UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Dos Problemas en Estabilidad Hidrodinámica

Tesis

Que para obtener el título de

Matemático

Presenta

Gustavo Cruz Pacheco

México, D. F. 1989

INDICE

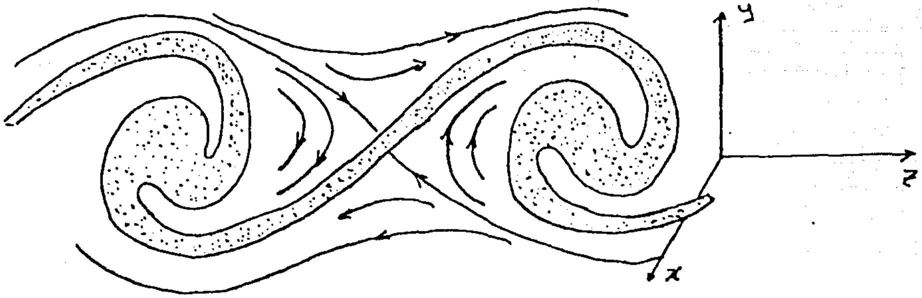
PRIMERA PARTE

SEGUNDA PARTE

PRIMERA PARTE

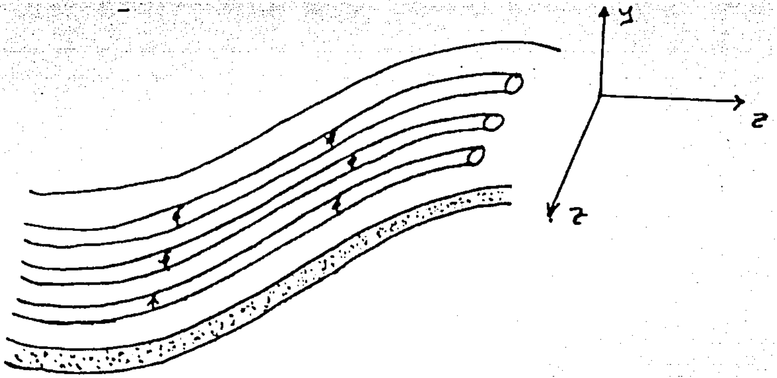
INTRODUCCION

Un problema de interés en mecánica de fluidos es describir y entender la evolución de estructuras vorticosas en una capa mezclante. Estas capas mezclantes aparecen por ejemplo, cuando un fluido entra a presión en otro. El flujo básico es bidimensional, consistiendo de el enrrollamiento e interacción entre sí de vórtices alineados con ejes perpendiculares a la dirección de las líneas de corriente. Los vórtices estan conectados por filamentos llamados trenzas. Las trenzas entan sujetas al proceso de deformación debido al enrrollamiento. La vorticidad es lanzada desde las trenzas y los vórtices. Las líneas de corriente mostradas en la figura 1 ilustran gráficamente este efecto de deformación debido al enrrollamiento.



La idea tradicional era la de estructuras bidimensionales como las que se muestran en la figura 1 que interaccionan amalgamándose. No fue hasta los años 70's que se descubrió una estructura tridimensional de vórtices secundarios cuyos ejes siguen a la trenza en la dirección del eje z como se ilustra en la figura 2.

Estos vórtices secundarios están sujetos a un estiramiento y compresión así como a la interacción con otros vórtices del arreglo. Esto tiende a concentrarlos. Por otra parte la difusión debido a la viscosidad tiene un efecto contrario y tiende a desintegrar los vórtices. Experimentalmente se observa una rotación de los vórtices secundarios seguido por un colapso.

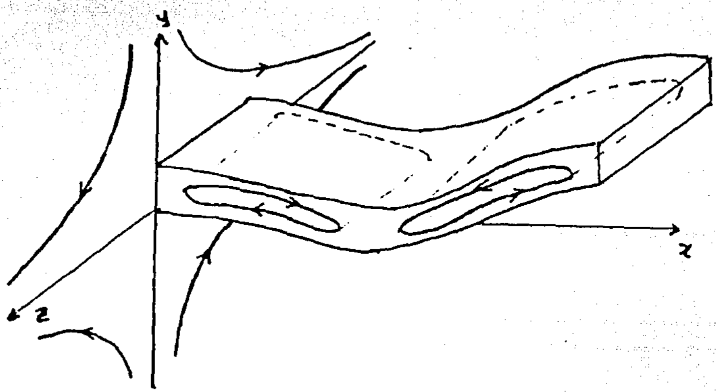


Los efectos de difusión se dejan sentir a un tiempo $T=L^2/\nu$ donde L es una longitur caracterìstica del flujo y ν es la viscosidad cinemática y los efectos de estiramiento se dejan sentir a un tiempo $T= 1/\gamma$ donde γ es el ritmo de deformación. Para tener estos dos efectos simultaneamente necesitamos que $1/\gamma$ sea igual a L^2/ν lo cual nos da una estructura de longitud $L=(\nu/\gamma)^{1/2}= \delta$ como candidato a la longitud de equilibrio para los vórtices secundarios.

FORMULACION DEL MODELO

Aproximamos el comportamiento del flujo primario en el centro de los vórtices como un campo de estiramiento $U=(0,-\gamma y,\gamma z)$ constante que desprecia la interacción de los vórtices secundarios con el sistema primario.

La figura 3 muestra esquemáticamente el flujo primario y los vórtices secundarios



El movimiento de los vórtices secundarios se describe como una hoja de vorticidad concentrada en la zona de los vórtices y se derivará una ecuación para su evolución como aproximación a las ecuaciones de Navier- Stokes.

Si denotamos por $\bar{u}(\bar{x})$ la velocidad del flujo y por $\bar{\omega}=\nabla\times\bar{u}$ la vorticidad, podemos escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en la forma: (ver Batchelor [1])

$$\bar{\omega}_t = \nabla\times(\bar{u}\times\bar{\omega}) + \nu\Delta\bar{\omega}$$
$$\nabla\times\bar{u} = \bar{\omega}$$
$$\nabla\cdot\bar{u} = 0$$

Sujetas a condiciones iniciales sobre $\bar{\omega}$. Para modelar la situación que se desea se toma $\bar{u} = U + \tilde{u}$ donde $\tilde{u}(x,y,t)$ es el movimiento de los vórtices secundarios.

$$\tilde{u} = \tilde{u}(u(x,y,t), v(x,y,t), 0)$$

y

$$\nabla \cdot \tilde{u} = 0$$

por lo tanto existe una función de corriente ψ tal que $u = -\psi_y$ y $v = \psi_x$. Escribiendo $\bar{\omega}$ en términos de ψ tenemos:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}(0, 0, \omega(x,y,t)) = \nabla \times \tilde{u} = (0, 0, \Delta\psi)$$

de donde obtenemos:

$$\Delta \psi = \omega$$

Resolviendo la ecuación para ψ encontramos:

$$\psi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x',y',t) \log\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]^{\frac{1}{2}} dx' dy'$$

Derivando obtenemos las velocidades u y v

$$u = -\psi_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-y')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\, dx' dy'$$

$$v = \psi_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\, dx' dy'$$

Usando el hecho de que $\bar{\omega} = \bar{\omega}(0,0,\omega)$ y $\tilde{u} = \tilde{u}(u,v,0)$ obtenemos

$$\bar{u} \times \bar{\omega} = (v\omega, -u\omega, 0)$$

de donde se obtiene

$$\nabla \times (\bar{u} \times \bar{\omega}) = -(0,\ 0,\ (u\omega)_x + (v\omega)_y)$$

Usando el flujo básico $U = (0, -\gamma y, \ \gamma z)$ obtenemos la siguiente ecuación para la vorticidad $\omega(x,y,t)$:

$$\omega_t + (u\omega)_x + ((v - \gamma y)\omega)_y = \nu \Delta \omega \qquad (1)$$

donde

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-y')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\, dx'dy' \qquad (2)$$

y

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\, dx'dy' \qquad (3)$$

son las componentes en las direcciones x y y de la velocidad inducida por la vorticidad.

La ecuación (1) con u y v dadas por (2) y (3) constituyen una ecuación integro-diferencial exacta para la evolución de la vorticidad ω, la ecuación se supone válida en todo el espacio y la condición inicial $\omega(x,y,0)$ especifica la forma y concentración inicial de los vórtices secundarios. El contenido físico de esta ecuación de evolución es que la vorticidad es convectada por la suma de las velocidades autoinducidas y por la componente y de la deformación y hay difusión de la vorticidad debido a la viscosidad.

FLUIDO IDEAL

Cuando $\nu=0$ se pueden buscar soluciones con la forma de una hoja de vórtices concentrados en una superficie de espesor 0. Es decir buscar una solución de la forma

$$\omega(x,y,t)=\sigma(x,t)\,\delta(y-\eta(x,t)) \qquad (4)$$

donde η es la elevación de la superficie, σ es la densidad superficial de vorticidad y δ es la distribución de Dirac.

Sustituyendo la expresión para ω en (1), (2) y (3) y derivando como distribución se tiene : (ver apendice I)

$$\eta_t+u\eta_x-v+\gamma\eta=0 \qquad (5)$$

$$\sigma_t+(u\sigma)_x=0 \qquad (6)$$

La primera ecuación dice que η se mueve como una superficie libre convectada en la dirección vertical con velocidad $v-\gamma\eta$ y con velocidad u en la horizontal. La segunda ecuación expresa la conservación de la vorticidad.

Las velocidades autoinducidas están dadas por el valor principal de las siguientes integrales:

$$u=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(x,t)-\eta(x',t)}{(x-x')^2+(\eta(x,t)-\eta(x',t))^2}\,\sigma(x',t)\,dx' \qquad (7)$$

$$v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-x'}{(x-x')^2+(\eta(x,t)-\eta(x',t))^2}\,\sigma(x',t)\,dx' \qquad (8)$$

Estas ecuaciones fueron estudiadas numéricamente (Corcos [4]) observándose un colapso de los vórtices y una rotación de la hoja. Posteriormente John Neu [8] dió una teoría aproximada que explica el colapso y la rotación. Esta es la aproximación que ahora explicamos.

ECUACIONES APROXIMADAS

La aproximación consiste en suponer que $v = \gamma\eta$ es decir que la hoja de vórtices se coloca para equilibrar la velocidad autoinducida con la velocidad del campo externo y además los cambios en η son pequeños ($\eta_x \ll 1$ y $\eta_t \ll 1$) lo que de hecho equivale a buscar soluciones de onda larga.

Con esta aproximación se tienen de las ecuaciones (5) y (6)

$$\eta = \frac{1}{\gamma} V \tag{9}$$

$$\sigma_t + (U\sigma)_x = 0 \tag{10}$$

y de las ecuaciones (7) y (8) tenemos que

$$U = -\frac{1}{2\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(x,t) - \eta(x',t)}{(x-x')^2}\sigma(x',t)\,dx' \tag{11}$$

$$V = \frac{1}{2\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(x',t)}{x-x'}\,dx' \tag{12}$$

donde hemos tomado

$$\frac{\eta(x,t) - \eta(x',t)}{x - x'} \ll 1$$

ya que buscamos soluciones de onda larga.

Las ecuaciones (9) - (12) pueden ser reducidas a una sola ecuación para σ expresando u en términos de σ.

De (12) tenemos que

$$V = \frac{1}{2}\hat{\sigma}$$

Donde $\hat{\sigma}$ es la transformada de Hilbert de σ definida como (ver apendice II)

$$\hat{\sigma}(x,t) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(x',t)}{x-x'}\,dx'$$

tenemos

$$\eta = \frac{1}{\gamma} V = \frac{1}{2\gamma}\hat{\sigma}$$

de donde se puede expresar u como

$$u = -\frac{1}{4\gamma\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\sigma}(x,t) - \hat{\sigma}(x',t)}{(x-x')^2}\,\sigma(x',t)\,dx'$$

Necesitamos ahora evaluar esta integral para obtener una expresión más manejable para u.

Usando el hecho de que (ver apéndice II)

$$\hat{\sigma} = -i(\sigma^+ - \sigma^-)$$

de donde obtenemos

$$u = -\frac{i}{4\gamma\pi} P\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ \frac{\sigma^+(x',t)-\sigma^+(x,t)}{(x-x')^2}\sigma^+(x',t) - \frac{\sigma^-(x',t)-\sigma^-(x,t)}{(x-x')^2}\sigma^-(x',t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma^+(x',t)-\sigma^+(x,t)}{(x-x')^2}\sigma^-(x',t) - \frac{\sigma^-(x',t)-\sigma^-(x,t)}{(x-x')^2}\sigma^+(x',t)\right\} dx'$$

Calculando los residuos en los polos tenemos:

$$u = \frac{1}{4\gamma}\left(\sigma_x^+\sigma^+ + \sigma_x^-\sigma^- + \sigma_x^+\sigma^- + \sigma_x^-\sigma^+\right) =$$

$$= \frac{1}{8\gamma}\left(\sigma^{+2} + \sigma^{-2} + 2\sigma^+\sigma^-\right)_x = \frac{1}{8\gamma}\left((\sigma^+ + \sigma^-)^2\right)_x =$$

$$= \frac{1}{8\gamma}(\sigma^2)_x = \frac{1}{4\gamma}\sigma\sigma_x$$

Sustituyendo esta expresión para u en la ecuación (10) obtenemos:

$$\sigma_t + \frac{1}{4\gamma}(\sigma^2\sigma_x)_x = 0 \qquad (13)$$

Esta es una ecuación no lineal de difusión que describe la evolución de la vorticidad. Obsérvese que el coeficiente de difusión es $-(1/4\gamma)\sigma^2$ lo cual hace a la ecuación inestable.

Para entender el colapso buscaremos soluciones que lo describan.

Por analogía con la ecuación del calor (que tiene difusión positiva) buscaremos soluciones de soporte finito que se encojan a lo largo del tiempo. Estas tienen la forma de

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{a(t)}F(z) \qquad donde \qquad z = \frac{x^2}{a^2(t)}$$

tenemos así

$$\sigma_t = -\frac{a'}{a^2}F - \frac{2a'x^2}{a^4} \qquad\qquad \sigma_x = \frac{2x}{a^3}F'$$

sustituyendo obtenemos

$$\sigma_t + \frac{1}{4\gamma}(\sigma^2\sigma_x)_x = \frac{1}{\gamma a^5}\left\{-\gamma a'a^3(F+2zF') + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(F^2F' + 2z(F^2F')')\right\} = 0$$

para que existan soluciones de similaridad necesitamos

$$-\gamma a'a^3 = K \qquad (K \text{ constante positiva})$$

$$\left(\frac{1}{4}a^4\right)' = -\frac{K}{\gamma}$$

$$\frac{1}{4}a^4 = l - \frac{K}{\gamma}t$$

$$a_t = \left(4l - \frac{4K}{\gamma}t\right)^{\frac{1}{4}}$$

escogiendo $k/\gamma = \Gamma^2$ y $l = {}^1/_4\, a_o^4$ tenemos

$$a(t) = a_o\left(1 - \frac{4\Gamma^2}{a_o^4}t\right)^{\frac{1}{4}}$$

tenemos ahora que

$$K(F + 2zF') + \frac{1}{2}(F^2F' + 2z(F^2F')^2) = 0$$

$$(KF + \frac{1}{2}F^2F') + 2z(KF + \frac{1}{2}F^2F')' = 0$$

Una clase simple de soluciones de esta ecuación se obtiene tomando f una solución de

$$KF + \frac{1}{2}F^2F' = 0$$

entonces

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}\mathcal{F}' = -k$$

$$\left(\frac{1}{2} \mathcal{F}^2\right)' = -2k$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}^2 = c - 2kz$$

$$\mathcal{F}(z) = (2c - 4kz)^{\frac{1}{2}}$$

escogiendo

$$k = \gamma \Gamma^2 \quad y \quad c = 2\gamma\Gamma^2$$

tenemos

$$\mathcal{F}(z) = 2\Gamma\gamma^{\frac{1}{2}}(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

por lo tanto

$$\sigma(x,t) = \frac{2\Gamma\gamma^{\frac{1}{2}}}{a(t)}\left(1 - \frac{x^2}{a^2(t)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde

$$a(t) = a_0\left(1 - \frac{4\Gamma^2}{a_0^4} t\right)^{\frac{1}{4}}$$

En estas fórmulas Γ es la vorticidad total del segmento, a_o es la mitad de su longitud inicial y a(t) es la mitad de su longitud al tiempo t. Vemos de (15) que el segmento se colapsa a un punto en el tiempo T_c dado por

$$T_c = \frac{a_0^4}{4\Gamma^2}$$

De esta forma observamos que los vórtices más intensos se colapsan más rápidamente

$$T_c \to 0 \quad \text{Si} \quad \Gamma \to \infty$$

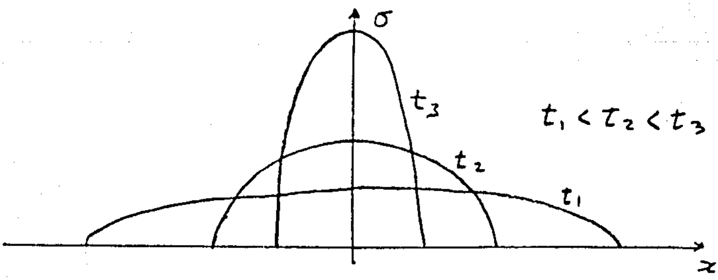
De (9) y (12) podemos encontrar la elevación η correspondiente a la densidad de vorticidad σ dada por (14). Esta es:

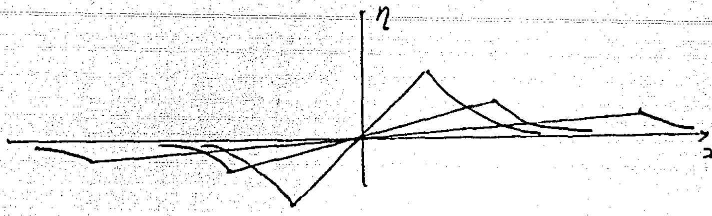
$$\eta = \frac{1}{2\gamma}\hat{\sigma} = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}a(t)} P\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{1}{x-x'}\left(1-\frac{x'^2}{a^2(t)}\right)^{\frac{1}{2}} dx' = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}a}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-x'^2)^{\frac{1}{2}}}{x-x'}dx'$$

de donde obtenemos (ver apendice II)

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2\Gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}a^2(t)}\left(x+(x^2-a^2(t))\right) & x<-a \\[2ex] \dfrac{2\Gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}a^2(t)}\,x & |x|\leq a \\[2ex] \dfrac{2\Gamma}{\gamma^{\frac{1}{2}}a^2(t)}\left(x-(x^2-a^2(t))\right) & x>a \end{cases}$$

de aquí vemos que η es una función lineal de x para $|x|<a$. Las siguientes figuras muestran la evolución de σ y η como fueron dadas por la solución de similaridad.





Una condición de validez para esta teoría es que $\eta_x \ll 1$. Aplicando este criterio a la solución de similaridad con $|x|<a$, encontramos que ésta es válida solo cuando $\Gamma/a^2 \ll 1$. Esto es solo para pequeños valores de la inclinación de la hoja de vórtices respecto a la horizontal.

Esta rotación fue encontrada en las simulaciones numéricas de Corcos [4] y su comienzo es consecuencia del colapso del vórtice.

Ahora estudiaremos los efectos de la viscosidad. El primer efecto es el que la hoja tiene ahora un espesor finito y la pregunta por resolver es si la viscosidad impide el colapso y se alcanza una situación estacionaria de u arreglo de vórtices secundarios.

Para esto es necesario un desarrollo sistemático de la aproximación para obtener así un término que pudiera estabilizar la ecuación obtenida.

