

Realizando los cálculos numéricos con $E_\gamma = mc^2$ y para el cambio del estado $2s$, se obtiene un resultado del orden de 1040 Mc., que es una aproximación excelente para la frecuencia asociada a la separación entre los niveles $2s_{1/2}$ y $2p_{1/2}$ que Lamb y Retherford⁽¹⁷⁾ midieron con el método de microondas como 1060 Mc.. El resultado encontrado por Bethe⁽²¹⁾ muestra que el corrimiento Lamb es fundamentalmente un efecto no relativista y de bajas frecuencias.

Si se hacen los cálculos tomando en cuenta los efectos relativistas, se encuentra $\omega \approx 1051$ Mc.^(18,19), mientras que el resultado experimental es 1057.8 Mc.; de hecho, hay toda una serie de trabajos de Lamb y Retherford, Triebwasser y Dayhoff⁽²⁰⁾, que son experimentos un tanto modificados y que dan un soporte experimental bastante sólido para la teoría propuesta por Bethe⁽²¹⁾; Salpeter⁽²²⁾ hace cálculos a diferentes órdenes de magnitud en teoría de perturbaciones para las correcciones radiativas del hidrógeno y del deuterio, sin embargo, no hay una diferencia substancial en cuanto al resultado se refiere. P.J. Mohr⁽²³⁾, hace el cálculo para el hidrógeno usando la EDC y considerando un fuerte potencial coulombiano, el resultado que propone es 1057.864(14) Mc., más recientemente Lundeen y Pipkin⁽²⁴⁾ dieron su versión al valor medido para el hidrógeno como 1057.845(9) basado en el método de "campo oscilatorio atómico rápido y separado". Por último Salpeter y Zaidi⁽²⁵⁾ reportan el valor del efecto Lamb para el helio en su estado base y, por supuesto, que es bastante mayor que para el hidrógeno.

2.4.5 APLICACIONES, EL OSCILADOR ARMÓNICO.

Para el caso del oscilador armónico, el potencial está dado por $V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \vec{r}^2$, donde ω_0 es la frecuencia natural de oscilación.

$$\therefore \nabla^2 \left[\frac{1}{2} m\omega_0^2 \vec{r}^2 \right] = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \nabla^2 \vec{r}^2$$

en una dimensión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_A|^2 m\omega_0^2 dx = m\omega_0^2$$

$$\therefore \Delta E_A^{(obs)} = \left[\frac{e}{\hbar c} \right]^2 \left[\frac{2m\omega_0}{3\pi(mc)^2} \right] \text{Ln} \left[\frac{E_{\gamma \max}}{\langle E_A - E_I \rangle} \right] \quad (2.114)$$

de esta ecuación se ve que el cambio en la energía también depende de la frecuencia natural de oscilación. Para un oscilador armónico E_{γ} no depende del número cuántico principal n . El promedio $\langle E_A - E_I \rangle$ es:

$$\langle E_A - E_I \rangle = \langle E_A \rangle - \langle E_I \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega \left(m + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega (n - m)$$

en otras palabras ΔE no depende del estado n , sino sólo de la diferencia $(n_A - m_I)$, y una vez fijo es igual para todos los niveles, en otras palabras no hay alteración alguna del espectro.

CAPITULO 3
LA ELECTRODINAMICA
ESTOCASTICA

3.1 LA ELECTRODINAMICA ESTOCASTICA.

...en los inventos del caballero Isaac Newton...
diré solamente que su física es ya, por
consentimiento universal lo que hay que saber
de bueno, la más bien fundada, la sola útil de
modo efectivo y la sola que no ha desmentido la
razón, ni la naturaleza, ni alguna experiencia...

J.I. HARTOLACHE

La Electrodinámica Estocástica (EDE), pretende ser una teoría alternativa a la Mecánica Cuántica (MC) o a la Electrodinámica Cuántica (EDC), su objetivo es establecer de forma consistente una teoría conceptualmente firme que permita explicar fenómenos que siempre se habían considerado cuánticos, pero de una manera natural, partiendo de la misma teoría clásica y añadiendo conceptos que no son artificiales ni "virtuales" sino más bien necesarios en función del estado evolutivo de los propios conceptos físicos enmarcados en una filosofía cambiante.

Por supuesto la EDE no es la única, existen otro tipo de intentos, otras teorías, pero con un objetivo común, generalizar y afianzar conceptos esenciales en la física.

Esto no es nuevo, los mismos creadores de la MC propusieron interpretaciones alternativas, las hay basadas en modelos hidrodinámicos, estadísticos, hasta estocásticos, que son generalizaciones de la MC, es decir, son teorías a las que se añaden ciertos elementos que permiten obtener "los viejos resultados" y algo más. Las hay también que parten de "cero" y encuentran los resultados conocidos pero no están "terminadas". Teorías de variables ocultas, reinterpretaciones a las ya dadas

etc. son también intentos que no han tenido el éxito esperado y es que la MC a pesar de sus inconsistencias, y potencialidad (y tal vez también por su edad) permanece como "la teoría" básica y la más importante, después de la Mecánica Clásica. Una discusión bastante amplia sobre este tema se desarrolla en "The Philosophy of Quantum Mechanics", Max Jammer (John Wiley 1974).

Por principio de cuentas, resulta que, la EDE presenta la importante característica de ser una teoría que provee una mejor descripción, en términos físicos, del comportamiento de la materia, esto no quiere decir que la EDE sea la panacea de la física, existen muchas dificultades que no han podido superarse⁽²⁶⁾, sin embargo, no deja de ser un muy buen intento de fundamentar la teoría cuántica, actualmente se están haciendo esfuerzos importantes en favor de EDE que prometen avanzar un poco más en este sentido^(27,28).

La suposición fundamental de la EDE es la existencia de un campo estocástico de radiación de fondo que es real y produce efectos reales, como se mencionó en el § 1.3, promedia a cero y tiene una energía por modo $\frac{1}{2} \hbar \omega_k$, como se tiene un número infinito de modos, la energía del punto cero es infinita, resulta lógico pensar que el vacío produce efectos importantes en la materia, debemos tener en cuenta que estos efectos son "sentidos" por objetos microscópicos solamente.

Y no es que esta hipótesis del campo de vacío sea nueva, ya que está presente en la teoría cuántica (de hecho esta hipótesis nace casi al mismo tiempo que la MC), sólo que en este caso no se le atribuye realidad, aunque sí produce efectos reales.

Se puede ver que el campo de vacío está presente en la solución general de las ecuaciones de Maxwell⁽²⁹⁾, si pensamos en la introducción del campo de punto cero en la descripción cuántica como un "truco" para construir el campo estocástico, se puede mostrar que un campo clásico con una distribución gaussiana de valores es formalmente equivalente a un campo cuantizado de bosones virtuales, que satisface una relación de conmutación generalizada que es una función de correlación, (Bourret, 1964).

Las propiedades principales del campo de vacío son las siguientes: es homogéneo, isotrópico, estacionario y con un espectro que es invariante ante transformaciones de Lorentz, esto garantiza que no hay ni posiciones ni direcciones privilegiadas en el espacio, además de que tampoco existen sistemas inerciales preferenciales.

En cuanto a la densidad espectral se refiere, una extrapolación de la ley de Wien, para temperatura cero ($T=0$) establece que, ésta debe tener la forma: $\rho = a\omega^3$, que resulta ser la obtenida con argumentos heurísticos en el § 1.3 sobre los coeficientes de Einstein, resulta pues, que ρ es el producto de una energía por modo que va como ω y la densidad de modos que va como ω^2 .

Un electrón atómico en presencia del campo de vacío tendrá un comportamiento estocástico y debe considerarse como un sistema abierto que intercambia energía y momento con el campo, así pues las leyes de conservación se deben entender sólo en forma de promedio, así mismo ocurre con las variables dinámicas; uno puede pensar que el electrón es una entidad más o menos localizada que

sigue una trayectoria estocástica bastante compleja alrededor de una cierta órbita, se puede suponer que las soluciones estacionarias de la MC aceptan una descripción estadística en términos de procesos estocásticos y que además posee propiedades ergódicas, es decir, que los promedios sobre un ensamble coinciden con los promedios temporales a tiempos largos, tomados sobre cualquier elemento del ensamble.

Así pues, antes de pasar a estudiar el formalismo de la EDE, veamos primero, algunos aspectos de los procesos estocásticos que nos permitirán comprender ciertos pasos en las derivaciones posteriores.

3.2 PROCESOS ESTOCÁSTICOS⁽³¹⁾.

Un proceso estocástico $\vec{x}(t)$, es una regla que asigna a alguna variable aleatoria n , una función $\vec{x}(n, t)$, es decir, $\vec{x}(t)$ es un proceso en el cual la variable \vec{x} no depende en forma completamente definitiva del tiempo como un proceso causal, en lugar de eso, uno tiene diferentes observaciones y diferentes funciones $\vec{x}(t)$; a $\vec{x}(t)$ se le pueden dar diferentes interpretaciones dependiendo de la variación de sus parámetros, si n permanece fijo mientras que t es variable entonces $\vec{x}(t)$ es una simple función del tiempo, cuando t está fijo y n es variable $\vec{x}(t)$ es una variable aleatoria igual al estado del proceso dado.

Un proceso estocástico es, pues, el resultado de un número muy grande de "causas" totalmente azarosas que determinan a $\vec{x}(t)$ en cada tiempo, por ejemplo, los choques que sufre una molécula en un fluido viscoso (movimiento Browniano).

Hay dos formas de describir estos procesos aleatorios, en primer lugar, uno puede desarrollar las variables, como la velocidad, la posición, etc. en serie de Fourier en el tiempo, cuyos coeficientes pueden variar en forma aleatoria; este es el método de Rice o de las series de Fourier, la segunda forma es el método de Fokker-Planck o método de la ecuación de difusión. Macroscópicamente, para un ensamble de partículas las variaciones que ocurren son como procesos de difusión. La función de distribución de las variables aleatorias del sistema, satisface una ecuación diferencial parcial de segundo orden, del tipo de una ecuación de difusión.

3.3 LA ECUACION DE LANGEVIN†

LA GENERALIZACION DEL TEOREMA DE LIOUVILLE

En la teoría general de la probabilidad, un proceso estocástico que tiene la característica:

$$\mathcal{W}(\vec{r}, \vec{u}, t + \Delta t) = \iint \mathcal{W}(\vec{r} - \Delta\vec{r}, \vec{u} - \Delta\vec{u}, t) \mathcal{W}(\vec{r} - \Delta\vec{r}, \vec{u} - \Delta\vec{u}; \Delta\vec{r}, \Delta\vec{u}) d(\Delta\vec{u}) d(\Delta\vec{r}) \quad (3.1)$$

en un instante dado t y que sólo depende del estado del sistema a ese tiempo, es llamado un proceso de Markov. Podemos esperar que la probabilidad $\mathcal{W}(\vec{r}, \vec{u}, t + \Delta t)$, de que el sistema tenga una posición \vec{r} y una velocidad \vec{u} al tiempo $t + \Delta t$, se puede obtener de la distribución $\mathcal{W}(\vec{r}, \vec{u}, t)$ al tiempo t con el conocimiento de la probabilidad de transición $\mathcal{W}(\vec{r}, \vec{u}; \Delta\vec{r}, \Delta\vec{u})$ de que ocurra un incremento $\Delta\vec{r}$ y uno $\Delta\vec{u}$ al tiempo Δt .

Si hacemos un desarrollo en serie de Taylor de las funciones $\mathcal{W}(\vec{r}, \vec{u}, t + \Delta t)$, $\mathcal{W}(\vec{r} - \Delta\vec{r}, \vec{u} - \Delta\vec{u}, t)$ y $\mathcal{W}(\vec{r} - \Delta\vec{r}, \vec{u} - \Delta\vec{u}; \Delta\vec{r}, \Delta\vec{u})$, se puede obtener una ecuación de Fokker-Planck⁽³²⁾ (F-P), que no sólo generaliza el tratamiento que se hace con una ecuación de Langevin sino que la ecuación obtenida es una generalización del teorema de Liouville, "clásico" para incluir al movimiento Browniano.

Con el fin de poder deducir una ecuación de F-P representante de un ensamble de partículas, sumergido en un campo de radiación electromagnético que tiene una componente estocástica, empezamos por atribuir este carácter aleatorio al campo de radiación de punto cero, el cual tiene una densidad espectral dada por:

$$p_0(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \quad (3.2)$$

correspondiente a una energía por modo $\frac{1}{2} \hbar \omega_n$.

† Algunos autores se refieren a ella como la ecuación de Brafford- Marshall o Abraham-Lorentz.

Partimos del hamiltoniano clásico:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right]^2 + V(\vec{x}) + \hat{H}_{\text{rad}} \quad (3.3)$$

en donde el primer sumando se refiere a la partícula y se usó la regla de acoplamiento mínimo; \vec{A} es el potencial vectorial, que escrito en forma general es:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{k_{\alpha}}} \left\{ b_{\alpha}(t) \vec{G}_{\alpha}(\vec{x}(t)) + b_{\alpha}^{*} \vec{G}_{\alpha}^{*}(\vec{x}(t)) \right\} \quad (3.4)$$

y $V(\vec{x})$ es el potencial asociado a las fuerzas externas, las funciones \vec{G} forman un conjunto ortonormal que satisface:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \vec{G}_{\alpha} + k_{\alpha}^2 \vec{G}_{\alpha} &= 0 \\ \int \vec{G}_{\alpha}^{*} \cdot \vec{G}_{\alpha'} \, d^3x &= \delta_{\alpha\alpha'} \\ \nabla \cdot \vec{G}_{\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

supongamos además que el campo está contenido en una cavidad de volumen L^3 , con paredes perfectamente conductoras, eventualmente se hará tender L al infinito. Usando $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ y $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$, obtenemos:

$$\vec{E} = i \sum_{\alpha} \sqrt{\pi} \left(b_{\alpha} \vec{G}_{\alpha} - b_{\alpha}^{*} \vec{G}_{\alpha}^{*} \right) \quad (3.6)$$

$$\vec{B} = \sum_{\alpha} \sqrt{\pi} k_{\alpha}^{-1} \left(b_{\alpha} \nabla \times \vec{G}_{\alpha} + b_{\alpha}^{*} \nabla \times \vec{G}_{\alpha}^{*} \right) \quad (3.7)$$

tomando los cuadrados de \vec{E} y \vec{B} , e integrando la suma sobre todo el espacio obtenemos el hamiltoniano del campo en términos de las amplitudes de los modos:

$$\hat{H}_{\text{rad}} = \frac{1}{8\pi} \int \langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle \, dv = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |b_{\alpha}|^2 \quad (3.8)$$

por lo que la ecuación (3.3) se escribe como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right]^2 + V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |b_{\alpha}|^2 \quad (3.9)$$

en el caso particular de una descomposición del campo en ondas

planas, \hat{A} adquiere la forma:

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \hat{e}_n^{(\sigma)} \left[q_{n\sigma} \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) - \frac{p_{n\sigma}}{\omega_n} \text{sen}(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right] \quad (3.10)$$

mientras que los vectores del campo son:

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \hat{e}_n^{(\sigma)} \left[p_{n\sigma} \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) + \omega_n q_{n\sigma} \text{sen}(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right] \quad (3.11)$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} (\hat{e}_n^{(\sigma)} \times \vec{k}_n) c \left[q_{n\sigma} \text{sen}(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) + \frac{p_{n\sigma}}{\omega_n} \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \right] \quad (3.12)$$

finalmente el hamiltoniano del sistema queda como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right]^2 + V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{n\sigma} (p_{n\sigma}^2 + \omega_n^2 q_{n\sigma}^2) \quad (3.13)$$

usando las ecuaciones de Hamilton encontramos las siguientes relaciones para la partícula y campo⁽³⁴⁾:

$$\dot{\vec{x}} = \nabla_{\vec{p}} \hat{H} = \frac{1}{m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right] \left[\vec{k}_n (q_{n\sigma} \text{sen}(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) + \frac{p_{n\sigma}}{\omega_n} \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x})) \right] \quad (3.14.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= -\nabla_{\vec{x}} \hat{H} = \\ &= \vec{F} - e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} (\hat{e}_n^{(\sigma)} \cdot \vec{x}) \left[\vec{k}_n (q_{n\sigma} \text{sen}(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) + \frac{p_{n\sigma}}{\omega_n} \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.14.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_{n\sigma} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_{n\sigma}} = p_{n\sigma} + e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} (\hat{e}_n^{(\sigma)} \cdot \vec{x}) \frac{\text{sen}(\vec{k}_n \cdot \vec{x})}{\omega_n} \\ \dot{p}_{n\sigma} &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_{n\sigma}} = -\omega_n^2 q_{n\sigma} + e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} (\hat{e}_n^{(\sigma)} \cdot \vec{x}) \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

en la aproximación dipolar usando $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$ y la ec. (3.13)

encontramos la ecuación de movimiento para la partícula:

$$m \dot{\vec{x}} = \vec{F} - e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \hat{e}_n^{(\sigma)} p_{n\sigma} = \vec{F} + e \vec{E} \quad (3.16)$$

las soluciones a las ecuaciones del campo son:

$$q_{n\sigma}(t) = q_{n\sigma}(0) \cos \omega_n t + \frac{p_{n\sigma}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \int_0^t dt' (\hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t')) \sin \omega_n(t-t') \quad (3.17)$$

$$p_{n\sigma}(t) = p_{n\sigma}(0) \cos \omega_n t - \omega_n q_{n\sigma}(0) \sin \omega_n t + e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \int_0^t dt' (\hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t')) \cos \omega_n(t-t') \quad (3.18)$$

ahora bien, supongamos que la interacción entre la partícula y el campo empieza cuando $t = 0$; sustituyendo (3.17) y (3.18) en (3.10) se ve que el campo eléctrico consta de dos partes:

$$e\vec{\mathcal{E}} = e\vec{\mathcal{E}}_0 + e\vec{\mathcal{E}}_a \quad (3.19)$$

donde $\vec{\mathcal{E}}_0$ es el campo de vacío y $\vec{\mathcal{E}}_a$ es el campo radiado por la propia partícula, análogamente, para el campo magnético, se tiene:

$$\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}} = e \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{\mathcal{B}}_0 + e \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{\mathcal{B}}_a$$

si suponemos que el sistema es no relativista los efectos magnéticos resultan despreciables, por lo que nos concentraremos en la parte eléctrica del campo:

$$e\vec{\mathcal{E}}_a = -e^2 \left[\frac{4\pi}{L^3} \right] \sum_{n\sigma} \hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \int_c^t dt' (\hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t')) \cos \omega_n(t-t') \quad (3.20)$$

$$e\vec{\mathcal{E}}_0 = -e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \rho_{n\sigma}^0 \quad (3.21)$$

$$m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} - e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \rho_{n\sigma}^0 \quad (3.22)$$

$$- e^2 \left[\frac{4\pi}{L^3} \right] \sum_{n\sigma} \hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \int_c^t dt' (\hat{\mathcal{E}}_n^{(\sigma)} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t')) \cos \omega_n(t-t')$$

con:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n\sigma}^0(t) &= \rho_{n\sigma}(0) \cos \omega_n t - \omega_n q_{n\sigma}^0 \sin \omega_n t \\ q_{n\sigma}^0(t) &= q_{n\sigma}(0) \cos \omega_n t + \frac{p_{n\sigma}^0}{\omega_n} \sin \omega_n t \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

haciendo dos integraciones por partes en (3.22) obtenemos una ecuación diferencial de tercer orden; cuando hacemos tender L al infinito:

$$\frac{1}{L^3} \sum_n \quad L \rightarrow \infty \quad \frac{1}{(2\pi c)^3} \int d\omega \omega^2 d\Omega_k^* \quad (3.24)$$

por lo que $e\vec{E}_0$ se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} e\vec{E}_0 &= -\frac{2m\tau}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \int_c^t dt' \ddot{\vec{x}}(t') \cos \omega_n(t-t') = \\ &= \frac{2m\tau}{\pi} \int_0^\infty d\omega \int_c^t dt' \ddot{\vec{x}}(t') \frac{d^2}{d^2t} \cos \omega_n(t-t') = \\ &= m\tau \left[-\frac{2}{\pi} \ddot{\vec{x}}(t) \int_0^\infty d\omega + \ddot{\vec{x}}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

esta ecuación expresa la acción combinada de una contribución electromagnética a la inercia y una fuerza de reacción de radiación, la primera es:

$$\frac{2}{\pi} m\tau \int_0^\infty d\omega \equiv m_{\text{ele.}} \quad (3.26)$$

por lo tanto, la masa de una partícula consta de una masa desnuda $m_{\text{des.}}$ más una masa electromagnética $m_{\text{ele.}}$, hasta esta aproximación. Pero como en el hamiltoniano escribimos la masa observada m , y hay una divergencia en el término electromagnético, debemos hacer una renormalización a la masa, es decir, restar $m_{\text{ele.}}$ de la masa total, por lo que se puede escribir:

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F} + m\tau \ddot{\vec{x}} - e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \hat{\epsilon}_n^{(\sigma)} P_{n\sigma}^0 = \vec{F} + m\tau \ddot{\vec{x}} + e\vec{E}_0 \quad (3.27)$$

esta es una ecuación tipo Langevin, de la cual se parte para obtener la ecuación de Fokker-Planck.

En ausencia de partículas el campo de vacío promedia a cero, por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} \langle \rho_{n\sigma}^0 \rangle &= 0 \\ \langle q_{n\sigma}^0 \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

$$\langle (\rho_{n\sigma}^0)^2 \rangle = \omega_n^2 \langle (q_{n\sigma}^0)^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega_n \quad (3.29)$$

además vamos a suponer que el campo de vacío estaba en equilibrio antes de $t = 0$, de tal forma que la distribución inicial de las variables de campo es estacionaria, así pues con (3.20), (3.21), y (3.25) tenemos:

$$\langle \vec{E}_0 \rangle = 0 \quad (3.30)$$

En (3.27) se aprecia el término de reacción de radiación:

$$m \ddot{\vec{x}} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_c^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \left\{ \vec{F}(\vec{x}(t')) + e \vec{E}_0(t) \right\} \quad (3.31)$$

desarrollando en serie de Taylor a $\vec{F}(\vec{x}(t'))$ alrededor de $\vec{F}(\vec{x}(t))$ y cortando la serie hasta segundo orden:

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) + \tau (\dot{\vec{x}} \cdot \nabla) \vec{F}(\vec{x}) + e \vec{E}_m(t) \quad (3.32)$$

\vec{E}_m ahora es el campo modificado por la presencia de la partícula, dado por:

$$\vec{E}_m(t) = \int_l^\infty \frac{dt'}{\tau} \vec{E}_0(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \quad (3.33)$$

con una densidad espectral dada en términos de (3.1):

$$\rho_m(\omega) = \frac{\rho_0(\omega)}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (3.34)$$

y además el campo \vec{E}_m satisface la ecuación diferencial:

$$\ddot{\vec{E}}_m - \tau^2 \dot{\vec{E}}_m = \tau \dot{\vec{E}}_0 + \vec{E}_0 \quad (3.35)$$

3.4 LA ECUACION DE FOKKER-PLANCK.

Existen varias formas de derivar la ecuación F-P⁽⁹⁵⁾, pero en este caso se procederá a construirla a partir de un formalismo estadístico en términos de operadores de Liouville, generalizando el teorema de Liouville. La ecuación (3.32) define el conjunto de ecuaciones:

$$\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{x}} \quad ; \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F} + \frac{\tau}{m} \vec{p} \cdot \nabla \vec{F} + e \vec{E}_m \quad (3.36)$$

Estas ecuaciones determinan un proceso estocástico dinámico en el espacio fase. Para cada realización particular del campo E_m , la densidad de puntos en el espacio fase $\{R(\vec{x}, \vec{p}, t)\}$ satisface una ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \nabla(\dot{\vec{x}} R) + \nabla_p(\dot{\vec{p}} R) = 0 \quad (3.36.1)$$

que puede escribirse en forma de una ecuación estocástica de Liouville:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \hat{L}R = 0 \quad (3.36.2)$$

donde \hat{L} está determinado por las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.23) y (3.36); si escribimos \hat{L} en la forma:

$$\hat{L} = \hat{L}_p + \hat{L}_r + \hat{L}_i \equiv \hat{L}_0 + \hat{L}_i \quad (3.37)$$

donde:

$$\hat{L}_p = \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \nabla + \vec{F} \cdot \nabla_p \quad (3.38)$$

$$\hat{L}_r = \sum_{n\sigma} \left(\rho_{n\sigma} \frac{\partial}{\partial q_{n\sigma}} - \omega_n^2 q_{n\sigma} \frac{\partial}{\partial p_{n\sigma}} \right) \quad (3.39)$$

$$\hat{L}_i = e \vec{E} \cdot \nabla_p + \frac{e}{m} \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \vec{p} \cdot \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} \frac{\partial}{\partial p_{n\sigma}} \quad (3.40)$$

son los operadores de Liouville de la partícula, campo e interacción, respectivamente; definiendo el promedio de una

variable A como:

$$\langle A \rangle Q \equiv \int A(\vec{x}, \vec{p}, \{q_{n\sigma}\}, \{p_{n\sigma}\}, t) R d^n q_{n\sigma} d^n p_{n\sigma} \quad (3.41)$$

cuando $A \equiv 1$, entonces $Q(\vec{x}, \vec{p}, t) = \int R d^n q_{n\sigma} d^n p_{n\sigma}$.

sustituyendo \hat{L} en (3.36.2) y promediando sobre las variables de campo con (3.41), encontramos una ecuación para la partícula:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \hat{L}_p + \nabla_p \cdot \langle e\vec{E} \rangle Q = 0 \quad (3.42)$$

La solución formal de la ec. (3.36.2) es :

$$R(t) = R(0) e^{i\hat{L}t} \quad (3.43)$$

con $R(0)$ la distribución al tiempo $t = 0$.

La ecuación (3.42) tiene un término desconocido que es $\langle e\vec{E} \rangle Q$, para calcular esta fuerza, usamos la identidad:

$$e^{-(A+B)t} = e^{-At} - \int_c^t dt' e^{-(A+B)(t-t')} B e^{-At'} \quad (3.44)$$

en la que hacemos $A = \hat{L}_0$ y $B = \hat{L}_i$, hasta segundo orden en e , es válido aproximar: $e^{-(\hat{L}_0 + \hat{L}_i)t}$ por $e^{-\hat{L}_0 t}$, por lo tanto:

$$R(t) = R(0) e^{i\hat{L}t} \approx e^{-\hat{L}_0 t} R(0) - \int_c^t R(0) e^{-\hat{L}_0(t-t')} \hat{L}_i e^{-\hat{L}_0 t'} dt' \quad (3.45)$$

promediando:

$$\langle e\vec{E} \rangle Q = \int d^n q_{n\sigma} d^n p_{n\sigma} e\vec{E} \left\{ e^{-\hat{L}_0 t} R(0) - \int_c^t R(0) e^{-\hat{L}_0(t-t')} \hat{L}_i e^{-\hat{L}_0 t'} dt' \right\} \quad (3.46)$$

Vamos a suponer que para tiempos $t < 0$, los sistemas, partícula y campo, son totalmente independientes y por lo tanto uno puede escribir la función de distribución R , como un producto de dos funciones, una que depende sólo de las variables de la partícula y la otra que sólo depende de las variables del campo.

$$R_0(t) = Q_0(\vec{x}, \vec{p}, t) S_0(\{q_{n\sigma}\}, \{p_{n\sigma}\}, t) ; t \leq 0 \quad (3.47)$$

se pide que las funciones Q_0 y S_0 satisfagan las ecuaciones:

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t} + \hat{L}_p Q_0 = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \hat{L}_r S_0 = 0 \quad (3.49)$$

en vista de la suposición de la distribución para $t < 0$, entonces:

$\frac{\partial S_0}{\partial t} = 0$, lo que implica que $\hat{L}_r S_0 = 0$, por lo que S_0 es una función de la energía del campo de vacío, y como los modos normales son independientes, S_0 se escribe como el producto de funciones individuales:

$$S_0 = \prod_{n\sigma} S_{n\sigma}(E_{n\sigma}^0) ; E_{n\sigma}^0 = \frac{1}{2} \left\{ (p_{n\sigma}^0)^2 + (q_{n\sigma}^0)^2 \omega_n^2 \right\} \quad (3.50)$$

como en $t = 0$ $q_{n\sigma}(0)$ y $p_{n\sigma}(0)$ coinciden con $q_{n\sigma}$ y $p_{n\sigma}$, reemplazamos éstas en (3.50):

$$S_0 = \prod_{n\sigma} S_{n\sigma}(E_{n\sigma}) ; E_{n\sigma} = \frac{1}{2} \left\{ (p_{n\sigma})^2 + (q_{n\sigma})^2 \omega_n^2 \right\} \quad (3.51)$$

por otra parte tenemos:

$$e^{-\hat{L}_0 t} R(0) = e^{-\langle \hat{L}_p + \hat{L}_r \rangle t} Q(X) S(0) = S(0) e^{-\hat{L}_p t} Q(X) \quad (3.52)$$

La segunda igualdad se sigue del desarrollo del operador que depende de las variables del campo, aproximando a primer orden, y como el operador de la partícula "salta" a $S(0)$ entonces se obtiene (3.52); en la aproximación de longitud de onda larga⁽³⁰⁾ la fuerza eléctrica se ve como:

$$e\vec{E} = -e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \hat{e}_n^{(\sigma)} \rho_{n\sigma} \quad (3.53)$$

por lo tanto al sustituir en (3.40):

$$\hat{L}_i = -e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \rho_{n\sigma} \hat{e}_n^{(\sigma)} \cdot \nabla_p + \frac{e}{m} \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} \sum_{n\sigma} \vec{p} \cdot \hat{e}_n^{(\sigma)} \frac{\partial}{\partial p_{n\sigma}} \quad (3.54)$$

con la sustitución de las ecuaciones (3.31) a la (3.54) en (3.46):

$$\begin{aligned}
 \langle e^{\hat{E}} \rangle_Q &= -e \sqrt{\frac{4\pi}{L^3}} e^{-\hat{L}p t} Q(0) \int d^n q_n d^n p_\sigma \left[\sum_{n\sigma} \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} \rho_{n\sigma} \right] S(0) \\
 &- e^2 \left[\frac{4\pi}{L^3} \right] \int d^n q_{n\sigma} d^n p_{n\sigma} \sum_{n\sigma} \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} \rho_{n\sigma} S(0) \int_0^t dt' \left[e^{-\hat{L}r(t-t')} p_{n\sigma} \right. \\
 &\cdot e^{-\hat{L}o(t-t')} \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} \cdot \nabla e^{-\hat{L}p t'} Q(0) \left. \right] + \frac{e^2}{m} \left[\frac{4\pi}{L^3} \right] \int d^n q_{n\sigma} d^n p_{n\sigma} \sum_{n\sigma} \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} \rho_{n\sigma}^0 \cdot \\
 &\int dt' e^{-\hat{L}r(t-t')} \frac{\partial S(0)}{\partial p_{n\sigma}} \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} e^{-\hat{L}p(t-t')} p_{n\sigma} e^{-\hat{L}p t'} Q(0) \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

por (3.28) y (3.29), la primera integral se hace cero; si ahora definimos a $e\langle \hat{E} \rangle_Q$ como:

$$e\langle \hat{E} \rangle_Q \equiv e\langle \hat{E}_0 \rangle_Q + e\langle \hat{E}_s \rangle_Q \quad (3.56)$$

con $e\langle \hat{E}_0 \rangle_Q$ y $e\langle \hat{E}_s \rangle_Q$ definidos como el segundo y tercer sumandos de (3.55) respectivamente; aplicando (3.39) a $p_{n\sigma}$ y a $q_{n\sigma}$:

$$\hat{L}_r p_{n\sigma} = -\omega_n^2 q_{n\sigma} ; \hat{L}_r q_{n\sigma} = p_{n\sigma} \quad (3.57)$$

$$\therefore e^{-\hat{L}r(t-t')} p_{n\sigma} = p_{n\sigma} \cos \omega_n(t-t') - \omega_n q_{n\sigma} \sin \omega_n(t-t') \quad (3.58)$$

sustituyendo (3.57):

$$\begin{aligned}
 e\langle \hat{E}_0 \rangle_Q &= -e^2 \left[\frac{4\pi}{L^3} \right] \int d^n q_n d^n p_\sigma \sum_{n\sigma} \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} p_{n\sigma}^2 S(0) \int_0^t dt' \cos \omega_n(t-t') e^{-\hat{L}p(t-t')} \\
 &\cdot \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} \cdot \nabla_p e^{-\hat{L}p t'} Q(0) + \\
 &+ e^2 \left[\frac{4\pi}{L^3} \right] \int d^n q_n d^n p_\sigma \sum_{n\sigma} \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} q_{n\sigma} \omega_n p_{n\sigma} S(0) \int_0^t dt' \sin \omega_n(t-t') e^{-\hat{L}p(t-t')} \\
 &\cdot \hat{\varepsilon}_n^{(\sigma)} \cdot \nabla_p e^{-\hat{L}p t'} Q(0) \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

esta ecuación involucra la distribución inicial $S(\{q_{n\sigma}\}, \{p_{n\sigma}\}, 0)$

que coincide con la distribución libre de fuentes $S_0(\{q_{n\sigma}^0\}, \{p_{n\sigma}^0\}, 0)$, por lo que podemos usar (3.28) y (3.29) y obtener:

$$e\langle \vec{E}_0 \rangle_Q = -e^2 \left(\frac{4\pi\hbar}{2L^3} \right) \sum_{n\sigma} \hat{\epsilon}_n^{(\sigma)} \omega_n \int_0^L dt' \cos \omega_n(t-t') e^{-\hat{L}_P(t-t')} \hat{\epsilon}_n^{(\sigma)} \cdot \nabla_p e^{-\hat{L}_P t'} Q$$

cuando $L \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} e\langle \vec{E}_0 \rangle_Q &= -\frac{m\pi\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \int_0^L dt' \cos \omega(t-t') e^{-\hat{L}_P(t-t')} \nabla_p Q(\vec{x}, \vec{p}, t') \\ &= -e^2 \int_0^L dt' \langle \vec{E}_0(t) \cdot \vec{E}_0(t') \rangle e^{-\hat{L}_P(t-t')} \nabla_p Q(\vec{x}, \vec{p}, t') \end{aligned} \quad (3.60)$$

además se ha escrito $e^{-\hat{L}_P t'} Q(0) = Q(t')$ que es correcta a orden cero en e , de acuerdo con (3.42). Integrando por partes sobre $p_{n\sigma}$ el segundo sumando de (3.55):

$$\begin{aligned} e\langle E_0 \rangle &= -m \left(L^3 \right) \sum_{n\sigma} \int_0^L dt' \epsilon_n \cdot p Q(t') e \cos \omega_n(t-t') \\ &= -\frac{2\tau}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \int_0^L dt' \cos \omega(t-t') e^{-\hat{L}_P(t-t')} \vec{p} Q(t') \end{aligned} \quad (3.61)$$

con un procedimiento análogo al usado para la obtención de (3.25):

$$e\langle \vec{E}_0 \rangle_Q = -\frac{2\tau}{\pi} \vec{F}(\vec{x}) Q(\vec{x}) \int_0^\infty d\omega + \frac{\tau}{m} \left\{ (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{F} \right\} Q(t) \quad (3.62)$$

esta ecuación es el promedio local de la ecuación (3.25) en el espacio fase, sólo que aquí ya está escrita a orden τ la fuerza de reacción de radiación⁽³⁷⁾; haciendo la renormalización de la masa:

$$e\langle \vec{E}_0 \rangle_Q = \frac{\tau}{m} \left\{ (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{F} \right\} Q(t) \quad (3.63)$$

ahora bien, en presencia de la partícula, el campo se modifica según (3.33) por lo que:

$$e\langle \hat{E}_m \rangle_Q = -e \int_0^t dt' \langle \hat{E}_m(t) \cdot \hat{E}_m(t') \rangle e^{-\hat{L}_p(t-t')} \nabla_p Q(\vec{x}, \vec{p}, t) \quad (3.64)$$

sustituyendo (3.63) y (3.64) en (3.56), y el resultado en (3.42) obtenemos una ecuación de F-P generalizada, que es correcta hasta segundo orden en e para un electrón en el espacio fase:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla Q + \nabla_p \left\{ \vec{F}(\vec{x}) + \frac{\tau}{m} \vec{p} \cdot \nabla \vec{F}(\vec{x}) \right\} Q(t) - e \int_0^t dt' \langle \hat{E}_m(t) \cdot \hat{E}_m(t') \rangle e^{-\hat{L}_p(t-t')} \nabla_p Q(t') = 0 \quad (3.65)$$

esta versión se puede extender, aumentando el número de términos a orden mayor, que representarán correcciones a la interacción entre partícula y campo.

En (3.65) \hat{E}_m representa el campo local, modificado por la partícula; promediando en el espacio fase.

$$\langle \hat{E}_m \rangle_Q = \int \hat{E}_m R(\vec{x}, \vec{p}, \{q_{n\sigma}\}, \{\rho_{n\sigma}\}, t) d^n q_{n\sigma} d^n \rho_{n\sigma} \quad (3.66)$$

que se puede reducir a:

$$\langle \hat{E}_m \rangle_Q = -e^2 \langle \hat{E}_m \hat{G} \hat{E}_m \rangle \nabla_p Q \quad (3.67)$$

donde \hat{G} es el operador de evolución causal⁽³⁵⁾:

$$\hat{G} A(\vec{x}, \vec{p}, t) = \int_c^t e^{-\hat{L}(t-t')} A(\vec{x}, \vec{p}, t') dt' \quad (3.68)$$

con:

$$\hat{L} = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla + \nabla_p \cdot \left(\vec{F}(\vec{x}) + \frac{\tau}{m} \vec{p} \cdot \nabla \vec{F} \right) \quad (3.69)$$

la integral de (3.68) muestra la existencia de memoria, es decir la ec. (3.65) describe un proceso no Markoviano.

El operador \hat{G} hace que toda función de \vec{x} , \vec{p} y t evolucione determinísticamente de acuerdo con (3.68) y (3.69). Llamemos

$\bar{x}(t', t)$, $\bar{p}(t', t)$ a los valores que el momento y la posición deben tener a un tiempo $t' < t$ y que han de evolucionar determinísticamente a sus valores finales $x(t) = \bar{x}(t, t)$ y $\bar{p}(t) = p(t, t)$, es decir que a un proceso estocástico como el definido anteriormente para un tiempo t , se le hace corresponder un proceso determinista, o que sólo depende del tiempo, desde un tiempo t' que es anterior a t , y que cuando $t' = t$ tenemos el proceso causal original $x(t)$, con esta definición podemos escribir:

$$e\langle \hat{E}_m(t) \rangle_Q = -e^2 \int_0^t dt' \langle \hat{E}_m(t) \cdot \hat{E}_m(t') \rangle \nabla_p Q(\bar{x}, \bar{p}, t') \quad (3.70)$$

usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} e\nabla_p \cdot \langle \hat{E}_m(t) \rangle_Q &= -e^2 \int_0^t dt' \langle \hat{E}_i^m(t) \cdot \hat{E}_j^m(t') \rangle \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \frac{\partial x_k}{\partial p_j} + \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right\} Q(\bar{x}, \bar{p}, t') \\ &= -\partial_{p_i} \left\{ \partial x_k \hat{D}_{ik}^{(xp)} Q + \partial p_k \hat{D}_{ik}^{(pp)} Q \right\} + \partial_{p_i} \left\{ \partial x_k \hat{D}_{ik}^{(xp)} + \partial p_k \hat{D}_{ik}^{(pp)} \right\} Q \end{aligned} \quad (3.71)$$

con:

$$\hat{D}_{ik}^{(xp)} Q(\bar{x}, \bar{p}, t) \equiv e^2 \int_0^t dt' \langle \hat{E}_i^m(t) \cdot \hat{E}_j^m(t') \rangle \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \right\} Q(\bar{x}, \bar{p}, t') \quad (3.72)$$

$$\hat{D}_{ik}^{(pp)} Q(\bar{x}, \bar{p}, t) = e^2 \int_0^t dt' \langle \hat{E}_i^m(t) \cdot \hat{E}_j^m(t') \rangle \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right\} Q(\bar{x}, \bar{p}, t') \quad (3.73)$$

de estas ecuaciones se ve que el campo de vacío da lugar a dos efectos, uno difusivo, ec.(3.72), y otro, una fuerza adicional, ec.(3.73), que de acuerdo con (3.71) está dada por:

$$\hat{f}_i Q \equiv (\hat{f}_{i1} + \hat{f}_{i2}) Q = (\partial x_k \hat{D}_{ik}^{(xp)}) Q + (\partial p_k \hat{D}_{ik}^{(pp)}) Q \quad (3.74)$$

con todo esto, (3.65) adquiere la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla_Q + \nabla_p \left\{ \vec{F}(\vec{x}) + \frac{\tau}{m} \vec{p} \cdot \nabla \vec{F}(\vec{x}) + \hat{f} \right\} Q(t) - \nabla_p \nabla_p : \hat{D}^{(pp)} Q - \nabla_p : \hat{D}^{(xp)} Q = 0 \quad (3.75)$$

(se puede demostrar⁽³⁵⁾ que $\hat{D} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \hat{D}$)

\hat{f} es la fuerza estocástica introducida por las fluctuaciones de vacío, $\vec{F}(\vec{x})$ es la fuerza externa y al igual que las derivadas $\left\{ \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \right\}$

$\left\{ \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right\}$ dependen del problema en cuestión. El término $\frac{\tau}{m} \vec{p} \cdot \nabla \vec{F}(\vec{x})$ da origen a la fuerza de reacción de radiación, es decir, la respuesta del sistema después de la emisión de radiación.

3.5 EL OSCILADOR ARMÓNICO.

En base a la ecuación (3.75) podemos deducir muchas propiedades del oscilador, por ejemplo la ecuación de Schrödinger incluyendo las correcciones radiativas.

Para el oscilador armónico es más o menos sencillo recuperar resultados ya conocidos y además el procedimiento permite ver ciertas generalizaciones de algunos conceptos, que resultan ser diferencia fundamental entre la Mecánica Cuántica y la Electrodinámica Estocástica.

Para un campo de osciladores que sigue una distribución de Planck, la función de correlación toma la forma:

$$\langle E_i(t) E_j(t') \rangle = \frac{2\pi}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(\omega) e^{i\omega(t-t')} \delta_{ij} d\omega \quad (3.75)$$

con una densidad espectral dada por:

$$\rho_T(\omega) = \frac{\kappa |\omega|^3}{2\pi^2 c^3} \frac{1 + e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (3.77)$$

En un desarrollo de potencias de t' y muy cerca del equilibrio Q puede salir de las integrales (3.72) y (3.73) ya que las variables \bar{x} y \bar{p} son prácticamente iguales a \vec{x} y \vec{p} y $t \approx t'$, por lo tanto:

$$\hat{D}_{ik}^{(xp)} = e^2 \int_0^t dt' \langle \vec{E}_i^m(t) \cdot \vec{E}_j^m(t') \rangle \left\{ \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \right\} \quad (3.78)$$

$$\hat{D}_{ik}^{(pp)} = e^2 \int_0^t dt' \langle \vec{E}_i^m(t) \cdot \vec{E}_j^m(t') \rangle \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right\} \quad (3.79)$$

para calcular las derivadas $\left\{ \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \right\}$ y $\left\{ \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \right\}$ hacemos uso de la

solución del oscilador armónico clásico con el origen desplazado⁽³⁾:

$$\dot{x}(t-t') = \dot{x}(t) \cos \omega(t-t') - \frac{\dot{x}(t)}{\omega} \text{sen } \omega(t-t') \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial p}{\partial p} = \cos \omega(t-t') e^{-\frac{1}{2} \tau \omega^2(t-t')} \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{m\omega} \text{sen } \omega(t-t') e^{-\frac{1}{2} \tau \omega^2(t-t')} \quad (3.82)$$

por lo que:

$$\hat{D}^{(xp)} = \frac{2\pi e^2}{m\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\rho_T^m(\omega')}{3} \int_c^t dt' e^{i\omega'(t-t') - \frac{1}{2}\omega'^2(t-t')} \text{sen } \omega(t-t') \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_{ik}^{(pp)} &= e^2 \delta_{ik} \int_0^t dt' \langle \hat{E}_i^m(t) \cdot \hat{E}_j^m(t') \rangle \cos \omega(t-t') \\ &= \delta_{ik} \frac{1}{2} \kappa \tau m \omega^3 \frac{1 + e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \equiv \delta_{ik} D_0 \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \end{aligned} \quad (3.84)$$

con $D_0 \equiv \frac{1}{2} \kappa \tau m \omega^3$ y $\epsilon \equiv e^{-\beta \hbar \omega}$. Si escribimos (3.75) para el oscilador armónico⁽³⁾ en una dimensión:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = (\hat{L}_0 + \hat{L}_2)Q + \frac{\partial}{\partial p} \hat{L}_1 Q = 0 \quad (3.85)$$

donde:

$$\hat{L}_0 = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - m\omega^2 x \frac{\partial}{\partial p} \quad (3.86)$$

$$\hat{L}_2 = \hat{D}^{(xp)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial p} \quad (3.87)$$

$$\hat{L}_1 = -\tau \omega^2 p - \hat{D}^{(pp)} \frac{\partial}{\partial p} \quad (3.88)$$

son los operadores de Liouville y \hat{L}_2 es una corrección de orden τ a \hat{L}_0 ; haciendo una inversión en el momento, las propiedades de \hat{L}_0 , \hat{L}_1 , \hat{L}_2 nos llevan a que Q sea una función par de p y por lo tanto (2.85) se puede separar en $(\frac{\partial Q}{\partial t} = 0)$:

$$(\hat{L}_0 + \hat{L}_2)Q = 0 \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \hat{L}_1 Q = 0 \quad (3.90)$$

de esta última se obtiene⁽⁹⁰⁾:

$$\hat{L}_1 Q = 0 \quad (3.91)$$

Las ecs. (3.88) y (3.89) con la suposición de paridad en p , de Q , sirven para determinar completamente la distribución de equilibrio, que a orden cero en τ será la solución del sistema:

$$\hat{L}_0 Q = \frac{p}{m} \frac{\partial Q}{\partial x} - m\omega^2 x \frac{\partial Q}{\partial p} = 0 \quad (3.92)$$

$$\hat{L}_1 Q = \tau \omega^2 p Q + \hat{D}^{(pp)} \frac{\partial Q}{\partial p} = 0 \quad (3.93)$$

3.6 DEDUCCION DE LA MECANICA CUANTICA DEL OSCILADOR ARMONICO
A PARTIR DE LA EDE.

Introducimos en (3.92) y (3.93) las variables adimensionales p' , ξ y x' definidas mediante:

$$p' \equiv \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} \quad ; \quad x' \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (3.94)$$

$$\rightarrow \quad \xi \equiv \frac{2}{\hbar\omega} \left\{ \frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x'^2 \right\} \equiv p'^2 + x'^2 \quad (3.95)$$

por lo tanto:

$$\partial_x = \partial_{xx'} \partial_{x'} \quad ; \quad \partial_p = \partial_{pp'} \partial_{p'}$$

$$\therefore \quad p' \frac{\partial Q}{\partial x'} - x' \frac{\partial Q}{\partial p'} = 0 \quad (3.96)$$

$$p' Q + \frac{1}{2} \left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right] \frac{\partial Q}{\partial p'} = 0 \quad (3.97)$$

la (3.95) muestra que Q es sólo función de la energía, $Q = Q(\xi)$; si hacemos $\partial_{\xi} Q \equiv Q'$ entonces:

$$Q + \left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right] Q' = 0 \quad (3.98)$$

$$\therefore \quad Q = N e^{-\left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right] \xi} \quad (3.99)$$

aquí N se determina por la condición de normalización:

$$1 = \iint Q dx dp \rightarrow N = \frac{1}{\pi\hbar} \left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right] \quad (3.100)$$

$$\therefore \quad Q = \frac{1}{\pi\hbar} \left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right] e^{-\left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right] \xi} \quad (3.101)$$

que es precisamente la función de distribución en el espacio fase, para el oscilador armónico, encontrada a partir de la distribución de Wigner.

Si calculamos la energía media con ésta Q, se obtiene una ecuación que está totalmente de acuerdo con la ley de Planck.

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \hbar \omega \bar{\xi} = \frac{1}{2} \hbar \omega \left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right] \quad (3.102)$$

que a $T = 0$ se reduce a $\bar{E}_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$.

En la descripción cuántica del oscilador armónico, se trata, fundamentalmente, la parte mecánica. Si hacemos una separación de la parte térmica y de la parte mecánica, surgen de una forma muy natural los niveles discretos de la energía.

Empezamos con la función de partición y con la generalización al caso continuo, para cualquier cantidad A.

$$\mathcal{A}(\beta) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \int_0^{\infty} \mathcal{A}(E) \Omega(E) e^{-\beta E} dE \quad (3.103)$$

esta es una transformada de Laplace que depende de la temperatura, su inversa será una función de la energía. Si hacemos que $\mathcal{A}(E) = E$ entonces:

$$\mathcal{Z}(\beta) = e^{-\int \bar{E}(\beta) d\beta} \quad (3.104)$$

que por (3.102):

$$\mathcal{Z}(\beta) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\beta \hbar \omega} \frac{1 + e^{-y}}{1 - e^{-y}} dy \right] = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right\}}{1 - \exp \left\{ -\beta \hbar \omega \right\}} \quad (3.105)$$

para calcular la densidad de estados, tomamos la transformada inversa y desarrollamos el denominador de (3.105) en serie de potencias.

$$\Omega(E) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{Z}(\beta) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \exp \left(-\beta \hbar \omega \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) \right\} \quad (3.106)$$

$$\therefore \Omega(E) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \left(E - \hbar \omega \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (3.107)$$

de esta ecuación se ve que la densidad de estados es cero siempre que la energía no sea discreta, es decir $\Omega(E)$ será diferente de

cero para aquellos valores con los cuales $E_k = \hbar\omega(k + \frac{1}{2})$.