La ecuación (1):

$$\omega_t + (u\omega)_x + ((v - \gamma y)\omega)_y = \nu \Delta \omega \qquad (1)$$

donde

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-y')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,dx'dy' \qquad (2)$$

y

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-x')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,dx'dy' \qquad (3)$$

tiene una solución estacionaria independiente de x de la forma (ver Batchelor [1])

$$\omega = A\left(\frac{\gamma}{2\pi\nu}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\gamma}{2\nu}(y-\mu)^2}$$

que representa una vorticidad concentrada en la región $y=\mu$ y con máxima intensidad A. La idea es encontrar una modulación de onda larga de esta solución viscosa de la forma

$$\omega(x,y,t) = \sigma(x,t)\left(\frac{\gamma}{2\pi\nu}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\nu}(y-\eta(x,t))^2}$$

donde esperamos que σ y η evolucionen en una escala más lenta en x y t .

En este caso la dinámica de esta vorticidad está determinada por la evolución de $\sigma(x,t)$ y $\eta(x,t)$.

La primera idea es añadir un término difusivo a σ de la forma $\nu\sigma_{xx}$ al coeficiente que calculamos antes y decir que la difusión negativa $\sigma^2/4\gamma$ provocada por la compresión se compensa con $\nu\sigma_{xx}$ que es la difusión por viscosidad.

Las ecuaciones quedan pues como:

$$\sigma_t + \left(\left(\frac{1}{4\gamma}\sigma^2 - \nu\right)\sigma_x\right)_x = 0 \qquad (16)$$

$$\gamma\eta = \frac{1}{2\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(x',t)}{x-x'}dx' = \frac{1}{2}\hat{\sigma} \qquad (17)$$

Estas ecuaciones son el análogo viscoso de las ecuaciones de transporte del caso invíscido (9), (10) y (12). La ecuación (16) dice que σ es una cantidad localmente conservada cuyo flujo es:

$$F = \left(\frac{1}{4\gamma}\sigma\sigma_x\right)\sigma - \nu\sigma_x$$

El primer término de esta ecuación representa el flujo debido a la compresión. El segundo término es el flujo debido a la difusión viscosa.

La ecuación (16) es una ecuación no lineal de difusión con difusividad

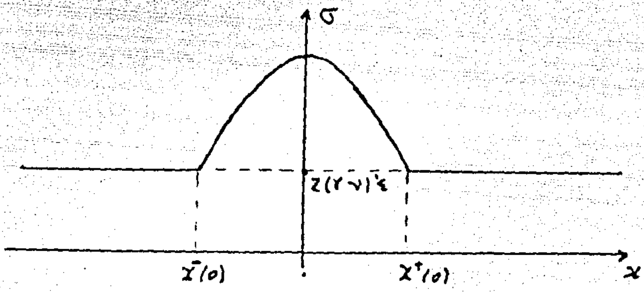
$$D(\sigma) = \nu - \frac{1}{4\gamma}\sigma^2$$

Si

$$|\sigma| > 2(\nu\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

la difusividad es negativa y daremos un argumento no riguroso de que la solución se colapsa como en el caso invíscido. El resultado riguroso del colapso será discutido en la última sección.

Para esto consideremos una condición inicial como se muestra en la siguiente figura.



Con $|\sigma(x,0)| > 2(\nu\gamma)^{1/2}$ para $x^-(0) < x < x^+(0)$, $\sigma(x,0)=0$ fuera de este intervalo y con tendiente finita diferente de 0 en $x^+(0)$ y en $x^-(0)$.

Veamos como se comportan los p untos x^+ y x^- al transcurrir el tiempo.

Desarrollando $\sigma(x,t)$ en serie de Taylor a primer orden alrededor de estos puntos tenemos

$$\sigma(x,t) = 2(\nu\gamma)^{\frac{1}{2}} + B(t)\left(x^{\pm}(t) - x\right) + O\left(\left(x^{\pm}(t) - x\right)^2\right)$$

donde $B(0) > 0$ para x^+ y $B(0) < 0$ para x^-, entonces

$$\sigma^2(x,t) = 4\nu\gamma + 4(\nu\gamma)^{\frac{1}{2}} B(t)(x^{\pm}(t)-x) + O((x^{\pm}(t)-x)^2)$$

$$\sigma_x = -B(t) + O(x^{\pm}(t)-x)$$

$$((\nu - \tfrac{1}{4\gamma}\sigma^2)\sigma_x)_x = -\left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} B^2(t) + O(x^{\pm}(t)-x)$$

$$\sigma_t = B(t)\dot{x}^{\pm}(t) + O(x^{\pm}(t)-x)$$

de donde obtenemos

$$\dot{x}^{\pm}(t) = -\left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} B(t)$$

por lo tanto los puntos $x^+(t)$ y $x^-(t)$ se mueven el uno hacia el otro con velocidad proporcional a la pendiente de σ en estos puntos.

Veamos ahora que el exceso de circulación Γ_c definido por

$$\Gamma_c = \int_{x^-(t)}^{x^+(t)} (\sigma(x,t) - 2(\nu\gamma)^{\frac{1}{2}})\,dx$$

se conserva en el tiempo.

$$\sigma_t = (D(\sigma)\sigma)_x$$

de donde

$$\int_{x^-(t)}^{x^+(t)} \sigma_t\,dx = D(\sigma)\sigma_x \Big|_{x^-(t)}^{x^+(t)} = 0$$

de aquí obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\Gamma_c = \frac{d}{dt}\int_{x^-(t)}^{x^+(t)} \left(\sigma(x,t) - 2(\nu\gamma)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \int_{x^-(t)}^{x^+(t)} \sigma_t \, dx +$$

$$+\left[\sigma(x^+(t),t) - 2(\nu\gamma)^{\frac{1}{2}}\right]\dot{x}^+(t) - \left[\sigma(x^-(t),t) - 2(\nu\gamma)^{\frac{1}{2}}\right]\dot{x}^-(t) = 0$$

Entonces si la solución conserva la forma de la condición inicial tendremos que $x^+ - x^-$ tiende a cero y como Γ_c es constante σ tiene que crecer.

Este argumento provee una indicación de que no puede alcanzarse un estado estacionario con vorticidad concentrada.

Por otra parte este análisis no incluye los términos dispersivos de orden más alto que toman en cuenta la longitud finita de las ondas.

Es pues de interés calcularlos para ver si es posible que el movimiento se estabilice.

En la siguiente sección se presenta un desarrollo sistemático para incluir los efectos de orden superior.

ECUACION A SEGUNDO ORDEN

En esta sección derivamos la ecuación para σ incluyendo los efectos viscosos usando el desarrollo sistemático para longitudes de onda larga comparadas con la escala de la compresión.

Para buscar soluciones de onda larga necesitamos que

$$\frac{\sigma}{L} << \gamma$$

donde como antes σ es la densidad superficial de vorticidad, L es el espesor de la hoja de vórtices y γ es el ritmo de deformación. Esto es si llamamos $\varepsilon = \sigma/L\gamma$ necesitamos que $\varepsilon << 1$ queremos también que el flujo de vorticidad debido a la compresión sea balanceado por la difusión viscosa, esto es $\sigma^2/\nu\gamma = O(1)$ adoptaremos una adimensionalización de la ecuación (1) con las unidades de las variables como estan dadas en la siguiente tabla:

variables	ω	u	v	x	y	t
unidades	$\sigma_o(\gamma/\nu)^{1/2}$	σ_o	σ_o	$\sigma_o/\varepsilon\gamma$	$(\nu/\gamma)^{1/2}$	$1/\varepsilon^2\gamma$

donde σ_o es un valor típico de la circulación por unidad de longitud de las condiciones iniciales.

Las ecuaciones (1), (2) y (3) adimensionalizadas de esta forma quedan como sigue:

$$\omega_{yy} + \left(\left(y - \frac{V}{\mu}\right)\omega\right)_y = \varepsilon(u\omega)_x + \varepsilon^2(\omega_\tau - \mu^2\omega_{xx}) \qquad (18)$$

donde

$$u = -\frac{\varepsilon\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-y')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2+\varepsilon^2\mu^2(y-y')^2}\,dx'dy' \qquad (19)$$

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-x')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2+\varepsilon^2\mu^2(y-y')^2}\,dx'dy' \qquad (20)$$

en (18)-(20)

$$\mu^2 = \frac{\nu\gamma}{\sigma_0^2}$$

es la viscosidad adimensional, en este análisis μ es considerada de orden uno.

Buscaremos soluciones de la ecuación (18) que representen hojas de vórtices cuya circulación por unidad de longitud

$$\sigma(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\omega(x,y,t)\,dy$$

sea finita. Nuestro objetivo es determinar la ecuación de evolución para $\sigma(x,t)$.

Para esto construiremos una solución de la ecuación (18) como sigue

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

con un valor preescrito de σ. Esto no puede ser hecho para cualquier σ, pero si para aquellas que cumplan una cierta ecuación de evolución

$$\sigma_t = F_\varepsilon(\sigma) = F_0(\sigma) + \varepsilon F_1(\sigma) + \varepsilon^2 F_2(\sigma) + \dots \qquad (21)$$

El primer paso es obtener desarrollos asintóticos de las integrales (19) y (20) en el límite cuando ε tiende a 0.

Supondremos que ω tiene una representación como una integral de Fourier

$$\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\omega}(\kappa,y,t)\,e^{i\kappa x}\,d\kappa$$

donde

$$w^{+}=\int_{0}^{\infty}\tilde{\omega}(\kappa,y,t)e^{i\kappa x}d\kappa \quad y \quad w^{-}=\int_{-\infty}^{0}\tilde{\omega}(\kappa,y,t)e^{i\kappa x}d\kappa$$

son analiticas en el plano superior e inferior respectivamente y ambas tienden a cero cuando Imx tiende a infinito.

La ecuación (19) puede ser escrita como

$$u=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\mu(y-y')(w^{+}(x',y',t)+w^{-}(x',y',t))}{(x'-x+i\varepsilon\mu|y-y'|)(x'-x-i\varepsilon\mu|y-y'|)}dx'\right\}dy'$$

la integral respecto a x' tiene polos en $x' = x\pm i\varepsilon\mu|y-y'|$ calculando los residuos en los polos obtenemos:

$$u=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sgn}(y-y')\left[w^{+}(x+i\varepsilon\mu|y-y'|,y',t)+\right.$$

$$\left.+w^{-}(x-i\varepsilon\mu|y-y'|,y',t)\right)dy'$$

Expandiendo el integrando en potencias de ε obtenemos

$$u=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\mathrm{Sgn}(y-y')[w^{+}(x,y',t)+w^{-}(x,y',t)]+i\varepsilon\mu(y-y')[w^{+}(x,y,t)-$$

$$-w^{-}(x,y',t)]_{x}-\frac{\varepsilon^{2}\mu^{2}}{2}\mathrm{Sgn}(y-y')(y-y')^{2}[w^{+}(x,y',t)+$$

$$+w^{-}(x,y',t)]_{xx}+\ldots\Big\}dy'$$

usando el hecho de que (ver apéndice 1)

$$w^{+}-w^{-}=i\,\hat{\omega}$$

obtenemos

$$u = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{ sgn(y-y')\omega(x,y';t) - \varepsilon\mu\,\hat{\omega}_x(x,y';t) - \qquad (22)$$

$$-\frac{\varepsilon^2\mu^2}{2} sgn(y-y')(y-y')^2\omega_{xx}(x,y';t) + \ldots\Big\} dy'$$

integrando de igual forma usando residuos y desarrollando en potencias de ε obtenemos para (20):

$$v = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{ \hat{\omega}(x,y';t) + \varepsilon\mu|y-y'|\omega_x(x,y';t) - \qquad (23)$$

$$-\frac{\varepsilon^2\mu^2}{2}(y-y')^2\hat{\omega}_{xx}(x,y',t) + \ldots\Big\} dy'$$

De las ecuaciones (18), (22) y (23) podemos determinar las ecuaciones de perturbación para las ω_j.

La ecuación para ω_o es:

$$\omega_{o\,yy} + \left(\left(y - \frac{v_o}{\mu}\right)\omega\right)_y = 0 \qquad (24)$$

donde

$$v_o = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\omega}_o(x,y',t)dy' \qquad (25)$$

de aquí vemos que v_o es independiente de y por lo tanto si a la ecuación (24) imponemos la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega_o dy = \sigma$$

obtenemos que

$$\omega_o = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{v_o}{\mu}\right)^2} \qquad (26)$$

con esta solución para ω_0 encontramos de (25) que

$$V_0 = \frac{1}{2}\hat{\sigma} \qquad (27)$$

Dado que la solución a orden uno ω_0 es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 \, dy = \sigma$$

deseamos resolver a órdenes más altos para ω_j con $j > 0$ con la siguiente condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_j \, dy = 0$$

para tener que la solución completa ω cumpla que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega \, dy = \sigma$$

esto puede ser logrado solo si cierta condición de compatibilidad sobre σ es satisfecha. La condición de compatibilidad se encuentra como sigue:

Tomando la ecuación (18) e integrando respecto a y de $-\infty$ a ∞, al buscar soluciones que $\omega \to 0$ si $|y| \to \infty$ obtenemos una ecuación exacta usando la definición de σ. Esta es:

$$\sigma_t + (F - \mu^2 \sigma_x)_x = 0$$

donde

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} u \omega \, dy$$

Para calcular F usamos el desarrollo propuesto para u dado en (22), obtenemos:

$$F = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\widehat{\omega}_x(x,y',t)\,\omega(x,y,t)\,dy\,dy' +$$
$$(29)$$
$$+\frac{\varepsilon\mu^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(y-y')(y-y')^2\omega_{xx}(x,y,t)\,\omega(x,y,t)\,dy\,dy'+\ldots$$

Comparando las ecucaciones (21) y (28) vemos que $f_\varepsilon(\sigma)$ debe satisfacer

$$f_\varepsilon(\sigma) + (F - \mu^2\sigma_x)_x = 0 \qquad (30)$$

las ecuaciones para las $f_j(\sigma)$ son obtenidas desarrollando (30) en potencias de ε. De (29) y (30) encontramos que la ecuación para $f_o(\sigma)$ es

$$f_o(\sigma) + (F_o - \mu^2\sigma_x)_x = 0 \qquad (31)$$

donde

$$F_o = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\widehat{\omega}_{ox}(x,y',t)\,\omega_o(x,y,t)\,dy'\,dy \qquad (32)$$

Siendo que ω_o es conocido en términos de σ, F_o puede ser calculada explicitamente en términos de σ, sustituyendo (26) en (32) e integrando (ver apéndice IIIa) obtenemos:

$$F_o = \frac{1}{4}\sigma\left(\frac{\widehat{\sigma}^2}{2} - \widehat{\sigma\widehat{\sigma}}\right)_x$$

descomponiendo σ en $\sigma = \sigma^+ + \sigma^-$ (ver apéndice 1) y usando el hecho de que $i\widehat{\sigma} = \sigma^+ - \sigma^-$ obtenemos

$$\sigma\widehat{\sigma} = -i\,(\sigma^{+2} - \sigma^{-2})$$

Usando el hecho de que por definición σ^{+} es la integral de 0 a ∞ y σ^{-} es la integral de $-\infty$ a 0 obtenemos:

$$i\,\widehat{\bar{\sigma}\hat{\sigma}} = -i\left(\sigma^{+2} - (-\sigma^{-2})\right) = -i\left(\sigma^{+2} + \sigma^{-2}\right)$$

por lo tanto

$$\widehat{\bar{\sigma}\hat{\sigma}} = -\left(\sigma^{+2} - \sigma^{-2}\right)$$

de donde obtenemos que

$$F_0 = \frac{1}{4}\sigma\left[-\frac{(\sigma^{+}+\sigma^{-})^2}{2} + (\sigma^{+2} - \sigma^{-2})\right]_x = \frac{1}{4}\sigma\left[\frac{1}{2}(\sigma^{+}+\sigma^{-})^2\right]_x =$$

$$= \frac{1}{4}\sigma\left[\frac{1}{2}\sigma^2\right]_x = \frac{1}{4}\sigma^2\sigma_x$$

sustituyendo este valor de F_0 en (31) encontramos $f_0(\sigma)$

$$f_0(\sigma) = \left(\left(\mu^2 - \frac{\sigma^2}{4}\right)\sigma_x\right)_x \qquad (32)$$

Desarrollando ω a orden ϵ y usando (29) encontramos que la ecuación para F_1 es

$$F_1 = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\left[\widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)\,\omega_1(x,y,t) + \widehat{\omega}_{1x}(x,y',\tau)\,\omega_0(x,y,\tau)\right]dy'\,dy \,+$$

$$+\frac{\mu^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(y-y')(y-y')^2\,\omega_{0xx}(x,y',t)\,\omega_0(x,y,t)\,dy'\,dy$$

para conocer $F_1(\sigma)$ necesitamos resolver la ecuación para ω_1, esta es

$$\omega_{1yy} + \left(\left(y - \frac{V_0}{\mu}\right)\omega_1\right)_y = \left(\frac{V_1}{\mu}\omega_0\right)_y + (u_0\omega_0)_x$$

con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_1 dy = 0$$

la velocidad v_1 esta dada por

$$V_1 = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |y-y'| \omega_{0x}(x,y',t)\, dy'$$

resolviendo la ecuación para ω_1 y sustituyendolo junto con el de ω_0 en (33) encontramos que (ver apendice IIIb)

$$F_1 = -\mu\left(A(\sigma^2\widehat{\sigma_x})_x + B\sigma(\widehat{\sigma\sigma_x})_x - C\sigma\sigma_x\widehat{\sigma_x}\right)_x \quad (34)$$

donde A, B y C son números positivos de aquí y de (30) obtenemos que

$$f_1(\sigma) = \mu\left(A(\sigma^2\widehat{\sigma_x})_x + B\sigma(\widehat{\sigma\sigma_x})_x - C\sigma\sigma_x\widehat{\sigma_x}\right)_x \quad (35)$$

sustituyendo las expresiones para $f_0(\sigma)$ y $f_1(\sigma)$ dadas por (32) y (34) en (21) obtenemos la ecuación de evolución a orden ε para σ, esta es

$$\sigma_t = \left(\left(\mu^2 - \frac{\sigma^2}{4}\right)\sigma_x\right)_x + \varepsilon\mu\left(A(\sigma^2\widehat{\sigma_x})_x + B\sigma(\widehat{\sigma\sigma_x})_x - C\sigma\sigma_x\widehat{\sigma_x}\right)_x \quad (35)$$

Cuando $\varepsilon = 0$, es decir longitud de onda infinita la ecuación (35) se reduce a la versión adimensional de la ecuación no lineal de difusión (16). Los nuevos términos incluyen derivadas de tercer orden y una transformada de Hilbert que como veremos en la siguiente sección proveen un término estabilizante.

ESTABILIDAD LINEAL

Estudiaremos la estabilidad lineal de la hoja de vortices con circulación σ_o por unidad de longitud.Las soluciones uniformes estacionarias de la ecuación (35) son σ = cte. Por lo que la solución adimensional a esta ecuación correspondiente a esta hoja de vortices es $\sigma = 1$. Linealizando la ecuación (35) para $s = \sigma-1$ obtenemos :

$$S_t = (\mu^2 - \tfrac{1}{4}) S_{xx} + \varepsilon \mu r \hat{S}_{xxx} \qquad (36)$$

donde r = A+B. La ecuación (36) tiene soluciones periodicas

$$s = e^{\alpha t} \cos(kx)$$

donde la relación de dispersión es

$$\alpha = (1/4 - \mu^2) k^2 - \varepsilon \mu r |k|^3 \qquad (37)$$

de donde vemos que existen modos inestables si y solo si

$$\mu < 1/2.$$

Al escribir μ como su valor $(\nu\gamma)^{1/2}/\sigma_o$ vemos que este criterio de inestabilidad es el mismo que $|\sigma| > 2(\nu\gamma)^{1/2}$ que fue dado en la sección anterior.