Si eliminamos la dependencia temporal de las ecuaciones (3.96) y (3.97) obtenemos:

$$p \partial_x Q_k - x \partial_p Q_k = 0 \quad (3.108)$$

$$\left[x \partial_p + p \partial_x + 4xp \right] Q_k = \left[4xp - p \partial_x - x \partial_p \right] Q_{k-1} \quad (3.109)$$

la combinación de estas ecuaciones da:

$$\left[\partial_x + 2x \right] Q_k = \left[2x - \partial_x \right] Q_{k-1} \quad (3.110)$$

$$\left[\partial_p + 2p \right] Q_k = \left[2p - \partial_p \right] Q_{k-1} \quad (3.111)$$

si hacemos una transformada de Fourier con respecto a la variable p , de (3.110) y (3.111), con:

$$\tilde{Q}_k(x, z) = \int dp e^{2ipz} Q_k(x, p) \quad (3.112)$$

se obtienen:

$$\left[\partial_x + 2x \right] \tilde{Q}_k = \left[2x - \partial_x \right] \tilde{Q}_{k-1} \quad (3.113)$$

$$\left[\partial_z + 2z \right] \tilde{Q}_k = - \left[2z - \partial_z \right] \tilde{Q}_{k-1} \quad (3.114)$$

introduciendo las nuevas variables: $x_1 = x - z$, $x_2 = x + z$:

$$\left[\partial_{x_1} + x_1 \right] \tilde{Q}_k = \left[-\partial_{x_2} + x_2 \right] \tilde{Q}_{k-1} \quad (3.115)$$

$$\left[\partial_{x_2} + x_2 \right] \tilde{Q}_k = \left[-\partial_{x_1} + x_1 \right] \tilde{Q}_{k-1} \quad (3.116)$$

si \tilde{Q}_{k-1} se escribe como el producto de dos funciones del tipo:

$$\tilde{Q}_{k-1} = \phi_{k-1}(x_1) \phi_{k-1}(x_2) \quad (3.117)$$

entonces, por la simetría de (3.115) y (3.116), \tilde{Q}_k también se escribirá como:

$$\tilde{Q}_k = \phi_k(x_1) \phi_k(x_2) \quad (3.118)$$

para el caso particular de $k = 0$ obtenemos para (3.115) y (3.116):

$$\left[\partial_{x_1} + x_1 \right] \tilde{Q}_k = 0 \quad ; \quad \left[\partial_{x_2} + x_2 \right] \tilde{Q}_0 = 0 \quad (3.119)$$

con solución:

$$Q_0 = N_0 \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] \quad (3.120)$$

por otra parte, cuando $z = 0$, $x_1 = x_2 = x$, entonces:

$$\rho_k(x) \equiv \phi_k(x_1)\phi_k(x_2) \Big|_{z=0} = \phi_k^2(x) \quad (3.121)$$

Para construir el conjunto de funciones $\{\phi_k\}$ se propone que:

$$\phi_k(x_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}x_i^2\right]\Theta_k(x_i) \quad ; \quad \Theta_0 = N_0^{\frac{1}{2}} = \text{cte.} \quad i=1,2. \quad (3.122)$$

de las ecuaciones (3.115) y (3.116) obtenemos:

$$\Theta_k(x_1)\Theta'_k(x_2) = \Theta_{k-1}(x_2) \left\{ -\Theta'_{k-1}(x_1) + 2x_1\Theta_{k-1}(x_1) \right\} \quad (3.123)$$

$$\Theta_k(x_2)\Theta'_k(x_1) = \Theta_{k-1}(x_1) \left\{ -\Theta'_{k-1}(x_2) + 2x_2\Theta_{k-1}(x_2) \right\} \quad (3.124)$$

y de éstas:

$$\Theta_k'' - 2x_i\Theta_k' + C_k\Theta_k = 0 \quad (3.125)$$

en estas ecuaciones las C_k juegan el papel de constantes de separación, de (3.123) y (3.124) se ve que $\Theta_{k-1} \approx \Theta_k'$, ahora bien como Θ_0 es constante, se sigue que Θ_k es un polinomio de grado k , al pedir que el coeficiente de x_i^k en la ec. (3.125) se anule, se encuentra que $C_k = 2k$, por lo que:

$$\Theta_k'' - 2x_i\Theta_k' + 2k\Theta_k = 0 \quad (3.126)$$

esta es la ecuación que satisface los polinomios de Hermite, por lo tanto:

$$\Theta_k(x_i) = H_k(x_i) \quad (3.127)$$

con esto las funciones ϕ_k satisfacen la ecuación:

$$\phi_k''(x_i) + \left[2k + 1 - x_i^2\right]\phi_k(x_i) = 0 \quad (3.128)$$

$$\phi_k''(x) - x^2\phi_k(x) = (2k + 1)\phi_k(x) \quad (3.129)$$

esta es la ecuación de Schrödinger para la amplitud de probabilidad ϕ_k .

Para cerrar esta sección veamos la derivación del formalismo de los operadores de creación y aniquilación, para el oscilador

armónico, sustituyendo (3.118) en las ecs. (3.115) y (3.116):

$$\phi_k(x_1) \left[\partial_{x_2} + x_2 \right] \phi_k(x_2) = \phi_{k-1}(x_2) \left[-\partial_{x_1} + x_1 \right] \phi_k(x_1) \quad (3.130)$$

$$\phi_k(x_2) \left[\partial_{x_1} + x_1 \right] \phi_k(x_1) = \phi_{k-1}(x_1) \left[-\partial_{x_2} + x_2 \right] \phi_k(x_2) \quad (3.131)$$

este sistema de ecuaciones sugiere la separación:

$$\phi_k(x_i) = \frac{1}{d_k} \left[-\partial_{x_i} + x_i \right] \phi_{k-1}(x_i) \quad (3.132)$$

$$\phi_k(x_i) = \frac{1}{d_k} \left[\partial_{x_i} + x_i \right] \phi_k(x_i) \quad ; \quad i=1,2. \quad (3.133)$$

comparando con (3.128) se encuentra que $d_k^2 = 2k$, por lo tanto:

$$\phi_k(x_i) = \frac{1}{\sqrt{k}} A_i^+ \phi_{k-1}(x_i) \quad (3.134)$$

$$\phi_{k-1}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{k}} A_i \phi_k(x_i) \quad (3.135)$$

donde:

$$A_i^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\partial_{x_i} + x_i \right] \quad (3.136)$$

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\partial_{x_i} + x_i \right] \quad (3.137)$$

son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente.

Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación:

$$\left[A_1, A_2 \right] = \left[A_1^+, A_2^+ \right] = 0 \quad ; \quad \left[A_i, A_i^+ \right] = 1 \quad (3.138)$$

cuando $z = 0$, estos operadores corresponden a los usuales operadores (2.9):

$$A_1 = A_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\partial_x + x \right] \equiv a \quad \text{si } z \rightarrow 0 \quad (3.139)$$

$$A_1^+ = A_2^+ \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\partial_x + x \right] \equiv a^+ \quad \text{si } z \rightarrow 0 \quad (3.140)$$

con lo que las ecuaciones (3.134) y (3.135) toman la forma:

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} a^+ \phi_{k-1}(x) \quad (3.141)$$

$$\phi_{k-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} a \phi_k(x) \quad (3.142)$$

De todo esto se puede ver que el formalismo de la Mecánica Cuántica en el espacio de configuración se puede obtener como una proyección del formalismo de los operadores en el espacio $x_1 x_2$ relacionado con el espacio fase mediante las ecuaciones (3.112) y

$$x_1 = x - z \text{ y } x_2 = x + z.$$

3.7 DESCRIPCIÓN DE LAS CORRECCIONES RADIATIVAS

DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA EDE

El mismo aparato matemático usado para llegar a la deducción cuántica usual independiente del tiempo, puede emplearse para estudiar las soluciones no estacionarias de la ecuación de F-P cerca del equilibrio (las primeras correcciones radiativas).

Cerca del equilibrio y en términos de las variables x_1 y x_2 se obtiene la ecuación de evolución⁽³⁴⁾ para la matriz de densidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \rho - \frac{i}{\hbar} \left[V(x_1) - V(x_2) \right] \rho \quad (3.143)$$

con $V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$; si sustituimos en:

$$\rho(x_1, x_2) = \sum_{k,l} C_k C_l^* \phi_k(x_2) \phi_l(x_1)$$

la dependencia explícita en t encontramos que a orden cero en τ la matriz de densidad queda como:

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2) &= \sum C_k(0) C_l^*(0) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t} \phi_k(x_1) \phi_l(x_2) = \\ &= \sum C_k(0) C_l^*(0) \psi_k(x_1) \psi_l^*(x_2) \end{aligned} \quad (3.144)$$

y ψ_k satisface la ec. de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_k + V \psi_k \quad (3.145)$$

escribiendo (3.144) en la forma:

$$\rho = \sum C_k C_l^* e^{-i\omega_{kl}t} \phi_k(x_1) \phi_l(x_2) \quad (3.146)$$

sustituyendo ésta en la ecuación (transformada de Fourier) de F-P tenemos:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \left[\tilde{\Gamma}_0 + \tilde{\Gamma}_2 \right] \tilde{\rho} - 2iz \tilde{\Gamma}_1 \tilde{\rho} = 0 \quad (3.147)$$

$$\text{si } \rho(x_1, x_2) = \tilde{\rho}(x, z) \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\tilde{L}_0 + \tilde{L}_2 \right] \rho - \frac{i}{\hbar} (x_1 - x_2) \tilde{L}_1 \rho = 0 \quad (3.148)$$

ahora los operadores de Liouville tienen la forma:

$$\tilde{L}_0 = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 \right] + \frac{i m \omega^2}{2\hbar} \left[x_1^2 - x_2^2 \right] \quad (3.149)$$

$$\tilde{L}_1 = \frac{i\hbar m \omega^2}{2} \left[\partial_{x_1} - \partial_{x_2} \right] + \frac{i \hat{D}^{(PP)}}{\hbar} \left[x_1 - x_2 \right] \quad (3.150)$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{i \hat{D}^{(XP)}}{\hbar} \left[x_1 - x_2 \right] \left[\partial_{x_1} - \partial_{x_2} \right] \quad (3.151)$$

en términos de las variables x_1 y x_2 . La ec. (3.143) es la llamada ecuación de Von Neumann para la evolución temporal de la matriz de densidad; esta ecuación da lugar a la ecuación estacionaria de Schrödinger, así que siguiendo el método de Dirac, de variación de parámetros (ver capítulo 1), sustituimos en la ec. (3.148):

$$\sum \left[c_k c_l^* + \dot{c}_k c_l^* \right] e^{-i\omega_{kl}t} \phi_k(x_1) \phi_l(x_2) = \left[-\tilde{L}_2 + \frac{i}{\hbar} (x_1 - x_2) \tilde{L}_1 \right].$$

$$\sum c_k c_l^* e^{-i\omega_{kl}t} \phi_k(x_1) \phi_l(x_2) \equiv -\hat{k} \sum c_k c_l^* e^{-i\omega_{kl}t} \phi_k(x_1) \phi_l(x_2) \quad (3.152)$$

donde el operador \hat{k} está dado por:

$$\hat{k} \equiv \hat{k}_1 + \hat{k}_2^* + \hat{k}_{12} + \hat{k}_{21}^* \quad (3.153)$$

$$\hat{k}_i \equiv \frac{\tau \omega^2}{2} x_i \partial_{x_i} + \frac{\hat{D}^{(PP)}}{\hbar^2} x_i^2 + \frac{i}{\hbar} \hat{D}^{(XP)} x_i \partial_{x_i} \quad (3.154)$$

$$\hat{k}_{ij} \equiv -\frac{\tau \omega^2}{2} x_i \partial_{x_j} + \frac{\hat{D}^{(PP)}}{\hbar^2} x_i x_j + \frac{i}{\hbar} \hat{D}^{(XP)} x_i \partial_{x_j} \quad (3.155)$$

multiplicando a (3.152) por $\phi_k(x_1) \phi_l(x_2)$, integrando sobre x_1 y x_2 e intercambiando los índices l, k y l, k :

$$\left[c_k c_l^* + \dot{c}_k c_l^* \right] e^{-i\omega_{kl}t} = -\sum c_k c_l^* e^{-i\omega_{kl}t} \langle kl | \hat{k} | kl \rangle \quad (3.156)$$

aquí los índices k, k' y l, l' se refieren a las variables x_1 y x_2 respectivamente. Para determinar $C_k(t)$ debemos separarlo de C_l^* como se hace con el método de Dirac, supongamos que el estado inicial del sistema está descrito por:

$$\rho(t=0) = \phi_n(x_1)\phi_n(x_2) \quad (3.157)$$

con:

$$C_k(0) = \delta_{nk} \quad ; \quad C_l^*(0) = \delta_{nl} \quad (3.158)$$

dado que, para estados cerca del equilibrio las correcciones radiativas son pequeñas, podemos suponer que para tiempos pequeños $C_n \sim 1$ y C_k permanece pequeño ($k \neq n$).

$$\left[C_k \dot{C}_l^* + \dot{C}_k C_l^* \right] e^{-i\omega_{kl}t} = C_n C_n^* \langle kl | \hat{k} | nn \rangle \quad (3.159)$$

$$\left[C_k \dot{C}_n^* + \dot{C}_k C_n^* \right] e^{-i\omega_{kn}t} = - C_n C_n^* \langle kn | \hat{k} | nn \rangle \quad t=n \quad (3.160)$$

sustituyendo (3.153) y usando las propiedades de las funciones del oscilador:

$$\langle kn | \hat{k}_{12} | nn \rangle = \langle kn | \hat{k}_{21}^* | nn \rangle = 0 \quad (3.161)$$

$$\langle kn | \hat{k}_1 | nn \rangle = \langle k | \hat{k}_1 | n \rangle \quad (3.162)$$

$$\langle kn | \hat{k}_2^* | nn \rangle = \langle n | \hat{k}_2^* | n \rangle \delta_{kn} \quad (3.163)$$

sustituyendo en (3.160):

$$\left[C_k \dot{C}_n^* + \dot{C}_k C_n^* \right] = - C_n C_n^* e^{-i\omega_{kn}t} \left[\langle k | \hat{k}_1 | n \rangle + \langle n | \hat{k}_2^* | n \rangle \delta_{kn} \right] \quad (3.164)$$

El primer término entre paréntesis da lugar a la variación de $\psi_k(x_1)$ y el segundo es responsable del cambio a $\psi_n^*(x_2)$ y por lo tanto ahora podemos separar la variación temporal de C_k y C_n^* respectivamente como:

$$C_k \dot{C}_n^* = - C_n C_n^* \langle n | \hat{k}_2^* | n \rangle \delta_{kn} \quad (3.165)$$

$$\dot{C}_k C_n^* = - C_n C_n^* e^{-i(\omega_{kn} t} \langle n | \hat{k}_1 | n \rangle \quad (3.166)$$

tomando $k = n$ en (3.166):

$$\dot{C}_n = - \langle n | \hat{k}_1 | n \rangle C_n \quad (3.167)$$

cuya solución es:

$$C_n(t) = e^{-\langle n | \hat{k}_1 | n \rangle t} \quad (3.168)$$

si hacemos la separación de las partes real e imaginaria en $\langle n | \hat{k}_1 | n \rangle$:

$$\Gamma_n \equiv \frac{1}{T_n} = 2 \operatorname{Re}(\langle n | \hat{k}_1 | n \rangle) \quad (3.169)$$

$$\delta E_n \equiv \hbar \operatorname{Im}(\langle n | \hat{k}_1 | n \rangle) \quad (3.170)$$

$$\therefore C_n(t) = \exp\left[-\frac{1}{2} \Gamma_n t - \frac{i \delta E_n}{\hbar} t\right]$$

aquí se ha introducido la constante de decaimiento Γ_n y la corrección a la energía δE_n ; la última ecuación se compara satisfactoriamente con la (2.86). Para calcular Γ_n , tomamos el promedio de la parte real de \hat{k}_1 :

$$\therefore C_n(t) = \exp\left[\langle n | \frac{1}{2} \tau \omega x_1 \partial_{x_1} + \frac{\hat{D}^{(pp)}}{\hbar^2} x_1^2 + \frac{t}{\hbar} \hat{D}^{(xp)} x_1 \partial_{x_1} | n \rangle\right] \quad (3.171)$$

$$\operatorname{Re}(\langle n | \hat{k}_1 | n \rangle) = -\frac{\tau \omega^2}{4} + \frac{\hat{D}^{(pp)}}{m \omega \hbar} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.172)$$

sustituyendo el tensor $\hat{D}^{(pp)}$ obtenemos:

$$\Gamma_n = \frac{\omega t}{\hbar} \left[\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} E_n - E_0 \right] \quad (3.173)$$

de acuerdo con este resultado el decaimiento radiativo de los estados excitados se ve incrementado por la presencia del término de la temperatura del campo de vacío.

Resulta interesante notar que cuando $T > 0$, $\Gamma_0 > 0$, lo cual

muestra que el estado base del oscilador no es un estado estable; para bajas temperaturas Γ_0 decrece exponencialmente en tanto que para temperaturas muy altas $\Gamma_0 \sim \left(\frac{\tau\omega}{2\hbar}\right)T$. En $T=0$ se tiene que:

$$\Gamma_n = \frac{\omega t}{\hbar} \left(E_n - E_0 \right) = \tau \omega_n^2 \equiv n \Gamma_1 \quad (3.174)$$

y ya que para el oscilador armónico⁽⁴⁴⁾:

$$\sum_{k < n} |\langle n | x | k \rangle|^2 = |\langle n | x | n-1 \rangle|^2 = \frac{\hbar n}{2m\omega}$$

$$\rightarrow \Gamma_n = \frac{4e^2 \omega^3}{3\hbar c^3} \sum_{k < n} |\langle n | x | k \rangle|^2 \quad (3.175)$$

este es el resultado obtenido con la EDC en el capítulo anterior, ec.(2.82) para la aproximación dipolar.

La ec.(3.173) también se puede escribir como:

$$\Gamma_n = \frac{1}{2} \tau \omega_0^2 \left\{ \frac{E(\omega_0)}{E_0(\omega_0)} (2n+1) - 1 \right\} \quad (3.176)$$

$$E \equiv \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \quad (3.177)$$

$$E_0(\omega_0) \equiv \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (3.178)$$

definiendo:

$$\Delta E \equiv E(\omega_0) - E_0(\omega_0) \quad (3.179)$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{2} \tau \omega_0^2 \left\{ 2n + \frac{\Delta E}{E_0} (2n+1) \right\} \quad (3.180)$$

donde ΔE es la energía de excitación del campo; se puede hacer la identificación de dos contribuciones a las transiciones:

$$\Gamma_n^a = \tau \omega_0^2 n = n \Gamma_1^a \quad (3.181)$$

$$\Gamma_n^j = \tau \omega_0^2 \frac{\Delta E}{E_0} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.182)$$

cundo el campo está en su estado base $\Delta E = 0$, entonces la constante de decaimiento se reduce a (3.181) que da el decaimiento espontáneo; por otra parte, como ya habíamos visto, cuando $\Delta E \neq 0$ todos los estados excitados y aún el estado base son inestables,

esto da lugar a las transiciones inducidas.

Calculemos ahora el cambio en la energía δE_n , tomando el valor promedio de la parte imaginaria de \hat{K}_1 , pero antes vemos el cálculo del tensor $\hat{D}^{(xp)}$, ec.(3.83) que reescribimos aquí:

$$\hat{D}^{(xp)} = \frac{2\pi e^2}{3m\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \rho_T^m(\omega') \int_c^L dt' \exp(i\omega'(t-t') - \frac{1}{2}\tau\omega'^2(t-t')) \operatorname{sen}\omega(t-t')$$

$$\therefore \hat{D}^{(xp)} = \frac{\tau\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega'^3}{1+\tau\omega'^2} \frac{(\omega^2 - \omega'^2)(1 + \exp(-\hbar\omega'\beta))}{(\omega^2 - \omega'^2) + \tau\omega'^4\omega'^2} \frac{1}{(1 + \exp(-\hbar\omega'\beta))} \quad (3.183)$$

esta integral diverge logarítmicamente al igual que la ec.(2.100). El origen de esta divergencia radica en la suposición de la densidad de punto cero ($\rho_0 \sim \omega^3$), lo que implica tener una densidad de energía infinita para el vacío. Podríamos introducir un corte a la frecuencia, de forma tal que (3.183) sea convergente, sin embargo, haremos una renormalización a la masa como se acostumbra en EDC. Empezamos notando que la integral es divergente aún para partícula libre ($\omega = 0$), lo cual implica una corrección infinita a la energía propia, o en nuestra aproximación no relativista, a la masa de la partícula. Dado que esta no es una contribución al efecto Lamb, porque ya se incluyó en la masa experimental:

$$\hat{D}^{(xp)} = \frac{\tau\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega'^3}{1+\tau^2\omega'^2} \frac{(\omega^2 - \omega'^2)}{(\omega^2 - \omega'^2) + \tau^2\omega'^4\omega'^2} - \frac{-\omega'^2}{\omega'^4 + \tau^2\omega'^2\omega'^2} \left[\frac{1+\epsilon'}{1-\epsilon'} \right] \quad (3.184)$$

$$= \frac{\tau\hbar}{2\pi} \omega^2 \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega'^3}{1+\tau^2\omega'^2} \left[\frac{1+\epsilon'}{1-\epsilon'} \right] \frac{\omega^2(1 + \tau^2\omega'^2) - \omega'^2}{(\omega^2 - \omega'^2) + \tau^2\omega'^4\omega'^2} \frac{1}{(\omega'^4 + \tau\omega'^4\omega'^2)} \quad (3.185)$$

resulta que la integral ahora es convergente. Para evaluarla se debería tomar en cuenta que en $\omega = \omega'$ ocurre la resonancia que permite despreciar términos de orden τ^2 , pero por conveniencia

introducimos la frecuencia de corte ω_c .

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(xp)} &= -\frac{\tau\hbar}{2\pi} \omega^2 \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right) L_n \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \right] = \frac{\tau\hbar}{2\pi m} F' \left[L_n \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \right] \right] \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right) = \\ &= \frac{-\tau\hbar}{2\pi m} \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right) L_n \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \right] V', \end{aligned} \quad (3.186)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta E_n &\equiv \delta E_n - \delta E_n(\omega = 0) = \langle n | \hat{D}^{(xp)} \times \partial_x | n \rangle \\ &= -\frac{\tau\hbar}{2\pi m} \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right) L_n \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \right] \langle n | V' \times \partial_x | n \rangle \\ &= \frac{\tau\hbar}{2\pi m} L_n \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \right] \langle n | \nabla^2 V | n \rangle \left[\frac{1}{1-\epsilon} - \frac{\exp(-\beta\hbar\omega)}{\exp(-\beta\hbar\omega)} \right] \end{aligned} \quad (3.187)$$

la última igualdad se sigue de hacer el cambio de V' por el laplaciano, para tomar en cuenta las tres dimensiones. Esta ecuación muestra que cada nivel del oscilador experimenta un cambio debido a la interacción con el campo de fondo, que además depende de la temperatura, y en vista de que el cambio en la energía es igual para todos los estados $\langle n | \nabla^2 V | n \rangle = -3m\omega^2$ es independiente de n , por lo que el cambio Lamb no afecta el espectro de radiación.

En $T = 0$:

$$\delta E_n = \frac{\tau\hbar}{2\pi m} L_n \left[-\frac{\omega}{\omega_c} \right] \langle n | \nabla^2 V | n \rangle \quad (3.188)$$

nuevamente podemos comparar esta ecuación con la (2.114) y, la concordancia es completa si:

$$\delta E_n = \frac{\tau\hbar}{2\pi m} L_n \left[-\frac{E_c}{\langle \Delta E \rangle} \right] \langle n | \nabla^2 V | n \rangle \quad (3.189)$$

Hasta aquí se ha visto que la EDE permite obtener la descripción cuántica del oscilador armónico incluyendo las correcciones radiativas, sin embargo, recordemos que se partió de un hamiltoniano clásico con la hipótesis de un campo de radiación de fondo estocástico real. Siguiendo el razonamiento hecho hasta aquí, podríamos pensar que la obtención de una ecuación de

Fokker-Planck para un problema específico nos llevaría a conocer el comportamiento de un sistema cuántico, sin embargo esto no ocurre en general, puesto que hay una gran cantidad de problemas que no permiten una explicación satisfactoria en estos términos.

El ejemplo más claro es el problema atómico. Al parecer la construcción de una ecuación de F-P para el átomo de hidrógeno⁽⁴⁾ no es de lo más congruente con los resultados conocidos, esto puede tener su origen en la no linealidad de la fuerza externa. Así mismo se han hecho intentos para incorporar el espín, aunque "de una manera ad hoc como se hace en la MC como una consecuencia de la dinámica intrínseca interna de un modelo para el Zitterbewegung"⁽⁴⁾.

Además de esto existen trabajos acerca de partículas con estructura que, posiblemente ayuden a resolver algunas dificultades de la EDE. Esta idea es prometedora ya que en primera instancia se antoja factible que la ec.de Brafford-Marshall no tenga más ese caracter acausal⁽⁴⁰⁾ que origina la introducción de soluciones espúreas o divergentes.

CAPITULO 4
LAS MODIFICACIONES A LAS
CORRECCIONES RADIATIVAS

4.1 ECUACION DE FOKKER-PLANCK GENERALIZADA.

Hasta aquí, hemos tratado únicamente con campos en espacios "abiertos", es decir no limitados por objetos, ahora introduciremos modificaciones al medio ambiente y encontraremos las correcciones radiativas causadas por aquellas cambiando la estructura del campo.