Si $\mu < 1/2$ y $\varepsilon = 0$ vemos de (37) que $\alpha \to \infty$ cuando $|k| \to \infty$ esta es la falla de la teoria de la sección anterior. Si $\mu < 1/2$ y ε es diferente de cero, existe solo una banda finita de números de onda inestable. Para estudiar en la vecindad de $\mu=1/2$ tomamos

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon r}{2} m$$

donde $m > 0$ se de orden uno. Sustituyendo en (37) tenemos

$$\alpha = \frac{\varepsilon r}{2}(m k^2 - |k|^3) + O(\varepsilon^2)$$

la siguiente figura muestra graficas de la relación de dispersión para varios valores de m

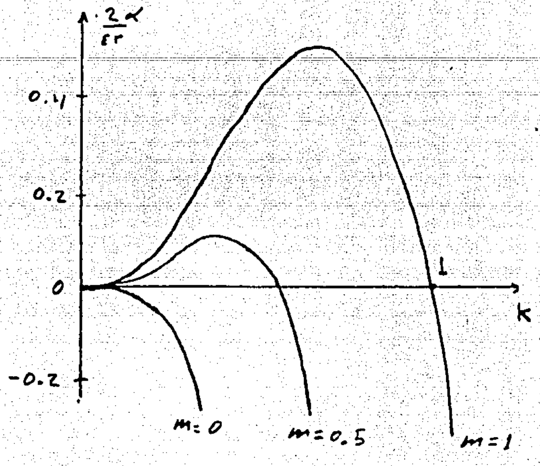


Figura 6

En el caso m > 0 la banda de números de onda inestables es $|k| < m + O(\varepsilon)$. El número de onda de máxima inestabilidad es $k = (2/3)m$. Resulta pues que la solución uniforme es inestable para ondas largas y estables para ondas cortas.

Una pregunta por hacerse es desde luego si las soluciones constantes inestables para $|k| < m$ pueden estabilizarse a soluciones de amplitud finita para algun número de onda k. Si este fuera el caso tendriamos la posibilidad de que el colapso parara y se tuviera un arreglo de vortices secundarios estacionarios y de amplitud finita. En la siguiente sección estudiaremos el caso de amplitud finita.

EFECTOS DE AMPLITUD FINITA

Para estudiar ondas de amplitud finita tomamos :

$$\sigma(x,t) = 1 + \varepsilon r s(x,t) \qquad (38)$$

sustituyendo en (35) obtenemos

$$s_t = -\frac{\varepsilon r}{2}\left((m+s)s_x - \hat{s}_{xx}\right)_x \qquad (39)$$

el escalamiento (38) es tomado para que en (39) el término no lineal y el lineal sean del mismo orden.

Soluciones estacionarias de (39) que sean acotadas cuando $|x| \to \infty$ satisfacen

$$\hat{s}_{xx} = (m+s)s_x \qquad (40)$$

esta ecuación es similar a la de Benjamin [2] y se resuelve de la misma forma. Buscamos soluciones con media cero, por lo tanto tomamos:

$$s = \zeta - \alpha$$

donde α es la media de $\zeta(x)$. Sustituyendo esta expresión para s en (40) obtenemos :

$$\hat{\zeta}_{xx} = (m - \alpha + \zeta)\zeta_x$$

integrando una vez la ecuación anterior y dado que queremos soluciones acotadas tenemos :

$$\hat{\zeta}_x = (m-\alpha)\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 \qquad (41)$$

Buscamos soluciones ζ de periodo $2\pi/K$ en x. Espresando a ζ por su serie de Fourier

$$\zeta = \sum_{-\infty}^{\infty} A_N e^{ikNx}$$

Derivando obtenemos: (ver apéndice II)

$$\widehat{\zeta}_x = k \sum_{-\infty}^{\infty} |N| A_N e^{ikNx}$$

tomando

$$\zeta^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} B_N e^{ikNx}$$

donde

$$B_N = \sum_{M=-\infty}^{\infty} A_M A_{M-N}$$

tenemos que

$$\widehat{\zeta}_x = (m-\alpha)\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2$$

igualando los coeficientes de Fourier de cada término, obtenemos

$$k|N| A_N = (m-\alpha) A_N + \frac{1}{2} \sum_{M=-\infty}^{\infty} A_M A_{M-N}$$

de donde

$$(-m+\alpha+k|N|) A_N = \frac{1}{2} \sum_{M=-\infty}^{\infty} A_M A_{M-N}$$

buscaremos soluciones particulares tomando A_n de la forma

$$A_N = \Delta e^{-P|N|}$$

donde Δ y P son números reales y $P > 0$ para justificar los pasos formales y que la serie de $\zeta(x)$ converja

$$\sum_{M=-\infty}^{\infty} A_M A_{M-N} = \Delta^2 \sum_{M=-\infty}^{\infty} e^{-P(|M|-|M-N|)} =$$

$$= \Delta^2 e^{-P|N|} \sum_{M=-\infty}^{\infty} e^{-P(|M|-|N|+|M-N|)} =$$

$$= \Delta^2 e^{-P|N|} \left\{ |N| + 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-2Pl} \right\} =$$

$$= \Delta^2 e^{-P|N|} \left\{ |N| + \coth P \right\}$$

por lo tanto sustituyendo este resultado, y tambien sustituyendo (43) en (42) obtenemos

$$(-m + \alpha + K|N|) = \tfrac{1}{2} \Delta \left\{ |N| + \coth P \right\}$$

para todo número n entero. Tomando $\Delta = 2k$ obtenemos

$$(-m + \alpha + K|N|) = K \left\{ |N| + \coth P \right\}$$

para todo número N entero. Por lo tanto

$$\coth P = -m + \alpha$$

Δ es la media de ζ por lo tanto tomamos $\alpha = 2K$ de donde obtenemos

$$\tanh P = \frac{1}{2K - m}$$

Sustituyendo $A_N = \Delta e^{-P|N|}$ en la serie de Fourier de ζ obtenemos

$$\zeta = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta e^{-P|N|} e^{ikNx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta e^{-(P|N|-ikNx)} =$$

$$= \Delta \, Re\left\{ 1 + 2\sum_{N=1}^{\infty} e^{-(P+ikx)N} \right\} = \Delta \, Re\left\{ \coth \tfrac{1}{2}(P+ikx) \right\}$$

de donde obtenemos

$$\zeta(x) = \frac{\frac{1}{2}\Delta \, \mathrm{Senh}\, P}{\mathrm{Cosh}^2(\frac{1}{2}P) - \mathrm{Cos}^2(\frac{1}{2}kx)}$$

sustituyendo en esta expreción $\Delta = 2K$ y $P = 1/(2K-m)$ obtenemos

$$\zeta(x) = \frac{2K^2}{2K-m-((2K-m)^2-K^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Cos}\,Kx}$$

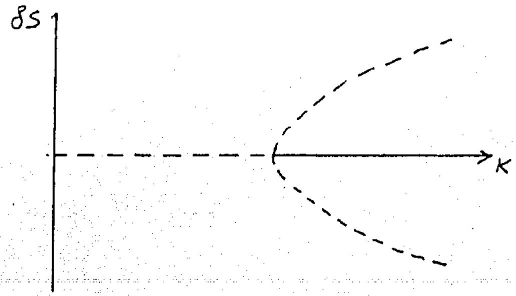
de donde

$$S(x) = \zeta(x) - \alpha = \frac{2K^2}{2K-m-((2K-m)^2-K^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Cos}\,Kx} - 2K$$

donde $k > \max(m,0)$. La variación de $S(x)$ sobre un periodo es

$$\delta S = \max_{0 \le x \le \frac{2\pi}{K}} S(x) - \min_{0 \le x \le \frac{2\pi}{K}} S(x) = 4\left((2K-m)^2-K^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

la parábola de la siguiente figura muestra δS como una función de K para $m > 0$ fija .



Podemos ver la gráfica anterior como un diagrama de bifurcación. La rama de soluciones periódicas estacionarias dadas por(44) bifurcan a la solución cero en $m = k$. De la teoria de estabilidad lineal vimos que la solución cero es inestable para $0 < k < m$ y estable para $k > m$. Esto significa que la bifurcación en $k = m$ es subcritica con la rama de soluciones periodicas estacionarias inestable en algún intervalo de k que comienza en m.

EXPLOSION EN TIEMPO FINITO

En esta sección probaremos bajo la hipótesis de existencia de solucione para condiciones iniciales suficientemente lisas que es posible que la vorticidad σ se vuelva infinita en tiempo infinito.

Reescalando el tiempo en la ecuación (39) tenemos

$$\sigma_t = \left(\hat{\sigma}_x - \left(m\sigma + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\right)_{xx} \quad 0 \le x \le 2\pi ;\ t \geq 0$$
$$\sigma(x,0) = f(x) \tag{I}$$

tomando el desarrollo de Fourier de la forma

$$\sigma(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(t) e^{inx}$$

tenemos que las σ_n satisfacen

$$\dot{\sigma}_n = (-|n|^3 + mn^2)\sigma_n + \tfrac{1}{2}n^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_p \sigma_{n-p}$$
$$\sigma_n(0) = f_n \tag{II}$$

donde f_n son los coeficientes de Fourier de f.

Supondremos ahora que para

$$|f_n| \le c \left(\frac{1}{1+|n|}\right)^s$$

cuando s es grande (II) tiene una solución local.

Veremos que es posible construir condiciones iniciales para las cuales esa solución se vuelve infinita en tiempo finito.

Para probare este resultado observamos de (II) lo siguiente:

1) Si f_n es real también $\sigma_n(t)$ lo es, por lo tanto $\sigma_n = \sigma_{-n}$. Esto se sigue del hecho de que las ecuaciones tienen coeficientes reales.

2) Si $f_n >= 0$ entonces $\sigma_n(t) >= 0$ para toda n.

Para probar esto tomamos

$$J=\{r / \sigma_r(t)<0 \text{ para alguna } t\}$$

para cada r que pertenece a J hay t_r tal que t_r es el primer tiempo donde $\sigma_r(t_r) = 0$. Supondremos que J es un conjunto finito (para ver el caso general ver Bob Palais (3)). Se toma r_o tal que:

$$t_{r_0} = \min_{r\in J} (t_r)$$

de donde tenemos entonces que

$$\dot{\sigma}_{r_0}(t_{r_0}) \leq 0$$

Por otra parte

$$\dot{\sigma}_{r_0}(t_{r_0}) = \frac{1}{2} r_0^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_p(t_{r_0})\sigma_{r_0-p}(t_{r_0}) > 0$$

ya que todos lo otros coeficientes son positivos. Esto es una contradicción y de aquí se sigue que $\sigma_n(t) >= 0$ para todo el tiempo que la solución existe.

Con esta observación tenemos que:

$$\frac{1}{2} n^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sigma_p \sigma_{n-p} \geqslant \frac{1}{2} n^2 \sum \sigma_p \sigma_{n-p}$$

donde la última suma corre sobre un subconjunto de índices. De aquí se sigue llamando

$$\alpha_n = -|n|^3 + m\,n^2$$

y escogiendo

$$f_n = \begin{cases} a_1 & |n| = 1 \\ a_2 & |n| = 2 \\ 0 & |n| \neq 1,\ |n| \neq 2 \end{cases}$$

que σ_1 y σ_2 satisfacen

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &\geqslant \alpha_1 \sigma_1 + \tfrac{1}{2}\sigma_1 \sigma_2 \\ \dot{\sigma}_2 &\geqslant \alpha_2 \sigma_2 + 2\sigma_1^2 \end{aligned} \qquad (III)$$

$\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$ si $1 < m < 2$. Mostraremos ahora que las soluciones del sistema (III) se vuelven infinitas en tiempo finito.

Si

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha_1 y + \tfrac{1}{2} y w \\ \dot{w} &= \alpha_2 w + 2 y^2 \end{aligned}$$

tenemos que

$$\sigma_1 \geqslant y \qquad \sigma_2 \geqslant w \qquad \text{si} \qquad \sigma_1(0) \geqslant y(0) \qquad \sigma_2(0) \geqslant w(0)$$

En efecto si llamamos $\Omega = 2\omega$ tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha_1 y + y\Omega \\ \dot{\Omega} &= \alpha_2 y + y^2 \end{aligned}$$

Si $y(0) >= \Omega(0) > 0$ entonces $y(t) >= \Omega(t)$. Para esto basta probar que $\dot{y}(t) >= \dot{\Omega}(t)$ sobre la recta $y = \Omega > 0$.

Sobre la recta $y = \Omega > 0$

$$\dot{y} = \alpha_2 y + y\Omega = \alpha_1 \Omega + y^2 \geq \alpha_1 \Omega + y^2 = \dot{\Omega}$$

ya que $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$.

Finalmente

$$\dot{\Omega} = \alpha_2 \Omega + y^2 \geq \alpha_2 \Omega + \Omega^2$$

las soluciones de esta desigualdad van a infinito cuando

$$t \to -\frac{1}{\alpha_2} \log \frac{\Omega(0)}{\Omega(0) + \alpha_2}$$

si $\Omega(0) > -\alpha_2$.

Esto muestra que la solución que corresponde a la condición inicial

$$\sigma(x,0) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$$

va a infinito en tiempo finito si $a_1 > -\alpha_2$.

Es importante notar que el término $|n|^3$ que viene de $\hat{\sigma}_{xxx}$ no juega ningún papel para estabilizar la solución.

Apéndice I

En esto apéndice se deducen las ecuaciones (5), (6), (7) y (8)

$$\omega(x,y,t) = \sigma(x,t)\,\delta(y-\eta(x,t))$$

sustituyendo en

$$\omega_t + (u\omega)_x + ((v-\gamma y)\omega)_y = 0$$

obtenemos

$$\sigma_t\delta - \sigma\delta'\eta_t + (u\sigma)_x\delta - u\sigma\delta'\eta_x + (v-\gamma\eta)\sigma\delta' = 0$$

de donde

$$[\sigma_t + (u\sigma)_x]\,\delta - [\sigma\eta_t + \sigma u\eta_x - \sigma(v-\gamma\eta)]\,\delta' = 0$$

Si $\quad \alpha\delta + \beta\delta' = 0 \quad$ entonces $\quad \alpha = 0$ y $\beta = 0$

Prueba

Sean φ_1 y φ_2 funciones de prueba tales que

$$\varphi_1(0) = 1 \qquad \varphi_1'(0) = 0$$

$$\varphi_2(0) = 0 \qquad \varphi_2'(0) = -1$$

entonces

$$0 = \langle \alpha\delta + \beta\delta', \varphi_1 \rangle = \alpha\varphi_1(0) - \beta\varphi_1'(0) = \alpha$$

$$0 = \langle \alpha\delta + \beta\delta', \varphi_2 \rangle = \alpha\varphi_2(0) - \beta\varphi_2'(0) = \beta$$

de donde

$$\alpha=0 \quad y \quad \beta=0.$$

Por lo tanto

$$\sigma_t+(u\sigma)_x=0 \tag{5}$$

$$\eta_t+u\eta_x-v+\gamma\eta=0. \tag{6}$$

Que son las ecuaciones (5) y (6)

Sustituyendo

$$\omega=\sigma(x,t)\delta(y-\eta(x,t))$$

en

$$u=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-y')\,\omega(x',y',t)}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,dx'dy'$$

obtenemos

$$u=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-y')\,\delta(y'-\eta(x',t))}{(x-x')^2+(y-y')^2}\,\sigma(x',t)\,dx'dy'=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-\eta(x',t))\,\sigma(x',t))}{(x-x')^2+(y-\eta(x',t))^2}\,dx'$$

evaluando en $y=\eta(x,t)$ obtenemos

$$u=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta(x,t)-\eta(x',t)}{(x-x')^2+(\eta(x,t)-\eta(x',t))^2}\,\sigma(x',t)\,dx' \tag{7}$$

donde la última integral en general tiene sentido solo en el sentido del valor principal de Cauchy.

De igual forma se obtiene

$$v = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-x'}{(x-x')^2+(\eta(x,t)-\eta(x',t))^2}\,\sigma(x',t)\,dx'$$

donde nuevamente ésta integral tiene sentido en general solo en el sentido del valor principal de Cauchy.

Apéndice II

En este apéndice se estudian las propiedades más importantes de la transformada de Hilbert.

La transformada de Hilbert de una función $F(x)$ se define como

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x')}{x-x'}\,dx'$$

donde la P denota el valor principal de Cauchy en los límites de integración y en la discontinuidad $x'=x$.

Ejemplos:

1) Si $F(x)=c$ (constante)

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{x-x'}\,dx' = 0$$

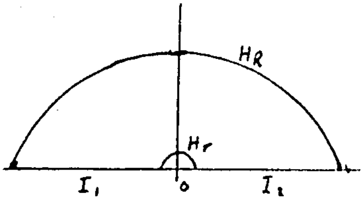
2) Si $F_1(x) = \cos x$ y $F_2(x) = \operatorname{Sen} x$

$$\hat{F}_1(x) + i\hat{F}_2(x) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x' + i \operatorname{Sen} x'}{x-x'}\,dx' = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix'}}{x-x'}\,dx' =$$

$$z = x'-x$$

$$= -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(z+x)}}{z}\,dz = -e^{ix}\,\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

la última integral puede ser evaluada usando residuos



$$\int_{H_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{H_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{I_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{I_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

la primera integral tiende a cero cuando $R \to \infty$ por el lema de Jordan.

$$\int_{H_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\int_{\pi}^{0} e^{ir(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}\,d\theta = -i\int_{0}^{\pi} e^{-r\,\mathrm{sen}\,\theta}\, e^{ir\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= -i\pi$$

ya que el último integrando tiende uniformemente a uno.

De donde

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\pi .$$

Por lo tanto

$$\hat{f}_1(x) + i\,\hat{f}_2(x) = -i e^{ix}$$

igualando las partes reales y las partes imaginarias obtenemos

$$\hat{f}_1(x) = \mathrm{Sen}\,x \qquad y \qquad \hat{f}_2(x) = -\mathrm{Cos}\,x$$

3)

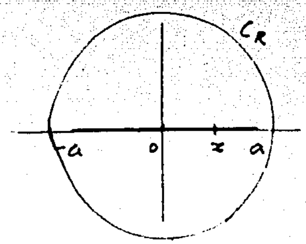
$$f(x) = \begin{cases} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad |x| \le a \\ 0 & \text{si} \quad |x| > a \end{cases}$$

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{\pi}\, P\int_{-a}^{a} \frac{(a^2 - x'^2)^{\frac{1}{2}}}{x - x'}\,dx'$$

Si $|x| < a$

$$P\int_{-a}^{a} \frac{(a^2-x'^2)^{\frac{1}{2}}}{x-x'}\,dx' = \frac{1}{2}\int_{C_R} \frac{(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}}{x-z}\,dz$$

donde C_R se muestra en la siguiente figura



donde tenemos la raiz cuadrada dada por el corte rama entre $-a$ y a. Si $z \in C_R$

$$\frac{1}{x-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{x}{z}\right) + O\left(\frac{1}{R^3}\right)$$

$$(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}} = (-z^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = i z\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}\right) + O\left(\frac{1}{R^3}\right)$$

de donde

$$\frac{(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}}{x-z} = -i\left\{1+\frac{x}{z}-\frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}\right\} + O\left(\frac{1}{R^3}\right)$$

de donde obtenemos que

$$\int_{C_R} \frac{(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}}{x-z}\,dz = 2\pi x + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

cuando $R \to \infty$ obtenemos

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-a}^{a} \frac{(a^2-x'^2)^{\frac{1}{2}}}{x-x'} dx' = x$$

Si $|x|>a$ hay que tomar en cuenta el residuo en el polo x el cual es

$$i(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad x>a$$

$$-i(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad x<-a$$

de donde obtenemos

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-a}^{a} \frac{(a^2-x'^2)^{\frac{1}{2}}}{x-x'} dx' = \begin{cases} x-(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} & \text{si } x>a \\ x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} & \text{si } x<-a \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} x-(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} & \text{si } x>a \\ x & \text{si } |x| \le a \\ x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} & \text{si } x<-a \end{cases}.$$

Propiedades.

1.- $$\widehat{F'} = \hat{F}'$$

Prueba

$$\hat{f}' = \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')}{x-x'}dx' = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} - \frac{f(x')}{(x-x')^2}dx'$$

integrando por partes

$$\hat{f}' = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'(x')}{x-x'}dx' = \hat{f'}$$

2a.- Si f puede ser representada por una integral de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

y llamamos

$$f^+ = \int_0^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \quad y \quad f^- = \int_{-\infty}^{0} F(k)e^{ikx}dk$$

entonces $\hat{f} = -i(f^+ - f^-)$.

Prueba

$$\hat{f} = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-x'}\left\{\int_0^{\infty}F(k)e^{ikx'}dk + \int_{-\infty}^{0}F(k)e^{ikx'}dk\right\}dx'$$

calculando las integrales obtenemos

$$\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{F(k)e^{ikx'}}{x-x'}dk\,dx' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F(k)\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx'}}{x-x'}dx'dk =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(k)\, P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(z+x)}}{z}\,dz\,dk = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(k)e^{ikx}\, P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikz}}{z}\,dz =$$

$z = x' - x$

$$= -i\int_0^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

la ultima integral respecto a z fue calculada en el ejemplo (2) de este apéndice. De igual forma se obtiene

$$\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{F(k)e^{ikx'}}{x-x'}\,dk\,dx' = i\int_{-\infty}^{0} F(k)e^{ikx}dk$$

de donde obtenemos

$$\hat{F} = -i\left\{\int_0^{\infty} F(k)e^{ikx}dk - \int_{-\infty}^{0} F(k)e^{ikx}dk\right\}$$

por lo tanto $\quad \hat{F} = -i(F^+ - F^-)$

2b.- Si F es periodica de periodo $2\pi/k$

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{iknx}$$

y llamamos $\quad F^+ = \sum_{1}^{\infty} F_n e^{iknx} \quad$ y $\quad F^- = \sum_{-\infty}^{-1} F_n e^{iknx}$

entonces $\quad \hat{F} = -i(F^+ - F^-)$

Prueba

$$\hat{F} = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-x'}\left\{\sum_{1}^{\infty} F_n e^{iknx'} + \sum_{-\infty}^{-1} F_n e^{iknx'}\right\}dx'$$

(la transformada de Hilbert de F_0 es cero)

$$\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-x'} \sum_{1}^{\infty} F_n e^{ikn x'} dx' = \sum_{1}^{\infty} F_n \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iknx'}}{x-x'} dx' =$$

$$= -\sum_{1}^{\infty} F_n \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikn(z+x)}}{z} dz = -\sum_{1}^{\infty} F_n e^{iknx} \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iknz}}{z} dz =$$

$$= -i \sum_{1}^{\infty} F_n e^{iknx}.$$

De igual forma se obtiene

$$\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-x'} \sum_{-\infty}^{-1} F_n e^{iknx'} dx' = i \sum_{-\infty}^{-1} F_n e^{iknx}$$

de donde
$$\hat{F} = -i(F^+ - F^-)$$

3.- $$\hat{\hat{F}} = -F$$

Prueba

descomponiendo F en $F = F^+ + F^-$

(como transformada o como serie de Fourier segun el caso)

$$\hat{F} = -i(F^+ + F^-)$$

aplicando la transformada de Hilbert por separado a F^+ y F^- como en la propiedad 2 obtenemos

$$\hat{\hat{F}} = -i(-iF^+ - iF^-) = -(F^+ + F^-) = -F$$

4.- Si F se de periodo $\frac{2\pi}{k}$ y $F = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{iknx}$

entonces $\hat{F}_x = k \sum_{-\infty}^{\infty} |n| F_n e^{iknx}$

Prueba
$$\hat{F} = -i(F^+ - F^-) = -i \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) F_n e^{iknx}$$

Si la ultima serie y la serie de las derivadas término a termino son uniformemente convergentes tenemos

$$\hat{F}_x = -i \sum_{-\infty}^{\infty} ikn \operatorname{sgn}(n) F_n e^{iknx} = k \sum_{-\infty}^{\infty} |n| F_n e^{iknx}$$

5.- Si F es de periodo $\frac{2\pi}{k}$
$$\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \hat{F} F_x \, dx = -\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \hat{F}_x F \, dx$$

Prueba

integración por partes y la contribución de los límites de integración se cancelan por la periodicidad.

Apéndice III

a)
$$F_o = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\,\widehat{w}_{o_x}(x,y',t)\,w_o(x,y,t)\,dy'\,dy$$

donde $w_o = \frac{\sigma(x,t)}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\widehat{\sigma}(x,t)}{2\mu}\right)^2}$

$$F_o = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{w}_{o_x}(x,y',t)\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\,w_o(x,y,t)\,dy\,dy'$$

$z = y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\,w_o(x,y,t)\,dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\,e^{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(z+\frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}-y'\right)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}-y'\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \sigma\left(\frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}-y'\right)$$

de donde $F_o = \frac{\mu}{2}\,\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}-y'\right)\widehat{w}_{o_x}(x,y',t)\,dy'$

$$F_o = \frac{\mu}{2}\,\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}-y'\right)\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}\,(x-x')}\,e^{-\frac{1}{2}\left(y'-\frac{\widehat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\right)^2}dx'\right\}dy'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{\sigma}(x,t)}{2\mu}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}\,(x-x')}\,e^{-\frac{1}{2}\left(y'-\frac{\widehat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\right)^2}dx'\right\}dy' =$$

$$= \frac{\widehat{\sigma}(x,t)}{2\mu}\,\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}\,(x-x')}\,e^{-\frac{1}{2}\left(y'-\frac{\widehat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\right)^2}dy'\right\}dx' =$$

$$= \frac{\widehat{\sigma}(x,t)}{2\mu}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(x',t)}{x-x'}\,dx'\right\} = \frac{\widehat{\sigma}(x,t)}{2\mu}\,\frac{d}{dx}\left\{\widehat{\sigma}(x,t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\widehat{\sigma}^2}{2}\right)_x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(-y')\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}\,(x-x')}\,e^{-\frac{1}{2}\left(y'-\frac{\hat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\right)^2}dx'\right\}dy' =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}\,(x-x')}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(-y')\,e^{-\frac{1}{2}\left(y'-\frac{\hat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\right)^2}dy'\right\}dx' =$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}\,(x-x')}\left\{\frac{\hat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\sqrt{2\pi}\right\}dx' = -\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma(x',t)\,\hat{\sigma}(x',t)}{x-x'}dx' =$$

$$= -\frac{1}{2\mu}\left(\widehat{\sigma\hat{\sigma}}\right)_x$$

por lo tanto

$$F_0 = \frac{\mu}{2}\sigma\left(\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)_x - \frac{1}{2\mu}\left(\widehat{\sigma\hat{\sigma}}\right)_x\right) = \frac{1}{4}\sigma\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{2} - \widehat{\sigma\hat{\sigma}}\right)_x$$

b)

$$F_1 = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\left[\hat{w}_{0x}(x,y',t)\,w_1(x,y,t) + \hat{w}_{1x}(x,y',t)\,w_0(x,y,t)\right]dy'\,dy\ +$$

$$+\ \frac{\mu^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Sgn}(y-y')(y-y')^2\,w_{0xx}(x,y',t)\,w_0(x,y,t)\,dy'\,dy$$

Para calcular F_1 necesitamos conocer w_1, la ecuación para w_1 es

$$w_{1yy} + \left(\left(y-\frac{V_0}{\mu}\right)w_1\right)_y = \left(\frac{V_1}{\mu}w_0\right)_y + (u_0 w_0)_x \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{\infty} w_1\,dy = 0$$

donde

$$V_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{w}_1(x,y',t)\,dy' + \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|y-y'|\,w_{0x}(x,y',t)\,dy'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\omega}_1(x,y',t) = 0$$

de donde
$$v_1 = \frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |y-y'|\,\omega_{0x}(x,y',t)\,dy'$$

$$v_0 = \frac{\hat{\sigma}}{2}$$

y
$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_0 \omega_0)_x\,dy = 0$$

por lo tanto este último término no entra en el análisis. Integrando una vez la ecuación para ω_1 esta puede ser escrita como

$$\omega_{1y} + \left(y - \frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)\omega_1 = \frac{v_1}{\mu}\omega_0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1\,dy = 0$$

$$\left(e^{\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2}\omega_1\right)_y = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{v_1}{\mu}$$

$$\frac{v_1}{\mu} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |y-y'|\,\omega_{0x}(x,y',t)\,dy' = \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |y-y'|\,\omega_0(x,y',t)\,dy' =$$

$$= \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |y-y'|\,e^{-\frac{1}{2}\left(y'-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2}dy' \underset{\lambda = y'-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}}{=} \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\lambda - \left(y - \frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)\right| e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}\,d\lambda =$$

$$= \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)\left\{\int_{-\infty}^{y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}d\lambda - \int_{y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}d\lambda\right\} = \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)\int_{-\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)}^{y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}d\lambda$$

por lo tanto

$$\frac{V_1}{\mu} = \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\;g\left(y - \frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)$$

donde

$$g(\xi) = \xi\int_{-\xi}^{\xi} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}\,d\lambda$$

$$w_1 = e^{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2}\left\{\int_{-\infty}^{y}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{V_1}{\mu}(x,\xi,t)\,d\xi + C_1\right\}$$

donde

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2}\int_{-\infty}^{\lambda} g(\xi)\,d\xi\,d\lambda$$

se escoge así para que

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1\,dy = 0\,.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\,\widehat{w}_{0_x}(x,y',t)\,w_1(x,y,t)\,dy'\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\,e^{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2}\,\widehat{w}_{0_x}(x,y',t)\;e^{\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} w_1(x,y,t)\,dy'\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{w}_{0_x}(x,y',t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(y-y')\,e^{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2}\left(e^{\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} w_1(x,y,t)\right)dy\right\}dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{w}_{0_x}(x,y',t)\left\{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} + \left(y'-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)\int_{-\infty}^{y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\right]\left(e^{\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} w_1(x,y,t)\right)_y dy\right\}dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{w}_{0_x}(x,y',t)\left\{\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} + \left(y'-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)\int_{-\infty}^{y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\right]\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,g\left(y-\frac{\hat{\sigma}}{2\mu}\right)dy\right\}dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)\left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + (y' - \tfrac{\hat{\sigma}}{2\mu}) \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \right] \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} g(\xi) \right) d\xi \right\} dy' =$$

$$\xi = y - \frac{\hat{\sigma}}{2\mu}$$

$$= \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)\left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + (y - \tfrac{\hat{\sigma}}{2\mu}) \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \right] g(\xi)\, d\xi \right\} dy' =$$

$$= K_1 \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)\, dy' + K_2 \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)(y' - \tfrac{\hat{\sigma}}{2\mu})\, dy' =$$

$$= K_1 \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)\, dy'$$

ya que $$\int_{-\infty} \widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)(y' - \tfrac{\hat{\sigma}}{2\mu})\, dy' = 0$$

y $$K_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} g(\xi)\, d\xi$$

$$K_1 \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \int_{-\infty} \widehat{\omega}_{0x}(x,y',t)\, dy' = K_1 \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}(x-x')} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\hat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\right)^2} dx'\, dy' =$$

$$= K_1 \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty} \frac{\sigma(x',t)}{\sqrt{2\pi}(x-x')} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\hat{\sigma}(x',t)}{2\mu}\right)^2} dy'\, dx' =$$

$$= K_1 \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{\infty} \frac{\sigma(x',t)}{x - x'}\, dx' = \frac{K_1}{4\pi} \sigma \sigma_x \widehat{\sigma}_x .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - y') \widehat{\omega}_{1x}(x,y',t)\, \omega_0(x,y,t)\, dy'\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\omega}_{1x}(x,y',t) \int_{-\infty}^{\infty} (y-y') \omega_0(x,y,t)\, dy\, dy'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y-y') \omega_0(x,y,t)\, dy = \sigma\left(\frac{\widehat{\sigma}}{2\mu} - y'\right) \quad \text{(Apendice III a)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sigma\widehat{\sigma}}{2\mu} - y'\sigma\right) \widehat{\omega}_{1x}(x,y',t)\, dy' = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y' \widehat{\omega}_{1x}(x,y',t)\, dy'$$

ya que $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_1\, dy = 0$

$$-\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y' \widehat{\omega}_{1x}(x,y',t)\, dy' = -\sigma \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} y' \widehat{\omega}_1(x,y',t)\, dy' =$$

$$= -\sigma \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} y' \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1(x',y',t)}{x-x'}\, dx'\, dy' = -\sigma \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-x'} \int_{-\infty}^{\infty} y' \omega_1(x',y',t)\, dy'\, dx'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y' \omega_1(x',y',t)\, dy' = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu} + \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) \omega_1(x',y',t)\, dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) \omega_1(x',y',t)\, dy' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} \left\{ \int_{-\infty}^{y'} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} g\left(z - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) dz + c_1 \right\} dy' =$$

$$\xi = z - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} \left\{ \int_{-\infty}^{y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} g(\xi)\, d\xi + c_1 \right\} dy' =$$

$$\lambda = y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} g(\xi)\, d\xi + c_1 \right\} d\lambda =$$

$$= \frac{\sigma \sigma_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} g(\xi) d\xi + c_1 \right\} d\lambda = \frac{K_3}{4\pi} \sigma \sigma_x$$

donde

$$K_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} g(\xi) d\xi + c_1 \right\} d\lambda$$

por lo tanto

$$-\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y' \widehat{\omega}_{1x}(x, y', t) dy' = -\sigma \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - x'} \int_{-\infty}^{\infty} y' \omega_1(x', y', t) dy' dx' =$$

$$= -\sigma \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_3}{4\pi} \frac{\sigma(x', t) \sigma_x(x', t)}{x - x'} dx' = -\frac{K_3}{4\pi} \sigma \widehat{\sigma \sigma_x}$$

de donde obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - y') \widehat{\omega}_{1x}(x, y', t) \omega_0(x, y, t) dy' dy = -\frac{K_3}{4\pi} \sigma \widehat{\sigma \sigma_x}$$

Finalmente calcularemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(y - y')(y - y')^2 \omega_{0xx}(x, y', t) \omega_0(x, y, t) dy' dy$$

$$\omega_{0_{xx}} = e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} \left\{ \frac{\sigma_{xx}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma_x \widehat{\sigma}_x}{\mu \sqrt{2\pi}} \left(y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\widehat{\sigma}_{xx}}{2\mu} \left(y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) + \left(\frac{\widehat{\sigma}_x}{2\mu}\right)^2 \left(-1 + \left(y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2\right) \right] \right\}$$

por lo tanto, habrá tres tipos de integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(y - y')(y - y')^2 \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \left(y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right) \\ \left(y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2 \end{array} \right\} e^{-\frac{1}{2}\left(y' - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\widehat{\sigma}}{2\mu}\right)^2} dy' dy =$$

sustituyendo

$$\lambda = y' - \frac{\hat{\sigma}}{2\mu} \quad y \quad \eta = y - \frac{\hat{\sigma}}{2\mu}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sgn}(\eta-\lambda)(\eta-\lambda)^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{Bmatrix} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\lambda\, d\eta$$

los integrandos con 1 y con λ^2 son impares, por lo tanto, la única integral diferente de cero es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sgn}(\eta-\lambda)(\eta-\lambda)^2 \lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\lambda\, d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\int_{-\infty}^{\lambda} (\eta-\lambda)^2 e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta + \int_{\lambda}^{\infty} (\eta-\lambda)^2 e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta \right\} \lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\int_{-\infty}^{\lambda} (\eta^2 - 2\eta\lambda + \lambda^2) e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta + \int_{\lambda}^{\infty} (\eta^2 - 2\eta\lambda + \lambda^2) e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta \right\} \lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\int_{-\lambda}^{\lambda} (\eta^2 + \lambda^2) e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta - 4\lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \right\} \lambda e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} d\lambda =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} (\eta^2 + \lambda^2) \lambda e^{-\frac{1}{2}(\eta^2+\lambda^2)} d\eta\, d\lambda - 2\sqrt{\pi} =$$

$$= -2\int_{0}^{\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} (\eta^2 + \lambda^2) \lambda e^{-\frac{1}{2}(\eta^2+\lambda^2)} d\eta\, d\lambda - 2\sqrt{\pi} =$$

(Pasando a polares)

$$= -2\int_0^{\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r\, r\,\mathrm{sen}\theta\, r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}\, d\theta\, dr - 2\pi =$$

$$= -2\sqrt{2}\int_0^{\infty} r^4 e^{-\frac{1}{2}r^2}\, dr - 2\pi = -14\sqrt{\pi}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(y-y')(y-y')^2 \omega_{0_{xx}}(x,y',t)\,\omega_0(x,y,t)\,dy'dy =$$

$$= -14\sqrt{\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{\sigma_x\widehat{\sigma}_x}{\mu\sqrt{2\pi}} + \frac{\sigma\,\widehat{\sigma}_{xx}}{2\mu\sqrt{2\pi}}\right\} = -\frac{7\sigma}{\mu 2\sqrt{\pi}}\left\{2\sigma_x\widehat{\sigma}_x - \sigma\widehat{\sigma}_{xx}\right\} =$$

$$= -\frac{7}{\mu 2\sqrt{\pi}}\left\{2\sigma\sigma_x\widehat{\sigma}_x - \sigma^2\widehat{\sigma}_{xx}\right\} = -\frac{7}{\mu 2\sqrt{\pi}}(\sigma^2\widehat{\sigma}_x)_x$$

De donde obtenemos que

$$F_1 = -\mu\left(A(\sigma^2\widehat{\sigma}_x)_x + B\sigma(\widehat{\sigma\sigma_x}) - C\sigma\sigma_x\widehat{\sigma}_x\right)$$

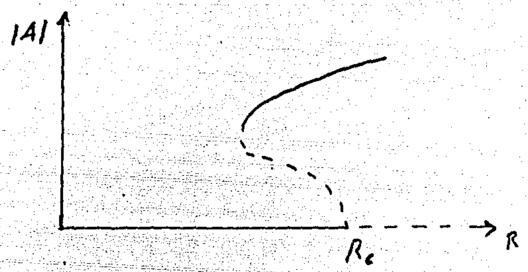
donde

$$A = \frac{7}{8\sqrt{\pi}}\ ;\ B = \frac{K_3}{8\pi} \quad y \quad C = \frac{K_1}{8\pi}.$$

SEGUNDA PARTE

Introducción

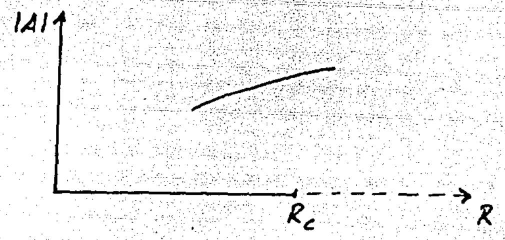
En este capitulo estudiaremos la estabilidad del flujo entre dos planos paralelos conocido como flujo plano de Poiseuille , de la teoria lineal se obtiene un número de Reynolds crítico R_c = 5780 antes del cual el flujo es estable y despues del cual el flujo es inestable. Sin embargo experimentalmente Davies y White [ ] encontraron que el flujo se volvia inestable para números de Reynolds tan bajos como 1000, tambien se ha visto experimentalmente que el flujo pasa a otro estado el cual es estable para un intervalo de números de Reynolds como se muestra en la figura.



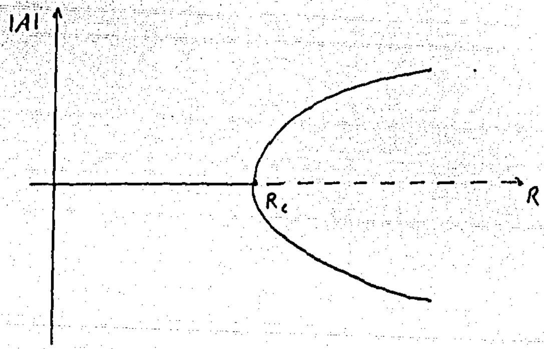
Los resultados experimentales y la analogía con problemas más sencillos sugieren completar el diagrama de bifurcación como se indica en la figura 2 donde la linea punteada indica una rama de soluciones inestables.

esta figura ha sido calculada numericamente en fecha reciente .

una primera pregunta es pues la de describir el diagrama de bifurcación local encontrando la ecuación de bifurcación y más aún la evolución de las ondas de inestabilidad.