Con el fin de dar una generalización de la ecuación de F-P⁽³⁹⁾ para su aplicación a problemas en los cuales la estructura del campo se ve modificada por la presencia de objetos metálicos⁽⁴²⁾, retomamos las ecuaciones (3.6)-(3.9); en términos del conjunto de funciones $\{\tilde{G}_\alpha\}$ los coeficientes b_α se escriben como:

$$b_\alpha = b_\alpha^0 e^{-i\omega_\alpha t} + 2ie\sqrt{\pi} \int_0^t \dot{\vec{x}}(t') \cdot \tilde{G}_\alpha^*(\vec{x}(t')) e^{i\omega_\alpha(t'-t)} dt \quad (4.1)$$

sustituyendo en (3.6) obtenemos para el campo eléctrico:

$$\begin{aligned} \vec{E} = & i \int_{\frac{c}{t}}^{\frac{c}{t}} \sqrt{\pi} \left\{ \left[b_\alpha^0 e^{-i\omega_\alpha t} \tilde{G}_\alpha(\vec{x}(t)) - b_\alpha^{0*} \tilde{G}_\alpha^*(\vec{x}(t)) \right] \right. \\ & + 2ie\sqrt{\pi} \left\{ \int_c^t \dot{\vec{x}}(t') \cdot \tilde{G}_\alpha^*(\vec{x}(t')) e^{i\omega_\alpha(t'-t)} dt' \right\} \tilde{G}_\alpha(\vec{x}) \\ & \left. + 2ie\sqrt{\pi} \left\{ \int_c^t \dot{\vec{x}}(t') \cdot \tilde{G}_\alpha^*(\vec{x}(t')) e^{-i\omega_\alpha(t'-t)} dt' \right\} \tilde{G}_\alpha^*(\vec{x}(t)) \right\} \quad (4.2) \end{aligned}$$

de ésta se ve que el campo eléctrico se puede escribir como la suma de dos partes: $\vec{E} = \vec{E}_b + \vec{E}_r$.

$$\vec{E}_b \equiv i \int_{\frac{c}{t}}^{\frac{c}{t}} \sqrt{\pi} \left\{ b_\alpha^0 e^{-i\omega_\alpha t} \tilde{G}_\alpha(\vec{x}(t)) - b_\alpha^{0*} e^{i\omega_\alpha t} \tilde{G}_\alpha^*(\vec{x}(t)) \right\} \quad (4.3)$$

$$\vec{E}_r \equiv -2ie \int_{\frac{c}{t}}^{\frac{c}{t}} \left\{ \left\{ \int_c^t \dot{\vec{x}}(t') \cdot \tilde{G}_\alpha^*(\vec{x}(t')) e^{i\omega_\alpha(t'-t)} dt' \right\} \tilde{G}_\alpha(\vec{x}(t)) \right.$$

$$+ \left\{ \int_c^l \dot{\vec{x}}(t') \cdot \vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t')) e^{-i\omega_\alpha(t'-t)} dt' \right\} \vec{\Theta}_\alpha^*(\vec{x}) \quad (4.4)$$

nuevamente, \vec{E}_g representa el campo estocástico de fondo y \vec{E}_r es el campo radiado por la propia partícula, expresiones análogas para el campo magnético son:

$$\vec{B}_g \equiv \sum_\alpha \sqrt{\pi} K_\alpha^{-1} \left\{ b_\alpha^0 e^{-i\omega_\alpha t} \nabla \times \vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t)) + b_\alpha^{0*} e^{i\omega_\alpha t} \nabla \times \vec{\Theta}_\alpha^*(\vec{x}(t)) \right\} \quad (4.5)$$

$$\vec{B}_r \equiv 2\pi i e \sum_\alpha K_\alpha^{-1} \left\{ \left\{ \int_c^l \dot{\vec{x}}(t') \cdot \vec{\Theta}_\alpha^*(\vec{x}(t')) e^{i\omega_\alpha(t'-t)} dt' \right\} \nabla \times \vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t)) - \left\{ \int_c^l \dot{\vec{x}}(t') \cdot \vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t')) e^{-i\omega_\alpha(t'-t)} dt' \right\} \nabla \times \vec{\Theta}_\alpha^*(\vec{x}(t)) \right\} \quad (4.6)$$

sin embargo, como estamos suponiendo que el movimiento de la partícula es fundamentalmente no relativista, podemos despreciar estas últimas contribuciones y escribir la ec. de movimiento como:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{F}_g + \vec{F}_r \quad (4.7)$$

introduciendo la aproximación de longitud de onda larga⁽³⁶⁾, en la cual las dimensiones de la partícula son mucho menores que las dimensiones del campo (longitud de onda), entonces $\vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t))$ casi no cambia cuando la partícula se mueve de $\vec{x}(t)$ a $\vec{x}(t')$, podemos suponer que para tiempos grandes ($t + \omega$) $\vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t))$ no depende de t' y puede salir de la integral de (4.4), al igual que $\vec{\Theta}_\alpha^*(\vec{x}(t))$, y haciendo un cambio de variable $t' = t - s$.

$$\vec{F}_r = e\vec{E}_r = -2\pi e \sum_\alpha \left[\vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t)) \vec{\Theta}_\alpha^*(\vec{x}(t)) \cdot \int_c^l \dot{\vec{x}}(t-s) e^{-i\omega_\alpha s} ds + \vec{\Theta}_\alpha^*(\vec{x}(t)) \vec{\Theta}_\alpha(\vec{x}(t)) \cdot \int_c^l \dot{\vec{x}}(t-s) e^{i\omega_\alpha s} ds \right] \quad (4.8)$$

suponiendo además que los efectos dinámicos de las fuerzas eléctricas producen sólo pequeñas variaciones en los resultados,

entonces se puede considerar como válida la solución de la ecuación aproximada $\ddot{\mathbf{F}} = -m\omega_0^2 \ddot{\mathbf{x}}$, así pues, usando (3.80) en la (4.8):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{F}}_r = & -2\pi e^2 \sum_{\alpha} \left[\ddot{\mathbf{G}}_{\alpha}(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \ddot{\mathbf{G}}_{\alpha}^*(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \dot{\mathbf{x}}(t) \cos \omega_0 s e^{-i\omega_{\alpha} s} ds - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \ddot{\mathbf{x}}(t) \text{sen} \omega_0 s e^{-i\omega_{\alpha} s} ds \right\} + \right. \\ & \left. \ddot{\mathbf{G}}_{\alpha}^*(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \ddot{\mathbf{G}}_{\alpha}(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \dot{\mathbf{x}}(t) \cos \omega_0 s e^{i\omega_{\alpha} s} ds - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \ddot{\mathbf{x}}(t) \text{sen} \omega_0 s e^{i\omega_{\alpha} s} ds \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

que se escribe como:

$$\mathbf{F}_{rj} = -\gamma_{jk} \dot{\mathbf{x}}_k - \delta m_{jk} \ddot{\mathbf{x}}_k \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} \equiv & -2\pi e^2 \sum_{\alpha} \left[\mathbf{G}_{\alpha j}(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{G}_{\alpha k}^*(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \int_0^{\infty} \cos \omega_0 s e^{-i\omega_{\alpha} s} ds + \right. \\ & \left. \mathbf{G}_{\alpha j}^*(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{G}_{\alpha k}(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \int_0^{\infty} \cos \omega_0 s e^{i\omega_{\alpha} s} ds \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \delta m_{jk} \equiv & -\frac{2\pi e^2}{\omega_0} \sum_{\alpha} \left[\mathbf{G}_{\alpha j}(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{G}_{\alpha k}^*(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \int_0^{\infty} \text{sen} \omega_0 s e^{-i\omega_{\alpha} s} ds + \right. \\ & \left. + \mathbf{G}_{\alpha j}^*(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{G}_{\alpha k}(\ddot{\mathbf{x}}(t)) \int_0^{\infty} \text{sen} \omega_0 s e^{i\omega_{\alpha} s} ds \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

por lo que la ecuación de movimiento resulta:

$$\mathbf{M}_{jk} \ddot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{rj} + \mathbf{F}_{sj} \quad (4.13)$$

donde $\mathbf{M}_{jk} = m \delta_{jk}$ y se está entendiendo suma sobre índices repetidos; sustituyendo (4.10) en (4.7) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{jk} \ddot{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{sj} - \gamma_{jk} \dot{\mathbf{x}}_k - \delta m_{jk} \ddot{\mathbf{x}}_k \\ (\mathbf{M}_{jk} + \delta m_{jk}) \ddot{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{sj} - \gamma_{jk} \dot{\mathbf{x}}_k \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$m_{jk} \ddot{x}_k = F_j + F_{oj} - \gamma_{jk} \dot{x}_k \quad (4.15)$$

$$m_{jk} \equiv M \delta_{jk} + \delta m_{jk} \quad (4.16)$$

aquí m_{jk} es la masa física, δm_{jk} da origen al término de la masa electromagnética y γ_{jk} a la reacción de radiación. En general las funciones \tilde{G}_α dependen de la posición y del tiempo a través de ésta, por lo que δm_{jk} y γ_{jk} dependen de la posición; evaluando las integrales de (4.11) y (4.12) y usando el hecho de que las funciones \tilde{G}_α son ortonormales:

$$\sum_{\alpha} G_{\alpha j} G_{\alpha k}^* = \sum_{\alpha} |\tilde{G}_\alpha|^2 \delta_{jk}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} &= 2\pi e^2 \sum_{\alpha} |\tilde{G}_\alpha|^2 \delta_{jk} \left\{ \mathcal{P} \frac{i \omega_{\alpha}}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \right\} \\ &- 2\pi e^2 \sum_{\alpha} |\tilde{G}_\alpha|^2 \delta_{jk} \left\{ \mathcal{P} \frac{-i \omega_{\alpha}}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \delta m &= -\frac{2\pi e^2}{\omega_0} \sum_{\alpha} |\tilde{G}_\alpha|^2 \delta_{jk} \left\{ \mathcal{P} \frac{\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{i\pi}{2} (\delta(\omega_0 + \omega_{\alpha}) - \delta(\omega_0 - \omega_{\alpha})) \right\} \\ &- \frac{2\pi e^2}{\omega_0} \sum_{\alpha} |\tilde{G}_\alpha|^2 \delta_{jk} \left\{ \mathcal{P} \frac{\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{i\pi}{2} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) - \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Escogiendo una representación particular para las funciones \tilde{G}_α en una caja cúbica de lado L recuperamos la ecuación usual de Langevin y podemos hacer la correcta identificación de γ_{jk} y δm_{jk} .

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha &= \sqrt{\frac{8}{3L^3}} (\hat{i} \cos k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z + \hat{j} \operatorname{sen} k_1 x \cos k_2 y \operatorname{sen} k_3 z + \\ &+ \hat{k} \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \cos k_3 z) \end{aligned} \quad (4.19)$$

cuando $L \rightarrow \omega$:

$$\sum_{\alpha} |\ddot{\theta}_{\alpha}|^2 \delta_{jk} + \frac{1}{3\pi^2 c^3} \delta_{jk} \int_0^{\infty} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} \quad (4.20)$$

(4.11) y (4.12) toman la forma:

$$\begin{aligned} \gamma_{jk} &= \frac{2\pi e^2}{3\pi^2 c^3} \delta_{jk} \int_0^{\infty} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} \left\{ \mathbb{P} \frac{i \omega_{\alpha}}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \right\} \\ &+ \frac{2\pi e^2}{3\pi^2 c^3} \delta_{jk} \int_0^{\infty} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} \left\{ \mathbb{P} \frac{-i \omega_{\alpha}}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 + \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 - \omega_{\alpha})) \right\} \\ \gamma_{jk} &= \frac{2\pi e^2}{3\pi^2 c^3} \delta_{jk} \int_0^{\infty} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3\pi c^3} \delta_{jk} \\ &= \tau \omega_0^2 \delta_{jk} \quad (4.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta m_{jk} &= -\frac{2\pi e^2}{\omega_0} \frac{\delta_{jk}}{3\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} \left\{ \frac{\mathbb{P} \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{i\pi}{2} (\delta(\omega_0 + \omega_{\alpha}) - \delta(\omega_0 - \omega_{\alpha})) \right\} \\ &- \frac{2\pi e^2}{\omega_0} \frac{\delta_{jk}}{3\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} \left\{ \frac{\mathbb{P} \omega_0}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{i\pi}{2} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) - \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \right\} \\ \therefore \delta m_{jk} &= -\frac{4\pi e^2}{3\pi c^3} \delta_{jk} \int_0^{\infty} \frac{\mathbb{P} \omega_{\alpha}^2}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} d\omega_{\alpha} \quad (4.22) \end{aligned}$$

donde \mathbb{P} se refiere a la parte principal de la integral.

Sustituyendo en (4.15):

$$\left\{ M_{jk} - \frac{2\pi r \delta_{jk}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathbb{P} \omega_{\alpha}^2}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} d\omega_{\alpha} \right\} \ddot{x}_k = F_j + F_{\Sigma j} - \tau m \omega_0^2 \delta_{jk} \dot{x}_k \quad (4.23)$$

ésta es una forma de la ecuación de Abraham-Lorentz, que incluye, por supuesto, la masa renormalizada y el término de reacción de radiación.

A pesar de que estos resultados son especialmente particulares para el oscilador armónico, se puede hacer un tratamiento análogo para cualquier sistema ligado en estado estacionario, siempre que la ec.(3.80) siga siendo válida, en

estos casos se puede hablar de una frecuencia que depende del tipo de movimiento que realiza el sistema. Por ejemplo un oscilador anarmónico, un rotor etc..

Las ecs. (4.11), (4.12) y (4.15) nos permiten generalizar la ec. (3.75), que en coordenadas queda como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{m} p_j \frac{\partial Q}{\partial p_j} \left\{ F_j - \frac{1}{m} \gamma_{jk} p_j \right\} Q - \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_k} \hat{D}_{jk}^{(PP)} Q - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial p_k} \hat{D}_{jk}^{(XP)} Q = 0 \quad (4.24)$$

Con la ecuación (4.15) m_{ij} es un tensor y da lugar a una ecuación de F-P más complicada así que para llegar a (4.24) se supone que δm es diagonal.)

4.2 CORRECCIONES A LA MASA DEL ELECTRON

DEBIDAS A LAS MODIFICACIONES EN EL MEDIO AMBIENTE.

Si se altera la estructura del campo por la introducción de objetos metálicos, es claro que la masa física se va a ver modificada, estos cambios se obtienen restando la masa electromagnética al cambio total, dado por (4.12):

$$\Delta m_{jk} = -\frac{2\pi e^2}{\omega_0} \sum \left[G_{\alpha j}(\vec{x}(t)) G_{\alpha k}^*(\vec{x}(t)) \int_0^{\infty} \text{sen} \omega_0 s e^{-i\omega_\alpha s} ds + G_{\alpha j}^*(\vec{x}(t)) G_{\alpha k}(\vec{x}(t)) \int_0^{\infty} \text{sen} \omega_0 s e^{i\omega_\alpha s} ds \right] - \frac{2\pi r_0}{\pi} jk \int_0^{\infty} \frac{\rho \omega_\alpha^2}{(\omega_0^2 - \omega_\alpha^2)} d\omega_\alpha \quad (4.25)$$

considerando el caso particular de una partícula oscilante entre dos placas metálicas paralelas, expresamos el campo en coordenadas cilíndricas:

$$G_{n1} = \sqrt{\frac{\hat{z}}{LS}} \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} \text{sen } \xi \right] \left[\hat{k} \times \hat{z} \right] \quad (4.26)$$

$$G_{n2} = \sqrt{\frac{\hat{z}}{LS}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} \left[\frac{n\pi}{Lk_\alpha} \hat{k} \text{sen } \xi + \frac{ik}{k_\alpha} \hat{z} \cos \xi \right] \quad (4.27)$$

donde $\vec{k}_\alpha = k\hat{k} + \frac{n\pi\hat{z}}{L}$, \hat{k} y \hat{z} son vectores unitarios en la dirección de propagación \hat{k} y en la dirección \hat{z} , respectivamente, además $\hat{k} \cdot \hat{z} = 0$, $\xi = \frac{n\pi z}{L}$ con z la distancia a una de las placas, L la separación entre las placas, S el área de cada placa, de forma tal que $L \cdot S$ es el volumen entre las placas y, por último 1 y 2 son los índices de polarización. Cuando sumamos sobre todas las posibles direcciones del vector de propagación, todas las componentes no diagonales del producto de las componentes del campo se anulan, por lo que:

$$\Delta m_{jk} = 4\pi e^2 \delta_{jk} \left\{ \sum_{\alpha} |G_{\alpha j}|^2 \frac{P}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} - \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} |G_{\alpha j}|^2 \frac{P}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} \right\} \quad (4.28)$$

en base a las ecs. (4.26) y (4.27) obtenemos expresiones para las sumas de los cuadrados :

$$\sum_{\alpha} |G_{\alpha x}|^2 = \sum_{\alpha} |G_{\alpha y}|^2 = \frac{1}{LS} \left\{ 1 + \left(\frac{n\pi}{Lk_{\alpha}} \right)^2 \right\} \text{sen } \xi \quad (4.29)$$

$$\sum_{\alpha} |G_{\alpha z}|^2 = \frac{2}{LS} \left(\frac{k}{k_{\alpha}} \right)^2 \cos^2 \xi \quad (4.30)$$

en el límite de L y S grandes y para cualquier función f:

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{LS} \sum_k \sum_n f(k, \frac{n\pi}{L}) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi L} \int_0^{\infty} \sum_n f(k, \frac{n\pi}{L}) dk^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(k, k_n) dk_n dk^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

se está entendiendo por \sum_n suma sobre los $n \geq 0$ y el primer término se multiplica por $\frac{1}{2}$.

Aplicando ésta fórmula a (4.28) con (4.29) y (4.30) cuando $S \rightarrow \infty$ se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta m_{xx} = \Delta m_{yy} &= \frac{e^2}{\pi c^2} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{L} \sum_n \left[1 + \left(\frac{k}{k_{\alpha}} \right)^2 \right] \text{sen}^2 \xi \frac{P}{k_{\alpha}^2 - \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2} dk^2 - \\ &- \frac{e}{\pi c^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[1 + \left(\frac{k}{k_{\alpha}} \right)^2 \right] \text{sen}^2 \xi \frac{P}{k_{\alpha}^2 - \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2} dk^2 dk_n \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta m_{zz} &= \frac{2e^2}{\pi c^2} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{L} \sum_n \left[1 - \left(\frac{k}{k_{\alpha}} \right)^2 \right] \cos^2 \xi \frac{P}{k_{\alpha}^2 - \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2} dk^2 - \\ &- \frac{e}{\pi c^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[1 - \left(\frac{k}{k_{\alpha}} \right)^2 \right] \cos^2 \xi \frac{P}{k_{\alpha}^2 - \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2} dk^2 dk_n \end{aligned} \quad (4.33)$$

para el caso de partícula libre, ($\omega_0 = 0$), estas integrales se reducen a:

$$\int_0^{\kappa^2} \left[1 + \left(\frac{k}{k_n} \right)^2 \right] \text{sen}^2 \xi \frac{\text{IP}}{k_n^2 - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2} dk^2 =$$

$$= \text{Ln} \left(1 + \left(\frac{\kappa}{k_n} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k_n^2} \right) \text{sen}^2 \xi \quad (4.34)$$

$$\int_0^{\kappa^2} \left[1 - \left(\frac{k}{k_n} \right)^2 \right] \text{cos}^2 \xi \frac{\text{IP}}{k_n^2 - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2} dk^2 =$$

$$= \text{Ln} \left(1 + \left(\frac{\kappa}{k_n} \right)^2 - \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k_n^2} \right) \text{cos}^2 \xi \quad (4.35)$$

en donde se ha introducido una frecuencia de corte $\kappa \approx \frac{m_0 c}{\hbar} = \lambda_c^{-1}$, con λ_c la longitud de onda de Compton. Aplicando la fórmula de Euler-Mclaurin⁽⁴³⁾:

$$\frac{\pi}{L} \sum_n' \text{Ln} \left(1 + \left(\frac{\kappa}{k_n} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k_n^2} \right) \text{sen}^2 \xi -$$

$$- \int_0^{\infty} dk_n \text{Ln} \left(1 + \left(\frac{\kappa}{k_n} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k_n^2} \right) \text{sen}^2 \xi$$

$$= \frac{\pi}{2L} \left(2 \text{Ln} \frac{\kappa L}{\pi} + 1 \right) \left(\frac{1}{Z} \text{sen} Z - \text{cos}^2 \frac{Z}{2} \right) - \frac{\pi}{L} + \frac{1}{2Z} \left(\text{si} Z + \frac{\pi}{2} \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\pi/L}{(2n)!} \right)^{2n} B_{2n} \left[\text{Ln} \left(1 + \left(\frac{\kappa}{k_n} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k_n^2} \right) \text{sen}^2 \xi \right]^{(2n-1)}}{\left|_{k = \frac{\pi}{2}} \right.} \quad (4.36)$$

donde B_{2n} son los números de Bernoulli⁽⁴⁴⁾ y $Z = \frac{2\pi Z}{L}$ para el primer caso. Por lo tanto, sustituyendo (4.36) en (4.34) y ésta en (4.32) obtenemos:

$$\Delta m_{xx} = \Delta m_{yy} = -\frac{e^2}{Lc^2} \left[\left(\frac{\text{sen} Z}{Z} - \frac{1}{2} - \frac{\text{cos} Z}{2} \right) \text{Ln} \kappa L + \frac{1}{Z} \left(\text{si} Z + \frac{\pi}{2} - Z \right) \right] \quad (4.37)$$

con:

$$\text{si} Z = - \int_Z^{\infty} \frac{\text{sen} t}{t} dt$$

en forma parecida:

$$\Delta m_{zz} = -\left(\frac{2e^2}{Lc^2}\right) \left[\left(\frac{\sin Z}{Z} + \frac{1}{2} - \frac{\cos Z}{2} \right) \text{Ln } \kappa L + \frac{1}{Z} \left(\sin Z + \frac{\pi}{2} + Z \right) \right] \quad (4.38)$$

cundo la partícula está muy cerca de una de las placas $Z \approx 0$.

$$\therefore \frac{\Delta m_{xx}}{m} \approx \frac{\alpha \lambda_c}{L} - \frac{Z^2}{12} - \text{Ln } \frac{\lambda_c}{L} \approx 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{\Delta m_{zz}}{m} \approx -\frac{2\alpha \lambda_c}{L} \text{Ln } \frac{\lambda_c}{L} \quad (4.40)$$

promediando $\frac{\Delta m}{m}$ sobre las tres direcciones x, y, z para alguna z dada se encuentra:

$$\left\langle \frac{\Delta m}{m} \right\rangle \equiv \frac{\text{Tr } \Delta m}{3m} \approx -\frac{2}{3} \frac{\alpha \lambda_c}{L} \text{Ln } \frac{L}{\lambda_c} \quad (4.41)$$

esta ecuación es independiente de la posición. Comparando con la fórmula obtenida por Svozil⁽⁴⁵⁾:

$$\frac{-\Delta m}{m} = -\frac{1}{2} \alpha \frac{\lambda_c}{L} \text{Ln} \left(\frac{L}{\lambda_c} \right) \quad (4.42)$$

se ve que (4.41) es del orden de magnitud, pero este resultado es homogéneo e isotrópico. Otro cálculo basado en la EDC, realizado por Dobiasch y Walther⁽⁴⁶⁾ para el caso de una guía de ondas que elimina todos los modos por debajo de una cierta frecuencia ω_m , da para $\Delta m/m$:

$$\frac{-\Delta m}{m} = -8\alpha \frac{\lambda_c}{3L} \quad (4.43)$$

que coincide con el resultado de la EDE, si (4.25) se reescribe como:

$$\frac{-\Delta m}{m} = \frac{2}{\pi} \tau \left\{ \int_{\omega}^{\infty} d\omega_{\alpha} - \int_0^{\omega} d\omega_{\alpha} \right\} \quad (4.44)$$

dado que (4.43) es independiente de ω_0 , se puede aplicar a partículas ligadas así como a partículas libres.

Recordemos que el cambio en la masa Δm , en EDC proviene del término cuadrático en el potencial vectorial, es decir que Δm es

un efecto fundamentalmente electromagnético más que cuántico además, notemos que Δm es esencialmente clásico, en otras palabras un efecto puramente electromagnético de origen clásico da lugar a una corrección que se considera cuántica. La corrección a la masa produce un cambio a la energía de la partícula, dado por:

$$\Delta E = -\frac{\vec{p}^2}{2m} \left[-\frac{\Delta m}{m} \right] \quad (4.45)$$

en general, Δm depende de la posición, la partícula al alejarse de las placas verá reducida su ΔE lo que hace aparecer una fuerza debida al gradiente de ΔE ($-\nabla(\Delta E)$). El orden de magnitud en el cambio de energía producido por Δm , para una cavidad con $L \cong 70 \text{ \AA}$ es: $\Delta E \sim \alpha^9 E$, este resultado es importante, sin embargo postergaremos las conclusiones que de él se derivan, para la sección que trata del efecto Lamb cuando se han introducido modificaciones en el medio ambiente.

4.3 TEOREMA DE FLUCTUACION-DISIPACION.

El proposito de esta sección es mostrar la deducción de un teorema de fluctuación-disipación que se cumple para sistemas estocásticos radiantes y, que permite explicar la estabilidad de tales sistemas.

Como ya se mencionó \vec{F}_0 es la fuerza estocástica del campo de radiación de fondo que interactuana con las partículas cargadas, también se vio que en presencia de objetos conductores la estructura del campo se modifica, esto se refleja en las variaciones que experimentan los tensores m_{jk} y γ_{jk} así como los cambios en el propio campo de fondo. Se puede esperar que las propiedades estadísticas de la fuerza estocástica dependan del medio ambiente, en particular los coeficientes de fricción y difusión.