Una segunda pregunta es la de examinar la posibilidad de estabilización local obteniendo un diagrama como se indica en la figura 3.



Una posibilidad es la de poner paredes flexibles para que almacenen la energía que hace crecer la inestabilidad. En la tercera sección de este capítulo examinaremos esta situación obteniendo el diagrama de la figura 3.

La ecuación adimensional que modela la evolución de la perturbación en terminos de una función de corriente (la cual existe debido a que se supone el flujo incompresible) para el flujo con la pared superior rigida y la inferior flexible es (como veremos):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi + \frac{\partial}{\partial z}\Psi\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Psi - \frac{\partial}{\partial x}\Psi\frac{\partial}{\partial z}\Delta\Psi = \frac{1}{R}\Delta^2\Psi$$

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial z}\Psi = 0 \qquad en \quad z=1$$

$$\Psi_x - \frac{C_r R}{\varkappa}\Psi_{zzz} = \frac{1}{C_r}\Psi\Psi_{xz} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\Psi = 0 \quad en \quad z=-1$$

Donde R es le número de Reynolds, c_r es el valor propio del modo más inestable en la ecuación de Orr-Sommerfeld, y $\varkappa$ es el coeficiente de elasticidad de la parde inferior. La condición de frontera en z=1 indica que la velocidad en la pared es cero, esto se debe a la viscocidad del fluido. En la condición de frontera en z=-1 se encuentra como veremos esta misma propiedad y ademas la respuesta de la pared flexible a la presión del fluido.

Cuando $\varkappa \to \infty$, esto es, cuando la pared flexible se vuelve rígida obtenemos la siguiente ecuación para la evolución de la perturbación:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \frac{\partial}{\partial z}\Psi\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Psi - \frac{\partial}{\partial x}\Psi\frac{\partial}{\partial z}\Delta\Psi = \frac{1}{R}\Delta^2\Psi$$

$$\Psi = \frac{\partial}{\partial z}\Psi = 0 \quad en \quad z=\pm 1$$

En esta ecuación R es el número de Reynolds y las condiciones de frontera indican que el fluido se adhiere (por viscocidad) a las paredes.

Todos los cálculos numéricos que se utilisan a continuación fueron tomados de Stuart[10] y de Rotenberry[9].

En la siguiente sección estudiaremos dos ecuaciones modelo de fenomenos de estabilidad en problemas simples para entender los mecanismos y balances involucrados en los cambios de estabilidad para buscar los mismos en el caso del problema del flujo de Poiseuille.

SECCION I

En esta sección se encontrarán las ecuaciones que gobiernan la amplitud de un paquete de ondas centradas alrededor de un número de onda conocido para la ecuación de Klein-Gordon con un término inestabilizante y un término cúboco y para la ecuación de Korteweg-de Vries (ver Whitam [13]).

Queremos estudiar la estabilidad de un paquete de ondas con números de onda centrados alrededor de un número de onda conocido k_o para la siguiente ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} + u + \delta u_t + \gamma u^3 = 0 \qquad (1)$$

La ecuación número (1) es una ecuación de onda más un tèrmino dispersivo u, un tèrmino de inestabilidad δu y un tèrmino no lineal γu^3.

Para estudiar la estabilidad del paquete de ondas, encontraremos una ecuación que gobierne su amplitud en el espacio y en el tiempo. Aqui se trata de balancear un mecanismo de inestabilidad lienal con un mecanismo no lineal de saturación que pare el crecimiento .

La finalidad de este estudio es la de entender la combinación de dispersión, inestabilidad y saturación.

Comenzaremos analizando la ecuación sin el término de inestabilidad y el término no lineal ,esto es la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0 \qquad (2)$$

Con el fin de entender la dispersición de un paquete.

Si sustituimos en esta ecuación (2)

$$u = e^{i(k_o x - w_o t)}$$

esto es una onda con número de onda k_0 y frecuencia w_0 encontramos que

$$-\omega_0^2 e^{i(k_0 x-\omega_0 t)}+k_0^2 e^{i(k_0 x-\omega_0 t)}+e^{i(k_0 x-\omega_0 t)}=0$$

de donde

$$\omega_0^2=k_0^2+1$$

ecuación conocida como relación de dispersión.

La solución general de la ecuación (2) puede ser encotrada usando transformada de Fourier y de Laplace ,y tiene la forma

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx-\omega(k)t)}\,F(k)\,dk$$

donde $w(k)=\pm(k^2+1)^{1/2}$ es la relación de dispersión y $F(K)$ es la transformada de las condiciones iniciales .

Si queremos estudiar solo un paquete de ondas con número de onda k tales que $-\varepsilon <= k-k_0 <= \varepsilon$ donde k_0 es concido tenemos

$$u=\int_{|k-k_0|\le\varepsilon} e^{i(kx-\omega(k)t)}\,F(k)\,dk$$

si $\eta = k-k_0$

$$u=\int_{|\eta|\le\varepsilon} e^{i[(k_0+\eta)x-\omega(k_0+\eta)t]}\,F(\eta+k_0)\,d\eta$$

si ahora desarrollamos $\omega(k_0+\eta)$ en serie de Taylor a segundo orden alrededor de k_o tenemos

$$\omega(k_0+\eta)=\omega(k_0)+\omega'(k_0)\eta+\frac{1}{2}\omega''(k_0)\eta^2+O(\eta^3)$$

de donde tenemos que

$$u=\int_{|\eta|\le\varepsilon} e^{i[(k_0+\eta)x-(\omega(k_0)+\omega'(k_0)\eta+\frac{1}{2}\omega''(k_0)\eta^2)t]} f(\eta+k_0)\,d\eta =$$

$$= e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\int_{|\eta|\le\varepsilon} e^{i[\eta x-\omega'(k_0)\eta t-\frac{1}{2}\omega''(k_0)\eta^2 t]} f(\eta+k_0)\,d\eta$$

si hacemos $\eta = \varepsilon\kappa$

$$u=e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\int_{|\kappa|\le 1} e^{i(\kappa\varepsilon x-\omega'(k_0)\kappa\varepsilon t-\frac{1}{2}\omega''(k_0)\kappa^2\varepsilon^2 t]} f(\varepsilon\kappa+k_0)\,d\kappa$$

ahora el integrando puede ser visto como una función de $\tilde{x}$,$\tilde{t}$ y τ donde $\tilde{x}=\varepsilon x$, $\tilde{t}=\varepsilon\tau$ y $\tau=\varepsilon^2\tau$. Llamaremos a esta función $A(\tilde{x},\tilde{t},\tau)$. Observese que el parammetro ε está en las condiciones iniciales,en el ancho de la banda y en el número de onda .

Notese la aparición de dos escalas en tiempo y solo de una en espacio como consecuencia de las condiciones iniciales.

Notese pues que las solucione tiene la forma

$$A(\tilde{x},\tilde{t},\tau)\,e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$$

donde A satisface la ecuación de Schrödinger.

Por otra parte en el caso de un problema no lineal como en el que nos interesa no se tiene la solución como una integral de Fourier y por esto es necesario una derivaciónde la ecuación para la envolvente independiente de la representación integral.

Para esto utilizamos las diferentes escalas que se descubren del análisis exacto y buscamos una solución aproximada de la forma.

$$u(x,t) = A(\tilde{x}, \tilde{t}, \tau) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \varepsilon u_1(x,t) + \varepsilon^2 u_2(x,t) + \ldots$$

donde $\omega_0 = \omega(k_0)$.

Sustituyendo esta expresión para u en la ecuación (2) y usando la regla de la cadena para la nuevas variables $\tilde{x}$, $\tilde{t}$ y τ encontramos

$$u_{tt} = (-\omega_0^2 A - 2i\omega_0 \varepsilon A_{\tilde{t}} + \varepsilon^2 A_{\tilde{t}\tilde{t}} - 2i\omega_0 \varepsilon^2 A_\tau) e^{i\theta} + \varepsilon u_{1_{tt}} + \varepsilon^2 u_{2_{tt}} + \ldots$$

$$u_{xx} = (-k_0^2 A + 2ik_0 \varepsilon A_{\tilde{x}} + \varepsilon^2 A_{\tilde{x}\tilde{x}}) e^{i\theta} + \varepsilon u_{1_{xx}} + \varepsilon^2 u_{2_{xx}} + \ldots$$

donde

$$\theta = k_0 x - \omega_0 t$$

terminos a orden uno

$$-\omega_0^2 A e^{i\theta} + k_0^2 A e^{i\theta} + A e^{i\theta} = 0$$

de donde $\omega_0^2 = k_0^2 + 1$ que se nuevamente la relación de dispersión.

Terminos proporcionales a ε

$$-2i\omega_0 A_{\tilde{t}} e^{i\theta} + U_{1tt} - 2ik_0 A_{\tilde{x}} e^{i\theta} - U_{1xx} + U_1 = 0$$

de donde

$$\mathcal{L}(U_1) \equiv U_{1tt} - U_{1xx} + U_1 = 2i(\omega_0 A_{\tilde{t}} + k_0 A_{\tilde{x}}) e^{i\theta}$$

una solución para esta ecuación es

$$U_1 = -(\omega_0 A_{\tilde{t}} + k_0 A_{\tilde{x}}) t e^{i\theta}$$

por lo tanto , para que esta ecuación tenga solución sin resonancia es necesario que

$$\omega_0 A_{\tilde{t}} + k_0 A_{\tilde{x}} = 0$$

esto lo logramos sustituyendo

$$\xi = \tilde{x} - \omega_0' \tilde{t}$$

donde $\omega_0' = k_0/\omega_0$ es la velocida de grupo. Y tomando

$$A(\tilde{x}, \tilde{t}, \tau) = A(\xi, \tau)$$

terminos proporcionales a ε^2

$$A_{\tilde{t}\tilde{t}} e^{i\theta} - 2i\omega_0 A_\tau e^{i\theta} + U_{2tt} - A_{\tilde{x}\tilde{x}} e^{i\theta} - U_{1xx} + U_2 = 0$$

de donde

Nuevamente para no tener resonancia necesitamos que

$$2i\omega_0 A_\tau - A_{\tilde{t}\tilde{t}} + A_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0$$

sustituyendo la variable ξ y tomando en cuenta que

$$A_{\tilde{t}\tilde{t}} = \omega_0'^2 A_{\xi\xi} \quad y \quad A_{\tilde{x}\tilde{x}} = A_{\xi\xi}$$

obtenemos

$$2i\omega_0 A_\tau - (\omega_0'^2 - 1) A_{\xi\xi} = 0$$

de donde

$$i A_\tau = \frac{\omega_0'^2 - 1}{2\omega_0} A_{\xi\xi} .$$

Esta es la ecuación que gobierna la evolución de la amplitud A en la ecuación (2) Que es la misma que la que obtuvimos de la representación integral pero ahora la derivamos con un argumento aplicable en principio al caso no lineal.

Analizaremos la ecuación (2) más el terminó no lineal de la ecuación (1) , esto es la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} + u + \gamma u^3 = 0 \qquad (3)$$

Intentaremos un análisis con las mismas variables $\tilde{x} = \epsilon x$, $\tilde{t} = \epsilon t$ y $\tau = \epsilon^2 t$ de la ecuación (2) . La amplitud A en general es una función compleja por lo tanto para obtener soluciones reales debemos sumar el complejo conjugado (en el caso lineal estas dos soluciones son independientes). tomamos u como

$$u(x,t) = \varepsilon\left(A(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{i\theta} + \bar{A}(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{-i\theta}\right) + \varepsilon^2 u_1(x,t) + \varepsilon^3 u_2(x,t) + \ldots$$

donde $\bar{A}$ es el complejo conjugado de A.

La amplitud se toma a orden ε ya que la no linealidad es cúbica y este es el escalamiento apropiado en el estudio de oscilaciones .

Derivando igual que en el caso lineal y sustituyendo en la ecuación (3) , tenemos :

Términos proporcionales a ε

$$-\omega_0^2(Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) + k^2(Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) + (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) = 0$$

de donde $\omega_0^2 = k_0^2+1$ que es la relación de dispersión de la aproximación lineal .

Términos proporcionales a ε^2

$$-2i\omega_0 A_{\tilde{t}}e^{i\theta} + 2i\omega_0 \bar{A}_{\tilde{t}}e^{-i\theta} + u_{1\tau\tau} - 2ik_0 A_{\tilde{x}}e^{i\theta} +$$

$$+ 2ik_0 \bar{A}_{\tilde{x}}e^{-i\theta} - u_{1xx} + u_1 = 0$$

de donde

$$\mathcal{L}(u_1) = 2i(\omega_0 A_{\tilde{t}} + k_0 A_{\tilde{x}})e^{i\theta} - 2i(\omega_0 \bar{A}_{\tilde{t}} + k_0 \bar{A}_{\tilde{x}})e^{-i\theta}$$

Para que exista solución a esta ecuación sin resonancia necesitamos que

$$\omega_0 A_{\tilde{t}} + k_0 A_{\tilde{x}} = 0$$

lo cual logramos sustituyendo

$$\xi = \tilde{x} - \omega_0' \tilde{t}$$

donde $\omega_0' = k_0/\omega_0$ es la velocidad de grupo, y haciendo

$$A(\tilde{x}, \tilde{t}, \tau) = \hat{A}(\xi, \tau)$$

Términos proporcionales a ε^3

$$-2i\omega_0 A_\tau e^{i\theta} + A_{\tilde{t}\tilde{t}} e^{i\theta} + 2i\omega_0 \bar{A}_\tau e^{-i\theta} + \bar{A}_{\tilde{t}\tilde{t}} e^{-i\theta} + u_{2\tau\tau} - A_{\tilde{x}\tilde{x}} e^{i\theta} -$$

$$- \bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}} e^{-i\theta} - u_{2xx} + u_2 + \gamma (A e^{i\theta} + \bar{A} e^{-i\theta})^3 = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_2) = {} & (2i\omega_0 A_\tau - A_{\tilde{t}\tilde{t}} + A_{\tilde{x}\tilde{x}} - 3\gamma A^2 \bar{A}) e^{i\theta} + \\ & + (-2i\omega_0 \bar{A}_\tau - \bar{A}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}} - 3\gamma \bar{A}^2 A) e^{-i\theta} - \\ & - \gamma A^3 e^{3i\theta} - \gamma \bar{A}^3 e^{-3i\theta} \end{aligned}$$

para no tener resonancia necesitamos que

$$2i\omega_0 A_\tau - A_{\tilde{t}\tilde{t}} + A_{\tilde{x}\tilde{x}} - 3\gamma A^2\bar{A} = 0$$

sustituyendo $\xi = \tilde{x} - \omega_0'\tilde{t}$ encontramos

$$2i\omega_0 A_\tau - (\omega_0'^2 - 1)A_{\xi\xi} - 3\gamma A^2\bar{A} = 0$$

de donde tenemos que

$$iA_\tau = \frac{\omega_0'^2 - 1}{2\omega_0}A_{\xi\xi} + \frac{3\gamma}{2\omega_0}|A|^2 A$$

esta ecuación que gobierna la evolución de la amplitud en el caso de la ecuación (3) es conocida como ecuación cúbica de Schröinger.

Analizaremos ahora de la misma forma la ecuación completa

$$u_{tt} - u_{xx} + u + \delta u_t + \gamma u^3 = 0 \qquad (1).$$

$\delta \ll 1$, sera escogida para balancear su efecto con el efecto cúbico.

La relación de dispersión de la parte lineal es:

$$-\omega^2 + k^2 + 1 - i\delta\omega = 0$$

De donde obtenemos

$$\omega(k,\delta) = \frac{i\delta \pm (-\delta^2 + 4(k^2+1))^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Si escribimos $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, tenemos que

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\delta$$

Por lo tanto, hay un δ critico δ_c tal que si $\delta > \delta_c$ existen modos inestables.

Escogeremos δ proporcional ε^2 para balancear el término inestable con el término cúbico, por lo tanto $\delta = \mu\varepsilon^2$. De nuevo tomaremos u como

$$u(x,t) = \varepsilon\left(A(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{i\theta} + \bar{A}(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{-i\theta}\right) + \varepsilon^2 u_1(x,t) + \varepsilon^3 u_2(x,t) + \ldots$$

sustituyendo esta expresión para u en la ecuación (1) ,tenemos en los dos primeros ordenes de magnitud una situación identica a la de la ecuación anterior y a orden ε^3 tenemos lo siguiente :

Términos proporcionales a ε^3

$$-2i\omega_0 A_\tau e^{i\theta} + 2i\omega_0 \bar{A}_\tau e^{-i\theta} + A_{\tilde{t}\tilde{t}} e^{i\theta} + \bar{A}_{\tilde{t}\tilde{t}} e^{-i\theta} + u_{2tt} -$$
$$- A_{\tilde{x}\tilde{x}} e^{i\theta} - \bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}} e^{-i\theta} - u_{2xx} + u_2 + \mu\left(-i\omega_0 A e^{i\theta} +\right.$$
$$\left. + i\omega_0 \bar{A} e^{-i\theta}\right) + \gamma\left(A e^{i\theta} + \bar{A} e^{-i\theta}\right)^3 = 0$$

reordenando los términos tenemos

$$\mathcal{L}(u_2) = \left(2i\omega_0 A_\tau - A_{\tilde{t}\tilde{t}} + A_{\tilde{x}\tilde{x}} + i\omega_0 \mu A - 3\gamma A^2 \bar{A}\right)e^{i\theta} +$$
$$+ \left(-2i\omega_0 \bar{A}_\tau - \bar{A}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}} - i\omega_0 \mu \bar{A} - 3\gamma \bar{A}^2 A\right)e^{-i\theta} -$$
$$- \gamma A^3 e^{3i\theta} - \gamma \bar{A}^3 e^{-3i\theta}$$

para no tener resonancia necesitamos

$$2i\omega_0 A_\tau - A_{\tilde{t}\tilde{t}} + A_{\tilde{x}\tilde{x}} + i\omega_0 \mu A - 3A^2\bar{A} = 0$$

sustituyendo $\xi = \tilde{x} - \omega_0' \tilde{t}$ donde $\omega_0' = k_0/\omega_0$ es la velocidad de grupo y tomando

$$A(\tilde{x}, \tilde{t}, \tau) = A(\xi, \tau)$$

de donde obtenemos que A satisface la siguiente ecuación

$$iA_\tau = \frac{\omega_0'^2 - 1}{2\omega_0} A_{\xi\xi} + \frac{i\mu}{2} A + \frac{3\gamma}{2\omega_0} |A|^2 A$$

esta ecuación que gobierna la evolución de la amplitud A para la ecuación es conocida como la ecuación Ginzburg- Landau. El primer término del lado derecho da los efectos dispersivos, el segundo da la inestabilidad y el tercero es un corrimiento de face; en la tercera sección veremos que si el coeficiente de este último término tiene parte imaginaria negativa puede estabilizar las soluciones.

Trataremos ahora con le mismo análisis de encontrar una ecuación para la amplitud de un paquete de ondas con número de onda k tal que $-\epsilon \leq k - k_0 \leq \epsilon$ donde k_0 es un número de onda conocido para la siguiente ecuación conocida como ecuación de Korteweg-de Vries.

$$u_t = u u_x + u_{xxx} \tag{4}$$

Los términos no lineales son ahora de la forma uu_x lo cual hace que una constante sea solución . Elesquema de aproximación no funciona en este caso y debe ser modificado .Veremos ahora como falla y corregiremos el error .

Nuevamente para tomar en cuenta el termino no lineal hasta el tercer orden buscamos una u de la forma

$$u(x,t)=\varepsilon\left(A(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{i\theta}+\bar{A}(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{-i\theta}\right)+\varepsilon^2 u_1(x,t)+\varepsilon^3 u_2(x,t)+\cdots$$

donde como en la ecuación

$$\tilde{x}=\varepsilon x,\ t=\varepsilon t\ ;\tau=\varepsilon^2 t\ \text{y}\ \theta=k_o x-w_o t$$

sustituyendo la expresión anterior para u en la ecuación (4) obtenemos :

Términos proporcionales a ε

$$\omega_o(-iAe^{i\theta}+i\bar{A}e^{-i\theta})=k_o^3(-iAe^{i\theta}+i\bar{A}e^{-i\theta})$$

de donde $\omega_o=k_o^3$ esta es la relación de dispersión de la aproximación lineal de la ceuación (4).

Términos proporcionales a ε^2

$$A_{\tilde{t}}e^{i\theta}+\bar{A}_{\tilde{t}}e^{-i\theta}+u_{1t}=ik_oA^2e^{i2\theta}+ik_oA\bar{A}-ik_o\bar{A}^2e^{-i2\theta}-$$
$$-ik_oA\bar{A}-3k_o^2A_{\tilde{x}}e^{i\theta}-3k_o^2\bar{A}_{\tilde{x}}e^{-i\theta}$$

reordenando los terminos tenemos

$$\mathcal{L}(u_1)\equiv u_{1t}-u_{1xxx}=-(A_{\tilde{t}}+3k_o^2A_{\tilde{x}})e^{i\theta}-(\bar{A}_{\tilde{t}}+3k_o^2\bar{A}_{\tilde{x}})e^{i\theta}+$$
$$+ik_o(A^2e^{i2\theta}-\bar{A}^2e^{-i2\theta})$$

esta ecuación tiene una solución de la forma

$$u_1=-(A_{\tilde{t}}+3k_o^2A_{\tilde{x}})te^{i\theta}-(\bar{A}_{\tilde{t}}+3k_o^2\bar{A}_{\tilde{x}})te^{i\theta}+\frac{1}{6k_o^2}(A^2e^{i2\theta}+\bar{A}^2e^{-i2\theta})$$

por lo tanto , para que tenga solución sin resonancia es necesario que

$$A_{\tilde{t}}+3k_o^2A_{\tilde{x}}=0$$

por lo que sustituimos $\xi=\tilde{x}-\omega_o'\tilde{t}$ donde $\omega_o'=3k_o^2$ es la velocidad de grupo y obtenemos:

$$\mathcal{L}(u_1)=ik_o(A^2e^{i2\theta}-\bar{A}^2e^{-i2\theta})$$

una solución de esta ecuación es

$$u_1=\frac{1}{6k_o^2}(A^2e^{i2\theta}+\bar{A}^2e^{-i2\theta})$$

Términos proporcionales a ε^3

$$A_\tau e^{i\theta}+\bar{A}_\tau e^{-i\theta}+u_{2t}=Ae^{i\theta}u_{1x}+\bar{A}e^{-i\theta}u_{1x}+AA_{\tilde{x}}e^{i2\theta}+$$

$$+\bar{A}A_{\tilde{x}}+A\bar{A}_{\tilde{x}}+\bar{A}\bar{A}_{\tilde{x}}e^{-i2\theta}+ik_oAe^{i\theta}u_1-ik_o\bar{A}e^{-i\theta}u_1+$$

$$+3ik_oA_{\tilde{x}\tilde{x}}e^{i\theta}-3ik_o\bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}}e^{-i\theta}+u_{2xxx}$$

sustituyendo la expresión encontrada para u_1 obtenemos

$$A_\tau e^{i\theta}+\bar{A}_\tau e^{-i\theta}+u_{2\tau}=\frac{i}{6k_o}A^3e^{i3\theta}-\frac{i}{6k_o}A\bar{A}^2e^{-i\theta}+\frac{i}{6k_o}\bar{A}A^2e^{i2\theta}-$$

$$-\frac{i}{6K_0}\bar{A}^3e^{-i3\theta}+AA_{\bar{x}}e^{i2\theta}+\bar{A}A_{\bar{x}}+A\bar{A}_{\bar{x}}+\bar{A}\bar{A}_{\bar{x}}e^{-i2\theta}+\frac{i}{6K_0}A^3e^{i3\theta}+$$

$$+\frac{i}{6K_0}A\bar{A}^2e^{-i\theta}-\frac{i}{6K_0}\bar{A}A^2e^{i\theta}-\frac{i}{6K_0}\bar{A}^3e^{-i3\theta}+3iK_0A_{\bar{x}\bar{x}}e^{i\theta}-3iK_0\bar{A}_{\bar{x}\bar{x}}e^{-i\theta}+u_{2xxxx}$$

reordenando terminos tenemos

$$\mathcal{L}(u_2)=\bar{A}A_{\bar{x}}+A\bar{A}_{\bar{x}}+(-A_\tau+3iK_0A_{\bar{x}\bar{x}})e^{i\theta}+(-\bar{A}_\tau-3iK_0\bar{A}_{\bar{x}\bar{x}})e^{-i\theta}+$$

$$+AA_{\bar{x}}e^{i2\theta}+\bar{A}\bar{A}_{\bar{x}}e^{-i2\theta}+\frac{i}{3K_0}A^3e^{i3\theta}-\frac{i}{3K_0}\bar{A}^3e^{-i3\theta}$$

en este orden de magnitud vemos que aparecen terminos resonantes aparte de los términos en $e^{i\theta}$ y $e^{-i\theta}$ los cuales no se pueden eliminar.

El problema en la ecuación (4) es que el término no lineal no es tan simple como en la ecuación (1) el cual al ser cúbico simplificaba el análisis .

A diferencia de los problemas lineales en los cuales los modos normales se desarrollan independienteuno del otro ,en los problemas no lineales los modos normales interactuan cada uno con sigo mismo y tambien con los demas. En este caso particular dado que queremos una aproximación de la forma

$$u=\varepsilon(Ae^{i\theta}+\bar{A}e^{-i\theta})+\ldots$$

el término en $e^{i\theta}$al ser multiplicado por el término en $e^{-i\theta}$ nos dará un término que no oscila que representa al flujo medio,el cual sera de orden ε^2 ya que los modos que interactuan son de orden ε.

Buscaremos entonces una aproximación de la forma

$$u(x,t)=\varepsilon^2 M(\tilde{x},\tilde{t},\tau)+\varepsilon\left(A(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{i\theta}+\bar{A}(\tilde{x},\tilde{t},\tau)e^{-i\theta}\right)+$$

$$+\varepsilon^2 u_1(x,t)+\varepsilon^3 u_2(x,t)+\ldots$$

sustituyendo esta expresión para u en la ecuación (4) obtenemos que en los dos primeros ordenes de magnitud no hay ningun cambio respcto al intento anterior, y a orden ε^3 tenemos :

Términos proporcionales a ε^3

$$M_{\tilde{t}}+A_\tau e^{i\theta}+\bar{A}_\tau e^{-i\theta}+u_{2t}=M\left(ik_0 Ae^{i\theta}-ik_0\bar{A}e^{-i\theta}\right)+$$

$$+Ae^{i\theta}u_{1x}+\bar{A}e^{-i\theta}u_{1x}+AA_{\tilde{x}}e^{i2\theta}+(A\bar{A})_{\tilde{x}}+\bar{A}\bar{A}_x e^{-i2\theta}$$

$$+ik_0 Ae^{i\theta}u_1-ik_0\bar{A}e^{-i\theta}u_1+3ik_0 A_{\tilde{x}\tilde{x}}e^{i\theta}-3ik_0\bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}}e^{-i\theta}+u_{2xxx}$$

sustituyendo la expresión encontrada para u_1 y simplificando obtenemos

$$\mathcal{L}(u_2)=(A\bar{A})_x-M_{\tilde{t}}+\left(-A_\tau+ik_0 MA+3ik_0 A_{\tilde{x}\tilde{x}}\right)e^{i\theta}+\left(-\bar{A}_\tau-ik_0 M\bar{A}-\right.$$

$$\left.-3ik_0\bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}}\right)e^{-i\theta}+\frac{i}{3k_0}\left(A^3e^{i3\theta}-\bar{A}^3e^{-i3\theta}\right)+AA_{\tilde{x}}e^{i2\theta}+\bar{A}\bar{A}_{\tilde{x}}e^{-i2\theta}$$

tenemos que $\xi=\tilde{x}-3k_0^2\tilde{t}$ por lo tanto podemos hacer

$$(A\bar{A})_x-M_{\tilde{t}}=0$$

si tomamos

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{3k_0^2} A\bar{A}$$

por lo tanto la ecuación para u_2 queda de la siguiente forma

$$\mathcal{L}(u_2) = (-A_\tau + i k_0 \mathcal{M} A + 3 i k_0 A_{\tilde{x}\tilde{x}}) e^{i\theta} + (-\bar{A}_\tau - i k_0 \mathcal{M} \bar{A} - 3 i k_0 \bar{A}_{\tilde{x}\tilde{x}}) e^{-i\theta} +$$

$$+ \frac{i}{3k_0}(A^3 e^{i3\theta} - \bar{A}^3 e^{-i3\theta}) + A A_{\tilde{x}} e^{i2\theta} + \bar{A}\bar{A}_{\tilde{x}} e^{-i2\theta}$$

por lo tanto podemos evitar la resonancia poniendo

$$-A_\tau + i k_0 \mathcal{M} A + 3 i k_0 A_{\tilde{x}\tilde{x}} = 0$$

sustituyendo

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{3k_0^2} |A|^2 \quad \text{y} \quad \xi = \tilde{x} - 3k_0^2 \tilde{t}$$

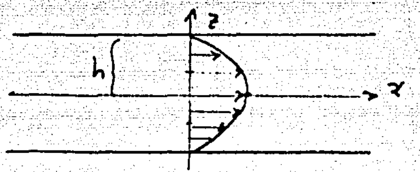
obtenemos

$$i A_\tau = -3k_0 A_{\xi\xi} + \frac{1}{3k_0} |A|^2 A$$

que es nuevamente una ecuación cúbica de Schrödinger, pero el coeficiente del término cúbico involucra la reacción del flujo medio sobre la onda .

Sección II

Estudiaremos en esta sección la estabilidad del flujo entre dos planos paralelos a distancia 2h. Este flujo es conocido como flujo plano de Poiseuille.En el regimen de flujo laminar sin pertubaciones un gradiente de presión constante produc3e una distribución de velocidad independiente de la coordenada a lo largo de la corriente con un valor máximo U_o en el centro del canal.



Si consideramos el flujo como incompresible y denotamos la velocidad por $\bar{u}(u(x,z,t),w(x,z,t))$ entonces $\nabla\cdot\bar{u}$ por lo tanto existe una función de corriente $\psi(x,z,t)$ tal que $u = \psi_z$ y $w = -\psi_x$.

Las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionalizadas para este flujo bidimensional en términos de la función de corriente (ver Batchelor [1]) se reducen a

$$\zeta_t + \psi_x \zeta_z - \psi_z \zeta_x = \frac{1}{R} \Delta \zeta$$

$$\zeta = -\Delta \psi$$

$$\Psi = cte \qquad \Psi_z = 0 \quad en \quad z = \pm 1$$

donde $R = U_o h/\nu$ es el número de Reynolds , ν es la viscocidad cinemática y z se mide en unidades de longitud h. En el flujo laminar sin pertubaciones la velocidad es paralela alos planos y esta dada por

$$u_l = \psi_{lz} = 1 - z^2$$

el subindice l se utiliza para denotar el flujo laminar.

En los casos anteriores la relación de dispersión que aparecia en la aproximación lineal era facil de encontrar, el problema del flujo de Poiseuille es más complicado por lo que estudiaremos primero la aproximación lineal por separado.

Linealizando la ecuación (1) alrededor del flujo básico $u_l = \psi_{lz} = 1 - z^2$ obtenemos la siguiente ecuación para la perturbación $\bar{\psi}_1$

$$\bar{\zeta}_{1t} + (1 - z^2)\bar{\zeta}_{1x} + 2\bar{\Psi}_{1x} = \frac{1}{R}\Delta\bar{\zeta}_1$$

$$\bar{\zeta}_1 = -\Delta\bar{\Psi}_1$$

$$\bar{\Psi}_1 = \bar{\Psi}_{1z} = 0 \quad en \quad z = \pm 1$$

ya que se mantiene el mismo flujo que en ausencia de pertubación, modificando la presión .

Queremos encontrar la relación de dispersión como en el caso de las ecuacioines (1) y (4) de la sección anterior, como la ecuación (2) depende tambien de z, sustituimos

$$\overline{\Psi_1}(x,z,t)=\hat{\varphi}(z)\,e^{i\alpha x+st}$$

donde α es el número de onda en la dirección x. Obteniendo la siguiente ecuación para $\hat{\psi}$

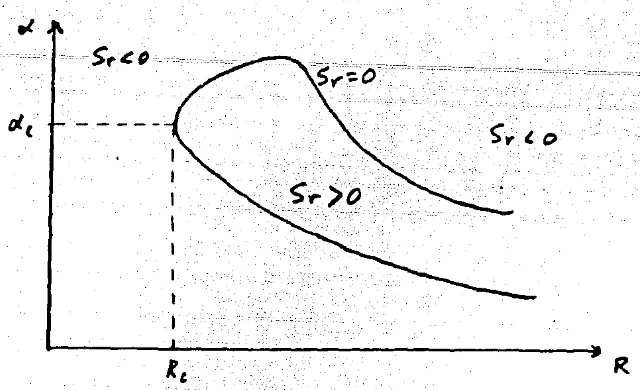
$$-i\alpha\left\{\left(1-z^2-\frac{is}{\alpha}\right)\left(\hat{\Psi}''-\alpha^2\hat{\Psi}\right)+2\hat{\Psi}\right\}+\frac{1}{R}\left\{\hat{\Psi}^{IV}-2\alpha^2\hat{\Psi}''+\alpha^4\hat{\Psi}\right\}=0$$

$$\hat{\Psi}(\pm 1)=\hat{\Psi}_z(\pm 1)=0$$

este es el problema del valor propio de Orr- Sommerfeld y ahora necesitamos encontrar no solo como depende la frecuencia s en función del número de onda α, ahora para un α fijo necesitamos encontrar $s(\alpha,R)$ tal que la ecuación (3) tenga una solución no trivial.

La ecuación (3) ha sido resuelta numericamente (ver Stuart [10]) y se ha encontrado una sola función propia $\hat{\psi}$ que tiene un valor propio $s(\alpha,R)$ cuya parte real $s_r(\alpha,R)$ es positiva en una región del plano (α,R). La curva de estabilidad marginal $s_r(\alpha,R)=0$ se muestra en la figura 2.

Para $R < R_c=5780$, $S_r(\alpha,R)$ es menor que cero para toda α, por lo tanto las pertubaciones decrecen con el tiempo .



$R_c = 5780$

$\alpha_c = 1.02$

Usando transformada de Laplace y de Fourier la solución de la ecuación (2) es de la forma

$$\overline{\Psi}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x + s(\alpha,R)t} F(z;\alpha,R)\,d\alpha$$

Queremos conocer $s(\alpha,R)$ en una vecindad de (α_c, R_c) para esto desarrollamos s y F en potencias de $(\alpha-\alpha_c)$ y $(R-R_c)$ de la forma siguiente

$$S(\alpha,R) = -i c_r \alpha_c + i a_{1r}(\alpha-\alpha_c) + d_1(R-R_c) - a_2(\alpha-\alpha_c)^2 + \dots$$

donde a_{1r} es por comparación con los ejempos de la sección anterior la velocidad de grupo y

$$F(z;\alpha,R) = \Psi_1(z) + \Psi_{10}(z)(\alpha-\alpha_c) + \Psi_{11}(z)(R-R_c) + \Psi_{12}(z)(\alpha-\alpha_c)^2 + \dots$$

Calcularemos los coeficientes a_{1r}, d_1 y a_2 despresiando los términos de orden mayor. Sustituyendo estos dos desarrollos en (4) y despues en (2) y usando el hecho de que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_c} - \frac{R-R_c}{R_c^2} + O((R-R_c)^2)$$

obtenemos:

Téminos independientes de $\alpha-\alpha_c$ y $R-R_c$

$$\mathcal{L}(\Psi_1) \equiv (1-z^2-c_r)[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]+2\Psi_1+\frac{i}{\alpha_c R_c}[\Psi_1^{IV}-2\alpha_c^2\Psi_1''+\alpha_c^4\Psi_1]=0 \tag{5}$$

$$\Psi_1(\pm 1) = \Psi_{1_z}(\pm 1) = 0$$

esta es la ecuación de Orr-Sommerfeld con $\alpha=\alpha_c$, $R=R_c$ y valor propio c_r.

Términos proporcionales a $\alpha-\alpha_c$

$$\mathcal{L}(\Psi_{1o}) = -\frac{a_{1r}}{\alpha_c}[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]-\frac{2}{\alpha_c}\Psi_1-\left(\frac{1-z^2}{\alpha_c}-\frac{4i}{R_c}\right)[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]+ \\ +2\alpha_c(1-z^2-c_r)\Psi_1 \tag{6}$$

$$\Psi_{1o}(\pm 1) = \Psi_{1o_z}(\pm 1) = 0$$

tenemos el mismo operador diferencial de la ecuación de Orr-Sommerfeld, una solución de esta ecuación no homogenea existe solo si el lado derecho cumple la siguiente condición de ortogonalidad.

Sea Φ solución de la ecuación adjunta a la ecuación (5), entonces

$$0=\int_{-1}^{1}\mathcal{L}^{+}(\Phi)\,\Psi_{10}\,dz=\int_{-1}^{1}\Phi\,\mathcal{L}(\Psi_{0})\,dz=\int_{-1}^{1}\Phi\Big\{-\frac{a_{1r}}{\alpha_c}[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]-$$

$$-\frac{2}{\alpha_c}\Psi_1-\Big(\frac{1-z^2}{\alpha_c}-\frac{4i}{R_c}\Big)[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]+2\alpha_c(1-z^2-c_r)\Psi_1\Big\}dz$$

donde $\mathcal{L}^{+}$ es el adjunto de $\mathcal{L}$, de donde obtenemos

$$a_{1r}=\frac{\int_{-1}^{1}\Phi\Big\{2\alpha_c^2(1-z^2-c_r)\Psi_1-2\Psi_1-\Big(1-z^2-\frac{4i\alpha_c}{R_c}\Big)[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]\Big\}dz}{\int_{-1}^{1}\Phi[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]\,dz}$$

Términos proporcionales a $R-R_c$

$$\mathcal{L}(\Psi_{11})=-d_1[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]-\frac{1}{R_c^2}[\Psi_1^{IV}-2\alpha_c^2\Psi_1''+\alpha_c^4\Psi_1] \qquad (7)$$

$$\Psi_{11}(\pm 1)=\Psi_{11_z}(\pm 1)=0$$

nuevamente el operador diferencial del lado izquierdo es igual al de la ecuación (5) por lo tanto nuevamente para que exista una solución el lado derecho debe ser ortogonal al nucleo del adjunto

$$0=\int_{-1}^{1}\mathcal{L}^{+}(\Phi)\,\Psi_{11}\,dz=\int_{-1}^{1}\Phi\,\mathcal{L}(\Psi_{11})\,dz=\int_{-1}^{1}\Phi\Big\{-d_1[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1]-$$

$$-\frac{1}{R_c^2}[\Psi_1^{IV}-2\alpha_c^2\Psi_1''+\alpha_c^4\Psi_1]\Big\}dz$$

de donde obtenemos que

$$d_1 = - \frac{\int_{-1}^{1} \Phi \left\{ \frac{1}{R_c^2} \left[\psi_1^{IV} - 2\alpha_c^2 \psi_1'' + \alpha_c^4 \psi_1 \right] \right\} dz}{\int_{-1}^{1} \Phi \left[\psi_1'' - \alpha_c^2 \psi_1 \right] dz}$$

Términos proporcionales a $(\alpha-\alpha_c)^2$

$$\mathcal{L}(\psi_{12}) = a_2[\psi_1'' - \alpha_c^2 \psi_1] + i\alpha_c(1-z^2-c_r)[2\alpha_c \psi_{10} + \psi_1] - 2i\psi_{10} - \tag{8}$$

$$-i(1-z^2+a_{1r})[\psi_{10}'' - \alpha_c^2 \psi_{10} - 2\alpha_c \psi_1] - \frac{2}{R_c^2}[\psi_1'' - 3\alpha_c^2 \psi_1 + 2\alpha_c(\psi_{10}'' - \alpha_c^2 \psi_{10})]$$

$$\psi_{12}(\pm 1) = \psi_{12_z}(\pm 1) = 0$$

denuevo el operador diferencial es el mismo que el de la ecuación (5) por lo que el lado derecho debe ser ortogonal al nucleo del adjunto. De donde tenemos que

$$a_2 \int_{-1}^{1} \Phi[\psi_1'' - \alpha_c^2 \psi_1] dz = \int_{-1}^{1} \Phi \{ -i\alpha_c(1-z^2-c_r)[2\alpha_c \psi_{10} + \psi_1] +$$

$$+ 2i\psi_{10} + i(1-z^2+a_{1r})[\psi_{10}'' - 2\alpha_c^2 \psi_{10} - 2\alpha_c \psi_1] +$$

$$+ \frac{2}{R_c}[\psi_1'' - 3\alpha_c^2 \psi_1 + 2\alpha_c[\psi_{10}'' - \alpha_c^2 \psi_{10}]] \} dz$$

Note que la relación que da a_2 es más complicada ya que necesitamos tener previamente calculada ψ_{10}.