Retomemos la ecuación de F-P:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{m} P_j \frac{\partial Q}{\partial p_j} \left\{ F_j - \frac{1}{m} \gamma_{jk} p_j \right\} Q - \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial p_k} \hat{D}_{jk}^{(pp)} Q - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial p_k} \hat{D}_{jk}^{(xp)} Q = 0 \quad (4.46)$$

sustituyendo (4.3) en la expresión para el tensor $\hat{D}^{(pp)}$.

$$\begin{aligned} \hat{D}_{jk}^{(pp)} &= \int_0^\infty \left\langle \left[i e \sum_{\alpha} \sqrt{\pi} \left\{ b_{\alpha}^0 e^{-i\omega_{\alpha} t} G_{\alpha j} - b_{\alpha}^{0*} e^{i\omega_{\alpha} t} G_{\alpha j}^* \right\} \right] \cdot \left[\right. \right. \\ & \quad \left. \left. i e \sum_{\alpha'} \sqrt{\pi} \left\{ b_{\alpha' k}^0 e^{-i\omega_{\alpha'} t} G_{\alpha' k} - b_{\alpha'}^{0*} e^{i\omega_{\alpha'} t} G_{\alpha' k}^* \right\} \right] \right\rangle \cos \omega_0 t dt \quad (4.47) \\ &= -\pi \int_0^\infty e^{2\omega_0 t} \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} e^{-i\omega_{\alpha} t} G_{\alpha j} G_{\alpha' k} \cos \omega_0 t \langle b_{\alpha}^0 b_{\alpha'}^0 \rangle dt \\ & \quad + \pi \int_0^\infty e^{2\omega_0 t} \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} e^{-i\omega_{\alpha} t} G_{\alpha j} G_{\alpha' k}^* \cos \omega_0 t \langle b_{\alpha}^0 b_{\alpha'}^{0*} \rangle dt \\ & \quad + \pi \int_0^\infty e^{2\omega_0 t} \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} e^{i\omega_{\alpha} t} G_{\alpha j}^* G_{\alpha' k} \cos \omega_0 t \langle b_{\alpha}^{0*} b_{\alpha'}^0 \rangle dt \end{aligned}$$

$$- \pi \int_0^{\infty} e^{2\sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} e^{i\omega_{\alpha} t} G_{\alpha j}^* G_{\alpha k}^* \cos \omega_{\alpha} t \langle b_{\alpha}^{0*} b_{\alpha'}^{0*} \rangle dt \quad (4.48)$$

usando la dependencia estadística de las amplitudes de los modos:

$$\langle b_{\alpha} b_{\alpha'} \rangle = \langle |b_{\alpha}|^2 \rangle \delta_{\alpha\alpha'} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_{jk}^{(pp)} = & \pi e^2 \sum_{\alpha} G_{\alpha j} G_{\alpha k}^* \langle |b_{\alpha}|^2 \rangle \left\{ \frac{-iP}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \right\} \\ & + \pi e^2 \sum_{\alpha} G_{\alpha j}^* G_{\alpha k} \langle |b_{\alpha}|^2 \rangle \left\{ \frac{-iP}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 + \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 - \omega_{\alpha})) \right\} \quad (4.50) \end{aligned}$$

haciendo la aproximación del tratamiento de ω_{α} como una variable continua, podemos calcular el segundo término integrando sobre el plano superior complejo. Dado que las funciones \mathcal{G}_{α} son regulares y cuadráticamente integrables, el valor de la integral estará dado por el residuo en $\omega_{\alpha}^{(47)}$, esto significa que $\langle |b_{\alpha}|^2 \rangle$ puede salir de la integral como $\langle |b(\omega_0)|^2 \rangle$, análogamente para el primer término y usando la ortogonalidad de las funciones \mathcal{G}_{α} :

$$\begin{aligned} \hat{D}_{jk}^{(pp)} = & \frac{e^2 \delta_{jk}}{3\pi c^3} \langle |b(\omega_0)|^2 \rangle \int \left\{ \frac{-iP}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \right\} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} \\ & + \frac{e^2 \delta_{jk}}{3\pi c^3} \langle |b(\omega_0)|^2 \rangle \int \left\{ \frac{-iP}{(\omega_0^2 - \omega_{\alpha}^2)} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega_0 + \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 - \omega_{\alpha})) \right\} \omega_{\alpha}^2 d\omega_{\alpha} \quad (4.51) \end{aligned}$$

empleando (4.17) y (4.20) y comparando con (4.51):

$$\hat{D}_{jk}^{(pp)} = \frac{1}{2} \langle |b(\omega_0)|^2 \rangle \gamma_{jk} \quad (4.52)$$

el coeficiente de proporcionalidad entre $\hat{D}_{jk}^{(pp)}$ y γ_{jk} se encuentra promediando el hamiltoniano del campo:

$$\langle H_r \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \langle |b_{\alpha}|^2 \rangle \equiv \sum_{\alpha} \langle E_{\alpha} \rangle \quad (4.53)$$

aquí a $\langle |b_{\alpha}|^2 \rangle$ se le identifica con la energía promedio de la componente de radiación con frecuencia ω_{α} , por lo que:

$$\hat{D}_{jk}^{(pp)} = \langle E(\omega_0) \rangle \gamma_{jk} \quad (4.54)$$

esto es llamado *teorema de fluctuación-disipación* para sistemas en estado estacionario y siempre que sea válida la relación (3.80) con $\omega_0 \approx \text{cte.}$; ésta expresión corresponde a la relación $D = \gamma kT$ dada en el movimiento Browniano⁽⁴⁰⁾. En otras palabras los efectos difusivos introducidos por el vacío compensan los efectos radiativos.

Un resultado sumamente sorprendente es el hecho de que, para el oscilador armónico, por ejemplo, la presencia de objetos metálicos no afecta el estado de equilibrio, ya que se obtienen las mismas conclusiones para el estado estacionario cuando no hay conductores presentes, esto por supuesto en la aproximación a primer orden de τ ; sin embargo las correcciones radiativas sí se ven afectadas, pero esto es de esperarse puesto que dependen directamente de la estructura del campo, esto se entiende en términos de (4.54) puesto que las correcciones radiativas dependen de los tensores $\hat{D}^{(pp)}$ y $\hat{D}^{(xp)}$, mientras que el estado más bajo del oscilador (a orden τ) tiene una solución que depende de las constantes de movimiento, es decir de E , ec.(3.102), ver § 3.5. Desde el punto de vista de la EDC es obvio puesto que el responsable de las correcciones radiativas es el vacío. Para la EDE, el comportamiento cuántico del electrón es el resultado de la acción del campo estocástico de fondo (que incluye al vacío) sobre él. Es claro que si pudieramos quitar el campo de fondo recuperaríamos las ecuaciones clásicas para una partícula, sin embargo esto no puede ser, no podemos librarnos del vacío, pero sí podemos cambiar su estructura introduciendo objetos, aunque no hay una modificación substancial del comportamiento cuántico de la partícula, como ya lo hemos visto en la sección anterior y se verá

en la parte de las correcciones a la energía.

4.4 LA VIDA MEDIA DE LOS ESTADOS EXCITADOS.

Se puede seguir un tratamiento parecido al del capítulo anterior para obtener Γ_n cuando se modifica la estructura del campo por la introducción de objetos metálicos, así pues, si denotamos por el superíndice m a la generalización de (3.169) para la constante de decaimiento modificada por el medio ambiente, entonces:

$$\Gamma_n^m = 2 \langle n | \hat{K}_1^2 | n \rangle = 2 \langle n | -\frac{1}{2m} \gamma_{jk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{\hbar^2} \hat{D}_{jk}^{(pp)} x_j x_k | n \rangle \quad (4.55)$$

sustituyendo (4.54) en (4.55):

$$\Gamma_n^m = 2 \langle n | -\frac{1}{2m} \gamma_{jk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{\hbar^2} \langle E(\omega_0) \rangle \gamma_{jk} x_j x_k | n \rangle \quad (4.56)$$

para un oscilador orientado en una dirección dada l , se obtiene:

$$\Gamma_n^m = -\frac{1}{2m} \gamma_{ll} + \frac{2n+1}{\hbar m \omega_0} \hat{D}_{ll}^{(pp)} = \frac{1}{2m} \gamma_{ll} \left[2n + \frac{\Delta E}{E} - (2n+1) \right] \quad (4.57)$$

comparando con la ec. (3.179) vemos que el cambio fraccional de la constante de decaimiento es:

$$\frac{\Gamma_n^m}{\Gamma_n} = \frac{\frac{1}{2m} \gamma_{ll} \left[2n + \frac{\Delta E}{E} - (2n+1) \right]}{\frac{1}{2} \omega_0^2 \tau \left[2n + \frac{\Delta E}{E} - (2n+1) \right]} = \frac{\gamma_{ll}}{m \tau \omega_0^2} \quad (4.58)$$

donde γ_{ll} está dada por (4.17):

$$\gamma_{ll} = 2\pi e^2 \sum_{\alpha} |G_{\alpha l}|^2 (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \quad (4.59)$$

y de (4.21) en el espacio libre:

$$\gamma_{ll} = m \tau \omega_0^2 \quad (4.60)$$

las ecuaciones (4.58) y (4.59) muestran que la constante de decaimiento depende de la posición del oscilador, así como de su dirección de movimiento. En el caso especial de un campo isotrópicamente modificado:

$$\gamma_{ll} = \frac{1}{3} \text{Tr } \gamma = \frac{2}{3} \pi^2 e^2 \sum_{\alpha} |G_{\alpha}|^2 (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \quad (4.61)$$

ahora, de las ecuaciones (3.6) y (3.7) podemos ver que la densidad de energía del campo es:

$$U = \frac{1}{8\pi} \left[|\vec{B}|^2 + |\vec{E}|^2 \right] = 2 \int_0^{\infty} \mathbb{E}(\omega) \sum_{\alpha} |G_{\alpha}|^2 (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) d\omega \quad (4.62)$$

$$\therefore U = \int_0^{\infty} \mathbb{E}(\omega) \rho_m d\omega \quad (4.63)$$

donde ρ_m es la densidad de modos del campo:

$$\rho_m \equiv 2 \sum_{\alpha} |G_{\alpha}|^2 (\delta(\omega_0 - \omega_{\alpha}) + \delta(\omega_0 + \omega_{\alpha})) \quad (4.64)$$

con esto la ec.(4.61) se puede escribir como:

$$\gamma_{ll} = \frac{1}{9} \pi^2 e^2 \rho_m \quad (4.65)$$

sustituyendo (4.58) para el caso isotrópico:

$$\frac{\Gamma_n^m}{\Gamma_n} = \frac{\pi^2 e^2 \rho_m}{3\pi\omega_0^2} = \frac{c^3 \pi^2 \rho_m}{2\omega_0^2} = \frac{\rho_m}{\frac{2\omega_0^2}{c^3 \pi^2}} = \frac{\rho_m}{\rho_0} \quad (4.66)$$

donde $\rho_0 \equiv \frac{2\omega_0^2}{c^3 \pi^2}$ es la densidad de modos en el espacio libre; de ésta se ve que en el caso particularmente considerado, el incremento o decremento de la razón de decaimiento es proporcional al cambio de la densidad de modos de la frecuencia correspondiente, es decir que si hay una modificación en el campo entonces $\frac{\Gamma_n^m}{\Gamma_n}$ cambia.

Con el fin de hacer otra comparación de los resultados de la EDE y la EDC usaremos la ec.(4.58) para el caso de una partícula entre dos placas metálicas paralelas, el campo entre ellas está dado por (4.26) y (4.27) que sustituidas en (4.61):

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \frac{\pi e^2 \omega_0}{c^2 L} \sum_n'' \left(1 + \left(\frac{cn\pi}{L\omega_0} \right)^2 \right) \sin^2 n Z \quad (4.67)$$

$$\gamma_{zz} = \frac{2\pi e^2 \omega_0}{c^2 L} \sum_n'' \left(1 - \left(\frac{cn\pi}{L\omega_0} \right)^2 \right) \cos^2 n Z \quad (4.68)$$

aquí $Z = \frac{\pi z}{L}$, \sum'' significa suma sobre los valores en el intervalo $(0 \leq n \leq \omega_0 L/\pi c)$ y el primer término multiplicado por $\frac{1}{2}$, por lo tanto para una partícula oscilante en el plano paralelo a las placas:

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma_n^m \\ -n \\ \Gamma_n \end{array} \right]_{\parallel} = \frac{3\pi c}{2L\omega_0} \sum_n'' \left(1 + \left(\frac{cn\pi}{L\omega_0} \right)^2 \right) \sin^2 n Z \quad (4.69)$$

para una partícula que oscila perpendicularmente a las placas:

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma_n^m \\ -n \\ \Gamma_n \end{array} \right]_{\perp} = \frac{3\pi c}{L\omega_0} \sum_n'' \left(1 - \left(\frac{cn\pi}{L\omega_0} \right)^2 \right) \cos^2 n Z \quad (4.70)$$

donde $\omega_0 L/\pi c = 2L/\lambda_c \equiv q$ es la separación entre las placas expresada en medias longitudes de onda, por lo que la suma será sobre el intervalo: $0 \leq n \leq 2L/\lambda_c = q$.

Consideremos ahora los casos $L \rightarrow 0$ y $L \rightarrow \infty$:

a) Cuando las placas están muy cerca una de la otra ($q \ll 1$) y sólo el término con $n = 0$ contribuye a las sumas de (4.69) y (4.70):

$$\therefore \left[\begin{array}{c} \Gamma_n^m \\ -n \\ \Gamma_n \end{array} \right]_{\parallel} = 0 \quad (4.71)$$

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma_n^m \\ -n \\ \Gamma_n \end{array} \right]_{\perp} = -\frac{3}{2q} = -\frac{3\pi c}{2\omega_0 L} \quad (4.72)$$

esto implica que un oscilador paralelo a las placas no radia, mientras que uno transversal a ellas decae con una razón mayor que en el vacío, con lo que su vida media se va a cero cuando $q \rightarrow 0$.

b) Para el caso en que las placas estén muy separadas ($q \rightarrow \infty$)

podemos transformar las sumas en integrales y obtener:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{\parallel}^m \\ \Gamma_{\perp}^m \end{bmatrix} = \frac{3}{2y} \left[\frac{\text{sen}y \text{cos}y}{4y^2} + \frac{\text{sen}^2 y}{2y} - \frac{1}{4y} - \text{sen}y \text{cos}y + \frac{2y}{3} \right] \quad (4.73)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{\parallel}^m \\ \Gamma_{\perp}^m \end{bmatrix} = \frac{3}{2y} \left[\frac{\text{sen}y \text{cos}y}{2y^2} + \frac{\text{cos}^2 y}{y} + \frac{1}{2y} + \frac{2y}{3} \right] \quad (4.74)$$

con $y = \frac{2z\omega}{c}$; estas ecuaciones describen el comportamiento de un oscilador colocado en la vecindad de una placa conductora, a una distancia $z = y\lambda_0/4\pi$, vemos que para $y \gg 1$ se obtienen las relaciones correctas para una partícula libre.

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{\parallel}^m \\ \Gamma_{\perp}^m \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \Gamma_{\parallel}^m \\ \Gamma_{\perp}^m \end{bmatrix} \approx 1 \quad (4.75)$$

para valores pequeños de y ($y \rightarrow 0$):

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{\parallel}^m \\ \Gamma_{\perp}^m \end{bmatrix} \approx \frac{4}{5} y^2 \rightarrow 0 \quad (4.76)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{\parallel}^m \\ \Gamma_{\perp}^m \end{bmatrix} \approx 2 \quad (4.77)$$

esto significa que un sistema oscilante que está radiando en dirección paralela a las placas se inhibe, en tanto que un oscilador transversal casi duplica su razón de emisión. Al final de la sección se muestra en gráficas el comportamiento de las ecuaciones (4.73) y (4.74) así como del caso isotrópico que a continuación se trata (ec.(4.80)).

Por otra, parte para un conjunto de osciladores isotrópicamente distribuidos, el promedio de las ecuaciones (4.69) y (4.70) sobre todas las posibles orientaciones es:

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma_m \\ \Gamma_n \end{array} \right]_{\text{tot.}} = \frac{1}{q} \sum_n \left\{ 1 - \left(\frac{\Gamma_n}{q} \right)^2 \cos 2nZ \right\} \quad (4.78)$$

cuando $L \rightarrow 0$:

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma_m \\ \Gamma_n \end{array} \right] = \frac{1}{2q} = \frac{\lambda_0}{4L} \gg 1 \quad (4.79)$$

cuando $L \rightarrow \infty$:

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma_m \\ \Gamma_n \end{array} \right] = \frac{1}{2y} \left[\frac{\text{sen} 2y}{2y^2} - \frac{\cos 2y}{y} - \text{sen} 2y + 2y \right] \quad (4.80)$$

ésta última tiende a $\frac{1}{2y}$ si $y \rightarrow 0$:

$$\left[\begin{array}{c} \Gamma_m \\ \Gamma_n \end{array} \right]_{y \rightarrow 0} = \frac{1}{2y} \quad (4.81)$$

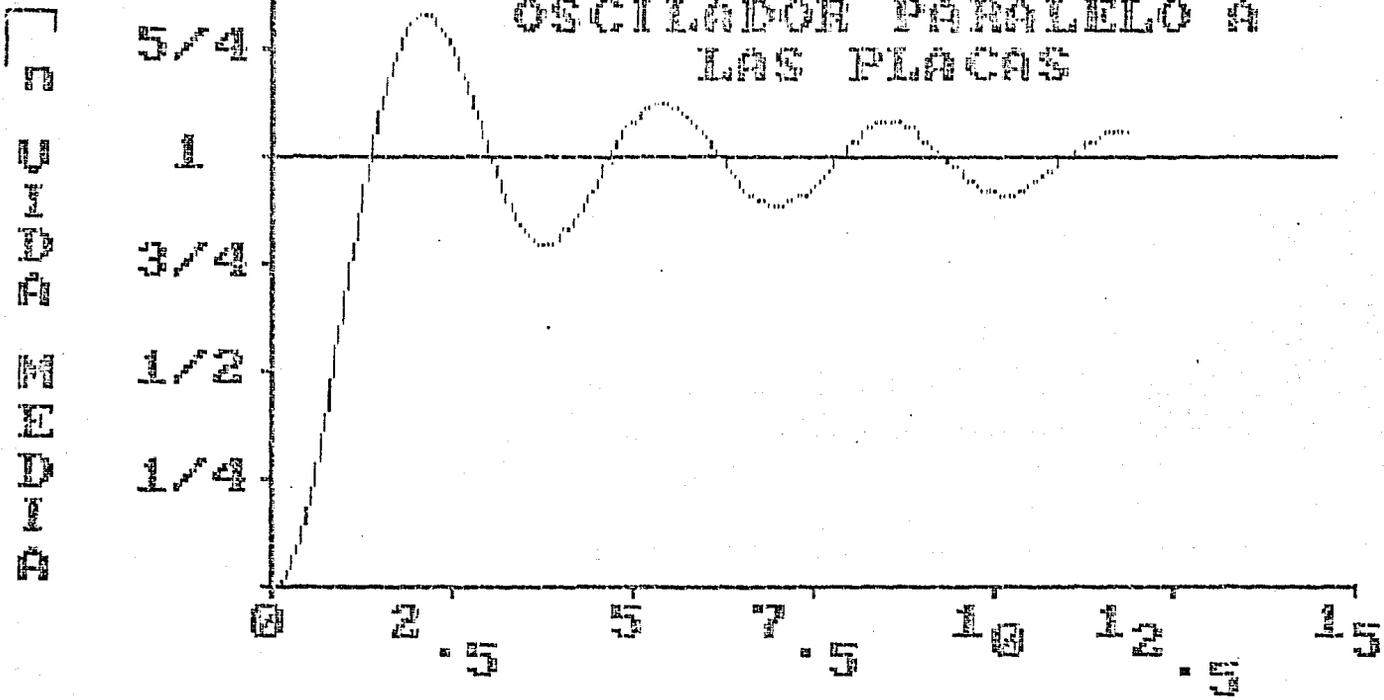
por lo tanto un oscilador isotrópico que se encuentra entre dos placas muy cercanas, tiene una razón de emisión bastante alta, pero si esta cerca de una única placa, emite con una razón menor aún que en el caso de un oscilador libre (en ausencia de placas).

Existen ya muchos trabajos experimentales⁽⁴⁹⁾ que reportan inhibición o incremento en la absorción y emisión atómica.

Por ejemplo, en 1985 Gabrielse y Dehmelt reportaron la observación de emisión espontánea inhibida para un sistema colocado en una trampa de Penning formada por un potencial cuadrupolar. En noviembre de 1981 A. Ganesh Vaidyanathan et al. hacen un estudio acerca de las propiedades de los átomos en las proximidades de conductores y reportan absorción inhibida para radiación de cuerpo negro, esto entre conductores planos paralelos. Heinzen et al. reportan sus resultados acerca del

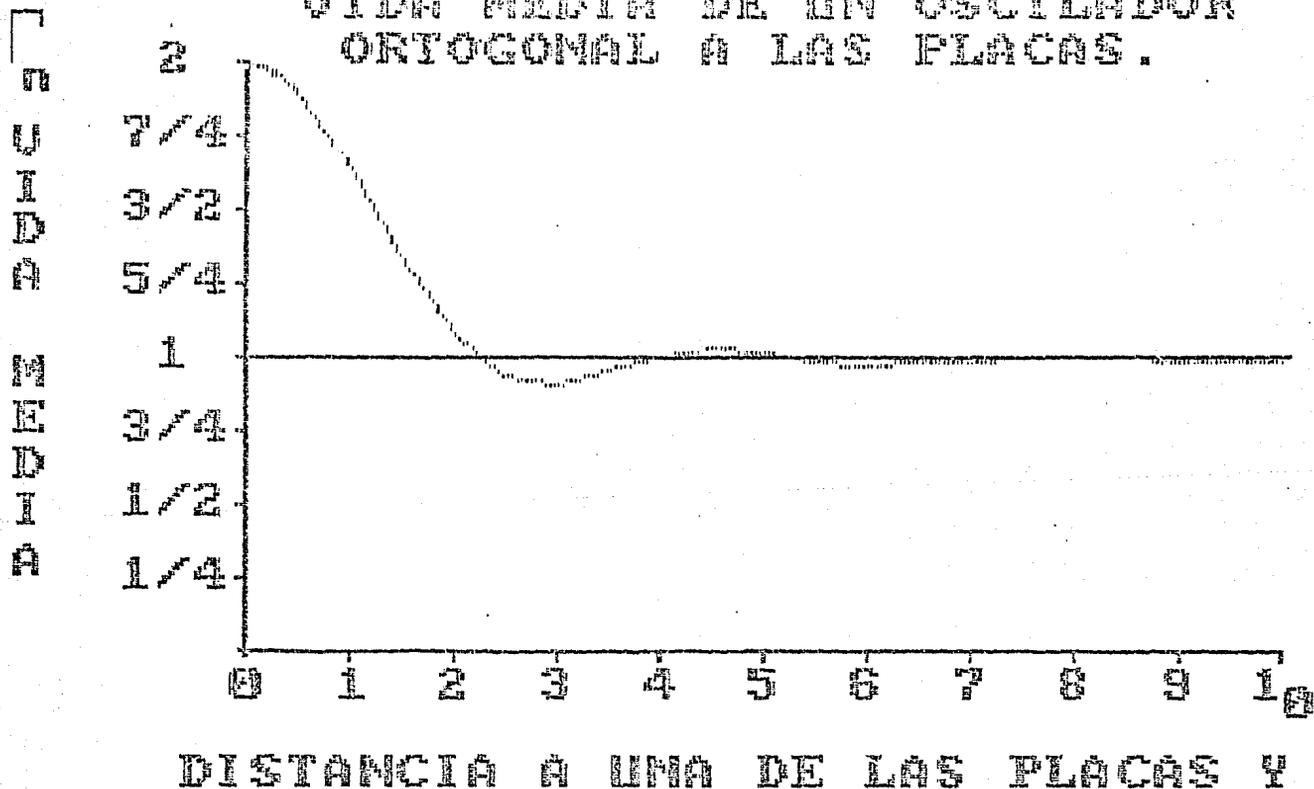
incremento y la inhibición de emisión espontánea para un átomo en la vecindad del centro de un resonador óptico confocal. Un trabajo más acerca de la emisión espontánea inhibida que resume aplicaciones en electrónica y estado sólido es publicado en 1987 por Eli Yablonovich.

OSCILADOR PARALELO A LAS PLACAS



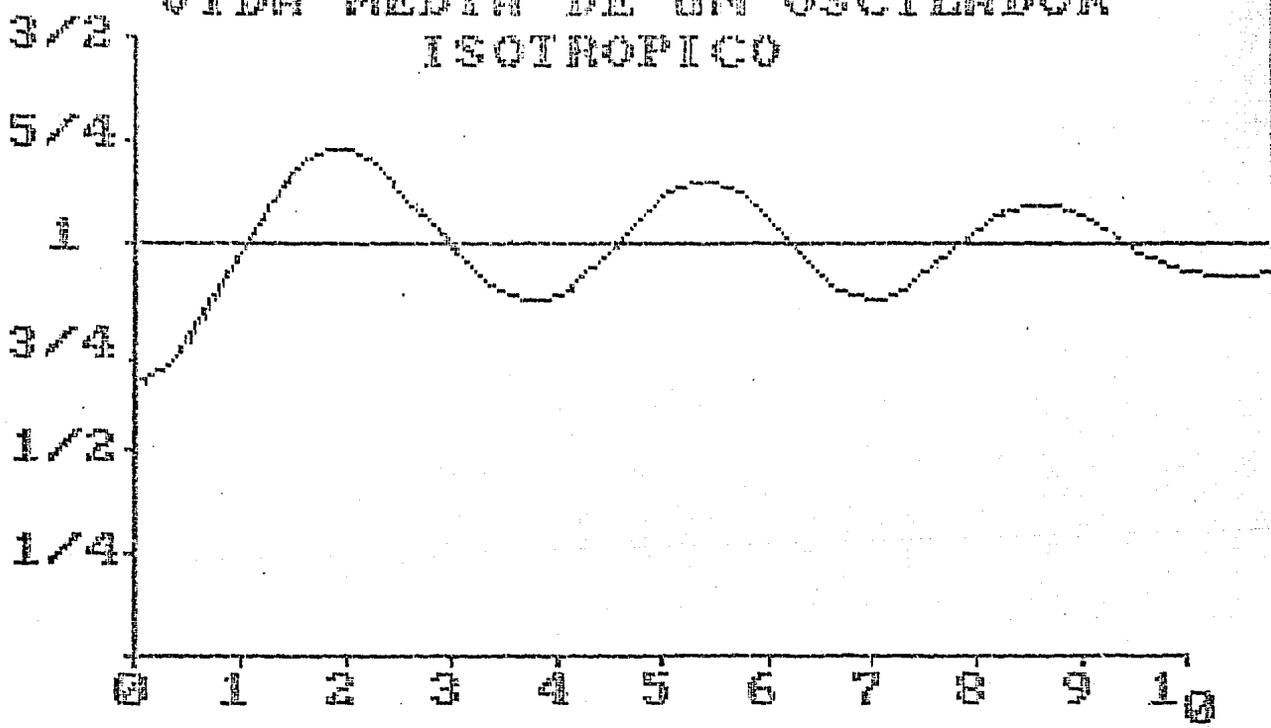
DISTANCIA A UNA DE LAS PLACAS Y

VIDA MEDIA DE UN OSCILADOR
ORTOGONAL A LAS PLACAS.



5
4
3
2
1
1/2
1/4

VIDA MEDIA DE UN OSCILADOR ISOTROPICO



DISTANCIA A UNA DE LAS PLACAS Y

4.5 LAS CORRECCIONES A LA ENERGÍA, EL EFECTO LAMB.

Con el propósito de hacer más transparente la generalización de las fórmulas para el efecto Lamb retomemos la ec. de Braffort-Marshall (3.32) para el oscilador armónico:

$$\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} + \tau \omega_0^2 \dot{\vec{x}} = e \vec{E}_m \quad (4.82)$$

una solución para esta ecuación tiene la forma:

$$\vec{x}(t) = \int_c^t dt' \left\{ \vec{E}_m(t') e^{-\sigma(t-t')} \left[a \text{sen} \omega_1(t-t') + b \text{cos} \omega_1(t-t') \right] \right\} \quad (4.83)$$

con $\sigma = \frac{1}{2} \tau \omega_0^2$; $a = \frac{e(1+\tau\sigma)}{m\omega_1}$; $b = \frac{e\tau}{m}$; así que promediando

la energía:

$$\mathcal{E} = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + \omega_0^2 \vec{x}^2 \right\rangle \quad (4.84)$$

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{2m\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \vec{E}_m(t) \cdot \vec{E}_m(0) \rangle e^{-\sigma t} \text{cos} \omega_0 t dt \quad (4.85)$$

para evitar la aparición de términos seculares hacemos la aproximación:

$$e^{-\sigma t} \text{cos} \omega_0 t \approx \text{cos} \omega_0 t - \frac{\sigma}{\omega_0} \text{sen} \omega_0 t \quad (4.86)$$

a primer orden en τ .

Sustituyendo:

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{2m\sigma} \int_0^{+\infty} \langle \vec{E}_m(t) \cdot \vec{E}_m(0) \rangle \left(\text{cos} \omega_0 t - \frac{\sigma}{\omega_0} \text{sen} \omega_0 t \right) dt \quad (4.87)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 \quad (4.88)$$

con:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e^2}{2m\sigma} \int_0^{+\infty} \langle \vec{E}_m(t) \cdot \vec{E}_m(0) \rangle \text{cos} \omega_0 t dt \quad (4.89)$$

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{e^2}{m\tau\omega_0} \int_0^{+\infty} \langle \vec{E}_m(t) \cdot \vec{E}_m(0) \rangle \text{sen} \omega_0 t dt \quad (4.90)$$

para obtener \mathcal{E} debemos conocer la correlación o bien la densidad

de energía espectral. Si suponemos que el campo de fondo es isotrópico (en un caso más general no tiene porque ser así) podemos escribir:

$$\langle \vec{E}_i(t) \cdot \vec{E}_j(0) \rangle = \frac{2\pi}{3} \delta_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_o(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.91)$$

o bien, para el campo modificado ec.(B.21):

$$\langle \vec{E}_{mi}(t) \cdot \vec{E}_{mj}(0) \rangle = \frac{2\pi}{3} \delta_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_o(\omega) e^{i\omega t}}{1 + \tau^2 \omega^2} d\omega \quad (4.92)$$

así pues las energías \mathcal{E}_0 y \mathcal{E}_1 se reducen a:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{e^2 \hbar}{3mc^3 \pi} \delta_{ij} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\omega^3| e^{-i\omega t}}{1 + \tau^2 \omega^2} \cos \omega_0 t d\omega dt = \frac{3}{2} \hbar \omega_0 \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= - \frac{e^2 \hbar}{6mc^3 \omega_c \pi} \delta_{ij} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\omega^3| e^{i\omega t}}{1 + \tau^2 \omega^2} \text{sen} \omega_0 t d\omega dt = \\ &= \frac{3\hbar\tau}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\omega}{1 + \tau^2 \omega^2} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\omega_0^2 \omega}{(1 + \tau^2 \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2)} d\omega \right] \quad (4.94) \end{aligned}$$

\mathcal{E}_0 es la energía del estado base del oscilador, o sea la energía principal; \mathcal{E}_1 es la corrección radiativa a primer orden en τ , de ésta, la primera integral representa la contribución de la partícula libre, es precisamente de éste término de donde proviene la divergencia logarítmica, por lo que si se pone un corte a la frecuencia:

$$\omega_c \sim \frac{mc^2}{\hbar} \rightarrow \tau \omega_0 \sim \frac{2e^2}{3mc^3} \frac{mc^2}{\hbar} \sim \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha \quad (4.95)$$

$$\therefore \mathcal{E}_1^{pl} = \frac{3\hbar\tau}{2\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\omega}{1 + \tau^2 \omega^2} d\omega = \frac{3\hbar}{4\pi\tau} \text{Ln}(1 + \tau^2 \omega_c^2) \quad (4.96)$$

$$\therefore \mathcal{E}_1^{pl} \sim \frac{3\hbar}{4\pi\tau} \text{Ln}\left(1 + \frac{e^4}{(\hbar c)^2}\right) \sim \frac{3\hbar}{4\pi\tau} \text{Ln}(1 + \alpha) \sim \frac{3\hbar\alpha^2}{4\pi\tau} = mc^2 \alpha \quad (4.97)$$

para estos órdenes de magnitud en ω_c se tiene creación de

partículas. Esta energía ξ_1^{pl} se interpreta como una corrección a la masa porque es independiente del estado de movimiento y existe aún en ausencia de fuerzas. La segunda integral de (4.94) representa la corrección radiativa a la energía propia del oscilador, o sea, el efecto Lamb:

$$\xi_1^{oa} = \xi_0 \left(\frac{\tau \omega_0}{\pi} \right) \text{Ln}(\tau \omega_0) \quad (4.98)$$

cuando la temperatura del campo es diferente de cero, el oscilador en equilibrio con la radiación de cuerpo negro modificará la densidad de energía espectral, por lo tanto las expresiones para ξ_0 y ξ_1 cambian como:

$$\xi_{0T} = -\frac{e^2}{m\tau\omega_0^2} \int_0^\infty \frac{2\pi\delta}{3} \int_{-\infty}^\infty \rho_0(\omega) \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \frac{e^{-i\omega t} \cos\omega_0 t}{1 + \tau^2 \omega^2} d\omega dt \quad (4.99)$$

$$\xi_{0T} = \xi_0(T) = \xi_0(0) + \frac{2\epsilon(\omega_0)}{1-\epsilon(\omega_0)} \quad (4.100)$$

$$\xi_{1T} = -\frac{e^2}{m\tau\omega_0^2} \int_0^\infty \frac{2\pi\delta}{3} \int_{-\infty}^\infty \rho_0(\omega) \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \frac{e^{i\omega t} \text{sen}\omega_0 t}{1 + \tau^2 \omega^2} d\omega dt \quad (4.101)$$

$$\xi_{1T} = \xi_1(T) = \xi_1(0) + \frac{3\hbar\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon \omega^3}{(1-\epsilon)(\omega_0^2 - \omega^2)} d\omega \quad (4.102)$$

en (4.100) y (4.102) aparecen las correcciones térmicas a la energía principal del oscilador y a la corrección radiativa respectivamente.

Las correcciones a la energía también se puede obtener de la ecuación de Fokker-Planck escrita en su forma mas general para un campo \vec{E} de estructura arbitraria ec.(4.24), así pues, si reescribimos $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ en la aproximación de longitud de onda larga, en la norma de Coulomb y sustituimos en la ec.(3.78):

$$\hat{D}^{(xp)} = -\frac{e^2}{m\omega_0^2 c^2} \int_0^\infty \langle \dot{A}_i(t) \dot{A}_j(0) \rangle \text{sen}\omega_0 t dt \quad (4.103)$$

En el caso estacionario la función de correlación depende sólo de la diferencia de tiempos:

$$\therefore \langle \vec{E}(t) \cdot \vec{E}(0) \rangle = \langle \vec{E}(t+s) \cdot \vec{E}(s) \rangle \quad (4.104)$$

sustituyendo en (4.103) e integrando por partes en dos ocasiones:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{e^2}{2mc^2} \langle \vec{A}^2 \rangle - \frac{e^2 \omega_0}{2mc^2} \int_0^{\infty} \langle A_i(t) A_j(t-s) \rangle \sin \omega_0 s \, ds \quad (4.105)$$

claramente podemos hacer la identificación del primer término con la contribución de partícula libre y el segundo con el efecto Lamb^(14,21), cuando el campo se introduce como una perturbación.

$$\therefore \mathcal{E}_1^{pl} = \frac{e^2}{2mc^2} \langle \vec{A}^2 \rangle \quad (4.106)$$

$$\mathcal{E}_1^{oa} = - \frac{e^2 \omega_0}{2mc^2} \int_0^{\infty} \langle A_i(t) A_j(t-s) \rangle \sin \omega_0 s \, ds \quad (4.107)$$

cuando \vec{A} representa el campo de punto cero, recuperamos las ecs. (4.96) y (4.98); ahora tenemos la ventaja de tener expresiones más generales para las correcciones radiativas, dado un campo \vec{A} cualquiera; así, si denotamos con los subíndices o y m a los campos de vacío y modificado, respectivamente, entonces las variaciones a las correcciones radiativas a primer orden en τ , serán:

$$\delta \mathcal{E}_1^{pl} \equiv \mathcal{E}_{1m}^{pl} - \mathcal{E}_{1o}^{pl} = - \frac{e^2}{2mc^2} \left\{ \langle \vec{A}^2 \rangle_m - \langle \vec{A}^2 \rangle_o \right\} \quad (4.108)$$

$$\delta \mathcal{E}_1^{oa} \equiv \mathcal{E}_{1m}^{oa} - \mathcal{E}_{1o}^{oa} =$$

$$= - \frac{e^2 \omega_0}{2mc^2} \int_0^{\infty} \left\{ \langle A_i(t) A_j(t-s) \rangle_m - \langle A_i(t) A_j(t-s) \rangle_o \right\} \sin \omega_0 s \, ds \quad (4.109)$$

4.6 COMPARACION CON LOS RESULTADOS DE LA EDG.

En base a las ecuaciones anteriores obtenemos las correcciones a las energías, éstas modificaciones se obtienen siempre que el campo cambia, lo cual puede hacerse de diferentes maneras. Por ejemplo, elevando la temperatura del campo, añadiendo radiación externa, alterando la distribución espectral del campo introduciendo cavidades metálicas que eliminen ciertos modos de oscilación etc..

Modificando la densidad espectral homogénea e isotrópicamente

$$\delta g_1^{pl} = \frac{2\pi e^2}{m} \int_0^{\infty} \left\{ \rho_m - \rho_0 \right\} \omega^{-2} d\omega \quad (4.110)$$

$$\delta g_1^{oa} = - \frac{2\pi e^2 \omega_0^2}{m} \int_0^{\infty} \frac{\rho_m - \rho_0}{\omega^2} \mathbb{P} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega \quad (4.111)$$

ya que la ec.(4.91) se puede escribir como:

$$\langle \vec{A}(s) \cdot \vec{A}(0) \rangle = 4\pi c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\omega) \omega^{-2} \cos \omega_0 s ds \quad (4.112)$$

considerando en primer lugar un cambio en la energía E de los modos del campo, por ejemplo elevando la temperatura, entonces $\rho(\omega)$ será:

$$\rho_T(\omega) = \frac{\omega^2 E_T}{\pi c^3} \quad (4.113)$$

con E_T dada por (3.177), de acuerdo con esto las variaciones a la energía para este caso serán:

$$\begin{aligned} \delta g_1^{pl} &= \frac{e^2}{m} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\omega^3 \hbar}{c^3} \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} - \frac{\omega^3 \hbar}{c^3} \right\} \omega^{-2} d\omega = \frac{e^2 \hbar}{mc^3} \int_0^{\infty} \omega \left\{ \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} - 1 \right\} d\omega = \\ &= \frac{e^2 \hbar}{mc^3} \int_0^{\infty} \omega \exp(-\hbar\omega/kT) d\omega = \frac{\pi a}{3} - \frac{(kT)^2}{mc^2} \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned}
 \delta g_1^{oa} &= -\frac{e^2 \omega_0^2}{m} \int_0^\infty \left\{ \frac{\omega^3 \hbar}{c^3} \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} - \frac{\omega^3 \hbar}{c^3} \right\} \omega^{-2} \mathbb{P} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega = \\
 &= \frac{e^2 \hbar \omega_0^2}{mc^3} \int_0^\infty \omega \left\{ \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} - 1 \right\} \mathbb{P} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega = \\
 &= \frac{2e\hbar^2}{\pi mc^2} \int_0^\infty \frac{\omega \exp(-\hbar\omega/kT)}{1 - \exp(-\hbar\omega/kT)} \mathbb{P} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega \quad (4.115)
 \end{aligned}$$

la ec.(4.114) muestra que cualquier partícula adquiere una energía extra cuando la temperatura del campo de radiación de fondo aumenta, aún la partícula libre. Desde el punto de vista de la EDE, este resultado es de esperarse pues ésta energía representa la contribución cinética del movimiento aleatorio que el campo imprime a la partícula, como en las ecs.(4.100) y (4.102). Una situación enteramente análoga se tiene al evaluar la contribución térmica para la ec.(4.115), si la reescribimos como:

$$\delta g_1^{oa} = \frac{2e\hbar^2}{\pi mc^2} \omega_0^2 f(\mathcal{Y}) \quad (4.116)$$

donde:

$$f(\mathcal{Y}) = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \frac{\mathbb{P}}{\mathcal{Y}^2 - x^2} dx \quad (4.117)$$

$$x \equiv -\hbar\omega/kT \quad y \quad \mathcal{Y} \equiv \hbar\omega_0/kT$$

para $\mathcal{Y} \ll 1$ la integral se puede aproximar, encontrándose:

$$f(\mathcal{Y}) = -\frac{C}{\mathcal{Y}} \quad C \sim 1 \quad (4.118)$$

$$\therefore \delta g_1^{oa} \approx \frac{2e\hbar^2}{\pi mc^2} \omega_0^2 \hbar\omega_0/kT = -\frac{6\mathcal{Y}}{\pi^2} \delta g_1^{pl} \quad (4.119)$$

ésta es una corrección de primer orden en \mathcal{Y} a la partícula libre.

Para $\mathcal{Y} \gg 1$ $f(\mathcal{Y})$ se aproxima como:

$$f(\mathcal{Y}) \approx -\frac{\pi^2}{6\mathcal{Y}^2} - \frac{\pi^4}{15\mathcal{Y}^4} \quad (4.120)$$

$\rho_m = (2\bar{n} + 1)\rho_0$ dentro del intervalo (a, b) y fuera de él $\rho_m = \rho_0$. sustituyendo en las ecuaciones (4.110) y (4.111) obtenemos:

$$\delta\mathcal{E}_1^{pl} = \frac{\bar{n}\alpha\hbar^2(b^2 - a^2)}{\pi m} \quad (4.123)$$

$$\delta\mathcal{E}_1^{oa} = \frac{\bar{n}\alpha\hbar^2\omega_0^2}{\pi mc^2} \text{Ln} \left\{ \frac{b^2 - (\omega_0/c)^2}{a^2 - (\omega_0/c)^2} \right\} \quad (4.124)$$

estos resultados están en completo acuerdo con los presentados por P. L. Knight⁽⁵⁴⁾.

Cuando se introducen objetos metálicos, la distribución de modos se modifica y con esto se introducen nuevas condiciones de frontera para las componentes de campo. La distribución espectral modificada será en general anisotrópica e inhomogénea lo que implica:

$$\langle A_i(s) \cdot A_j(0) \rangle = \frac{4\pi}{3} c^2 \int_0^{+\infty} \rho_{ij}(\omega) \omega^{-2} \cos \omega_0 s \, ds \quad (4.125)$$

un caso como éste es considerado por Barton⁽⁵⁵⁾, que obtiene para la partícula libre:

$$\delta\mathcal{E}_1^{pl} = \frac{\alpha\pi\hbar^2}{mL^2} \left\{ \frac{1}{12} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi z}{L}} \right\} \quad (4.126)$$

aquí los objetos que modifican al campo son placas paralelas que satisfacen: $L > z > \hbar/mc = \lambda_c$, donde L es la separación entre las placas y z es la distancia de la partícula a una de las placas, en ésta debe tenerse cuidado de hacer $L \gg \lambda_c/\alpha$ ya que para los órdenes de magnitud de λ_c/α se tienen modificaciones en $|\Psi|^2$ por parte de las placas.

La modificación de los modos del campo, en este caso, da lugar a una fuerza repulsiva sobre la partícula debida al gradiente de $\delta\mathcal{E}$, ya que esta depende de la posición además, de que

Esta corrección obtiene su valor mínimo cuando $a = L/2$.

Cuando el cambio en los modos normales de oscilación se hace sin alterar la isotropía del campo, uno puede usar las ecuaciones (4.110) y (4.111) para encontrar las variaciones a la energía, por ejemplo, si se considera una guía de ondas que elimina todos los modos con frecuencia menor que una frecuencia dada ω_m , encontramos (ec.(4.44)):

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathcal{E}_1^{pl} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(\hbar\omega)^2}{mc^2} \\ \delta \mathcal{E}_1^{oa} &= -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{(\hbar\omega_0)^2}{mc^2} \text{Ln} \left| 1 - \left[\frac{\omega_m}{\omega_{oc}} \right]^2 \right| \end{aligned} \right\} \quad (4.127)$$

nuevamente vemos que para muy altas frecuencias, $\delta \mathcal{E}_1^{oa}$ esencialmente cancela a $\delta \mathcal{E}_1^{pl}$.

Aquí, es conveniente retomar el resultado (4.45) para hacer la comparación de la energía cinética perdida, debida a la eliminación de modos de baja frecuencia. De (4.127) vemos que:

$$\delta \mathcal{E}_1^{pl} = -\frac{\alpha \hbar^2 \omega^2}{2\pi mc^2} \approx -\alpha^5 mc^2 \quad (4.128)$$

y recordemos que para $L \approx 70 \text{ \AA}$ es del orden $\sim \alpha^3 \mathcal{E}$, si comparamos con (4.128) vemos que el efecto de la corrección a la masa se vuelve dominante para partículas altamente energéticas, por lo que no es razonable esperar a detectar este cambio con aparatos hasta ahora conocidos.

Con el fin de establecer la relación entre éstos resultados de EDE y los obtenidos con la EDC, retomamos la ecuación (3.170) y la reescribimos en el "lenguaje cuántico":

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{\hbar} \hat{D}^{(xp)} \sum_k \langle n | x_j | k \rangle \langle k | p_i | n \rangle =$$

$$\frac{ie^2}{\hbar n} \sum_k \int_0^\infty \langle E_i(s) E_j(0) \rangle \langle n | x_j | k \rangle \langle k | p_i | n \rangle \omega_{nk}^{-1} \text{sen} \omega_{nk} s \, ds \quad (4.129)$$

donde se ha hecho el cambio $\omega_{kn} \leftrightarrow \pm \omega_o$ y se está sumando sobre todos los posibles estados intermedios; integrando dos veces obtenemos:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{ie^2}{\hbar mc^2} \sum_k \langle n | x_j | k \rangle \langle k | p_i | n \rangle \left\{ -\langle A_i A_j \rangle + \omega_{nj} \int_0^\infty \langle E_i(s) E_j(0) \rangle \text{sen} \omega_{nk} s \, ds \right\} \quad (4.130)$$

usando la regla de la suma de Thomas-Reiche-Kuhn⁽⁵⁰⁾:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{e^2}{2mc^2} \langle \vec{A}^2 \rangle + \frac{e^2}{\hbar (mc)^2} \sum_k \int_0^\infty \langle n | \vec{p} \cdot \vec{A}(s) | k \rangle \langle k | \vec{p} \cdot \vec{A}(0) | n \rangle \text{sen} \omega_{nk} s \, ds \quad (4.131)$$

el primer sumando es precisamente la contribución a la energía libre, dada por (4.106) y el segundo es una forma alternativa para el efecto Lamb, para ver esto, sustituimos \vec{A} de la siguiente forma:

$$\vec{A}(t) = \sum_\alpha \left\{ \vec{A}_\alpha e^{-i\omega_\alpha t} + \vec{A}_\alpha^* e^{i\omega_\alpha t} \right\} \quad (4.132)$$

$$\therefore \mathcal{E}_1^{oa} = \frac{e^2}{\hbar (mc)^2} \sum_k \sum_\alpha \langle n | \vec{p} \cdot \vec{A}_\alpha^* | k \rangle \langle k | \vec{p} \cdot \vec{A}_\alpha | n \rangle \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{\omega_{nk} + \omega_\alpha} - \frac{1}{\omega_{nk} - \omega_\alpha} \right\}_\alpha \quad (4.133)$$

cuando \vec{A} representa el campo de punto cero, la suma sobre α se transforma en una integral:

$$\therefore \mathcal{E}_1^{oa} = \frac{e^2}{3\pi (mc)^2} \sum_k |\langle k | \vec{p} | n \rangle|^2 \int_0^\infty \omega_{nk} \, d\omega \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{\omega_{nk} + \omega} - \frac{1}{\omega_{nk} - \omega} \right\}_\alpha \quad (4.134)$$

esta integral es claramente divergente, para eliminar ésta divergencia logarítmica se recupera el factor $1 + \tau^2 \omega^2$ que se había omitido; sin embargo para que se identifique el resultado obtenido por Bethe, se propone una frecuencia de corte $\omega_c \approx mc^2/\hbar$.

$$\therefore g_1^{0n} = -\frac{2e^2}{3\pi m^2 c^3} \sum_k |\langle k | \vec{p} | n \rangle|^2 \omega_{nk} \operatorname{Ln} \left| \frac{\omega_c}{\omega_{nk}} \right| \quad (4.135)$$

este es exactamente el resultado propuesto por Bethe⁽²¹⁾ para el efecto Lamb en la aproximación no relativista y sin espín, ec. (2.100).

CAPITULO 5
ESPEJOS CONJUGADORES DE FASE
Y LAS CORRECCIONES A LA ENERGIA
PARA UN OSCILADOR ARMONICO

5.1 UN ESPEJO CONJUGADOR DE FASES^(57,58)

Un proceso de inversión temporal contradice nuestra experiencia cotidiana, y es que viola la segunda ley de la termodinámica, sin embargo, existen en la naturaleza fenómenos en el dominio del electromagnetismo que son ejemplos claros de una posible inversión en el tiempo.

Para cada haz de luz que tenga una estructura arbitraria, existe un posible haz invertido en el tiempo.

La propiedad de reversibilidad ofrece la posibilidad de crear haces de luz sin distorsiones después de haber sido transmitido hacia atrás y a través de un medio inhomogéneo. Las ondas luminosas que tienen tales características son llamadas: Ondas de Fase Conjugada.

Para producir una onda conjugada en su fase se requiere un medio cuyas propiedades ópticas, caigan en el dominio de la óptica no lineal.

Existen varios métodos para producir ondas conjugadas, algunos de estos son: "La dispersión estimulada de Brillouin" y "La mezcla de cuatro ondas" y "La mezcla de tres ondas".

5.1.1 LA DISPERSION ESTIMULADA DE BRILLOUIN (DEB).

En 1964 R. Y. Chiao, B. P. Stoicheff y C. H. Townes descubrieron el efecto llamado dispersión de Brillouin^(57,58). El efecto involucra directamente un haz de luz a través de un medio transparente. Luz de baja intensidad pasa por un medio casi sin atenuación. Un haz de luz de muy alta intensidad es atenuado, y si se trata de un haz de varios millones de watts de potencia será reflejado casi completamente. El haz reflejado es una consecuencia de los eventos que producen la dispersión de Brillouin; una de onda de sonido es dirigida a un material (sólido o fluido), esta onda provoca cambios periódicos (dependientes de la frecuencia de la onda) en la densidad del medio y dependen de la dirección de propagación, el patrón resultante, el cual se mueve con la onda, consiste de zonas alternadas de compresión y rarefacción, las primeras son más densas, esto redundará en una variación en el índice de refracción. Concretamente, si la separación entre las zonas es de exactamente la mitad de longitud de onda del haz incidente, éste será reflejado.

En la dispersión estimulada de Brillouin, la variación de la presión y la densidad no es aplicada al material en forma externa, éste es estimulado internamente por pares de ondas luminosas que se propagan en direcciones opuestas. Por un efecto electrostrictivo (un efecto en el que el campo eléctrico "presiona" al material. En otras palabras, se trata de la tendencia que presenta la densidad del medio a aumentar con el campo eléctrico; existe también el efecto magnetostrictivo) se

puede producir un patrón de compresión-rarefacción. El campo eléctrico necesario se puede obtener con la interferencia de dos haces ópticos que viajan por el medio en dirección opuesta y fuera de fase. En el caso de la DEB uno de los haces es el incidente.

El otro haz, proviene de la dispersión del haz incidente por pequeñas fluctuaciones, estadísticamente distribuidas, en la densidad del medio (fluctuaciones térmicas). Cuando la frecuencia y dirección de la onda dispersada es la correcta, la onda puede interferir con el haz incidente y "amplificar" el efecto de variación en la densidad del material. Las variaciones subsecuentes conducen a la reflexión de una minúscula porción del haz incidente. Esta porción reflejada interfiere a su vez con el haz incidente, generando así mismo 'más variación' en la densidad. Estas variaciones conducen a más reflexiones del haz incidente. Las reflexiones "se construyen" exponencialmente cuando la distancia se incrementa, hasta que un haz reflejado emerge del material. Dado que la amplificación depende de la intensidad del haz incidente, un requisito para producir un haz reflejado es que la potencia de éste haz incidente exceda un cierto valor. La conjugación de fase por DEB fué observada por primera vez⁽⁶⁰⁾ en 1971 por V.V. Ragulskit, U.I. Popovitch, F.S. Faizullo y Ya. Zeldovich.

En 1977 Hellworth propuso⁽⁵⁷⁾ otra forma de conjugar ondas: La mezcla de cuatro ondas.

5.1.2 LA MEZCLA DE CUATRO ONDAS (MCO) ^(57,61,62)

Este método involucra la interferencia de cuatro haces de luz en un medio no lineal. Tres de ellas son haces que entran: uno de ellos es el haz objeto cuya fase se va a conjugar y los otros dos son haces de referencia, éstos deben viajar en dirección opuesta y usualmente se escogen como ondas planas que tienen la misma frecuencia que el haz objeto. El haz objeto puede entrar al material en cualquier dirección. El cuarto haz, es emergente y es la onda de fase conjugada del haz objeto y, sale del medio a lo largo de la misma línea pero en sentido opuesto a la onda incidente.

El haz conjugado es producido por perturbaciones en el medio debidas a la interferencia del haz objeto con uno de los haces de referencia. Siempre que los campos eléctricos de las ondas estén en fase la intensidad local del campo baja. Las zonas de alta intensidad se alternan con zonas de baja intensidad. El tamaño, la forma y la orientación están determinadas por las características de los campos que interfieren. Toda la información acerca de la fase del haz objeto se queda plasmada en el patrón de interferencia, el cual se manifiesta en el medio, como zonas de diferentes índices de refracción.

El segundo haz de referencia es reflejado por las zonas del patrón de interferencia, esto es, ésta onda lleva la información acerca de la estructura de la fase en el patrón. Dado que el segundo haz de referencia viene en una dirección opuesta a la del primero, el haz reflejado es el conjugado en su fase del haz

objeto.