La velocidad de grupo a_{1r} es un número real negativo, d_1 y

a_2 son números complejos con parte real e imaginaria positivas. Estos fueron calculados numericamente ver Stuart [10]. Estos coeficientes dan la relación de dispersión aproximada alrededor del punto (α_c, R_c).

Consideraremos ahora el problema no lineal completo de la ecuación (1) para números de Reynolds alrededor del número de Reynolds crítico R_c y estudiaremos la evolución de un paquete de ondas con números de onda alrededor de α_c.

La gráfica de la parte real de la relación de dispersión de la aproximación lineal tiene una tangente verticalen $R = R_c$, por lo tanto al igual que en el primer ejemplo de la sección anterior para $R > R_c$ existen modos inestables $s_r(\alpha, R) > 0$. Por lo que al igual que en ese problema escalabamos $\delta = \varepsilon^2 \mu$, ahora escalaremos

$$R - R_c = \varepsilon^2 \lambda$$

y escogeremos las variables

$$\xi = \varepsilon (x + a_{1r} t)$$
$$\tau = \varepsilon^2 t$$

donde a_{1r} es la velocidad de grupo encontraada en el análisis lineal.

Desarrollaremos $\psi(x,z,t)$ de la siguiente forma

$$\psi = \varphi_0(z,\xi,\tau) + \varphi_1(z,\xi,\tau)E + \bar{\varphi}_1(z,\xi,\tau)E^{-1} +$$
$$+ \varphi_2(z,\xi,\tau)E^2 + \bar{\varphi}_2(z,\xi,\tau)E^{-2} + \ldots$$

donde $E = e^{i\alpha c(x-c_r t)}$ y la barra superior denota el complejo conjugado.

Ahora desarrollaremos cada sumando en potencias de ε

$$\varphi_0 = z - \frac{1}{3}z^3 + \varepsilon^2 \varphi_{02}(z,\xi,\tau) + \ldots$$

$$\varphi_1 = \varepsilon \varphi_{11}(z,\xi,\tau) + \varepsilon^2 \varphi_{12}(z,\xi,\tau) + \varepsilon^3 \varphi_{13}(z,\xi,\tau) + \ldots$$

$$\varphi_2 = \varepsilon^2 \varphi_{22}(z,\xi,\tau) + \ldots$$

donde hemos despresiado términos de orden ε^4.

El término $z-1/3z^3$ es el flujo básico, ϕ_{02} es el flujo medio resultado de la interacción del primer armónico con su conjugado y ϕ_{22} es el resultado de la interacción del primer armónico consigo mismo, estos flujos medios son necesarios dado que ψ = cte es solución del problema.

sustituyendo este desarrollo para ψ e igualando términos proporcionales a los diferentes productos de ε y E obtenemos:

Términos proporcionales a εE

$$\mathcal{L}(\varphi_{11}) = (1-z^2-c_r)\left[\varphi_{11}'' - \alpha_c^2 \varphi_{11}\right] + 2\varphi_{11} + \frac{i}{\alpha_c R_c}\left[\varphi_{11}^{IV} - 2\alpha_c^2 \varphi_{11}'' + \alpha_c^4 \varphi_{11}\right] = 0 \tag{6}$$

$$\varphi_{11}(\pm 1) = \varphi_{11_z}(\pm 1) = 0$$

esta es nuevamente le ecuación de Orr-Sommerfeld en $\alpha=\alpha_c$ y $R=R_c$. esto era de esperarse ya que las potencias de ε toman en cuenta las correcciones más altas.

Tomando pues

$$\varphi_{11}(z,\xi,\tau) = A(\xi,\tau)\,\Psi_1(z)$$

doende $\psi_1(z)$ es la función propia de Orr-Sommerfeld correspondiente al modo más inestable. Encontraremos una ecuación para A.

Los términos proporcionales a ϵE^{-1} dan la misma ecuación pero conjugada.

Términas proporcionales a $\epsilon^2 E^2$

Hay dos clases de estos términos, por una parte terminos cuadraticos y por otra términos que involucran derivadas más altas en x. Estos son:

$$\left[8i\alpha_c^3 C_r \varphi_{22} + 2i\alpha_c C_r \varphi_{22}''\right] + (1-z^2)\left[8i\alpha_c^3 \varphi_{22} - 2i\alpha_c \varphi_{22}''\right] +$$

$$+\left[i\alpha_c^3 \varphi_{11}\varphi_{11}' - i\alpha_c \varphi_{11}'\varphi_{11}''\right] - \left[i\alpha_c^3 \varphi_{11}\varphi_{11}' - i\alpha_c \varphi_{11}\varphi_{11}'''\right] -$$

$$-\left[4i\alpha_c \varphi_{22}\right] = -\frac{1}{R_c^2}\left[\varphi_{22}^{IV} - 8\alpha_c^2 \varphi_{22}'' + 16\alpha_c^4 \varphi_{22}\right]$$

reagrupando términos y sustituyendo

$$\varphi_{11} = A(\xi,\tau)\,\Psi_1(z)$$

obtenemos

$$(1-z^2-C_r)\left[\varphi_{22}'' - 4\alpha_c^2 \varphi_{22}\right] + 2\varphi_{22} + \frac{i}{\alpha_c R_c}\left[\varphi_{22}^{IV} - 8\alpha_c^2 \varphi_{22}'' + \alpha_c^4 \varphi_{22}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} A^2 R_1(\Psi_1) \qquad (7)$$

$$\varphi_{22}(\pm 1) = \varphi_{22_z}(\pm 1) = 0$$

donde

$$R_1(\Psi_1) = \Psi_1'\Psi_1'' - \Psi_1\Psi_1''' \qquad (8)$$

Resultados numéricos (ver Stuart [10]) sugieren que no hay funciones complementarias a esta ecuación por lo que podemos suponer que su solución es única y escribirla como

$$\varphi_{22}(z,\xi,\tau) = A^2(\xi,\tau)\,\Psi_2(z)$$

donde ψ_2 se determina numericamente.

Términos proporcionales a ε^2 independientes de E

Estos son los flujos medios

$$-i\alpha_c^3\varphi_{11}'\overline{\varphi}_{11} + i\alpha_c\varphi_{11}'\overline{\varphi}_{11}'' + i\alpha_c^3\varphi_{11}\overline{\varphi}_{11}' - i\alpha_c\varphi_{11}''\overline{\varphi}_{11}' -$$

$$- i\alpha_c^3\varphi_{11}\overline{\varphi}_{11}' + i\alpha_c\varphi_{11}\overline{\varphi}_{11}''' + i\alpha_c^3\varphi_{11}'\overline{\varphi}_{11} - i\alpha_c\varphi_{11}'''\overline{\varphi}_{11} =$$

$$= -\frac{1}{R_c}\varphi_{02}^{IV}$$

reagripando términos y sustituyendo

$$\varphi_{11} = A(\xi,\tau)\,\Psi_1(z)$$

obtenemos

$$\frac{1}{R_c}\varphi_{02}^{IV} = i\alpha_c A\overline{A}\,R_2(\Psi_1)$$

$$\varphi_{02}(\pm 1) = \varphi_{02_z}(\pm 1) = 0 \qquad (9)$$

donde

$$R_2(\Psi_1) = \left[\Psi_1'\overline{\Psi}_1 - \Psi_1\overline{\Psi}_1'\right]'' \qquad (10)$$

resolviendo la ecuación (9) obtenemos

$$\varphi_{02}(z,\xi,\tau) = |A(\xi,\tau)|^2 F(z)$$

donde

$$F(z) = i\alpha_c R_c \int_{-1}^{z} S(r) + \frac{c_1}{2}(r^2-1) + c_2(r+1)\,dr$$

donde

$$S(r) = \int_{-1}^{r} \left[\Psi_1'(s)\overline{\Psi}_1(s) - \Psi_1(s)\overline{\Psi}_1'(s)\right] ds$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} S(r)\,dr + 3S(1) \quad y \quad c_2 = \frac{1}{2}S(1).$$

Términos proporcionales a $\varepsilon^2 E$

Estos provienen de las derivadas más altas

$$\left[\alpha_c^2 a_{1r}\varphi_{11_\xi} - 2\alpha_c^2 c_r \varphi_{11_\xi} - i\alpha_c^3 c_r \varphi_{12} - a_{1r}\varphi_{11_\xi}'' + i\alpha_c c_r \varphi_{12}''\right] +$$

$$+ (1-z^2)\left[3\alpha_c^2 \varphi_{11_\xi} + i\alpha_c^3 \varphi_{12} - \varphi_{11_\xi}'' - i\alpha_c \varphi_{12}''\right] - 2\left[\varphi_{11_\xi} +\right.$$

$$\left. + i\alpha_c \varphi_{12}\right] = \frac{1}{R_c}\left[4i\alpha_c^3 \varphi_{11_\xi} - \alpha_c^4 \varphi_{12} - 4i\alpha_c \varphi_{11_\xi}'' + 2\alpha_c^2 \varphi_{12}'' - \varphi_{12}^{IV}\right]$$

reagrupando términos y sustituyendo

$$\Psi_{11} = A(\xi,\tau)\,\Psi_1(z)$$

obtenemos

$$\mathcal{L}(\Psi_{12}) = \frac{i}{\alpha_c} A_\xi R_3(\Psi_1)$$
$$\Psi_{12}(\pm 1) = \Psi_{12_z}(\pm 1) = 0 \qquad (11)$$

donde

$$R(\Psi_1) = a_{1r}\left[\Psi_1'' - \alpha_c \Psi_1\right] - 2\alpha_c^2 \Psi_1 (1 - z^2 - c_r) +$$
$$+ \left(1 - z^2 - \frac{4 i \alpha_c}{R_c}\right)\left[\Psi_1'' - \alpha_c^2 \Psi_1\right] + 2\Psi_1 \qquad (12)$$

como en los ejemplos de la sección anterior donde a segundo orden sustituiamos $\xi = \varepsilon(x - \omega_0' t)$ donde ω_0' era la velocidad de grupo, aquí tambien, la presencia de la velocidad de grupo a_{1r} en el lado derecho de la ecuación (11) asegura que hay solución a esta ecuación sin necesidad de una condición de ortogonalidad, por lo cual de la ecuación (6) del análisis lineal obtenemos que ϕ_{12} se puede escribir como

$$\Psi_{12}(z,\xi,\tau) = -i A_\xi(\xi,\tau)\Psi_{10}(z) + A_2(\xi,\tau)\Psi_1(z)$$

donde A_2 puede ser incluida en A quedando la solución

$$\Psi_{12}(z,\xi,\tau) = -i A_\xi(\xi,\tau)\Psi_{10}(z)$$

Términos proporcionales a $\epsilon^3 E$

Estos provienen de derivadas más altas y de términos no lineales e incluyen la interacción del flujo medio con la onda. Estos son:

$$\Big[\alpha_c^2 \varphi_{11_\tau} - 2i\alpha_c a_{1r} \varphi_{11_{\xi\xi}} + i\alpha_c c_r \varphi_{11_{\xi\xi}} + \alpha_c^2 a_{1r} \varphi_{12_\xi} -$$

$$- 2\alpha_c^2 c_r \varphi_{12_\xi} - i\alpha_c^3 c_r \varphi_{13} - \varphi_{11_\tau}'' - a_{1r}\varphi_{12_\xi}'' + i\alpha_c c_r \varphi_{13}''\Big] +$$

$$+ (1-z^2)\Big[-3i\alpha_c \varphi_{11_{\xi\xi}} + 3\alpha_c^2 \varphi_{12_\xi} + i\alpha_c^3 \varphi_{13} - \varphi_{12_\xi}'' - i\alpha_c \varphi_{13}\Big] +$$

$$+ \Big[i\alpha_c^3 \varphi_{02}' \varphi_{11} - i\alpha_c \varphi_{02}' \varphi_{11}'' + 8i\alpha_c^3 \overline{\varphi}_{11}' \varphi_{22} - 2i\alpha_c \overline{\varphi}_{11}' \varphi_{22}'' -$$

$$- i\alpha_c^3 \varphi_{22}'' \overline{\varphi}_{11} + i\alpha_c \varphi_{22}' \overline{\varphi}_{11}''\Big] - 2\Big[\varphi_{12_\xi} + i\alpha_c \varphi_{13}\Big] - \Big[2i\alpha_c^3 \varphi_{22} \overline{\varphi}_{11}' -$$

$$- 4i\alpha_c^3 \varphi_{22}' \overline{\varphi}_{11} - i\alpha_c \varphi_{02}''' \overline{\varphi}_{11} - 2i\alpha_c \overline{\varphi}_{11}''' \varphi_{22} + i\alpha_c \varphi_{22}''' \overline{\varphi}_{11} =$$

$$= -\frac{1}{R_c}\Big[\varphi_{13}^{IV} - 2\alpha_c^2 \varphi_{13}'' + \alpha_c^4 \varphi_{13}\Big] + \frac{1}{R_c}\Big[6\alpha_c^2 \varphi_{11_{\xi\xi}} + 4i\alpha_c^3 \varphi_{12_\xi} -$$

$$- 2\varphi_{11_{\xi\xi}}'' - 4i\alpha_c \varphi_{12_\xi}''\Big] + \frac{i\lambda}{R_c^2}\Big[\varphi_{11}^{IV} - 2\alpha_c^2 \varphi_{11}'' + \alpha_c^4 \varphi_{11}\Big]$$

reagrupando términos y sustituyendo las siguientes expresiones ya encontradas

$$\varphi_{11}(z,\xi,\tau) = A(\xi,\tau)\,\Psi_1(z)$$

$$\varphi_{22}(z,\xi,\tau) = A^2(\xi,\tau)\,\Psi_2(z)$$

$$\varphi_{02}(z,\xi,\tau) = |A(\xi,\tau)|^2 F(z)$$

$$\varphi_{12}(z,\xi,\tau) = -i A_\xi(\xi,\tau)\,\Psi_{10}(z)$$

obtenemos la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}(\varphi_{13}) = \frac{i}{\alpha_c} A_\tau [\Psi_1'' - \alpha_c^2 \Psi_1] + \frac{i\lambda A}{\alpha_c R_c^2}[\Psi_1^{IV} - 2\alpha_c^2 \Psi_1'' + \alpha_c^4 \Psi_1] -$$

$$- \frac{i}{\alpha_c} A_{\xi\xi} R_4(\Psi_1, \Psi_{10}) + A|A|^2 R_5(\Psi_1, \Psi_2, F) \qquad (13)$$

$$\varphi_{13}(\pm 1) = \varphi_{13_z}(\pm 1) = 0$$

donde

$$R_4(\Psi_1,\Psi_{10}) = -i\alpha_c(1 - z^2 - c_r)[2\alpha_c \Psi_{10} + \Psi_1] + i(1 - z^2 + a_{1r})[\Psi_{10}'' -$$

$$- \alpha_c^2 \Psi_{10} - 2\alpha_c \Psi_1] + 2i\Psi_{10} + \frac{2}{R_c}[\Psi_1'' - 3\alpha_c^2 \Psi_1 + 2\alpha_c(\Psi_{10}'' - \alpha_c^2 \Psi_{10})]$$

$$R_5(\Psi_1,\Psi_2,F) = \Psi_2'[\overline{\Psi}_1'' - \alpha_c^2 \overline{\Psi}_1] + 2\Psi_2[\overline{\Psi}_1''' - \alpha_c^2 \overline{\Psi}_1'] -$$

$$- 2\overline{\Psi}_1'[\Psi_2'' - 4\alpha_c^2 \Psi_2] - \overline{\Psi}_1[\Psi_2''' - 4\alpha_c^2 \Psi_2'] -$$

$$- F'[\Psi_1'' - \alpha_c^2 \Psi_1] + F'''\Psi_1.$$

el operador diferencial del lado izquierdo de la ecuación (13) es el mismo que en la ecuación (5) por lo tanto el lado derecho debe ser ortogonal al nucleo del adjunto que en el análisis lineal llamamos . Multiplicando por Φ solución de la ecuación adjunta a la ecuación (5) e integrando respecto a z de -1 a 1 obtenemos que $A(\xi,\tau)$ debe satisfacer la siguiente ecuación de Ginzburg-Landau

$$A_\tau - a_2 A_{\xi\xi} = \lambda d_1 A + K|A|^2 A \qquad (8)$$

con a_2 dada en el análisis lineal y K dada por

$$K = \frac{i\alpha_c \int_{-1}^{1} \bar{\Phi} R_5(\Psi_1, \Psi_2, F)\, dz}{\int_{-1}^{1} \Phi [\Psi_1'' - \alpha_c^2 \Psi_1]\, dz}$$

es en general complejo.Estos coeficientes fueron calculados numericamente (ver Rotenberry [9]).

Si llamamos

$$a_2 = \alpha + i\beta \ ; \quad d_1 = d_{1r} + i d_{1i} \quad y \quad K = K_1 + i K_2$$

y para quitar oscilaciones debidas a la parte imaginaria tomamos

$$A(\xi,\tau) = e^{i\gamma\tau} A_1(\xi,\tau)$$

donde $\gamma = \lambda d_{1r} + K_2 |A|^2$ obtenemos que A_1 satisface la siguiente ecuación

$$A_{1\tau} - a_2 A_{1\xi\xi} = \lambda d_{1r} A_1 + K_1 |A_1|^2 A_1 \qquad (9)$$

si buscamos suluciones que no dependan ni de ξ ni de τ tenemos que

$$\lambda d_{1r} A_1 + K_1 |A_1|^2 A_1 = 0$$

por lo tanto

$$|A_1|^2 = -\frac{d_{1r}}{K_1}\lambda \qquad |A_1|^2 = 0$$

si llamamos A_e a la solución real diferente de cero tenemos que

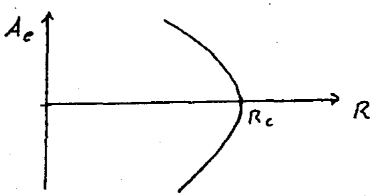
$$A_e^2 = -\frac{d_{1r}}{K_1}\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}(R - R_c)$$

por lo tanto

$$A_e = \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d_{1r}}{K_1}(R - R_c)\right]^{\frac{1}{2}}$$

donde dado que d_{1r} y K_1 son positivos (estos son calculados numericamente ver Rotenberry [9]) esta expresión para A_e tiene sentido solo para $R < R_c$.



Veremos ahora que la solución A_e es inestable, para esto tomamos

$$A_1 = A_e + A_2$$

donde A_2 es una perturbación de A_e. Linealizando la ecuación (9) alrededor de A_e obtenemos la siguiente ecuación lineal para A_2

$$A_{2\tau} - a_1 A_{2\xi\xi} = \lambda d_{1r} A_2 + K_1 A_e^2 \overline{A_2} + 2K_1 A_e^2 A_2$$

$$\lambda = -\frac{K_1}{d_{1r}} A_e^2$$

de donde

$$A_{2\tau} - a_1 A_{2\xi\xi} = K_1 A_e^2 \overline{A_2} + K_1 A_e^2 A_2 \qquad (11)$$

si tomamos $A_2 = A_{2r} + iA_{2i}$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para A_{2r} y A_{2i}.