Ahora bien, la reflexión en cada zona del patrón es débil, pero la suma de todas las reflexiones puede acarrear una cantidad considerable de energía, así como el haz de referencia puede transferir una contribución mayor de ésta.

La simetría en un arreglo de los haces de referencia sugieren que el patrón de interferencia se puede formar también con el segundo haz de referencia y el haz objeto, en realidad se forman dos patrones de interferencia en el medio: cada haz de referencia genera un patrón de dispersión en el cual el otro se refleja, incrementándose con esto también la energía del haz emergente. Esto permite una gran ventaja con respecto a la Dispersión Estimulada de Brillouin, ya que no es necesario que el haz incidente sea muy energético, de hecho hay conjugación de fase para intensidades bajas⁽⁵⁹⁾.

En el caso general, la mezcla de cuatro ondas es un proceso del tipo:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \rightarrow \omega_4$$

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 \rightarrow \omega_4$$

$$\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \rightarrow \omega_4$$

algunos casos especiales son:

$$2\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_4$$

$$2\omega_1 - \omega_2 \rightarrow \omega_4$$

En el caso de degenerado las cuatro frecuencias son idénticas y la amplitud del campo conjugado es proporcional al producto de las amplitudes de los haces entrantes.

5.1.3 LA CONJUGACION DE FASE POR UNA MEZCLA DE TRES ONDAS⁽⁶³⁾.

La mezcla de tres ondas se puede usar para realizar conjugación de fase. Históricamente, la primera aplicación del formalismo de la óptica no lineal a la óptica de conjugación de fase se basó en el proceso del mezclado de tres ondas.

Una no linealidad de segundo orden puede ocurrir en algunos cristales que provean simetría de inversión. En tales cristales, la presencia de dos campos entrantes: \vec{E}_1 y \vec{E}_p inducen una polarización óptica no lineal, ésta polarización oscila con una diferencia de fase $\omega_1 - \omega_p$. Tal polarización actúa como fuente en la ecuación de onda y puede radiar una nueva onda E_c a una frecuencia $\omega_c = \omega_1 - \omega_p$ con una amplitud proporcional a la amplitud de \vec{E}_p^* , ésta onda \vec{E}_c es el campo conjugado.

No obstante lo relativamente reciente del descubrimiento del fenómeno de conjugación de fase existe ya mucha literatura sobre el tema así como nuevas y más variadas maneras de producir la conjugación.

Algunas variantes de los dispositivos empleados son: "separación angular de las ondas \vec{E}_p y \vec{E}_1 ", "discriminación de polarización de \vec{E}_p y \vec{E}_1 ". Con nuevas geometrías se han encontrado réplicas de fase conjugada usando láseres intracavidades en guías de ondas, etc.. Una amplia revisión y una extensa bibliografía se dan en el libro editado por Fisher⁽⁵⁹⁾.

Más recientemente Haus et al.⁽⁶⁴⁾ reportan su trabajo acerca de la conjugación de fase con perfiles suaves de las ondas de referencia, Sawley⁽⁶⁵⁾ trata el tema en una suspensión líquida

moderadamente densa de microesferas, Noursad et al.⁽⁵⁶⁾ reportan sus investigaciones para películas delgadas de eosina, eritrosina y rosa bengala. En general existe una gran similitud entre los trabajos de Drexhage⁽⁵⁰⁾ y toda esta actividad en torno de la conjugación de fase, el motivo se encuentra quizás en las múltiples aplicaciones que se pueden dar a los ECF. Estas van desde la corrección de aberraciones introducidas por dispositivos de tipo óptico en arreglos experimentales, hasta láseres de fusión y la anulación de perturbaciones atmosféricas en señales enviadas con sistemas de telecomunicación^(57,58,59,60).

En la parte que sigue deduciremos las variaciones a las correcciones a la energía para un sistema en presencia de un ECF cuando se toma en cuenta el campo estocástico de punto cero. Sin embargo debido a que las ondas referenciales provienen de láseres, no es de esperarse que el campo de vacío afecte sustancialmente al sistema, aunque sí existe una contribución del orden de $\frac{3}{2}\hbar\omega_0$ a la energía del oscilador frente a un ECF que se debe agregar a la energía del campo externo que se manifiesta en forma de un patrón de interferencia justo frente al espejo.

5.2 FORMALISMO DE LA CONJUGACION DE FASE PARA LA MEZCLA DE CUATRO ONDAS

La forma más general de un campo incidente es una superposición de ondas monocromáticas:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \vec{E}_{\alpha}(\omega_{\alpha}, \vec{r}, \hat{\epsilon}_{\alpha}, t) e^{i(\omega_{\alpha} t - \vec{k}_{\alpha} \cdot \vec{r})} + \text{C.C.} \quad (5.1)$$

donde \vec{E}_{α} es la amplitud del campo que depende de la frecuencia de la onda incidente, de la posición, la polarización y del tiempo; en general \vec{E} depende de la dirección de propagación a través de \vec{k}_{α} . El campo reflejado por el espejo conjugador de fase, tendrá una apariencia semejante (funcionalmente), pero puede ocurrir que la frecuencia ω_r sea diferente de ω_i , con lo que $\vec{k}_r \neq \vec{k}_i$, esto no es más que el resultado de la antisimetría de los cambios de fase no lineales debidos a las intensidades de las ondas referenciales⁽⁶⁹⁾; sin embargo, aquí nos ocuparemos del caso particular en el que $\vec{k}_i = -\vec{k}_r$ (esta es la característica principal de los espejos conjugadores de fase) y $\omega_i = \omega_r$, este es el llamado caso degenerado. Estaremos suponiendo que el vector de polarización sólo sufre una conjugación y que es ortogonal a la dirección de propagación, constante y unitario; la amplitud de las ondas se caracteriza por un factor constante y complejo E_{α} , que al ser reflejada la onda, puede aumentar o disminuir, esto hace la necesidad de introducir un número adimensional que es "función del espejo", llamado reflectividad que tiene una fase asociada y es arbitrario en magnitud.

La geometría de la mezcla de cuatro ondas se muestra en la figura:

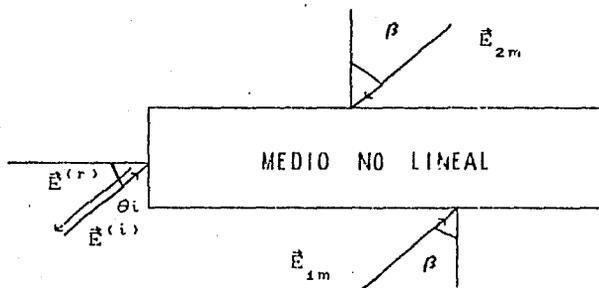


fig. (5.1)

aquí \vec{E}_{1m} y \vec{E}_{2m} son las ondas referenciales $\vec{E}^{(i)}$ y $\vec{E}^{(r)}$ son los campos incidente y reflejado, respectivamente, y el ángulo β es arbitrario.

Consideremos un campo eléctrico oscilatorio con una amplitud exponencialmente decreciente, este es un caso un poco más general que aquél en el que la amplitud permanece constante, y veremos que la densidad espectral del campo externo tiene un "pico" muy pronunciado (una delta) en la frecuencia de la onda incidente.

Escribimos el campo incidente $\vec{E}^{(i)}$ como:

$$\vec{E}^{(i)}(\vec{r}, t) = \hat{\epsilon} E^{(i)} e^{-1/2\lambda} e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \quad t > 0 \quad (5.2)$$

ω_0 es la frecuencia natural de oscilación, λ^{-1} es la constante de amortiguamiento y hemos escogido, por comodidad, a $-\vec{k}$ como la dirección de incidencia de acuerdo con la figura (5.2):

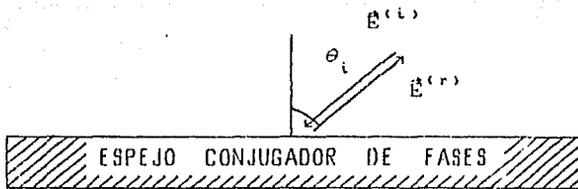


Fig. (5.2)

De acuerdo con la discusión anterior el campo reflejado será:

$$\vec{E}^{(r)}(\vec{r}, t) = \hat{\epsilon}^* \vec{E}^{(i)*} e^{-i/2\lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \quad (5.3)$$

así pues, el campo externo total $\vec{E}_{\text{ext}}^{(T)}$ frente al espejo será:

$$\vec{E}_{\text{ext}}^{(T)}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(r)} \quad (5.4)$$

a este campo debemos agregar el campo de vacío y su "campo reflejado de vacío", sin embargo, esto último resultaría ocioso puesto que una característica esencial del campo de fondo es el hecho de que no reconoce direcciones privilegiadas, es decir, el vacío no es polarizable y como el uso de un ECF requiere de ondas con una polarización bien determinada sólo tomaremos en cuenta al vacío, sin ninguna reflexión. Por lo tanto, el campo total será:

$$\vec{E}^{(T)}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(r)} + \vec{E}^{(0)} \quad (5.5)$$

5.3 VARIACIONES A LAS CORRECCIONES A LA ENERGÍA DE UN OSCILADOR ARMÓNICO EN PRESENCIA DE UN ECF.

Consideremos un oscilador armónico cargado, colocado en la posición \vec{r} frente al espejo conjugador de fases que se encuentra en el plano $z = 0$ (ver fig.(5.2)), como el oscilador está cargado, existe un dipolo eléctrico localizado con el vector \vec{r} , supongamos que éste emite radiación en forma de ondas planas exponencialmente amortiguadas, ec.(5.2) (en el lenguaje cuántico se dirá que existe emisión de un fotón de frecuencia ω_0); el vector $\hat{\epsilon}$ cumple con la condición:

$$\hat{\epsilon}^* \cdot \hat{\epsilon} = 1 \quad (5.6)$$

en la (5.5) $\vec{E}^{(T)}$ es el campo estocástico en presencia del oscilador y a la vez la "generalización" a éste problema del miembro derecho de la ec. de B-N (4.82).

La función de correlación, presente en las ecs. (3.169), (4.106), (4.107), (4.110) y (4.111), involucra 9 términos, de los cuales, 4 se anulan pues son productos del campo reflejado o incidente con $\vec{E}^{(0)}$ y de acuerdo con las ecuaciones (3.28) y (3.29), se anulan pues el campo promedia a cero; $\langle \vec{E}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \rangle$ da lugar a los efectos tratados en el capítulo anterior; nos resta calcular las correlaciones:

$$\langle \vec{E}^{(i)} \cdot \vec{E}^{(i)} \rangle \quad \langle \vec{E}^{(i)} \cdot \vec{E}^{(r)} \rangle \quad \langle \vec{E}^{(r)} \cdot \vec{E}^{(i)} \rangle \quad \langle \vec{E}^{(r)} \cdot \vec{E}^{(r)} \rangle$$

usando la ec.:

$$\langle \vec{E}(\vec{r}, 0) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}, s) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-T}^T \vec{E}(\vec{r}, 0) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}, s) dt$$

obtenemos para las correlaciones a dos tiempos diferentes ($t = 0$

y $t = s$):

$$\langle \hat{E}^{(i)}(\vec{r}, 0) \cdot \hat{E}^{(i)}(\vec{r}, s) \rangle = |\hat{\mathcal{E}}|^2 |E^{(i)}|^2 e^{-i\omega_0 s} e^{-s/2\lambda}$$

$$\langle \hat{E}^{(r)}(\vec{r}, 0) \cdot \hat{E}^{(r)}(\vec{r}, s) \rangle = |\hat{\mathcal{E}}|^2 |E^{(r)}|^2 e^{-i\omega_0 s} e^{-s/2\lambda}$$

$$\langle \hat{E}^{(i)}(\vec{r}, 0) \cdot \hat{E}^{(r)}(\vec{r}, s) \rangle = (\hat{\mathcal{E}} \cdot \hat{\mathcal{E}}) E^{(i)} E^{(r)*} e^{-i(2\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 s)} e^{-s/2\lambda}$$

$$\langle \hat{E}^{(r)}(\vec{r}, 0) \cdot \hat{E}^{(i)}(\vec{r}, s) \rangle = (\hat{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{\mathcal{E}}) E^{(r)} E^{(i)*} e^{i(2\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_0 s)} e^{-s/2\lambda}$$

Dado que no existen términos del tipo $\langle \hat{E}^{(i)} \cdot \hat{E}^{(j)} \rangle$ o $\langle \hat{E}^{(j)} \cdot \hat{E}^{(i)} \rangle$ con $j = i, r$, \mathcal{E}^{pl} y \mathcal{E}^{oa} son independientes de $\hat{E}^{(i)}$, así podemos concentrarnos en encontrar sólo las variaciones a las correcciones debidas al campo externo. Usando el teorema de Wiener-Kintchine la densidad espectral del campo externo queda como:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ext}}(\omega) &= \int_0^\infty \left\{ |\hat{\mathcal{E}}|^2 |E^{(i)}|^2 + |\hat{\mathcal{E}}|^2 |E^{(r)}|^2 + (\hat{\mathcal{E}} \cdot \hat{\mathcal{E}}) E^{(i)} E^{(r)*} e^{-i2\vec{k} \cdot \vec{r}} + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{\mathcal{E}}) E^{(r)} E^{(i)*} e^{i2\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\} e^{-i\omega_0 s} e^{-s/2\lambda} e^{i\omega s} \frac{1}{2\pi} ds \\ &= \frac{|E^{(i)}|^2}{2\pi} \left\{ 1 + |\mu|^2 + 2|\hat{\mathcal{E}}|^2 |\mu| \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \varphi) \right\} \int_0^\infty e^{-s(i(\omega_0 - \omega) - 1/2\lambda)} ds \end{aligned} \quad (5.7)$$

en esta ecuación hemos hecho:

$$(\hat{\mathcal{E}} \cdot \hat{\mathcal{E}}) = |\hat{\mathcal{E}}|^2 e^{i\delta}$$

$$E^{(i)} = |E^{(i)}| e^{i(\alpha - \phi/2)}$$

$$E^{(r)} = |E^{(r)}| e^{-i(\alpha - \phi/2)}$$

claramente de las dos últimas relaciones se tiene:

$$E^{(i)} = E^{(r)*}$$

$$|E^{(i)}| = |E^{(r)}|$$

así mismo se ha usado la ec.(5.6) y se introdujo la amplitud de la reflectividad:

$$|\mu| \equiv \frac{|E^{(r)}|}{|E^{(i)}|}$$

por lo tanto:

$$\rho_{\text{ext}}(\omega) = \frac{|E^{(i)}|^2}{2\pi} \left\{ 1 + |\mu|^2 + 2|\hat{e}^2| |\mu| \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) \right\} \left\{ \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \right\} \quad (5.8)$$

este es un perfil lorentziano en donde γ ($= 1/4\lambda$) representa la anchura de la curva de distribución, gráfica (5.3).

La ecuación (5.8) se refiere exclusivamente al campo externo y por lo tanto la densidad espectral ρ_m modificada por la presencia del ECF estará dada por:

$$\rho_m = \rho_{\text{ext}} + \rho_0 \quad (5.9)$$

esta ecuación pone de manifiesto la existencia de la corrección a la energía por la sola presencia del ECF y muestra la existencia de un patrón de franjas de interferencia sinusoidalmente espaciadas que dependen de la posición, esto está de acuerdo con los cálculos de Drexhage⁽⁷⁰⁾ y Wolf et al.⁽⁷⁴⁾ acerca de partículas colocadas en la vecindad de espejos normales y conjugadores de fase, respectivamente.

Sustituyendo la ec.(5.9) en (4.110) obtenemos la corrección, por la presencia del ECF, a la energía de partícula libre:

$$\begin{aligned} \Delta g_{\text{ECF}}^{\text{pl}} &= \frac{2\pi e^2}{m} \int_0^{\infty} (\rho_m - \rho_0) \omega^{-2} d\omega = \frac{2\pi e^2}{m} \int_0^{\infty} (\rho_{\text{ext}}) \omega^{-2} d\omega = \\ &= \frac{e^2}{m} \frac{|E^{(i)}|^2}{2\pi} \left\{ 1 + |\mu|^2 + 2|\hat{e}^2| |\mu| \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) \right\} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \right\} \omega^{-2} d\omega \end{aligned}$$

si la anchura de la distribución (γ) tiende a cero, podemos usar

la fórmula:

$$\frac{\frac{n}{n^2 + x^2}}{\frac{n}{n^2 + x^2}} \rightarrow \pi \delta(x) \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow 0$$

así que el factor entre paréntesis dentro de la integral lo sustituimos por una delta de Dirac y entonces:

$$\delta_{ECF}^{pl} = \frac{\pi e^2 |E^{(i)}|^2}{m\omega_0^2} \left\{ 1 + |\mu|^2 + 2|\hat{\epsilon}^2| |\mu| \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) \right\} \quad (S.10)$$

esta aproximación corresponde a una gran localización de la frecuencia ω_0 . Sustituyendo ahora (S.9) en (4.11) para encontrar la contribución de oscilador armónico:

$$\begin{aligned} \delta_{ECF}^{oa} &= - \frac{2\pi e^2 \omega_0^2}{m} \int_0^\infty \rho_{ext} \omega^{-2} \mathbb{P} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega = \\ &= - \frac{e^2 \omega_0^2}{m} |E^{(i)}|^2 \left\{ 1 + |\mu|^2 + 2|\hat{\epsilon}^2| |\mu| \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^\infty \rho_{ext} \omega^{-2} \mathbb{P} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega \end{aligned}$$

para calcular esta integral usamos el mismo argumento de cuando $\gamma \rightarrow 0$, entonces la integral se cambia a:

$$\int_0^\infty \delta(\omega - \omega_0) \omega^{-2} \mathbb{P} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega$$

ahora bien, como \mathbb{P} excluye precisamente el valor $\omega = \omega_0$ la integral se anula, por lo tanto:

$$\delta_{ECF}^{oa} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \gamma \rightarrow 0$$

Este resultado muestra que la única corrección (hasta esta aproximación) es la de partícula libre, y depende de la frecuencia natural de oscilación que en este caso es igual a la frecuencia de los haces referenciales. Sin embargo una vez dada ω_0 el corrimiento en los niveles es el mismo para todos y no es de

esperarse que δS_{ECF}^{Pl} sea un efecto medible con los métodos espectroscópicos convencionales puesto que no hay un cambio relativo.

En general el vector de polarización es complejo. El estado de polarización de la onda incidente también determina las variaciones a las correcciones de la energía; δS_{ECF}^{Pl} tiene su máximo valor para polarización lineal, $|\hat{e}^2| = 1$. En el caso de ondas circularmente polarizadas $|\hat{e}^2| = 0$ y también hay corrección a la energía, pero ya no se presenta el fenómeno de interferencia.

$$\therefore \delta S_{ECF}^{Pl lp} = \frac{\pi e^2 |E^{(i)}|^2}{m \omega_0^2} \left[1 + |\mu|^2 + 2|\mu| \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) \right] \quad (5.11)$$

$$\delta S_{ECF}^{Pl cp} = \frac{\pi e^2 |E^{(i)}|^2}{m \omega_0^2} \left[1 + |\mu|^2 \right] \quad (5.12)$$

donde los superíndices lp y cp significan linealmente polarizado y circularmente polarizado, respectivamente.

Si en (5.11) hacemos $(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) = n\pi$, con n un número entero, entonces:

$$\cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) = (-1)^n$$

y δS adquiere valores máximo y mínimo según sea $n = 1$ ó $n = -1$:

$$\delta S_{ECF}^{Pl lp} = \frac{\pi e^2 |E^{(i)}|^2}{m \omega_0^2} \left[1 \pm |\mu| \right]^2 \quad (5.13)$$

despejando $|\mu|$ tenemos:

$$|\mu| = \pm (|\mu|_0 - 1) \quad (5.14)$$

con:

$$|\mu|_0 = \sqrt{\frac{\omega_0^2 \delta S_{ECF}^{Pl lp}}{\pi e^2 |E^{(i)}|^2}}$$

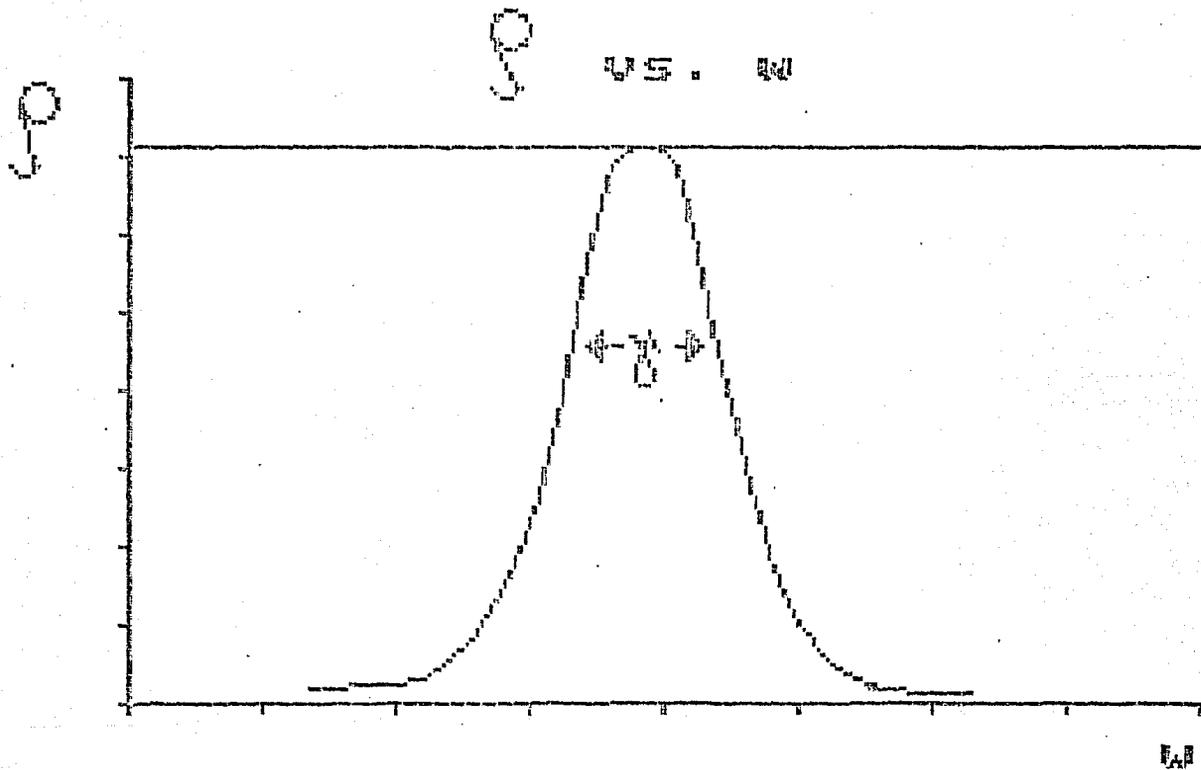
una "reflectividad" $|\mu|_0$ que cambia con la frecuencia y que

cuando:

$$\delta \mathcal{S}_{ECF}^{pllp} = \frac{\pi e^2 |E^{(i)}|^2}{m\omega^2} \equiv \delta \mathcal{S}_{ECF}^{pllp} (|\mu| = 0)$$

la reflectividad se anula aún cuando la amplitud del campo incidente sea diferente de cero. Es probable que una medición directa de las reflectividades (por ejemplo con un fotómetro o un tubo fotomultiplicador) dé una estimación del cambio en la energía.

El símbolo \pm en (S.13) sólo se usa para denotar los valores máximo y mínimo; haciendo una gráfica de $\delta \mathcal{S}_{ECF}^{pllp}$ vs. $|\mu|$ en cada caso se puede observar un comportamiento simétrico para valores pequeños de $|\mu|$ con respecto a la recta $\delta \mathcal{S}_{ECF}^{pllp}(0)$, ver figura 5.4; éste tipo de comportamiento se encuentra en los cálculos realizados por Bochove⁽⁷²⁾ para un caso no degenerado.



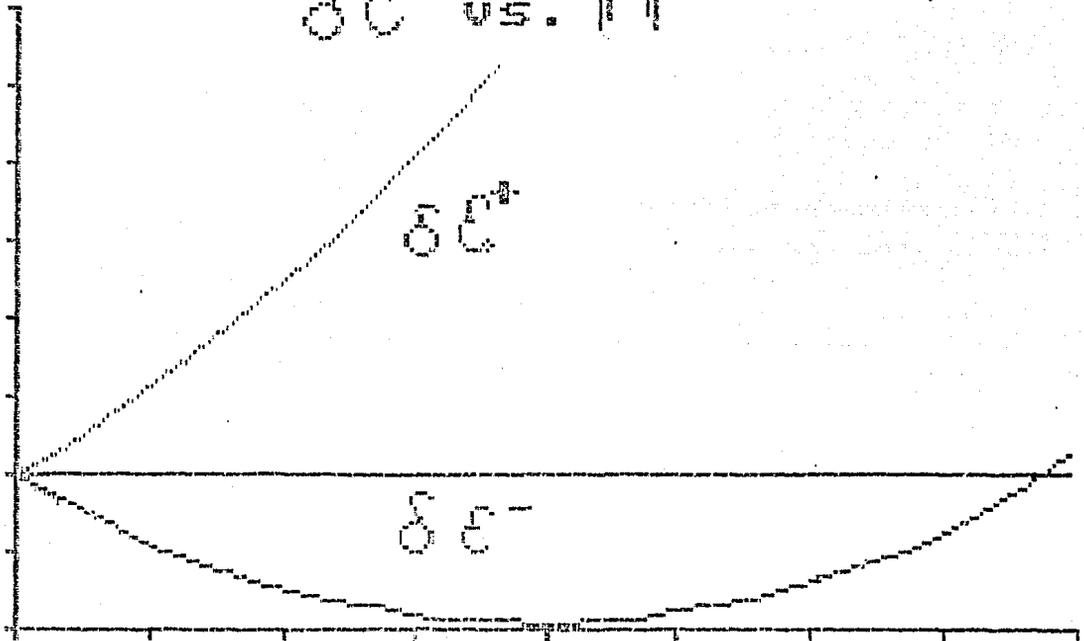
densidad espectral del campo
como función de la frecuencia

$\delta \mathcal{E}$

cambio
en la
energía

$\delta \mathcal{E}$ vs. M

$$\frac{\pi e^2 |E^{(0)}|^2}{m \omega^2}$$



$\delta \mathcal{E}^+$

$\delta \mathcal{E}^-$

reflectividad

M

5.4 LA FUERZA EJERCIDA POR EL ECF SOBRE EL OSCILADOR.

En forma enteramente análoga a la del capítulo anterior observamos que el cambio en la energía depende de la posición, y podemos interpretar ésta como un potencial que da origen a una fuerza oscilatoria debida a la presencia del espejo.