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\begin{bmatrix} A_{2r} \\ A_{2i} \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{2r} \\ A_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K_1 A_e^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{2r} \\ A_{2i} \end{bmatrix}$$

tomando transformada de Fourier obtenemos para $\tilde{A}_{2r}(\tau,s)$ y $\tilde{A}_{2i}(\tau,s)$ las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\begin{bmatrix} A_{2r} \\ A_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha s^2 & \beta s^2 \\ -\beta s^2 & -\alpha s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{2r} \\ A_{2i} \end{bmatrix}$$

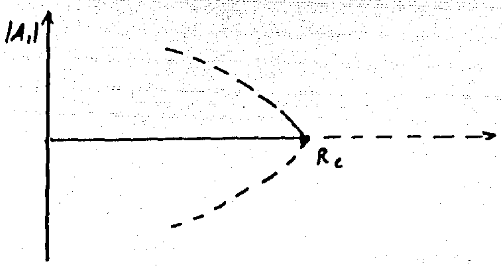
los valores propios de esta matriz son

$$\mu_1 = K_1 A_e^2 - \alpha \lambda^2 + \left(K_1^2 A_e^4 - \beta^2 \lambda^4 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_2 = K_1 A_e^2 - \alpha \lambda^2 - \left(K_1^2 A_e^4 - \beta^2 \lambda^4 \right)^{\frac{1}{2}}$$

como $K_1 > 0$ tenemos que si $s^2 \ll 1$ entonces μ_1 tiene parte real positiva, de donde obtenemos que estos modos tienden a infinito cuando τ tiende a infinito. Esto es la solución A_e es inestable.

Tenemos así el siguiente diagrama de bifurcación para $|A_1|$ en función del número de Reynolds.



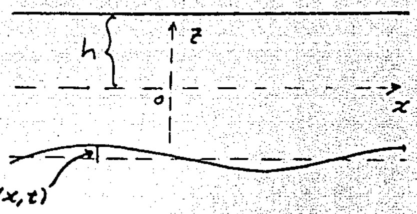
doende la linea continua representa la solución estable y la linea oculta las soluciones inestables.

De aquí vemos que el flujo aun antes del número de Reynols crítico puede pasar a la rama de amplitud inestable lo cual explica lo observado experimentalmente aunque este análisis no da un número de Reynols antes del cual el flujo sea totalmente estable.

Del análisis anterior vemos que si la parte real K_1 del coeficiente de $|A|^2A$ fuera negativa entonces, los valores propios μ_1 y μ_2 tendrian parte real negativa y la solución A_0 seria estable, de hecho la parabola del diagrama de bifurcación se abriria hacia la derecha. En la sección siguiente veremos que este es el caso cuando las paredes del canal son flexibles.

SECCION III

En esta sección se estudiarán los efectos de una pared flexible en la parte inferior del canal.



Consideraremos la misma adimensionalización que en la sección anterior por lo cual la elevación de la pared inferior (flexible) $\eta(x,t)$, la constante elástica K y la diferencia entre la presión sobre la pared rigida y sobre la pared elastica $\tilde{p}$ estaran adimensionalizadas como sigue

$$\eta = \frac{\bar{\eta}}{h} \qquad K = \frac{\bar{K} h^3 \rho}{\mu^2} \qquad \tilde{p} = \frac{\bar{\tilde{p}}}{\rho U^2}$$

donde ρ y μ son la densidad y la viscocidad del fluído y $\bar{\eta}, \bar{k}, \tilde{p}$ son las variables dimensionales .

En el interior del fluído las ecuaciones son las mismas que en el caso de las paredes rigidasy las condiciones de frontera en $z = 1$ son $u = \omega = 0$.

En la pared inferior las condiciones de frontera deben tomar en cuenta la flexibilidad de la pared . El desplazamiento de la frontera de su posición de equilibrio $\eta(x,t)$ es una superficie libre y su elastcidad balancea a la presión del fluído . De donde obtenemos por la ley de Hooke que

$$-\frac{K}{R^2}\eta(x,t)=\tilde{p}(-1+\eta(x,t),x,t) \qquad (1)$$

donde R es el número de Reynolds.

La condición de que $\eta(x,t)$ es superficie libre es

$$\frac{D}{Dt}(z-\eta(x,t))=0$$

que es la misma que

$$w(-1+\eta(x,t),x,t)-\eta_x(x,t)u(-1+\eta(x,t),x,t)-\eta_t(x,t)=0 \qquad (2)$$

la condición de que el fluido no resbale (por viscocidad) a lo largo de la pared toma la forma

$$(u,w)\cdot(1,\eta_x)=0 \qquad (3)$$

Para describir el método de solución del problema de manera simple es conveniente suponer que la pared elastica es mas bien rígida, es decir $K >> 1$ y referir a Rotenberry [9], para el estudio de K arbitraria que es esencialmente el mismo pero con una mayor cantidad de algébra sin haber ningun efecto nuevo.

En este caso la pared es casi horizontal ($\eta_x << 1$) y podemos tomar

$$u(-1,x)=0=\Psi_z(-1,x)$$

como una buena aproximación, donde ψ es la pertubación de la función de corriente producida por la presión $\tilde{p}$. Por otra parte de la ecuación (2) tenemos que

$$\eta_t=w(-1+\eta,x,t)=w(-1,x,t)+w_z(-1,x,t)\eta+O(\eta^2) \qquad (4)$$

ya que $\eta_x << 1$

Dado que $\tilde{p} = -(k/R^2)\eta$ y que el movimiento dominante es una onda con velocidad C_r tenemos que $C_r \eta_x = \eta_\tau$ y a primer orden tenemos de la ecuación (4) que

$$C_r \eta_x = w(-1, x, t) = -\Psi_x(-1, x, t)$$

e integrando respecto a x tenemos

$$C_r \eta(x,t) = -\Psi(-1, x, t) \qquad (5)$$

ya que la constante de integración se toma como cero por no haber un nivel medio.

Tenemos que

$$\eta_t = C_r \eta_x = -\frac{C_r R^2}{K} \tilde{p}_x \qquad (6)$$

y de la ecuación de momento

$$u_t + u u_x + w u_z = \frac{1}{R}(u_{xx} + u_{zz}) - \tilde{p}_x$$

evaluada en la pared inferior da

$$\tilde{p}_x = \frac{1}{R} u_{zz}$$

y usando las ecuaciones (6),(5) y (4) obtenemos

$$-\frac{C_r R}{K} u_{zz} = w - \frac{1}{C_r} \Psi w_z$$

expresando esta última ecuación en términos de ψ obtenemos

$$\Psi_x - \frac{C_r R}{K} \Psi_{zzz} = \frac{1}{C_r} \Psi \Psi_{xz}$$

El problema para la estabilidad del flujo se transforma en

$$\zeta_t + (1+z^2)\zeta_x + 2\Psi_x - \frac{1}{R}\Delta\zeta = Q(\Psi)$$

$$\zeta = -\Delta \psi$$

$$\psi = \psi_z = 0 \quad en \ z=1$$

$$\psi_x - \frac{C_r R}{K}\psi_{zzz} = \frac{1}{C_r}\psi\psi_{xz} \qquad \psi_z = 0 \ \ en \ z=-1$$

donde $Q(\psi)$ es una forma cuadrática que es la misma que en el caso de paredes rígidas. El único cambio es en la condición de frontera que ahora involucra una tercera derivada y un término cuadrático.

El desarrollo es el mismo que en el caso de paredes rígidas. Las únicas modificaciones son en la forma de la función propia en el problema linealizado , que ahora es diferente y la aparición de nuevos términos por el efecto de las condiciones de frontera.

Por otra parte la forma de la solución sera la misma y lo que cambiará serán los coeficientes en la ecuación Ginzburg-Landau.

A continuación se indican las modificaciones al caso de paredes rígidas.

Con el mismo desarrollo para ψ de la pag 29 y con los mismos escalamientos

$$\xi = \varepsilon(x + \alpha_{1r} t) \qquad \tau = \varepsilon^2 t$$

donde la velocidad de grupo α_{ir} es ahora diferente de a_{ir} obtenemos:

Términos proporcionales a εE

$$\mathcal{L}(\varphi_{11}) = 0$$

$$\varphi_{11} = \varphi_{11_z} = 0 \quad en \quad z=1$$

$$i\alpha_c \varphi_{11} - \frac{C_r R_c}{K}\varphi_{11_{zzz}} = 0 \qquad \varphi_{11_z} = 0 \quad en \quad z=-1$$

de donde obtenemos que

$$\varphi_{11}(z,\xi,\tau) = A(\xi,\tau)\,\Psi_1(z)$$

la ecuación adjunta también cambiará y toma la forma

$$\mathcal{L}^+(\Phi) = (1-z^2-c_r)[\Phi'' - \alpha_c^2\Phi] - 4z\Phi' + \frac{i}{\alpha_c R_c}[\Phi^{IV} - 2\alpha_c^2\Phi'' + \alpha_c^4\Phi] = 0$$

$$\Phi = \Phi_z = 0 \quad en \quad z=1$$

$$i\alpha_c\Phi + \frac{C_r R_c}{K}(2i\alpha_c R_c\Phi - \Phi_{zzz}) = 0 \qquad \Phi_z = 0 \quad en \quad z=-1$$

Términos proporcionales a $\epsilon^2 E^2$

$$(1-z^2-c_r)[\varphi_{22}'' - 4\alpha_c^2\varphi_{22}] + 2\varphi_{22} + \frac{i}{\alpha_c R_c}[\varphi_{22}^{IV} - 8\alpha_c^2\varphi_{22}'' + 16\alpha_c^4\varphi_{22}] =$$
$$= -\tfrac{1}{2}A^2 R_1(\Psi_1)$$

$$\varphi_{22} = \varphi_{22_z} = 0 \quad en \quad z=1$$

$$i2\alpha_c\varphi_{22} - \frac{C_r R_c}{K}\varphi_{22_{zzz}} = 0 \qquad \varphi_{22_z} = 0 \quad en \quad z=-1$$

donde R_1 y las siguientes expresiones para R_2, R_3, R_4 y R_5 son las mismas que en la sección anterior.

Resultados numéricos sugieren que la ecuación homogénea no tiene soluciones, por lo tanto tenemos:

$$\varphi_{22} = A^2(\xi,\tau)\,\Psi_2$$

Términos proporcionales a ϵ^2 independientes de E

$$\frac{1}{R_c}\varphi_{02}^{IV}=i\alpha_c A\bar{A}R_2(\Psi_1)$$

$$\varphi_{02}=\varphi_{02_z}=0 \quad en\ z=1$$

$$\varphi_{02}=\varphi_{02_z}=0 \quad en\ z=-1$$

de donde

$$\varphi_{02}=(z,\xi,\tau)=|A(\xi,\tau)|^2F(z)$$

$$F(z)=i\alpha_c R_c\int_{-1}^{z}S(r)+\frac{c_1}{2}(r^2-1)+c_2(r+1)\,dr$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}S(r)\,dr+3S(1) \qquad c_2=\frac{1}{2}S(1)$$

y S(r) esta dada por la misma expresión de la sección anterior.

Vemos así que el término de frontera flexible altera el flujo medio pudiendo producir esto un efecto estabilizante tal como ocurre en otros problemas.

Términos proporcionales a ϵ^2E

Los términos dispersivos son ahora producidos tambien por la condición de frontera. Estos modifican a la velocidad de grupo y no causan ningun efecto sobre la estabilidad de las soluciones

$$\mathcal{L}(\varphi_{12})=\frac{i}{\alpha_c}A_\xi R_3(\Psi_1)$$

$$\varphi_{12}=\varphi_{12_z}=0 \qquad en\ z=1$$

$$i\alpha_c\varphi_{12}-\frac{c_r R_c}{K}\varphi_{12_{zzz}}=0 \qquad \varphi_{12_z}=0 \quad en\ z=-1$$

donde ahora en $R_3(\psi_1)$ aparece la nueva velocidad de grupo α_{1r}

$$R_3(\Psi_1)=\alpha_{1r}\left[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1\right]-2\alpha_c^2\Psi_1(1-z^2-c_r)+\left(1-z^2-\frac{4i\alpha_c}{R_c}\right)\left[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1\right]+2\Psi_1$$

de donde obtenemos por la condición de ortogonalidad que

$$\alpha_{1r}=\frac{\int_{-1}^{1}\Phi\left\{2\alpha_c^2\Psi_1(1-z^2-c_r)-(1-z^2-\frac{4i\alpha_c}{R_c})\left[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1\right]-2\Psi_1\right\}dz}{\int_{-1}^{1}\Phi\left[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1\right]dz}$$

donde Φ es solución de la ecuación (8). Lo que es importante es que α_{1r} resulta ser una constante real y como tal no tiene influencia en la estabilidad y el efecto de pared elástica es solo el modificar la velocidqad del grupo.

Términos proporcionales a $\epsilon^2 E$

Se tiene a este orden la misma situación que en el caso de paredes rígidas pero como el flujo medio ha cambiado los términos proporcionales a $|A|^2A$ seran diferentes. El coeficiente de $A_{\xi\xi}$ no presenta cambios cualitativos.

La ecuación toma la forma

$$\mathcal{L}(\varphi_{13})=\frac{i}{\alpha_c}A_\tau\left[\Psi_1''-\alpha_c^2\Psi_1\right]+\frac{i\lambda A}{\alpha_c R_c^2}\left[\Psi_1^{IV}-2\alpha_c^2\Psi_1''+\alpha_c^4\Psi_1\right]-$$

$$-\frac{i}{\alpha_c}A_{\xi\xi}R_4(\Psi_1,\Psi_0)+A|A|^2R_5(\Psi_1,\Psi_2,F)$$

$$\varphi_{13}=0\qquad\varphi_{13_z}=0\qquad en\quad z=1$$

$$i\alpha_c\varphi_{13}-\frac{c_rR_c}{k}\varphi_{13_{zzz}}=\frac{i\alpha_c}{R_c}\lambda A\Psi_1\qquad\varphi_{13_z}=0\quad en\quad z=-1$$

de donde usando la condición de ortogonalidad tenemos que A satisface la siguiente ecuación de Ginzburg-Landau.

$$A_\tau-a_2A_{\xi\xi}=\lambda a_3A+a_4A|A|^2$$

donde

$$a_2 = \frac{\int_{-1}^{1} R_4(\Psi_1, \Psi_0)\, \Phi\, dz}{\int_{-1}^{1} \Phi\,[\Psi_1'' - \alpha_c^2 \Psi_1]\, dz}$$

$$a_3 = \frac{\int_{-1}^{1} \Phi \left\{ -\frac{1}{R_c^2}\left[\Psi_1^{IV} - 2\alpha_c^2 \Psi_1'' + \alpha_c^4 \Psi_1\right] - i\alpha_c \mathcal{L}(M) \right\} dz}{\int_{-1}^{1} \Phi\,[\Psi_1'' - \alpha_c^2 \Psi_1]\, dz}$$

donde M es tal que

$$M(1) = M'(-1) = 0$$

$$i\alpha_c M(-1) - \frac{C_r R_c}{K} M'''(-1) = \frac{i\alpha_c}{R_c} \Psi_1(-1) \qquad M'(-1) = 0$$

$$a_4 = \frac{i\alpha_c \int_{-1}^{1} \Phi\, R_5(\Psi_1, \Psi_2, F)\, dz}{\int_{-1}^{1} \Phi\,[\Psi_1'' - \alpha_c^2 \Psi_1]\, dz}$$

tenemos ahora que a_2, a_3, a_4 son números complejos.

tomando

$$a_2 = a_{2r} + i a_{2i}$$

$$a_3 = a_{3r} + i a_{3i}$$

$$a_4 = a_{4r} + i a_{4i}$$

y haciendo

$$A(\xi, \tau) = e^{i\gamma\tau} A_1(\xi, \tau)$$

donde $\gamma = a_{2i}\lambda + a_{4i}|A_1|$, obtenemos:

$$A_{1\tau} - a_2 A_{\xi\xi} = \lambda a_{3r} A_1 + a_{4r} A_1 |A_1|^2$$

Si buscamos soluciones que no dependan de τ ni de ξ obtenemos que

$$|A_1|^2 = -\frac{a_{3r}\lambda}{a_{4r}} \qquad |A_1|^2 = 0$$

si queremos una solución real diferente de 0 tenemos que esta debe satisfacer

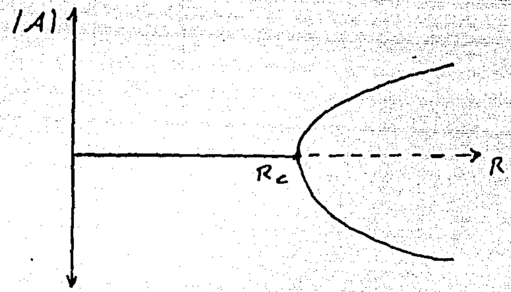
$$A_e^2 = -\frac{a_{3r}}{a_{4r}}\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}(R - R_c)$$

por lo tanto

$$A_e = \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{a_{3r}}{a_{4r}}(R - R_c)\right)^{\frac{1}{2}}$$

pero ahora como $a_{4r} < 0$ esta expresión tene sentido solo para $R > R_c$. Con el mismo análisis que en la sección anterior obtenemos que la solución A_e es estable, obetniédose el siguuiente diagrama de bifurcación.



donde nuevamente las líneas continuas representan soluciones estables y las ocultas soluciones inestables.

Así para el flujo sobre paredes flexibles después del número de Reynolds crítico las perturbaciones pasan a un estado de amplitud constante donde se mantienen estables.

B I B L I O G R A F I A

[1] BATCHELOR, G.K., An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. Gran Bretaña, 1967.

[2] BENJAMIN, B.T. Internal Waves of Permanent Form in Fluids of Great Depth. "J. Fluid Mech." (1967) vol. 29, parte 3, pp. 559-592.

[3] BOB PALAIS. Blowup For Nonlinear Equations Using a Comparison Principle in Fourier Space. "Communication on Pure and Applied Mathematics" (1988), vol. XLI pp. 165-196.

[4] CORCOS, G.M. y Lin, S.j., The Mixing layer: Deterministic Models of a Turbulent Flow. parte 1 y 2. de Introduction and the two- dimensional flow. "j. Fluid Mech." 139, Feb. 1984, pp. pp. 29-66. y 67-96

CORCOS y Sherman, F.S., The Mixing Layer: Deterministic Models of a Turbulent Flow. parte 3 The effect of plane strain on the Dynamics of Streamwise Vortices. "J. Fluid Mech." 141 Abril 1984, pp. 139-178

[5] DAVIES, S.J. y WHITE, 1928 Proc. Roy. y Soc A 119, 92-107

[6] DRAZIN y Red Hidrodynamic Stability, Cambrige University Press. Gran Bretaña 1981.

[7] MARSDEN, J.F. Y McCraken. The Hopf Bifurcation and Its Applications. Springe-Verlag Nueva York 1976.

[8] NEU, J.C. The Dynamics of Streched Vortices, "J. Fluid Mech. 143 Junio 1984, pp 253-276.

[9] ROTENBERRY, J.M. Effect of Compliant Boundaries on Weakly Nonlinear Shear Waves in Channel Flow. Ph D.Thesis, California

Institute of Technology. Pasadena California 1989.

[10] STEWARTSON, K. y Stuart. A Non-linear Instability Theory for a Waves System in Plane Poiseuille Flow. "J. Fluid Mech." (1971) vol. 48 parte 3, pp 529-545.

[11] TIJONOV, A. y Samarsky Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, Moscú 1983.

[12] VON MISES, R. y Friedrichs Fluids Dynamics. Springer-Verlay Nueva York 1971.

[13] WHITHAM, G.B., Linear and Nonlinear Waves. John Wiley & Sons 1974.