Tomemos el gradiente de δg_1^{Pl} dada por la ec. (5.10):

$$\nabla(\delta g_1^{Pl}) = - \frac{4\pi e^2 |\hat{e}^2| |\mu| |E^{(i)}|^2}{m\omega_0^2} \vec{k} \sin(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi)$$

por lo tanto:

$$\vec{F}_{ECF} = - \nabla(\delta g_1^{Pl}) = \frac{4\pi e^2 |\hat{e}^2| |\mu| |E^{(i)}|^2}{m\omega_0^2} \vec{k} \sin(2\vec{k} \cdot \vec{r} + 2\alpha + \delta - \phi) \quad (5.15)$$

se trata de una fuerza que está dirigida en la misma dirección que la onda reflejada y hacia la posición \vec{r} (el punto del espacio y no la dirección, esto se aclara puesto que la orientación del oscilador es, hasta ahora arbitraria) en la que se encuentra colocado el oscilador, es decir se trata de una fuerza repulsiva, y que cambia sinusoidalmente con la posición así que habrá máximos y mínimos según la fase de la onda.

Para estimar el orden de magnitud de \vec{F}_{ECF} usamos los datos de la tabla que viene en el artículo que sobre aplicaciones de ECF publicó Giuliano⁽⁶⁷⁾: $\lambda = 589 \text{ nm}$, $|\mu| = 10^4$, $\omega_0 \approx 10^{17} \text{ s}^{-1}$, una potencia por centímetro cuadrado del orden de 6 Mw/cm^2 y tomando la fórmula derivada por de Hecht-Zajac⁽⁷³⁾ para la amplitud del campo (para una onda plana los campos son sinusoidales así que el promedio del vector de Poynting es $\langle \vec{S} \rangle \equiv I$ donde $I = c\epsilon_0 E_0^2/2$, para un medio con una permitividad $\epsilon \neq \epsilon_0$, $E_0 = 27.4 (I/n)^{1/2} \text{ v/m}$),

obtenemos $|F_{ECF}^*| \sim 10^{-15}$ N ; ésta fuerza puede aumentar hasta $|F_{ECF}^*| \sim 10^{-13}$ N si se usa un laser que produzca amplitudes del campo del orden de 10^8 v/m (con este laser ya se puede "romper" el aire). Actualmente, ya es posible medir fuerzas de éste orden de magnitud, y aún menores usando los microscopios de efecto tunel. En 1985 G.Binnig, C.F.Quate y Ch.Gerber ⁽⁷⁴⁾ propusieron un nuevo sistema que es capaz de medir fuerzas del orden de 10^{-10} N. con desplazamientos de tan sólo 10^{-4} Å, este nivel de sensibilidad claramente penetra en el régimen de las fuerzas interatómicas, entre átomos individuales. En principio el microscópio diseñado por Binnig et al. puede ser usado para medir cualquier tipo de fuerza, por lo que se sugiere como una forma de comprobación experimental de los cálculos realizados para el oscilador frente al ECF así como para los de partículas entre placas paralelas.

5.5 LA VISIBILIDAD DE LAS FRANJAS DE INTERFERENCIA.

En las secciones anteriores hemos visto la importancia de la densidad espectral en los cálculos sobre las correcciones radiativas, ahora veamos como se aplica al cálculo del patrón de interferencia que se forma frente al espejo, con esto estaremos mostrando que la EDF es también capaz de obtener el resultado correcto para la visibilidad de las franjas. Empezamos considerando la definición para la visibilidad.

$$\gamma \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{E_{\max}^2 - E_{\min}^2}{E_{\max}^2 + E_{\min}^2} \quad (5.16)$$

aquí I_{\max} e I_{\min} son las intensidades del campo máxima y mínima, respectivamente; Y también se puede escribir como un cociente de energías del campo externo, ya que $I \sim E^2$ y el factor de proporcionalidad es el mismo para I_{\max} e I_{\min} , así que al tomar el cociente se cancela (no es un factor relevante), de donde se sigue la segunda igualdad de (5.16). Esta energía del campo externo es, a su vez, proporcional a la densidad espectral (5.8) que oscila con la posición de un valor máximo:

$$\rho_{\text{ext}}^{\max}(\omega) = \left| \frac{E^{(i)}}{2\pi} \right|^2 \left\{ 1 + |\mu|^2 + 2|\hat{\varepsilon}^2| |\mu| \right\} \left\{ \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \right\} \quad (5.17)$$

hasta el mínimo:

$$\rho_{\text{ext}}^{\min}(\omega) = \left| \frac{E^{(i)}}{2\pi} \right|^2 \left\{ 1 + |\mu|^2 - 2|\hat{\varepsilon}^2| |\mu| \right\} \left\{ \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \right\} \quad (5.18)$$

Además, la probabilidad de absorción por unidad de tiempo, para un sistema inmerso en un campo externo es proporcional a la densidad espectral de ese campo, y el factor de proporcionalidad

es el coeficiente de absorción inducida de Einstein:

$$\mathcal{V} = B_{mn} \rho_{\text{ext}} \quad (5.19)$$

Como la densidad espectral cambia sinusoidalmente según las ecs. (5.17) y (5.18), entonces \mathcal{V} también oscila por lo que:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}_{\text{ext}}^{\text{max}} - \mathcal{V}_{\text{ext}}^{\text{min}}}{\mathcal{V}_{\text{ext}}^{\text{max}} + \mathcal{V}_{\text{ext}}^{\text{min}}} = \frac{\rho_{\text{ext}}^{\text{max}} - \rho_{\text{ext}}^{\text{min}}}{\rho_{\text{ext}}^{\text{max}} + \rho_{\text{ext}}^{\text{min}}} \quad (5.20)$$

sustituyendo (5.17) y (5.18) en ésta ecuación:

$$\mathcal{V} = \frac{2|\mu| |\hat{\mathcal{E}}^2|}{1 + |\mu|^2} \quad (5.21)$$

que está en total acuerdo con el resultado de Wolf et al.⁽⁷¹⁾. La ec.(5.19) es un resultado obtenido por la EDE, así que también es permite explicar el origen de las franjas del patrón de interferencia.

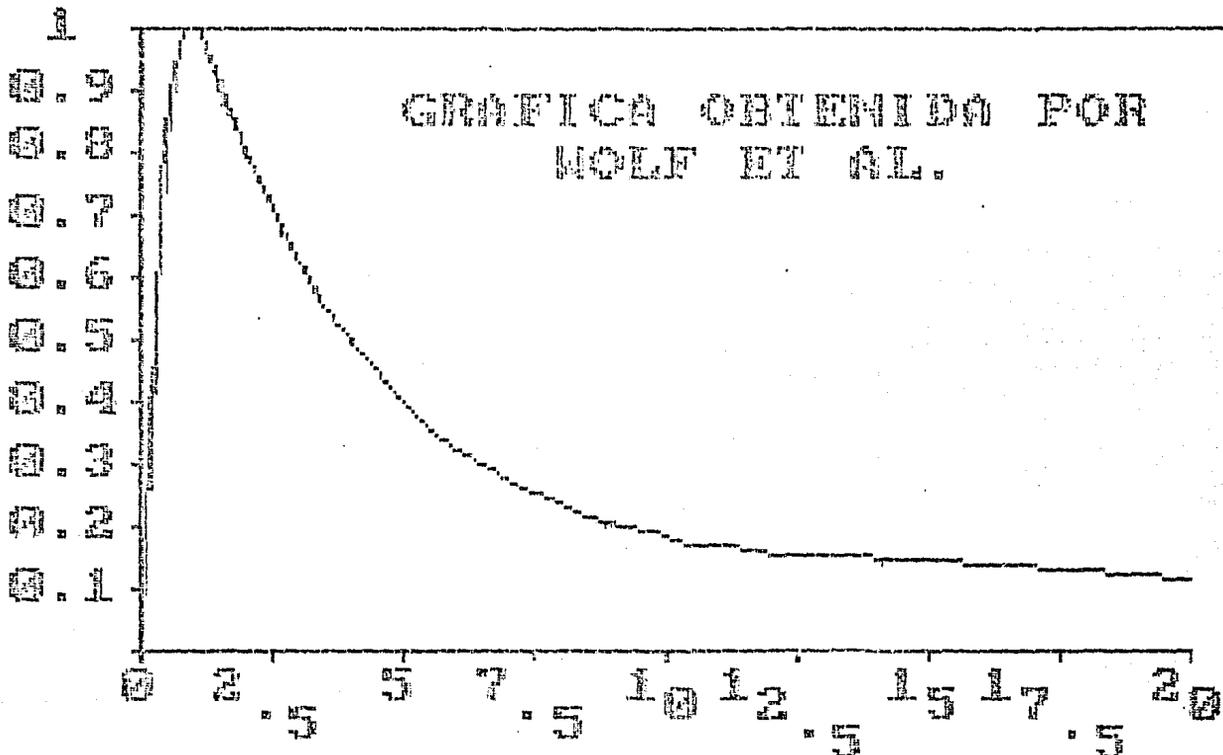
Nuevamente observamos la fuerte dependencia del estado de polarización de las ondas incidentes; $\mathcal{V} = 0$ para ondas circularmente polarizadas, en tanto que la visibilidad adquiere su máximo valor para polarización lineal $|\hat{\mathcal{E}}^2| = 1$. En la gráfica (5.5) se muestra el comportamiento de \mathcal{V} vs. $|\mu|$.

La función (5.21) tiene un máximo en $|\mu| = 1$ y decrece como $|\mu|^{-1}$ para $|\mu| \gg 1$, así que para la reflectividad que manejamos en las secciones anteriores de $|\mu| \approx 10^4$, $\mathcal{V} \approx 2 \times 10^{-4}$, con esto vemos que el cambio $\delta\mathcal{V}$ y \mathcal{V} son efectos "observables" en rangos distintos de $|\mu|$.

La (5.21) es una consecuencia directa del tipo de reflexión que presente el ECF y no depende de la distribución específica de frecuencias, porque esta última entra sólo como un factor común en las ecuaciones (5.17) y (5.18) que se cancela al calcular el cociente en (5.21).

REFLECTIVIDAD

REFLECTIVIDAD US. REFLECTIVIDAD



REFLECTIVIDAD

111

CONCLUSIONES:

Los cálculos presentados son sólo una parte de la gran actividad que se realiza en favor de EDE.

El propósito de la EDE es más que nada proveer de una teoría física que tenga menos problemas conceptuales que la propia MC y que además puede dar una mejor concordancia entre experimento y teoría.

Quedó claro que no es necesario echar mano de recursos no muy firmes (aún en cuanto al entendimiento puramente filosófico) como el campo de fotones virtuales que propone la EDC. La EDE parte de primeros principios y es capaz de darnos una descripción detallada de la interacción de la materia con la radiación, al menos por ahora en cuanto a sistemas como el oscilador armónico y algunos casos todavía particulares, pero existe ya una nueva formulación de EDE en términos de poissonianos^(27,28) que ha podido reproducir resultados importantes de la teoría cuántica como son los coeficientes de Einstein y más aún, las ecuaciones de Heisenberg a partir de funciones puramente ondulatorias.

En una revisión tan escasa de la EDE hemos podido observar las posibilidades y ventajas que ofrece sobre la EDC a pesar de sus limitaciones. Se pone de manifiesto la importancia del papel que juega el campo de vacío en problemas de confinamiento, (de hecho se le ha dado tanta importancia a últimas fechas que ahora se hace referencia a la "Electrodinámica Cuántica de Cavidades"⁽⁷⁵⁾) dado el alto grado de aplicabilidad que se ha encontrado para incremento o decremento en las razones de decaimiento espontáneo, esto abre la posibilidad de crear una nueva generación de miseres y láseres más energéticos que permitan

a su vez obtener nuevos resultados experimentales que confirmen o desechar las teorías, amén de otras aplicaciones más prácticas.

Hasta ahora la EDE ha dado buena cuenta (con las aproximaciones hechas) de este tipo de problemas que se han vuelto a actualizar con el advenimiento de instrumentos experimentales más precisos y más energéticos; mejor aún, hemos visto que en problemas que involucran objetos hasta ahora no muy ortodoxos en la experimentación actual, como son los ECF y los microscópios de efecto túnel, los resultados son satisfactorios al menos en principio.

Algunos resultados aquí presentados no son efectos medibles con las técnicas usuales de espectroscopía, pero muestran los importantes efectos del vacío sobre la materia además de poner en evidencia que efectos considerados puramente cuánticos no lo son. Todo esto muestra la tendencia de una teoría, que sin estar terminada es una de las más sólidas conceptualmente hablando.

REFERENCIAS

- 1.- L. de la Peña y A.M. Cetto, *Jour. of Math. Phys.* 18, 1812 (1977).
- 2.- Marshall, T.W. , *Il Nuovo Cimento* 38, 206 (1965); Boyer, T.H., *Phys. Rev.* 174, 1631 (1968).
- 3.- L. de la Peña y A.M. Cetto, *Jour. of Math. Phys.* 20(3), 469 (1979)
- 4.- L. de la Peña, "Stochastic Processes Applied to Physics and other related Fields", ed. por B. Gómez et al. (World Sci. Publ. co. Singapore. 1983) cap. 6 pag. 515.
- 5.- Para un tratamiento más amplio de éste tema se pueden consultar los libros estándar de MC como: "Introducción a la Mecánica Cuántica" L. de la Peña, primera ed. (1979) ed. C.E.C.S.A.; "Quantum Mechanics", A.S. Davydov seg. ed. (1976) Pergamon Press; "Mecánica Cuántica", L. Landau, E. Lifshitz, ed. Reverté (1967).
- 6.- Ver por ejemplo el libro de L. Landau citado anteriormente.
- 7.- A. Einstein, *Phys. Zs.* 18, 121 (1917), incluido en "On the Theory of Radiation Sources of Quantum Mechanics", pag. 63 ed. por B.L. Van der Waerden (1967) Dover; P.A.M. Dirac *Proceedings of the Royal Soc. of London* A-114, 243 (1927), incluido también en "Selected Papers in Quantum Electrodynamics" ed. por Julian Schwinger (1958) Dover; "Introduction to Quantum Mechanics", L. Pauling, E. Wilson pag. 299 primera ed. (1935) Mc Graw-Hill; "Quantum Physics", S. Gasiorowicz, pag. 373 (1974) John Wiley.
- 8.- J.L. Jiménez et al. *Am. Jour. of Phys.* 48(10), 840 (1980).

- 9.- L. de la Peña, "Introducción a la Mecánica Cuántica", pag.267.
- 10.- B. Cohen, et al. "Quantum Mechanics", (1977) seg. vol. John Wiley.
- 11.- "Quantum Statistical Properties of Radiation", W.H. Louisell, John Wiley (1973); "Radiation and Noise in Quantum Electronics", W.H. Louisell Mc Graw-Hill, (1964); "Quantum Field Theory", F.Mandl, G.Shaw, John Wiley, N.Y. (1984)
- 12.- Hay varias formas de introducirse al estudio de las correcciones radiativas, aquí empezamos construyendo los propagadores de Feynman.
- 13.- "Introducción a la Electrodinámica Cuántica", J.Leitlé Lopes, primera ed. (1977), Trillas; para una exposición más o menos simple y bien conducida sobre la forma de usar los diagramas de Feynman ver: "Quarks and Leptons", F.Halzan, A.D. Martín (1984) John Wiley.
- 14.- En muchos libros se trata el efecto Lamb, por ejemplo en las referencias (11), sin embargo, en esta parte se sigue la exposición dada por J.J Sakurai en "Advanced Quantum Mechanics", pag.64 Addison Wesley (1967).
- 15.- Ver también "Quantum Electrodynamics", R.P. Feynman pag.22 (1961), W.A. Benjamin Inc.
- 16.- "Molecular Quantum Electrodynamics", D.P. Craig, T.Thirunamachandran (Academic Press 1984).
- 17.- W.E. Lamb, R.C. Retherford, Phys. Rev. 72, 241 (1947).
- 18.- N.H. Kroll y W.E. Lamb, Phys. Rev. 75, 388 (1949), también incluido en el libro editado por Schwinger ver ref.(7).

19. - J.B. French y V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* 75, 1240 (1949);
20. - W.E. Lamb y R.C Retherford, *Phys. Rev.* 79, 549 (1950);
W.E. Lamb y R.C Retherford, *Phys. Rev.* 81, 222 (1951);
W.E. Lamb, *Phys. Rev.* 85, 259 (1952);
W.E. Lamb y R.C Retherford, *Phys. Rev.* 86, 1014 (1952);
S. Triebwasser, E.S. Dayhoff y W.E. Lamb, *Phys. Rev.* 87, 98 (1953); E.S. Dayhoff, S. Triebwasser y W.E. Lamb, *Phys. Rev.* 87, 108 (1953).
21. - H.A. Bethe, *Phys. Rev.* 72, 339 (1949), también incluido en el libro editado por Schwinger.
22. - E.E. Salpeter, *Phys. Rev.* 83, 92 (1953).
23. - P.J. Mohr, *Phys. Rev. Letts.*, 34, 1050 (1975).
24. - S.R. Lundeen y F.M. Pipkin, *Phys. Rev. Letts.* 46, 232 (1981).
25. - E.E. Salpeter y M.H. Zaidi, *Phys. Rev.* 125, 248 (1962).
26. - L. de la Peña y A. M. Cetto, *Rev. Mex. de Fis.* 31, 551 (1985).
27. - L. de la Peña y A. M. Cetto, *Il Nuovo Cim.* 92E, 189 (1986).
28. - L. de la Peña y A. M. Cetto, Preprint IFUNAM 87-3.
29. - E. Santos, *Il Nuovo Cim.* 13E, 57 (1974).
30. - R. Burrett, *Phys. Letts.* 12, 323 (1964).
31. - "Probability, Random variables and Stochastic Processes" A. Papoulis seg. ed. Mc. Graw-Hill (1984).
32. - S. Chandrasekhar, *Rev. of Mod. Phys.* 15, 1 (1943) incluido también en "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes" ed. por Nelson Wax, Dover (1954).
33. - A.M. Cetto y L. de la Peña, *Phys. Rev. A* 37, 1960 (1988).
34. - A.M. Cetto y L. de la Peña, *Ann. Fond. L. de Broglie*, 3, 15 (1978); A.M. Cetto y L. de la Peña, *Rev. Mex. de Fis.*, 29, 537

(1983).

35. - L. de la Peña y A.M. Cetto, Reprint of Foundations of Physics, 12, 1017 (1982); L. de la Peña y A.M. Cetto, Jour. of Math. Phys. 18, 1612 (1977); L. de la Peña y A.M. Cetto, Phys. Letts. 62A, 389 (1977).

36. - "Classical Theory of Electric and Magnetic Fields", R.H. Good, T.J. Nelson, pag. 487 Academic Press (1971).

37. - "Classical Electrodynamics" J.D. Jackson, John Wiley (1965).

38. - La integración de la ec. (3.90) da $\hat{L}_1 Q = h(x)$ una función sólo de x , integrando una vez más sobre todo el rango de p tenemos $h(x) \int (\tau \omega^2 p + \hat{D}^{(pp)}) \partial_p Q dp = 0$; esto se debe a la condición de paridad $Q(x, p) = Q(x, -p)$.

39. - Haciendo una transformada de Fourier con $\int dp e^{2i p z} Q(x, p) = \tilde{Q}(x, z)$ de la ec. (3.85) se sigue (3.147) con:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_0 &= -\frac{i\hbar}{2m} \partial_z \partial_x + 2i m \omega^2 x z \\ \tilde{L}_1 &= \frac{i}{2} \tau \omega^2 \partial_z + 2i \hat{D}^{(pp)} z \\ \hat{L}_2 &= 2i \hat{D}^{(pp)} z \partial_x\end{aligned}$$

La matriz de densidad para el estado de equilibrio se escribe como:

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_k \varphi_k(x_1) \varphi_k(x_2) e^{-\beta E_k}$$

así que cualquier estado no estacionario será descrito por:

$$\rho = \sum_{k,l} C_k C_l^* \varphi_k(x_1) \varphi_l(x_2)$$

donde los coeficientes C_k dependen del tiempo. Recordemos que \tilde{L}_1 y \tilde{L}_2 son correcciones a orden τ a \tilde{L}_0 y que $\tau \ll 1$, por lo que se pueden despreciar esos términos obteniéndose: $\partial_t + \tilde{L}_0 \rho = 0$ de donde se sigue (3.143).

40. - A.M. Cetto y L. de la Peña, Rev. Mex. de Fis. 29, 537 (1983).

41. - "Introducción a la Mecánica Cuántica", L. de la Peña primera ed. (1979) pag. 310 C.E.C.S.A.
42. - A.M.Cetto y L. de la Peña, Phys. Rev. A 37, 1052 (1988).
43. - "Mathematical Methods for Physicists", G.Arphen seg. edo. Academic Press, pag.221 (1970) y "The Mathematics of Physics and Chemistry", H.Margenau y G.H.Murphy, (D.Van Nostran Co.) 1943 pag.457.
44. - "Table of Integrals, Series and Products", I.S.Gradshiteyn y I.H.Ryzhik, pag.1076 (1980) Academic Press.
45. - K.Svozyl, Phys.Rev.Letts.54, 742 (1985).
46. - P.Dobiasch y H.Walther, Ann.Phys. (Paris) 111, 825 (1985).
47. - Ver por ejemplo la referencia 43.
48. - Ver en la referencia 32 el libro editado por Nelson Wax los artículos de G.E.Uhlenbeck y L.S.Ornstein "On the Theory of Brownian Motion" y Ming Chen Wang y G.E.Uhlenbeck "On the theory of Brownian Motion II", publicados en Phys.Rev.36 (1930) y Reviews of Mod. Phys.17 (1945) respectivamente.
49. - G.Gabrielse y H.Dehemelt, Phys.Rev.Letts.55, 67 (1985); A.Ganesh Vaidyanathan et al., Phys Rev.Letts.47, 1592 (1981); D.J.Heinzen et al., Phys. Rev. Letts. 58, 1320 (1987); E.Yablonovitch, Phys.Rev.Letts.58, 2059 (1987).
50. - K.H.Drexhage, en "Progress in Optics " XII, editado por E.Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1974).
51. - Ver el libro de Margenau y Murphy, pag.375 citado en la referencia 43 y "Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms", H.Bethe y E.S.Salpeter, N.Y. Academic Press (1957).
52. - L.Hollberg y J.L. Hall, Phys. Rev. Letts. 53, 230 (1984).

- 53.- Es claro que en un experimento no se puede hacer una delimitación tan precisa del intervalo de frecuencias.
- 54.- P.L Knight, *J. of Phys. 1: Gen. Phys.* 5, 417 (1972).
- 55.- G. Barton, *Proc. Roy. Soc. Lond.* 6.229, 251 (1970).
- 56.- ''Intermediate Quantum Mechanics'', H.A. Bethe y R.W. Jackiw, (W.A. Benjamin, inc. 1968) pag.212.
- 57.- V.V. Shkunov, B. Ya. Zeldovich, *Sci. Am.* 253, 54 (1985).
- 58.- D.H. Pepper, *Sci. Am.* 254, 74 (1986).
- 59.- ''Optical Phase Conjugation'', editado por R.A. Fisher (Academic Press 1981) pag.3.
- 60.- B. Ya. Zeldovich, V.I. Popovichev, V.V. Ragulskii, F.S. Faizullou, *Sov. Phys. JETP*, 15, 109 (1972).
- 61.- Fisher op. cit. pags. 36, 99.
- 62.- ''Nonlinear Optical Parametric Processes in Liquids and Gases'', J.F. Reintjes pags. 32, 44, 359 (Academic Press 1984).
- 63.- Fisher op. cit. pag. 33.
- 64.- J.W. Haus, C.M. Bowden, C.C. Sung, *Phys. Rev.A* 35, 3398 (1987).
- 65.- M.L. Sawley, *Phys. Rev.A* 37, 1298 (1988).
- 66.- K.P.B. Noosad, T.M. Abdul Rasheed, V.P.N. Nanpoori y K. Sathianandan, *Journal of Optics* 17, 24 (1988).
- 67.- C.R. Giuliano, *Phys. Today*, pag. 27, abril (1981).
- 68.- Jack Feinberg, *Phys. Today*, octubre (1988) pag.46.
- 69.- Fisher op. cit. pag. 30.
- 70.- Drexhage op. cit. pag.185.
- 71.- E. Wolf, L. Mandel, R.W. Boyd, T.M. Habashy y M. Nieto-Vesperinas, *J. Opt. Soc. Am. B*, 4, 1260 (1987); R.W. Boyd, T.M. Habashy,

- A. A. Jacobs, J. Mandel, M. Nieto-Vesperinas, W. R. Tomkin y E. Wolf, *Optics Letts.*, 12, 42 (1987); A. A. Jacobs, W. R. Tomkin, R. W. Boyd y E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am. B4*, 1288 (1987).
72. - E. J. Bochove, *Phys. Rev. Letts.* 59, 2547 (1987).
73. - "Optica", E. Hecht, A. Zajac (Fondo Educativo Interamericano 1977) pag. 533.
74. - G. Binnig, C. F. Quate y Ch. Gerber, *Phys. Rev. Letts.* 56, 930 (1986).
75. - S. Haroche, D. Kleppner, *Phys. Today*, enero 1989, pag. 24.
76. - "Statistical Mechanics, Fluctuations and Noise", pag. 207 (Edward arnold 1976).
77. - L. de la Peña, *Am. Jour. of Phys.* 48, 1080 (1980).